МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.В ПАРАХИНА»

Петрушина Н .Н., Уварова М. Н., Карнюшкина Т. В., Павлова Т. А.

ФОРМИРОВАНИЕ КОМПЕТЕНЦИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ИНТЕРНЕТ ЭКЗАМЕНА: УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ОРЕЛ 2021

УДК

Рецензенты:;

С.Ю. Гришина — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Инженерная графика и механика» Орловского государственного аграрного университета имени Н.В. Парахина

Авторы:

Директор Многопрофильного колледжа Петрушина Н.Н., доцент кафедры «Информационные технологии и математика» Орловский ГАУ, к.э.н. Уварова М.Н.; заместитель директора Многопрофильного колледж по учебной работе Карнюшкина Т.В., преподователь ОД «Математика, информатика и ИКТ» ФГКОУ Московское военное суворовское училище Министерства обороны Российской Федерации к.т.н. Павлова Т.А.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее методическое пособие предназначено в помощь студентам при подготовке к ежегодному интернет-экзамену и составлено в соответствии с программой по высшей математике.

Пособие содержит основные типы вопросов, встречающиеся в тестах, а также примеры тестовых заданий для различных специальностей и направлений подготовки бакалавров. Значительную часть пособия занимает краткий курс основных теоретических сведений по высшей математике, изучаемых в вузе: линейная и векторная алгебра; аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве; дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных; интегральное исчисление; дифференциальные уравнения и ряды; теория вероятностей и математическая статистика; элементы дискретной математики и теории графов. Данный материал необходим студенту при подготовке к интернет-тестированию и в значительной степени способствует закреплению изученного им курса.

Во второй части пособия подробно рассматриваются аспекты применения аналитической геометрии и математического анализа в экономике. Далее предусмотрен банк тренировочных заданий в тестовой форме для различных направлений подготовки специалистов и бакалавров.

В завершении приведён список литературы, используемой студентами при подготовке к интернет-экзамену.

Предлагаемое методическое пособие позволит студентам самостоятельно подготовиться к интернет-тестированию и систематизировать знания, полученные при изучении курса высшей математики в вузе.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОДДЕРЖКА

Участвуя в этом эксперименте, Вы можете оценить степень своей подготовки на соответствие требованиям государственного образовательного стандарта.

При подготовке к ФЭПО Вы можете ознакомиться со списком литературы и тезаурусом понятий по дисциплине, а также с процедурой проведения тестирования в режиме on-line (для вузов или для ссузов) и off-line.

Напоминаем, что

- каждому студенту для прохождения тестирования *по каждой дисциплине* выдается отдельный логин и пароль;
- полученные для тестирования логины и пароли можно использовать *только один раз*;
- сеанс тестирования отдельного студента считается завершённым *только* после нажатия кнопки “Завершить тестирование”;
- по истечению времени, отведённого на прохождение теста, сеанс тестирования завершается автоматически;
- в случае внештатного прерывания сеанса тестирования (перезагрузка компьютера, сбои в работе сети, отключение электроэнергии и т.п.) студент может продолжить тестирование, повторно введя свой логин и пароль.

Студенты должны иметь при себе:

1. Студенческий билет или зачетную книжку.
2. Ручку или карандаш.

ТИПЫ ВОПРОСОВ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ В ТЕСТАХ

Задания делятся на 3 типа, перед каждым ответом из предложенного набора стоит один из знаков: ○(◉ *здесь и далее в скобках показан выбранный вариант*), ☐ (☑) или ☐(1 2 3 4 5)

Знак ○предполагает выбор одного ответа из предложенных.

Например:
ЗАДАНИЕ N 9.
Следствием однородности времени является закон сохранения...
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:
○заряда
◉энергии
○массы
○импульса

Знак ☐ предполагает выбор нескольких ответов из предложенных.

Например:
ЗАДАНИЕ N 8.
В теории относительности Эйнштейна утверждается, что пространство и время:
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

☐ абсолютны
☑ существуют как единая четырехмерная структура
☐ существуют независимо друг от друга
☑ относительны

Знак ☐ предполагает указание последовательности или соответствия.

Первое нажатие левой кнопки мыши приводит к появлению цифры 1 в соответствующем квадратике. Второе нажатие – к появлению цифры 2 и т.д. Для изменения ответа необходимо повторно нажать на квадратик с цифрой 1.

Пример задания на последовательность:
<u>ЗАДАНИЕ N 5.</u>
Укажите правильную хронологию событий:
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:
[2] крещение Руси
[1] поход Олега на Киев
[3] разгром половцев в начале XII в.

Пример задания на соответствие:
<u>ЗАДАНИЕ N 22.</u>
Укажите правильное соответствие направления общественно-политической мысли и политической партии начала XX в.:
1) Революционно-демократическое
2) Либерально-оппозиционное
3) Консервативно-охранительное
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:
[3] «Союз русского народа»
[1] РСДРП(б)
[2] кадеты

ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

для различных специальностей

Финансы и кредит

<u>ЗАДАНИЕ N 11</u> *(выберите один вариант ответа*)

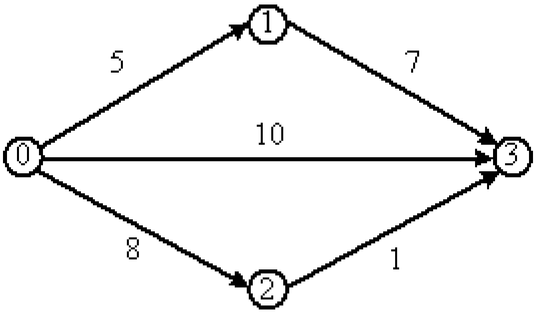
Материальная точка движется по закону $s = 4\sin^2 t$. Тогда ее ускорение в момент времени $t = 0$ равно…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)	8	**2)**	0
3)	4	**4)**	- 8

ЗАДАНИЕ N 34 (*выберите один вариант ответа*)

Для сетевого графика, изображенного на рисунке,



длина критического пути равна…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)	9	**2)**	31
3)	10	**4)**	12

Радиофизика

ЗАДАНИЕ N 21 (*выберите один вариант ответа*)

Гармонические колебания с амплитудой *A*, частотой ω и начальной фазой φ определяются уравнением…

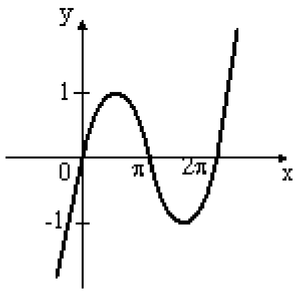
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

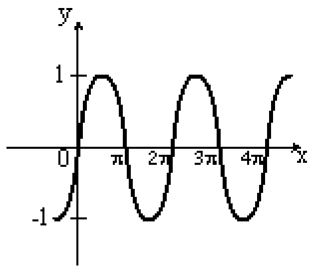
1)	$f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$	**2)**	$f(x) = A(\omega x + \varphi)^2$
3)	$f(x) = A\sqrt{\omega x + \varphi}$	**4)**	$f(x) = \dfrac{A}{(\omega x + \varphi)}$

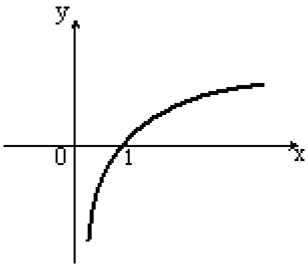
ЗАДАНИЕ N 22 (*выберите один вариант ответа*)

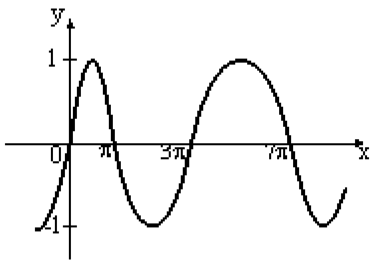
Укажите график периодической функции.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) 

2) 

3) 

4) 

<u>ЗАДАНИЕ N 33</u> (*выберите один вариант ответа)*

С первого станка на сборку поступает 40%, со второго 60% всех деталей. Среди деталей, поступивших с первого станка 1% бракованных, со второго 2% бракованных. Тогда вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная, равна …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)	0,03	**2)**	0,015
3)	0,016	**4)**	0,014

Радиофизика и электроника

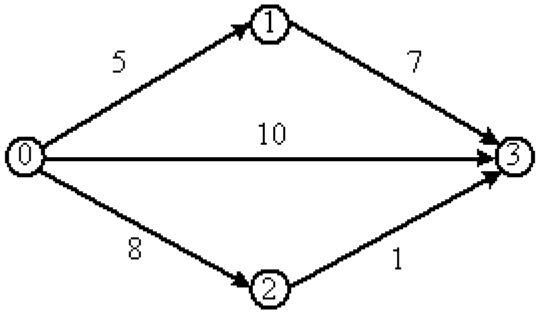
<u>ЗАДАНИЕ N 10</u> *(введите ответ*)

Две точки движутся по законам движения $S_1(t) = 9t^2 + 1$ и $S_2(t) = t^3$ ($t -$ время в секундах). Определите момент времени, начиная с которого скорость первой точки не превосходит скорости второй

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

Мировая экономика

ЗАДАНИЕ N 12 *(выберите один вариант ответа)*
Для сетевого графика, изображенного на рисунке,



длина критического пути равна…

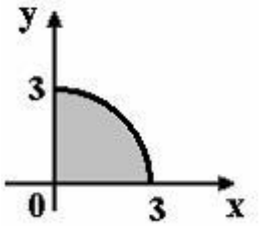
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)	9	**2)**	31
3)	10	**4)**	12

Технология обслуживания и ремонта машин в агропромышленном комплексе

ЗАДАНИЕ N 17 *(выберите один вариант ответа)*

Мера множества, изображенного на рисунке,



равна…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)	$\frac{9\pi}{4}$	**2)**	$\frac{3\pi}{4}$
3)	$\frac{9\pi}{2}$	**4)**	$\frac{\pi}{4}$

ЗАДАНИЕ N 18 *(- выберите варианты согласно тексту задания)*

Установите соответствие между промежутками и их образами при отображении $y = 3x - 1$.

1) $[1;2]$

2) $(1;2)$
3) $[-1;0]$
4) $(-1;0)$

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

A)	$(2;5)$	**B)**	$[-4;-1)$
C)	$[-4;-1]$	**D)**	$(2;5]$
E)	$[2;5]$	**F)**	$(-4;-1)$

Строительство + ПГС

ЗАДАНИЕ N 37 (*выберите один вариант ответа*)

Укажите правильную таблицу истинности логического высказывания $a \wedge b$ …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)

a	b	$a \wedge b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2)

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3)

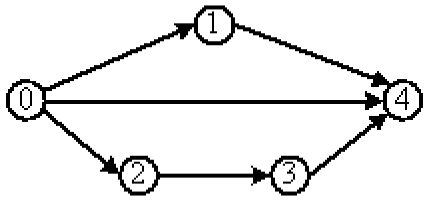
a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

ЗАДАНИЕ N 39 (*выберите один вариант ответа*)

Для ориентированного графа, изображенного на рисунке



полный путь может иметь вид …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)	$L: 2 \to 3 \to 4$	2)	$L: 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$
3)	$L: 0 \to 1 \to 4$	4)	$L: 0 \to 1 \to 3 \to 4$

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определители

А- квадратная матрица размера $n \times n$

Определитель первого порядка

1. $\Delta = |A| = \det A = \det(a_{11}) = a_{11}$

Определитель второго порядка

2. $\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} == a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Определитель третьего порядка

3.

$$\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Определитель n-го порядка

4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$ - разложение по первой строке

5. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ разложение по i-й строке

6. $\begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \dots & \grave{a}_{1n} \\ 0 & \grave{a}_{22} & \dots & \grave{a}_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \grave{a}_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdot....a_{nn}$ -определитель треугольной матрицы

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}

7. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$; i=1,2...n; j=1,2…n

M_{ij}- минор элемента a_{ij}- определитель n-1 –го порядка, получаемый из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца

Свойства определителей

8.Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, $\left|A^{\grave{O}}\right| = \left|\grave{A}\right|$

9.Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то $\Delta = 0$

10. Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то $\Delta = 0$

11.Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя пропорциональны (имеют общий множитель), то его можно вынести за знак определителя

12.Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя пропорциональны элементам другой строки (столбца), то $\Delta = 0$

13.Если в определителе переставить какие-либо две строки (столбца), то величина определителя поменяет знак: $\Delta_1 = -\Delta$

14.Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец), умноженную на одно и то же число, то величина определителя не изменится : $\Delta_1 = \Delta$

Решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными по формулам Крамера

15. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots\dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ - определитель, который составлен из коэффициентов системы, называется определителем системы. Вычисляем определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots\dots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots\dots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и т.д. до

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

16. $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; … ; $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$ - если определитель системы отличен от нуля, то она имеет единственное решение.

17. Если система однородна, то есть AX=0 , то $\tilde{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

Матрицы
Прямоугольные матрицы размера m×n

1.A $_{m\times n}$= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; a_{ij}- элемент i-й строки и j-го столбца

2.Матрица-строка: $\grave{A}_{1\times n} = (a_{11}a_{12}...a_{1n})$

3. Матрица-столбец: $A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

4.Если $m=n$, то матрицу называют квадратной порядка n, если $m\neq n$ – то прямоугольной.

5.Матрицы одинакового размера считаются равными, если они имеют равные соответствующие элементы. Пусть $A=(a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, тогда $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

6.Квадратная матрица называется диагональной, если она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В частности, при $a_{ij} =1$ $(i=1,2, \dots, n)$ такая матрица называется единичной и обозначается посредством E.

7.Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей и обозначается через Θ.

Квадратная матрица называется невырожденной, если соответствующий ей определитель отличен от нуля, и вырожденный – в противном случае.

Действия с матрицами

8.Сложение матриц. Эту операцию будем производить только с матрицами одинаковых размеров. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой образуются по формуле $c_{ij} = = a_{ij}+b_{ij}$.
9.Справедливы равенства:
$A+B = B+A$; $A+(B+C) = (A+B)+C$; $A+\Theta = A$.
10.Разностью двух матриц A и B называется такая матрица C, что $B+C = A$. Матрица C обозначается посредством A-B. очевидно, что соответствующие элементы матриц A, B, C связаны зависимостью: $c_{ij} = a_{ij}$- --b_{ij}.
11.Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число α называется матрица $\alpha \cdot A$, элементы которой получаются умножением всех элементов исходной матрицы на число α.
Из определения умножения матрицы на число и сложения матриц непосредственно вытекает следующие свойства этих операций:
$1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \theta$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) = \beta(\alpha \cdot A)$,
$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$, $\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.
12.Умножение матриц. Произведение $A \cdot B$ матрицы A на матрицу B определяется только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Пусть даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

произведением $A \cdot B$ называется матрица C, элементы которой C_{ij} образуются по правилу умножения i-той строки первой матрицы на j-й столбец второй:
$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.
При этом матрица C будет иметь размеры $m \times p$.

Решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом обратной матрицы

13. AX=B; A$\neq 0 \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nm} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix};$$

Ранг матрицы

14.Минором матрицы А $_{m\times n}$ порядка k называется определитель квадратной матрицы, содержащей элементы, стоящие на пересечении произвольных k строк и k столбцов матрицы. Рангом матрицы А $_{m\times n}$ называется число, равное наибольшему порядку отличных от нуля миноров матрицы

15. $0 \le rang(A) \le \min(m,n)$, где min (m,n) – наименьшее из чисел m и n

16. rang(A)=0 $\Leftrightarrow \grave{a}_{ij} = 0 \quad \forall i, j$

Теорема Кронекера-Капелли о совместности систем m линейных уравнений с n неизвестными

17. **AX=B** имеет решение $\Leftrightarrow$ rang(A)= rang(A/B)=r

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nm} \end{pmatrix}; \quad A/\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n}b_2 \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nm}b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix};$$

18.Если r=n , то решение системы единственно, если r<n , то решений бесконечно много.

19.Если система однородная, то есть **AX=0**, то: она совместна и имеет по крайней мере одно нулевое решение **X=0**, при r=n она имеет единственное нулевое решение **X=0**.

ВЕКТОРЫ
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Прямоугольные и полярные координаты точки на плоскости.

1. $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, 0 \le r < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi; -\pi < \varphi \le \pi \end{cases}$

2. r = $\sqrt{x^2 + y^2}$

3. $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r}; \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases}$

Прямоугольные и цилиндрические координаты точки в пространстве.

4. $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, 0 \le r < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z \le +\infty \end{cases}$

Прямоугольные и сферические координаты точки в пространстве.

5. $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta, 0 \le r < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\sin\theta, 0 \le r < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Проекция вектора $\vec{AB}$ с началом в точке A и концом в точке B на ось *u*.

7. Пр$_u \vec{AB}$ = $\left|\vec{\grave{A}\hat{A}}\right|\cos\varphi$**,** $\left|\vec{\grave{A}\hat{A}}\right|$ **- длина вектора,** φ - угол между направлением оси и вектором, $0 \le \varphi \le \pi$

Проекция вектора $\vec{AB}$ на оси прямоугольной системы координат OXYZ

8. A(x_1,y_1,z_1) ; B(x_2,y_2,z_2) ; Пр$_{OX}\vec{AB}$ =x_2-x_1; Пр$_{OY}\vec{AB}$ =y_2-y_1; Пр$_{OZ}\vec{AB}$ =z_2-z_1

Задание вектора в координатной форме

9. $\vec{AB}$ = (x_2-x_1; y_2-y_1 ; z_2-z_1)

Расстояние между двумя точками

10. $\left|\vec{\grave{A}\hat{A}}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Модуль (длина) вектора $\vec{a} = (x, y, z)$

11. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\left|\vec{a}\right| \ge 0$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (x, y, z)$

12. $\cos\alpha = \dfrac{x}{\left|\vec{a}\right|}$,$\cos\beta = \dfrac{ó}{\left|\vec{à}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{\left|\vec{a}\right|}$

13. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Единичный вектор $\vec{å}$

14. $\left|\vec{å}\right| = 1$

Нулевой вектор $\vec{0}$

15. $\vec{0}$ =(0,0,0,0); $\left|\vec{0}\right| = 0$; направление не определено

Вектор, противоположный вектору $\vec{a} = (x, y, z)$

16. **-**$\vec{a} = (-x, -y, -z)$; $\left|-\vec{à}\right| = \left|\vec{à}\right|$

Равенство векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

17. $\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\\ z_1=z_2\end{cases}$

Сложение и вычитание векторов $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

18. $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2)$

19. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2)$

20. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения)

21. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность сложения)

Вектора на число

22. $\alpha\vec{a}=\vec{a}\alpha=(\alpha.x_1,\alpha.y_1,\alpha.z_1)$

23. $\left|\alpha\vec{a}\right|=|\alpha|\cdot\left|\vec{a}\right|$

24. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (ассоциативность числовых множителей)

25. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (дистрибутивность числового множителя относительно суммы векторов)

26. $\vec{a}(\alpha+\beta)=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (дистрибутивность векторного сомножителя относительно суммы чисел)

Орты нулевого вектора

27. $\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=(\frac{x}{\left|\vec{a}\right|};\frac{y}{\left|\vec{a}\right|};\frac{z}{\left|\vec{a}\right|})=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, $\left|\vec{a}\right|\neq 0$

Признак коллинеарности двух ненулевых векторов

28. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\alpha\vec{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$, нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору

Линейная комбинация векторов

29. $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$

Линейная независимость системы ненулевых векторов

30. Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,....\vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация равна нулю только при условии равенства нулю всех коэффициентов: $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=....=\alpha_n=0$

Линейная зависимость системы векторов

31. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ... \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, хотя бы одно из которых не равно нулю, и выполняется равенство $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n = 0$

Связь коллинеарности и линейной зависимости двух векторов

32. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\, è\, \vec{b}$ линейно зависимы

33. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы

Разложение вектора по базису в пространстве

34. Базис $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ -упорядоченная совокупность трех линейно независимых векторов. Любой вектор можно представить в виде $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются координатами вектора в базисе

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

35. $\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} d_x = \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x \\ d_y = \alpha_1 a_y + \alpha_2 b_y + \alpha_3 c_y \\ d_z = \alpha_1 a_z + \alpha_2 b_z + \alpha_3 c_z \end{cases}$$

Разложение вектора по базису прямоугольной системы координат OXYZ

36. Базис $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$- упорядоченная совокупность трех попарно перпендикулярных единичных векторов. Любой вектор можно представить в виде $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ в системе координат OXYZ

$\vec{r} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = \alpha_{11} \vec{i} + \alpha_{12} \vec{j} + \alpha_{13} \vec{k} \\ \vec{j}_1 = \alpha_{12} \vec{i} + \alpha_{22} \vec{j} + \alpha_{23} \vec{k} \\ \vec{k}_1 = \alpha_{13} \vec{i} + \alpha_{32} \vec{j}_z + \alpha_{33} \vec{k} \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}y_1 + \alpha_{31}z_1 \\ y = y_0 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{32}z_1 \\ z = z_0 + \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}y_1 + \alpha_{33}z_1 \end{cases}$$

Преобразование координат на плоскости при параллельном переносе и повороте осей

37. Если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ в системе координат OXY, $\vec{r} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1$ в системе координат $O_1X_1Y_1$, $\overrightarrow{OO_1} = \tilde{o}_0\vec{i} + y_0\vec{j}$,

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \\ \vec{j}_1 = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$,то

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ y = y_0 + x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \end{cases}$$

Скалярное произведение двух векторов

38. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi; \varphi -$ угол между двумя векторами

39. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,Пр_a\,\vec{b} = |\vec{b}|\,Пр_b\,\vec{a}$

40. Пр$_a\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi;$ Пр$_b\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi;$

41. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность)

42. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (ассоциативность скалярного произведения относительно скалярного множителя)

43. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (дистрибутивность скалярного произведения относительно суммы векторов)

44. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2 \geq 0$ (скалярный квадрат)

45. $\vec{a}\vec{0} = \vec{0}\vec{b} = 0$

46. $\vec{a}\vec{e} = |\vec{a}|\cos\varphi = Пр_e\vec{a}$; $|\vec{\mathring{a}}| = 1$

Вычисление скалярного произведения в координатной форме

47. $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Угол между векторами

48. $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов

49. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$; нулевой вектор считается перпендикулярным любому вектору

50. Таблица скалярного умножения базисных прямоугольной декартовой системы координат:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Векторное произведение двух векторов

51. Вектор $\vec{\tilde{n}}$ называется векторным произведением двух векторов, $\overrightarrow{\tilde{n} = \grave{a} \times \vec{b}}$, если $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$; $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$; $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ образуют правую тройку.

52. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (антикоммутативность)

53. $(\alpha\,\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b})$ (ассоциативность векторного произведения относительно числового множителя)

54. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\overset{\uparrow}{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (дистрибутивность векторного произведения относительно суммы векторов)

55. $\vec{a}\times\vec{a} = 0$

56. $\vec{a}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{a} = \vec{0}$

Вычисление векторного произведения в координатной форме

57. $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k} \\ x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1)\,\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\,\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)$

58. Таблица векторного умножения базисных векторов прямоугольной декартовой системы координат:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Условие коллинеарности двух векторов

59. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$

60. Вычисление площади параллелограмма, построенного на двух векторах: S=$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

Смешанное произведение трех векторов

61. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

62. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}=-\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}=-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$

Вычисление смешанного произведения в координатной форме

63. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \vec{z_1} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ = $x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2$

64. Смешанное произведение трех базисных векторов прямоугольной декартовой системы координат: $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}=1$

Условие компланарности трех векторов

65. $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \vec{z_1} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$

66. Вычисление объема параллелепипеда, построенного на трех векторах: V=$\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$

Прямая на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданному вектору

1. $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$ - векторная форма, $\vec{n}=(A;B)\neq 0$

2. $\vec{r}\,\vec{n}+C=0$

3. $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – координатная форма

Общее уравнение прямой

4. $Ax+By+C=0$; $A^2+B^2\neq 0$

Неполные уравнение прямой

5. $A=0$, $B\Rightarrow\neq 0$ $By+C=0$-уравнение прямой, параллельной оси OX
6. $y=0$ – уравнение прямой, совпадающей с осью OX
7. $B=0$, $A\Rightarrow\neq 0$ $Ax+C=0$- уравнение прямой, параллельной оси OY
8. $x=0$ – уравнение прямой, совпадающей с осью OY
9. $C=0$, $Ax+By=0$- уравнение прямой, проходящей через начало координат

Нормальное уравнение прямой

10. $\vec{r}\,\vec{n}^0-\vec{p}=0$ - векторная форма
11. $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ - координатная форма

Уравнение прямой в полярных координатах

12. $r=\dfrac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

13. $y-y_0=k(x-x_0)$; $k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}; x_1\neq x_0$

14. $y=kx+b$; $k=\dfrac{y_1-b}{x_1}; x_1\neq 0$

    к=$\operatorname{tg}\varphi$ - тангенс между осью OX и прямой;

    $M_0(x_0;y_0)$; $M_1(x_1;y_1)$- точки, принадлежащие прямой

Уравнение прямой «в отрезках»

15. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1; a,b\neq 0$

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}=(s_1;s_2)\neq 0$

16. $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{s}\,t; -\infty<t<+\infty$ - векторная форма

17. $\begin{cases} x=x_0+s_1t \\ y=y_0+s_2t \end{cases}; -\infty<t<+\infty$ - координатная форма;

    $S_1=0\Rightarrow x=x_0$ (уравнение прямой, параллельной оси ОУ);

    $S_2=0\Rightarrow y=y_0$ (уравнение прямой, параллельной оси OX)

Каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}=(s_1;s_2)\neq 0$

18. $\dfrac{x-x_0}{s_1}=\dfrac{y-y_0}{s_2}$ ($s_1=0\Rightarrow x=x_0;$ $s_2=0\Rightarrow y=y_0;$)

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ $M_2(x_2;y_2)$

19. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

20. $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$

21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}=0$

Угол между двумя прямыми

22. L_1: $\vec{r}\,\vec{n}+C_1=0; L_2: \vec{r}\,\vec{n}_2+C_2=0\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

23. $L_1\uparrow\uparrow L_2; \vec{n}_1\uparrow\uparrow\vec{n}_2\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ –условие параллельности

24. $L_1\perp L_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\vec{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ - условие перпендикулярности

25. $L_1:\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{s}_1t;$ $L_2:\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{s}_2t;\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

26. $L_1\uparrow\uparrow L_2; \vec{s}_1\uparrow\uparrow\vec{s}_2$ - условие параллельности

27. $L_1\perp L_2\Leftrightarrow\vec{s}_1\vec{s}_2=0$ -условие перпендикулярности

28. $L_1: y=k_1x+b_1;$ $L_2: y=k_2x+b_2\Rightarrow tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$

29. $L_1\uparrow\uparrow L_2\Rightarrow k_1=k_2$ - условие параллельности

30. $L_1\perp L_2\Leftrightarrow k_2=\dfrac{-1}{k_2}$ - условие перпендикулярности

Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1)$ до прямой

31. $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

32. $d=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|$

Расстояние от начала координат до прямой

33. $d = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

34. $d = |-p|$

Условие пересечения двух прямых и координаты точки пересечения

35. $L_1 : A_1 x + By_{1;} + C_1 = 0$, $L_2 : A_2 x + By_{2;} + C_2 = 0$

Если $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то прямые пересекаются в одной точке с координатами

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$

Условие совпадения двух прямых

36. $L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;\ L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$ Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то уравнения определяют одну и ту же прямую.

Условие принадлежности трех заданных точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ $C(x_3;y_3)$ одной прямой

37. A,B,C$\in L \Leftrightarrow \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$

38. A,B,C$\in L \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 111 \\ x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \end{vmatrix} = 0$

Плоскость в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0,z_0)$ перпендикулярно заданному вектору

1. $(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{n} = 0$ - векторная форма, $\vec{n} = (A, B, C) \neq 0$
2. $\vec{r}\,\vec{n} + D = 0$
3. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$- координатная форма

Общее уравнение плоскости

4. Ax+By+Cz+D=0

Неполные уравнения плоскости

5. A=0$\Rightarrow By + \tilde{N}z + D = 0$- уравнение плоскости, параллельной оси OX
6. B=0$\Rightarrow Ax + \tilde{N}z + D = 0$- уравнение плоскости, параллельной оси OY
7. C=0 $\Rightarrow Ax + By + D = 0$- уравнение плоскости, параллельной оси Z
8. $A = B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0$- уравнение плоскости, параллельной плоскости OXY
9. z=0- уравнение плоскости, совпадающей с плоскостью OXY
10. $\tilde{N} = B = 0 \Rightarrow Ax + D = 0$- уравнение плоскости, параллельной плоскости OYZ
11. x=0- уравнение плоскости, совпадающей с плоскостью OYZ
12. $A = C = 0 \Rightarrow By + D = 0$- уравнение плоскости, параллельной плоскости OXZ

13. y=0- уравнение плоскости, совпадающей с плоскостью OXZ
14. D=0$\Rightarrow$Ax+By+Cz=0 – уравнение плоскости, проходящей через начало координат

Нормальное уравнение плоскости

15. $\vec{r}\,\vec{n}^0 - \vec{p} = 0$- векторная форма
16. x$\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$-координатная форма

Уравнение плоскости «в отрезках»

17. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; a,b,c \neq 0$

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой

18. $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до плоскости

19.P:Ax+By+Cz+D=0$\Rightarrow d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

20. $d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\lambda - p|$

Угол между двумя плоскостями

21. $P_i : \vec{r}\,\vec{n}_i + D_i = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\,\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

22. $P_1 \uparrow\uparrow P_2; \vec{n}_1 \uparrow\uparrow \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - условие параллельности

23. $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\,\vec{n}_2 = 0 \ \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ -условие перпендикулярности

Прямая в пространстве

Параметрические уравнения прямой в пространстве, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s} = (s_1; s_2; s_3) \neq 0$

24. $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}\,t$ - векторная форма; $-\infty < t < +\infty$

25. $\begin{cases} x = x_0 + s_1 t \\ y = y_0 + s_2 t \\ z = z_0 + s_3 t \end{cases}$ -координатная форма; $-\infty < t < +\infty$

Канонические уравнения прямой в пространстве

26. $\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}$ (s_1=0$\Rightarrow x = x_0$; s_2=0$\Rightarrow y = y_0$; s_3=0$\Rightarrow z = z_0$;)

Уравнение прямой в пространстве, проходящее через две различные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$

27. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Угол между прямой L и плоскостью P

28. $L:\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{s}\,t$; $P:\vec{r}\,\vec{n}+D=0\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{\vec{n}\,\vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|}$

29. $L\uparrow\uparrow P\Leftrightarrow\vec{s}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{n}\,\vec{s}=0$ - условие параллельности прямой и плоскости

30. $L\perp P\Leftrightarrow\vec{s}\uparrow\uparrow\vec{n}\Leftrightarrow\vec{n}\times\vec{s}=0$ - условие перпендикулярности прямой и плоскости

Задание прямой в пространстве как линии пересечения двух непараллельных плоскостей

31. $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

$\vec{n}\times\vec{s}\neq 0$

Уравнения некоторых кривых на плоскости

Уравнения кривых 2-го порядка

Эллипс

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое уравнение эллипса
2. $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ - эксцентриситет эллипса
3. $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases};0\le t\le 2\pi$ - уравнение эллипса в параметрической форме
4. $r=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$ - уравнение эллипса в полярных координатах

Окружность

5. $x^2+y^2=R^2$ - уравнение окружности с центром в начале координат
6. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ - уравнение окружности с центром в точке (x_0,y_0)
7. $y=y_0\pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ - уравнение верхней (+) и нижней (-) полуокружности с центром в точке (x_0,y_0)

8. e=0 – эксцентриситет окружности
9. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ - вырожденная окружность (точка (x_0,y_0))

10. $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}; 0 \le t \le 2\pi$ - уравнение окружности с центром в начале координат в параметрической форме

11. $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}; 0 \le t \le 2\pi$ уравнение окружности с центром в точке (x_0,y_0) в параметрической форме

12.r=R- уравнение окружности с центром в начале координат в полярных координатах

13. r=2Rsinφ - уравнение окружности с центром в точке (0;R) в полярных координатах

14. r=2Rcosφ - уравнение окружности с центром в точке (R;0) в полярных координатах

Гипербола

15. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$- каноническое уравнение гиперболы

16. $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ - эксцентриситет гиперболы

17. $r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$ - уравнение одной ветки гиперболы в полярных координатах

18. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$- две пересекающиеся прямые

Парабола

19. y^2=2px – каноническое уравнение параболы

20. $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$ уравнение параболы в полярных координатах

Уравнения некоторых замечательных кривых

Архимедова спираль

21. $r = a\varphi$

Астроида

22. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$

23. $\begin{cases} x = R\cos^3 \frac{t}{4} \\ y = R\sin^3 \frac{t}{4} \end{cases}$

Декартов лист

24. $x^3 + y^3 = 3axy$

25. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

26. $r=\dfrac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$

Улитка Паскаля

27. $(x^2+y^2-2ax)^2=l^2(x^2+y^2)$

28. $\begin{cases} x=a\cos^2 t+l\cos t \\ y=a\sin t\cos t+l\sin t \end{cases}$

29. $r=2a\cos\varphi\pm l$

Кардиоида

30. $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$

31. $\begin{cases} x=2a\cos\ t-a\cos 2t \\ y=2a\sin t-a\sin 2t \end{cases}$

32. $r=2a(1-\cos\varphi)$

Конхоида Никомеда

33. $(x^2+y^2)(y-a)^2=l^2y^2$

34. $r=\dfrac{a}{\sin\ \varphi}\pm l$

Лемниската Бернулли

35. $r^2=2a^2\cos 2\varphi$

Локон Аньези

36. $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$

Циклоида

37. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

Эпициклоиды

38. $\begin{cases} x=(R+r)\tilde{n}os\dfrac{r}{R}t-r\cos(t+\dfrac{r}{R}t) \\ y=(R+r)\sin\dfrac{r}{R}t-r\sin(t+\dfrac{r}{R}t) \end{cases}$

Эпитрохоиды

39. $\begin{cases} x=(R+r)\tilde{n}os\dfrac{r}{R}t-h\cos(t+\dfrac{r}{R}t) \\ y=(R+r)\sin\dfrac{r}{R}t-h\sin(t+\dfrac{r}{R}t) \end{cases}$

Розы

40. $\begin{cases} x=(R+r)\tilde{n}os\dfrac{r}{R}t-h\cos(t+\dfrac{r}{R}t) \\ y=(R+r)\sin\dfrac{r}{R}t-h\sin(t+\dfrac{r}{R}t) \end{cases};h=R+r$

41. $r=a\sin k\varphi$

Гипоциклоиды

42. $\begin{cases} x = (R-r)\tilde{n}os\dfrac{r}{R}t + r\cos(t - \dfrac{r}{R}t) \\ y = (R-r)\sin\dfrac{r}{R}t - r\sin(t - \dfrac{r}{R}t) \end{cases}$

Гипотрохоиды

43. $\begin{cases} x = (R-r)\tilde{n}os\dfrac{r}{R}t + h\cos(t - \dfrac{r}{R}t) \\ y = (R-r)\sin\dfrac{r}{R}t - h\sin(t - \dfrac{r}{R}t) \end{cases}$

Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка

Эллипсоид

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ - сфера

Однополостный гиперболоид

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Двуполостный гиперболоид

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$

Конус второго порядка

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

Эллиптический параболоид

6. $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Гиперболический параболоид

7. $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

Эллиптический цилиндр

8. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Гиперболический цилиндр

9. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Параболический цилиндр

10. $y^2 = 2px$

Пара пересекающихся плоскостей

11. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2}{ñ^2}=0$

Пара параллельных плоскостей

12. $\frac{x_2}{a^2}=1$

Пределы и непрерывность

Предел числовой последовательности

1.Число а называется пределом (конечным пределом) последовательности $\{x_n\}$=x1,x2,x3,…..xn,…, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N=N(\varepsilon):\forall n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$

2.Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, то если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N:\forall n>N\Rightarrow|\alpha_n|<\varepsilon$

3.Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N:\forall n>N\Rightarrow|x_n|>E$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N:\forall n>N\Rightarrow x_n>E$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N:\forall n>N\Rightarrow x_n<-E$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$ x_n=a+α; $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$; $\alpha_n\neq0\ \ \forall n\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)=\infty$

Свойства сходящихся последовательностей

8. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ (предел суммы и разности)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ (предел произведения)

10. $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n)=\mathrm{c}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$; с- постоянная

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$; $y_n\neq0\forall n$; $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$ (предел дроби)

12.Передельный переход в неравенстве:
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$=a; $x_n\le z_n\le y_n\ \ \forall n;\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}z_n$=a

Сходимость монотонной и ограниченной последовательности

13.Если последовательность $\{x_n\}$ не убывает ($x_n\le x_{n+1}\ \forall n$)
и ограничена сверху ($\exists M:x_n\le M\ \ \forall n$), то она сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$=a$\le M$

14.Если последовательность $\{x_n\}$ не возрастает ($x_n\ge x_{n+1}\forall n$) и ограничена с низу ($\exists m:x_n\ge m\ \forall n$), то она сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$=a$\ge m$

Дифференциал функции

1) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ - приращение функции

2) Если $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где А – число, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$, то функцию называют дифференцируемой в точке

3) $f'(x)$ существует и конечна $\Leftrightarrow$ $f(x)$ дифференцируема

4) $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ - дифференциал функции

5) $dx = \Delta x$

6) $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$

7) $d(u \pm v) = du \pm dv$

8) $d(uv) = udv + vdu$

9) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}; v \neq 0$

10) Инвариантность формы дифференциала первого порядка: если $y = f(u); u = \varphi(x)$, то $dy = y'_x dx = y'_u u'_x dx = y'_u du$

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

11) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Дифференциалы высших порядков

12) $dy = dy = f'(x)dx$

13) $d^2 y = d(dy) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2; dx^2 \equiv (dx)^2$

14) $d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n; dx^n \equiv (dx)^n$

Выражение производных через дифференциалы

15) $y' = \frac{dy}{dx}; y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}; \ldots; y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$

Неопределенный интеграл

Первообразная

1) F(x) называется первообразной для f(x) на заданном промежутке, если $\exists F'(x)$ и $F'(x)=f(x)$

Неопределенный интеграл

2) $\int f(x)dx = F(x)+C;$ C – произвольная постоянная

Свойства неопределенного интеграла

3) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

4) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

5) $\int F'(x)dx = F(x)+C$

6) $\int dF(x) = F(x)+C$

7) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx; A\neq 0$

8) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица интегралов

9) $\int 0dx = C$

10) $\int 1dx = \int dx = x+C$

11) $\int (ax+b)dx = \frac{a}{2}x^2 + bx + C$

12) $\int \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n\right)dx = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + ... + a_nx + C$

13) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha\in R; \alpha\neq -1$

14) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

15) $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$

16) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$

17) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$

18) $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

19) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

20) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

21) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$

23) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

24) $\int e^x dx = e^x + C$

25) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

26) $\int \cos x dx = \sin x + C$

27) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$

28) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$

29) $\int shxdx = chx + C$

30) $\int chxdx = shx + C$

31) $\int \frac{1}{sh^2 x}dx = -cthx + C$

32) $\int \frac{1}{ch^2 x}dx = thx + C$

Метод интегрирования с помощью замены переменной

33) Метод подведения под знак дифференциала:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(u)du\Big|_{u=\varphi(x)}$$

34) $\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$

35) $\int f(x)dx\Big|_{t=\varphi(x)} = \int f\left(\varphi^{-1}(t)\right)\left(\varphi^{-1}(t)\right)' dt\Big|_{t=\varphi(x)}$

Метод интегрирования по частям

36) $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$

37) $\int udv = uv - \int vdu$

Интегрирование рациональных дробей

38) $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int S_{m-n}(x) dx + \int \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}; m \ge n; l < n;$

$P_m(x); Q_n(x); S_{m-n}(x); R_l(x)$ - многочлены. $\int \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}$

Сводится к сумме интегралов от простейших рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

Интегрирование простейших рациональных дробей

39) Простейшая дробь 1-го типа: $\int \frac{A}{x-a} dx = A\ln|x-a| + C$

40) Простейшая дробь 2-го типа: $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C; n \in \mathrm{N}; n \ge 2$

41) Простейшая дробь 3-го типа: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{At}{t^2+a^2} dt + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{t^2+a^2} dt;$

$p^2 - 4q < 0; t = x + \frac{p}{2}; a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$

42) Простейшая дробь 4-го типа:

$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = A\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(B - \frac{pA}{2}\right)\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n};$

$n \in \mathrm{N}; n \ge 2; p^2 - 4q < 0; t = x + \frac{p}{2}; a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$

43) $\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C; n \ge 2$

44) $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}; n \ge 2$

Интегралы от некоторых рациональных дробей

45) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

46) $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

47) $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$

48) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C; a \ne b$

49) $\int \frac{xdx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(a\ln|x+a| - b\ln|x+b|\right) + C; a \ne b$

50) $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$

51) $\int \frac{x^2}{x^2+a^2}dx = x - a\cdot arctg\frac{x}{a} + C$

52) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C$

$b^2-4ac>0$

53) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C; b^2-4ac<0$

54) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = -\frac{2}{2ax+b} + C; b^2-4ac=0$

55) $\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} + C$

56) $\int \frac{1}{x^3+a^3}dx = \frac{1}{6a^2}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}arctg\frac{2x-a}{a\sqrt{3}} + C$

57) $\int \frac{x}{x^3+a^3}dx = \frac{1}{6a}\ln\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}arctg\frac{2x-a}{a\sqrt{3}} + C$

58) $\int \frac{x^2}{x^3+a^3}dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+a^3\right| + C$

59) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + C$

60) $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} + C$

61) $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\cdot arctg\frac{x}{a} + C$

62) $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^2}dx = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

63) $\int \frac{x}{(x^2-a^2)^2}dx = \frac{1}{2(a^2-x^2)} + C$

64) $\int \frac{x^2}{(x^2-a^2)^2}dx = \frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

Интегралы от некоторых иррациональных функций

65) $\int \sqrt{ax+b}dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3} + C$

66) $\int x\sqrt{ax+b}dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3} + C$

67) $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$

68) $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C$

69) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

70) $\int x\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}+C$

71) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

72) $\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

Интегралы от некоторых показательных и логарифмических функции

73) $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$

74) $\int xe^x dx = e^x(x-1)+C$

75) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx + C$

76) $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

77) $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

78) $\int \ln x dx = x(\ln x - 1)+C$

79) $\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

80) $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx + C$; $n \neq -1$

81) $\int x\ln x dx = x^2\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\right)+C$

82) $\int x^n x dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+C$

Интеграл от некоторых тригонометрических функций

83) $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x + C$

84) $\int \sin^3 x dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

85) $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx + C$

86) $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$

87) $\int \frac{1}{\sin^n x}dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{1}{\sin^{n-2} x}dx + C$

88) $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x + C$

89) $\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

90) $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx + C$

91) $\int \frac{1}{\cos^3 x}dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

92) $\int \frac{1}{\cos^n x}dx = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\cos^{n-2} x}dx + C$

93) $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C; m^2 \neq n^2$

94) $\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C; m^2 \neq n^2$

95) $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C; m^2 \neq n^2$

96) $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{b\sin x - a\cos x + \sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x + b\cos x}\right| + C$

97) $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

98) $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

99) $\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

100) $\int \arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

101) $\int arctgx dx = xarctgx - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

102) $\int arcctgx dx = xarcctgx + \ln\sqrt{1+x^2} + C$

Определенный интеграл

Связь определенного и неопределенного интеграла

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция

$\int_a^x f(t)dt$ - одна из первообразных для $f(x)$, то есть

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x); x \in [a;b]$$

2) $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C; x \in [a;b]; C$ - произвольная постоянная

Формула Ньютона-Лейбница

3) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Свойства определенного интеграла

4) $\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a$

5) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

6) $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$

7) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (аддитивность)

8) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx; A$ - постоянная

9) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

10) Если $f(x)$ - четная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$

11) Если $f(x)$ - нечетная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$

Оценки значения определенного интеграла (a<b)

12) $f(x) \geq 0; a \leq x \leq b \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$

13) $f(x) \leq g(x); a \leq x \leq b \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

14) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

15) $m \leq f(x) \leq M; a \leq x \leq b \Rightarrow m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

16) Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$\exists c \in (a;b): \int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ (теорема о среднем)

Метод интегрирования с помощью замены переменной

17) $\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

18) $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Метод интегрирования по частям

19) $\int\limits_a^b u(x)u'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$

20) $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Вычисление площадей, длин дуг и объемов с помощью определенного интеграла

21) Вычисление площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $f(x)$, $f(x) \geq 0; a \leq x \leq b,$ и прямыми $x = a; x = b; y = 0 : S = \int_a^b f(x)dx$

22) Вычисление площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, заданной в параметрической форме $x = \varphi(t); y = \psi(t); \alpha \leq t \leq \beta : S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$

23) Вычисление площади криволинейного сектора, ограниченного графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha; \varphi = \beta; 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$ (в полярных координатах):
$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

24) Вычисление длины дуги кривой, заданной непрерывной функцией $f(x)$, имеющей непрерывную производную, $a \leq x \leq b$:
$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$

25) Вычисление длины дуги кривой, заданной функцией в параметрической форме $x = \varphi(t); y = \psi(t); \alpha \leq t \leq \beta$:
$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$

26) Вычисление длины дуги кривой, заданной функцией $r = r(\varphi)$, имеющей непрерывную производную в области определения $\alpha \leq \varphi \leq \beta : L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$

27) Вычисление объема тела вращения, образованного криволинейной трапецией, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x); a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a; x = b$ при вращении вокруг оси OX:
$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

28) Вычисление объема тела через площадь поперечного сечения $S(x)$, перпендикулярного оси OX: $V = \int_a^b S(x)dx$

29) Вычисление площади поверхности тела вращения, образованного графиком непрерывной, имеющей непрерывную производную, неотрицательной функции $f(x)$ при вращении вокруг оси OX в области определения $a \le x \le b$:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

30) Вычисление площади поверхности тела вращения, образованного графиком функции, заданной в параметрической форме $x=\varphi(t); y=\psi(t); \psi(t)\ge 0 \alpha \le t \le \beta : S = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

31) вычисление площади поверхности тела вращения, образованного графиком непрерывной, имеющей непрерывную производную, функции $r = r(\varphi)$ в области определения $\alpha \le \varphi \le \beta$, при вращении вокруг оси OX: $S = 2\pi\int_a^b r(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$

Несобственные интегралы

Несобственные интегралы 1-го рода

Если $f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$, то несобственным интегралом по бесконечному промежутку называют

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}F(B) - F(a)$$

2) Если $f(x)$ непрерывна при $-\infty < x \le b$, то

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx = F(b) - \lim_{A\to-\infty}F(A)$$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \forall c; c \in R$

4) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$. При $\alpha > 1$ интеграл существует (сходится), при $\alpha \le 1$ интеграл расходится

5) признак сходимости и расходимости несобственных интегралов 1-го рода (признак сравнения): если $0 \le f(x) \le g(x)$ при $a \le x < +\infty$, то из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

Несобственные интегралы 2-го рода

6) Если $f(x)$ непрерывна при $a \le x < b$, $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$, то несобственным интегралом от разрывной функции называют

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$$

7) Если $f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^b f(x)dx$

8) Если $f(x)$ непрерывна при $a \le x \le b$, кроме точки $x = c; \lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty,$ то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

9) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx.$ При $0 < \alpha < 1$ интеграл существует (сходится), при $\alpha \ge 1$ интеграл расходится

10) Признак сходимости и расходимости несобственных интегралов 2-го рода (признак сравнения): если $0 \le f(x) \le g(x)$ при $a \le x < b, \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$, то из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$, из расходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x)dx$

Гамма-функция

11) $\Gamma(ч) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt -$ сходится при $x>0$

12) $\Gamma(x) > 0; \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ при $x > 0$

13) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \Gamma(1) = 1; \Gamma(n+1) = n!; n \in \mathrm{N}$

Значения некоторых несобственных интегралов

14) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$

15) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$

16) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$

17) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$

18) $\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}; a > 0$

19) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}; a > 0$

20) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin nx dx = \frac{n}{a^2+n^2}; a > 0$

Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Частная производная функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_k в точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$

1) $\frac{\partial f}{\partial x_k} = u'_{x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ... x_n)}{\Delta x_k}$

Производная функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по направлению $\vec{l}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$

2) $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

Частные производные функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ высшего порядка

3) $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}; \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$;... и т.д.

4) $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1{}^3}; \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1{}^2 \partial x_2}$;... и т.д.

5) $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1{}^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^n}; \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1{}^{n-2} \partial x_2}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^{n-1} \partial x_2}$;... и т.д.

Полная производная сложной функции

6) $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$**,** $x_i = \varphi_i(t)$**;**

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{d\varphi_n}{dt}$$

Числовые и степенные ряды

Числовые ряды

1 Выражение вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ называется числовым рядом

Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды

2. $S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k = a_x + a_2 + \ldots + a_n$ — частичная сумма ряда.

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, а S — суммой ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ бесконечен или не существует, то ряд называется расходящимся

Свойства сходящихся числовых рядов

3. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1+k}^{\infty} a_n$ сходится

4. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = cS$; c —постоянная

5. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$

Необходимое условие сходимости числового ряда

6. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Достаточное условие расходимости числового ряда

7. Если не выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

Знакопостоянные числовые ряды. Достаточные признаки сходимости и расходимости

8. Первый признак сравнения: если $0 \le a_n \le b_n$ $\forall n \in N$, то: из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

9. Второй (предельный) признак сравнения:

если $a_n \geq 0$; $b_k > 0$ $\forall n, k \in N$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$; $0 < l < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, или оба сходятся или оба расходятся.

10. Признак Даламбера: если $a_n >$ $\forall n \in N$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $l > 1$ ряд расходится

11. Радикальный признак Коши: если $a_n \leq 0$ $\forall n \in N$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l <$ 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $l > 1$ ряд расходится

12. Интегральный признак Коши: если f(x) — неотрицательная невозрастающая непрерывная функция при $x \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно

13. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\alpha}}$ при $\alpha \leq 1$ расходится, при $\alpha > 1$ сходится

14. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ расходится

15. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots$ сходится

Знакопеременные и знакочередующиеся числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость

16. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ = | a_1 | + | a_2 | +...+ | a_n| +... сходится, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}a_i$ = a_1 +a_2 +... + a_n +... также сходится и называется абсолютно сходящимся. Исследование ряда на абсолютную сходимость производится с помощью признаков сходимости знакопостоянных рядов

17. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется условно (не абсолютно) сходящимся

18. Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница): если $b_n \geq 0\, \forall n$; $b_n \geq b_{n+1}\ \forall n$; $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ сходится (тип сходимости исследуется дополнительно)

19. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots$ сходится условно

20. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\dots$ сходится абсолютно

21. Оценка суммы сходящегося знакочередующегося ряда: если

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = S, \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k = S_n$, то $|S_n - S| \leq b_{n+1}$

Степенные ряды

22. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$

23. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ = c ≥ 0, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится в интервале $|x-x_0|<R;\ R=\frac{1}{c}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ называется радиусом сходимости.

Сходимость при $x = x_0 \pm R$ исследуется дополнительно. Если $R = +\infty$, то интервал сходимости $(-\infty; +\infty)$

24. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ = c > 0 , то $R=\frac{1}{c}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Сложение и умножение степенных рядов ($|x- x_o|< R$; R — наименьший из радиусов сходимости заданных рядов)

25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$

26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c(x-x_0)^n$;

$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$

Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

27. $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$; $|x-x_0|<R \Rightarrow S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}; |x-x_0| < R$

28. $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$; $|x-x_0|<R \Rightarrow \int S(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}; |x-x_0| < R$

Разложения функций в степенные ряды

29. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ – ряд Тейлора

30. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ – ряд Маклорена

31. $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ...;$

$\alpha \notin N;$ $|x|<1$

32. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...;$ $|x|<1$

33. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - ...;$ $|x|<1$

34. $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - ...;$ $|x|<1$

35. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - ...;$ $|x|<1$

36. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...;$ $-\infty < x < +\infty$

37. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ..;$ $-1 < x \le 1$

38. $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...;$ $-\infty < x < +\infty$

39. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ...;$ $-\infty < x < +\infty$

40. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} ...;$ $|x| < \frac{\pi}{2}$

41. $\arcsin x = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} ...; \ |x| < \frac{\pi}{2}$

42. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - (x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} ...); |x| < \mathbf{1}$

43. $\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...; \ |x| < \mathbf{1}$

44. $\mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - ...); \ |x| < \mathbf{1}$

Значения сумм некоторых числовых рядов

45. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 2$

46. $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + ... = \frac{1}{9}$

47. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ... = 1$

48. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + ... = \frac{1}{2}$

49. $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + ... = e$

50. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \ln 2$

51. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}$

52. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi}{6}$

53. $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+...=\sin 1$

Тригонометрические ряды Фурье

1. Если *2l* — периодическая функция *f(x)* и производная *f'(x)* на отрезке [-*l*; *l*] непрерывны или имеют конечное число точек разрыва 1-го рода, то *f(x)* раскладывается в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+bk\sin\frac{k\pi x}{l}\right);\ a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_к=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx;\ k\in N;\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;\ k\in N;$$

Сумма ряда равна значению *f*(x) в каждой точке непрерывности и значению $\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_i-0}f(x)+\lim_{x\to x_i+0}f(x)\right)$ в точках разрыва x_i

2. Если *f*(x) четная, то $f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l};\ a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx;$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx;\ k\in N;$$

3. Если *f*(x) нечетная, то $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right);\ b_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;\ k\in N;$

4. Если $l=\pi$, то $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx);\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx;\ k\in N;\ \ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx;\ k\in N;$$

Разложения некоторых функций в ряд Фурье

5. Если $f(x)=\begin{cases} -1; & -\pi < \mathbf{x} < \mathbf{0} \\ +1; & 0 < \mathbf{x} < \pi \end{cases}$, то $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

6. Если $f(x) = x$; $-\pi < x < \pi$, то $f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{kx}$

7. Если $f(x) = |x|$; $-\pi < x < \pi$, то $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$

Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

$F(x, y, y')=0$ – общий вид

$M(x,y)dx+N(x, y)dy=0$ – дифференциальная форма

$y'=f(x, y)$ – уравнение, разрешенное относительно производной

Задача Коши (задача с начальным условием): $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Дифференциальное уравнение с разделенными переменными

5. $F(x)dx+g(x)dy=0.$ $\int f(x)dx + \int g(y)dy=C$ - общий интеграл

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

6. $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0;$ $f_2(x)g_1(y)\neq 0$

$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$ – общий интеграл

7. $y'=f(x)g(y);$ $g(y)\neq 0.$ $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ - общий интеграл

Дифференциальное уравнение, однородное относительно аргумента и функции

8. $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0;$

$M(tx, ty)=t^nM(x, y);$ $N(tx,ty)=t^nN(x, y);$ $\forall t, t > 0.$

Решается методом замены переменной

$z(x)=\frac{y}{x};$ $y=zx;$ $dy=zdx+xdz$ и сведением к уравнению с разделяющимися переменными

$M(1, z)dx+N(1, z)(xdz+zdx)=0$

9. $y'=f(x, y)$; $f(tx, ty)=f(x, y)$; $\nabla t, t > 0$.

$z(x)=\frac{y}{x}$; $y=zx$; $y'=z+xz'$; $z+xz'=f(1, z(x))$

10. $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$; $z(x)=\frac{y}{x}$; $y=zx$; $y'=z+xz'$; $z+xz'=f(z)$

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

11. $y'(x)+p(x)y(x)=0$ – однородное линейное уравнение.
$y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$ – общее решение
12. $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$ – неоднородное линейное уравнение.
$y'(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$ - общее решении

Уравнение Бернулли

13. $Y'(x)+p(x)y(x)=y^{\alpha}q(x)$; $\alpha\neq 0$; $\alpha\neq 1$. Решается методом замены переменной $z(x)=y^{1-\alpha}$ и сведением к линейному уравнению
$z'(x)+(1-\alpha)p(x)z(x)=(1-\alpha)q(x)$

Уравнение в полных дифференциалах

14. $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$; $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.
$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx+N(x,y)dy=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy=C$ – общий интеграл.

Дифференциальные уравнения *n*-го порядка.

Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

15. $y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$
16. Характеристическое уравнение: $k^2+pk+q=0$; k_1; k_2 - корни характеристического уравнения
17. Случай различных действительных корней k_1; k_2 :
$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$ – общее решение
18. Случай кратного действительного корня $k=k_1=k_2$:
$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$ – общее решение
19. Случай пары комплексных сопряженных корней $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$:
$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ – общее решение

Линейное однородное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

20. $y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+...+p_ny(x)=0$
21. Характеристическое уравнение:
$k^n+p_1k^{n-1}+\ldots+p_n=0$; $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – корни характеристического уравнения

22. Общее решение: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, где $y_1(x)$; $y_2(x)$; …; $y_n(x)$ – совокупность линейно независимых частных решений, соответствующих корням характеристического уравнения, C_i – произвольные постоянные

Правило нахождения частных решений:

23. Если k – простой действительный корень, то получаем одно частное решение $y=e^{kx}$
24. Если k – действительный корень кратности r , то получаем r частных решений $y=e^{kx}$; $y=xe^{kx}$; …; $y=x^{r-1}e^{kx}$
25. Если $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ – пара простых комплексных сопряженных корней, то получаем два частных решения
$y = e^{\alpha x}\cos\beta x; y = e^{\alpha x}\sin\beta x$
26. Если $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ – пара комплексных сопряженных корней кратности r, то получаем $2r$ частных решений
$y = e^{\alpha x}\cos\beta x;\ y = xe^{\alpha x}\cos\beta x;\ \ldots;\ y = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$
$y = e^{\alpha x}\sin\beta x;\ y = xe^{\alpha x}\sin\beta x;\ \ldots;\ y = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Решения некоторых дифференциальных уравнений

Уравнения с разделяющимися переменными

27	$y' = y$	$y = Ce^x$
28	$y'=y^2$	$y = -\frac{1}{x+C}; y = 0$
29	$y' = \frac{x}{y}$	$y^2 - x^2 = C$
30	$y' = -\frac{x}{y}$	$x^2 + y^2 = C$
31	$y' = \frac{y}{x}$	$y = Cx$
32	$y' = -\frac{y}{x}$	$y = \frac{C}{x}$
33	$y' = \frac{2y}{x}$	$y = Cx^2$
34	$y' = \frac{y^2}{x^2}$	$y = \frac{x}{1-Cx}$
35	$y' = e^{x+y}$	$e^x + e^{-y} = C$

Однородные уравнения

36	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$	$y^2 = x^2(2\ln\lvert x\rvert + C)$
37	$y' = \frac{x-y}{x+y}$	$x^2 - 2xy - y^2 = C$
38	$x^2y' - y^2 - xy = 0$	$\frac{x}{y} = -\ln Cx; y = 0$
39	$(x^2 + y^2)y' = 2xy$	$y^2 - x^2 = Cy; y = 0$
40	$(x^2 + y^2)\,dx + xydy = 0$	$2y^2 + x^2 = \frac{C}{x^2}$
41	$xy' = y - xe^{y/x}$	$y = -x\ln(\ln Cx)$

Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения Бернулли

42	$y' + xy + x = 0$	$y = Ce^{-x^2/2} - 1$
43	$y' + y = e^x$	$y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$
44	$y' - y = e^x$	$y = e^x(x + C)$
45	$y' - y = \sin x$	$y = Ce^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$
46	$y' - \frac{y}{x} = x\sin x$	$y = x(C - \cos x)$
47	$y' - \frac{y}{x} + y^2 = 0$	$y = \frac{2x}{x^2+C}; y = 0$
48	$y' + 2y = y^2e^x$	$y(e^x + Ce^{2x}) = 1; y = 0$

Уравнения в полных дифференциалах

49	$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$	$3x^2y - y^3 = C$
50	$(y^2 - x)y' - y + x^2 = 0$	$x^3 - 3xy + y^3 = C$
51	$xy'\cos y + \sin y = 0$	$x\sin y = C$

Линейные уравнения 2-го порядка

52	$y'' - y = 0$	$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$
53	$y'' + y = 0$	$y = C_1\cos x + C_2\sin x$

54	$y'' - 4y' + 5y = 0$	$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
55	$y'' - y + x^2 = 0$	$y = C_1 e^x + C_1 e^{-x} + x^2 + 2$
56	$y'' + y = e^x$	$y = \frac{1}{2} e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$
57	$y'' + y = \sin x$	$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$

Комплексные числа

Степени числа i $(n, m \in Z)$

$i^2 = -1$ – основное свойство числа i

$i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4n} = 1$

$i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = i$

$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = -1$

$i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = -i$

$i^0 = i^{-4} = i^{-8} = \ldots = i^{-4n} = i^{4m} = 1$

$i^{-1} = i^{-5} = i^{-9} = \ldots = i^{-(4n+1)} = i^{4m-1} = -i$

$i^{-2} = i^{-6} = i^{-10} = \ldots = i^{-(4n+2)} = i^{4m-2} = -1$

$i^{-3} = i^{-7} = i^{-11} = \ldots = i^{-(4n+3)} = i^{4m-3} = i$

$i^{2n} = (-1)^n$

$i^{2n+1} = (-1)^n i$

$i^{4n+m} = i^m$

Алгебраическая форма комплексного числа ($x; y \in R$)

$z = x + iy;\ \ x = Re z$ – действительная часть числа; $y = Im\, z$ - мнимая часть числа

Равенство комплексных чисел

14. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2;\ y_1 = y_2$

15. $z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0; y = 0$

Комплексно сопряженное число

16. $\bar{z} = x - iy$
17. $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in R$

Модуль комплексного числа

18. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};\ \ |z| \geq 0$
19. $|\bar{z}| = |z|$

Аргумент комплексного числа $\varphi = \arg z$ (главное значение аргумента)

20. $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \varphi; 0 \leq \varphi < 2\pi\ (\text{или} - \pi < \varphi \leq \pi)$
21. $\arg\bar{z} = 2\pi - \arg z \quad (\text{или} \arg\bar{z} = -\arg z)$

Множество значений аргумента

22. $Arg\, z = \varphi + 2\pi k,\ \ k \in Z$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

23. Сложение и вычитание:
$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
24. $z + \bar{z} = 2x; x = \frac{z + \bar{z}}{2}$
25. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
26. $z - \bar{z} = 2yi; y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
27. Умножение:
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
28. $z \cdot \bar{z} = r^2$
29. $x^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$
30. $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$
31. Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$
32. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$
33. $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{r^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$

Свойства действий над комплексными числами

34. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения)
35. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения)
36. $z_1z_2 = z_2z_1$ (коммутативность умножения)

37. $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (ассоциативность умножения)
38. $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения)

Тригонометрическая форма комплексного числа

39. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

40. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
41. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$
42. Возведение в степень:
$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);\ \ n \in N$ – формула Муавра
43. Извлечение корня:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) = \omega_k;$
$n \in N; k = 0,1,2,\dots,n-1$
44. $\sqrt[n]{1} = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) = \omega_k;\ \ k = 0,1,2,\dots,n-1$
45. $\sqrt{1} = \pm 1$
46. $\sqrt[3]{1} = \omega_k;\ \ \omega_1 = 1;\ \ \omega_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ \omega_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
47. $\sqrt[n]{-1} = \left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{n} + i\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}\right) = \omega_k;\ \ k = 0,1,2,\dots,n-1$
48. $\sqrt{-1} = \pm i$
49. $\sqrt[3]{-1} = \omega_k;\ \ \omega_1 = -1;\ \ \omega_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ \omega_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Показательная форма комплексного числа

50. $z = re^{i\varphi}$
51. Формулы Эйлера:
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;\ \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2};\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$
52. $e^{\frac{\pi}{2}i} = i;\ \ e^{\pi i} = -1;\ \ e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i;\ \ e^{2\pi i} = 1$

Действия над комплексными числами в показательной форме

53. $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
54. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
55. $z^n = r^ne^{in\varphi}$
56. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}};\ \ k = 0,1,2,\dots,n-1$

Расстояние между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$

57. $d = |z_2 - z_1|$

Уравнение прямой, проходящей через точку $z_0 = x_0 + iy_0$ и образующей угол α с осью ОХ

58. $z = z_0 + te^{i\alpha}; \ \ t \in R$

Уравнение окружности с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$

59. $z = z_0 + Re^{it}; \ \ 0 \le t < 2\pi$

Разложение многочлена на линейные множители

60. $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n =$
$= a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n); \ \ a_i, z_j \in C \ \forall i, j; \ \ n \ge 1$

Основная теорема алгебры

61. Любое уравнение *n*-й степени с комплексными коэффициентами $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0, \ n \ge 1$, имеет *n* комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Теория вероятностей
Биномиальное распределение

1. Дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение, если ее возможные значения равны 0,1,2,..., *n* , а вероятности равны p_m - P{X = m}= $C_n^m p^m q^{n-m}$; $0 < p < 1$; $q = 1 - p$; $m = 0,1,2,\ldots, n$

2. M(X) = np; D(X) = *npq*.

Распределение Пуассона

3. Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если ее возможные значения равны 0,1,2,..., *m*,..., а вероятности равны

p_m=P{X = *m*}= $\dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$; a > 0; $m = 0,1,2,\ldots$

4. M(X) = a; D(X) = a

Равномерное распределение

5. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале (a; b), если плотность распределения равна $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$

6. $M(x)=\dfrac{a+b}{2};\ D(x)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & \mathrm{x<a}\\ \dfrac{\mathrm{x-a}}{\mathrm{b-a}}, & \mathrm{a<x<b}\\ 1, & \mathrm{x>b}\end{cases}$

8. $P\{\alpha<\mathrm{X}<\beta\}=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a};\ a\le\alpha<\beta\le\mathrm{b}$

Нормальное распределение

9. Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение, если плотность распределения равна

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

10. $M(x)=a;\ D(X)=\sigma^2$

11. $F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\mathit{\Phi}\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)+\dfrac{1}{2}$

12. $\mathit{\Phi}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа, интеграл вероятностей

13. $\Phi(0)=0;\ \Phi(-x)=-\Phi(x);\ \Phi(+\infty)=\dfrac{1}{2};\ \Phi(-\infty)=-\dfrac{1}{2}$

14. $P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$

15. $P\{|X - a| < l\} = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)$

16. $P\{|X - a| < k\sigma\} = 2\Phi(k)$

17. $P\{|X - a| < \sigma\} = 2\Phi(1) \approx 0{,}682$

18. $P\{|X - a| < 2\sigma\} = 2\Phi(2) \approx 0{,}954$

19. $P\{|X - a| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) \approx 0{,}997$ – «правило трех сигм»

Неравенство Чебышева

Для любой случайной величины X с математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x и любого числа $\alpha > 0$:

20. $P\{|X - m_x| \geq \alpha\} \leq \frac{D_x}{\alpha^2}$

21. $P\{|X - m_x| < \alpha\} \geq 1 - \frac{D_x}{\alpha^2}$

Математическая логика

Основной теоретический материал

Математическая логика исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения. Одну из логических теорий называют *алгеброй высказываний.*

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Высказыванию можно поставить в соответствие логическую переменную *x*. Пусть она принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Любое высказывание, которое нельзя разделить называют **простым.** Несколько объединенных простых высказываний образуют **составное** высказывание.

Значение истинности составного высказывания определяется значениями истинности его компонент.

Высказывания обозначают прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z…

Составные высказывания получают из простых с помощью логических операций.

Логические операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Они осуществляются при помощи логических связок: $\overline{\ }$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$.

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	Не	$\overline{\ }$
Конъюнкция	И	$\wedge$
Дизъюнкция	Или	$\vee$
Импликация	Если…то	$\rightarrow$
Эквиваленция	Тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

Зависимость истинности составного высказывания от истинности его компонент изображают таблицами истинности, которые также называют интерпретациями логических операций.

Отрицанием *высказывания p называется высказывание* $\overline{p}$, *которое истинно, когда p ложно, и ложно, когда p истинно.*

Таблица истинности для отрицания.

p	$\overline{p}$
л	и
и	л

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

Конъюнкцией *двух высказываний* p *и* q *называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания* $p \wedge q$.

Таблица истинности для конъюнкции.

p	q	$p \wedge q$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

или

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией *двух высказываний называется такое новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно* ***хотя бы одно*** *из этих высказываний.*

Таблица истинности для дизъюнкции.

p	q	$p \vee q$
л	л	л

л	и	и
и	л	и
и	и	и

или

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликацией *$p \rightarrow q$ называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда p истинно и q ложно.*

Таблица истинности для импликации.

p	q	$p \rightarrow q$
л	л	и
л	и	и
и	л	л
и	и	и

или

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленцией *двух высказываний p и q называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба эти высказывания p и q истинны или оба ложны.*

Таблица истинности для эквиваленции.

p	q	p↔q
л	л	и
л	и	л
и	л	л
и	и	и

или

p	q	p↔q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Сложные составные высказывание образуются подобно тому, как с помощью арифметических операций образуются сложные алгебраические выражения. Их читают «изнутри наружу», так же как и алгебраические выражения, в которых сначала группируются величины, заключенные в самые внутренние скобки, затем эти скобки группируются и т.д. если скобок нет, то операции надо выполнять в следующем порядке: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, отрицание.

Основные законы,

определяющие свойства логических операций

1. Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции:

$X \vee X \leftrightarrow X, \quad X \wedge X \leftrightarrow X$.

2. Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции:

$X \vee Y \leftrightarrow Y \vee X, \quad X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge X$.

3. Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции:

$X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z, \quad X \wedge (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$.

4. Дистрибутивность операций дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга:

$X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge (X \vee Z), \quad X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z).$

5. Двойное отрицание:

$X \leftrightarrow \overline{\overline{X}}$.

6. Законы де Моргана:

$\overline{X} \vee \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \wedge Y}, \quad \overline{X} \wedge \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \vee Y}$.

7. Склеивание:

$(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \leftrightarrow X, \quad (X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow X$.

8. Поглощение:

$X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X, \quad X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X$.

9. Действие с логическими константами 0 и 1:

$X \vee 0 \leftrightarrow X, \quad X \wedge 0 \leftrightarrow 0, \quad X \vee 1 \leftrightarrow 1, \quad X \wedge 1 \leftrightarrow X, \quad X \wedge \overline{X} \leftrightarrow 0$.

10. Закон исключения третьего:

$X \vee \overline{X} \leftrightarrow 1$.

11. Тождество:

$X \leftrightarrow X$.

12. Отрицание противоречия:

$\overline{\overline{X} \wedge X} \leftrightarrow 1$.

13. Контрапозиция:

$(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$.

14. Цепное заключение:

$((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \leftrightarrow (X \to Z)$.

15. Противоположность:

$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y})$.

16. Модус поненс (modus ponens):

$(X \wedge (X \to Y)) \to Y \leftrightarrow 1$.

Замечание: логическую связку $\leftrightarrow$ можно заменить на знак равенства =.

Пример 1. Докажите тождественную истинность формулы $\overline{X} \to (X \to Y)$

Решение. Составим таблицу истинности:

X	У	$\overline{X}$	$(X \to Y)$	$\overline{X} \to (X \to Y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Последний столбец состоит из 1, следовательно, доказана тождественная истинность формулы.

Пример 2. Для каждого из следующих высказываний: 1) найдите символическую форму; 2) постройте таблицу истинности. Воспользуйтесь буквенными обозначениями: X для «Джо умен»; Y для «Джим глуп»; Z для «Джо получит приз».

(a) Если Джо умен, а Джим глуп, то Джо получит приз.

(b) Джо получит приз в том и только в том случае, если он умен или если Джим глуп.

(c) Если Джим глуп, а Джо не удастся получить приз, то Джо не умен. Решение.

(a) $(X \wedge Y) \to Z$;

(b) $Z \leftrightarrow (X \vee Y)$;

(c) $(Y \wedge \overline{Z}) \to \overline{X}$.

X	У	Z	$\overline{X}$	$\overline{Z}$	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \to Z$	$X \vee Y$	$Z \leftrightarrow (X \vee Y)$	$(Y \wedge \overline{Z})$	$(Y \wedge \overline{Z}) \to \overline{X}$
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1

1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
						(a)		(b)		(c)

Пример 3. Определите для каждого из следующих высказываний, будет ли оно логически истинным, противоречивым; ни тем, ни другим.

а) $X \leftrightarrow X$; б) $X \leftrightarrow \overline{X}$; в) $(X \vee Y) \leftrightarrow (X \wedge Y)$.

Решение.

X	Y	$X \leftrightarrow X$	$\overline{X}$	$X \leftrightarrow \overline{X}$	$(X \vee Y)$	$(X \wedge Y)$	$(X \vee Y) \leftrightarrow (X \wedge Y)$
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1
		а)		б)			в)

Вывод: а) — логически истинно; б) — противоречивое; в) — ни то, ни другое.

Задача 1.

Покажите, что высказывание $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$ — логически истинно, а $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (X \vee Y)$ — нет.

Задача 2.

Пусть X означает: «Я сдам этот экзамен»; а Y: «Я буду регулярно выполнять домашние задания». Запишите в символической форме следующие высказывания:

(а) «Я сдам этот экзамен только в том случае, если буду регулярно выполнять домашние задания».

(б) «Регулярное выполнение домашних заданий является необходимым условием для того, что я сдам этот экзамен».

(в) «Сдача этого экзамена является достаточным условием того, что я регулярно выполнял домашние задания».

(г) «Я сдам этот экзамен в том и только в том случае, если я буду регулярно выполнять домашние задания ».

(д) «Регулярное выполнение домашних заданий есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы я сдал этот экзамен».

Выясните, какому из перечисленных высказываний соответствуют следующие символические формы: $X \rightarrow Y$; $Y \leftrightarrow X$; $X \leftrightarrow Y$; $Y \rightarrow X$.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Приведенный ниже материал далеко не исчерпывает разнообразные разделы общей теории графов, содержит некоторые факты из общей теории, а основное внимание уделяется приложениям к теории сетей связи. На взгляд авторов центральной частью раздела является нахождение путей и сечений (разрезов) методами булевой алгебры и теорема Форда–Фалкерсона. Именно из этих разделов и предлагаются индивидуальные задания.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Графом *называется набор точек (эти точки называются вершинами), некоторые из которых объявляются смежными (или соседними). Считается, что смежные вершины соединены между собой ребрами (или дугами).*

Таким образом, ребро определяется парой вершин. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

Граф называется ***ориентированным*** *(или орграфом)*, если некоторые ребра имеют *направление.* Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Геометрически граф часто изображают точками плоскости, причем соседние вершины соединены дугами (для орграфа некоторые дуги имеют направление, что обычно отмечают стрелкой).

Помимо этого, в теории графов рассматриваются также *мультиграфы* – это такие графы, в которых могут быть *петли* (т. е. некоторая вершина соединена сама с собой ребром) или некоторые пары вершины могут быть соединены между собой несколькими ребрами.

Маршрут в графе – это последовательность соседних (смежных) вершин. Ясно, что можно определить маршрут и как последовательность смежных ребер (в этом случае ребра приобретают *направление*). Заметим, что в маршруте могут повторяться вершины, но не ребра. Маршрут называется *циклом*, если в нем первая вершина совпадает с последней.

Путь в графе (иногда говорят простой путь) – это маршрут без повторения вершин (а значит, и ребер).

Контур – это цикл без повторения вершин, за исключением первой вершины, совпадающей с последней.

Последовательности вершин (рис. 1): 1–2–3–4–2–5 не простой путь, а маршрут; последовательности 1–2–3–4–7–5 и 1–2–5 – простые пути; 1–2–3–4–2–5–6–1 –это цикл (но не контур); 1–2–5–6–1 – это контур.

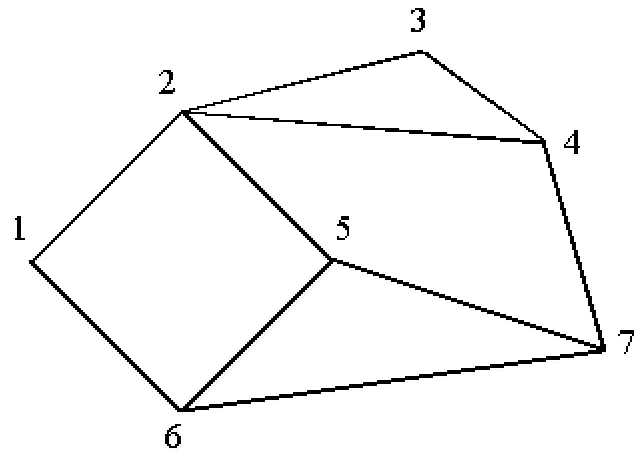


Рис. 1

Если имеется некоторый маршрут из вершины t в вершину s, заданный в виде последовательности ребер, которые в этом случае приобрели направление, и если в этот маршрут входит ребро, соединяющее вершины (i, j), то это ребро по отношению к вершине i называют иногда *прямой дугой,* а по отношению к вершине j – *обратной дугой* (или обратным ребром).

Граф называется ***связным,*** если любые две его вершины можно соединить маршрутом (или путем). На рис. 1 изображен связный граф.

Ребро, при удалении которого граф перестает быть связным, иногда называют ***мостом*** или ***перешейком.***

Следующее определение имеет смысл только для графов или мультиграфов без петель (но не для орграфов).

Степень вершины – это число ребер, входящих в эту вершину. Вершина называется ***висячей,*** если ее степень равна единице.

***Лемма* 1**. Если степень всех вершин в графе больше или равна двум, то граф обязательно содержит контур.

Доказательство. Действительно, выйдя из некоторой вершины и войдя в другую, всегда можно выйти из нее по другому ребру , так как степень вершины больше или равна двум. Выйти из вершины по новому ребру невозможно только в том случае, если эта вершина уже встречалась, а это означает, что можно выделить контур из вершин этого графа.

У этого термина существуют и другие значения.

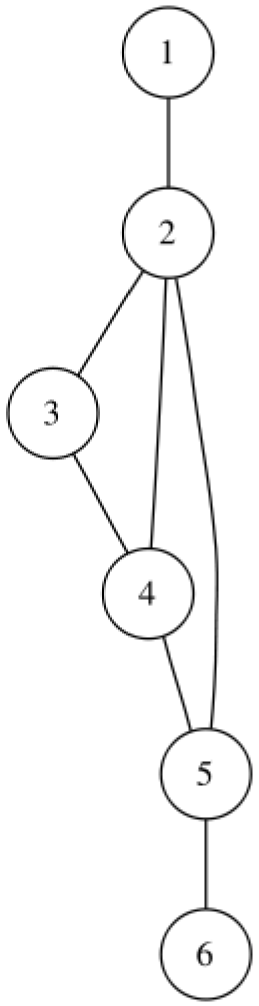


Рис. 2
Неориентированный граф с шестью вершинами и семью рёбрами

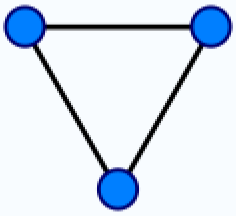
В математической теории графов и информатике **граф** — это совокупность объектов со связями между ними.

Объекты представляются как **вершины**, или **узлы** графа, а связи — как **дуги**, или **рёбра**. Для разных областей применения виды графов могут различаться направленностью, ограничениями на количество связей и дополнительными данными о вершинах или рёбрах.

Многие структуры, представляющие практический интерес в математике и информатике, могут быть представлены графами. Например, строение Википедии можно смоделировать при помощи ориентированного графа (орграф), в котором вершины — это статьи, а дуги (ориентированные рёбра) — это связи, созданные гиперссылками (см. Тематическая карта).

Теория графов не обладает устоявшейся терминологией. В различных статьях под одними и теми же терминами понимаются разные вещи. Приводимые ниже определения — наиболее часто встречаемые.

Граф



Граф или ***неориентированный граф*** *G* — это упорядоченная пара *G*: = (*V*,*E*), для которой выполнены следующие условия:

> *V* это множество **вершин** или **узлов**,
>
> *E* это множество пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) вершин, называемых **рёбрами**.

V (а значит и *E*) обычно считаются конечными множествами. Многие хорошие результаты, полученные для конечных графов, неверны (или каким-либо образом отличаются) для *бесконечных графов*. Это происходит потому, что ряд соображений становятся ложными в случае бесконечных множеств.

Вершины и рёбра графа называются также **элементами** графа, число вершин в графе $|V|$ — **порядком**, число рёбер $|E|$ — **размером** графа.

Вершины *u* и *v* называются **концевыми** вершинами (или просто **концами**) ребра *e* = {*u*,*v*}. Ребро, в свою очередь, **соединяет** эти вершины. Две концевые вершины одного и того же ребра называются **соседними**.

Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую концевую вершину.

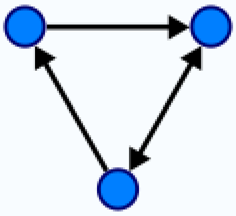
Два ребра называются **кратными**, если множества их концевых вершин совпадают.

Ребро называется **петлёй**, если его концы совпадают, то есть *e* = {*v*,*v*}.

Степенью deg*V* вершины *V* называют количество рёбер, для которых она является концевой (при этом петли считают дважды).

Вершина называется **изолированной**, если она не является концом ни для одного ребра; **висячей** (или **листом**), если она является концом ровно одного ребра.

Ориентированный граф



Ориентированный граф (сокращённо **орграф**) G — это упорядоченная пара $G := (V,A)$, для которой выполнены следующие условия:

> V это множество **вершин** или **узлов**,
>
> A это множество (упорядоченных) пар различных вершин, называемых **дугами** или **ориентированными рёбрами**.

Дуга — это упорядоченная пара вершин (v, w), где вершину v называют началом, а w — концом дуги. Можно сказать, что дуга $v \to w$ ведёт от вершины v к вершине w.

Смешанный граф

Смешанный граф G — это граф, в котором некоторые рёбра могут быть ориентированными, а некоторые — неориентированными. Записывается упорядоченной тройкой $G := (V,E,A)$, где V, E и A определены так же, как выше.

Понятно, что ориентированный и неориентированный графы являются частными случаями смешанного.

Прочие связанные определения

Путём (или **цепью**) в графе называют конечную последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершин ребром.[*источник не указан 72 дня*]

Ориентированным путём в орграфе называют конечную последовательность вершин v_i $(i = 1, \ldots, k)$, для которой все пары (v_i, v_{i+1}) $(i = 1, \ldots k-1)$ являются (ориентированными) рёбрами.

Циклом называют путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. При этом **длиной** пути (или цикла) называют число составляющих его *рёбер*.

Заметим, что если вершины *u* и *v* являются концами некоторого ребра, то согласно данному определению, последовательность (*u*,*v*,*u*) является циклом. Чтобы избежать таких «вырожденных» случаев, вводят следующие понятия.

Путь (или цикл) называют **простым**, если ребра в нём не повторяются; **элементарным**, если он простой и вершины в нём не повторяются. Несложно видеть, что:

Всякий путь, соединяющий две вершины, содержит элементарный путь, соединяющий те же две вершины.

Всякий простой *неэлементарный* путь содержит элементарный *цикл*.

Всякий *простой* цикл, проходящий через некоторую вершину (или ребро), содержит *элементарный* (под-)цикл, проходящий через ту же вершину (или ребро).

Бинарное отношение на множестве вершин графа, заданное как «существует путь из *u* в *v*», является отношением эквивалентности, и, следовательно, разбивает это множество на классы эквивалентности, называемые **компонентами связности** графа. Если у графа ровно одна компонента связности, то граф связный. На компоненте связности можно ввести понятие **расстояния** между вершинами как минимальную длину пути, соединяющего эти вершины.

Всякий максимальный связный подграф графа G называется **связной компонентой** (или просто компонентой) графа G. Слово «максимальный» означает максимальный относительно включения, то есть не содержащийся в связном подграфе с большим числом элементов

Ребро графа называется **мостом**, если его удаление увеличивает число компонент.

Дополнительные характеристики графов

Граф называется:

связным, если для любых вершин *u*,*v* есть путь из *u* в *v*.

сильно связным или **ориентированно связным**, если он ориентированный, и из любой вершины в любую другую имеется ориентированный путь.

деревом, если он связный и не содержит *простых* циклов.

полным, если любые его две (различные, если не допускаются петли) вершины соединены ребром.

двудольным, если его вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, что всякое ребро соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2.

k-дольным, если его вершины можно разбить на k непересекающихся подмножества V_1, V_2, …, V_k так, что не будет рёбер, соединяющих вершины одного и того же подмножества.

полным двудольным, если каждая вершина одного подмножества соединена ребром с каждой вершиной другого подмножества.

планарным, если граф можно изобразить диаграммой на плоскости без пересечений рёбер.

взвешенным, если каждому ребру графа поставлено в соответствие некоторое число, называемое весом ребра.

Также бывает:

k-раскрашиваемым

k-хроматическим

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФА В ИНФОРМАТИКЕ

Матрица смежности

Матрица смежности — таблица, где как столбцы, так и строки соответствуют вершинам графа. В каждой ячейке этой матрицы записывается число, определяющее наличие связи от вершины-строки к вершине-столбцу (либо наоборот).

Недостатком являются требования к памяти — очевидно, квадрат количества вершин.

Матрица инцидентности

Каждая строка соответствует определённой вершине графа, а столбцы соответствуют связям графа. В ячейку на пересечении i-ой строки с j-м столбцом матрицы записывается: 1 в случае, если связь j «выходит» из вершины ;−1, если связь «входит» в вершину; любое число, отличное от 0, 1, −1, если связь является петлей; 0 во всех остальных случаях.

Данный способ является самым ёмким (размер пропорционален $|E||V|$) и неудобным для хранения, но облегчает нахождение циклов в графе.

Список рёбер

Список рёбер — это тип представления графа в памяти, подразумевающий, что каждое ребро представляется двумя числами — номерами вершин этого ребра. Список рёбер более удобен для реализации различных алгоритмов на графах по сравнению с матрицей смежности.

СЕТЕВЫЕ ГРАФЫ

Первым шагом в анализе любого проекта является составление списка входящих в него операций. Детали такого списка зависят от специфики конкретного проекта. Тем не менее во всех случаях необходимо выделить непосредственно предшествующую операцию или операции. Непосредственно предшествующими называются операции, выполнение которых должно быть закончено прежде, чем может начаться данная операция. Например, при постройке дома крыша не может быть построена до того момента, пока не закончится возведение стен.

После того как составлен список, логическая последовательность выполнения операций может быть проиллюстрирована с помощью графа. Существуют различные типы графов, но наиболее широкое применение получили так называемые **вершинные и стрелочные графы.** Однако каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, и выбор того или иного графа является вопросом личных предпочтений или же определяется целью создания и использования данного графа.

Стрелочные графы

В этом типе графов (рис. 3) каждая операция представлена стрелкой. Длина стрелок значения не имеет. Направление стрелки отражает ход времени и обычно указывается слева направо. Начало и окончание каждой операции называются событиями и изображаются на графе кружочками или узлом.

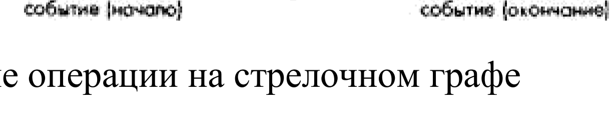


Рис. 3. Изображение операции на стрелочном графе

Операции обозначают буквой или словом, а события — числом. Поскольку любая операция характеризуется парой событий, ее можно также обозначать с помощью чисел, соответствующих этим событиям. Например, на рис. 3 операция А означает то же самое, что и операция (1, 2). Одному узлу может соответствовать (входить или выходить из него) несколько операций.

Событие, изображаемое на графе с помощью узла, не считается свершившимся до тех пор, пока не окончены все входящие в него операции. Операция, выходящая из некоторого узла, не может начаться до тех пор, пока не будет достигнуто **начальное событие,** т.е. пока не будут завершены все операции, входящие в **узловое начальное событие.**

Если операция C не может быть начата до момента окончания работ A и B, логическую схему данной ситуации можно представить графически следующим образом (см. рис. 4).

Начальным событием для C является конечное событие для A и B. Существенно, что в стрелочном графе сохраняется логическая зависимость операций. Иногда, чтобы достичь этого, необходимо включить в граф одну или более **фиктивных логических операций.**

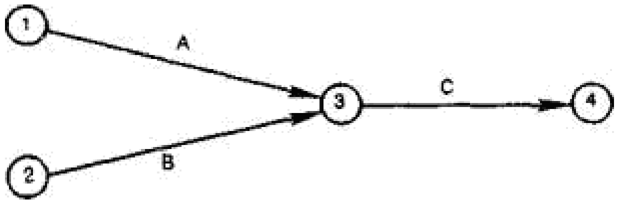


Рис. 4. Логические взаимосвязи в стрелочном графе

Фиктивная логическая стрелка вводится в граф, если необходимо отразить, что некоторое событие не может появиться раньше другого события, а с помощью обычных стрелок, соответствующих операциям, этого сделать нельзя. Функция фиктивной логической операции состоит в том, чтобы показать последовательность появления событий.

Фиктивным логическим операциям ставится в соответствие нулевая продолжительность выполнения, а изображаются они обычно пунктиром. Например, если работу C нельзя начать прежде, чем завершится операция A, а работу D нельзя начать до тех пор, пока не завершатся работы A и B, соответствующий стрелочный граф будет выглядеть следующим образом:

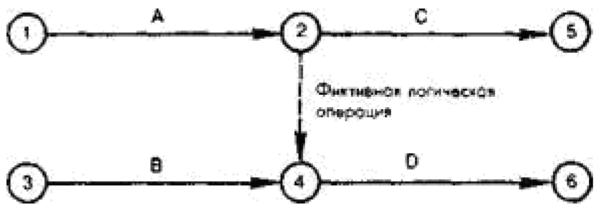


Рис. 5. Использование в стрелочном графе фиктивной логической операции

Кроме того, в стрелочных графах для избежания неоднозначности используются **фиктивные операции идентификации.** В некоторых пакетах прикладных программ, используемых в сетевом анализе, операции обозначаются не с помощью букв или слов, а числами, обозначающими соответствующие им события. Если же две или более операций выполняются одновременно и имеют одни и те же начальное и конечное события, то компьютер не сможет отличить их друг от друга и не воспримет вводимую исходную информацию. Как показано на рис. 6, включение фиктивной операции идентификации позволяет решить данную проблему. На практике принято нумеровать события таким образом, чтобы номер конечного события был больше, чем номер начального события.

Первый шаг после составления списка операций, входящих в проект, состоит в том, чтобы создать таблицу операций, в которой отражаются все операции, а также операции, непосредственно им предшествующие.

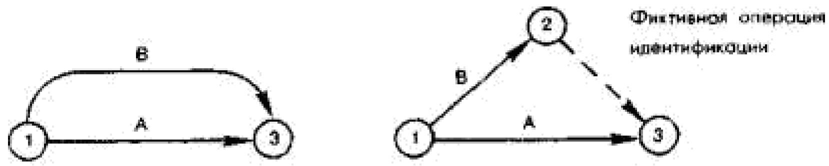


Рис. 6. Использование в стрелочном графе фиктивной операции идентификации

В данный список не включаются фиктивные логические операции или операции идентификации. На основе полученного списка строится стрелочный сетевой граф, включающий действительные и фиктивные операции и отражающий установленные взаимосвязи между ними. После того, как закончено построение исходного графа, можно выявить и исключить из рассмотрения ненужные фиктивные операции. Затем для улучшения логической схемы исходный граф можно модифицировать и перекомпоновать.

Ненужные фиктивные логические операции можно выявить с помощью простого практического правила. Если единственной операцией, выходящей из некоторого узла, является фиктивная логическая операция, то по всей вероятности без нее можно обойтись.

Пример 1. Компания "Delco plc" — это промышленная фирма, которая заключила контракт о производстве партии станков, предназначенных к использованию крупным предприятием обувной промышленности для массового производства обуви. Ниже перечислены операции, которые необходимо выполнить в процессе разработки и производства этих станков (табл. 1):

Таблица 1. **Таблица операций для задачи из примера 1**

Операции	Непосредственно предшествующая операция
A Составление сметы затрат	-

B Согласованные оценки	A
C Покупка собственного оборудования	B
D Подготовка конструкторских проектов	B
E Строительство основного цеха	D
F Монтаж оборудования	C, E
G Испытания оборудования	F
H Определение типа модели	D
I Проектирование внешнего корпуса	D
J Создание внешнего корпуса	H, I
К Конечная сборка	G, J
L Контрольная проверка	К

Нужно изобразить операции с помощью стрелочного графа.

Решение.

Сетевой граф должен начинаться с единственного начального события, которое показано на рис. 7 кружочком, и заканчиваться единственным конечным событием. Построение графа мы начали с первого события. С этого события начинаются все операции, которым не предшествуют никакие виды работ. Начинать построение полезно с примерного эскиза будущего графа:

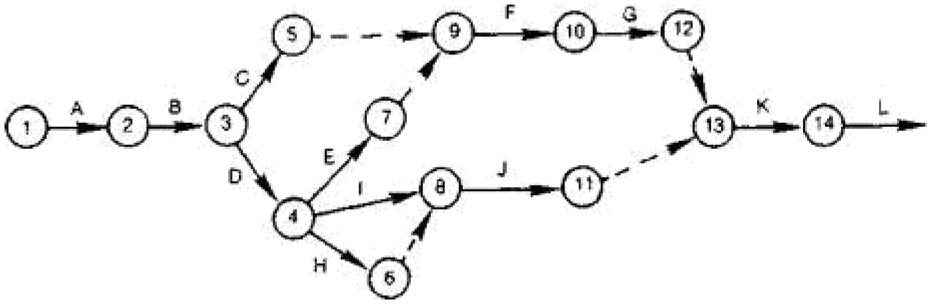


Рис. 7. Примерный эскиз графа для примера 1

В соответствии с приведенной выше таблицей необходимо тщательно, переходя от одной операции к другой, проверить построенный в первом приближении граф. В случае необходимости следует провести его корректировку, а затем для совершенствования схемы построить новый. В данном случае можно исключить все фиктивные логические операции и оставить одну фиктивную операцию идентификации (рис. 8).

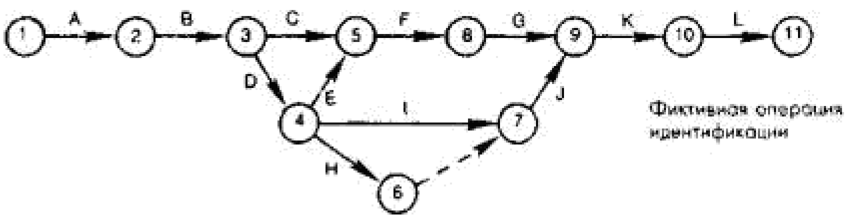


Рис. 8. Новый чертеж стрелочного графа для примера 1

Пример 2. Компания "Delco plc" является участником другого проекта, детали которого приведены ниже:

Таблица 2. **Таблица операций для примера 2**

Операция	*Непосредственно предшествующая операция*	*Операция*	*Непосредственно предшествующая операция*
A	-	E	B, C
B	-	F	C
C	-	G	D, E
D	*A,* B	H	F, G

Изобразим данный проект при помощи стрелочного графа.

Решение

Построение начинаем с начального события, обозначенного кружком 1. Из таблицы следует, что существуют три операции — A, B и C, которым не предшествует ни одна из операций. Поэтому из начального события выходят три стрелки. На первый взгляд таблица операций выглядит чрезвычайно простой, однако отразить присущую ей логику с помощью сетевого графа достаточно трудно, вследствие чего мы вынуждены использовать три фиктивные логические операции (см. рис. 9).

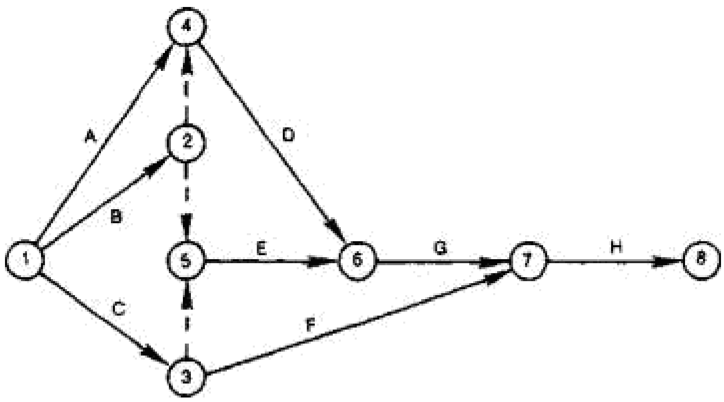


Рис. 9. Стрелочный граф для примера 2

Вершинные графы

В этом типе сетевых графов операции представлены узлами графа, а стрелками изображаются их взаимосвязи. В таких графах не возникает необходимости вводить фиктивные операции. Как и в предыдущем случае, течение времени следует изображать в направлении слева направо.

Пример 3. Обратившись к данным из примера 2**,** модифицируем полученную в этом примере схему, поставив в соответствие операциям узлы графа.

Решение

Логическую схему, приведенную в данном примере, гораздо проще проиллюстрировать используя метод построения сетевых графов по схеме "операция- узел", однако с его помощью труднее получить общую картину переходов от одной операции к другой. Построение вершинного графа начинают с начального узла, за которым следуют первые три операции — A, B и C. Построить такой граф достаточно просто.

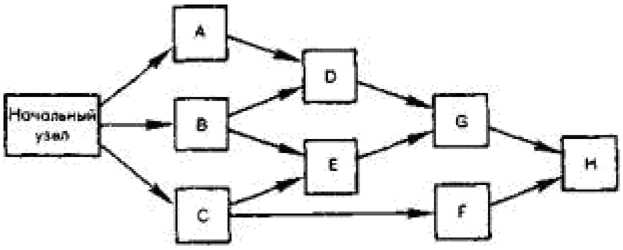


Рис. 10. Вершинный граф

Каждый из описанных типов графов имеет свои преимущества и недостатки. Обычно не имеет принципиального значения, какая из систем используется. Если в стрелочные графы приходится вводить достаточно большое число фиктивных операций, то гораздо более предпочтительным является выбор вершинного графа. На рисунке приведено сравнение двух видов изображения операций и их основных особенностей (см. рис. 10).

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЭКОНОМИКЕ

1. Применение аналитической геометрии

Линейная модель амортизации. Существуют различные модели начисления амортизации на купленное предприятием оборудование. Наиболее простая из них — линейная модель. Пользуясь этой моделью, предприятие относит стоимость купленного оборудования на затраты производства равными долями. Если известны начальная стоимость оборудования *P,* остаточная стоимость S и срок службы *T,* то ежегодная амортизация

$$a = \frac{P - S}{T}.$$

Стоимость оборудования после t лет эксплуатации

$$V = P - \frac{P - S}{t} = P - at.$$

Последнее уравнение определяет прямую линию.

Линейная модель издержек. Точка безубыточности.

При производстве x единиц любой продукции *совокупные издержки (затраты)* C(x) состоят из двух слагаемых - постоянных (фиксированных) и переменных издержек:

$C(x) = F + V$.

Постоянные издержки F — это издержки, не зависящие от числа единиц произведенной продукции. Они включают в себя амортизацию, аренду помещения, проценты по займам и т.п.

Переменные издержки V — это издержки, напрямую зависящие от количества произведенной продукции. Они включают в себя стоимость сырья, рабочей силы и т.п.

В простейшем случае переменные издержки прямо пропорциональны x - количеству произведенной продукции. Коэффициент пропорциональности a — это переменные затраты по производству одной единицы продукции.

Если обозначить через b фиксированные затраты, то получится уравнение, которое называется *линейной моделью издержек:*

$C(x) = b + ax$.

Совокупный доход, или *выручка, R(x),* получаемый предприятием от продажи x единиц продукции, определяется формулой

$R(x) = px$,

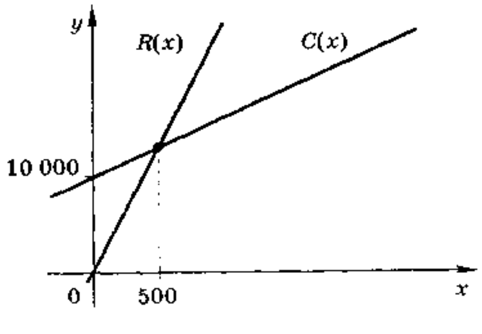
где p — цена единицы товара.

Очевидно, что область определения этой функции $\{x: x >= 0\}$ и R(0) = 0.

Если произведено и продано x единиц продукции, то *прибыль P(x)* определяется формулой

$$P(x)= R(x) - C(x).$$

Пример 1. Фиксированные издержки составляют 10 тыс. руб. в месяц, переменные издержки — 30 руб., выручка — 50 руб. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить ее график.



Решение.

$C(x) = F + V$, $C(x) = 10\,000 + 30x$,

$R(x) = 50x$ Таким образом, прибыль $P(x) = 50x - 30x - 10\,000 = 20x - 10\,0000$.

При малых значениях x прибыль отрицательна, т.е. производство убыточно. При увеличении x прибыль возрастает, в точке $x = 500$ она обращается в нуль и после этого становится положительной.

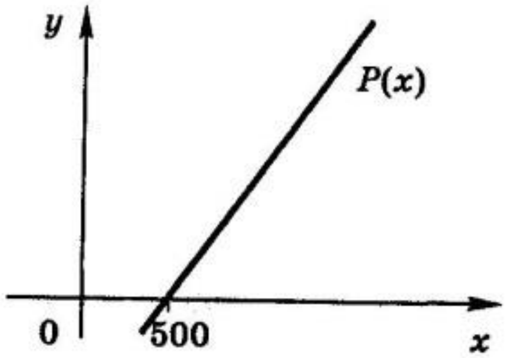


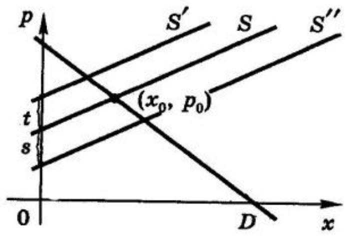
Рис. 2

Точка, в которой прибыль обращается в нуль, называется *точкой безубыточности.*

Законы спроса и предложения.

Количество товара, которое покупатели приобретут на рынке, зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством купленного товара называется *функцией* или *законом спроса.*

Количество товара, которое производители выставят на продажу, также зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством товара, выставленного на продажу, называется *функцией* или *законом предложения.*



В простейшем случае эти функции линейны. Закон спроса обозначен через D, закон предложения — через S;

x- количество товара, p — цена на этот товар. Уравнение спроса можно составить, если заданы две точки, лежащие на его графике. Для этого нужно использовать

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Точка пересечения кривых спроса и предложения (x_0, p_0) называется *точкой рыночного равновесии.* Соответственно, p_0 называется *равновесной ценой,* а x_0 — *равновесным количеством (объемом, продаж).*

Если известен закон спроса $p(x)$, то совокупный доход $R = xp$ можно выразить через x.

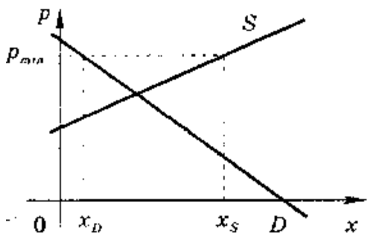
Очень часто правительство вводит налог t на товар или предоставляет субсидию s, чтобы население могло приобрести этот товар по разумной цене.

При использовании линейных моделей предполагается, что спрос оп-аляется только ценой товара на рынке p_c, а предложение — только ценой p_s, получаемой поставщиками. Эти цены связаны между собой следующими уравнениями:

$$p_c = p_s + t,$$
$$p_c = p_s - s,$$

где t и s – соответственно налог и субсидия на единицу товара

Таким образом, при введении налога или субсидии уравнение спроса D не изменится. График функции предложения поднимется на t единиц вверх (S′) или опустится на s единиц вниз (S″).



Вместо субсидии иногда вводится минимальная цена. В этом случае правительство скупает излишек продукции, равный $x_S - x_D$.

Некоторые налоги, например НДС (налог на добавленную стоимость), пропорциональны цене. В этом случае остается той же точка пересечения графика предложения с осью Ox и меняется угол наклона графика к оси Ox.

Пример 2. Законы спроса и предложения на некоторый товар оп-ределяются уравнениями

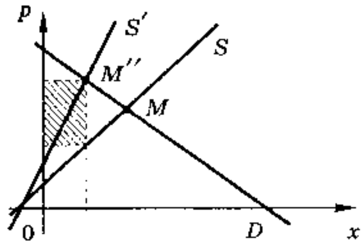
$$p = -2x + 12,$$
$$p = x + 3.$$

а) Найти точку рыночного равновесия.
б) Найти точку равновесия после введения налога, равного 3. Найти увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж.
в) Какая субсидия приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы?
г) Вводится пропорциональный налог, равный 20% . Найти новую точку равновесия и доход правительства.

д) Правительство установило минимальную цену, равную 7.Сколько денег будет израсходовано на скупку излишка?

Решение. а) Находим точку равновесия *M:*

$$x + 3 = -2x + 12, x = 3, \quad p = 6.$$



Точка M (3, 6) является точкой равновесия.

б) Если введен налог $t = 3$, то система уравнений для определения новой точки равновесия примет вид

$D: p_c. = -2x + 12,$
S: $p_s = x + 3,$
$$P_c = p_s + 3.$$

Используя соотношение между ценой на рынке p_c и ценой p_s, получаемой поставщиками, имеем следующую систему для определения точки рыночного равновесия:

$$\begin{cases} ð_{ñ} = -2õ + 12, \\ ð_{ñ} = õ + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем новую точку равновесия *M'(2,* 8). Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличилась на 2 единицы, а равновесный объем уменьшился на 1 единицу.

в) Если предоставлена субсидия, то система уравнений для определения точки равновесия имеет вид

$$D: p_c = -2x + 12,$$
$$S: p_я = x + 3,$$
$$p_c = p_s - s.$$

Новый объем продаж равен *5* единицам (3 + 2). Подставляя $x = 5$ в систему, находим:

$$p_c = 2, \quad p_s = 5, \quad s = p_s - p_c = 3.$$

г) Если налог составляет *20%* , то вся рыночная цена составляет 120% , из них 100% получают поставщики товара, 20% — государство. Итак, поставщики получают

$$p_S = \tfrac{100}{120} ð_{ñ} = \tfrac{5}{6} ð_{ñ}$$

Уравнение спроса остается неизменным, а в уравнение предложения подставляем $ð_s = \frac{5}{6} p_s$:

$$\begin{cases} p_s = -2x + 12, \\ \frac{5}{6} p_s = x + 3 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим новую точку равновесия $\grave{I}$ ":

$-2\tilde{o}+12=\frac{6}{5}\tilde{o}+\frac{18}{5}$

$\tilde{o}=2\frac{5}{8}$

$p_s=6\frac{3}{4}$

$M''\left(2\frac{5}{8},6\frac{3}{4}\right).$

Очевидно, что доход правительства R равен площади заштрихованного прямоугольника.:

$R=\frac{1}{6}*2\frac{5}{8}*6\frac{3}{4}=2\frac{61}{64}.$

д) Если установлено минимальная цена, то из уравнения спроса и предложения можно найти объемы спроса и предложения. Разницу между ними скупает правительство. Так как p=7, то

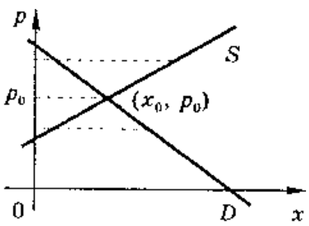
x_s=p-3=7-3=4,

$\tilde{o}_D=\frac{12-p}{2}=\frac{12-7}{2}=2.5.$

Затраты правительства составят

$(x_s - x_D)$= (4 - 2,5) * 7= 10,5.

Точка рыночного равновесия называется *устойчивой,* если при малых отклонениях от равновесного значения цена стремится к этому равновесному значению.



Пусть $p > p_0$,, тогда $x_s > x_D$ (рис.6). Поскольку предложение превышает спрос, то цена падает и $\eth \to \eth_0$

Если $p < p_0$, то $x_s < x_D$. Поскольку спрос превышает предложение, то цена растет и $\eth \to \eth_0$. Следовательно, точка рыночного равновесия, изображенная на рисунке устойчива.

2. Предельный анализ

Производные применяются в экономике для получения так называемых предельных издержек, предельной выручки, предельной прибыли и т.п. Слово «предельный» в этих терминах означает производную, или скорость изменения.

Пример 3. Функция издержек имеет вид $C(x)$ = 0,01x^3 - 0,2x^2 +10x + 2000. Найти предельные издержки и посчитать их значение в точке x = 10.

Решение.

$$C'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}4x + 10$$

$$C'(10)= 3 - 4 + 10 = 9.$$

Пользуясь формулой для приближенного значения приращения функции

$$\Delta\tilde{N} \approx dC = C'(x)\Delta x,$$

можно интерпретировать величину C'(10): если произведено 10 изделий, то дополнительные издержки ΔC по производству одиннадцатого изделия приближенно равны $C'(10)=9$. Аналогично находятся предельная выручка (доход) $R'(x)$ и предельная прибыль $P'(x)$.

Функция потребления и сбережения.

В экономике используются понятия функций потребления и сбережения. Обозначим через y доход, остающийся у населения после уплаты налогов. Этот доход состоит из двух слагаемых. Часть дохода население тратит. Эта часть составляет *функцию потребления,* которую обычно обозначают $C(y)$. Второе слагаемое $S(y)$ составляют сбережения населения. Функция $S(y)$ называется *функцией сбережения.* Очевидно, что

$$y = C(y) + S(y).$$

Функции потребления и сбережения обычно считаются линейными в течение короткого промежутка времени. На больших интервалах времени эти функции не являются линейными.

Если национальный доход y получает приращение Δy, то функции потребления и сбережения также получают приращения соответственно ΔC и ΔS:

$$\Delta y = \Delta C + \Delta S.$$

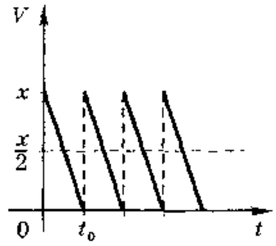
Последнее равенство можно разделить на $\Delta y \neq 0$ и перейти к пределу при $\Delta y \to 0$. Тогда получим

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta y} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta y} = 1 \quad \text{т.е}$$

$$\frac{dC}{dy} + \frac{dS}{dy} = 1$$

Получим производные $\frac{dC}{dy}$ è $\frac{dS}{dy}$ называются соответственно *предельной склонностью к потреблению и предельной склонностью к сбережению.*

Издержки хранения.



Совокупные издержки производства товара состоят из издержек его производства и издержек хранения. Пусть товар завозится на склад партиями по x штук одной партии, а расходуется с постоянной скоростью. Тогда наполняемость склада зависят от времени t и задается функцией, график который приведен на рисунке. Здесь V – число единиц товара на складе, $\frac{\tilde{o}}{2}$- средняя наполняемость склада, t_0 - использования партии товара.

Пример 4. Компании требуется произвести 1000 единиц некоторого товара в год. Издержки подготовки производства одной партии составляют 320 руб. Издержки производства товара составляют 8 руб. за единицу продукции, а издержки хранения — 1 руб. за единицу. Найти такое число единиц товара в партии *x,* при котором совокупные издержки производства и хранения были бы минимальны.

Решение. Издержки производства составляют

$\frac{1000}{\tilde{o}}*320+1000*8,$

где $\frac{1000}{\tilde{o}}$ - число партий товаров за год. Издержки хранения равны $\frac{\tilde{o}}{2}*1$. Таким образом, совокупные издержки составляют $\frac{320000}{\tilde{o}}+8000+\frac{\tilde{o}}{2}$.

Находим минимальное значение:

$C'(x)=-\frac{320000}{x^2}+\frac{1}{2}$

$C'(x)=0$

$$-\frac{320000}{x^2}+\frac{1}{2}=0$$

x=800.

Далее определяем $\tilde{N}''(\tilde{o})=\frac{640000}{\tilde{o}^2}$

$$\tilde{N}''(800)=\frac{640000}{800^3}>0.$$

Следовательно при x=800 функция имеет минимум. Таким образом, в партии должно быть 800 единиц товара.

Эластичность.

Для упрощения процесса дифференцирования иногда используется логарифмическая производная (производная от логарифма функции)

$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$

С этим понятием связано понятие эластичности функции. *Эластичность* функции η определяется следующим образом:

$\eta=\frac{\tilde{o}}{\acute{o}}\frac{dy}{dx}.$

Если независимая переменная x измениться на Δx, функция y получит соответствующие приращения Δy. Процентное изменение x и y равно соответственно $\frac{\Delta x}{x}100\%$ и $\frac{\Delta\acute{o}}{\acute{o}}100\%$, при этом $\frac{\Delta\acute{o}*100\tilde{o}}{\acute{o}*100\Delta\tilde{o}}$ - отношение процентного изменения функции y к процентному изменению аргумента x.

Если $\Delta\tilde{o}\to 0$, то $\frac{\Delta yx}{y\Delta x}\to\frac{xdy}{ydx}=\eta,$

т.е. при малых значениях Δx процентное изменение функции приближено равно эластичности η.

Если η < -1, функция эластична.

Если -1<η<0, функция не эластична.

Если $\eta=-1$, эластичность функции называется единичной.

В терминах логарифмических производных $\eta = \frac{\frac{d}{dx}(\ln y)}{\frac{d}{dx}(\ln x)}$,

т.е. эластичность функции y по x – это отношение логарифмической производной y к логарифмической производной x.

Если известна функция спроса x = x(p), можно найти предельную выручу по отношению к цене p: $\frac{dR}{dp} = \frac{d}{dp}(xp) = x + p\frac{dx}{dp} = x\left(1 + \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}\right) = x(1+\eta)$.

Если спрос эластичный, то $1+\eta<0$, $\frac{dR}{dp}<0$ и выручка R – убывающая функция цены.

Если спрос неэластичен, то $1+\eta>0$, $\frac{dR}{dp}>0$ и выручка R – возрастающая функция цены.

В случае единичной эластичности $1+\eta=0$ и изменение цены не вызывает изменение выручки.

Задача максимизации дохода.

При определении максимального возможного дохода государства от сбора налогов находиться экстремум функции.

Пример 5. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -3x + 12,$$

$$p = 2x + 2.$$

Найти величину налога t, при которой доход государства будет максимален.

Решение. После введения налога t имеем систему

$$\begin{cases} \eth_{\tilde n} = -3\tilde o + 12, \\ \eth_s = 2\tilde o + 2 \\ \eth_{\tilde n} = \eth_s + t \end{cases}$$

Выражаем t через x и подставляем в функцию T, определяющую доход государства:

$$-3x + 12 = 2x + 2 + t$$

$$t = 10 - 5x$$

T = *x* t = *x(\0 - 5x)* = 10x – $5x^2$.

Находим максимум функции T:

$$T' = 10 - 10x = 0$$

$$x = 1$$

$$T'' = -10 < 0,$$

следовательно, $x = 1$ — точка максимума.

В точке $x = 1$ находим t = 5, T = 5. Следовательно, доход государства максимален при t= 5.

3. Применение интегрального исчисления

Интегрирование используется для нахождения функций издержек, прибыли, потребления, если известны соответственно функции предельных издержек, предельной прибыли и т.д. Для определения произвольной постоянной интегрирования необходимо дополнительное условие, если находится функция издержек, используется то, что ее значение в точке $x = 0$ (x — число единиц произвольной продукции) равно значению фиксированных издержек, а при определении функции дохода — то, что ее значение в точке $x = 0$ равно нулю (доход равен нулю, если не продано -ни одного изделия).

6. Задана функция предельного дохода

$$R'(x) = 20 - 0{,}04x.$$

Найти функцию дохода и закон спроса на продукцию.

Решение.

$$R(x) = \int (20 - 0{,}04x)\,dx = 20x - 0{,}04\frac{x^2}{2} + C = 20x - 0{,}02x^2 + C,$$

$$R(0) = 0, \text{ следовательно, } C = O,$$

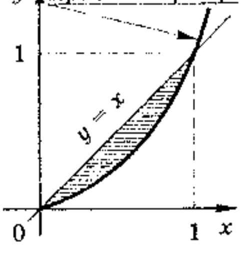
$$R(x) = 20[- 0{,}02x^2.$$

Если каждая единица продукции продается по цене p, то доход определяется формулой $R = xp$. Следовательно, деля на x функцию дохода, находим закон спроса $p(x)$:

$$p = 20 - 0{,}02x.$$

Коэффициент неравномерности распределения дохода.

Рассмотрим функцию $y = F(X)$, где y — это доля совокупного дохода, получаемая частью x наиболее низко оплачиваемого населения. Например, $y(0{,}8) = 0{,}6$ означает, что 80% наиболее низко оплачиваемого населения получают 60% совокупного дохода. Очевидно, что $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $y \le x$. Предположим, что нет населения с нулевым доходом, т.е. $y(0) = 0$, и весь доход получается всей совокупностью населения, т.е. $y(1) = 1$.



На рисунке показан пример графика функции $y = f(x)$. Эта кривая называется *кривой Лоренца.* Если бы распределение доходов было совершенным, то 10% населения получали бы 10% совокупного дохода, *20%* населения — 20% дохода и т.д. Тогда кривой распределения доходов была бы прямая $y = x$. Отклонение реального распределения доходов от идеального измеряется отношением L площади между прямой $y = x$ и кривой Лоренца к площади, ограниченной прямыми $y = x$, $x = 1$ и осью x, и называется *коэффициентом неравномерности распределения доходов.*

Очевидно, что $0 \le L \le 1$. Значение $L = 0$ соответствует совершенному распределению доходов.

Кривая обучения.

Часто необходимо оценить, сколько времени потребуется для производства некоторого дополнительного количества продукции. Для подобных расчетов пользуются так называемой кривой обучения.

Пусть *T=F(x)*— время, измеряемое в человеко-часах, необходимое для производства первых x единиц продукции. Тогда f(x) = *F'(x)* приближенно равно времени, необходимому для производства (x+1) – й единицы продукции. Обычно используют функции вида

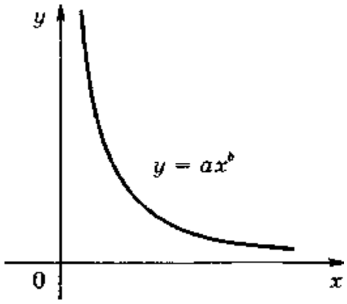
$f(x)=ax^{è}$

где $a > O$, $-1 \le b \le 0$.

график функции такого вида изображен на рис. 9 и называется *кривой обучения.*

Функция *f(x)* — убывающая, так как время, необходимое для выполнения некоторой операции, убывает при возрастании. числа повторов. Время ΔT, необходимое для производства единиц продукции с номерами от (n_1+1) до n_2, определяется формулой

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx.$$



Пример 7. После сборки 100 часов оказалось, что в дальнейшем время убывает в соответствии с формулой $y = 15x^{-0,14}$. Найти время, которое потребуется для сборки еще 20 часов (т.е. с номера 101 до номера 120).

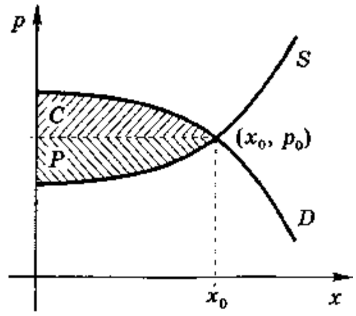
Решение

$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0,14}dx = \left.\frac{15x^{0,86}}{0,86}\right|_{100}^{120} = \frac{1500}{86}(120^{0,86} - 100^{0,86}) = 8,91.$$

Выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков.

Пусть кривая спроса D на некоторый товар и *p = g(x)* — кривая предложения S; (x_0, p_0) — точка рыночного равновесия. Некоторые потребители могут заплатить за товар цену $p>p_0$. Найдем выигрыш потребителей от установленной цены p_0. Разобьем отрезок $[0, \tilde{o}_0]$ на n частей и обозначим точки разбиения $0=x_0, x_1,\ldots,x_n=x_0$/

На каждом интервале выберем точку x_i^* Є $[\overline{\tilde{o}_{i-1}}, \overline{\tilde{o}_{i.}}$, x;]. Выигрыш потребителей на этом отрезке равен (p(x_i^*)- p_0) Δx_i,   где $\Delta x_i = \overline{\tilde{o}_{i,}} - \overline{\tilde{o}_{i-1,}}$.



Суммируя все выигрыши, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} (p(x_i^*) - p_0)\Delta x_i$$

Если функция спроса непрерывна и $n \to \infty$, а длина максимального отрезка разбиения $\max |\Delta x_i| \to 0$, то эта интегральная сумма имеет предел, равный

$$\int_0^{x_0} (f(x) - p_0)dx$$

Таким образом, *выигрыш потребителей*

$$\tilde{N} = \int_0^{\div_0} f(x)dx - p_0 x_0.$$

Аналогично находится *выигрыш поставщиков:*

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx.$$

Очевидно, что выигрыш потребителей равен площади, заключенной между кривой спроса D и прямой $p = p_0$. Выигрыш поставщиков равен площади, заключенной между прямой р — p_0 и кривой предложения 5.

Пример 8. Известны законы спроса и предложения:

$$p = 116 - x^2,$$
$$p = \frac{5}{3}x + 20.$$

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если было установлено рыночное равновесие.

Решение. Найдем точку рыночного равновесия:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20$$

$$3x^2 + 5x - 228 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+3456}}{6}, \text{ откуда } x_1 = 9; \quad x_2 = -\frac{32}{3}$$

$$x_0 = 9, \quad p_0 = 35$$

$$p_0 x_0 = 35 \cdot 9 = 315$$

$$C = \int_0^9 (116 - x^2)dx - 315 = \left(116x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^9 - 315 = 486$$

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20\right)dx = 315 - \left(\frac{5}{3}\frac{x^2}{2} + 20x\right)\Big|_0^9 = 315 - \frac{5}{6}\cdot 81 - 180 = 67{,}5.$$

Среднее значение.

Среднее значение непрерывной функции на промежутке [a,b] находится по формуле

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int f(x)dx$$

Среднее значение функции используется при вычислении налога на имущество предприятия. Величина налога

$$N = kf(c) = k\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

где k — коэффициент, зависящий от вида предприятия;

f/(c) — среднее значение стоимости имущества за год;

[a, b] — промежуток времени, равный году.

Интеграл вычисляется приближенно по формуле трапеций с разбиением года на 12 месяцев:

$$N = \frac{k}{12}\left(\frac{f(0) = f(12)}{2} + f(1) + f(2) + ... + ... f(11)\right)$$

где f(0) — стоимость имущества на 1 января;

f(1) — стоимость имущества на 1 февраля;

…

f(11) — стоимость имущества на 1 декабря;

f(12) — стоимость имущества на 1 января следующего года.

Задача максимизации прибыли.

В ряде отраслей промышленности, например, в горнодобывающей, после некоторого момента времени прибыль начинает убывать. В этом случае необходимо найти момент времени, в который прибыль принимает максимальное значение, и своевременно остановить производство.

Пример 9. Скорости изменения издержек и дохода во времени имеют следующий вид:

$$C'(t) = 2 + t,$$

$$R'(t) = 17 - 2t\ .$$

Найти максимальное значение прибыли, которое можно получить от этого производства. Когда производство следует остановить?

Решение.

$$P'(t) = R'(t) - C'(t) = 17 - 2t - 2 - t = 15 - 3t$$

$P'(t) = 0$ при t=0

$P'' = -3$<0,следовательно, t=5 – точка максимума.

$$P(5) = \int_0^5 P'(t)\mathrm{d}t = \int_0^5 (15 - 3t)\mathrm{d}t = \left(15t - 3\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^5 = 75 - \frac{3}{2} \cdot 25 = \frac{75}{2}\ .$$

Изменение капитала.

Если I(t) – скорость изменения инвестиций, а A(t) – капитал предприятия, то

$$I(t) = \frac{dA}{dt}$$

Зная скорость изменения инвестиций, можно найти изменение капитала по формуле

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

4. Применение дифференциальных уравнений

Эластичность и функция спроса.

Если известна эластичность спроса на некоторый товар, то можно найти функцию спроса.

Пример 10. Эластичность $\eta = \dfrac{p}{x}\dfrac{dx}{dp}$,

для любых значений p. Найти функцию спроса.

Решение. Пользуясь определением эластичности

$\eta = \dfrac{p}{x}\dfrac{dx}{dp}$,

получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{3}$$

$$3\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{p}.$$

Интегрируем и получаем уравнение спроса:

$$3\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{dp}{p}$$

$$3\ln|x| = -\ln|p + \ln C|$$

$$px^3 = C.$$

Примечание. Для определения C нужна дополнительная информация.

Уравнение снабжения.

Уравнением снабжения или *логистики* называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = py(m-y),$$

где p и m – постоянные.

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y(m-y)} = pdt$$

$$-\frac{dy}{y^2 - my} = pdt.$$

Выделяем полный квадрат в знаменателе левой части равенства и интегрируем:

$$-\int \frac{dy}{(y-\frac{m}{2})^2 - \frac{m^2}{4}} = pdt$$

$$\frac{1}{m}\ln\left|\frac{y-m}{y}\right| = -pt - C$$

$$\frac{y-m}{y} = e^{-mpt}e^{-c}.$$

Из последнего равенства находим y*:*

$$y = \frac{m}{1+e^{-mpt}e^{-c}}.$$

Если обозначить k = *mp, A* — e^{-c}, то получится функция, называемая *функцией снабжения (логистики):*

$$y = \frac{m}{1+1+Ae^{-kt}},$$

где значение A определяется из начального условия.

Уравнение снабжения используется для моделирования ограниченного роста населения. При *y* = *m* имеем$\frac{dy}{dt}$ = 0 и производная меняет знак с « + » на « —». Следовательно, *y* = *m* — максимальное значение. Если $y \le m$, то

$$\frac{dy}{dt} \approx pmy = ky.$$

Уравнение $\frac{dy}{dt} = ky$ имеет решение $y = e^{kt}$ и описывает н е о г р а н и ч е н н ы й экспоненциальный рост населения.

Пример 11. Известно, что рост количества бактерий в сосуде удовлетворяет уравнению логистики с постоянной *k* = *pm* — 0,2. Пусть в начальный момент времени количество бактерий составляло 1% от максимально возможного значения *m*. За какое время количество бактерий достигнет *80%* от максимального?

Решение.

$$\frac{dy}{dt} = py(m-y) = \frac{0,2}{m}(m-y)$$

$$\frac{mdy}{y(m-yz)} = 0,2dt.$$

Интегрируем и, используя условия y < m,получаем

$$\ln\frac{m-y}{y} = -0,2 - C.$$

Пользуясь начальным условием y = 0, 01 m при $t = 0$, находим значение C *и* подставляем его в решение:

$$\ln\frac{0,99}{0,01} = -C$$

C=-ln99

$$\ln\frac{m-y}{99y} = -0,2t$$

$$\frac{m-y}{99y} = e^{-0,2t}$$

$$y = \frac{m}{1+99e^{-0,2t}}$$ - решение задачи.

Найдем теперь значение t, при котором y = 0,8m;

$$0,8 = \frac{1}{1+99e^{-0,2t}}$$

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{396}$$

-0,2t=-ln396

t=51n396$\approx$29,91.

Функции спроса и предложения.

В простейших случаях предполагается, что опрос и предложение на рынке зависят только от цены товара. В более сложных моделях учитывается их зависимость и от изменения цены, т.е. от производной. При этом для определения равновесной цены используется дифференциальное уравнение.

Пример 12. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид

$$x=19+p+4\frac{dp}{dt},$$

$$x=28-2p+3\frac{dp}{dt}.$$

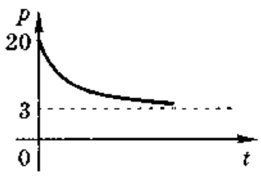
Найти зависимость равновесной цены от времени *t*, если в начальный момент времени цена *p* = 20.

Решение.

$19+\eth+4\frac{dp}{dt}=28-2p+3\frac{dp}{dt}$

$\frac{dp}{dt}=9-3p$

$\frac{dp}{9-3p}=dt$



$-\frac{1}{3}\ln|9-3p|=t+C$

$9-3p=e^{-3t-3C}$

$p=\frac{9-e^{-3t-3C}}{3}.$

$9-3p=e^{-3t-3C}$

$p=\frac{9-e^{-3t-3C}}{3}.$

Подставляя начальное условие, находим C:

$20=\frac{9-e^{-3C}}{3}$

$e^{-3C}=-51$

$p=\frac{9+51e^{-3t}}{3}=3+17e^{-3t}$ – решение задачи.

Так как $\lim\limits_{t\to\infty}p=3$,

имеет место устойчивость. Если $\lim\limits_{t\to\infty}p=\infty$, то равновесная цена растет и имеет место инфляция.

Пример 13. Найти функцию спроса, если эластичность η постоянна и задано значение цены *p* в некоторой точке *x*:

а) η = -2, p=10 при x = 4

б) η = $\frac{4}{5}$, p = 15 при x = 1;

в) η = -$\frac{1}{2}$, p = 5 при x = 2;

г) η = -3, p = 2 при x = 27.

Пример 14. Найти функцию спроса, если известно значение цены p в некоторой точке x и эластичность имеет следующий вид:

а) $\eta = \frac{\tilde{o}-100}{\tilde{o}}$, $0 < x < 100$ и $p = 90$ при $x = 10$;
б) $\eta = \frac{p}{p-20}$, $0 < p < 20$ и $p = 18$ при $x = 1$;
в) $\eta = \frac{\tilde{o}-300}{\tilde{o}}$, $0 < x < 300$ и $p = 36$ при $x = 12$;
г) $\eta = \frac{p}{p-40}$, $0 < p < 40$ и $p=10$ при $x = 3$

Межотраслевой баланс

Хозяйство любой развитой страны насчитывает десятки отраслей и тысячи предприятий. Предприятия соединены множеством различных связей. Практически любое производство потребляет продукцию всех производств, включая свою собственную. В этих условиях планирование согласованной и бесперебойной работы предприятий является очень сложной задачей. Для того, чтобы яснее представить себе возникающие здесь задачи, рассмотрим следующий пример. Пусть мы хотим увеличить выплавку металла. Для этого надо не только построить сталелитейные заводы, но и увеличить добычу железной руды, угля, известняка, выработку электроэнергии и т.д. но увеличение выработки, например, электроэнергии требует дополнительного количества топлива, для перевозки которого нужен дополнительный транспорт, для постройки дополнительного транспорта – дополнительный металл, для дополнительного металла – дополнительная руда, уголь, электроэнергия и т.д. получился замкнутый круг, из которого необходимо найти выход. С этой целью изучим, как распределяется продукция каждой отрасли.

Каждая отрасль производит продукцию для производственного потребления (промежуточную) и для потребления населением и накопления (конечную). Поэтому сумма потребления продукции различными отраслями и конечная продукция равна всему производству данной отрасли, т.е. ее валовой продукции.

Пусть наше хозяйство содержит п отраслей. Обозначим через x_i величину валовой продукции i-й отрасли за планируемый период, а через y_i – величину конечного продукта этой отрасли. Кроме того, через x_{ij} обозначим величину продукции i-й отрасли, которая затрачивается на производство продукции j-й отрасли. Теперь можно составить таблицу.

		Потребление							
		1	2	…	***j***	…	***n***	Конечный продукт	Вал
Производство	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	y_2	x_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$
	i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	y_i	x_i
	$\vdots$								
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	y_n	x_n

Каждый столбец этой таблицы показывает материальные затраты на производство продукции соответствующей отрасли. Полученная таблица представляет собой межотраслевой баланс производства и распределения продукции между отраслями хозяйства.

Очевидно, что сумма промежуточной и конечной продукции каждой отрасли равна ее валовой продукции. Поэтому величины, расположенные в строках приведенной таблицы, связаны следующими балансовыми уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 - \left(x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}\right) = y_1, \\ x_2 - \left(x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n}\right) = y_2, \\ \vdots \\ x_n - \left(x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn}\right) = y_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Введем обозначение: $a_{ik} = \dfrac{x_{ik}}{x_k}$. *Коэффициенты a_{ik} называются коэффициентами прямых затрат и представляют собой затраты продукции i-й отрасли на изготовление единицы продукции к-й отрасли*. Величина a_{ik} зависит главным образом от технологии производства в $к$-й отрасли. Опыт показывает относительную устойчивость большинства коэффициентов прямых затрат на протяжении некоторого отрезка времени (среднего срока освоения и внедрения технологических новшеств). Поэтому мы будем считать, что a_{ik} – постоянные величины в течение планируемого периода.

Подставим значения $x_{ik} = a_{ik}x_к$ во все уравнения системы (32) и получим систему линейных балансовых уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right) = y_1, \\ x_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\right) = y_2, \\ \vdots \\ x_n - \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\right) = y_n. \end{cases} \tag{33}$$

Система уравнений (33) помогает ответить на различные вопросы, связанные с межотраслевым балансом. К примеру, применим ее для нахождения так называемых коэффициентов полных затрат.

Перепишем систему (33) в виде:

$$\begin{cases} \left(1 - a_{11}\right)x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = y_1, \\ -a_{21}x_1 + \left(1 - a_{22}\right)x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = y_2, \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - \left(1 - a_{nn}x_n\right) = y_n. \end{cases} \tag{2}$$

Квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей коэффициентов прямых затрат. Матрица системы (34) получается вычитанием матрицы A из единичной матрицы E:

$$\begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12}\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22}\ldots & -a_{2n} \\ \vdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2}\ldots & 1 - a_{nn} \end{pmatrix} = E - A.$$

Если ввести матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad У = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то систему (34)можно записать в виде матричного уравнения

$$X(E\text{-}A) = У.$$

Если матрица Е-А невырожденная, то получим

$$X = (E\text{-}A)^{-1}\, У, \tag{3}$$

или в более подробной записи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2}\ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

где через b обозначены элементы матрицы $(E\text{-}A)^{-1}$, обратной к матрице $(E\text{-}A)$.

Выясним экономический смысл коэффициентов b_{ij}. Для этого из системы (5) запишем:

$$x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и предположим, что конечный продукт y_j j-й отрасли увеличили на единицу, а конечные продукты всех остальных отраслей оставили без изменения. В этом случае валовая продукция i-й отрасли увеличится на b_{ij}, так как $b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{ij}(y_i+1) + \ldots + b_{in}y_n - b_{i1}y_1 - b_{i2}y_2 - \ldots - b_{ij} - \ldots - b_{in}y_n = b_{ij}$.

Таким образом, b_{ij} является приращением валового продукта i-й отрасли, отвечающим единичному приращению конечного продукта j-й отрасли. *Числа b_{ij} принято в экономике называть коэффициентами полных затрат*, потому что они характеризуют не только прямые затраты продукта i-й отрасли на производство единицы *конечного* продукта j-й отрасли, но и косвенные затраты продукта i-й отрасли во всех других отраслях, так или иначе связанных с j-й отраслью. Так, например, электроэнергия необходима и для выплавки стали, и для производства чугуна, из которого выплавляется сталь, и для добычи руды, из которой производится чугун, и т.д.

Еще раз подчеркнем, что коэффициенты полных затрат выражают затраты валовой продукции i-й отрасли, отнесенные не к единице валовой продукции, а к единицы конечного продукта j-й отрасли.

Матрица $(E-A)^{-1}$ называется матрицей коэффициентов полных затрат.

Формула (4) показывает, что для нахождения валового производства во всех отраслях достаточно матрицу коэффициентов полных затрат умножить слева на столбец конечных продуктов.

Пример 1. Найти объемы годового валового производства угля x_1, чугуна x_2 и стали x_3 при следующей матрице коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 2 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 1 \\ 0{,}18 & 0{,}11 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

и заданных объемах конечных продуктов (в млн. т.): $y_1 = 30$, $y_2 = 10$, $y_3 = 20$.

Решение. Находим сначала матрицу $E–A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -2 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & -1 \\ -0{,}18 & -0{,}11 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

и вычислим ее определитель $|E - A| = 0{,}2$ (проверьте!). составляем присоединенную матрицу для $E–A$:

$$(E - A)^* = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 1{,}8 & 2 \\ 0{,}18 & 0{,}72 & 0{,}8 \\ 0{,}162 & 0{,}448 & 0{,}72 \end{pmatrix}$$

Находим матрицу коэффициентов полных затрат:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{|E - A|}(E - A)^* = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 9 & 10 \\ 0{,}9 & 3{,}6 & 4 \\ 0{,}81 & 2{,}24 & 3{,}6 \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу на столбец конечных продуктов, получаем

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 & 9 & 10 \\ 0,9 & 3,6 & 4 \\ 0,81 & 2,24 & 3,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 395 \\ 143 \\ 118,7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 395$, $x_2 = 143$, $x_3 = 118,7$ (млн. т.).

Пример 2. Рассмотрим крайне упрощенное описание экономики, в котором выделены две отрасли (сельское хозяйство и промышленность), один фактор производства (труд) и государственный сектор, который ничего не производит для экономики, и его потребление представляет собой конечный спрос на товары, производимы в отраслях. Кроме того, государственный сектор использует труд. В процессе производства каждая отрасль потребляет некоторое количество другой (и своей) отрасли, а также труд; рабочая сила нуждается в продукции обеих отраслей и, наряду с этим, в затратах труда для своего производства. Допустим, что мы наблюдали натуральные потоки продукции между этими четырьмя секторами экономики на протяжении некоторого периода и составили таблицу межотраслевого баланса.

Производственный сектор	**Потребляющий сектор**			
	Сельское хозяйство	Промышлен-ность	Труд	Конечный спрос (государство)
Сельское хозяйство (т)	600	400	1400	600
Промышленность (машин)	1500	800	700	1000
Труд (число занятых)	900	4800	700	600

Предположим, что в следующем периоде государственный сектор предполагает потребить 1000 т сельскохозяйственной продукции, 1200 машин и ему потребуется нанять на работу 800 человек. Определим, каковы должны быть уровни выпуска в каждом производственном секторе и трудовые ресурсы в следующем периоде.

Чтобы воспользоваться предыдущими результатами, нам надо составить матрицу A коэффициентов прямых затрат. Напомним, что элемент a_{ij} матрицы A определяется как количество продукции i, использованное для производства единицы продукции j. Если разделить объем продукции i, нужный сектору j, на общий выпуск продукции сектора j, то и получим коэффициент a_{ij}. Таким образом, $a_{11} = 600:3000 = 0,2$; $a_{21} = 1500:300 = 0,5$; $a_{31} = 900:3000 = 0,3$ (здесь $3000 = 600 + 400 + 1400 + 600$ – сумма показателей первой строки, т.е. общий выпуск продукции сельского хозяйства). Аналогично $a_{21} = 400:4000 = 0,1$; $a_{22} = 800: 4000 = 0,2$; $a_{23} =$

4800:400 = 1,2; (4000 = 1500 + 800 + 700 + 1000); a_{31} = 1400:700 = 0,2; a_{32} = 700:7000 = 0,1; a_{33} = 700:7000 = 0,1 (7000 = 900 + 4800 + 700 + 600).

Итак,

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 1,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \qquad У = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить искомый ответ, надо матрицу $(E\text{-}A)^{-1}$ умножить на $У$. Опуская промежуточные выкладки (сделайте их самостоятельно), получим:

$$(E - A)^{-1} У = \frac{1}{0,264} \begin{pmatrix} 0,60 & 0,33 & 0,17 \\ 0,48 & 0,66 & 0,18 \\ 0,84 & 0,99 & 0,59 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4287,88 \\ 5363,64 \\ 9469,70 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для удовлетворения новых показателей спроса необходимо произвести примерно 4288 т сельскохозяйственной продукции и 5364 машины, для чего потребуется 9470 работников.

Упражнение. Найти объемы производства в трехотраслевой модели, если матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$ и матрица объемов конечных продуктов $У = \begin{pmatrix} 46 \\ 69 \\ 46 \end{pmatrix}$.

Ответ: (240, 260, 210).

Тесты по теме «Линейная алгебра»

№	ЗАДАНИЕ	Укажите один вариант ответа
1	Корень уравнения $\begin{vmatrix} 4 & -x \\ x & 9 \end{vmatrix} = 0$ равен….	1) 4 2) -18 3) 6 4) 9
2	Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2\alpha - 3 \end{vmatrix}$ равен 0, если α равно …	1) -3 2) 3 3) 0 4) 2
3	Определитель $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ равен ….	1) -12 2) 0 3) 12 4) 8
4	Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -k \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю при k равном …	1) 11 2) -4 3) -1 4) 1
5	Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ равен …	1) -12 2) 12 3) 6 4) 11
6	Определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ k & 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю, при k равном …	1) -3 2) 0 3) -2 4) 2
7	Если A=$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$, то матрица 5A имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ -40 & -30 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -40 & -30 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ 40 & 30 \end{pmatrix}$.

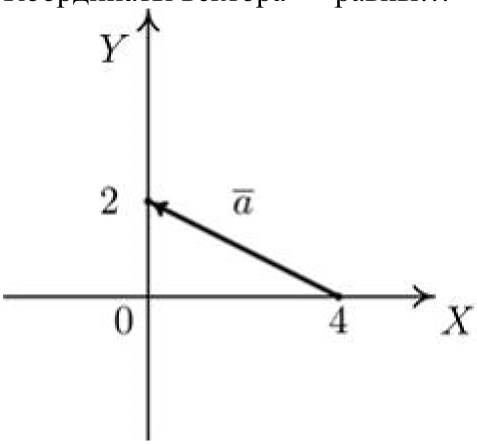
8	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда произведение матриц $A \cdot B$ равно …	1) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 16 & 8 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$
9	Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид …	1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) (1,8)
10	Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, то матрица C=A-2B имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$
11	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ Если C=A-B, то матрица C равна…	1) $\begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
12	Даны две матрицы: $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Элемент первой строки второго столбца произведения AB равен...	1) 23 2) 18 3) 16 4) 9
13	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $A \cdot B$ имеет размерность…	1) 3×3 2) 3×2 3) 2×2 4) 2×3

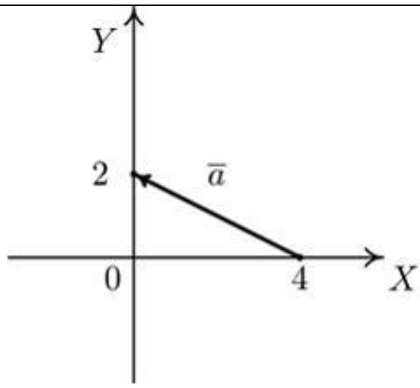
14	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$. Тогда матрица $C=A-2B$ имеет вид …	1) $\begin{pmatrix}-3&0\\-6&4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-1&1\\-3&4\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}5&4\\-6&4\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}-4&-2\\-6&0\end{pmatrix}$
15	Ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}-2&3&4&-1\\4&-6&-8&2\end{pmatrix}$ равен…	1) 1 2) 0 3) 2 4) 4
16	Даны матрицы A размерностью $[3\times4]$ и B размерностью $[4\times5]$. Тогда матрица $C=A\cdot B$ будет иметь размерность …	1) $[4\times4]$ 2) $[3\times5]$ 3) $[7\times9]$ 4) $[3\times4]$
17	Ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}-3&6&9&-6\\-1&2&3&-2\\2&-4&-6&4\end{pmatrix}$ равен…	1) 1 2) 0 3) 4 4) 3
18	Произведение матриц с размерностями $[2\times m]$ и $[2k\times3]$ возможно при …	1) $m=3, k=1$ 2) $m=1, k=2$ 3) $m=2, k=3$ 4) $m=2, k=1$
19	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$. Тогда матрица $C=A-2B$ имеет вид …	1) $\begin{pmatrix}-1&1\\-3&4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-4&-2\\-6&0\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}5&4\\-6&4\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}-3&0\\-6&4\end{pmatrix}$
20	Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&3&5\\-3&4&7\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}4&-3&2\\5&-6&-4\\0&2&-5\end{pmatrix}$. Тогда матрица $C=A+2B$ имеет вид…	1) $\begin{pmatrix}6&1&2\\1&0&6\\-6&10&9\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}5&-1&2\\3&-3&1\\-3&6&2\end{pmatrix}$

		3) $\begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ 10 & -12 & -8 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}$
21	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда произведение матриц $A \cdot B$ равно …	1) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 16 & 8 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$
22	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид …	1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 & 15 & 10 \end{pmatrix}$
23	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -9 & 8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Тогда элемент c_{23} матрицы $C = A \cdot B$ равен …	1) -3 2) 27 3) 11 4) -37
24	Если $(x_0; y_0)$ решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = -12 \\ 4x - 3y = -15 \end{cases}$, тогда $x_0 - y_0$ равно	1) 1,5 2) $-4{,}5$ 3) -1,5 4) 4,5
25	Если $(x_0; y_0)$ решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = -12 \\ 4x - 3y = -15 \end{cases}$, тогда $x_0 - y_0$ равно:	1) 4,5 2) $-4{,}5$ 3) -1,5 4) 1,5

Тесты по теме «Векторная алгебра»

№	ЗАДАНИЕ	Укажите один вариант ответа
1	Смешанное произведение векторов $\bar{a} = \lambda\bar{\imath} + \bar{\jmath}$, $\bar{b}$ $=6\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ и $\bar{c} = -3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$ равно 3 при λ равном …	1) 3 2) -3 3) 2 4) 1,5
2	Даны векторы: $\bar{a}(2;-1;3)$ и $\bar{b}(2;-1;3)$. Тогда вектор $\overline{2a-3b}$ имеет координаты…	1) $(1;-2;0)$ 2) $(1;-1;1)$ 3) $(8;-9;0)$ 4) $(1;0;-2)$
3	Даны три вектора $\bar{a}(1;2;-3)$, $\bar{b}(0;2;2)$,. $\bar{c}(-4;-1;1)$. Тогда вектор $\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ имеет координаты….	1) $(-3;5;0)$ 2) $(-3;1;-6)$ 3) $(3;-1;4)$ 4) $(-3;1;-4)$
4	Площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\bar{a}$ и $\bar{b}$, можно вычислить по формуле…	1) $S=\frac{1}{2}\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$ 2) $S=2\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$ 3) $S=\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$ 4) $S=2\bar{a}\times\bar{b}$
5	В ортонормированном базисе заданы вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Норма вектора $\bar{a}$ равна 3, норма вектора $\bar{b}$ равна 5. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$. Тогда модуль векторного произведения вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будет равен ….	1) 7,5 2) $7{,}5\sqrt{3}$ 3) $2{,}5\sqrt{3}$ 4) 2,5
6	В ортонормированном базисе векторы $\bar{a}(-6;3)$ и $\bar{b}(2;\alpha)$. Эти векторы будут взаимно перпендикулярны, если α равно….	1) -1 2) 1 3) 4 4) 5
7	Смешанное произведение векторов $\bar{a} = \lambda\bar{\imath} + \bar{\jmath}$, $\bar{b}$ $=6\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ и $\bar{c} = -3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$ равно 3 при λ, равном …	1) 3 2) -3 3) 2 4) 1,5

8	Градиентом скалярного поля $u = x^2y^3z$ в точке М (-1; 1; 2) является вектор …	1) $-2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + 2\bar{k}$ 2) $\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 2\bar{k}$ 3) $-4\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} + \bar{k}$ 4) $-2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}$
9	Линейное отображение задано в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$. Тогда координатами образа вектора $\overline{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ являются…	1) $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 21 \\ -26 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -28 \\ 18 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 18 \\ -28 \end{pmatrix}$
10	Длина вектора $\bar{a}(-5;12)$ равна…	1) 5 2) 12 3) 13 4) 7
11	Координаты вектора $\bar{a}$ равны…  	1) $(4,\ -2)$ 2) $(-4,\ 2)$ 3) $(4,\ 2)$ 4) $(-4,\ -2)$
12	Если $\bar{a} = (-1; 2; -3)$ и $\bar{b} = (-3; 1; 2)$, тогда скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$ равно…	1) 0 2) -1 3) 7 4) 10
13	Координаты вектора $\vec{a}$ равны:	1) (4,2) 2) (4,2) 3) (4,-2) 4) (4,-2)

			
14	Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{2j} + \vec{j} - \overrightarrow{2k}$ равна:	1) 3 2) $\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{5}$ 4) 2
15	Скалярное произведение векторов $\vec{a}(2;1)$ и $\vec{b}(1;-3)$ равно:	1) -1 2) 1 3) 0 4) 3
16	Даны два вектора $\bar{a} = (2;1;0)$ и $\bar{b} = (-3;0;2)$. Тогда вектор $\bar{c}$, перпендикулярный и вектору $\bar{a}$, и вектору $\bar{b}$, можно представить в виде …	1) $2\bar{i} - 4\bar{j} - 3\bar{k}$ 2) $2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$ 3) $2\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$ 4) $2\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$
17	Угол между векторами $\bar{a} = (-4;1;0)$ и $\bar{b} = (2;8;1)$ равен …	1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{2}$
18	Даны векторы $\vec{a}=\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{k}$, тогда векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ равно…	1) $3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ 2) $3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ 3) $-3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ 4) $3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$

19	Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j}$. Тогда длина суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна…	1) $2\sqrt{3}$ 2) 2 3) 12 4) 4

Тесты по теме «Аналитическая геометрия»

№	ЗАДАНИЕ	Укажите один вариант ответа
1	Общее уравнение прямой проходящей через точку А(-3;1) параллельно прямой **x-2y+7=0**. Имеет вид…	1) $x + 2y - 5 = 0$ 2) $x - 2y + 5 = 0$ 3) $x + 2y + 5 = 0$ 4) $x - 2y + 7 = 0$
2	Прямые **3x-y-5=0** и **x-4y+2=0** пересекаются в точке с координатами ….	1) $(2;1)$ 2) $(2;-1)$ 3) $(-2;-1)$ 4) $(-2;1)$
3	Прямая отсекает на оси Оу отрезок **b=5** и имеет угловой коэффициент $\frac{2}{3}$. Тогда ее общее уравнение имеет вид….	1) $2x + 3y - 15 = 0$ 2) $-2x + y - 5 = 0$ 3) $2x + 3y + 15 = 0$ 4) $2x - 3y + 15 = 0$
4	Уравнение окружности с центром в точке С (-5;2) и радиусом R=3 имеет вид….	1) $(x+5)^2 + (у-2)^2 = 9$ 2) $(x-5)^2 + (у-2)^2 = 9$ 3) $(x+5)^2 + (у+2)^2 = 9$ 4) $(x+5)^2 + (у-2)^2 = 3$
5	Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$, равен…	1) 3 2) 4 3) 2 4) 1
6	Дано уравнение $Ax^2 + By^2 = 1$. Это уравнение задает на плоскости …	1) элипс, если А и В положительны и различны 2) параболу, если В=0 3) окружность, если А и В положительны и равны 4) гиперболу, если А и В

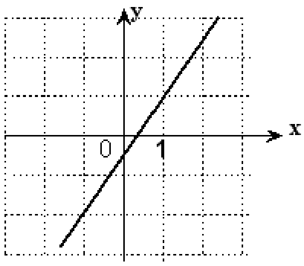
		имеют разные знаки
7	Прямая, проходящая через две точки $M_0(1;1)$, $M_1(3;4)$, параллельна прямым …	1) $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 2) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ 3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 4) $-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$
8	Прямая $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-3}$ пересекает плоскость $\alpha\cdot x+y-z+11=0$ только в том случае, когда α **не равно** …	1) $-\frac{1}{2}$ 2) 2 3) 4 4) 5
9	Даны точки $A(2;-4)$ и $B(-2;0)$. Тогда координаты точки M, симметричной точке B относительно точки A, равны…	1) $(16;-6)$ 2) $(-6;16)$ 3) $(-14;6)$ 4) $(6;-14)$
10	Точка M с декартовыми координатами $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ имеет полярные координаты…	1) $r=\sqrt{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$ 2) $r=\sqrt{2},\varphi=\frac{\pi}{4}$ 3) $r=2,\varphi=\frac{\pi}{4}$ 4) $r=1,\varphi=\frac{\pi}{6}$
11	Нормальный вектор плоскости $2x-y+7z-15=0$ имеет координаты…	1) (– 2; 1; – 7) 2) (– 1; 7; – 15) 3) (2; – 1; 7) 4) (2; 7; – 15)
12	Радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+4y+3=0$, равен…	1) 3 2) 4 3) 2 4) 1
13	Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$, является…	1) сферой 2) эллиптическим цилиндром 3) конусом 4) эллипсоидом
14	Если R – радиус окружности $x^2+y^2+6y=0$, то ее	1) 9

	кривизна $\frac{1}{R}$ всюду равна…	2) 3 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{9}$
15	Среди уравнений кривых укажите уравнения гиперболы.	1) $(x+2)^2-(y-1)^2=16$ 2) $3x^2+y^2=25$ 3) $x+y^2=9$ 4) x-y=8
16	Даны точки $A(-7;3)$ и $B(3;5)$. Тогда сумма координат середины отрезка AB равна…	1) 2 2) -2 3) 3 4) 4
17	Полярные координаты точки $A(3,-3\sqrt{3})$ имеют вид…	1) $\left(36,-\frac{\pi}{3}\right)$ 2) $\left(6,\frac{\pi}{6}\right)$ 3) $\left(6,\frac{\pi}{3}\right)$ 4) $\left(6,\frac{5\pi}{3}\right)$
18	Уравнение $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ на плоскости определяет:	1) эллипс 2) гиперболу 3) параболу 4) две пересекающиеся прямые
19	Полярные координаты точки A(3,-3$\sqrt{3}$) имеют вид:	1) $(36,\frac{\pi}{3})$ 2) $(6,\frac{\pi}{6})$ 3) $(6,\frac{\pi}{3})$ 4) $(6,\frac{5\pi}{3})$
20	Даны две смежные вершины квадрата: A(5;6) и B(-2,5). Тогда площадь этого квадрата равна:	1) $\sqrt{10}$ 2) 50

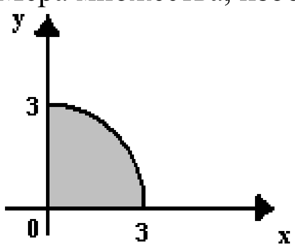
		3) 10 4) $\sqrt{50}$
21	Координата x_0 точки A(x_0; 1; 7), принадлежащей плоскости 5x+y+z+1=0, равна:	1) 1 2) 4 3) 3 4) 2
22	Даны точки $A(4;-2;7)$, $B(2;-1;12)$, $C(2;-1;-5)$ и $D(6;-3;-2)$. Тогда прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-5}{7}$ принадлежит точка…	1) A 2) B 3) C 4) D
23	Канонический вид уравнения окружности $r^2=(5+2r\cos\varphi)$ в прямоугольной системе координат имеет вид…	1) $(x-1)^2+y^2=6$ 2) $x^2+(y-1)^2=6$ 3) $x^2+y^2=5$ 4) $(x-1)^2+y^2=4$
24	Угловой коэффициент прямой заданной уравнением 6x-3y+7=0 равен…	1) 2 2) $\frac{1}{2}$ 3) -2 4) $\frac{7}{3}$
25	Общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;3)$ и $B(3;-3)$ имеет вид…	1) $-5x-y-7=0$ 2) $6x+5y-27=0$ 3) $6x\mp 5-3=0$ 4) $-5x+6y=0$
26	Дано уравнение гиперболы $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$. Тогда расстояние между её фокусами равно…	1) $4\sqrt{5}$ 2) 2 3) $\sqrt{5}$ 4) $4\sqrt{3}$
27	Синус угла между прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ и плоскостью $x-2y-3z+9=0$ равен….	1) $\frac{1}{196}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{70}}$ 3) $\frac{1}{-14}$ 4) $\frac{1}{14}$

28	Точка $A\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$ задана в полярной системе координат. Тогда в прямоугольной системе координат точка имеет вид…	1) (2;150) 2) $(-\sqrt{3};1)$ 3) $(1;-\sqrt{3})$ 4) $(\sqrt{3};-1)$
29	Общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;3)$ параллельно прямой $l: 2x-y-1=0$ имеет вид …	1) $2x-y-5=0$ 2) $x+2y-5=0$ 3) $2x-y+5=0$ 4) $-x+3y+5=0$
30	Координаты фокусов гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ равны…	1) $F_1(0;-5); F_2(0;5)$ 2) $F_1(\sqrt{7};0); F_2(\sqrt{7};0)$ 3) $F_1(-4;0); F_2(4;0)$ 4) $F_1(-5;0); F_2(5;0)$
31	Каноническое уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $A(-3;2;-4)$ и $B(2;-5;-1)$ может иметь вид…	1) $\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+4}{3}$ 2) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+1}{-4}$ 3) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+4}{-1}$ 4) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{-5}$
32	Каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3$ и $b=2$, с центром в начале координат имеет вид…	1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=0$ 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 4) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$
33	Действительная полуось гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ Равна….	1) 25 2) 4 3) 16 4) 5
34	Радиус окружности $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ Равен….	1) 9 2) 2 3) 4 4) 3

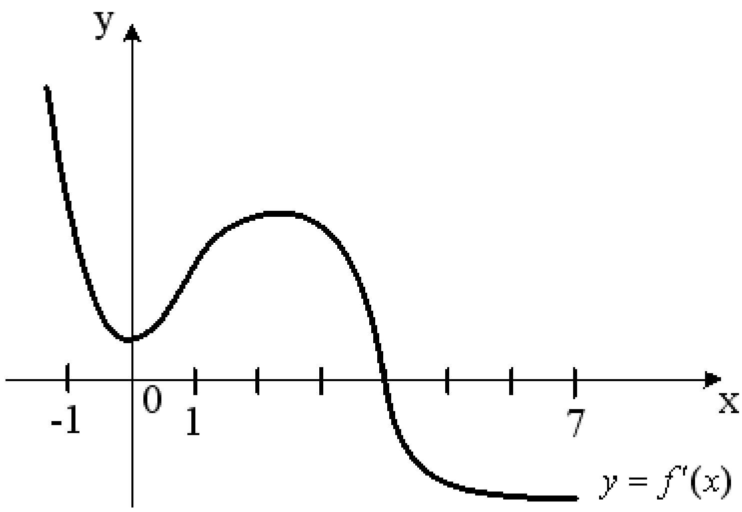
Тесты по теме «Функция. Предел и непрерывность функции. Производная функции»

№	ЗАДАНИЕ	Укажите один вариант ответа
1	Произведение комплексного числа $z = 4 - 3i$ на сопряженное число $\bar{z}$ равно …	1) 25 2) 5 3) 8-6i 4) 16-9i
2	График прямой линии, заданной уравнением  Ax+By+C=0, имеет вид Правильным утверждением является...	1) BC=0 2) BC<0 3) AB<0 4) AB>0
3	Пусть f(x)=tgx. Тогда сложная функция g(f(x)) четна, если функция g(x) задается формулами...	1) g (x)=3^x 2) $g(x) = x + 3$ 3) g (x)=$6x^2$ 4) g (x)=$\frac{3}{x^4}$+2
4	Производная функции $\frac{\ln x}{x}$ равна...	1) $\frac{1+\ln x}{x^2}$ 2) $\frac{1}{x^2}$ 3) $-\frac{1}{x^3}$ 4) $\frac{1-\ln x}{x^2}$
5	Предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$ равен….	1) 2 2) 1 3) 4 4) 0
6	Предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^3 4x}{x^3}$ равен….	1) 64 2) 4 3) 0 4) 1
7	Функция $f(x) = \frac{2}{x-1}$ непрерывна на отрезке…	1) $[0; 2]$ 2) $[-1; 0]$

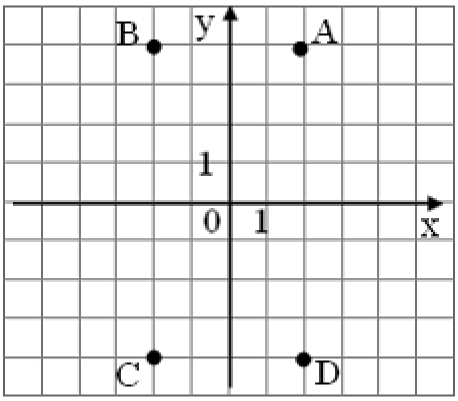
		3) $[-1;2]$ 4) $[-2;2]$
8	Для функции $f(x)=\frac{x+3}{x-4}$ x=4 является точкой….	1) непрерывности 2) разрыва первого рода 3) разрыва второго рода 4) устранимого разрыва
9	Количество точек разрыва функции $f(x)=\frac{(x+2)}{(x^2+16)(x^2-1)}$ равно….	1) 2 2) 1 3) 4 4) 3
10	Производная функции $y=2\sqrt{x}+x^3-1$ равна….	1) $\frac{1}{\sqrt{x}}+3x^2-1$ 2) $\frac{2}{\sqrt{x}}+3x^2$ 3) $\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+\frac{x^4}{4}-x$ 4) $\frac{1}{\sqrt{x}}+3x^2$
11	Производная функции $y=2\sqrt{x}+x^3-1$ равна … равна…	1) $\frac{2}{\sqrt{x}}+3x^2$ 2) $\frac{1}{\sqrt{x}}+3x^2-1$ 3) $\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+\frac{x^4}{4}-x$ 4) $\frac{1}{\sqrt{x}}+3x^2$
12	Производная функции $y=e^{x^2-x}$ равна…	1) e^{x^2-x-1} 2) $e^{x^2-x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)$ 3) $e^{x^2-x}(2x-1)$ 4) $e^{x^2-x}(x^2-x)$
13	Значение производной второго порядка функции $y=\sin 2x+4x$ в точке $x=\frac{\pi}{4}$ равно …	1) −4 2) 1 3) 4

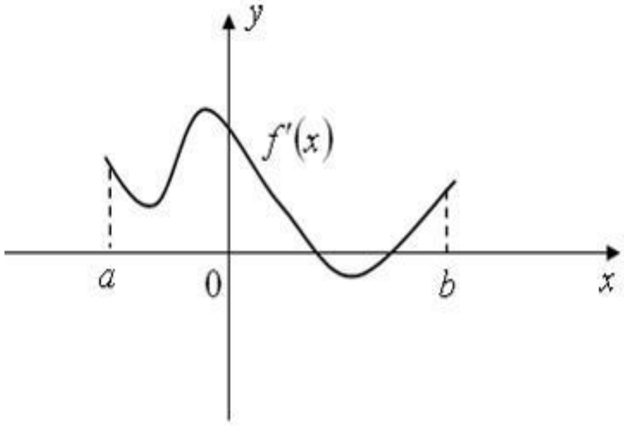
		4) -1
14	Для дробно-рациональной функции $y = \frac{x^2-1}{x^2+2x}$ точками разрыва являются ...	1) x = -2 2) $x = -1$ 3) x=0 4) x=1
15	Элементами множества натуральных чисел являются …	1) 3 2) 0 3) -10 4) 2
16	Мера множества, изображенного на рисунке,  равна …	1) $\frac{3\pi}{4}$ 2) $\frac{9\pi}{4}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{9\pi}{2}$
17	На числовой прямой дана точка x=5,1. Тогда её «-окрестностью» может являться интервал …	1) $(0;1)$ 2) $(-5;5)$ 3) (4,1; 6,1) 4) (5,1;6,1)
18	Произведение комплексного числа $z = 4 - 3i$ на сопряженное число $\bar{z}$ равно …	1) 25 2) 5 3) $8 - 6i$ 4) $16 - 9i$
19	Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 4i$. Тогда $3z_1 - 2z_2$ равно …	1) $-3 + 5i$ 2) $-7i$ 3) $9 + 5i$ 4) $-3 - 11i$
20	Если $f(z) = 2z^2 + 4$, тогда значение производной этой функции в точке $z_0 = 2 + i$ равно ...	1) $8 + i$ 2) $2 + i$ 3) $8 + 4i$

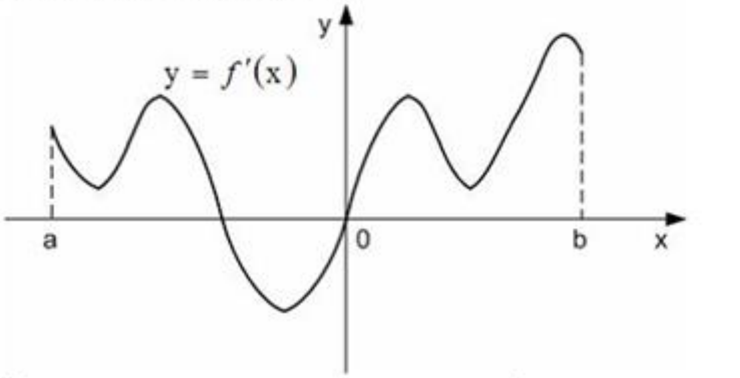
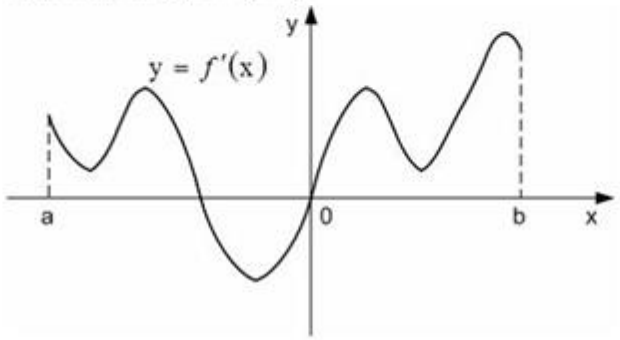
		4) $4+4i$
21	Действительный корень уравнения $x^3+x^2+x-1=0$ принадлежит интервалу …	1) $\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ 3) $\left(\frac{3}{2};2\right)$ 4) $\left(\frac{1}{2};1\right)$
22	Число действительных корней многочлена $P_5(x)=(x^3-1)(x^2-4x+5)$ с учетом их кратностей равно …	1) 3 2) 2 3) 5 4) 1
23	Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=\sin 2x+3x$ в точке $x=0$, равен …	1) 3 2) 5 3) 4 4) 1
24	Горизонтальной асимптотой графика функции $y=\dfrac{4-6x}{2x+6}$ является прямая, определяемая уравнением…	1) $y=-3$ 2) $x=\dfrac{2}{3}$ 3) $x=-3$ 4) $y=\dfrac{2}{3}$
25	На числовой прямой дана точка $x=5.3$. Тогда ее «-окрестностью» может являться интервал…	1) (5,3 ; 5,7) 2) (4,9 ; 5,3) 3) (5,1 ; 5,5) 4) (5,1 ; 5,8)
26	Даны два комплексных числа: $Z_1=4-6i$ и $Z_2=5-2i$. Тогда действительная часть произведения Z_1Z_2 равна…	1) 20 2) -12 3) 32 4) 8
27	Если $f(Z)=5Z^2-7$, тогда значение производной этой функции в точке $Z_0=3-3i$ равно…	1) 30 – 3i 2) 30 – 30i 3) 3 – 3i 4) 3 – 30i
28	Значение функции $f(Z)=Z^2+i$ в точке $Z_0=1+i$	1) 2 + 3i

	равно…	2) 3 + 2i 3) 3i 4) 2i
29	Необходимым и достаточным условием делимости натурального числа N на 60 является его делимость … Необходимым и достаточным условием делимости натурального числа N на 60 является его делимость …	1) на 2 и на 30 2) на 6 и на 10 3) на 3, на 4 и на 5 4) на 2, на 10 и на 3
30	Действительный корень уравнения $e^x + x - 1 = 0$ принадлежит интервалу	1) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ 3) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ 4) $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$
31	Значение предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$ равно…	1) ¾ 2) 0 3) 1 4) ¼
32	На рисунке изображен график **производной** функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-1; 7]$.  Тогда точкой максимума этой функции является…	1) 4 2) 2 3) -1 4) 0
33	Дана функция $f(z) = x^2 + y^2 i$, где $z = x + iy$. Тогда $f(1+2i)$ равно …	1) $1 + 2i$ 2) $1 + 4i$ 3) $1 + 16$ 4) $1 - 4i$

34	Суммой двух комплексных чисел $2+3i$ и $7-4i$ является …	1) $-5+7i$ 2) $9-i$ 3) $5-7i$ 4) $9+i$
35	Аргумент комплексного числа $5+5i$ равен …	1) $-\frac{3\pi}{4}$ 2) $\frac{3\pi}{4}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $-\frac{\pi}{4}$
36	Количество точек разрыва функции $f(x)=\dfrac{x-6}{(x^2+4x+4)\cdot(x^2+2x+4)}$ равно …	1) 1 2) 4 3) 2 4) 5
37	Производная второго порядка функции $y=\dfrac{3}{2x+5}$ равна …	1) $\frac{-6}{(2x+5)^2}$ 2) $\frac{6}{(2x+5)^3}$ 3) $\frac{24}{(2x+5)^3}$ 4) $\frac{12}{(2x+5)^3}$
38	Производная функции $y=\sin^3 x$ имеет вид …	1) $3\sin^2 x$ 2) $3\cos^2 x$ 3) $3\sin^2 x\cdot\cos x$

		4) $-3\sin^2 x \cdot \cos x$
39	Периодической является функция…	1) $f(x)=\frac{1}{x}$ 2) $f(x)=sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 3) $f(x)=\sqrt{x}$ 4) $f(x)=x^2$
40	Число i^{11} равно…	1) -1 2) i 3) - i 4) 1
41	Дано комплексное число z=-2-4i. Тогда комплексно-сопряженное число $\bar{z}$ на плоскости задается точкой.  	1) D 2) B 3) C 4) A
42	Закон движения материальной точки имеет вид x(t)=7+5t^2, где x(t) – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при t=1 равна:	1) 5 2) 12 3) 10 4) 17
43	Функция y=f(x) задана на отрезке [a;b]. Укажите количество точек экстремума функции, если график её производной имеет вид:	1) 1 2) 2 3) 3 4) 0

		
44	Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ равен …	1) e 2) −1 3) 0 4) 1
45	Количество точек разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x^2-4}}-2}$ равно …	1) 3 2) 4 3) 1 4) 2
46	На отрезке $[-2;3]$ непрерывна функция …	1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-12}$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-8}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x-6}$
47	Уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-1$ в его точке с абсциссой $x_0=2$ имеет вид …	1) $y=4x-5$ 2) $y=2x-1$ 3) $y=-4x+11$ 4) $y=4x+11$
48	Минимум функции $f(x)=x^3-x^2-x$ равен …	1) $-\frac{1}{3}$ 2) 1

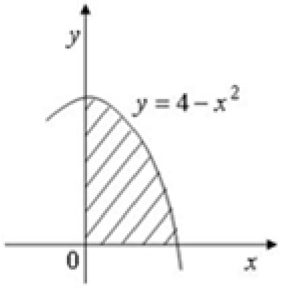
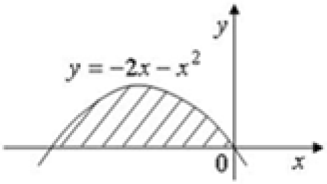
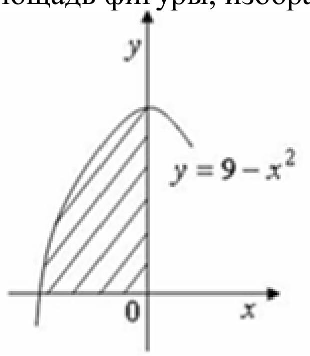
		3) -3 4) -1
49	Количество точек разрыва функции $y=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0 \\ 2x, & \text{если} \quad 0<x<1 \\ 1, & \text{если} \quad 1\le x<3 \\ x-2, & \text{если} \quad x>3 \end{cases}$ равно …	1) 1 2) 0 3) 3 4) 2
50	На рисунке изображен график производной функции $y=f'(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$.  Тогда число промежутков возрастания функции равно…	1) 4 2) 1 3) 2 4) 3
51	На рисунке изображен график производной функции $y=f'(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$.  Тогда число промежутков возрастания функции равно…	1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
52	Функция $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } x\le 1 \\ 3-ax^2, & \text{если } x>1 \end{cases}$ будет непрерывной при a равном …	1) 1 2) 2 3) -1 4) 5

53	Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)=5x^2-3x+1$ в его точке с абсциссой $x_0=2$ равен …	1) 13 2) 15 3) 18 4) 17
54	Если функция $f(x)$ имеет наименьший период T, то периодом этой функции не является число …	1) $\frac{T}{2}$ 2) 15T 3) -T 4) 2T
55	Если $z=x+iy$ и $f(z)=\bar{z}$, то $f'(z)$ имеет вид …	1) -1 2) не существует 3) 0 4) 1
56	Период функции $y=\operatorname{ctg}(3x+17)$ Равен..	1) 3π 2) π 3) 2 π 4) π/3

Тесты по теме «Интегралы»

№	ЗАДАНИЕ	Укажите один вариант ответа
1	Несобственный интеграл $\int_{-1}^{+\infty}(x+2)^{-4}dx$ равен...	1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) -1
2	Множество первообразных функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ имеет вид...	1) $\sqrt[3]{x^4}$+C 2) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$+C 3) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$+C 4) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^4}$+C
3	Множество первообразных функции $f(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ имеет вид …	1) $\sqrt{1+x^3}+C$ 2) $\ln(1+x^3)+C$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{1+x^3}}+C$

		4) $2\sqrt{1+x^3}+C$
4	Первообразными функции $y=\sin 10x$ являются …	1) $-0.1\cos 10x$ 2) $-\cos 10x-45$ 3) $0.1\cos 10x+31$ 4) $10\cos 10x$
5	Несобственный интеграл $\int_{-1}^{+\infty}(x+2)^{-4}dx$ равен...	1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) -1
6	Множество первообразных функции $f(x)=cos5x$ имеет вид …	1) $\frac{1}{5}sin5x+C$ 2) $-\frac{1}{5}sin5x+C$ 3) $5sinx+C$ 4) $5sin5x+C$
7	Определенный интеграл $\int_1^9\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$ равен …	1) $\ln 9$ 2) $-3+\ln 9$ 3) $-6+\ln 9$ 4) $\ln 8$
8	Неопределенный интеграл $\int\cos(3+4x)dx$ равен…	1) $\frac{1}{4}\sin(3+4x)+C$ 2) $-\sin(3+4x)+C$ 3) $\sin(3+4x)+C$ 4) $-\frac{1}{4}\sin(3+4x)+C$
9	Неопределенный интеграл $\int xe^{x^2}dx$ равен…	1) $2e^{x^2}+C$ 2) $e^{x^2}+C$ 3) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$ 4) $xe^{x^2}+C$
10	Неопределенный интеграл $\int(3x^2-\sqrt{x}+1)dx$ равен…	1) $x^3-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

		2) $x^3 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + C$ 3) $x^3 - 2x\sqrt{x} + x + C$ 4) $6x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + C$
11	Площадь фигуры, изображенной на рисунке  равна…	1) $\frac{16}{3}$ 2) $\frac{14}{3}$ 3) $\frac{8}{3}$ 4) $\frac{32}{3}$
12	Площадь фигуры, изображенной на рисунке  равна…	1) $\frac{8}{3}$ 2) $\frac{20}{3}$ 3) $\frac{5}{3}$ 4) $\frac{4}{3}$
13	Площадь фигуры, изображенной на рисунке  равна…	1) $\frac{46}{3}$ 2) 18 3) $\frac{28}{3}$ 4) 36
14	Множество первообразных функции $f(x) = \sqrt{4-3x}$ равно	1) $\frac{2}{9}\sqrt{(4-3x)^3} + c$ 2) $\frac{2}{3\sqrt{4-3x}} + c$ 3) $-2\sqrt{(4-3x)^3} + c$ 4) $-\frac{2}{9}\sqrt{(4-3x)^3} + c$
15	Определенный интеграл $\int_0^1 xe^x dx$ равен…	1) 1 2) 2e+1 3) -1

		4) $\frac{e}{2}$
16	Подынтегральная функция $f(x)$ нечетная и $f(x) \geq 0$ на то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ равен …	1) $2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ 2) $\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ 3) 0 4) $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx$
17	В неопределенном интеграле $\int \frac{x}{\sqrt{x}-1}\,dx$ введена нов переменная $t=\sqrt{x}$, тогда интеграл примет вид …	1) $2\int \frac{t^3}{t-1}\,dt$ 2) $\frac{1}{2}\int \frac{t^3}{t-1}\,dt$ 3) $\int \frac{t^3}{t-1}\,dt$ 4) $\int \frac{t^2}{t-1}\,dt$
18	Определенный интеграл $\int_{-1}^{2} \left(3x^2+4x-1\right)dx$ равен	1) 12 2) 18 3) 16 4) -12
19	Множество первообразных функции $f(x)=\frac{6}{1-3x}$ равно	1) $-2\ln\lvert 1-3x\rvert + c$ 2) $6\ln\lvert 1-3x\rvert + c$ 3) $\frac{2}{(1-3x)^2}+c$ 4) $2\ln\lvert 1-3x\rvert + c$
20	Определенный интеграл $\int_{0}^{3} e^{x/3}\,dx$ равен …	1) $3\cdot(1-e)$ 2) $(e-1)$

		3) $\frac{1}{3}(e-1)$ 4) $3\cdot(e-1)$
21	Подынтегральная функция $f(x)$ нечетная и $f(x)\ge 0$ на то $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ равен …	1) $2\int_{0}^{a} f(x)dx$ 2) $\int_{0}^{a} f(x)dx$ 3) 0 4) $\int_{0}^{2a} f(x)dx$

Тесты по теме «Дифференциальные уравнения»

№	ЗАДАНИЕ	Укажите один вариант ответа
1	Уравнение $y' - 3xy = (x+1)y^2$ является...	1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. 2) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. 3) дифференциальным уравнением первого порядка с разделенными переменными. 4) дифференциальным уравнением Бернулли.
2	Общее решение дифференциального уравнения	1)

	y'''=2x+1 имеет вид...	$y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + C$ 2) $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x$ 3) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x$ 4) $y = x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C$
3	Из данных дифференциальных уравнений уравнениями Бернулли являются …	1) $x\frac{dy}{dx} - y = y^2e^x$ 2) $y\frac{dy}{dx} + x^3 = 0$ 3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}$ 4) $\frac{dy}{dx} - 3x^2 + y = 0$
4	Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = xdx$ имеет вид …	1) $-\frac{1}{y} = x^2 + C$ 2) $y = \frac{x^2}{2} + C$ 3) $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$ 4) $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$
5	Однородному дифференциальному уравнению второго порядка $y'' - 4y' + y = 0$ соответствует характеристическое уравнение …	1) $\lambda^2 - 1 = 0$ 2) $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$ 3) $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ 4) $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$
6	Дано дифференциальное уравнение y'=(2k-2)x^3, тогда функция y=$x^4 - 3$ является его решением при k равном...	1) 3 2) 2 3) 1 4) 0
7	Порядок дифференциального уравнения $11y''+9y = x^3$ равен…	1) 2 2) 11

		3) 9 4) 3
8	Дано дифференциальное уравнение $y''+5y'+6y=0$. Тогда соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид…	1) $k^2-5k+6=0$ 2) $1+5k+6k^2=0$ 3) $k^2+5k+6=0$ 4) $k^2-5k-6=0$
9	Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 2x+1$ имеет вид …	1) $y=x^4+x^3+C_1x^2+C_2x+C_3$ 2) $y=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+$ $+C_2x+C_3$ 3) $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+C$ 4) $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+$ $+C^2x+C_3$
10	Дано дифференциальное уравнение y'=(2k-2)x^3, тогда функция y=x^4-3 является его решением при k равном...	1) 3 2) 2 3) 1 4) 0
11	Порядок дифференциального уравнения $11y''+9y=x^3$ равен…	1) 2 2) 11 3) 9 4) 3
12	Уравнение $y'-3xy=(x+1)y^2$ является …	1) дифференциальным уравнением Бернулли 2) дифференциальным уравнением первого порядка с разделёнными переменными 3) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными

		коэффициентами 4) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами
13	Порядок дифференциального уравнения $11y''+9y = x^3$ равен…	1) 2 2) 11 3) 9 4) 3
14	Дано дифференциальное уравнение $y'' - 4y' - 5y = 2e^{5x}$. Общим видом частного решения данного уравнения является …	1) $y(x) = C_0 + C_1 x$ 2) $y(x) = C_0 \cos 5x + C_1 \sin 5x$ 3) $y(x) = C_0 e^{5x}$ 4) $y(x) = C_0 \delta e^{5x}$
15	Уравнение $y' - \frac{y}{x} = x^3 e^x$ является…	1) линейным ДУ первого порядка 2) ДУ Треьего порядка 3) ДУ с разделяющимися переменными 4) однородным ДУ первого порядка
16	Дано дифференциальное уравнение $y'' - 4y' - 5y = 2e^{5x}$. Общим видом частного решения данного уравнения является …	1) $y(x) = C_0 + C_1 x$ 2) $y(x) = C_0 \cos 5x + C_1 \sin 5x$ 3) $y(x) = C_0 e^{5x}$ 4) $y(x) = C_0 \delta e^{5x}$
17	$y' - \frac{y}{x} = x^2$, $y(2) = 6$ Решение задачи Коши Имеет вид…	1) $y = \frac{x^3}{2} + x$ 2) $y = \frac{x^3}{2} - x$ 3) $y = x^3 - x$

		4) $y = \frac{x^3}{2} + Cx$
18	Функция $y = 3x^2 + k$ является решением дифференциального уравнения $xy' = 2(y+2)$. Тогда значение k равно …	1) 0 2) 2 3) -2 4) 1
19	Дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - 4y' - 5y = 0$. Тогда корни его характеристического уравнения равны …	1) $к_1=-1$, $к_2=5$ 2) $к_1=2+i$, $к_2=2-i$ 3) $к_1=0$, $к_2=4$ 4) $к_1=-5$, $к_2=1$
20	Функция $y = \frac{a}{x^2}$ будет частным решением задачи Коши: $y' + b\frac{y}{x} = 0$, $y(2) = 3$ при…	1) a=12, b=2 2) a=6, b=2 3) a=6, b=1 4) a=2, b=3
21	Общее решение дифференциального уравнения $xy' - y = x^2\cos x$ имеет вид….	1) $y = x\sin x + C$ 2) $y = x\sin x$ 3) $y = (C + \sin x)x$ 4) $y = (C - \sin x)x$
22	Общее решение дифференциального уравнения $y' = e^{x+y}$ имеет вид….	1) $y = \ln(C - e^x)$, $C - e^x > 0$ 2) $y = -\ln(1 - e^x)$ 3) $y = -\ln(C - e^x)$, $C - e^x > 0$ 4) $y = \ln(C + e^x)$, $C + e^x > 0$

Тесты по теме «Ряды»

№	**ЗАДАНИЕ**	**Укажите один вариант ответа**

1	Необходимый признак сходимости **не выполнен** для рядов …	1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+4}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{n}+2\right)$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{n^2+7}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3n^2-2}$
2	Укажите правильное утверждение относительно сходимости знакочередующихся рядов: А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+3}$ и В)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.	1) А сходится абсолютно, В сходится условно 2) А и В сходятся условно 3) А и В сходятся абсолютно 4) А сходится абсолютно, В расходится
3	Необходимый признак сходимости **не выполнен** для рядов…	1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+4}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{n}+2\right)$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}n$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{n^2+7}$
4	Дано дифференциальное уравнение $y' = y^2 - x$ при $y(0) = 1$. Тогда первые три члена разложения его решения в степенной ряд имеют вид …	1) $-1 + x + \frac{x^2}{2}$ 2) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 3) $1 + x + \frac{x^5}{6}$ 4) $1 + x + \frac{x^2}{2}1 + x + \frac{x^2}{2}$
5	Необходимый признак сходимости **не выполнен** для рядов …	1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+4}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{n}+2\right)$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{n^2+7}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3n^2-2}$
6	Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ равен 10, тогда интервал сходимости имеет вид…	1) (0;10) 2) (-10;0) 3) (-10;10)

		4) [-5;5]
7	Второй член a_2 числовой последовательности $a_n = \frac{4 \cdot 2^{2n-1}}{n}$ равен…	1) 18 2) 16 3) 4 4) 20
8	Если $f(x) = x^3 - 3$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд по степеням $(x-3)$ равен…	1) 0 2) 3 3) 1 4) 0,25
9	Первый член числовой последовательности $\frac{\sqrt{(n+1)(n+7)}}{n!+1}$ равен.	1) 3 2) $\frac{1}{20}$ 3) 1 4) 2
10	Если $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = l$, то числовой ряд сходится при l, равном...	1) -2,1 2) 0,3 3) -0,3 4) 2,1
11	Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 10, тогда интервал сходимости имеет вид:	1) (-10;0) 2) (-10;10) 3) (0;10) 4) [-5;5]
12	Если $f(x) = x^3 - 3$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд по степеням (x-3) равен...	1) 0 2) 3 3) 1 4) 0,25
13	Сумма числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$ равна….	1) $\frac{3}{5}$ 2) $\frac{8}{5}$ 3) $\frac{3}{11}$ 4) $\frac{3}{8}$

14	Даны числовые ряды: A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{5n+1}$, B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. тогда…	1) ряд A)сходится, ряд B) расходится 2) ряд A) расходится, ряд B) сходится 3) ряд A) расходится, ряд B) расходится 4) ряд A) сходится, ряд B) сходится
15	Даны числовые ряды: A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n+2}$, B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$. тогда…	1) ряд A)сходится, ряд B) расходится 2) ряд A) расходится, ряд B) сходится 3) ряд A) расходится, ряд B) расходится 4) ряд A) сходится, ряд B) сходится
16	Если радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-7)^n$ ра… , то интервал сходимости имеет вид …	1) $(4;10)$ 2) $(-\infty;4)\cup(10;+\infty)$ 3) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$ 4) $(-3;3)$
17	Сходящимся является числовой ряд…	1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-7}{n^2+6n-1}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+10}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{n^3}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$
18	Общий член числовой последовательности $-\frac{1}{4}; \frac{5}{16}; -\frac{9}{64}; \frac{13}{25\ldots}$ … имеет вид …	1) $\frac{(-1)^n(4n+1)}{4^n}$ 2) $\frac{(-1)^n(4n-3)}{4^n}$ 3) $\frac{(-1)^n(4n-1)}{4n}$

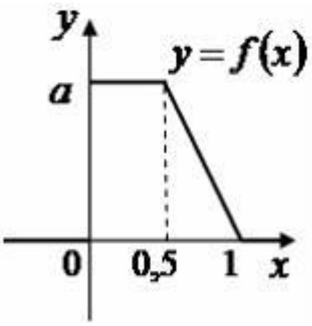
		4) $\frac{(-1)^{n+1}(4n-3)}{4^n}$
19	Общий член числовой последовательности $\frac{2}{9}; \frac{4}{11}; \frac{8}{13}; \ldots$ имеет вид …	1) $\frac{2n}{2n+7}$ 2) $\frac{2^n}{n+2}$ 3) $\frac{2^n}{2n+7}$ 4) $\frac{2n}{n+2}$
20	Если разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням (x-1) имеет вид $f(x) = -1+5(x-1)+(x-1)^2$, то коэффициент a_1 разложения данной функции в ряд Маклорена равен …	1) 1 2) 0 3) -5 4) 3
21	Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ равен 5, то интервал сходимости имеет вид …	1) $(0;25)$ 2) $(-5;5)$ 3) $(0;5)$ 4) $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$
22	Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = l$. Тогда l может быть равно …	1) 0,2 2) 0,12 3) 1 4) 1,2
23	Если $f(x) = (x+3)^2$, то коэффициент a_2 разложения данной функции в ряд Маклорена равен …	1) 9 2) 1 3) 6 4) 0
24	Общий член числовой последовательности $\frac{2}{9}; \frac{4}{11}; \frac{8}{13}; \ldots$ имеет вид …	1) $\frac{2^n}{2n+7}$ 2) $\frac{2n}{n+2}$ 3) $\frac{2^n}{n+2}$ 4) $\frac{2n}{2n+7}$

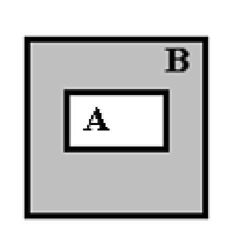
25	Область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$ имеет ви…	1) $[-5;5)$ 2) $(-5;5)$ 3) $[-5;5]$ 4) $(-5;5]$
26	Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \frac{1}{1-x}$ имеет вид: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$, $\lvert x \rvert < 1$. Тогда разложением в ряд Маклорена функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$ является …	1) $-1 + x - x^2 + x^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot x^n + \ldots$ 2) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ 3) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots$ 4) $-1 - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^n - \ldots$
27	Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится и $\lim\limits_{n \to \infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = l$. Тогда l может быть равно …	1) 0,12 2) 1,2 3) 1 4) 0,2

Тест по теме «Теория вероятностей»

№	ЗАДАНИЕ	Укажите один вариант ответа
1	Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет ***не менее пяти очков***, равна …	1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{5}{6}$
2	Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадает ***не более трех очков,*** равна...	1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{3}$

3	Несовместные события А, В, и С **не образуют** полную группу, если их вероятности равны...	1) $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{3}, P(C)=\frac{1}{4}$ 2) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{3}, P(C)=\frac{1}{3}$ 3) $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}, P(C)=\frac{2}{3}$ 4) $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{2}{3}, P(C)=\frac{1}{2}$
4	Вероятность достоверного события равна …	1) 1 2) 0 3) -1 4) 0,5
5	Из урны в которой находятся 6 черных, 4 белых и 10зеленых шаров, вынимают случайным образом один шар. Тогда вероятность того, что этот шар будет белым…	1) 0,25 2) 0,3 3) 0,4 4) 0,2
6	Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей: <table><tr><td>X</td><td>-1</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,6</td></tr></table>Тогда математическое ожидание случайной величины Y=4X равно...	1) 6,8 2) 8 3) 5,7 4) 7,6
7	Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что число очков выпавших на верхней гране будет меньше трех равна….	1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{6}$

8	При наборе телефонного номера абонент забыл последние две цифры и набрал их наудачу, помня только то, что это цифры нечетные и разные. Тогда вероятность того, что номер набран правильно равна…..	1) $\frac{1}{90}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{20}$ 4) $\frac{1}{5}$
9	Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что число очков выпавших на верхней гране будет меньше трех равна….	1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{6}$
10	График плотности распределения вероятностей f(x) случайной величины приведен на рисунке.  Тогда значение α равно...	1) 0,75 2) 1,2 3) 0,9 4) $\frac{4}{3}$
11	Имеются две одинаковые на вид урны. В первой урне находятся два белых и один черный шар. Во второй урне – два белых и два красных шара. Из наудачу взятой урны взяли два шара. Тогда вероятность того, что оба шара красные равна …	1) $\frac{1}{12}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{2}{7}$ 4) $\frac{1}{21}$
12	Непрерывная случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Тогда математическое ожидание этой нормально распреде ленной случайности величины равно …	1) 9 2) 4 3) 13 4) 18
13	Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго	1) 0,36

<table>
<tr><td></td><td>стрелков равны 0,9 и 0,4 соответственно. Тогда вероятность того, что в цель попадут оба стрелка, равна...</td><td>2) 0,5
3) 0,45
4) 0,4</td></tr>
<tr><td>14</td><td>В первом ящике 7 красных и 9 синих шаров, во втором-4красных и 11 синих. Из произвольного ящика достают один шар. Вероятность того, что он красный, равна...</td><td>1) $\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{9}+\frac{4}{11}\right)$
2) $\frac{1}{2}\times\frac{7+4}{9+11}$
3) $\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{16}+\frac{4}{15}\right)$
4) $\frac{7}{9}+\frac{4}{11}$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Пусть X-дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:<table><tr><td>X</td><td>-1</td><td>5</td></tr><tr><td>p</td><td>0,4</td><td>0,6</td></tr></table>Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно...</td><td>1) 2
2) 3,4
3) 2,6
4) 4</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [1;3]. Тогда случайная величина Y=3X+1 имеет...</td><td>1) нормальное распределение на отрезке [4;10]
2) другой(кроме равномерного и нормального) вид распределения
3) нормальное распределение на отрезке [3;9]
4) равномерное распределение на отрезке [4;10]</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,9 и 0,4 соответственно. Тогда вероятность того, что в цель попадут оба стрелка, равна...</td><td>1) 0,36
2) 0,5
3) 0,45
4) 0,4</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке,

является…</td><td>1) $A \setminus B$
2) $A \cap B$
3) $A \cup B$
4) $B \setminus A$</td></tr>
<tr><td>19</td><td>Событие A может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и</td><td>1) $\frac{1}{2}$</td></tr>
</table>

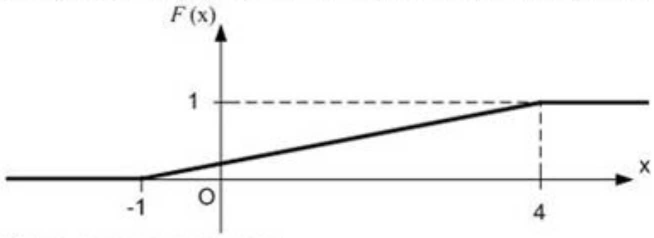
	B_2 , образующих полную группу событий. Известны вероятность $P(B_1)=\frac{1}{3}$ и условные вероятности $P(A/B_1)=\frac{1}{2}; P(A/B_2)=\frac{1}{4}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна …	2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{3}$
20	По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих разнотипную продукцию, равны 0,2 и 0,35. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна…	1) 0,55 2) 0,7 3) 0,07 4) 0,52
21	Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей: X: -1, 0, 3 P: 0.1, 0.3, 0.6 Тогда математическое ожидание случайной величины $y=4x$ равно…	1) 6,8 2) 7,6 3) 5,7 4) 8
22	Событие А может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2 , образующих полную группу событий. Известны вероятность $P(B_1)=\frac{1}{3}$ и условные вероятности $P(A/B_1)=\frac{1}{2}; P(A/B_2)=\frac{1}{4}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна …	1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{3}$
23	Число всевозможных способов, которыми можно извлечь из 6 различных учебников 3, равно …	1) 18 2) 12 3) 20 4) 120
24	В первом ящике 7 красных и 9 синих шаров, во втором — 4 красных и 11 синих. Из произвольного ящика достают один шар. Вероятность того, что он красный равна…	1) $\frac{7}{9}+\frac{4}{11}$ 2) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{9}+\frac{4}{11}\right)$ 3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{7+4}{9+11}$ 4) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{16}+\frac{4}{15}\right)$
25	Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелка равны 0,9 и 0,4 соответственно. Тогда вероятность того, что в цель попадут оба стрелка,	1) 0,5 2) 0,45

	равна…	3) 0,4 4) 0,36
26	Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [1;3]. Тогда случайная величина $Y = 3X + 1$ имеет…	1) Нормальное распределение на отрезке [4;10] 2) Другой (кроме равномерного и нормального) вид распределения 3) Равномерное распределение на отрезке [4;10] 4) Нормальное распределение на отрезке [3;9]
27	Пусть X — дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей; <table><tr><td>X</td><td>-1</td><td>5</td></tr><tr><td>p</td><td>0,4</td><td>0,6</td></tr></table>Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно…	1) 4 2) 3,4 3) 2,6 4) 2
28	Вероятность появления события A в каждом из 300 проведенных испытаний равна 0,3. Тогда вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от 80 до 100, можно оценить с использованием неравенства Чебышева как….	1) $P \geq 0,37$ 2) $P \geq 0$ 3) $P = 0,37$ 4) $P < 0,37$
29	В партии из 8 деталей имеется 5 бракованных. Наудачу отобраны 3 детали. Тогда вероятность того, что среди отобранных деталей- одна бракованная…	1) $\frac{3}{5}$ 2) $\frac{15}{56}$ 3) $\frac{3}{56}$ 4) $\frac{5}{56}$
30	Вероятность появления события A в каждом из 600 проведенных испытаний равна 0,6. Тогда вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от 350 до 370, можно оценить с использованием неравенства Чебышева как….	1) $P \geq 0,44$ 2) $P < 0,44$ 3) $P \geq 0$

		4) $P = 0,44$
31	Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей | X | 2 | 4 | | p | 0,4 | 0,6 | Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид…	1) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}4 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 0{,}6 \text{ при } x>4.\end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}4 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$ 3) $F(x)=\begin{cases}0{,}4 \text{ при } x\le 2,\\ 1 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 0 \text{ при } x>4.\end{cases}$ 4) $F(x)=\begin{cases}0{,}4 \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}6 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$
32	В ящике содержатся 20 деталей , изготовленных на заводе № 1 и 30 деталей, изготовленных на заводе № 2. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества равна 0,85, а на заводе № 2 равна 0,75. Тогда вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества, равна …	1) 0,8 2) 0,81 3) 0,675 4) 0,79
33	Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей: | X | -1 | 4 | | p | 0,2 | 0,8 | Тогда ее математическое ожидание равно…	1) 3,0 2) 4,0 3) 1,5 4) 3,4
34	Непрерывная случайная величина задана функцией распределения вроятностей: F(x)=0, при x≤0, F(x)=3x, при 0<x≤1/3; F(x)=1, при x≥1/3 Тогда плотность распределения вероятностей имеет вид…	1) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\le 0,\\ 3 \text{ при } 0<x<\frac{1}{3},\\ 0 \text{ при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$ 2)

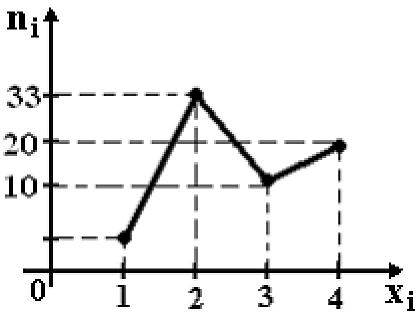
		$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{3x^2}{2} & \text{при } 0<x<\frac{1}{3},\\ x & \text{при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{3x^2}{2} & \text{при } 0<x<\frac{1}{3},\\ x & \text{при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{3x^2}{2} & \text{при } 0<x<\frac{1}{3},\\ x & \text{при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$ 3) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 3 & \text{при } 0<x<\frac{1}{3},\\ 1 & \text{при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 3 & \text{при } 0<x<\frac{1}{3},\\ 0 & \text{при } x>\frac{1}{3}.\end{cases}$
35	Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей: | X | 4 | 8 | | p | 0,6 | 0,4 | Тогда закон распределения вероятностей случайной величины $Y=\frac{1}{4}X+1$ имеет вид…	1) | Y | 2 | 3 | ; | p | 0,6 | 0,4 | 2) | Y | 2 | 3 | ; | p | 1,15 | 1,10 | 3) | Y | 2 | 3 | ; | p | 0,15 | 0,10 | 4) | Y | 1 | 2 | ; | p | 0,6 | 0,4 |

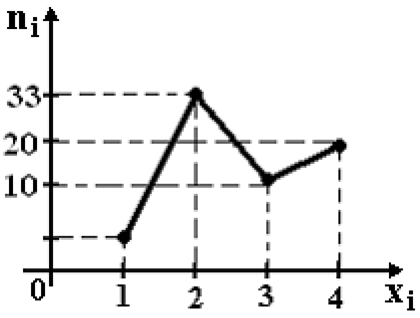
36	Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей <table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>p</td><td>0,4</td><td>0,6</td></tr></table>Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид…	1) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}4 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 0{,}6 \text{ при } x>4.\end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}4 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$ 3) $F(x)=\begin{cases}0{,}4 \text{ при } x\le 2,\\ 1 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 0 \text{ при } x>4.\end{cases}$ 4) $F(x)=\begin{cases}0{,}4 \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}6 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$
37	С первого станка на сборку поступает 30%, со второго – 70% всех деталей. Среди деталей первого станка 90% стандартных, второго – 80%. Тогда вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной, равна …	1) 0,83 2) 0,87 3) 0,29 4) 0,85
38	Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работ этих элементов (в течение рабочего дня) равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Тогда вероятность того, что в течение рабочего дня будут работать безотказно все три элемента, равна…	1) 0,72 2) 0,56 3) 0,8 4) 0,504
39	В первой урне 6 черных и 4 белых шара. Во второй урне 2 белых и 18 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался белым. Тогда вероятность того, что этот шар извлечен из первой урны, равна…	1) 0,4 2) 0,25 3) 0,2 4) 0,8

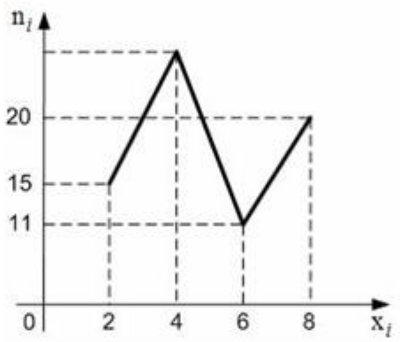
40	Непрерывная случайная величина задана функцией распределения вероятностей: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$ Тогда вероятность $P(-0{,}5<X<1{,}5)$ равна…	1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{9}{16}$ 3) $\frac{5}{8}$ 4) $\frac{3}{8}$
41	Функция распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины изображена на рисунке:  Тогда ее дисперсия равна…	1) 1,5 2) $\frac{3}{4}$ 3) 25 4) $\frac{25}{12}$

Тесты по теме «Математическая статистика»

№	ЗАДАНИЕ	Укажите один вариант ответа
1	Если основная гипотеза имеет вид H_0: a=9, то конкурирующей может быть гипотеза...	1) H_1:a≤9 2) H_1:a<9 3) H_1:a≠8 4) H_1:a≥9
2	Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=50: <table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>n_i</td><td>10</td><td>n_2</td><td>8</td><td>7</td></tr></table> Тогда n_2 равен...	1) 50 2) 26 3) 9 4) 25
3	Мода вариационного ряда 1,4,4,5,6,8,9 равна...	1) 1 2) 4 3) 5

		4) 9
4	Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 12. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...	1) (11,4;12) 2) (11,4;11,5) 3) (11,4;12,6) 4) (12;12,6)
5	Если основная гипотеза имеет вид H_0: a=9, то конкурирующей может быть гипотеза...	1) H_1:a≤9 2) H_1:a < 9 3) H_1:a≠8 4) H_1:a≥9
6	Дана выборка объема n. Если каждый элемент выборки увеличить в 5 раз, то выборочное среднее $\bar{x}$ …	1) увеличится в 5 раз 2) не изменится 3) увеличится в 25 раз 4) уменьшится в 5 раз
7	Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид: $y = 2{,}2 + 0{,}6x$, средние квадратические отклонения $\delta_x = 2, \delta_y = 1{,}5$.Тогда коэффициент корреляции равен …	1) 0,45 2) 1,8 3) 0,8 4) -0,8
8	Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=70, полигон частот которой имеет вид  Тогда число вариант $x_i = 1$ в выборке равно...	1) 7 2) 6 3) 8 4) 70
9	Мода вариационного ряда 1,2,3,4,4,6 равна...	1) 6 2) 5 3) 20 4) 4
10	Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 2,3,8,8. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна...	1) 5,5 2) 6 3) 5

		4) 5,25
11	Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 11. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...	1) (10,5;10,9) 2) (11;11,5) 3) (10,5;11,5) 4) (10,5;11)
12	Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=50: Тогда n_2 равен…	1) 50 2) 25 3) 26 4) 9
13	Мода вариационного ряда 1 , 4 , 4 , 5 , 6 , 8 , 9 равна...	1) 9 2) 4 3) 5 4) 1
14	Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 12. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...	1) (12; 12,6) 2) (11,4; 11,5) 3) (11,4; 12,6) 4) (11,4; 12)
15	Если основная гипотеза имеет вид $H_0 : a = 9$, то конкурирующей может быть гипотеза …	1) $H_1 : a \geq 9$ 2) $H_1 : a \leq 9$ 3) $H_1 : a \neq 8$ 4) $H_1 : a < 9$
16	Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=70, полигон частот которой имеет вид  Тогда число вариант выборки x_i=1 равно…	1) 8 2) 7 3) 6 4) 70
17	Мода вариационного ряда 1,2,3,4,4,6 равна…	1) 6 2) 4 3) 20

<table>
<tr><td>24</td><td></td><td>4) 5</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Проведено четыре исследования (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 2,3,8,8. тогда несмещенная оценка математического ожидания равна…</td><td>1) 5,5
2) 5,25
3) 6
4) 5</td></tr>
<tr><td>19</td><td>Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 11. Тогда его интервальная оценка может иметь вид…</td><td>1) (11;11,5)
2) (10,5;11,5)
3) (10,5;11)
4) (10,5;10,9)</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 70$, полигон частот которой имеет вид:


Тогда число вариант $x_i = 4$ в выборке равно…</td><td>1) 23
2) 70
3) 44
4) 24</td></tr>
<tr><td>21</td><td>Мода вариационного ряда 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6 равна…</td><td>1) 6
2) 2
3) 3
4) 1</td></tr>
<tr><td>22</td><td>Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:
<table><tr><td>x_i</td><td>2</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>n_i</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна…</td><td>1) 1,3
2) 4
3) 3,4
4) 3,6</td></tr>
<tr><td>23</td><td>Точечная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака равна 21. Тогда его интервальная оценка может иметь вид…</td><td>1) $(20,4; 21,4)$
2) $(20,5; 21)$
3) $(20,5; 21,5)$
4) $(21; 21,5)$</td></tr>
<tr><td>24</td><td>Размах варьирования вариационного ряда 1, 2, 4, 7, 10 равен…</td><td>1) 4,5
2) 10</td></tr>
</table>

		3) 5 4) 9
25	Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 10, 11, 12, 15. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна…	1) 12,5 2) 12 3) 11,5 4) 11,75
26	Из генеральной совокупности извлечена выборка обьема $n = 20$: x_i: 3, 4, 6, 9 n_i: 2, 4, 7, 7 Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна…	1) 6,35 2) 5 3) 5,5 4) 5,95
27	Точечная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака равна 21,5. Тогда его интервальная оценка может иметь вид…	1) $(20{,}85; 21{,}85)$ 2) $(20{,}05; 22{,}95)$ 3) $(20{,}05; 21{,}5)$ 4) $(21{,}5; 22{,}95)$
28	Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = -5 + 2x$. Тогда выборочный коэффициент регрессии равен…	1) -5 2) -2,5 3) 2 4) -0,4
29	Соотношением вида $P(K < -1{,}88) + P(K > 1{,}88) = 0{,}05$ можно определить…	1) область принятия гипотезы 2) правостороннюю критическую область 3) двустороннюю критическую область 4) левостороннюю критическую область

Кейсы

В третий блок входят кейсовые задания которые носят прикладной характер, отвечая на них нужно ввести или свой вариант ответа или выбрать из предложенных несколько правильных. Примером служат задания 19-21.

19.1 Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий двух видов: сапог и ботинок. При этом используется сырье двух типов: S_1 и S_2.

Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расхода сырья на 1 день заданы таблицей:

Нормы расхода сырья на одну пару, усл. ед.	Вид сырья	
	S1	S2
Сапоги	3	5
Ботинки	2	6
Расход сырья на 1 день, усл. ед.	900	2300

Для решения необходимо составить систему:

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 900 \\ 5x_1 + 6x_2 = 2300 \end{cases}$, где x_1 и x_2 ежедневный выпуск сапог и ботинок. Решив эту систему тестируемый может ответить на задание 19.2 и 19.3. Установите соответствие между элементами двух множеств: видом изделия и ежедневным объемом его выпуска ($x_1 = 100,\ x_2 = 300$). Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей-строкой $B = (10 \quad 5)$. Стоимость сырья, затраченного на производство ботинок, составит

$(2 * 10 + 6 * 5) * 300 = 15000$. единиц.

При решении задачи: издержки производства С (у.е.) зависят от объема выпускаемой продукции х (ед.) как $C(x) = x^3 - 15x^2 + 48x + 70$ необходимо найти критические точки функции, исследовать на максиму и минимум. В этом случае получаем: $C'(x) = 3x^2 - 30x + 48$. $x_1 = 2,\ x_2 = 8$

Функция издержек убывает на промежутке $(2;8)$, возрастает на промежутках $(-\infty; 2), (8; +\infty)$. Следовательно, в точке х=8 будет минимум функции. Таким образом, если начальный объем производства равен 7 ед, тогда издержки производства монотонно убывают, если объем производства в течение определенного периода времени вырастет до значения х, равного 8. Для ответа подходят числа из интервала (7;8), т.е 7,5 и 8. При нахождении наибольших издержек производства необходимо вчислить значение функции в точке х=8 и на концах указанного отрезка $[2; 9]$. С(2)=114, С(8)=6, С(9)=16. Наибольшее из них 114.

Наиболее сложными в кейсовых задачах для студентов инженерных специальностей являютя задачи с экономическим содержанием. Например, Зависимость объема выпуска Y от количества используемых трудовых ресурсов L определяется функцией $Y = F(L)$ как

$$Y = F(L) = \begin{cases} 0, L = 0, \\ a, L = 1, \\ a + \dfrac{2}{5}F(L-1), L > 1. \end{cases}$$

Необходимо найти объем выпуска при L = n. Трудность решения заданий такого типа состоит в том, что необходимо не только найти производную, но и понять ее экономический смысл

Литература

1. **Гмурман, В. Е.**
Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб.пособие / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 404 с. - (Бакалавр. Базовый курс). - для бакалавров. - ISBN 978-5-9916-2220-2 : 306-24.
2. **Гмурман, В. Е.**
Теории вероятностей и математическая статистика : учеб.пособие / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 404 с. - (Бакалавр. Базовый курс). - для бакалавров. - ISBN 978-5-9916-2220-2 :
3. **Кремер, Н. Ш.**
Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики : учеб.-справ. пособие / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2015. - 646 с. - (Основы наук). - для бакалавров; для магистров. - ISBN 978-5-9916-1140-4; 978-5-9692-1107-0
4. **Высшая математика для экономических специальностей** : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2015. - 909 с. - (Основы наук). - для бакалавров; для аспирантов; для магистров. - ISBN 978-5-9916-1082-7; 978-5-9692-1080-6 : 556-00.

5. **Александрова, Е.В.**
Профессиональная направленность обучения теории вероятностей и математической статистике студентов сельскохозяйственного вуза. / Е.В. Александрова // Диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Орел, 2005.
6. **Александрова, Е.В.**
Тестирование как один из видов текущего контроля знаний студентов по математике в аграрном вузе. / Е.В. Александрова В сборнике: Инновации в образовании Материалы VII Международной научно-практической конференции. 2015. С. 27-28.

7. **Александрова, Е.В.**
Математика: учебное пособие для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 – «Строительство» / Е.В. Александрова, М.Н. Уварова. – Орел, 2016. – 148 с. – 1-00
8. **Александрова, Е.В**.
Методико-содержательная линия преподавания раздела «Аналитическая геометрия»: монография/ Е.В. Александрова, М. Н. Уварова. - Орел: Изд-во Орел ГАУ, 2015. - 160 с. - ISBN 978-5-93382-254-7
9. **Атурин, В. В.**
Высшая математика. Задачи с решениями для студентов экономических специальностей : учеб.пособие / В. В. Атурин, В. В. Годин. - М. : Академия, 2010. - 304 с. - (Высшее профессиональное образование. Экономика и

управление). - ISBN 978-5-7695-6905-0
10. **Барашков, А. С.**
Математика / А. С. Барашков. - М. : АСТ: Слово; Владимир: ВКТ, 2011. - 480 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-17-067227-1; 978-5-8123-0737-0; 978-5-226-03168-7
11. **Волынкина, Т.И.**
Математика в экономике (курс лекций) Часть I. Методическое пособие для студентов экономического факультета дистанционной формы обучения / Т.И. Волынкина, М.Н. Уварова, Е.В. Александрова; Орловский филиал института содержания и методов обучения Российской академии образования / Изд. 1-е. - Орел: изд-во «Картуш», 2010. -211с.
12. **Волынкина, Т.И.**
Математика в экономике (курс лекций) Часть II. Методическое пособие для студентов экономического факультета дистанционной формы обучения / Т.И. Волынкина, М.Н. Уварова, Е.В. Александрова; Орловский филиал института содержания и методов обучения Российской академии образования / Изд. 1-е. - Орел: изд-во «Картуш», 2010. -154с.
13. **Зубова, И.И.**
Применение инновационных технологий обучения в аграрном вузе. / И.И. Зубова, Е.В. Александрова, И.А. Хуснутдинов // Ученые записки орловского государственного университета. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. 2011. №3. С.49-53.
14. **Красс, М. С.**
Математика для экономистов : учеб.пособие / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. - СПб. : Питер, 2010. - 464 с. : ил. - (Учебное пособие). - для бакалавров. – ISBN 978-5-94723-672-9
15. **Кудрявцев, Л. Д.**
Курс математического анализа. Т. 1,2,3 / Л. Д. Кудрявцев. - 6-е изд. - М. : Юрайт, 2012. - 703 с. - (Бакалавр. Базовый курс). - для бакалавров. - ISBN 978-5-9916-1807-6

16. **Математика в экономике [Электронный ресурс]** : метод. пособие . Ч. 1-2 / Т. И. Волынкина [и др.]. - Электрон. дан. - Орел : Картуш, 2010. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - Загл. с титул. экрана. - 1-00.
17. **Математика в экономике (курс лекций)** : метод. пособие. Ч.I / Т. И. Волынкина [и др.]. - Орел, 2010. - 212 с.
18. **Павлова, Т. А.**
Специальные разделы математики: монография / Т. А. Павлова, М. Н. Уварова. - Орел : Изд-во Орел ГАУ, 2015. - 182 с. - ISBN 978-5-93382-252-3
19. **Павлова, Т.А**. Применение пакета MATHCAD при решении кратных интегралов. /Т.А. Павлова, М.Н. Уварова. // В сборнике: Современные проблемы гуманитарных знаний Материалы I всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции. 2016.С.61-65.
20. **Петрушина, Н.Н**.
Использование интернет-тестирования как формы контроля качества

подготовки студентов. /Н.Н. Петрушина, М.Н. Уварова Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2009. № 7-2. С. 153-155.

21. Уварова, М. Н.

Неопределенный и определенный интегралы. Приложения определенного интеграла: метод.пособие / М. Н. Уварова, Т. А. Павлова. - Орел : Картуш, 2009.

22. Уварова, М. Н.

Линейная алгебра : учеб. -метод. пособие / М. Н. Уварова, Н. Н. Петрушина. - 1-е изд. - Орел : Картуш , 2009. - 56 с.

23. Уварова, М. Н.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов по высшей математике. Экономико- математическое моделирование / М. Н. Уварова, Е. В. Александрова. - Орел : Изд-во Орел ГАУ, 2006

24. Уварова, М. Н.

Элементы теории вероятностей : метод.пособие / М. Н. Уварова, Е. В. Александрова. - Орел : Изд-во Орел ГАУ, 2007. - 85 с

25. Уварова, М.Н.

Интернет-экзамен: методическое пособие для подготовки к интернет-экзамену /М.Н. Уварова, Т.А.Павлова. - Орел: Изд-во «Картуш», 2010. - 163 с.

26. Уварова, М.Н.

Интернет тестирование в образовании /М.Н. Уварова, Т.А. Павлова. Russian Agricultural Science Review. 2015. Т. 6. № 6-3. С. 337-342.

27. Уварова, М. Н.

Об использовании математических пакетов при изучении курса высшей математики. /М.Н. Уварова. Russian Agricultural Science Review. 2015. Т. 5. № 5-2. С. 147-149.

28. Уварова, М. Н.

Лабораторный практикум. Методические указания для студентов инженерных специальностей к лабораторным работам по математике. /М.Н. Уварова, Александрова Е.В., Павлова Т.А., Т.И. Волынкина, Т.В. Карнюшкина. Орел, 2009. Том Часть 2. 118 с.

29. Уварова, М. Н.

Тематические работы для систематизации знаний по математике. / М.Н. Уварова, Т.А. Павлова, Е.В. Александрова, Т.И. Волынкина - Орел: Изд-во ФГБОУ ВО Орловский ГАУ, 2016. – 258с. – ISBN 978-5-93382-280-6

30. Уварова, М.Н.

Математическая модель оптимизации производства сельскохозяйственной продукции / М.Н. Уварова, Т.А. Павлова, // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2014. №5. С. 94-98.

31. Уварова, М.Н.

Кратные и криволинейные интегралы: учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов по математике./М.Н. Уварова, Е.В. Александрова; Орловский филиал института содержания и методов обучения Российской академии образования/Изд.1-е.-Орел: изд-во «Картуш», 2010.-56с.

32. Уварова, М.Н.
Потенциал личных подсобных хозяйств в регулировании многоукладных отношений аграрного сектора региона./М.Н. Уварова. Диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук/Орловская региональная академия государственной службы. Орел, 2003

33. Уварова, М.Н.
Лабораторный практикум. Методические указания для студентов инженерных специальностей к лабораторным работам по математике./ М.Н. Уварова, Е.В. Александрова, Т.А. Павлова, Т.И. Волынкина, Т.В. Карнюшкина, Н.Н. Петрушина/Изд.1-е-Орел: изд-во «Картуш», 2009. -Том Часть 2. 118 с.

34. Уварова, М.Н.
Лабораторный практикум. Методические указания для студентов инженерных специальностей к лабораторным работам по математике./М.Н. Уварова, Е.В. Александрова, Т.А. Павлова, Т.И. Волынкина, Т.В. Карнюшкина, Н.Н. Петрушина/Изд.1-е-Орел: изд-во «Картуш», 2009. Часть 1. 117с.

35. Уварова, М. Н.
Неопределенный и определенный интегралы. Приложения определенного интеграла: методическое пособие / М. Н. Уварова, Т. А. Павлова. - Орел: Изд-во Орел ГАУ, 2009.-116 с.

36. Уваров, Д. В.
Потенциал использования личными подсобными хозяйствами земельных ресурсов региона: монография / Д.В. Уваров, М.Н. Уварова. - Орел: «Картуш», 2009.-72 с. ISBN 978-5-9708-0196-3.

37. Уварова, М. Н.
Методы оптимальных решений: метод. пособие/М. Н. Уварова, Т. А. Павлова. - Орел: Изд-во Орел ГАУ, 2013. -106 с.

38. Уварова, М.Н.
Математическая модель оптимизации производства сельскохозяйственной продукции./М.Н. Уварова, Т.И. Павлова. Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2014. № 5. С. 94-98.

39. Уварова, М.Н.
Тематические работы для систематизации знаний по математике./ М.Н. Уварова Т.А. Павлова, Е.В. Александрова. Т.И. Волынкина.// Монография. Орел: Изд-во ФГБОУ ВО Орловский ГАУ, 2016. -258с. -ISBN 978-5-93382-280-6