Габриэле Лолли

Философия математики

Наследие двадцатого столетия

Библиотека переводов
классиков мировой науки

GABRIELE LOLLI

Filosofia della matematica

L'EREDITÀ DEL NOVECENTO

IL MULINO

Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

ГАБРИЭЛЕ ЛОЛЛИ

Философия математики

НАСЛЕДИЕ ДВАДЦАТОГО СТОЛЕТИЯ

Перевод с итальянского
А.Л. Сочкова при участии *С.М. Антакова*

Под редакцией
профессора, доктора физико-математических наук
Я.Д. Сергеева

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2012

УДК 1 : 51
ББК Ю+В1
Л 73

Л 73 **Габриэле Лолли. Философия математики: наследие двадцатого столетия** / Пер. с итал. А.Л. Сочкова, С.М. Антакова, под ред. проф. Я.Д. Сергеева. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2012. – 299 с.

ISBN 978-88-15-08510-8 (итал.)
ISBN 978-5-91326-211-0

Книга содержит широкий обзор и критический анализ философий математики, предложенных на Западе в XX столетии. Рассмотрены не только наиболее известные направления, такие как платонизм, формализм или конструктивизм, но также номинализм, логицизм, реализм, феноменология, натурализм, семиотика, структурализм, дедуктивизм, фаллибилизм, эмпиризм и др. В каждом из рассмотренных течений обсуждаются философские принципы, методы и инструменты, имеющие значение для математики. В частности, большое внимание уделено выявлению сущности математического доказательства, а также раскрытию влияния философии математики на саму математику и специалистов, которые ею занимаются. Часто для обсуждения того или иного положения слово предоставляется не только философам, но и математикам. Это является интересной и важной особенностью монографии потому, что во многих других публикациях философские аспекты обычно превалируют, а математические часто отодвигаются на второй план.

Автор книги – профессор Габриэле Лолли – является известным итальянским ученым, видным представителем математической школы этой страны, опубликовавшим более 10 книг по математической логике, основаниям и философии математики. В первую очередь монография адресована математикам и философам. Однако и широкий круг специалистов, использующих математику в своей деятельности, аспиранты и студенты математических, философских и естественно-научных факультетов, и все те, кто интересуется основаниями и философией математики, логикой и методологией современной науки найдут эту книгу интересной и полезной.

Печатается по решению Ученого совета ННГУ

ISBN 978-88-15-08510-8 (итал.)
ISBN 978-5-91326-211-0 ББК Ю+В1

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие научного редактора перевода

Настоящий издательский проект выполнен Нижегородским государственным университетом им. Н.И. Лобачевского в рамках международной научно-образовательной программы «Российско-Итальянский университет», которая осуществляется уже более 20 лет под руководством автора этих строк. Книгой профессора Габриэле Лолли «Философия математики: наследие двадцатого столетия» открывается серия переводов классиков мировой науки, которая будет издаваться в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского.

Актуальность перевода настоящей книги именно сегодня обусловлена несколькими причинами. Начнем с того, что число посвященных проблемам философии математики монографий, вышедших в России в последние 10–15 лет, невелико. Отметим следующие книги:

1. Светлов В.А. *Философия математики: Основные программы обоснования математики XX столетия.* Изд. 2. – М.: URSS, 2010.
2. Фрейсинэ Ш. *Очерки по философии математики*. Пер. с фр. Изд. 2-е, испр., 2010.
3. Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. *Современная философия математики: недомогания и лечение*. – Новосибирск: Параллель, 2007.
4. Вейль Г. *О философии математики*: Пер. с нем./ Предисловие С.А. Яновской; вступ. статья А.П. Юшкевича. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2005.
5. Целищев В.В. *Алгоритмизация мышления. Геделевский аргумент.* – Новосибирск: Параллель, 2005.
6. Целищев В.В. *Философия математики.* – Новосибирск: Наука, 2002.
7. Перминов В.Я. *Философия и основания математики*. – М.: Прогресс-Традиция, 2001.
8. *Проблемно-ориентированный подход к науке: философия математики как концептуальный прагматизм* / Отв. ред. В.В. Целищев. – Новосибирск: Наука, 2001.
9. Фреге Г. *Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование о понятии числа*: Пер. с нем. – Томск: Водолей, 2000.

10. Гильберт Д. *Основания математики* / В кн.: Гильберт Д. *Избранные труды.* В 2 т. Т. 1. *Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики.* – М.: Факториал, 1998.

11. Рассел Б. *Введение в математическую философию*: Пер. с англ. – М.: Гнозис, 1996.

Как видно из приведенного достаточно короткого списка, в настоящее время российский читатель может найти очень небольшое число книг отечественных специалистов, а также переводы классиков французской, немецкой и британской научных школ. К сожалению, среди этих публикаций совершенно не представлена итальянская научная математическая школа, которая знаменита как своими великими основателями, от Леонардо Пизанского (более известного по своему прозвищу – Фибоначчи), Дж. Кардано, Ж.Л. Лагранжа, В. Риккати, Дж. Пеано, Т. Леви-Чивита, У. Дини и др., так и выдающимися современниками, которые вносят значительный вклад в мировую науку.

Автор книги, которую Вы держите в руках, – профессор Габриэле Лолли – является видным представителем итальянской математической школы, опубликовавшим более 10 книг по математической логике, основаниям и философии математики. Среди его монографий отметим следующие: *Аксиоматическая теория множеств* (1977); *Лекции по математической логике* (1978); *Введение в формальную логику* (1991); *Неполнота* (1992); *Философия математики: наследие двадцатого столетия* (2002); *От Евклида до Гёделя (2004); QED: Феноменология доказательства* (2005); *Тридцатилетняя война* (1900–1930): *От Гильберта до Гёделя* (2011).

Профессор Лолли работает в Высшей нормальной школе города Пиза (итал. Scuola Normale Superiore) – итальянском государственном центре высшего образования и научных исследований, где он читает курсы «Философия математики» и «Математическая логика». Школа является итальянским аналогом l'École Normale Supérieure в Париже, это самое престижное учебное заведение Италии. Она была создана 18 октября 1810 года по декрету Наполеона Бонапарта. Среди выпускников Школы три лауреата Нобелевской премии (физики Энрико Ферми и Карло Руббиа и поэт Джозуэ Кардуччи), несколько премьер-министров Италии, другие выдающиеся деятели науки, культуры и политики.

Важность темы, вынесенной в заглавие монографии, трудно переоценить. Математики, nolens volens, приходят к философии, как только они, оторвавшись от насущных (часто прикладных) проблем, начинают задумываться о сути чисел, множеств и других математических объектов, спрашивать себя о том, что есть математика, в чем ее отличие от других наук, почему такие разные предметы, как геометрия и криптография, находятся в рамках одной дисциплины, и т.д. Вопросы, связанные с основаниями математики, приводят к философским рассуждениям практически сразу.

Вспомним, что XX век был чрезвычайно богат с точки зрения появления новых подходов в математике. Начало этому бурному процессу было положено в конце XIX века, когда была предложена многообещающая платформа оснований математики, теория множеств, на основе которой были получены многие новые значительные результаты. Однако почти сразу же были выявлены глубокие фундаментальные противоречия, присущие данному подходу. Это породило новый, так называемый третий, кризис оснований математики, который явился стимулом для начала новых многочисленных исследований в данном направлении. Тема оснований математики очень многогранна, она включает в себя логико-математические и философско-методологические аспекты. Вполне закономерно ставятся вопросы о том, как нужно подходить к исследованию этой фундаментальной проблемы, в том числе и с точки зрения философии, какие инструменты могут быть использованы и по отношению к какому из существующих математических течений.

Настоящая монография содержит широкий обзор и критический анализ философских программ математики, предложенных на Западе в XX столетии. Рассмотрены не только наиболее известные программы, такие как платонизм, формализм или конструктивизм, но также номинализм, логицизм, реализм, феноменология, натурализм, семиотика, структурализм, дедуктивизм, фаллибилизм, эмпиризм и др. Подробно описываются основные платформы, анализируется их актуальность для современной математики. В каждом из рассмотренных течений обсуждаются философские принципы, постулаты, методы и инструменты, имеющие значение для математики. В частности, большое внимание уделено выявлению сущности математического доказательства, а также раскрытию влияния философии математики на саму математику и специалистов, которые ею занимаются.

Книга начинается с введения, описывающего ее концепцию. Часть первая посвящена общим философским вопросам. Рассматривается взаимосвязь математики и философии, формулируется основная философская проблема. Подробно исследуются ее онтологический, эпистемологический и методологический аспекты. Анализируются основные идеи априоризма и редукционизма. Особое внимание при изложении уделяется выявлению инструментария для изучения обозначенной проблемы, а также рассмотрению новых тенденций и подходов к ее решению.

Все темы, рассмотренные в первой части, вновь, но уже более подробно, в рамках каждого конкретного философского направления, обсуждаются во второй части книги, в которой проводится обзор и критический анализ основных программ философий математики двадцатого века. В заключении отмечается, что рассмотренные достижения всех направлений представляют собой ценнейшее достояние, имеющее непреходящее значение для всей математики.

Необходимо отметить, что в данной книге, помимо введения в предмет и формулирования основной проблемы философии математики (что свойственно и другим публикациям), подробно и комплексно исследуются различные аспекты проблемы. Отличительной особенностью всей книги является тот факт, что для обсуждения того или иного положения слово предоставляется не только философам, но и математикам. Такой подход является важной и интересной особенностью монографии потому, что во многих других публикациях философские аспекты обычно превалируют, а математические часто отодвигаются на второй план. В монографии подробно исследуется влияние философии математики на развитие математики в целом. Кроме того, автор предпринимает усилия для уточнения ряда не совсем аккуратных толкований, которые можно встретить в некоторых публикациях на эту тему. Книга помогает лучше разобраться в философской проблеме оснований математики, лучше понять тенденции ее развития.

В качестве критического замечания следует указать, что, с нашей точки зрения, монографию правильнее было бы назвать «Западная философия математики: наследие двадцатого столетия», поскольку основное внимание в ней уделено именно западной философии. В предисловии автора к русскоязычному изданию профессор Лолли объясняет причины сделанного им выбора и отсутствие ссылок на работы российских мыслителей и с лихвой восполняет данный пробел, уделяя большое внимание философским школам, существовавшим в России и СССР в XX веке.

Предисловие автора к изданию на русском языке будет интересно российским читателям еще и потому, что оно показывает, как западные математики и философы воспринимали события, происходившие в XX веке в математике в нашей стране. При этом следует отметить (об этом пишет и сам автор монографии) ограниченность и фрагментарность существующих переводов работ российских философов, математиков и историков на Западе, что особенно сильно ощущалось в годы существования СССР и не могло не усложнить восприятие западными философами идей, над которыми работали советские ученые.

Итак, книга содержит глубокий анализ (западных) философских программ математики XX столетия, которые дали науке целый ряд фундаментальных идей и глубоких результатов, продолжающих оставаться актуальными и сегодня. Естественно, в первую очередь монография адресована математикам и философам. Однако и широкий круг специалистов, использующих математику в своей деятельности, аспиранты и студенты математических, философских и естественно-научных факультетов и все те, кто интересуется основаниями и философией математики, логикой и методологией современной науки, найдут эту книгу интересной и полезной.

Несколько слов следует сказать о коллективе переводчиков и организации их работы. Настоящий перевод был осуществлен к.т.н. А.Л. Сочковым при участии к.филос.н. С.М. Антакова. Работа велась под руководством автора этих строк и заняла более полутора лет. Символично, что перевод был начат в 2011 г., объявленном правительствами двух стран годом Италии в России и России – в Италии. Желание осуществить данный перевод вынашивалось несколько лет и было связано с тем, что в Нижегородском и Калабрийском университетах активно ведется разработка новой методологии вычислений с бесконечно большими и бесконечно малыми числами (см.

http://www.theinfinitycomputer.com). Данная тематика тесно связана с основаниями математики и поднимает, наряду с чисто практическими вопросами, целый ряд философских проблем.

В отношении некоторых соглашений, принятых коллективом переводчиков при работе над текстом, следует сказать следующее. Имена и фамилии западных философов и математиков, встречающиеся в тексте, были транскрибированы русскими буквами (все они приводятся в конце книги в указателе имен). При этом часто использовались устоявшиеся транскрипции, но в некоторых случаях (когда нам казалось, что наша транскрипция выглядит предпочтительней, или когда мы не смогли найти устоявшуюся русскую транскрипцию) мы давали свой вариант перевода.

Цитаты, приводимые автором из оригинальных источников на русском, английском и других языках, переводились с итальянского текста автора, чтобы показать, как понимает эту цитату автор на своем языке. Конечно же, мы по мере необходимости сверялись с оригинальными текстами и их переводами на русский, если таковые имелись и были нами найдены. В ряде случаев мы давали читателю ссылки на оригинальные тексты и имеющиеся переводы на русский в примечаниях переводчика и научного редактора. Отметим также, что наши примечания расположены по ходу текста (и по ходу общей нумерации ссылок) среди авторских примечаний и отмечены следующим очевидным образом: прим. переводчика, прим. науч. редактора.

В заключение от имени коллектива переводчиков я хочу выразить благодарность ректору Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского Е.В. Чупрунову и проректору В.А. Гришагину за поддержку этого издательского проекта и постоянное доброжелательное внимание к нашей работе. Мы надеемся, что выход этой интереснейшей монографии послужит также и дальнейшему укреплению научных и культурных связей между Россией и Италией.

Я.Д. Сергеев,
д.ф.-м.н., профессор Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского,
заслуженный профессор Калабрийского университета (Италия),
российский координатор международной научно-образовательной
программы «Российско-Итальянский университет»

Предисловие автора к изданию на русском языке

Представляя российскому читателю эту работу 2002 года, которая в соответствии с общепринятыми критериями оценки научных публикаций может считаться уже устаревшей, необходимо прежде всего отметить возможные новинки последних десяти лет. В действительности удается увидеть не новинки, а лишь развитие положений, уже рассмотренных в тексте книги.

Наиболее показательным феноменом, возможно, является усиление тенденции к освобождению от наследия классических школ, разрабатывавших основания математики в начале двадцатого века, тенденции, которая сейчас пытается оформиться в самостоятельное направление с названием «философия математической практики». С этой целью предприняты определенные усилия и в организационном плане. Основана ассоциация APMP (*Association for the Philosophy of Mathematical Practice*[1]), в которую входят специалисты, представляющие разные страны и разные дисциплины (философы, историки и психологи).

Как поясняется в [Mancosu 2008], философия математической практики отбрасывает положения, присущие ортодоксальной традиции или традиции, которая видится таковой «диссидентам», то есть представляется неортодоксальной философией. Ее основные тезисы следующие: антифундаментализм – в том смысле, что поиски окончательных, неоспоримых оснований математики тщетны, математика подвержена ошибкам; антилогицизм – в том смысле, что математическая логика не предоставляет адекватного инструментария для анализа математики; и, наконец, акцент на практику. «Только детальный анализ и реконструкция больших и зна-

[1] http://institucional.us.es/apmp/; Ассоциация по развитию философии математической практики (англ. – прим. переводчика).

чимых составляющих математической практики могут дать философию, достойную этого имени» [Mancosu 2008, с. 5].

В отношении философии практики справедливы сомнения, высказанные в главах, посвященных фаллибилизму и эмпиризму (главы 12 и 13 второй части книги). Полемический экстремизм и склонность к постановке удобных целей и задач остаются опасными изъянами. Не вызывает возражений отказ от поисков окончательных оснований для математики. Такой выбор является здравым результатом осознания недостижимости любой абсолютной цели с учетом конечности инструментов человеческого познания. Это признание вовсе не аналогично провозглашению тезиса о подверженности математики ошибкам при том еще условии, что это положение отлично от тезиса о подверженности ошибкам математиков, и сам этот тезис есть некое абсолютное положение. Математическая логика не является удовлетворительным инструментом сама по себе, но это не означает, что нужно отказываться от ее использования, когда она позволяет прояснить ситуацию.

Нет сомнений, что исследования «диссидентов»[2] расширяют знания о математике, следствием чего является также ее более высокая оценка в обществе и дальнейшее ее распространение. Особенно инновационными являются исследования по визуализируемости (наглядности) в математике и по диаграммным языкам[3], однако не ясно, дают ли подобные исследования лишь первичные, предварительные материалы «для философии, достойной этого имени», или же это и есть самая настоящая философия. Внимание к практике как отдельная философия еще не нашло своего определения и, вероятно, не сможет найти его без риска предложить новую ортодоксальность, что было бы противоречием для «диссидентов».

---

[2] В оригинале англ. *maverick* (прим. переводчика).

[3] См. подборку в [Mancosu 2008] или том [Giaquinto 2007]. Некоторые вопросы, поднятые «диссидентами», рассмотрены также в [Shapiro 2007].

Философия математической практики смещает акцент с продукта на самого математика; она вызывает в авторе реакцию, аналогичную критике, которую в десятые и двадцатые годы прошлого века русские интеллектуалы, известные как формалисты (порочащий термин в устах их оппонентов), выдвигали против превалировавшей тогда тенденции в литературоведении (см. антологию [Todorov 1965]). Они сетовали на то, что в центр интересов ставились психологические, философские, социологические аспекты произведения, сведения об авторе или о социальном контексте, но не произведение само по себе; что мало говорилось, следовательно, о внутренних характеристиках литературного творчества. Для анализа последнего они сосредотачивались, напротив, на фонетических, лингвистических и структурных средствах литературного языка.

Натурализм (рассмотренный в главе 5 второй части) также увеличивает число своих последователей не только в направлении, указанном П. Мэдди (Penelope Maddy), и мог бы стать теоретической опорой для той же философии математической практики. Недавняя работа [Franks 2009], например, представляет собой оригинальную защиту автономии математики от любых философских оснований с использованием гильбертовских аргументов или, точнее, с помощью немного натянутой трактовки видения Гильберта, как если бы оно не имело никаких философских предпосылок.

Другой отличительной чертой этих последних лет является рост интереса к феноменологии, обусловленный исследованиями, посвященными столетию со дня рождения Гёделя (2007). Кроме упомянутой уже в основном тексте [Tieszen 1998], можно отметить, например, новые работы [van Atten e Kennedy 2003], [Martin 2005], [Hauser 2006].

Еще одним долгом автора является обязанность пояснить отсутствие в его работе ссылок на российских мыслителей, если не считать краткого упоминания о А.А. Маркове в конце девятой главы.

В двадцатом веке российская математика и математика других республик, входивших в Советский Союз, была на высочайшем уровне, что не нуждается в доказательствах. Такие ученые, как Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин, П.С. Александров, П.С. Урысон, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, А.И. Мальцев, П.С. Новиков, А.А. Марков, В.И. Арнольд вошли в историю математики, внеся вклад во все ее разделы от анализа до топологии, математической физики, логики и теории вероятностей несмотря на бурные, часто полные драматизма события, происходившие в стране.

Это пышное цветение не сопровождалось, как правило, явно выраженными философскими размышлениями, хотя это не означает, что российские мыслители не оказали влияния на философию математики. Аксиоматизация понятия вероятности Колмогоровым сыграла решающую роль не только для теории вероятности, но для полного понимания и принятия аксиоматического метода, причем роль эта, возможно, была даже более значительна, чем неустанная пропаганда Гильберта. Именно вклад А.Н. Колмогорова и В.И. Гливенко в интуиционистскую логику (вместе с результатами Гёделя) лежит в основе развития этой фундаментальной школы философии математики. Аналогичное утверждение можно сделать о роли А.И. Мальцева и значимости его теоремы о локальности в теории моделей, а также о значении результатов А.А. Маркова, Б.А. Трахтенброта, А.П. Ершова и других для теории эффективной вычислимости. Ультраинтуиционизм А.С. Есенина-Вольпина предвосхитил вопросы практической реализуемости (англ. *feasibility*), которые стали значимыми с развитием конечной вычислительной математики [Ésénine-Volpine 1961].

Отсутствие завершенной самобытной философии математики, как и более активного участия в разработке направлений, обсуждаемых в этой книге, обусловлено, вероятно, ограничениями, которые советская идеология накладывала на свободу мысли, используя также и политические инструменты. Если это впечатление автора ошибочно, то в его защиту можно сказать, что всегда необходимо помнить о том, как в течение долгих лет было трудно получать информацию о происходящем в этой большой стране, и наоборот[4]– советские ученые получали мало информации извне.

Подтверждение может быть найдено в непростой истории математической логики в Советском Союзе. Страницы, которые следуют далее, должны быть истолкованы лишь как свидетельство знаний, которые были получены фрагментарно, поскольку в основном стали доступны на Западе только после 1989 года. Автор первым сознает, что картина, которая из этого складывается, драматически неполна и поэтому, вероятно, искажена и в хорошую, и в плохую стороны также из-за неизбежной склонности к использованию оценочных категорий, накопленных в другом контексте. Однако, в отличие от формальных систем математики, историческая картина, конечно же, дополняема, и условием для ее завершения является изложение известного, для того чтобы дать возможность затем его корректировать и обогащать.

Некоторые моменты истории логики были отчасти реконструированы с помощью многих документов и свидетельств[5]. Перед революцией 1917 года в России публикуются такие самобытные мыслители, как Н.А. Васильев (1880–1940), который в 1910 году изобретает логику без закона исключенного третьего и без закона непротиворечия, назвав ее «воображаемая логика». Сегодня он считается предвестником паранепротиворечивых логик[6]. После революции исследования медленно угасают несмотря на достойные внимания исключения. Так, в 1927 году И.И. Жегалкин (1869–1947) независимо от Витгенштейна, Поста и Лукасевича изобретает таблицы истинности. В тридцатые годы Д.А. Бочвар в цикле работ предлагает неклассические системы для разрешения парадокса Рассела, введя среди прочего трехзначные пропозициональ-

[4] Единственной немарксистской работой советского логика по философии науки, с которой автору в свое время удалось ознакомиться, была [Zinov'ev 1973], опубликованная в Европе еще до того, как он стал известным писателем после публикации [Zinov'ev 1977].

[5] См., например, [Cavaliere 1990].

[6] [Vasiliev 1924] опубликована первый раз в Неаполе в 1924 году.

ные связки, использованные в дальнейшем С.К. Клини, США, (S.C. Kleene, USA) в теории вычислимости. Однако формальная логика подвергается нападкам со стороны защитников марксистско-ленинской или, просто, гегелевской диалектики как абстрактная и субъективная, стерильная и неспособная уловить движение (среди наиболее рьяных можно вспомнить Э.Я. Кольмана и В.Н. Молодшего). В 1930 году С.А. Яновская в журнале «Под знаменем марксизма» инициирует жестокую атаку на математиков, которые ревниво защищают математику (сарказм) от материалистической философии, осуждает Фреге, Рассела и Кантора как представителей буржуазной и идеалистической философии и надеется на обновление кадров на кафедрах математики Москвы и Ленинграда [Yanovskaya 1930]. В том же году Д.Ф. Егорова ссылают в Казань, где он через год умирает.

С.А. Яновская, сама математик, представляется фигурой спорной и противоречивой[7]. В тридцатые годы она стоит на выше обозначенных позициях и с усердием, достойным похвалы, посвящает себя изданию математических рукописей Маркса[8]; однако по прошествии нескольких лет ее поведение резко и до сих пор необъяснимо меняется. В 1947 году она переводит на русский книгу [Hilbert–Ackermann 1928], а в 1948 – работу [Tarski 1937] и становится сторонницей математической логики и аналитической философии. Большой авторитет, который она имела в Коммунистической партии, позволял ей защищать новые взгляды и содействовать развитию логики, с 1959 года до своей смерти в 1966 году быть профессором кафедры математической логики в Московском университете. Сейчас имеется тенденция придать ее деятельности вес, может быть, чрезмерный. Препоны, чинимые логике, продолжились, как мы увидим, в особенности сразу после ее смерти из-за изменившейся политической ситуации. Но факт остается фактом,

---

[7] См. попытку подвести итог ее деятельности в [Bazhanov 2001].

[8] Эта инициатива имела важные последствия, прежде всего, в Китае, и привлекла внимание к нестандартным методам. См. [Dauben 1998].

после первой волны открытого осуждения математическая логика была частично реабилитирована, уровень публикуемых книг значительно вырос, а работа [Novikov 1959] используется на равных с наиболее распространенными в США и Европе учебниками.

В общем плане, отходя от персоналий, заметим, что счастливый поворот, важный, в частности, и для судеб логики, на Западе приписывается известному письму Сталина по поводу марксизма и лингвистики, которое появилось в «Правде» в сентябре 1950 года. В нем можно было прочесть, что язык не является оружием господствующих классов в классовой борьбе, а принадлежит всем. Будучи языком, пусть даже всегда подчиненным диалектике, формальная логика также вновь обрела свою законность.

А.А. Марков (1903–1979) не дожидался письма Сталина для разработки своей философии[9]. Потомственный математик[10], он, после начального этапа восхищения творением Кантора, попал под обаяние теории вычислимости, которую обогатил прежде всего определением особой вычислительной модели, так называемыми нормальными алгорифмами («алгорифмы Маркова» на Западе и сейчас также в России)[11], и такими открывшими новые области исследований результатами, как неразрешимость проблемы равенства слов в полугруппах (одновременно и независимо от Э. Поста (Emil L. Post) в США, еще одного изолированного, но по другим причинам, трагика). Он также разработал свою оригинальную версию математического конструктивизма.

---

[9] Устные свидетельства дают основания полагать, что определение основных идей было осуществлено Марковым еще до Второй мировой войны, см. [Anellis 1994].

[10] Его отец, полный тезка, является автором марковских процессов. Кроме логики, Марков (младший) еще до Второй мировой войны внес важный вклад в квантовую механику, теорию динамических систем (ему принадлежит концепция абстрактной динамической системы) и топологию.

[11] Автор выполнял свои первые упражнения по вычислимости, используя больше алгорифмы Маркова, чем машины Тьюринга, поскольку они были приняты в учебнике [Mendelson 1964], который широко использовался в США и Европе в шестидесятые-семидесятые годы.

Отличительной чертой его подхода, по сравнению с интуиционизмом Брауэра и Вейля, является то, что он выглядит мотивированным прежде всего новыми математическими открытиями. Математические сущности для Маркова – не ментальные конструкции, как в интуиционизме, а конструктивные объекты и процессы, в конечном счете – слова в некотором алфавите и алгоритмы. Понятие вычисления является философским понятием. «Подлинное значение[12] для математики уточнения понятия алгорифма выявляется […] в связи с проблемой конструктивного обоснования математики» [Markov 1954a, p. 2].

Если актуальная бесконечность отбрасывается Марковым, то потенциальная, напротив, принимается и берется серьезно как «отвлечение от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и во времени» [Markov 1954a, cap. 1, sec. 3.5].

Это приводит его к пониманию того, что для высказываний, касающихся процессов, возможен следующий тезис: если предположение, что алгоритм никогда не остановится на каком-либо слове, может быть опровергнуто, то можно заключить, что алгоритм остановится.

С формальной точки зрения это допущение приводит к принятию принципа исключенного третьего для высказываний, которые касаются остановки алгоритмов, и, в частности, закона двойного отрицания

$$\neg\neg \exists x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$$

для соответствующих предикатов.

Этот принцип стал известен как принцип Маркова. Он не принят интуиционизмом, но имеет решающую роль в метаматематическом анализе различных форм конструктивизма. Кроме того, он позволяет трактовать конструктивный анализ («главное поле приложений уточненного понятия алгорифма» для Маркова), в котором вещественные числа и функции вещественной переменной вводятся алгоритмами. В такой постановке Марков опередил

[12] В оригинале на русском языке *всё значение* (прим. переводчика).

Э. Бишопа (E. Bishop) и продемонстрировал интересные результаты, в частности, непрерывность рекурсивных функций. Континуум Маркова отличается от интуиционистского, например, потому, что в случае первого отношение «быть отличным от нуля» имплицирует отношение отделения от нуля[13].

Марков воспитал много учеников, которые, кроме развития конструктивного анализа, изучали и другие проблемы математики и логики, во многих случаях открывая новые пути. Список имен, пусть даже неполный, впечатляет: А. Драгалин, С. Маслов, Ю. Матиясевич, Г. Минц, В. Оревков, Н. Петри, Н. Шанин, Г. Цейтин, И. Заславский.

Тем не менее, в работе [Nagorny 1995] рассказывается о препятствиях и трудностях, чинимых официальными кругами, нетерпимыми к тем, кто не примыкал к марксистско-ленинскому материализму. Логика всегда была на задворках, как, впрочем, и кибернетика, развитие которой было, в действительности, приостановлено. Никто из учеников Маркова не получил высоких должностей в наиболее престижных учреждениях страны. Сам он тоже был обвинен в идеализме и формализме, и к нему относились с подозрением.

Марков смог работать и основать свою школу благодаря, в том числе, тому удачному обстоятельству, что период с 1957 по 1968 год был «золотым временем» для механико-математического факультета (мехмата) Московского университета. Под руководством декана Н.В. Ефимова (1962–1969) и под смелым, искусным и просвещенным покровительством ректора, математика И.Г. Петровского, который даже не был членом партии, факультет собрал коллектив преподавателей и воспитанников, который составил не только научную, но и культурную *элиту*.

> Для западного математика может быть трудно понять, что в тоталитарном обществе высокий научный уровень как единственный критерий успеха в научных учреждениях был крайне редок. Превалирующим критерием в то время в России были политика или идеология, а не научная истина […] Мехмат до конца 1968 года был единственным местом, оазисом, прибежищем, где объективная ценность исследований была лучшей рекомендацией[14].

---

[13] Эти неэквивалентные отношения были введены Брауэром и играют роль в построении его континуума незавершенных объектов.

[14] [Sossinsky 1992].

Любовь к математике сочеталась с художественными и литературными интересами и с антирежимными настроениями. В шестидесятые годы много писем было написано сотрудниками факультета в защиту диссидентов, пока власти в 1968 году не решили вмешаться в связи с письмом, подписанным 99 математиками из МГУ и других учреждений, против заключения в психиатрическую больницу Есенина-Вольпина, сына поэта Сергея Есенина, уже упомянутого выше как основоположника ультраинтуиционизма. «Закручивание гаек» становится понятным, если вспомнить, что 1968 был годом «Пражской весны». Администрация была заменена на персонал, верный жесткой линии. Двое из подписавшихся потеряли работу, все испытали трудности в продвижении по службе и имели запрет на выезд за границу[15]. Сформировалась иная обстановка, при которой возобновилась антисемитская практика, прежде всего, на вступительных экзаменах.

Эти превратности истории известны российскому читателю сейчас, вероятно, даже более, чем западному. Впрочем, ни одна страна в своей недавней истории не избежала подобных периодов упадка. Мы напомнили их, потому что «нужны горькие лекарства, едкие истины», как говорил М.Ю. Лермонтов в предисловии к *Герою нашего времени* [Lermontov 1840, Introduzione].

Еще более удручающая история – события жизни менее известного интеллектуала, который, хоть и не сопоставим с Марковым в научном плане, все-таки заслуживает отдельного упоминания. Речь идет об авторе, который сейчас реабилитирован на родине и вызывает в Европе неподдельный интерес[16].

Павел Александрович Флоренский (1882–1937) получил высшее математическое образование в 1904 году в Москве, защитив диплом, подготовленный под руководством Николая Васильевича Бугаева (1837–1903), одного из основателей Московского матема-

---

[15] См. [Fuchs 1992].

[16] Некоторые его работы опубликованы на итальянском в [Florenskij 1995] и [Florenskij 2007]. Кроме упомянутых переводов, см. [Betti 2009].

тического общества и Московской философско-математической школы. Среди наиболее выдающихся учеников-математиков Н.В. Бугаева были Д.Ф. Егоров и Н.Н. Лузин.

Из развития Анализа во второй половине девятнадцатого века Бугаев сделал вывод о выходе на первый план разрывных функций, которых, в действительности, больше, чем непрерывных. С философской точки зрения Бугаев и его коллеги полагали, что развитие мира – постоянный процесс противостояния *логоса* изначальному хаосу и что математика необходима для поиска общей концепции мира. Изучение разрывных функций приводит Флоренского к новому видению мира, базирующемуся на принципе разрывности и на числах-формах (которые при непрерывности изменения невозможны).

В годы после защиты диплома Флоренский занимается философией, теологией, религией и искусствоведением[17], всегда сохраняя мировоззрение, пронизанное математикой. Он пишет в 1900 году матери[18]:

> Занимаюсь теперь я математикой, которой надо будет заняться больше, и немного философией. Как то, так и другое мне совершенно необходимы, и я чувствую, что математикой я увлекаюсь все сильнее и сильнее. Везде находишь соотношения, аналогии, параллели […] Математика для меня – это ключ к мировоззрению, такому мировоззрению, для которого нет ничего настолько неважного, чем не надо было бы заниматься, нет ничего не стоящего в связи с другим. При математическом мировоззрении […] натурфилосо-

---

[17] Тексты, которые считаются искусствоведческими, например [Florenskij 1995], насыщены геометрической культурой. Как отмечено в [Betti 2009]: «Представления о мире – это представления о пространстве», и культура каждой эпохи определяет идею пространства и манеру его представления в зависимости от духовного характера эпохи. В художественном произведении пространство является не «евклидово-кантианским» пространством классической физики, а скорее пространством с переменной кривизной, которое приспосабливается художником к его специфической проблематике и восприятию им жизни.

[18] Цитировано из [Betti 2009] (прим. автора); полный текст письма может быть найден на русском языке, например, по адресу http://www.hrono.info/biograf/florenski/1900fl.html (1900.10.05.№24 (4-Ш). О.П. Флоренской. – прим. науч. редактора).

фия соединяется в одно целое с этикой и с эстетикой. Религия получает совершенно особый смысл и находит соответственное место в целом, место, которого она была лишена раньше, почему ей и приходилось строить себе отдельное, изолированное помещение.

В частности, Флоренский после изучения теории множеств Кантора принимает теорию трансфинитных чисел как символ онтологического и логического отношения между двумя мирами абсолютного и относительного. Мы, люди – носители трансфинитного, мы – не конечная противоположность бесконечной божественности. Модель комплексной плоскости, которую Флоренский строит в работе «Мнимости в геометрии» 1922 года[19], вновь изображает два мира, которые общаются через границу, и каждый в состоянии оставить след собственного присутствия на другом. Это не единая плоскость, как в модели Аргана–Гаусса. Одна сторона – реальная, другая – сторона чисто мнимых координат, а в середине находятся точки с комплексными координатами $a + bi$.

Математические модели, которые Флоренский использует в философии, «не являются ни аналогиями, ни метафорами, а указателями сущностной близости». Флоренский поддерживает, следовательно, понимание математики как привилегированного инструмента познания, не только научного, но и философского, поскольку она затрагивает необходимые структуры мышления, которые соответствуют онтологическим структурам мира.

Флоренский углубленно изучает богословие и становится православным священником, однако продолжает заниматься научными исследованиями, которые являются для него и источником некоторого заработка. После социалистической революции он работает на заводе пластмасс, преподает в Художественно-технических мастерских, проводит исследования по электрификации в электротехническом институте, которым руководит К.А. Круг,

---

[19] Частично переведена в [Florenskij 2007, pp. 278–89]. В ней Флоренский описывает пространство *Комедии* Данте как некоторую эллиптическую геометрию.

изучает диэлектрики. В Сибири выполняет исследования по антифризам, по вечной мерзлоте и по электронике. Этот опыт оставляет определенный след. Хотелось бы остановиться на его последней статье [Florenskij 1932] под названием «Физика на службе математики», сильно отличающейся от его первых изложений склонной к мистицизму философии.

Флоренский начинает, предупреждая, что «предметом настоящей статьи является опытный характер математики». Он сетует на то, что «мысль об уходящих в глубь опыта корнях математики еще не стала общим достоянием». Это видно «из постоянных попыток «очистить» математику, т.е. освободить ее от интуиций, попавших в нее, якобы, случайно и поэтому истолковываемых меркой излишнего психологизма как плохие кривизны мысли и промахи изложения […] Геометрический чертеж тушью или мелом […] терпится легко, модель из проволоки, картона или стекла еще выносима, а электрические токи, сила тяжести, магнитные листки и т.д. кажутся недопустимыми, слишком физическими».

По мнению Флоренского, если понятие пространства существенно опирается на опыт механики, «то и в отношении логики делались указания подобные же».

> Если хотя бы некоторые механические интуиции лежат в основе математики, то тем самым открывается доступ в математику и механизмам. […] Когда […] механизм, основанный на тех же самых свойствах твердого тела, осложняется, сторонники математической чистоты косятся на него, заподозревая в грубости, «инженерности» и считая его чуждым сфере математики […] И там, где рядом с кинематикой вмешивается еще и динамика, большая часть математиков хочет увидеть измену чистому мышлению. Общепринятое мнение не признает или почти не признает не только приборы вроде построителей кривых и т.п. кинетического типа, но также более сложные кинематические механизмы вроде гармонических анализаторов и многочисленных приборов для выполнения операций анализа […] С определенным недоверием используются даже интеграторы и механизмы для интегрирования дифференциальных уравнений.

Флоренский приводит, вероятно, исчерпывающий список всех приборов, использовавшихся в те годы для сложных вычислений, большинство из которых уже забыто. Он упоминает логарифмическую линейку (Э. Гантер (E. Gunter, 1623)), усовершенствованную Э. Вингейтом (E. Wingate, 1627) и Сет Патриджем (Seth Partridge, 1657), машины Риттера (Ritter) для вычислений алгебраических выражений и выражений с квадратными корнями, алгебраические весы Лаланна (Lalanne), вычислительные машины Экснера (Exner) (для решения всех уравнений первых семи степеней), весы Бойса (C.V. Boys), Гранта (G.B. Grant) и Скеча (R. Skutsch) (конец XIX-го – начало XX-го века) для уравнений высших степеней, колеса Штамма (E. Stamm, 1863), Депре (M. Deprez, 1871), Гуардуччи (F. Guarducci, 1890), прибор Кемпе (A.B. Kempe, 1873) для решения тригонометрических уравнений, машины Л. Торреса (L. Torres y Quevedo, 1895) для нахождения действительных и мнимых корней алгебраических уравнений, а также для решения нелинейных систем, механизм Веаге (H. Wehage, 1878) и многоугольники Вариньона, и механизм лорда Кельвина (1878) с интегрирующими дисками и цилиндрами. Также отмечает Деманэ (A. Demaner), который в 1898 году применил сообщающиеся сосуды для решения уравнений третьей степени, Меслена (G. Meslin), в конце XIX–начале XX вв. сконструировавшего гидростатические весы для решения алгебраических уравнений, Эмча (A. Emch), который в 1901 году использовал скорость потоков жидкости для извлечения корней, а также систему коромысел весов Вельтмана (Weltman, 1884) для линейных систем и электрическое решение алгебраических уравнений Люка (F. Lucas, 1888).

Флоренский сам в 1922 году конструирует три прибора. Два первых предназначены для решения алгебраических уравнений высших степеней и даже многих трансцендентных. Первый прибор – гидростатический, а второй – электростатический. Третий прибор дает возможность интегрировать любые функции. Однако Флоренскому интересны не только вычисления. Он идет гораздо глубже того, что осмелились сказать западные эмпиристы, которые ограничились указанием методологических аналогий.

Для нас важно не только то, что показывает механизм, но и то, как мы узнаем о его показаниях, и это «как узнаем» не есть нечто внешнее в отношении механизма, орудия познания, но его конститутивная характеристика. Когда в действительности мы чертим окружность циркулем, мы должны знать, прошел ли грифель через начальную точку; когда чертим прямую между двумя точками, должны знать, прижата линейка или нет, и т.д. Обычно о такой необходимости говорится, как если бы она удовлетворялась *сама собою*, пренебрегая когнитивным актом, которым она предпосылается, и, следовательно, несмотря на те стороны действительности, которые в подобные акты должны быть вовлечены. Обычный взгляд на дело есть тот, что требуется механизм, а все дальнейшее сделается само собою; иначе говоря, математику приписывается отвлеченно-метафизический атрибут всеведения, непосредственное знание […] механизм будет выполнять свое дело, а математик будет рассуждать о нем, не имея конкретной жизненной связи с предметом своего рассуждения. И тогда, в действительности, необходимые интуиции ограничились бы сферой кинематики, а в математике не было бы места для новых интуиций.

По мнению Флоренского, такая отчужденная и стерилизованная практика ошибочна и фактически невозможна, поскольку «для вычерчивания круга или прямой нужно видеть то, что происходит; в противном случае известно, что у прямой могут отсутствовать нужные точки, а окружность может не замкнуться. Кроме того, мы должны удостовериться, что линейка не двигается и что ножки циркуля не делают того же, и т.д. Познания того, что делаем, получаются с помощью ряда физических факторов, которые имеют место во времени и в пространстве».

Причина, по которой математики или должны открыто отсылать к телепатичности собственного познания, или же должны так же открыто утверждать опосредованность познания и с этим законно ввести в математику (что она всегда использовала нелегально) интуиции разнообразных элементов природы и их особенностей. Но тогда аксиоматика математики должна быть полностью пересмотрена.

«Также изобретать математическую формулу означает умение конструировать. Формула есть воплощение абстрактных понятий в определенном конкретном материале: словах, буквах, символах;

она – конструкция и с необходимостью требует инженерной деятельности».

В заключение, в математику должны быть введены физические модели, физические приборы и, возможно, даже химические, биологические и психологические пособия[20]. «Ничего нам не говорят прожилки и годовые кольца стволов деревьев, которые представляют систему силовых линий и поверхностей, тем более изопотенциальных?»[21]

Указания Флоренского, кажется, оставили определенный след в российской математике, если, конечно, они сами не встраиваются в некоторую более старую традицию, которая, к сожалению, автору не известна. Сегодня они, кажется, даже экспортируются. В связи с этим можно указать [Levi 2009], где приведена богатая подборка примеров, предложенная для перевертывания идеи о том, что математика – служанка физики. Почти по Флоренскому, «в этой книге физика начала работать на математику, выступая очень эффективной служанкой» (с. 2). Новая типология доказательства добавляется к уже известным[22] – физическое доказательство.

Марк Леви учился в Советском Союзе в семидесятые годы и рассказывает, что уже в старших классах средней школы встретил и впитал подобную постановку в книге Успенского, переведенной

---

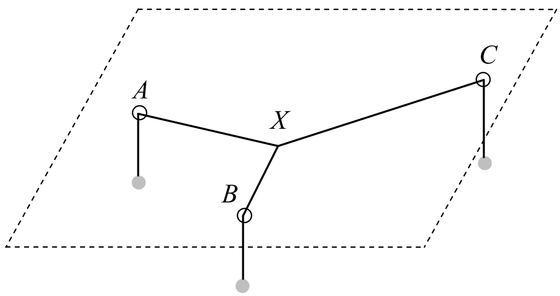
[20] Флоренский оказывается здесь почти пророком. Цепи рассуждений выстраиваются подобно сшиванию лоскутов, развернутых независимо друг от друга, как в аморфном бульоне олигонуклеотидов выстраиваются цепи в виде постоянно растущих сегментов, в которых связываются между собой цепочки, становящиеся все более длинными при присоединении комплементарных олигонуклеотидов. Это не только метафора. В 1995 году Леонард Эйдельман (Leonard Adleman) доказал существование гамильтонова пути в графе при помощи биохимического доказательства, используя полимеразу ДНК. См. [Cipra 1996].

[21] Это один из возможных примеров того, что подразумевал Флоренский, когда утверждал: «Все научные идеи, которые меня волнуют, были всегда порождены во мне ощущением тайны».

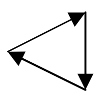
[22] Включая биохимические доказательства в сноске [20].

на английский как [Uspenski 1961]. Для других примеров он отсылает к [Kogan 1974] и [Balk e Boltyanskii 1987].

Чтобы читатель понял, о чем идет речь у Леви, приведем первый и самый простой пример (с. 6). Для того чтобы доказать, что для данных трех точек A, B, C на плоскости точкой X, для которой длина $XA+XB+XC$ минимальна, является та, для которой каждый из углов $\angle AXB$, $\angle AXC$ и $\angle BXC$ равен 120°, связываются вместе три шнура, пропущенные в три отверстия в точках A, B и C, с одинаковыми грузами (условный вес 1) на концах:



Точка плоскости, где расположен узел этих трех шнуров при уравновешенной системе, и является искомой точкой. Сумма $XA+XB+XC$ имеет физический смысл потенциальной энергии системы, так как длина XA есть потенциальная энергия первого шнура, поскольку для перемещения A в X необходимо поднять единичный вес на AX. При равновесии все три силы натяжения в точке X дают в сумме ноль и, следовательно, образуют треугольник векторов



Треугольник получается равносторонний, поскольку три силы равны, и, следовательно, углы – по 120 градусов.

Не удивляет, что этого подхода придерживаются, прежде всего, российские математики или эмигранты российской школы, если учесть ее великую дидактическую традицию. Все студенты в Европе во второй половине прошлого века использовали курс высшей математики В. Смирнова[23]. Направленность на математическое образование – это привилегированная перспектива и, пожалуй, самая верная для философии математики.

Начав с сетований по поводу скудного присутствия российской культуры в области философии математики или, что корректнее, в этой книге, мы без усилий смогли вспомнить ее вклад и разнообразные предложения: конструктивизм, вдохновленный теорией вычислимости; привнесение методов естественных наук в доказательства; мистический символизм Флоренского; применение литературного формализма для анализа математических работ. Там, где разработка тем продвинулась дальше первых слов вступления, идеи выглядят самобытными и оригинальными по сравнению с аналогичными западными разработками.

Это означает, что в большом наследии российской культуры есть сокровища, которые нужно показать как можно шире, в том смысле, что их следует вернуть в кругооборот идей, чтобы можно было бы сравнивать их, привести во взаимодействие с идеями, порожденными другими традициями. Нужно победить леность, приводящую к мысли о том, что мы являемся центром Вселенной. Ни одна культура не может более думать о своей самодостаточности, когда во всем мире идет постоянное обсуждение одних и тех же проблем. Упрек адресован прежде всего западным философам, чей горизонт проходит от Кембриджа в Англии до Кембриджа в Массачусетсе. Остаются языковые трудности, зато Интернет является великолепным инструментом для коммуникаций и обмена информацией. Рассказывают, что в 1935 году Людвиг Витгенштейн посетил Советский Союз с намерением остаться там на постоянное местожительство, и что именно Софья Яновская отговорила его от этой идеи. Стоит пожелать самим себе, чтобы не было более необходимости менять родину, для того чтобы быть гражданами мира.

[23] Автор, в частности, готовился к своему экзамену на ассистента кафедры математического анализа по задачнику [Demidovic 1964].

Библиографические ссылки

[Anellis 1994] I.H. Anellis, recensione di [Cavaliere 1990], *Modern Logic*, 4 (1994), n. 2, pp. 210–218.

[Balk e Boltyanskii 1987] M.B. Balk e V.G. Boltyanskii, *Geometriya mass* (in russo), Bibliotechka Kvant, 61, Nauka, Mosca, 1987; оригинал М.Б. Балк, В.Г. Болтянский, *Геометрия масс*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с. – прим. переводчика.

[Bazhanov 2001] V.A. Bazhanov, *Restoration: S.A. Yanovskaia's Path in Logic*. History and Philosophy of Logic, 22 (2001), n. 3, pp. 129–133.

[Betti 2009] R. Betti, *La matematica come abitudine del pensiero. Le idee scientifiche di Pavel Florenskij.* Centro Pristem Eleusi, Università Bocconi, Milano, 2009.

[Cavaliere 1990] F. Cavaliere, *La logica formale in Unione Sovietica: Gli anni del dibattito, 1946–1965*, La Nuova Italia, Firenze, 1990.

[Cipra 1996] B. Cipra, *Computer Science Discovers DNA*, in P. Zorn (ed.), What's Happening in the Mathematical Sciences, vol. 3, AMS, Providence, R. I., 1996, pp. 27–37.

[Dauben 1998] J. W. Dauben, *Marx, Mao and Mathematics: The Politics of Infinitesimals*, in Documenta mathematica, Extra Vol. ICM III (1998), pp. 799–809 (http://www.emis.de/journals/DMJDMV/xvolicm/ICM.html).

[Demidovic 1964] B. Demidovic (ed.), *Problems in Mathematical Analysis*, MIR, Mosca, 1964.

[Ésénine-Volpine 1961] A.S. Ésénine-Volpine, *Le programme ultraintuitionniste des fondements des mathématiques,* in *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, Oxford, 1961, pp. 201–223.

[Florenskij 1932] P.A. Florenskij, *Fizika na službe matematiki.* Socialističeskaja rekonstrukcija i razvitie, 4 (1932), pp. 43–63, частично переведена на итальянский в [Florenskij 2007, pp. 290–299]; оригинал Флоренский П.А., *Физика на службе математики*, Социалистическая реконструкция и наука, 4 (1932). – прим. переводчика.

[Florenskij 1995] P.A. Florenskij, *Lo spazio e il tempo nell'arte* (a cura di N. Misler), Adelphi, Milano, 1995; оригинал Флоренский П.А., *Анализ пространственности и времени в художественно-изобразительных произведениях*. – М.: Прогресс, 1993. – прим. переводчика.

[Florenskij 2007] P.A. Florenskij, *Il simbolo e la forma*, Bollati Boringhieri, Torino, 2007.

[Franks 2009] C. Franks, *The Autonomy of Mathematical Knowledge*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

[Fuchs 1992] D.B. Fuchs, *On Soviet mathematics of the 1950s and 1960s*, in [Zdravkovska e Duren 1992, pp. 220–222].

[Giaquinto 2007] M. Giaquinto, *Visual Thinking in Mathematics*, Oxford, 2007.

[Hauser 2006] K. Hauser, *Gödel Program revisited. Part I*, The Bulletin of Symbolic Logic, 12 (2006), n. 4, pp. 529–590.

[Hilbert–Ackermann 1928] D. Hilbert e W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928, 2 ed. rivista 1938; рус. перевод Гильберт Д., Аккерман В. *Основы теоретической логики* / Пер. с нем. под ред., с вступ. статьей и коммент. С.А. Яновской. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – прим. переводчика.

[Kogan 1974] B.Yu. Kogan, *The Applications of Mechanics to Geometry*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1974.

[Lermontov 1840] M.J. Lermontov, *Un eroe del nostro tempo* (1838–1840), Garzanti, Milano, 1992; издание на русском, например, Лермонтов М.Ю., *Герой нашего времени*, ОЛМА Медиа Групп, 2011. – прим. переводчика.

[Levi 2009] M. Levi, *The Mathematical Mechanic: using physical reasoning to solve problems*, Princeton Univ. Press., Princeton, 2009.

[Mancosu 2008] P. Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford, 2008.

[Markov 1954] A. Markov, *Sulla continuità delle funzioni costruttive* (in russo), *Uspehi Math. Nauk*, 9 (1954), pp. 226–230; оригинал Марков А.А., *О непрерывности конструктивных функций*, Успехи матем. наук, 1954, т.9, № 3, с. 226–230. – прим. переводчика.

[Markov 1954a] A. Markov, *Teoria degli algoritmi* (in russo), Trudy Matematiceskogo Instituta imeni V.A. Steklova, vol. 42, 1954; англ. перевод *Theory of Algorithms*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961; оригинал Марков А.А., *Теория алгорифмов*. – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1954. – 376 с. – (Труды математического института им. В.А. Стеклова. Т. 42). – прим. переводчика.

[Markov 1962] A. Markov, *Sulla matematica costruttiva* (in russo), Tr. Mat. Inst. Steklov, 67 (1962), pp. 8–14; англ. перевод *On constructive Mathematics*, AMS Translations, II Ser., 98 (1962), pp. 1–9; оригинал Марков А.А. *О конструктивной математике*, Труды математического института им. В.А. Стеклова. Т. 67, М., 1962. – прим. переводчика.

[Martin 2005] D.A. Martin, *Gödel's conceptual realism,* The Bulletin of Symbolic Logic, 11 (2005), n. 2, pp. 194–207.

[Mendelson 1964] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, New York, 1964.

[Nagorny 1995] N.M. Nagorny, *Andrei Markov and Mathematical Constructivism* (1991), in [Prawitz 1995, pp. 467–479].

[Novikov 1959] P.S. Novikov, *Elements of Mathematical Logic* (1959), Oliver and Boyd, Edinburgh, 1964; оригинал Новиков П.С., *Элементы математической логики*. – М.: Наука, 1959. – прим. переводчика.

[Prawitz 1995] D. Prawitz, B. Skyrms, D. Westerstahl (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX* , North Holland, Amsterdam, 1995.

[Shapiro 2007] S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford, 2007.

[Sossinsky 1992] A.B. Sossinsky, *In the other direction*, in [Zdravkovska e Duren 1992, pp. 223–243].

[Tarski 1937] A. Tarski, *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik*, Julius Springer, Vienna, 1937; англ. перевод с дополнениями под заголовком *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Science*, 1941; рус. перевод Тарский А., *Введение в логику и методологию дедуктивных наук* / Пер. с англ. под ред., с предисл. С.А. Яновской. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – прим. переводчика.

[Tieszen 1998] R. Tieszen, *Gödel's path from the incompleteness theorems* (*1931*) *to phenomenology* (*1961*)*,* The Bulletin of Symbolic Logic, 4 (1998), n. 2, pp. 181–203.

[Todorov 1965] T. Todorov (ed.), *Théorie de la littérature*, du Seuil, Paris, 1965; итал. перевод *I formalisti russi*, Einaudi, Torino, 1968.

[Uspenski 1961] V.A. Uspenski, *Some Applications of Mechanics to Mathematics*, Pergamon Press, New York, 1961.

[van Atten e Kennedy 2003] M. van Atten, J. Kennedy, *On the philosophical development of Kurt Gödel*, The Bulletin of Symbolic Logic, 9 (2003), n. 4, pp. 425–476.

[Vasiliev 1924] N.A. Vasiliev, *Logica immaginaria* (1924), Nauka, Mosca, 1989 (in russo); оригинал Васильев Н.А., *Воображаемая логика*. – М.: Наука, 1989. – прим. переводчика.

[Yanovskaya 1930] S. Yanovskaya, *I compiti immediati dei Marxisti-matematici*, Pod Znamenem Marksizma, № 5, p. 88–94 (in russo); оригинал Яновская С.А., *Очередные задачи математиков-марксистов*, Под знаменем марксизма, № 5, 1930, с. 88–94. – прим. переводчика.

[Zdravkovska e Duren 1992] S. Zdravkovska e P.L. Duren (eds.), *Golden Years of Moscow Mathematics*, History of Mathematics, vol. 6, AMS, Providence, R.I., 2 ed. 2007.

[Zinov'ev 1973] A. Zinov'ev, *Foundations of the Logical Theory of Scientific Knowledge* (*Complex Logic*), Reidel, Dordrecht, 1973.

[Zinov'ev 1977] A. Zinov'ev, *Cime abissali* , 2 voll., Adelphi, Milano, 1977, 1978; издание на русском, например, Зиновьев А., *Зияющие высоты*, АСТ, 2010. – прим. переводчика.

Введение

В этой книге рассмотрен широкий спектр философии математики двадцатого века, представленный, прежде всего, теми ее направлениями, которые во второй половине столетия явили собой концепции, актуальные и сегодня. На рубеже веков к таким течениям С. Феферман отнес платонизм, структурализм, натурализм, предикативизм, конструктивизм и формализм[1]. Наш список богаче, в него вошли и философии, может быть, не столь знаковые, но определенно показательные. Конечно, мы дадим и пояснения сделанного выбора, которые, надеемся, будут убедительны. Необходимо также отметить присутствующий в тексте определенный приоритет, отдаваемый современности, поскольку двадцатое столетие было долгим и богатым на события веком для науки, а для математики – особенно. Некоторые проблемы столетней давности, имевшие, к тому же, корни во второй половине девятнадцатого века, видятся сегодня устаревшими, относящимися к прошлой эпохе, прошлой обстановке, и сложно услышать их «говорящими о себе»[2]. Определяя основную концепцию книги, подчеркнем, что она во многом обусловлена желанием представить наследие философии математики, которое нам передал двадцатый век.

Речь не идет о введении в философию математики. Введение предоставляет инструменты для продолжения исследования, для продолжения движения читателя путями, намеченными существующими течениями. Главный же замысел книги не в этом. Познакомиться с направлениями философии математики важно для того, чтобы знать, что думали те, кто размышлял о математике и, прежде всего, почему они это делали и когда, и на какие вопросы

---

[1] См. S. Feferman, H.M. Friedman, P. Maddy, J.R. Steel, *Does mathematics need new axioms?* The Bulletin of Symbolic Logic. 2000. V. 6. № 4. P. 401–446.

[2] В оригинале лат. *de te loquitur* (прим. переводчика).

искали ответы, и в каких ситуациях. Однако в целом можно отметить, что, именно из-за этой их исторической обусловленности, почти все философии математики, за исключением, пожалуй, неопределенно-общих, отжили свой век – для математики не существует вечных философий. Это не означает, что они должны быть отброшены, поскольку во многих из них есть интересные идеи и результаты, имеющие непреходящее значение.

Как типичный пример направления, которое отнесем к неопределенно-общим, без придания этому термину уничижительного оттенка, рассмотрим реализм, хотя похожие рассуждения можно было бы привести и в отношении других течений. Итак, реализм, как одна из философий математики, практически не углубляется в ее специфические особенности, более того, вуалирует и запутывает их, обращаясь с числами как с обычными общими терминами естественного языка. Вероятно, подобным образом достигается выигрыш во всеобщности и философской значимости, однако это направление явно «не встает на крыло» как философия именно математики и «завершает свой полет» полным фиаско: слова, выражающие числа, кардинальным образом отличаются от других слов и употребляются по другой схеме, если верить заключениям последних психолингвистических исследований[3].

Этот небольшой пример ставит не только проблему развития философии математики, но и спрашивает о том, какими инструментами она должна исследоваться и по отношению к какой математике. Та, которую читатель встречает в изложении и толковании большинства философов, состоит из нескольких операций над натуральными числами и нескольких теорем плоской Евклидовой геометрии. Возможен также бесстрашный прыжок в самую чащу теории множеств или, что еще реже, в область теоретико-множественных определений более абстрактных математических конструкций. Это не та математика, которую знают сами математики. Это также не та математика, которую изучают дети. Полностью отсутствует захватывающий и неисчерпаемый мир систем

[3] См. A. Karmiloff-Smith, *Beyond Modularity*, Cambridge, Mass., The MIT Press, 1992.

исчисления; отсутствуют теоремы сложные, да, впрочем, и простые тоже, к примеру, теоремы о графах, которые возникают в связи с задачей о гостях на вечеринке, знакомых и незнакомых друг с другом. Теория множеств сводится к языку и аксиомам, о происхождении и функции которых трудно судить без выхода на продвинутый уровень математической теории.

Обычна практика, когда математикой предлагают пренебрежительно считать то, о чем рассказывают курсы логики для философов в американских колледжах. Там, кроме этой дисциплины, студенты могут прослушать историю философии. Известно однако, что философы прошлого использовали чрезвычайно ограниченный набор математических примеров. Представьте только, что философия математики (и не только математики) у И. Канта опиралась на два утверждения: первое было «7+5=12», а второе – раздел I.32 из «Элементов» Евклида[4].

Читатель должен быть готов к ситуациям, подобным этой, и делать из них соответствующие выводы. Даже для того, чтобы только начать разговор о философии математики, нужно знать основные этапы ее истории. Примечателен эпизод, связанный со становлением проективной геометрии, который никогда не расценивался философами как важнейшая веха развития математики. Рассуждают обычно о неевклидовых геометриях из-за их значения для физики и логики, но, с точки зрения самой математики, гораздо большее влияние на ее понимание и развитие оказала геометрия проективная, как в синтетической, так и в аналитической версиях. Нужно знать также математику XX века или хотя бы иметь общее представление о ней[5]. Однако, если для этой цели воспользоваться математикой, негласно используемой многими философскими течениями, то есть риск потратить усилия впустую. Исключение составляют те философские течения, для понимания которых необходимо, наоборот, слишком глубоко знать математику; большинство же других не требуют серьезных знаний ее современного со-

---

[4] Сумма внутренних углов треугольника равна 180 градусам.
[5] См. P. Odifreddi, *La matematica del Novecento*, Torino, Einaudi, 2000.

стояния, считая философию приоритетной и независимой от количества известных математических результатов и полагая, что суть математики всегда остается неизменной.

Впрочем, проблема подготовки к исследованиям в области философии математики не является предметом этой книги, которая, прежде всего, обращается к самим исследованиям, проводимым и проведенным в этом направлении. Присутствует также и некоторая критика рассматриваемых философских течений.

Книга представляет собой беглый обзор существующих философских течений, обзор, который, однако, достаточно точен и последователен. Выбор рассматриваемых направлений, как всегда, является упрощающим и субъективным. Исключены некоторые оригинальные идеи, которые не получили дальнейшего развития. Не посвящено отдельной главы основаниям теории категорий, которая понемногу сдает свои позиции несмотря на то, что ранее претендовала на радикальный пересмотр концептуальной организации математики. Амбиции теории категорий отчасти обоснованны, если исследования по основаниям математики разрабатываются нетрадиционным образом. Если же их рассматривать только как предложение новой понятийной структуры, то категории порождают те же самые проблемы, что и множества, причем эти последние связаны, в основном, с классической философской проблематикой, в то время как категории закладывают в основания математики специфическую концепцию – понятие функции, которая не принадлежит естественному бытовому языку. Теория категорий, во всяком случае, совместима с различными основными течениями философии математики, как, например, с реализмом, так и с формализмом.

Возможно, читатель не поддержит и некоторые другие сделанные исключения. Философия математики представляет собой научную дисциплину, которую продолжают культивировать с прилежанием, что приносит многочисленные плоды[6]. Видимо, это происходит потому, что нет окончательных выводов и можно вновь и вновь возвращаться к тем же самым проблемам с новыми идеями и аргументами. Само название этой науки подсказывает, что она интересует и философов, и математиков, которые ведут исследования различными способами, по-своему формулируя и проблемы, и решения. Откровенно говоря, философия математики, которая достаточно непроста и требует широкого кругозора и глубоких знаний во многих отраслях науки, не всегда оценивается по достоинству и теми, и другими, если, конечно, не сводится к простым и незатейливым формулам.

Она, между тем, впитывает идеи представителей обеих сторон. В этой книге слово чаще предоставляется математикам, во-первых, потому, что они более знакомы автору, во-вторых, потому, что они, скорее всего, менее знакомы читателю и, что еще печальнее, часто отодвигались на второй план, даже когда играли главную роль, и в-третьих, потому, что, в целом, высказывают вещи более уместные. Вероятно, и читатели разделятся на тех, кого занимает философская сторона вопроса, и других, кому интереснее математика. Книга адресована, прежде всего, второй группе, для которой, в частности, и задумана начальная часть философского введения. Будем надеяться, что трудная задача угодить всем и «раздать всем сестрам по серьгам» не возымеет обратного эффекта и не разочарует обе группы.

---

[6] Для примера приведем далеко не полный список недавних публикаций: S. Shapiro, *Thinking about Mathematics*, Oxford, Oxford Univ. Press, 2000; M. Steiner, *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1998; J.R. Brown, *Philosophy of Mathematics*, New York, Routledge, 1999; M. Potter, *Reason's Nearest Kin*, Oxford, Oxford Univ. Press, 2000 и другие, цитируемые далее по тексту книги. Кроме того, необходимо отметить журнал «Philosophia Mathematica», основанный в 1964 году и обновленный в 1993, выходящий тремя номерами в год и всегда содержащий интересные предложения и дискуссии. Существует также *лист e-mail рассылки fom-digest* для дискуссий по основаниям математики; для более подробной информации: http://www.math.psu.edu/simpson/fom/.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Философия математики

Необходимо предупредить сразу, еще до начала погружения в предмет этой главы, что от изучения философии математики не нужно ожидать ответов на все вопросы, которые математик или инженер, преподаватель или студент[1], вероятно, задал бы в связи с той дисциплиной, которую преподает или изучает, в связи со своей работой или просто так. Она не даст ответов не только на все вопросы, но даже на некоторые из них.

Вместо этого возникнут новые вопросы, появятся новые проблемы, которые ранее не встречались и не поднимались. Это происходит потому, что философия, как сложившаяся дисциплина в целом, а также философия математики в частности, представляют собой по сути вещи совершенно отличные от математики и от ее преподавания. Каждая наука развивается вокруг эзотерических проблем, лежащих в ее основе, подчиняясь своей внутренней логике.

Другая причина, несомненно, связанная с первой, состоит в том, что постоянно существует разрыв между многими большими проблемами, которые обсуждались в рамках философии математики, и состоянием самой математики и ее актуальных проблем. Философские вопросы практически остаются теми же на протяжении тысячелетий, в то время как математика меняется, а в некоторые периоды, в особенности за последние два века, очень быстро и бурно. Философы постоянно пытаются адаптировать свои вопросы к уклончивой и постоянно меняющейся реальности. При этом в

[1] Начиная с этого момента и далее по тексту книги под «математиками» будем подразумевать разнообразных пользователей данной науки, понимая этот термин в том широком смысле, который включает в себя всевозможные специфические вариации. Из контекста всегда будет ясно, когда речь пойдет о творческом исследователе математики, а когда просто о математике, знающем и использующем те или иные математические методы.

лучшем случае они отстают от математики на целое поколение (что, впрочем, справедливо и для большинства математиков, и для пользователей данной науки). Однако вопросы, которые ставят философы, остаются всегда теми же самыми, за исключением случаев, когда математика сама насильно ставит новые[2]. Философия идет вперед, повернувшись лицом в прошлое и имея будущее за спиной, как ангел Вальтера Беньямина[3]. В более прозаических терминах можно сказать, что она как портной, снимающий мерки у клиента, который продолжает расти от примерки до примерки.

Философия математики, тем не менее, существует как дисциплина, издаются книги и читаются курсы под этим названием, в том числе и в соответствии с учебными планами высших учебных заведений. Одну из важных утилитарных причин, по которой было бы неплохо изучить эту науку, можно пояснить следующим образом. Дело в том, что разговоры и дискуссии по философии математики представляют собой один из главных каналов, посредством которого ваше окружение, коллеги-специалисты других отраслей, популяризаторы науки, журналисты, редакторы и издатели доходят до понимания (может быть, кажущегося) чего-то в математике. Чтобы быть в состоянии квалифицированно вести с ними дискуссию и корректировать, по возможности, их мнения и суждения, необходимо быть осведомленными о том, что знают собеседники, владеть их аргументацией и «уметь вести игру на их половине поля», не уходя в глухую оборону и изоляцию, заявляя, что математика представляет собой не то, о чем говорят оппоненты, а совершенно другую вещь.

Термин «философия», кроме того, наделяет обычные знания авторитетной лицензией, придавая им значение и вес. Математик иногда остается под впечатлением, что некоторые непрофессионалы знают о его предмете больше, понимают его глубже, разбираясь в основах основ математики, чем он сам, что, нередко, приводит к развитию чувства собственной неполноценности.

---

[2] В дальнейшем мы предполагаем привести примеры, подтверждающие это резкое суждение (и другие аналогичные). Конечно же, читатель, которого мы не сможем убедить, имеет полное право сформировать свое собственное мнение по каждому спорному утверждению.

[3] W. Benjamin, *Angelus Novus*, Torino, Einaudi, 1962, p.76.

Необходимо отметить также, что философия математики имеет, по меньшей мере, две сущности. С одной стороны, это философия в чистом виде, и она не имеет ничего общего с математикой. С этой точки зрения, для любого математика совершенно позволительно и, даже, вполне допустимо не понимать эту науку или совсем ее проигнорировать. Однако, с другой стороны, она несомненно связана с развитием математики как через обмен идеями и мыслями, высказанными и воспринятыми математиками, так и посредством влияния, которое она оказывает как общекультурный фактор, в том числе и вышеупомянутыми путями, на цели и задачи этой научной дисциплины, ее позиционирование в системе обучения и преподавания, ее оценку в обществе со всеми вытекающими из этого последствиями. Таким образом, изучая философию математики, специалист всегда сможет лучше понять свою собственную науку, повысить ее роль и значение, а также поднять значимость своей собственной работы.

Все это также представляет собой одну из причин, по которой был сделан выбор в пользу рассмотрения современных теорий вместо классического анализа, посвященного учениям Древней Греции, Древней Индии и так далее, как это обычно делается. Самое большее, в настоящей работе прослеживаются истоки некоторых философских течений в девятнадцатом столетии, без углубления в более ранние исторические периоды.

Возможно, многие читатели-математики мало знакомы с предметом и методами философии, поэтому вначале затрагивается именно эта тема, которая, надо заметить, весьма не проста для точных формулировок. Но все еще гораздо сложнее, к сожалению, с математикой для читателей-философов. Для них ее можно только цитировать или приводить ссылки на оригинальные работы. Первая часть книги целиком посвящена философии и может быть пропущена теми читателями, которым она либо не нравится, либо покажется слишком трудной, как это часто бывает с математиками. Все рассматриваемые в ней темы вновь, но уже более конкретно, будут обсуждаться во второй части книги, в которой проводится обзор и анализ различных течений философии математики. Первая часть также может быть прочитана во вторую очередь теми читателями, которые уже освоили философскую терминологию и хотели бы вначале изучить всю панораму направлений философии математики и только потом сравнить собственные впечатления, полученные (на что хотелось бы надеяться) при глубоком изучении приведенных первоисточников, с авторскими в рамках обсуждения целей и задач философии.

1. ФИЛОСОФСКАЯ ПРОБЛЕМА

Вполне вероятно, первым, и законным, вопросом читателя будет желание узнать, что такое философия математики. Достаточно часто ее определяют непосредственно как ответ на специфический вопрос – что такое математика.

Ответов на этот вопрос в истории западной мысли встречается великое множество и, чем ближе мы к нашему времени, тем больше вариантов, видимо, потому, что математика становится наукой все более сложной и значимой. Оставим пока в стороне ответы таких классиков, как Платон или Кант[1], и приведем ниже далеко не полный обзор высказываний философов и математиков по данной проблеме[2].

Р. ДЕКАРТ (1628)

Должна существовать всеобщая наука, которая объяснила бы все то, что возможно знать о порядке и мере, взятых независимо от их применения к какой-либо конкретной ситуации… и, действительно, такая наука существует и имеет собственное, освященное длительным периодом ее эффективного использования, имя – *математика*.

Д.В. МЕЛЛОУ (1902)

Высшая математика есть искусство рассуждения о численных отношениях среди природных явлений.

---

[1] Некоторые воспоминания о философии этих мыслителей должны непременно остаться у каждого читателя после всего предыдущего образования. Чтобы освежить память, можно обратиться к книгам S. Shapiro и M. Potter, уже упомянутым выше, или же к книге *Les philosophes et les mathematiques* под ред. E. Barbin и M. Caveing, Paris, Ellipses, 1996.

[2] Большинство из этих высказываний, а также другие, можно найти, к примеру, в R.E. Moritz, *Memorabilia Mathematica*, Washington D.C., Mathematical Association of America, 1914.

Дж.Дж. СИЛЬВЕСТР (1844)

Число, место и комбинация – три особые и самостоятельные, но, в то же время, перекрывающие одна другую и пересекающиеся сферы рассуждения, к которым все идеи математики, так или иначе, могут быть отнесены… три важнейших понятия – Количество, Пространство и Порядок.

Э. ПАППЕРИЦ (1891)

Предмет чистой математики заключается в связях и отношениях, которые могут быть концептуально установлены между совершенно произвольными элементами в предположении только о том, что они входят в состав некоторой упорядоченной множественности.

Г. КРИСТАЛ (Брит. энциклоп., 9 изд.)

Каждая концепция, которая может быть полностью и окончательно определена посредством конечного числа уточнений, например, заданием конечного числа элементов, представляет собой математическое понятие. Функция математики состоит в том, чтобы выявлять неявные следствия, присутствующие в описании группы математических понятий.

Ф. КЛЕЙН (1902)

Математика в общем представляет собой в основном науку об очевидных вещах.

Г.Д. ФИТЧ (1910)

Чистая математика представляет собой набор гипотетических дедуктивных теорий, базирующихся на четкой системе простейших, но *не определенных*, понятий и символов, а также простейших непротиворечивых, но *не доказанных* утверждений (обычно называемых аксиомами) совместно со следствиями, логически выводимыми из них при помощи строго дедуктивных методов без единого обращения к интуиции.

Б. РАССЕЛ (1901)

Чистая математика состоит всего-навсего из утверждений типа «если высказывание такое-то верно при *каких-нибудь* условиях, тогда высказывание сякое-то верно при тех же самых условиях».

Б. ПИРС (1850)

Математика – это наука, которая выводит необходимые заключения.

А. УАЙТХЕД (1898)

Вся математика заключается в организации ряда поддержек воображению в процессе размышления.

НОВАЛИС (1901)

Чистая математика не имеет дела с величинами. Она представляет собой лишь доктрину записи мыслительных операций, между собой упорядоченных и доведенных до механического использования.

Ч.С. ПИРС (1881)

[Математика] есть изучение идеальных построений (часто применимых к реальным проблемам) и выявление посредством этого отношений, прежде скрытых, между частями этих конструкций.

Дж.Ф. ГЕРБАРТ (1890)

Все то, чего самые великие умы человечества достигли *в постижении форм* посредством понятий, заключено в великой науке, которая называется математикой.

Э.В. ГОБСОН (1910)

Возможно, наименее неудовлетворительное описание (я не назвал бы это определением) основной цели современной чистой математики может быть сформулировано следующим образом. Математика занимается *формой* в наиболее широком и общем смысле этого термина.

Прочитав эти определения, сразу хочется сказать огромное спасибо всем уважаемым мыслителям, однако несколько позже все эти описания осознаются как нагромождение, напоминающее Вавилонскую башню. Даже без больших познаний не трудно понять, что каждое определение было сформулировано под влиянием как культуры в целом, так и состояния математики того времени, которые в девятнадцатом веке претерпели существенные и стремительные изменения. Каждый тезис использует понятия, которые отсылают к проблемам, не во всем очевидным и требующим пояснений. Каждое утверждение является скорее концентрированной формулой, чем анализом, вероятно, уже заключением проведенного, но скрытого, философского анализа. Не ясно к тому же, была ли целью этого философского анализа формулировка выводов, заключённых подобными тезисами, или же они являлись предпосылками для этого самого анализа, к которому сейчас самое время обратиться.

2. ОНТОЛОГИЯ

Итак, вернёмся вновь к вопросу о том, что представляет собой философия математики и к дискуссии о природе математики для того, чтобы начать использовать философские термины, такие, как, например, «природа». Однако сразу возникает вопрос, почему подобное исследование сущности математики должно интересовать, или быть частью, или разделом философии. Философия занимается всем или только важными проблемами? И какими же? Верно также и то, что существует философия *dans le boudoir*[1], но традиционно философия подразделяется на четыре части: метафизика, логика, этика и эстетика.

Математик, которого попросили бы выбрать среди них раздел, наиболее близкий к своему, указал бы, вероятно, на логику и был бы удивлен, узнав, что философию математики чаще всего относят к метафизике. Именно здесь, в первой, наиболее философской, части и происходит это соприкосновение. И происходит оно следующим образом.

Если математика представляет собой исследование или рассуждение, то она должна иметь свой собственный предмет. Более того, если это наука, тогда она не только имеет предмет, но и, разумеется, предоставляет знания о нем, и эти знания должны быть истинны. От предмета дисциплины осуществляется переход к объектам, о которых она рассуждает или которые исследует. Этот переход не настолько очевиден, как может показаться на первый взгляд. В любых других науках можно описывать объекты изучения без особых проблем, поскольку эти науки исследуют либо макроскопические, либо микроскопические предметы реального мира. Такая ситуация характерна и для ботаники, и для биологии, и даже для физики, хотя в действительности их объекты часто являются лишь *квазинатуральными*, поскольку изучаются идеализа-

[1] В будуаре (фр. – прим. переводчика).

ции, полученные, в большинстве своем, с использованием математики, но это уже вопрос, относящийся, скорее, к философии науки.

Для математики нельзя охарактеризовать ситуацию аналогичным образом. Никто, даже радикальный приверженец эмпиризма и даже в отношении евклидовой геометрии, не отважится утверждать, что создания (творения), о которых рассуждает математика, существуют в физическом мире.

Выходит существующее, входит бытие. Выходит мир (вселенная), входит онтология. Все это не более, чем терминологические трюки философии, но если в дело вмешивается онтология, или наука о бытии[2], тогда математические объекты становятся видимы и оценены как особые случаи или особо интересные, отличные от других типов абстракций, со значительной склонностью к универсалиям. Например, число есть одно из всеобщих универсальных понятий, которое принимает участие, распределяется или присутствует в отдельно взятых числах. Бывает, что подобные объекты становятся предметом отдельной науки, в отличие от прочих отвлеченных понятий, поэтому метафизика находит в математике «еще один кусок хлеба для своих зубов», причем не только в онтологическом смысле, но и, возможно, как определенную модель.

Если математические объекты имеют метафизический статус, если математика и онтология находят точки соприкосновения, то это означает, что математики иногда занимаются метафизикой. Они либо выступают в роли поставщиков для метафизиков, предоставляя им новые понятия (сущности) для изучения, либо являются их коллегами, которых интересуют различные аспекты одной и той же реальности.

Описание математических объектов и их характерных особенностей, несомненно, является специфической задачей математиков.

---

[2] Онтология прикладная, напротив, представляет собой новое научное направление, объединяющее и упорядочивающее исследования особых аспектов реального мира, которые ускользают из поля зрения всех остальных наук.

Термин «онтология» используется не только в философии, а также, к примеру, в биологии, где означает учение о развитии формы, строения и способностей индивидуального организма начиная с момента оплодотворения яйца.

Совсем не такими четкими представляются обязанности метафизиков. Их задача – сказать, существует ли что-то и что именно существует в смысле неслучайном (то есть безотносительном к тому, что рождается и умирает), если все-таки что-то существует без рождения и смерти. Следовательно, для философии, вероятно, остается обязанность (или она присваивает себе эту обязанность) показать прежде всего, что математические объекты существуют и разговор о них – не пустое сотрясение воздуха, что, наоборот, этот разговор содержательный и даже наиболее аргументированный и имеющий под собой очень серьёзную основу по сравнению со всеми прочими темами.

Но, может быть, математики уже доказали наличие своих объектов и предложили серьезные обоснования истинности своих рассуждений и доказательств? Что еще можно добавить? Если признать существование математических объектов, то следующей задачей могло бы стать их позиционирование в ансамбле бытия. Кроме того, нужно показать необходимость математических сущностей, их свойства и возможности, а также их резонность и обоснованность. Дальнейшие возможные шаги – выявление связей с другими проявлениями бытия или определение его вида, к которому они могут быть отнесены, и, вполне возможно, способа рассуждения, который бы наилучшим образом подходил для их изучения, поскольку различные сущности требуют своих особых методов исследования и рассуждения. Однако какие инструменты имеют философы для этой работы, инструменты, которые отличались бы от инструментов математиков?

Это важный вопрос, к которому придется возвращаться не раз в ходе последующих рассуждений.

У философов нет никаких дополнительных инструментов за исключением, пожалуй, профессионального умения вдаваться в тонкости[3]. Философы имеют хороший навык без конца задавать новые вопросы и производить неисчерпаемые *pilpul*[4]. Такое заня-

---

[3] В оригинале – разделить волос на четыре части. – прим. переводчика.

[4] В Талмуде pilpul или «пилпул» обозначает оригинальное, остроумное суждение. Переводится словарем Дрора как казуистика, схоластическая полемика (прим. переводчика).

тие, само по себе, достойно одобрения, даже если не связано с Талмудом, но временами спорное и безосновательное. Платон, к примеру, утверждал, что философия, ее диалектика превосходит математический метод, поскольку математики завершают свои исследования на уровне аксиом, а философы идут дальше или, по крайней мере, заявляют о желании пойти дальше в анализе ситуации.

Дискуссия формирует, создает, смещает проблемы. Вместо ответа вдруг появляется новый вопрос. Поскольку не существует альтернатив разговорному разрешению какой-либо философской проблемы, то она часто рефлексивно трансформируется в лингвистическую, то есть в проблему, имеющую отношение, скорее, к используемому языку. В качестве примера подобного превращения рассмотрим ситуацию с универсалиями. Представим ход одной вымышленной дискуссии, заранее попросив извинения за возможные и неизбежные шероховатости.

Универсалии представляют собой абстрактные общие понятия, названные таким образом, поскольку присущи большому числу индивидуальных вещей и особей. Типичный пример – красота. Платон говорил об Идеях. Онтологическая проблема состоит в том, существуют ли они или нет. Реалисты утверждают с последующими уточнениями и дифференциацией, что они существуют. Отрицать, что красота существует, весьма проблематично не потому, что это означало бы утверждение тезиса «все некрасиво», а потому, что фраза «красота не существует» имеет подлежащее «красота» и, в соответствии с лингвистическими концепциями, использование термина в качестве подлежащего придает ему почти реальное существование. Также отрицание существования какого-либо понятия уже заключает в себе разговор о нем и в случае категории бытия утверждает его существование. Парадокс восходит к Пармениду – небытие есть.

Идея о том, что язык проявляет бытие, есть у Аристотеля, у которого структура бытия изоморфна структуре повествовательного предложения. Кажется достаточно парадоксальной идея о том, что бытие раскрывается человеческим лепетом, стоящим лишь немного выше животного, эволюционировавшим из сигналов об опасности и сексуальных призывов. Однако она продолжает жить в научных кругах и существовать в различных формах, в том числе, неявно выраженных или непризнанных (в *Трактате* Л. Витгенштейна, например). Ее перманентность и стойкость, видимо, определяются именно тем фактом, что язык представляет собой единственный инструмент, который имеется для изучения бытия. Уточним сразу, принимая во внимание аналогии, которые часто возникают, что это неверно в отношении математики, которая имеет в своем распоряжении экспериментальное сопоставление с реальным миром в качестве контроля (и источника вдохновения). Кроме того, математический язык не останавливается в своем развитии, но для того, чтобы он был признан, безотносительно к тому, выражает этот язык что-то или нет, он должен быть серьезно проверен в соответствии с определенными нормами, существование которых имеет свое специфическое объяснение.

Тот, кто не признает изоморфизма языка и бытия, встречает очевидные трудности при занятиях онтологией и зачастую доходит до того, что оказывается в ловушке абсолютизации языка и изучает только его. Номиналисты отрицают существование универсалий, допуская, что существуют только индивиды или конкретные предметы (не общие, но единичные, особенные). Они могли бы рассуждать следующим образом. Можно сказать, что «красота не существует», но эта фраза будет означать, что существуют *только красивые вещи*. Если имеются прилагательные, то существительные, в соответствии с их подходом, излишни и устранимы. Имена прилагательные предшествуют именам существительным и в ходе их изучения, и в процессе применения. Не станем здесь скатываться в дискуссию, хотя можно было бы утверждать, что в некоторых случаях существительное идет впереди прилагательного или, по крайней мере, одновременно с ним. В английском языке слово «beautiful»[5] образовано, кажется, от «beauty»[6], но известно, что английские дети запоминают сначала «beautiful», а не фразы со словом «beauty», за исключением случа-

[5] Красивый (англ. – прим. переводчика).
[6] Красота (англ. – прим. переводчика).

ев «beauty-case»[7] или чего-то подобного, впрочем, не будем углубляться в лингвистические тонкости. Этот пример искусственный и приведен для удобства.

«Я поражен красотой картины» может быть выведено из «я не могу остаться равнодушным, когда рассматриваю картину и вижу, насколько она красива». Аналогичная ситуация имеет место и для некоторых абстрактных понятий и конструкций, например, «думаю, что…» является основой и может заменить «есть одна мысль…», что, однако, не соответствует истине по мнению тех, кто отрицает существование ментальных состояний; так «четыре яблока» является основой по отношению к «число четыре».

Когда есть прилагательное типа «красивый», то можно образовать также и существительное «красота». После этого, вместо утверждения, что есть нечто красивое, можно сказать, что это нечто обладает красотой. Тогда, с одной стороны, это качество напрашивается в ансамбль бытия, с другой стороны, имя существительное, образованное однажды, может законно быть подлежащим в других грамматических фразах. Грамматика регулирует использование слова, и становится возможным сформулировать множество предложений со словом «красота» в качестве подлежащего. Все эти утверждения могут быть даже организованы в целую теорию, предметом которой станет красота, что и происходит, например, в эстетике. Если эти образованные слова имеют значение в том смысле, что их можно использовать для целей общения и коммуникации, то, вполне возможно, именно правила языка являются тем, что формирует это значение. Спрашивается тогда, с чем имеет дело изначально или с чем должна иметь дело философия, с сущностями или же со словами?

Лингвистический анализ выхолащивает онтологический вопрос или трансформирует его, преобразуя в проблему, которая, в свою очередь, также не имеет окончательных ответов. Когда дойдем до высказываний типа «красота есть счастье жизни», то вполне обсуждаемо, что оно могло бы произойти из фразы «видеть красивые вещи есть счастье жизни». Понятно, что это не только вопрос того, что видно в действительности. Есть красота и в музыке, и в рассуждени-

[7] Косметичка (англ. – прим. переводчика).

ях. Это не вещи. Это другие абстрактные сущности, пожалуй, отличного от универсалий типа. Можно было бы вести речь об опыте в общем, который касается не только видения вещей, но такой подход представляет собой основу достаточно скользкую. Аналогично можно рассуждать по отношению к словосочетанию «счастье жизни». Исключение этой конструкции, похоже, потребовало бы достаточно сложной трансформации начальной фразы, следовательно, можно предположить, что есть контексты, из которых абстрактные слова не могут быть удалены, и что нельзя разговаривать без их использования. Этот вывод не влечет, во всяком случае, за собой тезис о том, что подобные слова, которые кажутся относящимися к абстрактным сущностям, на самом деле относятся к ним и их выражают. Неустранимость таких слов может рассматриваться только как косвенное доказательство этого. Возможна также разработка определенной теории языка, в соответствии с которой не все имена существительные обозначают что-либо (такая ситуация имеет место у некоторых теоретических терминов научных языков[8]).

Все это обсуждение имеет прямое отношение к философии математики в контексте проблемы эквивалентности математических понятий и универсалий. «Число» должно быть чем-то похоже на «красоту», как у Платона[9]. В действительности же такое приравнивание представляется весьма сомнительным. Когда дети изучают применение числовых терминов и обычных существительных, они бывают смущены различием двух практических ситуаций. Перед четырьмя *плюшевыми игрушками* они могут повторять, дотрагиваясь до них последовательно, «мишка», «мишка», «мишка», «мишка». Таким образом изучают, что эти ярлычки, однажды данные предметам, остаются к ним прикрепленными, и после этого уже не могут ассоциировать вещь с двумя различными словами (например, «мишка» и «собачка»). С числовыми ярлычками «один», «два», «три», «четыре» все происходит наоборот. Одина-

---

[8] По этому вопросу см. C.G. Hempel, *La formazione dei concetti e delle teorie nella scienza empirica* (1952–1958), Milano, Feltrinelli, 1960.

[9] Платон иногда разделял мир Идей и Объекты математики, а иногда отождествлял второе с первым.

ковые предметы имеют разные этикетки, и, если порядок изменен, тот же самый предмет получает разные ярлычки. Правила для числовых терминов другие, отличные от правил для обычных существительных (последние не являются, собственно говоря, универсалиями, хотя им очень близки).

Возможно, то общее, что у математических понятий типа чисел есть с универсалиями, суть отрицательные свойства. Ясно, что они не являются первыми словами, которые изучаются человеком, когда он начинает говорить, что осваивается сначала их употребление в функции прилагательного и что их использование может быть исключено из многих фраз и рассуждений. Таким образом, альтернатива между онтологией и лингвистическим анализом остается актуальной также и для математики.

Можно обсуждать необходимость вводной теории математических терминов для тех, кто начинает заниматься этой наукой. Если допустимые способы использования слов являются вопросом вводным, то разъяснение, как применять математические термины, могло бы стать задачей грамматики или логики, но в действительности математика сама рассуждает не только об объектах, но также и о словах, которые использует, посредством определений.

Дискуссия на тему слов и их применения представляется, во всяком случае, делом менее обязывающим и значимым, чем онтология. Вопрос о возможности исключения определенных терминов из фраз или рассуждений по отношению к математическим понятиям может быть поставлен вполне четко. Недавний пример – попытка Р. Карнапа сконструировать новую бесклассовую теорию (*no class theory*) для множеств, о которой поговорим далее. Случай показательный, но, по существу, малоизвестный несмотря на известность самого Р. Карнапа как философа.

Рудольф Карнап[10] утверждал, что материальный способ рассуждений мог бы и должен быть заменен в науке на формальный, т.е. на способ, при котором необходимо жестко следовать правилам синтаксиса научных языков. «5 есть простое число» означает лишь «5 делится только на 1 и на 5» и из этого не следует (в мате-

[10] R. Carnap, *Die logische Syntax der Sprache*, Wien, Springer, 1934; англ. перев. *The Logical Syntax of Language*, London, Routledge&Kegan Paul, 1937.

матике, в отличие от метафизики), что «5 есть число». Это утверждение исчезает при формальном способе рассуждения. Конечно, это не теорема, но определенное металингвистическое замечание, означающее, фигурально выражаясь, что нумерал[11] «5» получен посредством применения терминообразующих правил языка арифметики. В научных языках нет никакой необходимости в общих словах типа «предмет» или «число», которые характерны для естественного образа рассуждения, то есть такого способа, при котором каждый термин предположительно обозначает что-то реально существующее. Грамматическая функция таких слов – местоимение, и в формальных языках они заменяются переменными.

Позиция Р. Карнапа не имеет отношения к номинализму. Он не утверждает, что существуют отдельно взятые числа, а не число как общее понятие. Его позиция означает, что проблема существования заменяется вопросом использования лингвистических правил научных языков.

В науке, и в математике особенно, требование точности не подвергается сомнению. Правила грамматики должны быть очень четкие, гораздо точнее, чем в естественном языке, чтобы однозначно определять значения терминов, если это грамматические правила, фиксирующие смысл или, в общем случае, использование этих понятий. Все это обусловливает необходимость создания некоего идеального языка для математики, и эта потребность была удовлетворена логицизмом, правда, как увидим далее, совсем на других основаниях, более близких к языку, который обнаруживает

[11] Почти во всех научных языках нумерал для числа 5 не является первичным символом, а представляет собой термин, сконструированный на основе других, более фундаментальных; система счисления на основе десяти – обычно производная, и десять цифр введены как аббревиатура (прим. автора).

Под нумералом в литературе понимается символ или группа символов, используемых для представления числа. Различие между нумералами и числами такое же, как между словами и идеями, которые выражаются словами, т.е. число есть концепция, которую выражает нумерал. Нумерал может быть написан, зачеркнут или стерт, а число – нет. Одно и то же число может быть представлено различными нумералами, например, символы «5», «пять», «IIIII» и «V» представляют собой различные нумералы, но все они выражают одно и то же число (прим. науч. редактора).

бытие. Отметим, что в философии математики часто случается, когда одни и те же технические решения или одни и те же данные имеют свое особое обоснование в различных ее течениях. Происходит это потому, что такие данные или сведения являются реальностью математики и не могут быть отброшены при изучении ее сути, поэтому они рассматриваются каждой философией и каждой из них по своему обосновываются. Таких ситуаций существует достаточно много (как, впрочем, и в случае, когда мы рассматриваем религии).

Анализ лингвистических вопросов гораздо более интересен (хотя и более сложен) в приложении к математике, а не в отношении универсалий. Для ответа на них или только для обоснования некоторых положений нужно уже углубляться в тонкости математических теорий. Если вновь говорить о проблеме элиминации определенных терминов из фраз и рассуждений, то здесь уже не достаточно *показать* новые формулировки основных положений или других высказываний без использования абстрактных понятий, о которых идет речь. Требуется также *проверить*, что новые версии доказуемы или эквивалентны исходным, или имеют, по крайней мере, те же самые основные следствия, или удовлетворяют каким-то другим аналогичным условиям (и каждое из этих требований определяет только один возможный вариант исключения). Вместо этого часто имеются однозначные окончательные заключения – утвердительные или отрицательные[12].

Обоснованность сочетания онтологии и математики – наоборот, вопрос достаточно спорный. Вернемся снова к красоте как к типичной универсалии. Она является предметом определенной теории и даже не одной. Все они относятся к эстетике. Скольким из этих теорий необходимо онтологическое вступление и сопровождение, зависит, вероятно, от теорий и от онтологии. Если онтология подтверждает, что существуют такие понятия, как красота, то возможно, что этим она передает право на исследование таких

[12] В методологии дедуктивных наук (используя старую терминологию А. Тарского) изложение вопросов элиминации терминов входит в раздел, посвященный определимости и изучению консервативных расширений теорий.

понятий эстетике, налагая при этом определенные ограничения, которые могут зависеть от рода существования (к примеру, *ante rem* или *in re*, не углубляемся далее). Если же онтология говорит, что красота не существует, то люди все равно продолжают изучать красоту и строить теории на этот счет. Эти теории, однако, должны быть увязаны с несуществованием красоты и переформулированы в соответствующих терминах. Поскольку эстетика – часть философии, совершенно справедливо требовать, чтобы отдельные её разделы были бы согласованы между собой.

Математика – другое дело. Она исторически предшествует онтологии, и математические теории представляют собой построения, не зависящие от философских предписаний. Чем являются математические объекты и существуют ли они – решает математика.

Можно выделить два различных фундаментальных подхода, определяющих статус философии математики: нормативный и дескриптивный. В соответствии с первым философия должна быть чем-то, что принципиально предшествует математике в смысле наложения определенных условий и ограничений на то, как математика должна развиваться, или вынесения различных вердиктов по поводу правомочности ее отдельных разделов. В соответствии со вторым философия должна принять к сведению математику такой, какая она есть, извлечь из нее определенные установки, обдумать их каким-либо образом и с какой-то четко определенной целью. Значительная часть философии математики посвящена обсуждению этой проблемы статуса философии математики, т.е. представляет собой мета-философию, то есть над-философию.

Если онтология имеет нормативные претензии, то она может дойти и до прямых указаний, какие разделы математики должны быть забракованы или переформулированы (если возможно) из-за их несоответствия онтологическим установкам. Однако всегда должно быть выяснено, с помощью каких инструментов и на каких основаниях философ-онтолог может осуществлять перевороты во взглядах на математическое бытие и чем они отличаются от инструментов и оснований математика.

В случае выбора в пользу дескриптивного подхода онтология имеет мало автономного пространства. В этом случае философ может только принять к сведению, предполагают ли математические теории (в зависимости от того, как они разработаны и представлены) определенную онтологию или нет, и какого рода. Если его онтологическое учение явно противоречит математике, то оно остается лишь частной декларацией. Отметим в заключение, что онтологический вопрос представляет собой только один из возможных способов того, как можно начать изучать философию. Несомненно также, что этот способ взаимосвязан с другими философскими проблемами и подходами.

3. ЭПИСТЕМОЛОГИЯ

Метафизик, который высказывает свои многозначительные утверждения о действительности, должен иметь определенный познавательный инструмент, который он сам и все те, кто его слушает, считали бы надежным и достоверным или, по крайней мере, функционирующим корректным образом. Кроме того, этот инструмент не должен опираться на эмпирические преходящие аспекты реальности. Этот инструмент есть не что иное, как способность, которую обычно называют «разум» со всеми его проявлениями, среди которых ум, трансцендентальный интеллект, интеллектуальная интуиция и прочее.

Метафизик не обсуждает и не критикует свои познавательные способности в то время, когда излагает собственное видение действительности, но другие вполне могут это делать и делают. Когда другие философы (или сам метафизик, «сменив одежды») проводят анализ такого типа, то говорят, что они излагают или разрабатывают определенную *теорию познания*. Философия математики связана не только с онтологией, но и с теорией познания, причем с последней – более богато и разнообразно.

Вновь возникает вопрос, почему именно философы имеют притязания на разработку этого направления, почему эта проблема должна относиться к их компетенции, а не передаваться другим специалистам. В действительности существует мнение, что задача по изучению человеческих способностей к познанию и пониманию должна быть оставлена за учеными-специалистами, причем оно высказывалось как философское или метафилософское положение, в особенности, в натурализме У. Куайна. Поскольку наши знания в этом направлении все еще во многом неполные, а по правде говоря, неясные и смутные, то совсем не очевидно, кто из ученых должен исследовать эту проблему и с помощью каких инструментов (по мнению У. Куайна – психологи, что, возможно, является для них слишком большим кредитом доверия). Имеется, следовательно, простор для предварительных дискуссий неспециалистов, дискуссий того типа, которые обычно оставляют для философов.

Именно поэтому теория познания остается одним из возможных разделов философии.

В течение всей истории западной философии математика всегда рассматривалась как образец знания, как пример знания исключительно верного и абсолютно гарантированного.

Достаточно привести одну цитату[1]:

> Эта геометрическая наука является постоянной и обязательной системой отсчета для всех изучающих законы природы… Но оставляя в стороне интерес и важность, которые ей присущи в этой области, геометрия имеет большое значение и особенную ценность для всех тех, кто желает понять основы человеческого познания и методы, посредством которых добывается знание, ибо исследователь этой науки приобретает основательную уверенность в существовании необходимых истин с такой степенью ясности и четкости, которую нематематику даже трудно себе представить…

Если математика представляет собой образец надежного знания, то и исследования математического знания должны, вероятно, проводиться изнутри и, если не математиками, то, по крайней мере, математическими методами. Однако такая перспектива признается далеко не всеми. Когда подобную программу для математики предложил в недалеком прошлом Д. Гильберт, то он встретил сомнения и противодействие.

В последнее время анализ математического знания проводился скорее с целью развенчать его предполагаемую строгость. Причем в лучшем случае с намерением обосновать его, а не принимать как нечто само собой разумеющееся, или же с целью защитить его от нападок скептиков.

В любом случае существуют веские основания утверждать, что истинное место философии математики должно быть в рамках эпистемологии.

Онтология и эпистемология, несомненно, взаимосвязаны. Если имеется тезис о статусе математических объектов, то необходимо дать определенное объяснение того, как мы их понимаем и как мы их можем познать. Также и наоборот, если есть теория человеческих когнитивных способностей, то из нее вытекает есте-

[1] W. Whewell, *The Philosophy of Inductive Sciences*, London, 1858, Part 1, Bk.2, ch.4, §8.

ственное объяснение того, что на основе таких способностей можно делать утверждения, в особенности по поводу существующего. Однако согласованность здесь не очень строгая. Положения, близкие с одной точки зрения, могут расходиться при другом способе рассмотрения, и наоборот.

В соответствии с греческой этимологией слово «эпистемология» означает «теория познания», где знание (ἐπιστήμη) противопоставляется мнению (δόξα), или вере. При этом знание есть знание неоспоримое, достоверное и гарантированное.

Это определение эпистемологии подтверждается синонимиями, которые имеют место в других языках: *Erkenntnistheorie* в немецком, *teoria della conoscenza* или *gnoseologia* в итальянском, *gnoséologie* во французском[2]. В соответствии с философскими словарями[3], термин «эпистемология» появился сравнительно недавно, в 1854 г., у Ф.Дж. Ферье (F.J. Ferrier), в то время как термин «Erkenntnistheorie» был применен философом-кантианцем Карлом Л. Рейнгольдом (Karl L. Reinhold) в 1789 г. У идеалистов он обозначал не научную дисциплину, а специфическую проблему существования внешнего мира. Точнее, проблему соответствия окружающего мира его внутреннему отражению или представлению, которое и доступно познанию. Впоследствии ретроспективно эта проблема стала рассматриваться как фундаментальная проблема всей истории философии. Каждый философ, в действительности, касался того или иного аспекта познания: приводит ли познание объекта к воспроизведению его самого по сути или к отражению некоторого подобия объекта, или к формированию в душе его определенной копии; в чем отличие разнообразных видов познания, непосредственного и опосредованного, декларативного и процедурного. Проблемы такого рода поднимались и решались философами по-разному, в соответствии с их наиболее общими философскими взглядами, и полученные решения являлись либо основанием предложенных учений, либо их необходимыми предварительными условиями.

---

[2] Все термины переводятся на русский язык как гносеология или теория познания (прим. переводчика).

[3] См. N. Abbagnano, *Dizionario di filosofia*, Torino, Utet, 1961; *Dizionario di filosofia*, под ред. A. Biraghi, Milano, Comunità, 1957.

Пока эпистемология оставалась несформировавшейся дисциплиной, она была частью метафизики. Сейчас в философских исследованиях ее часто выделяют в отдельный раздел наряду с традиционными частями философии[4] несмотря на то, что она не имеет четко очерченного предмета исследования. Один из сомнительных аргументов, оправдывающих выдвижение эпистемологии в ранг самостоятельной науки, связан с её идеалистическими корнями. Этот аргумент опирается на положение, что существует способность познания сама по себе, не зависящая от методов и процедур различных наук или же присутствующая и автономно функционирующая в каждом из них. Существование такой способности может быть единственным обоснованием возведения ее в ранг объекта философского исследования. Заметим также, что так называемые перцептивные способности порождают ощущения или восприятия, а то, что создает эта возможная способность, остается *загадкой*. По идее, она должна производить знание, и именно определение знания вбирает в себя сегодня немалую часть теоретической работы философов. Наиболее часто используемое определение в последних дискуссиях формулируется как «истинное и удостоверенное мнение», где под удостоверением понимается доказательство, смысл которого зависит от контекста. Это определение восходит, в действительности, еще к Платону, и, как видим, после него не удалось значительно продвинуться вперед. Несмотря на продолжительные дискуссии, это определение не лишено недостатков, порождающих странности и парадоксы[5].

---

[4] См. издание под ред. P. Rossi, *Filosofia*, 4 voll., Torino, Utet, 1995; том 3, *Философские дисциплины*, разделен на 5 разделов: *Метафизика, Теория познания* (Паньини, с. 109–185), *Логика, Этика* и *Эстетика.*

[5] К примеру, на основании этого определения «знания» могут существовать истины абсолютно непознаваемые, как, например, утверждение **«никто не знает это утверждение»,** представляющее собой истинное высказывание, которое никто не может знать, что легко проверить. Существуют также пустые знания типа фразы, которую А. Кампаниле (A. Campanile) приводит как альтернативу скептику Пиррону: «Только одну единственную вещь мы и знаем, что знаем только эту вещь». Это выражает неоспоримую истину, которая, правда, не говорит ничего. См. A. Campanile, *Giovinotti, non esageriamo* (1929), Milano, Rcs Libri, 2001, p.187.

Применение эпистемологами концепции «веры», или «убежденности» (англ. *belief*), по отношению к математике (рассматриваемое совместно с вопросом того, насколько математики убеждены в своих взглядах) вызывает чувство неадекватности и растерянности. Если говорить об убеждениях людей, то они, в основном, представляются автономными и независимыми, множественными в своих основаниях и функциях, иногда противоречивыми. В математике, напротив, все обосновано, все знания взаимосвязаны и взаимообусловлены. Исключение составляют, отчасти, лишь аксиомы. Их можно обсуждать, однако именно этого, как мы увидим, математики и не делают. Они принимают их или по историческим причинам в процессе их эволюционного образования, или же на основе некоторого соглашения.

Обсуждение аксиом является, возможно, характерной особенностью именно философии математики. Философия задается вопросом:

> Что служит тем решающим аргументом, который показывает нам очевидность математических аксиом?[6],

полагая как нечто само собой разумеющееся, что эта окончательная очевидность, этот решающий аргумент, показывающий очевидность аксиом, существует. Аналогичным образом спрашивается о том, чтó доказательства привносят в наши рассуждения и каким образом делают их более убедительными. Даже если в данном контексте этот вопрос понимается не в психологическо-логическом смысле, он предполагает, что функция доказательств именно такова.

В отношении знания возможна постановка как минимум двух различных типов вопросов: каким образом оно приобретается и как оно обосновывается или подтверждается. Философии математики различаются между собой именно в зависимости от того, рассматривают ли они происхождение или же только обоснование итогового результата, который обычно и считается математикой.

---

[6] См. M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford, Clarendon, 1997.

Альтернатива для философии математики состоит в следующем: должна ли она интересоваться тем, как математика появилась в ходе истории и как каждый конкретный индивидуум приобретает математические знания или же должна изучать математику саму по себе, такую, как она уже есть, как она принята одним из значимых способов, которыми могут быть традиция, учебники, научное сообщество и так далее. В первом случае, обсуждение происхождения привносит в дискуссию нематематические или доматематические элементы: математика может происходить из конкретной физической или социальной практики и из деятельности первоначально нематематической; изучение процесса приобретения математических знаний может привлекать психологические исследования интеллектуального становления, может исследовать ошибки, заблуждения или смену воззрений. Во втором случае психология обычно исключается вместе с прошлыми ошибками и сменой воззрений. С традиционной философской точки зрения математика представляет собой некое множество истин, а философские истины не имеют оттенков, нюансов и степеней приближения. Они касаются бытия и произведены разумом, а не опытом.

4. МЕТОДОЛОГИЯ

Принимая во внимание рассмотренные философские проблемы, связанные с понятием познания, или, возможно, переосмысливая чрезмерную метафизическую нагрузку на термин «эпистемология», присущую традиции рационализма, некоторые ученые используют его сейчас для обозначения критических размышлений по поводу процедур, производящих знания (прежде всего научные), вне зависимости от того, как определяется само понятие «знание» (поскольку дать такое определение очень проблематично). Речь идет об изучении достоверности полученных знаний, о выявлении их источников и границ применимости, то есть о том, как мы их приобретаем и обосновываем их достоверность, но не в психологическом или трансцендентальном смысле, а скорее в методологическом[1]. При таком подходе эпистемология совпадает с дисциплиной, которая называлась философией науки[2] или методологией еще до того, как это слово перешло в разряд морально устаревших стараниями логического позитивизма.

Одной из причин, по которым термин «эпистемология» выглядит более предпочтительным, является то, что он появился (сравнительно) недавно и мог бы обозначать определенную линию водораздела. В течение большого периода двадцатого столетия основные школы философии математики уходили корнями в проекты начала века по обоснованию математики. Эти проекты были связаны с так называемым кризисом оснований математики и разрабатывались с целью обеспечения надежного и окончательного фундамента для математики, абсолютной гарантированности ее истинности и точности. Остав-

[1] В подходе такого типа присутствует определенная связь с натурализмом Куайна, о котором поговорим далее, но, конечно, не полное совпадение. В Италии, к примеру, методология была независимо предложена Н. Аббаньяно в пятидесятые годы двадцатого века.

[2] Именно так, к примеру, в философском словаре Лаланда (Lalande A., *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, fasc.1–21, P., 1902–1912; 11 ed., P., 1972 – прим. переводчика).

ляя в стороне провалы или опровержения этих проектов, необходимо отметить, что сегодня никто не заинтересован в подобных грандиозных программах. На первый план выходит ясное понимание исторического развития и изменчивой природы математической практики. Становится все более понятным, что математика не является неким окончательным, забальзамированным продуктом, а находится в постоянной переработке.

Термин «методология» имеет неопозитивистский оттенок, связанный с идеей научного метода и с использованием, почти исключительным, формальных техник. Он всегда вызывает у специалистов страх, что им хотят преподать урок, как делать их собственную работу, как будто бы, если они останутся без присмотра, то не смогут с ней справиться. Не только неопозитивисты поддаются искушению отвести методологии нормативную роль. Имрэ Лакатош, идеи которого обсудим позднее, также оказался под влиянием подобного подхода. От общей методологии, как он называл критическую философию Карла Поппера, он произвел, по его собственным словам, методологию математики, которая претендует, не совсем, правда, ясно, то ли на описание того, как математика сделана, или же на то, как она должна была быть сделана.

В любом случае сегодня, как мы уже отметили, в отличие от формального интереса позитивистской методологии к зрелым теориям и завершенным научным продуктам, набирает силу мнение, что

> основное назначение [философии] должно состоять в сопровождении и помощи непрерывному социальному процессу, который осуществляет производство математики[3].

Такой подход вскрывает новые проблемы психологического, исторического, социологического характера, которые требуют, возможно, не только философской компетенции. К примеру, предыдущее утверждение опирается на тезис, что

[3] См. N.D. Goodman, *Mathematics as an objective science*, in Amer. Math. Monthly. 1979. V. 86. № 7. P. 540–551.

необходимо принять к сведению, что математика представляет собой публичную деятельность, которая происходит в определенной социальной среде и имеет определенные социальные последствия. Постановка проблемы, формулировка определения, доказательство теоремы – ни одно из этих действий не является частным… Поэтому философия математики в сильной степени подобна философской системе, говорящей о природе материальных объектов, принадлежащих общественной практике.

Подобный взгляд, широко распространенный сегодня, порождает новые постановки вопросов, однако, даже с учетом исторического и социального контекста, философия или эпистемология математики, или методология, если угодно, должна оставаться размышлением о дисциплине, которая характеризуется как один из типов познания, или дисциплине, которая дает знание.

Такое условие необходимо для того, чтобы избежать сползания на проблематику чисто социологическую или историческую, то есть, для того, чтобы продолжать заниматься философией. Социология науки имеет в действительности серьезные амбиции, стремясь отобрать у философии науку как эксклюзивный предмет исследования, и некоторые ее радикальные теоретизирования[4] понимаются только под таким углом зрения. Чтобы выиграть академическую баталию, социолог пытается доказать, что не существует ничего, что могло бы считаться объективным знанием, что все знание социально обусловлено.

Даже если принимается точка зрения эпистемологического подхода, то все же остается еще одно замечание общего порядка, которое необходимо сделать перед погружением в философские рассуждения. Весьма спорным является то, что математика должна рассматриваться как совокупность знаний.

Если на простой вопрос «Что такое математика?» отвечают «Математика – это изучение …», то, опуская необходимость уточнения многоточия, которое, вероятно, подразумевает предметы изучения (числа, функции, пространство), неявно признают все то, что внутренне присуще слову «изучение», а именно тот факт, что изучать что-то обычно означает приобретать какие-то знания относительно изучаемо-

---

[4] В особенности сильная программа Дэвида Блура (David Bloor), рассмотренная в G. Lolli, *Beffe, scienziati e stregoni*, Bologna, Il Mulino, 1998.

го предмета, и предполагают, что эти знания верны. Все эти предположения неявно признаются и при рассмотрении математики как науки.

Ответ, между тем, мог бы быть и другим. Начало могло бы звучать как «Математика – это конструирование …», например, конструирование алгоритмов.

Математика могла бы быть актом созидания, а не познания. В этом случае творения должны бы быть понятны, как минимум, своим создателям, но это не является общепризнанным фактом, более того, отождествлять творения (в том числе и ментальные) с их знанием нельзя. Это считается определенной философской ошибкой[5]. В качестве примера представьте себе программу для ЭВМ, которая запущена таким образом, что взаимодействует с другими и модифицируется. Спустя некоторое количество времени даже ее создатель будет не в состоянии сказать, что делает программа. Подобная возможность рассматривалась отцами механического интеллекта начиная с А. Тьюринга, однако она кажется немного неестественной для математических конструкций, которые постоянно находятся под контролем со стороны своих творцов и модифицируются только при помощи явных действий тех, кто их использует.

Математика могла бы быть определена и как вид искусства, и тому имеются многочисленные свидетельства.

> Формы у математика, как и у художника или поэта, должны быть *красивы* (Г.Х. Харди (G.H. Hardy)).
>
> Есть одна вещь, в которой нематематики не отдают себе отчет, и это именно то, что на самом деле математика почти целиком есть предмет эстетический (Конвей Дж.Х. (J.H. Conway)).

---

[5] «Идея о том, что наша созидательная деятельность гарантирует эпистемологический доступ к созданной конструкции, является установленной ошибкой, несмотря на всю свою привлекательность. Нет никакой квазикартезианской гарантии знания в отношении продуктов нашей мыслительной деятельности», цитировано по S.J. Wagner, *Logicism*, in *Proof and Knowledge in Mathematics*, под ред. M. Detlefsen, London, Routledge&Kegan Paul, 1992, pp. 65–109. Это замечание весьма спорно, в особенности, как увидим, в отношении логицизма, к которому оно обращается.

Подобные заявления могли бы даже выражать философскую позицию, однако эта философия здесь бы и заканчивалась. Если математика – искусство, то она и должна изучаться как искусство. В этом случае самое большее, что можно было бы сделать, так это продолжить рассуждение на тему о том, может ли искусство также давать знание.

Математика могла бы также быть искусством, если ее рассматривать как определенную технику или совокупность техник и инструментов. И, наконец, ответ может быть множественным. Математика являет собой разные вещи: науку, искусство и т.д.

Даже допустив, что математика есть знание, нельзя довольствоваться только наивным значением этого термина, поскольку он имеет многочисленные *нюансы*. Если сравнить следующее высказывание М. Штайнера (Mark Steiner)[6]:

> Полагаю как данное (для философии математики) положение, что большая часть людей знает какие-то математические истины и, что некоторые люди их знают много

с высказыванием М. Клайна (Morris Kline)[7]:

> Математика – скорее не метод и не искусство. Это совокупность знаний, содержание которых пригодно для физиков и специалистов социальных наук, для философов, логиков и художников.
>
> Математика есть каркас знаний и не содержит никакой истины,

то мнения, как видим, различные.

Знание есть также умение, это «ноу хау» или знание процедурное, противоположенное знанию декларативному, которое является знанием фактов, выражаемым посредством высказываний. Дополнительное различие введено философами между «знанием чего-то» и «знанием, как». «Знание, как» не требует (возможно) уточнения или предположения природы сущностей,

[6] См. M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, Ithaca, Cornell Univ. Press, 1975.

[7] См. M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1953.

к которым известные истины относятся. Знание, что «2+2=4» (знание, как сложить «2» и «2») не требует обязательного понимания, что есть «2», «4» и «+». Знание же чего-то означает, что это что-то есть то-то и то-то[8], и это вновь возвращает нас к вопросу об онтологии.

[8] Имеются некоторые философские позиции, которые, рассуждая о знании, пытаются избежать наивного представления поклонников соответствия интуитивной семантике. Таков, например, прагматизм. Одну из таких позиций встретим в презентации натурализма, а пока условимся следующим образом. Если люди говорят «я знаю, что…», то обычно ссылаются, даже неумышленно, на некоторое положение вещей, и совершенно другой случай, если люди говорят «я знаю, как…».

5. АПРИОРИ

Классическая точка зрения на математику, которая для многих представляет собой фундаментальную мотивацию философского исследования, состоит в том, что она представляет собой знание, имеющее характер необходимости и неизбежности. Такой характер математики, видимо, «не от мира сего», порождает определенную проблему согласования его с безусловным и признанным аспектом ее применимости к самому этому миру, которому она не принадлежит. Отмечается в этой связи *удивительный* успех ее приложений или ее *непостижимая* эффективность[1]. Оба взгляда восходят к Платону, который рассуждал как о божественной натуре математики (кто ей не владеет, не может быть богом или героем, способным служить человечеству[2]), так и о ее универсальном присутствии во всех искусствах и во всех видах интеллектуальной деятельности[3].

Различие между необходимостью и случайностью имеет метафизическую природу (кто-то говорит – логическую, в античном значении логики, название которой происходит от «логос» – «мышление-которое-проявляет-бытие»). С эпистемологической точки зрения философия разработала параллельную пару: *a-priori* и *a-posteriori*. Определение этих дополняющих друг друга терминов и их связь с аналогичной метафизической парой есть само по себе бесконечная глава философии[4]. Одно из исходных определений состоит в том, что некоторое утверждение есть a-priori, если оно может быть познано без обращения к опыту. Такая возможность не должна, однако, пониматься в субъективном смысле и уж совсем не в том смысле, что знание может быть получено без единого опыта. И. Кант отмечал, что все познание начинается с опыта, но из этого не следует, что все знание происходит из опыта[5]. Кроме того,

[1] См. E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences,* in Communications on Pure and Applied Mathematics, 13, 1960, pp. 1–14.

[2] *Законы*, 818.

[3] *Республика*, 523.

[4] См. недавний сборник *New Essays on the A-priori*, под ред. C. Peacocke и P. Boghossian, Oxford, Oxford Univ. Press, 2000.

[5] *Критика чистого разума*, B1.

нельзя ссылаться на то, что *возможно* знать, чтобы не попасть уже в метафизическую дискуссию по поводу различия между возможностью и необходимостью. Определенный консенсус, кажется, существует по поводу уместности ссылок на то, что представляет собой последний аргумент, на который опирается обоснование истинности какого-то высказывания. Некоторое утверждение есть тогда a-posteriori, если его истинность или ложность зависит от опыта. В противном случае оно есть a-priori.

В философской традиции существует разделяемое большинством философов мнение о том, что математические высказывания полагаются a-priori, потому что они несут в себе некоторую необходимость, которая не может быть произведенной из опыта[6], а может быть, потому, что обоснование математических высказываний представляет собой скорее доказательство, чем наблюдение.

Философы должны быть и в самом деле благодарны математике, поскольку без нее многие из них остались бы без работы или даже не начали бы заниматься философией. Где найдется еще случай столь же значимый для познания, для которого имелся бы смысл обсуждать истины априорные, не подлежащие пересмотру, абсолютные? Может быть, в логике, но логика растворяется в пустой аналитичности. Математика же считается (и всегда считалась) истинным знанием.

Соприкосновение с реальностью может иметь место в математике как в обосновании аксиом, так и при проверке некоторых следствий, но это соотнесение, кажется, не носит основополагающего характера. Оно служит, в крайнем случае, индикатором адекватности или уместности некоторых исследований. Общепринятый взгляд на математику исключает то, что она должна быть верной на основе опыта или могла бы быть им фальсифицируема. Самое большее, опыт подсказывает новый тип математики. Это как раз один из поводов для изумления, которое сопровождает ее успехи. Если предполагается априорный характер математики, то предсказуемо возникает вопрос об ее идеальной гармонии с миром случайного. Если утверждается, что она происходит «от мира сего», то требуется объяснить присущий ей характер необходимости или независимости от опыта.

[6] *Критика чистого разума*, B14–15.

6. РЕДУКЦИОНИЗМ

Фундаментальные метафизические вопросы, вечные вопросы философии имеют вид «Что такое …?», например, что такое жизнь? Что такое числа? Подобные вопросы можно сопоставить с аналогичными, которые задавали себе первобытные люди. Что такое Солнце? Что такое гром? Вопросы поверхностные, может быть, чрезвычайно наивные, не совсем ясные, основанные на страхе, типичные для мужчин и женщин, затерянных где-то без ресурсов и знаний. Им нужны были прямые ответы, поскольку они не имели никаких познаний, с которыми устанавливались бы отношения. Ответы должны были быть выражены на языке их каждодневного опыта, но этот язык говорил только о вещах, находящихся в обиходе. Кто-то из них мог отметить даже сходство между молнией и искрами от соударения камней, но есть ли камни на небе? Не удивительно, что первые ответы вводили бога-творца[1] и духов, и огромное количество других подобных существ, хотя и похожих на тех, кто во плоти, но все-таки отделенных от них. Так, например, гром – это Юпитер, который ворчит.

Даже предположив резонность или естественность этих вопросов, мы с трудом дошли до признания, что они не допускают прямого ответа или, во всяком случае, ответа, сформулированного на обыденном языке. Можем отметить еще, что функция подобных вопросов заключается в том, чтобы приводить к другим вопросам. Было высказано мнение, к примеру, что вопрос Канта «как возможна математика?» интересен тем, что он, возможно, проливает свет на другую взаимосвязанную проблему, в действительности гораздо более важную, а именно, «почему (для многих) математика так трудна (невозможна)?».

Выражаясь научным языком, эти пояснения вводят проблему редукционизма, по крайней мере, в отношении наивного знания

[1] В оригинале использовано словосочетание un dio fabbro, что является игрой слов – бог-кузнец (творец) (прим. переводчика).

или здравого смысла. Термин «редукционизм» вообще используется для отношения между теориями или научными дисциплинами, к примеру, когда химические явления объясняют с помощью физических законов. Используется он также и по отношению к ненаучным или донаучным идеям и верованиям. Типичный пример редукционистской диатрибы – дискуссия о том, может ли существовать, и каким образом, психология здравого смысла при наличии когнитивной науки с ее вычислительными и нейрофизиологическими моделями[2].

Если мы даем объяснение желтого цвета в терминах длин волн, то можем ли сказать, что желтый цвет существует, что это одна из вещей, о которой мы имеем знания, или же должны сказать, что он исчез из поля зрения онтологии из-за редукции и объясняется вне ее? Онтология модифицируется при прогрессе наук? Любая научная теория отвечает на вопрос «что такое …» или же лишает его смысла? Мнения расходятся по этой проблеме, которая, однако, является центральной в отношении признания легитимного пространства для онтологических рассуждений и для философии математики в особенности.

Позиции по этому вопросу весьма противоречивы и непоследовательны даже по отношению к самим себе. К примеру, Н. Гудмэн дополняет цитату, приведенную на стр. 70, следующим заключением:

> Отсюда следует, что серьезная философия математики должна удовлетворять принципу объективности. Иначе говоря, не должна отрицать объективную действительность ни в одном аспекте математической деятельности, который имел бы дело с реальностью на практике.

Н. Гудмэн утверждает, что теория о природе материальных объектов – модель, с которой философии математики необходимо идти в ногу, – должна признавать в качестве своих данных все атрибуты, которые имеют признанное значение в наших обычных разговорах о таких объектах. Он рассматривает именно случай

[2] См. S.P. Stich, *From Folk Psychology to Cognitive Science*, Cambridge, Mass., The MIT Press, 1983; итал. перевод *Dalla psicologia del senso comune alla scienza cognitiva*, Bologna, Il Mulino, 1994.

«желтого цвета» и заключает, что объяснение в терминах длин волн не устраняет цвета, а имеет эффект придания объективного содержания нашим привычным разговорам о цветах.

Однако, рассматривая случай математики, Н. Гудмэн, как мы увидим в дальнейшем, забывает о своем примере. Он утверждает, что основные течения философии математики не соблюдают его принцип, и полемизирует против критики реализма со стороны логицизма. Для логицизма теоремы являются истинами, содержание которых не зависит от деятельности тех, кто их доказывает. Это устраивает Н. Гудмэна, поскольку, по его мнению, таково впечатление, которое математики получают в своей работе, таков опыт, который они имеют, по их заявлениям. Но для логицизма числа не существуют как *реальные объекты*, к которым применяются свойства, выраженные теоремами. Не существует области сущностей, к которым эти теоремы относятся. Теоремы истинны в силу их внутренней структуры. При расширении определений обнаруживается только логика. Такой поворот не устраивает Н. Гудмэна, поскольку математики говорят об объектах. Здесь можно было бы увидеть случай редукции, подобный ситуации с желтым цветом. Редукция дает объективное содержание математике – именно так и думал Г. Фреге – один из творцов логицизма. Для Н. Гудмэна же неприемлемо, что в философии не говорится более об объектах, как о них говорят математики.

Стоит отметить, что редукционизм логицизма представляет собой только одну из возможных точек зрения на отношения между логикой и математикой. Тема этих отношений будет одной из основных в последующем обзоре. Зависимость или независимость, идентичность или взаимная чуждость, приоритет одной над другой могут дать ключ для верификации значения, которое придано автономности математики в ряду интеллектуальных деятельностей человека. Эта тема пересекается с темой происхождения. Математика, сведенная к логике, утрачивает свое историческое происхождение и приобретает универсальное значение, которого математика, связанная с другими деятельностями или компетенциями человека, может и не иметь.

Что же касается принципа объективности, то, кажется, по мнению Н. Гудмэна, ни одна философия ему не соответствует, если только не признать буквальным образом все сущности и состояния (включая существование), о которых математики говорят, ссылаясь на свой опыт работы. В этом случае «желтый» (вообще, его эквивалент) не должен быть заменен «длиной волны» (ее эквивалентом), т.е. редукция неприемлема.

В подобной «оптике», видимо, язык философии должен быть исключительно обычным языком, языком практики, не подвергнутой анализу. Трудно сказать, какую философию можно создать таким образом, за исключением, пожалуй, варианта сведения ее к описанию того, что люди делают или, лучше сказать, говорят о том, что делают. Единственным благоразумным решением в этом случае для философии будет собственная редукция (*explaining away*), однако же философия имеет свой профессиональный лексикон и хочет, чтобы он отличался как от обычного, так и от научного.

С другой стороны, принцип объективности, несмотря на его полезность для сравнения различных философских позиций, представляется по существу сомнительным. Требовать, чтобы философия изначально признавала значение определенных элементов, значит уже сделать выбор в отношении исключительной важности таких элементов, как, например, Н. Гудмэн поступает в случае с так называемой обыденной практикой и другими аспектами, выделенными им.

Философские позиции, похожие на подход Н. Гудмэна, составляют панораму новых предложений и течений философии математики, которые сформировались начиная с 1970-х годов[3].

[3] Год публикации статьи Н. Гудмэна совпадает с годом публикации статьи Херша (R. Hersh), которая обсуждается далее.

7. НОВЫЕ ТЕНДЕНЦИИ

Вплоть до недавнего времени казалось, что имеющиеся возможности для формирования философского взгляда на математику ограничены и, более того, исчерпаны (по мнению тех, кто считал своим долгом предложить определенное обновление философии математики[1]). Логицизм, интуиционизм и формализм были получены в наследство от фундаментальных школ начала двадцатого века. Эти философии происходили от программ, сформулированных внутри самой математики, и это было одной из причин их успеха, их принятия со стороны математиков или, по крайней мере, того, что они были знакомы им и, возможно, поняты ими. Они вытеснили прочие традиционные способы философствования о математике, как прошедших веков, так и их времени. Идеи других философов, в особенности французских, таких, как Ф. Гонсет[2], находящихся не на первом плане в математическом мире, канули в безвестность и забвение, причем даже с некоторым презрением.

Первая часть столетия стала периодом математизированной эпистемологии. Рассуждения о математике должны были проводиться с помощью инструментов и понятий математики, возможно, аналогично подходу Гильберта как изучение формальной теории, или как хорошо обоснованная радикальная реконструкция, как в интуиционизме Брауэра. При этом и формализм использовал понятия математической теории, а именно – теории формальных

---

[1] R. Hersh, *Some proposals for reviving the philosophy of mathematics*, in Advances in Mathematics, 31, 1979, pp. 31–50, перепечатано в *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, под ред. T. Tymoczko, Princeton, Princeton Univ. Press, 1998, pp. 9–28. См. также P.J. Davis, R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Basel, Birkäuser, 1981; итал. перевод *L'esperienza matematica*, Milano, Comunita', 1986 и более поздняя R. Hersh, *What is Mathematics, Really*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1997; итал. перевод *Cosa e' davvero la matematica*, Milano, Baldini&Castoldi, 2001.

[2] См. Ferdinand Gonseth, *Les Mathematiques et la realite*, Paris, A. Blanchard, 1936.

систем, вдохновлялся аксиоматическим построением теорий и опирался на них.

Этот период завершен, и не последней причиной этого было разочарование, последовавшее за провалом программы Гильберта, на которую очень рассчитывали его современники. Сегодня другие подходы вышли на сцену. Одни имеют (или претендуют на то, что имеют) в качестве точки отсчета актуальное состояние математики. Они тоже, правда, другим, отличным образом, нагружены математикой и пробуют вести с ней разговор. Другие вновь дают место темам, проблемам и подходам к их обсуждению, свойственным философской традиции, которая предшествовала кризису оснований математики, породившему математические программы. Эта традиция всегда рассматривала математику как тему особого интереса и видела ее или как проблему, или как модель. Однако остается взаимная отчужденность исследований. Одни имеют скудные философские достоинства, другие – малый интерес для математиков.

Когда около тридцати лет тому назад[3] был начат поход против господства классических направлений логицизма, формализма и интуиционизма, эти школы были объявлены бесплодными и отжившими свой век. Однако было бы преувеличением сказать, что они превратились в забальзамированные мумии. Эти течения модифицировались, хотя, конечно, каждое из них оставалось верным своим собственным оригинальным предположениям. Более того, они продолжали стимулировать новые исследования. Ошибка, которая вменялась им в вину, обусловлена совсем не устарелостью этих направлений, она была изначальной, первопричинной, своего рода «первородным грехом». Речь шла об ошибочном поиске оснований, то есть об ошибочном желании обеспечить твердую и окончательную базу для достоверности и надежности математики. Причина подобной живучести этой ошибки была названа и заключалась, по мнению диагностов, в использовании математической логики (обвинение, между прочим, безосновательное в случае чистого интуиционизма). Действительно, успехи этих школ стали

[3] Оригинал настоящей книги на итальянском языке был издан на рубеже XX и XXI веков (прим. научного редактора).

возможны благодаря рафинированному использованию инструментов математической логики. Их ответы были, следовательно, всем чем угодно, но только не прямыми, были трудно понимаемыми и поэтому были объявлены пустыми[4].

Необходимо признать, что их деятельность произвела нечто, что мало похоже на классическую математику, нечто, что не может быть даже спроецировано непосредственно на её проблемы. Математики не признавали эти исследования ни в исходных посылках, ни в используемых методах (формализованные доказательства, например, или новые интуиционистские концепции). Созданные системы оснований математики сделали то, что ожидалось от философской работы, то есть то же, что длины волн делают по отношению к цветам: они привели к исчезновению математики. Результат закономерный, потому что их цель носила не дескриптивный и даже не нормативный (за исключением интуиционизма) характер. Это была особенная работа, подобная одеванию специальных очков, которые позволяли видеть только молекулярную структуру, а не то, что видно обычному глазу. В этом случае «желтый» больше не виден, зато видны другие интересные вещи.

Однако ничто в этом мире не существует обособленно. Системы оснований математики существовали и имели определенные отношения с математикой. Философы рассуждали о них, и в определенных контекстах, иногда также и в преподавании, эти системы заменяли

---

[4] Рассмотрим эти школы, но без углубления в технические детали. Для тех, кто чувствует себя в состоянии разобраться, приведем только некоторые темы, в отношении которых логические исследования по укреплению оснований математики дали существенные результаты во второй половине двадцатого века: анализ концепции предикативности, наилучшим образом представленный в E. Nelson, *Predicative Arithmetic*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1986; также концепция «бесконечно малого» в нестандартной математике, которая является красой и гордостью логицизма; затем, логический анализ разнообразных разделов математического анализа; теория больших кардиналов; изучение интуиционистской математики, для чего см., к примеру, *Metamathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, под ред. A.S. Troelstra, Berlin, Springer, 1973 и т.д.; и, конечно, необходимо отметить философское обновление логицизма в уже цит. M. Steiner, *Mathematical Knowledge.*

математику или преподносились как некая совершенная математика с ложными и опасными нападками на обычную математику.

Вот поэтому-то критики и атаковали школы, разрабатывающие основы математики, ссылаясь на то, что представление математики в формализованном виде давало ошибочный и искаженный образ ее самой, и, следовательно, соответствующие философии также давали ложное объяснение математики. Была выражена потребность в новой философии, которая смогла бы представить математику образом, более соответствующим ее реальности.

Основная позиция, которая выступала с подобной критикой, была названа ее сторонниками *эмпиризмом*, поскольку они намеревались показать, что процедуры математики не отличаются от процедур так называемых эмпирических наук, более точно, естественных наук.

В действительности, новые направления, претендуя на формирование достоверного представления современной математики, поднимают всю ту же традиционную философскую проблему, проблему о том, что представляет собой по сути математика. Их цель состояла и состоит в том, чтобы определить ее роль внутри комплекса разнообразных видов человеческой деятельности, правильно ее позиционировать и, таким образом, дать для математики определенный вид оправдания, пусть и не обоснование ее достоверности. Эмпиристы имеют также определенную точку зрения на природу этой достоверности. Они утверждают, что если процедуры открытия и подтверждения похожи на аналогичные процедуры естественных наук, то и тип знания также сходен, следовательно, является шатким, неабсолютным, пересматриваемым, поскольку за процедурами нет ничего более фундаментального или более гарантированного.

Новая философия математики, какой бы она ни была, «должна освободить как философов, так и математиков от построения оснований»[5]. Однако грех фундаментализма разделяют обе эти категории, в том смысле, что «философы имеют склонность думать в терминах оснований», математики же должны поэтому остерегаться философии. С другой стороны, они не должны тогда использо-

[5] См. уже цит. T. Tymoczko, *New Directions*, p. 4.

вать логику, этого Троянского коня, с помощью которого просачивается любимый философами фундаментализм. Есть сомнение, что это именно тот самый инструмент с завышенными (поскольку они малоизвестны) возможностями, который вызывает желание получить сверхчеловеческую мощь.

Полемическая необъективность в отношении математической логики вновь ставит вопрос о том, каковы могут или должны быть тогда другие инструменты в арсенале эпистемологии кроме (описания) рассуждений и чисто математических техник. Не кажется разумным также, критикуя математизированную эпистемологию, доходить до противоположной крайности и забывать или игнорировать все важные достижения метаматематики. Двадцатое столетие можно назвать веком языка. Значительные достижения демонстрируют логика, философия языка, аналитическая философия, лингвистика, вычислительная техника. История, психология мышления или когнитивные науки в целом тоже внесли свой вклад. Философия как таковая может предложить мудрость, отфильтрованную тысячелетиями дискуссий и анализа, что является весьма значительным вкладом, но она не предлагает никакого конкретного инструмента.

8. ВЗГЛЯД МАТЕМАТИКОВ

В ходе всей истории человечества методология математики всегда была первостепенной и исключительной заботой и беспокойством математиков. Они занимались этим с большей или меньшей интенсивностью в зависимости от потребностей каждого конкретного исторического периода. Моменты наивысшей активности – так называемые периоды точности (или строгости). Обычно в качестве примера, приводится вторая половина девятнадцатого века, а также конец семнадцатого века и еще раньше, времена Евклида[1]. Причина прямого вовлечения математиков в эту деятельность очевидна – только они сами владеют в достаточной мере математикой, чтобы обсуждать ее проблемы[2].

Необходимость личного участия вызвана тем фактом, что в каждую эпоху математики имели определенные проблемы, характерные для этого периода. У Пифагора были несоизмеримые величины и отношения, которые не поддавались измерению, в восемнадцатом веке волновала проблема сходимости бесконечных рядов, в девятнадцатом – вопрос непрерывности, затем – бесконечные множества и заботы о непротиворечивости. Стоит задаться вопросом, должна ли философия математики каждый раз откликаться и реагировать на подобные беспокойства? Для философии, созданной математиками, ответ положительный, и она, в общем, и является наиболее интересной. Важно, конечно, заниматься также и традиционными вопросами и обсуждать их возможные решения, но не нужно связывать себя этим. Лучшая философия – та, которая принимает во внимание, прежде всего, состояние самой математики.

---

[1] В оригинале приводится следующая известная среди математиков шутка, использующая итальянское слово rigore (строгость) и латинское выражение rigor mortis (трупное окоченение): Rigor mortis есть результат строгости (rigore), привнесенной в математику современным формализмом (прим. научного редактора).

[2] То же самое можно было бы сказать относительно физики и других наук, но мы не уполномочены рассуждать по этому поводу.

Существует форма философии математики, которая представляет собой просто список определенных тем, среди которых можно упомянуть, например: бесконечность, отношение дополнительности между дискретным и непрерывным, аксиоматический метод, вероятность. Порой подобная постановка отражает философское видение развития математики[3], обусловленного естественным или рациональным ростом. В общем, однако, список образован просто понятиями, которые недавно стали достоянием математики. Например, сегодня мы не включим в такой список проблему континуума, которая в конце девятнадцатого века была животрепещущей темой, а добавим теорию вычислимости.

Если представление списка подобного рода не создано для иллюстрации какого-нибудь предвзятого философского тезиса, то речь идет о настоящей эпистемологии, то есть о критическом исследовании некоторых концепций, теорий или инструментов[4]. Проблема заключается в их выборе.

В определенные периоды обнаруживаются изменения в самом способе занятий математикой, и тогда нововведения подходят, можно даже сказать, напрашиваются, для обсуждения[5]. Так произошло, например, когда аксиоматический метод стал универсальным, что привело к появлению многих новых теорий. Этот период прошел под знаком скорее философии логики, чем философии математики. Одним из обсуждаемых понятий при этом стало понятие аксиомы. Чтобы ответить на вопрос, что такое аксиома, можно начать просматривать словари, в которых собрана мудрость прошедших времен. Типичный ответ будет «очевидное общепризнан-

---

[3] См., к примеру, L. Brunschvicg, *Les etapes de la philosophie mathematique* (1912), Paris, A. Blanchard, 1981 или F. Gonseth, *Les Mathematiques et la realite*, уже цит., и *Les Fondements des mathematiques* (1926), Paris, A. Blanchard, 1974.

[4] Проведенное таким образом изложение см. в G. Lolli, *Capire la matematica*, Bologna, Il Mulino, 1996.

[5] Обратите внимание, к примеру, помимо содержания, на название работы H. Meschkowski, *Wandlungen des mathematischen Denkens*, Braunschweig, Vieweg, 1956; итал. перевод *Mutamenti nel pensiero matematico*, Torino, Boringhieri, 1963 (название работы можно перевести как *Изменения в математическом мышлении* – прим. переводчика).

ное суждение»[6]. В некоторых философиях математики, однако, аксиомы представляются произвольными положениями или соглашениями. Современный математик, наоборот, сказал бы, что аксиомы – определения классов математических структур и что они совсем не очевидны и вовсе не произвольны. Логика, исследующего основания математики, интересуют, однако, не любые аксиомы, а те, которые определяют «концепции числа, множества, функции, то есть лежащие под всеми другими математическими концепциями»[7]. Это и есть так называемые основополагающие аксиомы, которые обсуждаются в основном в философии математики, и математик должен быть поставлен в известность об этом.

В другие моменты, при появлении новых математических теорий, создаваемых для формализации понятий, которые применялись ранее только неформальным и наивным образом, или для уточнения ненаучных понятий, проявляются неоднозначности и парадоксы, вскрывающие несостоятельность здравого смысла, которые и привлекают внимание. Типичный пример – теория вероятности. В общем, в этих случаях проблемы касаются не математики, а представлений, распространенных в обществе. Их обсуждение и корректировка есть обязательная задача образования, что полезно, кстати, не только обычным людям. Специалист также может получить выгоду из этого анализа, например, чтобы не оказаться сбитым с толку старыми и даже противоречивыми значениями обыкновенных слов, которые начинают использоваться в математике с новыми точными значениями.

Постоянные заботы математиков по поводу специфических трудностей, которые все время нужно преодолевать, еще ни разу не пошатнули их оптимизма в отношении самой науки и ее будущего. Математические решения, найденные по мере преодоления проблем, раз за разом возникавших на пути, не являются ответами на вопрос о том, что есть математика, и тем более не являются ответами в краткой и компактной форме. Они – новая математика. Высказывания же о природе математики всегда делались охотно,

---

[6] S. Battaglia, *Grande dizionario della lingua italiana*, Torino, Utet (можно сравнить с определением в словаре Ожегова С.И. Аксиома – положение, принимаемое без доказательств. – Прим. переводчика).

[7] S. Feferman et al., *Does mathematics need new axioms?*, уже цит.

сразу и без сомнений, как мы видели в начале книги, куда стоит сейчас вернуться.

Уже было отмечено, что все высказывания необходимо рассматривать в их историческом и культурном контексте, а также в контексте проблем той эпохи. Хотя они – дети своего времени, не все так однозначно. Альтернативные и опровергающие друг друга заявления могут появляться в одно и то же время, тогда как близкие утверждения могут относиться к разным историческим периодам.

Многие из этих формулировок не похожи на обычные, традиционные философские ответы. Они, возможно, более понятны математикам или хотя бы вызывают в них впечатление чего-то знакомого. Эти высказывания используют математические термины своего периода вместе с понятиями, которые, может быть, типичны для культуры вообще (к примеру, «формы»). Но они не используют технические понятия логики (кроме обращения к логике в обыденном смысле), появившиеся только в двадцатом веке.

Если сегодня провести опрос современных математиков, то выяснилось бы, что превалируют те высказывания, которые ссылаются на форму или её синонимы типа «pattern»[8].

Вышеприведенные цитаты расставлены в определенном нехронологическом порядке для того, чтобы указать некоторую тенденцию. Несмотря на то, что в каждый момент разные высказывания оспаривают друг с другом первенство, и можно убедиться в этом с помощью большего количества цитат, существует определенное смещение взглядов в последние два века от реалистического видения в сторону более формальную. «Реалистическое» надо здесь понимать не в смысле существования универсалий, а в отношении физического мира.

> В девятнадцатом веке была широко распространена идея, что математика имеет дело непосредственно со структурой физического пространства и времени, и что она предоставляет парадигму чистого мышления, которое может давать важные сведения о физическом мире[9].

---

[8] S. Mac Lane, *Mathematics: Form and Function*, Berlin, Springer, 1986; M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит; Pattern (англ.) – модель, образец, шаблон, форма, структура, трафарет и т.д. Очень многозначное слово. – Прим. переводчика.

[9] J.P. Burgess, G. Rosen, *A Subject with no Object*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1997.

Была, следовательно, распространена идея, что математика могла бы представлять собой модель для философии. В двадцатом веке на первый план вышли теория множеств и абстрактные пространства, которые не так-то легко постигнуть[10].

В главном философском вопросе произошло смещение от гносеологической проблемы «как возможно познание» (Кант и категории пространства и времени) к метафизической проблеме того, что представляют собой эти «вещи», которые кажутся не от мира сего. Или же, если не интересна такая постановка, – к тому, как оказывается возможным, что подобные «вещи» находят a-posteriori отклик или применение в мире, и что поддерживает их существование при условии, что они были разработаны без соотнесения с реальностью.

На рубеже XIX – XX веков начали говорить о некоторой математической реальности, которая ставилась на место физической[11]. Она осталась в реалистических направлениях философии, а в других течениях, наоборот, исчезла.

Согласно некоторым мнениям, способ, которым подавалась абстрактная теоретико-множественная математика начала двадцатого века, представляет собой определенную причину расцвета ряда философий. Они были направлены, прежде всего, на новое истолковывание или на реконструкцию математики (интерпретация номинализма, или конструктивистская переработка, как увидим в дальнейшем), поскольку классическая версия казалась неприемлемой. На такой драматический взгляд на вещи можно возразить, что множества – не более чем определенный язык. Язык, который был разработан и принят также по причине удобства и уместности, но который характеризует только определенный исторический период и не содержит сути математики. Автомобиль остается автомобилем от первых Фордов до Феррари, даже если его облик изменился до неузнаваемости. И мы оказываемся с такой идеей на краю, противоположном позиции, исходящей из «языка, который проявляет бытие», и должны будем решать вопросы о природе языка в общем и языков науки в частности.

---

[10] J.P. Burgess, G. Rosen, *A Subject with no Object*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1997.

[11] См. G. Lolli, *La matematica: i linguaggi e gli oggetti*, в *Scienza e Filosofia. Saggi in onore di Ludovico Geymonat*, под. ред. C. Mangione, Milano, Garzanti, 1985, pp. 213–240.

Заявлять, что математика изменилась, есть уже определенная философия или философское обязательство. По крайней мере, если имеется в виду, что математика изменилась и изменяется таким образом, что не имеет смысла ставить перед собой вопрос о ее (неизменной) природе. Аналогичная проблема возникает в отношении любого эволюционирующего объекта. Каждая часть автомобиля может претерпевать резкие изменения. Мотор может располагаться сзади или спереди. Он может быть внутреннего сгорания или электрическим. Шины из сплошных становятся надувными. Руль необязательно должен быть круглым и вообще может отсутствовать. Назовем ли мы «автомобилем» транспортное средство, очень похожее по форме кузова на нынешние, но которое не имеет четырех колес и двигается на воздушной подушке? Что определяет, что есть автомобиль? Конечно, не этимология слова «автомобиль» или «самодвижущийся», так как это неправда, что автомобиль двигается сам по себе. В случае с математикой этимология сообщает нам только то, что математика есть изучение, деятельность, направленная на изучение, но чего – не уточняет.

Интересным представляется вопрос о том, могут ли философию интересовать изменчивые объекты. Чтобы сохранить сущность при изменении, можно было бы утверждать, что в математике изменились и обогатились методы, но объект, в глубине, тот же самый, представленный, например, числами. Подобная позиция не учитывает, однако, одно серьезное соображение по поводу математики. Нельзя утверждать, что вся абстрактная часть математики представляет собой некий результат определенных математических манипуляций над числами, хотя это есть важный практический и философский критерий (что вновь найдем в рассуждениях Гёделя и платонистов). Кроме этого, если новые методы позволяют получать результаты, которые не достигаются без них, трудно использовать слово «методы», которое имеет определенный упрощающий смысл. Эту проблему можно ставить и в технической плоскости. Так поступил Гильберт с его программой доказательства, что абстрактные построения были бы консервативным расширением арифметики, и в результате оказалось, что это не так. С другой стороны, существуют абстрактные разделы математики, как, например, геометрия, которые сами по себе имеют сущностное применение в физических теориях.

Если нельзя сказать одной формулировкой, чем всегда была и всегда будет математика и, следовательно, что она представляет собой в метафизическом смысле, то почему используется одно и то же название «математика»? Возможно, причины этого – только социального, институционального характера. Для армии также используется то же самое название, хотя нынешние армии или армии завтрашнего дня, в которых не будет солдат, могут лишь с трудом быть сравнимы с древними легионами. Акцентирование внимания на историческом изменении математики до такой степени, что не было бы даже возможным найти однозначное определение для всех видов, в которых она до сих пор являлась, легко сочетается с релятивистской концепцией. Еще перед появлением сильной программы социологии науки были разработаны и обсуждены подходы, которые рассматривали математику как культурный феномен[12]. Такое видение порождает определенное философское течение, которое, как и социологическое, открывает дорогу исследованиям, применяющим не только философские инструменты.

Для спасения философии, конечно, можно утверждать также, что математика изменяется, и сильно, но всегда с одной и той же целью или намерением или же всегда под влиянием одной и той же познавательной потребности. Так, утверждение, что

> математика есть арсенал форм, которые кодифицируют идеи, извлеченные из других видов человеческой деятельности и научных проблем

совместимо с разработкой форм в разные эпохи, на разных стадиях и под воздействием разных побуждающих мотивов.

> [Греки] выражали числа и алгебраические операции только в геометрических терминах. В восемнадцатом веке математика проявилась, прежде всего, в развитии каждого аспекта анализа и методов вычислений. Это было отражением широких возможностей, которые этот прогресс давал для формальных манипуляций и многочисленных приложений. В дальнейшем исключительно полезные свойства голоморфных функций сделали из теории функций комплексного переменного определенный центр, вокруг которого почти вся математика могла вращаться…[13]

[12] R.L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, Oxford, Pergamon Press, 1981.

[13] S. Mac Lane, *Mathematics: Form and Function*, уже цит., p. 407.

Остается фактом, что для того, чтобы заниматься философией математики в актуальном смысле, а не только её историей, и при этом сказать что-то интересное, нужно, возможно, прежде всего рассматривать последние достижения математики.

Стоит напомнить тогда, что распространение теоретико-множественного подхода не является последней метаморфозой математики. Абстрактная математика продолжает оставаться значимой, прежде всего, в тесном симбиозе с физическими теориями, но сегодня излюбленной и первостепенной, со многих точек зрения, является математика вычислительная со своими проблемами, поставленными вычислительными машинами. Во второй половине двадцатого века появление ЭВМ стало единственным феноменом, который можно назвать реальной новинкой в математике и вокруг нее. Возникающие при этом проблемы, однако, не кажутся трагическими, не указывают на необходимость пересмотра концепций, за исключением, как увидим, мнения некоторых эмпиристов. Пожалуй, эти проблемы беспокоят по другим причинам – гуманистическим или духовным. Поскольку в настоящее время не видно серьезных, драматических вызовов, постольку, возможно, не только вопрос оснований математики перестает вызывать интерес, но также работа по ее интерпретации и реконструкции не очень нужна, и философия, в конечном счете, не имеет (новых) проблем, которыми могла бы заняться. Если философия математики томится без дела, то, возможно, это знак жизнеспособности математики.

Может быть, это и есть момент для выработки в отношении математики более спокойного подхода. Момент для того, чтобы оценить все то, что появилось за несколько веков революционных потрясений в математике, без фокусирования на одном только критическом аспекте попытаться воздать должное всем разнообразным граням этой дисциплины и ее философий. Эта позиция также представляет собой определенную философию, которую можно назвать, пожалуй, миролюбивой или синкретической. Однако предложенный подход не означает, что было бы достаточно дать только подробное описание имеющихся результатов. Как минимум, нужно попытаться исследовать причины дифференцированного появления, а затем интеграции и сосуществования различных точек зрения, которые ранее полагались исключительными или несовместимыми или принимались как сами собой разумеющиеся. Единственный способ для этого – больше углубиться в математику.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Философии математики

Примем в рассмотрение философии математики, которые сегодня превалируют или, по крайней мере, получили сегодня важное развитие. Некоторые из них, среди которых одни еще живы, а к другим интерес ослабевает, являются наследием начала двадцатого века. Прочие могут рассматриваться либо как реакции на первые, либо же как ответы на вызовы современной математики.

Когда главные действующие лица – математики, выясняется порой, что они, прочитав какого-нибудь классика философии *X* и будучи под впечатлением некоторых концепций или слов, считают полезным или просветительским использовать их. Возможно, будет преувеличением в подобных ситуациях говорить об *x*-изме как о направлении в философии. Образцовый случай, как увидим, так называемый «кантизм Гильберта». В других случаях математики полностью принимают философию *X*.

Разнообразные позиции могут быть рассмотрены на фоне общей философской проблематики, которая обсуждалась в первой части. Классическое историческое разделение на реализм и номинализм базируется на отношении к универсалиям. Реализм утверждает существование универсалий, разделяясь затем на определенные разновидности в зависимости от последующих определений существования универсалий. Номинализм отрицает существование универсалий, признавая только индивиды или конкретные предметы, которые понимаются не как материальные объекты, но как единичные особенные сущности, которые к тому же, как кажется, не определены иначе как через определение от обратного, через отрицание абстрактного (но, возможно, настоящий материалист не заботится об онтологии).

Подобная дихотомия встречается и в философии математики, но речь не идет, собственно, о двух философиях. Имеются в виду, скорее, два направления, которые распознаются в разных философиях или которые содержат в себе разные философии, по-разному характеризуемые при их возможной классификации с точки зрения проблемы существования математических объектов. Различные позиции могут, следовательно, в первом приближении размещаться внутри онтологической дихотомии, но не на сто процентов. Накладываются другие разделения, некоторые подходы ускользают от всех традиционных классификационных критериев. Математика разнообразна, и ее трудно вставить в рамки классификаций…

1. НОМИНАЛИЗМ

Причиной, по которой мы не уделим много внимания номинализму как философии математики, является то, что его современные сторонники[1] признают, что отрицание абстрактных сущностей, собственно и определяющее это направление, базируется лишь на философской интуиции, которая не может быть обоснована с помощью обращения к какому-либо более фундаментальному аргументу или доводу и, тем более, следовательно, с помощью анализа математики. Выбор номинализма не имеет ничего общего с реальностью математики, но имеет глубокие последствия для нее или имел бы, если бы математики им руководствовались. Однако этого не происходит (по крайней мере явно и последовательно).

Так как математические рассуждения изобилуют абстрактными понятиями, то у номиналиста есть выбор либо объявить эти рассуждения пустой, бессодержательной фантазией, иллюзией типа астрологии, либо взять на себя непростую обязанность показать, что за обманчивой наружностью таятся значимые высказывания, приемлемые с точки зрения номиналиста. Предприятие нелегкое как в принципиальном плане (представьте, если захотелось бы сделать нечто похожее для астрологии), так и с точки зрения технических трудностей. Нельзя ограничиваться арифметикой, нужно обязательно взяться и за наиболее абстрактные и продвинутые разделы математики и переписать их, спасая то, что возможно спасти, сохраняя при этом номиналистическую точку зрения. Номиналисту необходимо провести больше математической работы по сравнению с его коллегами. Только конструктивистам, пожалуй, нужно проделать, как увидим, не меньший объем работы, но они

[1] N. Goodman, W.V. Quine, *Steps towards a constructive nominalism*, Journal of Symbolic Logic, 12, 1947, pp. 105–122; итал. перевод *Verso un nominalismo costruttivo*, in *La filosofia della matematica*, под ред. C. Cellucci, Bari, Laterza, 1967, pp. 269–298. Первый автор – Nelson Goodman, а не уже цит. Nicholas D. Goodman.

являются математиками, а не философами. В целом труд номиналиста обратно пропорционален вниманию, которое он получает.

Во всяком случае, не могут считаться номиналистическими подходы, которые рассматривают математику такой, какая она есть. Если они так поступают, то должны сказать, что математические подходы не истинны, что не представляют собой рассуждения, имеющие объективное основание, как то подсказывает их грамматическая структура, или же, что их смысл отличен от кажущегося. Они должны, следовательно, поработать более в языковом направлении, чем в онтологическом. Некоторые номиналисты считают, что абстрактная математика должна быть переделана и заменена там, где это возможно, другой версией математики, другие же довольствуются новой интерпретацией традиционной математики[2].

Чтобы понять трудность задачи, нужно учитывать, что номиналист отрицает не только существование абстрактных сущностей, которые населяют математику, но также отрицает их наличие в других контекстах. Не ясно, к примеру, и не все согласны, должен ли номиналист отбрасывать существование буквы «а» и признавать только существование различных сочетаний точек чернил или чего-то другого, имеющих такое сходство, которое позволяет нам называть их все «а». Должен ли он допускать только *token*[3], а не *type*[4], в современной терминологии.

В то же самое время, номиналист не может замыкаться только на индивиды или конкретные предметы. В этом случае он неизбежно сталкивается с определенными трудностями, если хочет быть последовательным в своих рассуждениях. Допуская в качестве истинного положение, что если говорится о чем-то, то принимается, что это что-то существует (факт не настолько очевидный, он означает, что все термины языка проявляют существование чего-либо), номиналист тоже должен взять на себя некоторые обяза-

[2] Среди первых H.H. Fields, *Science without Numbers*, Oxford, Blackwell, 1980, среди вторых C. Chihara, *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1990.

[3] Многозначное слово. Основные значения – знак, символ, обозначение, метка и др. (англ. – прим. переводчика).

[4] Тип, представитель, класс, род и др. (англ. – прим. переводчика).

тельства в онтологическом плане. Иначе его предприятие будет безнадежным и обреченным на немоту, на чистую видимость (и даже без сопровождения каким-либо обычным нарицательным существительным). Например, номиналист допускает конгломераты, собранные из элементов различных частей, вероятно, допускает также конечные множества. Многие не имеют возражений по поводу геометрических объектов, точек и областей физического пространства. Почти все, говоря о математике, должны принимать, по крайней мере, типы (types), которые представляют собой символы[5], но, с другой стороны, можно было бы утверждать, что символ есть единичная абстрактная сущность.

Некоторые номиналисты по природе своей – минималисты и ограничиваются утверждением того, что уместно и полезно в целях ясности проводить тщательное различие между конкретным и абстрактным, детально анализировать появление и значение последнего и, возможно, его устранимость.

В более простых терминах по отношению к математике можно сказать, что номиналист отбрасывает бесконечность, но, нужно уточнить, – бесконечность как объект анализа и действий с нею, поскольку, к примеру, области пространства не могут считаться конечными конгломератами. Гильберт начал свою знаменитую работу о бесконечности (1925) с утверждения, что актуальная бесконечность не присутствует никоим образом в природе или, лучше, ни в одном из наших исследований природы. Гильберт признавал концепцию символа, используя некую кантианскую интуицию, сведенную к комбинаторным соображениям, и больше того, на этой основе затем разрабатывал свою оригинальную идею по спасению бесконечности, чтобы не отказываться от «рая Кантора»[6]. Формалисты, в целом, придерживаются номиналистической направленности за исключением абстрактного понятия символа и, возможно, других, связанных с этим, понятий синтаксического типа.

---

[5] Исключение, которое увидим в разделе об эмпиристах, составляет Филипп Дэвис (Philip J. Davis).

[6] Имеется в виду знаменитая фраза Гильберта: «Никто не сможет изгнать нас из рая, который создал Кантор», говорящая о теории (бесконечных) множеств Кантора (прим. научного редактора).

Формализм представляет собой один из возможных способов занять позицию номинализма без затрагивания математики. Среди наших современников логик А. Робинсон ясно выявил принципиальную позицию по поводу бесконечности и уловку формализма[7]:

> Моя позиция касательно оснований математики основана на следующих двух постулатах, или принципах: бесконечные совокупности не существуют ни в каком смысле этого слова… высказывания, которые претендуют на это, лишены смысла.

Второй принцип рассмотрим далее, в разделе, посвященном формализму.

Обычно номинализм не поднимает непосредственно вопросы реконструкции или реинтерпретации чистой математики, а обращается скорее к таким математизированным наукам, как физика, или к прикладным математическим методам. При таком подходе его работа облегчена, некоторые безнадежные разделы математики (не прикладной) можно исключить из рассмотрения. В целом номиналист полагает, что классическая математика, анализ, базирующийся на действительных числах, не является существенным для физики, а только полезным, удобным и подходящим инструментом, и что другие версии могли бы выполнять аналогичную вспомогательную функцию. В литературе имеются некоторые заметные работы в этом направлении, мнения по поводу которых расходятся[8]. Нет согласия в оценках с прикладной точки зрения, как нет его и по поводу номиналистической приемлемости результата (которому всегда бывает немного тесно в рамках исходных чисто онтологических предположений).

С математической точки зрения, в номиналистической переработке часто играют важную роль конструктивистские методы, к примеру, для замены утверждений о существовании их алгоритмическими версиями. Континуум действительных чисел в любом

---

[7] A. Robinson, *Formalism 64*, in *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (Proc. Intern. Congress, Jerusalem 1964), Amsterdam, North Holland, 1965, pp. 228–246.

[8] H.H. Fields, *Science without Numbers*, уже цит., переработал ньютоновскую механику, используя понятие пространственной области. По поводу дискуссии смотри S. Shapiro, *Talking about Mathematics*, уже цит. Смотри также J.P. Burgess, G. Rosen, *A Subject with No Object*, уже цит.

случае заменяется каким-либо конструктивистским аналогом. Среди математиков поклонники номинализма встречаются, прежде всего, среди формалистов, а также среди конструктивистов. В общем, они имеют чисто математическую или эстетическую мотивацию, а вот философы, напротив, обращаются, прежде всего, к исследованию того, насколько их математика пригодна с точки зрения научных приложений. Влияние номинализма встречается также и в других философских течениях, таких, как эмпиризм.

Определенная, отнюдь не хирургическая, реализация замыслов номиналистов осуществилась бы, если бы в их распоряжении имелась некоторая теория, касающаяся оснований математики, приемлемая для них и подходящая для всей математики. С этим контекстом согласуется попытка разработать теорию множеств без классов, осуществленная со слабым успехом Расселом и, позднее, Куайном[9]. Труд Рассела был основательно разобран Гёделем[10] с общих позиций конструктивизма. Работа представляет собой жемчужину философского анализа, который раскрывает все тонкости и трудности подобного элиминативизма и является прекрасным примером того, как следует развивать философию математики.

Задача номиналистов в отношении переписывания или новой интерпретации абстрактной математики предполагает наличие в ней разделов, которые можно сохранить, и разделов, которые стоит попытаться сохранить. Мотивы, задачи, фундаментальные постановки и часть математики кажутся, следовательно, здравыми и корректными. Необходимо тогда выяснить, что нас сбивает с дороги и в каком месте (но без порождения тотальных непоправимых катастроф), а также причины этой вековой коллективной иллюзии.

---

[9] W.O. Quine, *Set Theory and its Logic*, Cambridge, Mass., The Belknap Press, 1963.

[10] K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, in *The Philosophy of Bertrand Russell*, под ред. P.A. Schilpp, Evanston, Ill., The Library of Living Philosophers (New York, The Tudor Publishing Company), 1944, pp. 125–163, перепечатано в *Philosophy of Mathematics*, под ред. P. Benacerraf, H. Putnam, Oxford, Blackwell, 1964, pp. 211–232, сейчас включена в K. Gödel, *Collected Works*, vol. II, под ред. S. Feferman *et al.*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1990, pp. 119–141; итал. перевод *La logica matematica di Russell*, in C. Cellucci, *La filosofia della matematica*, уже цит., pp. 81–112.

Нужно объяснить, одним словом, каким образом люди доходят до признания существования чисел (или до привычки рассуждать об этом). Номиналисты замечают, что, с одной стороны, разговоры взрослых о числах представляются детям не как *игра слов*; они видят их в связи с реальностью. С другой стороны, у детей легко получается принимать абстрактную природу чисел, поскольку «никто не собирается натыкаться на числа или открывать их в лаборатории, как нейтрино»[11]. Речь идет, однако, о немного большем, чем простая констатация: «имеется естественная тенденция к замене рассуждений о методах и о текстах на дискуссию о подходящих абстракциях, которые рассматриваются как объекты»[12].

Эта операция называется также конкретизацией или гипостазированием. Пока затруднительно вскрыть ее механизм на уровне психологии, проще проследить ее историческую эволюцию. Э. Джусти[13], к примеру, указал некоторые часто встречающиеся фазы:

> Новые теории, новые важные открытия создают новые математические объекты. Они проступают, поначалу, не материализовавшись, в виде методов доказательств, инструментов исследования. Иногда, в более глубоком прошлом, как операционные процедуры. Их важность побуждает изучать их самих по себе, независимо от контекста, в котором они были предложены, учитывая также применение в тех же самых или в других обстоятельствах. Доказательные процедуры становятся объектом изучения… В некоторых случаях (немногочисленных, ведь математика, по сути, вращается вокруг немногих объектов) присутствует феномен объективации процедур… Индикатором подобной кристаллизации выступает третья фаза, часто одновременная и переплетенная со второй, в которой они выступают как решения проблем. Когда налицо все эти три фазы, тогда говорят, что открыт новый математический объект.

Вот таким образом и удается отдать должное этому способу изъясняться без обращения в онтологическую веру, открывая, наоборот, интересные перспективы анализа в историческом и логическом плане.

[11] J.P. Burgess, G. Rosen, *A Subject with No Object*, уже цит.

[12] P.J. Cohen, *Comments on the Foundations of Set Theory*, in *Axiomatic Set Theory*, под ред. D. Scott, vol. I, Providence, R.I., AMS, 1971, pp. 9–15.

[13] E. Giusti, *Ipotesi sulla natura degli enti matematici*, Torino, Bollati Boringhieri, 1999, p. 75.

2. РЕАЛИЗМ

Позиция реализма, в отличие от номинализма, казалось бы, есть только декларация убеждений, вводное заявление, не имеющее влияния на математическую работу, которое, самое большее, открывает своим последователям некоторые глубоко философские проблемы. Номинализм, по крайней мере, заставляет своих сторонников приложить руки к математике, наложить на нее какие-то ограничения или предложить ее реконструкции, в то время как реализм кажется более созерцательным по своей природе.

Реализм – возможно, первая, собственно говоря, философия математики в узком смысле этого термина, то есть философия, поддержанная математиками, при этом даже частично независимая от основных философских теорий. С самого зарождения греческой математики реализм был способом утвердить теоретическое достоинство этой дисциплины, отделить геометрию от размежевания в земледелии, арифметику от логистики (распределения ресурсов), предлагая математикам свой собственный объект изучения, стоящий над методами прикладных расчетов и измерений. Мы находим это, с некоторыми платоновскими акцентами, у Прокла (IV в.): идеализации геометрической науки представляют собой врожденные идеи, предшествующие любому опыту и не зависящие от него[1].

Эта традиция переходит к Декарту[2]:

> Когда я представляю себе треугольник, то, хотя такой фигуры, быть может, нигде на свете, кроме как в моей мысли, не существует и никогда не существовало, все равно это не является причиной того, что не существует ее

[1] Proclo, *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, под ред. M. Timpanaro Cardini, Pisa, Giardini, 1978.

[2] R. Descartes, *Méditations métaphysiques* (1641, 1647); ит. перевод *Meditazioni metafisiche*, Bari, Laterza, 1986, p. 60; рус. перевод Декарт Р. Сочинения в 2 т.: Пер. с лат. и фр. Т. 2 / Сост., ред. и примеч. В.В. Соколова. – М.: Мысль, 1994. С. 52. – Прим. переводчика.

определенная природа, или сущность, или, наконец, неизменная и вечная форма, которая не вымышлена мною и не зависит от моего ума.

В дальнейшем положения реализма прорабатываются и обогащаются вследствие возросшей сложности математики. Это течение в современную эпоху представляет собой общую колыбель разнообразных концепций, иногда даже конфликтующих между собой как с точки зрения онтологии, так и эпистемологии.

Нельзя сказать, что реализм допускает существование всех математических объектов, о которых говорится в разных частях математики. Линия раздела зависит в целом не только от философских соображений. Она обычно определяется научными или математическими предпочтениями по поводу того, как нужно заниматься математикой. Рассмотрим подход Куайна, который можно назвать *научным реализмом*. В соответствии с ним все математические понятия, необходимые для науки, имеют законное право на существование, какими бы абстрактными ни были (действительные числа, например), но только они. Остальное можно классифицировать как вздумается.

Далее, *простой реализм*, используя терминологию П. Мэдди (Penelope Maddy)[3], утверждает, что теория множеств или же, в этом контексте, математика, представляет собой изучение объективного универсума, мира множеств. *Гиперплатонизм* (*Plentiful*[4] *Platonism*), наоборот, признает существование многих объективных миров, соответствующих каждой непротиворечивой теории, сформулированной с использованием логики первого порядка.

Эти два подхода имеют различные последствия. Сквозь призму первого подхода высказывания типа континуум-гипотезы[5], ко-

---

[3] P. Maddy, *How to be a naturalist about mathematics*, in *Truth in Mathematics*, под ред. H.G. Dales и G. Oliveri, Oxford, Oxford Univ. Press, 1998, pp. 161–180.

[4] Обильный, изобильный, богатый (англ. – прим. переводчика).

[5] Континуум-гипотеза говорит, что не существует бесконечных кардинальных чисел между кардинальным числом, соответствующим множеству натуральных чисел, и кардинальным числом, соответствующим множеству вещественных чисел.

торые являются неразрешимыми[6] с точки зрения современной общепринятой теории, т.е. теории Цермело–Френкеля ZFC или ее расширений, такие высказывания, тем не менее, имеют значение истины, значение, еще нам неизвестное, для универсума которого аксиомы ZFC являются описанием, естественно, неполным. Рассматривая теорию множеств через призму второго подхода, можно сказать, что эти высказывания не имеют значения истины. Есть универсумы, в которых они верны, и универсумы, в которых ложны: есть различные миры.

Внешний оксиморон не должен удивлять. В некоторых интерпретациях квантовой механики также говорится о параллельных (материальных) мирах. В математике термин «универсум» может рассматриваться буквально простыми реалистами или же может быть устранимым для других, которые все же его используют для удобства. Под «универсумом» понимается совокупность множеств, существование которых обусловлено определенной теорией. Их может быть несколько, поскольку общепризнанная теория является неполной, и всегда та или иная теория множеств (с эффективной логикой в основе) будет неполной.

Тот, кто посвящает свои исследования доказательствам независимости, или они присутствуют в значительной мере в его изысканиях, тот с трудом признает, что думает об одном единственном мире. В противном случае теряется смысл его деятельности и разработанные модели остаются лишь техническими формальными ухищрениями. Часто философия математиков представляет собой только способ придать смысл и значение тому, что они делают, является лишь определенным психологическим дополнением. Так тот, кто занимается теориями, которые предполагаются (или, по крайней мере, задумываются) категоричными, то есть с одной единственной реализацией, на изучение которой и направлено его исследование, склоняется к реализму, поначалу в отношении своих объектов, а затем, из-за демократической уступки, и в отношении всех остальных. Другой же, изучающий теории со многими реализациями или моделями и заинтересованный именно в ис-

[6] Не являются ни доказуемыми, ни опровержимыми.

пользовании этого разнообразия воплощений, обычно ориентирован на гиперплатонизм, если он реалист. Среди этих последних находятся, прежде всего, алгебраисты. Среди первых – специалисты по математическому анализу.

Реализм, однако, не ограничен рассмотрением только множеств. Тезис о том, что математические объекты являются множествами, не принадлежит реализму. Гиперплатонизм, подобный тому, который описан у П. Мэдди, но без требования того, что модели каждой теории являлись бы множествами, действительно имеет своих сторонников[7]. Его можно было бы назвать структурализмом, термином, который зарезервирован для особенного направления, обсуждаемого далее. Назовем структурализмом простое положение о том, что каждая непротиворечивая теория определяет класс структур, ее модели и рассуждает о них без обязательств пояснения того, что представляют собой эти самые структуры. Тогда, платоновским структурализмом, или гиперплатонизмом, назовем тот, в котором структуры представляют собой множества.

В некоторых версиях реализма и структурализма попытка свести объекты и структуры к множествам может подвергнуть опасности как их настоящую природу, так и их обоюдную автономность.

Следуя традиционной философской терминологии, в конфронтации структурализма и простого реализма мы встречаем проблематику *плюрализма* или *монизма* реальности. Все ли математические объекты по своей сути имеют одну природу, или же существуют различные их типы, каждый со своей собственной натурой и действительностью?

Когда объектами изучения математики были только количество, пространство и порядок, никто не предполагал, что речь шла об одной и той же вещи, хотя развитие аналитической геометрии уже давало повод для иного сценария развития событий[8]. Монизм

---

[7] К примеру, M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, уже цит.

[8] Известно, что в греческой доевклидовой математике числа были геометрическими формами.

начинает утверждаться только после периода арифметизации Анализа[9] и последующего прихода унифицирующей теории множеств.

Даже формалист мог бы признать структурализм. Каждая теория опирается на свое собственное основание. В данном случае для формалиста – это формальная система без конкретной интерпретации, однако с возможной безвредной или, лучше сказать, нематематической добавкой, утверждающей, что из непротиворечивости следует существование. Достаточно сказать, что это предположение (или этот логический результат) является метафизическим дополнением без какого-либо значения и важности для математики[10]. Нам кажется, что структуралист и формалист Бурбаки поддержал бы такой подход. В действительности[11],

> что касается оснований, то мы верим в реальность математики, но, естественно, когда философы атакуют нас со своими парадоксами, мы спасаемся с помощью формализма и отвечаем, что математика есть только манипуляция символами, лишенными смысла, и, затем, пишем Главы 1 и 2 [*Элементов*] с теорией множеств. В конце концов, нас оставляют в покое, и мы можем вернуться к математике и заниматься ею как ранее, т.е. с ощущением, которое имеет каждый математик, что он работает с чем-то реальным. Возможно, это ощущение – иллюзия, но очень удобная. Таков подход Бурбаки в отношении оснований.

Реализму также не присуща онтологическая озабоченность, по крайней мере, в области философии математики. Он заинтересован прежде всего в истинности математических высказываний. По мнению М. Резника (Michael Resnik)[12], истинный реализм характеризуется тремя положениями: 1) сущности, о которых говорится в

---

[9] По истории арифметизации см. L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Torino, F.lli Bocca, 1948.

[10] По правде говоря, аргумент, который здесь используется, очень близок к тому, что используется в онтологическом доказательстве существования Бога.

[11] J. Dieudonné, *Les methods axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*, in *Les grands courants de la pensée mathématique*, под ред. F. Le Lionnais (1948), 2 ed., Paris, A. Blanchard, 1962, pp. 543–555.

[12] M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит.

математических теориях, существуют; 2) теории, которые их рассматривают, являются (в целом) верными; 3) их истинность независима от нашего познания и, в случае их знания, от нашего способа их познания. Однако эти три особенности можно встретить порознь – в философии никто не может отдавать приказы или, другими словами, никто их не исполняет.

Простой реалист является реалистом не только в онтологическом плане, но также и в плане того, что касается значений истины. Последователь гиперплатонизма является онтологическим реалистом. Он признает реальность понятий, но не *истинность* математических суждений, поскольку допускает только истины относительно структур. Рядом с онтологическим реализмом обнаруживается, следовательно, гносеологический или логический реализм, что представляет собой не что иное, как признание аристотелевского принципа двузначности для каждого утверждения.

Одно из определений реализма значений истины, которое, кажется, предложено М. Даммитом (Michael Dummett), следующее[13]:

> Реалист (по отношению к теории или к какому-то типу изложения) утверждает, что 1) высказывания теории или изложения являются истинными или ложными и 2) что все то, что их делает истинными или ложными, является чем-то *внешним*, то есть, в целом, речь не идет о наших сенсорных характеристиках, реальных или потенциальных, или о структуре нашего ума, или о нашем языке и так далее. Это внешнее должно, конечно, быть реальным, но не обязательно представлено сущностями, к которым высказывания относились бы (это потребовало бы наличия предварительной теории значения). Этим внешним могла бы быть любая вещь, например, общество. На основе такой формулировки можно быть реалистами по отношению к математической теме без принятия на себя обязательств по поводу существования «математических объектов».

Трудно представить, откуда могла бы прийти идея подобной формы реализма, если не из размышлений над математикой.

[13] Цит. в H. Putnam, *What is mathematical Truth*, in Philosophical Papers, 2 voll., Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1975, перепечатано в T. Tymoczko, *New Directions*, уже цит., p. 57; итал. перевод *Che cosa è la verità matematica*, in H. Putnam, *Matematica, materia e metodo*, Milano, Adelphi, 1993, pp. 80–98.

Прежде чем излагать ее, необходимо признать основную совокупность утверждений, которые считались бы истинными.

Реализм без объектов может быть узнан в логицизме. Для Г. Фреге числа были концепциями. Основной вопрос не был вопросом об объектах, но об *объективности* математики, противопоставленным вопросу о существовании объектов или их существовании, достоверном в наших умах, как индивидуальных, так и разуме коллективном, или трансцендентальном. Для того чтобы утверждать, что концепции являются внешними, достаточно отвергнуть понятие разума (и сказать, что объекты существуют). С точки зрения Даммита, Канта нельзя считать реалистом, но, вероятно, можно рассматривать реалистом гносеологическим.

Признав математические понятия как концепции, необходимо пояснить, каким образом возможно принять их в качестве объекта изучения и что будет ключиком, дающим эпистемологический доступ к их изучению. Для Фреге – это логика, одинаково объективная и не относящаяся к уму, однако не очевидно, что в этом случае не остается вопросов. Является ли изучение концепций эквивалентом их корректного использования? Или же, возможно ли производить нелогичные, ошибочные, к примеру, рассуждения над концепциями? Тогда нужна способность доступа, которая, поскольку другого не видно, имела бы отношение к уму, ранее исключенному из рассмотрения. Это проблемы, которые можно будет рассматривать при обсуждении логицизма.

Реализм значений истины сам по себе или в связке с онтологическим реализмом поднимает один любопытный вопрос, который является по характеру логическим, но еще скорее психологическим, относящимся к факту, что сам по себе этот вопрос не должен быть поставлен. Речь идет о теореме Тарского о невыразимости истины. В свете этой теоремы рассуждения о математических истинах неизбежно обречены на беспредметность, если язык неформальный, или же на неопределенную отсылку к строгим метаязыкам, все более сомнительным. Непонятно, почему столько шума было поднято кстати (и некстати) по поводу теоремы Гёделя, в то время как теорему Тарского лишь вскользь упоминают, хотя она гораздо более показательна и значительна для философии[14].

Нельзя сказать, что не были потрачены реки чернил на эту тему[15], если говорить о всевозможных вариантах обхода ее последствий, чтобы не признавать, что философия может обсуждать как одну из своих главных тем понятие (истины), которое не может быть определено, и использовать его в основах философии математики. Однако простое и жесткое следствие теоремы Тарского заключается в том, что для определения истины математических утверждений в мире множеств (или математики) необходима теория, в которой такой универсум был бы объектом, то есть теория, которая доказала бы непротиворечивость существующей математики. Можно пойти вперед по этому пути, но неизвестно, к чему все это приведет. В качестве альтернативы определению истины можно давать определения локальных истин для отдельных теорий, используемые гиперплатонизмом для подтверждения существования моделей. Подобные локальные понятия истины играют, однако, роль почти излишнюю. Рассмотрим далее применение этой возможности Резником для одной формы реализма естественного, наивного и, именно, излишнего.

Каждый реалист должен повесить перед своим рабочим местом табличку с надписью *Memento Tarski*[16].

---

[14] Некоторое объяснение может содержаться в расхожей, обыденной формулировке теоремы Гёделя, которая переоценивает и оказывает предпочтение истине по отношению к доказуемости.

[15] По некоторым аспектам рассмотренных дискуссий, значимым для математики, см. M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит., cap. 2.

[16] Шутка, апеллирующая к крылатому выражению *Memento mori* – помни о смерти (лат. – прим. переводчика).

3. ПЛАТОНИЗМ

Платонизм представляет собой форму математического онтологического реализма, которую, по словам его последователей, поддерживает большинство современных математиков[1]. Среди ведущих математиков нашего времени, которые являются сторонниками платонизма, можно отметить Р. Пенроуза (Roger Penrose) и А. Конна (Alain Connes)[2].

Казалось бы, это течение известно и изучено, достаточно дать ссылку на Платона и все, но не все так однозначно. Существуют различные формы этого направления: простой и гиперплатонизм, платонизм монистический и плюралистический.

В отношении математической онтологии термин стал использоваться сравнительно недавно, в первой половине двадцатого века[3], однако четкая формулировка позиции платонизма была дана ранее, в конце девятнадцатого столетия[4]:

> Я полагаю, что числа и функции Анализа не являются произвольным продуктом нашего ума. Думаю, что они существуют вне нас, обладая характером необходимости, присущим объективной реальности, и что мы встречаем их, открываем их и изучаем их, как это делают физики, химики и зоологи.

---

[1] По крайней мере, среди творческих. Предыдущая цитата по поводу подхода Бурбаки в отношении оснований была перефразирована Дьедонне (устный вариант) в *крылатую фразу*, что математики – платонисты в рабочие дни и формалисты по выходным, когда ходят в церковь.

[2] R. Penrose, *The Emperor's New Mind*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1989; итал. перевод *La nuova mente dell'imperatore*, Milano, Adelphi, 1990 и *Shadows of the Mind*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1994; итал. перевод *Ombre sulla mente*, Milano, Mondadori, 1998; J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à penser*, Paris, Odile Jacob, 1989; итал. перевод *Materia e pensiero*, Torino, Bollati Boringhieri, 1991.

[3] Кажется, что был предложен в Paul Bernays, *Sur le Platonism dans les mathématiques*, in «L'Enseignement Mathématique», 34, 1935–1936, pp. 52–69.

[4] Ch. Hermite (1894) in *Corréspondance d'Hermite et Stieltjes*, Paris, Gauthier-Villars, 1905, t. II, p. 398.

Аналогичную ссылку на объекты изучения естественных наук сделал современный философ[5]:

> Рассмотрение математики как некоторой науки уже подразумевает, что натуральные числа, объекты изучения этой науки, являются объектами в том же самом смысле, в котором и молекулы являются объектами.

Есть чему удивиться в этом поверхностном сравнении. Объекты естественных наук, в том числе и упомянутые молекулы, появляются и пропадают. Не думается, что, приписывая математическим объектам те же самые свойства, можно было бы обеспечить устойчивые основания, которые желали бы иметь платонисты, да и с онтологической точки зрения – это ересь, поскольку объект не изменяется. Одно время объектами естественных наук были только наблюдаемые макрообъекты типа растений и животных. Математические объекты тогда, конечно, не были объектами того же рода. Затем объекты естественных наук превратились в микрообъекты, т.е. стали ненаблюдаемы, как и объекты математические, и, казалось бы, нужно сказать, что все наоборот – это объекты науки (стали) похожи на математические. Аналогичное замешательство возникнет при рассмотрении эмпиризма.

Что было бы, если бы математические объекты, как флогистон, однажды исчезли бы? Какое облегчение для студентов!

И все же именно эта ссылка на объекты естественных наук объединяет разнообразные варианты платонизма.

Период деятельности Ш. Эрмита характеризовался появлением на сцене и в сердце Анализа таких функций, которые нельзя было представить простыми формулами, как хотел Л. Эйлер. Они должны были рассматриваться как объекты в себе, завершенные и по своей природе бесконечные.

Таким образом, математический платонизм зарождался в процессе отделения математики от физического мира, и его кульминация пришлась на девятнадцатое столетие. Когда верилось, что мир создан Богом с использованием математических форм, что книга природы написана на языке математики (Галилей), проблема

[5] M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, уже цит., p. 87.

природы математических объектов не представлялась драматической. Математика просто и удивительно выражала численные и геометрические характеристики нашего мира. Ее истины были об этом мире и принадлежали этому миру, хотя и обладали характером необходимости. Даже возможные платоновские Идеи не обитали в Гиперурании, а образовывали определенную схему и основу мира. Аристотелизм и платонизм могли продолжать сражаться на метафизической сцене и, также, на гносеологической, но с невеликими последствиями для математики. Эта философия, которую можно назвать возрожденным *Пифагоризмом*, ушла безвозвратно.

В семнадцатом веке были только геометрия и алгебра, только начиналась разработка анализа бесконечно малых. В конце девятнадцатого столетия математика охватывала уже такие теории, как теория множеств, теория функций действительного и комплексного переменного, проективная и неевклидовы геометрии. По сравнению с математикой времен Прокла, когда Нил заливал поля египтян, произошли, конечно, огромные изменения.

В то время как геометрия и алгебра предлагали теории, которые не описывали и не измеряли макромир с тремя измерениями, представители анализа должны были научиться работать с массой новых бесконечных объектов – функций, о которых говорил Эрмит. Однако его позиция в духе платонизма была не единственной. В тот же период Г. Кантор и Р. Дедекинд, создатели теории множеств, говорили *contra* Эрмит о свободной математике, свободном творчестве ума, а Фреге утверждал, что натуральные числа – концепции.

Встала во весь рост проблема поиска нового объяснения для математики, и имелись два принципиально различных варианта: с одной стороны, признание собственной объективной реальности математики и, с другой стороны, ее существование в уме, или порождение ее умом, признание того, что математика есть творение духа или разума.

После Эрмита многие знаменитые математики признались, что являются убежденными платонистами, к примеру, Харди[6]:

---

[6] G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1941, pp. 63–64.

Математическая реальность лежит вне нас, и наша задача – открыть ее и наблюдать ее, и теоремы, которые мы доказываем и которые красноречиво описываем как наши «творения», являются просто отчетами о наших наблюдениях.

В наши дни Конн пишет[7]:

Я склоняюсь скорее к реалистической точке зрения. Для меня простые числа, к примеру, более реальны, чем материальная действительность, которая нас окружает. Можно сравнить работу математика с работой первооткрывателя мира.

Но обаяние платонизма опирается, прежде всего, на авторитет Гёделя, который не ограничился одной лишь верой, а пытался обосновать его. Он говорил о классах, поскольку его деятельность пришлась на тот период, когда теория множеств была только-только признана в качестве каркаса всей математики[8]:

Классы и концепции могут также рассматриваться как реальные объекты и, именно, классы как «множественности объектов» или как структуры, которые состоят из множественностей объектов, и концепции как свойства и отношения между объектами, которые существуют независимо от наших определений и построений.

Мне кажется, что признание подобных объектов не менее законно, чем признание физических тел, и что есть такое же основание верить в их существование. Они необходимы для обеспечения приемлемой системы математики в том же самом смысле, в котором физические тела нужны для удовлетворительной теории наших сенсорных ощущений, и в обоих случаях невозможно интерпретировать суждения, которые необходимо высказывать об этих объектах, иначе как утверждения о «данных», то есть во втором случае о действительных сенсорных ощущениях.

Отметим, что Гёдель говорит предусмотрительным образом о физических телах, а не о сомнительных объектах физической теории. Он, возможно, имеет в виду изначальное признание физических тел, подобное тому, к которому апеллирует выше, к примеру,

---

[7] J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à penser*, уже цит., p. 20.

[8] K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, уже цит. Гёдель с благосклонностью комментирует и перефразирует выражения Рассела «так же, как», «более чем далее», утверждение, что аксиомы обоснованы историей и практикой математики.

Николас Гудмэн, признание, которое необходимо для того, чтобы рассуждения о физике не сводились к субъективным ощущениям, и устанавливалась бы определенная основа для объективности.

Гёдель вполне осознавал, что выдвижение подобного тезиса приведет к простому и очевидному вопросу в отношении позиции платонизма, который и был впоследствии поставлен П. Бенацеррафом[9]. Речь идет о вопросе по поводу специфической способности или по поводу типа опыта, который позволил бы нам установить отношение между двумя такими разнородными сферами, как материальный мозг и абстрактные сущности. Онтологический платонизм должен сопровождаться некоторой эпистемологической теорией, а не довольствоваться тайной в отношении связей между реальностью Платона и реальностью материальной, представленной миром внешним или внутренним, то есть мозгом, тайной, которой довольствовался Эрмит[10]:

> Эти понятия Анализа… образуют нечто целое, из которого только одна часть нам открыта неоспоримым образом, хотя она и таинственно связана с другой совокупностью вещей, которые мы воспринимаем посредством чувств.

Возражение, что гипотетические платоновские сущности не могут быть познаны, основано на принципе, который философы называют каузальной (причинной) теорией познания. Эта теория, если быть кратким, полагает, что то, что должно быть познано, *является причиной* знания в смысле установления какого-то контакта и воздействия определенного рода на познающего субъекта. Отсюда вытекает нечто, похожее на силлогизм:

> Каузальная теория познания.
> Люди не имеют никаких каузальных отношений с абстрактными сущностями.

[9] P. Benacerraf, *Mathematical truth*, in Journal of Philosophy, 70, 1973, pp. 661–680, перепечатано в P. Benacerraf, H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, 2 ed., Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1983, pp. 403–420. Для баланса мнений в дискуссии, которая последовала за его первой статьей, см. P. Benacerraf, *What Mathematical Truth could not be – I*, in The Philosophy of Mathematics Today, под ред. M. Schirn, Oxford, Clarendon Press, 1998, pp. 33–75.

[10] Цитировано в A. Dresden, *Some philosophical aspects of mathematics*, in Bulletin AMS, 3, 1928, pp. 438–452.

Следовательно, люди не могут иметь знания об абстрактных сущностях.

Подобный аргумент используется со времен Декарта его критиками. Картезианское различие между *res cogitans* и *res extensa* ставило проблему возможности познания второго первым. Декарт разрешал проблему на основе двух исходных положений: с одной стороны, *res extensa*, субстанция, из которой сделан мир, есть не что иное как геометрия; с другой стороны, он постулировал, что мы обладаем прямым и достоверным знанием *ясных и отчетливых* идей, знанием, которое гарантировано Богом, и, следовательно, большое количество малых, но ясных и четких, шагов обеспечивало ясность и отчетливость всего оставшегося знания, которое само по себе не было ясным и отчетливым.

Сейчас ситуация поменялась кардинальным образом, и даже те, кому идеи Декарта симпатичны, уже не могут спасти эту философию. Сегодня рассмотрение производится прямо противоположным образом. Познающий субъект чаще всего, за исключением, пожалуй, мнения некоторых философов-идеалистов, идентифицирован с познавательными способностями, которые связываются с материальным мозгом. Познаваемая же реальность не является более материальной и даже не представляется материальными телами (как в пифагоризме).

А. Конн

С одной стороны, существует независимо от человека математическая реальность, грубая и неизменная. С другой стороны, мы познаем ее только благодаря нашему мозгу ценой, как говорил Валери, редкостного смешения концентрации и желания. Я, следовательно, отделяю математическую реальность от инструмента, который мы имеем для ее изучения, и допускаю, что именно мозг является материальным инструментом исследования, который не имеет ничего божественного и не должен ничего трансцендентности.

Ж.-П. Шанжё (J.-P. Changeux)

Термин *независимый* [в отношении существования математических объектов] требует определения. В рамках платоновского реализма он обозначает нематериальность. Однако хотелось бы знать основу этих математических объектов, которая поддерживает существование независимо от человеческого мозга…

А. Конн

Полагаю, что нужно быть внимательными и не путать математическую реальность с ее возможными иллюстрациями в некоторых природных явлениях. Когда я говорю о независимом существовании математической реальности, я ее абсолютно не локализую в физической реальности…[11]

Еще одно кардинальное изменение по сравнению с Декартом заключается в подходе платонистов к математической *интуиции*, так обычно называется способность схватывать абстрактные объекты[12]. Прежде всего, она способна приблизиться к основным элементам знания, значимым понятиям, целым структурам, к совсем не мелким и ограниченным истинам. С другой стороны, она не претендует на точность, ясность и четкость и предполагает (иногда) ненадежность и большую работу по доведению ее плодов до зрелого состояния.

Для некоторых специалистов силлогизм каузальной теории, рассмотренный выше, явился опровержением, правда, дешевым, платонизма, тем не менее, это умозаключение подверглось детальной мета-критике на философской площадке и, прежде всего, по поводу исходного пункта – каузальной теории познания[13]. Гёдель пошел другим путем. Он мужественно двинулся навстречу природе этой специфической способности, которая постулировалась или предполагалась необходимой[14].

---

[11] J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à penser*, уже цит., pp. 32–34.

[12] Ch. Parsons, *Mathematical intuition*, in Proceed. Aristotelian Society, 80, 1979–1980, pp. 145–168, перепечатано в *The Philosophy of Mathematics*, под ред. W.D. Hart, Oxford, Oxford Univ. Press, 1996, pp. 95–113.

[13] M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, уже цит., ch. 4.

[14] K. Gödel, *What is Cantor's continuum problem?*, in Amer. Math. Monthly, 54, 1947, pp. 515–525, перепечатана с важными добавлениями в P. Benacerraf, H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, уже цит., pp. 258–273 и включена в K. Gödel, *Collected Works*, vol. II, уже цит., pp. 254–270; итал. перевод *Che cos'è il problema del continuo di Cantor?*, in C. Cellucci, *La filosofia della matematica*, уже цит., pp. 113–136.

Трансфинитные объекты теории множеств, совершенно очевидно, не принадлежат физическому миру, и, также, их косвенная связь с физическим опытом представляется очень слабой (прежде всего потому, что теоретико-множественные концепции играют малозначительную роль в современных физических теориях).

Однако несмотря на их отдаленность от чувственного опыта, мы обладаем определенным восприятием даже объектов теории множеств; это видно из факта, что их аксиомы представляются нам истинными. Не вижу, почему мы должны меньше доверять этому восприятию, то есть математической интуиции, чем доверяем чувственному восприятию, которое побуждает нас создавать на его основе наши физические теории и ожидать, что будущие сенсорные восприятия соответствовали бы им, и, более того, верить, что нерешаемые сегодня проблемы имели бы, тем не менее, определенный смысл и были бы решены в будущем. Парадоксы теории множеств беспокоят математику не более, чем обман наших чувственных наблюдений беспокоит физику. Была уже отмечена ранее вполне вероятная возможность того, что новые математические интуиции привели бы к решению таких проблем, как континуум-гипотеза Кантора…

Заметим, что математическая интуиция не должна пониматься как способность, которая дает нам *мгновенное* знание интересующих нас объектов. Наоборот, кажется, что, как в случае с физикой, мы *формируем* наши идеи об этих объектах также на основе чего-то другого, что *дано* нам непосредственно. Только это нечто другое *не* есть или не представлено главным образом ощущениями. То, что это нечто другое, помимо ощущений, дается непосредственно, следует (без какой-либо ссылки на математику) из факта, что даже наши идеи относительно физических объектов содержат составляющие, которые качественно отличны от ощущений или от их простых комбинаций, к примеру, сама идея объекта, в то время как с другой стороны, в нашем мышлении мы не можем создать ни одного качественно нового элемента, а только воспроизводить и комбинировать те, которые уже даны. Очевидно, что эти «данные», которые находятся под математикой, тесным образом связаны с абстрактными элементами, которые содержатся в эмпирических идеях. Отсюда абсолютно не следует, однако, что данные этого второго типа, поскольку они не могут быть соотнесены с какими-либо воздействиями определенных вещей на наши органы чувств, были бы чем-то чисто субъективным, как утверждал Кант. Наоборот, они также могут представлять определенный аспект объективной реальности, если только, в отличие от ощущений, их присутствие в нас не обусловлено другим родом отношений между нами и действительностью.

Анти-эмпиристский аргумент, который Гёдель упреждающе использует против каузальной теории познания, то есть то, что даже наши идеи о физических объектах содержат в себе некоторый компонент, качественно отличный от ощущений, хорошо задуман и почти убедителен. Он предупреждает возражения, которые получат большой резонанс и будут использованы антинеопозитивистской философией, которая создаст из них несущую конструкцию своей теории (англ. *theory ladeness*) чувственных знаний любого рода[15].

Однако аргумент Гёделя, в лучшем случае, представляет собой лишь аналогию. Он разрушает наиболее простые возражения, критикуя наивную характеристику чувственного восприятия как чего-то полностью материального. Доказывать, что математическая интуиция представляет собой человеческую способность, является вопросом совершенно другого рода. И действительно, Гёдель продолжает следующим образом:

> Вместе с тем, вопрос объективного существования объектов математической интуиции (что является, заметим мимоходом, точным повторением вопроса об объективном существовании внешнего мира) не является решающим для обсуждаемой проблемы. Простого психологического факта существования интуиции, которая достаточно ясна, чтобы произвести аксиомы теории множеств и целый открытый ряд их расширений, достаточно, чтобы придать смысл вопросу об истинности или ложности высказываний типа континуум-гипотезы Кантора.
>
> Однако тем, что, может быть, более любой другой вещи, оправдывает принятие этого критерия истины для теории множеств, является тот факт, что многократные обращения к математической интуиции необходимы не только для того, чтобы иметь однозначные ответы на вопросы теории трансфинитных множеств, но также для решения проблем финитной теории чисел (типа гипотезы Гольдбаха), где невозможно сомневаться в значимости и в недвусмысленности обсуждаемых концепций. Это вытекает из того факта, что для каждой аксиоматической системы всегда имеется бесконечное число неразрешимых высказываний такого типа.

Гёдель утверждает, следовательно, что суть не в проблеме существования объектов интуиции, которая ожидает решения. Для него важно, чтобы не было неопределенных высказываний, то есть важен реализм значений истины. Для этого не нужны объекты ин-

---

[15] Последующую философскую разработку этой идеи (W. Sellars, N.R. Hanson) и ее предысторию см. G. Lolli, *Beffe, scienziati e stregoni*, уже цит.

туиции, а важно то, что интуиция дает нам в смысле высказываний, которые полагаются истинными и принимаются в качестве новых аксиом. Такое видение формирует подход, весьма отличный от онтологического платонизма, который рассмотрим далее. По этому поводу напомним уже цитированную остроту Бурбаки о том, что «возможно, это ощущение [работы с чем-то реальным] – иллюзия, но очень удобная иллюзия».

Другие платонисты пытались обогатить гёделевское обоснование интуиции дополнительными доказательствами. Вот аргумент Конна[16], основанный на непротиворечивости:

> Сравним математическую реальность с материальным миром, который нас окружает. Что доказывает реальность этого материального мира, кроме ощущений, которые получает оттуда наш мозг? Главным образом, непротиворечивость наших ощущений и их постоянство. Точнее, непротиворечивость осязания и зрения в одном индивиде. И непротиворечивость ощущений различных индивидов. Представляется, что математическая реальность имеет ту же самую природу.

Этот аргумент, в действительности, противоречит Гёделю. Осязание и зрение являются непротиворечивыми для Гёделя только в силу некоторой идеи объекта, которая их объединяет, а не непротиворечивость сама по себе доказывает реальность, генерируя идею объекта.

Исследование или постулирование аналогий между физическими и математическими объектами или между их восприятиями, кажется, основано на *petitio principii*[17]. Если в математике мы говорим об объектах, то попробуем обосновать их, как обосновываем физические объекты. Вспомним в этой связи номинализм и гипотезу формирования идеи абстрактных объектов. Сначала о числах говорится с помощью предложений, имеющих ту же самую грамматическую структуру, что и фразы бытового языка. Потом осознается, что числа невозможно найти на дороге, и тогда их называют абстракциями. С другой стороны, их называют также объектами, поскольку нам привычно так говорить о них. Если такой анализ корректен, то именно язык играет определяющую роль,

[16] J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à penser*, уже цит., p. 28.

[17] Аргумент, основанный на выводе из положения, которое само еще требует доказательства (лат. – прим. переводчика).

и именно его необходимо исследовать, а не загадочный подвид шестого чувства.

Понимание платоновской интуиции у Гёделя и у Конна различно. С одной стороны, это способность, которая дает знание. С другой – аналог ощущения, который придает смысл существованию математических объектов.

Для Конна природа математической реальности отличается от природы физического мира. Она представляется ему, что неизбежно, природой высшего порядка:

> Я полагаю, что математик развивает «чувство», несводимое к зрению, слуху и осязанию, которое позволяет ему воспринимать некую реальность, имеющую свои законы, как и физическая действительность, но гораздо более стабильную, поскольку она не локализована в пространстве-времени[18].

С другой стороны, если эта реальность «более стабильна», чем физическая, то может появиться сомнение в обоснованности применения Конном одинаковых идентификационных критериев в обоих случаях.

Необходимо отметить, что, к чести некоторых платонистов, они делают определенную оговорку по поводу вышеупомянутой стабильности несмотря на то, что подобное допущение бросает тень на всю концепцию. К примеру, Пенроуз утверждает по поводу неоспоримых истин (англ. *unassailable truths*), балансируя на грани несостоятельности[19]:

> По мере того как математики приобретают опыт, их точка зрения на то, что они считают неоспоримыми истинами может меняться (если предположить, что они вообще рассматривают *что-то* в качестве неопровержимых истин). Вполне здравым компромиссом является возведение *некоторого* ряда принципов и мнений в ранг безусловных истин и проведение дальнейшего аргументирования на их основе.

Это замечание Пенроуза ставит еще один связанный с интуицией эпистемологический вопрос, на который платонизм должен дать ответ, чтобы считаться философией математики. Чтобы отвечать критерию объективности Николаса Гудмэна, платонизм, кро-

---

[18] J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à penser*, уже цит., p. 34.

[19] R. Penrose, *Shadows of the Mind*, уже цит., p. 103.

ме обсуждения существования абстрактных объектов и нашего непосредственного интуитивного восприятия их, должен обогатиться и другими аспектами. И действительно

> математика состоит из истин относительно абстрактных структур, которые существуют независимо от нас, логических доказательств, которые устанавливают эти истины, конструкций, которые скрепляют эти доказательства, формального манипулирования символами, которое позволяет выразить эти доказательства и истины, и из ничего более[20].

Допущение Гёделя о том, что интуиция не является прямой формой познания, отражало, вероятно, также понимание важности извилистых, косвенных аргументирующих шагов в развитии математики. Платонист испытывает определенные трудности при объяснении роли доказательства.

Если предполагается, что математика производит истину, и считается, что математики главным образом посвящают себя доказательствам и ежедневно занимаются ими, то напрашивается вывод, что доказательства производят истину и знание. Это заключение само по себе спорное, если вспомнить вековую полемику по поводу пустого и стерильного характера логики, и оно, кроме того, не разделяется многими математиками, которые боятся, что их будут считать логиками. Им кажется, что построение математического доказательства не имеет ничего общего с простотой и прямолинейностью доказательства логического.

Доказательства чисто логические не доказывают ничего, что лежало бы вне логики. Доказательства математические выводят логические следствия из предположений, даже если они и не являются логическими истинами. Математические предположения – это аксиомы. Математические истины бывают, по крайней мере, двух типов: аксиомы и теоремы. Чтобы найти место для доказательств, можно ограничить роль интуиции познанием аксиом, а функцией доказательств было бы тогда познание производных истин. Гёдель, по крайней мере, говорит об интуиции всегда в отношении аксиом теории множеств.

---

[20] N.D. Goodman, *Mathematics as an Objective Science*, уже цит.

Но не в этом заключается роль интуиции для работающих математиков. Прежде всего, они мало интересуются аксиомами и, кроме этого, интуитивно предчувствуют важные результаты – теоремы.

И тогда приходит сомнение. Почему только доказательства санкционируют теоремы?[21] «Почему [натуральные числа] должны быть открыты познанию только посредством доказательства?[22]» Почему, собственно, доказательства?

Почему бы не должна существовать единственная познавательная способность – интуиция, естественно?

Если предполагать наличие и того, и другого, интуиции и доказательств, то, кажется, необходимо допустить, что некоторые факты, некоторые истины, будь то аксиомы или же результаты, уже установленные, которые являются отправными точками последующего анализа, узнаются непосредственно, в то время как другие требуют дополнительного инструмента. Непонятно однако, как распределить обязанности. Этот дополнительный инструмент вовсе не является некой подзорной трубой, совсем наоборот, поскольку логика не рассматривается, в целом, таким мощным инструментом, более могущественным, чем интуиция. Факты не располагаются от нас на разных дистанциях и не имеют различной природы. Мир существования является, скорее, однородным. Различаются, возможно, способы познания фактов.

Вырисовывается определенное, явно непризнаваемое различие между двумя формами доступа, из которых одна неизбежно высшая, привилегированная, а другая – низшая, подходящая для математиков мало креативных, или которая служит, прежде всего, для целей коммуникации. Налицо опасность элитарности, рецидивы которой случаются не только у отдельных индивидов, но даже у целых научных школ, как, например, у известной итальянской геометрической школы.

Если, с другой стороны, все обстоит не так, то чем является и для чего служит это медленное и непрямое продвижение, пред-

---

[21] Например, Пенроуз считает (ошибочно), что теорема Гёделя о неполноте доказана таким образом, который убеждает, что некоторые неопровержимые истины могут быть приобретены только благодаря особой способности, типично человеческой, а не алгоритмической.

[22] M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, уже цит.

ставленное аргументирующими формами? Если вновь вернуться к такому любимому платонистами образу исследователя, в соответствии с которым[23],

передвигаясь по территории математики, он познает понемногу очертания и невероятно богатую структуру математического мира,

можно подумать, что это какое-то путешествие, которое переносит нас в новые места. При этом в некоторых специальных местах, например, на опушке леса, из которого ничего не было видно, или на вершине с впечатляющим панорамным видом опять срабатывает интуиция. Можно было бы попробовать разработать подобную идею, поискав новое определение и новую функцию для логики, которые сочетались бы с интуицией, однако до сих пор это не было сделано платонистами, которые удовлетворяются лишь претенциозными описаниями с большими пробелами.

Гёдель высказывался очень осторожно, произнося лишь философски безукоризненные положения, однако платонисты в рабочие дни легкомысленно ссылаются на него и используют его авторитет, чтобы оправдать свою позицию и то, на что они тратят свою жизнь. Рассмотрим мнение одного платониста, который имеет подобные амбиции[24].

Полная картина математической деятельности, предложенная платонизмом, представляется следующим образом. Математик в соответствии с этим видением сопоставляет себя с многообразием абстрактных структур, которые по своей сути предшествуют его математической активности. Он не создает эти структуры, а находит. В ходе своего обучения он все более, по причине развития своих способностей, формирует и совершенствует *интуицию* относительно этих структур. Выясняется, естественно, что он имеет более глубокую интуицию относительно одних структур и менее глубокую – относительно других. Его интуиция формируется посредством истин относительно математического мира, которые были открыты его *предшественниками* и его коллегами. Эта интуиция, в свою очередь, позволяет ему найти *новые* структуры и предложить новые *гипотезы* в отношении уже известных структур. Чтобы *верифицировать* эти гипотезы, он производит *построения*, излагает аргументы, определяет новые понятия. Поскольку эти построения выражены

---

[23] J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à penser*, уже цит., p. 34.

[24] N.D. Goodman, *Mathematics as an Objective Science*, уже цит. Курсив Г. Лолли, чтобы подчеркнуть ключевые слова, обсуждаемые далее.

на математическом языке, который является частью обычного языка, то, следовательно, они опираются на выкладки и представляются формальными и строгими. Посредством этого они доносятся до научной общественности и становятся частью широчайшей социальной диалектики, через которую развивается математика.

В этой картине находим в компактной форме не все ответы, но все проблемы, не решенные платонизмом.

Острота проблемы природы математических объектов внешне снята и скрыта под социологической формулой признания некоторой имплицитной реальности в языке, унаследованном от сообщества, былого и настоящего. В то же время, подтверждается наличие интуиции относительно структур как источника знания.

Интуиция пробегает от одной гипотезы к другой. Гипотезы эти должны быть верифицированы. Все это *politically correct*, однако создает неловкость. Если необходима верификация, то получается, что интуиция сама по себе недостаточна, не является источником знания. Интуиция у Гёделя не требует подтверждения, она *покоряет* нас истиной своего содержания (самое большее, что имеется, это возможность верификации иного типа, о чем поговорим далее, которая, однако, представляет собой альтернативу интуиции).

Не уточняется, что служит верификацией, и почему она, как известно, выражается через доказательства, построения и определения, которые представляют собой в действительности то, что делает математик.

Единственной ролью для доказательства в приведенной картине могла бы быть следующая. Истины, интуитивно найденные или открытые предшественниками, не являются полностью между собою независимыми, наоборот, все они должны быть связаны между собой (вот почему математик доказывает все, с готовностью или без оной), и, следовательно, доказательство А следует из В, устанавливает частичное подтверждение одного в терминах другого. Однако это утверждение является весьма обязывающим и выходящим за рамки заявленных намерений. Оно, кроме заявления о том, что нельзя быть полностью уверенными в интуиции, постулирует некоторую логическую структуру необходимых связей разнообразных составляющих бытия. Добро пожаловать на метафизический бал!

Что такое построения, математики знают хорошо, может быть, не в такой степени знакомо это философам. Однако построения, к сожалению, являются построениями математических объектов, и они конструируют вещи, которые раньше не существовали. К примеру, дано семейство структур и фильтр на множестве индексов, возможно построение производного семейства структур.

В действительности Гудмэн допускает, что находятся новые структуры, для того чтобы примирить несомненные новинки, периодически появляющиеся на математическом горизонте, с объективной реальностью, предполагаемой платонизмом. Однако нахождение структур отличается от их конструирования. Такое же замешательство возникает, если говорить об определениях. Дается определение производного семейства, сопровождаемое, чтобы показать, что оно не пустое, доказательством его существования на основе аксиом или посредством конструкции. Определения могут рассматриваться как креативные или только описательные. Если они описательные, то непонятно, для чего служит доказательство существования, однако вернемся к этой теме при обсуждении логицизма.

Один из выходов из ситуации, связанной с этими затруднениями платонистов, касающимися очевидной активной и креативной роли математика, был указан Конном с помощью разделения методов, или инструментов мышления, и объектов[25]:

> В своем исследовании математической реальности математик создает «инструменты мышления». Не нужно путать их с самой математической реальностью. К примеру, десятичная система представляет собой известный инструмент мышления, однако было бы неправильным придавать значение десятичным цифрам, которые представляют число.

Это разделение достаточно сомнительно и опасно для самого же платонизма. Прежде всего, получается, что основная часть математических идей помещается, таким образом, в непонятный сектор инструментов мышления. Граф является математическим объектом или инструментом мышления? В примере Конна, если разложение числа, которое стоит за его десятичным представлением, является лишь способом размышления о числах и не имеет мате-

---

[25] J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à penser*, уже цит., p. 20.

матической реальности, то спрашивается, что же имеет реальность?

Конн честно допускает, что открываются сначала свойства объектов, которые не являются самими объектами. В этом он всего лишь уважительно относится к истории, которую нельзя игнорировать. К примеру, никто не может отрицать тот факт, что свойства, подобные логарифмам, и многие другие были сформулированы и использовались гораздо раньше, чем было дано определение самих действительных чисел в конце девятнадцатого столетия. Платонист может сказать, что именно эти свойства, аккумулируясь, приводят к открытию действительных чисел, но гораздо разумнее сказать, что приводят к их определению в смысле конструирования. Пока действительных чисел не было, трудно понять, как математик-платонист мог заявить, что он интуитивно нашел свойства объектов, о которых не знает, что они из себя представляют, свойства подвешенные, без опоры, и, даже, не очень согласованные между собой – достаточно подумать о вещественных числах с бесконечно малыми или без оных. Какое значение в течение всего указанного длинного промежутка времени имела истина, если не было объектов, на которые ссылается реализм истинностных значений?

Нельзя сказать, что неплатонист не имеет своих собственных трудностей при историческом и рациональном объяснении какого-либо феномена, похожего на рассмотренную выше ситуацию с вещественными числами. Однако если определение математического объекта состоит именно из собрания и выбора свойств, считающихся существенными, то не удивительно, что изучение этих свойств (конечно, гипотетическим и ненадежным образом) происходило ранее. Возражение Конну приходит на ум даже неспециалисту[26]:

> Мне кажется, что ты не различаешь достаточным образом математические объекты сами по себе от их свойств. Эти объекты представляют собой «новые конструкции», которые математик создает раньше, чем изучит все свойства. Вначале они являются «предположениями», «постулатами», кото-

[26] J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à penser*, уже цит., p. 23.

рые могут быть доказанными или нет. Именно в гипотезе, в постулированной начальной структуре мы видим природу математических объектов.

Если следовать в направлении разделения объектов и методов, то окажется, что в качестве объектов останутся только натуральные числа. В этом Конн, как настоящий француз, проявляет и признает влияние позиции Пуанкаре (Poincaré), которую, однако, нелегко защищать. Возникает вопрос, в действительности, что видит математик, когда заявляет об интуитивном восприятии чисел, находящихся вне их представлений (способов записи), например, в десятичной форме, представлений, которые не имеют реальности. Кажется, что остаются реальными только отдельные автономные числа, а их отношения – уже нет, хотя они тоже являются объектом арифметики. Возможно, платонист их видит лишь в наиболее простом и лаконичном представлении, так называемом унарном, в соответствии с которым число n представляется последовательностью $|||\ldots||$ из n вертикальных палочек. Таким образом, открывается путь к более логичной позиции тех, кто считает числа словами, образованными эффективно исчисляемым процессом.

Как альтернативный вариант, платонист, на манер Конна, может утверждать, что видит структуру чисел в ее всеобщности. Она представляет собой структуру с особенным типом порядка. Видеть ее означает видеть только некоторое упорядоченное множество. Так мир множеств появляется по существу на горизонте платонизма.

В отличие от логика Гёделя, математик-платонист обычно не является фанатиком теории множеств. Он может допускать, что существует на заднем плане мир множеств, однако, по большому счету, мало заинтересован в теоретико-множественных определениях математических сущностей, в теоретико-множественной редукции математики, оставляя все это логикам. Он обсуждает более охотно независимые структуры и склоняется к рассмотрению отдельных автономных типов сущностей. Осторожность более чем оправданна, поскольку неизвестно, где же прятались множества все это время?

Однако если платонизм доходит до признания реальности множества натуральных чисел, тогда теоретико-множественные обязательства неизбежно приведут к тому, что он перестанет сопровождаться редукционизмом (целые числа являются множествами – классами эквивалентности – пар натуральных чисел, рациональные числа есть множества – классы эквивалентности – пар целых чисел, действительные числа есть множества рациональных и так далее). Редукционизм, однако, стремится заместить собой созерцательный интуитивный платонизм и пробивает брешь, в которую он может весь выйти. Он подсказывает, что математик *конструирует* математические объекты логически, используя инертную и не дифференцированную материю, представленную множествами, которые сами по себе являются не математическими объектами, а скорее логическими. Истинный платонист, если он не желает рассуждать о конструкции, должен философски утверждать, что уже существует мир множеств со всеми многообразными возможными, актуальными и будущими комбинациями этой базовой материи, представленными и организованными в математически воспринимаемой форме структур, и что только сейчас стало понятно, что именно эта материя базовая. Однако не таков подход Конна, который ставит себя в трудную позицию, утверждая, что эти формы, хотя и интересные, не являются математической реальностью. В некотором смысле он прав, поскольку конструирование структур, отталкиваясь от базовой материи множеств, может производить их без конца, но фактически только некоторые из этих структур интересны, и именно они не вытекают из теоретико-множественных соображений.

В конце концов, будь он реалистом любого толка, платонист не может избежать вопроса об универсуме множеств и встречает лицом к лицу факт, что универсум не единственен, что рядом с первым появляются другие, которые пытаются узакониться.

У гиперплатониста может быть меньше проблем, поскольку он мог бы утверждать, что структуры, которые его интересуют, которые представляют собой особые множества, являются инвариантными в моделях теории множеств, теми же самыми в разных мирах, или что возможные различия касаются второстепенных аспектов математической деятельности. Последнее заявление, к сожалению, не верно, как подчеркивает всегда Гёдель, когда напоминает, как аксиомы, которые отличают разные миры, влияют даже на элементарную арифметику, определяя в том или ином смысле какое-то неразрешимое высказывание. Далее, структура действительных чисел значительно отличается в различных мирах, и утверждать весьма произвольно, что отличия не важны, значит уродовать признанную и интересную часть математики без каких-либо критериев, которые позволили бы обосновать такие усечения, как это могло бы быть в номинализме. Все это происходит лишь от (вредных) привычек.

Для сторонника простого реализма, без сомнений, эта ситуация полна драматизма, поскольку он должен являться также последователем реализма истинностных значений и, следовательно, не может допускать наличие многих миров или неопределенность в отношении правильного, настоящего универсума. Гёдель надеялся найти критерии для того, чтобы определить и устранить нежеланные миры.

Одним из решений может быть обращение к логике второго порядка[27]. С ее помощью описываются однозначным образом структуры, которые, если они определены аксиомами языка первого порядка, имеют также нестандартные реализации. Натуральные числа, действительные числа, мир множеств подчиняются этому условию. Здесь, однако, начинается еще одна бесконечная глава в дискуссии о том, является ли логика второго порядка, собственно, логикой или нет[28]. Она допускает квантификацию свойств и, следовательно, фактически множеств. Это логика неформальная, использованная теми, кто продемонстрировал результаты о категоричности (Дедекинд для натуральных чисел, Гильберт для действительных чисел, Цермело для теоретико-множественного универсума, причем последний, не неформальным образом, а в поле-

---

[27] По поводу понятий логики см. G. Lolli, *Introduzione alla logica formale*, Bologna, Il Mulino, 1991.

[28] Даже не будем пытаться привести библиографию по этой дискуссии. По поводу ее влияния на философию математики см. S. Shapiro, *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-Order Logic*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1991.

мике с Т. Сколемом[29] как раз по поводу выбора легитимной логики). Однако если уточняется семантика логики второго порядка, то видно, что и ее свойства, и свойство категоричности зависят от того допущения, что множеств имеется столько, сколько предусматривается в теории множеств непредикативной теоремой Кантора о множестве подмножеств. Критики утверждают, что логика второго порядка представляет собой в действительности теорию множеств. Из этого замкнутого круга пока не появилось ни одного заслуживающего доверия и общепризнанного выхода. К проблемам логики вернемся при рассмотрении логицизма.

В заключение перефразируем разочарованного, но упорного платониста, Николаса Гудмэна. В ходе девятнадцатого века, в то время как все двигалось вперед к построению новой математики, обнаружилось отсутствие ее оснований в том смысле, что не было никакого единообразного и систематического представления структур, которые становились объектами изучения. Необходимо отметить, что, когда появилась теория множеств, она сыграла положительную роль, поскольку объясняла, что такое числа и структуры, и в этом не пересекалась с ежедневной работой математиков, которые могли сохранить свой язык и свои специфические техники и, возможно, обогатить их. Теория множеств создавала удобную и элегантную основу, однако вскоре оказалась в затруднительном положении.

С теорией множеств всегда случаются какие-то проблемы. Сначала парадоксы, потом проблемы с неполнотой и пролиферацией моделей. Конечно, можно избежать заявлений по поводу того, что представляют собой структуры, как увидим в структурализме. Тогда, однако, ускользнет онтологический аспект, поскольку это, собственно, задача онтологии – сказать, чем являются абстрактные сущности. Если необходимо все-таки сказать, что они из себя представляют, нужно обращаться к теоретико-множественному языку, так как нет никакого другого аналогичного высоко развитого средства для этих целей. И никто не разовьет его, кроме

[29] G. Lolli, *Da Zermelo a Zermelo*, in *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Bologna, Il Mulino, 1985, cap.VII.

самих математиков. Именно они, возвращаясь к уже поднятому вопросу, говорят, что представляют собой математические объекты, они применяют этот язык, и онтология должна ему соответствовать.

Либеральные платонисты могут попробовать допустить разнообразные универсумы, однако наш физический мир – один, как был когда-то один и мир математики, по крайней мере, мифы рассказывают об этом. Несмотря на все преимущества, происходящие от большей свободы пролиферации теорий, единство и однозначность математики должны, тем не менее, оберегаться, что справедливо и для всей науки в целом. Гудмэн[30] пишет:

> Мне кажется, что математика может достичь расцвета только в том случае, если существует одна концепция, разделяемая всеми в наших целях и интересах, следовательно, если есть согласие по поводу факта, что различные структуры, которые мы изучаем, являются аспектами одной и той же реальности… Это практическая реальность, когда теоремы дают информацию о мире, когда существует только одна наука. Таким образом, философия должна выяснять объективное содержание фактов в рамках более широкой философии науки, обосновывая то, что есть только один мир, и объясняя, как и почему математические объекты, хотя и не принадлежат этому миру, так эффективны в нем. Но эта философия не существует.

Может быть, и хорошо, что не существует, если в этом должна состоять ее функция. Не может быть какой-то другой философии, которая решала бы поставленные проблемы. Не может быть философии, которая диктует, какие структуры правильные, общие для различных миров и исследований.

Философия, предписанная моральными требованиями, есть благая иллюзия, беспочвенные мечтания, *wishful thinking*, однако платонизм, кажется, поддерживается теми, кто разделяет его лишь по причине сильной наивной убежденности в своих собственных субъективных ощущениях (хотя и разделяемых многими). Платонисты заявляют о ясном видении математической реальности, которая им представляется совершенно определенной. Они, в самом деле, имеют ощущение работы с панорамой чисел и фигур, кото-

[30] N.D. Goodman, *Mathematics as an Objective Science*, уже цит.

рые существовали до того, как они начали свои исследования. Они наблюдают их подобно восходу солнца. Именно так. Таким же образом, с той же самой ясностью и впечатлением необходимости люди наблюдали, и до сих пор наблюдают, как солнце восходит, перемещается с востока на запад и заходит. Субъективное восприятие наблюдения чего-либо абсолютно не является гарантией наличия смысла в заявлении, что то, что наблюдается, является истинным или существует.

Платонисты не видят, однако, другие очень человеческие вещи и вступают в противоречие на всех фронтах с принципом объективности. Было уже отмечено, что они не видят (хорошо) доказательства. Далее, не видят, что их заявления имеют пагубные последствия на преподавание. Не соответствует истине то, что люди изучают математику, созерцая структуры, которые объективно попадают в их поле зрения. Те, кто утверждает, что математики умозрительно рассматривают структуры, существовавшие и до того, как их начали исследовать, просто забыли свой первый урок математики и нелегкое освоение этой науки. Без какого-либо образования и подсказки ни один ребенок, никто, рассматривая треугольник, не увидит в нем медианы. Почему нужно соединять вершину с серединой противолежащей стороны? У того же Платона, несмотря на его теорию анамнеза – реминисценции – для познания Идей, был необходим какой-то стимул или подсказка для активирования анамнеза у раба. Непонятно, почему необходима подсказка, если и правда математические объекты существуют и доступны какой-то человеческой способности, кроме памяти. В действительности никто не видит медианы, если только не имеет некоторой проблемы, которая подталкивает его к размышлению о подобной возможности. Представления платонистов призрачны и ложны.

Если бы затем заявлялось, что медианы все-таки там есть, даже если нет никакой проблемы или интереса, которые бы стимулировали нас увидеть их, то нужно поразмышлять над фактом, что линий, кроме медиан, кроме биссектрис, бесконечно много. Если все их нанести, заполнится вся плоскость, которая почернеет и опять не будет видно ничего. Где же тогда прячется эта реальность, когда не предстает перед глазами?

Кроме рассуждений о том, как можно видеть, необходимо объяснить, как можно не видеть.

Та же самая ситуация с прямыми на плоскости справедлива и для теорем. Если захочется сформулировать их все, то они заполнят не только библиотеки, но и все время, и все пространство вселенной. Именно математик делает выбор, доказывая те, которые считает важными, однако критерии выбора могут быть альтернативными в зависимости от видения бытия.

Одним из возможных критериев может быть организационная роль теорем в некоторой теории, их продуктивность в смысле следствий и богатства связей. Паскаль заявлял о выводе более чем четырехсот следствий из своей теоремы о гексаграмме. Это, в частности, включает теорему Паппа, но только на основе *теории*, которая позволяет рассматривать две прямые линии как вырожденный частный случай кривой второго порядка.

Ранее уже отмечалось некоторое пренебрежение к роли языка. Посредством «языка» понимаются имеющиеся знания, более или менее организованные в теории. Так, к примеру, один человек может видеть корень в $x^2 = 2$, а другой – нет. Различие объясняется только различиями в их языке. Бесконечно малые рассматривались долгое время как консистентные сущности, а не только как метод, как, возможно, сказал бы Конн. Они рассеялись, как флогистон, когда теория архимедовых вещественных чисел позволила обходиться без них. Они воскресли, возможно (было бы интересно знать мнение платонистов по этому поводу), когда новая теория дала доказательство их существования в рамках своего последовательного видения.

Другие критерии – эстетические, и они понимаемы, однако в смысле элегантности теории, а не в смысле описания объективной красоты. Слово «элегантность» обычно используется в отношении доказательств. Утверждения, что более важными являются только те теоремы, которые «видятся», а не те, которые до того, как они станут видимыми, выводятся, представляются сомнительными. Вывод и видение часто происходят одновременно[31].

[31] G. Lolli, *Visione e logica nella dimostrazione*, in «Lettera Matematica Pristem», 1995, n. 18, dossier pp. X–XX.

Платонисты не замечают также событий в социальном мире. Например, они гордятся тем, что это самая распространенная философия математики, однако имеются некоторые сомнения на этот счет. Никто не проводил статистических исследований по этому поводу. Возможно, это справедливо для математиков, которые высказывали свое мнение, но большинство не высказывалось. Может быть, именно так обстоят дела среди людей, занимающихся чистой абстрактной математикой, однако трудно предположить, что математик, изучающий алгоритмы, был бы платонистом. Предположим, чтобы объяснить эту идею, что он или она ищет алгоритм эффективной аппроксимации корней $x^2 = 2$. Для него совсем не важно знать, существует ли корень из 2 и что он из себя представляет, а важно только, что существуют уже методы приближенных вычислений отношения между диагональю и стороной квадрата и что он хочет их усовершенствовать в смысле скорости приближения. Ему совсем не интересно знать, что представляют собой, в общем, действительные числа, за исключением того, что алгоритмы должны генерировать последовательности рациональных чисел, последовательности, внутренне сходящиеся, и что кто-то их идентифицирует с последовательностями рациональных чисел (их классами эквивалентности). Специалист по численному анализу может верить только в рациональные числа, поскольку видит только их.

Если создатель алгоритмов захотел бы стать платонистом, то должен был бы заявить, что предписанный им процесс существует как абстрактная сущность и что алгоритмы, в целом, существуют как абстрактные сущности. Но алгоритмы не являются ни функцией, вычисляемой с их помощью, ни текстом программы. Наилучший способ представить их – сказать, что они являются процессами, управляемыми стратегиями. Мир должен быть населен не только множествами, но и процессами? Получается, что платонист должен быть большим плюралистом и сражаться за важность и признание того расширения реальности, которое обусловлено этими новыми сущностями. При этом встает вопрос: процесс – это бытие или становление?

С другой стороны, В. Тейт (William Tait) утверждает, что платоновский мир населен также доказательствами[32]. Открыв однажды дорогу высказываниям о существовании, практически невозможно ограничить движение в этом направлении.

Те, кто заявляет, что видит математическую реальность, находятся чаще всего среди творческих математиков, работающих в традиционных областях алгебры, геометрии, теории чисел. Они рассказывают о замечательных актах интуитивного прозрения у себя и у своих гениальных коллег, однако на поверку их результаты оказываются скорее актами творчества, а не открытия. Открыть что-либо может случайно любой исследователь и вообще кто угодно. В математике же случайные открытия, в отличие от естественных наук, не происходят никогда. Это различие никогда не отмечалось теми, кто ищет аналогии между объектами или методами математики и естествознания. Устная традиция присваивает разным математикам заявления о том, что когда они разрабатывают новую математику, то переживают это как изобретательство, а когда знакомятся с результатами других, ощущают, что все проистекает от естественной необходимости[33]. Однако, говоря таким образом, оказывают плохую услугу математикам, поскольку математика представляется достоянием высших или привилегированных существ. Истинная работа нормальных математиков требует в своей нормальности очень большого труда и, в то же время, она богата необычайными и чарующими выводами.

Чем гениальнее математики, тем более похожи они в некоторых аспектах на тех чудесных людей, которые способны делать в уме сложнейшие вычисления, на тех настоящих, которые, вообще говоря, страдали аутизмом, а не на тех, кто на основе исключительной памяти разработал подходящие методы и алгоритмы. Они не двигаются вперед прерывистыми шагами, не делают расчетов. Их посещает озарение. Они видят знаки и образы, которые не могут описать словами. Вообще, в том числе и у нормальных людей,

---

[32] W.W. Tait, *Truth and proof: the platonism of mathematics* (1986), in W.D. Hart, *The philosophy of mathematics*, уже цит., pp. 142–167.

[33] Увидим дальше заявление отличающееся, но аналогичное, от Р. Хэмминга (Richard Hamming).

математические способности сочетаются с прекрасным пространственным воображением. Гении-аутисты доводят до предела и это качество. Их мышление, в частности, образное, они видят числа, и каждое число персонализировано. Эти числа не представляются точками на прямой, а распределены на линии, которая разворачивается в цвете завитками и изгибами. Чем не пейзаж? Каждое число представляется системой связей, и почти всегда видно, что оно состоит из блоков, которые представляют собой его простые делители (даже если субъект не знает их определения).

Многое открывается в нейропсихологических исследованиях[34]. Платонисты хотели бы найти в них подтверждение своему описанию математического открытия как видения и посещения некоторого пейзажа, но нейрофизиологические наблюдения ведут в другую сторону. Они не оставляют никакой роли ни для теоретико-множественной редукции, ни для размещения числа в каком-либо ином измерении реальности. Они служат, прежде всего, для осознания того, что понятие числа является врожденным и не зависит от слова, и что нейрофизиологический механизм этого понятия в определенной степени однотипен такому же механизму у животных, которые не имеют языка. Это замечание имеет большую важность, но не является аргументом в пользу платонизма. Напротив, оно лишь указывает, что мозг способен производить на базе аналогий ответы, необходимые для элементарной математической активности. Ничего не говорится по поводу фундаментальной связи с языком, которой нет, по крайней мере, нет у животных, и это не проблема зверей, а проблема людей.

Мозг способен производить то, что не дает покоя философам еще больше, чем математические объекты, а именно – сознание. Аналогия между этими двумя феноменами весьма близкая. В обоих случаях нейрофизиологические исследования на данный момент лишь выявляют, каким образом, как в случае числовых манипуляций, так и в случае определенного состояния сознания или

[34] См. S. Dehaene, *The Number Sense*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1997; итал. перевод *Il pallino della matematica*, Milano, Mondadori, 2000; см. в особенности гл. 6 и обзор G. Lolli, *La mente, il cervello, la matematica*, in Bolletino UMI, 3-A, 2000, n. 2, pp. 1–26.

субъективного переживания необычных явлений, проявляется интеграция нескольких процессов в нервной системе, которые сильно взаимодействуют между собой и слабее с другими. В обоих случаях есть те, кто утверждает, что физические нюансы функционирования мозга не могут дать полного объяснения явления и что существует требующий анализа скачок между двумя уровнями реальности. Вновь находим в этой связи натуралистическим образом обновленные варианты каузальной теории или картезианского дуализма. Продолжаются попытки расположить снаружи место опыта, относящегося к сознанию, к примеру, зрительный опыт – в пространство, где находятся тела, о видении которых свидетельствует сознание[35]. Позиция платониста в отношении сущностей, постигаемых интуицией, ничем не отличается от этого. В обоих случаях можно присоединиться к замечанию, что «отражением человеческого высокомерия является тот факт, что целые философские системы были построены на основе субъективной феноменологии»[36].

---

[35] M. Velman, *Understanding Consciousness*, London, Routledge, 2000.

[36] G.M. Edelman, G. Tononi, *Consciousness – How Matter becomes Imagination*, London, Penguin Books, 2000. Не цитируем другие источники из длинного списка свежей литературы о сознании.

4. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ

Это трудный термин, обозначающий сложную философию, которую не будем обсуждать в деталях, поскольку нельзя даже сказать, что она является, собственно говоря, философией математики. В данном контексте она означает размышление, которое берет начало и вдохновение из философии Э. Гуссерля (1859–1938). Гуссерль был математиком, учеником К. Вейерштрасса. Он написал *«Философию арифметики»*, был собеседником Кантора и Фреге. Затем посвятил себя построению своей феноменологии. В отношении математики феноменология не является завершенной философией и не очень известна[1]. Интерес, который сегодня проявляется к этому течению, обусловлен тем обстоятельством, что сам Гёдель во второй половине своей жизни размышлял, исследовал и многократно призывал изучать философию Гуссерля. Учитывая этот факт и другие совпадения, нужно классифицировать позицию Гёделя, в действительности, не как платонизм, а как феноменологию[2].

Еще раньше Гёделя испытал влияние Гуссерля Г. Вейль. Он учился в Гёттингене, когда Гуссерль там преподавал. Они поддерживали отношения и обсуждали публикацию *Das Kontinuum*, 1918, которую Гуссерль очень ценил. Он одобрял обращение математика к логико-математической интуиции[3]. Видение Вейля настолько индивидуально и многогранно, что у нас еще будет возможность

[1] Среди математиков и философов математики, испытавших влияние Гуссерля в первой половине двадцатого столетия, были О. Беккер (O. Becker) и Ф. Кауфман (F. Kaufmann). Смотри, к примеру, O. Becker, *Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*, in «Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forshung», 8, 1927, pp. 439–809 и *Beiträge zur phänomenologische Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen, ibidem*, 6, 1923, pp. 385–560; F. Kaufmann, *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*, Wien, Franz Deuticke, 1930.

[2] R. Tieszen, *Gödel's path from the incompleteness theorems (1931) to phenomenology (1961)*, in The Bulletin of Symbolic Logic, 4, 1998, n. 2, pp. 181–203.

[3] D. van Dalen, *Four letters of E. Husserl to H. Weyl*, in «Husserl Studies», 1, 1984, pp. 1–12.

обсудить его неоднократно, в частности, по поводу конструктивизма, и в этой связи поговорим также о Гуссерле.

Еще одним известным современным последователем и пропагандистом концепции Гуссерля был Джан-Карло Рота[4].

Основные идеи и ключевые слова феноменологии можно представить следующим образом:

- человеческое познание, включая математическое, выказывает и характеризуется *интенциональностью*, что означает постоянную направленность познания на что-то, присутствие интереса к чему-то, подталкивающего к изучению; сознание также есть всегда сознание чего-либо;
- когнитивные акты являются перспективными и не могут никогда собрать воедино все перспективы объекта или темы; никогда нельзя получить какой-то опыт в одном единственном акте;
- разум устанавливает категории; когнитивные акты в каждое мгновенье всегда относятся к определенным категориям объектов, и эти категории можно назвать идеями или *сущностями*;
- сущности выражают то, что дано в опыте на определенной стадии познания; они являются всеобщими, но имеют связи и ограничения, поэтому не каждая вещь может быть их примером; мы знаем, что определенные вещи являются примерами некоторой сущности, а другие – нет; в этом смысле можно сказать, что
- мы имеем некоторое *усмотрение* категории на каждой ступени познания, которое может становиться со временем более отчетливым в результате различных уточнений;
- мы никогда не имеем полного или законченного усмотрения какой-либо сущности; работа по уточнению является всегда актуальной и необходимой; это не означает, что сущности, которые мы знаем, насколько уж знаем или схватываем их, не являются полезными для нашей практики;
- «схватывать категории» понимается так же, как «интуитивно понимать сущности»; используется слово «интуиция», поскольку сущность при размышлении о нашем опыте дана нам непосредственным образом, как нечто данное, предшествующее нашему анализу или сравнению ее с другими сущностями, предшествующее также нашему знанию о том, существует или нет пример этой сущности.

---

[4] G.-C. Rota, *Discrete Thoughts*, Basel, Birkhäuser, 1986; итал. перевод *Pensieri discreti*, Milano, Garzanti, 1993, cap. 12, 13, 20.

Гуссерль отличал науку о фактах от науки о сущностях. Феноменология не является естественной наукой, поскольку сущности не являются ни объектами, ни фактами. Тем не менее, наука идей возможна, феноменология и есть эта наука, которая для своей реализации не должна слепо подражать естествознанию. Гуссерль противостоял точке зрения, которую называл натуралистической, которая «так затрудняет для всех нас рассмотрение «сущностей» или «идей» или, скорее (начиная с того момента, как мы это делаем, поскольку мы, так сказать, их рассматриваем постоянно), осложняет принятие допущения с нашей стороны, что они имеют особое значение, которое принадлежит им, вместо абсурдных попыток их натурализовать. Интуитивное понимание сущностей не скрывает бóльших трудностей или «мистических» секретов, чем того требует восприятие… Но не нужно ни в каком случае скоропалительно, для «удобства произношения», идентифицировать «вещи» с «эмпирическими фактами». Это означало бы закрывать глаза перед идеями, которые, в конце концов, в значительной степени даются нам абсолютным образом в мгновенном интуитивном познавательном акте»[5].

На первый взгляд, математики все это совершенно не касается, однако не нужно недооценивать эмоциональное влияние того факта, что нашелся современный философ, который утверждает, что возможна наука о сущностях. Достаточно заменить «сущности» на «математические объекты», и мы увидим перспективу, в которой математика может быть вновь возведена на трон рациональности.

Гуссерль критиковал платонизм и математический реализм в целом как наивные течения, поскольку они располагают сущности вне любого возможного опыта, рассматривают их как вещи в себе, в то время как мы намеренно ориентированы на сущности и имеем к ним доступ благодаря интенциональности.

На основе этого краткого терминологического введения, с учетом многократных советов Гёделя изучать Гуссерля, приходит понимание того смысла, который следует придавать его рассуждениям о рациональном восприятии. Нужно вновь обратиться к вышеприведенным цитатам уже в свете гуссерлианского подхода. В действительности, два уровня размышлений проясняют друг друга. Размышления Гёделя можно рассматривать как попытку прояснить и обосновать отдельные опорные точки феноменологии: рациональное восприятие, посредством которого схватываем наибо-

[5] Цитировано по R. Tieszen, *Gödel's path*, уже цит.

лее общие математические идеи и их отношения, является аналогией чувственной интуиции; и на рациональное восприятие, и на интуицию накладываются определенные связи и ограничения; в обоих случаях возможно развитие заблуждений; оба демонстрируют определенный вид неисчерпаемости.

Еще одна гуссерлианская тема встречается при обсуждении Гёделем проблемы континуума. По этому поводу он утверждал, что возможно некоторое удовлетворительное основание теории множеств Кантора, если мы готовы допустить, что математические объекты существуют независимо от наших построений и от нашей способности обладать интуицией каждого из них в отдельности. Требуется только, чтобы основная итеративная идея множества (или лучше сказать, концепция повторения концепции «множества чего-то», которая приводит к общей иерархии множеств) была бы достаточно ясной, чтобы можно было признать корректность и истинность аксиом, которые к ней относятся. Нет необходимости иметь прямую интуицию континуума, чтобы разрешить континуум-гипотезу, может оказаться вполне достаточным лишь адекватное понимание (схватывание) совокупной иерархии. В конечном счете требуется только, чтобы «основные математические идеи» были бы схвачены достаточно ясно, и тогда не нужна интуиция каждой индивидуальной реализации рассматриваемой сущности для прояснения понимания самой сущности.

Гёдель, посредством явной ссылки на Гуссерля, утверждает, что «уяснение смысла состоит в более пристальном концентрировании на рассматриваемых идеях, управляя соответствующим образом вниманием, то есть, обращая его на акты, которые совершаем при рассмотрении этих идей, на нашу способность выполнять эти акты […] Феноменология представляет собой процедуру или технику, которая должна произвести в нас некое новое состояние понимания, в котором мы сможем четко описать фундаментальные идеи, которые мы используем в нашем мышлении, или уловить другие идеи, до сих пор не осознанные»[6].

Сильные аксиомы бесконечности, в частности, представляют собой ряд аксиом, которые требуют многочисленных независимых рациональных восприятий в направлении уяснения значения основной идеи множества. Аксиомы далеко не очевидны с самого начала,

[6] Цит. по R. Tieszen, *Gödel's path*, уже цит.

однако становятся таковыми в ходе развития математики. Например, чтобы понять только первую аксиому бесконечности, необходимо сначала разработать до определенного уровня теорию множеств.

Дж.-К. Рота не думал о множествах, когда говорил о математике. Он сделал значительный вклад в финитные геометрии и дискретную математику. Рота написал мало о Гуссерле, ограничиваясь попытками прояснить (не в смысле определений, поскольку в философии не существует канонов определений) некоторые термины феноменологии, которые могли бы иметь отношение к основаниям математики. Он жестко критиковал философов за вольное обращение с этой наукой.

Один из этих терминов – *Fundierung*[7] – имеет большое значение в Третьем Логическом исследовании Гуссерля[8]. Рота предлагает несколько иллюстративных примеров этого термина. Один пример касается отношения между прочитанным текстом и его смыслом. Понимание смысла текста зависит от процесса его чтения, но следующий за чтением «выход в мир деятельности» будет определяться не самим текстом, а его смыслом. Тревожная перспектива для сторонников фактической науки, поскольку она отмечает онтологический приоритет смысла по отношению к тексту. Нет уверенности, что Рота это проделывал, но было бы интересно применить эту идею к текстам доказательств.

Другой пример показывает, что отношение *Fundierung* существует между функцией игральной карты в различных играх и игральной картой в физическом смысле. Третий пример, очень близкий, – отношение между «видеть» и «смотреть». Процесс распознавания образов (англ. *pattern recognition*) кажется несовместимым с любыми физиологическими объяснениями. Эта трудность драматически ощущается в науке об искусственном интеллекте, создание которого Рота считал практически обреченным, именно из-за неустановленных и неустраненных трудностей такого типа. Во всех рассмотренных случаях выявляется функция, которая не является ни существующей, ни несуществующей, а просто заложенной в основание. Только эта функция значима, в то время как фактическая действительность (физическая основа) лишь постоянно

---

[7] Фундирование, закладка фундамента, основания (нем. – прим. переводчика).

[8] E. Husserl, *Logische Untersuchungen*, Halle, M. Niemeyer, 1922; итал. перевод *Ricerche logiche*, под ред. G. Piana, Milano, Il Saggiatore, 1988.

способствует функции стать значимой. История западной философии отмечена попытками сведения отношения *Fundierung* к чему-либо, что удовлетворило бы потребность в некоем удостоверении существования. Трудно представить, что нематериальные функции были бы важнее физических объектов или нейронов головного мозга, однако это происходит лишь потому, что мы идентифицируем реальность с материальностью. Теория множеств предоставила мощный редукционистский инструмент, который, однако, не оправдывает ожиданий в случаях, подобных рассмотренным.

Рота подчеркивает, что для Гуссерля существование является существованием формальным, поскольку оно отлично от материального. Термин «формальный» у Гуссерля достаточно близок к тому, что понимается обычно под «объективный, но не вещественный». По мнению Сартра, чувство освобождения, которое возникает благодаря феноменологии, состоит в том, что «познание и восприятие не должны более рассматриваться как нечто, подобное проглатыванию пищи»[9]. Естественно, использование термина «формальный» не означает, что мы вторгаемся на территорию формальной логики, которая, наоборот, подпадает под материальный и редукционистский грех теории множеств. В действительности, Гуссерль не только предвещал, но и занимался реформой логики. Он предлагал некоторые связки, которые математическая логика игнорировала, и проверял их формализацию: временные соотношения, «А отсутствует в В», «А уже присутствует в В», «А предваряет В», «А есть перспектива В»[10].

Этот путь ведет к разработке генетической феноменологии, ориентированной на конструирование, а не на разборку идеальных объектов, включая математические, которые подчиняются эйдетическим законам и описаниям, ожидающим еще своего открытия. Эйдетические описания представляют собой перспективные видения. Только подвергая объект эйдетическим вариациям, можно проявить его сущность. Эта тема также, как мы уже видели, была вновь предложена Гёделем.

---

[9] Цитировано из G.-C. Rota, *Pensieri discreti*, уже цит., p. 108. Фраза взята из J.-P. Sartre, *Che cos'è la letteratura*, Milano, Il Saggiatore, 1963.

[10] G.-C. Rota, *Pensieri discreti*, уже цит., cap. 13, *Husserl e la riforma della logica.*

5. НАТУРАЛИЗМ

В размышлениях Гёделя находят точки опоры и ценные указания не только рассмотренные платонизм и феноменология, но и еще одно направление философии математики.

При обсуждении новых аксиом теории множеств Гёдель отмечал[1]:

> Ранее уже отмечалось, что, кроме математической интуиции, существует еще один критерий (хотя, только вероятный) истинности математических аксиом, а именно, их полезность в математике и, стоит возможно добавить, также и в физике. Этот критерий, однако, хотя и может стать в будущем решающим, не может еще непосредственно применяться к теоретико-множественным аксиомам (к тем, например, которые относятся к большим кардиналам), поскольку практически ничего не известно по поводу их значения для других разделов. Самый простой случай применения обсуждаемого критерия – когда некоторая аксиома теории множеств имеет численные следствия, проверяемые вычислением для любого данного целого числа. На основе того, однако, что известно сегодня, невозможно двигаться в этом направлении, чтобы обосновать с достаточной степенью вероятности истинность любой новой аксиомы теории множеств.

П. Мэдди попыталась разработать натуралистическую философию, опираясь на это замечание Гёделя.

Рассматривается теория множеств с ее проблемами, относящимися к основаниям математики, которые тянутся от аксиомы выбора к непредикативным определениям и к новым аксиомам бесконечности[2]. Они, по мнению Мэдди[3],

---

[1] K. Gödel, *What is Cantor's continuum problem?*, уже цит.; отрывок является непосредственным продолжением вышеприведенной цитаты, с. 120.

[2] По истории теории множеств см. G. Lolli, *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, уже цит. и *Dagli insiemi ai numeri*, уже цит., P. I; непредикативные определения обсуждаются ниже, в разделе логицизма.

[3] P. Maddy, *How to be a naturalist about mathematics*, уже цит. Смотри также P. Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1997.

являются сегодня признанными инструментами современной математической практики, в то время как философские аспекты, относящиеся к ним, остаются дискуссионными. Кажется, что философское заключение мотивируется не присущей этой науке аргументацией, а соображениями по поводу того, что можно было бы назвать, ввиду отсутствия лучшего термина, математической полезностью…

Как мы должны реагировать на подобную ситуацию? Можно настаивать на том, что математическое сообщество слишком поспешно и без философской поддержки приняло на вооружение эти спорные методы. Мое предложение представляет собой полностью противоположную позицию: принимаем как данное то, что эти методы признаны, что означает, что их принятие не должно зависеть от философии. Математический натурализм, как я его понимаю, есть не что иное, как обобщение этого вывода, то есть математическая методология может корректно оцениваться или критиковаться только на математической основе, а не на философской (или какой-либо другой нематематической основе). Специфические примеры математической полезности, которые играли решающую роль в дискуссиях по поводу непредикативности и аксиомы выбора, являются примерами того, что я подразумеваю, когда говорю о «математической основе».

Мэдди описывает натурализм как «метафилософский принцип, который устанавливает корректные отношения между философией и методологией, между философским теоретизированием по поводу некоторой деятельности и методологическими решениями относительно того, как эта деятельность должна бы производиться». Натурализм обязан своим происхождением логику и философу У. Куайну: «Натурализм… рассматривает естественную науку как исследование реальности, которое может быть подвержено ошибкам, может корректироваться, но не должно давать отчет никакому высшему суду и не нуждается в других обоснованиях, кроме наблюдения и гипотетико-дедуктивного метода»[4].

В истории философии периодически делаются заявления о том, что ей больше нечего сказать. Это такой способ оставить за собой последнее философское слово. Подобное заявление имело место при обосновании неопозитивизма Витгенштейном и Карнапом. Натурализм принадлежит этому апокалипсическому

[4] W.O. Quine, *Five milestones of empiricism* (1975), in *Theories and Things*, Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1981, pp. 62–72.

крылу, но, несмотря на это, широко распространен в философских кругах (и, конечно, обсуждаем[5], поскольку подпитывает философию методом «перекрестного самодопроса»), по крайней мере, как предостережение философии в отношении ее претензий по поводу контроля над науками. Существуют, как минимум, две версии натурализма: слабая и сильная. Слабая версия состоит в том, что некоторый специфический раздел философских исследований (к примеру, философия разума) становится методологией научных дисциплин, заинтересованных в этом разделе (к примеру, когнитивные науки). С точки зрения сильной версии, традиционные темы философских исследований полностью абсорбированы «настоящими» науками, которые их и рассматривают.

Натурализм Мэдди, однако, отличается по духу от исходного подхода Куайна по нескольким позициям. Прежде всего, изложение Мэдди плавно переходит от научного метода, к которому обращается Куайн, к прагматическим интересам математиков. Отметим и то, что Мэдди часто заявляет о намерении ссылаться на науку, однако также часто ссылается на математическое сообщество. Она говорит и о желании выявить рациональность, лежащую в основании практики. Подобная рациональность кажется лишь некоторым обоснованием a posteriori, которое выдает сделанный прежде выбор за достойный результат.

Мэдди много внимания уделяет рассмотрению случая аксиомы конструируемости $V=L$. Эта аксиома была сформулирована Гёделем вместе с внутренней моделью теории множеств, обогащенной данной аксиомой. В этой модели имеют силу аксиома выбора, континуум-гипотеза и другие высказывания, неразрешимые иным образом. Аксиома утверждает, что универсум соответствует этой модели L. В L иерархия множеств содержит не все возможные множества, а только те, которые определяются в предикативной манере по цепочке итераций (теоретико-множественные модели структурированы как иерархии, которые опираются на последовательность трансфинитных ординалов). Мэдди относит гипотезу принятия такой аксиомы к тради-

---

[5] *Introduzione al naturalismo filosofico contemporaneo*, под ред. E. Agazzi, N. Vassallo, Milano, Angeli, 1998.

ции определимости, которая стремится признавать только определимые математические объекты. Она противостоит комбинаторной традиции, которая рассматривает бесконечные объекты как финитные и подверженные тем же самым операциям, естественно усиленным или идеально повторенным бесконечное число раз. Используемая терминология принадлежит П. Бернайсу. Комбинаториализм, определенный таким образом, порождает платонистическую тенденцию. В процессе исторического развития математики и, в первую очередь, Анализа, начиная с XVIII столетия в ходе дискуссии об определении функции выявилась превалирующая идея о том, что внимание исследователя должно быть сосредоточено не только на определимых функциях. Однако выводы сторонников комбинаторной традиции слишком поспешны. В действительности же по мере того, как старые определения перестали отвечать новым областям, были предложены другие определяющие принципы, от рядов до двойных рядов, до их трансфинитной итерации, как в иерархии Бэра в конце XIX века.

У аксиомы конструируемости есть соперницы – другие аксиомы, которые утверждают иное и имеют другие следствия, как, например, аксиомы о больших кардиналах, начиная с измеримых и далее. Как и все, Мэдди отмечает, что превалирует выбор, отличный от $V=L$, интерпретируя это как методологический или философский выбор, однако на практике это часто лишь выбор тех, кто хочет оправдать собственную работу. По поводу $V=L$ специалист в теории множеств знает почти все. Другие математики просто должны научиться использовать $V=L$. Новые же аксиомы являются актуальными объектами проводимых исследований.

Для того чтобы найти некоторую рациональность в выборе, противоположном к $V=L$, Мэдди предлагает два методологических принципа, или правила, которые вдохновили бы математиков. Первое – унификация, то есть стремление ограничивать размножение альтернативных теорий по поводу неразрешимых высказываний, осуществляя ясные выборы новых дополнительных аксиом. Второе – императив максимизации. Как должен относиться математик к этому моральному долгу максимизации и зачем он нужен – не совсем ясно, кажется, все это лежит за пределами круга его рабочих обязанностей. Если речь идет о максимизации теорем, то

V=*L* является отличным кандидатом, поскольку разрешает элегантным и содержательным образом многие вопросы.

Мэдди подхватывает канторовский девиз о свободной математике, без каких бы то ни было ограничений, и такой подход может также сегодня допускать максимизацию теорий в противовес принципу унификации. Она же утверждает, что специалист по теории множеств хочет максимизировать количество множеств, существование которых можно доказать. Если это верно, то накладывается условие, что на каждой стадии образования универсума все возможные на этой стадии множества формируются на ней. Предикативная аксиома *V*=*L* не соблюдает это условие.

Оправдание императива максимизации коренится, однако, в точке зрения, согласно которой теория множеств служит в качестве основания математики и, следовательно, должна быть в состоянии строить конструкции (теоретико-множественные аналоги) всего того, с чем имеет дело математика. Иного обоснования не видно, за исключением, возможно, некоторых версий платонизма, которые, однако, не задумывались с точки зрения подобного натурализмом. Если теория множеств задается подобной целью и чувствует ответственность за основания, тогда некоторый принцип, который не сводился бы к существованию, был бы, в действительности, более разумным. Однако не все математики поддерживают эту идею, даже среди тех, кто работает в области теории множеств и кто является скорее математиком, чем логиком. В любом случае кажется, что этот выбор не порожден внутренней методологией теории, а мотивирован перспективой обоснования математики, которая исторически оправданна.

Кроме того, Д. Мартин (Donald A. Martin), как адвокат дьявола, коварно нашел пример одного типа множеств, который гарантируется *V*=*L*, а не аксиомами-соперницами, которые, в общем, являются более мощными. Для нейтрализации этого контрпримера Мэдди должна изворачиваться посредством некоторого специального определения, чрезвычайно ненатурального, касающегося расширения одной теории по отношению к другой. Это определение вовлекает тонкие и сложные особенности внутренних моделей этих теорий (так же, как и пример Мартина). Мы не будем здесь углубляться в подобные нюансы и обсуждать, насколько все это удалось или нет. В данном контексте кажется более важным отметить, что, в итоге, требование Мэдди по поводу использования только рациональных и внутренних методологических критериев для развития какой-либо научной дисциплины остается сомнительным и требующим дальнейшего обсуждения.

В отношении проблемы определимости нельзя не отметить один факт, оставленный Мэдди без внимания и имеющий отношение к затруднениям, связанным с принятием аксиомы $V=L$. Вероятно, математики ее не приняли или не любят именно потому, что она основана на концепции определимости и для своего применения требует логического умения пользоваться техникой предикативного определения, которое математики не хотят включать в свой багаж знаний.

Это очень любопытно и характеризует важный аспект математики двадцатого века. С одной стороны, стараниями Гёделя определимость окончательно вошла в математику[6], с другой стороны, математики, которые два столетия преследовали ее мираж, оказались сегодня в ситуации нежелания и неумения это использовать по причине ее лингвистической природы, которая, отчасти, все еще является чуждой их менталитету.

Отдать принятие решений ученым не представляется, следовательно, тем же самым, что оставить эту функцию за наукой. Оправдывая свой выбор утилитарностью, ученые могут испытывать влияние культурных и социальных факторов, профессиональных интересов, практических компромиссов и, как говорится сегодня, сделок, что может привести к оценке натурализма как субъективистской и релятивистской философии[7]. Этим не отрицается, а, наоборот, возможно, и подтверждается то, что научный метод не представляет собой ничего большего, чем подобная принятая социальная практика. Такая нехитрая уловка является, вероятно, од-

---

[6] См. G. Lolli, *Definability before and after Gödel*, in *Changing Images in Mathematics*, под ред. U. Bottazzini, A. Dahan Dalmedico, London, Routledge, 2001, pp. 207–221 и также G. Lolli, *Da Zermelo a Zermelo*, уже цит.

[7] По поводу постмодернистского релятивизма см. G. Lolli, *Beffe, scienziati e stregoni*, уже цит.

ной из причин успеха релятивизма или, по крайней мере, интереса, с которым он рассматривается в рамках эмпиристского подхода, обсуждаемого далее.

Четкое различие между математиками, с одной стороны, и философами, занимающимися предписаниями, с другой стороны, на практике может быть не столь явным. В процессе осуществления своих методологических выборов математики могут руководствоваться принципами, которые несводимы только к чистому развитию математики, так же как философы могут учитывать уроки практики.

Напомним, к примеру, что Вейль был сторонником предикативизма, то есть методологического направления, обреченного, по мнению Мэдди, на неудачу. Он поддерживал этот выбор не по поверхностным философским соображениям, а обосновывал его с привлечением, можно сказать, одной из форм натурализма (в дальнейшем рассмотрим и другую мотивацию)[8].

> Гёдель со всей своей верой в трансцендентальную логику любит думать, что наша логическая оптика лишь чуть-чуть расфокусирована и с помощью некоторой настройки мы сможем видеть четко, и тогда все будут согласны, что мы все видим правильно. Но кто не разделяет эту веру, остается смущенным высокой степенью неявной произвольности в такой системе, как Z, или даже в системе Гильберта[9]. Насколько более убедительными и близкими к фактам являются эвристические аргументы и последующие системные конструкции, которые имеют место в общей теории относительности Эйнштейна или в квантовой механике Гейзенберга–Шредингера! Настоящая реалистическая математика должна бы создаваться в соответствии с физикой как направление теоретического конструирования реального мира и придерживаться в отношении гипотетических расширений своих оснований такого же умеренного и осмотрительного подхода, который присущ физике.

---

[8] H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, Prinseton Univ. Press, 1949; итал. перевод *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*, Torino, Boringhieri, 1967, p. 289. Книга представляет собой расширенное издание *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, München, Leibniz Verlag, 1926.

[9] Z представляет собой систему аксиом Цермело для теории множеств; система Гильберта представляет собой систему арифметики высшего порядка, к которой Гильберт хотел применить свою теорию доказательства [прим. автора].

Напомним знаменитое пари, заключенное между Вейлем и Д. Пойа (George Polya) в 1918 году[10]. Вейль выиграл бы, если бы в течение двадцати лет начиная с момента спора Пойа согласился бы отказаться от теоремы, согласно которой каждое бесконечное множество имеет счетное подмножество (что требует аксиому выбора) и от положения, что каждое ограниченное множество действительных чисел имеет верхний предел (непредикативный). В 1940 году все судьи, кроме Гёделя, все еще не убежденного в том, что идея множества прояснена для того, чтобы он мог высказать свою точку зрения, сошлись во мнении, что Пойа выиграл.

Вышеприведенное видение Вейля предваряет, с учетом всех прочих мотивировок, позицию Куайна, которую можно рассматривать как еще одну версию натурализма, которую он всегда поддерживал в соответствии со своей философией и независимо от явного указания термина «натурализм». Такая позиция научного реализма известна как «аргумент обязательности» и представлена под маркой Куайн–Патнэм.

Для эмпириста Куайна смыслом и целью науки (в которой естественно-научные и философские исследования рассматриваются совместно как неразделимые части одного целого) является обоснование и успешное предсказание чувственного опыта. Знание, встроенное в науку, представляет собой сеть или паутину без швов (англ. *seamless web*), которая лишь окаймляющей бахромой в некоторых местах касается реального мира. Эта конструкция может рассматриваться и изучаться только комплексно. Никакая часть не может быть отсоединена, рассмотрена отдельно и не может основываться на чем-то отличном от общей способности объяснять опыт. Эмпиризм Куайна является *холистским*. Математика является частью структуры познания так же, как и наиболее теоретические разделы науки. Невозможно провести четкую разграничительную линию между математикой и теоретическими науками, на которые она оказывает влияние и через которые принимает участие в процессе познания. Она далека от периферии, которая контактирует с реальностью, однако принимается из-за того зна-

[10] Рассказано в Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy*, New York, Humanities Press, 1974.

чительного вклада, который делает в холистскую систему науки. Разделы математики, которые не играют роли, даже косвенной, в процессе получения выводного знания тех областей сети, которые соприкасаются с опытом, не имеют ни значения, ни смысла. Разделы же, которые эту роль играют, принимаются, и объекты, о которых говорят, существуют.

Принцип обязательности[11] достаточно ясный и четкий. Раз нельзя заниматься наукой без действительных чисел, следовательно, они существуют. Термин «существование» имеет недифференцированное значение. Тела, электроны, числа – все они существуют одним и тем же образом, существуют в научном смысле. Математика верна, но верна та математика, которая используется в науке, и верна именно по этой причине, а не потому, как она разработана или что утверждает.

Последовательный натуралист не подвергает анализу понятия существования или необходимости и не превращает в проблему применимость математики. Она является фактом, более того, решающим критерием ее принятия. Последовательный натуралист не дает также методологических указаний математике. Если делает онтологическое заявление, то только для того, чтобы признать существование абстрактных понятий, которые необходимы, и строго применить бритву Оккама для прочих. Но такое высказывание не имеет эффекта и не может его иметь. Куайн сознает, что некоторые абстрактные разделы математики необходимы для улучшения теории, ее углубления и упрощения, в определенном смысле, и, кажется, готов принять их. Высказывается даже по поводу аксиомы конструируемости, что она могла бы быть принята, поскольку упрощает и, следовательно, вероятно, улучшает применимость Анализа и теории множеств.

Подобное указание, кажется, продиктовано общей верой в способность математиков оценивать и контролировать конструкцию своих теорий, однако противоречит, как было видно, позиции другого натурализма, предлагающего пролагать путь посредством выборов цехового математического сообщества. Если этот натура-

---

[11] H. Putnam, *Philosophy of Logic*, New York, Harper Torchbooks, 1971. По поводу принципа обязательности смотри специальный выпуск журнала Philosophia Mathematica, 5, 1997, n. 3, посвященный этой теме.

лизм понимается как некоторая данная ему концессия, то все равно есть определенная неувязка. Действительно, критерий, используемый математиками и санкционированный Мэдди в отношении оценки эффективности или приемлемости новой математики, не соответствует критерию полезности в науке и, прежде всего, в ее удаленных оконечных разделах, которые соприкасаются с миром. В этом Мэдди неверна также и Гёделю, который в качестве критерия полезности для новых аксиом, «буде появляшися», указывал также физику. Развитие математики имеет обособленный характер, она не вкладывается как часть в глобальную холистскую науку.

Речь идет не только о методологических выборах, но также о принятии отдельных результатов и их встраивании в структуру математики, которое отвечает специфическим критериям, отличающимся от используемых в других научных дисциплинах. Практика проверки утверждений в математике особенная, этот разрыв всегда ощущается очень остро, вплоть до поднятия вопроса, является ли математика наукой, или нет. Эта констатация играет против холизма и выступает за автономность математики.

Математика, возможно, требует холистского подхода к себе самой, но не точно такого, как в отношении всех других наук. Глобальный холизм, напротив, встраивает лишь часть математики в сеть наук и при этом навязывает ей критерии, отличающиеся от ее собственных. Холизм, даже учитывая большую или меньшую удаленность узлов сети от контакта с миром, не может избежать, пусть и минимальной, дозы эмпиризма в отношении всех отделов науки. В действительности эмпиризм представляет собой одну из возможных философских позиций (как увидим в дальнейшем, она тоже имеет свои проблемы), которая однако не идентифицируется с натурализмом.

Ответы натуралистов-холистов на эти замечания по поводу математики представляются весьма слабыми. С одной стороны, они вновь отправляют к далеким историческим первопричинам, укоренившимся в человеческой практике, в некоторых базовых дисциплинах типа геометрии и арифметики. С другой стороны, твердят, что, используя критерии внутренние, далекие от эксперимента, которые не сопоставляются с критериями других наук, математики делают доброе дело для всей науки, способствуя ее прогрессу, и, следовательно, вполне приемлемы в своей кажущейся автономности[12].

Мэдди, кстати, экспериментировала с различными формами натурализма помимо того, который обсуждался. Вначале дошла даже до того, что применяла принцип обязательности для обоснования реализма, используя аргумент, что объективное существование абстрактных сущностей есть неотъемлемая часть наилучшего объяснения мира, которое мы имеем, посредством холистской сети Куайна и роли, которую там играет вся математика[13]. Обоснование платонизма означает все же предоставление места математической интуиции, которая с другой стороны критикуется как раз с одной из натуралистических точек зрения в гносеологической плоскости. Мэдди пыталась аргументировать, что математическая интуиция не является лишь аналогом чувственной интуиции, как полагал Гёдель, а представляет собой настоящую перцептивную способность (восприятие множеств среднего размера, состоящих из физических объектов), основание которой может быть выявлено в мозге[14]. Как нейрофизиолог Д. Хебб (D.O. Hebb) говорил о группах клеток, которые формируются в процессе детского развития и позволяют осуществлять перцепцию физических объектов[15], так и Мэдди высказала гипотезу о том, что формируются группы клеток, которые распознают и различают наборы физических объектов. Сведение математической интуиции к восприятию конкретных маленьких множеств представляется, однако, возвратом к Аристотелю и к его концепции числа.

---

[12] M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит.

[13] P. Maddy, *Realism in Mathematics*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1990.

[14] P. Maddy, *Perception and mathematical intuition*, in The Philosophical Review, 89, 1980, pp. 163–196, перепечатано в W.D. Hart, *The Philosophy of Mathematics*, уже цит., pp. 114–141.

[15] D.O. Hebb, *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Approach*, New York, Wiley, 1949; итал. перевод *L'organizzazione del comportamento. Una teoria neuropsicologica*, Milano, Angeli, 1975.

Существуют и другие подходы, использующие термин «натурализм», который является весьма привлекательным, поскольку звучит «политически корректно». Один из них, к примеру, разработан Ф. Китчером (Philip Kitcher)[16]. Этот подход назван так автором, но натурализм там, собственно, минималистский, который можно резюмировать в двух тезисах: каждый момент развития математики зависит только от математики уже существующей, а не от эпистемологических ограничений и выборов; математика организуется посредством гипотетико-дедуктивного метода, пытаясь найти аксиомы, которые бы объединили и объяснили результаты известные, но связанные нечетким образом или недостаточно общие. Математика, которая может быть включена в подобные рамки, выглядит достаточно ограниченной. Конечно, математики каждого поколения посвящают себя решению проблем, оставленных им предшественниками и учителями, но, в целом, проблемы не решаются только лишь обобщением с использованием гипотетико-дедуктивного метода, наоборот, так бывает редко, и чаще они решаются благодаря изобретению новых инструментов и идей. В рассмотренной же картине не видно места для инноваций, которые так часто обогащают концептуальный арсенал математики.

[16] Ph. Kitcher, *Mathematical naturalism*, in *History and Philosophy of Modern Mathematics*, под ред. W. Aspray, Ph. Kitcher, Minneapolis, University of Minnesota Press, 1988, pp. 293–325.

6. ЛОГИЦИЗМ

Если попытаться найти философию, основной заботой которой была бы не онтология, нужно вспомнить о логицизме. Он утверждает, что математические истины являются объективными, так как математические объекты являются логически определенными и представляют собой понятия. Также и для феноменологии подобные сущности являются понятиями, но наше видение их, с точки зрения феноменологии, всегда остается частичным, тогда как логицизм полагает, что посредством логики мы имеем полный контроль над ними.

Логика логицизма не соответствует дедуктивной логике, которая играет главную роль в других философиях. Из двух фундаментальных моментов математики, которыми являются определение и доказательство, именно на первом концентрирует свое внимание логицизм, хотя Фреге изобрел свою «*идеографию*»[1] именно для получения максимального контроля над дедуктивной деятельностью, исключая проникновение любой формы интуиции или неопределенных конструкций (и с той же самой целью работали другие создатели символической логики, например, Дж. Пеано).

Что означает объективный статус понятий, не сразу очевидно. «Объективный» противопоставляется «субъективному» и, одновременно, указывает на нечто нематериальное. Но когда Фреге должен был приводить примеры объективного идеального существования, то он указывал на линию экватора или полярную ось, то есть возвращался к математическим сущностям.

---

[1] G. Frege, *Begriffsschrift*, Halle, Nebert, 1879; итал. перевод *Ideografia*, in G. Frege, *Logica e aritmetica*, под ред. C. Mangione, Torino, Boringhieri, 1965, pp. 103–206; в источниках на русском языке встречаются разные варианты перевода названия этой работы: *Исчисление понятий*, *Запись в понятиях*. Эти варианты перевода представляются не совсем точными, поскольку дословный перевод дает версию *Запись понятий (идей)*. В связи с этим и предлагается перевод *Идеография*, следующий переводу на итальянский – прим. переводчика.

Логицизм обычно воспринимается как философия философской математики или, по крайней мере, в соответствии с названием, как логика, разработанная логиками. Бурбаки не имел никакого уважения к Расселу, поскольку не считал его математиком. Однако в действительности именно математик, Р. Дедекинд (1831–1916), должен считаться основателем логицизма, поскольку именно он добился самого большого успеха в этом направлении, предложив вариант определения натуральных чисел, принятый почти всеми математиками, поскольку он обосновывал принцип индукции.

«Самая простая из всех наук», по словам Дедекинда, должна была ожидать долгое время, прежде чем прояснились ее основания[2]:

> Ничто в науке из того, что может быть подвергнуто проверке или доказательству, не должно приниматься без этого. Хотя это требование и кажется разумным, я не могу утверждать, что оно учитывалось даже в самых последних попытках, направленных на закладывание основания самой простой из всех наук, то есть той части логики, которая касается теории чисел. Говоря об арифметике (алгебре, анализе) как части логики, я хочу дать понять, что рассматриваю концепцию числа, совершенно независимую от понятий, в том числе интуитивных, пространства и времени. Мой ответ на вопрос, вынесенный в заголовок этой работы, будет поэтому следующим: числа являются свободными творениями человеческого разума …
>
> Только посредством чисто логического процесса выстраивания науки о числах вплоть до достижения континуума мы адекватно подготовимся к изучению понятий пространства и времени, поставив их в отношение с этой числовой областью, порожденной в нашем разуме.

Не будем останавливаться и дискутировать по поводу того, что представляла собой логика времен Дедекинда, и обсуждать его употребление слова «разум», которое вскоре будет запрещаться

[2] R. Dedekind, Предисловие к первому изданию *Was sind und was sollen die Zahlen* (1887), ed. ingl. in R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, New York, Open Court, 1901, переиздание New York, Dover, 1963; итал. перевод *Che cosa sono e a che cosa servono i numeri?*, in R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, Napoli, Bibliopolis, 1982, pp. 79–128.

Примечание переводчика: существует перевод цитируемой работы на русский язык: Дедекинд Р. *Что такое числа и для чего они служат*. – Казань: Изд. Императорского университета, 1905.

как психологизм. Фреге был его современником, и новая логика еще не существовала. Сам Дедекинд объяснял, что этим термином намеревался исключить интуицию, которая в его время понималась совсем не так, как ее понимают платонисты сегодня, а скорее как геометрическая и кантианская. Мы встретим термин «творения разума» и в других контекстах и перспективах.

Далее Дедекинд отмечал, что исходя из наблюдения происходящего в счете «мы вынуждены рассматривать способность разума приводить одни вещи в соотношение с другими вещами, полагать, что одна вещь соответствует другой, или представлять одну вещь посредством другой. Без такой способности мышление невозможно. Вся наука о числе, по моему мнению, должна базироваться на этом уникальном и потому совершенно необходимом основании».

Он уже отмечал[3]:

> Я рассматриваю всю арифметику как необходимое или, по крайней мере, естественное следствие самого простого арифметического акта, а именно – счета, а сам счет есть не что иное, как последовательное создание бесконечного ряда целых положительных чисел, в котором каждый член определен тем, который ему непосредственно предшествует. Самый простой акт состоит в переходе от уже сформированного элемента к последующему новому члену, который должен быть создан.

Однако простого повторения самого простого акта не достаточно, как это будет, напротив, для Брауэра. Структура натуральных чисел не создана бесконечным количеством креативных актов, это уникальный акт создания всей цепочки. Этот фундаментальный переход снимает все трудности и двусмысленности предыдущих попыток; он был понят и осуществлен как Дедекиндом, так и Фреге[4]. И действительно «цепь этих чисел представляет

---

[3] *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (1872), in *Essays*, уже цит., pp. 1–27; итал. перевод *Continuità e numeri irrazionali*, in R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, уже цит., pp. 63–78; рус. перевод Р. Дедекинд, *Непрерывность и иррациональные числа*, Одесса, Матезис, 1923 (– прим. переводчика).

[4] Приходит на ум теологическая полемика по поводу уникальности или множественности божественных актов творения. Можно сказать, что для математики важен один единственный акт создания структуры. В этом кон-

собой инструмент, исключительно полезный для человеческого разума. Она предоставляет неисчерпаемое богатство значимых законов, полученных посредством введения четырех фундаментальных арифметических операций». Эти операции, обоснованные и ставшие возможными благодаря теореме о рекурсии, которая сама следует из определения Дедекиндом структуры натуральных чисел, являются источниками последующих числовых расширений базовой структуры, доказывая, таким образом, что «все числа созданы человеческим разумом».

Напомним кратко стратегию Дедекинда. Он начинает, предлагая определение «бесконечности» как множества, которое допускает свою инъекцию в себя же. Затем определяет систему натуральных чисел как наименьшее, за исключением изоморфизмов, бесконечное множество, то есть как самое маленькое множество, обладающее инъекцией в себя, которая представляет собой функцию «следующий»; это множество имеет один единственный элемент, который не принадлежит области значений, а именно – ноль. Принцип математической индукции является прямым следствием этого определения, так же, как и теорема о рекурсии, хотя она не столь очевидна.

Определение Дедекинда можно интерпретировать с небольшими вариациями расстановки акцентов как определение, данное на основе теории множеств, или как определение некоторой структуры (он использовал слово «система»), или аксиоматическим методом. Все эти возможности тогда еще не разделялись на отдельные альтернативы. Неслучайно Пеано даст независимым от Дедекинда образом те же самые принципы в виде аксиом, но эти детали[5] в данном контексте нас не интересуют, а важны предварительные соображения Дедекинда[6].

тексте можно также спросить, а не клонированием ли производятся нестандартные модели?

[5] За деталями можно обратиться к G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, уже цит., cap. 4.

[6] То, как он пришел к определению, Дедекинд объяснял в известном письме к Кеферстайну (H. Keferstein), опубликованном на английском в антологии под ред. J. Van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1967, pp. 98–103.

Эти записки могут быть понятны каждому, кто имеет то, что обычно называется простым здравым смыслом. Для этого не требуется никаких специальных знаний, ни философских, ни математических. Я отдаю себе отчет, однако, что многие читатели с трудом признают в неизвестных формах, которые я представляю им, числа, сопровождавшие их всю жизнь как верные и близкие друзья. Они испугаются длинных [не такие уж длинные, речь идет всего лишь о 59 страницах – прим. автора] последовательностей простых выводов, которые соответствуют нашему восходящему пониманию, испугаются фактического раскрытия цепочек рассуждения, от которого зависят законы чисел. Они потеряют терпение от того, что будут вынуждены проследить от начала до конца доказательства истинности, которые, в то же самое время, очевидны и неоспоримы. Все же, именно в этой возможности сводить такие истины к другим, более простым, вследствие того, что не важно, насколько длинны и внешне искусственны последовательности выводов, я признаю убедительное доказательство того, что владение ими или вера в них не даны внутренним сознанием, а добываются всегда только посредством более или менее полного повторения отдельных единичных выводов… Так, начиная с рождения и далее во все возрастающей степени, мы вынуждены соотносить одни вещи с другими вещами и использовать способность разума, от которой зависит, собственно, создание числа. Посредством постоянных упражнений такого рода, даже без какой-либо определенной цели, в раннем детстве и при последующем формировании суждений и цепочек умозаключений мы приобретаем багаж реальных арифметических истин, на которые в дальнейшем наши учителя ссылаются как на что-то простое, очевидное, данное во внутреннем сознании. Таким образом, случается, что многие сложные понятия (как понятие количества некоторой совокупности вещей) ошибочно считаются простыми.

Много интересного вытекает из этого обсуждения Дедекинда помимо, прежде всего, факта, который представляет и отражает, как не признается правильным то, что делали ученые. Обращает на себя внимание тезис, что базовым логическим понятием является «соответствие». Сегодня мы могли бы сказать «морфизм» и записать Дедекинда в сторонники оснований теории категорий. Еще один момент, который необходимо подчеркнуть, заключается в том, что это понятие логическое, но приобретается оно посредством практики и повторения. Он думал об интериоризации сложных понятий в знакомых терминах и, в этом смысле, простых, принадлежащих внутреннему опыту. Логическая реконструкция понятий, к которым мы привыкли, вновь подтверждает то, что интериоризация предшествует логической реконструкции. Формальные неясности – неизбежное следствие редукционизма. Дедекинд предлагает также интересную, хотя и сомнительную, гипотезу по поводу овладения детьми концепцией числа, параллельную и обратную его аналитической реконструкции.

Наконец, Дедекинд предвосхищает ответ на замечание, касающееся того факта, что логическое представление чисел ведет к увеличению длины доказательств. Замечание (которое в действительности будет сделано сначала Витгенштейном, а затем эмпиристами), относящееся к феномену, который Дедекинд, кажется, полагал естественным.

В 1893 году в предисловии ко второму изданию «Что такое числа…» Дедекинд объяснял, как он год спустя после опубликования своего труда, содержание которого он, кстати, улучшал несколько лет, познакомился с работой Фреге *Die Grundlagen der Arithmetik*, появившейся в 1884 году[7]. Дедекинд признавал различия как в представлении материала, так и в фундаментальной постановке. Действия над системами, выполненные им, были того типа, который и использовался в те годы, и в дальнейшем были встроены в теорию множеств, тем не менее, он отметил, что имеются «точки соприкосновения» между двумя работами, особенно, начиная с §79 (Дедекинда) и далее. Это признание – значительная заслуга, поскольку работа Фреге оставалась непонятой и неизвестной многим.

В своей работе Фреге вводит понятие порождения какого-либо отношения, в дальнейшем названное транзитивным замыканием отношения, и определяет совокупность натуральных чисел через порождение отношения следования, которое, в свою очередь, явно определено в логической терминологии Фреге относительно понятий в терминах соответствий и из которого вытекает его знаменитое определение, что каждое число есть понятие понятий. Однако не определение отдельных чисел является существенным, а определение всей цепочки в целом. Определение Дедекин-

---

[7] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, Köbner, 1884; итал. перевод *I fondamenti dell'aritmetica*, in *Logica e aritmetica*, уже цит., pp. 211–349.

да говорит о наименьшем множестве, замкнутом относительно следования. Определение же порождения Фреге рассматривает наименьшее транзитивное отношение, которое распространяет данное отношение, т.е. то же самое отношение следования. Следовательно, в некотором смысле Фреге удалось лучше, чем Дедекинду, представить конструкцию, основанную на фундаментальном принципе счета. С параграфа 79 и далее, когда Дедекинд уже может пользоваться теоремой о рекурсии, оба изложения идут, в действительности, параллельно.

Цель Фреге, как, впрочем, и Дедекинда, заключалась в том, чтобы показать, в противовес Канту, что арифметические истины – аналитические априори. Дедекинд не упоминает Канта, однако его замечания по поводу факта, что числа не базируются на интуиции, являются весьма показательными, проявляя его взгляды и ориентиры. С другой стороны, в то время еще изучали философию.

Логицизм должен бы избегать несоизмеримости между объектами и познающим субъектом, поскольку один и тот же субъект сначала определяет объекты, а затем их изучает. При этом не должно быть смущения по поводу отсутствия гарантированности эпистемологического доступа к конструкциям, порожденным разумом, так как эпистемологический доступ заключается только в выводе следствий из определений[8].

Имеются и другие вопросы, которые не дают покоя. Необходимо уточнить, что хотелось бы получить и что получается при помощи некоторого определения. Если «определить» означает «выделить» одну из многих сущностей, существующих до этого, то мы вновь впадаем в реализм, и определения не имеют никакой другой функции, кроме указания на какую-то вещь или ее описания. И не важно, полные они или нет, поскольку их всегда можно расширить и улучшить. Если «определить» означает «свободно создавать» (или создавать только с условием непротиворечивости) в том смысле, что все подлежащее определению приобретает свое существование только в момент определения и существует только в определении, тогда, когда тщательно исследуются сами определения, обнаруживаются трудности, непредвиденные простой он-

---

[8] См. выше, раздел *Методология*, стр. 72, сноска 5.

тологической проблематикой. Возникает, к примеру, проблема непредикативности.

Определение некоторого объекта называется непредикативным, если оно ссылается на совокупность объектов, к которой будет принадлежать и тот, который хотелось бы определить. Ссылаться означает использовать универсальную квантификацию на такой совокупности. В обычной речи на этой особенности практически никогда не акцентируется особое внимание, поскольку обычно не определяется ни что другое, кроме существующих вещей, и через определение они лишь выставляются в определенном свете. Фраза «лучший студент группы» определяет непредикативным образом некоторого студента, ссылаясь на его группу. Когда определения конструируют, использование непредикативного определения может подвергаться сомнению и отторжению.

Определение натуральных чисел является непредикативным. Оно формулируется посредством оборота «наименьшее замкнутое множество …», определяемое пересечением всех замкнутых множеств, среди которых оказывается результирующее множество натуральных чисел. Чтобы почувствовать проблему непредикативности, нужно на практике увидеть, где и как она встречается. Математики, впервые столкнувшись с этой проблемой, не обратили на нее большого внимания, поскольку никогда бы не отказались от привычной операции обобщенного пересечения множеств. Со временем проблема произвела впечатление, так как она проявилась в виде многочисленных антиномий, одним словом, всего того, что известно под названием «порочный круг». На непредикативность возложили ответственность за все антиномии, против нее решительно выступил Пуанкаре, который имел большой авторитет и влияние, и убедил Рассела в уместности избежать ее. Однако обходиться без непредикативных определений весьма сложно, и Рассел мучительно, но безрезультатно, пытался найти выход, пробуя различные возможности, от радикального отказа от классов до различных попыток усовершенствований, к примеру, при помощи разветвленной теории типов и аксиомы сводимости.

Так сформировался *предикативизм*, являющийся еще одной альтернативной философией математики. Нужно владеть большой технической изощренностью, чтобы развивать это направление и оценить его. Оно предполагает реконструкцию частей математики с использованием логики, более слабой, чем обычная, и, как следствие, рассматривается в рамках конструктивизма. Из-за значительного внимания, уделяемого специфическому, тонкому использованию логики, конструктивизм мог бы быть также отнесен к логицизму, однако слабые логики не в состоянии определить фундаментальные математические понятия, которые, следовательно, должны подлежать логической трактовке из других конструктивных источников, как мы увидим это в дальнейшем.

Наиболее значительным представителем предикативизма был Г. Вейль, который показал, как и в какой мере нужно развивать Анализ в предикативной манере[9]. В этом случае нужно избегать необдуманного применения теоремы Больцано–Вейерштрасса. Предикативизм является хорошей точкой зрения для оценки того, что означало бы в математике использование одной логики по сравнению с другой.

Сама логика, следовательно, становится объектом изучения и реконструкции. В процессе этой работы обнаруживаются новые проблемы разной степени сложности, к примеру, проблема бесконечности. Спрашивается, учитывая ее фундаментальное значение в определениях математических объектов, является ли «бесконечность» логическим понятием? У Дедекинда предполагается, что существует хотя бы одно бесконечное множество. Рассел долго пытался доказать это. Дедекинд даже сформулировал и доказал «Теорему о существовании бесконечных систем», предлагая в качестве примера множество S своих мыслей и используя аргумент, что если s есть мысль, а s' указывает мысль, что s может быть объектом мысли, то имеется функция следования во множестве мыслей. Если доказательство Дедекинда не принимается, то необходимо постулировать существование бесконечного множества. Если же существование постулируется, то «бесконечность» уже не кажется логической концепцией. Теория множеств со своими аксиомами существования не должна бы быть ча-

[9] H. Weyl, *Das Kontinuum*, Leipzig, Veit, 1918; итал. перевод *Il continuo*, под ред. A.B. Veit Riccioli, Napoli, Bibliopolis, 1977.

стью логики, в которой должны иметься, самое большее, принципы для определения понятий исходя из других понятий, однако фактически даже в логике пришлось принять предположения, обсуждающие существование.

Таким образом, логика встраивается в теорию множеств. В свое время логика намеревалась заключить в себе то, что затем стало теорией множеств. Логика у Фреге была логикой высшего порядка, или теорией типов[10], в которой можно было квантифицировать сущности любого порядка. Сам Фреге соглашался, что принципы собирания и соответствия, использованные Дедекиндом, были близки по духу его пресловутой аксиоме (или основному закону, *Grundgesetz*) V неограниченного понимания, из которой следует антиномия Рассела. Дедекинд в предисловии к третьему изданию (1911) своего труда отмечает сомнения, которые возникли в последнее время по поводу обоснованности его построения. Ясно, что он подразумевает проблемы теории множеств. Его вера во внутреннюю гармонию нашей логики, однако, не пошатнулась. Он заявляет, что последующие строгие исследования способности нашего духа создавать новые определенные сущности, опираясь на определенные элементы, позволят правильно оценить его труд. Это представляется ни чем иным, как еще одним способом выражения уверенности, что теория множеств будет приведена в систему надлежащим образом. В то время аксиомы Цермело были совсем недавно (в 1908 году) предложены и лишь начинали формировать всеобщий консенсус вокруг себя.

Теория множеств имеет сегодня формулировку, которая принимается большинством математиков, поскольку представляется для них именно математической теорией, что объясняет, возможно, с одной стороны, ее признание как фундаментальной, основополагающей теории, а с другой – подозрение в том, что она не является логической теорией.

[10] По поводу системы Фреге и теории типов см. W.S. Hatcher, *Foundations of Mathematics*, Philadelphia, Saunders, 1968; итал. перевод *Fondamenti della matematica*, Torino, Boringhieri, 1973.

Те, кто утверждает, что математика развивалась и должна развиваться в рамках теории множеств, представляются, в целом, наследниками логицизма.

> Все знают, что логицизм верен наполовину. Правильна в нем идентификация математики с теорией множеств… Ошибочной является его эпистемология[11].

Эпистемология логицизма не ошибочна, а, скорее, находится в подвешенном состоянии. Различие между логикой и теорией множеств состоит не столько, может быть, в фактическом содержании аксиом, сколько в их выборе, который не является логическим, поскольку он оппортунистический. Ограничения аксиомы V кажутся продиктованными чисто прагматическими соображениями, которые призваны обойти парадоксы (даже в теориях, полностью отличных от ZFC, как, например, у Куайна[12]). Все представляется иным образом для тех, кто верит в кумулятивную иерархию, но они являются платонистами.

Кроме того, математическая теория множеств сформулирована в логике первого порядка, и присутствует феномен релятивизма моделей. Это также является проблемой, которая касается определений, проблемой единственности. Фреге полагал, что при отсутствии единственности аксиомы не могут предъявлять определения. Определить такое понятие, как «число» или «континуум», означает дать определение, которое имело бы одну единственную реализацию, если рассматривается семантическое соотношение между определяющей формулой и тем, что определено. В логике первого порядка нет категоричных теорий (то есть теорий с одной единственной моделью) за исключением нескольких банальных. Если категоричность является целью, то необходимо искать какую-то другую логику. Как уже было сказано, только логика второго порядка или высшего порядка могла бы, кажется, обеспечить единственность таких структур, как натуральные числа или кумулятивная иерархия. Сторонники логики первого порядка возражают, что

---

[11] N.D. Goodman, *Mathematics as an Objective Science*, уже цит.

[12] W.O. Quine, *New foundations for mathematical logic*, in Amer. Math. Monthly, 44, 1937, pp. 70–80.

речь идет об иллюзии, обусловленной замкнутостью теоретико-множественных построений, скрытых в подобных так называемых логиках. По мнению Куайна, логика второго порядка есть замаскированная теория множеств, «волк в овечьей шкуре»[13]. С другой стороны, формулировать теорию множеств в логике второго порядка как-то неестественно (теории классов не являются подходящими заменителями, так как сводимы к логике первого порядка). Такой подход не очень нравится математикам, поскольку нужно изучать что-то нематематическое перед началом работы.

Можно продолжать предлагать исправленный логицизм, однако исправить логицизм означает на практике решить и найти согласие по поводу того, что представляет собой логика. Альтернатив не так уж много, и ни одна из них не склоняет в свою пользу большинство мнений специалистов. Трудности, встреченные Фреге и Расселом, пока непреодолимы.

Р. Карнап попробовал избежать их, предложив логицистский подход[14] в Кенигсберге на симпозиуме по основаниям математики в 1930 году при отсутствии других оставшихся в живых и активно работающих сторонников логицизма. Там он прокомментировал два тезиса логицизма. Первый – что математические концепции могут быть выведены из логических понятий посредством явных определений. Второй – что теоремы могут выводиться из логических аксиом посредством чисто логических выводов. После обсуждения различных трудностей и попыток их решения Карнап отметил близость программы как с интуиционизмом, в отказе от аксиоматических определений, так и с формализмом, в том смысле, что финальным результатом логицизма должна быть формальная система, причем такая, что определения и выводы могли бы быть осуществлены внутри нее. Учитывая общие взгляды Карнапа на принцип толерантности[15], то есть на возможность свободного выбора логики при условии явной декларации сделанного выбора,

---

[13] W.O. Quine, *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1986, ch. 5.

[14] R. Carnap, *Die logizistische Grundlegung der Mathematik*, in Erkenntnis, 2, 1931, pp. 91–121, на английском в P. Benacerraf, H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, уже цит., pp. 31–41.

[15] R. Carnap, *Sintassi logica del linguaggio*, уже цит., §17, pp. 88 ss.

можно сказать, что логицизм с тех пор стал некоторой разновидностью формализма.

Сегодня есть философы и логики, которые объявляют себя неологицистами и пытаются реализовать программу Фреге. Делают они это менее амбициозным образом, отдавая себе отчет в том, что можно сделать, а что невыполнимо, как было доказано ранее. Фреге использовал несостоятельную аксиому V, чтобы вывести принцип, согласно которому «для двух концепций F и G число F равно числу G тогда и только тогда, когда F и G имеют одну и ту же мощность», где это последнее понятие было определено без использования чисел, в терминах соответствий. Из этого принципа, названного принципом Юма, Фреге выводил всю арифметику в рамках того, что сегодня определяется как непредикативная логика второго порядка. Главная идея неологицистов состоит в том, чтобы вновь предложить подобную постановку проблемы, отталкиваясь от принципа Юма. Этот принцип не является логической истиной и не представляет собой определение понятия числа, но может пониматься как *объяснение* понятия равенства мощностей. Если это объяснение можно считать аналитическим, как они, с учетом некоторых нюансов, думают, то, во всяком случае, реализуется цель логицизма в отношении доказательства аналитичности арифметики. Сомнения касаются, как обычно, использования логики второго порядка и необходимости, в любом случае, применения некоторой формы абстракции, как это обнаруживается, к примеру, в принципе Юма. Даже если эта особенная абстракция не является противоречивой в отличие от аксиомы V Фреге, то не совсем понятно, как естественным образом разграничивать законные абстракции от опасных[16].

С другой стороны, присутствуют также те, кто утверждает, что нет никакой необходимости спасать логицизм, поскольку он является ошибочной философией. Это течение, к примеру, не отвечает принципу объективности, так как признает, что математика состоит из истин, не зависящих от субъективной деятельности,

---

[16] См. S. Shapiro, *Talking about Mathematics*, уже цит., ch. 5, pp. 113–118, о работах таких авторов, как Crispin Wright, Neil Tennant и других. Смотри также подборку по теме в M. Schirn, *The Philosophy of Mathematics today*, уже цит.

однако не подводит под это нечто объективное, к чему бы эти истины относились. Отталкиваясь от определений, получаем в итоге чисто логические истины, как того требует название, которые зависят лишь от внутренней, в конечном счете, синтаксической структуры. Критика упрекает логицизм за то, что он таков, каким он и должен быть.

Предполагается также, что последовательный логицист должен использовать только логику для установления математических истин, однако «каждый математик знает, что его лучший результат базируется не на чистом рассуждении, а на некотором характерном виде озарения, который он называет «интуицией». Слово «интуиция» относится к способности постигать свойства структуры, которые он пока не в состоянии вывести»[17]. Эта критика весьма поверхностна. Даже не учитывая то, что уже отмечалось по поводу платонизма и касалось неоднозначного вопроса соотношения интуиции и дедукции, можно сказать, что она рисует немного механического логициста. Он может принимать то, что неявные свойства в определении некоторого понятия открываются понемногу, всегда за счет вывода, но, в то же самое время, может оставлять широкий простор для самых разнообразных эвристических стратегий, касающихся того, как выбирать свойства для изучения и, вероятно, верификации, как можно попытаться предвосхитить результат какого-то доказательства и других похожих поисковых работ, которые являются целиком субъективными и таковыми принимаются несмотря на отличие от объективной логики, которая, в итоге, должна бы восторжествовать.

[17] N.D. Goodman, *Mathematics as an Objective Science*, уже цит.

7. ФОРМАЛИЗМ

Направление, которое оспаривает у платонизма звание самой любимой математиками философии, называется формализмом. Он претендует, ни много ни мало, на разрешение всех проблем[1]:

Для среднего математика, который желает лишь верить, что его работа имеет прочное основание, наиболее привлекательным выбором представляется тот, который позволяет избежать разнообразных трудностей, обращаясь к программе Гильберта. Математика рассматривается как формальная игра, и остается лишь единственное беспокойство по поводу непротиворечивости.

Небольшая такая проблема. Формализм, однако, не стоит воспринимать лишь как отступление перед трудностями. Можно принимать его по убеждениям, исходя целиком из благих намерений. Так и было в первых заявлениях формалистов девятнадцатого века. К примеру, Фреге пришлось полемизировать с подобными позициями, которые использовали классическое сравнение математики с игрой в шахматы[2]:

Формальная концепция числа устанавливает менее жесткие ограничения, чем логическая концепция. Она не изучает сущность и значение чисел, а исследует их применение в арифметике. Арифметика же для формальной концепции есть игра с символами, которые, надо отметить, являются пустыми. Это заявление означает, что им (в игре под названием «вычисления») не принадлежит никакое другое содержание за исключением того, что должно быть присвоено с учетом их поведения в связи с определенными правилами взаимоотношений (правилами игры). Аналогичным образом шахматист использует свои фигуры. Он присваивает им определенные качества, которые определяют их поведение в игре, а фигуры являются лишь внешними символами этого поведения. Конечно, между шахматами и арифметикой имеется важное различие. Правила шахмат являются произвольными, тогда как система правил арифметики образована таким образом, что числа посредством

[1] P.J. Cohen, *Comments on the foundations of set theory*, уже цит.
[2] J. Thomae, цитировано из Фреге, см. следующую сноску.

простых аксиом могут быть приведены в соотношение с некоторыми интуитивными истинами, откуда следует, что они оказывают нам существенную услугу в познании природы.

Ответ Фреге также можно считать классическим[3]:

Вопрос в целом ясен. Чем отличается формальная арифметика от настоящей, простой игры? Томэ (J. Thomae), отвечая на этот вопрос, отправляет нас к услуге, которую она может оказать в объяснении природы. Это может основываться только на том, что числа кое-что значат, тогда как фигуры в шахматах, напротив, не значат ничего. Это может быть единственной причиной, по которой арифметике приписывается большее значение, чем шахматам. Все то, однако, что определяет такое различие, для Томэ находится вне арифметики, поэтому она по сути своей имеет тот же ранг, что и шахматы, и должна быть названа скорее искусством или игрой, чем наукой. Несмотря на то, что числовые символы что-то обозначают, по мнению Томэ возможно абстрагироваться от этого смысла и считать их просто фигурами, которыми манипулируют на основе некоторых правил. Если вновь вернуться к значениям, то именно в них правила нашли бы свое основание, но здесь это происходит, так сказать, за кулисами. На сцене формальной арифметики не дано наблюдать ничего из всего этого.

В возражениях Фреге содержится вся проблематика формализма. Эта позиция отвергает то, что математика представляет собой знание о некоторой реальности, и рассматривает ее как более близкую к чисто дедуктивной и игровой деятельности. Отсутствие значения не оставляет оппонентов равнодушными[4]:

Представим себе, что мы спрашиваем формалиста, в чем, по его мнению, заключается смысл основной теоремы арифметики[5]. Если он последовательный формалист, то должен ответить, что сама по себе теорема не имеет никакого содержания… Ощущение, что она имеет какое-то содержание, происходит от факта, что теорема играет вполне определенную роль в различных формах деятельности, в которые мы вовлечены. Это как позиция, которая часто встречается в шахматах. Если мы дадим более точное описание наших

---

[3] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena, Pohle, 1893–1902; частичный итал. перевод *I principi dell'aritmetica* (1893–1902), в *Logica e aritmetica*, уже цит., pp. 534–535.

[4] N.D. Goodman, *Mathematics as an Objective Science*, уже цит.

[5] Каждое число разложимо единственным образом на простые множители [прим. автора].

действий с символами, к примеру, представляя некоторую особенную формальную систему, которая кодифицирует часть математики, тогда мы будем в состоянии дать и точный отчет о роли основной теоремы арифметики. Мы смогли бы привести одно или несколько формальных доказательств теоремы в нашей системе и дать примеры применения теоремы в доказательстве других. Для формалиста, однако, теорема не имеет никакого значения за пределами той роли, которую она играет в наших действиях с символами. Она не является утверждением относительно натуральных чисел, поскольку для формалиста не существуют объекты такого рода.

В этом отрывке в общих чертах обрисована и приписана формалисту теория значения (роль, играемая в различных формах деятельности, в которых мы заняты), против которой не возражал бы, к примеру, Витгенштейн, если ограничиться только одним именем. Математики, которые рассуждают на философские темы, не всегда хорошо знакомы с их разнообразием и глубиной. В данном случае Николас Гудмэн представляет позицию, которую описывает как абсентеистскую, или позицию добровольного отказа, по отношению к значению, поскольку полагает, что значение может быть постигнуто лишь референциальным образом.

Можно выделить, по крайней мере, два момента в работе с формальной системой. Первый – механический, слепой вывод внутри системы на основе правил этой системы. Второй – построение самой системы, выбор языка, аксиом и правил, которые устанавливают границы возможных внутренних символических действий. Не ясно, разделяет ли формалист эти моменты, и, если это так, то какой из них представляет собой математику? Она могла бы быть скорее совокупностью настоящих и будущих систем, чем деятельностью по выводу внутри некоторых из них.

Существуют различные версии формализма. Некоторые утверждают, что непротиворечивость является единственным необходимым свойством формальной системы. Однако, принимая во внимание вторую теорему Гёделя о неполноте, она не может быть доказана внутри системы, если система кодифицирует достаточно богатую часть математики. Для математика, который работает внутри формальной арифметики, доказательство ее непротиворечивости выступает как нематематическое доказательство, внешнее к этой системе.

Другие версии формализма не требуют даже непротиворечивости. Выбор системы произволен. Соревнование между системами разрешается, вероятно, различными внешними критериями успеха (предполагается, что их можно определить) или внутренними, такими, как техническая сложность или красота манипулирования, т.е. критериями, которые опять-таки не являются математическими.

Нерешенной проблемой всех версий формализма, утверждающих, что формальные системы и *есть* сама математика, а не только ее *представление*, остается обоснование применимости математики, что вскрывается уже в дискуссии между Фреге и Томэ. Применимость проявляется как невероятная удача, невероятное стечение обстоятельств, состоящее в том, что системы, с которыми мы предпочитаем играть (по эстетическим причинам, традиционным или другим), оказываются также полезными и высокоэффективными. Правда, и другие философии не лучшим образом объясняют это, хотя некоторые из них и претендуют на знание ответа.

Логицизм заявлял, что решил проблему применимости математики. Предположим такую цепочку вывода, что если на столе есть семь яблок и пять груш и нет никаких других фруктов, тогда на столе есть двенадцать фруктов, и допустим обоснование этого вывода при помощи равенства 7+5=12. Трудность состоит в том, что 7 есть имя одного числа, или так думается, тогда как «семь» есть предикат множества яблок, находящихся на столе. Фразы и формула не стыкуются между собой. По мнению Фреге, однако, числовое присвоение никогда не является приписыванием числа объекту или совокупности объектов, а скорее является присвоением числа понятию. «Семь яблок на столе» утверждает Num(A)=7, где A есть понятие «яблоки, лежащие на столе». Таким образом, число является не понятием, а понятием понятия, как и изложено в определении Фреге. Теперь 7 и 5 появляются уже в первых предпосылках, и вывод посредством 7+5=12 следует легко и корректно в логической манере[6].

---

[6] M. Steiner, в *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, уже цит., утверждает, что Фреге прав, считая полностью удовлетворительным свое решение.

Вопрос арифметических приложений был рассмотрен с точки зрения формализма Х. Карри (Haskell Curry)[7], заключившим, что проблем нет. В каждой формальной арифметической системе имеются правила для эффективного генерирования нумералов, к примеру, повторение произвольным образом записи знака |. Утверждение, что некоторое множество имеет определенную мощность, означает, что это множество может быть поставлено во взаимно-однозначное соответствие с начальным сегментом последовательности таких знаков. Это утверждение, естественно, не является внутренним, не является математическим, что справедливо, поскольку оно относится к приложениям математики.

Формальные системы являются определенным способом представления математических аксиоматизированных теорий, когда уточняется язык и оговаривается использование логики рекурсивного исчисления, то есть логики, в которой следствия выводятся повторением применения некоторых синтаксических правил. Логика первого порядка относится к этому типу, поэтому возможно и корректно утверждать, что все математические теории (с логикой первого порядка) являются формальными системами. Однако такой подход справедлив для развитых и зрелых теорий, аксиомы которых окончательно утверждены, когда при введении других постулатов ясно, что мы оказываемся в другой теории. К примеру, если в теории полугрупп допустить коммутативность, то мы перейдем в теорию моноидов. Для теорий же, находящихся *на начальной стадии развития*, и для разделов аксиоматизированных теорий, которые еще предстоит разрабатывать, такой подход не приемлем. Исследовательский аспект математики даже не упоминается в формализме.

Формализм, утверждающий, что математика состоит в проведении формальных выводов и исчерпывается этим, конечно же слишком ограничен. Такая позиция не соответствовала взглядам Гильберта. Проблемы, которые он поднимал, не затрагивались в полемике между Фреге и Томэ. Для Гильберта *представление* тео-

[7] H.B. Curry, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North Holland, 1951 и *Foundations of Mathematical Logic* (1963), New York, Dover, 1976.

рий как формальных систем было лишь определенной техникой перед применением инструментов математической логики к исследованию их логических особенностей и, прежде всего, непротиворечивости. Ничего более. Цитата же, приведенная в начале главы, несколько сбивает с толку, однако, к сожалению, она типична для идеи, которая уже распространилась и очень живуча. Математические исследования, задуманные Гильбертом, не мешали ему заявлять, что источник проблем и идей математики находился в физике и интуитивной геометрии. Для Гильберта некоторые утверждения, по крайней мере, комбинаторные, взятые обособленно, независимо от роли, которую они играли в дедуктивной цепи, имели значение.

Гильберт обладал большим персональным и вполне оригинальным видением по сравнению с формализмом девятнадцатого века. Его отправной точкой стали отрицание существования актуальной бесконечности в природе и констатация того, что невозможно, все-таки, развивать математику или принимать ту, которая была создана, ограничиваясь теориями, которые говорили бы о конечном. Достаточно вспомнить о понятии предела и о дифференциальном исчислении. Элементарные разделы арифметики, которые касаются комбинаторных конструкций объектов, имеют смысл и бесспорное истинностное значение. Те же самые конструкции реализуются на символах, которые являются конкретными объектами, и распознавание, а также манипуляции конкретными объектами и символами являются предварительным условием любой формы размышления.

Размышление, которое выражается в построении и манипуляции конечными объектами и символами, было названо Гильбертом финитным. Эта доктрина имеет априорное обоснование кантианского типа. Такая форма рассуждения является одновременно логической и математической. Здесь логика и математика переплетаются и связаны неразрывно. Невозможно положить одну из них в основание другой. Финитная арифметика является истинной и полной.

Новаторская идея Гильберта состоит в том, что нефинитные суждения, которые используют квантификации бесконечных совокупностей, играют в выводах ту же самую роль, которую идеальные элементы (например, так называемые бесконечно удаленные точки) играют в других разделах математики, а именно, позволяют сделать теорию более стройной, общей и глубокой. Вспомним о конических сечениях, каждое из которых не является особой кривой, независимой от других. Все они объединены одной теорией именно благодаря точкам на бесконечности[8]:

> Наконец, познакомился с двумя воображаемыми бесконечно удаленными точками *I* и *J* (названными некоторыми *страстными поклонниками* проективной геометрии Исааком и Иаковом [англ. *Isaac* и *Jacob*]). Эти точки обладали вдвойне абсурдной реальностью там, в небесах, в бесконечности (где бы ни было это)… за пределами зрительного воображения… Коника была окружностью тогда и только тогда, когда проходила через точки *I* и *J*. Вот вам загадка: тройное напряжение между тем, что было визуально представимо, между символическим и виртуальным, начинало приобретать некоторое чувственное качество.

Если бы Гильберту удалось доказать, что идеальные элементы являются безвредными в том смысле, что не добавляют ничего нового (и, следовательно, ложного) к истинам, относящимся к конкретным, финитным и разрешимым разделам, то есть что абстрактные теории являются консервативными расширениями элементарных, то не нужно было бы заботиться об их интерпретациях. Тогда стало бы не нужным обоснование бесконечных множеств, эффектно используемых в формулировках этих теорий, но оказалось бы возможным узаконить их применение, используя преимущества, которые они давали в терминах простоты и дедуктивной силы. Стало бы возможно распространить на бесконечные множества классическую логику, которая естественна в финитных разделах, с ее принципом исключенного третьего, опротестованным интуиционистами. Одним словом, стало бы возможно спасти «рай Кантора» современной математики.

Ретроспективно не трудно разглядеть непоследовательность в том, что для Гильберта высшим судом является суд классической

---

[8] Ph.J. Davis, *The Education of a Mathematician*, Natick, Mass., A K Peters, 2000, p. 62. Отметим, что Дэвис – радикальный эмпирист.

математики, унаследованной от недавнего прошлого, и, в то же самое время, этот суд нуждается в более сильной легитимации. Уже признанная математика принимается лишь на основе вердикта еще одного суда, суда финитной математики.

В случае успеха программа Гильберта устанавливает достоверность математических истин, что не есть факт признания того, что математические истины верны или что они – истины. Это утверждение имеет смысл только у реалистов, платонистов или логицистов.

Путь, указанный Гильбертом для достижения задуманного, состоял в том, чтобы формализовать математические теории, сводя их к сочетаниям знаков, и представить доказательства как формальные образования, то есть тоже как финитные объекты. Об этих объектах можно было бы рассуждать, используя финитные арифметические методы. Доказательство непротиворечивости этих систем гарантировало бы консервативность их расширения и возможность работать с бесконечностью как с идеальным элементом[9].

На симпозиуме по основаниям математики[10] в Кенигсберге в 1930 году позицию формализма представлял Дж. фон Нейман (John von Neumann), являвшийся членом школы Гильберта, и его доклад был посвящен теории доказательств Гильберта. Это окончательно санкционировало двусмысленное использование этого термина, который сохранился до наших дней.

Возможно, по причине резонности программы или из-за больших ожиданий от ее реализации, возможно, из-за обаяния Гильберта или его авторитета большая часть математиков решила, что такая постановка (коротко – формализм) представляет собой программу оснований, наиболее предпочтительную с математиче-

---

[9] Для более детального ознакомления с историческим и техническим аспектами см. G. Lolli, *Hilbert e la logica*, в *Atti del Convegno per il centenario dei “Grundlagen” di Hilbert* (Catania, 1999), в «Le Matematiche», 55, 2000, suppl. 1, pp. 93–126. См. также M. Detlefsen, *Hilbert’s Program*, Dordrecht, Reidel, 1986 и G. Kreisel, *Hilbert’s Programme*, Dialectica, 12, 1958, pp. 346–373; итал. перевод *Il programma di Hilbert*, в C. Cellucci, *La filosofia della matematica*, уже цит., pp. 185–221.

[10] Опубликовано в «Erkenntnis», 1931, pp. 91–121, ныне в P. Benacerraf, H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, уже цит., pp. 31–54.

ской точки зрения. Это убеждение до сих пор распространено, как мы уже видели, несмотря на провал программы или, по крайней мере, на необходимость ее чистки, так как, по мнению некоторых, программа не была окончательно похоронена второй теоремой о неполноте, и можно вновь ее рассматривать при соответствующем усилении финитарных методов.

Гипотеза Гильберта продолжает оставаться привлекательной для математиков настолько, что многие сегодня провозглашают себя формалистами, проповедуя ее как религию, принимая в то же время, что она недоказуема, в том числе и с использованием сложных уловок полной формализации. К примеру, А. Робинсон, уже цитированный, утверждает:

> Моя позиция касательно оснований математики основана на следующих двух постулатах, или принципах: *i*) бесконечные совокупности не существуют ни в каком смысле этого слова… высказывания, которые претендуют на это, лишены смысла; *ii*) тем не менее, мы должны бы продолжать торговать математикой «как обычно», то есть должны вести себя так, как будто бы бесконечные совокупности существуют реально.

Подобный самообман присутствует вновь при рассмотрении теорий как формальных объектов из-за того, что правила формальной логики позволяют формально повторять любой возможный аргумент. Их непротиворечивость, однако, гарантирована лишь индуктивной очевидностью. Кроме того, вне постановки, предположенной Гильбертом, непротиворечивость сама по себе не гарантирует даже консервативный характер расширения, который не очевиден, как Гёдель часто отмечает, вводя новые аксиомы. Непротиворечивость служит лишь для того, чтобы не свести игру к банальности.

Несмотря на то, что изысканный, достаточно проработанный, но в чем-то искусственный замысел Гильберта продолжает вдохновлять современный формализм, последний, тем не менее, не может более делать ставку на его программу. Современный формализм не обещает достоверности обоснования, подобной гильбертовской. Он скорее похож на старый формализм Томэ и прежде всего стремится освободить математику и философию математики от любых метафизических добавлений, характерных для платонизма и интуиционизма.

Современным формалистом, разрабатывающим подобный антиметафизический подход, является Х. Карри. В его взглядах заметно влияние неопозитивистского духа. Карри различает две возможности, или две основные точки зрения: контенсивизм (англ. *contensivism*, неологизм, который он ввел, сконструировав от немецкого *Inhalt*[11]) и формализм. Формализмом он называет любую философию, в которой математические объекты не являются специфицированными, а если являются, то их природа не важна для легитимности теорем, которые представляются инвариантными по отношению к возможной замене объектов.

Формалист, по мнению Карри, утверждает, что натуральные числа есть, по сути, любая система объектов, к которой применима формальная теория, известная как арифметика. Он принимает и широко использует теорему о полноте и нестандартные модели, не запрещает использование семантического языка и допускает даже платонистскую или интуиционистскую интерпретацию своей системы, но настаивает на том, что во главе угла стоит формальная теория, если речь идет о сути математики. В центр помещается, следовательно, доказательство. Формализм дает, по крайней мере, ясное определение и критерии опознавания доказательства.

Таким образом, формалист хотел бы не отбрасывать содержание и интерпретации, но оставаться независимым от любой формы контенсивизма. Он не стремится предъявить единую общую теорию для математики, поскольку знает, что, в силу теоремы Гёделя, не может существовать единственная теория, которая исчерпала бы все математические доказательства. Он не обеспокоен, следовательно, увеличением количества различных теорий множеств. Так как не существует привилегированной теории, то математика для формалиста есть общая *наука о формальных методах*.

Поскольку современный формалист имеет антиметафизические и номиналистические склонности, он предрасположен к тому допущению, что некоторые формы интуиции играют роль в математике, если они имеют лингвистическую природу или, по край-

---

[11] Содержание, смысл, значение (нем. – прим. переводчика).

ней мере, подлежат лингвистической формулировке и если вытекают из естественного развития практики, а не претендуют иметь априорный характер.

Наконец, Карри допускает, что некоторые слабые метафизические предположения неизбежны и бывают двух типов. Первый касается обычно природы символов, которые являются не простыми надписями, а классами эквивалентности эквиформных надписей. Второй – допущение наличия неограниченного пространства и времени, даже за пределами физических границ, для выполнения математических построений. Это кажется не совсем совместимым со строгим формализмом, в соответствии с которым заниматься математикой значит заниматься формальными доказательствами. Поскольку выводы произвольной длины не могут быть выполнены, о них можно рассуждать лишь метаматематически, но по сути, а не в качестве некой аббревиатуры.

Непротиворечивость для Карри не является необходимым условием, не говоря уже о ее недоказуемости. Теории создаются тщательно, внимательно и разрабатываются, пока остаются полезными, простыми и обоснованными в соответствии с критериями времени и не вводят нас в заблуждение, однако в них нет ничего абсолютного, ничего абсолютно верного.

В этой попытке построить более богатую философию, которая удовлетворяла бы отчасти принципу объективности, присутствует очевидное влияние эмпиризма и номинализма.

8. СЕМИОТИКА

Формализм не говорит много о символах и об особой деятельности с символами, которая присутствует в математике и размышление о которой также было бы важно для понимания математики. Такими исследованиями занимается специальная научная дисциплина – семиотика, и хотелось бы видеть больший интерес к математике со стороны ученых, ею занимающихся. Однако несмотря на выдающийся пример Ч.С. Пирса семиотические исследования в отношении математики редки, идеологически выдержаны в духе постмодернистских тенденций и выполнены некомпетентными людьми. Но это то, что предлагает сегодня культура, и нужно быть информированными об этом.

Например, Б. Ротман предлагает интерпретацию математики как некоторой машины, создающей образы и управляемой записями[1]. До сих пор, по мнению Ротмана, не были проведены теоретические исследования математического языка, поскольку во взглядах на него превалировал реализм. Математические же объекты не могут быть выделены из разговорной деятельности, которая давала бы им значение, следовательно, они неотделимы от социально-исторической практики. «Объекты, на которые, казалось бы, язык ссылается, сами сформированы, предоставлены, вызваны, созданы теми же самыми разговорными инструментами, использованными для их называния».

Математика есть своего рода исторически обусловленная риторика, деятельность, цель которой – убеждать, хоть эта цель и была в наше время всегда замаскирована. «Математическая достоверность порождается применением некоторого аппарата, разработанного с целью замаскировать его разговорные, риторические начала под видом нейтрального и теоретически безвредного мето-

[1] B. Rotman, *Mathematics as Sign*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000 и ранее B. Rotman, *Ad infinitum – The Ghost in Turing's Machine*, Stanford, Stanford Univ. Press, 1993.

да открытия объективных истин». Математика есть «транс- или панкультурный результат некоторой сознательной и длительно выполняемой программы в отношении строгости и объективности» начиная с научной революции семнадцатого века. Были реализованы математически строгие программы для устранения языка, ориентированного на физику, и в итоге математика «не может нести на себе клеймо никакого частного языка, ни по содержанию, ни по своим процедурам». Математик имеет в своем распоряжении систему символов, посредством которой он не может выразить свое свойство быть «материализованным» (англ. *embodied*[2]), свое «воображение» и свои «интенциональные манипуляции».

До сих пор все это – идеология, разделяемая и другими лингвистами, которые интересуются математикой[3]. Предложение Ротмана есть «семиотическая модель, в которой математическое рассуждение целиком идентифицировано с выполнением цепочки воображенных действий» фиктивными субъектами по образцам текстов.

«Из грамматики текста» выявляются две характеристики математической речи – организация ее как побудительного императива и отсутствие зависимости от контекста (дейксиса – конкретных указаний на время, место, персоналии). Но математические тексты представляют собой только часть рассуждений математического сообщества, которая подразделяется на формальную и неформальную. Эти два типа рассуждений называются, соответственно, Кодекс и Метакодекс. Формальный тип, или Кодекс, является императивным и характеризуется отсутствием дейктических элементов (я, здесь, это,…), значение которых определяется внешним миром.

---

[2] Воплощенный, реализованный, материализованный, закрепленный (англ. – прим. переводчика).

[3] Например, Дж. Лакофф (George Lakoff); см. G. Lakoff, R.E. Núñez, *The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-Based mathematics,* in *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, под ред. L.D. English, London, Lawrence Erlbaum Associates, 1997, pp. 21–89. Обсуждение Лакоффа смотри в G. Lolli, *La metafora in matematica*, in *La parola al testo,* scritti per Bice Mortana Caravelli, a cura di G.L. Beccaria e C. Marello, Alessandria, Dell'Orso, 2002, pp. 221–232.

Команды бывают двух видов: побудительные «рассмотрим, определим, докажем» и другие, которые предлагают выполнить команды, обусловленные первыми, и предполагают обращение к кому-либо, например, «проинтегрируй *f*». Субъект не может интегрировать, поскольку интегрирование есть процесс суммирования «без конца»[4]. Тогда к кому обращена команда? Для того чтобы ответить на этот вопрос, делается уточнение, что производится разделение математика на Персону, Субъекта и Агента.

Персона разрабатывает неформальную математику в Метакодексе, Субъект отвечает на императивы «докажем», «определим». Агент представляет собой некую идеализированную модель себя, которая выполняет императивы как автомат, оперируя только символами без значения. Поскольку он является «бестелесным», невоплощенным, Агент может идти вперед до бесконечности. «Это идеализированная и обособленная версия или модель Субъекта, перенесенная в реальность из воображения, для выполнения действий, которые выходят за пределы физических и когнитивных возможностей Субъекта в силу его телесности».

Субъект, в ответ на некоторый императив, воображает некий мир «в реальности», то есть создает некий мир при помощи воображения и назначает собственного двойника – Агента – выполнить различные воображаемые действия[5].

При переходе от Персоны к Субъекту стираются, в смысле стирающих функторов, дейктические элементы, а при переходе к Агенту – также смысл и значение.

Персона – неформальный математик. К примеру, «представление о доказательстве как длинном выводе является одновременно точным и неполным. Конечно, для того, чтобы было доказа-

[4] Как будто бы не существует формул для интегрирования в финитных терминах, и нужно постоянно применять определение посредством сходящихся аппроксимаций сумм.

[5] Как мы поняли, Ротман заимствует у Пирса идею о том, что «я» также есть знак, некий *type*, который, будучи произнесенным, создает субъекта, отличного от того, кто это произносит [прим. автора].

тельство, необходимо[6] предъявить список логически корректных выводов с соответствующими заключениями, что должно выглядеть как последовательность действий, выполненных Субъектом в соответствии с логикой, санкционированной Кодексом», но, с другой стороны, доказательство должно убеждать, и функция «подтверждающего рассуждения» заложена в Метакодексе.

Метакодекс содержит указание, как организовать шаги доказательства в виде «семиотической конструкции, которую не следует идентифицировать с индивидуальными шагами, но стоит понимать скорее как имманентную». В Кодексе формальная корректность шагов «выявлена», в подкодексе специальные операции, которые «предъявляют эти шаги», выполняются Агентом.

Различие между Персоной, Субъектом и Агентом, введенное Ротманом, схватывает реальные аспекты различных уровней математики и, при некоторой коррекции, могло бы быть полезным. Нужно бы точнее детализировать функции Субъекта, отделив их от ограничивающей идеи императивов, которые, в целом, вторичны. Более того, истинно формальное изложение есть разговорное, а императив – остаток неформального. Субъект может быть математиком, который пишет доказательства и, следовательно, должен выполнить недетерминированное задание. Эвристики, помогающие в построении доказательств, легко могут включать разные уровни рассуждения и при этом не отвлекаться от смысла и значения. Агент же мог бы быть исполнителем истинно детерминистических или квазидетерминистических обязанностей.

Ротман, однако, при помощи своей модели претендует на объяснение того, как математические рассуждения соотносятся с записями математиков: математические утверждения являются предсказаниями будущего, то есть утверждают, что если выполняются определенные операции с символами, то результат будет соответствовать предвидению.

Проверкой подобного предвидения является для Ротмана мысленный эксперимент. Такой эксперимент, однако, убеждает

[6] Но не ясна причина, почему это необходимо у Ротмана и почему, наоборот, речь не идет, что было бы более последовательно, о эфемерном ограничении, наложенном исторической программой строгости [прим. автора].

лишь в случае наличия подобия между Агентом и Субъектом, в случае, если то, что происходит с Агентом, то, с чем он встречается в воображенном мире, похоже или имитирует то, что Субъект сможет найти в мире реальном. Подобное сходство должно пониматься широко, включая разнообразные практики, в противном случае кажется, что знаки должны соотноситься с миром для их оправдания, что есть реалистическая гипотеза, отклоненная семиотикой. Степень сходства соответствующих миров опасно ослабляет различие между Субъектом и Агентом.

Субъект, кроме того, не может выразить сходство между миром и воображенным миром знаков, не имея дейктических элементов, и это реализует Персона. В то же самое время Ротман говорит, что Субъект делает «разумные материальные записи», продолжая повторять, что его «присутствие не локализовано и не установлено по времени и месту». Возможно, так оно и есть, и эти три фигуры нельзя четко разграничить.

Единственной математической темой, рассмотренной Ротманом, оказались последовательности или ряды, представленные символом «…», который рассматривается как аутентичный математический знак. Если перестать воображать, что Агент не воплощен, то для Ротмана невозможно представить движение вперед до бесконечности, и нужно думать, что при возрастании номеров записи становятся все более неопределенными и неконтролируемыми. Кажется, таким образом, что семиолог в конце концов предлагает отказаться также и от потенциальной бесконечности, однако тогда непонятно, насколько предложенная семиотическая модель с ее бесконечными операциями описывала бы реальную математику, как то было заявлено в планах.

9. КОНСТРУКТИВИЗМ

Существуют разные типы конструктивизма, от либеральных до фундаменталистских[1]. Конструктивизм – это способ занятий математикой, и поэтому трудно обсуждать его, оставляя в стороне его творения. Философия является одним из мотивов, которые побуждают к развитию или к принятию только одного особого вида математики. Между самими конструктивистами нет согласия в том, должны ли они считать себя реалистами или идеалистами. Они ощущают себя реалистами, поскольку настаивают на конкретном характере математических конструкций, и обвиняют в идеализме тех, кто допускает всевозможные абстрактные сущности, порожденные безудержной фантазией. Но они считают себя идеалистами, поскольку видят математику как произведение человеческого разума, подчиненное определенным ограничениям.

Конструктивизм направлен на развитие такой математики, которая внимательно подходит к виду приводимых доказательств, к информации, извлекаемой из них, к действительному содержанию теорем. Под этим имеется в виду, что каждая теорема должна утверждать не то, что нечто существует, а то, что нечто может быть сделано в широком смысле. Конструктивизм требует большего внимания к используемой логике. Он, в своих разных версиях, предпочитает слабые логики, основываясь на принципе, что при решении проблемы скудными средствами необходимо проявлять изобретательность для выжимания максимума из возможностей этих инструментов, хотя это не единственный вдохновляющий принцип, и пожелание использовать слабую логику не всегда выполняется. Конструктивизм представляет собой, следовательно, ещё один раздел логики с тех пор, как логика выработала большое

[1] См. D. Bridges, F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1987.

многообразие промежуточных логик[2]. Однако в целом по своим философским мотивам он направлен против логики, а к классической логике относится особенно подозрительно и недружелюбно. Он подвергает сомнению саму концепцию существования в математике и делает это не таким простым или упрощающим способом, как номинализм. В общем, философия конструктивизма располагается в идеалистическом лагере, то есть рассматривает математику как продукт человеческого мышления, идеализированного, по крайней мере, настолько, чтобы позволить ей овладеть хотя бы потенциальной бесконечностью. Для того чтобы оценить философию, нельзя оставить без технического рассмотрения результаты ее применения.

Все формы конструктивизма проводят линию раздела между математикой значащей и допустимой, с одной стороны, и, с другой стороны, той, которая может быть названа математикой без смысла, иллюзией, или, во всяком случае, некорректным использованием разума, выходящим за допустимые пределы несмотря на то, что производятся действия, правильные внутри определенных границ. Примером является закон исключенного третьего, который, без сомнения, справедлив для разрешимых свойств, однако сомнителен в отношении бесконечных неразрешимых свойств.

Все версии конструктивизма сближает отказ от классической математики, под которой понимается гармоничная структура, сформированная в девятнадцатом веке определением вещественных чисел, функциональных пространств и функционалов на них, структура, чьи свойства определены с помощью теории множеств и классической логики[3]. Конструктивисты исключают, кстати сказать, теоретико-множественный континуум, патологические примеры функций, множества, неизмеримые по Лебегу. Они отбрасывают диагонализацию Кантора и вслед за тем – характеристику «более чем счетное», но пытаются сохранить свойство неисчерпа-

---

[2] По поводу логических аспектов конструктивизма см. M.J. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics*, Berlin, Springer, 1985.

[3] Строгое и современное изложение классической математики см. в J.K. Truss, *Foundations of Mathematical Analysis*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1997.

емости действительных чисел в качестве своего заменителя континуума. Действительное число – не бесконечный объект, а метод генерации последовательности чисел[4].

Э. Бишопу принадлежит недавняя формулировка, осуществляющая намерения конструктивистов и имеющая успех из-за тщательного изложения и удачной и интересной для математиков подачи материала[5].

Это последнее условие весьма важно. Если до конца не ясно, хочет ли номиналист в самом деле убедить математиков заниматься этой наукой в соответствии со своим подходом, то для конструктивиста это стремление вполне реально. Соображения конструктивиста действительно могут произвести впечатление на математика, поскольку состоят в требовании «дать численное значение максимально возможному количеству разделов классической абстрактной математики». В математике встречаются положения, которые являются «чистыми заклинаниями», утверждениями без эмпирического смысла, чистой логикой. Встречаются и другие тезисы, которые, напротив, имеют прямую эмпирическую силу, как, например, те, которые утверждают, что определенные выполнимые операции произведут определенные наблюдаемые результаты. «Математика представляет собой смешение реального и идеального». Реальная часть обеспечивает проверку, идеальная часть позволяет производить упрощения и открывает новые возможности. Равновесие между ними должно быть разумным, а прагматические соображения должны оставаться финальным руководством. В полемике о недостаточности веса численных разделов в классиче-

---

[4] Программы для генерирования последовательностей – дискретные объекты, и их множество не является рекурсивно счетным, как известно из результатов о неразрешимости. Теорема Кантора о несчетности континуума тогда нейтрализуется и переформулируется благодаря обстоятельству, что любое его фактическое перечисление (или некоторые из них) может быть действительно диагонализировано так, чтобы предоставить новое число-программу.

[5] E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967. Цитаты взяты из этого текста. Рассмотрены и другие работы, к примеру, E. Bishop, H. Cheng, *Constructive Measure Theory*, Providence, R.I., AMS, 1972.

ской математике конструктивизм руководствуется следующими этическими принципами: делать любую концепцию утверждающей, даже, например, концепцию неравенства; избегать лишних определений; избегать мнимой общности.

Э. Бишоп начинает свой конструктивистский манифест с утверждения, что главный интерес математики есть числа, целые положительные числа. Естественно, он вспоминает Кронекера и его утверждение, что натуральные числа были созданы Богом, остальное – человеком[6], но уточняет, что натуральные числа были созданы на благо человека: математика человечна. От натуральных чисел он поднимается к более высоким уровням математического существования, вводя числовые структуры и функции Анализа, рассматривая функции и отношения между сконструированными уже понятиями и обязательно гипостазируя их, и осуществляет все это на основе конструктивного подхода.

Теорема Больцано–Вейерштрасса, с которой знакомы все студенты, не является конструктивной, поскольку если бы это было так, то должно было бы происходить следующее. Пусть дана ограниченная последовательность $\{x_n\}$ рациональных чисел, и нужно рассчитать верхнюю грань с желаемой степенью точности, однако не существует общего метода для построения конструктивного процесса, который вычислял бы такое число для любой последовательности, заданной конструктивно. Если бы он существовал, тогда для любой конструктивной последовательности из 0 и 1 такой метод или доказал бы, что все её члены есть 0, или выдал бы n, для которого x_n есть 1. Подобный метод разрешил бы все открытые проблемы, от проблемы Ферма (во времена Бишопа) до гипотезы Римана, посредством очевидного кодирования всех математических высказываний.

Термин «конструктивный» до сих пор был использован неформальным образом. Его уточнение не представляется простым, поскольку речь идет об открытом понятии. Спрашивается, к примеру, считается ли конструктивно заданной некоторая последовательность целых чисел, если допускается построение, в котором n-й

---

[6] L. Kronecker, *Über den Zahlbegriff*, in Crelle's Journal, 101, 1887, pp. 337–355.

член находится путем некоторой поисковой процедуры, а то, что этот поиск завершится, фактически гарантируется некоторым доказательством в формальной системе? Бишоп не принял бы этого, но он отдает себе отчет в том, что читатель вначале может его не понять. Лишь в процессе дальнейшего чтения и рассмотрения примеров, становящихся все более точными, проясняется понимание того, что означает «конструктивный», того, как это понятие использует автор. И может статься, что сам автор не владеет полностью всеми ветвями своих определений и вынужден модифицировать интерпретации и даже непосредственно определения, чтобы соответствовать тому, что диктует практика. Поначалу присутствует естественная тенденция выбора, насколько это возможно, рекурсивных функций как парадигмы конструктивных методов, однако не это является настоящим ограничением, поскольку, кроме всего прочего, определенные аспекты самой теории рекурсивных функций не являются конструктивными.

Показателем неконструктивности, по мнению Бишопа, является *принцип всезнания*, который является не чем иным, как принципом исключенного третьего, приложенным к утверждениям относительно бесконечных свойств и бесконечных множеств. Принцип всезнания в узком смысле утверждает, что для всякой бесконечной последовательности целых чисел $\{n_k\}$ или существует k, для которого $n_k = 0$, или же все члены отличны от 0. Он кажется очевидным в силу привычки, унаследованной от классической логики, но[7]

Многие теоремы в классической математике зависят существенным образом от принципа всезнания в узком смысле … Можно привести несколько примеров: теорема, что всякая вещественная непрерывная функция на закрытом ограниченном интервале достигает своего максимума; теорема о неподвижной точке для непрерывного отображения некоторой замкнутой области пространства в себя; эргодическая теорема; теорема Хана–Банаха. Тем не менее, эти теоремы не должны быть потеряны в конструктивной математике. Любая из этих теорем P имеет конструктивную замену Q, которая представляет собой теорему, сформулированную в рамках конструктивного подхода, и которая имплицирует P в классической системе, с доказательством, кото-

[7] E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, уже цит., p. 9.

рое, в общем, является простым обращением к принципу всезнания. К примеру, у теоремы о том, что любое непрерывное отображение некоторой замкнутой области евклидова пространства в себя имеет неподвижную точку, существует конструктивная замена в виде высказывания, что подобное отображение допускает точку, как угодно близкую к ее отображению.

Часто классическая теорема имеет больше одного заменителя, в том смысле, что она разбивается на разные теоремы, тонко используя и варьируя каждую гипотезу и способ достижения заключения. Эти заменители всегда дают больше информации, поскольку предоставляют алгоритмы или эффективные методы, или ограничения для возможных заключений. Теоремы о существовании всегда заменяются эффективными версиями. Большое количество разделов, в которых имеются хорошие конструктивные замены теорем классической математики, является для Бишопа доказательством того, что классическая математика имеет существенную опору в виде конструктивной истины. Такая постановка вопроса поясняет причину успеха Бишопа и внимание, которое конструктивизм вернул себе[8].

С точки зрения Бишопа, ранее конструктивизм не пользовался доброй репутацией по причине философских излишеств Брауэра, «вовлеченного в метафизические спекуляции из-за своего желания улучшить теорию континуума» в ущерб конкретной математической деятельности. С именем Брауэра и с интуиционизмом связано существование конструктивизма в двадцатом веке. Однако Брауэр, казалось, верил, как утверждает Бишоп, что без его вмешательства континуум стал бы дискретным. Его ученики в дальнейшем изменили его духу, пускаясь на компромиссы с логикой. Другие последователи сменили флаги, как Вейль, который «подавил свои конструктивистские убеждения», полагая, что «идеалистическая математика найдет свое оправдание в приложениях к физике».

Если вернуться в прошлое, следуя этим вехам, то там мы обнаружим представителей конструктивизма, существенно более философски мотивированных, нежели Бишоп с его прагматиче-

[8] Помимо предыдущих ссылок см. A.S. Troelstra, D. Van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, vol. 1, Amsterdam, North Holland, 1988.

ским подходом и другие современные последователи, целиком обращенные к доказательству теорем без прочих фантазий, взятых из головы.

Основой *интуиционизма*, как начиная с 1907 года заявлял Л.Э.Я. Брауэр[9], является положение о радикальном разрыве между мышлением и языком. Математика есть продукт человеческого разума. Выражение, сформулированное на некотором языке, не является математикой и не является также представлением математики. Язык служит лишь для сообщения, для предоставления возможности другим (попытаться) следовать за твоей мыслью[10]. Человеческое мышление иногда идеализируется интуиционистами, но чаще представляется состоящим из единичных актов мышления. Для них не существует какого-то коллективного ума, в частности, ум не бесконечен и работает всегда с конечным количеством информации. Математика заключается в ментальных конструкциях, первая из которых представляет собой натуральные числа и основана на

восприятии некоторого перехода времени, определенного расщепления некоторого момента жизни на две различные вещи, одна из которых уступает место другой, но остается в памяти. Пустая форма двуединства, порожденная таким образом, представляет собой базовую интуицию математики.

---

[9] Из большого количества источников цитируем только D. Van Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist: The Life of L.E.J. Brouwer*, vol. 1, Oxford, Oxford Univ. Press, 1999 и W.P. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam, Elsevier, 1990.

[10] L.E.J. Brouwer, *Historical background, principles and methods of intuitionism*, in South African Journal of Science, 49, 1952, pp. 139–143; итал. перевод *Fondamenti storici, principi e metodi dell'intuizionismo*, in C. Cellucci, *La filosofia della matematica*, уже цит., pp. 223–231. Другие вводные сочинения Брауэра и Гейтинга напечатаны в той же самой антологии, на стр. 233–267. Философские работы Брауэра опубликованы в L.E.J. Brouwer, *Collected Works* (под ред. A. Heyting), vol. 1, Amsterdam, North Holland, 1975. Литература по интуиционизму очень обширна. Доступное представление интуиционистской логики и математики имеется в M. Dummett, *Principles of Intuitionism*, Oxford, Clarendon Press, 1977.

Интуиция времени напоминает Канта. Брауэр называл Канта протоинтуиционистом, но его интуиция сильно отличается от кантианской, она креативна, не ограничена, как у Канта, наполнением понятий. Естественно, эта интуиция отличается и от той, о которой говорят платонисты. Слово «интуиция» использовалось во многих областях науки в начале века. Несмотря на то, что замысел Брауэра был, в целом, оригинальным, с налетом мистицизма, он сам признает, что среди многочисленных недругов из рядов формалистов или логицистов были и те, кого можно назвать предшественниками.

Среди предвестников интуиционизма иногда называют французских математиков, которые известны как полуинтуиционисты: Э. Борель, Р. Бэр, А. Лебег и А. Пуанкаре[11]. Все они придерживались мнения, что основа и единственная абсолютно гарантированная часть математики представлена натуральными числами. Интуиция натуральных чисел непоколебима, числа являются объектом первичной интуиции. На этой основе могут использоваться лишь методы, которые работают с определимыми сущностями. Необходимо исключить актуальную бесконечность (с различными оттенками, кое-кто исключает также потенциальную бесконечность) и аксиому выбора, что для последовательного конструктивиста, наоборот, допустимо, поскольку, если данные представлены конструктивно, выборы могут производиться при помощи некоторой систематической процедуры.

Все математические объекты для Брауэра являются умственными конструкциями. Слово «конструкция» также напоминает Канта, но имеет отличное, самое общее, значение. У Канта оно имело технический смысл геометрических построений с циркулем и линейкой. Кроме базовой интуиции, ум для Брауэра имеет и другие способности конструировать новые математические сущности, в частности, последовательности чисел. Для построения (необычных заменителей) континуума Брауэр, который так и не закончит свои размышления над этой проблематикой, введет многие новые

---

[11] Информацию о полуинтуиционистах в связи с зарождающейся теорией множеств можно найти в G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, уже цит., Parte I. По поводу предикативизма Пуанкаре см. A. Cantini, *Una nota sulla concezione semi-intuizionista della matematica*, in «Rivista di Filosofia», 69, 1978, pp. 465–486.

концепции, такие, как законосообразные последовательности, свободно становящиеся последовательности, объяснения, виды. Он сформулирует оригинальные методы доказательств, такие, как теорема о запирании, интуиционистские аналоги индукции (бар-индукция) и леммы Кёнига, которые совершенно эквивалентны своим традиционным аналогам, но неприятны математикам несмотря на то, что некоторые из них полезны для лучшего понимания непрерывности.

Брауэр замечает, что если некоторую выполненную конструкцию облечь в лингвистическую форму, то к ней могут применяться лингвистические преобразования. Результатом будет то, что в свою очередь может быть описанием некоторого возможного построения, в случае которого язык выполняет функцию кратчайшего пути до него. Это законно и гарантированно, лишь если в преобразованиях использовались некоторые определенные логические принципы, а не другие. Принцип непротиворечивости допустим, а закон исключенного третьего – нет.

Обоснование этих положений представляется более четким в изложении других авторов, которые в своих усилиях сделать интуиционизм более убедительным систематически обращались к логике. Главное место среди них принадлежит А. Гейтингу, ученику Брауэра, который в 1930 году излагает принципы интуиционизма[12] и при этом явным образом ссылается на Гуссерля.

Математическое высказывание для Гейтинга выражает некоторое ожидание или, в феноменологических терминах, некоторое намерение. Утверждение или подтверждение высказывания есть признание исполнения этого намерения. Таков всегда смысл утверждения. В отличие от высказывания или намерения, подтверждение является эмпирическим делом (к слову сказать, не выставляются, к примеру, пространственные и временные ограничения). Ожидание удовлетворяется при помощи некоторой конструкции, при помощи предъявления объекта. Неудовлетворение некоторого ожидания, не вре́менное, а окончательное, реализуется

[12] A. Heyting, *Die Intuitionistiche Grundlegung der Mathematik*, на Кёнигсбергском симпозиуме 1930 года, уже цит., англ. перевод в P. Benacerraf, H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, уже цит., с. 42–49.

доказательством невозможности. Следовательно, утверждать отрицание некоторого высказывания есть дело, требующее усилий. Доказательство невозможности проводится демонстрированием того, что определенное допущение приводит к противоречию. Доказательства также являются конструкциями. Намерение *не-p* удовлетворяется проверкой, что *p* есть абсурд. Выражаясь словами Беккера, цитированного Гейтингом, отрицание есть ожидание некоторого противоречия, содержащегося в первоначальном намерении.

Дизъюнкция, если рассматривать одну из традиционных логических связок, также является намерением. Она может утверждаться (быть истинной), только если утверждается одно из двух суждений в связке. Следовательно, *p или не-p* может утверждаться, только если имеется доказательство *p* или имеется доказательство того, что удовлетворение *p* ведет к противоречию. Два суждения «*p*» и «доказуемо, что *p*» выражают два разных намерения, первое из которых удовлетворяется построением, относящимся к тому, о чем говорит *p*, второе – построением, представляющим собой доказательство *p*. Аналогично, «недоказуемо, что *p*» и «доказуемо, что *не-p*» выражают два различных намерения, причем второе, понятно, сильнее первого. Легко представить также ситуации, в которых ни *p* не удовлетворяется, ни доказательства, что *p* – абсурд, тоже нет. Легко, прежде всего, если математика понимается в сочетании с идеей произведения творческого субъекта, как зависящая от времени, как совокупность выполненных построений, а не как совокупность истин. Отсюда видно, что принцип исключенного третьего неприемлем. Гамлет явно был интуиционистом, поскольку *to be or not to be* было для него проблемой, а не тавтологией. Другие интерпретации интуиционистской логики представляют ее как исчисление задач[13].

[13] A.N. Kolmogoroff, *Zur Deutung der intuitionistische Logik*, in «Mathematische Zeitschrift», 35, 1932, p. 565; A. Grzegorczyk, *A philosophically plausible interpretation of intuitionistic logic*, in «Indagationes Mathematicae», 26, 1964, pp. 596–601.

Во всяком случае, для любого *p*, *p или не-p* есть ожидание некоторого математического построения, следовательно, логика зависит от математики и отнюдь не лежит в ее основании.

Логика, применяемая в математике, должна, следовательно, строиться, отталкиваясь от математического понятия доказательства. М. Даммит[14] использовал эту идею как фундамент для логики в целом, для семантики в частности, применяя простейшее понятие доказательства интуиционистским образом.

Гейтинг обращается, прежде всего, к логике и арифметике[15], а не к проблеме континуума, и строит некоторую формальную интуиционистскую логику – одну из тех формальных систем, против которых выступает даже Бишоп. Интуиционистская логика имеет интересные интерпретации как в терминах возможных миров, исчисления задач, так и в терминах функционалов. Подобные системы интересны в теории доказательства для измерения силы различных теорий[16], но также верно, что с ними снижается немного подрывной заряд интуиционизма. Гёдель начал показывать то, что известно как принцип двойного отрицания, сначала для логики, затем для арифметики, иначе говоря, то, что двойное отрицание любой классической теоремы выводимо в интуиционистском смысле (то есть что невозможно доказать, что оно абсурдно). Интуиционистские системы дают, следовательно, доказательства относительной непротиворечивости для логики и классической арифметики.

До своего разбавления логикой интуиционизм Брауэра в двадцатые годы привлекал значительное внимание. Брауэр, будучи блестящим геометром, стал непримиримым оппонентом Гильберта не только на поле философии математики, но также и в академических дискуссиях. Гильберт был напуган его успехом в вопросе оснований и говорил об интуиционистской революции как о путче.

---

[14] M. Dummett, *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1991; итал. перевод *La base logica della metafisica*, Bologna, Il Mulino, 1996.

[15] Смотри A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam, North Holland, 1956.

[16] Смотри, к примеру, A.S. Troelstra, *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, уже цит.

В итоге он для защиты математики от угрозы Брауэра серьезно занялся теорией доказательства. Вейль, напротив, был среди тех, для кого Брауэр представлял настоящую революцию.

Вейль флиртовал с интуиционизмом весьма недолго. Но еще до этого он разработал свою собственную версию конструктивизма[17].

С самого начала Вейль выступил как трансцендентальный идеалист, обращаясь более к Фихте, чем к Канту, при некотором гуссерлианском влиянии. В своих работах он часто рекомендовал обращаться к рассуждениям Фихте. У Канта он усвоил, что познание требует априорных понятий и интуиции, и его работа может рассматриваться собственно исследованием отношений между формальными теоретическими понятиями и интуицией. В идеализме Вейля объективная истина не отвергается, однако рассматривается исходя из абсолютной, безусловной данности, которая является чистым сознанием. И реальный мир дан как интенциональный объект деятельности сознания[18].

Как и у Гуссерля, думать для Вейля значит всегда думать о чем-то (что исключает, может быть, что обдумывать некоторый логический принцип означает думать), и намерения могут удовлетворяться или нет. Чтобы знать, что некоторый объект соответствует некоторому намерению и что мысль, следовательно, не пуста, необходима очевидность, и источник этой очевидности есть интуиция.

Для математики отправной точкой может быть любая интуиция, сопровождаемая ее повторением и интуицией этого повторения, что приводит к интуиции определенной итерации всякой интуиции. Именно это, а не бесконечные повторения, есть основание натуральных чисел, именно интуиция делает так, что понятие «натуральное число» экстенсионально определено. Такая интуиция представляется, очевидно, тесно переплетенной с интуицией времени.

---

[17] См. R. Tieszen, *The philosophical background of Weyl's mathematical constructivism*, in «Philosophia Mathematica», 8, 2000, n. 3, pp. 274–301. См. также J.L. Bell, *Hermann Weyl on intuition and the continuum*, ibidem, pp. 259–73.

[18] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, Springer, 1918.

Так как бесконечность может быть постигнута благодаря лишь чистой интуиции, которая представляет собой идею итерации, то в примере с натуральными числами бессмысленно поворачивать вспять и искать теоретико-множественное основание для них.

В интуиции итерации нет возможности появления порочного круга, тогда как в мышлении, которое не основано на подобной интуиции, он всегда «сидит в засаде»[19]. Вейль придумывает парадокс прилагательного «гетерологический», чтобы дать пример интуиции, удовлетворение которой невозможно по принципиальным причинам. Он принимает, следовательно, сторону Пуанкаре в обличении непредикативности и предлагает пересмотр Анализа, в котором не применяется непредикативная теорема Больцано–Вейерштрасса[20].

В изложении своего предикативистского Анализа Вейль часто прибегает к существованию верхнего экстремума для ограниченных последовательностей рациональных чисел. В этом случае верхний экстремум можно определить, используя кванторы только на натуральных числах.

Сверх натуральных чисел предикативист допускает только уровни, образованные множествами, которые являлись бы определимыми в терминах множеств уже данных. Прояснение концепции определимости во многом обязано трудам Вейля, который уже в своей дипломной работе 1910 года интересовался этим вопросом, предлагая определенный язык и совокупность правил, которые в дальнейшем стали называться логикой первого порядка. Однако из повторяющихся уровней определимости над натуральными числами Вейль принимал лишь первый, выступая при этом менее либеральным, чем сам Гуссерль, что в результате не позволило ему развить идеи, которые затем привели Гёделя к иерархии конструируемых уровней.

Вейль продолжил размышлять над Анализом, который он предлагал, и над континуумом, который в нем был рассмотрен. Для него было очевидно, что (его) математический континуум и

---

[19] H. Weyl, *Der "circulus vitiosus" in der heutigen Begründung der Analysis*, in «Jahresbericht der Deutsche Matematiker-Vereinigung», 28, 1919, pp. 85–92.

[20] H. Weyl, *Das Kontinuum*, уже цит.

континуум интуитивный не совпадали. Формальный континуум был неизбежно атомистическим. Вейль мог лишь требовать, чтобы это формальное изложение было принято как некоторая *теория* континуума, оправдание которой нужно было искать в каком-то другом месте, как то происходит для физических теорий. Числа и функции предикативного Анализа допускают, по мнению Вейля, по крайней мере, некоторую трактовку движения, согласующуюся с тем, что обнаруживается в мире физической объективности. С. Феферман утверждает, что по прошествии времени такая адекватность нуждам физики, кажется, подтверждается[21].

В своем размышлении по поводу атомистического математического континуума, не соответствующего непрерывному континууму интуиции, Вейль приближается к Брауэру. В 1921 году он заявляет о прекращении собственных независимых разработок и принимает полностью сторону интуиционизма. Он думал, что континуум Брауэра мог бы быть математическим представлением интуитивного континуума, обоснованного интуицией потока сознания, а не физическими приложениями, для которых было достаточно того атомистического понятия. Не было, однако, полного согласия между двумя мыслителями по поводу свободно становящихся последовательностей. Для Брауэра они были индивидами и не могли быть квантифицированы. Для Вейля же лишь законосообразные последовательности были неделимыми, но не свободно становящиеся последовательности. Сущность последних заключалась, собственно, в представлении действительных чисел как становления в некотором недетерминированном временном потоке, где нет точек без длительности. Вейль предвосхищает даже Брауэра в замечании, что все вещественные функции являются непрерывными не в силу какого-то доказательства, а на основе непрерывности интуитивного континуума и невозможности разделения его на отдельные части.

Однако начиная с 1924 года Вейль все чаще публично заявляет о своей озабоченности по поводу ущерба, который отказ от за-

[21] S. Feferman, *Weyl vindicated. «Das Kontinuum» 70 years later*, in *Temi e prospettive della logica e della filosofia della scienza contemporanee*, a cura di C. Cellucci e G. Sambin, vol. 1, Bologna, Clueb, 1987, pp. 59–93.

конов классической логики наносил структуре передовых теорий, и разрушения прекрасного здания классической математики[22].

Неизбежно происходит его встреча с Гильбертом, который был озабочен теми же самыми проблемами. Вейль не отвергает Брауэра, но считает неотъемлемой основную часть математики, в которой присутствуют понятия без построений, данных интуицией. Продолжая допускать, что в этой части математики мы не имеем знания (имеем, скорее, веру), он считает, что нужно все-таки с ней согласиться. Он называет ее символической математикой. Математика, не основанная на интуиции, претендует на разговор о трансцендентном, приглашает к наивному реализму. Реализм неприемлем для идеалиста, но через гильбертовский аксиоматический формализм сознание пытается перепрыгнуть свою тень и представить трансцендентное посредством символов. Если математика должна сохранять некоторую культурную ценность, то нужно постараться придать смысл игре формулами. Для этого Вейль выделяет третью возможность, кроме идеализма и наивного реализма, некоторую перспективу, которую называет уровнем теоретического конструирования[23]:

> Но где этот трансцендентный мир, привнесенный верой, на который ссылаются символы? Я не нахожу его, если только не объединю полностью математику с физикой и не допущу, что математические концепции числа, функции и т.д. (или символы Гильберта) в целом играют ту же роль в теоретическом конструировании реальности, что и концепции энергии, гравитации, электрона и т.д.

Теоретическое конструирование отличается от интуиции, приближаясь к художественному произведению как некоторый креативный импульс к символическому представлению трансцендентного.

Как и Гильберт, Вейль в итоге ищет обоснования как для конструктивной математики, так и для классической.

---

[22] H. Weyl, *Filosofia della matematica e della scienza naturale*, уже цит., с. 54.

[23] H. Weyl, *Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik*, in Symposion, 1, 1925, pp. 1–23.

Среди крайних конструктивистских подходов стоит упомянуть также ультраинтуиционизм[24] и попытки совсем обойтись без отрицания[25].

Панорама конструктивной математики в действии, понимаемой как нечто отличное от оснований, представляется весьма пестрой. Сюда входят, к примеру, русская школа, базирующаяся на алгорифмах Маркова, конструктивная алгебра, исследования рекурсивных аналогов классических концепций[26]. Метаматематические же исследования рассматривают построение систем, представляющих частные подтеории классических теорий, и среди них большое внимание получили теории Фефермана[27].

Необходимое заключительное замечание по поводу значения конструктивизма в целом состоит в том, что разделы математики, которые расценивались как лишенные смысла и отбрасывались конструктивистами, представляют собой темы, касающиеся континуума или вопросов еще более абстрактных и крайне редко рассматриваемых в школьной математике. Преподаватели фактически преподают, если преподают, конструктивную математику. С другой стороны, конструктивная трактовка представляется более тонкой, это определенный вызов мыслительным способностям и экологической технологии их использования, это отказ от стрельбы из пушки по воробьям, когда достаточно рогатки. Для будущих преподавателей было бы полезно близкое знакомство с конструктивистским изложением действительных чисел и вещественных функций вместо того, чтобы пассивно воспринимать изложение классическое, которое полностью оторвано от простейшей практики.

---

[24] A.S. Esenine-Volpine, *Le programme ultra-intuitionniste des fondements des mathematiques*, in Infinitistic Methods, Oxford, Pergamon Press, 1961, pp. 201–233.

[25] N. Dequoy, *Axiomatique intuitionniste sans negation de la geometrie projective*, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

[26] D. Bridges, F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, уже цит.

[27] M.J. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics*, уже цит.

10. СТРУКТУРАЛИЗМ

Как структурализм, так и дедуктивизм, о котором поговорим в дальнейшем, не являются полноценными философиями, а скорее представляют собой лаконичные определения математики. Они выбирают один единственный характерный аспект: структуры – в первом случае, теоремы – во втором. Эти направления нарушают, конечно, принцип объективности и потому, что не дают ответов на все философские вопросы, и потому, что совсем пренебрегают разнообразными аспектами ежедневной практики. Но они делают это намеренно, поскольку не хотят заниматься ни философией, ни социологией. Тот, кто предлагает эти направления, хочет сказать, что есть математика с точки зрения математика. Эти две позиции предлагают мало, но они не предлагают глупостей и не рискуют быть фальсифицированными. Они выставляют, во всяком случае, на первый план, некоторую значимую характеристику, хотя и раскрывающую особенности математики лишь частично. Кроме того, они дают определение дисциплины в научных, математических терминах, и этого достаточно для тех, кто принимает эти направления. Следовать философским вопросам означало бы свернуть с центральной дороги в переулок без конца.

Структурализм утверждает, что математика есть изучение структур. Такая формулировка встречается и в других изложениях, к примеру, в гиперплатонизме, и не случайно. Если спросить математика, что он изучает, то ранее он ответил бы, что изучает числа или пространство, а сейчас чаще отвечает, ссылаясь на какие-то классы структур. Характерной особенностью структуралиста, однако, является, в отличие от реалиста, отказ отвечать на вопрос о том, что есть структуры, – ответ математически излишний. Но, все равно, он должен объяснить, как они заданы в математическом исследовании, и это можно сделать разными способами.

Первая уловка – это использование неформальной семантики, в которой фундаментальные понятия рассматриваются как первичные и не определяемые. Структуры характеризуются свойствами, касающимися отношений и функций, которые действуют в структурах. Однако ни концепция истинности, ни концепция свойств не анализируются. Структуры различаются числом и типом операций и отношений, но не говорится также, что представляют собой операции или отношения. Они понимаются как первичные логические концепции. Математика выделяет некоторые специфические операции и отношения, формулируя их свойства через формулы или условия, как могло бы быть для отношений порядка, частичного порядка, эквивалентности. Не только представление структур, но также и их изучение проводятся затем семантически неформальным образом.

Проблема с этим обращением к неформальной семантике заключается в том, что при этом проявляется слишком неприкрытый отказ от признания результатов (даже если только в смысле культуры, а не математики), которые являются всеобщим достоянием. В двадцатом веке логика строго определила семантику, проанализировала ее концепции и сделала это в математических терминах, в частности, теоретико-множественных. Конечно, язык семантики остается неформальным умышленно, но он все равно является очень близким к теоретико-множественному или напоминает его. Прибежище в неформальном, кажется, означает тогда, что математика изучает то, что изучает.

Другое решение – совсем избежать семантических рассуждений и сказать, что структуры характеризуются аксиомами. В этом случае для задания некоторой структуры при помощи символических записей постулируются условия, которые должны быть удовлетворены со стороны операций и отношений. «Удовлетворены» также является семантическим термином, но использованным лишь как оборот, содержащий следующий намек: свойства структур состоят сейчас в следствиях, выводимых из аксиом. Тогда структурализм окрашивается в цвета формализма или же может быть спутан с дедуктивизмом. Позицию формализма принял, к примеру, Бурбаки[1].

---

[1] N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques*, in F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathematique*, уже цит., pp. 35–47 ; английская

Для сохранения структурализма как независимого направления необходимо все-таки сказать, что есть структуры, даже если Бурбаки, как мы видели, нетерпим и саркастичен по этому поводу. Философы в соответствии со своими обязанностями обсуждают, как должны были бы встраиваться структуры в ансамбль бытия, где они вплоть до последнего времени отсутствовали: так как многим они представляются чем-то отдельным, они кажутся близкими к свойствам; еще один ржавый инструмент, который достается с онтологического чердака – универсалии *ante rem*[2].

Структуры, о которых говорят современные математики, отнюдь не упали с неба платонизма, а родились в ходе истории. Математики не сразу заметили, что то, чем они занимались (или что изучали), были структуры (или построение структур) или, лучше сказать, что самым подходящим словом для выражения того, чем они занимались или что изучали, было слово «структура». Чтобы проследить постепенное становление структурной перспективы, нужно вспомнить историю математики девятнадцатого и начала двадцатого века[3].

Достаточно было бы сказать, что математики боролись с бедностью языка для выражения того, что зарождалось у них на глазах, но для чего не было подходящего слова, поскольку никогда это не представлялось столь значительным. Они должны были выразить то, что находили общего в разных теориях или областях изучения, которыми они занимались. До того, как появились сюрпризы логики, термины «теория» и «область» использовались вза-

---

версия – *The architecture of mathematics*, in Amer. Math. Monthly, 57, 1950, pp. 221–232.

[2] S. Shapiro, *Talking about Mathematics*, уже цит., pp. 263–264.

[3] Подборку материалов для изучения структурализма можно найти в L. Vercelloni, *Filosofia delle strutture*, Firenze, La Nuova Italia, 1988. С математической точки зрения см. J. Dieudonné, *The difficult birth of mathematical structures (1840–1940)*, in *Scientific Culture in the Contemporary World*, под ред. V. Mathieu, P. Rossi, специальный выпуск Scientia, 1979, pp. 7–23, и J. Guérindon, J. Dieudonné, *L'algèbre depuis 1840*, in *Abrégé d'histoire des mathématiques*, под ред. J. Dieudonné, Paris, Hermann, 1978, vol. I, pp. 91–127; см. также G. Lolli, *La matematica: i linguaggi e gli oggetti*, уже цит., и *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, уже цит., гл. 1.

имозаменяемым образом, как если бы некоторая теория идентифицировала бы некоторую область, и наоборот.

Что общего имеют операции, которые выполняются с помощью подстановок, и операции параллельных переносов и изометрических движений в геометрии, тем более, когда группу подстановок можно было также представить цветным графом, как сделал А. Кели? Что общего между элементарной геометрией и векторной алгеброй?

Сходства подобного типа все чаще появлялись в математике девятнадцатого века. Находились аналогии между совершенно независимыми теориями. Алгебра высвечивала формальную идентичность различных операций. Далее приведем еще примеры, относящиеся к дедуктивизму.

Тогда начали говорить, что математические теории изучают свойства групп операций. Создалась возможность привести в точное соответствие друг с другом теории или области, которые казались различными по историческим причинам или в силу различных используемых систем записи, обеспечивая их совмещение, пожалуй, лишь при помощи лингвистических приемов. В таких случаях отмечалось, что группы операций этих теорий имеют одну и ту же структуру.

Аналогии обнаруживались как снизу, между существующими областями, так и сверху, от теории, которая могла иметь несколько интерпретаций.

Если в разных системах объектов обнаруживаются операции с одинаковыми свойствами, то возникает идея, что объекты сами по себе не заслуживают математического интереса, не имеют, следовательно, существования вне их взаимного расположения, которое накладывает на них некоторая группа операций. В первых примерах разные реализации изоморфны. Их материальные различия кажутся чем-то математически незначимым. В то же самое время продолжает бытовать мнение, что теория должна полностью фиксировать свойства операций, с которыми имеет дело. Долгое время говорилось, к примеру, что две группы имеют одну и ту же структуру, если они изоморфны. Затем условие смягчается, поскольку выясняется, что возможны также неизоморфные реализации одной и той же теории. Тогда не только отдельные индивиды не важны, но также и их комплексы, поскольку возможны, к примеру, модели разных мощностей.

Перед лицом множественности интерпретаций теории спрашивается, что определяют аксиомы или, как говорилось в течение некоторого периода, чтó суть неявные определения. Так как они стремятся охватить возможно большее количество вещей через некоторые их общие свойства, то аксиомы представляют собой, так сказать, определение вида. На математическом языке будет говориться, что они определяют структуру.

Концепция структуры идет в ногу с основной идеей аксиоматической теории, которую мы рассмотрим в разделе о дедуктивизме. В действительности не удалось дать определение «структуры», которое не ссылалось бы на определенный класс интерпретаций некоторой теории[4]:

> Структура есть по сути список операций и отношений и их свойств, которые обычно выражены аксиомами и сформулированы так, что представляются как свойства, которым удовлетворяет некоторый класс специфических математических объектов, даже очень различных между собой.

Это является для сегодняшних математиков «общим и эффективным понятием структуры», которое «происходит от все более широкого применения аксиоматического метода», даже «если при этом и не заботятся о том, чтобы дать некое формальное определение понятия "структура"».

В недавней истории алгебры слово «структура» использовалось и до сих пор используется также другим образом. К примеру, речь идет о теоремах, касающихся структуры, когда доказывается, что объект образован посредством канонических операций из более простых объектов того же типа. Говорится затем, что математический объект имеет некоторую структуру, когда выясняется, что его операции, определенные, может быть, особыми и независимыми способами, удовлетворяют также аксиомам этой структу-

---

[4] S. Mac Lane, *Structure in mathematics*, in «Philosophia Mathematica», 4, 1996, n. 2, pp. 174–183. Весь номер представляет собой специальный выпуск, посвященный структурализму.

ры. В тридцатые годы обнаружилось, что во многих случаях решетка подобъектов некоторого объекта есть его внутренняя характеристика как некоторого класса, и полагалось возможным сказать, что решетка подобъектов и есть структура объекта. «Ясно, что алгебраисты 1930 года были счастливы размышлять о структурах с многочисленными значениями»[5].

Структурализм заинтересован, прежде всего, в выявлении разного рода отношений между различными структурами, к примеру, погружения числовых систем в иерархию алгебраических систем от групп до полей, или же в выявлении одновременного наличия многих структур на одной и той же области.

В учении о структурах «не существует ничего, что было бы собственно "математическим объектом", хоть и говорится об этом». Предлог для этого заключается в том, что использование структур обнаруживает, что объекты могут быть описаны только «с точностью до изоморфизмов». Однако причина глубже, а это – лишь ее следствие.

Действительно, одним из наиболее важных успехов в общем изучении структур стал дальнейший отход от индивидов и от предметных областей, мотивированный на этот раз математически, а не логически, как в концепции модели некоторой теории. Рассмотрение структур подталкивает естественным образом к рассмотрению функций между структурами одного типа, функций, которые должны *сохранять структуру*, и к возможности характеризовать, следовательно, сами эти структуры через тип функций, которые сохраняют структуру. Это морфизмы, которые становятся важнее самих структур. И действительно, также и операции между структурами определяются в терминах морфизмов. Так, к примеру, обычное произведение двух структур определяется не через множество упорядоченных пар, а через связь между морфизмами, относящимися, соответственно, к произведению и к сомножителям. (Структура, накладываемая на) обычное декартово произведение множеств является одной из возможных иллюстраций, но, естественно, только с точностью до изоморфизмов, как и все канонические конструкции теории категорий. Не только нет необходи-

[5] S. Mac Lane, *Structure in mathematics*, уже цит., pp. 174–183.

мости говорить, что структуры – это множества, но, может быть, это даже и ошибочно.

Любопытно отметить один исторический нюанс. В то время как математика двигалась в направлении структур с признанием и прославлением все большего их разнообразия, развивалась также и теория множеств (стимулированная, прежде всего, со стороны Анализа, а впоследствии также со стороны семантики[6]) со своими требованиями единообразия и редукционизма. Не случайно, что впоследствии структурализм, развиваясь автономно, фактически отверг объятия теории множеств, даже в бурбакистской практике, чтобы обратиться к концепциям теории категорий[7].

Истинная сущность бурбакистского структурализма заключается в том, что в центр математики ставятся несколько основных структур (алгебраические структуры, структуры порядка и топологические структуры), которые затем встречаются одновременно присутствующими в различных формах и в классических структурах типа вещественных чисел, и в новых структурах типа топологических векторных пространств.

Возможным философским продолжением структурализма может быть исследование связей и зависимостей между основными математическими структурами и элементарными действиями человека или ситуациями, в которых надо упорядочить множество, скомбинировать, выполнить обратные операции, узнать симметрии и другие формы. Это новый взгляд, связанный с эволюционной психологией, о чем поговорим далее. Он не был представлен в классическом структурализме в стиле Бурбаки.

Во франкоязычной культуре бурбакизму благоприятствовало широкое внимание к структуралистской проблематике[8]. Структурализм пережил эпоху расцвета в разных областях, от лингвистики

---

[6] По поводу многочисленных ролей теории множеств, как математических, так и касающихся оснований математики, см. G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, уже цит., часть 1.

[7] По поводу теории категорий ограничимся указанием одного доступного текста F.W. Lawvere, S.H. Schanuel, *Teoria delle categorie (Matematica concettuale)*, Padova, Muzzio, 1994.

[8] См., к примеру, A. Lautman, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathematiques*, Paris, Hermann, 1930.

с Ф. де Соссюром и антропологии с К. Леви-Стросом до психологии с Ж. Пиаже, со вкладом даже сюрреализма. Успех был поддержан в свою очередь появлением структурализма математического[9]. Эти аспекты истории культуры не принадлежат, однако, нашей теме, хотя мы еще и столкнемся с тем, что было названо их пагубными последствиями на методику преподавания.

При подведении итогов к концу века выявились четкие ограничения и недостатки бурбакизма как в отношении оснований, так и по поводу его влияния, которое имело место на развитие математики. Беззастенчивое и пренебрежительное поведение в отношении оснований, которое во многом определялось общими убеждениями математиков, на поверку оказывается продуктом высокомерного обмана[10]. Бурбаки ни разу основательно не обсуждает значение теорем Гёделя о неполноте, ограничиваясь их упоминанием как конца программы Гильберта, но более серьезным является факт (в подтверждение, что для Бурбаки теория множеств есть лишь некоторый язык), что его теория представляет собой все еще теорию Цермело без обязательного включения схемы преобразования.

Что же касается настоящей математики, то Бурбаки ставится в вину непризнание важности или неспособность поддержать развитие геометрии, прогресс вычислительной математики и, наконец, связь с физическими теориями[11].

---

[9] По поводу отношений Ж. Пиаже с бурбакизмом смотри, к примеру, L. Vercelloni, *Filosofia delle strutture*, уже цит., с. 241–255.

[10] A.R.D. Mathias, *The ignorance of Bourbaki*, in «The Mathematical Intelligencer», 14, 1992, n. 3, pp. 4–13. В этой работе неверно утверждается, что Бурбаки никогда не высказывался по поводу теорем Гёделя о неполноте. Он делал это, пусть и кратко, в исторических заметках в статье *Метаматематика*, см. N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960; итал. перевод *Elementi di storia della matematica*, Milano, Feltrinelli, 1963, pp. 55–56. Замечание не очень важное, но показательное, раскрывающее истинно структуралистский менталитет, состоит в том, что в версии Бурбаки первая теорема о неполноте утверждает, что арифметика является не категоричной. Естественно, формулировка корректна, но редко используется.

[11] R. Hermann, *Mathematics and Bourbaki*, in «The Mathematical Intelligencer», 8, 1986, n. 1, pp. 32–33.

11. ДЕДУКТИВИЗМ

Под «дедуктивизмом» понимается тезис, что математика есть совокупность утверждений в форме «если… то…», которые являются логически законными (в английском языке используется также термин *if-then-ism*). Это направление отводит основную роль логике в определении математики, но и роль, и логика значительно более слабые, чем в логицизме.

Логика, на которую ссылается дедуктивизм, есть логика первого порядка или, во всяком случае, логика с четким полуразрешимым определением логического вывода. Ее роль лишь дедуктивная. Вырисовывается симметричное расхождение с логицизмом, который, по крайней мере вначале, принимал исторически сформировавшиеся логические системы в том, что касалось выбора аксиом и правил, с эмпирической уверенностью в их адекватности и был заинтересован в основополагающих аксиомах и определениях. В дедуктивизме же вопросы, касающиеся определений, целиком оставлены без внимания. Он характеризуется тем значением, которое придает гипотетико-дедуктивной организации математических теорий, где аксиомы рассматриваются в лучшем случае как неявные определения. Ни одно определение посредством аксиом не выделяет единственным образом бесконечные структуры, например, структуру натуральных чисел, в отличие от амбиций логицизма в этом направлении.

Дедуктивизм не отождествляется с формализмом, поскольку не требует, чтобы выводы были формализованными. Не случайно о имеющих логическую силу условиях говорится в семантических терминах. Логика остается все же формальной, и с теоремой о полноте, для того чтобы выводы заключений могли бы также быть формальными. Требовать, чтобы отношение логической выводимости было полуразрешимым, практически означает то же самое, что и требовать, чтобы имела силу теорема о полноте, то есть что сама логика, даже если она представлена семантически, была бы аксиоматизируема с помощью системы логических аксиом и эффективных правил вывода. Упоминавшаяся уже логика второго порядка есть пример логики, которая не имеет этого свойства, но которая (взамен этого?) сильнее в выразительном плане, позволяя, в частности, формализовать теорию категорий. Следовательно, дедуктивизм использует результаты современной логики для того, чтобы выбрать именно слабую логику (и здесь напрашивается вопрос: почему?) С философской точки зрения это течение не представляется хорошо обоснованным. Но дедуктивизм нельзя оценивать в абстрактных терминах. Он, как структурализм, представляет собой плод недавней истории математики и открытия аксиоматического метода.

Тот же самый процесс, который привел к появлению понятия структуры, позволил также прояснить природу аксиоматического метода.

Одним из наиболее скрупулезных исследователей этого феномена был Ф. Энриквес (Federigo Enriques)[1], чьи рассуждения в современном прочтении мы передадим своими словами, для того чтобы показать, как этот феномен воспринимался современниками.

«Различные теории» имеют разные первопричины, но все они обусловлены освобождением от реалистического упрощения природы и «сходятся в одной и той же идее преобразования». Этими течениями являются: проективная геометрия, неевклидовы геометрии, построение моделей для геометрии (Риман, Бельтрами), алгебра и логика в Англии, арифметизация Анализа, основания Анализа и даже физика с новой идеей, поддержанной позитивистской философией и состоящей в том, что задача физики заключается в построении моделей реальности.

Несмотря на то, что эти разные течения «все участвуют в реформе современной логики, она полностью утверждается только через критику принципов геометрии, благодаря чему математики приобретают зрелое сознание свершившейся в веках революции».

Критика принципов геометрии заключается в формальном переосмыслении аксиоматического метода, унаследованного от

[1] F. Enriques, *Per la storia della logica*, Bologna, Zanichelli, 1922, репринтное переиздание 1987, в особенности гл. 3.

Евклида. Все начинается с Ж. Жергонна и с концепции неявного определения, которой мы ему обязаны. Жергонн говорил о неявном определении в том случае, когда несмотря на незнание смысла термина, который появляется в некотором постулате, его понимание позволяет придать смысл и этому термину. Неявные определения примут форму определения системы основных понятий при помощи системы высказываний.

Плодотворность идеи была показана общим принципом заменяемости понятий, который берет свое начало в *принципе двойственности* (того же Жергонна, 1826): теоремы проективной геометрии представляются всегда парами, так как каждая теорема имеет свою двойственную теорему, получаемую взаимной заменой терминов «точка» и «прямая». Вначале это было принципом или, может быть, лишь наблюдением без обоснования. Так было вплоть до систематизации проективной геометрии К.Г.Х. фон Штаудтом, но, по мнению Энриквеса, прежде всего Ю. Плюккер был тем, кто, «заставив принцип двойственности опираться на соображения о координатах прямых и плоскостей, дал возможность аналитической обработки взаимосвязанных отношений» (тройки чисел могут теперь быть как точками, так и окружностями). Результаты Плюккера – это не просто развитие аналитической геометрии, но и новая логическая техника. «Прямое сопоставление двух рядов геометрических свойств или двух геометрий, унифицированных в аналитическом представлении, побуждает переводить из одной в другую разные формы интуиции».

Именно этот путь, по мнению Энриквеса, ведет к прояснению цели аксиоматического представления. «Логическая форма, которую хотелось бы придать постулатам, есть именно форма отношений, имеющих значение, независимое от специфического содержания понятий».

Любая геометрическая теория рассматривается как некоторая система логических отношений между несколькими понятиями, обозначенными словами «точка», «прямая» и, возможно, некоторыми другими. «Можно оставить этим словам некоторое неопределенное абстрактное значение, рассматривая их, следовательно, как символы неизвестных понятий, но формально удовлетворяющих фундаментальным высказываниям, которые выражают геометрические отношения. Тогда допустимо фиксировать по желанию, наподобие некоторой конвенции, значение символов, но так, чтобы удовлетворить вышеупомянутым формальным условиям. Возникает, таким образом, бесконечное число возможных *конкретных интерпретаций* абстрактной геометрической теории».

Первая работа, в которой принципы геометрии приобретают форму чисто логических отношений между не определяемыми первичными понятиями, обязана своим появлением М. Пашу (Moritz Pasch), который даже выводит оттуда естественные следствия, если говорить о доказательствах[2]:

> Чтобы геометрия стала истинно дедуктивной наукой, было необходимо, чтобы выводы следствий были независимы от смысла геометрических понятий, так же, как они были независимы от рисунков. В процессе вывода допустимо и, может быть, полезно думать о значении геометрических понятий, участвующих в игре. Но это не обязательно. Если же это становится необходимым, то это знак того, что в дедукции присутствует некий дефект и принятые для доказательства предположения неадекватны.

Паш продолжает, отмечая, что если имеется верное доказательство, которое не зависит от смысла, приданного геометрическим понятиям, то когда меняется значение исходных суждений, оно меняется также у заключения, и вывод остается законным по отношению к новому значению. Другими словами, вывод справедлив для всех интерпретаций.

Энриквес упоминает далее сводящиеся к тому же самому видению оригинальные вклады Пуанкаре, Гильберта и Пеано и даже добавляет, что, «насколько мы можем судить, смысл логической формы должен быть заново постигнут в качестве личного завоевания, возможно, каждым из математиков, принадлежащих к одному и тому же поколению»[3].

Все математики того поколения должны были считаться с новой реальностью и пришли к одному и тому же заключению, про-

---

[2] M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, Teubner, 1992, p. 98.

[3] F. Enriques, *Per la storia della logica*, уже цит., с. 166.

диктованному определенным ходом дел. К тому же самому выводу, который последующий автор выразил в некотором подобии клятвы Гиппократа: «на каждого математика, который в душе интеллектуально честен, возлагается теперь уже абсолютная обязанность представлять свои рассуждения в аксиоматической форме… словами, которые лишены всякого интуитивного смысла»[4].

Реформа логики, о которой говорит Энриквес в контексте новой концепции аксиоматического метода, состоит, таким образом, в освобождении аксиом от всякого привилегированного значения. Следовательно, логика, которую можно применять к ним, может быть только формальной (в этом смысле не обязательно символьной), и, следовательно, формальная логика впервые видит некоторое признанное оправдание своему существованию. В заключение как неявное следствие мы получаем определение теоремы. Теорема есть высказывание, истинное для всех интерпретаций аксиом.

Математики конца девятнадцатого – начала двадцатого столетия впервые в истории дают определение теоремы и, в то же самое время, впервые дают экстенсиональное определение логического следствия.

Как дедуктивизм, так и структурализм имеют корни в этой далекой эпохе, но структурализм в двадцатом веке, обогатившись и обновившись, стал на длительный период превалирующей идеологией. Дедуктивизм же не прогрессировал, не пытался укрепиться, ставя, к примеру, вопрос о выборе аксиом. Нельзя сказать, правда, что и другие философии в этом преуспели.

Аксиомы, которые могут интересовать дедуктивизм, не являются, конечно, аксиомами, связанными с основами математики. Слабое внимание к этим аксиомам обусловлено также реальным феноменом, который имеет исторический интерес, а именно, изменением статуса высказываний, которые могут быть переведены из теорем в аксиомы и наоборот, в зависимости от логической организации, выбранной для теории. Примером может служить теорема Паппа, которая стала дополнительной возможной аксиомой для того, чтобы отличить, так сказать, плоскости паппианские, то есть соответствующие этой аксиоме, от плоскостей непаппиан-

[4] J. Dieudonné, *Les methodes axiomatiques modernes*, уже цит., с. 544.

ских[5]. То же самое можно сказать в отношении теоремы Дезарга. Это обстоятельство не ведет с необходимостью к конвенционализму в отношении аксиом. Для сторонника дедуктивизма важна сложная система возможных логических отношений, а не их конкретный и простой однонаправленный поток.

Как результат, дедуктивизм находится сейчас в неустойчивом равновесии. Тот, кто его исповедует, рискует, с одной стороны, смешаться со структуралистами, если предпочитает работать в семантических терминах, а с другой – с формалистами, если сосредоточивается на формальной дедуктивной практике.

Всем этим дедуктивизм доставляет беспокойство многим, несмотря на свои внешне скромные претензии. Они, на самом деле, включают положение, что в математике не приняты выводы не дедуктивные, и это не нравится ни реалистам, ни натуралистам, и еще больше – эмпиристам, как мы скоро увидим. Тезис дедуктивизма подразумевает, что математическое знание не зависит от веры и от социальной практики и, в частности, защищено от эмпирически мотивированных ревизий.

С другой стороны, если математика должна оставаться наукой, то для тех, для кого она должна оставаться в этом статусе, математика должна предоставлять возможность для ее пересмотра. Но поскольку является фактом то, что математические теоремы представляют собой логически истинные условные предположения, свободные от любых контрпримеров, то возражения ориентированы в направлении, описанном ниже[6].

С одной стороны, отрицается, что логика (или одна из логик) способна охарактеризовать и обеспечить правила для образования утверждений логической необходимости и логической выводимости. Если, к примеру, необходимость означает истинность во всех интерпретациях, то определение было бы круговым, некоторой фразой теоретико-множественной семантики, то есть математическим. С другой стороны, сама логика не освобождена (или: нельзя предположить, что она освобождена) от эмпирически мотивированных ревизий, так как существуют разные типы логики и разные

[5] Ph.J. Davis, *The Education of a Mathematician*, уже цит., с. 62–66.

[6] См. M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит., гл. 8.

предложения по использованию альтернативных логик, каковы, например, интуиционистская или квантовая.

Эти замечания не учитывают результат стабильности, который является следствием совместного действия теорем о корректности и полноте и был отмечен Г. Крейзелем (Georg Kreisel)[7]. Теорема о корректности не зависит от какой-либо характеристики понятия интерпретации (теоретико-множественной или нет), но только от рекурсивного определения выполнимости[8]. Отсюда следует, что если понятие интерпретации должно быть модифицировано так, что расширяется собственно область теоретико-множественных интерпретаций, и тем более, если она сужается, то понятие логической истины остается тем же самым. Трудно пока представить какое-то другое понятие интерпретации, которое не включало бы ныне существующие. Нельзя, естественно, исключить, что в будущем не возобновятся поиски интенсиональных определений логических понятий и что придется, пожалуй, отбросить рекурсивность, но ничто на горизонте, кажется, не предвещает этого.

---

[7] G. Kreisel, *Informal rigour and completeness proofs*, in *Problems in the Philosophy of Mathematics*, под ред. I. Lacatos, Amsterdam, North Holland, 1967, pp. 138–171.

[8] Речь идет о рекурсивном определении, в котором выполнимость некоторой формулы определяется выполнимостью составляющих формул в зависимости от главной логической операции.

12. ФАЛЛИБИЛИЗМ

Этим названием обозначим философию И. Лакатоша, философию целиком личностную, но которая заслуживает отдельной главы из-за широкого влияния, хотя и непрямого, которое она оказала. Можно было бы поместить ее в разделе эмпиризма, поскольку именно работа Лакатоша *Доказательства и опровержения*[1] дала один из начальных импульсов этому новому течению. Философия Лакатоша стала первой философией новой математики из тех, которые хотели дать альтернативу по отношению к фундаменталистским школам, окончательно оформившимся в тридцатые годы, и к бурбакизму, связанному с этапом математики, который в семидесятые годы уже исчерпывал себя. Лакатош, однако, не вдохновлялся нарождающейся математикой.

Лакатош был последователем методологии К. Поппера. Фальсификационизм Поппера резюмируется в тезисе, что некоторая теория является научной только в той мере, в какой является фальсифицируемой. Чтобы быть научной, теория должна давать предсказания, которые можно проверить таким образом, что, по крайней мере, один из априорно возможных исходов проверки, если был бы реализован, мог бы опровергнуть теорию, фальсифицируя предсказание. Для Поппера научный прогресс был продуктом состязания теорий или смелых, если не сказать рискованных, гипотез, выдвинутых для решения проблем, но таких, которые можно было бы в принципе опровергнуть в соответствии с принципом

---

[1] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1976, сначала опубликована в четырех частях в The British Journal for the Philosophy of Science, 14, 1963–1964; итал. перевод *Dimostrazioni e confutazioni*, Milano, Feltrinelli, 1979; рус. перевод Лакатос И. *Доказательства и опровержения: как доказываются теоремы*. Пер. с англ. – М.: Наука, 1967. (– прим. переводчика). О Лакатоше см. S. Feferman, *The logic of mathematical discovery vs. the logical structure of mathematics*, in PSA 1978, под ред. P.D. Asquith, I. Hacking, vol. II, East Lansing, Michigan, Philosophy of Science Association, 1981, pp. 309–327.

фальсифицируемости. Вдохновение Лакатоша, как и название его работы, обязано книге Поппера *Предположения и опровержения*[2].

Лакатош объясняет свое намерение во введении к работе, начиная со следующего резонного и не вызывающего возражений замечания, весьма редкого в своей корректной оценке гильбертовой математики:

> Часто случается в истории мысли, что при появлении нового мощного метода быстро выдвигается на авансцену изучение задач, которые этим методом могут быть решены, в то время как остальное игнорируется, даже забывается, а его изучением пренебрегают.
>
> Именно это как будто произошло в нашем веке в области философии математики в результате стремительного развития метаматематики. Объектом метаматематики является такая абстракция математики, в которой математические теории заменяются формальными системами, доказательства – некоторыми последовательностями формул, определения – «стенографическими уловками», которые «теоретически необязательны», но «типографически удобны». Эта абстракция была придумана Гильбертом, чтобы получить мощную технику для изучения некоторых проблем методологии математики. С другой стороны, существуют проблемы, которые выпадают из рамок метаматематической абстракции. Среди них имеются задачи, относящиеся к неформальной (нем. *inhaltlich*[3]) математике и ее развитию, и все проблемы ситуационной логики решения математических задач.

Нельзя было бы сказать лучше. Казалось бы, после этого уравновешенного изложения достоинств и ограничений метаматематики Лакатош должен был предложить ее интеграцию с каким-то новым мощным методом для изучения проблем, остающихся вне ее компетенции. Вместо этого, сразу же, он обращается с метаматематикой, которую называет главной «школой математической философии», как с формализмом, то есть с позицией, которая «стремится отождествить математику с ее формальной аксиомати-

---

[2] K. Popper, *Conjectures and Refutations*, London, Routledge&Kegan Paul, 1969; итал. перевод *Congetture e confutazioni*, Bologna, Il Mulino, 1972; рус. перевод *Предположения и опровержения* в книге Поппер К. *Логика и рост научного знания: избранные работы*. Пер. с англ. М.: Прогресс, 1983. (– прим. переводчика.)

[3] По содержанию, с точки зрения содержания (нем. – прим. переводчика).

ческой абстракцией (а философию математики – с метаматематикой)».

Вначале он корректно утверждал, что в метаматематике теории заменяются формальными системами, а не отождествляются с ними, и что это так с учетом их (систем) подчинения формальным методам. Метаматематика даже в первоначальном гильбертовом смысле свободна от формалистских обязательств относительно природы математики и не претендует на то, чтобы исчерпать философию математики. А. Робинсон, к примеру, в пятидесятые годы предлагал расширение самой первичной метаматематики при помощи инфинитарных методов[4].

Совершив такой пируэт, Лакатош начинает бороться с формалистской философией, сетуя на узкий спектр вопросов, которые она принимает как допустимые, и отмечая ее негативное влияние как на философию, так и на историю математики. Среди прочих недостатков, «в формалистской философии не остается места для такой методологии, как логика открытия». Он предлагает обогатить *методологию* математики проблематикой, близкой к той, которая рассматривается в эвристике Пойа или в логике открытия Поппера, которую называет «ситуационной логикой».

> Скромная цель [этой работы] состоит в разработке идеи, что неформальная (квазиэмпирическая) математика развивается не через монотонное возрастание количества несомненно доказанных теорем, а через непрерывное улучшение догадок при помощи критики и умозрения, при помощи логики доказательств и опровержений.

Лакатош углубляется, таким образом, в свой знаменитый анализ теоремы Эйлера о многогранниках, то есть формулы $V - E + F = 2$, которая связывает V – число вершин, E – число ребер (англ. *edge*), и F – число граней. Анализ приобретает форму «рациональной реконструкции» начиная с первого доказательства О. Коши посредством выдуманной пылкой дискуссии в классе между учителем и учениками, в то время как реальная история вынесена в примечания.

[4] Лакатош, естественно, в поддержку своего изложения находит подходящие цитаты из образчиков формализма, к примеру, из Карнапа.

Дискуссия вводит много интересных концепций, полезных для анализа математической аргументации: локальный и глобальный контрпримеры, неявные гипотезы, расширение понятий (англ. *concept stretching*), мысленные эксперименты, сведение результата, который необходимо доказать, к ряду других результатов, которые относятся к разным областям знания. *Case study*[5] Лакатоша заслуженно пробудил интерес и внимание к построению неформальных доказательств. К сожалению, нет возможности проследить все это в деталях. Необходимо только предостеречь, что читать его книгу нужно критически и с хорошей предварительной подготовкой, поскольку в тексте присутствуют сильные утверждения в поддержку позиции автора, которые являются голословными и безосновательными. Например, его вывод, что доказательства вида доказательства Коши никогда не удалось бы провести формально, так как в процессе доказательства, среди прочего, используются такие физические понятия, как растяжимые резиновые поверхности. Подобный аргумент неубедителен и сбивает с толку. Он затемняет основной вектор развития математики. Использование подобных физических концепций в математической аргументации является не чем иным, как первым проблеском возможной новой, еще не сформулированной математической теории относительно обсуждаемого феномена. В данном случае совершенно понятно, что речь идет о топологии. Никогда не говори «никогда». Древние греки умели физически решать уравнение $x^2 = 2$, проводя диагональ единичного квадрата. Какой-нибудь Λακατοσ сказал бы тогда, что это уравнение никогда не будет решено в числах.

И из методологии Лакатоша также следует ответ на вопрос, что такое математика. Чтобы понять его, нужно исследовать значения используемых терминов. Читатель, вероятно, никогда не встречал термин «квазиэмпирический». Можно спросить кроме того, куда ведет, по мнению Лакатоша, и на что нацелено развитие неформальной математики. Не на формальную математику, как легко предположить. Вероятно, с его точки зрения, математика навсегда останется неформальной, и истинная математика никогда

[5] Исследование конкретного случая или конкретной проблемы (англ. – прим. переводчика).

не является формальной, если формализм должен быть опровергнут.

В другой своей работе[6] Лакатош прямо поднимает подобные вопросы и проводит границу между евклидовыми теориями и теориями квазиэмпирическими:

> Возможно, наилучшим способом охарактеризовать квазиэмпирические теории в противовес евклидовым является следующий. В некоторой дедуктивной системе назовем «базовыми высказываниями» те суждения, которым изначально были приданы истинностные значения, и «истинными базовыми высказываниями» – подмножество тех, которые получили значение истины. Система будет евклидовой, если она является [*дедуктивным*] *замыканием* своих базовых высказываний, которые признаны истинными. В противном случае она является квазиэмпирической.
>
> …
>
> Некоторая евклидова теория может с полным основанием считаться истинной. Квазиэмпирическая теория, самое большее, – хорошо подтвержденной, но всегда предположительной. Кроме того, в евклидовой теории истинные базовые высказывания, которые находятся на вершине дедуктивной системы (и обычно называются «аксиомами») *доказывают,* в некотором смысле, остальную часть системы. В квазиэмпирической теории (истинные) базовые высказывания *объясняются* остальной частью системы.
>
> Является ли некоторая дедуктивная система евклидовой или квазиэмпирической, определяется направлением течения истинностных значений внутри системы. Система будет евклидовой, если характерное течение представляет собой передачу истины от множества аксиом «вниз» к остальной части системы. Логика в этом случае – *инструмент* (*органон*) *доказательства*. Система будет квазиэмпирической, если характерное течение – обратная передача ложности от ложных базовых высказываний «вверх» в направлении «гипотез». Логика в этом случае – *органон критики*.
>
> …
>
> Некоторая теория, являющаяся квазиэмпирической в вышеуказанном смысле, может быть как эмпирической, так и неэмпирической в обычном смысле этого термина. Эмпирической она может быть только в том случае, если базовые теоремы – пространственно-временные сингулярные базовые высказывания.

---

[6] I. Lakatos, *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*, in I. Lakatos, *Philosophical Papers*, 2 voll., Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1978, перепечатано в T. Tymoczko, *New Directions*, уже цит., с. 29–48.

Последняя фраза – уточнение термина «квазиэмпирический», которое показывает, что «квази» не намекает на аппроксимацию, не означает, что математика приближается к тому, чтобы стать эмпирической, а пересылает к другим критериям классификации. Являются ошибочными представления о доктрине Лакатоша[7], в соответствии с которыми он «не утверждает, что математика есть собственно эмпирическая наука, самое большее – квазиэмпирическая».

Ослабление, подсказанное фразой «самое большее», сбивает с толку. Лакатош хочет сказать, что математика не является априорной и абсолютной, и в процессе этого меняет значение термина «эмпирический», чтобы не ввязываться в старые и бесплодные дискуссии, как это делал его учитель в отношении верифицируемости. «Фаллибилизм» – термин, использованный Лакатошем для подчеркивания научного характера (англ. *science-likeness*) математики, то есть того, что математическое и в целом научное познание – одного и того же типа с точки зрения попперовской методологии.

В приведенном выше отрывке, к сожалению, присутствуют различные смешения. Прежде всего, математическая теория представлена как дедуктивная система – способом, который нельзя назвать революционным. В этом математик сможет узнать свои объекты. Уже меньше он может узнать их в передаче истинностных значений некоторым высказываниям – операции, которая никогда не выполняется. Самое большее, что происходит – некоторые высказывания негласно предполагаются истинными. Но они рассматриваются таковыми, поскольку были выбраны в качестве аксиом, а не наоборот. Предположение их истинности означает лишь, что в дальнейшем будут исследоваться их следствия, и в соответствии со свойствами материальной импликации нет необходимости полагать их ложными (в интерпретациях, в которых они ложные, импликация продолжает иметь истинное значение). То, что никогда не наблюдалось в действительности, – так это присвоение ложного значения каким-то высказываниям.

---

[7] Как, например, у Tymoczko в *New Directions*, уже цит., с. 29.

Дедуктивное замыкание некоторого множества аксиом названо евклидовой теорией, а квазиэмпирическая теория – не евклидовой. Однако существует много вариантов не быть дедуктивным замыканием некоторого множества аксиом. К примеру, система может не быть замыканием, то есть быть сильно неполным множеством высказываний несмотря на возможность добавить туда теоремы. В этом случае, однако, отсутствующее замыкание есть лишь исторический момент, в действительности присущий всем существующим теориям. Замыкание понимается всегда в потенциальном смысле и никогда – в актуальном. Может ли существовать на самом деле система, в которой некоторые высказывания помечены как ложные и все-таки использованы как предпосылки в каком-то доказательстве? Могла бы (их отрицания были бы помечены как истинные), но никогда не наблюдалась, и в ней не видится смысла.

Далее Лакатош изъясняется лучше. Ложные высказывания не являются предпосылками, вероятно, они – заключения. Не понятно тогда однако, как происходит, что они изначально помечаются как ложные. Не понятно также, что такое гипотезы, от которых в обратном направлении передается ложность. Это не могут быть аксиомы, которые истинны. Тогда что это?

Возможно, Лакатош хочет сказать своей патетической, но запутанной прозой, что иногда при выводе получаются результаты, которые не нравятся, которые оказались не теми, что ожидались, или не соответствуют роли, которую теория должна была играть. Объявим их кратко ложными, и тогда ясно – этот акт передается назад к аксиомам, которые будут объявлены ложными и тогда заменены. А вот отмеченное Лакатошем различие между ходом вниз передачи истины и ходом вверх передачи ложности не имеет смысла. Положив, что система является дедуктивной и связь между высказываниями является дедуктивной, надо признать, что связь между предпосылками и заключениями будет единственной. Предпосылки влекут за собой заключения. Логика учит, что отрицание следствия влечет отрицание какой-то из предпосылок. Логика остается логикой. Если хочется выразить этот классический логический закон (закон контрапозиции) в семантических терминах, заявляя, что ложность заключения влечет ложность одной из предпосылок, то это допустимо, но это два эквивалентных способа рассмотрения одной и той же дедуктивной связи. Если тот, кто конструирует теорию, оказывает предпочтение предпосылкам, то он будет считать заключения истинными. Если он не доволен выводами, которые его разочаровывают или не соответствуют тому, что хотелось получить, он будет модифицировать предпосылки, которые посчитает ложными. В любом случае эти рассуждения об истинности и ложности проводятся в конце или, во всяком случае, после дедукции, они вовсе не являются априорными инъекциями истинностных значений.

В конечном счете, у Лакатоша нет определения квазиэмпирической теории. Угадывается лишь желание рассмотреть теории в процессе становления, когда еще не выкристаллизовалось множество несомненных начал теории, а проводятся опыты по возможным дедукциям, чтобы посмотреть, уместен ли некоторый выбор аксиом, отвечает ли он целям, для которых строится теория. Все это – просто здравый смысл и совсем не то, что обычно происходит при построении и развитии некоторой математической теории или разных теорий, если решается, что некоторые аксиомы сохранены для некоторого типа желаемых заключений, а другие должны быть заменены, если возникает желание получить другие выводы. До консолидации теории было бы вполне уместно говорить не об аксиомах, а, по-попперовски, о предположениях.

Отбрасывание фальсифицированных предположений, когда ложность передается назад, ставит проблему так называемых потенциальных фальсификаторов, проблему, которая существует и для всей философии Поппера. Увидим далее, чем эти потенциальные фальсификаторы могли бы быть для математики; конечно, они не являются просто изначальным решением отметить некоторые базовые высказывания как ложные.

Заметим также, что странно использовать термин «евклидовый» для теорий, названных так Лакатошем, то есть для чего-то такого, что к математике не должно бы иметь никакого отношения начиная с момента, с которого «вся математика – квазиэмпирическая». Тогда и теория Евклида – не математика. В действительности «исследования по основаниям математики неожиданно привели к выводу, что некоторая, в духе Евклида, реорганизация математики как единого целого может быть невозможной, что, по крайней мере, наиболее богатые математические теории являются, будучи научными теориями, квазиэмпирическими».

Это замечание является, вероятно, намеком на теоремы о неполноте, но направлено оно против возможности единой и окончательной теории, которая охватила бы всю математику. Речь идет о вопросе, отличном от вопроса евклидовой организации отдельных теорий. Неполные теории типа арифметики, однако, в силу их неполноты, не станут квазиэмпирическими по Лакатошу, поскольку ни одна их аксиома не фальсифицируется.

Хотелось бы понять суть оценки, данной усилиям стольких математиков по приданию евклидовой организации, то есть, по всей видимости, нематематической, своим теориям. Возникает подозрение, что Лакатош говорит не о математике, а о методологии математики. В действительности именно так и есть. Он считает аксиоматизацию теорий ошибочным методологическим императивом, который, вероятно, мог бы быть вытеснен. По существу, по мнению Лакатоша, успехов у аксиоматизации мало и они незначительны, только теория групп достойна сохранения.

С другой стороны, он описывает также типичную эволюцию евклидовых теорий в терминах, которые осциллируют между историческим и идеологическим:

> Развитие евклидовой теории происходит в три стадии. Первый этап – донаучная фаза проб и ошибок, которая составляет ее предысторию. За ним следует период поиска оснований, который реорганизует дисциплину. Отбрасываются сомнительные ответвления, устанавливается дедуктивная структура надежного ядра. После чего остается лишь решение задач внутри системы, представленное, прежде всего, доказательством или опровержением интересных предположений. [Открытие] некоторого универсального метода решения для теории может целиком исключить эту стадию и завершить развитие теории.

Квазиэмпирическая математика, наоборот, представляет собой перманентный кругооборот смелых догадок, конкурирующих теорий, критики, опровержений (вся терминология – попперовская). Она никогда не достигнет стадии формализации (второй стадии). Или не должна бы достичь ее, поскольку в действительности «вплоть до сегодняшнего дня ни одна неформальная математическая теория не смогла избежать формализации» (по причине плохой методологии). Причины этого большого коллективного самообмана не ясны. Остается только факт, что квазиэмпирическая математика в итоге несмотря на свое положение, казалось бы, истинной математики, существует лишь во временных и нестабильных формах.

Лакатош сознавал тот факт, что слабым местом его методологии, оставляя в стороне реальную историю, являются потенциальные фальсификаторы. В естественных науках это факты или протокольные высказывания, которые превалируют над некоторой теорией в том смысле, что при наличии расхождений между ними и предсказаниями теории факты (впрочем, всегда нагруженные теорией) имеют больший вес. Могли бы быть ими также другие теории, менее рискованные или с большим эмпирическим содержанием, но совсем не просто определить эти концепции без нового погружения в проблематику эмпиризма. Проблема их определения, к тому же, имеет подлинно драматический характер, поскольку «не следовало бы легко уступать фаллибилизму» и «как можно серьезно относиться к фаллибилизму без серьезного отношения к возможности фальсификации?»

Лакатош безуспешно пытался указать в качестве примеров потенциальных фальсификаторов арифметические высказывания, на основе которых принимаются или отвергаются сильные аксиомы бесконечности, опираясь на размышления Гёделя по этому поводу. Тот факт, что аксиомы бесконечности влияют на элементарную арифметику, может быть использован только для решения вопроса об их принятии или отклонении, и здесь не видно какого-то конфликта теорий.

Нет примеров математических теорий, противостояние которых было бы разрешено некоторым фальсификатором, как это происходит в случае физических теорий. Скорее случается так, что обе теории продолжают жить сами по себе. В случае аксиом бесконечности, на основе следствий из них, которые выглядят весьма привлекательными, они могут быть скорее приняты, чем отброшены. Естественно, отклоняется их отрицание, а смелой догадкой является позитивная аксиома существования нового большого множества, которая принимается, а не опровергается.

Лучшим описанием гипотетического потенциального контрпримера, которое Лакатошу удается дать, является следующее. Предположим, что после аксиоматизации некоторой теории не может быть предложен ни один контрпример (если только теория непротиворечива), который мог бы быть сам формализуем в языке этой теории. Тогда возможный контрпример может прийти только из неформального рассмотрения предмета, для систематизации которого и предлагается теория. Имеются подобные примеры, когда теория находится в фазе становления или на первом этапе развития евклидовых теорий. Так происходит, когда математизации подвергается некоторая неформальная концепция. Тогда некоторое неформальное высказывание может быть фальсификатором предварительной теории.

Эпизоды такого типа в действительности случаются часто и известны в истории математики. Лакатош не упоминает об этом, но случай теории вероятностей представляет собой богатый источник подходящих примеров.

Такая предварительная стадия поиска, несомненно, более интересна и захватывающа, нежели другие, спокойные или оторванные от содержательной системы фазы. Хотя и они не лишены полных приключений моментов, только хотелось бы наблюдать и анализировать их в соответствующих терминах вместо того, чтобы налагать на них методологию, заимствованную из других наук. Представляется, во всяком случае, не совсем удачным утверждать, что такая красивая и значимая теория, как теория групп (которую Лакатош ценит, но признает, что для нее не существуют потенциальные фальсификаторы), не является математикой на основе методологической установки, утверждающей, что математика должна быть квазиэмпирической.

13. ЭМПИРИЗМ

Лакатош считает, что математика, как и другие науки, подвержена ошибкам в силу своей научной природы. Х. Патнэм также утверждает, что «математическое знание похоже на знание эмпирическое» и, следовательно, как и оно – ненадежно и подвержено ошибкам. Патнэм следует однако в русле традиционного эмпиризма, как явствует из его характеристики квазиэмпирических методов[1]:

> Под «квазиэмпирическими» методами я понимаю методы, которые аналогичны методам физических наук, с той лишь разницей, что «индуктивно обобщенные» единичные высказывания, использованные для проверки «теорий» и тому подобного, сами являются результатом вычислений, вместо того чтобы быть «отчетами о наблюдениях» в обычном смысле.

Обе позиции намечают обновленную версию эмпиризма как философии математики. Он всегда, в действительности, был одним из направлений философии математики (Аристотель, кстати, был эмпиристом), но как предположение о происхождении и формировании математических концепций. На эту проблему новые эмпиристы не обращают внимания.

Базовый тезис традиционного эмпиризма состоял в том, что математические понятия не существуют в отрыве от физических объектов, из которых они были получены посредством абстрагирования, и что именно акт абстрагирования участвует в создании чисел и фигур. В девятнадцатом веке Дж.С. Милль[2] был основным разработчиком эмпиризма и, как следствие, мишенью для критики со стороны Фреге[3]. Помимо других основных возражений, Фреге оспаривал то, что числа являются свойствами множеств, выявляя

[1] H. Putnam, *What is Mathematical Truth*, уже цит.

[2] J.S. Mill, *A System of Logic*, 1842; итал. перевод *Sistema di logica*, под ред. M. Trinchero, Torino, Utet, 1988.

[3] G. Frege, *I fondamenti dell'aritmetica*, уже цит.

трудности такого понимания, прежде всего, для 1 и 0. Что же касается происхождения числа путем абстрагирования от различий объектов некоторого множества, то Фреге задавал вопрос, происходит ли сначала абстрагирование, а затем объединение в совокупность (в таком случае все различия исчезали бы, и объединение не могло бы дать в результате ничего, кроме одного единственного элемента), или сначала – объединение, а потом – абстрагирование, указывая при этом на трудность абстрагирования, к примеру, от всех взаимных различий между 1000 объектами без путаницы и потери счета. Кроме этого, если абстрагироваться, например, от объекта Луна, то могут быть получены различные понятия (спутник Земли, спутник вообще, небесное тело, не обладающее собственным свечением), но никогда не возникает число 1. Фреге с логической точки зрения оспаривал фундаментальный принцип эмпиризма, состоящий в том, что любое определение, кроме установления значения выражения, должно выражать некоторый факт, связанный с наблюдением. Спрашивается, с определенной долей иронии, какой физический факт соответствует определению числа 777.864?

Тенденция, связанная с эмпиризмом, в конце девятнадцатого столетия была более распространенной, чем об этом можно судить по работам, отмечающим одного единственного Милля. Это обстоятельство и оправдывает неистовство Фреге. Среди прочих – Паш[4], который несмотря на его блестящие рассуждения по поводу формальных доказательств не был сторонником дедуктивизма. Он предложил некоторое построение арифметики, основанное на концепции предмета, простой идее, которая включает имена и события с отношением предшествования и прямого следования, что ведет к формированию концепции цепи событий и, следовательно, к натуральным числам. Паш также думал, что математика несовершенна по сути, за исключением случая наличия разрешимости некоторой теории.

[4] M. Pasch, *Grundlagen der Analysis*, Leipzig, Teubner, 1909.

Эмпиризм Милля был вновь предложен в наши дни социологами науки[5] для оспаривания априори и обнаруживается у всех тех, кто думает, что вычисления и доказательства должны пониматься как физические манипуляции. В общем, однако, эмпирист основывается на подобных конкретных действиях, но пытается обосновать скачок в сферу формального и символического как произведенный некоторой способностью, которая должна быть (если не дискредитированным абстрагированием, то достаточно близкой к нему) способностью видеть формы, или паттерны. Для социологов предел возможного – трансформация манипуляций в правила на основе общественного конвенционального одобрения.

Представителем радикального эмпиризма является Ф. Дэвис[6], который утверждает, что нужно принимать к рассмотрению только способности людей как биологических животных и серьезно воспринимать тот факт, что всякая коммуникация и всякая мысль реализуется посредством обмена или использования материальных элементов.

Эмпирические соображения, следовательно, обязательны с самого начала символических манипуляций. Символы представляют собой материальные знаки, физические следы, пятна или вибрации, и два таких символа могут быть только квазитождественными. Манипулирование ими есть, следовательно, физический факт, подверженный всем неточностям, неопределенностям и даже, к счастью, статистическим закономерностям вселенной.

Среди положений некоторой математики, которая неизбежно становится платонистической, необходимо указать:

Аксиома 0. Могут быть созданы различные символы. Могут быть созданы копии некоторого данного символа. Символами можно манипулировать, их можно воспроизводить и соединять с абсолютной точностью. Сим-

---

[5] D. Bloor, *Knowledge and Social Imagery*, Chicago, Chicago Univ. Press, 1976 (1991^2); итал. перевод *La dimensione sociale della conoscenza*, Milano, Raffaello Cortina, 1994, гл. 5, 6. Смотри также G. Lolli, *Beffe, scienziati e stregoni*, уже цит.

[6] Ph.J. Davis, *Fidelity in mathematical discourse: Is one and one really two?*, in «Amer. Math. Monthly», 79, 1972, n. 3, pp. 252–263, перепечатано в T. Tymoczko, *New Directions*, уже цит., с. 163–175.

волы могут быть распознаны как одинаковые или различные, по необходимости.

Платонист мог бы возразить, что Аксиома 0 не нужна, поскольку математика существует без необходимости материальной поддержки. Не платонист, в особенности, математик, знакомый с теорией передачи информации, возразит, что подобное утверждение – нонсенс. Мы выполняем все наши действия лишь с некоторой вероятностью успеха.

Подобная аксиома была действительно предложена в прошлом и явилась объектом ироничных выпадов Фреге. «Прелестный пример того, как даже математики могут спутать основы доказательства с ментальными или физическими условиями, которые должны быть удовлетворены в его представлении, можно найти у Э. Шредера. Под названием «Особая аксиома» он предлагает следующее: "Принцип, который я имею в виду, можно назвать Аксиомой символической стабильности. Она гарантирует, что в процессе наших доказательств и выводов символы останутся неизменными в нашей памяти или, что предпочтительно, на бумаге"»[7].

Аксиома 0, по мнению Дэвиса, никогда не верифицирована, это некоторый неосуществимый идеал, в особенности, когда переходят к рассмотрению вычислений и доказательств. «Выведение теоремы или проверка доказательства имеют лишь вероятностную силу», и всякое знание имеет лишь вероятностный характер, с вероятностью, которая снижается при росте сложности объектов, с которыми ведется работа. Отсюда делается вывод, что «математика проявляет некоторые черты экспериментальной науки. Мы спасены от хаоса лишь благодаря стабильности универсума, который допускает повторяемость экспериментов и эффекты автокоррекции практики».

Новый математический эмпиризм, заявивший о себе в восьмидесятые годы, не заботится об обосновании абстрагирования. Он вообще ничего не хочет обосновывать, поскольку движим, прежде всего, антифундаменталистской интенцией. Характерным для него является упор на методологическую тождественность математики и других естественных наук. Он, однако, не доходит до экстремизма Дэвиса, хотя и зачисляет его в свои ряды.

[7] G. Frege, *I fondamenti dell'aritmetica*, уже цит., с. 218.

Современный эмпиризм[8] утверждает, что метод проб и ошибок, догадок и опровержений, исследования на ЭВМ, эмпирическая индукция, вероятностные выводы – одним словом, квазиэмпирические методы Патнэма достаточны для получения математических результатов, совершенно удовлетворяющих сообщество, которое должно их санкционировать.

Привлекательность этой позиции заключается в том, что она использует в качестве своих аргументов эпизоды математической практики, а не философские или логические домыслы. Такая очевидность понятна и близка математикам, следовательно, желанна, но в чем она убеждает – не ясно.

Базовый тезис состоит в том, что методы и, следовательно, тип истины, который присущ математическому познанию, того же самого рода, что и, соответственно, в случае эмпирических наук. В естественных науках, однако, «истинный» означает истинный на физический манер. Содержание же математических положений не состоит из сообщений о физических фактах, даже во внешне конкретном случае комбинаторики, где речь идет не о конкретных объектах, а о типах изоморфизма физических расположений (если только не принимать экстремальную позицию Дэвиса, но сам Патнэм допускает, что базовые единичные высказывания не являются «отчетами о наблюдениях» в обычном смысле наблюдений).

Понятие истины в математике не связано с фактами, а зависит от более абстрактных понятий. Впрочем, даже эмпирическая истина зависит не только от чувственного опыта, но и от того, как интерпретируется математическая (нередко весьма солидная) часть соответствующей теории. Патнэм представляет, однако, свой тезис как положение реализма. Реализм для него – единственная философия, которая не выставляет науку как чудо. Математический реализм опирается на интеграцию математики и физических наук, но мы уже видели в связи с натурализмом, что этому тезису, мягко

---

[8] Наиболее важные работы R. Hersh, *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, уже цит., P.J. Davis, R. Hersh, *The Mathematical Experience*, уже цит. Определенный критический разбор представлен в G. Lolli, *Dimostrazioni ed esperienza matematica*, in *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, уже цит., гл. XII.

выражаясь, чего-то недостает, если говорить о существовании математических объектов.

Если вынести за скобки проблему истины, то остается математическая практика. Одно из ее актуальных направлений – эксперименты, проводимые на ЭВМ. Сказать «эксперимент» – все равно, что произнести «эмпирическая наука». Публикуются многочисленные книги и отчеты со словами «эксперименты», «лаборатория», «исследование» в названиях[9]. Отдельный журнал «Journal of Experimental Mathematics» издается с целью исследовать, «как можно использовать ЭВМ для изучения проблем, которые можно решать вычислительно, а по-другому – нет… Мы взяли за образец физиков-экспериментаторов, то, как они верифицируют свои результаты, как обеспечивают надежность полученных данных…, как сообщают свои озарения [*insights*]»[10].

При наиболее взвешенном подходе к вычислительным экспериментам они рассматриваются как нацеленные на формулировку предположений, на наблюдение и идентификацию явлений и закономерностей, которые затем требуют своего объяснения. Даже *computer exploration of concepts*[11] возвратилось бы в рамки традиционной деятельности, поскольку математические идеи не рождаются уже готовыми, а всегда требуют изучения перед тем как примут форму некоторого строгого определения.

Имеются, однако, и те, кто считает, что исследования на ЭВМ и выдвижение предположений могли бы оказаться достаточными и для морального удовлетворения, и как самодостаточный признанный вклад в развитие математики. Они предлагают рассматривать его как предпочтительный, если не эксклюзивный, по отношению к последующему доказательству, проводимому скорее ради при-

[9] Без претензий на полноту охвата в качестве типичных примеров, отдав должное U. Grenander, *Mathematical Experiments with the Computer*, New York, Academic Press, 1982, с программами на языке Ада, что относится к предыстории, отметим E. Maycock Parker, *Laboratory Experiences in Group Theory*, Washington D.C., MAA, 1996; *Exploring ODES with Modern Technology*, Washington, MAA, 1999.

[10] J. Borwein, P. Borwein, R. Girgensohn, S. Parnes, *Making sense of experimental mathematics*, in «The Mathematical Intelligencer», 18, 1996, n. 4, pp. 12–18.

[11] Компьютерное исследование концепций (англ. – прим. переводчика).

знания учёным цехом[12]. По мнению Патнэма, к примеру, если бы гипотеза Римана была проверена в огромном числе случаев при помощи ЭВМ (что на самом деле имеет место), то можно было бы сказать, что она верифицирована и, вероятно, может быть спокойно признана[13].

Осведомленный свидетель, однако, оспаривает это[14]:

> На сегодняшний день гипотеза [Гольдбаха] проверена (H.J.J. de Riele, J.-M. Deshouillers) для всех четных чисел $m \leq 10^{13}$. Имеется, кроме того, доказательство Чена (J.-R. Chen), упрощенное Россом (P.M. Ross), что любое достаточно большое четное число m может быть представлено как сумма $p + q$, где p – простое число, а q – квазипростое, в том смысле, что q – или простое, или произведение двух простых чисел. При всей этой достоверной убедительности, однако, ни один математик не скажет, что гипотеза, следовательно, верна для всех m.

Одна из тысячелетних прописных истин гласит, в действительности, что[15]

---

[12] Подобное недвусмысленное предложение было сделано в A. Jaffe, F. Quinn, *Theoretical mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics*, in «Bulletin AMS», 29, 1993, pp. 1–13, с дальнейшей дискуссией *ibidem*, 30, 1994, pp. 178–211. Смотри обсуждение в G. Lolli, *Le dimostrazioni: sono ancora necessarie?*, in *XXXVII Olimpiadi di Matematica*, Milano, AgipPetroli, 1997, pp. 87–103 и в G. Lolli, *Morte e resurrezione della dimostrazione*, in «Le Scienze», 1997, n. 345, pp. 50–57.

[13] Отвлекаясь от эмпирических индуктивных выводов и аналогий, проиллюстрированных примером, вновь взятым у Эйлера, *в целом*, Патнэм использует термин «квазиэмпирический» достаточно вольным образом для обозначения любого недедуктивного шага в построении математики и приводит в качестве примера историю разработки оснований, которые привели к аксиомам теории множеств. Примеров недедуктивных аргументов при выборе аксиом можно найти сколько угодно, так как выбор группы аксиом – решение, всегда обусловленное историей или ситуацией. Аксиомы, конечно, не могут быть выведены. Самое большее, рассматриваются их дедуктивные следствия. Что же касается теории множеств, следует напомнить, что Цермело использовал именно аргумент необходимости по поводу их дедуктивной адекватности с точки зрения потребностей математической науки (отнюдь не, по-холистски, всей науки).

[14] J. Rotman, *Journey into Mathematics*, Upper Saddle River, N.J., Prentice-Hall, 1998, p. 4.

[15] M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит., с. 138.

Исключительной чертой математики является то, что пока представляется возможным доказать (или опровергнуть) некоторую гипотезу, математики будут рассматривать ее как открытую проблему, даже когда в соответствии с критериями естественных наук недедуктивная очевидность результата (или его отрицания) неопровержима.

Эмпиризм, однако, подпитывает позиции, отмеченные выше, и сам подпитывается ими, и позиционируется, таким образом, вне всяких традиций[16]. Основной вывод, который можно сделать при обсуждении точки зрения эмпиризма, заключается в том, что математика должна быть искусно изувечена посредством устранения доказательств, которые не входят в схему эмпирических исследований, что еще сильнее, чем ущерб от платонизма. С точки зрения эмпиризма строгое доказательство, которое признается через процедуру его формальной презентации, рассматривается как наследие эпохи, когда умы были затуманены фундаментализмом, то есть идеей абсолютной истины. Настоящая же математическая деятельность – другая. В лучшем случае доказательства играют техническую роль как часть фальсификационистского процесса попперовской стратегии предположений и опровержений, как это было у Лакатоша, или же остаются как полезное вспомогательное средство, когда это возможно, для достижения истины неспешным, но, по сути, без риска, способом. По мнению Патнэма, достоинство доказательств как инструмента познания состоит в том, что они не повышают риск противоречий. Поэтому именно эксперименты вводят новые рискованные и потому интересные истины. С такой программой эмпиризм является неприемлемой философией, если он не в состоянии уловить связи, которые, конечно, имеются и позволяют интегрировать функции экспериментов и доказательств[17].

Для обоснования положений эмпиризма не нужна философская аргументация, нужны подтверждения со стороны практики и

---

[16] Имеется в виду, конечно, эмпиризм в философии математики. – Прим. научного редактора.

[17] Начальные указания для программы подобных исследований имеются в G. Lolli, *Esperimenti e dimostrazioni*, in *Educazione matematica e sviluppo sociale*, под ред. N.A. Malara, Soveria Mannelli, Rubbettino, 2001, p. 85–128.

истории, которые берутся в нескольких показательных примерах, если и не очень редких, то всегда миноритарных. Вся современная математика, евклидова математика Лакатоша, кажется тогда одной большой иллюзией и бесполезно потраченной работой, каким-то *love's labour lost*[18] по проведению доказательств, с некоторыми, весьма ограниченными, случаями эмпирических сценариев, которые следует пересмотреть заново и переоценить.

Примеры заимствуются у Эйлера, к которому возвращаются все те, кто отстаивает превосходство эмпирических или эвристических нестрогих методов в самом сердце математики. Лакатош поставил в центр дискуссии теорему о многогранниках. Патнэм и Штайнер[19] используют один и тот же эйлеровский пример о значении ряда обратных квадратов. Оба взяли его в действительности у Д. Пойа[20].

Доказательство в данном случае в основном базируется на смелой аналогии между рядами и многочленами за счет их разложения на линейные множители и на эмпирическом подтверждении, что эта аналогия дает результат, численно проверяемый с высокой степенью точности, и обеспечивает также другие правдоподобные результаты или подтверждает уже имеющиеся, полученные другим допустимым способом (в отличие, необходимо напомнить, от других аналогий между рядами и полиномами, которые оказались, напротив, опасными, как, например, распространение ассоциативности с известными парадоксами в отношении рядов).

Патнэм и Штайнер забывают, однако (в отличие от Пойа), окончание этой истории. Без сомнения Эйлер, на основании численных результатов и некоторых других следствий своего метода, был глубоко убежден в силе примененной аналогии. «Для нашего метода, который может некоторым показаться недостаточно надежным, здесь обнаруживается великое подтверждение [сумма

[18] Напрасный бескорыстный труд (англ. – прим. переводчика).

[19] M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, уже цит., с. 103–107.

[20] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, vol. 1: *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1954, p. 17–22; рус. перевод Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения*. Пер. с англ. М.: Наука, 1975. – прим. переводчика.

знакопеременного ряда величин, обратных нечетным числам, – знаменитого ряда Лейбница]. Поэтому мы совершенно не должны сомневаться и в других результатах, выведенных тем же методом». Однако, что тоже правда, Эйлер продолжал сомневаться, проверял свои результаты вновь и вновь, пока не нашел доказательство сложное, но допустимое по канонам того времени [21].

Даже термин «квазиэксперименты» взят у Эйлера, вероятно, через Пойа (несомненно, Лакатошем). Именно работам Пойа обязан вновь возникший повышенный интерес к методам Эйлера. Его том *Индукция и аналогия в математике* начинается цитатой из работы Эйлера 1756 года под названием *Specimen de usu observationum in mathesi pura*, которая подтверждает не только наличие нестрогих сценариев в развитии математики, но также их многочисленность и, прежде всего, их присутствие в сознании математиков, которые всегда с готовностью принимали и счастливо разрешали проблему интеграции таких сценариев с доказательством[22]. В этой работе Эйлер заявляет, что доказательство предположений, к которым пришли при помощи эмпирической индукции, нужно не только для устранения всех сомнений, но для того, чтобы поднять на новый уровень наше «познание чисел». И при оценке его полезности нужно рассматривать не только внешние приложения, но также и внутренние применения к самому процессу организации мышления.

Эйлер не одинок в своем подходе к развитию математики. Другие математики, великие и не очень, также использовали эмпирическую индукцию в своей работе. Гаусс заявлял, что получал свои результаты при помощи систематического экспериментирования. «Все же в одном отношении Эйлер кажется мне [Пойа] единственным: он старается изложить относящиеся к вопросу индуктивные доводы заботливо, в деталях, в четком порядке. Его изложение является «чистосердечным изложением идей, привед-

[21] *Ibidem*, p. 21.

[22] Для более углубленной дискуссии смотри G. Lolli, *Esperimenti e dimostrazioni*, уже цит.

ших его к этим открытиям» [Кондорсе], и имеет особую прелесть»[23].

Как видно, фигура Пойа играет ключевую роль вдохновителя нового эмпиризма. Эмпиристы и антифундаменталисты цитируют его и используют как своего наиболее сильного союзника среди математиков, но вынуждены признавать, что «несмотря на все свои инновации, Пойа остается переходной фигурой в философии математики. Он проторил дорогу квазиэмпиризму, но так и не сделал последнего шага в его направлении… [Квазиэмпиристы] делают этот шаг, ставя под сомнение положение о том, что доказательства полностью надежны, окончательны и обжалованию не подлежат»[24].

Позиция Пойа резюмируется в действительности следующим заявлением[25]:

> Математика считается доказательной наукой, но это лишь один из ее аспектов. Завершенная математика, представленная в окончательной форме, выступает как чисто доказательная, состоящая только из доказательств, однако математика в становлении похожа на любое другое человеческое знание в процессе становления. Нужно догадаться о математической теореме, прежде чем доказать ее; нужно догадаться об идее доказательства, прежде чем провести его в деталях. Нужно сопоставлять наблюдения и следовать аналогиям; нужно пробовать вновь и вновь. Результат творческой работы математика – доказательное рассуждение, доказательство; но доказательство, открытое при помощи рассмотрения возможностей, при помощи догадок.

Заслуживает размышления замечание, что «*результат* творческой работы – доказательство». Квазиэмпиристы же считают, что доказательство – всего лишь дополнение, созданное иллюзорно для гарантирования достоверности результата. Пойа повторяет ту классическую мудрость, что дедуктивное рассуждение «надежно, окончательно и обжалованию не подлежит», но для него это не только некое гарантированное укрытие. Математика не состоит

[23] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, уже цит., с. 90; на последующих страницах 91–100 Пойа переводит мемуар Эйлера об изучении поведения суммы σ делителей целых чисел.

[24] T. Tymoczko, *New Directions*, уже цит., с. 97.

[25] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, уже цит., p. vi.

исключительно из предварительных, сомнительных и спорных рассуждений. Доказательство есть цель исследований и, следовательно, характеристика математики. Оно строится посредством последовательных приближений, следовательно, также через предположения и рассмотрения возможностей, при помощи мысленных экспериментов, которые, однако, тоже дедуктивные и всегда более и более широко дедуктивные. Это – фундаментальное различие, определенный водораздел между двумя противоположными представлениями о математике и причина, по которой Пойа не может быть причислен к лагерю эмпиристов.

Для опровержения «положения, что доказательства полностью надежны, окончательны и обжалованию не подлежат», эмпиристы прибегают к различным аргументам, которые использовались в дискуссиях этих последних лет[26].

Выявляется социальный характер некоторых доказательств, которые являются коллективными трудами, вспоминаются частые ошибки, указываются другие доказательства, которые являются слишком длинными для возможной проверки одним специалистом, и среди доказательств, которые нельзя проверить вручную, выделяют, конечно, те, которые полностью выполнены компьютерами.

Компьютер оказывал и продолжает оказывать на математику значительное влияние, которое весьма сложно оценить, поскольку оно отчасти противоречиво и плохо встраивается в расхожие схемы.

С одной стороны, применение компьютера заставило по-новому взглянуть на определенные аспекты экспериментальных исследований и привело к их переоценке, с другой – очень отчетливо высветило символическую и, пожалуй, также логическую стороны самой математической деятельности. Практическое воплощение формализации продвинулось сейчас далеко вперед, и даже имеется возможность автоматического доказательства. Эти моменты, однако, уже присутствовали в математическом сознании. Эмпирические же аспекты были завуалированы долгим периодом абстрактной деятельности.

Как это ни парадоксально, но именно автоматическое доказательство подсказало аргументы в пользу эмпиризма вместо того,

[26] G. Lolli, *Morte e resurrezione della dimostrazione*, уже цит.

чтобы явиться как реванш одной из форм рационализма. Среди двух возможностей превалирует первая, поскольку размышление о настоящей машине вызывает в памяти скорее масляные пятна и электрические провода, чем интеллект. Идея логической машины есть сведение духа к абсурду.

Первым компьютерным доказательством, которое привлекло внимание (но не было абсолютно первым), стало доказательство теоремы о четырех красках. За ним последовали другие (о несуществовании проективной плоскости порядка 10, об упаковке сфер[27], о предположении Роббинса (Robbins) для булевых алгебр и прочие[28]), но философские дискуссии начались с теоремы о 4 красках, или Т4К, и коснулись классической философской проблемы априори[29].

Дискуссию открыл Т. Тымочко (Thomas Tymoczko):

> Какое основание у нас есть, чтобы сказать, что Т4К не является собственно теоремой или что математики на самом деле не представили ее доказательства? Вот какое – ни один математик не видел ни доказательства Т4К, ни доказательства, что она имеет какое-то доказательство, и очень мало вероятно, что когда-нибудь его увидит…
>
> Математики знают, что она имеет доказательство согласно самым строгим канонам формального доказательства – это им гарантирует компьютер…
>
> По [нашей] оценке, использование компьютеров, как в случае Т4К, вводит эмпирические эксперименты в математику… Мы должны принять, что обсуждаемое доказательство не является традиционным, не является априорным выводом некоторого утверждения из предпосылок. Оно представляется как доказательство, в котором есть некоторый разрыв, заполненный резуль-

---

[27] Th.C. Hales, *Cannonballs and honeycombs*, in «Notices AMS», 47, 2000, n. 4, p. 440–449.

[28] B. Cipra, *What's Happening in the Mathematical Sciences*, vol. 1 (1993), vol. 2 (1994), vol. 3 (1995–1996), vol. 4 (1998–1999), Providence, R.I., AMS.

[29] В G. Lolli, *La Macchina e le dimostrazioni*, Bologna, Il Mulino, 1987, представлена дискуссия с участием: T. Tymoczko, *The four-color problem and its philosophical significance*, in The Journal of Philosophy, 76, 1979, pp. 57–83; P. Teller, *Computer proof*, *ibidem*, 77, 1980, pp. 797–803; M. Detlefsen, M. Luker, *The four-color theorem and mathematical proof, ibidem*, pp. 803–820; E.R. Swart, *The philosophical implications of the four-color problem*, in «Amer. Math. Monthly», 87, 1980, pp. 697–707. Цитаты, которые следуют далее, взяты из этих работ.

татами некоторого изобретательно организованного эксперимента. Этот факт придает Т4К статус первого математического утверждения, которое стало известным a-posteriori (речь не идет о его ложности или сомнительности, а о том, что было узнано особым образом), и ставит вновь проблему различий между математикой и естественными науками…

Если принять Т4К как теорему, то мы обязаны модифицировать смысл «теоремы», или, что более точно, смысл понятия «доказательство», на которое опирается любая теорема.

Концепция традиционного доказательства для Тымочко – это некоторая дедукция априори. Доказательство есть такое построение, которое должно иметь возможность быть изученным, вновь пройденным, проверенным некоторым рациональным агентом. Оно должно, следовательно, быть ясным и понятным, и эта характеристика необходима и предполагается также в случаях чрезмерно длинных доказательств. Некоторые математики попытались, по крайней мере, проверить их и одобрили (пусть даже с некоторой неудовлетворенностью).

Такое условие сводится к визуализируемости (наглядности), которая отчасти достигается разложением формализации на модули. Математик *собирает* доказательство в некое единое целое и посредством этого акта приходит к *узнаванию* результата (и, следовательно, доказательство получает, среди прочего, определенное *imprimatur*[30] сообщества).

Наглядность позволяет убеждать, но, кроме этого, прежде всего «из расчета их наглядности математическим теоремам придается со стороны некоторых философов определенный тип достоверности, недостижимый в других науках. Математические теоремы есть априорное знание… [умозаключение], которое не испытывает необходимости ни в чем, кроме себя самого, чтобы быть убедительным».

Полностью формализованное доказательство (как доказательства, выполненные компьютерами, или некоторые доказательства из *Principia Mathematica* Рассела и Уайтхеда[31]) растягивается

[30] Разрешение на выпуск в свет (лат. – прим. переводчика).

[31] К примеру, доказательство, что 1+1=2, что доводило Пуанкаре до бешенства.

непомерным образом. Оно может рассматриваться существующим, даже если не визуализируется, однако тогда должна иметься некоторая наглядная проверка его существования, что отсутствует в случае Т4К. В заключение

> Обращение к тому, что сообщает компьютер, рассматриваем ли мы это сообщение как неотъемлемую составную часть доказательства или как часть математического знания, которая не является явно доказуемой, есть, по сути дела, отчет об успешном эксперименте. Он помогает установить… существование доказательства Т4К на основаниях, которые, по крайней мере частично, являются эмпирическими… показать со всей очевидностью, что однажды компьютер выполнил недостающие шаги.

Среди ответов на позицию Тымочко ожидаемый консервативный ответ представлен П. Теллером (Paul Teller). По его мнению, наглядность не является обязательной для того, чтобы доказательство было доказательством, она важна лишь для проверки его правильности. «Если компьютер запрограммирован на выполнение тех же самых приемов доказательства, которые используем и мы, то доказательство, которое он выполняет, есть доказательство в нашем смысле. Озабоченность может оставаться по поводу правильности», однако, как условие для проверки, наглядность субъективна и имеет разные степени в зависимости от использованных технологий (начиная просто от памяти проверяющего через использование карандаша и бумаги к привлечению вспомогательных машин). Использование компьютера в Т4К представляется обогащением наших методов проверки. Ситуация с компьютерным доказательством похожа на ситуацию, когда обычному нормальному человеку не удается проследить ход доказательства, проведенного великим математиком.

Другой, провокационный вариант ответа допускает, что любое доказательство имеет и всегда имело какие-то встроенные эмпирические элементы. Нужно только различать ситуации, в которых эмпирические соображения являются фактически неотъемлемой составной частью аргументации, и ситуации, в которых они привлекаются, чтобы утверждать: то, что представляется некоторым доказательством, на самом деле является таковым. Лишь этот второй аспект разрабатывается в этой дискуссии некоторыми авторами для того, чтобы поддержать тезис о том, что эмпирический элемент присутствует всегда. Можно выделить следующие два подхода.

Э. Сварт (Edward Swart) утверждает, что эмпирический элемент доказательств скрывается в том факте, что их принятие и одобрение носит социальный характер и подвержено разнообразным социальным процессам проверки. В этом смысле, если говорить о компьютерных доказательствах, его забота – показать, что и они тоже могут быть подчинены, и так оно и есть, тем же самым процессам (с изменениями стратегии, алгоритма, программы, машины независимым образом), и тогда нет никакой существенной разницы по сравнению с доказательствами «ручной работы». Если ошибки, возникновения которых так боятся, представляют собой опечатки или недосмотры по рассеянности, или сбои в работе, то такое случается и с проверяющими людьми. Если же речь идет о логических ошибках, то предполагается, что имеется, в любом случае, какой-то критерий логической корректности. Ошибки, если они есть, возникают в программе и могут быть найдены, в том числе весьма рафинированными методами.

По мнению Сварта, в определении a-priori у Тымочко смешаны два понятия: с одной стороны, понятие истины, имеющей силу всеобщей и необходимой, с другой – истины, независимой от ощущений органов чувств, с предпочтением этому второму значению[32]. Зеркальные проблемы возникают в связи с определением a-posteriori и, следовательно, касаются понятия эксперимента. Истины a-posteriori могут требовать экспериментов, поскольку, по крайней мере, в соответствии с некоторым возможным значением они не обязательно являются истинными во всех возможных мирах. Эксперименты для этого типа истины касаются физических качеств. Если же проводятся эксперименты для верификации истин a-priori, то они касаются чисел и логических символов, а не физических элементов.

---

[32] Другие утонченные дискуссии по поводу разнообразных значений a-priori присутствуют в S.J. Wagner, *Logicism*, уже цит., в сопоставлении с Китчером (Kitcher).

Сварт предлагает определять «a-priori» как истину, сила которой в принципе может быть установлена без обращения к реальному физическому эксперименту. Мы можем быть обязаны проводить эксперименты для познания истин a-priori. Под «в принципе» понимается то, что при необходимости обрабатывать совокупность данных, слишком большую, чтобы она смогла бы уместиться в нашей голове, некоторая «большая голова» (компьютер) может сделать все это внутри самой себя. Приемлемость подобного использования термина «в принципе», очевидно, связана с тезисом о сильном искусственном интеллекте (со всеми вытекающими трудностями).

Другие, как М. Детлефсен (Michael Detlefsen), встают на сторону Дэвиса: невозможно проводить ни доказательства, ни расчеты, ни (можно продолжить) какую-либо другую интеллектуальную деятельность без обращения к чувственному опыту в физическом мире, следовательно, «нет никакого различия в том, что инструментом вывода или проверки был бы человек или машина»[33].

Дискуссия по поводу теоремы о четырех красках важна, поскольку является уникальной философской дискуссией, спровоцированной компьютером в отношении математики в узком смысле. Прочие дискуссии по понятным причинам касались искусственного интеллекта.

Дискуссия не исчерпывается лишь этими участниками, которые, очевидно, остаются каждый при своем мнении. Она порождает определенную широко разделяемую или, по крайней мере, повторяемую на протяжении многих лет эмпиристскую мораль, которую можно резюмировать таким образом[34].

Математическая практика полна расчетов (и доказательств), понимаемых как физические процессы манипуляции символами. В каждом изложении имеются пропущенные переходы и отсылки к численным или теоретическим результатам, которые читатель должен осуществить самостоятельно, если хочет проверить, насколько убедителен автор. Следовательно, процесс понимания доказательства требует выполнения некоторых физических про-

[33] Ph.J. Davis, *Fidelity in mathematical discourse*, уже цит.

[34] M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит., p. 148 ss.

цессов. В число этих физических процессов вполне законно включить расчеты, выполняемые в собственной голове, а не при помощи какой-то внешней поддержки. Они предполагают корректную работу различных функций мозга.

Типичное использование расчетов в математическом изложении представляется следующим образом:

а) некоторый надежный калькулятор (человеческий или механический) выполнил физический процесс, который соответствует получению значения $f(n)=m$ в соответствии с определенными правилами, следовательно

б) $f(n)=m$ выводимо в соответствии с этими правилами, и за счет доказанной корректности правил

в) $f(n)=m$.

Переход от *а*) к *б*) предусматривает допущение некоторого математического заключения относительно некоторого формального объекта на основе некоторого предположения или очевидности, которые относятся к поведению физического инструментария.

Эмпирическая предпосылка состоит в том, что вычислитель является надежным, причем в двух смыслах: корректного функционирования, и здесь включаются различные физические или физиологические законы и соображения, а также математические, к примеру, статистические[35]; и корректного программирования в соответствии с правилами используемого формализма. Возражение, что речь не идет о каком-то физическом вычислителе, а о некоторой абстрактной модели вычислений, о машине Тьюринга, к примеру, не проходит, поскольку необходимо всегда помнить, что конкретная физическая машина представляет собой реализацию этой абстрактной модели. Следовательно, «внутри методологии современной математики встречаются недедуктивные выводы из эмпирических предпосылок»[36].

Чтобы избежать эмпиристского заключения, часто говорят, как это делает Сварт выше, что ситуации, подобные описанной, возникают лишь из-за несущественных ограничений, которые в

[35] Аналогичное соображение развернуто в G. Lolli, *La Macchina e le dimostrazioni*, уже цит.

[36] M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит., p. 148.

принципе устранимы, что без ограничений памяти и скорости счета все можно выполнить… где? Где обитают расчеты и доказательства, то есть математика?

Если они живут в уме, то необходимо представлять некий разум, независимый от мозгов отдельных людей. Если не в уме, то, во всяком случае, в некоторой абстрактной области, где действуют связи a-priori. Перескакивание небольшое, но фатальное. Видеть в символах скорее вид (*type*), чем индивидуальный знак (*token*), выглядит безвредным допущением, которое все делают, но это путь, который переводит математику в мир a-priori.

Для последовательного материалиста на манер Дэвиса нет математики, оторванной от физической основы. Она проявляется, когда активируются соответствующие синапсы, как лампочка, которая зажигается, когда поворачивается выключатель. Материалист может иронизировать по поводу вопроса о внепространственной и вневременной реальности математики, сравнивая его с вопросом о том, где же находится свет при выключенной лампе.

В этой связи стоит отметить, что дедуктивизм не стремится обеспечить формат a-priori математики через понятие логической необходимости; экстенсиональное понятие следствия, используемое дедуктивизмом, совместимо с материалистской постановкой вопроса о свете, который есть только тогда, когда лампочка включена. Конечно, оно совместимо с материалистской философией познания, а не с эмпиристской философией математики.

Перед материалистом, впрочем, встает другая проблема, заключающаяся в том, что математика, даже если и представляет собой некий физический феномен, имеет все же всегда, как мы видели, характер a-priori в некотором другом смысле, поскольку ее результаты формулируются и используются таким образом, что не предполагается их пересмотр на основе опыта (за исключением случаев обнаружения ошибок).

Под таким углом зрения возможно оценить в антиэмпиристском смысле соображение Витгенштейна (если только возможно прийти к не вызывающей возражений интерпретации его мысли).

Использованные в дискуссии о Т4К понятия наглядности, очевидности, самодостаточности имеют любопытное происхождение. Рассмотрение доказательств как конечных объектов, которые могут проверяться и которыми можно манипулировать, восходит к Гильберту и является фундаментом его математики. Но эти слова вошли в философский лексикон с легкой руки Витгенштейна. Этому философу обычно приписывают идею наглядности как основной характеристики доказательств, так же, как и идею форм жизни, которые выражаются в лингвистических играх, от которых (идей) питаются разнообразные течения, настаивающие на социальной природе правил (включая логические и математические). Его иногда причисляют к вдохновителям нового эмпиризма (это делают, например, последователи сильной программы в социологии), но с явной натяжкой. Витгенштейн не делает никаких уступок никаким формам эмпиризма (в том числе и тем, которые имеют социальные оттенки) в своих рассуждениях, посвященных именно отличию между экспериментами и доказательствами[37]. В них присутствуют, наоборот, явные отрицания аргументов[38], которые стремятся представить доказательство как некоторый эксперимент.

По мнению Витгенштейна, расчеты или доказательства, в отличие от экспериментов, представляют собой модель, собственно, не подлежащую пересмотру на основе опыта, но которая, наоборот, дает некую меру для суждения об опыте. Именно с целью добиться этой характеристики он ввел понятие наглядности. Это концепция логическая, а не физическая. Однако Витгенштейн склонялся к тому, чтобы сказать, что если идентификация расчета или доказательства не является физически выполнимой (англ. *feasible*), то расчет не является расчетом как таковым[39].

[37] См. в особенности *Osservazioni sui fondamenti della matematica* (1937–1944), Torino, Einaudi, 1971; см. также S. Stillwell, *Empirical Inquiry and Proof*, in M. Detlefsen, *Proof and Knowledge in Mathematics*, уже цит., p. 110–134, и G. Lolli, *Wittgenstein contro Gödel*, in WMY 2000, Torino, Bollati Boringhieri, 2000, p. 32–39.

[38] Для углубления см. G. Lolli, *Esperimenti e dimostrazioni*, уже цит.

[39] Хао Ван (Hao Wang) продолжил и развил тему наглядности и выполнимости в оригинальном, но не систематическом размышлении, которое оце-

Эмпиристское заключение по поводу наличия «недедуктивных выводов из эмпирических предпосылок» (которое для того, чтобы быть последовательными, должно бы быть распространено на всю математику, на все вычисления и все доказательства) выглядит пока еще поспешным и, может быть, упрощенческим, несмотря на свою внешнюю содержательность. Когда полагаются на результаты, полученные машиной, которая является реализацией некоторой формальной модели вычислений (например, машины Тьюринга), представляется более правильным сказать не о том, что предпосылка, от которой отталкиваются, является эмпирической, а о том, что это – эпизод прикладной математики, то есть применение некоторой абстрактной модели к физической реальности с подтверждением ее (модели) адекватности после соответствующих практических и статистических проверок.

Философия математики, к сожалению, мало интересуется или совсем не интересуется прикладной математикой. Она рассматривает чистую математику, и потом спрашивается, как происходит чудо ее применимости в мире. Может также статься (глядя на мир, конечно, через оптику эмпиризма или натурализма), что существует только прикладная математика или что основания математики должны быть исследованы в рамках прикладной математики. Она не состоит в натягивании готового платья на некую реальность, а заключается в его моделировании, кройке и шитье по ходу дела. Приложения порождают (чистые) теоремы, которые зависят от приложений, и, в свою очередь, направляют и контролируют сами приложения. Например, мы видели, что некоторые не допускают различий между расчетами, выполненными на машине, и исполь-

---

нили эмпиристы. Отсылаем к непосредственному чтению H. Wang, *Process and existence in mathematics*, in *Essays on the Foundations of Mathematics*, под ред. Y. Bar-Hillel, Jerusalem, The Magnes Press, 1966, p. 328–351, перепечатано с вариациями в T. Tymoczko, *New Directions*, уже цит., p. 131–157; H. Wang, *From Mathematics to Philosophy*, уже цит. Среди витгенштейнианских тем, проработанных в дальнейшем Ваном, присутствуют также тема удлинения арифметических доказательств в логицистском переложении (опротестованная в M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, уже цит.) и различные проблемы теоретико-множественного переложения арифметики.

зованием материальных фигур и инструментов для доказательства геометрических теорем. Итак, эта тема сегодня полностью под контролем соответствующих геометрико-алгебраических теорем[40], и, вероятно, можно прийти к тому, чтобы сказать то же самое в отношении машин.

[40] По поводу доказательств с использованием геометрических образов смотри G. Lolli, *Esperimenti e dimostrazioni*, уже цит.

14. ФОРМЫ И МОДЕЛИ

Структурализм не является лишь описанием и интерпретацией внутренней организации математики. Слово «структура» сейчас используется для обозначения того, что ранее называлось формой, или же что сегодня обозначается непереводимым термином «pattern». Является весьма привлекательным сказать, что схемы, модели, patterns, структуры есть результат и объект творческой математической работы, поскольку это стало важным аспектом современной математики.

К моделям относятся не только дифференциальные уравнения математической физики. Те, которым лучше подходит термин «pattern», можно было бы отнести к «пластичной» математике[1] или качественной математике. Графы и упорядоченные структуры, конечные геометрии, машины с конечным числом состояний и весь арсенал дискретной математики выступают как модели для разнообразных процессов и деятельностей (от вычислительных до относящихся к исследованию операций, экономическим и социальным наукам).

Спрашивается, что представляла бы собой философия математики, если бы этот аспект был превалирующим или если научно-фантастическим образом «пластичная» математика оказалась бы разработанной раньше и независимо от «жесткой» математики чисел[2]? Почему же все произошло не так и вообще стало возможным?

Основное назначение натуральных чисел в дискретной математике – индуктивное рассуждение, индукция на числе элементов некоторой структуры или, чаще, на количестве шагов некоторого процесса или алгоритма. Натуральные числа служат лишь для счета шагов алгоритма, а для этого не требуется вся продвинутая и содержательная теория чисел. Тем не менее, является фактом то,

[1] В оригинале англ. matematica *soft* (прим. переводчика).
[2] В оригинале англ. matematica *hard* del numero (прим. переводчика).

что принцип математической индукции был сформулирован в явном виде и систематически использован довольно поздно (сначала у Паскаля и затем начиная с середины девятнадцатого века); пришлось подождать более позднего продвинутого развития арифметики, чтобы признать фундаментальную роль этого принципа.

Счет является первичной деятельностью, но, как стало понятно, абстрактная модель числа выходит за пределы человеческих возможностей. Абстрактное представление, как мы видели, дает лишь призрак формализации бесконечной цепочки с сопутствующим принципом математической индукции. Последний является результатом поздним, или зрелым, и это должно бы привести конструктивистов к размышлениям о так называемой основополагающей природе, которую имеет интуиция счета.

В начале становления греческой математики превалировали геометрические схемы, которые, возможно, оказались первым и наиболее простым подходом, который напрашивался для применения к определенным фрагментам реальности. Числа также были геометрическими формами (patterns)[3]. Вполне понятно, как эти геометрические модели, да и многие другие, выражали символическим образом некоторые аспекты действительности. По поводу натуральных чисел говорится обычно, что это – абстрактная схема счета или порядка, однако геометрическая природа античных чисел дает определенное предостережение в этом отношении. История абстрактной модели натуральных чисел подсказывает, что некоторые даже самые простые модели рождаются не за счет непосредственной абстракции, а в результате логического анализа содержательно развитых теорий.

Подход к математике как к науке о формах («patterns») используют, тем не менее, для объяснения того, как математические структуры могли бы оказаться результатом доматематической деятельности, отталкиваясь от конкретных практик. Сторонником такого подхода является С. Маклейн (Saunders Mac Lane)[4].

[3] P. Zellini, *Gnomon*, Milano, Adelphi, 1999.

[4] S. Mac Lane, *Mathematical models: A sketch for the philosophy of mathematics*, in «Amer. Math. Monthly», 88, 1981, n. 7, pp. 462–472.

Математика начинается с вопросов и проблем, которые имеют дело с комбинаторными и символическими аспектами человеческой практики в целом. Некоторые из таких аспектов имеют свой собственный внутренний и систематический характер, а не произвольный и связанный с контекстом. Именно они и становятся материалом элементарной математики. Исходя из этого отправного пункта, математика развилась до дедуктивного анализа многочисленных и разнообразных, но взаимосвязанных формальных структур. Эти структуры произошли из опыта, в ходе последовательного многоэтапного процесса, включающего абстракции от различных наблюдений мира, его проблем и взаимосвязей между этими проблемами. Восприятия инициируются многообразными видами человеческой деятельности, каждый из которых ведет более или менее прямо к соответствующему разделу математики.

Среди различных видов деятельности отмечены: счет, измерения, группирование, придание формы, строительство, различные виды оценки, движение, вычисления, рассуждения, игры. В них можно увидеть далекие корни арифметики, рациональных и действительных чисел, множеств, геометрии, теории групп, теории вероятностей, механики, анализа и методов вычислений, алгебры, логики, комбинаторики.

Разнообразные виды доматематической человеческой деятельности не являются абсолютно обособленными. Они взаимодействуют сложным, комплексным образом, и то же самое отмечается в отношении соответствующих разделов математики. Каждая ветвь математики, связанная с этим корнем, в действительности представляет собой дерево теорий с многочисленными связями между ними и с теми, которые имеют другие корни.

В подходе Маклейна математика произошла из определенных видов человеческой деятельности, которые подсказали объекты и операции (такие, как сложение, умножение, сравнение размеров) и подвели, следовательно, к понятиям (простые числа, преобразования), которые впоследствии были включены в формальные аксиоматические системы (арифметика Пеано, геометрия Евклида, система вещественных чисел, теория полей). Последовательная разработка показала, что эти системы кодифицируют скрытые и далеко не очевидные свойства различных первоначальных видов деятельности. Например, такое простое с аксиоматической точки зрения понятие группы раскрывает общие свойства движения (группы вращения и параллельного переноса), симметрии (группы кристаллов), алгебраических преобразований (группы Галуа, группы Ли для дифференциальных уравнений). Многие другие математические концепции (функция, частичный порядок) являются такими же простыми по структуре и исполняемыми в приложениях. Простота и применимость стали возможными благодаря формальному подходу.

Реальная структура математических идей представляет собой невероятно тщательно проработанное развитие этого простого наброска[5]. Отметив, что «всякое математическое понятие связано со своими эмпирическими истоками многообразными способами», Маклейн заключает, что «никакое упрощенческое описание математики не является адекватным»; однако в соответствии с предположением о первопричинах более или менее мифических «наш взгляд на природу математики может быть сформулирован следующим образом: математика занимается построением многообразия формальных моделей различных аспектов мира и человеческой практики».

Все те, кто разделяет подобное видение, не упускают возможности пощеголять высокопарными изречениями по поводу многообразия, по поводу того факта, что один и тот же опыт может быть описан разными формальными моделями. Важно и то, что описание взаимосвязей имеет значение как для внешних приложений, так и для внутреннего структурирования. Разные определения действительных чисел, к примеру, соответствуют различным способам восприятия непрерывности, как видно из дискуссии по этому поводу между Кантором и Дедекиндом[6].

Философские проблемы, которые рассматриваются в этой перспективе и являются относительно новыми, касаются широты, ясности и глубины различных математических понятий. Широта имеет дело с приложениями, ясность – с формальным анализом, глубина – с раскрытием связей все более фундаментальных и

---

[5] Развито в S. Mac Lane, *Mathematics: Form and Function*, уже цит.

[6] См. переписку между Кантором и Дедекиндом, опубликованную в 1937 году под ред. Э. Нётер и Ж. Кавайе, доступную на французском языке в J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1962.

неожиданных: «математика состоит в открытии последующих стадий формальных структур, которые обусловлены миром и человеческой деятельностью, с акцентом на структуры широкой применимости и структуры, которые отражают наиболее глубокие аспекты мира».

С точки зрения математика характеристика дисциплины как некоторого хранилища моделей выглядит еще одним приемлемым способом достаточно просто прикрыть философскую проблематику, однако упрямо сопротивляются все те же вопросы. Формы извлекаются из конкретных случаев, до их повторного применения к многочисленным конкретным случаям. Казалось бы, возвращается в игру развенчанная способность абстракции, но для некоторой формальной модели возможность появления в результате абстрагирования из реальности при помощи особой способности выделения аналогий и сходных элементов допустима еще меньше, нежели это было бы возможно в отношении понятия числа. Механизм формирования модели, скорее всего, не является прямым, и в большой степени он направляется языком.

Попробуйте поразмышлять о том, что общего есть между двумя людьми, которые не знают друг друга, и дорогой, которая соединяет два города. Трудно увидеть аналогии (исключая число 2, которое может и не быть показательным, если рассматриваемых людей или городов много). Все же есть проблемы, такие, как задача о коммивояжере или уже упоминавшиеся задачи о вечеринках, в которых можно применять в каждом случае одну и ту же модель графа. Формирование и применение модели зависит от узнавания наличия бинарного отношения, которое может быть представлено (без семантического содержания) формальным символом $R(x,y)$. Это распознавание требует, однако, использования формальной логики и анализа языка в терминах отношений, к которому мы привыкли, но которого долгое время не было в логике.

Представление о математике как о производстве моделей кажется, во всяком случае, некоторой философией, ориентированной на аспекты эпистемологические или, как максимум, на прикладные и в меньшей степени – на онтологические. Не приходится ожидать реалистического видения моделей, берущих свое начало в символическом представлении различных видов человеческой деятельности. В пифагореизме математические творения могли быть элементами мира, но модели всегда имеют много различных интерпретаций. Тем не менее, мы находим модели как основу очередных, довольно спорных, предложений реализма[7].

Философия М. Резника представляет собой странную смесь реализма, натурализма, холизма и структурализма, которая заслуживает обсуждения лишь для того, чтобы посмотреть, какие бывают способы философствования.

Резник хочет оправдать все то, что говорит математик в своей работе, «буквально принять» (англ. *at face value*) его заявления, как в случае принципа объективности Гудмэна, но исключительно в отношении онтологических и эпистемологических аспектов. Математик говорит, что есть бесконечное количество простых чисел, следовательно, существует бесконечно много чисел; математик заявляет, что некоторый термин есть число, следовательно, это число существует; математик говорит об истине, и значит, математика образована истинными знаниями; математик имеет разные определения действительных чисел, следовательно, математические понятия представляются в разных формах, поскольку они неполны по сути из-за их аксиоматического определения.

Первый (и в действительности единственный) ход Резника в защиту этого подхода, который он называет имманентистским, есть критика философских возражений, вызванных наивным использованием этих понятий. В результате остается лишь бытовой математический жаргон со всеми присущими ему квазипротиворечиями (как, например, между платоновским существованием и сущностью, определенной аксиоматически), но прошедший сквозь сито философского анализа, которому не удалось заменить его ничем лучшим. Курьезный факт состоит в том, что в то же самое время математики, занимающиеся философией, наоборот, пытаются применять и вставлять философскую терминологию в свои рассуждения.

---

[7] M.D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, уже цит.

Показательный случай – концепция истины. Сознающий сложности этого понятия, если можно использовать такой эвфемизм, Резник прибегает к единственной возможности, предоставленной Тарским, то есть к тому, что для отдельно взятых научных языков можно определить в некотором подходящем метаязыке понятие истины, которое имеет избыточный характер. «*Раскавыченный*»[8] звучит на английском языке технически, в том смысле, что определение неявно содержит все эквивалентности между «*'p' истинно*» и *p*, и не более того, то есть утверждение, что *'p'* истинно, эквивалентно при раскрытии кавычек[9] утверждению *p*, и только.

Патнэм приводил ранее возражения, что подобный подход является в действительности врагом реализма. Резник отвечает, лишь подтверждая еще раз «*раскавыченное*»[10] употребление истины: «если кто-то говорит: «Никакое более чем счетное множество действительных чисел не имеет мощности ниже континуума», и я должен попытаться решить, истинно ли то, что было сказано, то я должен принять решение по поводу того, что никакое более чем счетное множество действительных чисел не имеет мощности ниже континуума»[11].

Если данный подход распространяется и на назначение терминов, то видно, что обращение к подобному использованию истины не отличается от подхода Карнапа, который заявлял, что утверждение «5 есть число» с точки зрения лингвистического анализа – всего лишь утверждение синтаксической легитимности термина «5», и по этой причине безвредно. Тот, кто хочет его использовать, может это делать, но он не должен утверждать ничего более.

Резнику же кажется, что здесь кроется нечто большее, судя по тому, как он заявляет, к примеру, что для применения модели

---

[8] *Disquotational* – дисквотационный, «раскавыченный» (англ. – прим. переводчика).

[9] Раскрытие кавычек – операция совсем не банальная, поскольку *'p'* есть имя *p* в метаязыке, которое может не иметь никакой явной связи с самим *p*.

[10] В оригинале англ. *disquotational* (прим. переводчика).

[11] *Ibidem*, с. 31. Пример уводит в сторону от того, что было сказано в примечании 9.

необходимо полагать, что она существует. По мнению Резника, когда Ньютон рассчитал орбиту некоторой отдельно взятой планеты вокруг звезды под действием одной только силы притяжения (ситуация крайне нереальная) и использовал эту модель для объяснения орбит планет солнечной системы, говоря, что они аппроксимируют поведение обособленной системы, он должен был принять реальность этой обособленной системы. Это, однако, не является доказательством, а лишь преломлением общего положения к случаю с Ньютоном.

Более точный аргумент Резника состоит в том, что физик, который использует математические понятия, например, понятие скорости, должен полагать, что производная функции вместе с действительными числами и всем прочим, что имеет отношение к данному понятию, существует. Довод состоит в том, что если бы она не существовала, то понятие скорости не могло бы быть использовано, так как было бы плохо определено, подобно понятию расходящихся рядов. Вывод «резниковского» физика совершенно не обоснован, поскольку существование в онтологическом смысле – это одно, а противоречивость (расходящихся рядов), которая может быть формальной, – другое.

В своем геркулесовом усилии примирить всех и вся Резник выдвигает определенную форму реализма, в которой математические объекты переведены в статус существующих простым актом гипостазирования. «Для постулирования (англ. *to posit*) нового типа объектов нужно лишь ввести новый предикат *P*… и заявить, что *P* существует».

По поводу первых понятий, наиболее простых математических объектов можно лишь догадываться, как случился в Греции уникальный феномен онтологизации математических утверждений, которые существовали и ранее в других культурах в версиях не онтологических. По мнению Резника, можно предположить, что греки начали ценить ту дополнительную пользу, которая возникла из действий с идеальными сущностями (такими, как геометрические формы) по сравнению с конкретными предметами, и *неявно гипостазировали* идеальные объекты. Характер гипостазирования был таким, как если бы конкретные случаи служили аппроксимациями идеальных.

Постулирование математических сущностей, по мнению Резника, подобно выдумыванию мифов или написанию историй. Не нужны какие-то специальные способности, пожалуй, нужна лишь та, при помощи которой изобретаются физические сущности типа флогистона (однако математические объекты не исчезают так, как исчез флогистон).

Постулирование в действительности не создает, а обращает нас к познанию чего-то, что существует независимо от нас. Подтверждением является то, что при постулировании объектов мы осторожны, оцениваем полезность, пытаемся не формулировать противоречивые условия. В частности, познание математических объектов берет начало в работе с конкретными конфигурациями. В самом деле, математические объекты представляют собой формы (patterns) или местоположения в формах.

Эта часть является наиболее интересным вкладом Резника в философию математики и причиной его изучения в данной главе. Он пытается показать, как познаются формы, которыми в его примерах выступают греческие фигуры, такие, как гномон[12].

Резник не дает никаких специальных указаний по поводу того, как формируются эти структуры (отметив, что они постулируются), однако останавливается на том, как мы приобретаем знания о них. Он меняет привычный взгляд и ставит на первый план тот факт, что мы изучаем что-то в отношении математических форм, постулируя, что они обладают теми же самыми структурными свойствами конкретных конфигураций, диаграмм и символов, при помощи которых мы представляем их конкретно. На этой основе предполагается определенное отношение структурного соответствия (конгруэнции) между абстрактным и конкретным и то, что оно было бы нам доступно.

Абстрактная форма не наблюдаема, и от неё нельзя абстрагироваться, её можно изучать лишь шаг за шагом в конкретных случаях и на примерах.

[12] Для других примеров смотри P. Zellini, *Gnomon*, уже цит.

Резник вводит некоторый промежуточный уровень моделей (*templates*[13]), форм или шаблонов, или лекал, или образцов в смысле бумажной выкройки для платья или чертежа в смысле архитектурного проекта. Использование этих моделей – весьма распространенное явление, вполне естественное и доступное каждому.

Template есть некоторый физический объект, но он демонстрирует определенное отношение структурного соответствия (конгруэнции) с объектами, моделью которых он является. Можно изучить много вещей о моделируемом объекте до того, к примеру, как он был бы сконструирован. В то же самое время *templates* создаются для того, чтобы научиться познавать также свойства самой формы (pattern), которая целиком абстрактна.

Резник, конечно, не первый, кто отметил важность схем, но, возможно, является тем, кто придал им роль более фундаментальную.

> Существуют взаимосвязи между схематическими представлениями (диаграммы, графы, ряды знаков, такие, как нумералы, переменные, символы, используемые в формулах, для обозначения функций, логические и математические константы) и мысленными экспериментами. Нам более интересны схемы или диаграммы, чем фигуры или картины, поскольку нам не важны все их реальные детали, а интересуют, скорее, «скелет» и структура, «формальные факты», которые находятся в них, формы и patterns, которые они раскрывают. Это – помощь воображению в процессе размышления, и в таком виде они являются существенными для математики[14].

Похожая проблематика встречается в действительности уже у Гильберта, когда он обсуждает конкретную математику и переход от нее к математике абстрактной, к примеру, ото всех частных случаев $m + n = n + m$ к $x + y = y + x$. Первые реально являются физическими формами, формула же, записанная через переменные – бесконечное утверждение, существующее только как формула некоторого формального языка. Она требует доказательства, а не раскладывания счетных палочек или камешков. Этими расстанов-

---

[13] Шаблон, трафарет, образец, лекало, маска, матрица и т.д. (англ. – прим. переводчика).

[14] H. Wang, *Process and Existence in Mathematics*, уже цит., с. 328–329.

ками, впрочем, моделируется доказательство. Резник также утверждает, что знание форм (patterns) приходит через доказательства, но не делает дальнейших шагов по сравнению с тем, что уже были сделаны Гильбертом. Когда рассматриваются два типа арифметики, обусловленные использованием или не использованием переменных, и их отношения, выявленные Гильбертом, то становится ясным, что скачок, реализованный введением переменных, оказывается гораздо более сильным и значительным по сравнению с убедительностью также стимулирующего неформального разговора о модели (*template*) и форме (pattern).

Ограниченность этих моделей (*templates*) как аппроксимации математических моделей и их идентификации с формами (patterns) заключается в том, что модель не представляет один лишь скелет, она не создается устранением лишнего или абстрагированием от деталей; математическая модель вводит и использует *невидимое* (так же, как на другом уровне, обнаруженном Гёделем, в описаниях объектов принимают участие не только восприятия, но также и понятия). Чертеж (*template*) Парфенона нарисован с использованием золотого сечения; график движения базируется на мгновенной скорости. Именно изобретение этих понятий является характеристикой и драгоценным достоянием математики.

От подхода Резника и ему подобных остается в итоге впечатление, что если философия должна лишь узаконить наивный математический язык, то нужно просто говорить на нём, отбросив философию.

15. СТИХИЙНАЯ ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКОВ

Точка зрения *работающего математика*[1] представляет собой обычно несостоятельную мешанину различных мнений, поскольку если он действительно работает, то не может посвятить много времени философским вопросам и довольствуется повторением того, что он где-нибудь нахватался. Его стихийная философия (как философия ученых в целом) представляется не такой уж спонтанной, поскольку некоторые темы и некоторые позиции, выработанные великими математиками, распространяются, в том числе и устно, доходят до него и влияют на него. Порой незнание – своего рода поза, поскольку математик самонадеянно претендует в действительности на то, что может ответить на все вопросы (а не избегать их, как хотел бы уверить Бурбаки) без помощи других специалистов. Тем не менее, всегда есть чему поучиться в спорадических набегах математиков на философию, когда поднимаемые ими вопросы хорошо обдуманы. По крайней мере, математики в состоянии легко распознать слабые пункты рассуждений, касающихся их дисциплины.

Мы рассмотрим одно изложение, которое представляет собой оригинальную, местами противоречивую, смесь платонизма, натурализма, эмпиризма и конструктивизма[2]. Предлагаем читателю выделить разными цветами отрывки, узнаваемые как относящиеся к разным философским направлениям. Еще более полезное упражнение – дискуссия с автором цитаты, чтобы увидеть, насколько вы освоили проблемы, решения, логику различных соревнующихся философских течений.

Размышления Р. Хэмминга организованы вокруг следующей идеи. Попытаемся вообразить, какой тип математики мог бы быть развит обитателями некоторой далекой пригодной для жизни пла-

[1] В оригинале англ. *working mathematician* (прим. переводчика).

[2] R.W. Hamming, *Mathematics on a distant planet*, in «The Amer. Math. Monthly», 105, 1998, n. 7, pp. 640–650.

неты с аналогичными Земле физической структурой и химическим составом, и чего мы должны ожидать, если они вступили бы с нами в контакт.

«Бог создал целые числа, все остальное – дело рук человеческих» [Кронекер]. Можно претендовать на то, что это не так, но необходимость жить, выживать и отличать одну вещь от другой для меня означает, что, вероятно, будет иметься в распоряжении некоторая дискретная система счета. Система, которая должна быть неограниченной в своем расширении – целые числа являются конечными и линейно упорядоченными, но система целых чисел бесконечна.

Аксиомы Пеано хороши, но, конечно, никто не думает на самом деле, что эти постулаты привели к появлению целых чисел. Если вдруг оказалось бы, что они неадекватны, то мы их сразу бы модифицировали, чтобы получить то, что хотим. Наши представления о целых числах являются независимыми от аксиом Пеано!

Наши представления о числах не являются независимыми от постулатов Пеано, если только не в том смысле, что наши представления не являются *порожденными* принятием постулатов. Они совпадают с постулатами, если учитывается анализ Дедекинда. Они никогда не станут неадекватными в том смысле, что будет необходимо их заменить. Самое большее, может обнаружиться их недостаточность, и тогда, если наши представления станут более совершенными, их нужно будет дополнить.

Евклидова геометрия связана с понятием непрерывности. Греки не смогли уклониться от необходимости примирения двух концепций – непрерывности и дискретности, и нужно сказать, что плохо справились с этой задачей, как, впрочем, и мы… Парадоксы Зенона явились драматической попыткой показать сущностные противоречия, которые возникают между непрерывной и дискретной точками зрения … Дискретная постановка была блокирована той логикой, что никакое изменение невозможно; изменение – иллюзия, иначе ничего не было бы определено и зафиксировано. Непрерывность и дискретность не смешиваются, они как вода и масло.

Полагаю, что на этой далекой планете тоже пришли бы к той же самой логике, которую используем мы, даже если их жизнь была бы основана на кремниевых, а не на углеродных соединениях; в конце концов, они будут жить в том же самом физическом мире и, следовательно, будут иметь те же самые проблемы, драматическим образом поставленные Зеноном[3].

…

Возникает дилемма. С одной стороны – интуитивно убедительное доказательство, что всякий конечный набор аксиом имеет счетную реализацию, с другой – процедура диагонализации, использованная для доказательства несчетности. Раньше или позже на далекой планете столкнутся с подобным выбором, и кто знает, как они поступят. Я полагаю, что они поместили бы Кантора *в старости* в закрытую клинику…

Кантор в старческом возрасте *в действительности* был госпитализирован, но и у многих других прикладных, практических и конкретных математиков была такая же судьба. Диагонализация (тот ее специфический вид, примененный для действительных чисел) была предложена Кантором в самом расцвете сил, и несчетность континуума была принята как интуитивная (также благодаря подтверждению, полученному при помощи диагонализации) значительно раньше, чем пришло осознание логической теоремы Лёвенгейма–Сколема о счетных моделях; некоторая конечная теория, формализованная в логике второго порядка, может также иметь только более чем счетные модели; тонко намекая на Лёвенгейма–Сколема, Хэмминг забывает о той борьбе, которую пришлось вести за признание логики первого порядка; если инопланетяне пройдут тот же путь, то они очень схожи с нами.

Странные результаты [относящиеся к бесконечным мощностям] обнаруживаются, когда рассматриваются множества, упорядоченные и плотные в интервалах; это для множеств бесконечных и *неупорядоченных* Кантор предложил определение равномощности через биекцию.

Этими странными и ошибочными в буквальном смысле утверждениями по поводу упорядоченных множеств Хэмминг хо-

[3] Далее в тексте Хэмминга излагается краткая история чисел, основные этапы которой – теория величин греков, появление в Средние века десятичной системы счисления, решение считать числами иррациональности, доказательство Кантором несчетности континуума и второй круг – переход от представлений чисел к программам для их вычислений (вследствие идей, предложенных Тьюрингом). [прим. автора]

чет, вероятно, предложить понятие счетного множества, которое не связано с понятием взаимно-однозначного соответствия, а ссылается на процесс эффективного генерирования. Так, к ним не нужно было бы применять понятия теории мощностей.

Я совсем не уверен, что на далекой планете примут такое же решение, и это имеет серьезные последствия, к примеру, для интегрирования по Лебегу. Оно придает нулевую меру каждому счетному множеству, следовательно, множеству вычислимых чисел, то есть множеству, в которое входит все то, о чем можно говорить или что можно назвать! Более сорока лет я заявлял, что если бы корректное функционирование самолета в полете зависело от факта, что некоторая функция, используемая в его проекте, является измеримой по Лебегу, *а не по Риману*, то я бы не полетел на таком самолете. Кто знает, в состоянии ли Природа распознать эту разницу. Сомневаюсь в этом. Каждый волен делать, что хочет, но я заметил, что год за годом интегрирование по Лебегу, а в действительности вся теория меры, играет все меньшую роль в других разделах математики и не играет никакой роли в областях, которые лишь используют математику. Недавно было показано, что интеграл по Хенстоку (Henstock), который представляет собой простое и естественное расширение интеграла Римана, является более общим, чем интеграл Лебега со всеми его недостатками.

Не вижу никаких причин для прогулок по раю Кантора… Полагаю, что на этой Земле мы дойдем до принятия решения, что достаточно вычислимых чисел… Собственно, как физики после многолетних дискуссий о свойствах эфира, которые, в итоге, не могли быть измерены, со временем решили отказаться от него, я тоже считаю, что было бы лучше совсем игнорировать то, о чем нельзя говорить или нельзя измерить.

Математика может допускать, следовательно, ревизии, и ее результаты, по мнению Хэмминга, нельзя рассматривать как окончательные.

Теперь уже ясно, что я не считаю, что теоремы бывают действительно доказаны. Г.Х. Харди хорошо описал эту ситуацию. Мы производим некоторые символы, другие их читают и либо оказываются убежденными, либо нет. Для простых людей, которые верят во все то, что читают, и никогда не подвергают это сомнению, доказательство и есть доказательство. Для других доказательство есть лишь способ размышления о теореме, и на того, кто читает, ложится ответственность – составить свое собственное мнение. Формальные доказательства, где намеренно нет никакого смысла, могут убедить лишь формалистов, и сами они отрицают всякий смысл полученных результатов. И это математика, которую мы должны использовать для того, чтобы понять мир, в котором живем?..

Две совершенно различных точки зрения оспаривают друг у друга объяснение того, что же есть на самом деле математика, и у меня нет никакого средства для того, чтобы решить, какая из двух могла бы превалировать на далекой планете или же, как на Земле, обе сосуществуют бок о бок при слабом взаимопонимании. Для меня истинность или ложность теорем почти совсем не зависит от доказательств; моя внутренняя убежденность должна быть арбитром принятия или отклонения математики, которую вижу…

Если и есть некоторый смысл, в котором доказательство представляется в самом деле неубедительным, и в этом можно согласиться с Хэммингом, так это то, что оно никогда не завершено. Требования разъяснений, уточнений и модификаций всегда возможны, прежде всего, со стороны тех, кто исходит из доказательства для построения все более убедительной и удовлетворительной собственной версии, которая соответствовала бы персональной логике мышления. Можно, следовательно, признать правоту Брауэра, что языковое выражение представляет собой лишь несовершенное средство, используемое для того, чтобы объяснить другим ход собственной мысли. Однако яркость, с которой видится результат, когда он видится, целиком субъективна, и внутренняя убежденность может быть выражена только через еще одну убогую попытку вербального выражения. Внутренняя убежденность не является, однако, озарением, она структурирована. Дэвис утверждает, что логическое доказательство при дедуктивистском подходе не убеждает его, потому что до каждого результата он хочет дойти своей собственной дорогой[4]. Это не исключает того, что этот путь – логический.

Гильберт обнаружил, что Евклид неявным образом принял без доказательства некоторые предложения о пересечениях и отношении порядка, и для получения явного доказательства добавил многочисленные дополнительные аксиомы по отношению к тем, от которых отталкивался Евклид!... Я понял, что добавочные аксиомы были нужны Гильберту для того, чтобы убедиться в истинности евклидовых теорем (следовательно, теоремы полагались истинными независимо от существования соответствующих доказательств), и то-

[4] Ph.J. Davis, *The Education of a Mathematician*, уже цит., с. 64.

гда я понял, что Евклид тоже находился в такой же ситуации. Он имел в распоряжении многие теоремы, в отношении которых «знал, что они были истинны», включая теорему Пифагора, и должен был найти аксиомы, которые бы их обосновали. Математика не состоит лишь в формулировании произвольных постулатов и последующем выводе из них определенных следствий, она гораздо богаче. Исследователь отталкивается от некоторых вещей, которые он хочет иметь, и затем пытается найти аксиомы, которые их поддержат! С позволения Бурбаки!

Вот одна из наиболее цитируемых теорем евклидовой геометрии о невозможности разделения любого угла на три равные части с помощью циркуля и линейки. Теорема истинна, однако она становится ложной, если допускаются две метки на линейке (как было известно еще Архимеду)! Разница ничтожна при практическом применении! Кто знает, найдется ли на далекой планете свой Платон, одержимый идеальным до полного отрицания любых физических инструментов в геометрии, кроме циркуля и линейки. Отказывающийся даже от такой малости, как две метки на линейке! То, что математики так часто ссылаются на теорему, истинность или ложность которой зависит от подобной незначительной разницы в определении, представляется целиком неразумным! Такие теоремы не имеют никакого значения в мире.

Теоремы о невозможности относятся к наиболее красивым в математике и к наиболее показательным. Они устанавливают границы. Другие примеры касаются разрешимости алгебраических уравнений в радикалах и неполноты арифметики.

Вместо того чтобы утверждать, что именно математики привередничают, можно было бы задаться вопросом, почему мир настолько тонко устроен, что не допускает решений, которые искались; почему мир не допускает простых решений и отвергает определенные алгоритмы, которые вырывали бы у него ответы.

Отметки на линейке определяют всю разницу, которая есть между измерением (с помощью некоторой единицы измерения) и, в противоположность этому, возможностью обойтись без измерений. Совсем не маленькая разница, а насколько она велика – иллюстрируют две соответствующие теоремы.

Мы не можем предполагать, что внеземные жители прошли по той же самой нашей узкой дорожке. Без формулирования определений скажу, что «прочные» части математики внушают, *в целом*, доверие, если позаботиться о корректной идентификации тех сторон реальности, которые соответствуют такой математике (вместе с аккуратным контролем неявных предположений, принятой общей структуры и проверкой ее пригодности в аналогичных ситуациях), и что «хрупкие» части математики являются бесполезными для нас, как была бесполезна для физиков идея эфира, и хорошо, что она предана забвению!

Эрмит сказал: «Мы – слуги, а не господа математики». Я часто заявлял обратное: «Мы – хозяева математики, а не слуги, и можем делать то, что хотим». По правде говоря, я, возможно, подразумеваю нечто среднее между этими двумя утверждениями. Иногда мы ведомы математикой, иногда контролируем ее. Внеземные жители окажутся в такой же ситуации, поскольку они живут в физическом мире того же самого типа, что и мы. И если мы предположим, что они в состоянии установить радиоконтакт с нами, то, полагаю, что их «прочная», полезная математика будет иметь значительное сходство с нашей. «Хрупкие» же разделы могут сильно отличаться. Кто знает, заботят ли их все наши банальные теоремы и вообще знакомы ли они с ними.

Можно задаться вопросом, верна ли в их математике знаменитая теорема Ферма. Следует отметить, что теорема была доказана на основе наших постулатов, определений и способов рассуждения, однако необходимо учитывать то, что внеземные жители могут иметь свое мнение о том, что является доказательством, а что – нет, и даже то, какие высказывания являются значимыми для них, а какие – для нас.

Теорема Ферма не может иметь другого смысла для инопланетян, это элементарный комбинаторный смысл.

Прежде чем возражать тому, что я отсекаю слишком большую часть высшей математики, повторю еще одно замечание, которое часто высказывал. Если бы кто-то вошел в мой кабинет, чтобы показать мне, что интегральная теорема Коши является ложной, я бы сильно заинтересовался, но в итоге предложил бы поискать другие допущения, при которых она стала бы истинной, поскольку я «знаю», что она является «истинной»; она слишком необходима в некоторых моделях (так же, как еще только теорема Грина), чтобы не быть истинной, так как обеспечивает потенциальную функцию векторных полей и является базой работы на комплексных переменных…

…

В платоновском мире, в котором, как многие думают, прописана математика, исследователь «открывает» теоремы, которые, по-видимому, были там сразу же после Большого взрыва. Противоположная точка зрения – я «творю» результат, когда его нахожу. Если я попытаюсь проанализировать то, что чувствую, отбросив всякие предубеждения, то, мне кажется, можно сказать, что если результат важен, то есть ощущение, что я его нашел, но если же он оказывается скорее банальным, то я его создал! Ничего нельзя сказать о далекой планете.

На Земле математики, в основном, отдают себе отчет, что платонизм невозможно защитить логически, и, тем не менее, примыкают к нему до тех пор, пока их не просят ответить, что такое математика, и тогда они соскальзывают в направлении более защитимой позиции и утверждают, что математика – пустая игра символов без всякого внутреннего смысла … С другой стороны, и им на далекой планете также будет необходимо финансирование для продолжения работ и, по возможности, для развития. Боюсь, что они столкнутся с похожими на наши логическими проблемами в попытках определить, что же такое математика. Однако там, как и здесь, математика обязательно должна быть чем-то большим, чем простая манипуляция символами без смысла, если она должна дать возможность для связи посредством радиоволн, предусмотренных уравнениями Максвелла; сказать что-то более позитивное – трудное дело.

Возвращение бурбакистской темы по поводу метаний от платонизма к формализму заслуживает завершающего комментария. Такие колебания встречаются, это правда, но они являются не четкой программой, а скорее сложным психологическим состоянием, и движение, кажется, идет именно в направлении, противоположном тому, которое было указано Бурбаки. Математик, который размышляет о своей науке, обычно имеет оригинальные идеи (если имеет), тесным образом связанные с его работой и часто непонятные для посторонних. Его ежедневный хлеб – это символы, и ему привычно иметь дело с ними и с возможностями, которые они дают. Вероятно, то, что связано с манипуляцией символами, является не окончательным прибежищем, а первым способом выражения общих оценок математики. Если затем математик подвергается «допросу с пристрастием», то может легко растеряться от вопроса о смысле. Это тема философская, и без явной подсказки извне трудно ожидать, что смысл сам по себе представляет проблему, поскольку он всегда есть в том, что говорится. Если математик приходит в замешательство от проблемы смысла, то он пугается, путается и, вероятно, прячется за внушающий доверие реализм, не представляя себе до конца последствий этого шага.

Заключение

Читатель к этому моменту, вероятно, пресыщен и некоторым образом смущен столь многочисленными темами и философиями. Каждая из них исходит из какого-то определенного аспекта математики, и, поскольку таких аспектов чрезвычайно много, философии размножаются, пересекаются, накладываются одна на другую. Мы даже не успели рассмотреть их все; к примеру, ничего не сказали об эволюционистской постановке вопроса.

Это еще не философское течение, а смелая (или легкомысленная) экстраполяция первых нейрофизиологических результатов, которые подтверждают генетическое наследование элементарных понятий арифметики[1]. Предлагается гипотеза[2], что математические объекты могли бы являться тем, что осталось в результате отбора (в дарвиновском смысле) в процессе приспособления. Естественный отбор мог быть фактором филогенетического развития с целью обеспечить построение мозгом определенных внутренних представлений, обладающих преимуществами в плане их приспособленности к закономерностям мира, как, к примеру, глаз приспособился для зрения. Проблема этих (эскизных) набросков, не поддающихся проверке, состоит в том, что пока они выглядят лишь спекуляциями с оттенком скорее чрезмерной эволюционистской телеологии, чем науки.

В недавнем *n*-м предложении оживить философию математики Б. Голд (Bonnie Gold) составила список 38 вопросов или проблем, разработка которых могла бы интересовать математиков[3]. Многие из них являются традиционными и касаются существования математических объектов, природы математического знания, его достоверности и границ, роли доказательства и различных ви-

---

[1] См. S. Dehaene, *The Number Sense*, уже цит.

[2] См., к примеру, L.A. Steen, in «Notices AMS», 47, 2000, n. 2, pp. 223–224.

[3] B. Gold, *What is the philosophy of mathematics and what should it be?*, in «The Mathematical Intelligencer», 16, 1994, n. 3, pp. 20–24.

дов интуиции или других источников знания, перехода от первых конкретных практических опытов к более продвинутому знанию, возможной пересматриваемости или, наоборот, перманентности математических результатов и их фальсифицируемости, связи с естественными науками, роста математических идей, ошибок, свободы и необходимости, изобретения и открытия. Мы затронули практически все, кроме явно выраженных социологических, как то одновременные открытия или роль сотрудничества, происхождение проблем, мотивации для исследований, национальные различия. Некоторые вопросы направлены, прежде всего, на участие математиков, когда Голд просит ответить на вопрос, что общего есть между алгеброй, анализом, топологией и комбинаторикой и почему все эти дисциплины классифицированы под одним и тем же названием (математика), и каково значение глубоких связей между разделами, которые кажутся внешне различными. К вопросам для математиков относятся и исследование роли эстетических критериев и окружающей культуры, использование символов и определений или лемм как сокращений доказательств, значение обобщения, отношения между математикой письменной и устной, или неформальной, а также стиль изложения. Речь идет о приглашении к целому спектру разнообразных исследований, причем не обязательно связанных друг с другом или сходящихся к одной общей цели. Большую часть из них могут выполнить лишь математики, другие исследования лучше проводить в сотрудничестве.

В ходе изложения были процитированы многие математики. Те, которые относятся к когорте ученых конца девятнадцатого и начала (до середины) двадцатого века, являлись одними из самых великих математиков своего времени. Лучшие философии математики связаны с их именами и идеями. Из ныне здравствующих математиков, имеющих идеи, которые заслуживают обсуждения, были процитированы крупные ученые, но все же не подобного калибра. Сейчас большие специалисты в области математики, если высказываются, склоняются к повторению уже произнесенных фраз или традиционных положений. Они не имеют времени, но, по сути, не имеют того интереса, который имели Дедекинд, Гильберт, Вейль, Пуанкаре, Брауэр, Гёдель, фон Нейман, Бурбаки. Очевидно, мы находимся в некоторой фазе математики, которая не стимулирует внимания или озабоченности специалистов по поводу происходящего, которая, несмотря на компьютер, не является революционным периодом, и в ней не чувствуется необходимости обратиться к философии.

Как мы должны оценить тогда всю ту работу мысли, которая продолжает метаться и закручиваться вокруг тайны сути математики, и сокровища деятельности разума и проницательности, которые остаются обильными в ходе таких размышлений?

Правильным подходом для философии математики является не «сейчас я вам объясню», а «что мы поняли».

В эти последние сто пятьдесят лет мы поняли многие вещи благодаря философии математики и исследованиям ее оснований. Прежде всего, поняли один мета-урок, что понять не означает найти некий аспект и некий решающий, основополагающий вывод. Мы поняли, что, напротив, не существует ничего подобного.

Среди положительных уроков мы поняли, благодаря Дедекинду и логицизму, что можно определить натуральные числа: повторение следования дает отдельные числа, но абстрактная идея итерации, которая позволяет нам сказать, что все они имеются в распоряжении, помимо ее утверждения может быть определена, если принимается понятие бесконечности. Всего лишь сто лет тому назад математики сомневались в том, можно ли с помощью одного единственного мыслительного акта получить бесконечные заключения, которые устанавливают результат для всех натуральных чисел, и спрашивали себя, нужно ли придумывать либо отбросить понятие бесконечных доказательств.

Мы поняли также, благодаря логике, что натуральные числа не поддаются определению. Поняли, что определить не значит перевести что-то в плоскость объективного существования, не значит выступить Создателем. Но это значит подготовить возможность отношений, которые зависят от логики, которую предполагается использовать для вывода следствий. Мы знаем действительно все по поводу возможностей, которые дают различные типы логики первого или высших порядков, или неклассических.

Мы поняли, благодаря дедуктивизму, что такое теорема, и как применяется аксиоматический метод. Поняли, что дедуктивный вывод есть некая формальная структура, которую можно запрограммировать в машине для выполнения, и что машины могут выполнять доказательства. Поняли, что такое структура, и что математика изучает структуры и становится все более чем-то, что не является наукой о числе.

В итоге мы поняли две или три действительно важные вещи о математике (фрагментарно, может быть, и, кто-то мог бы сказать, запоздало). Да, потребовалось время для всего этого, но, с другой стороны, сколько времени потребовалось, чтобы увидеть эллипсы в небе?

Достижения логицизма, дедуктивизма, структурализма, логики являются богатством знаний о математике, которые имеют непреходящее значение, никогда не будут опорочены и должны быть приняты всеми, не должны стать поводом философских споров. Совсем не обязательно принимать философию, которая сопровождала их открытие, чтобы признать значение этих результатов.

К сожалению, когда говорится, что мы что-то поняли, это не означает, что поняли все. Иногда в полемике продолжают отрицать очевидные факты. К примеру, Дж.-К. Рота прокомментировал теорему Дезарга, которая выделяется своей центральной ролью из мириадов прочих забытых результатов проективной геометрии, справедливо отметив, что ее важность заслуженна, поскольку «она открыла новые горизонты возможностей, которые связывают алгебру и геометрию неожиданным образом». После чего не смог отказаться от попытки антиаксиоматического выпада[4]:

> То, что аксиоматическое представление некоторой математической темы *скрывает,* для понимания математики не менее значимо, чем то, что аксиоматическое представление *претендует* раскрыть.

Правда же состоит в том, что теорема Дезарга занимает то место, которое занимает, потому, что стали понятны ее эквивалент-

[4] Цитировано Ph.J. Davis, *The Education of a Mathematician*, уже цит., p. 66.

ность с погружаемостью плоскости в пространство, ее связи с пространственными аксиомами, с возможностью представить аффинную плоскость телом, с теоремой Паскаля и коммутативным законом умножения, а все это обязано аксиоматическим исследованиям Гильберта в *Grundlagen der Geometrie*[5] 1899 года[6]. Забывать – это просто.

Стоит предостеречь, что все то, что было понято, может оказаться забыто, прежде всего, если это не преподается, если этому отдается должное словами, а потом не подготавливается и не снаряжается для передачи последующим поколениям или, что еще хуже, если продолжаются бесплодные идеологические споры. Нет никакой гарантии перманентности. Достаточно вспомнить, на сколь большое время была забыта эмпирическая индукция Эйлера, потому что, естественно, все занимались другим. Эйлер не был потерян целиком, мы его восстановили. Но не всегда будет происходить так, как в период мрачного Средневековья, и не всегда придут арабы, чтобы помочь нам. Если правда то, что трудно стереть все следы какого-то интеллектуального достижения, то правдой является также и то, что «большая деревня» представляет собой опасность из-за своей унификации и отсутствия экологических ниш для сохранения сокровищ прошлого.

Еще многое, конечно, нужно понять. Горячей темой, но, кажется, лишь потому, что она сейчас стала актуальной из-за компьютера, является, без сомнения, соотношение между алгоритмами и доказательствами и соотношение их с третьим центральным моментом математики, каковым является творческий акт определения. Алгоритмы и доказательства отделяются от понятий, представленных определениями, но именно последние, накапливаясь, утверждают и делают их работоспособными моделями.

Тот факт, что вычисление и логический вывод являются одним и тем же в абстрактных моделях, представленных формальными системами, не говорит ничего (это как заявить, что всякая

[5] Рус. перевод, например, *Гильберт Д.* Основания геометрии. Пер. с нем. М.–Л.: ОГИЗ, 1948 (прим. переводчика).

[6] См. J.C. Webb, *Mechanism, Mentalism and Metamathematics*, Dordrecht, Reidel, 1980, pp. 88–111.

информация сводится к 0 и 1). Другой пример: обязательное сопровождение алгоритмов соответствующими доказательствами их корректности или, наоборот, извлечение алгоритмов из конструктивистских доказательств. Это интересные результаты и процедуры, но факт остается фактом (вспомним Витгенштейна) – с точки зрения психологии, практики, культуры, антропологии доказательство и вычисление представляют собой две различные деятельности, которые, однако, обязательно и неотвратимо сливаются.

С другой стороны, возможно, что эта проблема вместо того, чтобы оказаться в центре философского внимания, исчезнет, как того желают многие, те, кто считает доказательство морально устаревшей вещью вместе со всем тем, что имеет дело с языком. Ничего нельзя предвидеть заранее.

Философия математики будет определяться исследованиями и результатами математики, а они непредсказуемы, даже если уже сейчас известны. Непредсказуемым является процесс их концентрации в некую критическую массу, в ударный кулак, который порождает сдвиг в некотором направлении. За последние два столетия, как можно заметить, философия математики сформировалась, своеобразным и непредвиденным со стороны философии образом, событиями, происходившими в математике.

В той части, где излагаются философии математики, очевидной альтернативой представлению различных течений мог бы быть вариант, прослеживающий хронологическое развитие, который мы рассматривали и отклонили лишь потому, что он слишком сложен и имеет большое количество переплетающихся связей, которые необходимо отследить. Внутри некоторых философских направлений историческая составляющая видна под определенным углом зрения. Нет основания принимать априорно, что уменьшение числа точек зрения до очень небольшого количества позволило бы установить суть дела. Наоборот, взгляд с одной лишь точки зрения неизбежно будет упрощенным, потеряет в познавательном содержании и сразу станет идеологическим. В случае философии математики последних двух столетий краткое историческое изложение представляется приблизительно следующим.

Девятнадцатый век предъявил математике драматическую проблему отделения от физического мира, необходимость рационального определения всех математических понятий и, прежде всего, континуума, открытие интриги аксиоматического метода и приключения бесконечности, порожденные Анализом и формальным представлением его функций. Здесь лежат корни логицизма и теории множеств, новой логики, программы Гильберта, дедуктивизма и структурализма. Из всех кризисов (иррациональности, бесконечно малые, ряды) математики всегда выходили, разрешая трудности при помощи новой математики. В данном случае произошло то же самое (алгебраические структуры, теория множеств, теория вычислимости), но в этом кризисе, который был преимущественно кризисом оснований, была приобретена также большая мудрость относительно самого способа существования математики со всеми достижениями, о которых говорилось и которые не должны рассматриваться обязательно приводящими к единообразному представлению математики. Иллюзии о существовании окончательных оснований математики были потеряны по дороге.

Возможно, математика не нуждается в основаниях или не подлежит обоснованию, но значительное развитие абстрактной математики конца девятнадцатого и начала двадцатого столетия (функциональные пространства, геометрические многообразия, топология) требовало систематизации или новой организации, которая не могла быть обеспечена теорией множеств, хотя она и принималась в качестве базисной теории.

Теория множеств предлагала удобный и адекватный язык, но там, где она показывала, каким образом любое математическое понятие, любая структура определяется на ее языке, она совершала акт редукционизма, что не соответствовало потребностям математиков. Они, увидев теоретико-множественные определения своих творений, не узнавали их более, как художник не узнает свои краски среди длин волн, которые обусловливают цвета.

Организация всего нового материала была выполнена Бурбаки к середине столетия. Согласованное изложение математики, осуществленное Бурбаки, было полезным, корректным, глубоким, но это было упорядочение сверху, некое унифицирующее объединение наиболее общих понятий и их сочленений в соответствующих разделах.

Такие чрезвычайно общие понятия не встречаются в построении снизу, в реальном развитии теорий и в их стандартных изложениях, например, для специалистов, занимающихся прикладными задачами. Объединение понятий, зарождающихся в различных разделах, в одно общее является неотъемлемой и важной частью развития математических теорий, но всеобщность должна быть пунктом назначения и не может быть пунктом отправления.

Совершенство бурбакистской конструкции усилило, однако, искушение работать над надстройками (или внутри) этого неестественно огромного, сочлененного и самодостаточного абстрактного построения, как если бы существовало только оно, а не реальный мир, как природный, так и человеческий.

От этого появилось несколько нереальное представление о математике, будто бы живущей в некоторой платоновской гиперурании. Оно на несколько десятилетий (почти для двух поколений) определило вектор исследований и преподавание математики на всех уровнях.

Платоновский мир – это, все же, не человеческий мир. В последнем история, которая развивалась в результате действий конкретных людей, приносила, между тем, новые открытия и новые виды деятельности (в то же время не отвергались и традиционные, к примеру, связанные с физическими исследованиями).

Исследования, которые стали возможны благодаря компьютерам (или были порождены ими), обеспечили расцвет математики проб и ошибок, предположений и экспериментов. Компьютеры возвратили вычисления также и в алгебру, где они были оставлены и где предпочтения были сделаны в пользу (необходимых и полезных) абстракций.

В тот же самый период под влиянием социальных перипетий рождались или укреплялись новые научные тематики и исследования, которые вовлекали математику или ускоряли развитие ее новых разделов (исследование операций, статистика или экономические приложения). Это происходило за счет импульса, приданного в том числе и ими (помимо воздействия со стороны компьютерных наук) комбинаторной математике с конечными величинами.

Философия математики отреагировала, перенеся математику из разума или из гиперурании в мир, но уже не в природный, а в человеческий. Конец столетия увидел появление ряда разнообразных тенденций, которые можно было бы назвать гуманитарными и которые имели бы в качестве общего знаменателя желание рассматривать математику как один из видов человеческой деятельности настолько, насколько подобная формула может что-то означать.

Было уже упомянуто предложение Уайлдера (Wilder)[7] рассматривать математику как культурную систему. Понятиями, подходящими для изучения культурных систем, являются, к примеру, понятия напряжения, консолидации, давления внешней среды. Уайлдер сформулировал несколько законов эволюции, касающихся принятия новой концепции, ее закрепления, распространения или изоляции, роли проблем и решений, проявления нарушения непрерывности, феномена антиципаций и множественных открытий и многого другого, пытаясь охватить все аспекты важных явлений в истории математики.

Социальный конструктивизм Херша (и другие еще более нетерпимые теории[8]) видит объективность (в том числе и законов природы) как интериоризацию навязанных обществом конвенций. Семиотика рассматривает математику как часть общей деятельности по созданию и использованию символов. Эмпиризм в качестве программного манифеста выдвигает подверженность ошибкам, временный характер и пересматриваемость всех знаний, приобретенных конечными существами, каковыми являются люди.

Все эти тенденции стремятся сгладить и свести к нулю специфичность математики как в культурных и социальных системах типа денежных систем или права, так и в практике индуктивного

---

[7] R.L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, уже цит.

[8] Кроме социологов сильной программы, к примеру, см. P. Ernest, *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, New York, NY State Univ. Press., 1998. Херш излагает свой социальный конструктивизм в *Che cos'è la matematica, davvero*, уже цит.

исследования. Для того чтобы проделать это, все вынуждены отрицать роль и само понятие доказательства, и они счастливы делать это[9]. Объектам придается тот же самый статус, который имеют любые другие мысли, доказательствам – статус простых разговоров, болтовни или риторики. Почему тогда математика, отличающаяся от политики, не человечна?

Непонятно, что мешает увидеть то, что математика создана существами, которые несмотря на то, что они ограничены и подчинены условностям и правилам совместной жизни, в состоянии развивать интеллектуальную деятельность, предусматривающую элементы типа схем и patterns, которые показали себя полезными для познания мира и которые не являются ни материальными, ни запечатленными в материи, ни чистым социальным соглашением. К семейству этих формальных продуктов принадлежат доказательства, поскольку это лингвистические схемы отношений между схемами. Со времен Аристотеля известно, что люди могут узнавать и использовать лингвистические формы. Интересным с философской точки зрения является вопрос, как возможно, при нашем познавательном оснащении, не строить и продавать как эквивалентные математике запутанные постройки, откуда исчезли доказательства.

Без признания доказательств и, кроме того, в целом, универсального, вневременного, транскультурного характера математики вряд ли эти философии просуществуют долго (поскольку сиюминутная мода пройдет) или серьезно завладеют математиками. Надеемся в этом не быть плохими пророками. Единственное предсказание, которое можно сделать помимо предсказания, касающегося краха любых предсказаний, состоит в том, что никогда не стоит поддаваться периодически появляющемуся искушению считать, что наступил конец истории. Благоразумно, следовательно, надеяться, что какой-нибудь уже существующий активный фермент принесет последующим поколениям новые и неожиданные поводы для удивления и возможности философской работы.

---

[9] К примеру, Эрнест (Ernest) при помощи обращения к герменевтике.

Указатель имен

ГАБРИЭЛЕ ЛОЛЛИ

Философия математики
НАСЛЕДИЕ ДВАДЦАТОГО СТОЛЕТИЯ

Перевод с итальянского *А.Л. Сочкова* при участии *С.М. Антакова*

Под редакцией профессора,
доктора физико-математических наук *Я.Д. Сергеева*

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 18,2. Усл. печ. л. 18,7. Заказ № 913. Тираж 500 экз.

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Отпечатано в РИУ Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37