Е.В. Хорошилова

Элементарная МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для старшеклассников
и абитуриентов

Часть 1:

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. АЛГЕБРА

Издательство
Московского университета
2010

УДК 373:512
ББК 22.14я72
Х82

Публикуется по решению редакционно-издательского совета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Рецензенты:
В.А. Ильин, академик РАН, зав. кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМиК) МГУ;
Е.И. Моисеев, академик РАН, декан ВМиК МГУ;
А.Б. Будак, доцент ВМиК МГУ;
Л.В. Натяганов, доцент механико-математического факультета МГУ;
П.И. Пасиченко, доцент механико-математического факультета МГУ;
В.Н. Деснянский, профессор, зав. кафедрой вычислительной математики МГУ путей сообщения

Хорошилова Е.В.
Х82 Элементарная математика: Учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 1: Теория чисел. Алгебра. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. — 472 с.
ISBN 978-5-211-05322-9 (Ч.1) ISBN 978-5-211-05320-5

Учебное пособие предназначено для повторения и систематизации знаний школьника при подготовке к экзаменам и олимпиадам по математике (в классических *устной* и *письменной* формах, в форме ЕГЭ). Ориентировано на абитуриентов тех высших учебных заведений, где требуется продемонстрировать *высокий уровень* знаний по математике — как в теории, так и в практике решения задач.

Часть 1 книги включает в себя следующие разделы: «Теория действительных чисел», «Числовые равенства и неравенства. Формулы сокращенного умножения. Известные алгебраические неравенства», «Алгебраические уравнения и неравенства».

В книге содержатся все необходимые *определения, формулировки* и *доказательства* свойств и теорем. Особое внимание в пособии уделяется анализу разнообразных *приемов* и *методов решения задач* (Часть 1 включает более 450 задач с решениями из вариантов экзаменационных заданий МГУ имени М.В. Ломоносова, МИФИ, МФТИ, МГТУ им. Баумана, МТУСИ, ВШЭ, РЭА им. Плеханова, Финансовой академии и др. вузов), а также около 600 задач для самостоятельного решения (с ответами и указаниями). Большое внимание уделено задачам с *нестандартными подходами* к решению. В книгу включено много дополнительного и справочного материала, расширяющего математический кругозор учащегося.

Пособие рекомендовано старшеклассникам, учащимся подготовительных отделений и курсов для подготовки к *олимпиадам* (уровня МГУ имени М.В. Ломоносова) и ЕГЭ (в наиболее сложной его части), а также педагогам, преподающим курс элементарной математики.

УДК 373:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-211-05322-9 (Ч.1)
ISBN 978-5-211-05320-5

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 2
ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ. ИЗВЕСТНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Раздел 3
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Раздел 4
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемый читатель, вы держите в руках первую часть книги, которая призвана помочь успешно подготовиться к одному (*письменному*) или двум (*письменному и устному*) экзаменам (турам олимпиад) по математике. Если вам не предстоит сдавать экзамен по устной математике, всё же для успешного решения математических задач следует повторить теоретический курс.

Книга написана по материалам лекций, читаемых автором, доцентом факультета ВМиК, кандидатом физико-математических наук, с 2001 года по настоящее время на подготовительном отделении МГУ (для ВМиК и Физического факультета), с учётом опыта работы в экзаменационных комиссиях по математике на различных факультетах МГУ, а также многолетних занятий по математике, проводимых автором для старшеклассников на Геологическом факультете. Излагаемый теоретический материал иллюстрируется разнообразными, специально подобранными по темам примерами решения задач. В данной книге, которая послужит вам и кратким учебником, и справочным пособием, вы найдёте ответы на большинство теоретических вопросов, сформулированных в программе по математике для поступающих в Московский государственный университет.

Объём любой книги не позволяет подробно с необходимой глубиной и достаточным количеством примеров изложить материал всех основных разделов элементарной математики. Приходится выбирать: или это обзорное изложение большого количества тем, или какая-либо избранная тема приводится подробно. Автор постаралась найти компромисс, так как, с одной стороны, в книге рассматриваются большинство из изучаемых в школьном курсе разделов математики. С другой стороны, во многих разделах приводятся дополнительные сведения для более детального изучения предмета. И всё-таки акцент в книге делается на *систематизацию* теоретических знаний при повторении (а не первичном изучении) предмета, а приводимые примеры иллюстрируют излагаемый материал. Большого количества разобранных в книге задач всё же недостаточно для детального изучения математической дисциплины в полном её объёме. Поэтому работу с книгой надо обязательно сочетать с дополнительным количеством решаемых по каждой теме задач. Только тогда теоретический материал будет в необходимой мере понят и усвоен.

Часть 1 данной книги включает в себя такие основополагающие разделы элементарной математики как «Теория действительных чисел», «Числовые равенства и неравенства. Формулы сокращённого умножения. Известные алгебраические неравенства», «Алгебраические уравнения и неравенства».

Поскольку данное пособие могут использовать при подготовке к экзамену и абитуриенты *нематематических факультетов*, требования к глубине знания предмета для которых, как правило, ниже, чем на факультетах, осуществляющих подготовку математиков, то для облегчения отбора необходимого материала те разделы и пункты, которые выходят за рамки программы для поступающих в Московский университет или за пределы стандартной школьной программы, помечены в книге знаком $^{(*)}$. Увидев такой знак, можно пропустить данный пункт или ознакомиться с ним «по диагонали». Ответы к примерам, разобранным в тексте пособия, опускаются в тех случаях, когда они непосредственно и с очевидностью следуют из решения.

В последнем разделе для отработки практических навыков решения и закрепления теоретического материала приводится обширный список задач *для самостоятельного решения*, сгруппированных по темам. Задачи отобраны из экзаменационных заданий по математике на различных факультетах МГУ им. М.В. Ломоносова за разные годы и снабжены не только ответами, но и указаниями к решению или подробными решениями.

Если вы слушатель подготовительного отделения или подготовительных курсов, то необходимый опыт решения задач вы сможете получить во время практических занятий с преподавателем. Обычно при этом возникает большое количество различных вопросов. Не оставляйте их без ответа, проявляйте инициативу, консультируйтесь у преподавателя, поскольку для вас важно именно сейчас повторить и систематизировать свои знания.

Готовясь к устному экзамену по математике (будем надеяться, что они сохраняться в качестве дополнительных вступительных испытаний, по крайней мере, в элитных вузах страны), учитесь правильно формулировать определения и свойства, доказывать входящие в курс теоремы, а также приводить, если понадобится, необходимые пояснения и обоснования. При работе с книгой обращайте внимание на встречающиеся в тексте определения и формулировки, старайтесь их запомнить (очень часто это спрашивают в качестве дополнительного вопроса на экзамене).

Таким образом, подготовка к экзаменам включает в себя как выработку умения показать ваше знание теоретических разделов курса элементарной математики, так и развитие навыков решения на практике предложенных задач. Данное пособие ставит одной из первоочередных своих целей как раз помочь учащемуся повторить пройденное, привести в стройный порядок свои знания, а также, возможно, дополнить и систематизировать их. При этом следует иметь в виду, что чем шире используемый вами арсенал методов и способов решения, чем больше ваш опыт в их применении, тем легче будет вам на экзамене найти нужный подход к той или иной задаче, а, следовательно, тем ближе вы будете к успеху.

Помимо необходимых, базовых сведений вы найдёте в этом пособии также много дополнительной и интересной информации, которая, как надеется автор, заинтересует вас и расширит ваш математический кругозор. Остаётся пожелать вам хороших и отличных результатов при подготовке и во время предстоящей сдачи экзаменов. Помните, что усердие, целеустремлённость и регулярность в достижении поставленной цели всегда являются залогом успешного её осуществления.

Автор выражает искреннюю признательность рецензентам книги – разработчикам известных пособий по математике для абитуриентов – доценту факультета ВМиК А.Б. Будаку за внимательное прочтение и анализ пособия, сотрудникам механико-математического факультета П.И. Пасиченко и Л.В. Натяганову, профессору, заведующему кафедрой вычислительной математики МГУ путей сообщения В.Н. Деснянскому за просмотр книги и высказанные полезные замечания и советы, академикам РАН В.А.Ильину и Е.И.Моисееву (факультет ВМиК) за рецензию и общую поддержку, а также всем авторам используемых и цитируемых пособий и задач. Именно наличие различных познавательных фактов и иллюстрирующих примеров в тексте книги делают её прочтение более полезным и, надеюсь, нескучным.

С уважением, автор

Раздел 1
ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

«*Математика* (от греческого «знание, наука») – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира».

«*Арифметика* (от греческого «число») – часть математики, наука о числах, в первую очередь о неотрицательных рациональных числах (целых и дробных), и действиях над ними».

Большой энциклопедический словарь [18]

Арифметика – это один из основополагающих разделов математики, занимающийся изучением природы и свойств чисел. Это та часть математики, с которой она исторически начала развиваться вначале как прикладное средство для решения практических задач, а затем и как самостоятельная наука. Как сказал великий математик *Карл Фридрих Гаусс* (1777–1855), «математика – царица наук, а арифметика – царица математики». Современное название данного раздела – *теория чисел.*

Из русских арифметических руководств начала XVIII века наибольшее значение имела «Арифметика» *Л.Ф. Магницкого* (1703). В ней содержится следующее описание арифметики: «*Арифметика, или численница*, есть художество честное, независтное и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретённое и изложенное».

Рассмотрим наиболее важные вопросы, имеющие отношение к рассматриваемой теме, освещаемые в той или иной степени в школьном курсе элементарной математики и встречающиеся с завидным постоянством на вступительных экзаменах в МГУ и другие высшие учебные заведения. Прежде чем научиться хорошо решать задачи на свойства натуральных и целых чисел, необходимо тщательно изучить теоретическую базу этого раздела, усвоить определения, разобраться в основных понятиях и ознакомиться с важнейшими типами задач. Помощь в этом вам окажет данное пособие.

1.1. Натуральные и целые числа

Понятия натурального и целого числа. Арифметические операции над натуральными и целыми числами и их свойства. Делимость нацело. Основные законы арифметики

Понятие натурального числа возникло еще в древнем мире. В этом названии, происходящем от латинского слова *natura* – природа, отразилось представление, будто числа 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. «созданы самой природой» – в отличие от дробей, отрицательных, иррациональных и тем более комплексных чисел, созданных человеком. На самом деле, конечно, натуральные числа – тоже творение человеческого ума. В современной математике натуральное число является понятием аксиоматическим, первичным. Существование натуральных чисел принимается без доказательства. В школьных учебниках обычно пишут, что *натуральные числа* – это числа, используемые в повседневной практике для счёта, т.е. 1, 2, 3, 4, 5,…, n,… Натуральные числа образуют множество, называемое *множеством натуральных чисел* и обозначаемое заглавной латинской буквой

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5;...; n;...\}$$

(от французского слова “le nombre” – число). Запись $n \in N$ означает, что число n принадлежит множеству натуральных чисел, т.е. является натуральным.

Более строгое описание понятия натуральных чисел, выходящее, впрочем, за пределы курса элементарной математики, опирается на аксиомы, сформулированные итальянским математиком *Джузеппе Пеано* (1858–1932). В них, в частности, используется понятие *следования*, принимаемое как первичное и не определяемое через другие понятия. Приведём указанные *аксиомы Пеано* для любознательного читателя [18].

1. Единица есть натуральное число. Единица не следует ни за каким натуральным числом.

2. Число, следующее за натуральным числом, есть натуральное число.

3. Если натуральное число a следует за натуральным числом b и одновременно за натуральным числом c, то b и c тождественно равны.

4. Если какое-либо предложение доказано для 1, и если из допущения, что оно верно для натурального числа a, вытекает, что оно верно для следующего за a натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Последняя аксиома, называемая *аксиомой полной индукции*, лежит в основе известного метода доказательства – метода математической индукции.

Отметим некоторые из *свойств* натуральных чисел.

1. Натуральных чисел *бесконечно много*.

2. Множество натуральных чисел является *упорядоченным*, т.е. между любыми двумя натуральными числами a и b всегда можно поставить один и только один из трёх знаков сравнения: "$=$" (равно), "$<$" (меньше), "$>$" (больше).

3. На множестве натуральных чисел вводятся *четыре основные арифметические операции:* сложения, вычитания, умножения, деления.

Опишем, как вводятся эти операции [2]. Так, *сложить* два натуральных числа a и b значит найти в ряду натуральных чисел число c, находящееся на b-м месте от числа a:

$$a,\ a+1,\ a+2, \ldots,\ a+b.$$

Это число c называют *суммой* и обозначают $a+b$, а числа a, b при этом называют *слагаемыми*. Например, сложить числа 4 и 7 означает найти в натуральном ряду число, стоящее на седьмом месте по порядку, считая от числа 4, т.е. число 11. Таким образом, сумма состоит из стольких единиц, сколько их содержится в числах a и b. Заметим, что сумма двух (конечного числа) натуральных чисел существует всегда и сама является натуральным числом. В этом смысле принято считать, что множество N *замкнуто* относительно арифметической операции сложения.

Умножить натуральное число a на натуральное число b значит найти натуральное число c, равное сумме a чисел, каждое из которых есть b. Это число c называется *произведением* чисел a и b, и обозначается $a \cdot b$, а сами числа a, b при этом называются *сомножителями*. То есть произведение c состоит из стольких единиц, сколько их содержится в числе b, взятых столько раз, сколько единиц содержится в числе a. Произведение двух (конечного числа) натуральных чисел существует всегда и представляет собой также натуральное число, т.е. множество N *замкнуто* и относительно арифметической операции умножения.

На основании введённой на множестве натуральных чисел операции умножения можно определить понятие *натуральной степени натурального числа*. Так, если натуральное число a умножить само на себя n раз, где n – произвольное натуральное число, то такое произведение называют n-й степенью числа a и обозначают a^n. Таким образом, по определению имеем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

При этом число a называется *основанием степени*, а число n – *показателем степени*. При $n=1$ полагают $a^1 = a$.

Определим теперь операции, обратные сложению и умножению натуральных чисел – действия вычитания и деления. Начнём с операции вычитания. *Вычесть* из натурального числа a натуральное число b значит найти число c такое, что сумма $b+c$ равна a. Число c в этом случае называется *разностью* чисел a и b, и обозначается $a-b$, число a называется *уменьшаемым*, а число b – *вычитаемым*. Разность двух натуральных чисел существует всегда, но является натуральным числом, только если $a > b$. Если $a = b$, то разность равна нулю, а если $a < b$, то разность будет числом отрицательным. Таким образом, операция вычитания в общем случае выводит за пределы множества натуральных чисел, и, следовательно, множество натуральных чисел не замкнуто относительно вычитания. В связи с этим исторически операция вычитания натуральных чисел привела к необходимости расширения множества N до множества целых чисел.

Для того чтобы записать результат вычитания равных между собой натуральных чисел, нам понадобилось ввести новое число – нуль. Нуль – это особое число, оно не является натуральным числом и считается числом, предшествующим всем натуральным числам. Таким образом, число нуль считается меньше любого натурального числа. На числовых прямых число нуль, как правило, выбирается началом отсчёта.

В современном русском языке употребляются два варианта этого слова: *нуль* и *ноль*. В математической речи, устной и письменной, обычно используется вариант *нуль*. Вне математики чаще используется вариант *ноль* (*Ноль градусов – обычная температура в это время. Поезд отправляется в ноль часов 40 минут*).

Если к множеству натуральных чисел добавить число нуль, то получим *расширенное множество натуральных чисел:*

$$N_0 = \{0; 1; 2; 3;\ldots; n-1; n; n+1;\ldots\}.$$

В расширенном натуральном ряду чисел также можно определить действия сложения и умножения; для этого к определениям сложения и умножения натуральных чисел достаточно добавить определения сложения и умножения, в которых участвует число нуль:

$$0 + a = a + 0 = a, \quad 0 + 0 = 0, \quad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0$$

(где a – произвольное натуральное число). По определению нулевая степень любого натурального числа a есть единица, т.е. $a^0 = 1$. Возведение нуля в нулевую степень является запрещённым действием.

Множество *отрицательных целых чисел* вводится как множество, состоящее из чисел, противоположных по знаку натуральным числам. Например, натуральное число a, взятое со знаком «минус», т.е. $(-a)$, называют числом, *противоположным* натуральному числу a.

Множество отрицательных целых чисел обозначается

$$Z_- = \{-1; -2; -3; \ldots; -n; \ldots\}, \text{ где } n \in N.$$

Введём операции *сравнения* на множестве, состоящем из целых отрицательных чисел, что позволит упорядочить элементы (числа) этого множества между собой. Пусть a и b – натуральные числа. Будем говорить, что два целых отрицательных числа $(-a)$ и $(-b)$ *равны*, если равны a и b. Будем считать, далее, что число $(-a)$ *меньше* числа $(-b)$, если a больше b. Соответственно число $(-a)$ *больше* числа $(-b)$, если a меньше b..

Множество, содержащее все натуральные числа, числа, противоположные натуральным, а также число нуль, называется множеством *целых чисел* и обозначается заглавной латинской буквой Z:

$$Z = \{0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ldots;\pm n;\ldots\},\ \text{где}\ n \in N.$$

Очевидно, что множество N является *подмножеством* множества Z, что обозначается $N \subset Z$. Заметим, что натуральные числа можно называть также положительными целыми числами.

Определим теперь операции сравнения на множестве целых чисел. Два целых числа *равны* по определению, если либо они – равные натуральные числа, либо они – равные целые отрицательные числа, либо каждое из них есть нуль. Любое натуральное число, по определению, больше нуля, а любое целое отрицательное число – меньше нуля. Таким образом введённое множество целых чисел оказывается упорядоченным, и на нём можно ввести четыре основных арифметических действия.

Расширим описанные выше операции сложения и умножения над натуральными числами, распространив их на множество целых чисел. Пусть a и b – произвольные натуральные числа. Если одно число или оба числа, которые надо сложить или умножить, есть отрицательные целые числа (или нуль), то действия сложения и умножения для них производятся следующим образом:

$$(-a)+(-b)=-(a+b),\quad (-a)+0=0+(-a)=-a,$$

$$(-a)+b=\begin{cases}-(a-b), & \text{если } a>b,\\ b-a, & \text{если } a<b,\\ 0, & \text{если } a=b,\end{cases}$$

$$(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b),\quad (-a)\cdot(-b)=a\cdot b,$$

$$(-a)\cdot 0=0\cdot(-a)=0.$$

Тогда *вычитание* из целого числа a целого числа b равнозначно сложению целого числа a с целым числом $(-b)$.

Рассмотрим теперь, как вводится операция *деления* одного натурального числа на другое. Начнём с операции деления нацело, а затем обратимся к операции деления с остатком. *Разделить* натуральное число a на другое натуральное число b *нацело* означает найти такое натуральное число c, что $c\cdot b=a$. Заметим сразу, что это можно сделать не для любых натуральных чисел a и b.

Если такое число c существует, то число a называется *делимым*, число b – *делителем*, а число c – *частным от деления* a на b. Тот факт, что число a делится на число b нацело, принято обозначать $a \vdots b$ (читается "a кратно b"). Если число a делится нацело на числа b и c, то по отношению к ним a называется *кратным*, а числа b и c (по отношению к делимому a) оба можно считать *делителями* этого числа. Так как в результате деления одного натурального числа на другое не всегда получается натуральное число, то множество натуральных чисел не является замкнутым относительно операции деления. Необходимость деления натуральных чисел друг на друга привела в своё время к возникновению нецелых (дробных) чисел.

Операцию деления, введённую выше на множестве натуральных чисел, можно распространить на множество целых чисел (сделайте это самостоятельно). При этом следует помнить, что, во-первых, число нуль делится нацело на любое другое целое число, кроме нуля, и в результате получается число нуль, и, во-вторых, деление любого целого числа на нуль запрещено.

Операции сложения и умножения целых чисел (а, следовательно, и вводимые посредством них операции вычитания и деления) подчиняются *основным законам арифметики*. Перечислим эти законы и укажем их соответствующие названия. Итак, пусть a, b, c – произвольные целые числа. Тогда справедливы следующие равенства:

1. $a+b=b+a$ (*коммутативность* сложения, или переместительный закон сложения);

2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность* сложения, или сочетательный закон сложения);

3. $a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность* умножения, или переместительный закон умножения);

4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*ассоциативность* умножения, или сочетательный закон умножения);

5. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (*дистрибутивность* умножения относительно сложения, или распределительный закон умножения относительно сложения).

Наконец, опираясь на определения арифметических действий и основные законы сложения и умножения, докажем два вполне очевидных вспомогательных утверждения, отражающие свойства делимости нацело для натуральных и целых чисел, которые будут нами использованы в дальнейшем при доказательстве признаков делимости натуральных (целых) чисел.

<u>Теорема 1</u>. Если каждое из двух целых чисел a и b делится нацело на одно и то же целое число c $(c \neq 0)$, то их сумма (разность) также делится нацело на c.

Доказательство проведём для случая суммы (в случае разности доказывается аналогично). Так как $a \vdots c$, то, по определению делимости нацело, найдётся такое целое число n, что $a = c \cdot n$. Аналогично, поскольку $b \vdots c$, то найдётся целое число k такое, что $b = c \cdot k$. Тогда $a + b = c \cdot n + c \cdot k$. Применяя закон дистрибутивности умножения относительно сложения, получим $a + b = c \cdot (n + k)$. Это означает, что нашлось такое целое число $n + k$, что $a + b = c \cdot (n + k)$, т.е., по определению делимости нацело, сумма $a + b$ также делится нацело на c.

Теорема 2. *Если в произведении двух целых чисел a и b хотя бы один множитель делится нацело на целое число c $(c \neq 0)$, то и произведение делится на c.*

Доказательство. Пусть дано произведение $a \cdot b$. Предположим, ради определенности, что $a \vdots c \Rightarrow \exists n \in Z: a = c \cdot n$. Тогда $a \cdot b = (c \cdot n) \cdot b$. Используя закон ассоциативности умножения, получаем $a \cdot b = c \cdot (n \cdot b)$. Следовательно, нашлось такое целое число $n \cdot b$, что $a \cdot b = c \cdot (n \cdot b)$. Это, по определению делимости нацело для целых чисел, и означает, что $(a \cdot b) \vdots c$. Теоремы доказаны.

Представление натурального числа в десятичной системе счисления и в системах счисления с произвольным основанием

Современные цифры и десятичный способ их записи происходят из Индии, где они употреблялись за 1000 лет до нашей эры. Они были занесены арабами в Европу примерно в X веке, поэтому их называют “арабскими”. Используемая ныне десятичная система счисления относится к так называемым *позиционным системам* счисления, в которых одна и та же цифра в зависимости от её места в числе имеет разное значение.

В основе всякой позиционной системы счисления лежит следующий принцип: некоторое количество единиц составляет новую единицу следующего разряда. Это число называется *основанием системы счисления.* Если за основание системы счисления взять число «2», то система счисления называется двоичной, если «3» – троичной, если «10» – десятичной, если «p» – p-ичной ($p \geq 2$). В двоичной системе для записи чисел используются цифры 0 и 1; в троичной – цифры 0, 1 и 2; в четверичной – цифры 0, 1, 2, 3 и т.д. В любой позиционной системе счисления основание системы записывается в виде 10 (читается не «десять», а «один–ноль»; числом «десять» это будет только в десятичной системе счисления). Квадрат основания записывается как 100, куб – как 1000, и т.д.

Арифметические операции в позиционных системах счисления с произвольным (отличным от 10) основанием выполняются поразрядно, начиная справа, аналогично тому, как это делается в десятичной системе счисления.

Например, в двоичной системе имеем $\begin{array}{r} +\begin{array}{r}10011\\1001\end{array}\\ \hline \ldots 11100\end{array}$ или $\begin{array}{r} -\begin{array}{r}10011\\1001\end{array}\\ \hline 1010\end{array}$.

Выпишем начало натурального ряда чисел, записывая одни и те же числа в десятичной, двоичной, троичной и пятеричной системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Троичная	Пятеричная
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	10	3
4	100	11	4
5	101	12	10
6	110	20	11
7	111	21	12
8	1000	22	13
9	1001	100	14
10	1010	101	20
11	1011	102	21
12	1100	110	22
13	1101	111	23
14	1110	112	24
15	1111	120	30
16	10000	121	31
...	...	...	...

В наиболее распространённой десятичной системе счисления любое натуральное число n можно представить в виде следующей суммы, разложив его по степеням основания системы – числа 10:

$$n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1 a_0} =$$

$$= a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0. \quad (1)$$

Здесь $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ – соответственно цифры, стоящие в разряде единиц, десятков, сотен и так далее. Черта сверху условно означает, что это именно одно число, а не, скажем, произведение чисел $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0$. Например, $13407 =$ $= 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 10000 + 3000 + 400 + 7$.

Заметим, что формула, аналогичная формуле (1), справедлива и в системе счисления с *произвольным натуральным основанием* p $(p \geq 2)$. Обозначим $\left(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}\right)_p$ – натуральное число, записанное цифрами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ в системе счисления с основанием p (цифры в такой системе счисления могут принимать целые значения от 0 до $p-1$ включительно). Тогда это число можно единственным образом представить в виде разложения в сумму по целым неотрицательным степеням p:

$$\left(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}\right)_p = a_k \cdot p^k + a_{k-1} \cdot p^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + a_0.$$

Именно на использовании последней из формул основано правило перевода натурального числа из системы счисления с произвольным основанием p в десятичную систему счисления. Например,

$$(10111)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23.$$

Таким образом, в десятичной записи данное число имеет вид 23.

Рассмотрим обратный перевод числа, записанного в десятичной форме, к его эквивалентному виду в системе счисления с произвольным основанием p. Поясним это правило перевода на приведённом выше примере. Допустим, надо узнать, как выглядит в двоичной системе счисления десятичное число 23, т.е.

$$(23)_{10} = (\quad ? \quad)_2.$$

Найдём, какая максимальная степень числа 2 «укладывается» в числе 23 – это 2^4 (2^5 уже больше 23). Тогда $23 = 1 \cdot 2^4 + 7$. Продолжим работу с остатком 7. Найдём, сколько раз «помещается» в этом числе 7 следующая в порядке уменьшения степень числа 2, т.е. 2^3 – ноль раз, следующая степень двойки 2^2 «помещается» в числе 7 один раз, остаётся 3. В этом числе один раз «помещается» 2^1 и остаётся 1. Таким образом, имеем следующее разложение в сумму

$$23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Осталось «собрать» последовательно коэффициенты при $2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$, получив искомую двоичную запись числа 23: $(23)_{10} = (10111)_2$.

Рассмотрим приставки, используемые в Международной системе единиц СИ для обозначения *больших и малых* чисел:

пента – 10^{15},	мега – 10^6,	дека – 10^1,	милли – 10^{-3},
тера – 10^{12},	кило – 10^3,	деци – 10^{-1},	микро – 10^{-6},
гига – 10^9,	гекто – 10^2,	санти – 10^{-2},	нано – 10^{-9}.

Признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25

Довольно часто при решении задач возникает необходимость выяснить, делится ли данное натуральное (целое) число на некоторое другое натуральное (целое) число нацело, не производя самого деления. В этих случаях используют *признаки делимости.* Выведем признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, ещё несколько признаков сформулируем без доказательства [34]. Заметим, что, строго говоря, формулировки приводятся в виде *необходимого и достаточного условия* делимости некоторого натурального числа на другое натуральное число. Поэтому более корректным будет назвать сформулированные ниже утверждения о делимости не признаками, а *критериями делимости.*

Пусть $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0}$ – произвольное натуральное число (для целых чисел сформулируйте критерии делимости самостоятельно).

Критерий делимости на 2

Число $n \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2$ (число n кратно двум тогда и только тогда, когда его последняя цифра a_0 кратна двум, т.е. $a_0 = 0;2;4;6;8$).

Доказательство. Представим число n в виде суммы

$$n = (a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + a_{k-2} \cdot 10^{k-3} + ... + a_2 \cdot 10^1 + a_1) \cdot 10 + a_0. \quad (1)$$

Необходимость. Пусть n делится на 2. Докажем, что его последняя цифра a_0 кратна двум. Действительно, первое слагаемое в представлении (1) содержит множитель 10, который делится на 2, поэтому в силу доказанной выше теоремы 2 это слагаемое кратно 2. Выразим из формулы (1) последнюю цифру a_0:

$$a_0 = n - (a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + a_{k-2} \cdot 10^{k-3} + ... + a_2 \cdot 10^1 + a_1) \cdot 10.$$

Так как каждое из слагаемых в правой части равенства кратно 2, то по теореме 1 их разность обязана делиться на 2, следовательно, $a_0 \vdots 2$.

Достаточность (собственно признак делимости на 2). Пусть теперь $a_0 \vdots 2$. Докажем, что тогда число n делится на 2. Поскольку $a_0 \vdots 2$, то в равенстве (1) оба слагаемых в правой части будут делиться на 2, а это в силу теоремы 1 означает, что их сумма n тоже будет кратна 2.

Критерий делимости на 3

Число $n \vdots 3 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i \vdots 3$ (т.е. натуральное число n делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3).

Доказательство. Заметим, что любая степень числа 10 с натуральным показателем может быть представлена в виде суммы:

$$10^1 = 9+1,\ 10^2 = 99+1,\ 10^3 = 999+1,\dots,\ 10^k = \underbrace{99...9}_{k}+1.$$

Поэтому преобразуем вначале натуральное число n к виду:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$

$$= a_k \cdot \left(\underbrace{99...9}_{k}+1\right) + a_{k-1} \cdot \left(\underbrace{99...9}_{k-1}+1\right) + a_{k-2} \cdot \left(\underbrace{99...9}_{k-2}+1\right) + \dots +$$

$$+ a_2 \cdot (99+1) + a_1 \cdot (9+1) + a_0 = (a_k \cdot \underbrace{99...9}_{k} + a_{k-1} \cdot \underbrace{99...9}_{k-1} +$$

$$+ a_{k-2} \cdot \underbrace{99...9}_{k-2} + \dots + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9) + (a_k + a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_1 + a_0).$$

Выражение в первых скобках в силу теорем 1 и 2 делится на 3. Поэтому число $n \vdots 3 \Leftrightarrow$ сумма его цифр кратна 3.

Критерий делимости на 4

Число $n \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$ *(т.е. число, состоящее из двух последних цифр, делится на 4).*

Доказательство. Представим n в виде:

$$n = (a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2) + (a_1 \cdot 10 + a_0) =$$

$$= (a_k \cdot 10^{k-2} + a_{k-1} \cdot 10^{k-3} + a_{k-2} \cdot 10^{k-4} + \dots\dots + a_2) \cdot 100 + (10a_1 + a_0).$$

Так как $100 \vdots 4$, то первое из слагаемых делится на 4. Поэтому $n \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

Критерий делимости на 5

Число $n \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5$ *(последняя цифра числа равна 0 или 5).*

Доказательство. Представим n в виде:

$$n = (a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + a_{k-2} \cdot 10^{k-3} + \dots + a_2 \cdot 10^1 + a_1) \cdot 10 + a_0.$$

Так как первое слагаемое, очевидно, кратно пяти, то $n \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5$.

Критерий делимости на 8

Число $n \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$ *(т.е. число, составленное из трёх последних цифр, делится на 8).* Доказывается аналогично признаку делимости на 4.

Критерий делимости на 9

Число $n \,\vdots\, 9 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i \,\vdots\, 9$ *(сумма цифр делится на 9).*

Доказывается аналогично признаку делимости на 3.

Критерий делимости на 10

Число $n \,\vdots\, 10 \Leftrightarrow a_0 = 0$. Доказывается аналогично признаку делимости на 2.

Критерий делимости на 11

Число $n \,\vdots\, 11$ $\Leftrightarrow$ *сумма цифр, стоящих в чётных разрядах, либо равна сумме цифр, стоящих в нечётных разрядах, либо отличается от неё на число, кратное 11.*

Доказательство. Заметим, что для произвольного натурального n, в силу одной из известных формул сокращённого умножения (для суммы нечётных степеней двух чисел), имеем:

$$10^{2n+1} + 1 = (10+1)(10^{2n} - 10^{2n-1} + 10^{2n-2} - \ldots + 1).$$

Обозначим выражение во вторых скобках через A_{2n+1}. Таким образом, $10^{2n+1} + 1 = 11 \cdot A_{2n+1}$, где A_{2n+1} – некоторое натуральное число. Отсюда можно утверждать, что всякая нечётная степень числа 10 записывается в виде разности $10^{2n+1} = 11 \cdot A_{2n+1} - 1$. Аналогично, используя другую формулу сокращённого умножения, получаем

$$10^{2n} - 1 = (10^2 - 1)(10^{2(n-1)} + 10^{2(n-2)} + \ldots + 1) = 99 \cdot A_{2n}.$$

Поэтому всякая чётная степень числа 10 может быть записана в виде суммы

$$10^{2n} = 99 \cdot A_{2n} + 1.$$

Пусть теперь n – натуральное число, исследуемое на делимость на 11. Представим его в виде разложения по степеням 10:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0.$$

Достаточно доказать, что разность

$$(a_k + a_{k-2} + \ldots + a_2 + a_0) - (a_{k-1} + a_{k-3} + \ldots + a_3 + a_1)$$

делится нацело на 11. Пусть, ради определённости, старшая степень k – число чётное. Тогда разложение числа n можно переписать в виде

$$n = a_k(99A_k + 1) + a_{k-1}(11A_{k-1} - 1) + a_{k-2}(99A_{k-2} + 1) + \ldots + a_2(99+1) +$$
$$+ a_1(11-1) + a_0 = 11 \cdot (9a_kA_k + a_{k-1}A_{k-1} + 9a_{k-2}A_{k-2} + \ldots + 9a_2 + a_1) +$$
$$+ (a_k + a_{k-2} + \ldots + a_2 + a_0) - (a_{k-1} + a_{k-3} + \ldots + a_3 + a_1).$$

В полученном выражении первое слагаемое делится на 11, следовательно, число n делится на 11 тогда и только тогда, когда разность двух сумм, стоящих в последних скобках, т.е.

$$(a_k + a_{k-2} + \ldots + a_2 + a_0) - (a_{k-1} + a_{k-3} + \ldots + a_3 + a_1),$$

делится на 11. В случае, когда старшая степень k нечётна, доказательство проводится аналогично.

Критерий делимости на 25

Число $n \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$ *(т.е. оканчивается на 00, 25, 50, 75).*

Доказательство аналогично доказательству признака делимости на 4.

Простые и составные числа. Основная теорема арифметики

Натуральное число, большее 1, называется *простым*, если оно делится только на единицу и само себя и других натуральных делителей не имеет. Натуральные числа, большие единицы и не являющиеся простыми, называются *составными*. Например, число 17 простое, так как из натуральных чисел делится только на 1 и 17. А число 18 – составное, так как помимо 1 и 18 делится ещё, например, на 3. Вот несколько первых простых чисел, записанных в порядке возрастания:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$$

Число 2 – единственное чётное простое число, все остальные простые числа – нечётные.

Простых чисел бесконечно много, это было установлено ещё в древности (*Евклид,* III век до н. э.). Докажем этот факт методом «от противного». Предположим, что простых чисел – конечное число. Перенумеруем их в порядке возрастания: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Рассмотрим натуральное число $p_1, p_2, \ldots, p_n + 1$. Оно больше каждого из простых чисел p_i $(i = \overline{1, n})$ и делится на любое из них с остатком 1. Следовательно, это тоже простое число. Получили противоречие, которое означает, что сделанное предположение о конечности множества простых чисел было неверно.

Заметим, что любое простое число, большее 3, может быть представлено в виде $6n \pm 1$ (обратное утверждение о том, что если число представимо в указанном виде, то оно простое, – неверно; докажите это самостоятельно).

Эратосфен Киренский (ок. 276–194 гг. до н.э.) предложил для нахождения всех простых чисел, не превосходящих заданного натурального числа $n > 1$, метод вычёркивания из ряда натуральных чисел, меньших либо равных n, единицы и всех кратных последовательным простым числам $p \le \sqrt{n}$, кроме самих простых чисел. Этот метод получил название «решета Эратосфена» [17]. Восхищение вызывает француз Люка, доказавший в 1876 году (в эпоху, когда ещё не было компьютеров!) простоту числа, состоящего из 39 цифр:

$$170141183460469231731687303715884105727.$$

<u>Теорема</u> *(основная теорема арифметики). Каждое составное число разлагается в произведение нескольких простых чисел, не обязательно различных, причём такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей:*

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l},$$

где n – составное число, о котором идёт речь в теореме, $p_1, p_2, \ldots, p_l$ – различные простые числа, $k_1, k_2, \ldots, k_l$ – натуральные показатели степеней (без доказательства). Это разложение часто называют *каноническим разложением* числа на простые множители.

В задачах, где требуется выяснить, является или нет некоторое натуральное число n простым, обычно необходимо разложить исследуемое число n на множители, представив его в виде произведения как минимум двух целых чисел, и если все множители в полученном разложении отличны от ± 1, то делается вывод, что число n – составное.

Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, алгоритмы их нахождения и свойства

Сформулируем несколько определений, имеющих отношение к понятиям *наибольшего общего делителя* и *наименьшего общего кратного*.

Если каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делится нацело на натуральное число b, то говорят, что число b является их *общим делителем*. Так, числа 12 и 18 имеют общие делители 1, 2, 3, 6.

Если два или несколько натуральных чисел не имеют общих натуральных делителей, отличных от единицы, то эти числа называются *взаимно простыми*. При этом каждое из них в отдельности не обязательно должно быть простым. Например, числа 7 и 9 – взаимно простые; 4, 5 и 6 – взаимно простые.

Так как числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут иметь лишь конечное число общих натуральных делителей, то среди них всегда имеется наибольший, который называется *наибольшим общим делителем* и обозначается $НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В случае взаимно простых чисел он равен единице.

Рассмотрим *стандартный алгоритм* нахождения $НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1) Разложим каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на простые множители;

2) перебирая все различные простые множители, входящие хотя бы в одно из этих чисел, возьмём каждый из них в наименьшей степени, с которой он входит в числа $a_1, a_2, \dots, a_n$;

3) перемножим взятые множители (с наименьшими степенями вхождения). Полученное число и будет $НОД(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Если натуральное число a является кратным для каждого из чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ (т.е. делится на любое из этих чисел нацело), то a называется *общим кратным* чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$. В частности, произведение нескольких натуральных чисел всегда является их общим кратным. Среди всех общих кратных данных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ (их бесконечно много) всегда имеется наименьшее; оно называется *наименьшим общим кратным* и обозначается

$$НОК(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Стандартный алгоритм нахождения наименьшего общего кратного нескольких чисел состоит в следующем:

1) разложим все числа на простые множители;

2) в отличие от алгоритма нахождения наибольшего общего делителя, возьмём каждый из простых множителей в наибольшей из степеней, с которыми он входит в разложение чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$;

3) перемножим эти множители (с наибольшими степенями вхождения). Полученное в результате число и будет $НОК(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Можно определить понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного для произвольных *целых* (ненулевых, но не обязательно натуральных) чисел. Так, наибольшим общим делителем целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется такой положительный общий делитель чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, который делится на любой другой общий делитель этих чисел. Наименьшим общим кратным отличных от нуля целых чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ называется наименьшее положительное число, кратное всем этим числам.

Как уже отмечалось, отыскание НОД двух натуральных чисел a и b требует предварительного разложения этих чисел на простые множители. Это несложно сделать, если числа невелики, но разложить на множители многозначные числа бывает трудно. Существует способ отыскания НОД, требующий лишь умения делить с остатком (см. следующий пункт). Этот способ предложил в свое время Евклид, поэтому он называется *алгоритмом Евклида* и основан на следующих утверждениях.

1. Если $a \,\vdots\, b$, то $НОД(a,b) = b$.

2. Если при делении a на b получается ненулевой остаток q, т.е. $a = b \cdot p + q$, то $НОД(a,b) = НОД(a,q)$ и задача сводится к более простой задаче отыскания $НОД(a,q)$.

3. Если $b \vdots q$, то $НОД(b,q) = q$, и тогда $НОД(a,b) = q$.

4. Если при делении b на q получается ненулевой остаток q_1, т.е. $b = q \cdot p_1 + q_1$, то $НОД(q,q_1) = НОД(b,q) = НОД(a,b)$.

5. Продолжая описанный процесс, получаем все меньшие и меньшие остатки. В конце концов, дойдём до остатка, на который будет делиться предыдущий остаток. Этот наименьший отличный от нуля остаток и будет наибольшим общим делителем чисел a и b.

Перечислим наиболее важные свойства НОД и НОК, позволяющие лучше изучить природу этих понятий.

Свойства НОД и НОК

Для любых натуральных a, b, c, d справедливы следующие свойства.

1. *Переместительное свойство*:

$$НОД(a,b) = НОД(b,a),\ НОК(a,b) = НОК(b,a).$$

2. $НОД(a,b) \cdot НОК(a,b) = ab$. *В частности, если* $НОД(a,b) = 1$, *то* $НОК(a,b) = ab$ (свойство верно только для двух чисел a, b).

3. *Если* $НОД(a,b) = n$, *то найдутся такие натуральные числа* c, d, *что* $a = cn$, $b = dn$, *причём* $НОД(c,d) = 1$.

4. *Если* $НОД(a,b) = 1$, *то* $\forall n, k \in N \ \ НОД(a^n, b^k) = 1$.

5. *Если* $a \vdots b$, *то* $НОД(a,b) = b$, $НОК(a,b) = a$.

6. *Общий множитель* c *можно выносить из-под знаков НОД и НОК*:

$$НОД(ac,bc) = c \cdot НОД(a,b),\ НОК(ac,bc) = c \cdot НОК(a,b).$$

7. *Два (три) последовательных натуральных числа взаимно просты:*

$$НОД(a, a+1) = 1,\ НОД(a, a+1, a+2) = 1.$$

8. *Пошаговое (последовательное) вычисление НОД и НОК:*

$$НОД(a,b,c) = НОД(НОД(a,b),c),$$

$$НОК(a,b,c) = НОК(НОК(a,b),c).$$

9. *Если* $b > a$, *то* $НОД(a,b) = НОД(a, b-a)$.

10. *Если при делении числа* a *на число* b *получается ненулевой остаток* q *(т.е.* $a = pb + q$, $0 < q < b$ *), то* $НОД(a,b) = НОД(q,b)$.

Знание указанных свойств позволяет на практике упрощать решение многих задач, в которых используются понятия НОД и НОК.

Деление с остатком

Пусть имеются два числа a и b ($a \in Z$, $b \in N$). *Разделить* целое число a на натуральное число b *с остатком* значит найти два целых числа p и q таких, что справедливо равенство

$$a = p \cdot b + q,$$

где p называется *частным*, а q – *остатком* от деления a на b, причём $0 \le q < b$. Эта формула носит название *формулы деления целого числа на натуральное с остатком*, и такое представление единственно.

В частности, если $q = 0$, то целое число a делится *нацело* на натуральное число b. Если $q \ne 0$, то p называется *неполным частным*.

Сравнимость по модулю (*)

Рассмотрим в связи с понятием остатков от деления ещё одно полезное определение. Если два целых числа a и b при делении на натуральное число n дают один и тот же остаток q, где $0 \le q < n$, то числа a и b называют *сравнимыми по модулю* n. Это обозначают следующим образом

$$a \equiv b(\bmod n)$$

и читают: «a равно b по модулю n».

Можно доказать, например, что введённая таким образом операция сравнения обладает следующими *свойствами*.

1. *Два числа, сравнимые с третьим по одному и тому же модулю, сравнимы между собой (по этому же модулю)*:

$$a \equiv c(\bmod n),\ b \equiv c(\bmod n) \Rightarrow a \equiv b(\bmod n).$$

2. *Сравнения по одному модулю можно складывать*:

$$a \equiv b(\bmod n),\ c \equiv d(\bmod n) \Rightarrow a + c \equiv b + d(\bmod n).$$

Остаток суммы нескольких чисел по модулю n равен сумме остатков слагаемых по модулю n. То есть, проще говоря, при сложении чисел их остатки (от деления на одно и то же число n) также складываются.

3. *Сравнения по одному модулю можно почленно перемножать*:

$$a \equiv b(\bmod n),\ c \equiv d(\bmod n) \Rightarrow ac \equiv bd(\bmod n).$$

Остаток произведения нескольких чисел по модулю n равен произведению остатков сомножителей по модулю n. Т.е., проще говоря, при перемножении чисел их остатки (от деления на одно и то же число n) также перемножаются.

4. *Обе части сравнения и модуль можно умножить на одно и то же целое число*:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, n) \Rightarrow ak \equiv bk(\mathrm{mod}\, nk).$$

В следующей задаче эффективно используются некоторые из свойств операции сравнения по модулю.

Пример. *Найти остатки от деления на 8:*

1) суммы $88881+88882+88883+88884+88885$,

2) произведения $88881 \cdot 88882 \cdot 88883 \cdot 88884 \cdot 88885$,

не выполняя непосредственно сложения и умножения.

Решение. 1) Числа $88881, 88882, 88883, 88884, 88885$ при делении на 8 дают соответственно остатки 1,2,3,4,5. То есть $88881 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 8)$, $88882 \equiv$ $\equiv 2(\mathrm{mod}\, 8)$, $88883 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 8)$, $88884 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 8)$, $88885 \equiv 5(\mathrm{mod}\, 8)$.

Тогда по свойству 2 имеем

$$88881+88882+88883+88884+88885(\mathrm{mod}\, 8) \equiv$$
$$\equiv 1+2+3+4+5(\mathrm{mod}\, 8) \equiv 7(\mathrm{mod}\, 8);$$

2) По свойству 3 имеем

$$88881 \cdot 88882 \cdot 88883 \cdot 88884 \cdot 88885(\mathrm{mod}\, 8) \equiv$$
$$\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(\mathrm{mod}\, 8) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 8).$$

Ответ: остаток от деления суммы на 8 равен 7; остаток от деления произведения на 8 равен 0.

Более подробно с теорией сравнений и её весьма интересными приложениями можно ознакомиться, например, в книге [29].

Некоторые приёмы и методы, используемые при решении задач с целочисленными величинами

Обратимся к приёмам, применяемым по отношению к задачам на целые числа. Эта весьма широкая группа методов. Среди них есть как узко специализированные, так и весьма универсальные и хорошо известные. Следует подчеркнуть, что довольно часто при решении одной задачи могут использоваться сразу несколько различных приёмов. Перечислим те из них, которые применяются наиболее часто, в том числе при решении уравнений и неравенств в целых числах, проиллюстрировав их использование примерами (подробнее о методах решения см. в разделе 3).

Начнём со специфических методов, существенно использующих целочисленность величин, фигурирующих в условиях задач.

Разложение целого числа в сумму по степеням основания системы счисления

В следующих примерах показано применение формулы

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0, \qquad (1)$$

а также её обобщения на случай систем счисления с произвольным основанием.

Пример 1. *Доказать, что разность двузначных чисел $\overline{ab} - \overline{ba}$ всегда делится на 9.*

Решение. Поскольку $\overline{ab} = 10a + b$, а $\overline{ba} = 10b + a$, то

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) \ \vdots 9 .$$

Пример 2 [Фин. академия при правительстве РФ]. *Шестизначное число начинается с цифры 2. Если эту цифру перенести на последнее место, то полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.*

Решение. Обозначим первоначальное число $\overline{2abcde}$. Тогда в результате перестановки первой цифры в конец числа получится новое число $\overline{abcde2}$. По условию задачи имеем уравнение

$$3 \cdot \left(\overline{2abcde}\right) = \overline{abcde2} .$$

Преобразуем числа к виду $\overline{2abcde} = 200000 + \overline{abcde}$, $\overline{abcde2} = \overline{abcde} \cdot 10 + 2$, и введём новую неизвестную $n = \overline{abcde}$. Тогда уравнение примет вид

$$3 \cdot (200000 + n) = 10n + 2 .$$

Решив уравнение, найдём $n = 85714$. *Ответ*: 285714.

Пример 3 [ВМиК–2005, устн.]. *Известно, что натуральное трёхзначное число $p = \overline{abc}$ делится нацело на 37. Могут ли числа $q = \overline{bca}$ и $r = \overline{cab}$ также делиться нацело на 37?*

Решение. По условию $\exists k \in N : \ p = 100a + 10b + c = 37k$. Тогда

$$q = 100b + 10c + a = 10(100a + 10b + c) - 999a = 37(10k - 27a) \ \vdots 37,$$

$$r = 100c + 10a + b = 100(100a + 10b + c) - 9990a - 999b =$$

$$= 37(100k - 270a - 27b) \ \vdots 37 .$$

Ответ: числа q и r всегда делятся на 37.

Пример 4 [ВМиК–2002, устн.]. *Показать, что каждое число последовательности* 49, 4489, 444889, 44448889, 4444488889,... *является полным квадратом.*

Решение. Обозначим $a_n = \underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9$ – n-й член данной числовой последовательности. Воспользовавшись представлением (1), преобразуем a_n:

$$a_n = \left(4\cdot 10^{2n-1} + 4\cdot 10^{2n-2} + ... + 4\cdot 10^n\right) +$$
$$+\left(8\cdot 10^{n-1} + 8\cdot 10^{n-2} + ... + 8\cdot 10\right) + 9 = 4\left(10^n + 10^{n+1} + ... + 10^{2n-1}\right) +$$
$$+8\left(10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}\right) + 9.$$

Выражения в скобках являются суммами геометрических прогрессий. Используя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ со знаменателем q, а именно $S_n = b_1\dfrac{q^n - 1}{q-1}$, упрощаем эти выражения. Итак,

$$a_n = 4\cdot 10^n\cdot\frac{10^n - 1}{10-1} + 8\cdot 10\cdot\frac{10^{n-1}-1}{10-1} + 9 = \frac{4}{9}\left(10^{2n} - 10^n\right) + \frac{8}{9}\left(10^n - 10\right) + \frac{81}{9} =$$
$$= \frac{1}{9}\left(4\cdot 10^{2n} + 4\cdot 10^n + 1\right) = \left(\frac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

Поскольку число $2\cdot 10^n + 1$ делится нацело на 3 (по признаку делимости на 3), то задача решена.

Пример 5. *Сформулировать и доказать признак делимости на 7 для четырёхзначных чисел.*

Решение. Выведем требуемый признак делимости. Пусть $\overline{abcd}$ – произвольное четырёхзначное число. Представим его в виде

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Далее, представим каждое из слагаемых (за исключением последнего) в виде суммы числа, кратного 7, и некоторого ненулевого остатка:

$$1000a + 100b + 10c + d = (994+6)\cdot a + (98+2)\cdot b + (7+3)\cdot c + d =$$
$$= (994a + 98b + 7c) + (6a + 2b + 3c + d).$$

Здесь каждое из чисел $994a$, $98b$, $7c$, очевидно, делится на 7.

Теперь можно сформулировать искомый признак (в действительности, это критерий): «Четырёхзначное число $\overline{abcd}$ делится нацело на 7 тогда и только тогда, когда выражение $(6a + 2b + 3c + d)$ кратно 7».

Пример 6*. В какой системе счисления (двоичной, троичной, четверичной, пятеричной и т.д.) справедливо равенство* $4 \cdot 13 = 100$ *?*

Решение. Пусть данное равенство справедливо в некоторой системе счисления с основанием p:

$$(4)_p \cdot (13)_p = (100)_p .$$

Заметим, что, так как в записи чисел присутствует цифра 4, то $p \geq 5$. Переведём все числа в более удобную и привычную при проведении расчётов десятичную систему счисления:

$$(4)_p = (4)_{10},\ (13)_p = 1 \cdot p^1 + 3 \cdot p^0 = (p+3)_{10},$$

$$(100)_p = 1 \cdot p^2 + 0 \cdot p^1 + 0 \cdot p^0 = \left(p^2\right)_{10}.$$

Тогда в десятичной системе равенство примет вид $4 \cdot (p+3) = p^2$. Решая это квадратное уравнение, находим $p = -2 < 0$ и $p = 6$.

Ответ: равенство верно только в шестеричной системе счисления.

Метод анализа делимости нацело. Использование признаков делимости

Рассмотрим примеры, когда при решении задачи возникает необходимость проанализировать делимость нацело того или иного целочисленного выражения.

Пример 1*.* [Геолог.–1994, устн.]. Доказать, что при любом натуральном n выражение $n^3 - n$ делится нацело на 6.

Решение. Преобразуем выражение к виду $(n-1)n(n+1)$ и докажем, что произведение трёх последовательных целых чисел всегда делится нацело на 6. В самом деле, каждое второе целое число кратно двум, а каждое третье – трём. Поэтому можно утверждать, что среди подряд идущих чисел $n-1$, n и $n+1$ по крайней мере одно делится на 2, и (одновременно с этим) одно делится на 3. Следовательно, их произведение будет делиться на 6, что и требовалось доказать.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел делится нацело на 24.

Пример 2 [Геолог.–1999, устн.]. *Доказать, что число* $10^{1999} - 1999$ *делится нацело на 9.*

Решение. Преобразуем число к виду

$$10^{1999} - 1999 = \left(10^{1999} - 1\right) - 1998 = \underbrace{99...9}_{1999} - 1998 .$$

Каждое из двух слагаемых делится нацело на 9 по признаку делимости на 9. Следовательно, их разность также кратна 9, что и требовалось доказать.

Пример 3 [Физфак–1964]. *Найти все числа вида* $\overline{34X5Y}$ *такие, чтобы они делились без остатка на 36.*

Решение. Поскольку $36 = 4 \cdot 9$, то воспользуемся признаками делимости на 4 и 9. Начнём с признака делимости на 4 (он использует только одну из двух неизвестных цифр). Число $\overline{34X5Y}$ кратно 4 тогда и только тогда, когда двузначное число $\overline{5Y}$ делится нацело на 4, а это выполняется, только если $Y = 2$ или $Y = 6$. Рассмотрим эти два случая и в каждом из них применим признак делимости на 9.

1) Если $Y = 2$, то число $\overline{34X52}$ должно делиться нацело на 9, т.е. сумма всех цифр данного числа $3 + 4 + X + 5 + 2 = 14 + X$ должна быть кратна 9. Это возможно лишь при $X = 4$. Имеем число 34452.

2) Если $Y = 6$, то число $\overline{34X56}$ кратно 9 $\Leftrightarrow$ $3 + 4 + X + 5 + 6 = 18 + X$ кратно 9, т.е. $X = 0$ или $X = 9$. Таким образом, нашли ещё два числа: 34056 и 34956. *Ответ*: 34452, 34056 и 34956.

Пример 4. *Решить уравнение в целых числах* $2x^2 - 1 = 2xy$.

Решение. Заметим, что при целых x и y в левой части уравнения стоит нечётное число, а в правой – чётное, что невозможно. Следовательно, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 5. [Геолог.–1996, май, устн.]. *Доказать, что уравнение* $35x - 20y = 13$ *не имеет целочисленных решений.*

Доказательство. Достаточно заметить, что при целых x и y выражение в левой части уравнения делится нацело на 5, а число 13 справа – нет. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Пример 6 [ВМиК–1998, устн.]. *Существуют ли целые числа* m *и* n, *удовлетворяющие уравнению*

$$m^2 + 1998 = n^2\ ?$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$1998 = n^2 - m^2 \Leftrightarrow 1998 = (n + m)(n - m).$$

Так как $(n + m)$ и $(n - m)$ – всегда числа одинаковой чётности, то их произведение $(n + m)(n - m)$ либо нечётно (что невозможно, так как 1998 – чётное число), либо кратно четырём. Но 1998 на 4 не делится.

Ответ: не существуют.

Пример 7. *Решить в целых числах систему уравнений* $\begin{cases} x^2 = y-1 \\ y^2 = z-1 \\ z^2 = x-1. \end{cases}$

Решение. <u>1-й способ</u>. Из первого уравнения системы следует, что числа x и y имеют разную чётность (если одно чётно, то другое – нечётно, и наоборот). Из второго уравнения аналогично следует, что y и z – разной чётности, а из третьего, что x и z также имеют разную чётность, что невозможно.

<u>2-й способ</u>. Сложив все три уравнения системы, получим следствие

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z - 3, \text{ или } x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) = -3.$$

Левая часть последнего равенства чётна как сумма трёх чётных чисел (поскольку произведение любых двух последовательных целых чисел всегда чётно), а правая часть – нечётна, что невозможно. *Ответ*: нет решений в целых числах.

Пример 8 [Геолог.–1999, устн.]. *Известно, что* $4n = 5m$. *Найти все натуральные числа* m *и* n, *удовлетворяющие этому равенству.*

Решение. Целочисленное выражение $4n$ в левой части равенства кратно 4, следовательно, и выражение $5m$ справа также должно делиться на 4 нацело. Но так как 5 на 4 нацело не делится, то, значит, $m \vdots 4$, т.е. для любого m, удовлетворяющего исходному равенству, найдётся такое число $k \in N$, что $m = 4k$. Подставим в равенство: $4n = 5 \cdot 4k$, откуда $n = 5k$. Итак, уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах, общий вид которых

$$(m;n) \in \{(4k;5k)\}, \text{ где } k \in N.$$

Пример 9. *При каких наименьших натуральных значениях* n *и* m *выполняется равенство* $3n^2 = 2m^3$?

Решение. 1) Заметим, что левая часть уравнения $3n^2$ делится нацело на 3, следовательно, и правая часть уравнения $2m^3$ должна делиться на 3, а значит, m должно быть кратно 3, т.е. $m = 3m_1$, $m_1 \in N$. Аналогично правая часть уравнения $2m^3$ кратна 2, следовательно, и левая часть $3n^2$ должна делиться на 2, а значит, n должно быть кратно 2, т.е. $n = 2n_1$, $n_1 \in N$. Подставим в уравнение:

$$3(2n_1)^2 = 2(3m_1)^3 \Leftrightarrow 2n_1^2 = 9m_1^3.$$

2) Так как $2n_1^2 \vdots 2$, то $9m_1^3 \vdots 2 \Rightarrow m_1 = 2m_2$, $m_2 \in N$; аналогично рассуждая, получим, что, так как $9m_1^3 \vdots 3 \Rightarrow 2n_1^2 \vdots 3$, т.е. $n_1 = 3n_2$, $n_2 \in N$. Под-

ставим в последнее уравнение:

$$2(3n_2)^2 = 9(2m_2)^3 \Leftrightarrow n_2^2 = 4m_2^3.$$

3) Так как $4m_2^3 \,\vdots\, 2$, то $n_2 = 2n_3$, $n_3 \in N$. Подставим в уравнение:

$$(2n_3)^2 = 4m_2^3 \Leftrightarrow n_3^2 = m_2^3.$$

Очевидно, что последнее равенство выполняется при $n_3 = m_2 = 1$. Это наименьшие возможные натуральные значения n_3 и m_2, и им соответствуют наименьшие возможные значения n и m. Найдём их.

$$n = 2n_1 = 2(3n_2) = 2(3(2n_3)) = 12,\ m = 3m_1 = 3(2m_2) = 6.$$

Ответ: $n_{\min} = 12$, $m_{\min} = 6$.

Подбором одного из решений с последующим анализом делимости решаются в простейших случаях *линейные диофантовы уравнения* [15].

Пример 10 [ВМиК–2007, устн.]. *На какую минимальную величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m и n, если известно, что дробь $89/(3m+7n)$ является натуральным числом?*

Решение. Так как число 89 – простое (убедитесь в этом сами), то данная дробь является натуральным числом тогда и только тогда, когда выражение $3m+7n$ принимает значения ± 1, ± 89. С учётом натуральности m и n возможен только случай, когда

$$3m + 7n = 89. \qquad (1)$$

Это линейное диофантово уравнение. Решим его. Очевидно, пара чисел $m = 25$, $n = 2$ является одним из его решений. Для нахождения множества всех решений уравнения (1) вычтем из него почленно тождество $3\cdot 25 + 7\cdot 2 = 89$, получив уравнение, равносильное уравнению (1):

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} 3m\ \ +7n\ \ =89 \\ 3\cdot 25+7\cdot 2=89 \end{array} \\ \hline 3(m-25)+7(n-2)=0 \end{array}.$$

Переписав последнее уравнение в виде

$$3(m-25) = -7(n-2), \qquad (2)$$

воспользуемся анализом делимости левой и правой частей. Так, поскольку левая часть уравнения (2) делится нацело на 3, то и правая часть, т.е. выражение $7(n-2)$, должно быть кратным числу 3. Следовательно, $(n-2)\,\vdots\,3$. Это означает, что найдётся такое целое l, что $n-2=3l$, т.е. $n=2+3l$. Подставляя в (2), находим $m=25-7l$. Итак, множество пар $n=2+3l$, $m=25-7l$, где $l\in Z$, образует множество всех целочисленных решений уравнения (1). Учитывая натуральность m и n, получаем: $\begin{cases}2+3l\ge 1\\25-7l\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow l\in\{0;1;2;3\}$.

Тогда $|m-n|=|25-7l-2-3l|=|23-10l|$ принимает наименьшее значение, равное 3, при $l=2$. *Ответ*: на 3 $(n=8,\ m=11)$.

Пример 11 [ВМиК–1999, апрель, устн.]. *Целое число кратно 7 и при делении на 4 даёт в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.*

Решение. По условию $n=7k$ и $n=4m+3$ $(k,m\in Z)$. Приравнивая, получаем линейное уравнение

$$7k=4m+3,$$

которое необходимо решить в целых числах. Подберём любую пару целых чисел (k,m), удовлетворяющих уравнению, например $(1,1)$. Вычитая из уравнения тождество $7\cdot 1=4\cdot 1+3$, приходим к уравнению, равносильному решаемому:

$$7(k-1)=4(m-1).$$

В последнем уравнении выражение справа делится нацело на 4, следовательно, $k-1=4l,\ l\in Z$, т.е. $k=1+4l$. Тогда $n=7k=28l+7$, что означает, что число n делится на 28 с остатком 7.

В более сложных случаях, когда подобрать решение затруднительно, последовательное применение рассмотренного подхода, основанного на анализе делимости нацело, тем не менее, помогает справиться с проблемой.

Пример 12 [РГГУ]. *Найти хотя бы одну пару целых чисел a и b, удовлетворяющих соотношению*

$$72a-59b=3.$$

Решение. 1) Так как $72a\,\vdots\,3$ и в правой части $3\,\vdots\,3$, то отсюда следует, что для того чтобы удовлетворять данному уравнению, выражение $59b$ должно быть кратно 3, т.е. найдётся такое $b_1\in Z$, что $b=3b_1$. Подставим в уравнение, и после сокращения на 3 получим новое уравнение (заметим, что коэффициент при a уменьшился):

$$24a-59b_1=1.$$

2) Продолжаем анализировать делимость. Поскольку в последнем равенстве число $24a$ чётно, то $59b_1$ должно быть нечётным, а значит, и число b_1 должно

быть нечётным, т.е. $b_1 = 2b_2 + 1$, $b_2 \in Z$. Подставив в последнее уравнение и сократив на 2, получим

$$12a - 59b_2 = 30$$

(коэффициент при a стал ещё меньше).

3) Так как $12a \vdots 6$ и $30 \vdots 6$, то, следовательно, b_2 делится на 6, т.е. $b_2 = 6b_3$, $b_3 \in Z$. После подстановки и упрощения получим:

$$2a - 59b_3 = 5.$$

4) Из последнего уравнения анализом делимости на 2 получаем, что b_3 нечётно, т.е. $b_3 = 2b_4 + 1$, $b_4 \in Z$. Подставим в уравнение и найдём общий вид всех a, удовлетворяющих исходному уравнению:

$$a = 59b_4 + 32.$$

Осталось найти b:

$$b = 3b_1 = 3(2b_2 + 1) = 3(12b_3 + 1) = 3(12(2b_4 + 1) + 1) = 72b_4 + 39.$$

Таким образом, множество всех целочисленных решений исходного уравнения имеет вид

$$(a;b) \in \{(59n + 32; 72n + 39)\}, \text{ где } n \in Z$$

(мы переобозначили для простоты b_4 на n). Для получения одного из решений положим, например, $n = 0$; тогда $a = 32$ и $b = 39$.

Заметим в заключение, что изначально подобрать какое-либо одно решение в данной задаче было весьма затруднительно.

Метод анализа остатков

В основе *метода анализа остатков*, который используется при решении ряда задач с целочисленными неизвестными, лежит формула деления с остатком. Суть метода состоит в рассмотрении случаев различных остатков от деления на заданное число, что позволяет в конечном итоге решить поставленную задачу.

В первых трёх примерах, приведённых ниже, в явном виде ищутся остатки от деления одних целых чисел на другие.

Пример 1*. Найти частное и остаток от деления числа* (-23) *на* 7.

Решение*.* Согласно формуле деления с остатком, получаем:

$-23 = -4 \cdot 7 + 5$, т.е. частное равно –4, а остаток равен 5.

Пример 2 [Государственное тестирование–1996]. *Найти сумму остатков, получающихся при делении числа* 7263544587435873 *на* 2, 4, 5, 9, 10, 25.

Решение. Используя признаки делимости нацело на числа 2,4,5,9,10 и 25, находим остатки:

остаток от деления на 2 равен 1;
остаток от деления на 4 равен 1;
остаток от деления на 5 равен 3;
остаток от деления на 9 равен 0;
остаток от деления на 10 равен 3;
остаток от деления на 25 равен 23.

Суммируя остатки 1+1+3+0+3+23, получаем в ответе 31.

Пример 3. *Пусть остаток от деления натурального числа m на 7 равен 3. Найти остаток от деления на 7 числа $3m^2+5m+1$.*

Решение. Из условия следует, что число m имеет вид: $m=7k+3$. Тогда

$$3m^2+5m+1=3(7k+3)^2+5(7k+3)+1=7(21k^2+23k+6)+1.$$

Таким образом, остаток от деления числа $3m^2+5m+1$ на 7 равен 1.

Пример 4. *Доказать, что при любых целых x число $x(x^2+5)$ делится нацело на 6.*

Решение. Разобьём множество всех целых x на 6 групп в зависимости от остатка при делении на 6, т.е. рассмотрим 6 случаев:

$$x=6n+q\text{, где } q=0,1,2,3,4,5.$$

1) Пусть $x=6n$, тогда $x(x^2+5)=6n\cdot(36n^2+5)\,\vdots\,6$.

2) Пусть $x=6n+1$, тогда $x(x^2+5)=(6n+1)((6n+1)^2+5)=$
$$=(6n+1)(36n^2+12n+6)=(6n+1)\cdot 6\cdot(6n^2+2n+1)\,\vdots\,6.$$

3) Пусть $x=6n+2$, тогда $x(x^2+5)=(6n+2)((6n+2)^2+5)=$
$$=(6n+2)\cdot(36n^2+24n+9)=2\cdot(3n+1)\cdot 3\cdot(12n^2+8n+3)\,\vdots\,6.$$

4) Пусть $x=6n+3$, тогда $x(x^2+5)=(6n+3)((6n+3)^2+5)=$
$$=(6n+3)(36n^2+36n+14)=3\cdot(2n+1)\cdot 2\cdot(18n^2+18n+7)\,\vdots\,6.$$

5) Пусть $x=6n+4$, тогда $x(x^2+5)=(6n+4)((6n+4)^2+5)=$
$$=(6n+4)(36n^2+48n+21)=2\cdot(3n+2)\cdot 3\cdot(12n^2+16n+7)\,\vdots\,6.$$

6) Пусть $x=6n+5$, тогда $x(x^2+5)=(6n+5)((6n+5)^2+5)=$
$$=(6n+5)(36n^2+60n+30)=(6n+5)\cdot 6\cdot(6n^2+10n+5)\,\vdots\,6.$$

Таким образом, мы рассмотрели все целые числа x и доказали, что всегда (в каждом из шести случаев) выражение $x(x^2+5)$ кратно 6.

<u>*Замечание*</u>. Эту задачу можно было решить иначе. Преобразуем данное в условии задачи выражение:

$$x(x^2+5)=x^3+5x=(x^3-x)+6x=(x-1)x(x+1)+6x.$$

Каждое из двух слагаемых делится нацело на 6 (первое как произведение трёх последовательных целых чисел), поэтому их сумма кратна 6.

Пример 5 [Ф-т наук о материалах–2001]. *Учительница принесла в класс счётные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счётных палочек?*

Решение. Пусть всего было n счётных палочек. Тогда условия задачи приводят к системе

$$\begin{cases} n=2l+1 \quad (l=0,1,2,\ldots), \\ n=13k+7 \quad (k=0,1,2,\ldots), \\ n=9m \quad (m\in N), \\ n_{\min}=? \end{cases}$$

Таким образом, требуется найти наименьшее натуральное нечётное число n, делящееся на 9 и дающее при делении на 13 остаток 7. Заметим, что в силу нечётности $n=13k+7$ число k должно быть чётным, т.е. $k=2p$ $(p=0,1,2,\ldots)$, причём меньшему n соответствует меньшее p, но тогда имеем $n=26p+7=27p+9-(p+2)$. Поскольку числа n и $27p+9$ делятся нацело на 9, то, следовательно, число $p+2$ также должно быть кратно 9 (и при этом быть минимальным). Наименьшее целое неотрицательное p, для которого выполняются эти условия, равно 7, откуда находим

$$n=26p+7=26\cdot 7+7=189.$$

Ответ: самое меньшее – 189 счётных палочек.

Пример 6 [Физфак–1983]. *После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.*

Решение. Обозначим $\overline{xy}$ – искомое число ($x, y\in\{0,1,2,\ldots,9\}$, $x\neq 0$). Тогда, по условию, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}10x+y=7(x+y)+6\\10x+y=3xy+11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+2\\10x+y=3xy+11.\end{cases}$$

Решая систему методом подстановки, находим единственное решение, удовлетворяющее всем условиям задачи: $x=8,\ y=3$. *Ответ*: 83.

Пример 7 [Олимпиада «Ломоносов–2008», ВМиК, устн.]. *Целые числа n,m,k не делятся нацело на 3. Доказать, что число $n^6+m^4+k^2$ делится на 3.*

Доказательство. Если $n\not\vdots\,3$, то возможны два случая: $n=3l+1$ и $n=3l+2$. В первом случае $n^2=(3l+1)^2$ – делится на 3 с остатком 1, а значит, n^{2p}, $p\in N$, также делится на 3 с остатком 1. Аналогично во втором случае: $n^2=(3l+2)^2$ делится на 3 с остатком 1 $\Rightarrow$ n^{2p} делится на 3 с остатком 1. Таким образом, если целое число не делится нацело на 3, то его квадрат (любая чётная степень) при делении на 3 дают остаток 1. Но тогда сумма трёх таких чётных степеней кратна 3.

Пример 8 [ВМиК–2006, устн.]. *Доказать, что если p и $8p^2+1$ – простые числа, то $8p^2-1$ – тоже простое число.*

Доказательство. Если $p\not\vdots\,3$, то остаток от деления p^2 на 3 равен 1. Но тогда $8p^2+1$ делилось бы на 3, что противоречит условию. Следовательно, $p\,\vdots\,3$ $\Rightarrow$ $p=3$, тогда действительно $8p^2+1=73$ – простое число, и при этом $8p^2-1=71$ тоже является простым.

Пример 9 [ВМиК–1997, устн.]. *Решить уравнение в целых числах*

$$x^2-7y^2+2=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде: $x^2+2=7y^2$. Заметим, что правая часть уравнения при любом целом y делится нацело на 7. Выясним, какие остатки при делении на 7 даёт левая часть данного уравнения. Для этого разобьём множество всех целых x на 7 групп в зависимости от остатка при делении на 7: $x=7p+q$, где $q=0,1,2,\dots,6$, и рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Если $x=7p$, то $x^2+2=(7p)^2+2\ \vdots\ 7$ с остатком 2;

2) если $x=7p+1$, то $x^2+2=(7p+1)^2+2\ \vdots\ 7$ с остатком 3;

3) если $x=7p+2$, то $x^2+2=(7p+2)^2+2\ \vdots\ 7$ с остатком 6;

4) если $x=7p+3$, то $x^2+2=(7p+3)^2+2 \vdots 7$ с остатком 4;

5) если $x=7p+4$, то $x^2+2=(7p+4)^2+2 \vdots 7$ с остатком 4;

6) если $x=7p+5$, то $x^2+2=(7p+5)^2+2 \vdots 7$ с остатком 6;

7) если $x=7p+6$, то $x^2+2=(7p+6)^2+2 \vdots 7$ с остатком 3.

Итак, правая часть уравнения делится на 7 нацело (т.е. с остатком 0), а левая часть при этом – с остатками 2, 3, 4, 6. Однако равные числа при делении на одно и то же целое число 7 должны давать одинаковые остатки. Полученное противоречие говорит о том, что данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 10 [Географ.–1998]. *Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению*

$$3x=5y^2+4y-1,$$

и доказать, что для каждой такой пары сумма x^3+y^3 является нечётным числом.

Решение. Заметим, что левая часть уравнения кратна 3, следовательно, и правая часть должна делиться на 3 нацело. Разобьём множество всех целых y на три группы в зависимости от остатка при делении на 3:

$$y=3p+q,\ q=0,1,2.$$

1) Если $y=3p$, то уравнение примет вид $3x=45p^2+12p-1$. Это равенство невозможно, так как его левая часть кратна 3, а правая – нет.

2) Если $y=3p+1$, то получим аналогичную ситуацию.

3) Наконец, если $y=3p+2$, то, подставляя в уравнение, получим

$$3x=5(3p+2)^2+4(3p+2)-1,$$

$$x=15p^2+24p+9,\ p\in Z.$$

Следовательно, общий вид решений: $(15p^2+24p+9;3p+2)$, $p\in Z$.

Осталось показать, что x^3+y^3 – нечётно. В самом деле, если $y=3p+2$ – чётно, то p – чётно и, значит, $x=15p^2+24p+9$ – нечётно. Если, наоборот, y – нечётно, то p также нечётно, а значит, x – чётно. Таким образом, числа x и y, а значит и их кубы, имеют всегда разную чётность, поэтому их сумма есть нечётное число.

Ответ: $(15p^2+24p+9;3p+2)$, $p\in Z$.

Пример 11 [ВМиК–2008, устн.]. *Решить в целых числах уравнение*

$$x^3 = 2 + 3y^2.$$

Решение. Так как произвольное целое число x представимо в виде $3p$, $3p+1$ или $3p-1$, где $p \in Z$, а

$$(3p \pm 1)^3 = 27p^3 \pm 27p^2 + 9p \pm 1 = 9k \pm 1, \text{ где } k \in Z,$$

то любое число в кубе или делится нацело на 9, или даёт при делении на 9 в остатке 1 или 8. Аналогично, так как $3(3p \pm 1)^2 = 27p^2 \pm 18p + 3$, то $3y^2$ даёт при делении на 9 остаток 0 или 3. Итак, правая часть уравнения может делиться на 9 с остатками 2 или 5, а левая – 0, 1 или 8. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

Метод анализа последней цифры числа

В ряде случаев удобным оказывается так называемый *метод анализа последней (последних) цифры числа.*

Пример 1. *Доказать, что число* 1998199920002002 *не является квадратом целого числа.*

Доказательство. Натуральное число n может оканчиваться на любую из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Выясним, на какую цифру при этом может оканчиваться квадрат этого числа:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Среди цифр, на которые оканчивается n^2, отсутствует цифра «2». Поэтому данное число не может являться квадратом целого числа.

Пример 2 [ВМиК–2003, устн.]. *Доказать, что ни при каком натуральном* n *число* $3^n + 2 \cdot 17^n$ *не является квадратом натурального числа.*

Решение. Выясним, на какую цифру может оканчиваться число $3^n + 2 \cdot 17^n$. Сделаем это последовательно. Сначала оценим последнюю цифру числа 3^n:

3^1 оканчивается на 3,

3^2 оканчивается на 9,

3^3 оканчивается на 7,

3^4 оканчивается на 1,…,

далее эта последовательность последних цифр 3,9,7,1,3,9,7,1,… циклически повторяется. Оценим теперь последние цифры чисел 17^n и $2 \cdot 17^n$:

17^1 оканчивается на 7 $\Rightarrow$ $2\cdot17^1$ оканчивается на 4,

17^2 оканчивается на 9 $\Rightarrow$ $2\cdot17^2$ оканчивается на 8,

17^3 оканчивается на 3 $\Rightarrow$ $2\cdot17^3$ оканчивается на 6,

17^4 оканчивается на 1 $\Rightarrow$ $2\cdot17^4$ оканчивается на 2,...,

далее последовательность последних цифр 4,8,6,2,... также циклически повторяется. Суммируя, получаем, что

$3^1+2\cdot17^1$ оканчивается на 7,

$3^2+2\cdot17^2$ оканчивается на 7,

$3^3+2\cdot17^3$ оканчивается на 3,

$3^4+2\cdot17^4$ оканчивается на 3,...,

и далее эта последовательность последних цифр выражения $3^n+2\cdot17^n$ опять-таки циклически (с периодом 4) повторяется.

Таким образом, методом анализа последней цифры удалось установить, что при любых натуральных n число $3^n+2\cdot17^n$ может оканчиваться только на цифры 3 или 7. Но квадрат никакого натурального числа этими цифрами не оканчивается (квадрат натурального числа может оканчиваться только на одну из цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9), что и доказывает утверждение.

Пример 3 [МАТИ–1998]. *Найти последнюю цифру числа* 5432^{1998}.

Решение. Решим сначала более простую задачу, а именно найдём последнюю цифру числа 2^{1998}. Выясним, на какие цифры может оканчиваться натуральная степень числа 2:

$$2^1\to2,\ 2^2\to4,\ 2^3\to8,\ 2^4\to6,\ 2^5\to2,...$$

Очевидно, что при дальнейшем увеличении показателя степени последовательность последних цифр 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6,... будет циклически повторяться. Представим число 1998 в виде: $1998=4\cdot499+2$. Имеем: $2^{1998}=2^{4\cdot499+2}=\left(2^4\right)^{499}\cdot4$. Заметим, что число 16 в скобках оканчивается цифрой 6, и поэтому любая его натуральная степень также будет оканчиваться этой цифрой. Итак, число $\left(2^4\right)^{499}$ оканчивается цифрой 6, и это число умножается на четыре. Поэтому последней цифрой их произведения будет 4. Если теперь повторить проведённые рассуждения для числа 5432^{1998}, то окажется (сделайте это самостоятельно), что добавление одной или нескольких цифр перед 2 не оказывает влияния на полученный результат.

Ответ: число оканчивается цифрой 4.

Пример 4 [ВМиК–2006, устн.]. *Существует ли такое натуральное число* n, *что* n^2+2n+3 *делится нацело на 2005?*

Решение. Последней цифрой у натурального числа n может быть любая из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Последней цифрой у числа n^2 может быть соответственно 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Тогда последняя цифра у числа n^2+2n+3, как несложно посчитать, может соответственно принимать значения 3, 6, 1, 8, 7, 8, 1, 6, 3, 2. Но тогда это число не делится даже на 5, а значит, не может делиться и на 2005.

Существуют задачи, решение которых опирается на знание определений и свойств специфических групп целых чисел или же на определённые понятия. К таким задачам можно отнести задачи на простые числа, а также на НОК и НОД. Для их решения разработаны, в том числе, специальные приёмы, учитывающие их специфику. Рассмотрим примеры задач этого типа.

Задачи на простые и составные числа

Если необходимо выяснить, является ли заданное число простым, то используемый при этом подход основан на попытке разложения исследуемого числа на простые множители, нахождение его делителей, отличных по модулю от единицы и самого числа.

Пример 1. *Доказать, что число* $p=389$ *– простое.*

Доказательство. Для доказательства нет необходимости, перебирая *все* простые числа от 2 до ближайшего к числу p, проверять, делится ли на каждое из них данное число (если ни на одно из них не делится – значит, простое). Достаточно убедиться в том, что p не делится нацело ни на одно простое число от 2 до $\sqrt{p}$ (попробуйте объяснить, почему). В данном примере достаточно проверить, что число $p=389$ не делится на

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\,.$$

Пример 2 [Геолог.–2002, устн.]. *Является ли простым число*

$$43^{111}+8^{37}\ ?$$

Решение. Заметим, что данное число есть сумма кубов двух чисел, и разложим его на множители по соответствующей формуле:

$$43^{111}+8^{37}=\left(43^{37}\right)^3+\left(2^{37}\right)^3=\left(43^{37}+2^{37}\right)\left(\left(43^{37}\right)^2-43^{37}\cdot 2^{37}+\left(2^{37}\right)^2\right).$$

Поскольку число удалось разложить на произведение двух натуральных сомножителей, каждый из которых, очевидно, отличен от единицы, то это означает, по определению составного числа, что исходное число было составным.

Пример 3 [ВМиК–1999, устн.]. *Установить, является ли число* n^4+64 $(n\in Z)$ *простым или составным.*

Решение. Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением случая натуральных n (при целых отрицательных n результат будет аналогичен, а при $n=0$ число будет составным). Чтобы дать ответ на этот вопрос, попробуем разложить данное число на множители:

$$n^4+64=\left(n^4+16n^2+64\right)-16n^2=\left(n^2+8\right)^2-(4n)^2=$$
$$=\left(n^2+4n+8\right)\left(n^2-4n+8\right).$$

Заметим, что $\forall n\in N$ каждый из двух сомножителей строго больше единицы (докажите это). Это означает, что исходное число – составное.

Пример 4. *Установить, является простым или составным число*

$$n^3-6n^2+12n+117 \quad (n\in N).$$

Решение. Преобразуем данное выражение, выделив в нём полный куб разности

$$n^3-6n^2+12n+117=\left(n^3-6n^2+12n-8\right)+125=(n-2)^3+5^3.$$

Теперь разложим на множители по формуле суммы кубов:

$$(n-2)^3+5^3=(n+3)\left((n-2)^2-5(n-2)+5^2\right)=(n+3)\left(n^2-9n+39\right).$$

Очевидно, что при натуральных n оба сомножителя в этом произведении целочисленны и больше единицы. Это означает, что исследуемое число является составным.

Пример 5. *Доказать, что квадрат любого простого числа* $p>3$ *при делении на 12 даёт в остатке 1.*

Доказательство. Воспользуемся известным свойством, что любое простое число, большее 3, можно представить в виде $6n\pm1$. Тогда его квадрат равен $12n(3n\pm1)+1$, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Пример 6. *Пусть* $p>5$ *– простое число. Доказать, что* p^2-1 *делится нацело на 24.*

Доказательство. Рассмотрим на числовой прямой три последовательных целых числа $p-1$, p, $p+1$. Так как p – простое число, то p нечётно $\Rightarrow$ $\Rightarrow p-1$ и $p+1$ – чётные последовательные числа, следовательно, одно из них делится на 2, а другое – на 4, но тогда их произведение p^2-1 – делится на 8. Далее, поскольку $p\wr 3$, то либо $p-1$, либо $p+1$ делится на 3, а значит, их произведение кратно 3. Итак, число p^2-1 делится одновременно на 8 и на 3 $\Rightarrow$ делится на 24.

Пример 7 [ВМиК–2004, устн.]. *Найти все простые числа вида*

$$\frac{n(n+1)}{2}-1,\ n\in N.$$

Решение. Обозначим $a_n=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

1) Если $n=2k$ $(k\in N)$, то $a_{2k}=\frac{(2k-1)(2k+2)}{2}=(2k-1)\times$ $\times(k+1)$. При натуральных k оба сомножителя натуральны, причём второй сомножитель больше 1, поэтому a_{2k} может быть простым числом, только если $2k-1=1$, т.е. при $k=1$, тогда $a_2=2$.

2) Если $n=2k-1$ $(k\in N)$, то имеем

$$a_{2k-1}=\frac{(2k-2)(2k+1)}{2}=(k-1)(2k+1).$$

При $k=1$ имеем $a_1=0$ – не является ни простым, ни составным числом. При $k>2$ оба сомножителя целочисленны и больше 1 и, значит, число будет составным. Только при $k=2$ получаем простое число $a_3=5$.

Ответ: таких чисел два: 2 и 5.

Пример 8 [ВМиК–2008, устн.]. *Доказать, что для всех простых чисел p число p^4+4 – составное.*

Решение. <u>1-й способ</u>. Разложим исследуемое число на множители:

$$p^4+4=(p^2+2)^2-(2p)^2=(p^2+2p+2)(p^2-2p+2).$$

Так как при простых p оба сомножителя больше единицы (убедитесь в этом самостоятельно), то тем самым необходимое утверждение доказано.

<u>2-й способ</u>. Покажем, что если $p\neq 5k$, $k\in N$, то p^4 при делении на 5 даёт остаток 1: 1) $p=5k+1\Rightarrow p^4=(5k+1)^4$ – остаток равен 1;

2) $p=5k+2\Rightarrow p^4=(5k+2)^4$ – остаток равен 1;

3) $p=5k+3\Rightarrow p^4=(5k+3)^4$ – остаток равен 1;

4) $p=5k+4\Rightarrow p^4=(5k+4)^4$ – остаток равен 1.

Тогда число p^4+4 делится нацело на 5, а значит, является составным.

Если же $p=5k$, то $p=5\Rightarrow p^4+4=629=37\cdot 17$ – составное.

Задачи на НОД и НОК

Следующие примеры демонстрируют приёмы, используемые при решении задач из данной группы.

Пример 1. *Найти, пользуясь стандартным алгоритмом, НОД и НОК чисел 42, 18.*

Решение. 1) Найдём вначале $НОД(42,18)$. Для этого выпишем разложения чисел 42 и 18 на простые множители: $42 = 2\cdot 3\cdot 7$, $18 = 2\cdot 3^2$. Наконец, выбирая наименьшие степени, с которыми простые множители 2, 3 и 7 входят в разложение каждого из двух чисел, находим

$$НОД(42,18) = 2\cdot 3 = 6.$$

2) Найдём теперь $НОК(42,18)$. В отличие от предыдущего случая, теперь выбираем наибольшие степени для каждого из простых чисел:

$$НОК(42,18) = 2\cdot 3^2\cdot 7 = 126.$$

Пример 2. *Используя различные свойства, найти НОД и НОК чисел 42, 18.*

Решение. 1) Решим задачу с помощью свойства 6:

$$НОД(42,18) = НОД(6\cdot 7, 6\cdot 3) = 6\cdot НОД(7,3) = 6\cdot 1 = 6,$$

так как числа 7 и 3 взаимно просты;

$$НОК(42,18) = 6\cdot НОК(7,3) = 6\cdot 21 = 126.$$

2) Теперь найдём $НОД(42,18)$ другим способом, применяя несколько раз свойство 9: $НОД(42,18) = НОД(42-18,18) =$
$= НОД(24,18) = НОД(24-18,18) = НОД(6,18) = НОД(6,18-6) =$
$= НОД(6,12) = НОД(6,12-6) = НОД(6,6)$, что равно 6.

Пример 3. *Найти, пользуясь алгоритмом Евклида,*

$$НОД(15283,10013).$$

Решение. Применяя алгоритм Евклида, получаем

$$15283 = 1\cdot 10013 + 5270,$$
$$10013 = 1\cdot 5270 + 4743,$$
$$5270 = 1\cdot 4743 + 527,$$
$$4743 = 9\cdot 527.$$

Следовательно, $НОД(15283,10013) = 527$. Итак, сначала делят большее число на меньшее, меньшее число на остаток от деления и так далее, пока остаток не станет равен нулю. Последний ненулевой остаток и является наибольшим общим делителем исходных чисел.

Пример 4 [ВМиК–2007, отд. бакалавров]. *Найти наибольший общий делитель чисел* $n = 720$, $m = 756$, $k = 468$.

Решение. $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$, $468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$.

Поэтому $НОД(n,m,k) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Пример 5 [Олимпиада МИФИ–2003]. *Найти такие натуральные числа* a *и* b, *что* $НОД(a,b) = 3$, $НОК(a,b) = 630$, *и при этом сумма* $a + b$ *минимальна.*

Решение. Так как $НОД(a,b) = 3$, то по свойству 3 существуют такие взаимно простые натуральные числа m, n, что $a = 3m$, $b = 3n$. Тогда задачу можно сформулировать в виде: «Найти такие натуральные m, n, что $НОД(m,n) = 1$, $НОК(m,n) = 210$, и при этом сумма $m + n$ минимальна».

Далее задача решается перебором. Заметим, что условия симметричны относительно m и n. Пусть, ради определённости, $m \le n$. Так как $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то возможны следующие случаи:

m	n	$m+n$
2	$3 \cdot 5 \cdot 7$	>70
3	$2 \cdot 5 \cdot 7$	>70
5	$2 \cdot 3 \cdot 7$	>40
7	$2 \cdot 3 \cdot 5$	37
$2 \cdot 3$	$5 \cdot 7$	41
$2 \cdot 5$	$3 \cdot 7$	31
$2 \cdot 7$	$3 \cdot 5$	29

Итак, сумма $m + n$ минимальна (и равна 29), если $m = 14$, $n = 15$. Им соответствуют $a = 42$, $b = 45$. С учётом симметрии получаем ответ.

Ответ: $(a;b) \in \{(42;45);(45;42)\}$.

Пример 6 [Олимпиада «Ломоносов–2007»]. *Натуральные числа* a, b *и* c *таковы, что* $НОК(a,b) = 60$ *и* $НОК(a,c) = 270$. *Найти* $НОК(b,c)$.

Решение. Сравним разложения на простые множители чисел

$$A = НОК(a,b) = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ и } B = НОК(a,c) = 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Исходя из вида A, предположим, что a делится на 2^2, тогда $B \vdots 2^2$. Но это не так, следовательно, на 2^2 делится число b. Аналогично, предположим, что a делится на 3^3, тогда $A \vdots 3^3$. Поскольку это не так, то на 3^3 делится число c.

Поэтому число $C = НОК(b,c)$ делится на произведение $2^2 \cdot 3^3 = 108$.

Множитель 5 может либо присутствовать в разложении хотя бы одного из чисел b и c, либо нет. Соответственно, получаем $C = 108 \cdot 5 = 540$ либо $C = 108$. Отметим, что первый случай реализуется, например, для чисел $a = 1$, $b = 60$, $c = 270$, а второй – для $a = 30$, $b = 12$, $c = 27$.

Ответ: 108 или 540.

Пример 7 [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. *Натуральные числа n и m таковы, что $НОД(n,m) + НОК(n,m) = n + m$. Доказать, что одно из них является делителем другого.*

Решение. Обозначим $d = НОД(n,m)$, тогда по свойству 3 существуют такие натуральные p,q, $НОД(p,q) = 1$, что $n = pd$, $m = qd$.

Подставим в исходное равенство:

$$d + pqd = d(p+q) \Leftrightarrow 1 + pq = p + q \Leftrightarrow (1-p)(q-1) = 0.$$

Если $p = 1$, то $n = d$, $m = qd$ и $m \vdots n$.

Если $q = 1$, то $m = d$, $n = pd$ и $n \vdots m$, что и требовалось доказать.

Пример 8 [Эконом.–2000]. *Интервалы движения городских автобусов по трём маршрутам, проходящим через общую остановку, составляют 15, 20 и 24 минуты соответственно. Сколько раз с 7-55 до 17-05 того же дня на этой остановке одновременно встречаются автобусы всех трёх маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 12-35?*

Решение. Предположим, в некоторый момент времени все три автобуса встретились на остановке. Найдём, через сколько минут они вновь повстречаются на этой остановке. Так как $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$, $24 = 2^3 \cdot 3$, то $НОК(15,20,24) = 120$. Отсчитывая этот отрезок времени от 12-35, находим все моменты встреч, попадающие в заданный промежуток: 8-35, 10-35, 12-35, 14-35, 16-35. Всего 5 раз.

Пример 9 [РГГУ]. *Найти числа x, y, если известно, что они натуральные и таковы, что $3x - 10y = 88$ и $НОК(x,y) - 5y = 380$.*

Решение. Пусть $d = НОД(x,y)$, тогда по свойству 3 получаем, что найдутся такие натуральные числа n,k, что $\begin{cases} x = nd, \\ y = kd, \end{cases}$ причём $НОД(n,k) = 1$.

Тогда $НОК(x,y) = nkd$, и условия задачи можно представить в виде следующей системы:

$$\begin{cases} 3nd-10kd=88, \\ nkd-5kd=380. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $88 \vdots d$, т.е. $2^3 \cdot 11 \vdots d$, а из второго – что $380 \vdots d$, т.е. $2^2 \cdot 5 \cdot 19 \vdots d$. Очевидно, что числа 88 и 380 имеют общими натуральными делителями только 1,2 и 4. Следовательно, d может принимать одно из этих значений: $d \in \{1;2;4\}$. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1) Если $d=1$, то система примет вид $\begin{cases} 3n-10k=88, \\ nk-5k=380; \end{cases}$ решая систему в натуральных числах, получаем, что она не имеет решений.

2) Если $d=2$, то система примет вид $\begin{cases} 6n-20k=88, \\ 2nk-10k=380; \end{cases}$ решая её в натуральных числах, также получаем, что нет решений.

3) Если $d=4$, то имеем систему $\begin{cases} 3n-10k=22, \\ nk-5k=95, \end{cases}$ откуда находим $\begin{cases} n=24 \\ k=5. \end{cases}$ Тогда окончательно получаем $\begin{cases} x=24d=96, \\ y=5d=20. \end{cases}$

Ответ: $(x;y) \in \{(96;20)\}$.

Следующую группу методов можно отнести к универсальным, т.е. используемым при решении произвольных задач (не только с целочисленными величинами).

Метод замены переменных

Пример 1 [ВМиК–2005, устн.]. *Доказать, что произведение четырёх последовательных целых чисел в сумме с 1 даёт полный квадрат.*

Решение. По условию, требуется доказать, что выражение

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

является квадратом целого числа. Сгруппируем сомножители следующим образом: $(n(n+3))((n+1)(n+2))+1$, и положим $y=n^2+3n$. Тогда

$$(n(n+3))((n+1)(n+2))+1 = y(y+2)+1=(y+1)^2.$$

Выполняя обратную подстановку, приходим к ответу.

Ответ: $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$.

Рассмотрим, далее, пример, в котором последовательно используются сразу несколько приёмов: замена переменной, одна из формул сокращённого умножения (см. п. 1.3.) и анализ остатков.

Пример 2 [ВМиК–2002, устн.]. *Доказать, что для любого натурального* n, $n \geq 2$, *число* $n^{n-1}-1$ *делится нацело на* $(n-1)^2$.

Доказательство. Обозначим $m = n-1$ $(m \in N)$. Требуется доказать, что для любого натурального m число $(m+1)^m - 1$ делится нацело на m^2. Воспользуемся формулой сокращённого умножения

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),\text{ тогда}$$

$$(m+1)^m - 1 = ((m+1)-1)((m+1)^{m-1} + (m+1)^{m-2} + \ldots + (m+1) + 1).$$

Первый из двух сомножителей делится на m. Покажем, что и второй сомножитель кратен m. Действительно, во вторых скобках стоит сумма m чисел, делящихся на m с остатком 1. При сложении таких чисел остатки складываются, поэтому их сумма будет делиться на m с остатком m, т.е. с остатком 0. Утверждение доказано.

В уравнениях, решаемых в целых числах, также иногда целесообразна замена переменных.

Пример 3 [Московская школа экономики–2007]. *Найти все целочисленные решения уравнения* $x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0$.

Решение. Выделяя полные квадраты, приведём уравнение к виду

$$(x-7)^2 + 4(y+4)^2 = 25.$$

Положим $u = x-7$, $v = y+4$, тогда имеем: $u^2 + 4v^2 = 25$. (*)

Отсюда получаем оценки: $u^2 \leq 25$ и $v^2 \leq 25/4$ (с учётом целочисленности $v^2 \leq 4$). Заметим, что в силу симметричности наряду с парами $(u;v)$ решениями уравнения (*) будут пары $(u;-v)$, $(-u;v)$ и $(-u;-v)$. Поэтому найдём вначале лишь неотрицательные целые значения u и v:

1) при $v = 0$ имеем $u = 5 \Rightarrow (5;0)$; 2) при $v = 1$ имеем $u^2 = 21 \Rightarrow u \notin Z$;

2) при $v = 2$ имеем $u = 3 \Rightarrow (3;2)$.

Итак, решения уравнения (*):

$$(u;v) \in \{(5;0);(3;2);(-5;0);(3;-2);(-3;2);(-3;-2)\}.$$

Возвращаясь к первоначальным переменным, получим ответ.

Ответ: $(x;y) \in \{(12;-4);(10;-2);(2;-4);(10;-6);(4;-2);(4;-6)\}$.

Пример 4 [Олимпиада «Ломоносов–2008», Геолог., устн.]. *Решить в натуральных числах уравнение*

$$k^3 - l^3 = kl + 61.$$

Решение. Поскольку правая часть равенства $k^3 - l^3 = kl + 61$ положительна, то $k > l$, а значит, можно представить $k = l + n$, где $n = 0,1,2...$ Такая подстановка позволяет свести уравнение третьей степени относительно обеих переменных к более простому квадратному уравнению относительно l. Действительно, подставляя выражение $l + n$ в исходное уравнение, получим квадратное уравнение ($3n - 1 \neq 0$):

$$(3n-1)l^2 + (3n-1)n \cdot l + n^3 - 61 = 0.$$

Для того чтобы это уравнение имело решения, необходимо и достаточно неотрицательности его дискриминанта:

$$D(n) = (3n-1)^2 n^2 - 4(3n-1)(n^3 - 61) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3n-1)(-n^3 - n^2 + 244) \geq 0 \Leftrightarrow n^3 + n^2 - 244 \leq 0.$$

Для решения последнего неравенства рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + x^2 - 244$, её график – кубическая парабола. Имеем: $f'(x) = 3x^2 + 2x > 0$ при $x > 0$, следовательно, функция возрастает при натуральных значениях аргумента. Так как $f(1) < 0$, $f(2) < 0$, $f(3) < 0$, $f(4) < 0$, $f(5) < 0$, но $f(6) > 0$, то решениями неравенства $n^3 + n^2 - 244 \leq 0$ будут $n \in \{1;2;3;4;5\}$. Проверка показывает, что только при $n = 1$ дискриминант $D(n)$ является полным квадратом: $D(1) = 22^2$, $l = 5 \Rightarrow k = 6$.

Ответ: $(k;l) \in \{(6;5)\}$.

Метод оценок

При решении задач в целых числах иногда используется подход, основанный на построении и применении различного рода оценок выражений, входящих в условия задач. Рассмотрим примеры.

Пример 1 [ВМиК–2005, устн.]. *Доказать, что уравнение*

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$$

не имеет целых положительных решений.

Доказательство. Пусть, ради определённости, $1 \leq x \leq y$. Тогда

$$1=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{x^2},$$

откуда находим оценку $x^2\le 3$, т.е. $x=1\Rightarrow y=-1$ – не удовлетворяет условию задачи. Аналогично рассматривается случай $1\le y\le x$.

Пример 2 [ВМиК–2005, устн.]. *Сумма обратных величин трёх натуральных чисел равна 1. Найти эти числа (наборы, а не упорядоченные тройки).*

Решение. Пусть x, y, z – искомые натуральные числа. Условия задачи приводят к уравнению

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Очевидно, что для того чтобы это равенство выполнялось, необходимо, чтобы хотя бы одно из чисел не превосходило 3. Без ограничения общности будем считать, что $x\le 3$. Тогда $x=2$ или $x=3$.

1) Пусть $x=2$, тогда $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ хотя бы одно из чисел y или z не превосходит 4. Ради определённости, пусть это $y\le 4$. Тогда $y=3$ или $y=4$. В первом случае $z=6$, и имеем три числа $\{2;3;6\}$. Во втором случае $z=4$, и находим ещё одну тройку $\{2;4;4\}$.

2) Пусть теперь $x=3$, тогда $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ хотя бы одно из чисел y или z не превосходит 3. Ради определённости, пусть это $y\le 3$. Тогда $y=2$ или $y=3$. В первом случае $z=6$, и имеем числа $\{3;2;6\}$ – уже было. Во втором случае $z=3$, и получаем набор $\{3;3;3\}$.

Ответ: это наборы чисел $\{2;3;6\}$, $\{2;4;4\}$, $\{3;3;3\}$.

Пример 3 [ВМиК–2005, устн.]. *Найти все упорядоченные тройки* $(x;y;z)$ *натуральных чисел, удовлетворяющих равенству*

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{30}{13}.$$

Решение. Приведём уравнение к виду $13x=30-\dfrac{13}{y+(1/z)}$.

Так как $13x = 30 - \dfrac{13}{y + (1/z)} < 30$, то получаем: $x \in \{1;2\}$.

1) Если $x = 1$, то, подставляя в уравнение, находим $y + 1/z = 13/17$, что невозможно, так левая часть в этом равенстве больше 1, а правая – меньше 1.

2) Если $x = 2$, то получаем $4/z = 13 - 4y$. Справа стоит целое число, следовательно, $4/z \in N$, откуда $z \in \{1;2;4\}$. При $z = 1$ имеем $y = 9/4 \notin N$; при $z = 2$ имеем $y = 11/4 \notin N$; при $z = 4$ находим $y = 3$.

Ответ: $(x; y; z) \in \{(2;3;4)\}$.

Пример 4 [Географ.–2003]. *Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Чётных чисел в X меньше двух третей от N, а нечётных не больше 36% от N. Какое минимальное значение может принимать число N?*

Решение. Пусть n – число нечётных чисел в X. По условию,

$$\frac{N}{3} < n \le \frac{36}{100} N \Leftrightarrow N < 3n \le \frac{27}{25} N. \qquad (1)$$

Воспользуемся тем свойством, что для целых чисел m, k строгое неравенство $m > k$ равносильно нестрогому $m \ge k + 1$. Поэтому

$$N + 1 \le 3n \le \frac{27}{25} N \Leftrightarrow 25(N+1) \le 75n \le 27N.$$

По свойству транзитивности из последнего неравенства получаем, как следствие, оценку

$$25(N+1) \le 27N, \text{ т.е. } N \ge 13.$$

Далее действуем перебором (с проверкой).

Если $N = 13$, то, подставив в неравенство (1), получим: $4\frac{1}{3} < n \le 4\frac{17}{25}$, что невозможно при целых n.

Если $N = 14$, то, подставив в неравенство (1), получим: $4\frac{2}{3} < n \le 5\frac{1}{25}$. Этому условию удовлетворяет $n = 5$ (т.е. нашлось n).

Ответ: $N_{\min} = 14$.

Использование различных алгебраических преобразований, в том числе формул сокращённого умножения, приёма выделения полных квадратов

Очень часто при решении задач используются различные алгебраические и прочие преобразования. Рассмотрим примеры такого рода.

Пример 1 [Физфак–1965, ВМиК–2002, устн.]. *Доказать, что число*

$$M=\underbrace{11...1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}$$

при любом натуральном n является полным квадратом.

Решение. Так как число $\underbrace{11...1}_{2n}$ представимо в виде $\underbrace{11...1}_{2n}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99...9}_{2n}$, а число $\underbrace{22...2}_{n}$, соответственно, в виде $\underbrace{22...2}_{n}=\frac{2}{9}\cdot\underbrace{99...9}_{n}$, то, подставляя в M и учитывая формулу $\underbrace{99...9}_{n}=10^n-1$, получим:

$$M=\underbrace{11...1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99...9}_{2n}-\frac{2}{9}\cdot\underbrace{99...9}_{n}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\left(\left(10^{2n}-1\right)-2\left(10^n-1\right)\right)=\frac{1}{9}\cdot\left(10^n-1\right)^2=\left(\frac{\overbrace{99...9}^{n}}{3}\right)^2=\left(\underbrace{33...3}_{n}\right)^2,$$

т.е. M при любом $n\in N$ является квадратом целого числа $\underbrace{33...3}_{n}$.

Пример 2 [Почвовед.–2001]. *Найти сумму n первых членов ряда*

$$7+77+777+\ldots.$$

Решение. Обозначим $a_k=\underbrace{77...7}_{k}$ – k-й член данного ряда. Требуется найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{77...7}_{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{7}{9}\left(\underbrace{99...9}_{k}\right)$. Воспользовавшись формулами преобразований $\underbrace{99...9}_{k}=10^k-1$, а также $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k\pm b_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\pm\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(p\cdot a_k\right)=p\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{7}{9}\left(10^k-1\right)=$

$$=\frac{7}{9}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(10^k-1\right)=\frac{7}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{7}{9}\left(\left(10+10^2+\ldots+10^n\right)-n\right).$$

Применяя, далее, формулу для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии, упрощаем выражение во внутренних скобках:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{7}{9}\left(10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}-n\right)=\frac{7}{9}\left(\frac{10}{9}\cdot\underbrace{99...9}_{n}-n\right)=$$

$$=\frac{7}{9}\left(10\cdot\underbrace{11...1}_{n}-n\right)=\frac{7}{9}\left(\underbrace{11...1}_{n}0-n\right).$$

В очередных примерах решить задачу помогают формулы сокращённого умножения.

Пример 3 [ВМиК–1999, устн.]. *Решить в целых числах уравнение*

$$9^x = 4y+1.$$

Решение. 1) При целом $x<0$ в левой части равенства находится дробное число, а в правой – целое, что невозможно. Следовательно, в этом случае решений нет.

2) Перепишем уравнение в виде $y=(9^x-1)/4$. При целом $x\geq 0$ выражение 9^x-1 можно разложить на множители:

$$9^x-1=(9-1)(9^{x-1}+9^{x-2}+...+1).$$

Отсюда следует, что это выражение делится нацело на 8, а значит $(9^x-1)/4$ – целое число. *Ответ*: $(x;y)\in\{(p;(9^p-1)/4)\}$, где $p=0,1,..$

Пример 4 [СУНЦ]. *Найти две последние цифры числа*

$$1^3+2^3+3^3+...+98^3+99^3.$$

Решение. Сгруппируем вместе первое слагаемое с последним, второе – с предпоследним и т.д.:

$$1^3+2^3+3^3+...+98^3+99^3=$$
$$=(1^3+99^3)+(2^3+98^3)+...+(49^3+51^3)+50^3.$$

Воспользуемся формулой суммы кубов и преобразуем с её помощью каждое из выражений в скобках:

$$(1^3+99^3)+(2^3+98^3)+...+(49^3+51^3)+50^3=$$
$$=(1+99)(1^2-1\cdot 99+99^2)+(2+98)(2^2-2\cdot 98+98^2)+...+$$
$$+(49+51)(49^2-49\cdot 51+51^2)+50^3=100(1^2-1\cdot 99+99^2)+$$
$$+100(2^2-2\cdot 98+98^2)+...+100(49^2-49\cdot 51+51^2)+5^3\cdot 1000.$$

Очевидно, что каждое слагаемое, а значит, их сумма оканчиваются двумя нулями.

Пример 5 [Почвовед.–1999]. *Сумма десяти чисел равна нулю и сумма их различных попарных произведений равна нулю. Чему равна сумма кубов этих чисел?*

Решение. Обозначим эти числа $a_1, a_2, ..., a_{10}$. По условию имеем:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 0 \\ a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_9a_{10} = 0. \end{cases}$$

Подставляя эти данные в формулу сокращённого умножения

$$(a_1 + a_2 + ... + a_{10})^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{10}^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_9a_{10}),$$

находим

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{10}^2 = (a_1 + a_2 + ... + a_{10})^2 - 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_9a_{10}) = 0.$$

Это возможно, только если $a_1 = a_2 = ... = a_{10} = 0$, но тогда

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{10}^3 = 0.$$

Рассмотрение уравнения относительно некоторой величины

Это известный алгебраический приём, когда уравнение (неравенство), решаемое в целых числах относительно одной величины (например, неизвестной x) бывает удобно рассмотреть относительно какой-либо иной величины (отличной от x). Так поступают в тех случаях, когда в новой формулировке задача оказывается в чём-то проще для решения. Чаще других встречаются задачи, где уравнение рассматривают как квадратное относительно параметра, одной из неизвестных (если в уравнении несколько неизвестных) или некоторого выражения. Обратимся к примерам.

Пример 1*. Решить в целых числах уравнение*

$$2x^2 + 9y^2 - 8xy - 3y = 0.$$

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно неизвестной x. Приведя его к стандартному виду, получаем

$$2x^2 - 8yx + 9y^2 - 3y = 0.$$

Необходимым и достаточным условием существования решений у этого уравнения является условие неотрицательности его дискриминанта:

$$D = -8y(y-3) \geq 0,$$

откуда находим ограничения на y: $y \in [0,3]$. С учётом целочисленности y получаем, что $y \in \{0;1;2;3\}$. Рассмотрим каждый из случаев в отдельности.

1) Если $y = 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{8y \pm \sqrt{-8y(y-3)}}{4} = 0$;

2) если $y=1$, то $x_3=1, x_4=3$;

3) если $y=2$, то $x_5=3, x_6=5$; 4) если $y=3$, то $x_{7,8}=6$.

Ответ: $(x;y)\in\{(0;0);(1;1);(3;1);(3;2);(5;2);(6;3)\}$.

Пример 2 [Почвовед.–2003, май]. *Найти все целочисленные решения уравнения*

$$x^2+5y^2+34z^2+2xy-10xz-22yz=0.$$

Решение. 1-й способ. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно переменной x:

$$x^2+2(y-5z)\cdot x+5y^2+34z^2-22yz=0.$$

Дискриминант уравнения

$$D=4(y-5z)^2-4(5y^2+34z^2-22yz)=-4(2y-3z)^2\ge 0 \Leftrightarrow 2y=3z.$$

Тогда решением данного уравнения будет $x=5z-y$.

Итак, задача оказалась сведена к решению в целых числах системы

$$\begin{cases}2y=3z\\ x=5z-y.\end{cases}$$

Заметим, что левая часть в уравнении $2y=3z$ делится нацело на 2, следовательно, z должно быть кратно двум. Положим $z=2p$, $p\in Z$. Подставляя в уравнение $2y=3z$, находим $y=3p$, и тогда из второго уравнения системы получаем $x=7p$. Таким образом, решениями уравнения являются тройки чисел вида $(7p;\ 3p;\ 2p)$, где $p\in Z$.

2-й способ. Задачу можно было решить иначе – при помощи выделения полных квадратов. Действительно, преобразуем уравнение к виду:

$$\left(x^2+2x(y-5z)+(y-5z)^2\right)+\left(4y^2-12yz+9z^2\right)=0,$$

$$(x+y-5z)^2+(2y-3z)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x+y-5z=0\\ 2y-3z=0\end{cases} \text{ и т.д.}$$

Ответ: $(x;y;z)\in\{(7p;3p;2p)\}$, где $p\in Z$.

Пример 3 [Мехмат–1996, март]. *Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат её первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?*

Решение. По условию имеем: $a_1^2+a_2+a_3+\ldots+a_n\le 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_1^2+\frac{a_2+a_n}{2}(n-1)\le 100 \Leftrightarrow a_1^2+\frac{2a_1+dn}{2}(n-1)\le 100.$$

Рассмотрим данное неравенство как квадратное относительно a_1:

$$a_1^2+(n-1)a_1+2n^2-2n-100\le 0.$$

Для того чтобы это неравенство имело решения, необходимо и достаточно выполнения условия

$$D=(n-1)^2-4(2n^2-2n-100)\ge 0 \Leftrightarrow 7n^2-6n-401\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n_1=\frac{3-\sqrt{2816}}{7}\le n\le\frac{3+\sqrt{2816}}{7}=n_2.$$

Так как $8<n_2<9$, то наименьшее n равно 8. *Ответ*: $n_{\min}=8$.

Рассмотрим ещё несколько часто встречающихся видов задач, решаемых в целых (натуральных) числах, и методы их решения.

Уравнения вида $A\cdot B=n$, где A,B – целочисленные выражения, n – целое число

Пусть решаемое в целых числах уравнение удалось преобразованиями привести к виду, когда в одной из его частей оказывается произведение двух (нескольких) целочисленных множителей A,B, а в другой, соответственно, целое число n. В такой ситуации решение уравнения сводится к перебору всех возможных случаев, когда n представимо в виде такого произведения целых чисел (количество вариантов будет конечно и тем меньше, чем меньше целых делителей имеет число n, стоящее в правой части уравнения).

Пример 1 [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2003].

Для всех значений параметра $a\in(2,4)$ найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству $x^2+5xy+6y^2=a$.

Решение. Так как слева от знака равенства находится целое число, то a должно быть целым, следовательно, $a=3$. Итак, имеем:

$$x^2+5xy+6y^2=3.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x^2+2xy)+(3xy+6y^2)=3 \Leftrightarrow x(x+2y)+3y(x+2y)=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+2y)(x+3y)=3.$$

Так как при целых x, y оба сомножителя в левой части целочисленны, то число 3 в правой части можно разложить на произведение двух целых чисел следующими способами:

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+3y=-3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x+2y=-3 \\ x+3y=-1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x+2y=3 \\ x+3y=1. \end{cases}$$

Ответ: при $a=3$ – четыре решения

$$(x;y)\in\{(3;-2);(-3;2);(-7;2);(7;-2)\},$$

при $a\in(2,3)\cup(3,4)$ уравнение не имеет решений.

Пример 2 [ИСАА–1997]. *Найти все пары целых чисел* x *и* y, *удовлетворяющих уравнению* $3xy+16x+13y+61=0$.

Решение. Умножим уравнение на 3 и после этого, группируя и вынося общий множитель за скобку, приведём к необходимому виду:

$$(3\cdot 3xy+3\cdot 16x)+(3\cdot 13y+3\cdot 61)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x(3y+16)+13(3y+16)=25 \Leftrightarrow (3y+16)(3x+13)=25.$$

Число 25 можно представить в виде произведения двух целочисленных сомножителей следующими способами:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y+16=1 \\ 3x+13=25 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y+16=25 \\ 3x+13=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y+16=5 \\ 3x+13=5 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y+16=-1 \\ 3x+13=-25 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y+16=-25 \\ 3x+13=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y+16=-5 \\ 3x+13=-5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Только три из перечисленных шести систем имеют решения в целых числах.

Ответ: $(x;y)\in\{(4;-5);(-4;3);(-6;-7)\}$.

Задачи, приводящие к ситуации, когда дробь должна принимать целочисленные значения

Близкий подход связан с разрешением ситуации, когда некоторая дробь с целочисленными числителем и знаменателем должна быть целым числом. Это возможно лишь в случае, когда знаменатель принимает значения, равные целочисленным делителям числителя.

***Пример 1**. На графике функции* $y=\dfrac{x-4}{x-1}$ *найти все точки, абсциссы и ординаты которых – целые числа.*

Решение. Решим задачу без построения графика функции. Выделяя целую часть, преобразуем данную дробно-линейную функцию к виду:

$$y=\frac{(x-1)-3}{x-1}=1-\frac{3}{x-1}.$$

Поскольку y в последнем равенстве, по условию, принимает целочисленные значения и единица в правой части – также целое число, то, следовательно, дробь $3/(x-1)$ также должна принимать целые значения. Это возможно тогда и только тогда, когда выражение $x-1$ принимает значения всевозможных целых делителей числа 3, т.е. имеем $(x-1)\in\{\pm1;\pm3\}$. Отсюда находим четыре точки с целочисленными координатами:

$$\left[\begin{array}{lll} x=-2 & \Rightarrow & y=2 \\ x=0 & \Rightarrow & y=4 \\ x=2 & \Rightarrow & y=-2 \\ x=4 & \Rightarrow & y=0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(x;y)\in\{(-2;2);(0;4);(2;-2);(4;0)\}$.

***Пример 2** [МФТИ]. Найти все пары целых чисел x и y, при которых является верным равенство* $x^3-xy-7x+2y+23=0$.

Решение. Поскольку $x=2$, очевидно, не является решением уравнения, то приведём уравнение (оно линейно относительно y) к эквивалентному виду:

$$y=\frac{x^3-7x+23}{x-2}\Leftrightarrow y=x^2+2x-3+\frac{17}{x-2}.$$

В силу целочисленности x, y, дробь $17/(x-2)$ должна быть целым числом, поэтому знаменатель $x-2$ должен принимать значения целочисленных делителей числа 17, т.е. $(x-2)\in\{\pm1;\pm17\}$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если $x-2=1$, т.е. $x=3$, то $y=x^2+2x-3+17/(x-2)=29$; если $x-2=-1$, т.е. $x=1$, то $y=-17$; если $x-2=17$, т.е. $x=19$, то $y=397$; если $x-2=-17$, т.е. $x=-15$, то $y=191$.

Ответ: $(x;y)\in\{(3;29);(1;-17);(19;397);(-15;191)\}$.

Другие приёмы и методы

Наряду с рассмотренными выше методами при решении уравнений в целых числах используются и другие приёмы. Например, в следующем примере учитывается тот факт, что уравнение является *однородным*.

***Пример 1**. Решить в целых числах уравнение* $x^3+xy^2+2y^3=0$.

Решение. Заметим, что если $y=0$, то $x=0$, и, значит, пара $(0;0)$ удовлетворяет уравнению. Пусть $y\neq 0$, тогда поделим обе части уравнения на y^3:

$$(x/y)^3+x/y+2=0.$$

Обозначим $t=x/y$, тогда имеем кубическое уравнение $t^3+t+2=0$. Подбором находим корень $t=-1$. Делением многочлена t^3+t+2 на $t+1$ получаем:

$$(t+1)(t^2-t+2)=0.$$

Убеждаемся в том, что данное кубическое уравнение имеет единственный корень $t=-1$, что соответствует $y=-x$. Положим $x=p$, где p – произвольное целое число, не равное 0. Тогда $y=-p$, и имеем бесконечно много решений в виде пар чисел $(p;-p)$, $p\in Z$, $p\neq 0$. Объединяя все полученные решения, приходим к ответу. *Ответ*: $(x;\,y)\in\{(p;-p)\}$, где $p\in Z$.

Иногда при решении уравнения или неравенства в целых числах не требуется привлечения каких-либо специальных методов решения: достаточно внимательно *проанализировать* его *ОДЗ*.

***Пример 2** [ВМиК–2007, устн.]. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству* $\sqrt{46+19x-2x^2}+x\cdot\sqrt{2x^2-19x-33}>3$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}46+19x-2x^2\geq 0\\ 2x^2-19x-33\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-2,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[11,\frac{23}{2}\right].$

Очевидно, что только два целых числа $x=-2$ и $x=11$ содержаться в ОДЗ. Проверка показывает, что лишь второе удовлетворяет неравенству.

Отметим, что количество различных приёмов и способов, используемых при решении задач на натуральную и целочисленную арифметику, слишком велико, и для ознакомления и, более того, успешного усвоения этих приёмов необходимо решение достаточно большого числа разнообразных задач. Многие из упомянутых приёмов решения и типов конкурсных задач рассматриваются в книге [15]. Рекомендуем желающим более углублённо изучить данный раздел обратиться к этому изданию.

1.2. Рациональные, иррациональные и действительные числа

Понятие арифметической дроби. Классификация дробей

Арифметическая (обыкновенная) дробь – это число, составленное из целого числа долей единицы. Дробь изображается символом p/q, где p – *числитель дроби*, он показывает число взятых долей единицы и делится на столько долей, сколько показывает (знаменует) *знаменатель* q. Дробь можно рассматривать как частное от деления одного (целого) числа p на другое (натуральное) q.

В старину в России дроби назывались *ломаными числами* (например, в «Арифметике» Магницкого и в «Недоросле» Фонвизина).

Обыкновенная дробь p/q называется *правильной*, если её числитель по модулю меньше знаменателя, или $|p/q|<1$, и *неправильной* в противном случае (понятие модуля будет введено в разделе 2). Неправильная дробь может быть представлена в виде суммы целого числа и правильной дроби (*смешанная дробь*). Для этого надо числитель разделить (с остатком) на знаменатель. Например,

$$\frac{91}{17}=\frac{5\cdot 17+6}{17}=5+\frac{6}{17}=5\frac{6}{17}.$$

Обыкновенную дробь называют *сократимой*, если существует такое отличное от единицы натуральное число n, что $\frac{p}{q}=\frac{nm}{nk}$, ($m\in Z$, $k\in N$), и *несократимой*, если $|p|$ и q – взаимно простые числа. Любую сократимую дробь путём сокращения числителя и знаменателя на их общие делители можно привести к несократимому виду.

Две дроби называют *равными*, если их несократимые представления совпадают. Например, дроби $\frac{5}{3}$ и $\frac{10}{6}$ равны между собой. Отсюда получаем как следствие: при умножении числителя и знаменателя дроби одновременно на одно и то же число получается дробь, равная данной.

Это даёт возможность любые две дроби *привести к общему знаменателю*, т.е. найти соответственно равные им дроби, знаменатели которых совпадают. При этом наименьшим общим знаменателем для двух данных дробей будет, очевидно, наименьшее общее кратное их знаменателей (в несократимых представлениях). Аналогичным образом можно приводить к общему знаменателю три дроби и более.

Дробь p/q называется *десятичной*, если её знаменатель q является натуральной степенью числа 10. Для десятичной дроби используется запись

$$\overline{a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}$$

(черту сверху часто опускают), где a_0 – целое число, а $a_1, a_2, \ldots$ – цифры, принимающие значения $0,1,2,\ldots,9$. Например, вместо $\frac{213}{10000}$ пишут $0{,}0213$. Десятичные дроби, имеющие после запятой конечное число ненулевых цифр, называются *конечными*. В противном случае дробь считается *бесконечной*.

Бесконечные десятичные дроби разбиваются на два класса: *периодические*, когда, начиная с некоторого момента, одна и та же группа цифр неограниченно повторяется, и *непериодические*, если не существует такой бесконечно повторяющейся группы цифр после запятой. Повторяющуюся группу цифр после запятой называют *периодом* и заключают в круглые скобки. Например, вместо $0{,}2353535\ldots$ пишут $0{,}2(35)$. Читается: «ноль целых, две десятых и тридцать пять в периоде».

Если число a_0 в записи десятичной дроби $\overline{a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}$ является натуральным, то такая дробь называется *положительной*. Если число a_0 – целое отрицательное, то в этом случае десятичная дробь называется *отрицательной*. Если $a_0 = 0$ и хотя бы одна из цифр после десятичной запятой отлична от нуля, то соответствующую десятичную дробь также относят к *положительным* дробям. Если же в последнем случае перед такой дробью поставить знак «минус», то получим *отрицательную* десятичную дробь. Если среди $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ нет чисел, отличных от нуля, то такое число называют *нулевой* бесконечной периодической дробью и обозначают $0,(0)$.

Операции над дробями встречаются уже в древнеегипетском папирусе *Ахмеса* (ок. 2000 г. до н.э.). У древних индийцев, по-видимому, впервые зародилось современное обозначение дробей. Термин «дробь» вошел в европейскую математику от арабов через *Леонардо Пизанского* (1202), термины «числитель» и «знаменатель» встречаются у *Максима Плануда* (конец XIII века). Однако изложение обыкновенных дробей в учебниках арифметики европейских школ произошло только в XVIII в. Дроби усваивались учениками с огромными трудностями. Например, в предисловии к 16-му изданию «Арифметики» Уингейта (Англия) сказано, что в этом издании «изложение арифметики целых чисел, необходимой для денежных расчётов, для торговли и других приложений, даётся раньше, чем открывается доступ к крутым и трудным путям дробей, при одном виде которых некоторые учащиеся приходят в такое уныние, что останавливаются и восклицают: ради бога, не дальше!». Даже в знаменитой Итонской школе для аристократов, существующей с 1446 г., арифметика стала обязательным предметом преподавания только в 1851 г. [17].

Пример. *Доказать, что дробь* $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ *несократима при* $n \in N$.

Доказательство. <u>*1-й способ*</u> (по определению сократимой дроби). Предположим, от противного, что данная дробь сократима на некоторое натуральное число p, отличное от единицы. Тогда найдутся такие натуральные числа m и k, что $\dfrac{12n+1}{30n+2} = \dfrac{p\cdot m}{p\cdot k}$, т.е. выполняется система двух равенств

$$\begin{cases} 12n+1 = p\cdot m \\ 30n+2 = p\cdot k. \end{cases}$$

Исключим из уравнений системы величину n. Для этого умножим первое равенство на 5, второе на 2 и вычтем из первого второе:

$$1 = p\cdot(5m-2k).$$

Проанализируем полученное равенство. В правой его части стоит произведение двух целочисленных множителей: p и $5m-2k$, а слева – единица. Понятно, что в этой ситуации p может принимать только значение, равное единице. Полученное противоречие означает, что предположение о сократимости дроби было неверным.

<u>*2-й способ*</u>. При этом способе решения используются два очевидных утверждения: во-первых, дроби $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{b}{a}$ (при натуральных a,b) сократимы или несократимы одновременно; во-вторых, дробь $\dfrac{a}{b}$ и та дробь, которая получается из неё после выделения целой части, также одновременно сократимы либо несо-

кратимы. Итак, дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ сократима (несократима) одновременно с «перевёрнутой» дробью $\dfrac{30n+2}{12n+1}$. Выделим в этой дроби целую часть:

$$\frac{30n+2}{12n+1}=\frac{2\cdot(12n+1)+6n}{12n+1}=2+\frac{6n}{12n+1}.$$

Тогда дробь $\dfrac{30n+2}{12n+1}$ сократима (несократима) одновременно с дробью $\dfrac{6n}{12n+1}$, а она, в свою очередь, с дробью $\dfrac{12n+1}{6n}=2+\dfrac{1}{6n}$. Таким образом, задачу исследования на сократимость исходной дроби свели к аналогичной задаче для более простой дроби $1/(6n)$, которая, очевидно, является несократимой при натуральных n.

3-й способ. Используя последовательно свойство «Если $a,b\in N$, $b>a$, то $НОД(a,b)=НОД(a,b-a)$», вычислим

$$НОД(12n+1;30n+2)=НОД(12n+1;6n)=НОД(1;6n)=1.$$

Таким образом, числитель и знаменатель дроби являются взаимно простыми числами, следовательно, данная дробь несократима.

Рациональные числа. Правила перевода рационального числа из обыкновенной дроби в периодическую и обратно

Опр.1. *Рациональным* называется число, представимое в виде обыкновенной дроби p/q, где $p\in Z$, $q\in N$. Так как любую обыкновенную дробь путём сокращения можно привести к несократимому виду, то, как правило, в определение рационального числа сразу добавляют условие несократимости дроби, что не влияет на суть определения.

Опр.2. *Рациональным* называется число, представимое в виде десятичной бесконечной периодической дроби.

Теорема 1. *Определения 1 и 2 эквивалентны* (без доказательства).

Множество рациональных чисел принято обозначать буквой Q (от латинского ‘quotient’ – частное), а название рациональных чисел происходит от латинского ‘ratio’ – отношение. Заметим, что любое целое число n является рациональным, так как его можно представить в виде обыкновенной дроби $n=n/1$. С учётом этого имеем: $N\subset Z\subset Q$.

В силу теоремы 1 существуют два эквивалентных представления рационального числа, и при решении ряда задач необходимо уметь переводить рациональное число из одного представления в другое и наоборот. Делением непосредственно («уголком») числителя обыкновенной дроби на её знаменатель всегда можно представить дробь либо в виде конечной десятичной дроби (если простыми множителями знаменателя являются только двойки и пятерки), либо в виде бесконечной десятичной периодической дроби (в остальных случаях).

Сформулируем и докажем удобное на практике обратное *правило перевода* – периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.

Теорема 2. Чтобы перевести периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Доказательство. Пусть дано число в виде десятичной периодической дроби

$$n = \overline{a_0, a_1 a_2 \ldots a_p (a_{p+1} \ldots a_{p+k})}, \qquad (1)$$

где $a_0 \in Z$, а $a_1, a_2, \ldots, a_{p+k}$ – цифры. Необходимо доказать, что

$$n = \frac{\overline{a_0 a_1 \ldots a_{p+k}} - \overline{a_0 a_1 \ldots a_p}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{0\ldots0}_{p}}.$$

Умножим равенство (1) на 10^{p+k} (это равносильно переносу десятичной запятой на $p+k$ позиций вправо):

$$10^{p+k} \cdot n = \overline{a_0 a_1 \ldots a_p a_{p+1} \ldots a_{p+k}, (a_{p+1} \ldots a_{p+k})}.$$

Умножим теперь равенство (1) на 10^p (это равносильно переносу десятичной запятой на p позиций вправо):

$$10^p \cdot n = \overline{a_0 a_1 \ldots a_p, (a_{p+1} \ldots a_{p+k})}.$$

Вычтем друг из друга последние два равенства и воспользуемся тем, что периоды у чисел, стоящих в правых частях равенств, оказались одинаковы и поэтому при вычитании взаимно уничтожатся:

$$\left(10^{p+k} - 10^p\right) \cdot n = \overline{a_0 a_1 \ldots a_{p+k}} - \overline{a_0 a_1 \ldots a_p}.$$

Выражая отсюда n, получаем искомый результат

$$n = \frac{\overline{a_0 a_1 \ldots a_{p+k}} - \overline{a_0 a_1 \ldots a_p}}{10^p (10^k - 1)} = \frac{\overline{a_0 a_1 \ldots a_{p+k}} - \overline{a_0 a_1 \ldots a_p}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{0\ldots0}_{p}}.$$

Замечание. После этого останется только привести полученную обыкновенную дробь к несократимому виду (если она оказалась сократимой).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 [Московский госуниверситет пищевых производств–1997]. *Упростить рациональное число* $\dfrac{0{,}449291997}{2{,}1394857}$.

Решение. Домножая числитель и знаменатель дроби на 10^9, получим

$$\frac{449291997}{2139485700}.$$

Далее «столбиком» аккуратно поделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,4492919970 & 2139485700 \\ \cline{2-2} \underline{4278971400} & 0{,}21 \\ -\,2139485700 & \\ \underline{2139485700} & \\ 0 & \end{array}$$

Пример 2. *Перевести периодическую дробь* $3{,}1(20)$ *в обыкновенную.*

Решение. Воспользовавшись данным правилом, сразу получим

$$3{,}1(20) = \frac{3120-31}{990} = \frac{3089}{990}.$$

Если же повторить весь процесс вывода формулы для данного примера, то это будет выглядеть следующим образом. Обозначим переводимое число через x, затем умножим равенство $x = 3{,}1(20)$ на 10:

$$10x = 31,(20). \tag{2}$$

После этого ещё раз умножим равенство $x = 3{,}1(20)$, но уже на 1000 и получим

$$1000x = 3120,(20). \tag{3}$$

Если теперь вычесть из равенства (3) равенство (2), то одинаковые периоды у чисел в правых частях равенств взаимно уничтожатся, и получим $990x = 3089$, откуда и находим искомое представление числа x в виде обыкновенной дроби. *Ответ*: $3{,}1(20) = 3089/990$.

Другой, более стандартный, но менее «короткий» способ перевода основан на использовании свойства суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Рассмотрим пример с той же периодической дробью $3{,}1(20)$.

Выполним следующую цепочку преобразований:

$$3{,}1(20) = 3{,}1 + \frac{20}{1000} + \frac{20}{100000} + \ldots = 3{,}1 + \frac{20}{1000} \cdot (1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots).$$

Заметим, что в скобках находится сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 1/100$. Применяя известную формулу $S = b_1/(1-q)$, упрощаем выражение в скобках. Далее остаётся привести всё к виду одной дроби и, возможно, сократить её:

$$3{,}1(20) = 3{,}1 + \frac{20}{1000} \cdot \frac{1}{1-0.01} = \frac{31}{10} + \frac{2}{99} = \frac{31 \cdot 99 + 20}{990} =$$

$$= \frac{31 \cdot (100-1) + 20}{990} = \frac{3120 - 31}{990} = \frac{3089}{990}.$$

Сравнение рациональных чисел. Арифметические операции над рациональными числами

Два рациональных числа p_1/q_1 и p_2/q_2 ($p_1, p_2 \in Z$, $q_1, q_2 \in N$) считаются, по определению, *равными*, если $p_1 q_2 = p_2 q_1$. Число p_1/q_1 считается *большим* числа p_2/q_2, если $p_1 q_2 > p_2 q_1$, и *меньшим* этого числа, если $p_1 q_2 < p_2 q_1$.

Пусть q – натуральное число. Если p – натуральное число, то число p/q называется *положительным рациональным числом*, или положительной дробью. Если же p – целое отрицательное число, то число p/q называется *отрицательным рациональным числом*, или отрицательной дробью. Если p равно нулю, то число p/q называется нулевой дробью.

Определим основные *арифметические операции* на множестве рациональных чисел. Пусть даны два рациональных числа p_1/q_1 и p_2/q_2. *Суммой* двух этих чисел назовём рациональное число, равное $\dfrac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$. *Произведением* двух рациональных чисел p_1/q_1 и p_2/q_2 назовём рациональное число, равное $\dfrac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$. *Разность* и *частное* двух рациональных чисел определяются аналогично тому, как они вводились для натуральных и целых чисел (т.е. через определения суммы и произведения), при этом их значения всегда можно находить по формулам:

$$\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2-p_2q_1}{q_1q_2} \text{ и } \frac{p_1}{q_1}:\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2}{q_1p_2}$$

(в последнем случае предполагается, что $p_2 \neq 0$).

Сумма, разность, произведение и частное двух (конечного числа) рациональных чисел всегда существуют и являются рациональными числами. Это означает, что множество рациональных чисел замкнуто относительно четырёх арифметических операций. При этом рассмотренные *арифметические операции* над рациональными числами удовлетворяют тем же законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, что и для натуральных и целых чисел.

Пример 1 [ВМиК–2001, устн.]. *Сравнить два числа*

$$\frac{7}{33} \text{ и } \frac{21212121}{99999999}.$$

Решение. $\frac{7}{33}=0,(21)=0,(21212121)=\frac{21212121}{99999999}$, т.е. числа равны.

Пример 2. *Что больше*: $\frac{222221}{333332}$ *или* $\frac{444443}{666665}$?

Решение. Обозначим число 111111 через a. Тогда первая дробь равна $\frac{2a-1}{3a-1}$, а вторая $\frac{4a-1}{6a-1}$. Для ответа на поставленный вопрос составим разность этих дробей и определим её знак:

$$\frac{2a-1}{3a-1}-\frac{4a-1}{6a-1}=-\frac{a}{(3a-1)(6a-1)}<0,$$

значит, вторая дробь больше.

Пример 3 [ВМиК–2001, устн.]. *Что больше*: $0,7(621)$ *или* $\frac{141}{185}$?

Решение. Числа удобнее сравнивать, когда они записаны в одном представлении. Поэтому, например, переведём периодическую десятичную дробь к виду обыкновенной дроби:

$$0,7(621)=\frac{7621-7}{9990}=\frac{7614}{9990}=\frac{141\cdot 54}{185\cdot 54}=\frac{141}{185}, \text{ т.е. числа равны.}$$

Пример 4. [Геолог.–2002, май, устн.] *Сравнить числа*: $\sqrt[5]{2}+7$ и $8\cdot\sqrt[10]{2}$.

Решение. Обозначим $t=\sqrt[10]{2}$. Тогда $\sqrt[5]{2}+7 \vee 8\cdot\sqrt[10]{2} \Leftrightarrow t^2+7 \vee 8t \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (t-1)(t-7) \vee 0$. Заметим, что $1<\sqrt[10]{2}<7$ и поэтому $(t-1)(t-7)<0$.

Ответ: первое число меньше.

***Пример 5**. Сравнить два числа* $4,(9)^{5,(0)}$ *и* $5,(0)^{4,(9)}$.

Решение. Воспользуемся изложенным выше правилом перевода периодической дроби в обыкновенную:

$$4,(9)=\frac{49-4}{9}=5.$$

С другой стороны, очевидно, $5,(0)=5$. Таким образом, числа оказались равны (!).

<u>*Замечание*</u>. Одно и то же целое число 5 можно представить двумя способами в виде периодической дроби: $4,(9)$ и $5,(0)$, и эти представления эквивалентны.

Ответ: числа равны.

Пример 6 [ВМиК–1996, устн.]. *Числа* a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ *– рациональные. Доказать, что* $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ *также рациональные числа.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел есть рациональное число. Поскольку $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, а числа $a-b$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рациональны (первое как разность двух рациональных чисел, второе по условию), то число $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ также рационально. Тогда $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+ +(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2\sqrt{a}$ – рационально, следовательно, $\sqrt{a}$ будет рационально; аналогично, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2\sqrt{b}$ – рационально, а значит, $\sqrt{b}$ также рационально, что и требовалось доказать.

Пример 7 [Олимпиада «Ломоносов–2007», устн.]. *Найти все рациональные числа* x, *при которых выражение* $\sqrt{x^2+x+1}$ *является рациональным числом.*

Решение. Рассмотрим решение этой задачи, основанное на методе «от частного к общему» (см. пункт 3.4 раздела 3).

Заметим, что если условия задачи выполняются, то, в частности, число

$$r=\sqrt{x^2+x+1}-x$$

является рациональным. Выражая x из последнего равенства, как следствие получим, что $x=\dfrac{r^2-1}{1-2r}$, $r\neq\dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь множество всех чисел x вида $(r^2-1)/(1-2r)$, где r – любое рациональное число, не равное $1/2$. Покажем, что все такие числа удовлетворяют условиям задачи. В самом деле,

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{\left(\frac{r^2-1}{1-2r}\right)^2+\frac{r^2-1}{1-2r}+1}=\sqrt{\frac{r^4-2r^3+3r^2-2r+1}{(1-2r)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(r^2-r+1)^2}{(1-2r)^2}}=\left|\frac{r^2-r+1}{1-2r}\right|\in Q.$$

Ответ: это числа вида $x=\dfrac{r^2-1}{1-2r}$, где $r\in Q$, $r\neq\dfrac{1}{2}$ – любое.

Решение уравнений в рациональных числах

Когда по условию задачи необходимо найти рациональные корни уравнения, возможны следующие подходы.

Во-первых, можно сначала полностью решить уравнение, найти все его корни, и лишь затем отобрать среди них рациональные. Однако следует помнить, что этот подход в некоторых случаях бывает нецелесообразен.

Во-вторых, можно целенаправленно искать только рациональные корни. Один из таких способов поиска рациональных корней у алгебраических многочленов с целыми (рациональными) коэффициентами будет рассмотрен ниже в пункте 3.3.1 раздела 3. Сейчас обратимся к примерам, в которых при решении задач, связанных с рациональными корнями уравнений, используются определение и свойства рациональных чисел.

Пример 1*. При каких целочисленных значениях параметра a корни уравнения $x^2+ax+1=0$ являются рациональными числами?*

Решение. При условии $a^2\geq 4$ найдём корни этого квадратного уравнения: $x_{1,2}=\left(-a\pm\sqrt{a^2-4}\right)/2$. Так как по условию $x\in Q$, то $\sqrt{a^2-4}=n$ $(n\in Z, n\geq 0)$. Возведём последнее равенство в квадрат:

$$a^2-4=n^2\Leftrightarrow a^2-n^2=4\Leftrightarrow(a-n)(a+n)=4.$$

Так как $a-n\leq a+n$, то возможны лишь следующие случаи:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-n=1\\a+n=4\end{cases}\\ \begin{cases}a-n=-4\\a+n=-1\end{cases}\end{array}\right.\quad\text{или}\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-n=2\\a+n=2\end{cases}\\ \begin{cases}a-n=-2\\a+n=-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решая эти системы в целых числах, находим ответ: $a\in\{\pm 2\}$.

Пример 2 [ВМиК–1998, устн.]. *Доказать, что уравнение*

$$x^3 - px + 1 = 0,$$

где $p > 2$ *– целое, не имеет рациональных корней.*

Доказательство (от противного). Предположим, что уравнение имеет рациональный корень $x = m/n$, где $m \in Z$, $n \in N$. Тогда подставим его в уравнение:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 - p \cdot \frac{m}{n} + 1 = 0 \Leftrightarrow m^3 - pmn^2 + n^3 = 0. \qquad (1)$$

1) Перепишем уравнение (1) в виде

$$m^3 - pmn^2 = -n^3 \Leftrightarrow m\left(m^2 - pn^2\right) = -n^3.$$

Проведём анализ делимости. Целочисленное выражение в левой части равенства кратно m, а значит, и выражение в правой части должно делиться на m нацело: $\left(-n^3\right) \vdots m$, но отсюда следует, что $n \vdots m$.

2) Теперь перепишем уравнение (1) в виде

$$m^3 = pmn^2 - n^3 \Leftrightarrow m^3 = n^2(pm - n).$$

Аналогичными рассуждениями получим, что так как выражение в правой части равенства кратно n, то и выражение m^3 в левой его части делится на n нацело, а, следовательно, $m \vdots n$.

Из того, что одновременно $n \vdots m$ и $m \vdots n$, заключаем, что это возможно, только если $m = \pm n$. Иными словами, мы показали, что если у рассматриваемого уравнения есть рациональные корни, то это могут быть только числа $x = \pm 1$. Осталось сделать проверку.

Подставляя значение $x = 1$ в уравнение, получим $p = 2$, что противоречит условию задачи. При $x = -1$ находим $p = 0$, что также противоречит условию задачи. Следовательно, рациональных корней у уравнения нет.

Пример 3 [МАИ]. *Найти все такие рациональные числа x и y, которые удовлетворяют уравнению*

$$\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}.$$

Решение. ОДЗ: $x > y \geq 0$. Так как на ОДЗ обе части данного иррационального уравнения неотрицательны, то возведём уравнение в квадрат и получим равносильное уравнение

$$2\sqrt{3} - 3 = x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3xy}.$$

Сократим на $\sqrt{3}$ и уединим единственный радикал в левой части уравнения

$$2\sqrt{xy} = x + y + \sqrt{3} - 2.$$

Записав условие неотрицательности правой части $x + y + \sqrt{3} - 2 \geq 0$ для сохранения равносильности преобразования, ещё раз возведём уравнение в квадрат (используя формулу квадрата суммы 4-х чисел):

$$4xy = x^2 + y^2 + 3 + 4 + 2xy + 2\sqrt{3}x - 4x + 2\sqrt{3}y - 4y - 4\sqrt{3},$$

Приведём полученное уравнение к виду

$$2xy - x^2 - y^2 - 7 + 4x + 4y = \sqrt{3}(2x + 2y - 4).$$

Заметим, что в левой части находится рациональное выражение. Выражение в скобках в правой части равенства также рационально. Известно, что произведение рационального числа $(2x + 2y - 4)$ на иррациональное $\sqrt{3}$ может быть рациональным тогда и только тогда, когда $2x + 2y - 4 = 0$, при этом выражение $2xy - x^2 - y^2 - 7 + 4x + 4y$ также должно обращаться в нуль. Таким образом, условия задачи выполняются, только если система

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2xy - x^2 - y^2 - 7 + 4x + 4y = 0 \end{cases}$$

имеет решения. Решив систему, находим две пары $(3/2;1/2)$ и $(1/2;3/2)$. Проверка показывает, что только первая пара удовлетворяет ОДЗ и условию $x + y + \sqrt{3} - 2 \geq 0$. *Ответ*: $(x;y) \in \{(3/2;1/2)\}$.

Иррациональные и действительные числа

Покажем, что множество чисел не исчерпывается рациональными числами. В самом деле, возьмём прямоугольный треугольник с катетами, равными 1. По теореме Пифагора, его гипотенуза равна $\sqrt{2}$. Докажем, что это число не является рациональным. Приведём старинное доказательство методом «от противного».

Предположим, от противного, что $\sqrt{2}$ есть рациональное число, тогда его можно представить в виде обыкновенной несократимой дроби p/q, где $p, q \in N$. Тогда $\sqrt{2} = p/q \Leftrightarrow q\sqrt{2} = p$, т.е.

$$2q^2 = p^2. \qquad (1)$$

Левая часть последнего равенства кратна 2, следовательно, и p^2 делится на 2. Покажем, что тогда p должно делиться на 2. Действительно, если бы $p = 2k + 1$, то $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$, но тогда p^2 не делилось бы на 2. Следовательно, $p = 2k$, $k \in N$. Подставляя в (1) вместо p число $2k$, получим: $2q^2 = 4k^2$, т.е. $q^2 = 2k^2$. Отсюда следует, что так как правая часть делится на 2, то и q^2 должно делиться на 2, следовательно, $q = 2m$, $m \in N$. Но тогда дробь $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2k}{2m}$ сократима на 2. Полученное противоречие с несократимостью дроби p/q доказывает нерациональность числа $\sqrt{2}$.

Таким образом, существуют числа, не являющиеся рациональными, которые нельзя представить в виде отношения двух целых чисел. Расширим множество чисел, вводя понятие иррационального числа.

Иррациональным называется число, представимое в виде бесконечной десятичной непериодической дроби. Название «иррациональный» происходит от латинского 'irrational' – безрассудный, не определяемый отношением. Специального обозначения для множества иррациональных чисел (их, как и рациональных чисел, бесконечно много) не существует.

Открытие иррациональных чисел приписывают пифагорейцам (V век до нашей эры), которые доказали, что гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника несоизмерима с его катетом, т.е. установили иррациональность числа $\sqrt{2}$. Однако это открытие противоречило всей пифагорейской философии, в основу которой были положены только натуральные и рациональные числа. Поэтому оно сохранялось в строжайшей тайне. Существует легенда, повествующая о том, что пифагореец Гиппас, раскрывший людям секрет иррациональности $\sqrt{2}$, погиб в море по воле разгневанных богов.

Примеры иррациональных чисел: $\sqrt{2}$, $1-\sqrt[3]{7}$, $2\cdot\sqrt{3+\sqrt[5]{41}}$, $\cos 5^\circ$, $\log_2 7$, $\log_2 7$, $\pi =$ 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859 5024459455 3469083026 4252230825

3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303 5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989...(отношение длины окружности к её диаметру), $e = 2{,}718281828459045835 36\ldots$(основание натурального логарифма) [16]. Ещё один пример иррационального числа в виде бесконечной непериодической дроби: 0,12345678910111213141516...

Для решения экзаменационных задач обычно достаточно знать, что

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42;\ 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74;\ 3{,}14 < \pi < 3{,}15;\ 2{,}71 < e < 2{,}72.$$

Львовский 33-летний профессор-нейрохирург Андрей Тихонович Слюсарчук публично продемонстрировал, что помнит миллион цифр после запятой у числа π. Это новый мировой рекорд (предыдущее достижение было зафиксировано у 59-летнего японца Тиби Акири Харагучи, который запомнил 83431 знак числа π). Рекорд поддался со второй попытки. Говорят, миллион цифр из книги на 250 страниц Андрей запоминал 6 дней. Достижение занесено в книгу рекордов Украины и уже заявлено для регистрации в Книгу рекордов Гиннеса. Новая задача для Слюсарчука – запомнить уже не один, а 5 миллионов цифр числа π (газета «Московский комсомолец» от 27 марта 2006 года).

Если объединить непересекающиеся множества рациональных и иррациональных чисел, то полученное бесконечное множество называется множеством *действительных (вещественных)* чисел и обозначается буквой R (по-английски 'real' – действительный, реальный). То есть *действительные числа* – это числа, представимые бесконечными десятичными дробями. Строгая теория действительных чисел была построена математиками лишь в XIX веке (Больцано, Вейерштрасс, Кантор, Дедекинд и др.). Из определения множества действительных чисел следует, что $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Пример 1 [ВМиК–1998, устн.]. *Доказать, что число $\sqrt[4]{5}$ не является рациональным числом.*

Доказательство (методом от противного). Предположим, что $\sqrt[4]{5}$ есть рациональное число, тогда оно представимо в виде $\sqrt[4]{5} = p/q$, где p, q – взаимно простые натуральные числа. Перепишем равенство в виде $\sqrt[4]{5} \cdot q = p$ и возведём его в 4-ю степень: $5 \cdot q^4 = p^4$. Так как левая часть кратна 5, то и $p^4 \vdots 5$, а значит, p кратно 5, т.е. $p = 5n$, $n \in N$. Подставив в равенство $5 \cdot q^4 = p^4$ вместо p выражение $5n$ и сократив на 5, получим новое равенство $q^4 = 125n^4$, откуда следует, что $q \vdots 5$. В результате оба числа p и q оказались кратны 5, что противоречит их взаимной простоте. Следовательно, предположение о рациональности числа $\sqrt[4]{5}$ было сделано неверно, что доказывает иррациональность этого числа.

Пример 2. Доказать иррациональность числа $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$.

Решение. Воспользуемся методом от противного. Предположим, что это рациональное число, тогда его можно представить в виде обыкновенной дроби:

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}=p/q, \text{где } p,q\in N.$$

Перепишем равенство в виде $\sqrt[3]{2}=p/q-\sqrt{2}$ и возведём его в куб:

$$2=\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{3p^2}{q^2}+2\right)=\frac{p^3}{q^3}+\frac{6p}{q}-2 \Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{p_1}{q_1},$$

где $p_1=\dfrac{p^3}{q^3}+\dfrac{6p}{q}-2$ и $q_1=\dfrac{3p^2}{q^2}+2$ - рациональные числа и поэтому их отношение p_1/q_1 также рационально. Получили противоречие, так как $\sqrt{2}$ - иррациональное число (доказано выше). Значит, предположение о рациональности числа $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ было неверно и данное число иррационально, что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать иррациональность числа $\cos 1^\circ$.

Решение. Воспользуемся также методом от противного. Предположим, что это рациональное число. Складывая два очевидных тождества

$$\cos(k^\circ+1^\circ)=\cos k^\circ\cdot\cos 1^\circ-\sin k^\circ\cdot\sin 1^\circ$$

и

$$\cos(k^\circ-1^\circ)=\cos k^\circ\cdot\cos 1^\circ+\sin k^\circ\cdot\sin 1^\circ,$$

получим вспомогательное тождество

$$\cos(k^\circ+1^\circ)=2\cos k^\circ\cdot\cos 1^\circ-\cos(k^\circ-1^\circ).$$

Подставим в это тождество вместо k последовательно числа 1, 2, 3,..., 29:

$$\cos(2^\circ)=2\cos^2 1^\circ-1,$$
$$\cos(3^\circ)=2\cos 2^\circ\cdot\cos 1^\circ-\cos(1^\circ),$$
$$\cos(4^\circ)=2\cos 3^\circ\cdot\cos 1^\circ-\cos(2^\circ),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cos(30^\circ)=2\cos 29^\circ\cdot\cos 1^\circ-\cos(28^\circ).$$

Видим, что если $\cos 1^\circ$ рационален, то рациональным будет и $\cos 2^\circ$, а тогда и $\cos 3^\circ$ и т.д. Таким образом, придём к тому, что $\cos 30^\circ$ также будет рационален, поскольку выражается через рациональные числа посредством арифметических операций умножения и вычитания, не выводящих, как известно, за пределы множества рациональных чисел. Пришли к противоречию с тем фактом, что, с другой стороны, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ – иррациональное число. Это противоречие и доказывает утверждение об иррациональности $\cos 1^\circ$.

Пример 4. *Доказать иррациональность числа* $\cos 2^\circ$.

Решение. Предположим от противного, что $\cos 2^\circ \in Q$, но тогда, используя формулы $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, получим, что числа $\cos 6^\circ$, $\cos 12^\circ$, $\cos 36^\circ$ также будут рациональны. Покажем, что в действительности число $\cos 36^\circ$ иррационально (полученное противоречие будет доказывать иррациональность $\cos 2^\circ$). Вычислим его значение. Известно, что $\sin 18^\circ = \left(\sqrt{5} - 1\right)/4$ (если вам не знаком этот факт, то предварительно докажите его), тогда $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = \left(\sqrt{5} + 1\right)/4$ – иррационально.

Пример 5. *Доказать иррациональность числа* $\log_5 21$.

Решение. Предположим, от противного, что данное число рационально. Тогда, по определению рационального числа, его можно представить в виде несократимой обыкновенной дроби $\log_5 21 = p/q$, где $p, q \in N$. Последовательно преобразовывая равенство с помощью свойств логарифмов, приведём его к виду

$$q \cdot \log_5 21 = p \Leftrightarrow \log_5 21^q = p \Leftrightarrow 21^q = 5^p.$$

В последнем равенстве левая часть кратна 3, а правая – нет, что невозможно. Полученное противоречие говорит о том, что сделанное ранее предположение о рациональности данного числа было неверным, а значит, число иррационально.

Пример 6 [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы–2006, заочный тур]. *Существуют ли рациональные числа* x, y, u, v, *удовлетворяющие уравнению*

$$\left(x + y\sqrt{2}\right)^6 + \left(u + v\sqrt{2}\right)^6 = 7 + 5\sqrt{2}\ ?$$

Решение. Убедимся в справедливости следующих двух утверждений.

1. Если a, b, c, d – рациональны и $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, то $a = c$ и $b = d$.

Действительно, так как $a - c = (d - b)\sqrt{2}$, то или $b = d$, следовательно, $a = c$, или $b \neq d$, тогда $\sqrt{2} = (a - c)/(d - b)$, что невозможно, потому что $\sqrt{2}$ – иррациональное число, а $(a - c)/(d - b)$ – число рациональное.

2. Если a, b – рациональные числа, то $\left(a \pm b\sqrt{2}\right)^2 = A \pm B\sqrt{2}$, где числа A, B – рациональные.

Справедливость данного утверждения следует из следующей выкладки:

$$\left(a\pm b\sqrt{2}\right)^6=a^6\pm 6a^5\left(b\sqrt{2}\right)+15a^4\left(b\sqrt{2}\right)^2\pm 20a^3\left(b\sqrt{2}\right)^3+$$
$$+15a^2\left(b\sqrt{2}\right)^4\pm 6a\left(b\sqrt{2}\right)^5+\left(b\sqrt{2}\right)^6.$$

Пусть теперь x, y, u, v – рациональные числа, и выполняется равенство

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)^6+\left(u+v\sqrt{2}\right)^6=7+5\sqrt{2}.$$

Тогда согласно утверждениям 1 и 2 имеем

$$\left(x-y\sqrt{2}\right)^6+\left(u-v\sqrt{2}\right)^6=7-5\sqrt{2},$$

однако последнее равенство невозможно, поскольку его левая часть неотрицательна, а число $7-5\sqrt{2}<0$. *Ответ*: такие числа не существуют.

Сравнение действительных чисел. Арифметические операции над действительными числами и их свойства

Два действительных числа $a_0,a_1a_2...a_n...$ и $b_0,b_1b_2..b_n...$, где a_0 и b_0 – целые числа, а $a_i,b_i\,(i=1,2,...,n,...)$ – десятичные цифры, называются *равными*, если $a_k=b_k$ сразу при всех $k=0,1,2,...$ *Равными* также являются числа

$$a_0,a_1a_2...a_n00...(a_n\neq 0) \text{ и } a_0,a_1a_2...(a_n-1)99...$$

(это две *эквивалентные формы* представления одного и того же действительного числа $a_0,a_1a_2...a_n$). В дальнейшем договоримся рассматривать только первую из двух приведённых форм представления периодических дробей (с периодом 0).

Положительную бесконечную десятичную дробь назовём *положительным действительным числом*, отрицательную бесконечную десятичную дробь – *отрицательным действительным числом*, нулевую бесконечную периодическую дробь (с периодом нуль) – числом *нуль*. Любое положительное действительное число больше нуля, а любое отрицательное действительное число – меньше нуля (и меньше любого положительного числа).

Введём для двух положительных действительных чисел операцию *сравнения*. Говорят, что из двух чисел $a_0,a_1a_2...a_n...$ и $b_0,b_1b_2..b_n...$ первое *больше* второго, если либо $a_0>b_0$, либо если $a_0=b_0$, но $a_1>b_1$, либо если $a_0=b_0$, $a_1=b_1,...,$ $a_n=b_n$ (для некоторого натурального n), но $a_{n+1}>b_{n+1}$. Два действительных числа $a_0,a_1a_2...a_n...$ и $-a_0,a_1a_2...a_n...$ называются *противоположными числами*. Два *отрицательных действительных числа равны*, если равны противоположные им числа. Из двух *отрицательных чисел больше* то, у которого противоположное число меньше.

На множестве действительных чисел также определены четыре основные *арифметические операции*: сложения, умножения, вычитания и деления, причём *арифметические операции* над действительными числами удовлетворяют тем же законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, что и над рациональными числами.

Рассмотрим, например, как определяется понятие *суммы*. *Суммой* двух произвольных действительных чисел a и b называется такое действительное число c, которое удовлетворяет неравенству

$$\alpha_1 + \beta_1 \le c \le \alpha_2 + \beta_2$$

сразу для всех рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ таких, что

$$\alpha_1 \le a \le \alpha_2,\ \beta_1 \le b \le \beta_2.$$

Такое число c всегда существует и единственно (доказывается в курсе высшей математики).

Произведением двух *положительных* действительных чисел a и b называется такое действительное число c, что неравенство

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \le c \le \alpha_2 \cdot \beta_2$$

выполняется для всевозможных рациональных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих неравенствам $0 < \alpha_1 \le a \le \alpha_2$, $0 < \beta_1 \le b \le \beta_2$. Такое число c также всегда существует и притом только одно. *Произведение* двух *отрицательных* действительных чисел определяется как произведение противоположных им положительных чисел. *Произведение* двух действительных чисел *разных знаков* ($a > 0,\ b < 0$) равно взятому со знаком минус произведению числа a на число, противоположное b. Это отрицательное число существует и единственно (аналогично определяется произведение $a \cdot b$ в случае $a < 0,\ b > 0$). Произведение двух чисел, одно из которых есть нуль, равно нулю. Значение числа не меняется при умножении его на единицу.

Для действий сложения и умножения действительных чисел вводятся обратные действия – вычитание и деление. *Вычесть* из действительного числа a действительное число b означает найти действительное число c такое, что $b + c = a$. *Разделить* действительное число a (делимое) на отличное от нуля действительное число b (делитель) значит найти действительное число c (частное) такое, что $b \cdot c = a$. Это всегда можно сделать, притом единственным образом. Множество действительных чисел замкнуто относительно введённых четырёх арифметических операций.

Приведём следующую теорему, отражающую важнейшие свойства действительных чисел.

Теорема 3 (совместные свойства рациональных и иррациональных чисел).

1) Сумма, разность, произведение и частное рационального и иррационального чисел есть число иррациональное, за исключением случая, когда нуль (рациональное число) умножается (делится) на иррациональное число и в результате также получается нуль.

2) Между любыми, сколь угодно близкими между собой двумя действительными числами всегда найдётся как рациональное, так и иррациональное число (см. доказательство последнего утверждения в [3]).

3) Чем ближе (на числовой прямой) рациональное число к иррациональному, тем больше цифр в периоде оно имеет. Если представить числовую последовательность, состоящую из рациональных чисел и стремящуюся к иррациональному числу, то количество цифр в периоде у членов этой последовательности стремится к бесконечности.

Сумма (разность) двух иррациональных чисел может быть как иррациональным ($\sqrt[5]{11}+e$), так и рациональным ($(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}$, $\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ$) числом. Аналогично произведение (частное) двух иррациональных чисел также может быть как иррациональным ($\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$), так и рациональным ($\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$, $(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)$) числом. Обратимся к примерам.

Пример 1. Привести примеры нескольких рациональных и иррациональных чисел, расположенных на числовой прямой между $\sqrt{2}$ *и* $\sqrt{3}$.

Решение. Так как $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$ и $1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$, то в качестве рациональных чисел, удовлетворяющих условию задачи, можно взять, например, числа $1{,}6$ или $1{,}7(12345)$. Примерами иррациональных чисел будут $\sqrt{2{,}1}$, $\sqrt{2}+0{,}000001$, $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)/2$.

Пример 2. *Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:*

$$а)\ \frac{1}{\sqrt{7}-1};\quad б)\ \frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1};\quad в)\ \frac{1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1};$$

$$г)\ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}}}\ (a>0);\quad д)\ \frac{1}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}};\quad е)\ \frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}.$$

Решение. Для избавления от иррациональности воспользуемся приёмом одновременного домножения числителя и знаменателя дроби на выражение, *сопряжённое к знаменателю* (понятие сопряжённого выражения подробно рассматривается ниже в разделе, посвящённом решению иррациональных уравнений и неравенств).

а) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-1}=\dfrac{\sqrt{7}+1}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\dfrac{\sqrt{7}+1}{6}$.

б) Воспользуемся тождеством $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$. Если положить в нём $a=\sqrt[3]{5}$, $b=1$, то получим, что к выражению $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$ сопряжённым будет $\sqrt[3]{5}-1$. Далее, домножим одновременно числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое к знаменателю:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}=\frac{\sqrt[3]{5}-1}{(\sqrt[3]{5}-1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)}=\frac{\sqrt[3]{5}-1}{4}.$$

в) Имеем тождество: $a^5-b^5=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$. Если положить в нём $a=\sqrt[5]{2}$, $b=1$, то получим, что для выражения, находящегося в знаменателе дроби, сопряжённым служит $\sqrt[5]{2}-1$:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}=\frac{\sqrt[5]{2}-1}{(\sqrt[5]{2}-1)(\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1)}=\sqrt[5]{2}-1.$$

г) Имеем $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}}}=\dfrac{1}{\left(\left(\left(\left(a^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{32}}}=\dfrac{\sqrt[32]{a^{31}}}{a^{\frac{1}{32}}\cdot a^{\frac{31}{32}}}=\dfrac{\sqrt[32]{a^{31}}}{a}$.

д) $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\left(3+\sqrt{2}\right)-\sqrt{1+\sqrt{2}}}\cdot\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)+\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\left(3+\sqrt{2}\right)+\sqrt{1+\sqrt{2}}}=$

$$=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\left(3+\sqrt{2}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}}{5\left(2+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{5\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{10}.$$

е) При $|a|\ge|b|$, $a+\sqrt{a^2-b^2}>0$ имеем: $\dfrac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}=$

$$=\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}{a^2-\left(a^2-b^2\right)}=\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}{b^2}$$

(следует отметить изменение ОДЗ в процессе преобразований: при умножении и делении на $a-\sqrt{a^2-b^2}$ возникло дополнительное ограничение $a-\sqrt{a^2-b^2}\neq 0$).

Пример 3. Упростить числа: а) $\sqrt{43+30\sqrt{2}}$; б) $x=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5...}}}}$;

в) $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$; г) $x=\dfrac{\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

Решение. а) 1-й способ (метод неопределённых коэффициентов). Предположим, что под знаком радикала находится полный квадрат вида

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)^2, \text{ где } a,b\in N.$$

Раскрывая квадрат, получим $\left(a^2+2b^2\right)+2ab\sqrt{2}$. Равенство

$$43+30\sqrt{2}=\left(a^2+2b^2\right)+2ab\sqrt{2}$$

при натуральных a и b выполняется тогда и только тогда, когда $43=a^2+2b^2$ и $30=2ab$. Решим полученную систему подбором. Условию $ab=15$ удовлетворяют только четыре пары натуральных чисел

$$\begin{cases}a=1\\ b=15,\end{cases}\quad\begin{cases}a=15\\ b=1,\end{cases}\quad\begin{cases}a=3\\ b=5,\end{cases}\quad\begin{cases}a=5\\ b=3.\end{cases}$$

Из них условию $a^2+2b^2=43$ удовлетворяет лишь последняя. Таким образом,

$$\sqrt{43+30\sqrt{2}}=5+3\sqrt{2}.$$

2-й способ (с помощью формулы сложного радикала). Пусть a и b – действительные числа, такие, что $b\geq 0$, $a^2-b\geq 0$, $a\pm\sqrt{b}\geq 0$. Тогда справедливо тождество

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

называемое *формулой сложного радикала* [28]. Доказывается эта формула возведением в квадрат обеих её частей. Эта формула была известна ещё древним арабам. Она позволяет представить один радикал в виде суммы или разности двух других.

Вернёмся к задаче. Имеем $a=43$, $b=1800$. Поэтому $a^2-b=49$ и, следовательно, $\sqrt{a^2-b}=7$. Применяя формулу сложного радикала, получаем

$$\sqrt{43+30\sqrt{2}}=\sqrt{\tfrac{43+7}{2}}+\sqrt{\tfrac{43-7}{2}}=5+3\sqrt{2}.$$

б) *1-й способ*. Представим число x в виде

$$x=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{1}{8}}\cdot5^{\frac{1}{16}}\cdot\ldots=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots}\cdot5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots}=$$

$$=3^{\frac{2}{3}}\cdot5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{45}.$$

2-й способ. Заметим, что, очевидно, $x>0$, и возведём равенство $x=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}$ в квадрат последовательно два раза:

$$x^2=3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}\Leftrightarrow x^4=45\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}\Leftrightarrow x^4=45x,$$

откуда получаем тот же результат.

в) Отметив, что $x>0$, возведём равенство $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ в квадрат: $x^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}\Leftrightarrow x^2=2+x$. Это квадратное уравнение имеет два корня $x=-1<0$ и $x=2$. Итак, это число 2.

г) Отметим, что данное число положительно, и возведём равенство $x=\ldots$ в квадрат. После несложных вычислений получим, что $x^2=9$, т.е. $x=3$.

Пример 4 [ВМиК–1999, устн.]. *Сравнить числа*

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\ \text{и}\ 1.$$

Решение. Обозначим первое из чисел за x, и возведём равенство

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

в куб, используя формулу сокращённого умножения

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b),\ \text{где}\ a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}},\ b=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Тогда получим

$$x^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right),$$

$$\Leftrightarrow x^3=4-3x\Leftrightarrow x^3+3x-4=0.$$

Заметим, что $x=1$ является корнем последнего уравнения. Делением многочлена x^3+3x-4 на $x-1$ убеждаемся в том, что полученный в результате деления трёхчлен x^2+x+4 не имеет действительных корней. Таким образом, $x=1$ – единственный корень кубического уравнения. Следовательно, первое из сравниваемых равно 1. *Ответ*: числа равны.

Пример 5 [Эконом.–1988]. *Что больше*: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ или 3?

Решение. Уединив кубический корень, возведём оба числа в куб:

$$\sqrt[3]{4} \vee 3-\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 \vee \left(3-\sqrt{2}\right)^3 = 45-29\sqrt{2} \Leftrightarrow 29\sqrt{2} \vee 41 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1682>1681$. *Ответ*: первое число больше.

Пример 6 [ВМиК–1996, устн.]. *Что больше*:

$$\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}} \text{ или } \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\ ?$$

Решение. Выделяя полный квадрат под знаком квадратного корня в первом из чисел, получим:

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1\right)^2} \vee \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2},$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{2}+1 < \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}.$$

Ответ: второе число больше.

Пример 7 [ВМиК–2005, устн.] *Расположить в порядке возрастания числа*

$$\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13},\ \sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}\ \text{и}\ \sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}.$$

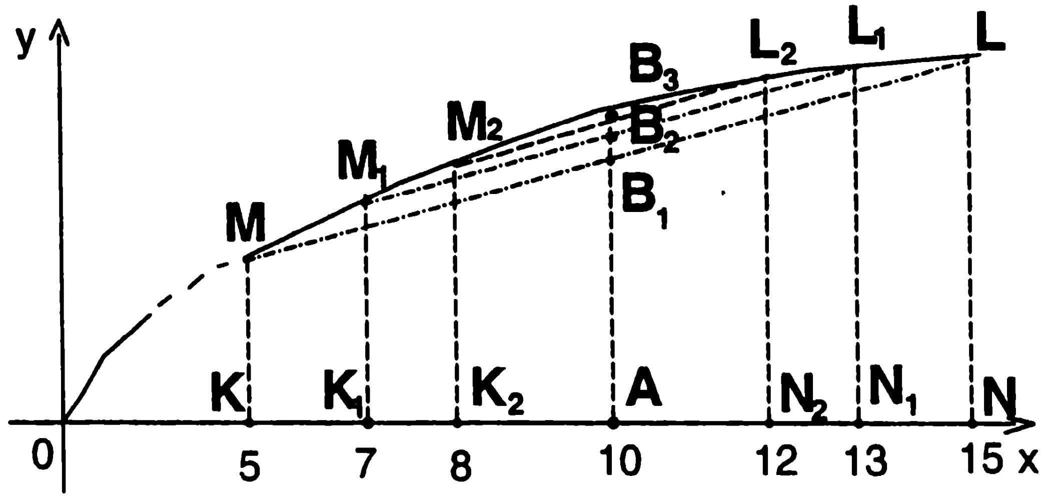
Решение. Рассмотрим функцию $f(x) \doteq \sqrt[11]{x}$ при $x \geq 0$. Введём вспомогательную функцию

$$\varphi(t)=\frac{f(10-t)+f(10+t)}{2},$$

значения которой при $t=2,3,5$ равны соответственно ординатам точек B_3, B_2, B_1 (поскольку отрезки AB_3, AB_2, AB_1 являются соответственно средними линиями трапеций $K_2M_2L_2N_2$, $K_1M_1L_1N_1$, $KMLN$). Покажем, что эта функция убывает при $t>0$. Действительно, её производная

$$\varphi'(t)=\frac{f'(10+t)-f'(10-t)}{2}<0,$$

т.к. $10+t>10-t$, а $f'(x)=1/\left(11\sqrt[11]{x^{10}}\right)$ – убывающая функция.



Тогда имеем цепочку неравенств $\varphi(5)<\varphi(3)<\varphi(2)$ ($AB_1<AB_2<AB_3$) $\Leftrightarrow$

$$\frac{f(10-5)+f(10+5)}{2}<\frac{f(10-3)+f(10+3)}{2}<\frac{f(10-2)+f(10+2)}{2},$$

т.е. $\dfrac{\sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}}{2}<\dfrac{\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}}{2}<\dfrac{\sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}}{2}$, откуда приходим к ответу.

Замечание. Полученный результат в действительности является прямым следствием того, что график функции $f(x)=\sqrt[11]{x}$ при $x\geq 0$ имеет выпуклость, направленную вверх (в строгом смысле).

Ответ: $\sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}<\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}<\sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}$.

Пример 8 [Мехмат–1964, ВМиК–2002, устн.]. *Найти все целые a и b, для которых один из корней уравнения $3x^3+ax^2+bx+12=0$ равен $1+\sqrt{3}$.*

Решение. Подставим в уравнение вместо x значение корня $1+\sqrt{3}$:

$$3\left(1+\sqrt{3}\right)^3+a\left(1+\sqrt{3}\right)^2+b\left(1+\sqrt{3}\right)+12=0,$$

и приведём последнее равенство к виду

$$(2a+b+18)\cdot\sqrt{3}=-(4a+b+42).$$

Заметим, что произведение рационального числа $2a+b+18$ и иррационального числа $\sqrt{3}$ всегда иррационально, за исключением случая, когда $2a+b+18$ равно нулю (тогда это произведение рационально). В правой части равенства находится рациональное число $-(4a+b+42)$. Поэтому равенство возможно тогда и только тогда, когда $\begin{cases}2a+b+18=0\\-(4a+b+42)=0,\end{cases}$ т.е. при $\begin{cases}a=-12\\b=6.\end{cases}$

Пример 9 [ВМиК–2004]. ***Найти все целые n, при которых справедливо равенство*** $\dfrac{2n^2-3n+12}{n-2}=11-5\sqrt{13-3n}$.

Решение. Поскольку при целых n число $11-5\sqrt{13-3n}$ может быть или целым, или иррациональным, а число $\dfrac{2n^2-3n+12}{n-2}$ – рационально, то отсюда заключаем, что $11-5\sqrt{13-3n}$ – целое число. Но тогда, в свою очередь, число $\dfrac{2n^2-3n+12}{n-2}=2n+1+\dfrac{14}{n-2}$ должно принимать целые значения, т.е. дробь $\dfrac{14}{n-2}$ должна быть целым числом. Это возможно тогда и только тогда, когда $n-2\in\{\pm1;\pm2;\pm7;\pm14\}$. Учтём, что $13-3n\ge 0$, т.е. $n\le 4$. Имеем набор возможных значений n:

$$n\in\{-12;-5;0;1;3;4\}.$$

Проверкой убеждаемся, что из всех этих значений исходному равенству удовлетворяет только $n=-12$.

Ответ: $n\in\{-12\}$.

Алгебраические и трансцендентные числа (*)

Помимо деления множества действительных чисел на непересекающиеся подмножества рациональных и иррациональных чисел, существует и другая их классификация. Так, действительные числа подразделяют на *алгебраические* и *трансцендентные*.

Алгебраическим, по определению, называют всякое действительное число, которое является корнем алгебраического уравнения n-й степени

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

с рациональными коэффициентами a_i, $i=0,1,2,\ldots,n$ $(a_n\ne 0)$. Таким образом, к алгебраическим относятся все рациональные числа, а из иррациональных – всевозможные алгебраические корни, например,

$$\sqrt{17},\ 2-\sqrt[3]{6},\ \sqrt[7]{1-\sqrt{5}}\ \text{и т.д.}$$

Все остальные действительные числа относятся к *трансцендентным*, например, это числа π, e, π^2-1, $\sin 7$, $\log_2 5$ и многие другие. Тот факт, что число e трансцендентно, был доказан в 1873 году *Шарлем Эрмитом* (1822–

1901), а трансцендентность числа π доказал в 1882 году немецкий математик *Фердинанд Линдеман* (1852–1939) [16,17]. Тем самым была доказана невозможность построения циркулем и линейкой квадрата, площадь которого была бы равна площади данного круга, т.е. в отрицательном плане была решена знаменитая проблема «квадратуры круга».

Пример [Эконом. ф-т]. *Дано числовое выражение* $A=(\pi^2-1)/4$. *Какое из следующих равенств может быть верным*: 1) $A=1+\sqrt{1.5}$;

2) $A=2\frac{23}{99}$; 3) $A=2{,}21\ldots$; 4) $A=2{,}217401094(621)$; 5) $A=\frac{29}{40}\pi$?

Решение. 1) Неверно, так как $1+\sqrt{1.5}$ – алгебраическое, а $(\pi^2-1)/4$ – трансцендентное число; 2) неверно, так как $2\frac{23}{99}$ – рациональное, а $(\pi^2-1)/4$ – иррациональное число; 3) может быть; 4) неверно, так как $2{,}217401094(621)$ – рациональное число; 5) неверно. Докажем методом «от противного». Предположим, что $\frac{\pi^2-1}{4}=\frac{29}{40}\pi$. Преобразуем это равенство к виду $10\pi^2-29\pi-10=0$. Это означает, что число π является корнем алгебраического уравнения $10x^2-29x-10=0$, что по определению невозможно, так как π – число трансцендентное. *Ответ*: может быть верным равенство $A=2{,}21\ldots$.

Целая, дробная части действительного числа и их свойства (*)

Теперь, когда сформулировано понятие действительного числа, можно ввести ещё два связанных между собой понятия, характеризующих данное действительное число – его *целую* и *дробную* части. Определения целой и дробной частей имеют словесно-описательную форму.

Целой частью действительного числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x, и обозначается $[x]$. *Дробной частью* действительного числа x называется разность между самим числом и его целой частью, т.е. $x-[x]$, и обозначается $\{x\}$. Например: $[5{,}12]=5$, $\{5{,}12\}=0{,}12$; $[-5{,}12]=-6$, $\{-5{,}12\}=0{,}88$; $[\pi]=3$, $\{\pi\}=\pi-3$.

Из определений целой и дробной частей вытекают их основные *свойства*. Рассмотрим их. Пусть x, y – произвольные действительные числа, n – любое целое число. Тогда справедливы следующие утверждения.

Свойства целой и дробной частей

1. *Целая часть любого действительного числа x есть целое число*:

$$[x]\in Z.$$

2. *Любое действительное число x можно представить в виде суммы его целой и дробной частей, т.е.*

$$x=[x]+\{x\}.$$

3. *Любое действительное число x всегда заключено между своей целой частью (с которой может совпадать) и числом, на единицу большим целой части, т.е.*

$$[x]\le x<[x]+1.$$

4. *Дробная часть любого действительного числа x может принимать значения в пределах от 0 (наименьшее возможное значение) до 1 (это значение не достигается ни при каком x), т.е.*

$$0\le\{x\}<1.$$

5. *Любое целое число n можно выносить (или вносить) из-под знака целой части, т.е.*

$$[x+n]=n+[x].$$

Добавление (или вычитание) к действительному числу x произвольного целого числа n не изменяет значения его дробной части, т.е.

$$\{x+n\}=\{x\}.$$

6. *Целая часть суммы двух действительных чисел не меньше суммы их целых частей, т.е.*

$$[x+y]\ge[x]+[y].$$

Докажем, например, последнее свойство:

$[x+y]=[([x]+\{x\})+([y]+\{y\})]=[([x]+[y])+(\{x\}+\{y\})]=$ $=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]$. Поскольку $0\le\{x\}<1$, $0\le\{y\}<1$, то $0\le\{x\}+$ $+\{y\}<2$ и, следовательно, $[\{x\}+\{y\}]\ge 0$. Используя последнюю оценку, получаем окончательно необходимый результат:

$$[x+y]\ge[x]+[y].$$

7. *Дробная часть суммы двух действительных чисел не больше суммы их дробных частей, т.е.*

$$\{x+y\}\le\{x\}+\{y\}.$$

Доказательство. Воспользуемся предыдущим свойством:

$$[x+y]\ge[x]+[y]\Leftrightarrow(x+y)-\{x+y\}\ge(x-\{x\})+(y-\{y\})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\{x+y\}\le\{x\}+\{y\}.$$

Для построения графиков функций $y=[x]$ и $y=\{x\}$ следует разбить всю числовую прямую на полуинтервалы вида $[n,n+1)$, где n – произвольное целое число, и затем рассмотреть поочерёдно каждый из этих промежутков. Это делается потому, что на каждом из указанных промежутков можно *однозначно раскрыть* целую и дробную части, выписав их значения в явном виде.

Так, на полуинтервалах вида $[n,n+1)$ имеем: $[x]=n$, поэтому график функции $y=[x]$ на этих участках совпадает с горизонтальной прямой $y=n$.

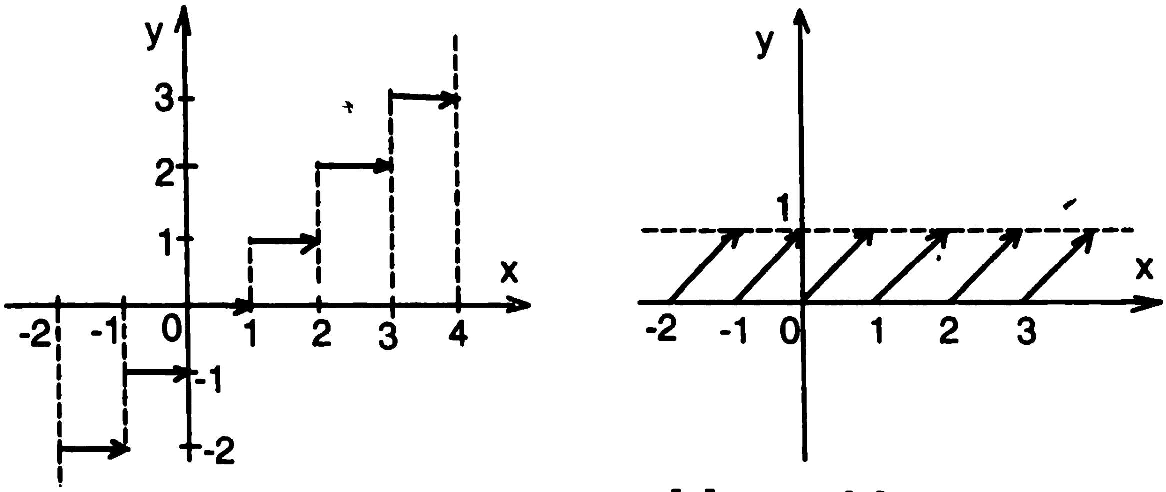


Рис.1. Графики функций $y=[x]$ и $y=\{x\}$

Далее, на рассматриваемом промежутке $\{x\}=x-[x]=x-n$, что означает, что график функции $y=\{x\}$ совпадает с прямой $y=x-n$. Объединяя построенные участки графиков, получаем оба искомых графика.

Видно, что обе функции терпят разрывы в виде конечных скачков значений при целочисленных значениях аргумента x. Дробная часть к тому же является периодической функцией с периодом, равным единице. Данные функции не относят к классу элементарных функций.

Заметим, что данный подход, основанный на разбиении числовой прямой на отдельные промежутки, на каждом из которых значения целой и дробной частей можно посчитать, используется и при решении других задач на эту тему, в частности при решении уравнений. В экзаменационных вариантах задачи на свойства целой и дробной частей встречаются достаточно редко и в основном на математических факультетах, однако надо быть готовым к решению задач такого рода.

Пример 1 [ВМиК–2003, устн.]. *Решить неравенство*

$$[x]\cdot\{x\}<x-1.$$

Решение. Заменим x в правой части неравенства на сумму $[x]+\{x\}$:

$$[x]\cdot\{x\}<[x]+\{x\}-1.$$

Приведём неравенство к виду $[x]\cdot(\{x\}-1)<\{x\}-1$. Раскладывая на множители, получаем $(\{x\}-1)\cdot([x]-1)<0$. Поскольку $\{x\}-1<0$, то неравенство оказывается равносильно неравенству $[x]>1 \Leftrightarrow [x]\geq 2$, решая которое находим $x\geq 2$. *Ответ*: $x\in[2,+\infty)$.

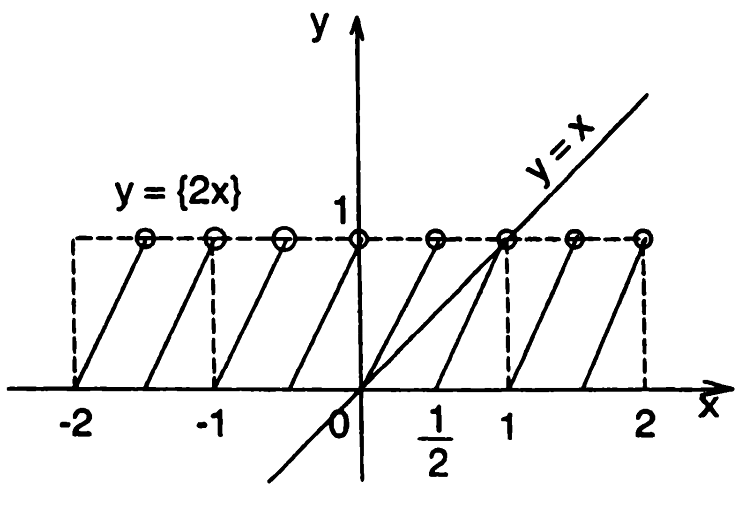
***Пример 2**. Решить уравнение* $\{2x\}=x$.

Решение. *<u>1-й способ</u>*. Заметим, что левая часть уравнения $\{2x\}$ как величина дробной части может принимать значения, не выходящие за пределы полуинтервала $[0,1)$. Следовательно, и правая часть уравнения, т.е. x, может принимать значения в этих же пределах. Итак, ОДЗ: $x\in[0,1)$. Разобьём ОДЗ на два промежутка числом $1/2$ и на каждом из них раскроем дробную часть и решим уравнение.

1) Пусть $x\in[0,\ 1/2)$. Тогда $2x\in[0,1)$, следовательно, $[2x]=0$ и $\{2x\}=2x-[2x]=2x$. Поэтому на рассматриваемом промежутке уравнение примет вид $2x=x$, откуда находим $x=0$. Поскольку найденное значение принадлежит $[0,1/2)$, то, следовательно, будет решением.

2) Пусть теперь $x\in[1/2,1)$. Тогда $2x\in[1,2)$, а значит, $[2x]=1$ и $\{2x\}=2x-[2x]=2x-1$. Поэтому на данном промежутке уравнение примет вид $2x-1=x$, откуда находим $x=1$. Однако это значение не принадлежит рассматриваемому полуинтервалу и поэтому не будет решением.

<u>2-й способ</u> (графический). Построим в одной системе координат графики функций $y=\{2x\}$ и $y=x$, стоящих в левой и правой частях уравнения. Количество решений уравнения при этом равно количеству точек пересечения этих графиков, а сами решения являются абсциссами точек пересечения графиков. Очевидно, что графики пересекаются в единственной точке – начале координат. Проверкой убеждаемся, что число $x=0$ действительно является решением данного уравнения (проверку сделать необходимо, поскольку графический способ решения, вообще говоря, неточный).



Пример 3 [ВМиК–1996, устн.]. *Сколько решений имеет уравнение*

$$x+[100x]=100x\,?$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $x=\{100x\}$. Эту задачу можно решить графически. Рассмотрим другой способ. Так как выражение $\{100x\}$ может принимать значения лишь из промежутка $[0,1)$, то и $x\in[0,1)$. Но тогда x можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$$x=0,a_1a_2a_3a_4\ldots \Rightarrow 100x=a_1a_2,a_3a_4\ldots \Rightarrow \{100x\}=00,a_3a_4\ldots$$

Подставим в исходное уравнение: $0,a_1a_2a_3a_4\ldots=00,a_3a_4a_5a_6\ldots \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_1=a_3 \\ a_2=a_4 \\ a_3=a_5\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_3=a_5=\ldots=a_{2n+1}=\ldots \\ a_2=a_4=a_6=\ldots=a_{2n}=\ldots \end{cases} \Leftrightarrow x=0,a_1a_2a_1a_2\ldots=0,(a_1a_2).$$

Таким образом, любое число вида $0,(a_1a_2)$ удовлетворяет уравнению. Найдём, сколько всего существует таких чисел. Цифра a_1 может принимать 10 значений (от 0 до 9), при этом для каждого такого значения вторая цифра a_2 также может принимать 10 значений (от 0 до 9). Всего имеем 10×10 возможностей. Но надо исключить случай $x=0,999\ldots=1$. *Ответ*: 99 решений.

Пример 4. *Найти целую часть числа* $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}}_{n \text{ корней}}$.

Решение. Для решения задачи достаточно оценить, между какими последовательными целыми числами расположено данное число. Обозначим это число через a_n. Оценка снизу находится несложно, поскольку очевидно, что при любом натуральном n имеем $a_n>\sqrt{4}=2$. Найдём оценку сверху для a_n. Для этого заменим в выражении для a_n последний радикал $\sqrt{6}$ на $\sqrt{9}$:

$$a_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{9}}}}=$$

$$=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}}}}.$$

Последовательно упрощая выражение в правой части, получим $a_n<$ $<\sqrt{9}=3$. Итак, $\forall n\in N$ справедливо $2<a_n<3$, откуда $[a_n]=2$.

***Пример 5.** Решить уравнение* $[x] = 3x + 1$.

Решение. Разобьём множество всех действительных значений неизвестной x на промежутки, в которых можно однозначно раскрыть целую часть: $n \le x < n+1$, где $n \in Z$. Решим задачу на каждом из этих промежутков. Так как при $n \le x < n+1$ имеем $[x] = n$, то подставим в исходное уравнение, и оно примет вид $n = 3x+1 \Leftrightarrow x = (n-1)/3$. Учтём, что найденное значение x будет решением уравнения в том и только в том случае, если оно принадлежит рассматриваемому промежутку, т.е. $n \le (n-1)/3 < n+1$. Решая систему

$$\begin{cases} n \le (n-1)/3 \\ (n-1)/3 < n+1 \end{cases}$$

в целых числах, находим $-2 < n \le -1/2$, т.е. $n = -1$. Тогда $x = (n-1)/3 = -2/3$.

<u>*Замечание*</u>. Задачу можно было решить, используя графический подход.

***Пример 6.** Решить уравнение* $[x-1] = [(x+2)/2]$.

Решение. Положим $[x-1] = n$, $n \in Z$, тогда в силу уравнения и $[(x+2)/2] = n$. Отсюда имеем

$$\begin{cases} n \le x-1 < n+1 \\ n \le (x+2)/2 < n+1. \end{cases}$$

Дальнейшее решение зависит от того, что больше: $x-1$ или $(x+2)/2$.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x - 1 \ge (x+2)/2$, т.е. $x \ge 4$. В этом случае имеем:

$$n \le (x+2)/2 \le x-1 < n+1. \qquad (1)$$

Получаем систему неравенств с двумя неизвестными, одна из которых целочисленна:

$$\begin{cases} (x+2)/2 \ge n \\ x \ge 4 \\ x-1 < n+1. \end{cases}$$

Отсюда $x \ge 4$, $2n-2 \le x < n+2$. Следовательно, $2n-2 < n+2$, $4 \le x < n+2$. Из неравенств $2n-2 < n+2$ и $4 < n+2$ находим, что $2 < n < 4$. Последнему неравенству удовлетворяет только одно целое число

$n = 3$. Подставляя в неравенства (1), определяем $4 \le x < 5$.

2) Пусть $x - 1 < (x+2)/2$, т.е. $x < 4$. В этом случае получаем

$$n \le x - 1 < (x+2)/2 < n+1.$$

Аналогично первому случаю находим $3 \le x < 4$. Объединяя полученные решения, приходим к окончательному ответу. *Ответ*: $x \in [3,5)$.

Пример 7 [ВМиК–2000, устн.]. *Решить уравнение*

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}.$$

Решение. Сделаем замену $y = (15x-7)/5 \Rightarrow x = (5y+7)/15$. Переходя к новой переменной, получим уравнение

$$\left[\frac{10y+39}{40}\right] = y$$

с целочисленной неизвестной y. Раскрывая целую часть по определению, получаем двойное неравенство

$$y \le \frac{10y+39}{40} < y+1 \Leftrightarrow -1/30 < y \le 1\tfrac{3}{10},$$

откуда с учётом целочисленности y находим $y = 0$ или $y = 1$. Им отвечают значения $x = 7/15$ и $x = 4/5$. *Ответ*: $x \in \{7/15; 4/5\}$.

Пример 8. [ВМиК, олимпиада «Ломоносов–2007», устн.]. *Найти все решения уравнения*

$$[2x+1] = [x] + [x+1].$$

Решение. Упростим уравнение при помощи свойств целой части. Так как $[2x+1] = [2x]+1$, а $[x+1] = [x]+1$, то уравнение принимает вид

$$[2x] = 2[x].$$

Решим его стандартным методом. Чтобы раскрыть обе целые части, разобьём множество всех действительных x на полуинтервалы $n \le x < n + \frac{1}{2}$ и $n + \frac{1}{2} \le x < n+1$, где $n \in Z$.

1) Если $n \le x < n + \frac{1}{2}$, то $[x] = n$, а $[2x] = 2n$ (так как $2n \le 2x < 2n+1$), и уравнение на этом промежутке принимает вид

$$2n = 2n \text{ – верно при любом } n \in Z,$$

т.е. при любом целом n любое $x \in [n, n + \frac{1}{2})$ удовлетворяет уравнению.

2) Если же $n+\frac{1}{2}\le x<n+1$, то $[x]=n$, а $[2x]=2n+1$ (так как $2n+1\le 2x<2n+2$), и тогда уравнение примет вид

$$2n+1=2n \text{ – неверно ни при каком } n\in Z,$$

т.е. ни одно значение x из рассматриваемого промежутка не удовлетворяет уравнению. *Ответ*: $x\in\left[n,n+\frac{1}{2}\right)$, где $n\in Z$.

Пример 9. [ВМиК–2004, устн.]. *Найти все решения уравнения*

$$\{x\}=1/x.$$

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$. Перепишем уравнение в виде

$$[x]=x-(1/x).$$

Пусть $n\le x<n+1$, где $n\in Z$. Тогда $[x]=n$, и уравнение на указанном промежутке примет вид

$$n=x-1/x \Leftrightarrow x^2-nx-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=\left(n-\sqrt{n^2+4}\right)/2,\ x_2=\left(n+\sqrt{n^2+4}\right)/2.$$

При этом x_1 не удовлетворяет условию $n\le x<n+1$ ни при каком $n\in Z$, а x_2 удовлетворяет ему при $n>0$. *Ответ*: $x=\left(n+\sqrt{n^2+4}\right)/2$, $n\in N$.

Пример 10. [Олимпиада «Ломоносов–2008», 9]. *Найти все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению*

$$2002\left[n\sqrt{1001^2+1}\right]=n\left[2002\sqrt{1001^2+1}\right],$$

где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

Решение. Пусть $\sqrt{1001^2+1}=1001+\alpha$, тогда

$$0<\alpha=\sqrt{1001^2+1}-1001=\frac{1}{\sqrt{1001^2+1}+1001}<\frac{1}{2002}.$$

Значит, $2002\cdot 1001<2002\cdot\sqrt{1001^2+1}<2002\cdot 1001+1$.

Но тогда $\left[2002\sqrt{1001^2+1}\right]=2002\cdot 1001$, поэтому, в силу уравнения,

$$\left[n\sqrt{1001^2+1}\right]=1001n, \text{ т.е. } 1001n<n\sqrt{1001^2+1}<1001n+1.$$

Отсюда $n<\dfrac{1}{\sqrt{1001^2+1}-1001}=\sqrt{1001^2+1}+1001$.

Ответ: $n\in\{1;2;3;\ldots;2002\}$.

1.3. Степень действительного числа

Степени с натуральными и целыми показателями и их свойства

Выше, в пункте 1.1 данного раздела, уже было введено понятие натуральной степени натурального числа. Расширим это понятие и сформулируем определения степеней с натуральным и целым показателями для действительных чисел.

Введём вначале понятие натуральной степени n для произвольного действительного числа a. Если действительное число a умножить само на себя n раз ($n \in N$), то это произведение $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ называют *n-й степенью числа* a и обозначают a^n, т.е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

При этом число a называется *основанием степени*, а n – *показателем степени*. При $n = 1$ для любого действительного a имеем $a^1 = a$. *Нулевая степень* вводится только для действительных чисел, отличных от нуля, при этом для $a \neq 0$ полагают $a^0 = 1$. Число 0^0 не определено, это запрещённая операция.

Определим теперь степень с целым отрицательным показателем. Она, как и нулевая степень, вводится только для действительных чисел, не равных нулю. Пусть n – произвольное натуральное число. Степенью действительного числа a ($a \neq 0$) *с целым отрицательным* показателем $(-n)$ называют число, обратное степени с натуральным показателем n:

$$a^{-n} = 1/a^n .$$

Целая отрицательная степень числа нуль, т.е. 0^{-n}, не определена.

Рассмотрим теперь основные свойства степеней с целыми показателями, опираясь непосредственно на определения степени числа и свойства арифметических операций над действительными числами.

<u>Теорема</u> *(свойства степеней с целыми показателями). Для любых двух действительных и отличных от нуля чисел a, b и произвольных целых чисел n, m верны равенства:*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2. $a^m : a^n = a^{m-n}$; 3. $(a^m)^n = a^{mn}$;

4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; 5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

6. *Пусть $m, n \in Z$ и $n > m$.*

Тогда $a^n > a^m$, если $a > 1$ и $a^n < a^m$, если $0 < a < 1$.

Доказательство приведём для случая натуральных показателей m и n.

1. $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^{m+n}$.

2. Если $m > n$, то $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n} = a^{m-n}$,

если $m = n$, то $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^m}{a^m} = 1 = a^0 = a^{m-n}$,

если $m < n$, то $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}} = \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m}} = \dfrac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n}$.

3. $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}}_{n} =$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{mn} = a^{mn};$$

4. $(ab)^n = \underbrace{ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n} = a^n \cdot b^n$;

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\dfrac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a}{b}}_{n} = \dfrac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n}}{\underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n}} = \dfrac{a^n}{b^n}$;

6. Пусть $n > m$.

Если $a > 1$, то $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m} > \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m} = a^m$,

если $0 < a < 1$, то $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m} < \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m} = a^m$.

При доказательстве последнего свойства мы воспользовались свойством 8 числовых неравенств: $a^n > b^n \Leftrightarrow a > b$ (см. пункт 2.1 раздела 2), из которого вытекает, что при $n > m$ $a^{n-m} > 1 \Leftrightarrow a > 1$. Аналогично, если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и тогда при $n > m$ $(1/a)^{n-m} > 1 \Leftrightarrow 1/a^{n-m} > 1$ и, следовательно, по свойству 7б числовых неравенств $a^{n-m} < 1$.

<u>*Замечание*</u>. Если среди чисел n и m есть равные нулю или отрицательные, то в приведённых выше равенствах (и неравенствах) следует заменить соответствующие множители согласно определению нулевой и целой отрицательной степени. Например, свойство 4 при $n < 0$ доказывается так:

$$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{ab\cdot\ldots\cdot ab}_{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{-n}\cdot\underbrace{b\cdot\ldots\cdot b}_{-n}} = \frac{1}{a^{-n}}\cdot\frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n.$$

Подробнее с доказательствами свойств степеней для случая нулевых и целых отрицательных показателей можно ознакомиться, например, в книге [3].

Арифметические и алгебраические корни n-й степени

Определим понятия арифметического и алгебраического корней n-й степени. Пусть $a \geq 0$, $b \geq 0$ – действительные числа, n – натуральное число, большее или равное 2. Число b называется *арифметическим корнем* n-й степени из числа a, если

$$b^n = a.$$

Обозначение: $b = \sqrt[n]{a}$. Например, арифметический корень 2-й степени из числа 4 равен 2: $\sqrt{4} = 2$. Заметим, что некоторые авторы допускают в определении корня n-й степени значение $n = 1$, т.е. полагают $\sqrt[1]{a} = a$. Однако на практике корни 1-й степени обычно не используются, поэтому в данном пособии мы будем придерживаться ограничения $n \geq 2$ (так же, как, например, в [1,2]).

Расширим понятие арифметического корня до понятия *алгебраического корня*. Снимем ограничения на неотрицательность a и b. Пусть теперь $a, b \in R$.

Число b называется *алгебраическим корнем* n*-й степени* из числа a, если $b^n = a$. Таким образом, алгебраический корень нечётной степени n оказывается определён и для отрицательного a.

Например, $\sqrt[3]{(-8)} = -2$, так как $(-2)^3 = -8$.

Приведём без доказательства две теоремы.

<u>*Теорема 1*</u>. *Для каждого неотрицательного числа a существует единственный арифметический корень n-й степени (совпадающий при этом с алгебраическим корнем n-й степени).*

<u>*Теорема 2*</u>. *Для каждого отрицательного числа a существует единственный алгебраический корень нечётной степени (который также отрицателен).*

Свойства арифметических (алгебраических) корней

Пусть $a, b \in R$, $n, m \in N$ $(n \geq 2,\ m \geq 2)$.

1. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad n = 2k+1, \\ |a|, & \text{если} \quad n = 2k,\ k \in N. \end{cases}$

2. *Если* $a \geq 0$, $b \geq 0$, *то* $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

   если $a \leq 0$, $b \leq 0$, *то* $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$

   (*т.е. если* $ab \geq 0$, *то* $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$);

   если $n = 2k+1$, *то* $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $(a, b \in R)$.

Дальнейшие свойства будут сформулированы для арифметических корней $(a \geq 0)$. Их можно обобщить на случай алгебраических корней аналогично тому, как это было сделано в данном пункте.

3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b > 0)$; 4. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$; 5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

6. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(k \in N,\ k \geq 2)$

   (если $a < 0, k$ – чётное, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a|^m}$);

7. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$; 8. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$ $(a > 0)$.

Доказательства этих свойств основаны на непосредственной проверке каждого из этих равенств, используя определения арифметического (алгебраического) корня и свойств степеней с целым показателем. Используется также тот факт (см. свойство 8б числовых неравенств), что два неотрицательных (неположительных) числа равны тогда и только тогда, когда их n-е степени ($n \in N$) равны.

Доказательство. 1. Пусть $n = 2k+1$. Так как при любом действительном a числа $\sqrt[n]{a^n}$ и a одного знака, то достаточно доказать, что после возведения данного равенства $\sqrt[n]{a^n} = a$ в степень n получим верное равенство $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n = (a)^n$. Это действительно так, поскольку n-я степень левой части равенства $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n$ равна подкоренному выражению a^n (по определению корня n-й степени), и n-я степень правой части равенства $(a)^n$ также равна a^n (по определению натуральной степени числа a). Если же $n = 2k$, то свойство также верно, так как в этом случае $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n = a^n = |a|^n$ и $\left(|a|\right)^n = |a|^n$ (здесь при доказательстве использовалось свойство модуля $a^n = |a|^n$ при чётных n).

Остальные свойства будут доказаны для арифметических корней.

2. Пусть $a \geq 0$, $b \geq 0$. Достаточно доказать равенство n-х степеней неотрицательных чисел $\sqrt[n]{ab}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Действительно, $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$ (по определению арифметического корня n-й степени). С другой стороны, по свойству 4 степеней с натуральными показателями имеем

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

3. Пусть $a \geq 0$, $b > 0$. Достаточно доказать равенство n-х степеней неотрицательных чисел $\sqrt[n]{a/b}$ и $\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$. Возведём проверяемое равенство в n-ю степень и, применяя для упрощения правой части свойство 5 степеней с натуральным показателем, а также используя для преобразования обеих частей определение арифметического корня n-й степени, получаем

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

4. Возведём равенство в n-ю степень и, применяя для упрощения правой части свойство 3 степеней с натуральным показателем, а также используя для преобразования обеих частей определение арифметического корня, получаем

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n \Leftrightarrow a^m = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m \Leftrightarrow a^m = a^m.$$

5. Возведём доказываемое равенство в mn-ю степень и, применяя в левой части свойство 3 степеней с натуральным показателем, получим

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} \Leftrightarrow \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = a \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \Leftrightarrow a = a.$$

6. Возведём равенство в n-ю степень и воспользуемся только что доказанным свойством 5 арифметических корней (а также определением арифметического корня и свойством 3 степеней с натуральным показателем):

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}}\right)^n = a^m \Leftrightarrow \sqrt[k]{\left(a^m\right)^k} = a^m \Leftrightarrow a^m = a^m.$$

7. Возведём равенство в nm-ю степень и применим для упрощения левой части свойства 4, 3 и 1 степеней с натуральным показателем:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}\right)^{nm}=\left(\sqrt[nm]{a^{n+m}}\right)^{nm}\Leftrightarrow\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nm}\cdot\left(\sqrt[m]{a}\right)^{nm}=a^{n+m}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}\right)^{m}\cdot\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}\right)^{n}=a^{n+m}\Leftrightarrow a^{m}\cdot a^{n}=a^{n+m}\Leftrightarrow a^{n+m}=a^{n+m}.$$

8. Возведём равенство в nm-ю степень и применим для преобразования левой части свойства 5, 3 и 2 степеней с натуральным показателем (а также в обеих частях равенства – определением арифметического корня):

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm}=\left(\sqrt[nm]{a^{m-n}}\right)^{nm}\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nm}}{\left(\sqrt[m]{a}\right)^{nm}}=a^{m-n}\Leftrightarrow\frac{\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}\right)^{m}}{\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}\right)^{n}}=a^{m-n}\Leftrightarrow\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$$

$$\Leftrightarrow a^{m-n}=a^{m-n}.$$

Пример 1*. Равносильны ли уравнения*: $\sqrt[x]{8}=8^{3}$ (1) *и* $8^{\frac{1}{x}}=8^{3}$ (2) ?

Решение. 1) Решим вначале второе из уравнений. Его ОДЗ задаётся неравенством $x\neq 0$. Так как основание 8 степеней в обеих частях уравнения (2) одно и то же, то, приравнивая показатели степеней, приходим к уравнению $1/x=3$, откуда находим $x=1/3$. Поскольку это значение принадлежит ОДЗ, получаем, что уравнение (2) имеет единственное решение $x=1/3$.

2) Решим теперь первое уравнение. Его ОДЗ задаётся условиями $x\in N$, $x\geq 2$. Для решения уравнения перейдём к его следствию $8^{1/x}=8^{3}$, решая которое по-прежнему находим $x=1/3$. Но в данном случае это значение уже не будет принадлежать ОДЗ уравнения (1), и поэтому не будет являться решением. Таким образом, приходим к результату: уравнение (1) не имеет решений. *Ответ*: уравнения не равносильны.

Степени с рациональными показателями

Теперь, когда введено понятие арифметического корня n-й степени, можно определить степень с *рациональным показателем*.

1. Пусть a – положительное действительное число, x – произвольное рациональное число, т.е. число, представимое в виде несократимой обыкновенной дроби $x=m/n$, где $m\in Z$, $n\in N$. В частности, при $n=1$ рациональное число x является целым, а понятие степени с целым показателем было введено

ранее. При $n \geq 2$ под *рациональной степенью* x числа a понимают положительное число, равное арифметическому корню степени n из числа a^m, т.е. $b = \sqrt[n]{a^m}$, и обозначают $b = a^x$ (или $b = a^{m/n}$). Например, под $a^{1/n}$ понимают $\sqrt[n]{a}$. При $a = 1$ и любом рациональном x имеем $1^x = 1$.

2. Если основание $a = 0$, то рациональная степень определена только при положительном показателе $x = m/n > 0$, при этом полагают $a^x = 0$.

3. Степень с рациональным показателем можно определить и для отрицательного основания. Пусть $a < 0$ и показатель степени имеет в знаменателе нечётное число $x = m/(2k+1)$ ($k \in N$). В этом случае под a^x понимают алгебраический (при нечётном m) или арифметический (при чётном m) корень степени $(2k+1)$ из числа a^m, т.е.

$$a^x = a^{\frac{m}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{a^m}.$$

В этом случае справедливы все перечисленные ниже свойства степеней с рациональными показателями, которые доказываются аналогично.

Большинство свойств степеней с рациональными показателями выглядят аналогично (хотя являются обобщением) соответствующим свойствам степеней с целыми показателями. Доказательство свойств степеней с рациональными показателями проведём для случая положительного основания. В выполнении свойств степеней для случаев нулевого и отрицательного оснований убедитесь самостоятельно.

Свойства степеней с рациональными показателями

Пусть a и b – положительные действительные числа, а x и y – рациональные числа. Тогда верны следующие равенства:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; **2.** $(a^x)^y = a^{xy}$; **3.** $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; **5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

6. Пусть $x > y$. Если $a > 1$, то $a^x > a^y$, а если $0 < a < 1$, то $a^x < a^y$.

7. Если $a > b \geq 0$, $x > 0$, то $a^x > b^x$; если $a > b > 0, x < 0$, то $a^x < b^x$.

Доказательство.

1. Рассмотрим два рациональных числа $x = p_1/q_1$ и $y = p_2/q_2$, их всегда можно привести к общему знаменателю:

$$\frac{p_1q_2}{q_1q_2} \text{ и } \frac{p_2q_1}{q_2q_1}.$$

Поэтому будем считать при доказательстве этого свойства, что рациональные числа x и y уже представлены в виде двух дробей с одинаковыми знаменателями: $x = m_1/n$ и $y = m_2/n$. Тогда, используя определение степени с рациональным показателем, а также свойство 2 арифметических корней и свойство 1 степеней с целым показателем, получаем

$$a^x \cdot a^y = a^{\frac{m_1}{n}} \cdot a^{\frac{m_2}{n}} = \sqrt[n]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n]{a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1} \cdot a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1+m_2}} = a^{\frac{m_1+m_2}{n}} =$$

$$= a^{\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}} = a^{x+y}.$$

2. Пусть $x = m_1/n_1$ и $y = m_2/n_2$. Тогда, используя определение степени с рациональным показателем и свойства 4, 5 арифметических корней, получаем

$$\left(a^x\right)^y = \left(a^{m_1/n_1}\right)^{m_2/n_2} = \left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2/n_2} = \sqrt[n_2]{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2}} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a^{m_1m_2}}} =$$

$$= \sqrt[n_1n_2]{a^{m_1m_2}} = a^{\frac{m_1m_2}{n_1n_2}} = a^{xy}.$$

3. Пусть $x = m/n$, тогда, используя определение степени с рациональным показателем, а также свойство 4 степеней с целым показателем и свойство 2 арифметических корней, получим

$$(ab)^x = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^x \cdot b^x.$$

4. Докажем вначале, что $1/a^x = a^{-x}$. Для этого достаточно показать, что произведение $a^x \cdot a^{-x}$ равно единице. В самом деле, $a^x \cdot a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1$. Но это и означает, что числа a^x и a^{-x} – взаимно обратны, т.е. $1/a^x = a^{-x}$. Теперь докажем свойство: $a^x/a^y = a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}$ (здесь использовалось доказанное выше свойство 1 степеней с рациональным показателем).

5. Воспользуемся доказанными свойствами 3 и 2 степеней с рациональным показателем:

$$(a/b)^x = \left(a \cdot b^{-1}\right)^x = a^x \cdot \left(b^{-1}\right)^x = a^x \cdot b^{-x} = a^x/b^x.$$

6. Докажем вначале два вспомогательных свойства:

1) если $a > 1$ и $x > 0$, то $a^x > 1$; 2) если $0 < a < 1$ и $x > 0$, то $a^x < 1$.

1) Пусть $x = m/n > 0$ (m, $n \in N$, $n \geq 2$) и $a > 1$. Воспользуемся дважды

свойством 8 числовых неравенств и определением степени с рациональным показателем:

$$a > 1 \Leftrightarrow a^m > 1 \Leftrightarrow a^m = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = \left(a^{m/n}\right)^n > 1 \Leftrightarrow a^{m/n} > 1 \Leftrightarrow a^x > 1.$$

2) Пусть теперь $x = m/n > 0$ ($m, n \in N$, $n \geq 2$) и $0 < a < 1$. Обозначим $b = 1/a > 1$, и тогда по только что доказанному свойству имеем $b^x > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(a^{-1}\right)^x > 1 \Leftrightarrow 1/a^x > 1 \Leftrightarrow a^x < 1$. Тогда доказательство свойства 6 вытекает непосредственно из доказанных выше свойств 1) и 2), поскольку тогда $x - y > 0$, следовательно, при $a > 1$ получаем

$$a^{x-y} > 1 \Leftrightarrow a^x/a^y > 1 \Leftrightarrow a^x > a^y.$$

Доказательство в случае $0 < a < 1$ проводится аналогично.

7. Пусть $x = m/n > 0$. Тогда $a > b \Leftrightarrow \left(a^{1/n}\right)^n > \left(b^{1/n}\right)^n \Leftrightarrow$ (по свойству 8 числовых неравенств)

$$a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \left(a^{1/n}\right)^m > \left(b^{1/n}\right)^m \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow a^x > b^x.$$

Замечание. Мы доказали более сильное утверждение, а именно: если $x > 0$, то $a > b \geq 0 \Leftrightarrow a^x > b^x$. В случае $x < 0$ учтём, что $(-x) > 0$, и применим полученный выше результат: $a^{-x} > b^{-x} \Leftrightarrow 1/a^x > 1/b^x \Leftrightarrow$ (по свойству 7б числовых неравенств) $a^x > b^x$.

Пример 1*. Решить уравнения: а)* $x^{\frac{2}{3}} = 5$; *б)* $x^{\frac{3}{2}} = 5$.

Решение. а) ОДЗ: $x \in R$. $x^{\frac{2}{3}} = 5 \Leftrightarrow x^2 = 125 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{125}$.

б) ОДЗ: $x \geq 0$. $x^{\frac{3}{2}} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^3} = 5 \Leftrightarrow x^3 = 25 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{25}$.

Пример 2*. Доказать, что если* $a + b = c$, $a > 0$, $b > 0$, *то*

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}.$$

Доказательство. Рассмотрим положительные числа a/c и b/c. По условию, $(a/c) + (b/c) = 1$, отсюда получаем оценки $0 < a/c < 1$, $0 < b/c < 1$. По свойству 6 степеней с рациональными показателями имеем:

$$(a/c)^{\frac{2}{3}} > a/c \text{ и } (b/c)^{\frac{2}{3}} > b/c.$$

Складывая почленно два последних неравенства, получаем, что $(a/c)^{\frac{2}{3}}+$ $+(b/c)^{\frac{2}{3}}>1$, а это равносильно доказываемому неравенству.

Пример 3. *Решить неравенство* $\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}<1$.

Решение. Так как на ОДЗ $0\le\sin x\le1$, $0\le\cos x\le1$, то по свойству 6 степеней с рациональными показателями имеем:

$$\sqrt[4]{\sin x}\ge\sin^2 x \text{ и } \sqrt[4]{\cos x}\ge\cos^2 x.$$

Складывая эти неравенства, получаем, что на ОДЗ $\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}\ge1$.

Таким образом, исходное неравенство не имеет решений.

Степени с иррациональными показателями (*)

Определим, наконец, понятие степени с иррациональным показателем для положительных действительных чисел.

1. Начнём с определения *положительной иррациональной* степени положительного числа. Рассмотрим действительное число $a>1$ и положительное иррациональное число x. Под *иррациональной степенью* x числа a понимается такое действительное число a^x, которое удовлетворяет неравенству

$$a^{q_1}\le a^x\le a^{q_2}$$

сразу для всех рациональных чисел q_1 и q_2 таких, что $q_1\le x\le q_2$. Без доказательства принимается, что такое число существует и притом только одно.

Пусть теперь даны число a такое, что $0<a<1$, и положительное иррациональное число x. Под *иррациональной степенью* x числа a будем понимать такое действительное число a^x, которое удовлетворяет неравенству

$$a^{q_2}\le a^x\le a^{q_1}$$

сразу для всех рациональных чисел q_1 и q_2 таких, что $q_1\le x\le q_2$. Без доказательства принимается, что такое число также существует и единственно.

Если основание степени $a=1$, то считают, что $a^x=1$ для любого действительного (в том числе иррационального) числа x.

Если $a=0$, то для любого положительного действительного x полагают $a^x=0$. При $x<0$ число 0^x не определено.

2. Введём понятие *отрицательной иррациональной* степени. Она определяется только для положительного основания. Пусть теперь даны положительное число a и положительное иррациональное число x. Под числом a^{-x} будем понимать число, обратное к a^x, т.е. $a^{-x}=1/a^x$.

Такое число существует и единственно (без доказательства).

<u>*Замечание*</u>. В силу вышеприведённых определений любая действительная степень x положительного числа a всегда положительна, т.е.

$$a^x > 0 \ (x \in R).$$

Отметим также тот факт, что степени с иррациональными (действительными) показателями удовлетворяют свойствам, аналогичным свойствам степеней с рациональными показателями.

На вступительных экзаменах задачи, при решении которых существенно используются свойства арифметических корней и степеней, встречаются достаточно часто. Поэтому важно не только знать эти свойства, но и уметь быстро и правильно оперировать ими при упрощении разного рода выражений, встречающихся в задачах.

***Пример 1**. Решить уравнение* $x^\pi = 2$.

Решение. На ОДЗ ($x \ge 0$) уравнение имеет единственный корень $x = 2^{1/\pi}$.

Пример 2 [Мехмат–1961]. *Доказать неравенство*

$$\left(a^\alpha + b^\alpha\right)^{1/\alpha} \le \left(a^\beta + b^\beta\right)^{1/\beta} \ \textit{при}\ a \ge 0,\ b \ge 0,\ \alpha > \beta > 0.$$

Доказательство. Если $a = 0$ или $b = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a > 0$ и $b > 0$. Возможны два случая.

1) Пусть $0 < a \le b$. Тогда $0 < a/b \le 1$ и так как $\alpha > \beta$, то $0 < (a/b)^\alpha \le$ $\le (a/b)^\beta$. Значит, $1 + (a/b)^\alpha \le 1 + (a/b)^\beta$, и, следовательно,

$$\left(1 + (a/b)^\alpha\right)^{1/\beta} \le \left(1 + (a/b)^\beta\right)^{1/\beta}. \qquad (1)$$

Далее, так как $1 + (a/b)^\alpha \ge 1$ и $0 < 1/\alpha < 1/\beta$, то имеем

$$\left(1 + (a/b)^\alpha\right)^{1/\alpha} \le \left(1 + (a/b)^\alpha\right)^{1/\beta}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1), (2) и свойства транзитивности следует, что

$$\left(1 + (a/b)^\alpha\right)^{1/\alpha} \le \left(1 + (a/b)^\beta\right)^{1/\beta}.$$

Отсюда, преобразуя, получаем:

$$\left(\left(a^\alpha + b^\alpha\right)/b^\alpha\right)^{1/\alpha} \le \left(\left(a^\beta + b^\beta\right)/b^\beta\right)^{1/\beta} \Leftrightarrow \left(a^\alpha + b^\alpha\right)^{1/\alpha}/b \le \left(a^\beta + b^\beta\right)^{1/\beta}/b,$$

и так как $b > 0$, то требуемое неравенство доказано.

2) В случае $0 < b \le a$ доказательство проводится аналогично.

Раздел 2

ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ. ИЗВЕСТНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

2.1. Числовые равенства и неравенства

Обратимся к *геометрической интерпретации* действительных чисел на числовой прямой. Введём понятие числовой прямой. Пусть на плоскости дана некоторая прямая (обычно расположенная горизонтально). Зафиксируем на этой прямой точку O и назовём её *началом отсчёта*. Точка O разбивает прямую на два луча. Направление вдоль прямой направо от точки O назовём *положительным направлением*, а противоположное направление – отрицательным. Пусть также задан отрезок, длина которого принята за единицу длины. В таких случаях говорят, что на прямой введён *масштаб*.

Прямую, на которой выбрано начало отсчёта, положительное направление и введён масштаб, называют *числовой прямой*.

Каждой точке числовой прямой можно поставить в соответствие действительное число по следующему правилу:

1. Началу отсчёта точке O ставится в соответствие число нуль.

2. Каждой точке N на положительном луче ставится в соответствие положительное число a (где a – длина отрезка ON, выраженная через единичный отрезок).

3. Каждой точке M на отрицательном луче ставится в соответствие отрицательное число b (где $|b|$ – длина отрезка OM, измеренная посредством единичного отрезка).

В результате получим, что при выбранном масштабе:

1) каждой точке на числовой прямой поставлено в соответствие одно (и только одно) действительное число;

2) разным точкам числовой прямой поставлены в соответствие разные числа;

3) нет ни одного действительного числа, которое не соответствовало бы какой-либо точке на числовой прямой.

В таких случаях принято говорить, что между множеством всех точек числовой прямой и множеством всех действительных чисел установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Если на прямой выбрано начало отсчёта, положительное направление и введена масштабная единица, то говорят также, что на прямой задана *система координат*. При этом сама прямая называется *координатной осью*, а точка O – *началом координат*. Действительное число, поставленное каждой точке этой прямой по указанному выше правилу во взаимно однозначное соответствие, называют *координатой* точки в заданной системе координат.

Рассмотрим теперь два произвольных действительных числа

$$a = a_0, a_1a_2...a_{n-1}a_n... \text{ и } b = b_0, b_1b_2..b_{n-1}b_n...$$

Выше для любых действительных чисел a и b была определена операция *сравнения*. Применяя её, получим по отношению к этим числам, что справедливо одно (и только одно) из следующих трёх утверждений:

1) число a равно числу b ($a = b$); 2) число a больше числа b $(a > b)$;

3) число a меньше числа b $(a < b)$.

В первом случае два равных числа будут обозначаться *одной точкой* на числовой прямой. Если $a > b$, то на числовой прямой точка, соответствующая числу a, будет лежать *правее* точки, соответствующей числу b. Наконец, если $a < b$, то наоборот, точка, соответствующая числу a, будет лежать *левее* точки, соответствующей числу b.

В данном параграфе при сравнении между собой действительных чисел будем пользоваться следующими вполне естественными утверждениями, вытекающими из определений операции сравнения действительных чисел и арифметических операций над действительными числами.

Утв. 1. Два действительных числа a и b равны тогда и только тогда, когда их разность равна нулю, т.е.

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0.$$

Два действительных числа a и b не равны тогда и только тогда, когда их разность не равна нулю, т.е.

$$a \neq b \Leftrightarrow a - b \neq 0.$$

Утв. 2. Число a больше числа b тогда и только тогда, когда разность $a - b$ положительна, т.е.

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$

Утв. 3. Число a меньше числа b тогда и только тогда, когда разность $a - b$ отрицательна, т.е.

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

В ситуации, когда число a либо меньше, либо равно числу b (допускается возможность обоих случаев), используется специальное обозначение $a \le b$. Если же число a либо больше, либо равно числу b, используется обозначение $a \ge b$. Знаки $>$ (больше), $<$ (меньше), $\ge$ (больше либо равно), $\le$ (меньше либо равно), $\ne$ (не равно) называют *знаками неравенств*. При этом знаки $>$ и $<$ относят к *строгим* знакам, а знаки $\ge$ и $\le$ – к *нестрогим* знакам.

Числовые равенства и их свойства

Обратимся к наиболее важным свойствам числовых равенств. Но вначале приведём определение числового равенства. Если два числа a и b ($a, b \in R$) соединены знаком равенства $a = b$, то говорят, что задано *числовое равенство*.

Пусть a, b, c, d – произвольные действительные числа. Примем без доказательства следующие *свойства*. Обратите внимание, что некоторые из них сформулированы в виде достаточных условий, в то время как другие имеют вид необходимых и достаточных условий.

Свойства числовых равенств

1. *Число a равно числу b тогда и только тогда, когда число b равно числу a:* $a = b \Leftrightarrow b = a$ (*коммутативность* равенств).

2. *Если число a равно числу b, а число b при этом равно числу c, то число a равно числу c:*

$a = b$, $b = c \Rightarrow a = c$ (*транзитивность* равенств).

3. *Если два верных равенства почленно сложить, то в результате также получится верное равенство:*

$a = b$, $c = d \Rightarrow a + c = b + d$ (*почленное сложение* равенств).

4. *Если два равенства почленно перемножить, то в результате также получится верное равенство:*

$a = b$, $c = d \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$ (*почленное умножение* равенств).

5. *К обеим частям равенства можно прибавлять (вычитать) одно и то же число, в результате также получится верное равенство:*

$a = b$ ($c \in R$) $\Leftrightarrow a + c = b + c$ (*прибавление числа* к равенству).

6. *Обе части равенства можно умножать (делить) на одно и то же неравное нулю число, в результате также получится верное равенство:*

$a = b$ ($c \ne 0$) $\Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$ (*умножение* равенства на *число*).

7. *Обе части равенства (при условии их неотрицательности) можно возводить в произвольную натуральную степень, в результате также получится верное равенство:*

$a = b$ ($a, b \ge 0$) $\Leftrightarrow a^n = b^n$ ($n \in N$) (*возведение равенства в натуральную степень*).

Замечание. Последнее свойство, например, вытекает из того, что поскольку $a^n - b^n = (a-b)\cdot\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, а выражение во вторых скобках не равно нулю (при неравных нулю одновременно a и b), то разность $a^n - b^n$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда обращается в нуль разность $a-b$.

Пропорции, их свойства

Пропорцией (от латинского 'proportio' – соотношение, соразмерность) называют равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ (bd \neq 0),$$

где числа a, b, c, d называются *членами пропорции*, при этом a и d называют *крайними* членами пропорции, b и c – *средними* членами пропорции. Другая форма записи пропорции $a : b = c : d$. Пропорция, в которой средние члены равны ($b = c$), называется *непрерывной*, и тогда средний член b непрерывной пропорции равен среднему геометрическому (среднему пропорциональному) крайних членов:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow b = \sqrt{ad}$$

(при условии, что b положителен).

Свойства пропорций

1. *Основное свойство пропорции:* $ad = bc$ (произведение средних членов пропорции равно произведению ее крайних членов).

2. В пропорции $a/b = c/d$ можно менять местами средние ($a/c = b/d$) или крайние члены ($d/b = c/a$), или те и другие одновременно ($d/c = b/a$).

3. Если дана пропорция $a/b = c/d$, то справедливы следующие пропорции (их называют *производными* пропорции, это следствия из данной пропорции):

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c};\ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d};\ \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d};\ \frac{b}{a \pm b} = \frac{d}{c \pm d};$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d};\ \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d};\ \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d};\ \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d};$$

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \ldots$$

Эти и множество других производных пропорций могут быть объединены в двух основных формах [28]:

$$\frac{ma+nb}{ka+lb}=\frac{mc+nd}{kc+ld}\ (1) \quad \text{и} \quad \frac{ma+nc}{ka+lc}=\frac{mb+nd}{kb+ld},\ (2)$$

где m,n,k,l – произвольные действительные числа, и знаменатели дробей не обращаются в нуль. Например, при $m=n=k=1$ и $l=0$ по формуле (1) имеем: $(a+b)/a=(c+d)/c$. При тех же значениях m,n,k,l по формуле (2) получим: $(a+c)/a=(b+d)/b$, или, переставляя средние члены пропорции, $(a+c)/(b+d)=a/b$ и так далее.

4. Если даны несколько равных между собой отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

то справедливы равенства

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

где $b_1\neq 0,\ldots,b_n\neq 0, b_1+\ldots+b_n\neq 0$.

5. Обобщение свойства 4.

Если $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}$, то $\dfrac{a_1k_1+a_2k_2+\ldots+a_nk_n}{b_1k_1+b_2k_2+\ldots+b_nk_n}=\dfrac{a_1}{b_1}$,

где $k_1,\ldots,k_n$ не все равны 0, причём $b_1\neq 0,\ldots,b_n\neq 0$, $b_1k_1+\ldots+b_nk_n\neq 0$.

6. Если $0<a_1<a_2<\ldots<a_n$ и $0<b_n<\ldots<b_2<b_1$, то верно неравенство

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что среднее арифметическое n различных положительных чисел принимает значение строго между наименьшим и наибольшим из этих чисел:

$$a_1<\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}<a_n \qquad (3)$$

и

$$b_n<\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}<b_1 \Leftrightarrow \frac{1}{b_1}<\frac{n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}<\frac{1}{b_n}. \qquad (4)$$

Перемножая неравенства (3) и (4), получаем доказываемое неравенство.

Пример [ВМиК–2005, устн.]. *Пусть* $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\pi/2$. *Доказать, что* $tg\alpha_1<\dfrac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n}<tg\alpha_n$.

Доказательство. Известно, что если $A_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, где $a_i\geq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $\min(a_1,\ldots,a_n)$ и $\max(a_1,\ldots,a_2)$ – соответственно наименьшее и наибольшее из чисел a_i, то

$$0\leq\min(a_1,\ldots,a_n)\leq A_n\leq\max(a_1,\ldots,a_n),$$

причём среднее арифметическое A_n совпадает с наименьшим (наибольшим) из этих чисел тогда и только тогда, когда $a_1=a_2=\ldots=a_n$. Так как

$$0<\sin\alpha_1<\sin\alpha_2<\ldots<\sin\alpha_n$$

и

$$0<\cos\alpha_n<\ldots<\cos\alpha_2<\cos\alpha_1,$$

то

$$\sin\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n}{n}<\sin\alpha_n,$$

$$\frac{1}{\cos\alpha_1}<\frac{n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n}<\frac{1}{\cos\alpha_n}.$$

Перемножая эти неравенства, получим окончательно, что

$$tg\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n}<tg\alpha_n.$$

Пропорциональные отрезки. «Золотое сечение»

В геометрии часто встречается понятие пропорциональных отрезков. Дадим соответствующее определение. Ненулевые отрезки a и b называют *пропорциональными* отрезкам a' и b', если их длины удовлетворяют пропорции $a/a'=b/b'$, т.е. a относится к a' так же, как b относится к b'. В этом случае действительное число k, равное отношению a/a', называют *коэффициентом пропорциональности*, и тогда условие пропорциональности двух отрезков можно записать в виде

$$\begin{cases}a=k\cdot a'\\ b=k\cdot b'.\end{cases}$$

Порой возникает необходимость записать условие пропорциональности трёх пар отрезков. Приведём определение для этого случая. Ненулевые отрезки a, b, c называют *пропорциональными* ненулевым отрезкам a', b', c', если справедлива *двойная пропорция*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

И в этом случае действительное число k, равное каждому из этих отношений, называют *коэффициентом пропорциональности*, и условие пропорциональности трёх пар отрезков можно записать тогда в виде системы

$$\begin{cases} a = k \cdot a' \\ b = k \cdot b' \\ c = k \cdot c'. \end{cases}$$

Пусть дан отрезок длины c. Разделим (рассечём) его на два отрезка длины a и b, т.е. $c = a + b$. Пусть при этом выполнено условие

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

т.е. меньший отрезок относится к большему так, как больший – к их сумме. Эту пропорцию можно записать в виде

$$\frac{c-b}{b} = \frac{b}{c}, \text{ откуда следует } b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot c.$$

В Древней Греции такое деление отрезка на две части получило название *деления в среднем и крайнем отношении*. Гораздо позже великий Леонардо да Винчи назвал такое деление «*золотым сечением*», а Лука Пачоли – «*божественной пропорцией*». Такие названия связаны со многими замечательными свойствами сечения. Не последнюю роль в этом играли эстетические соображения: например, прямоугольник, отношение длин сторон которого равно числу

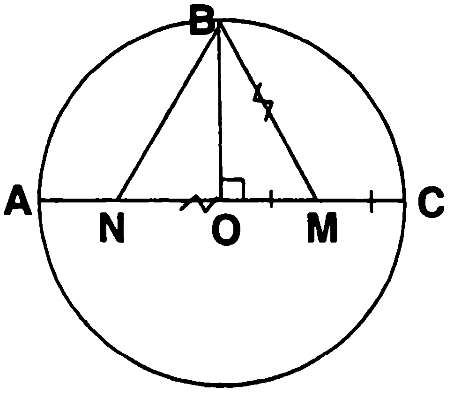
$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}6180339\ldots,$$

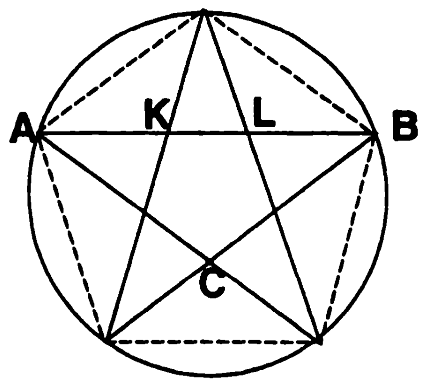
хорош для восприятия, выглядит грамонично для человеческого глаза. Он называется *прямоугольником золотого сечения*. Видимо, по этой причине «золотое сечение» использовалось издавна в архитектуре. Интересно, что если от такого прямоугольника отрезать квадрат максимальной площади, то останется вновь прямоугольник золотого сечения. Примером «золотого сечения» может служить стандартный, формата $A4$, лист писчей бумаги: сложенный пополам, вчетверо и т.д., он сохраняет первоначальную пропорцию.

Золотое сечение часто встречается в различных задачах. Рассмотрим одну из них, устанавливающую связь золотого сечения с пятиконечной звездой.

Пример. Вписать в окружность правильную пятиугольную звезду.

Решение. Простой способ построения правильного пятиугольника предложил *Клавдий Птолемей* (ок.100–ок.178). Он писал: «Имеем полукруг ABC, описанный около центра O на диаметре AOC.





Проведём $OB \perp AC$ в точке O. Разделим отрезок OC пополам в точке M, проведём прямую MB и отложим отрезок $MN = MB$. Соединим N с B отрезком NB. Тогда NB – искомая сторона правильного пятиугольника, вписанного в данную окружность». Доказательство этого утверждения приводится в книге [8]. Более того, каждый из отрезков AB, AL, AK, KL на рисунке справа ровно в $2/\left(\sqrt{5}-1\right)$ раз больше последующего! По-видимому, в связи с этим замечательным свойством пифагорейцы выбрали пятиконечную звезду в качестве своего талисмана: она считалась символом здоровья.

Числовые неравенства и их свойства

Обратим внимание на то обстоятельство, что понятие неравенства, вообще говоря, можно ввести только на *упорядоченном* числовом множестве, например на множестве действительных чисел.

Если два действительных числа a и b соединены одним из знаков неравенств: $a < b$, или $a > b$, или $a \le b$, или $a \ge b$, или $a \ne b$, то говорят, что задано *числовое неравенство*. При этом неравенства $a > b$ и $a < b$ называются *строгими*, а неравенства $a \ge b$ и $a \le b$ – *нестрогими*. Числовое неравенство может быть *верным* либо *неверным*.

Ниже при доказательстве свойств числовых неравенств наряду с законами коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и утверждениями 1, 2, 3 мы будем использовать (без доказательства) также три следующих утверждения, вытекающие из определения арифметических операций суммы и произведения двух действительных чисел, понятия противоположных (по знаку) чисел, а также операции сравнения действительных чисел.

Утв. 4. Сумма двух положительных чисел положительна.

Утв. 5. Произведение двух положительных чисел положительно.

Утв. 6. Если $a>0$, то $(-a)<0$; если $a<0$, то $(-a)>0$.

Свойства числовых неравенств

Пусть a, b, c, d – произвольные действительные числа. Приведённые ниже свойства сформулированы для строгих и нестрогих неравенств, но доказываются только для случая строгих неравенств.

1. *Одно из двух чисел больше второго тогда и только тогда, когда второе число меньше первого:*

$$a>b \Leftrightarrow b<a \quad (a \geq b \Leftrightarrow b \leq a).$$

2. *Если одно число больше второго, а второе число больше третьего, то первое число больше третьего (транзитивность неравенств):*

$$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c,$$
$$a \geq b,\ b>c \Rightarrow a>c,$$
$$a \geq b,\ b \geq c \Rightarrow a \geq c$$

(последнее неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow a=b=c$).

3. *К обеим частям неравенства можно прибавлять (вычитать) одно и то же число, при этом знак неравенства сохраняется:*

$$a>b\ (c \in R) \Leftrightarrow a+c>b+c;\ a \geq b\ (c \in R) \Leftrightarrow a+c \geq b+c.$$

4. *а) Обе части неравенства можно умножать (делить) на одно и то же положительное число, при этом знак неравенства сохраняется:*

$$\text{если } c>0, \text{ то } a>b \Leftrightarrow a \cdot c>b \cdot c,\ a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c.$$

б) Обе части неравенства можно умножать (делить) на одно и то же отрицательное число, при этом знак неравенства меняется на противоположный:

$$\text{если } c<0, \text{ то } a>b \Leftrightarrow a \cdot c<b \cdot c,\ a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c.$$

5. *Неравенства одного знака можно почленно складывать:*

$$a>b,\ c>d \Rightarrow a+c>b+d;$$
$$a \geq b,\ c>d \Rightarrow a+c>b+d;$$
$$a \geq b,\ c \geq d \Rightarrow a+c \geq b+d$$

(последнее неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда одновременно $a=b$ и $c=d$).

6. *Неравенства одного знака с положительными (неотрицательными) членами можно почленно перемножать*:

$$a>b\ (b \geq 0) \text{ и } c>d\ (d \geq 0) \Rightarrow a \cdot c>b \cdot d, \quad (1)$$
$$a \geq b\ (b \geq 0) \text{ и } c \geq d\ (d \geq 0) \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot d,$$

(последнее неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда одновременно $a=b$ и $c=d$).

Если перемножаются нестрогое неравенство со строгим, то в результате может получиться как строгое неравенство:

$$a \geq b\ (b>0) \text{ и } c>d\ (d \geq 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d,$$

так и нестрогое неравенство:

$$a \geq 0 \text{ и } c>d\ (d>0) \Rightarrow a \cdot c \geq 0,$$

(последнее неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow a=0$).

7. *а) Число, обратное к положительному (отрицательному) числу, положительно (отрицательно):*

$$b>0 \Leftrightarrow 1/b>0; \ b<0 \Leftrightarrow 1/b<0.$$

б) Числа, обратные к двум числам одного знака, связаны неравенством противоположного знака:

$$\text{если } a>0,\ b>0 \text{ (или } a<0,\ b<0\text{), то}$$

$$a>b \Leftrightarrow 1/a<1/b,\ a \geq b \Leftrightarrow 1/a \leq 1/b.$$

Следствие. $\dfrac{a}{b}>0 \Leftrightarrow ab>0$; $\dfrac{a}{b}<0 \Leftrightarrow ab<0$. Но: $\dfrac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$

8. *а) Если обе части неравенства положительны, то при возведении его в любую натуральную степень n (т.е. умножении самого на себя n раз) знак неравенства сохраняется:*

$$a>b\ (b>0) \Rightarrow a^n>b^n; \quad a \geq b\ (b>0) \Rightarrow a^n \geq b^n.$$

Сформулированное свойство можно усилить:

б) если $a>0$, $b>0$, $n \in N$, то

$$a>b \Leftrightarrow a^n>b^n; \ a \geq b>0 \Leftrightarrow a^n \geq b^n.$$

в) если n – нечётно, то при любых $a,b \in R$ верно утверждение:

$$a^n>b^n \Leftrightarrow a>b.$$

Следствие. Для любого положительного числа a и любого натурального числа n неравенство $a>1$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $a^n>1$.

Доказательство.

1. Докажем, что $a>b \Leftrightarrow b<a$. Согласно утверждению 2, $a>b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a-b>0$. По утверждению 6, $a-b>0 \Leftrightarrow -(a-b)<0$. В соответствии с законом дистрибутивности раскроем скобки: $-a+b<0$, а в соответствии с

законом коммутативности поменяем слагаемые местами: $b-a<0$. Согласно утверждению 3, последнее неравенство равносильно тому, что $b<a$.

2. Докажем, например, что если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$. Согласно утверждению 2, имеем: $\begin{cases} a>b \\ b>c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b>0 \\ b-c>0. \end{cases}$ Поскольку $a-c=(a-b)+(b-c)$, и, согласно утверждению 4, $(a-b)+(b-c)>0$, то $a-c>0$. Наконец, по утверждению 2, $a-c>0 \Leftrightarrow a>c$.

3. Докажем, что при любом c равносильны неравенства $a>b$ и $a+c>b+c$. Согласно утверждению 2, $a>b \Leftrightarrow a-b>0$. Поскольку, используя закон ассоциативности сложения, $a-b=(a+c)-(b+c)$, то $(a+c)-(b+c)>0$. Согласно утверждению 2, $(a+c)-(b+c)>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a+c>b+c$.

4. а) Докажем, что если $c>0$, то неравенства $a>b$ и $a\cdot c>b\cdot c$ равносильны.

Необходимость. Пусть $a>b$, и требуется доказать, что $a\cdot c>b\cdot c$. Во-первых, согласно утверждению 2, $a>b \Leftrightarrow a-b>0$. Во-вторых, согласно утверждению 5, $\begin{cases} a-b>0 \\ c>0 \end{cases} \Rightarrow (a-b)\cdot c>0$. Согласно распределительному закону, раскроем в последнем неравенстве скобки: $(a-b)\cdot c>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\cdot c-b\cdot c>0$. Наконец, согласно утверждению 2, $a\cdot c-b\cdot c>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\cdot c>b\cdot c$.

Достаточность. Пусть $a\cdot c>b\cdot c$ $(c>0)$, и требуется доказать, что $a>b$. Докажем методом «от противного». Так как a не может быть равно b, иначе по свойству 6 числовых равенств имели бы $a\cdot c=b\cdot c$, то предположим, что $a<b$. Тогда, согласно доказанному выше свойству 1 числовых неравенств, это равносильно тому, что $b>a$. Согласно утверждению 2, $b>a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b-a>0$. Далее, поскольку $b-a>0$, $c>0$, то, согласно утверждению 5, $(b-a)\cdot c>0$. Раскрывая скобки в соответствии с распределительным законом, получаем, что тогда $b\cdot c-a\cdot c>0$. Согласно утверждению 2, последнее неравенство равносильно $b\cdot c>$ $>a\cdot c$, что противоречит условию. Следовательно, $a>b$.

б) Докажем, что если $c<0$, то неравенство $a>b$ равносильно неравенству $a\cdot c<b\cdot c$. Так как $c<0$, то, согласно утверждению 6, $(-c)>0$. Воспользуемся только что доказанным свойством 4.а: $a > b$, $(-c) > 0 \Leftrightarrow a \cdot (-c) > b \cdot (-c) \Leftrightarrow$ (по закону дистрибутивности) $-a \cdot c > -b \cdot c \Leftrightarrow$ (по свойству 1 числовых неравенств) $-b \cdot c < -a \cdot c \Leftrightarrow$(по утверждению 3) $-b \cdot c - (-a \cdot c) < 0 \Leftrightarrow$ (согласно распределительному закону) $-b \cdot c + a \cdot c < 0 \Leftrightarrow$ (по переместительному закону) $a \cdot c - b \cdot c < 0 \Leftrightarrow$ (по утверждению 3) $a \cdot c < b \cdot c$.

5. Пусть $a > b$, $c > d$. Докажем, что тогда $a + c > b + d$. Так как $a > b$ и $c > d$, то (по утверждению 2) это равносильно тому, что $a - b > 0$, $c - d > 0 \Rightarrow$ (по утверждению 4) $(a - b) + (c - d) > 0 \Leftrightarrow$ (согласно сочетательному и распределительному законам) $(a + c) - (b + d) > 0 \Leftrightarrow$ (по утверждению 2) $a + c > b + d$.

6. Рассмотрим краткое доказательство свойства (1) (более подробное доказательство этого, а также последующих свойств со всеми необходимыми обоснованиями и ссылками проведите самостоятельно).

Пусть $a > b$, $c > d$ $(b, d \geq 0)$. Требуется доказать, что $a \cdot c > b \cdot d$. Рассмотрим разность $a \cdot c - b \cdot d = (a \cdot c - b \cdot d) + (b \cdot c - b \cdot c) = (a \cdot c - b \cdot c) + (b \cdot c - b \cdot d) = c \cdot (a - b) + b \cdot (c - d) > 0$ (так как в каждом из последних слагаемых оба сомножителя положительны), т.е. $a \cdot c > b \cdot d$.

7. а) *Необходимость* докажем «от противного». Пусть $b > 0$, но $1/b < 0 \Rightarrow -1/b > 0$. Перемножим последнее неравенство с неравенством $b > 0$: $(-1/b) \cdot b > 0$, т.е. $-1 > 0$. Из противоречия $\Rightarrow 1/b > 0$.

Достаточность. Пусть теперь $1/b > 0$. Умножим это неравенство на верное неравенство $b^2 > 0$ и получим $(1/b) \cdot b^2 > 0$, т.е. $b > 0$.

б) Пусть $a > b > 0$. Так как $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab} > 0$ (числитель и знаменатель дроби положительны), то отсюда и вытекает доказываемое свойство.

8. а) По свойству 6 умножим неравенство $a > b$ само на себя и получим $a^2 > b^2$. Полученное неравенство ещё раз умножим на $a > b \Rightarrow a^3 > b^3$ и т.д. Таким образом, для любого конечного n за n шагов получим $a^n > b^n$.

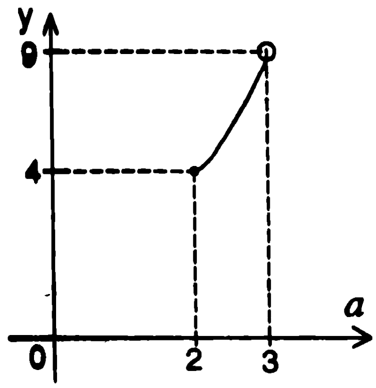
б) Воспользуемся формулой сокращённого умножения

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Так как выражение во вторых скобках положительно, то знак разности $a^n - b^n$ совпадает со знаком $a - b$. в) Докажите свойство самостоятельно.

Примеры задач, в которых используются указанные выше свойства числовых равенств и неравенств, можно встретить практически в любом разделе современной математики. Чаще всего подобные свойства используются при сравнении между собой чисел, в задачах на преобразования алгебраических и прочих выражений, на доказательство тождеств и неравенств, а также при получении разнообразных оценок для числовых выражений и значений функций.

Пример 1. Пусть $2 \le a < 3$, $-2 < b \le 3$, $-3 \le c < -2$, $-3 \le d < 2$. *Оценить, какие значения могут принимать* a^2, b^2, c^2, d^2.



Решение. Пусть известно, что $2 \le a < 3$, оценим возможные значения величины a^2. Воспользуемся графическим подходом. Рассмотрим функцию $y = a^2$ и найдём область её изменения на указанном выше полуинтервале.

Как следует из графика, функция принимает все значения от 4 до 9 (не включая 9). Аналогично оцениваются b^2, c^2, d^2. *Ответ*: $4 \le a^2 < 9$, $0 \le b^2 \le 9$, $4 < c^2 \le 9$, $0 \le d^2 \le 9$.

Пример 2. Известно, что $-3 < a \le 2$ *и* $5 < b < 6$. *Оценить значения:*

а) $a+b$; *б)* $a-b$; *в)* ab; *г)* a/b.

Решение. а)
$$+\begin{array}{c} -3 < a \le 2 \\ \underline{5 < b < 6} \\ 2 < a+b < 8; \end{array}$$

б)
$$+\begin{array}{c} -3 < a \le 2 \\ \underline{-6 < -b < -5} \\ -9 < a-b < -3; \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{c} -3 < a < 0 \\ \times\ 0 < -a < 3 \\ \underline{5 < b < 6} \\ 0 < -ab < 18 \Rightarrow -18 < ab < 0. \end{array}$$

или
$$\times\begin{array}{c} 0 \le a \le 2 \\ \underline{5 < b < 6} \\ 0 \le ab < 12. \end{array}$$

Объединяя полученные результаты, получим: $-18 < ab < 12$.

г)
$$\begin{array}{c} -3 < a < 0 \\ \times\ 0 < -a < 3 \\ \underline{1/6 < 1/b < 1/5} \\ 0 < -a/b < 3/5 \Rightarrow -3/5 < a/b < 0. \end{array}$$

или
$$\times\begin{array}{c} 0 \le a \le 2 \\ \underline{1/6 < 1/b < 1/5} \\ 0 \le a/b < 2/5. \end{array}$$

Объединяя полученные результаты, получим: $-3/5 < a/b < 2/5$.

Ответ: $2 < a+b < 8$, $-9 < a-b < -3$, $-18 < ab < 12$, $-3/5 < a/b < 2/5$.

Пример 3 [МИЭТ]. *Найти наибольшее и наименьшее значения выражения* $A=\dfrac{4}{x-2}-y^2+6y$, *если* $-1{,}2\le x\le 1$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le y\le 5$.

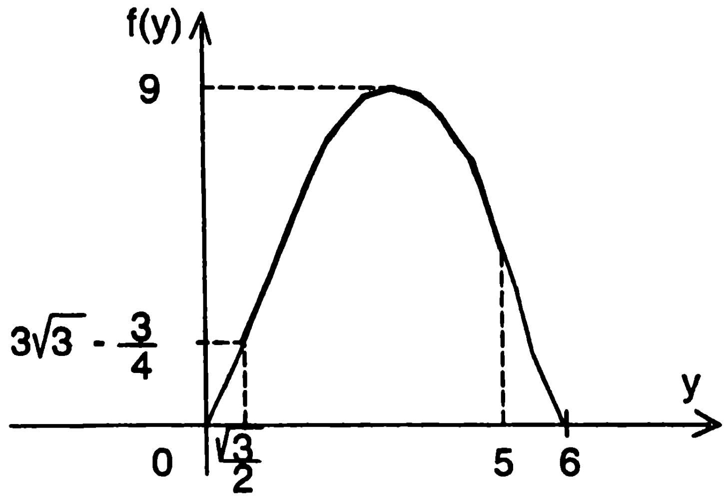
Решение. Оценим вначале, какие значения может принимать дробь $4/(x-2)$. Поскольку $-1{,}2\le x\le 1$, то $-3{,}2\le x-2\le -1$, а, значит,

$$1\le 2-x\le 3{,}2=\frac{16}{5}\Rightarrow$$

$$\frac{5}{16}\le\frac{1}{2-x}\le 1\Rightarrow$$

$$-1\le\frac{1}{x-2}\le-\frac{5}{16}\Rightarrow$$

$$-4\le\frac{4}{x-2}\le-\frac{5}{4}.$$



Теперь оценим выражение $-y^2+6y=-y(y-6)$. Если представить график квадратичной функции $f(y)=-y(y-6)$ на отрезке $\sqrt{3}/2\le y\le 5$, то имеем вершину параболы при $y=3$, при этом $f(3)=9$. Наименьшее значение функции на указанном отрезке достигается при $y=\sqrt{3}/2$ и равно $3\sqrt{3}-(3/4)$. Таким образом, $3\sqrt{3}-(3/4)\le -y^2+6y\le 9$. Складывая полученные оценки для выражений $4/(x-2)$ и $-y^2+6y$, приходим к ответу:

$$3\sqrt{3}-\tfrac{19}{4}\le A\le\tfrac{31}{4}.$$

Пример 4 [ИСАА–2003]. *Числа* x, y *изменяются в пределах:* $3\le x\le 4$, $1\le y\le 2$. *В каких пределах изменяется выражение*

$$A=4^{x-2y-1}-4y+4x-4\ ?$$

Решение. Поскольку $2\le 2y\le 4$, т.е. $-4\le -2y\le -2$ и $2\le\ \le x-1\le 3$, то, складывая последние два неравенства, получаем оценку:

$$-2\le x-2y-1\le 1.$$

В силу монотонного возрастания показательной функции с основанием 4 имеем

$$4^{-2}\le 4^{x-2y-1}\le 4. \qquad (1)$$

Аналогично находим, что

$$0\le 4(x-y-1)\le 8. \qquad (2)$$

Оба выражения 4^{x-2y-1} и $4(x-y-1)$ достигают своих наименьшего и наибольшего значений одновременно, при одних и тех же значениях x и y. Их наименьшие значения достигаются при $x=3$, $y=2$, а наибольшие соответственно при $x=4$, $y=1$. Это вытекает из того, что оба выражения монотонно возрастают по x и независимо от этого монотонно убывают по y. Складывая почленно неравенства (1) и (2), получаем:

$$1/16 \le 4^{x-2y-1} + 4(x-y-1) \le 12.$$

Ответ: $\min A = 1/16$, $\max A = 12$.

Пример 5. *Какие значения может принимать функция*

$$y = \frac{1}{1+2\sin x}?$$

Решение. Так как $-1 \le \sin x \le 1$, то $-1 \le 1+2\sin x \le 3$. Обозначим $a = 1+2\sin x$. Таким образом, задачу можно сформулировать в виде: «Оценить, какие значения может принимать величина $1/a$, если известно, что $-1 \le a \le 3$». Поскольку $a \ne 0$, рассмотрим отдельно два промежутка: $-1 \le a < 0$ и $0 < a \le 3$. В первом случае имеем: $-\infty < 1/a \le -1$, а во втором: $1/3 \le 1/a < +\infty$. Объединяя, получаем ответ.

Ответ: $E(y) = (-\infty,-1] \cup [1/3,+\infty)$.

Пример 6 [ВМиК–2007, устн.]. *Доказать неравенство*

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}} \ge 100.$$

Доказательство. Очевидно, что при любом $n = 1,2,\ldots,10000$ справедливы неравенства $1/\sqrt{n} \ge 1/100$. Складывая эти неравенства, получим:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}} \ge 10000\cdot\frac{1}{100} = 100.$$

Неравенство также может быть доказано методом математической индукции.

2.2. Формулы сокращённого умножения

Основные и некоторые дополнительные формулы сокращённого умножения

Теорема 1. Для любых действительных чисел a и b справедливы тождества:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{(квадрат суммы, разности);}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad \text{(куб суммы, разности);}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b) \quad \text{(разность квадратов);}$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot\left(a^2 \mp ab + b^2\right) \quad \text{(сумма, разность кубов).}$$

В последнем тождестве выражение $a^2 \mp ab + b^2$ всегда неотрицательно и называется *неполным квадратом* разности (суммы).

Эти тождества называют основными *формулами сокращённого умножения*. Их доказательство проводится непосредственной проверкой. Приведём дополнительно ещё несколько формул общего вида.

Теорема 2. Для любых действительных чисел a, b и для любых натуральных n справедливы тождества:

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\cdot\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right),$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)\cdot\left(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}\right).$$

Каждая из трёх формул доказывается раскрытием скобок в правой части и упрощением её путём приведения подобных членов.

Теорема 3 (квадрат суммы нескольких слагаемых). Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо тождество:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \\ + \underbrace{2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n}_{\text{всевозможные попарные произведения}}.$$

Данное тождество доказывается в разделе, посвящённом методу математической индукции.

Теорема 4 (куб суммы трёх слагаемых). Для любых действительных чисел a, b, c справедливо тождество:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c).$$

Тождество доказывается непосредственным раскрытием скобок в правой части с последующим упрощением.

Понятие n-факториала. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля (*)

Произведение всех натуральных чисел, начиная с единицы и заканчивая n, называется *n-факториалом* и обозначается $n!$, т.е.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

По определению полагают $0! = 1$, $1! = 1$. Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Задачи на факториалы достаточно редко, но всё же встречаются на вступительных экзаменах.

Пример 1 [Ф-т наук о материалах–2000]. *Сколькими нулями оканчивается число 2000!?*

Рассмотрим решение этой достаточно известной задачи. Предположим, что мы разложили данное большое число $2000!$ на простые множители (в силу основной теоремы арифметики это можно сделать, причём единственным образом):

$$2000! = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdot \ldots \cdot p^{k_p},$$

где показатели степеней $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_p$ – некоторые неизвестные нам натуральные числа. Нуль будут давать только произведения пар простых множителей 2 и 5. В этом разложении k_1 двоек и k_3 пятёрок, причём каждое второе число в натуральном ряду чисел кратно двум и только каждое пятое кратно пяти. Следовательно, $k_3 < k_1$. Поэтому число нулей будет равно k_3. Найдём это число. Среди чисел $1, 2, 3, \ldots, 1999, 2000$ каждое пятое делится на 5. Таких чисел $\left[\frac{2000}{5}\right]$ штук (квадратные скобки обозначают целую часть). Далее, каждое 25-е число делится ещё на пять, и таких чисел $\left[\frac{2000}{25}\right]$ штук. Затем каждое 125-е число делится ещё на пять, и таких пятёрок будет $\left[\frac{2000}{125}\right]$ штук. Продолжая этот конечный процесс (начиная с определённого момента целая часть будет обращаться в нуль), получим в результате

$$k_3 = \left[\frac{2000}{5}\right] + \left[\frac{2000}{25}\right] + \left[\frac{2000}{125}\right] + \left[\frac{2000}{625}\right] + \underbrace{\left[\frac{2000}{3125}\right]}_{=0} =$$

$$= 400 + 80 + 16 + 3 = 499.$$

Ответ: 499 нулями.

Пример 2 [Матем. олимпиада Моск. обл., 9 класс, 2001/02 уч. год].

Найти значение выражения

$$1!\cdot 3-2!\cdot 4+3!\cdot 5-4!\cdot 6+\ldots-2000!\cdot 2002+2001!$$

Решение. Заметим, что каждое слагаемое в приведённой сумме, кроме последнего, имеет вид $n!\cdot(n+2)$, где n изменяется от значения 1 (у первого члена суммы) до 2000 (у предпоследнего слагаемого). Поскольку $n!\cdot(n+2)$ можно представить в виде $n!(n+1+1)=(n+1)!+n!$, то, заменяя каждое из слагаемых (кроме последнего) на соответствующую сумму, получим:

$$1!\cdot 3-2!\cdot 4+3!\cdot 5-4!\cdot 6+\ldots-2000!\cdot 2002+2001!=$$
$$=(2!+1!)-(3!+2!)+(4!+3!)-(5!+4!)+\ldots(2000!+1999!)-$$
$$-(2001!+2000!)+2001!=\cancel{2!}+1!-\cancel{3!}-\cancel{2!}+\cancel{4!}+\cancel{3!}-\cancel{5!}-\cancel{4!}+\ldots+$$
$$+\cancel{2000!}+\cancel{1999!}-\cancel{2001!}-\cancel{2000!}+\cancel{2001!}=1.$$ *Ответ*: 1.

Пример 3 [ВМиК–2002]. ***Вычислить сумму***

$$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}\quad(n\in N).$$

Решение. Воспользуемся тождеством

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

для каждого из слагаемых $(k=1,2,\ldots,n)$. Тогда имеем

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Пример 4. Решить в целых числах уравнение

$$1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2.$$

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x<5$ решениями уравнения будут пары чисел $(1;\pm1)$, $(3;\pm3)$. Докажем теперь, что при $x\geq 5$ решений нет. Для этого заметим, что $1!+2!+3!+4!=33$ оканчивается цифрой 3, а $5!,6!,7!,\ldots$ – все оканчиваются нулём. Таким образом, при $x\geq 5$ сумма $1!+2!+3!+\ldots+x!$ оканчивается цифрой 3, а потому не может равняться квадрату целого числа y (никакой квадрат целого числа не оканчивается на 3).

Наряду с понятием обычного, или одинарного, факториала существует понятие *двойного факториала*. Приведём для любознательных читателей соответствующее определение. Произведение всех натуральных чисел, начиная с единицы и заканчивая n, имеющих одинаковую с n чётность, называется *двойным n-факториалом* и обозначается $n!!$

В частности, если $n=2k$ $(k\in N)$, то $(2k)!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)$, а если $n=2k+1$ $(k\in N_0)$, то $(2k+1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)$. По определению полагают $0!!=1$. Например, $1!!=1$, $2!!=2$, $8!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8=384$, $7!!=$ $=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7=105$. Справедливо тождество $n!=n!!\cdot(n-1)!!$.

Пример 5 [ВМиК–2001, устн.]. ***В какой степени входит число 2 в разложение на произведение степеней простых чисел следующего выражения***:

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n\,?$$

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n=\frac{(2n)!}{n!}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\times$$

$$\times\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}{n!}=(2n-1)!!\cdot\frac{2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)}{n!}=(2n-1)!!\cdot 2^n.$$

Так как первый из двух сомножителей является нечётным числом, то двойка входит в каноническое разложение в степени, равной n.

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий количество комбинаций, которые можно составить из заданного конечного множества $M_n=\{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$ попарно различных элементов произвольной природы. Основным правилом комбинаторики является принимаемое без доказательства *правило умножения*: если объект A может быть выбран из заданного множества M_n k способами и при каждом выборе объекта A другой объект B может быть выбран m способами, то объект, состоящий из объединения A и B, может быть выбран $k\cdot m$ способами.

Пример 6 [ВМиК–2004, устн.]. ***Сколько различных целых делителей имеет число*** 210^{37} ***?***

Решение. Поскольку $210^{37}=2^{37}\cdot 3^{37}\cdot 5^{37}\cdot 7^{37}$, то, следовательно, делителями этого числа являются числа вида

$$\pm 2^n\cdot 3^m\cdot 5^k\cdot 7^l,\ \text{где } 0\le n,m,k,l\le 37.$$

Таким образом, искомое количество делителей равно

$$2\cdot(\textit{число различных наборов } (n,m,k,l))=2\cdot 38^4.$$

Рассмотрим вопрос из области *комбинаторики*: сколькими способами можно выбрать m предметов из n различных предметов? Количество таких способов принято обозначать C_n^m и называть *числом сочетаний* из n по m. Число сочетаний из n по m можно вычислить по следующей формуле, в написании которой используется понятие факториала:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Например, $C_n^n = C_n^0 = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}, \ldots,$

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}.$$

Кстати, число $n!$ в комбинаторике также имеет свой смысл. Количество различных способов, какими можно упорядочить n данных предметов, называется *числом перестановок* из n предметов, обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

К разряду формул сокращённого умножения принято относить и *бином Ньютона*. Пусть a и b – произвольные действительные числа, n – любое натуральное число. *Биномом Ньютона* называется следующая формула для вычисления $(a+b)^n$ (доказывается в разделе 4):

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot a^{n-m} \cdot b^m = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n =$$

$$= a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + n \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n.$$

Здесь числа C_n^m называются *биномиальными коэффициентами* [1].

Формула бинома Ньютона была известна математикам задолго до Ньютона. Заслуга И.Ньютона в том, что он сумел получить гораздо более общую формулу – для степени $(a+b)^n$, где n – любое действительное число.

Коэффициенты C_n^m могут быть последовательно записаны в так называемый *треугольник Паскаля* (в котором каждое число внутри треугольника равно сумме двух чисел, стоящих над ним):

n	$(a+b)^n$	$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$
0	$(a+b)^0$	1
1	$(a+b)^1$	1 1
2	$(a+b)^2$	1 2 1
3	$(a+b)^3$	1 3 3 1
4	$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
5	$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
6	$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
...	...	...

***Паскаль** Блез* (1623–1662) – французский математик, физик, философ.

Эти коэффициенты бывают нужны, например, если при решении какой-либо задачи надо быстро раскрыть, чему равно $(a+b)^n$ при $n>3$. Например, используя указанное выше свойство треугольника Паскаля, легко вычислить

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$
$$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.$$

Свойства биномиальных коэффициентов

1. *Правило симметрии*: равноотстоящие от концов биномиального разложения коэффициенты равны между собой, т.е. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2. Число членов разложения равно $n+1$.

3. Сумма показателей степеней у чисел a и b в каждом члене разложения равна показателю степени бинома n.

4. Сумма коэффициентов всех членов разложения равна 2^n.

5. *Правило Паскаля*: $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$.

Формулы сокращённого умножения весьма часто используются при решении всевозможных математических задач, позволяют преобразовать уравнение (неравенство) к более простому для дальнейшего решения виду.

***Пример** 7* [Олимпиада «Ломоносов–2007», устн.]. *Доказать, что в представлении в виде десятичной дроби числа $\left(\sqrt{26}+5\right)^{99}$ первые 98 цифр справа после запятой равны нулю.*

Решение. Заметим, что число $\left(\sqrt{26}+5\right)^{99} - \left(\sqrt{26}-5\right)^{99} = n$ является натуральным (для этого даже не обязательно знать бином Ньютона, достаточно осознать, что коэффициенты при раскрытии обеих скобок при одинаковых нечётных степенях числа $\sqrt{26}$ будут одинаковыми и при взятии разности исчезнут). Но тогда

$$\left(\sqrt{26}+5\right)^{99}=n+\left(\sqrt{26}-5\right)^{99}<(\text{так как } \sqrt{26}<5{,}1)<n+(0{,}1)^{99},$$

откуда и слудует доказываемый результат.

В заключение данного пункта рассмотрим пример текстовой задачи, при решении которой понадобится обычная практическая логика и немного правило умножения (из комбинаторики).

Пример 8 [Высшая школа бизнеса–2004]. *Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 3?*

Решение. Занумеруем четыре позиции табло слева направо. В 1-й позиции цифра «3» не появляется никогда. Во 2-й позиции цифра «3» присутствует в течение трёх полных часов, начинающихся с 03:00, 13:00, 23:00. Остаётся 21 час, в течение каждого из которых цифра «3» по одному разу занимает 3-ю позицию табло в течение 10 минут, а в течение остальных 50 минут каждого часа 5 раз ровно (03,13,23,~~33~~,43,53) по 1 минуте занимает последнюю, 4-ю позицию табло.

В результате общее время присутствия цифры «3» на табло равно

$$3\textit{час}+21\times 10\textit{мин}+21\times 5\times 1\textit{мин}=8\textit{час}\ 15\textit{мин}.$$

2.3. Некоторые известные алгебраические неравенства

Неравенство о сумме двух взаимно обратных чисел

Обратным к числу a $(a\neq 0)$ называется, по определению, число $1/a$.

Теорема (неравенство о сумме двух взаимно обратных чисел).

1) Если $a>0$, то справедливо неравенство $a+(1/a)\geq 2$, причём неравенство обращается в равенство только при $a=1$.

2) Если $a<0$, то справедливо неравенство $a+(1/a)\leq -2$, причём неравенство обращается в равенство только при $a=-1$.

Доказательство. 1) Пусть $a>0$. Умножив неравенство $a+1/a\geq 2$ на a (с сохранением знака), получим равносильное неравенство $a^2-2a+1\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$, которое, очевидно, верно. Причём последнее неравенство, а, значит, и доказываемое обращаются в равенство тогда и только тогда, когда $a=1$.

2) Пусть $a<0$. Тогда неравенство $a+1/a\leq -2$ равносильно после умножения на a (с учётом знака) очевидному неравенству $a^2+2a+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$\leftrightarrow (a+1)^2 \geq 0$, причём последнее неравенство, а, следовательно, и доказываемое, обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a = -1$.

<u>Следствие 1</u>. *Для любого* $a \neq 0$ *справедливо неравенство* $\left|a + 1/a\right| \geq 2$, *причём равенство достигается только при* $a = \pm 1$.

<u>Следствие 2</u>. *Если* a *и* b *– два числа одного знака, т.е.* $ab > 0$, *то справедливо неравенство* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

Пример [ВМиК–1996, устн.]. *Доказать, что для положительных чисел* a, b *и* c *справедливо неравенство (Минковского)*

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Доказательство. Раскроем скобки и сгруппируем вместе образующиеся при этом пары взаимно обратных чисел:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 6.$$

Так как каждое из трёх выражений в скобках, очевидно, не меньше 2, то неравенство доказано.

Наиболее известные средние величины и соотношения между ними [*]

Пусть даны n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Их *средним арифметическим* называется число

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

средним геометрическим – число

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Средним гармоническим n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число

$$H_n = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Название «среднее гармоническое» появилось в связи с исследованиями пифагорейцев в теории музыки. Они установили, что звуки, издаваемые струнами длины l и $2l$, для нашего восприятия практически сливаются. Интервал, образованный этими звуками, назван *октавой*. А струна длины $4l/3$ издает звук, образующий вместе с двумя исходными гармонично звучащий аккорд. При этом обратные величины длин струн, т.е. $\frac{1}{l}, \frac{1}{4l/3}, \frac{1}{2l}$, образуют арифметическую прогрессию, так как $\frac{1}{4l/3} = \frac{(1/l)+(1/2l)}{2}$.

По аналогии, если для чисел a, b, c выполнено равенство $\frac{1}{c} = \frac{(1/a)+(1/b)}{2}$, то число c стали называть *средним гармоническим чисел* a *и* b. По схожей причине числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

также называется *гармоническим*, поскольку каждый его член является средним гармоническим двух соседних членов, т.е. обратная величина любого члена равна среднему арифметическому обратных величин членов, соседних с ним:

$$n = \frac{(n-1)+(n+1)}{2}.$$

Наконец, *средним квадратичным* неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n$ называется число

$$S_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

В общем случае для произвольного действительного $\alpha \neq 0$ вводится *среднее степенное порядка* α для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$V_n(\alpha) = \left(\frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + \ldots + a_n^{\alpha}}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

При $\alpha = 0$ среднее степенное определяется как $\lim\limits_{\alpha \to 0} V_n(\alpha)$. Этот предел существует и равен среднему геометрическому чисел G_n. Введённые выше средние величины являются частными случаями среднего степенного. Так, при $\alpha = -1$ среднее степенное превращается в среднее гармоническое H_n, при $\alpha = 1$ из среднего степенного получаем среднее арифметическое A_n, а при $\alpha = 2$ –

среднее квадратичное S_n. Более того, среднее степенное является возрастающей функцией параметра α, т.е. большему значению α всегда соответствует большее значение $V_n(\alpha)$.

На самом деле разнообразие средних величин гораздо шире. Существуют средние величины смешанного или комбинированного вида. Приведём принцип построения величин подобного рода. Пусть a и b – неотрицательные действительные числа. Рассмотрим две числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $n \in N$, определяемые рекуррентными формулами $x_1 = a, y_1 = b$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}\,,\quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

В курсе математического анализа в высших учебных заведениях доказывается, что при $n \to +\infty$ значения x_n и y_n стремятся к общему предельному значению (в школьном курсе математики, как правило, не дается строгое определение предела числовой последовательности, поэтому будем руководствоваться интуитивным понятием предельного значения). Заметим лишь, что это число существует, единственно и называется *арифметико-геометрическим средним* чисел a и b.

Обозначим $\min(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ – наименьшее, а $\max(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ – наибольшее из действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда справедливо следующее соотношение между средними величинами:

$$0 \le \min(a_1;a_2;\ldots;a_n) \le H_n \le G_n \le A_n \le S_n \le \max(a_1;a_2;\ldots;a_n),$$

причём все неравенства одновременно обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

В частности, для двух положительных чисел a и b имеем:

$$\min(a;b) \le \frac{2}{1/a + 1/b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a;b).$$

Докажем эти неравенства для случая двух чисел, сводя их эквивалентными преобразованиями к очевидным алгебраическим неравенствам.

1) $\dfrac{2}{1/a+1/b} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow \dfrac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \le ab \Leftrightarrow 4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$, причём обращаются все эти неравенства в равенства $\Leftrightarrow$ $a = b$.

2) $\sqrt{ab} \le (a+b)/2 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b \Leftrightarrow 0 \le \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b$.

3) $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$, причём равенство достигается $\Leftrightarrow$ $a=b$.

Неравенство Коши (*)

Коши Огюстен Луи (1789–1857) – французский математик, работавший главным образом в области математического анализа (дифференциальные уравнения, теория рядов) и теории функций комплексного переменного. Член Парижской Академии наук. Написал за свою жизнь около 1500 научных работ.

Вначале докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Если $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, $x_i > 0, i = 1,\ldots,n$, то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge n \quad (n \ge 2).$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

1) Убедимся в справедливости данного утверждения при $n=2$:

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + 1/x_1 \ge 2 \text{ – верно.}$$

Причём равенство достигается $\Leftrightarrow$ $x_1 = x_2 = 1$.

2) Предположим, что $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = 1$ $(x_i > 0)$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \ge k$, и рассмотрим любые положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ такие, что $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$. Если все эти числа равны единице, то доказываемое утверждение очевидно. Пусть это не так. Тогда среди этих чисел найдётся число, меньшее 1, и число, большее 1. Допустим, что $x_k > 1$, $x_{k+1} < 1$ (можно было наоборот). Имеем равенство:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}(x_k \cdot x_{k+1}) = 1.$$

К этому произведению k чисел применимо предположение индукции, т.е.

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k \cdot x_{k+1} \ge k,$$

откуда получаем $x_1 + \ldots + x_{k-1} \ge k - x_k \cdot x_{k+1}$.

Но тогда $(x_1 + \ldots + x_{k-1}) + x_k + x_{k+1} \ge (k - x_k \cdot x_{k+1}) + x_k + x_{k+1} = k + 1 +$ $+ (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) > k + 1$, так как $x_k - 1 > 0$ и $1 - x_{k+1} > 0$. При этом равенство достигается $\Leftrightarrow$ все $x_i = 1$.

3) В силу произвольности k, лемма доказана.

А теперь докажем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим в общем случае (для n чисел).

Теорема (неравенство Коши). Для любых $x_i \ge 0$, $i = 1,\dots,n$, *справедливо неравенство*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Доказательство. Обозначим $C = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$, $y_i = x_i / C$, и применим лемму для чисел y_i, $i = 1,\dots,n$. Так как $y_1 \cdot \dots \cdot y_n = x_1 \cdot \dots \cdot x_n / C^n = 1$, то, по доказанному выше, $y_1 + y_2 + \dots + y_n \ge n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{C} \ge n \Leftrightarrow \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \ge C = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

причём неравенство обращается в равенство, только когда все $y_i = 1$, т.е.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Пример 1. *Доказать неравенства Коши:*

1) для четырёх чисел $\dfrac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$ $(a,b,c,d \ge 0)$;

2) для трёх чисел $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ $(a,b,c \ge 0)$.

Доказательство. Рассмотрим доказательство указанных неравенств без использования общего неравенства Коши. Докажем вначале неравенство для четырёх чисел, а уже потом с его помощью для трёх чисел.

1) $$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \le \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \le \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

2) Запишем неравенство Коши для четырёх чисел a, b, c и $(a+b+c)/3$:

$$\sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}} \le \frac{a+b+c+((a+b+c)/3)}{4}.$$

Упростив правую часть, возведём неравенство в четвёртую степень. Сокращая на $(a+b+c)/3$ и извлекая кубический корень, получим требуемое.

Пример 2 [ВМиК–2002, устн.]. *Сравнить два числа* $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ *и* $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$, *где* a *и* b *– неотрицательные числа,* $a \ne b$.

Решение. Преобразуем числа к виду

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=(a+b)+2\sqrt{ab}\,,\quad 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}=2\sqrt{(a+b)\left(2\sqrt{ab}\right)}.$$

После деления обоих чисел на 2, приходим к неравенству между средними арифметическим и геометрическим (для чисел $a+b$ и $2\sqrt{ab}$):

$$\frac{(a+b)+2\sqrt{ab}}{2}>\sqrt{(a+b)\left(2\sqrt{ab}\right)}.$$ *Ответ*: первое число больше.

Пример 3 [Мехмат–1961]. *Доказать, что верно неравенство* $n!<\left((n+1)/2\right)^n$, *где* n *– любое целое число, большее единицы.*

Решение. Запишем неравенство Коши для чисел $1, 2, 3,\ldots, n$:

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}>\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

(знак в неравенстве строгий, так как все числа различны). Упрощая левую часть по формуле $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ суммы первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ с первым членом $a_1=1$, $a_n=n$, и заменяя справа подкоренное выражение на $n!$, получим $(n+1)/2>\sqrt[n]{n!}$, откуда, возводя обе части неравенства в степень n, получаем искомое неравенство доказанным.

Пример 4. *Найти наименьшее значение функции* $y=5x^2+\frac{1}{4x^2}$.

Решение. При $x\neq 0$ воспользуемся для решения задачи следствием неравенства Коши: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, положив $a=5x^2$, $b=1/\left(4x^2\right)$:

$$y=5x^2+\tfrac{1}{4x^2}\geq 2\sqrt{5x^2\cdot\tfrac{1}{4x^2}}=\sqrt{5}\,,$$

причём наименьшее значение функции, равное $\sqrt{5}$, достигается тогда и только тогда, когда $5x^2=1/\left(4x^2\right)$, т.е. при $x=\pm 1/\sqrt[4]{20}$.

Неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим (*)

<u>Теорема</u>. Для любых положительных действительных чисел $x_1, x_2,\ldots, x_n$ ($n\geq 2$) *справедливо неравенство* $\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$, *причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить неравенство Коши к числам $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n$:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}},$$

откуда и получаем требуемое неравенство.

Неравенства Бернулли (*)

Бернулли Якоб (1654–1705) – швейцарский учёный, профессор Базельского университета (Швейцария). Известен своими работами по дифференциальной геометрии, вариационному исчислению и математической физике.

Теорема 1 (неравенство Бернулли с натуральным показателем). При любом действительном x ($x > -1$) и при любом натуральном n справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Доказательство. Воспользуемся для доказательства методом полной математической индукции (по параметру n).

1) При $n=1$ имеем: $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ – верно.

2) Предположим, что неравенство выполняется при некотором произвольном $n=k$, т.е. $(1+x)^k \geq 1+kx$, и докажем, что тогда оно выполняется и при $n=k+1$, т.е. $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. В самом деле,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)\cdot(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

3) В силу произвольности k отсюда следует, что данное неравенство выполнено сразу при всех натуральных n. Заметим, что неравенство Бернулли обращается в равенство только при $x=0$ или $n=1$.

Сформулируем без доказательства неравенство Бернулли в случае, когда показатель степени в неравенстве не является натуральным.

Теорема 2 (неравенство Бернулли с произвольным показателем). Пусть $x, r \in R, x > -1, r \neq 0, r \neq 1$. Тогда справедливы неравенства

$$(1+x)^r \leq 1+xr, \text{ если } 0 < r < 1,$$

$$(1+x)^r \geq 1+xr, \text{ если } r \notin [0,1],$$

причём неравенства обращаются в равенства только при $x=0$.

Пример [ВМиК–2000, устн.]. *Найти наибольшее значение функции*

$$f(x)=\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}\,.$$

Решение. Дважды воспользуемся на области определения функции неравенством Бернулли:

$$\left(1-\frac{x}{3}\right)^{1/2}\le 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}=1-\frac{x}{6} \text{ и } (1+x)^{\frac{1}{6}}\le 1+\frac{1}{6}\cdot x\,.$$

Складывая эти неравенства, получаем неравенство

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{3}\right)^{1/2}+(1+x)^{\frac{1}{6}}\le 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2,$$

причём равенство достигается при $x=0$ (в каждом из двух неравенств). Поэтому $f(0)=2$ – наибольшее значение функции. *Ответ*: $f_{\max}=2$.

Рассмотрим, наконец, обобщённое неравенство Бернулли для нескольких действительных чисел.

<u>*Теорема 3*</u> *(неравенство Бернулли для n чисел). Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — числа одного знака, $x_i>-1$, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда*

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)\ge 1+x_1+x_2+\ldots+x_n\,.$$

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n=1$ неравенство, очевидно, выполняется.

2) Предположим, что неравенство верно при некотором $n=k$, т.е.

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_k)\ge 1+x_1+x_2+\ldots+x_k\,,$$

и докажем, что тогда оно выполняется и при $n=k+1$, т.е.

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_{k+1})\ge 1+x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}\,.$$

Действительно,

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_{k+1})\ge(1+x_1+x_2+\ldots+x_k)(1+x_{k+1})=$$
$$=1+x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}+x_{k+1}(x_1+x_2+\ldots+x_k)\ge$$
$$\ge 1+x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}, \text{ так как } x_{k+1}(x_1+x_2+\ldots+x_k)\ge 0\,.$$

3) В силу произвольности k отсюда заключаем, что данное неравенство выполняется при любом натуральном n. Неравенство обращается в равенство, только если $n=1$ или $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

В частности, при $x_1=x_2=\ldots=x_n$ получаем $(1+x)^n\ge 1+nx$.

Неравенство Коши–Буняковского (*)

Буняковский Виктор Яковлевич (1804–1889) – русский математик, академик Петербургской АН. Математическое образование получил в Париже. Преподавал в Петербургском университете. Работал в области теории чисел и теории вероятностей. В математическом анализе занимался теорией неравенств.

Теорема (неравенство Коши–Буняковского). Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Доказательство. Воспользуемся для доказательства очевидным алгебраическим неравенством:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 \ge 0,\ \forall t \in R.$$

Раскрыв квадрат суммы, преобразуем это неравенство к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 t^2 + 2a_i b_i t + b_i^2\right) \ge 0,$$

и разобьём левую часть на сумму трёх слагаемых

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\cdot t + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge 0.$$

Обозначив $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = 2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, получим, что квадратное неравенство $At^2 + Bt + C \ge 0$ должно выполняться сразу при всех действительных значениях переменной t. Исключая тривиальный случай, когда все числа a_i одновременно обращаются в нуль, имеем $A > 0$ и, следовательно, неравенство верно при всех t тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трёхчлена $D = B^2 - 4AC$ неположителен, т.е.

$$D = 4\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\right] \le 0,$$

откуда и вытекает необходимое неравенство.

Замечание. Неравенство Коши–Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_i t + b_i = 0\ \ \forall i = 1,2,..,n$. Если $a_i \ne 0\ (i = 1,2,\ldots,n)$, то условие обращения неравенства в равенство можно записать в виде условия пропорциональности чисел a_i и b_i:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\ldots=\frac{b_n}{a_n}.$$

Некоторые авторы применяют эту форму записи условия и в общем случае, когда отдельные (или даже все сразу) из чисел a_i могут обращаться в нуль. При этом дополнительно оговаривается, что если некоторое a_k равно нулю, то и соответствующее b_k также должно обращаться в нуль.

Пример. Пусть $a+b+c=1$. *Доказать справедливость неравенства* $a^2+b^2+c^2\ge 1/3$ *для произвольных действительных чисел* a,b,c.

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2\le\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)$$

при $n=3$, полагая $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$ и $b_1=b_2=b_3=1$:

$$1=(a\cdot1+b\cdot1+c\cdot1)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(1^2+1^2+1^2\right)=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

После деления обеих частей последнего неравенства на 3 получаем исходное неравенство доказанным.

Неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным (*)

Теорема. Для любых неотрицательных действительных чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ($n\ge2$) *справедливо неравенство*

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\le\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}},$$

которое обращается в равенство, только если $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Доказательство. Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем

$$(x_1\cdot1+x_2\cdot1+\ldots+x_n\cdot1)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\cdot\left(1^2+1^2+\ldots+1^2\right),$$

откуда после деления на n^2 и извлечения квадратного корня из обеих частей неравенства получаем искомое неравенство. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Пример [ВМиК–2000, устн.]. *Доказать, что для неотрицательных чисел* a,b,c *имеет место неравенство*

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Доказательство. Для начала возведём доказываемое неравенство в квадрат

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

затем умножим обе его части на 9:

$$(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Раскроем теперь квадрат в левой части и перенесём после этого все слагаемые вправо. Выделяя затем три полных квадрата, приходим к очевидному неравенству (эквивалентному доказываемому)

$$\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)\ge 0.$$

Таким образом, неравенство доказано.

Задачи на доказательство различных алгебраических неравенств (*)

Существуют конкурсные задачи, в которых требуется доказать справедливость того или иного алгебраического неравенства, в записи которого присутствуют несколько буквенных обозначений, при всех значениях входящих в него букв (доказательство тождеств) или, например, только для положительных значений. Иногда требуется доказать неравенство при выполнении некоторого дополнительного условия. Рассмотрим примеры.

Пример 1. *Доказать, что при всех действительных* a,b,c *имеет место неравенство*

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac,$$

и выяснить, когда оно обращается в равенство.

Доказательство. Выполним следующие равносильные преобразования:

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2(ab+bc+ac) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\ge 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется при всех действительных значениях a,b,c, при этом обращается в равенство тогда и только тогда, когда все три квадрата равны нулю, т.е. $a=b=c$.

Пример 2 [ВМиК–2003, устн.]. *Три положительных числа* a, b, c *таковы, что* $ab + ac + bc \ge 12$. *Доказать, что в этом случае имеет место неравенств*

$$a+b+c \ge 6.$$

Доказательство. Воспользуемся доказанным выше неравенством:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \ge$$
$$\ge ab+bc+ac+2(ab+bc+ac) = 3(ab+bc+ac) \ge 36,$$

откуда и получим, что $a+b+c \ge 6$.

Пример 3 [ВМиК–1998, устн.]. *Пусть* $a+b \ge 1$. *Доказать справедливость неравенства* $a^4 + b^4 \ge 1/8$.

Доказательство. Так как $a+b \ge 1 \Rightarrow (a+b)^2 \ge 1$, т.е.

$$a^2 + 2ab + b^2 \ge 1. \qquad (1)$$

Сложив это неравенство с известным неравенством

$$a^2 + b^2 \ge 2ab, \qquad (2)$$

получим $a^2 + b^2 \ge 1/2$. Аналогично, так как $a^2 + b^2 \ge 1/2$, то $(a^2+b^2)^2 \ge 1/4$, т.е.

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \ge 1/4. \qquad (3)$$

Сложив неравенство (3) с неравенством

$$a^4 + b^4 \ge 2a^2b^2, \qquad (4)$$

получим искомое неравенство.

Приведём теперь пример задачи, в которой для повышения эффективности решения целесообразно использовать замену переменных.

Пример 4 [ВМиК–2004, устн.]. *Доказать, что если* $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, *то*

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{b+a} \ge 3.$$

Доказательство. Пусть $x = (b+c)/2$, $y = (a+c)/2$, $z = (a+b)/2$. Тогда, выражая a, b, c через x, y, z, получим систему

$$\begin{cases} a = y + z - x \\ b = x + z - y \\ c = x + y - z, \end{cases}$$

и доказываемое неравенство принимает вид

$$\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\geq 3.$$

Поделив почленно и сгруппировав слагаемые, получим

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-3\geq 3,$$

что, очевидно, верно (в силу неравенства о сумме взаимно обратных положительных чисел). Неравенство доказано.

Пример 5 [ВМиК–1996, устн.]. *Пусть* $a+b=2$. *Доказать, что*

$$a^3+b^3\geq 2.$$

Доказательство. Так как $a+b=2$, то найдётся такое число ε, что $a=1+\varepsilon, b=1-\varepsilon$. Тогда $a^3+b^3=(1+\varepsilon)^3+(1-\varepsilon)^3=2+6\varepsilon^2\geq 2$, что и требовалось доказать.

Пример 6 [Олимпиада «Ломоносов–2008», ВМиК, устн.]. *Пусть* $a>c>0$, $b>c$. *Доказать, что* $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$.

Доказательство. Положим $a=(1+\alpha)c$, $b=(1+\beta)c$, где $\alpha,\beta>0$. Надо доказать, что

$$\sqrt{\alpha c^2}+\sqrt{\beta c^2}\leq\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)c^2}\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\leq\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

Имеем: $\left(\sqrt{\alpha\beta}-1\right)^2\geq 0\Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha\beta}\leq 1+\alpha\beta\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta\leq 1+\alpha+\beta+\alpha\beta\Leftrightarrow\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2\leq(1+\alpha)(1+\beta).$$

Последнее неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\sqrt{\alpha\beta}=1$, т.е. $\alpha\beta=1\Leftrightarrow a=(1+\alpha)c$, $b=(1+1/\alpha)c$. Исключая из этой системы α, находим условие обращения неравенства в равенство: $c=ab/(a+b)$.

В следующем примере показывается, что иногда неравенство можно доказать с помощью *геометрического подхода.*

Пример 7 [ВМиК–1996, устн.]. *Доказать, что для любых положительных чисел* a,b,c *справедливо неравенство*

$$\sqrt{a^2+b^2+ab}-\sqrt{a^2+c^2}\leq\sqrt{b^2+c^2-\sqrt{3}\cdot bc}.$$

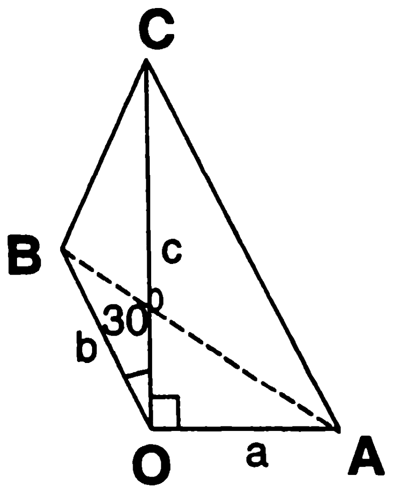
Доказательство. Известно, что для треугольника со сторонами a,b,c и углом величины γ между сторонами a,b справедлива теорема косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Запишем выражение под первым из радикалов в виде:

$$a^2 + b^2 - 2 \cdot (-1/2) \cdot ab.$$

Тогда геометрический смысл этого радикала состоит в том, что он численно равен длине третьей стороны AB в треугольнике OAB со сторонами $OA = a$, $OB = b$, $\angle AOB = 120^\circ$. Аналогично можно дать геометрическую интерпретацию двум другим радикалам в исходном неравенстве:



$$AC = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - \sqrt{3} \cdot bc}.$$

В результате неравенство принимает вид:

$$AB \le AC + BC,$$

что, очевидно, верно, так как это известное из геометрии неравенство треугольника (справедливо при произвольном расположении точек A, B, C на плоскости).

Задачи, при решении которых для более быстрого (по сравнению со стандартными способами) получения тех или иных оценок используются алгебраические неравенства, часто относят к нестандартным. Задачи такого рода периодически встречаются на олимпиадах и при выполнении тестов по математике. Формирование навыков использования при оценивании исследуемых величин подходящих неравенств, безусловно, повышает общую культуру школьника.

Раздел 3
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

«*Алгебра* – часть математики, изучающая (пользуясь буквенными обозначениями) общие свойства числовых систем и общие методы решения задач при помощи уравнений».
Большой энциклопедический словарь

3.1. Уравнения, тождества, неравенства: определения и классификация

Уравнением называется равенство двух математических выражений с одной или несколькими переменными. В математике рассматриваются два вида равенств – тождества и уравнения. *Тождество* – это равенство, которое выполняется при всех допустимых значениях входящих в него букв. Для записи тождества наряду со знаком обычного равенства «$=$» также используется знак тождественного равенства «$\equiv$». В отличие от тождества *уравнение* – это равенство, которое выполняется лишь при некоторых значениях входящих в него букв или даже не выполняется никогда. Используемые при записи уравнения буквы бывают двух видов; те буквы, значения которых требуется отыскать, называют *неизвестными* (например, $x, y, z, \dots$) или *переменными*. Другие называют *коэффициентами* или *параметрами*. В зависимости от числа неизвестных уравнение называют *уравнением с одной, двумя* и т.д. *неизвестными*. Два математических выражения, связанные одним из знаков «$<$» (меньше), «$>$» (больше), «$\le$» (меньше либо равно), «$\ge$» (больше либо равно), «$\ne$» (не равно), образуют *неравенство*.

В общем виде уравнение с одним неизвестным имеет представление

$$f(x)=0,$$

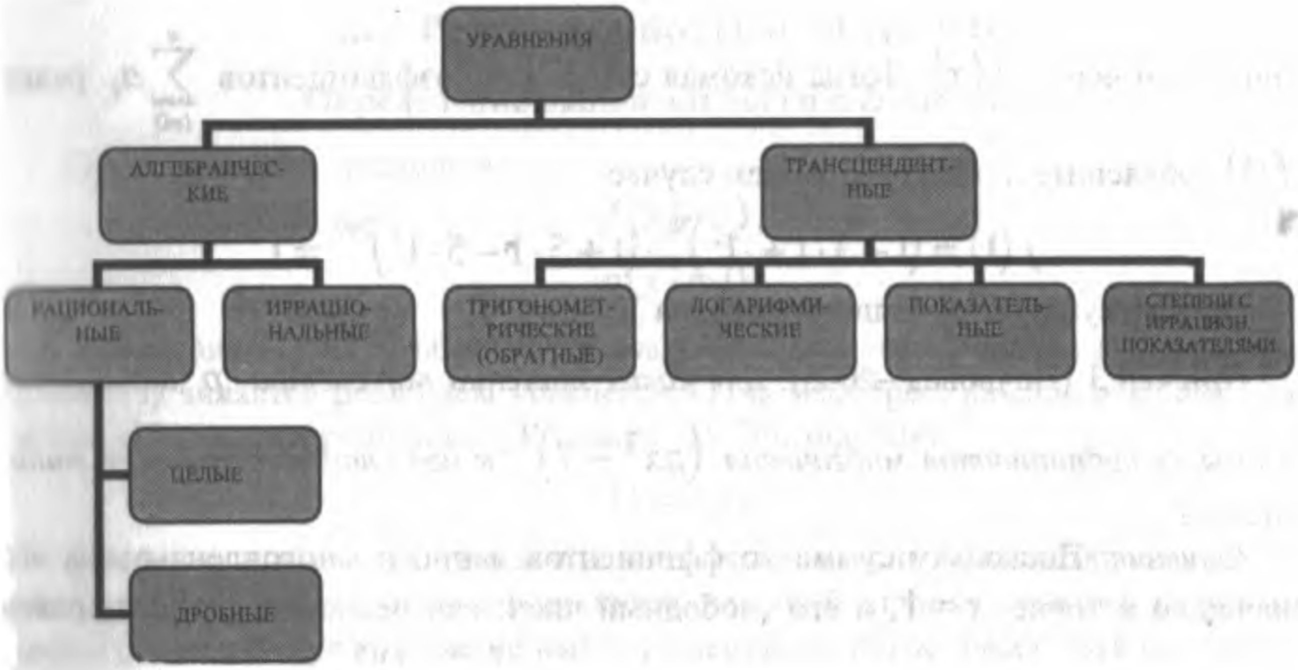
где $f(x)$ – некоторая функция неизвестной x. *Областью (множеством) допустимых значений* (ОДЗ) неизвестной x в этом случае называют область определения функции $f(x)$. Значения неизвестной x из области допустимых значений уравнения, обращающие уравнение в верное тождество, называют *решениями (корнями)* уравнения. Уравнение считается *решённым*, если найдены все его решения или показано, что оно не имеет решений. Аналогично всякое значение неизвестной x из области допустимых значений неравенства, обращающее неравенство в верное числовое неравенство, называется *решением неравенства*. Все решения неравенства образуют *множество его решений*.

Если $y = f(x)$ – одна из основных элементарных функций, b – некоторое действительное число, то уравнение $f(x) = b$ принято называть *простейшим уравнением*. Например, при $\alpha \in R$ уравнение $x^\alpha = b$ называется простейшим степенным уравнением, в частности при $n \in N$ уравнение $x^n = b$ носит название простейшего целого алгебраического уравнения, а $x^{-n} = b$ – простейшего дробного алгебраического уравнения; при $0 < a \neq 1$ уравнения $a^x = b$ и $\log_a x = b$ называются соответственно простейшими показательным и логарифмическим уравнениями; уравнения $\sin x = b$, $\cos x = b$, $tgx = b$, $ctgx = b$ – простейшими тригонометрическими уравнениями; уравнения $\arcsin x = b$, $\arccos x = b$, $arctgx = b$, $arcctgx = b$ – простейшими уравнениями с обратными тригонометрическими функциями и т.д.

Пример 1 [Химфак–2003]. *Найти все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a}{x-a} > 0$ содержит точку $x = 1$.*

Решение. Число $x = 1$ является решением неравенства тогда и только тогда, когда $a/(1-a) > 0 \Leftrightarrow a(1-a) > 0$. *Ответ*: $a \in (0,1)$.

Рассмотрим простейшую *классификацию* уравнений (неравенств), изучаемых в школьном курсе. В *алгебраических* уравнениях над неизвестными совершаются, и притом в конечном числе, лишь операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня. Если над неизвестными совершаются и другие операции, например возведение в иррациональную степень, взятие логарифма или синуса, или же перечисленные выше математические операции совершаются бесконечное число раз, то уравнение называется *трансцендентным*. В *рациональных* уравнениях отсутствует операция извлечения корня из выражения, содержащего неизвестные. В *целых* уравнениях отсутствует операция деления на выражение, содержащее неизвестные, а в *дробных* – такое деление есть.



Например: $\dfrac{x^3-y}{3x+2}=5y$ — дробно-рациональное уравнение с двумя неизвестными; $\sqrt{4x^2-1}<-x$ — иррациональное неравенство с одним неизвестным; $\sqrt{2}x^3-3x^2+2=0$ — целое рациональное уравнение 3-й степени с одним неизвестным; $\dfrac{2z}{z^2+5}+\dfrac{z-1}{3z+2}\geq 2$ — дробно-рациональное неравенство с одним неизвестным; $x^{\pi}=5$ — трансцендентное уравнение с одним неизвестным.

Любое целое рациональное алгебраическое уравнение с одним неизвестным x степени n после преобразований можно привести к *стандартному виду*:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0,$$

где $n\in N$, $a_n\neq 0$, $a_i\in R$ $(i=0,1,\ldots,n)$ – коэффициенты уравнения, a_n – старший коэффициент, a_0 – свободный член.

Пример 2 [ВМиК–2004, устн.]. ***Найти сумму коэффициентов многочлена, который получится после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении:***

$$\left(1-3x+3x^2\right)^{34}\cdot\left(1+5x-5x^2\right)^{249}.$$

Решение. Конечно, никто не ожидает от вас на экзамене, что вы начнёте раскрывать скобки и приводить данный многочлен к стандартному виду. У этой задачи существует оригинальное и очень простое решение. Обозначим данный многочлен через $f(x)$. Тогда искомая сумма его коэффициентов $\sum_{i=0}^{n} a_i$ равна $f(1)$ (объясните, почему). В нашем случае

$$f(1)=\left(1-3\cdot1+\cdot1^2\right)^{34}\cdot\left(1+5\cdot1-5\cdot1^2\right)^{249}=1.$$

Ответ: сумма коэффициентов равна 1.

Пример 3 [Почвовед.–2005]. *Для каких значений параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $\left(px^2-7\right)^{18}$ к его свободному члену минимально?*

Решение. Поскольку сумма коэффициентов данного многочлена равна его значению в точке $x=1$, а его свободный член, как несложно увидеть, равен 7^{18}, то рассматриваемое отношение имеет вид $\dfrac{(p-7)^{18}}{7^{18}}$. Это выражение неотрицательно при всех действительных значениях p и достигает наименьшего значения, равного нулю, только при $p=7$.

Пример 4. *Привести пример алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.*

Решение. Рассмотрим равенство $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ как алгебраическое уравнение первой степени относительно неизвестной x. Это уравнение не удовлетворяет условию задачи, так как его свободный член (число $\sqrt{3}-\sqrt{2}$) иррационален. С целью избавления от иррациональности возведём данное равенство в квадрат, перейдя к следствию

$$x^2=5-2\sqrt{6}.$$

Уединим радикал $2\sqrt{6}=5-x^2$ и ещё раз возведём в квадрат

$$24=25-10x^2+x^4,\ \text{или}\ x^4-10x^2+1=0.$$

Благодаря операции возведения в квадрат удалось добиться того, чтобы все коэффициенты уравнения стали целочисленными. Полученное уравнение 4-й степени удовлетворяет условию задачи.

<u>*Замечание*</u>. Эта задача имеет не единственный ответ. Любое алгебраическое следствие уравнения $x^4-10x^2+1=0$, например уравнение

$$(x-1)\left(x^4-10x^2+1\right)=0,$$

также можно было бы предъявить в качестве ответа.

3.2. Равносильность и следствие

Определение равносильности и следствия

Пусть даны два уравнения:

$$f(x)=0, \tag{1}$$

$$g(x)=0. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) называются *равносильными*, если каждое решение уравнения (1) является решением уравнения (2) и, наоборот, каждое решение уравнения (2) является решением уравнения (1). Обозначение:

$$(1) \Leftrightarrow (2).$$

Иными словами, два уравнения *равносильны*, если множества их решений совпадают. Два уравнения, не имеющие решений, принято считать равносильными. Если одно уравнение не имеет решений, а другое имеет хотя бы одно решение, то в этом случае иногда считают, что второе уравнение является следствием первого (существуют и другие точки зрения на последний из указанных фактов [25]). Замена уравнения равносильным ему уравнением называется *равносильным переходом*.

Существует понятие *равносильности на множестве*. При этом уравнения могут не быть равносильными, но быть равносильными на некотором множестве. Например, уравнения $x^2=1$ и $x=1$ равносильны на множестве положительных чисел, а уравнения $(x-2)(x-\sqrt{3})=0$ и $x=2$ равносильны на множестве рациональных чисел.

Если все решения уравнения (1) являются решениями уравнения (2), то последнее уравнение называют *следствием* уравнения (1) и обозначают:

$$(1) \Rightarrow (2).$$

Следствие помимо корней исходного уравнения содержит обычно и другие (*посторонние*) решения. Поэтому если в процессе решения был осуществлен переход к следствию, то в конце решения задачи необходимо сделать *проверку* найденных значений неизвестной x для исключения посторонних корней. Используя понятие следствия, можно сформулировать определение *равносильности* уравнений (1) и (2) следующим образом: уравнения (1) и (2) равносильны, если

$$\begin{cases}(1) \Rightarrow (2)\\ (2) \Rightarrow (1).\end{cases}$$

Заметим, что приведённые выше определения равносильности и следствия можно распространить на случай неравенств, а также систем и совокупностей.

Примеры равносильных преобразований

1. *Возведение уравнения (неравенства) в нечётную натуральную степень (извлечение алгебраического корня нечётной степени) приводит к равносильному уравнению (неравенству)*:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n+1}=(g(x))^{2n+1};$$
$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{g(x)},$$
$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n+1}<(g(x))^{2n+1};$$
$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{f(x)}<\sqrt[2n+1]{g(x)},\ n\in N.$$

Пример 1 [Почвовед.–2005]. *Решить уравнение*

$$(6x-15)^7=(x-1)^{14}.$$

Решение. Извлекая корень седьмой степени, приходим к равносильному уравнению $6x-15=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$. *Ответ*: $x\in\{4\}$.

2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на некотором множестве, то на этом множестве равносильны уравнения (неравенства)*:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n}=(g(x))^{2n};$$
$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)},$$
$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n}<(g(x))^{2n};$$
$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow \sqrt[2n]{f(x)}<\sqrt[2n]{g(x)},n\in N.$$

3. *Если функция $h(x)$ определена на ОДЗ исходного уравнения (неравенства), то её можно прибавлять (вычитать) к обеим частям уравнения (неравенства)*:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x);$$
$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)<g(x)+h(x).$$

В частности, к обеим частям уравнения (неравенства) можно прибавлять (вычитать) одно и то же действительное число a:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+a=g(x)+a;$$
$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)+a>g(x)+a,\ a\in R.$$

Если же функция $h(x)$ определена не при всех $x\in$ОДЗ исходного уравнения (т.е. ОДЗ функции $h(x)$ уже), то добавление функции $h(x)$ к обеим частям уравнения может привести к потере решений, например:

$$x=1 \Leftarrow x+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$

4. *Если функция $h(x)$ определена и не обращается в нуль на ОДЗ исходного уравнения, то обе части уравнения можно одновременно умножать (делить) на эту функцию*:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x).$$

В частности, обе части уравнения можно умножать (делить) на одно и то же отличное от нуля действительное число a:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow a\cdot f(x)=a\cdot g(x),\ a\in R,\ a\neq 0.$$

Например, если в уравнении вида $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ функции, стоящие в знаменателях дробей, не обращаются в нуль ($f_2(x)\neq 0$ и $g_2(x)\neq 0$) на ОДЗ уравнения, то такое уранение равносильно уравнению, полученному в результате перемножения крайних и средних членов этой пропорции:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x)\cdot g_2(x)=f_2(x)\cdot g_1(x)$$

(для доказательства достаточно умножить обе части данного уравнения на произведение знаменателей $f_2(x)\cdot g_2(x)\neq 0$). В общем случае, если снять ограничения $f_2(x)\neq 0$ *и* $g_2(x)\neq 0$, это будет переход к *следствию*.

Если же функция $h(x)$ имеет свои корни на ОДЗ исходного уравнения, то умножение на $h(x)$ приводит к *следствию*, причём посторонними корнями будут как раз корни уравнения $h(x)=0$:

$$x=1 \Rightarrow (x-2)\cdot x=x-2.$$

Если $h(x)$ определена не на всей ОДЗ исходного уравнения (её ОДЗ *уже*), то при умножении на $h(x)$ может произойти *потеря корней* или даже уравнения могут оказаться *несравнимыми*:

$$x=1 \Leftarrow x\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1} \text{ (потеря единственного корня);}$$

$$\sin x=\frac{1}{2} \not\Leftrightarrow \sqrt{x}\cdot\sin x=\frac{\sqrt{x}}{2} \text{ (уравнения не сравнимы).}$$

5. *Если функция $h(x)$ определена и положительна на ОДЗ неравенства, то обе его части можно одновременно умножать (делить) на эту функцию, при этом знак неравенства сохраняется*:

$$f(x)< g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)< g(x)\cdot h(x),\ h(x)>0\ \ \forall\ x\in \text{ОДЗ}.$$

В частности, обе части неравенства можно умножать (делить) на одно и то же положительное действительное число:

$$f(x)< g(x) \Leftrightarrow a\cdot f(x)< a\cdot g(x),\ a\in R,\ a>0.$$

Например, в строгих неравенствах вида $f(x)/g(x)>0$ множитель $g(x)$ из знаменателя дроби можно «переносить» в числитель:

$$f(x)/g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$$

(для доказательства достаточно умножить обе части исходного неравенства на $g^2(x)>0$).

6. *Если функция $h(x)$ определена и отрицательна на ОДЗ неравенства, то обе его части можно одновременно умножать (делить) на эту функцию, при этом знак неравенства следует поменять на противоположный*:

$$f(x)< g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)> g(x)\cdot h(x),\ h(x)<0\ \ \forall\ x\in \text{ОДЗ}.$$

В частности, обе части неравенства можно умножать (делить) на одно и то же отрицательное действительное число:

$$f(x)< g(x) \Leftrightarrow a\cdot f(x)> a\cdot g(x),\ a\in R,\ a<0.$$

7. *Показательные уравнения вида* $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ($a>0,\ a\neq 1$) *равносильны уравнению, полученному в результате логарифмирования*:

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

8. *Если из уравнения* $f(x)=0$ *следует уравнение* $g(x)=0$, *то*

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=0,\quad \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow g(x)=0.$$

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\sin x\cdot\sin 3x\cdot\sin 6x\cdot\sin 12x\cdot\sin 24x\cdot\sin 48x=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно на множестве действительных чисел совокупности шести уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0;\\ \sin 3x = 0;\\ \sin 6x = 0;\\ \sin 12x = 0;\\ \sin 24x = 0;\\ \sin 48x = 0.\end{array}\right.$$

Перенумеруем уравнения цифрами (1)–(6). При этом если $\sin x = 0$, то по формуле синуса тройного аргумента получаем, что $\sin 3x = 0$. Далее, если $\sin 3x = 0$, то по формуле синуса двойного аргумента получаем, что $\sin 6x = 0$, и так далее. Таким образом, каждое последующее уравнение в совокупности является следствием своего предшественника, а значит уравнение (6) является следствием уравнений (1)–(5):

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6).$$

Поэтому данная совокупность оказывается равносильной уравнению (6): $\sin 48x = 0$, решая которое, находим $x = \pi n/48, n \in Z$.

Примеры неравносильных преобразований

Рассмотрим несколько преобразований, приводящих к следствию (чтобы такого рода преобразования стали равносильными, в большинстве случаев надо просто учесть ОДЗ в решаемой задаче).

1. *Возведение уравнения вида* $f(x) = g(x)$ *в чётную степень приводит, вообще говоря, к следствию*:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (f(x))^{2n} = (g(x))^{2n},\ n \in N$$

(в последнем уравнении $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь разные знаки).

2. *Умножение уравнения вида* $f_1(x)/f_2(x) = g(x)$ *на функцию, стоящую в знаменателе, приводит, вообще говоря, к следствию* (снимается ограничение $f_2(x) \neq 0$):

$$f_1(x)/f_2(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)\cdot g(x).$$

3. *Взаимное уничтожение одного и того же слагаемого-функции в обеих частях уравнения приводит, вообще говоря, к следствию* (из-за возможного расширения ОДЗ):

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \ \Rightarrow f(x) = g(x).$$

4. *Переход от уравнения вида* $f(x)\cdot g(x)=0$ *к совокупности уравнений приводит, вообще говоря, к следствию:*

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0. \end{array}\right.$$

Например,

$$\sqrt{x}\cdot(x+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=0 \\ x+1=0 \end{array}\right., \text{ но } \sqrt{x}\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \\ x\geq 0. \end{array}\right.$$

5. *Возведение иррациональных уравнений вида* $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$ *в чётную степень* $2n$ *с целью избавления от радикалов приводит, вообще говоря, к следствию* (снимаются ограничения $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$):

$$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

6. *В следующей цепочке преобразований происходит постепенное расширение ОДЗ, что, вообще говоря, может привести к появлению посторонних корней*:

$$\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=0 \Rightarrow \sqrt{f(x)\cdot g(x)}=0 \Rightarrow \sqrt{|f(x)|}\cdot\sqrt{|g(x)|}=0.$$

7. *Применение операции взятия синуса к обеим частям уравнения приводит к следствию*:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \sin f(x)=\sin g(x).$$

Например, $x=\pi/6 \Rightarrow \sin x=\sin(\pi/6)$.

Замечание 1. Понятия равносильности, следствия распространяются на неравенства, *системы и совокупности* уравнений и неравенств.

Замечание 2. Некорректное использование в процессе решения уравнения соотношения, эквивалентного данному уравнению, вопреки расхожему мнению, может повлечь появление посторонних корней.

Пример 1 $^{(*)}$. *Найти все решения иррационального уравнения вида*

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}, \qquad (1)$$

где $f(x), g(x), h(x)$ *– рациональные функции, определённые при всех действительных* x.

Решение. Обозначим $A(x)=\sqrt[3]{f(x)}$, $B(x)=\sqrt[3]{g(x)}$, $C(x)=\sqrt[3]{h(x)}$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$A(x)+B(x)=C(x), \qquad (2)$$

что равносильно

$$\left(A(x)+B(x)\right)^3=C^3(x). \qquad (3)$$

Уравнение (3) преобразуем *с учётом уравнения* (1), записанного в виде равенства (2), и получим равенство

$$(A+B)^3-C^3-3\cdot A\cdot B\cdot(A+B-C)=0. \qquad (4)$$

Воспользовавшись формулами сокращённого умножения, разложим левую часть последнего равенства в произведение

$$(A+B-C)\cdot\left((A+B)^2+(A+B)\cdot C+C^2-3\cdot A\cdot B\right)=0, \qquad (5)$$

что эквивалентно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}A+B-C=0\\(A+B)^2+(A+B)\cdot C+C^2-3\cdot A\cdot B=0,\end{array}\right. \qquad (6)$$

причём второе из уравнений приводится к эквивалентному виду

$$A^2+B^2+C^2+A\cdot C+B\cdot C-A\cdot B=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A-B)^2+(A+C)^2+(B+C)^2=0,$$

что, в свою очередь, равносильно системе $A(x)=B(x)=-C(x)$. (7)

Если система уравнений (7) имеет корни, не совпадающие с корнями данного уравнения (2), то это – посторонние корни; если же эта система не имеет корней, то посторонних корней нет.

Проанализируем, за счёт чего здесь возникли посторонние корни. В самом деле, при переходе от уравнения (2) к равенству (5) *предполагается, что* $A+B-C=0$. Поэтому, строго говоря, уравнение (5), а также совокупность (6) необходимо дополнить этим условием. Например, совокупность (6) на самом деле должна иметь вид

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A+B-C=0\\(A+B)^2+(A+B)\cdot C+C^2-3\cdot A\cdot B=0\end{cases}\\A+B-C=0.\end{array}\right.$$

Другими словами, при правильном решении дополнительных корней появиться не может. Рассмотрим конкретный пример.

Пример 2. *Решить уравнение* $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

Решение. Данное уравнение – иррациональное, определённое при всех действительных значениях x. Введём обозначения

$$A(x)=\sqrt[3]{x+1},\ B(x)=\sqrt[3]{3x+1},\ C(x)=\sqrt[3]{x-1},$$

и перепишем исходное уравнение в виде $A(x)+B(x)=C(x)$, который после возведения в куб эквивалентен уравнению

$$A^3+B^3+3\cdot A\cdot B\cdot(A+B)=C^3.$$

Заменяя $A+B$ на C (в этот момент возможно возникновение посторонних корней), получаем

$$A^3+B^3+3\cdot A\cdot B\cdot C=C^3.$$

Возвращаясь в последнем уравнении к переменной x, имеем

$$x+1+3x+1+3\cdot\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)}=x-1.$$

Осталось решить это уравнение. Приведём подобные члены, уединив кубический корень

$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)}=-(x+1),$$

и после этого возведём в куб

$$(x^2-1)(3x+1)=-(x+1)^3.$$

У этого кубического уравнения два корня: -1 и 0. Проверка (которую сделать необходимо!) показывает, что $x=0$ – посторонний корень, поскольку не удовлетворяет исходному уравнению. Заметим, что он удовлетворяет системе (7), которая в данном примере имеет вид

$$\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{3x+1}=-\sqrt[3]{x-1}.\ \textit{Ответ: } x\in\{-1\}.$$

Пример 3. Равносильны ли уравнения $x=y$ *и* $tgx=tgy$ *?*

Решение. Заметим, что пара чисел $x=y=\pi/2$ удовлетворяет первому из уравнений, но не может быть решением второго уравнения, поскольку не принадлежит его ОДЗ. С другой стороны, пара чисел $x=\pi/4$, $y=5\pi/4$ удовлетворяет второму уравнению, так как в этом случае $tgx=tgy=1$, но в то же время эта пара, очевидно, не является решением первого уравнения. Данное наблюдение позволяет утверждать, что данные два уравнения не сравнимы между собой (в том числе не являются равносильными).

Пример 4. При каких значениях параметра a *неравенство*

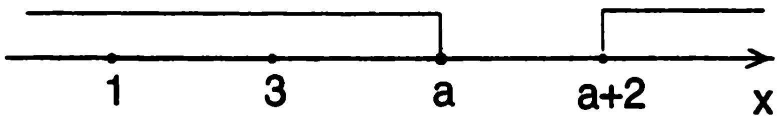
$$(x-a)(x-a-2)>0 \qquad (1)$$

является следствием неравенства $x^2-4x+3<0$ *?* (2)

Решение. Решением второго из неравенств является интервал $(1,\ 3)$. Так как при любом значении параметра число a лежит на числовой прямой левее числа $a+2$, то решением первого неравенства является объединение двух промежутили $(-\infty, a)\cup(a+2,+\infty)$. Чтобы выполнялось условие задачи, множество $(-\infty, a)\cup(a+2,+\infty)$ должно содержать внутри себя интервал $(1,\ 3)$.

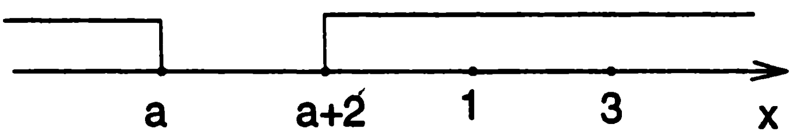
Возможны два случая.

1) Интервал $(1,\ 3)$ целиком принадлежит интервалу $(-\infty, a)$:



Чтобы это выполнялось, необходимо потребовать $a \geq 3$.

2) Интервал $(1,\ 3)$ целиком принадлежит интервалу $(a+2,\ +\infty)$:



В этом случае должно выполняться условие $a+2 \leq 1$. Объединяя полученные значения параметра, приходим к ответу. *Ответ*: $a \in (-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

3.3. Алгебраические уравнения и неравенства

3.3.1. Целые алгебраические уравнения и неравенства

Линейные уравнения и неравенства

Уравнение вида

$$a \cdot x = b, \tag{1}$$

где a и b – коэффициенты (действительные числа или выражения, зависящие от параметров), а x – неизвестное, называется *линейным уравнением*. Если $b = 0$, то линейное уравнение называется *однородным*.

Общая *схема решения* линейного уравнения $a \cdot x = b$ подразумевает возможность реализации трёх случаев.

1) Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = b/a$.

2) Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много решений (любое действительное x будет являться решением).

3) Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Пример 1. *При всех значениях* a *решить уравнение* $a^2x+1=a+x$.

Решение. Приведём для начала данное линейное уравнение к стандартному виду:

$$\left(a^2-1\right)\cdot x=a-1 \qquad (2)$$

и воспользуемся предложенной схемой решения. Если $a^2-1\neq 0$, т.е. $a\neq\pm 1$, то уравнение для каждого такого a имеет единственное решение $x=(a-1)/\left(a^2-1\right)=1/(a+1)$. Если $a=1$, то, подставляя это значение параметра в (2), получим уравнение $0\cdot x=0$, решением которого, очевидно, является любое действительное число x. Если же $a=-1$, то уравнение (2) приобретает вид $0\cdot x=-2$ и, очевидно, не имеет решений.

Ответ: при $a\neq\pm 1$ $x=1/(a+1)$; при $a=1$ $x\in R$; при $a=-1$ $x\in\varnothing$.

Иногда задача формулируется не в общем виде, т.е. «при всех значениях параметра решить линейное уравнение...», когда в процессе решения надо рассматривать все три возможных случая, а в более узкой постановке. Например, «найти значения параметра, при которых линейное уравнение имеет единственное решение», или «найти значения параметра, при которых линейное уравнение не имеет решений».

Запомним, что *линейное уравнение* $a\cdot x=b$:

1) имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ $a\neq 0$;

2) не имеет решений $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0; \end{cases}$

3) имеет бесконечно много решений $x\in R$ $\Leftrightarrow$ $a=b=0$.

Пример 2 [ВМиК–2002]. *При каких значениях параметра* b *уравнение*

$$b^4x+b^2+\left(2+\sqrt{2}\right)b+2\sqrt{2}=b^2\left(b+\sqrt{2}\right)+4x$$

имеет бесконечно много корней?

Решение. Относительно неизвестной x это линейное уравнение. Приведём его вначале к виду (1):

$$\left(b^4-4\right)\cdot x=b^2\left(b+\sqrt{2}\right)-b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}.$$

Выпишем необходимое и достаточное условие того, что это уравнение имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} b^4-4=0 \\ b^2\left(b+\sqrt{2}\right)-b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}=0. \end{cases}$$

Очевидно, первому уравнению в системе удовлетворяют два различных действительных корня $b = \pm\sqrt{2}$. Проверим, удовлетворяют ли они второму уравнению системы. Успешную проверку проходит только корень $b = -\sqrt{2}$.

Пример 3. *При каких значениях параметров a и b уравнение*

$$(3a - b + 2)x = 3a + 2b - 1$$

имеет единственное решение?

Решение. Необходимым и достаточным условием того, что данное уравнение имеет единственное решение, является необращение в нуль старшего коэффициента: $3a - b + 2 \neq 0$. Учитывая, что равенству $3a - b + 2 = 0$ удовлетворяет бесконечное множество пар чисел вида $(a;b) \in \{(p;3p+2)|p \in R\}$, и что множество всевозможных пар действительных чисел a и b обозначается

$$R^2 = \{(a;b)|a \in R, b \in R\},$$

приходим к выводу, что искомое множество пар – это вся координатная плоскость Oab, из которой удалены точки, лежащие на прямой $b = 3a + 2$.

Ответ: $(a;b) \in R^2 \setminus \{(p;3p+2)|p \in R\}$.

Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, $ax \neq b$, где a и b – действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, называются *линейными неравенствами*.

Рассмотрим *в общем виде* решение линейного неравенства

$$ax > b$$

(неравенства $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$ решаются аналогично).

Возможны следующие случаи.

1) Если $a > 0$, то решением неравенства будет промежуток $x > b/a$.

2) Если $a < 0$, то решением неравенства будет промежуток $x < b/a$.

3) Если $a = 0$ и $b < 0$, то неравенство имеет бесконечно много решений (любое действительное x является решением); если $a = 0$ и $b \geq 0$, то неравенство не имеет решений.

Пример 4. *Решить при всех значениях параметра a неравенство*

$$5x - a > ax + 3.$$

Решение. Приведём данное линейное относительно x неравенство к стандартному виду

$$(5 - a) \cdot x > a + 3. \tag{3}$$

Если $5 - a > 0$, т.е. $a < 5$, то, поделив на $5 - a$, получим $x > (a+3)/(5-a)$; если $5 - a < 0$, т.е. $a > 5$, то, поделив на $5 - a$, получим $x < (a+3)/(5-a)$.

Наконец, если $a = 5$, то, подставляя это значение параметра в неравенство (3), получаем неравенство $0 \cdot x > 8$. Очевидно, оно не имеет решений.

Пример 5. *При каких значениях параметров a и b неравенство*

$$(a-1+b)x \geq 5a+b+4$$

а) не имеет решений; б) имеет бесконечно много решений?

Решение. а) Неравенство не имеет решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a-1+b=0 \\ 5a+b+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a>-5/4 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b) \in \left\{(p;1-p): p>-\frac{5}{4}\right\}.$$

б) В остальных случаях неравенство имеет бесконечно много решений, поэтому получаем ответ:

$$(a;b) \in R^2 \setminus \{(p;1-p): p>-5/4\}.$$

Пример 6. *При каких значениях параметра a решением неравенства*

$$(a+1)\left(\frac{x}{a}-1\right)-\frac{a^2+2a-1}{a^2-a}x<2\left(1-\frac{x}{a-1}\right)$$

является любое $x \in R$?

Решение. ОДЗ: $a \neq 0;1$. Так как неравенство линейно относительно переменной x, то, приведя его к стандартному виду, получим

$$\left(1+\frac{1}{a}-\frac{a^2+2a-1}{a(a-1)}+\frac{2}{a-1}\right)x<a+3 \Leftrightarrow 0 \cdot x<a+3.$$

Теперь видно, что любое действительное число x будет решением этого неравенства только при $a>-3$. С учётом ОДЗ приходим к ответу.

Ответ: при $a \in (-3,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Наконец, рассмотрим, как решается *в общем виде* линейное неравенство вида

$$ax \neq b.$$

1) Если $a \neq 0$, то решением неравенства будет $x \neq b/a$.

2) Если $a=0$ и $b=0$, то неравенство не имеет решений.

3) Если $a=0$ и $b \neq 0$, то неравенство выполняется сразу для всех действительных значений переменной x.

Пример 7. *Решить неравенство при всех значениях параметра a*

$$5x-a \neq ax+3.$$

Решение. Приведём неравенство к стандартному виду:

$$(5-a) \cdot x \neq a+3.$$

Если $a \neq 5$, то решением неравенства будет объединение промежутков $(-\infty, (a+3)/(5-a)) \cup ((a+3)/(5-a), +\infty)$. Если $a = 5$, то неравенство примет вид $0 \cdot x \neq 8$, что верно при всех $x \in R$.

Квадратные уравнения и неравенства

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

где a, b, c – произвольные действительные числа или выражения, зависящие от параметров, причём $a \neq 0$, а x – неизвестная, называют *квадратным*. Коэффициент a называется *старшим коэффициентом*, c – *свободным членом* квадратного уравнения. Если $a = 1$, то уравнение называется *приведённым*. Квадратное уравнение называется *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Квадратным трёхчленом называется многочлен 2-й степени, т.е. выражение $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. *Корнями* квадратного трёхчлена называются корни соответствующего квадратного уравнения.

Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители

Если в квадратном уравнении (1) коэффициент $b = 0$, то имеем

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -c/a.$$

При $-c/a > 0$ получаем корни $x = \pm\sqrt{-c/a}$, при $c = 0$ корень $x = 0$.

Если же в уравнении (1) коэффициент $c = 0$, то имеем

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ или } x = -b/a.$$

Выведем теперь формулу для корней квадратного уравнения (1) в общем случае $(b \neq 0, c \neq 0)$. Преобразуем левую часть уравнения, а именно вынесем коэффициент a за скобку и выделим полный квадрат:

$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Выражение b^2-4ac называют *дискриминантом* квадратного уравнения и обозначают D. Используя это обозначение, уравнение можно переписать в виде:

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=0. \qquad (2)$$

Дальнейшее решение уравнения зависит от знака D. Возможны три случая: $D>0$, $D=0$ и $D<0$. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

1. Если $D>0$, то представим $D/(4a^2)$ в виде $\left(\sqrt{D}/(2a)\right)^2$, и по формуле разности квадратов получим

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=$$

$$=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Так как произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю (при условии, что оба множителя существуют), то можно считать доказанным, что в рассматриваемом случае квадратное уравнение имеет два различных действительных корня x_1 и x_2:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (3)$$

2. Если дискриминант $D=0$, то уравнение (2) принимает вид

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Поскольку квадрат какого-либо числа равен нулю, только если само это число равно нулю, то отсюда получаем, что уравнение имеет единственный действительный корень $x_1=-b/2a$. Его можно также получить из общей формулы (3), положив в ней $D=0$.

Замечание. Точнее говоря, уравнение имеет в этом случае два действительных корня, но они равны друг другу $(x_1=x_2)$. Можно сказать также, что имеется корень x_1 *кратности 2*.

3. Если же дискриминант $D < 0$, то $-D > 0$, и в уравнении (2) во внешних скобках стоит сумма двух слагаемых

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a^2},$$

первое из которых неотрицательно, а второе – положительно. Поэтому эта сумма положительна и, следовательно, не может обращаться в нуль. Получаем, что в данном случае уравнение не имеет действительных корней. Тем самым доказана следующая теорема.

__Теорема__. *Если $D \geq 0$, то квадратное уравнение* (1) *имеет действительные корни x_1, x_2, определяемые по формулам $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, причём если $D > 0$, то уравнение* (1) *имеет два различных действительных корня $x_1 \neq x_2$; если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -b/2a$ - единственный корень (кратности 2); если $D < 0$, то квадратное уравнение* (1) *не имеет действительных корней.*

Пример 1 [Геолог.–1997]. *Сколько решений имеет уравнение*

$$\sqrt{6}\left(x^2+2\right)+2x\sqrt{5}=\sqrt[4]{35}\left(x^2-2\right)+2x\sqrt{7}\ ?$$

Решение. Решим задачу стандартным способом. Чтобы оценить количество корней уравнения, вначале приведём его к стандартному виду

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt[4]{35}\right)x^2+2\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)x+2\left(\sqrt{6}+\sqrt[4]{35}\right)=0,$$

а затем вычислим дискриминант $D=4\left(\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2-2\left(6-\sqrt{35}\right)\right)$ и оценим его знак, сравнив с нулём: $\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2 \vee 2\left(6-\sqrt{35}\right) \Leftrightarrow 12-2\sqrt{35} = 12-2\sqrt{35}$. Следовательно, дискриминант равен нулю, что означает, что данное уравнение имеет единственное решение. *Ответ*: 1 решение.

Пример 2 [Химфак–2003]. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2+(a+1)x+1=0$ имеет единственное решение.*

Решение. Для решения задачи необходимо рассмотреть два случая. Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным, и необходимым и достаточным условием единственности решения является обращение дискриминанта в нуль, т.е.

$$D=(a+1)^2-4a=(a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=1.$$

Если же $a = 0$, то уравнение становится линейным. Выясним, сколько решений оно имеет. Подставим значение $a = 0$ в исходное уравнение, оно примет вид $x + 1 = 0$. Очевидно, что это уравнение имеет единственное решение.

Ответ: $a \in \{0;1\}$.

Попутно выше была доказана следующая *теорема о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители.*

Теорема. Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ имеет два различных действительных корня x_1, x_2, то при всех значениях переменной x справедливо тождество:

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{D}\right)/(2a).$$

Если квадратный трёхчлен имеет лишь один действительный корень x_1, то при всех значениях переменной x справедливо тождество

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)^2, \text{ где } x_1 = -b/(2a).$$

Если же квадратный трёхчлен не имеет действительных корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

Следствие. Необходимым и достаточным условием того, чтобы квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ представлял собой *полный квадрат*, является равенство нулю его дискриминанта.

Замечание. В общем случае, если убрать в уравнении 2-й степени $ax^2 + bx + c = 0$ требование $a \neq 0$, то уравнение может иметь больше двух действительных корней. Например, если $a = b = c = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет бесконечно много корней (любое действительное число x является в этом случае корнем уравнения).

Пример 3*. При каких значениях параметра a уравнение*

$$a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$$

имеет более одного корня?

Решение. Если $a = 0$, то получаем линейное уравнение $6x - 9 = 0$, имеющее единственное решение. Если $a = -3$, то получаем уравнение вида $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$, у которого любое действительное число x является решением. Если же $a \neq 0, a \neq -3$, то, поделив на $a + 3$, получим квадратное уравнение $ax^2 + 2x - 3 = 0$, которое имеет более одного решения тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен: $D = 4 + 12a > 0$ $\Leftrightarrow a > -1/3$. *Ответ*: $a \in \{-3\} \cup (-1/3,\ 0) \cup (0, +\infty)$.

Теорема Виета. Обратная теорема. Теорема об определении знаков корней квадратного уравнения по его коэффициентам

Свойства корней квадратного уравнения, их связь с коэффициентами уравнения, о которых пойдёт речь в этом пункте, впервые были установлены французским математиком *Франсуа Виетом* (1540–1603).

Теорема (Виета). Пусть дано квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0,$$

у которого дискриминант неотрицателен ($D\ge 0$). Тогда корни x_1, x_2 и коэффициенты a, b, c этого уравнения связаны между собой системой соотношений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b/a \\ x_1\cdot x_2=c/a. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения.

1) Рассмотрим сумму корней x_1+x_2. Согласно формуле корней квадратного уравнения имеем

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\cancel{\sqrt{D}}-b+\cancel{\sqrt{D}}}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

2) Аналогично для произведения корней получим

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4\cancel{a}c}{4\cancel{a}a}=\frac{c}{a}.$$

Замечание. Формулы для суммы и произведения корней квадратного уравнения остаются верными и в случае, когда уравнение имеет единственный корень x_1. В этом случае следует положить в указанных формулах $x_2=x_1$.

Пример 3 [МГУЛ]. *При каком значении k корни уравнения $2x^2+(3k-15)x-8=0$ будут противоположными числами?*

Решение. Воспользуемся для решения задачи теоремой Виета. Во-первых, для того чтобы уравнение имело корни, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицателен. Во-вторых, условие противоположности корней можно записать в виде $x_2=-x_1$, т.е. $x_1+x_2=0$. По теореме Виета сумма корней уравнения равна $x_1+x_2=-(3k-15)/2$. Тогда задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} D=(3k-15)^2+64\ge 0 \\ -(3k-15)/2=0 \end{cases} \Leftrightarrow k=5.$$

Обратная теорема к теореме Виета формулируется для приведённого уравнения. Это объясняется тем, что, зная два корня, невозможно однозначно определить все три коэффициента уравнения, поэтому для определённости полагают старший коэффициент $a=1$.

<u>Теорема</u> *(обратная теореме Виета). Если данные действительные числа* x_1 *и* x_2 *таковы, что*

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1\cdot x_2=c, \end{cases}$$

то x_1 *и* x_2 *являются корнями приведённого квадратного уравнения*

$$x^2+bx+c=0.$$

Доказательство. Так как по условию

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1\cdot x_2=c, \end{cases} \text{ то отсюда } \begin{cases} b=-(x_1+x_2) \\ c=x_1\cdot x_2. \end{cases}$$

Подставим в квадратный трёхчлен x^2+bx+c вместо коэффициентов b и c полученные выражения:

$$x^2+bx+c=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=(x^2-x_1x)+(x_1x_2-x_2x)=$$
$$=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Уравнение $(x-x_1)(x-x_2)=0$, очевидно, имеет корни x_1 и x_2 (и никаких других). Следовательно, равносильное ему уравнение $x^2+bx+c=0$ также имеет эти корни.

Из теоремы Виета и обратной к ней теоремы вытекает следующая теорема, позволяющая без решения квадратного уравнения (т.е. без нахождения в явном виде корней x_1 и x_2), пользуясь только знанием коэффициентов a,b,c, ***определить знаки*** его корней. Сформулируем эти необходимые и достаточные условия.

<u>Теорема</u> *(об определении знаков корней квадратного уравнения по известным коэффициентам). Пусть квадратное уравнение* ax^2+bx+c *имеет действительные корни. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) уравнение имеет два положительных корня $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a > 0 \\ x_1 x_2 = c/a > 0; \end{cases}$

2) уравнение имеет два отрицательных корня $\Leftrightarrow \begin{cases} -b/a < 0 \\ c/a > 0; \end{cases}$

3) уравнение имеет корни разных знаков $\Leftrightarrow c/a < 0$;

4) уравнение имеет положительный и нулевой корни $\Leftrightarrow \begin{cases} -b/a > 0 \\ c/a = 0; \end{cases}$

5) уравнение имеет отрицательный и нулевой корни $\Leftrightarrow \begin{cases} -b/a < 0 \\ c/a = 0; \end{cases}$

6) уравнение имеет два нулевых корня $\Leftrightarrow \begin{cases} -b/a = 0 \\ c/a = 0. \end{cases}$

Приведённая теорема играет важную роль при решении задач, связанных с исследованием расположения корней квадратного уравнения относительно точки $x = 0$, т.е. связанных с исследованием их знаков.

Пример 4 [МГУЛ]. *Найти, при каких значениях параметра m уравнение $x^2 + (2 - m)x + 4m - 8 = 0$ имеет два различных действительных корня и они оба положительны.*

Решение. Во-первых, чтобы действительные корни существовали и были различны, необходимо и достаточно выполнения условия $D > 0$. Во-вторых, для учёта положительности корней воспользуемся последней из теорем. Таким образом, искомые значения параметра ищем как решения системы

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - 4(4m-8) > 0 \\ m - 2 > 0 \\ 4m - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (18, +\infty).$$

Пример 5*. Известно, что квадратное уравнение*

$$x^2 + (3 - 2a)x - 3a + 2 = 0$$

имеет корни. Не решая уравнения, определить знаки его корней.

Решение. Воспользуемся последней из сформулированных теорем.

1) Выясним, например, при каких значениях параметра данное приведённое уравнение имеет корни разных знаков. Для этого необходимо и достаточно, чтобы свободный член $2 - 3a < 0$, т.е. при $a > 2/3$.

2) Выясним теперь, при каких значениях параметра оба корня отрицательны. Нахождение таких a сводится к решению системы

$$\begin{cases} 2a-3<0 \\ 2-3a>0 \end{cases} \Leftrightarrow a<2/3.$$

3) Осталось исследовать значение $a=2/3$. При этом значении параметра обнаруживаем, что сумма корней, равная $2a-3$, отрицательна, а произведение корней, равное $2-3a$, равно нулю. Поэтому в силу той же теоремы делаем вывод: один корень отрицателен, другой равен нулю.

Кроме того, при решении задач, связанных с теоремой Виета, могут оказаться полезными следующие *соотношения* [24], выражающие некоторые распространенные комбинации чисел x_1 и x_2 через их сумму и произведение:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2;\ x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right);$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2};\ \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2};$$

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2;$$

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2};\ \left|x_1^2-x_2^2\right|=|x_1+x_2|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2};$$

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}=\sqrt{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\sqrt{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}} \quad (\text{при } x_1\ge 0, x_2\ge 0);$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\sqrt{\frac{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}},\ \left|\frac{1}{\sqrt{x_1}}-\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right|=\sqrt{\frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}}$$

$$(\text{при } x_1>0, x_2>0).$$

Такого рода преобразования используются при решении квадратных уравнений, коэффициенты которых содержат параметр, а постановка задачи имеет форму: «не решая уравнения, найти $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$», «при каких значениях параметра уравнение имеет действительные корни с заданной суммой квадратов», «при каких значениях параметра уравнение имеет действительные корни, произведение которых меньше заданного числа» и т.п.

Пример 6 [ВМиК–2006, отделение бакалавров]. *Пусть* $(x;y)$ *– решение системы уравнений*

$$\begin{cases} 3x+y=\alpha+2 \\ 9x^2+y^2=5\alpha-2. \end{cases}$$

При каком значении α *произведение* xy *принимает наибольшее значение?*

Решение. Поскольку $9x^2+y^2=(3x+y)^2-6xy=(\alpha+2)^2-6xy$, то система равносильна системе

$$\begin{cases} 3x+y=\alpha+2 \\ 3x\cdot y=(\alpha^2-\alpha+6)/2. \end{cases}$$

Согласно обратной теореме Виета, числа $3x$ и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2-(\alpha+2)t+(\alpha^2-\alpha+6)/2=0.$$

Для их существования необходимо и достаточно выполнения условия неотрицательности дискриминанта:

$$D=(\alpha+2)^2-2(\alpha^2-\alpha+6)\ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2-6\alpha+8\le 0 \Leftrightarrow 2\le\alpha\le 4.$$

Задача свелась к нахождению наибольшего значения

$$xy=\frac{1}{6}(\alpha^2-\alpha+6)=\frac{1}{6}\left(\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\right)$$

как квадратичной функции α на отрезке $[2,4]$. Поскольку на этом отрезке данная функция монотонно возрастает, то она принимает своё наибольшее значение на его правом конце, т.е. при $\alpha=4$.

Итак, $\max\limits_{\alpha\in[2,4]}(xy)=\max\limits_{\alpha\in[2,4]}\left(\frac{1}{6}(\alpha^2-\alpha+6)\right)=3$.

Пример 7 [Моск. гос. ун-т геодезии и картографии]. *Дано:* x_1 *и* x_2 *– корни квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$. *Составить алгебраическое уравнение наименьшей степени, корни которого* $1/x_1$ *и* $1/x_2$.

Решение. Требуемое уравнение будем искать в виде

$$\left(x-\frac{1}{x_1}\right)\left(x-\frac{1}{x_2}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)x+\frac{1}{x_1x_2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}x+\frac{1}{x_1x_2}=0.$$

Учитывая, что согласно теореме Виета для исходного уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 x_2 = c/a \end{cases}$$

(по условию $c \neq 0$), окончательно получаем:

$$x^2 - \frac{-b/a}{c/a} x + \frac{1}{c/a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{c} x + \frac{a}{c} = 0, \text{ или } cx^2 + bx + a = 0.$$

Квадратные неравенства

Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c \vee 0,$$

где $a \neq 0$, a, b, c – действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а знак $\vee$ заменяет любой из знаков неравенств $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ или $\neq$, называются *квадратными*.

Если в квадратном неравенстве коэффициент $b = 0$, то имеем

$$ax^2 + c \vee 0 \Leftrightarrow ax^2 \vee -c.$$

В случае $a > 0$ делением обеих частей на a получаем равносильное неравенство $x^2 \vee -c/a$ (знак неравенства сохраняется). В случае $a < 0$ знак неравенства при делении на a изменится на противоположный (см. пример 9 ниже). Обозначим $A = -c/a$. Тогда если $A \geq 0$, то

$$x^2 < A \Leftrightarrow -\sqrt{A} < x < \sqrt{A} \ (A > 0);$$

$$x^2 \leq A \Leftrightarrow -\sqrt{A} \leq x \leq \sqrt{A};$$

$$x^2 > A \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{A}\right) \cup \left(\sqrt{A}, +\infty\right);$$

$$x^2 \geq A \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{A}\right] \cup \left[\sqrt{A}, +\infty\right).$$

При $A < 0$ имеем

$$x^2 < A \Leftrightarrow x \in \varnothing; \quad x^2 \leq A \Leftrightarrow x \in \varnothing;$$

$$x^2 > A \Leftrightarrow x \in (-\infty, +\infty); \quad x^2 \geq A \Leftrightarrow x \in (-\infty, +\infty).$$

Рассмотрим теперь решение квадратных неравенств в случае $b \neq 0$, $c \neq 0$ на примере неравенства

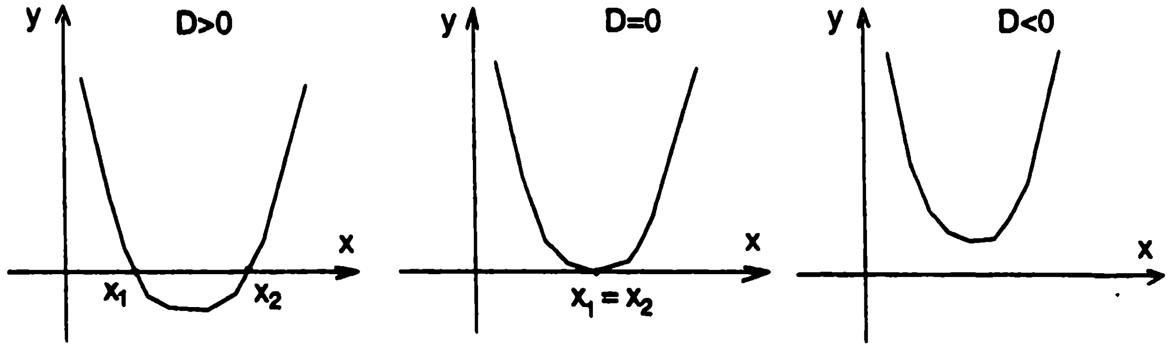
$$ax^2 + bx + c > 0$$

(решение неравенств вида $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, а также $ax^2 + bx + c \neq 0$ рассмотрите самостоятельно). Воспользуемся при этом графиком квадратного трёхчлена.

Относительно знака старшего коэффициента возможны два случая.

1. *Случай* $a > 0$:

а) если $D > 0$ и x_1, x_2 – корни квадратного трёхчлена, то решением неравенства будет объединение промежутков $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ (см. соответствующий график внизу на рисунке):



б) если $D = 0$, то решением неравенства будет вся числовая прямая, за исключением точки $x = -b/(2a)$, т.е. $(-\infty, -b/(2a)) \cup (-b/(2a), +\infty)$;

в) если $D < 0$, то неравенство верно при всех действительных x.

2. *Случай* $a < 0$:

а) если $D > 0$, то решением неравенства будет интервал (x_1, x_2);

б) если $D \le 0$, то неравенство не имеет решений (постройте иллюстрирующие графики и проанализируйте их самостоятельно).

Обратимся к решению последнего вида неравенств:

$$ax^2 + bx + c \ne 0, \text{ где } a \ne 0.$$

а) Если $D > 0$, то решением неравенства будет объединение промежутков $(-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup (x_2, +\infty)$;

б) если $D = 0$, то неравенство выполнено при всех x, кроме $x = -b/(2a)$, т.е. решением будет $(-\infty, -b/(2a)) \cup (-b/(2a), +\infty)$;

в) если $D < 0$, то неравенство справедливо сразу при всех действительных x.

Замечание. В случае $D > 0$ квадратное неравенство можно также решать, не используя графический подход, а, найдя корни и представив неравенство в виде

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0,$$

далее воспользоваться методом интервалов. В случае $D \le 0$ неравенство решается при помощи очевидных оценок (методом оценок).

Пример 8. *Найти все значения параметра a, при которых трёхчлен*

$$f(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 2$$

положителен при всех x.

Решение. Во-первых, в условии задачи не говорится о *квадратном* трёхчлене, значит надо рассмотреть два случая, когда старший коэффициент равен или не равен нулю.

1) Пусть $a^2 \neq 1$, тогда для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} D = 4(a-1)^2 - 8(a^2-1) < 0 \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a+3) > 0 \\ (a-1)(a+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

2) Если $a = 1$, то трёхчлен принимает вид $f(x) \equiv 2 > 0$ при всех $x \in R$, т.е. условие задачи выполняется.

3) Если же $a = -1$, то имеем $f(x) = -2x + 2$, и это выражение не будет положительно сразу при всех $x \in R$, т.е. условие задачи не выполняется.

Ответ: $a \in (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$.

Пример 9 [Ф-т гос. управления–2003]. *Для каждой пары чисел a и b найти все решения неравенства $ax^2 + b \leq 0$.*

Решение. Перепишем данное неравенство в виде $ax^2 \leq -b$.

1) Если $a > 0$, то в результате деления на a неравенство приводится к виду $x^2 \leq -b/a$. Очевидно, что в этом случае оно имеет решения только при $b \leq 0$. Итак, при $a > 0,\ b \leq 0$ имеем: $-\sqrt{-b/a} \leq x \leq \sqrt{-b/a}$.

2) Если $a < 0$, то поделим на a и придём к неравенству $x^2 \geq -b/a$. При $b > 0$ имеем решения $\left[\begin{array}{l} x \leq -\sqrt{-b/a} \\ x \geq \sqrt{-b/a}. \end{array}\right.$ При $b \leq 0$ имеем $x \in R$.

3) Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x^2 \leq -b$. Очевидно, что тогда при $b \leq 0$ имеем $x \in R$, а при $b > 0$ нет решений.

Ответ: при $a > 0$, $b \leq 0$ $x \in \left[-\sqrt{-b/a}, \sqrt{-b/a}\right]$;

при $a < 0, b > 0$ $x \in \left(-\infty, -\sqrt{-b/a}\right] \cup \left[\sqrt{-b/a}, +\infty\right)$;

при $a \leq 0, b \leq 0$ $x \in R$; при $a \geq 0, b > 0$ $x \in \varnothing$.

Расположение корней квадратного трёхчлена относительно одной-двух заданных точек («метод парабол»)

Многие задачи с параметрами сводятся к исследованию расположения корней квадратного трёхчлена относительно заданной точки или заданного промежутка (отрезка, интервала, луча). При этом если дискриминант D квадратного трёхчлена есть полный квадрат некоторого выражения (т.е. извлекается $\sqrt{D}$), то в подавляющем большинстве случаев проще найти корни x_1, x_2 квадратного трёхчлена и подчинить их условиям задачи. Если же $\sqrt{D}$ не извлекается (остаётся радикал), то в принципе также можно найти корни x_1, x_2 квадратного трёхчлена и подчинить их условиям задачи, но при этом придётся решать непростые иррациональные неравенства, которые приводят к большим и утомительным вычислениям. В этом случае более удобным оказывается следующий подход (иногда называемый *методом парабол*), использующий графическую интерпретацию расположения корней квадратного трёхчлена, вершины его графика по отношению к заданной точке (точкам).

Итак, пусть задана квадратичная функция

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

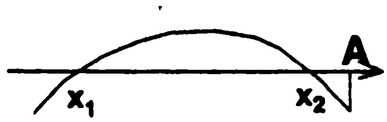
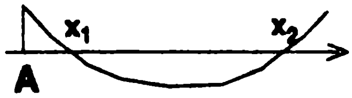
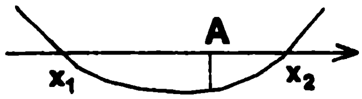
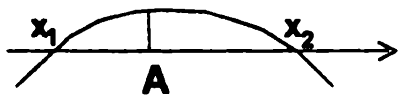
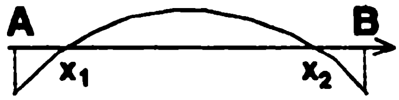
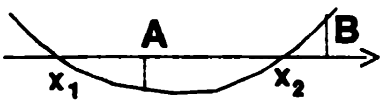
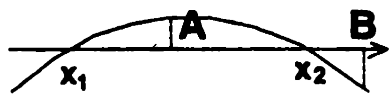
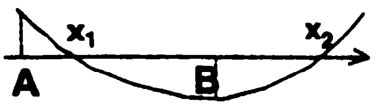
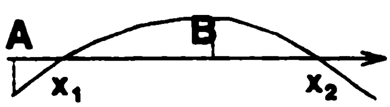
график которой имеет точки x_1, x_2 пересечения с осью абсцисс (т.е. $D \geq 0$). Пусть, для определённости, ветви параболы направлены вверх. Выпишем, например, условия, необходимые и достаточные для того, чтобы оба корня x_1, x_2 были меньше заданного действительного числа A. Очевидно, что в этом случае вершина параболы $x_в = -b/2a$ должна располагаться левее точки $x = A$, и значение данной квадратичной функции в точке A должно быть положительно. Таким образом, оба корня x_1, x_2 меньше заданного числа $A \Leftrightarrow$

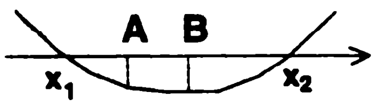
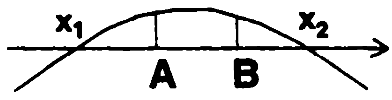
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(A) > 0 \\ -b/2a < A, \end{cases}$$

т.е. данная система условий однозначно задаёт рассматриваемую ситуацию в расположении корней по отношению к A.

Понятно, что по отношению к одному заданному числу A возможны всего три ситуации: оба корня меньше A, оба корня больше A, корни расположены по разные стороны от A. Если же заданы два действительных числа A и B, то по отношению к ним возможны уже четыре ситуации расположения корней квадратного трёхчлена. Оформим полученный специальный метод в виде следующей таблицы.

<u>Таблица</u> (*метод парабол*)

№	$a>0$ (ветви вверх)	Условия	$a<0$ (ветви вниз)	Условия
1		$\begin{cases} f(A)>0 \\ -\frac{b}{2a}<A \end{cases}$		$\begin{cases} f(A)<0 \\ -\frac{b}{2a}<A \end{cases}$
2		$\begin{cases} f(A)>0 \\ -\frac{b}{2a}>A \end{cases}$		$\begin{cases} f(A)<0 \\ -\frac{b}{2a}>A \end{cases}$
3		$f(A)<0$		$f(A)>0$
4		$\begin{cases} f(A)>0 \\ f(B)>0 \\ A<-\frac{b}{2a} \\ -\frac{b}{2a}<B \end{cases}$		$\begin{cases} f(A)<0 \\ f(B)<0 \\ A<-\frac{b}{2a} \\ -\frac{b}{2a}<B \end{cases}$
5		$\begin{cases} f(A)<0 \\ f(B)>0 \end{cases}$		$\begin{cases} f(A)>0 \\ f(B)<0 \end{cases}$
6		$\begin{cases} f(A)>0 \\ f(B)<0 \end{cases}$		$\begin{cases} f(A)<0 \\ f(B)>0 \end{cases}$

	$\begin{cases} f(A)<0 \\ f(B)<0 \end{cases}$		$\begin{cases} f(A)>0 \\ f(B)>0 \end{cases}$

__*Замечание*__. При использовании данного метода внимательно читайте условие задачи. В зависимости от постановки задачи знак в неравенствах, приведённых в таблице, может быть как строгим, так и нестрогим. Неверно поставленный знак может привести к потере или, наоборот, к приобретению посторонних корней.

Пример 10*. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ действительные, различные и оба больше a.*

Решение. В этой задаче реализуется случай 2 из таблицы выше. Обозначим $f(x)=x^2+x+a$. В соответствии с методом, решение задачи сводится к системе

$$\begin{cases} D=1-4a>0 \\ f(a)=a^2+2a>0 \\ x_B=-1/2>a \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty,-2).$$

Пример 11 [МГУЛ]. *При каких значениях β оба корня уравнения $2x^2-(\beta-1)x+1=0$ положительны и расположены по разные стороны от числа 3?*

Решение. Выпишем два способа решения задачи – стандартный и специальный, изложенный выше, и сравним их по эффективности.

Стандартный способ решения сводится к решению системы

$$\begin{cases} D=(\beta-1)^2-8>0 \\ 0<x_1=\left(\beta-1-\sqrt{(\beta-1)^2-8}\right)\Big/4<3 \\ 3<x_2=\left(\beta-1+\sqrt{(\beta-1)^2-8}\right)\Big/4. \end{cases}$$

Специальный метод состоит в решении следующей системы (см. случай 6 в таблице; через $f(x)$ обозначен многочлен в левой части уравнения):

$$\begin{cases} D=(\beta-1)^2-8>0 \\ f(0)>0 \\ f(3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\beta-1)^2-8>0 \\ 1>0 \\ 2\cdot3^2-(\beta-1)\cdot3+1<0. \end{cases}$$

Условие положительности дискриминанта учтено в обоих способах решения. Но если при стандартном способе надо решать два иррациональных неравенства (одно из которых двойное), то при выборе второго способа вместо этого имеем два линейных неравенства (одно из которых тривиально). Безусловно, при решении данной задачи следует предпочесть второй вариант решения.

Ответ: $\beta \in (22/3, +\infty)$.

Пример 12 [МГУЛ]. *Найти все значения параметра* m, *при которых один из корней квадратного трёхчлена*

$$y = (m-3)x^2 - 6x + m - 1$$

меньше, а другой больше двух.

Решение. По условию $m \neq 3$. В зависимости от знака старшего коэффициента $m-3$ возможны два случая (см. пункт 3 в таблице):

$$\begin{cases} D > 0 \\ m-3 > 0 \\ y(2) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D > 0 \\ m-3 < 0 \\ y(2) > 0. \end{cases}$$

Заметим, что эти случаи легко объединить в один:

$$\begin{cases} D > 0 \\ (m-3)\cdot y(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 4(m-3)(m-1) > 0 \\ (m-3)\cdot(4(m-3) - 12 + m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{10} < m < 2+\sqrt{10} \\ 3 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (3,5).$$

Пример 13 [МГУЛ]. *Найти наибольшее значение параметра* p, *при котором функция*

$$f(x) = x^2 + 3px + 2p^2 - 1$$

принимает отрицательные значения в интервале $(0,1)$.

Решение. По условию задачи составляем систему (см. пункт 7 в таблице):

$$\begin{cases} D = 9p^2 - 4(2p^2 - 1) > 0 \\ f(0) = 2p^2 - 1 \le 0 \\ f(1) = 1 + 3p + 2p^2 - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in R \\ -1/\sqrt{2} \le p \le 1/\sqrt{2} \Leftrightarrow p \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]. \\ -3/2 \le p \le 0 \end{cases}$$

Ответ: наибольшее значение p равно 0.

Заметим, что необходимость использования приведённого метода при решении задач, связанных с корнями квадратного уравнения, возникает не всегда. Например, в следующей задаче вполне можно обойтись стандартным методом.

Пример 14*. При каких значениях параметра a больший корень уравнения*

$$x^2+4x-(a-1)(a-5)=0$$

принадлежит промежутку $[0,1)$ *?*

Решение. В данной задаче дискриминант является полным квадратом и, следовательно, корни имеют рациональные выражения: $x_1=1-a$, $x_2=a-5$. Согласно условию задачи, возможны два случая.

1) Если $x_1=1-a\ge a-5=x_2$, т.е. $a\le 3$, то большим является корень x_1, и условие задачи приводит к неравенству $0\le 1-a<1$, откуда $0<a\le 1$.

2) Если же $x_1<x_2$, т.е. $a>3$, то большим является корень x_2, и условие задачи приводит к неравенству $0\le a-5<1$, откуда находим $5\le a<6$.

Ответ: $a\in(0,1]\cup[5,6)$.

Общая рекомендация такова: если дискриминант квадратного уравнения является полным квадратом и, следовательно, корни имеют рациональный вид, во многих задачах приемлем (часто оказывается проще других методов) стандартный подход. Но если это не так и корни иррациональны, то более удобными могут оказаться специальный метод, эффективность которого была продемонстрирована выше на примерах, и теорема Виета, которые *не требуют нахождения корней уравнения в явном виде.*

Алгебраические уравнения и неравенства степени выше второй

Для решения целых алгебраических уравнений третьей и четвёртой степеней существуют формулы для нахождения корней, однако в силу их громоздкости они применяются редко. В общем случае не существует формул для нахождения корней любого алгебраического уравнения более высокой степени, чем четыре. Рассмотрим основные виды таких уравнений, а также приёмы, используемые на практике для их решения. Но перед этим приведём без доказательства некоторые достаточно важные теоремы о свойствах алгебраических многочленов, включая основную теорему алгебры.

Теоремы о свойствах алгебраических многочленов (*)

Пусть $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_i\in R, a_n\ne 0$, - алгебраический многочлен n-й степени $(n\in N)$.

<u>Теорема 1</u> *(о разложении многочлена произвольной степени на произведение линейных и квадратичных множителей). Многочлен $P_n(x)$ может быть представлен единственным образом в виде произведения многочленов, степень каждого из которых не выше второй.*

Теорема 2. Многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Теорема 3 (основная теорема алгебры). Многочлен n-й степени имеет ровно n корней (действительных и комплексных), в том числе действительных не больше n (с учётом их кратности).

Теорема 4. Если на концах некоторого отрезка $[a,b]$ значения многочлена имеют разные знаки, то на интервале (a,b) существует хотя бы один корень этого многочлена.

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо не только для многочленов, но и для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции.

Теорема 5 (условие тождественного равенства двух многочленов).

Два алгебраических многочлена

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$
$$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

тождественно равны (т.е. равны при всех $x\in R$) тогда и только тогда, когда равны степени многочленов $n=m$ и совпадают коэффициенты при равных степенях x, т.е. $a_n=b_n$, $a_{n-1}=b_{n-1},\ldots,$ $a_0=b_0$.

Пример 1 [ВМиК–2002, устн.]. *Определить три числа p,q и r такие, что равенство $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=(px^2+qx+r)^2$ выполняется для любого значения переменной x.*

Решение. Раскроем (вспомним соответствующую формулу сокращённого умножения) квадрат в правой части и приведём полученный многочлен к стандартному виду:

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=p^2x^4+2pqx^3+(q^2+2pr)x^2+2qrx+r^2.$$

Многочлены, стоящие слева и справа от знака равенства, тождественно равны тогда и только тогда, когда выполняется система

$$\begin{cases}1=p^2;\ 4=2pq;\\ -2=q^2+2pr\\ -12=2qr;\ 9=r^2.\end{cases}\qquad \textit{Ответ}:\ (p;q;r)\in\{(1;2;-3);(-1;-2;3)\}.$$

Теорема 6. Если значения двух многочленов степени не выше n совпадают в $n+1$ различных точках, то эти многочлены тождественно равны.

Например, если две параболы (графики квадратичных функций $y=a_1x^2+$ $+b_1x+c_1$ и $y=a_2x^2+b_2x+c_2$, $a_1\cdot a_2\neq 0$) пересекаются в трёх точках, то они тождественно совпадают.

Теорема 7 (формула деления многочлена на многочлен с остатком). Для любых двух алгебраических многочленов

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

($n \geq m$) найдётся единственная пара многочленов $S_{n-m}(x)$ и $R_{m-1}(x)$ таких, что справедливо тождество

$$P_n(x) = S_{n-m}(x) \cdot Q_m(x) + R_{m-1}(x).$$

Здесь $a_i, b_j \in R$, $i = 0,1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,m$, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, многочлен $P_n(x)$ называется *делимым*, многочлен $Q_m(x)$ – *делителем*, многочлен $S_{n-m}(x)$ – *частным* от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, а многочлен $R_{m-1}(x)$ (степени не выше $m-1$) соответственно *остатком от деления*. Если $R_{m-1}(x) \equiv 0$, то говорят, что многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_m(x)$ нацело (без остатка).

Пример 2 [ВМиК–2002, устн.]. *Найти остаток от деления многочлена $x^{2002} + x^{2001} + x^{1002} + x^{1001} + x^2 + x + 1$ на многочлен $x^3 - x$.*

Решение. В данной задаче весьма проблематично было бы искать многочлен-остаток непосредственным делением многочлена на многочлен из-за слишком высокой степени многочлена-делимого. Запишем результат деления первого многочлена на второй в виде формулы

$$x^{2002} + x^{2001} + x^{1002} + x^{1001} + x^2 + x + 1 =$$

$$= S_{1999}(x) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x+1) + ax^2 + bx + c.$$

Здесь $S_{1999}(x)$ – неполное частное от деления (неизвестный многочлен), а остаток при делении на многочлен 3-й степени может иметь максимально 2-ю степень, поэтому остаток $R_2(x)$ выписан в общем виде как многочлен 2-й степени $ax^2 + bx + c$. Достаточно найти значения коэффициентов a, b и c. Для этого, подставляя последовательно значения $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ в данную формулу, получим систему

$$\begin{cases} 1 = c \\ 7 = a + b + c \\ 1 = a - b + c, \end{cases}$$

решая которую найдём искомые коэффициенты $a = b = 3$, $c = 1$. Поэтому остаток от деления равен $3x^2 + 3x + 1$.

Следующая теорема названа по имени французского математика *Этьена Безу* (1730–1783).

Теорема 8 (теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-a)$ равен значению делимого при $x=a$ (т.е. $P_n(a)$).

Следствие. Многочлен $P_n(x)$ делится нацело на линейный двучлен $x-a$ тогда и только тогда, когда $P_n(a)=0$.

Приведённое следствие из теоремы Безу во многих случаях позволяет решать целые алгебраические уравнения $P_n(x)=0$ степени выше второй. Для этого достаточно подобрать один какой-либо корень уравнения, например $x=a$, и затем поделить многочлен $P_n(x)$ на $x-a$. В результате получим некоторый многочлен $P_{n-1}(x)$ степени на единицу меньше, чем n: $P_n(x)=(x-a)\cdot P_{n-1}(x)$, и задача свелась к решению уравнения

$$P_{n-1}(x)=0.$$

Пример 3. *Найти все значения a и b, при которых многочлен $P(x)=2x^3-x^2+ax+b$ делится нацело на многочлен $Q(x)=x^2-1$.*

Решение. Разложим многочлен $Q(x)=x^2-1$ на линейные множители $Q(x)=(x+1)(x-1)$. По условию, $P(x)$ должен делиться на $Q(x)$, а, следовательно, $P(x)$ должен делиться на каждый из множителей $x+1$ и $x-1$. Согласно теореме Безу, это возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ -3-a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1. \end{cases}$$

Теорема 9 (о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами). Пусть $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$, $a_i\in Z$, $i=0,1,\ldots,n$. Если у многочлена $P_n(x)$ имеются рациональные корни, то все они находятся среди дробей вида p/q, где p – любой из целочисленных делителей свободного члена a_0, а q – любой из натуральных делителей старшего коэффициента a_n.

Следствие. Если $a_n=1$ (приведённый многочлен), то его рациональные корни следует искать среди целых делителей a_0.

Пример 4. *Решить уравнение в целых числах*

$$4x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Решение. Согласно следствию из приведённой выше теоремы, все целые корни уравнения находятся среди целых делителей свободного члена, т.е. среди чисел $\pm 1, \pm 3$. Обозначим многочлен в левой части уравнения через $f(x)$. Сделаем проверку:

1) $f(1) = 4 - 16 + 11 + 4 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ является корнем уравнения;
2) $f(-1) = 4 + 16 + 11 - 4 - 3 > 0 \Rightarrow x = -1$ не будет корнем уравнения;
3) $f(3) = 324 - 432 + 99 + 12 - 3 = 0 \Rightarrow$ нашли ещё один корень $x = 3$;
4) $f(-3) = 324 + 432 + 99 - 12 - 3 > 0 \Rightarrow x = -3$ не является корнем.

Ответ: $x \in \{1;3\}$.

Пример 5. *Найти все корни уравнения* $8x^3 - 20x^2 - 2x + 5 = 0$.

Решение. Не будем сразу применять указанный выше метод, а поступим следующим образом: сделаем многочлен в левой части уравнения приведённым. Для этого положим $y = 2x$, тогда имеем уравнение

$$y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0.$$

Обозначим через $f(y)$ левую часть последнего уравнения. Свободный член в данном случае имеет 4 целых делителя $\pm 1, \pm 5$. Поскольку $f(\pm 1) = 0$ и $f(5) = 0$, а больше трёх корней кубическое уравнение иметь не может, то это все корни этого уравнения. Выполняя обратную подстановку, находим соответствующие им три корня исходного уравнения. *Ответ*: $x \in \{-1/2; 1/2; 5/2\}$.

Обратимся теперь к *обобщению теоремы Виета* на случай алгебраических уравнений n-й степени ($n \geq 3$).

Теорема 10 (теорема Виета, общий случай). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *– действительные корни алгебраического многочлена* n *-й степени*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \; n \geq 3, \; a_n \neq 0, \; a_i \in R, \; i = \overline{0,n}.$$

Тогда корни уравнения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *связаны с его коэффициентами* $a_n, a_{n-1}, \ldots$ $\ldots, a_1, a_0$ *посредством следующей системы равенств:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1}/a_n \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}/a_n \\ x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}/a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n a_0/a_n . \end{cases}$$

Пример 6 [Социолог.–2003]. *Определить все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения*

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

Решение. По теореме Виета для кубических уравнений

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad (A \neq 0),$$

в частности, имеем $x_1x_2x_3 = -D/A$. Для данного в условии задачи уравнения это будет выглядеть так:

$$x_1x_2x_3 = 64. \qquad (1)$$

Условие того, что корни уравнения образуют геометрическую прогрессию, можно записать в виде

$$x_2^2 = x_1x_3. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $x_2 = 4$. Таким образом, известен один из корней уравнения. Подставив это значение x в исходное уравнение, найдём теперь отвечающие ему возможные значения параметра a:

$$4^3 + (a^2 - 9a) \cdot 4^2 + 8a \cdot 4 - 64 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } a = 7.$$

<u>*Проверка*</u>. 1) $a = 0$: исходное уравнение принимает вид $x^3 - 64 = 0$ и, очевидно, имеет три одинаковых, а не различных корня. Следовательно, это значение параметра не подходит.

2) $a = 7$: имеем уравнение $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$. Так как один его корень нам известен $(x = 4)$, то, например, делением многочлена в левой части на $x - 4$ раскладываем многочлен на множители, приведя уравнение к виду

$$(x-4)(x^2 - 10x + 16) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2)(x-8) = 0.$$

Его корни $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$ удовлетворяют условиям задачи.

Ответ: $a = 7$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$.

А теперь обратимся к рассмотрению основных видов и способов решения целых алгебраических уравнений. Теория решения целых алгебраических неравенств будет рассмотрена ниже в пункте 3.3.2.

Методы решения целых алгебраических уравнений

1. *Разложение на множители*

Часть целых алгебраических уравнений $P_n(x)=0$ (или аналогичных неравенств) степени n выше 2-й могут быть решены путём разложения многочлена в левой части уравнения (неравенства) на множители с помощью таких известных приёмов, как группировка и вынесение общего множителя за скобки. Иногда для достижения цели приходится прибавлять и одновременно вычитать одно и то же выражение. Отметим, что порой разложение на множители этим способом требует определённого искусства.

Если разложение на множители удалось выполнить, то решение алгебраического уравнения сводится к решению совокупности нескольких уравнений, но более низкой степени. Неравенство после разложения на множители можно решить методом интервалов.

Пример 1*. Решить уравнение* $x^4-3x^2+4x-3=0$.

Решение. $\left(x^4-2x^2\right)-\left(x^2-4x+3\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x^4-2x^2+1\right)-\left(x^2-4x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2-(x-2)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x-3\right)\left(x^2-x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-3=0 \\ x^2-x+1=0. \end{array}\right.$$

Из 1-го уравнения находим корни $x_{1,2}=\left(-1\pm\sqrt{13}\right)/2$, а второе не имеет решений.

Пример 2*. Найти все положительные корни уравнения*

$$x^4+x-18=0.$$

Решение. $\left(x^4-16\right)+(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)+(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^3+2x^2+4x+9\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3+2x^2+4x+9=0. \end{array}\right.$$

Покажем, что второе уравнение в совокупности не имеет положительных решений. Действительно, рассмотрим функцию $y=x^3+2x^2+4x+9$. Её производная $y'=3x^2+4x+4>0$ при всех действительных x, так как $D=16-48<0$. Следовательно, функция всюду монотонно возрастает, при этом $y(0)=5$. Отсюда следует, что при $x>0$ её график не пересекает оси абсцисс. *Ответ*: $x \in \{2\}$.

2. *Подбор корня с последующим понижением степени уравнения*

При решении алгебраических уравнений и неравенств степени выше второй можно использовать общий *принцип последовательного понижения степени* уравнения (неравенства).

Пусть требуется решить уравнение n-й степени

$$P_n(x)=0,$$

где $a_n \neq 0$, $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ - целый рациональный алгебраический многочлен n-й степени. Если удалось подобрать (любым способом) какой-либо корень x_0 данного уравнения, то для нахождения остальных корней уравнения следует поделить многочлен $P_n(x)$ на разность $x-x_0$ (или целенаправленной группировкой слагаемых, выделяя разность $x-x_0$, разложить этот многочлен на множители). В результате деления образуется некоторый многочлен $Q_{n-1}(x)$, степень которого на единицу меньше первоначальной. Таким образом, задача свелась к решению алгебраического уравнения степени $n-1$:

$$Q_{n-1}(x)=0.$$

***Пример 1.** Решить уравнение* $x^3+x^2-7x+2=0$.

Решение. Заметим, что $x=2$ является корнем данного уравнения. Найдём другие корни этого уравнения:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3+x^2-7x+2 & x-2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2} & x^2+3x-1 \\
-\,3x^2-7x+2 & \\
\underline{3x^2-6x} & \\
-\,-x+2 & \\
\underline{-x+2} & \\
0. &
\end{array}$$

Решая уравнение $x^2+3x-1=0$, находим ещё два корня $\left(-3 \pm \sqrt{13}\right)/2$.

Пример 2. *Решить уравнение* $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+8\cdot 9+9\cdot 10=$
$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\ldots+(x+8)(x+9)+(x+9)(x+10)$.

Решение. Легко заметить, проанализировав структуру уравнения, что числа $x=0$ и $x=-10$ являются решениями данного уравнения. С другой стороны, ясно, что это квадратное уравнение, а поэтому может иметь не более двух корней. Так как два корня уравнения уже подобраны, то других корней нет.

В некоторых случаях, для того чтобы не подбирать корень «вслепую», можно воспользоваться следующим методом.

3. *Метод поиска рациональных корней у многочленов с целыми коэффициентами*

Для решения такого рода уравнений и неравенств используется метод, в основе которого лежит *Теорема 9* из предыдущего пункта. Рассмотрим подробнее суть этого метода. Пусть требуется найти рациональные корни уравнения n-й степени

$$P_n(x)=0,$$

причём все коэффициенты a_i, $i=0,1,2,\ldots,n$, алгебраического многочлена $P_n(x)$ являются целыми числами. Поиск рациональных корней можно свести к перебору ограниченного количества вариантов. Для этого необходимо, *во-первых*, найти все целочисленные делители свободного члена a_0 (их конечное число, однако если этот коэффициент содержит слишком много делителей, то это затрудняет поиск корней в уравнении). Обозначим, например, эти делители через p_i. *Во-вторых*, следует найти все натуральные делители старшего коэффициента уравнения a_n. Обозначим эти делители через q_j. *В-третьих*, надо составить всевозможные дроби вида p_i/q_j. *Наконец*, перебирая по очереди все такие дроби, проверить, является ли в действительности каждая из них корнем данного уравнения. Найдя таким образом первый корень x_1, вы или сразу понижаете степень уравнения делением многочлена $P_n(x)$ на разность $x-x_1$ (причём в силу следствия из теоремы Безу $P_n(x)$ обязательно разделится нацело на этот линейный двучлен) и получаете некоторый многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени на единицу меньшей, чем первоначальная. Или, перебирая все дроби, находите все рациональные корни и уже затем понижаете степень уравнения сразу на столько порядков, сколько рациональных корней удалось найти, и ищете оставшиеся иррациональные корни. В любом случае задача сводится к решению уравнения более низкой степени.

Пример [ВМиК–2003, устн.]. *При каких натуральных* n *уравнение* $2x^4 - x^3 + nx^2 - 1 = 0$ *имеет рациональные корни?*

Решение. Воспользуемся приведённым выше методом. Свободный член имеет два целочисленных делителя: ± 1, а старший коэффициент – два натуральных делителя: 1,2. Поэтому рациональные корни следует искать среди чисел $x \in \{\pm 1; \pm 1/2\}$. Подставим их поочерёдно в уравнение.

$$x = 1 \quad : \quad 2 \cdot 1^4 - 1^3 + n \cdot 1^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow n = 0 \notin N;$$

$$x = -1 \quad : \quad 2 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + n \cdot (-1)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow n = -2 \notin N;$$

$$x = 1/2 \quad : \quad 2 \cdot (1/2)^4 - (1/2)^3 + n \cdot (1/2)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow n = 4;$$

$$x = -1/2 : \quad 2 \cdot (-1/2)^4 - (-1/2)^3 + n \cdot (-1/2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow n = 3.$$

Ответ: $n \in \{3; 4\}$.

4. *Метод неопределённых коэффициентов*

Иногда для решения целых алгебраических уравнений (неравенств) с одной или несколькими неизвестными используют *метод неопределённых коэффициентов*. Пусть, например, решается уравнение

$$P_n(x) = 0.$$

Суть метода состоит в том, что многочлен $P_n(x)$ в левой части уравнения представляется в виде произведения линейных $(a_i x + b_i)$ и(или) квадратичных $c_l x^2 + d_l x + e_l$ сомножителей с неизвестными (неопределёнными) коэффициентами a_i, b_i, c_l, d_l, e_l $(i = 1,2,\ldots, p;\ l = 1,2,\ldots \ldots, q)$. Чтобы найти эти коэффициенты, раскрывают скобки в указанном произведении и приводят образовавшийся при этом многочлен $Q_n(x)$ к стандартному виду. Так как два многочлена $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ одной степени тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, то, приравнивая эти коэффициенты, получают систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Эту систему решают (или подбирают любое решение). Найденные таким способом коэффициенты a_i, b_i, c_l, d_l, e_l становятся определёнными и их значения подставляются в исходное разложение. К недостаткам метода можно отнести то, что получаемая система уравнений для нахождения коэффициентов может оказаться громоздкой и трудной даже в подборе решения.

Рассмотрим применение этого метода на примере решения кубического уравнения. Допустим, требуется решить уравнение

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \ (a_3 \neq 0).$$

Известно, что многочлен третьей степени всегда можно представить в виде произведения многочленов первой и второй степеней. Таким образом, сразу для всех действительных значений переменной x должно выполняться равенство

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv a_3(x-a)(x^2+bx+c), \qquad (1)$$

где числа a, b, c являются в данном случае искомыми *неопределёнными коэффициентами*. Найдём их значения. После этого останется подставить их в правую часть (1) и, приравняв её к нулю, решить уравнение $(x-a)\times$ $\times(x^2+bx+c)=0$ для нахождения всех корней уравнения.

Чтобы найти коэффициенты a, b, c, раскроем скобки в правой части тождества (1) и приведём образовавшийся при этом многочлен к стандартному виду

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv a_3x^3 + a_3(b-a)x^2 + a_3(c-ab)x - a_3ac.$$

Многочлены третьей степени тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая коэффициенты при x^2, x и свободные члены, получаем систему трёх алгебраических уравнений относительно трёх неизвестных a, b, c:

$$\begin{cases} a_2 = a_3(b-a) \\ a_1 = a_3(c-ab) \\ a_0 = -a_3ac, \end{cases}$$

решая которую (можно даже просто подобрать любое решение этой системы) находим коэффициенты.

***Пример 1**. Решить уравнение* $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решение. Воспользуемся для решения методом неопределённых коэффициентов. Будем искать разложение многочлена, стоящего в левой части уравнения, в виде

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \equiv (x+a)(x^2+bx+c). \qquad (2)$$

Раскрыв скобки, приведём многочлен в правой части к стандартному виду

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \equiv x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac.$$

Приравнивая коэффициенты слева и справа при x^2, x и свободные члены, получаем в итоге систему трёх уравнений с тремя неизвестными коэффициентами a, b, c:

$$\begin{cases} -2 = a+b \\ -5 = ab+c \\ 6 = ac. \end{cases}$$

Найдя подбором решение $a=-3, b=1, c=-2$, подставим найденные коэффициенты в разложение (2). Таким образом, исходное уравнение приобретает вид $(x-3)(x^2+x-2)=0$. Оно имеет три корня $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=1$.

Пример 2 [МТУСИ–1997]. *При каких значениях a все корни уравнения $x^2-ax+2a=0$ являются корнями уравнения*

$$x^3-(a+1)x^2+3ax+a^2-3a-2=0\ ?$$

Решение. Чтобы первое из уравнений имело корни, необходимо, чтобы его дискриминант был неотрицателен, т.е.

$$D=a(a-8)\ge 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty,0]\cup[8,+\infty).$$

Далее, второй многочлен в силу теоремы Безу должен делиться нацело на первый многочлен. Иными словами, должно найтись такое b, что при всех действительных x справедливо тождество

$$x^3-(a+1)x^2+3ax+a^2-3a-2\equiv(x^2-ax+2a)(x+b),$$

или

$$x^3-(a+1)x^2+3ax+a^2-3a-2\equiv x^3+(b-a)x^2+(2a-ab)x+2ab.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов (в данном случае в их роли выступают a и b) воспользуемся известным фактом, что два кубических многочлена, стоящие по разные стороны от знака равенства, тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Приравнивая эти коэффициенты, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}-(a+1)=b-a\\ 3a=2a-ab\\ a^2-3a-2=2ab,\end{cases} \quad \text{упрощая которую, получаем} \quad \begin{cases}b=-1\\ \left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=2.\end{array}\right.\end{cases}$$

С учётом условия на дискриминант, приходим к ответу: $a=-1$.

5. *Метод умножения на функцию*

Иногда, применяя приём умножения обеих частей уравнения (неравенства) на некоторую функцию, удаётся упростить уравнение (неравенство).

Пример. *Решить уравнение* $x^4-x^3+x^2-x+1=0$.

Решение. Заметим, что $x=-1$ (и вообще никакое отрицательное число) не является корнем данного уравнения. Домножим обе части данного уравнения на выражение $(x+1)$. Получаем уравнение-следствие

$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0,$$

множество решений которого состоит из всех решений исходного уравнения и числа $x = -1$. Это число является посторонним корнем, возникшем как раз в результате умножения уравнения на функцию, имеющую действительный нуль. Применяя известную формулу сокращённого умножения, получаем существенно более простое уравнение $x^5 + 1 = 0$. Поскольку уравнение не имеет других решений, кроме $x = -1$, то приходим к ответу.

Ответ: уравнение не имеет решений.

Рассмотрим некоторые виды целых алгебраических уравнений, решаемые в основном при помощи специально подобранных подстановок.

6. *Двучленные, трёхчленные и биквадратные уравнения*

Двучленным называется уравнение вида

$$x^n - a = 0,$$

где $x^n = a$, где $n \in N$, $n \geq 2$.

Если $n = 2k$, $k \in N$, и $a \geq 0$, то уравнение имеет два различных действительных решения $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$. Если $n = 2k+1$, $k \in N$, то при всех a уравнение имеет корнем только действительное число $x = \sqrt[n]{a}$ (кратности n). Например, уравнение $x^{100} = \pi$ имеет два различных корня $x_{1,2} = \pm\sqrt[100]{\pi}$, а уравнение $x^{101} = -\pi$ имеет один корень $x = \sqrt[101]{-\pi} = -\sqrt[101]{\pi}$.

Уравнение вида $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a \neq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$, называется *трёхчленным уравнением*. При $n = 2$ трёхчленное уравнение принято называть *биквадратным*:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

С помощью подстановки $t = x^n$ трёхчленное уравнение сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$. В зависимости от n и коэффициентов a, b, c трёхчленное уравнение может не иметь решений, иметь одно, два, три и четыре различных действительных корня.

Пример [Физфак]. *Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из корней число $x = 3$. Найти действительные корни уравнения*

$$ax^4 + bx^2 + 2 = 0.$$

Решение. Согласно теореме Виета для квадратного уравнения, $x_1 \cdot x_2 =$ $= 2/a < 0$. Отсюда заключаем, что его корни имеют разные знаки, и так как

$x_1 = 3 > 0$, то неизвестный второй корень $x_2 < 0$. Решим теперь биквадратное уравнение. Сделаем замену $t = x^2$:

$$at^2 + bt + 2 = 0.$$

Заметим, что коэффициенты этого уравнения совпадают с коэффициентами исходного квадратного уравнения, а значит, эти уравнения имеют одинаковые корни. По доказанному выше, один из корней последнего урвнения $t_1 = 3$, а другой $t_2 < 0$, следовательно, решение биквадратного уравнения сводится к решению совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{aligned} x^2 &= t_1 = 3 \\ x^2 &= t_2 < 0. \end{aligned}\right.$$

Первое уравнение имеет два действительных корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, а второе корней не имеет. *Ответ*: $x \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

7. *Однородные уравнения*

Алгебраический многочлен $f(x, y)$ с двумя переменными x и y называется *однородным многочленом* n*-й степени* относительно этих переменных $(n \in N)$, если при любом $t \in R$ имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y). \qquad (1)$$

Это означает, что однородный многочлен n-й степени $f(x, y)$ можно представить в виде

$$f(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \ldots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n,$$

где a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ - коэффициенты многочлена, одновременно не обращающиеся в нуль.

Уравнение $f(x, y) = 0$ называется *однородным алгебраическим уравнением* n*-й степени с двумя неизвестными* x, y, если $f(x, y)$ - однородный многочлен n-й степени относительно этих переменных.

Например, уравнение вида $x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$ является однородным уравнением 2-й степени относительно неизвестных x и y. Действительно, достаточно проверить выполнение условия (1). При одновременной замене $x \to tx$, $y \to ty$ $(t \neq 0)$ получим

$$f(tx,ty)=(tx)^2+5(tx)(ty)-3(ty)^2=t^2(x^2+5xy-3y^2)=t^2f(x,y),$$

т.е. условие (1) из определения выполняется ($n=2$).

Аналогично, уравнение $5xy-2yz+zx=0$ есть однородное уравнение 2-й степени по отношению к неизвестным x,y,z, поскольку при замене $x\to tx$, $y\to ty$, $z\to tz$ получаем

$$f(tx,ty,tz)=5(tx)(ty)-2(ty)(tz)+(tz)(tx)=t^2f(x,y,z).$$

Итак, однородное алгебраическое уравнение – это уравнение, не меняющее своего вида при одновременном умножении всех его неизвестных на одно и то же число, отличное от нуля. Можно распространить понятие однородности на случай *неалгебраических* уравнений.

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ – две произвольные функции, определённые на одном и том же множестве, $n\in N$.

Однородным уравнением n-й степени относительно функций $p(x)$, $q(x)$ называется уравнение вида

$$a_np^n(x)+a_{n-1}p^{n-1}(x)\cdot q(x)+a_{n-2}p^{n-2}(x)\cdot q^2(x)+\dots$$
$$\dots+a_1p(x)\cdot q^{n-1}(x)+a_0q^n(x)=0. \qquad (2)$$

В частности, если функции $p(x)$ и $q(x)$ являются целыми алгебраическими многочленами, то и уравнение (2) будет относиться к аналогичному классу.

В качестве другого примера рассмотрим уравнение вида

$$\sin^2x-7\sin x\cdot\cos x+3\cos^2x=0.$$

Оно является однородным тригонометрическим уравнением 2-й степени относительно функций $\sin x$ и $\cos x$.

Перейдём к *процедуре решения* уравнения (2).

Если хотя бы один из коэффициентов a_n или a_0 обращается в нуль, то левая часть уравнения легко раскладывается на множители. В результате уравнение оказывается равносильно на ОДЗ совокупности двух уравнений. Например, если $a_0=0$, $a_n\neq0$, то получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l}p(x)=0\\ a_np^{n-1}(x)+a_{n-1}p^{n-2}(x)\cdot q(x)+\dots+a_1q^{n-1}(x)=0.\end{array}\right.$$

Если же $a_n\neq0$ и $a_0\neq0$, то для решения однородного уравнения (2) необходимо рассмотреть два возможных случая.

1) Если $q(x)\neq0$, то, поделив обе части уравнения на $q^n(x)$ и обозначив

после этого отношение $p(x)/q(x)$ через t, получим алгебраическое уравнение n-й степени относительно t:

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = 0,$$

решив которое и сделав обратную подстановку, найдём часть решений однородного уравнения.

2) Если $q(x) = 0$, то, подставив в уравнение вместо $q(x)$ нуль, получим, что тогда и $p(x)$ должно обращаться в нуль. Таким образом, этот случай сводится к решению системы уравнений $p(x) = 0$, $q(x) = 0$.

Осталось объединить все найденные решения. Уравнение (2) решено.
Обратимся к примерам.

***Пример 1.** Решить уравнение* $x^4 + 5x^2(x+1) = 6(x+1)^2$..

Решение. Перепишем уравнение: $x^4 + 5x^2(x+1) - 6(x+1)^2 = 0$. Видно, что это однородное уравнение 2-й степени относительно функций $p(x) = x^2$ и $q(x) = x+1$. 1) Пусть $x+1=0$, но система $\begin{cases} x^2 = 0 \\ x+1=0 \end{cases}$ решений не имеет.

2) Пусть теперь $x+1 \neq 0$. Поделив на $(x+1)^2$ и обозначив $t = \dfrac{x^2}{x+1}$, придём к квадратному уравнению $t^2 + 5t - 6 = 0$. Оно имеет два корня $t_1 = -6$, $t_2 = 1$. Возвращаясь к переменной x, приходим к совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 6x + 6 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3} \\ x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{5})/2. \end{array}\right. \quad \textit{Ответ}: x \in \left\{ -3 \pm \sqrt{3}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

***Пример 2.** Решить в целых числах уравнение* $x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0$.

Решение. Заметим, что если $y = 0$, то $x = 0$, и, значит, пара $(0;0)$ удовлетворяет уравнению. Пусть $y \neq 0$, тогда поделим обе части уравнения на y^3:

$$(x/y)^3 + (x/y) + 2 = 0.$$

Обозначим $t = x/y$, тогда имеем кубическое уравнение $t^3 + t + 2 = 0$. Подбором находим корень $t = -1$. Делением многочлена $t^3 + t + 2$ на $t+1$ получам $(t+1)(t^2-t+2)=0$. Убеждаемся в том, что данное кубическое уравнение имеет единственный корень $t=-1$, что соответствует $y=-x$. Положим $x=p$, где p – произвольное целое число, не равное 0. Тогда $y=-p$, и имеем бесконечно много решений в виде пар чисел $(p;-p)$, $p\in Z$, $p\neq 0$. Объединив все полученные решения, приходим к ответу.

Ответ: $(x;y)\in\{(p;-p)\}$, где $p\in Z$.

Пример 3 [ВМиК–2005, устн.]. *Для каждого действительного значения параметра a решить уравнение*

$$x^4+4a^3x=a^4.$$

Решение. Заметим, что данное уравнение можно рассмотреть как однородное алгебраическое уравнение 4-й степени относительно x и a.

1) Если $a=0$, то $x=0$.

2) Если $a\neq 0$, то поделим на a^4, и положим $t=x/a$:

$$t^4+4t-1=0\Leftrightarrow\left(t^4+2t^2+1\right)-2\left(t^2-2t+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2+1\right)^2-2(t-1)^2=0\Leftrightarrow\left(t^2-\sqrt{2}t+1+\sqrt{2}\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1-\sqrt{2}\right)=0.$$

Первый сомножитель в нуль не обращается, а второй имеет два корня

$$t_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$$

Ответ: при $a=0$ единственное решение $x=0$;

при $a\neq 0$ два решения $x_{1,2}=a\left(-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}\right)/2$.

Пример 4. *Найти действительные корни уравнения*

$$(x+y)^2=3(x+1)(y-1).$$

Решение. Данное уравнение в исходном виде не является однородным, но может быть сведено преобразованиями к однородному. Действительно, достаточно привести его к виду

$$((x+1)+(y-1))^2=3(x+1)(y-1)\Leftrightarrow(x+1)^2-(x+1)(y-1)+(y-1)^2=0.$$

Получили однородное уравнение 2-й степени относительно $x+1$ и $y-1$.

1) Если $y\neq 1$, то, поделив на $(y-1)^2$ и обозначив $t=(x+1)/(y-1)$, получим $t^2-t+1=0$ – нет решений.

2) Если $y=1$, то, подставляя в уравнение, находим $x=-1$.

Ответ: $(x;y)\in\{(-1;1)\}$.

8. Симметрические и кососимметрические уравнения

Симметрическим уравнением n-й степени называется алгебраическое уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где равноотстоящие от концов многочлена коэффициенты равны, т.е.

$$a_n = a_0,\ a_{n-1} = a_1,\ a_{n-2} = a_2, \ldots$$

Рассмотрим отдельно решение симметрических уравнений чётной и нечётной степеней [30].

Если $n = 2k$ ($k \in N$, $k > 1$), то поделим уравнение на x^k и сделаем замену $y = x + 1/x$. В результате получим алгебраическое уравнение степени в два раза ниже первоначальной, решив которое и сделав обратную подстановку, найдём все решения уравнения.

Если же $n = 2k+1$ ($k \in N$), то одним из корней уравнения всегда будет $x = -1$. Делением многочлена в левой части уравнения на $x+1$ задача сводится к решению симметрического уравнения степени $n = 2k$, метод решения которого рассматривался выше.

Пример 1. *Решить уравнение* $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение. Очевидно, имеем симметрическое уравнение 5-й степени. Решаем его по изложенной выше схеме. Одним из корней уравнения будет число $x = -1$. Найдём другие корни:

$$
\begin{array}{r|l}
-\ 2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2 & \ \ x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^5+2x^4\qquad\qquad\qquad\qquad} & 2x^4+x^3-6x^2+x+2 \\
-\ x^4-5x^3-5x^2+3x+2 & \\
\underline{x^4+x^3\qquad\qquad\qquad\quad} & \\
-\ -6x^3-5x^2+3x+2 & \\
\underline{-6x^3-6x^2\qquad\qquad} & \\
-\ x^2+3x+2 & \\
\underline{x^2+x\qquad} & \\
-\ 2x+2 & \\
\underline{2x+2} & \\
0. &
\end{array}
$$

Решим симметрическое уравнение 4-й степени

$$2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0.$$

Поделим для этого обе части уравнения на x^2:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0.$$

Обозначим $y=x+(1/x)$, тогда

$$2(y^2-2)+y-6=0 \Leftrightarrow 2y^2+y-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-5/2 \\ y=2. \end{array}\right.$$

Выполняя обратную подстановку, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2} \\ x+\dfrac{1}{x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+5x+2=0 \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1/2 \\ x=1. \end{array}\right.$$

Объединяя полученные решения, приходим к ответу: $x\in\{-2;-1;-1/2;\ 1\}$.

Кососимметрическим уравнением n-й степени называется уравнение вида

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0,$$

где равноотстоящие от концов многочлена коэффициенты являются противоположными числами, т.е. $a_n=-a_0$, $a_{n-1}=-a_1$, $a_{n-2}=-a_2$,…

Решение кососимметрических уравнений чётной и нечётной степени во многом аналогично решению соответствующих симметрических уравнений.

Если $n=2k$ ($k\in N$, $k>1$), то делением обеих частей уравнения на x^k и заменой $y=x-1/x$ получим алгебраическое уравнение степени в два раза ниже первоначальной, решив которое и сделав обратную подстановку, найдём решения уравнения.

Если же $n=2k+1$ ($k\in N$), то одним из корней уравнения всегда будет $x=1$, поэтому делением на $x-1$ получаем кососимметрическое уравнение степени $n=2k$. Задача свелась к предыдущей.

Пример 2. *Решить уравнение* $2x^4+3x^3-3x^2-3x+2=0$.

Решение. Это кососимметрическое уравнение 4-й степени. Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения, то поделим обе его части на x^2:

$$2x^2+3x-3-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0.$$

Положим $y=x-(1/x)$, тогда получим

$$2\left(y^2+2\right)+3y-3=0 \Leftrightarrow 2y^2+3y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1/2 \\ y=-1. \end{array}\right.$$

Выполняя обратную подстановку, получаем 4 решения

$$\left[\begin{array}{l} x-1/x=-1/2 \\ x-1/x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\left(-1\pm\sqrt{17}\right)/4 \\ x=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2. \end{array}\right.$$

Пример 3 [Химфак, Наук о материалах–2008, 7]. *Найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$x^4+(a+1)x^3+(2a+1)x^2-(a+1)x+1=0$$

на промежутке $(-\infty,-1)$ имеет не менее двух корней.

Решение. Так как $x\neq 0$, то делением уравнения на x^2, группировкой слагаемых с одинаковыми коэффициентами и заменой $y=x-(1/x)$, получаем равносильное уравнение

$$y^2+(a+1)y+2a+3=0.$$

Поскольку функция $y=x-(1/x)$ возрастает на промежутке $(-\infty,-1)$ от $-\infty$ до $f(-1)=0$, то исходное уравнение имеет не менее двух корней на $(-\infty,-1)$ тогда и только тогда, когда, когда полученное уравнение имеет два отрицательных корня $y_{1,2}\in(-\infty,0)$, т.е. когда

$$\left\{\begin{array}{l} y_1+y_2<0,\ \ y_1y_2>0, \\ D>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+1>0,\ 2a+3>0, \\ (a+1)^2-4(2a+3)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a>3+\sqrt{20}.$$

Ответ: $a\in\left(3+\sqrt{20},+\infty\right)$.

9. *Возвратные уравнения*

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+a_2x^{2n-1}+\ldots+a_nx^{n+1}+\lambda a_nx^n+\lambda^3a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+$$
$$+\lambda^{2n-1}a_1x+\lambda^{2n+1}a_0=0, \qquad (1)$$

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+\lambda a_{n-1}x^{n-1}+$$
$$+\lambda^2a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+\lambda^na_0=0, \qquad (2)$$

где λ – фиксированное число и $a_0 \neq 0$, называются *возвратными уравнениями* соответственно нечётной и чётной степеней. При $\lambda = 1$ уравнения (1) и (2) являются, в частности, симметрическими уравнениями соответственно нечётной и чётной степеней, при $\lambda = -1$ – кососимметрическими.

Возвратное уравнение нечётной степени (1) всегда имеет корень $x = -\lambda$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0\left(x^{2n+1} + \lambda^{2n+1}\right) + a_1 x\left(x^{2n-1} + \lambda^{2n-1}\right) + \ldots + a_n x^n (x + \lambda) = 0,$$

и при $x = -\lambda$ выражения в каждой скобке обращаются в нуль. Выделив множитель $x + \lambda$ из каждой скобки, можно доказать, что уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений: уравнения $x + \lambda = 0$ и некоторого возвратного уравнения чётной степени.

Для решения возвратного уравнения чётной степени (2) поступают следующим образом. Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, то, разделив уравнение (2) на x^n и сгруппировав члены, получим уравнение

$$a_0\left(x^n + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^n\right) + a_1\left(x^{n-1} + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + a_n = 0. \qquad (3)$$

Положим $x + \dfrac{\lambda}{x} = u$, тогда имеем $x^2 + \left(\dfrac{\lambda}{x}\right)^2 = u^2 - 2\lambda$,

$$x^3 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{\lambda}{x}\right)^3 - 3\lambda\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) = u^3 - 3\lambda u,$$

$$x^4 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^4 = \left(x + \frac{\lambda}{x}\right)^4 - 4\lambda\left(x^2 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^2\right) - 6\lambda^2 = u^4 - 4\lambda u^2 + 2\lambda^2$$

и т.д., и уравнение (3) степени $2n$ относительно x в результате такой замены преобразуется к виду алгебраического уравнения степени n относительно u. Таким образом, степень уравнения стала ниже в два раза. Если теперь удастся решить полученное уравнение степени n, то тогда можно будет найти все решения уравнения (2).

***Пример**. Решить уравнение* $x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 24x - 32 = 0$.

Решение. Заметим при внимательном анализе структуры уравнения, что его можно переписать в виде

$$x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2(-2) + 3x(-2)^3 + (-2)^5 = 0,$$

откуда следует, что данное уравнение относится к возвратным уравнениям степени 5 (при $\lambda = -2$). Так как согласно теории $x = 2$ является его корнем, то, сгруппировав члены уравнения, приведём уравнение к виду

$$\left(x^5 - 32\right) + 3x\left(x^3 - 8\right) - x^2(x-2) = 0.$$

Применяя формулы разности пятых и третьих степеней и выделяя множитель $(x-2)$, преобразуем уравнение к виду

$$(x-2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right) + 3x(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) - x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16 = 0. \end{array}\right.$$

Второе из уравнений совокупности является возвратным уравнением четвёртой степени с $\lambda = 4$, поскольку его можно переписать в виде

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x \cdot 4 + 4^2 = 0.$$

Так как $x = 0$, очевидно, не является корнем последнего уравнения, то, поделив его на x^2 и сгруппировав члены, получим равносильное уравнение

$$\left(x^2 + \frac{4^2}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{4}{x}\right) + 9 = 0.$$

Сделав замену $x + (4/x) = u$, приходим к квадратному уравнению

$$u^2 + 5u + 1 = 0,$$

имеющему корни

$$\left[\begin{array}{l} u = \left(-5 + \sqrt{21}\right)/2 \\ u = \left(-5 - \sqrt{21}\right)/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + (4/x) = \left(-5 + \sqrt{21}\right)/2 \\ x + (4/x) = \left(-5 - \sqrt{21}\right)/2. \end{array}\right.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, второе имеет два корня $x = \dfrac{-5 - \sqrt{21} \pm \sqrt{10\sqrt{21} - 18}}{4}$. Объединяя решения, приходим к ответу.

Ответ: $x \in \left\{2; \dfrac{-5 - \sqrt{21} \pm \sqrt{10\sqrt{21} - 18}}{4}\right\}$.

10. ***Уравнения вида*** $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$, где a, b, c – заданные числа, отличные от нуля, решаются с помощью замены неизвестной, произведённой по формуле $y = x + (a + b)/2$, приводящей уравнение к симметричному виду, в результате чего решение уравнения 4-й степени общего вида оказывается сведено к решению биквадратного уравнения.

***Пример**. Решить уравнение* $(x-1)^4+(x+3)^4=82$.

Решение. Положим $y=\dfrac{(x-1)+(x+3)}{2}=x+1$ (симметризирующая подстановка), тогда уравнение приведётся к более удобному симметричному виду

$$(y-2)^4+(y+2)^4=82.$$

Применяя формулу сокращённого умножения

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

получаем биквадратное уравнение $2y^4+48y^2+2\cdot16=82$. Поскольку корни квадратного уравнения $z^2+24z-25=0$ есть $z=1$ и $z=-25$, то находим $y=\pm1$ и, следовательно, $x=0$ и $x=-2$. *Ответ*: $x\in\{-2;0\}$.

11. *Уравнения вида* $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$, где $a<b<c<d$, $b-a=d-c$, $A\neq0$.

Для решения уравнения сгруппируем вначале сомножители попарно:

$$((x-a)(x-d))((x-b)(x-c))=A,$$

или

$$(x^2-(a+d)x+ad)(x^2-(b+c)x+bc)=A.$$

Так как $a+d=b+c$, то выполним после этого симметризирующую подстановку $y=x^2-(a+d)x+\dfrac{ad+bc}{2}$, в результате чего получим уравнение

$$\left(y-\frac{bc-ad}{2}\right)\left(y+\frac{bc-ad}{2}\right)=A\ \Leftrightarrow\ y^2=A+\left(\frac{bc-ad}{2}\right)^2,$$

откуда (при условии неотрицательности правой части) находим $y=\pm\sqrt{A+((bc-ad)/2)^2}$ и, возвращаясь к первоначальной переменной, сводим задачу к решению двух квадратных уравнений:

$$x^2-(a+d)x+\frac{ad+bc}{2}\mp\sqrt{A+\left(\frac{bc-ad}{2}\right)^2}=0.$$

<u>Замечание</u>. Любое уравнение этого вида можно решать иначе, а именно с помощью симметризирующей подстановки

$$y=\frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)}{4}=x-\frac{a+b+c+d}{4}$$

сводить к биквадратному уравнению

$$\left(y+\frac{d-a}{2}\right)\left(y+\frac{c-b}{2}\right)\left(y-\frac{c-b}{2}\right)\left(y-\frac{d-a}{2}\right)=A,$$

$$\left(y^2-\left(\frac{d-a}{2}\right)^2\right)\left(y^2-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2\right)=A \text{ и так далее.}$$

Пример [Мос.гос.вечер. металлург.ин-т–1998]. *Решить уравнение*

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24.$$

Решение. *1-й способ*. Перепишем уравнение в виде:

$$((x+1)(x+4))((x+2)(x+3))=24 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$. Обозначим $y=x^2+5x+5$, тогда $(y-1)(y+1)=24 \Leftrightarrow y=\pm5$. Следовательно, осталось решить два квадратных уравнения $x^2+5x+5=\pm5$. Одно из них даёт корни $x=0$ и $x=-5$, а другое не имеет решений.

2-й способ. Сделаем подстановку $y=x+\dfrac{1+2+3+4}{4}=x+\dfrac{5}{2}$, тогда:

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)=24 \Leftrightarrow \left(y^2-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-\frac{1}{4}\right)=24$$

$\Leftrightarrow 16y^4-40y^2-375=0$. При этом дискриминант $D=160^2$, и единственный положительный корень $y^2=25/4 \Leftrightarrow (x+5/2)^2=(5/2)^2$.

Отсюда приходим к тому же ответу.

12. *Уравнения вида* $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2$, где $a\cdot c\cdot A\neq0$.

Уравнение этого вида не имеет корня $x=0$, поэтому, разделив его на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$\left(ax+\frac{c}{x}+b_1\right)\left(ax+\frac{c}{x}+b_2\right)-A=0,$$

которое после замены неизвестной $y=ax+(c/x)$ преобразуется в квадратное уравнение, решение которого не представляет трудностей.

Пример. *Решить уравнение* $(x^2+x+2)(x^2+2x+2)=2x^2$.

Решение. Так как $x=0$ не является корнем уравнения, то, разделив его на x^2, получим уравнение

$$\left(x+1+\frac{2}{x}\right)\left(x+2+\frac{2}{x}\right)=2.$$

Делая замену $y=x+(2/x)$, получим квадратное уравнение $(y+1)(y+2)=2$, которое имеет два корня $y=0$, $y=-3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+2/x=0 \\ x+2/x=-3, \end{array}\right.$$

решая которую находим корни. *Ответ*: $x\in\{-2;-1\}$.

13. *Уравнения вида* $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=Ax^2$, где $ab=cd\neq 0$, $A\neq 0$.

Для решения уравнения такого типа вначале преобразуем его:

$$((x-a)(x-b))((x-c)(x-d))=Ax^2,$$

$$(x^2-(a+b)x+ab)(x^2-(c+d)x+cd)=Ax^2.$$

Разделив далее обе части уравнения на $x^2\neq 0$, получим уравнение

$$\left(x+\frac{ab}{x}-(a+b)\right)\left(x+\frac{cd}{x}-(c+d)\right)=A.$$

Так как $ab=cd$, то, выполнив замену $y=x+ab/x$, приходим к квадратному уравнению $(y-(a+b))(y-(c+d))=A$ и так далее.

Пример [МГИМО–1997]. *Выберите промежуток, содержащий сумму всех корней уравнения* $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)=4x^2$:

А) $(0,6)$; *Б)* $(6,12)$; *В)* $(12,18)$; *Г)* $(18,24)$; *Д) ответы А) – Г) – неверные.*

Решение. $((x-1)(x-8))\,((x-2)(x-4))=4x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2-9x+8)(x^2-6x+8)=4x^2 \Leftrightarrow (x+8/x-9)(x+8/x-6)=4.$$

Положим $y=x+(8/x)$, тогда $(y-9)(y-6)=4$. Можно обозначить далее $z=y-7$, тогда $(z-2)(z+1)=4 \Leftrightarrow z=-2$ или $z=3$. Делая обратную подстановку, приходим к квадратному уравнению $x^2-10x+8=0$, для которого по теореме Виета находим $x_1+x_2=10$ (действительные корни есть, так как дискриминант положителен). Поскольку $10\in(6,12)$, то, следовательно, правильный ответ будет Б).

14. ***Уравнения вида*** $a\left(cx^2+p_1x+q\right)^2+b\left(cx^2+p_2x+q\right)^2=Ax^2$, где $q\neq0$, $A\neq0$, $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$.

Рассмотрим метод решения такого рода уравнений. Так как $x=0$ не является корнем уравнения, то поделим его на x^2:

$$a\left(cx+\frac{q}{x}+p_1\right)^2+b\left(cx+\frac{q}{x}+p_2\right)^2=A.$$

После замены $y=cx+(q/x)$ уравнение приводится к виду квадратного относительно y.

Пример. *Решить уравнение*

$$3\left(x^2+2x-1\right)^2-2\left(x^2+3x-1\right)^2+5x^2=0.$$

Решение. Поскольку $x\neq0$, то уравнение равносильно следующему уравнению

$$3\left(x+2-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+3-\frac{1}{x}\right)^2+5=0.$$

Обозначим $y=x-\dfrac{1}{x}$: $3(y+2)^2-2(y+3)^2+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1/x=-1 \\ x-1/x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2 \\ x=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2. \end{array}\right.$ *Ответ*: $x\in\left\{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

15. ***Тригонометрические подстановки***

Известный приём использования различных тригонометрических подстановок применим и к целым алгебраическим уравнениям.

Пример [Биолог.–1985]. *Сколько корней на отрезке* $[0,1]$ *имеет уравнение* $8x\left(2x^2-1\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1$*?*

Решение. Поскольку, по условию, $x\in[0,1]$, то для любого такого x существует единственное $t\in[0,\pi/2]$ такое, что $x=\cos t$. С другой стороны, каждому $t\in[0,\pi/2]$ по формуле $x=\cos t$ ставится в соответствие единственное $x\in[0,1]$. Это означает, что между множествами значений x и t (отрезками $[0,1]$ и $[0,\pi/2]$ соответственно) установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому исходная задача сводится данной тригонометрической подстановной $x = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$, к равносильной задаче определения количества решений тригонометрического уравнения

$$8\cos t\left(2\cos^2 t - 1\right)\left(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1\right) = 1$$

на отрезке $[0, \pi/2]$. Итак,

$$8\cos t \cdot \cos 2t\left(8\cos^2 t\left(\cos^2 t - 1\right) + 1\right) = 1,$$

$$8\cos t \cdot \cos 2t\left(-2\sin^2 2t + 1\right) = 1 \Leftrightarrow 8\cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t = 1. \qquad (1)$$

Чтобы решить полученное уравнение, его следует умножить на $\sin t$. Проверим предварительно, будут ли значения неизвестной t, удовлетворяющие равенству $\sin t = 0$, решениями уравнения. Если $\sin t = 0$, то

$$\cos t = \pm 1,\ \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1,\ \cos 4t = 2\cos^2 2t - 1 = 1,$$

Следовательно, левая часть уравнения (1) принимает при таких t значения ± 8, а правая равна 1. Это означает, что все корни уравнения

$$4(2\sin t\cos t)\cos 2t \cdot \cos 4t = \sin t,$$

такие, что $\sin t = 0$, будут посторонними корнями и в ответ не войдут. Несколько раз применяя формулу синуса двойного аргумента, приходим к уравнению

$$\sin 8t = \sin t,$$

решая которое, находим две серии

$$\left[\begin{array}{l} t = 2\pi k/7,\ k \in Z \\ t = (2n+1)\pi/9,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Из первой серии в отрезок $[0, \pi/2]$ попадают два значения $t_1 = 0$ и $t_2 = 2\pi/7$, а из второй серии – значения $t_3 = \pi/9$ и $t_4 = \pi/3$. Но $\sin t_1 = 0$, поэтому остаётся три корня. *Ответ*: уравнение имеет на $[0,1]$ ровно три корня.

Замечание. Задачу можно было решить также, используя тригонометрическую замену $x = \sin t$, где $t \in [0, \pi/2]$.

16. *Частичная замена переменной и сведение к системе*

Иногда, чтобы решить уравнение, прибегают к следующему способу. Вводят новую переменную (новые переменные), но при этом в уравнении оставляют и старую переменную (старые переменные). То есть не полностью переходят в уравнении к новой переменной, а частично. В результате решение уравнения оказывается сведено к решению системы уравнений. Может оказаться, что система решается легче, чем исходное уравнение. Именно в этих случаях и рекомендуется использование этого подхода.

Пример 1. *Решить уравнение* $(x^2+3x-2)^2+3(x^2+3x-2)-2=x$.

Решение. Введём новую переменную, положив $y=x^2+3x-2$. Тогда, очевидно, уравнение равносильно следующей системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x^2+3x-2=y \\ y^2+3y-2=x. \end{cases}$$

Решение этой системы относительно x будет решением исходного уравнения. Для решения системы вычтем почленно из одного уравнения другое и получим следствие

$$(y^2-x^2)+3(y-x)=-(y-x),$$

которое легко расщепляется на совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} y-x=0 \\ y+x+4=0. \end{array}\right.$$

1) Подставляя $y=x$ во второе уравнение системы, получаем квадратное уравнение $x^2+2x-2=0$, откуда $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$.

2) Подставим теперь во второе уравнение системы $y=-x-4$: x^2+4x+ $+2=0$, откуда находим $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{2}$. Объединяя, получаем ответ.

Ответ: $x\in\{-1\pm\sqrt{3};-2\pm\sqrt{2}\}$.

Пример 2 [МГИМО]. *Вычислить разность между максимальным и минимальным действительными корнями уравнения*

$$(12-x^2)(x+2)^2=4x^2.$$

Решение. Так как $x=-2$ не является корнем, то поделим на $(x+2)^2$ и получим равносильное уравнение

$$12-x^2=(2x/(x+2))^2.$$

Сделаем замену $y=2x/(x+2)$, тогда уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y=2x/(x+2) \\ 12-x^2=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y(x+2) \\ x^2+y^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2(x-y) \\ (x-y)^2+2xy=12. \end{cases}$$

Пусть $u=x-y$, $v=xy$: $\begin{cases} v=2u \\ u^2+2v=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-6 \\ v=-12 \end{cases}$ или $\begin{cases} u=2 \\ v=4. \end{cases}$ У 1-й системы нет решений, а из второй находим $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5} \Rightarrow |x_1-x_2|=2\sqrt{5}$.

17. *Графический подход (метод координат)*

Графический подход обладает большой наглядностью, что, безусловно, можно отнести к его достоинствам, но имеет тот недостаток, что не всегда с его помощью можно определить точные значения решений. Чаще он используется для обоснования наличия решений в задаче, а также при оценке их количества.

Пример 1 [ВМиК–1998, устн.]. *Построить на плоскости Oab геометрическое место точек $(a;b)$, для которых у уравнения*

$$ax^2 + 2bx - a + 4 = 0$$

а) нет решений; б) ровно одно решение; в) ровно два решения.

Решение. Найдём дискриминант: $D = 4\left((a-2)^2 + b^2 - 4\right)$.

а) Уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

Искомое ГМГ представляет собой объединение открытого круга радиуса 2 с центром в точке $(2;0)$ и точки начала координат.

б) Уравнение имеет ровно 1 решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$$

Искомое ГМГ представляет собой объединение окружности радиуса 2 с центром в точке $(2;0)$ и оси ординат (с выколотой точкой начала координат).

в) Уравнение имеет ровно 2 решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0. \end{cases}$$

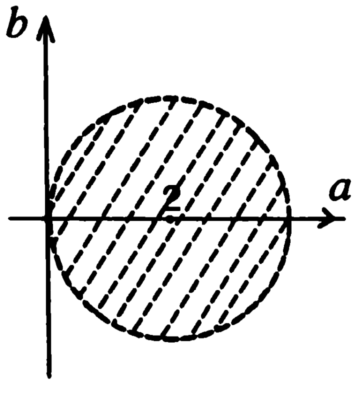


Рис. а)

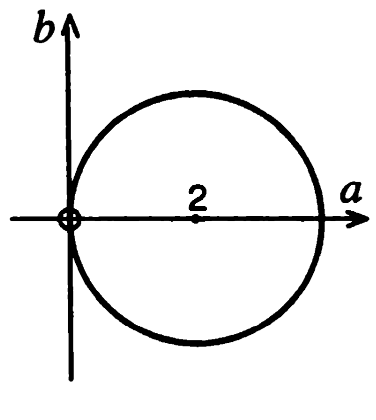


Рис. б)

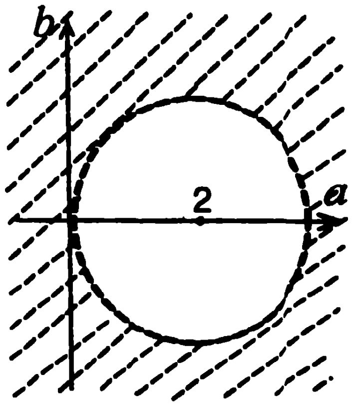


Рис. в)

Искомое ГМГ представляет собой внешнюю часть круга радиуса 2 с центром в точке $(2;0)$ (без оси ординат).

Соответствующие фигуры изображены выше на рисунках.

Пример 2 [Химфак–2007]. *Прямая l_1 проходит через точки $(-3;2)$ и $(1;1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5;4)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.*

Решение. Пусть $y = ax + b$ – уравнение прямой l_1. Найдём коэффициенты a и b:

$$\begin{cases} 2 = -3a + b \\ 1 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/4 \\ b = 5/4. \end{cases}$$

Если $y = cx + d$ – уравнение прямой l_2, то по условию

$$\begin{cases} c = -1/a \\ 4 = -5c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ d = 24. \end{cases}$$

Для точки $(x; y)$ пересечения прямых l_1 и l_2 имеем

$$\begin{cases} y = -x/4 + 5/4 \\ y = 4x + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -91/17 \\ y = 44/17. \end{cases}$$

Пример 3 [ВШЭ]. *Сколько различных корней имеет уравнение*

$$2x^3 - ax^2 + 1 = 0$$

при различных значениях параметра a?

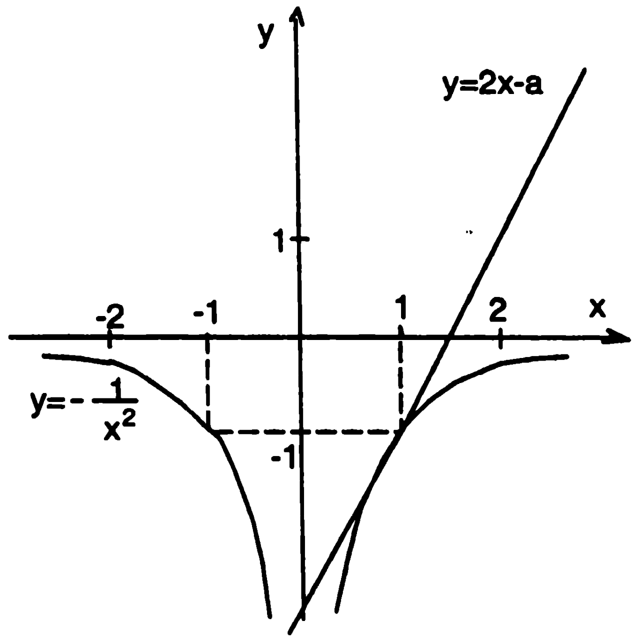
Решение. Перепишем, например, уравнение в эквивалентном виде

$$x^2(2x - a) = -1 \Leftrightarrow 2x - a = -1/x^2$$

и решим его графически. Для этого построим в одной прямоугольной системе координат графики дробно-рациональной $y = -1/x^2$ и линейной $y = 2x - a$ функций. Определим, при каком значении параметра a прямая $y = 2x - a$ касается кривой $y = -1/x^2$. Выпишем для этого уравнение касательной к графику этой функции в точке $(x_0; y(x_0))$:

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x_0^2} + \frac{2}{x_0^3}(x - x_0).$$

Данная касательная и прямая $y = 2x - a$ параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны: $2/x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$.



Подставим $x_0 = 1$ в уравнение касательной:

$$y = -1 + 2(x-1) = 2x - 3.$$

Отсюда получаем, что касание происходит при $a = 3$.

Ответ: при $a < 3$ — 1 решение; при $a = 3$ — 2 решения; при $a > 3$ — 3 решения.

3.3.2. Рациональные алгебраические уравнения и неравенства

1. *Рациональным алгебраическим уравнением с одним неизвестным* x называется уравнение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - целые алгебраические многочлены.

В частности, если $Q(x) \equiv C$ $(C = const)$, то уравнение (1) превращается в *целое* рациональное уравнение. В общем случае, когда $Q(x)$ - алгебраический многочлен ненулевой степени, имеем *дробно-рациональное* алгебраическое уравнение.

Если решаемое уравнение имеет вид

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x),$$

где $G(x)$ - также некоторый алгебраический многочлен, то, как правило, его следует привести к виду (1) и уже затем решать:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - G(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{P(x) - G(x)\cdot Q(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)} = 0,$$

где $\tilde{P}(x) = P(x) - G(x)\cdot Q(x)$.

Основной метод решения дробно-рациональных уравнений состоит в том, что уравнение (1) сводится к равносильной ему системе, включающей целое алгебраическое уравнение и такого же вида неравенство:

$$\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

Так как решение дробно-рациональных алгебраических уравнений сводится в конечном счёте к решению целых уравнений, а основные способы решения последних уже рассматривались выше, то в данном пункте на решении рациональных *уравнений* мы подробно останавливаться не будем.

Пример 1 [Почвовед.–2000, май]. *Решить уравнение*

$$\frac{x^{17}-1}{1-x^{15}}=\frac{1-x^{15}}{x^{13}-1}.$$

Решение. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} (x^{17}-1)(x^{13}-1)=(1-x^{15})^2 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{30}-x^{17}-x^{13}+1=1-2x^{15}+x^{30} \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{13}(x^4-2x^2+1)=0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{13}(x^2-1)^2=0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Пример 2. *Решить уравнение при всех действительных значениях параметра* a :

$$\frac{3a}{x-a}-\frac{a}{x-2a}=\frac{a}{x-a}-\frac{2a}{x-2a}.$$

Решение. Приведём подобные члены $\dfrac{2a}{x-a}+\dfrac{a}{x-2a}=0$ и затем приведём обе дроби к одному знаменателю:

$$\frac{2a(x-2a)+a(x-a)}{(x-a)(x-2a)}=0.$$

Полученное дробно-рациональное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} a(3x-5a)=0 \\ x\neq a;\ x\neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ x=5a/3 \end{array}\right. \\ x\neq a; \quad x\neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ x\neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5a/3 \\ 5a/3\neq a;\ 5a/3\neq 2a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: при $a=0$ $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; при $a\neq 0$ $x=5a/3$.

2. Неравенство одного из следующих видов

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}<0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\le 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\ne 0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – целые алгебраические многочлены, называется *рациональным (алгебраическим) неравенством.*

Остановимся на основных методах решения неравенств.

Общий метод решения дробных неравенств

Один из самых общих методов решения дробных (не обязательно рациональных) неравенств состоит в сведении неравенства к равносильной ему совокупности двух систем, например:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}P(x)\ge 0\\ Q(x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}P(x)\le 0\\ Q(x)<0,\end{cases}\end{array}\right. \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}P(x)>0\\ Q(x)<0\end{cases}\\ \begin{cases}P(x)<0\\ Q(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Заметим также, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x)<0,\ \text{но}\ \frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}P(x)\cdot Q(x)\ge 0\\ Q(x)\ne 0.\end{cases}$$

Если решаемое неравенство имеет вид

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee G(x)$$

(знак $\vee$ здесь заменяет любой из знаков неравенств), то, как правило, его следует привести к стандартному виду и уже затем решать:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-G(x)\vee 0 \Leftrightarrow \frac{P(x)-G(x)\cdot Q(x)}{Q(x)}\vee 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}\vee 0,$$

где $\tilde{P}(x)=P(x)-G(x)\cdot Q(x)$.

Пример 1 [Социолог.–2007]. *Решить неравенство*

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)}\ge -1.$$

Решение. $\dfrac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)}+1\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x^3+66x)}{(x+2)(x+5)(x+8)}\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x+2)(x+5)(x+8)}\geq 0.$$

Далее неравенство решается методом интервалов (см. о методе интервалов далее). *Ответ*: $x\in(-\infty,-8)\cup(-5,-2)\cup[0,+\infty)$.

В следующем примере необходимо найти графический образ решения неравенства с двумя неизвестными на соответствующей координатной плоскости.

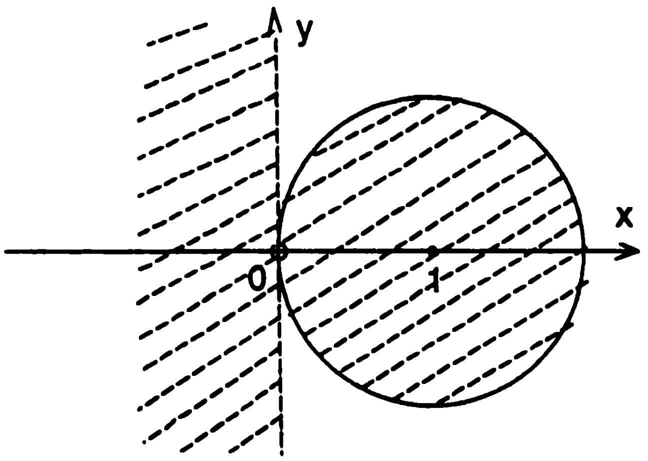
Пример 2 [Геолог.–2003, устн.]. *На плоскости* Oxy *изобразить множество точек* $(x;y)$, *координаты которых удовлетворяют неравенству*

$$\frac{x^2+y^2}{x}\leq 2.$$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{x^2+y^2}{x}-2\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+y^2}{x}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2+y^2-1}{x}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)^2+y^2\geq 1\\ x<0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-1)^2+y^2\leq 1\\ x>0.\end{cases}\end{array}\right.$$



Графическим образом решений первой системы является пересечение внешней части круга единичного радиуса с центром в точке $(1;0)$ и полуплоскости $x<0$. Решение же второй системы на координатной плоскости представляет собой пересечение замкнутого круга единичного радиуса с центром в $(1;0)$ и полуплоскости $x>0$. Объединяя обе фигуры, получим окончательно ГМТ, изображённое на рисунке.

<u>*Замечание*</u>. Если в неравенстве вида

$$P(x)\cdot Q(x)\vee 0$$

($P(x), Q(x)$ – любые функции, а знак $\vee$ заменяет любой из знаков неравенства) один из сомножителей неотрицателен (неположителен) на ОДЗ, то обычно рассматривают два случая: 1) когда он равен нулю или 2) сохраняет постоянный знак. В первом случае все его корни проверяют, являются ли они решениями неравенства, а во втором случае на этот сомножитель делят обе части неравенства (с учётом знака), и получают в результате более простую задачу.

Пример 3 [Геолог.–2001, май, устн.]. *Решить неравенство*

$$x^3 + x \le 2x^2.$$

Решение. Переписав неравенство в виде $x(x-1)^2 \le 0$, заметим, что в левой его части содержится неотрицательный сомножитель $(x-1)^2$. Очевидно, $x = 1$ является решением. Чтобы найти оставшиеся (не равные единице!) решения, разделим неравенство на $(x-1)^2 > 0$, и придём к неравенству $x \le 0$.

Ответ: $x \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$.

Пример 4 [Геолог.–1988]. *Решить неравенство*

$$(x^2 + 8x + 15)\sqrt{x+4} \ge 0.$$

Решение. ОДЗ: $x \ge -4$. Очевидно, что $x = -4$ является решением данного неравенства. Найдём другие решения. Итак, пусть $x > -4$, тогда поделив обе части неравенства на положительное выражение $\sqrt{x+4}$ (с сохранением знака неравенства), придём к равносильному неравенству

$$x^2 + 8x + 15 \ge 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+5) \ge 0.$$

Решая последнее неравенство и учитывая ОДЗ, получаем $x \in [-3, +\infty)$. Объединяя полученный промежуток с ранее найденным решением, приходим к ответу.

Ответ: $x \in \{-4\} \cup [-3, +\infty)$.

Пример 5 [Геолог.–1994, май]. *Решить неравенство*

$$|x| \cdot (x^4 - 2x^2 - 3) \ge 0.$$

Решение. Заметим, что $x = 0$ является решением неравенства. Чтобы найти ненулевые решения, поделим обе части на $|x|$ $(|x| > 0)$, и сведём, таким образом, задачу к решению биквадратного неравенства:

$$x^4 - 2x^2 - 3 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1) \ge 0.$$

После сокращения на положительное выражение $x^2 + 1$ получаем неравенство $x^2 - 3 \ge 0$. *Ответ*: $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}, +\infty)$.

Пример 6 [Геолог.–1998, май]. *Решить неравенство*

$$(x^2 + 5x - 6) \cdot |x+4|^{-1} < 0.$$

Решение. ОДЗ: $x \neq -4$. Поскольку на ОДЗ сомножитель $|x+4|^{-1}$ положителен, поделим на него обе части неравенства, получив равносильное неравенство $x^2+5x-6<0$. Решением неравенства является интервал $-6<x<1$. С учётом ОДЗ получаем: $x \in (-6,-4) \cup (-4,1)$.

Метод интервалов для решения неравенств

Наряду с указанным выше общим методом, неравенства (рациональные алгебраические в том числе) часто решаются *методом интервалов* (не путать с методом интервалов для задач с модулями). Метод интервалов, пожалуй, является одним из самых распространённых методов решения неравенств вида

$$\frac{P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_k(x)}{Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdot\ldots\cdot Q_l(x)} \vee 0 \tag{1}$$

(количество сомножителей $P_i(x)$ и $Q_j(x)$, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,l$, в числителе и знаменателе дроби, а также знак неравенства могут быть произвольными). Слово «обобщённый» перед словосочетанием «метод интервалов» используют обычно в тех случаях, когда множители в левой части неравенства не имеют чисто алгебраический вид. Суть метода состоит в следующем.

1) Все члены неравенства переносятся в одну сторону (например, в левую часть) и приводятся к общему знаменателю (т.е. неравенство приводится к виду (1)).

2) Определяются *критические точки*, т.е. точки, в которых числитель или знаменатель обращаются в нуль. Для этого решаются уравнения $P_i(x)=0$ и $Q_j(x)=0$. При этом точки, обращающие в нуль знаменатель, следует «выколоть», а остальные – в зависимости от строгости или нестрогости решаемого неравенства.

3) Критические точки наносятся на числовую прямую, разбивая её (в общем случае – ОДЗ) на интервалы, в каждом из которых функция, находящаяся в левой части неравенства, сохраняет знак.

4) Определяется знак на крайнем справа интервале, что обозначается на числовой прямой с помощью знака «+» или «–».

5) Определяются знаки на остальных интервалах. В частности, при переходе через очередную критическую точку знак меняется на *противоположный*, если критическая точка является корнем нечётной кратности (т.е. встречается нечётное число раз среди корней числителя и знаменателя), и знак *сохраняется*, если точка имеет чётную кратность (или соответствующий множитель находится, например, под знаком модуля). Если числитель и знаменатель имеют совпадающие критические точки, то предварительно необходимо произвести сокращение, «выколов» данные точки на числовой оси.

6) Множеством решений неравенства является объединение интервалов с соответствующим знаком, при этом в случае нестрогого неравенства к этому множеству добавляются корни числителя.

Подчеркнём, что этим методом решаются не только алгебраические неравенства.

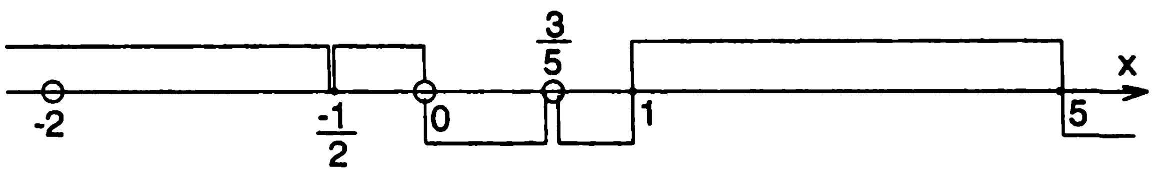
Пример 1. *Решить неравенство*

$$\frac{(x-1)^5\cdot(2x+1)^{12}\cdot(x+2)\cdot(5-x)}{x^3\cdot(3-5x)^2\cdot(x+2)}\le 0.$$

Решение. Запомнив, что $x\ne -2$, вначале сократим числитель и знаменатель на общий множитель $(x+2)$:

$$\frac{(x-1)^5\cdot(2x+1)^{12}\cdot(5-x)}{x^3\cdot(3-5x)^2}\le 0.$$

Найдём остальные критические точки, это $x=1$, $x=-1/2$, $x=5$, $x=0$, $x=3/5$, и нанесём все точки (включая $x=-2$) на числовую прямую, выколов те из них, которые обращают в нуль знаменатель дроби ($x=-2$, $x=0$, $x=3/5$):



Оценим знак левой части неравенства на крайнем справа промежутке $x>5$. Для этого подставим любое число из этого промежутка, например 10, в выражение слева от знака равенства. Получим знак «–». Начнём рисовать кривую знакоопределённости для левой части неравенства. На рассмотренном промежутке изобразим её ниже числовой прямой, что символизирует отрицательный знак. Теперь начинаем мысленно «движение» справа налево вдоль оси x. Доходим до точки $x=5$. Чтобы выяснить, поменяется ли в этой точке знак левой части неравенства, найдём множитель $(5-x)$ в числителе, который обращается в нуль при этом значении. Он имеет нечётную степень, равную 1, и, следовательно, при прохождении справа налево через эту точку этот множитель (а с ним и вся левая часть) поменяет знак. На промежутке $1<x<5$ общий знак будет «плюс», а кривая знакоопределённости пойдёт выше оси x.

Продолжаем «движение» налево, подходим к точке $x=1$. Выясним, поменяет ли знак левая часть неравенства при прохождении через эту точку. Найдём множитель, из которого мы определили данную критическую точку, это

$(x-1)^5$. Так как степень, равная 5, нечётная, то этот множитель, а с ним и вся левая часть поменяют знак, и кривая знакоопределённости пойдёт вниз. И так далее... Очевидно, в точке $x=0$ знак левой части поменяется на противоположный, а в точках $x=-2$, $x=-1/2$, $x=3/5$ – сохранится.

Когда кривая полностью построена, нужно лишь, учитывая знак неравенства «$\le$», отобрать те промежутки, которые лежат ниже числовой прямой, не забывая про те значения x, которые обращают числитель в нуль (в данном случае это $x=-1/2$). Таким образом, получаем окончательный ответ.

Ответ: $x\in\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left(0,\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{5},1\right]\cup[5,+\infty)$.

Рассмотрим применение метода интервалов к решению задачи.

Пример 2 [ВМиК–1982]. *Решить неравенство*

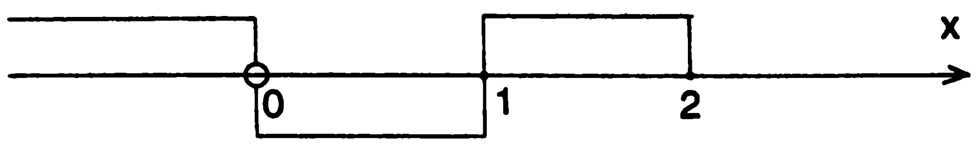
$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2.$$

Решение. ОДЗ: $x\le 2$. Перепишем неравенство: $\dfrac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x}\ge 0$ и воспользуемся *методом интервалов*. Найдём все значения неизвестной x, при которых числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Для этого решим уравнение

$$\sqrt{2-x}=3-2x \Leftrightarrow \begin{cases}3-2x\ge 0\\ 2-x=(3-2x)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Итак, на ОДЗ имеем две критические точки $x=0$ и $x=1$, в которых числитель или знаменатель дроби обращаются в нуль (точку $x=0$ при этом следует «выколоть»). Определим знак левой части неравенства на интервалах, на которые эти точки разбивают ОДЗ.

При $x<0$ числитель и знаменатель отрицательны, а значит, их отношение положительно. При $0<x<1$ числитель ещё отрицателен, а знаменатель положителен, поэтому их отношение отрицательно. При $1<x\le 2$ числитель и знаменатель, как и их отношение, положительны. Построим кривую знакоопределённости для левой части неравенства:



С учётом знака неравенства выписываем ответ: $x \in (-\infty, 0) \cup [1, 2]$.

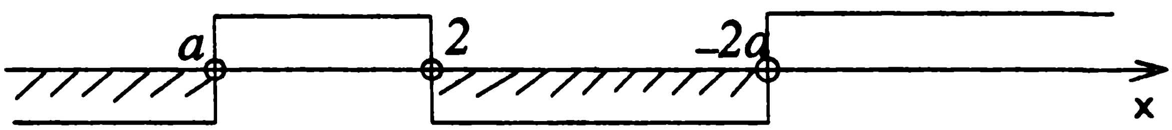
Замечание. Можно было на этапе определения знака дроби поступить иначе: найти знак этой дроби, например на промежутке $x < 0$ (подставив любое удобное значение x, скажем, $x = -2$), а затем, двигаясь вдоль оси x слева направо, лишь отслеживать, меняется ли знак дроби в каждой из критических точек (он, очевидно, будет меняться в каждой из них).

Пример 3*. При всех значениях параметра a решить неравенство*

$$\frac{(x-2)(x-a)}{x+2a} < 0.$$

Решение. Найдём критические точки: $x \in \{2;\ a;\ -2a\}$. Приравнивая их друг к другу попарно, найдём все значения параметра, при которых эти точки совпадают: $a \in \{-1;\ 0;\ 2\}$. Рассмотрим четыре случая.

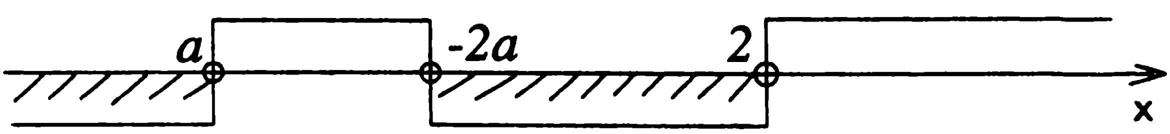
1) $a \in (-\infty, -1]$: подставляя в выражения для критических точек в качестве a любую внутреннюю точку промежутка $(-\infty, -1]$ (например, $a = -2$), определяем порядок, в котором критические точки располагаются на числовой прямой x. При рассматриваемых a они оказываются упорядоченными так: $a,\ 2,\ -2a$. После этого методом интервалов решаем неравенство:



Итак, при указанных значениях a получили решения: $x \in (-\infty, a) \cup (2, -2a)$.

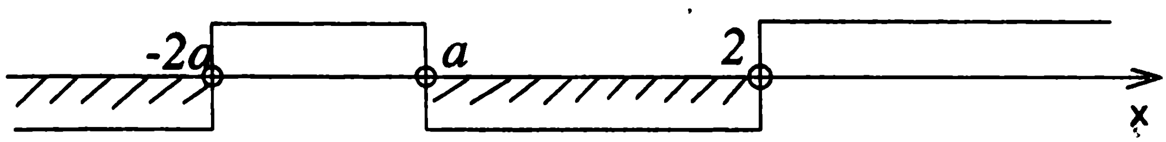
Замечание. При $a = -1$ интервал $(2, -2a)$ вырождается (пропадает), и ответ будет иметь вид $x \in (-\infty, -1)$.

2) $a \in (-1, 0]$: опять подставляем любую внутреннюю точку a из данного промежутка (например, $a = -1/2$) в выражения для критических точек и определяем порядок, в котором эти точки располагаются на числовой прямой. Затем методом интервалов решаем неравенство:



Итак, при $a \in (-1,0]$ получили решения: $x \in (-\infty, a) \cup (-2a, 2)$.

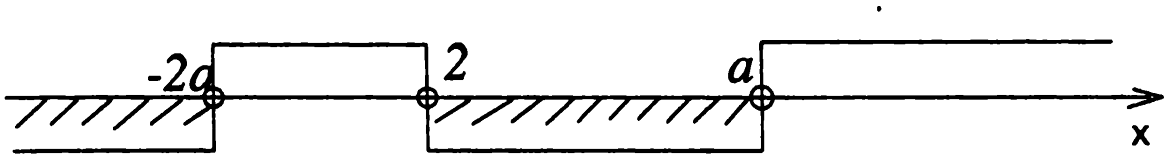
3) $a \in (0,2]$: поступая аналогичным образом, находим:



Итак, при $a \in (0,2]$ получили решения: $x \in (-\infty, -2a) \cup (a, 2)$.

Замечание. При $a = 2$ интервал $(a, 2)$ вырождается (пропадает), и ответ будет иметь вид $x \in (-\infty, -4)$.

4) Наконец, в случае $a \in (2, +\infty)$ имеем



Поэтому при $a \in (2, +\infty)$ решениями будут $x \in (-\infty, -2a) \cup (2, a)$.

В ответе объединяем все полученные результаты.

Ответ: при $a \in (-\infty, -1)$ $x \in (-\infty, a) \cup (2, -2a)$; при $a = -1$ $x \in (-\infty, -1)$; при $a \in (-1, 0]$ $x \in (-\infty, a) \cup (-2a, 2)$; при $a \in (0, 2)$ $x \in (-\infty, -2a) \cup (a, 2)$; при $a = 2$ $x \in (-\infty, -4)$; при $a \in (2, +\infty)$ $x \in (-\infty, -2a) \cup (2, a)$.

Метод замены множителей на множители равных знаков (*)

При использовании обобщённого метода интервалов для решения неравенств полезным может оказаться следующий подход, называемый в данной книге *методом замены множителей на множители равных знаков*. Некоторые авторы, например, Дорофеев Г.В., относят этот метод к разновидности обобщённого метода интервалов, а другие, скажем, Моденов В.П., называют методом логических схем равносильных высказываний. Рассмотрим суть этого подхода.

Пусть, например, решается неравенство вида

$$\frac{P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_k(x)}{Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdot \ldots \cdot Q_l(x)} \vee 0 \qquad (1)$$

(количество сомножителей $P_i(x)$ и $Q_j(x)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$, в числителе и знаменателе дроби, а также знак неравенства могут быть произвольными). Пусть для одного из сомножителей (ради определённости будем считать, что это сомножитель $P_1(x)$) нашлась такая функция $\widetilde{P}_1(x)$, определённая на ОДЗ неравенства, что она обращается в нуль одновременно с $P_1(x)$, а при остальных x из ОДЗ имеет тот же знак, что и $P_1(x)$. В остальном, вообще говоря, функция $\widetilde{P}_1(x)$ может иметь любой вид. Тогда исходное неравенство равносильно на ОДЗ неравенству

$$\frac{\widetilde{P}_1(x)\cdot P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_k(x)}{Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdot\ldots\cdot Q_l(x)} \vee 0$$

(сомножитель $P_1(x)$ заменили сомножителем $\widetilde{P}_1(x)$ того же знака).

Приведём наиболее типичные *примеры использования* этого подхода.

1) Если в неравенство (1) входит множитель $P_1(x)$ вида $|a(x)|-|b(x)|$, то его можно заменить в целях упрощения решения задачи на множитель $\widetilde{P}_1(x)$ вида $a^2(x)-b^2(x)$, не содержащий модулей, так как $\forall\ a,b\in R$ знаки выражений $|a|-|b|$ и a^2-b^2 совпадают (обращаются в нуль они также одновременно).

2) Множитель $P_1(x)$ логарифмического вида $\log_{b(x)} a(x)$ на ОДЗ задачи заменяют эквивалентным ему по знаку, но более простым множителем $\widetilde{P}_1(x)$ нелогарифмического вида $(a(x)-1)(b(x)-1)$. Множитель $P_2(x)$ в виде разности двух логарифмов по одному основанию $\log_{a(x)} b(x)-\log_{a(x)} c(x)$ заменяют на ОДЗ (т.е. при дополнительном условии $0<a(x)\neq 1$, $b(x)>0$, $c(x)>0$) произведением вида $(a(x)-1)(b(x)-c(x))$.

Поскольку в результате применения этого метода трансцендентное неравенство (логарифмическое, показательное и т.д.) часто приводится к рациональному виду, то его в этих случаях относят к *методам рационализации*.

Пример 1 [Мехмат–1998]. *Решить неравенство*

$$\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{1/2}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|}\geq 0.$$

Решение. Входящие в данное неравенство логарифмы определены при $-4<x<13$. Преобразуем числитель дроби

$$\frac{\log_2 2+\log_2(x+4)-\log_2(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|}\geq 0,$$

или

$$\frac{\log_2(2x+8)-\log_2(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|}\geq 0.$$

Теперь, помня об ограничении $-4<x<13$, заменим и числитель, и знаменатель на более простые выражения алгебраического вида (эквивалентного знака), перейдя к равносильному неравенству

$$\frac{(2x+8)-(13-x)}{\left(x^2+2x-3\right)^2-\left(2x^2-10x+8\right)^2}\geq 0.$$

Разложив знаменатель на множители и упростив, приходим к неравенству

$$\frac{x-5/3}{(x-5/3)(x-1)^2(x-11)}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 5/3 \\ (x-1)^2(x-11)<0, \end{cases}$$

откуда с учётом ОДЗ находим ответ: $x\in(-4,1)\cup(1,5/3)\cup(5/3,11)$.

3) Множитель показательно-степенного вида $a(x)^{b(x)}-a(x)^{c(x)}$ на ОДЗ неравенства (т.е. при дополнительном условии $a(x)>0$) также заменяют произведением $(a(x)-1)(b(x)-c(x))$.

Пример 2. *Решить неравенство* $\left(\dfrac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x}>\left(\dfrac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$

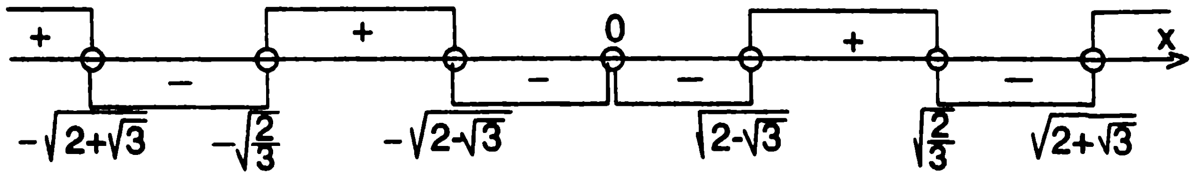
Решение. Приведём неравенство к виду

$$\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}-\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{-3x^2+x}<0$$

и, применяя указанный выше приём, перейдём к эквивалентному ему дробно-рациональному алгебраическому неравенству:

$$\left(\frac{x^4+1}{4x^2}-1\right)\left((x-2)-\left(-3x^2+x\right)\right)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^4-4x^2+1\right)\left(3x^2-2\right)<0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(x^2-2/3\right)<0 \\ x\neq 0. \end{cases}$$



Ответ:

$$x\in\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{2+\sqrt{3}}\right).$$

4) Множитель вида $a(x)^{b(x)}-c(x)$ можно заменить при условии $0<a(x)\neq 1,c(x)>0$ множителем $(a(x)-1)(b(x)-\log_{a(x)}c(x))$, а множитель вида $\log_{a(x)}b(x)-c(x)$ соответственно множителем $(a(x)-1)\times\times\left(b(x)-(a(x))^{c(x)}\right)$ (при условии $0<a(x)\neq 1$, $b(x)>0$).

5) Множитель иррационального вида $\sqrt[2n]{b(x)}-c(x)$ $(n\in N)$ заменяют при условии $b(x)\geq 0$, $c(x)\geq 0$ рациональным выражением $b(x)-c^{2n}(x)$, а множитель вида $\sqrt[2n+1]{b(x)}-c(x)$ при любых $b(x)$ и $c(x)$ соответственно разностью $b(x)-c^{2n+1}(x)$ и так далее.

Пример 3 [Олимпиада «Ломоносов–2007», 4]. *Решить неравенство*

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|}\leq 1.$$

Решение. ОДЗ: $-7\leq x\leq 8$. Выполним равносильные преобразования:

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|-\left(\sqrt{x+7}-|2x-1|\right)}{\sqrt{x+7}-|2x-1|}\leq 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-|2x-1|}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(8-x)-(x+7)}{(x+7)-(2x-1)^2}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x-1/2}{(x+3/4)(x-2)}\leq 0.$$

С учётом ОДЗ приходим к ответу: $x\in[-7,-3/4)\cup[1/2,2)$.

Применение этого метода на практике часто позволяет существенно упростить решение неравенства и сэкономить время. Важно лишь отслеживать равносильность этих переходов.

Рациональные неравенства, решаемые на отдельных промежутках ОДЗ

Иногда для решения задачи бывает удобно разбить ОДЗ на отдельные промежутки и на каждом из них решить задачу.

Пример 1 [Геолог.–2000, май, устн.]. *Решить неравенство*

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0.$$

Решение. Разобьём ОДЗ $(x \in R)$ на отдельные промежутки, и на каждом из них решим неравенство.

1) Пусть $x \in (-\infty, 0]$. Оценим, какие значения при таких x принимает левая часть неравенства. Сгруппируем слагаемые:

$$\left(x^8 - x^5\right) + \left(x^2 - x\right) + 1 = x^5\left(x^3 - 1\right) + x(x-1) + 1.$$

Первые два слагаемых неотрицательны, а третье – положительно, поэтому их сумма положительна на всем рассматриваемом промежутке.

2) Пусть $x \in (0, 1]$. Оценим значения левой части неравенства при данных значениях x, по-другому сгруппировав слагаемые:

$$x^8 + \left(x^2 - x^5\right) + (1 - x) = x^8 + x^2\left(1 - x^3\right) + (1 - x).$$

Первое слагаемое положительно, а два другие – неотрицательны, поэтому их сумма положительна на всем рассматриваемом промежутке.

3) Пусть, наконец, $x \in (1, +\infty)$. Тогда для удобства оценивания значений левой части неравенства сгруппируем слагаемые так же, как и в первом случае:

$$\left(x^8 - x^5\right) + \left(x^2 - x\right) + 1 = x^5\left(x^3 - 1\right) + x(x-1) + 1.$$

Эта сумма принимает положительные значения как сумма трёх положительных выражений.

Итак, мы доказали, что данное неравенство справедливо при всех действительных значениях переменной x. *Ответ*: $x \in R$.

Пример 2. Решить неравенство $2x^9 - x^5 + x - 2 > 0$.

Решение. Разложим многочлен в левой части неравенства на множители: $2\left(x^9 - 1\right) - x\left(x^4 - 1\right) > 0$. Используя формулу разности n-х степеней

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),\ n \in N,$$

приведём неравенство к виду

$$(x-1)\left(2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2\right) > 0.$$

Обозначим выражение во вторых скобках через $P_8(x)$ и покажем, что этот многочлен принимает при всех x строго положительные значения. Для этого разобьём числовую ось на несколько промежутков, и на каждом из них, группируя слагаемые, добьёмся того, чтобы можно было легко оценить их знак.

1) $x \in (-\infty,-1]$: $P_8(x) = 2x^7(x+1) + 2x^5(x+1) + x^3(x+1) + x(x+1) + 2 > 0$, так как первые четыре слагаемых в этой сумме неотрицательны, а последнее – строго положительно.

2) $x \in (-1,0]$: $P_8(x) = 2x^8 + 2x^6(x+1) + 2x^4(x+1) + x^2(x+1) + (x+1) + (x+1) + (1-x^4) > 0$, так как первые четыре слагаемых в этой сумме неотрицательны, а последние два – положительны.

3) $x \in (0,+\infty)$: $P_8(x) > 0$. Таким образом, поделив обе части решаемого неравенства на $P_8(x) > 0$, приходим к равносильному неравенству $x - 1 > 0$.

Ответ: $x \in (1,+\infty)$.

3.3.3. Иррациональные алгебраические уравнения и неравенства

Уравнение (неравенство), содержащее неизвестную величину либо рациональное алгебраическое выражение от неизвестной под знаком радикала, называют *иррациональным уравнением (неравенством)*. В элементарной математике иррациональные уравнения и неравенства решают на множестве действительных чисел.

Всякое иррациональное уравнение с помощью элементарных преобразований (умножения, деления, возведения в натуральную степень обеих частей уравнения) может быть сведено к рациональному алгебраическому уравнению. При этом следует иметь в виду, что полученное рациональное алгебраическое уравнение может оказаться не равносильным исходному иррациональному уравнению, а именно может содержать посторонние корни, которые не будут корнями исходного иррационального уравнения. Поэтому, вычислив корни полученного алгебраического уравнения, необходимо проверить, будут ли все они также и корнями исходного иррационального уравнения.

Основной подход к решению иррациональных уравнений (неравенств) – их *рационализация*, т.е. сведение к рациональным алгебраическим уравнениям (неравенствам). При этом могут быть использованы различные средства.

Для того чтобы найти множество решений иррационального неравенства тоже, как правило, приходится возводить обе части неравенства в натуральную степень. Несмотря на внешнюю схожесть процедур решения иррационального уравнения и иррационального неравенства, между ними существует большое отличие. При решении иррациональных уравнений можно, вообще говоря, не заботиться о том, чтобы после возведения в степень получилось уравнение, эквивалентное исходному: алгебраическое уравнение имеет обычно конечное число корней, из которых проверкой нетрудно отобрать решения исходного иррационального уравнения.

Множество решений неравенства представляет собой в основном бесконечное множество чисел, и поэтому непосредственная проверка решений путём подстановки этих чисел в исходное неравенство становится принципиально невозможной. Единственный способ, гарантирующий правильность ответа, заключается в том, что мы постоянно должны следить за тем, чтобы при каждом преобразовании неравенства у нас получалось неравенство, равносильное исходному. Решая иррациональные неравенства, следует помнить, что при возведении его частей в нечётную степень всегда получается неравенство, эквивалентное исходному неравенству. Если же обе части неравенства возводить в чётную степень, то будет получаться неравенство, эквивалентное исходному и имеющее тот же знак лишь в случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны (одного знака).

Отсюда получаем различные методы решения иррациональных уравнений и неравенств. Перечислим те из них, что характерны именно для решения задач с радикалами. Остальные – универсальные – методы решения, будут рассмотрены в следующем пункте 3.4.

Метод возведения в степень

Метод возведения в степень является одним из наиболее распространённых методов решения задач с иррациональностями. Как уже отмечалось выше, при его использовании следует помнить, что любое уравнение и неравенство всегда можно возвести в нечётную степень, это преобразование является равносильным. Другое дело, если уравнение необходимо возвести в чётную степень. В общем случае это переход к следствию, чреватый появлением посторонних корней. Это допустимо, если возможно сделать проверку корней. Если же проверка по какой-либо причине затруднена или невозможна (например, когда при решении неравенств и некоторых уравнений получается бесконечно много решений), то следует сохранять равносильность выполняемых преобразований. Для этого перед очередным возведением в чётную степень следует не забывать выписывать условие неотрицательности обеих частей уравнения.

Если уравнение содержит несколько радикалов, то для последовательного избавления от них уравнение приходится возводить в степень несколько раз. В этом случае перед очередным возведением в степень часто используют приём *уединения корня*.

Пример 1 [РЭА им. Плеханова]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{13x-30}-2\sqrt{x-3}=3\sqrt{x-2}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 13x-30\ge 0 \\ x-3\ge 0,\ \ x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3.$

Далее метод возведения в степень (в данном случае в квадрат, так как в уравнение входят квадратные корни) можно применить двумя способами.

<u>*1-й способ*</u>. Приведём уравнение к виду

$$\sqrt{13x-30}=2\sqrt{x-3}+3\sqrt{x-2}.$$

Обе части уравнения неотрицательны, поэтому, возведя его в квадрат, получим равносильное (на ОДЗ) уравнение:

$$13x-30=4(x-3)+12\sqrt{(x-3)(x-2)}+9(x-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=12\sqrt{(x-3)(x-2)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=2\notin ОДЗ.\end{array}\right.$$

<u>*2-й способ*</u>. Сразу возведём уравнение в квадрат

$$\left(\sqrt{13x-30}-2\sqrt{x-3}\right)^2=\left(3\sqrt{x-2}\right)^2$$

(переход к следствию) и, упростив, запишем в виде

$$\sqrt{(13x-30)(x-3)}=2x-6.$$

Разложим полученное уравнение на множители

$$\sqrt{x-3}\left(2\sqrt{x-3}-\sqrt{13x-30}\right)=0,$$

и сведём к совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=0\\ 2\sqrt{x-3}=\sqrt{13x-30}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=2.\end{array}\right.$$

Так как в процессе решения задачи был переход к следствию, то необходимо сделать проверку полученных значений x подстановкой в ОДЗ или исходное уравнение (или в любое уравнение, равносильное исходному). Число $x=2\notin ОДЗ$ (посторонний корень, образовавшийся из-за возведения в квадрат без учёта совпадения знаков обеих частей уравнения). Получаем тот же ответ. *Ответ*: $x\in\{3\}$.

Пример 2*. Решить уравнение*

$$\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$$

Решение. <u>*1-й способ*</u>. Возведём неравенство в куб, используя формулу

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3=a-b-3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right):$$

$$(x+34)-(x-3)-3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}\left(\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}\right)=1.$$

Заменяя, в силу исходного уравнения, выражение $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}$ единицей и упрощая, получаем, как следствие, уравнение

$$\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=12 \Leftrightarrow x^2+31x-1830=0.$$

$D=8281=91^2$, $x_1=-61$, $x_2=30$. Проверка показывает, что оба значения удовлетворяют исходному уравнению.

2-й способ. Приведём уравнение к виду

$$\sqrt[3]{x+34}=\sqrt[3]{x-3}+1,$$

и после этого возведём его в куб:

$$x+34=(x-3)+3\sqrt[3]{(x-3)^2}+3\sqrt[3]{x-3}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-3)^2}+\sqrt[3]{x-3}-12=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt[3]{x-3}$, находим:

$$\sqrt[3]{x-3}=-4 \text{ или } \sqrt[3]{x-3}=3,$$

откуда получаем те же значения x.

Следует отметить, что второй способ в данном случае предпочтительней, так как полученное в конце квадратное уравнение имеет более простые коэффициенты (и не надо делать проверку). *Ответ*: $x\in\{-61;30\}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}.$$

Решение. Возведём обе части уравнения в куб (равносильное преобразование):

$$x+x^3-x+1+3\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^3-x+1}\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}\right)=$$

$$=x+1+x^3-x+3\cdot\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x^3-x}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}\right).$$

Заменяя выражение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}$ выражением $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}$, получим уравнение, являющееся следствием исходного:

$$\left(\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^3-x+1}-\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x^3-x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}\right)=0.$$

Это уравнение сводится к совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^3-x+1}-\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x^3-x}=0\\ \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}=0.\end{array}\right.$$

Решения первого уравнения есть $x=0$, $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$. Второе уравнение имеет одно решение $x=-1$. Проверка показывает, что все четыре значения являются корнями исходного уравнения. *Ответ*: $x\in\left\{-\sqrt{2};-1;0;\sqrt{2}\right\}$.

Пример 4 [Геолог.–2002]. ***Решить неравенство***

$$\sqrt{6x-x^2-8}-\sqrt{7-2x}\ge\sqrt{8x-x^2-15}.$$

Решение. Выпишем ОДЗ: $\begin{cases}6x-x^2-8\ge 0;\ 7-2x\ge 0\\ 8x-x^2-15\ge 0,\end{cases}$ но не будем сразу решать эту систему. Приступим к решению неравенства, переписав его в виде

$$\sqrt{6x-x^2-8}\ge\sqrt{7-2x}+\sqrt{8x-x^2-15},$$

добившись того, чтобы обе части неравенства стали неотрицательны (иначе неравенство возводить в квадрат нельзя). Только после этого возведём в квадрат, перейдя к равносильному (на ОДЗ) неравенству

$$6x-x^2-8\ge 7-2x+2\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-15)}+8x-x^2-15.$$

После упрощения получим

$$0\ge\sqrt{(7-2x)(8x-x^2-15)}\Leftrightarrow 0=(7-2x)(x-3)(x-5)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7/2;\ x=3;\\ x=5\notin ОДЗ.\end{array}\right.\qquad \textit{Ответ}:\ x\in\left\{\frac{7}{2};3\right\}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)\sqrt{-x\sqrt{x+4}}}=0.$$

Решение. $\sqrt{(x+2)\sqrt{-x\sqrt{x+4}}}=0\Leftrightarrow(x+2)\sqrt{-x\sqrt{x+4}}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=0\\ \sqrt{-x\sqrt{x+4}}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ -x\sqrt{x+4}=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=0\\ \sqrt{x+4}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=0\\ x=-4.\end{array}\right.$$

Проверка подстановкой в исходное уравнение показывает, что все три числа являются решениями уравнения.

Замечание. Иногда при решении этой задачи записывают ОДЗ так:

$$\begin{cases}x+2\ge 0,\ -x\ge 0\\ x+4\ge 0.\end{cases}$$

Хочется предостеречь читателя от таких попыток, поскольку первые два условия в системе неверны, что подтверждается наличием среди корней уравнения числа $x=-4$. На самом деле ОДЗ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} (x+2)\sqrt{-x\sqrt{x+4}} \geq 0 \\ \sqrt{-x\sqrt{x+4}} \geq 0 \\ x+4 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 6 [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2002, май].

Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)\sqrt{-x\sqrt{x+4}}} = \sqrt{-x\sqrt{(x+2)\sqrt{x+3}}}.$$

Решение. Заметим, что $x=-2$ и $x=0$ являются решениями уравнения (а числа $x=-4$ и $x=-3$ – не являются). Найдём корни этого уравнения, отличные от $x=-2$ и $x=0$. Для них, согласно ОДЗ,

$$\begin{cases} x+2>0;\ -x>0 \\ x+3\geq 0;\ x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<0.$$

Возведём уравнение в квадрат, получив равносильное (на ОДЗ) уравнение:

$$(x+2)\sqrt{-x\sqrt{x+4}} = -x\sqrt{(x+2)\sqrt{x+3}}.$$

Обе части последнего равенства положительны при $-2<x<0$, поэтому, возводя его в квадрат ещё раз, придём к равносильному равенству

$$(x+2)^2(-x)\sqrt{x+4} = x^2(x+2)\sqrt{x+3}.$$

Сократив на $x+2(>0)$ и $x(<0)$, получим уравнение

$$-(x+2)\sqrt{x+4} = x\sqrt{x+3},$$

обе части которого отрицательны при $-2<x<0$. Поэтому, возводя ещё раз в квадрат, получим уравнение, равносильное предыдущему:

$$(x+2)^2(x+4) = x^2(x+3) \Leftrightarrow 5x^2+20x+16=0,$$

корни которого $x=-2-\dfrac{2}{\sqrt{5}} \notin (-2{,}0)$ и $x=-2+\dfrac{2}{\sqrt{5}} \in (-2{,}0)$.

Ответ: $x \in \left\{-2;-2+\left(2/\sqrt{5}\right);0\right\}$.

Стандартные задачи и схемы их решения

В частности, на методе возведения в степень основано решение многих весьма распространённых видов иррациональных уравнений и неравенств. Обратимся к стандартным *схемам их решения*.

1) ***Уравнения вида*** $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$

Пример 1 [Геолог.–1995]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{5x-6} + x = 4.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{5x-6} = 4 - x$, и затем воспользуемся указанной схемой решения:

$$\sqrt{5x-6} = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \ge 0 \\ 5x - 6 = (4-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ (x-2)(x-11) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{2\}$.

Пример 2 [Высшая школа бизнеса–2003]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{1276x^3 + 364x^2} = 22x^2 + 10x.$$

Решение. Прежде всего, заметим, что обе части уравнения можно сократить на 2:

$$\sqrt{319x^3 + 91x^2} = 11x^2 + 5x.$$

Действуя далее по схеме, получаем, что уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 11x^2 + 5x \ge 0 \\ x^2(11x+5)^2 = x^2(319x+91) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(11x+5) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 11x^2 - 19x - 6 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(11x+5) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2;\ \ x = -3/11 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Пример 3 [ИСАА–2005]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \sqrt{(x+2)^3}.$$

Решение. Пусть $y = x + 2$, тогда при $y \ge 1$ уравнение принимает вид $\sqrt{y-1} + \sqrt{y^2-1} = y\sqrt{y}$. Уединив более «сложный» корень, приведём уравнение к виду

$$\sqrt{y^2-1}=y\sqrt{y}-\sqrt{y-1},$$

и воспользуемся приведённой выше схемой:

$$\begin{cases} y\sqrt{y}\ge\sqrt{y-1} \\ y^2-1=\left(y\sqrt{y}-\sqrt{y-1}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3-y+1\ge 0 \\ 2y\sqrt{y^2-y}=y^3-y^2+y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(y^2-1\right)+1\ge 0 \\ 2y\sqrt{y^2-y}=y(y^2-y+1). \end{cases}$$

Неравенство системы выполнено при всех $y\ge 1$, поэтому, сократив уравнение на y, получим $\left(\sqrt{y^2-y}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow y^2-y-1=0$, откуда с учётом $y\ge 1$ находим $y=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, т.е. $x=\left(-3+\sqrt{5}\right)/2$ – единственное решение. *Ответ*: $x\in\left\{\left(\sqrt{5}-3\right)/2\right\}$.

2) ***Неравенства вида***

$$\sqrt{f(x)}\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)\le g^2(x); \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)}< g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)< g^2(x). \end{cases}$$

Пример 4 [Эконом.–2003]. ***Решить неравенство***

$$\sqrt{8+2x-x^2}\le 2x+1.$$

Решение. Согласно схеме неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 8+2x-x^2\ge 0 \\ 8+2x-x^2\le (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1/2 \\ x^2-2x-8\le 0 \\ 5x^2+2x-7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1/2, \ -2\le x\le 4 \\ \left[\begin{array}{l} x\le -7/5 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ 1\le x\le 4. \ \textit{Ответ}: x\in[1,4].$$

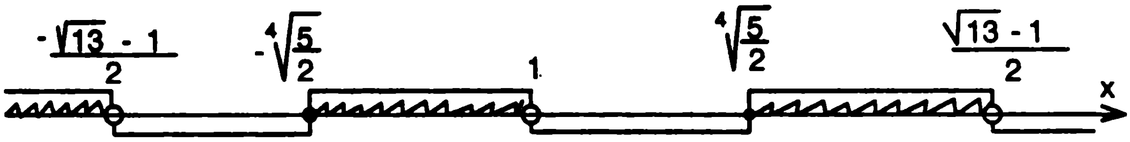
Пример 5 [Мехмат–2003, март]. ***Решить неравенство***

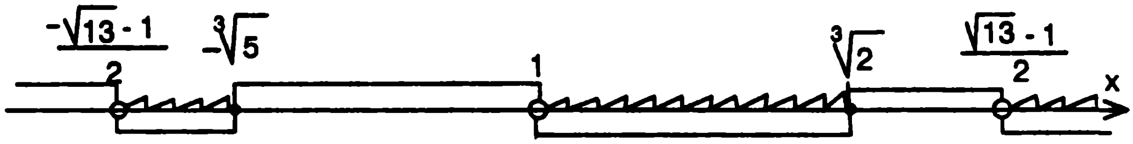
$$\sqrt{\frac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}}\le x^3.$$

Решение. Заметим, что $x \geq 0$, причём $x = 0$ – решение. Найдём другие положительные решения неравенства. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3} \geq 0 \\ \dfrac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3} \leq x^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x-\sqrt[4]{5/2}\right)\left(x+\sqrt[4]{5/2}\right)}{-(x-1)\left(x-\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)} \geq 0 \\ \dfrac{\left(x^3+5\right)\left(x^3-2\right)}{-(x-1)\left(x-\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)} \leq 0. \end{cases}$$

Решая каждое из неравенств методом интервалов, получим





Таким образом, приходим к ответу: $x \in \{0\} \cup \left[\sqrt[4]{5/2}, \sqrt[3]{2}\right]$.

3) ***Неравенства вида***

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \text{ и } \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 6 [Эконом.–2003]. *Решить неравенство*

$$\sqrt{5-4x-x^2} \geq -2x-1.$$

Решение. Согласно схеме, неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2x-1 \geq 0 \\ 5-4x-x^2 \geq (-2x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x-1 < 0 \\ 5-4x-x^2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq -1/2 \\ 5x^2+8x-4 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -1/2 \\ x^2+4x-5 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq x \leq -1/2 \\ -1/2 < x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-2, 1]$.

Отметим, что, вообще говоря, не все неравенства указанного вида удобно решать с помощью предложенной схемы. Приведём два примера, когда целесообразнее воспользоваться стандартным подходом, учитывающим ОДЗ.

Пример 7 [Химфак, Наук о материалах, Физ.-хим. факультеты–2006].

Решить неравенство $\sqrt{1-|x|} \ge x-2$.

Решение. ОДЗ: $|x| \le 1$. Но тогда выражение в правой части неравенства отрицательно и, следовательно, неравенство верно всюду на ОДЗ.

Пример 8 [Олимпиада «Абитуриент–2006»]. ***Решить неравенство***

$$\sqrt{\frac{x^2-22x+121}{x^2-24x+140}} \ge 50x-2x^2-309.$$

Решение. ОДЗ: $\dfrac{x^2-22x+121}{x^2-24x+140} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-11)^2}{(x-10)(x-14)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<10 \\ x=11 \\ x>14. \end{array}\right.$

Заметим, что правая часть неравенства отрицательна на ОДЗ, в самом деле,

$$-2x^2+50x-309<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{25-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{25+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right),$$

причём $11 < \dfrac{25-\sqrt{7}}{2} < \dfrac{25+\sqrt{7}}{2} < 14$. Итак, исходное неравенство верно при всех x из ОДЗ. *Ответ*: $x \in (-\infty, 10) \cup \{11\} \cup (14, +\infty)$.

4) ***Уравнения вида***

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \ (\text{или } g(x) \ge 0) \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{x^2+5x-2} = \sqrt{9x-2}$.

Решение. Согласно схеме, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 9x-2 \ge 0 \\ x^2+5x-2 = 9x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2/9 \\ x(x-4) = 0. \end{cases} \quad \textit{Ответ}: x \in \{4\}.$$

5) ***Неравенства вида*** $\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x); \end{cases}$

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример 10. *Решить неравенство*

$$\sqrt{9x-2} \leq \sqrt{x^2+5x-2}.$$

Решение. Согласно схеме, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 9x-2 \geq 0 \\ 9x-2 \leq x^2+5x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2/9 \\ 0 \leq x(x-4). \end{cases} \quad \textit{Ответ}: \; x \in [4, +\infty).$$

Пример 11 [Геолог.–2006]. *Решить неравенство*

$$\sqrt{\frac{5}{2}x^2 - x^3} \geq \sqrt{6x - \frac{5}{2}x^2}.$$

Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 6x - \frac{5}{2}x^2 \geq 0 \\ \frac{5}{2}x^2 - x^3 \geq 6x - \frac{5}{2}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3) \leq 0 \\ x(5x-12) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0\} \cup \left[2, \tfrac{12}{5}\right].$$

6) ***Уравнения вида***

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in ОДЗ \\ (\sqrt[n]{f(x)})^{НОК(n,m)} = (\sqrt[m]{g(x)})^{НОК(n,m)}. \end{cases}$$

Пример 12. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x+3}.$$

Решение. Перейдём от уравнения к равносильной ему системе

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{x+3} \geq 0 \\ (x-1)^3 = (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \\ x^3 - 4x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x^3 - 5x^2) + (x^2 - 5x) + (2x - 10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-5)(x^2+x+2) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{5\}$.

Пример 13 [Мехмат–1999, март]. *Решить уравнение*

$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{tg\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0.$$

Решение. Упростив подкоренные выражения, приведём уравнение к виду

$$\sqrt[8]{\frac{2\cos^2 2x}{2\sin^2 2x}}=-\sqrt[3]{ctg2x} \Leftrightarrow \sqrt[8]{ctg^2 2x}=-\sqrt[3]{ctg2x}.$$

Сделав замену $t = ctg2x$, приходим к алгебраическому уравнению и решаем его:

$$\sqrt[8]{t^2}=-\sqrt[3]{t} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 0 \\ \left(\sqrt[8]{t^2}\right)^{24}=\left(-\sqrt[3]{t}\right)^{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 0 \\ t^6=t^8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ctg2x=0 \\ ctg2x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \\ 2x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z \\ x=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z. \end{array}\right.$$

7) ***Неравенства вида*** $\sqrt[2n+1]{f(x)}\le \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\le g(x)$;

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}<\sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x).$$

Пример 14*. Решить неравенство*

$$\sqrt[5]{9x-2}\le \sqrt[5]{x^2+5x-2}.$$

Решение. Возводя в пятую степень, получаем равносильное неравенство

$9x-2\le x^2+5x-2 \Leftrightarrow 0\le x(x-4)$. *Ответ*: $x\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

Метод домножения на сопряжённое выражение

При использовании этого метода выражение, содержащее радикалы, одновременно умножается и делится на сопряжённое к нему выражение, в результате чего иррациональность пропадает, и решение задачи упрощается. Безусловно, при этом необходимо контролировать ситуацию, не допуская потери или приобретения лишних корней.

Приведём вначале определение того, какое иррациональное выражение называется *сопряжённым* к другому. Пусть S – некоторое выражение, содержащее радикалы (корни). *Сопряжённым множителем относительно* S называется всякое выражение K, не равное тождественно нулю, такое, что произведение $S\cdot K$ не содержит корней.

1) В частности, для выражения вида $S=\sqrt[n]{x^p\cdot y^q\cdot\ldots\cdot z^l}$, где $p,q,\ldots,l$ – натуральные числа, меньшие n, сопряжённый множитель имеет вид

$$K=\sqrt[n]{x^{n-p}\cdot y^{n-q}\cdot\ldots\cdot z^{n-l}}, \text{ так как } S\cdot K=x\cdot y\cdot\ldots\cdot z.$$

2) Для выражения вида $S=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ $(x,y\ge 0)$ сопряжённый множитель есть

$$K=\sqrt{x}\mp\sqrt{y}\text{, так как } S\cdot K=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=x-y.$$

3) Для выражения вида $S=\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}$ сопряжённый множитель есть

$$K=\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\text{, так как } S\cdot K=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\pm\left(\sqrt[3]{y}\right)^3=x\pm y.$$

4) Для выражения вида $S=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}$ $(x,y\ge 0, n\in N, n\ge 4)$ сопряжённый множитель есть

$$K=\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\ldots+\sqrt[n]{xy^{n-2}}+\sqrt[n]{y^{n-1}},$$

так как $S\cdot K=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n-\left(\sqrt[n]{y}\right)^n=x-y$.

5) Для выражения вида $S=\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$ сопряжённый множитель находится на основании формул сокращённого умножения

$$a^{2n}-b^{2n}=(a+b)\left(a^{2n-1}-a^{2n-2}b+\ldots+ab^{2n-2}-b^{2n-1}\right),$$
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}\right).$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1 [Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+98}+\sqrt{x+99}}=9.$$

Решение. Умножив и разделив каждую из дробей на выражение, сопряжённое к её знаменателю (все они положительны, поэтому в результате выполненных преобразований получим равносильное исходному уравнение):

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)+\ldots+\left(\sqrt{x+99}-\sqrt{x+98}\right)=9,$$

которое после упрощений примет вид $\sqrt{x+99}-\sqrt{x}=9$. Решая уравнение стандартным образом, получим ответ. *Ответ*: $x\in\{1\}$.

Пример 2 [Мехмат–2003]. *Решить неравенство*

$$5\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\le 9\sqrt{x+4}.$$

Решение. Преобразуем подкоренное выражение у первого слагаемого в левой части неравенства, домножив числитель и знаменатель дроби на положительное выражение $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}$, сопряжённое к знаменателю:

$$\frac{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)^2}{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)}=\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)^2.$$

Аналогично преобразуем второе слагаемое

$$\frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\right)^2}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\right)}=\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\right)^2.$$

Учитывая, что под внешними корнями в левой части неравенства находятся полные квадраты, извлекаем квадратные корни, и решаемое неравенство принимает вид

$$5\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)+4\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\right)\le 9\sqrt{x+4}.$$

После упрощения получаем $\sqrt{x+3}\le 0$, что даёт единственное решение $x=-3\in ОДЗ$. *Ответ*: $x\in\{-3\}$.

Пример 3 [Почвовед.–2003]. *Найти наименьшее значение функции*

$$y=\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{3x^2} \text{ на отрезке } [0,3].$$

Решение. Рассмотрим способ решения, не использующий производную этой функции. Преобразуем выражение, определяющее функцию, умножив и разделив его на выражение $\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{3x^2}>0$:

$$y=\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{3x^2}=\frac{5}{\sqrt{3x^2+5}+\sqrt{3x^2}}.$$

Теперь хорошо видно, что на отрезке $[0,3]$ данная (непрерывная) функция определена и монотонно убывает, а значит, достигает своего наименьшего значения на правом конце отрезка, т.е. при $x=3$:

$$\min_{0\le x\le 3} y(x)=y(3)=4\sqrt{2}-3\sqrt{3}.$$

Пример 4 [Геолог.–1985, 5]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}.$$

Применяя метод домножения на сопряжённое выражение, преобразуем левую и правую части уравнения:

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\frac{(3x^2-7x+3)-(3x^2-5x-1)}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=$$

$$=\frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}};$$

$$\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}=\frac{(x^2-2)-(x^2-3x+4)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}=$$

$$=\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}\right)=0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x=2$, которое, как показывает проверка, удовлетворяет исходному уравнению. Других решений нет, поскольку выражение во вторых скобках строго положительно. *Ответ*: $x\in\{2\}$.

Пример 5 [Мехмат–2006, 2]. *Решить неравенство*

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\ge\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

Решение. Неравенство заменой $t=3^{-x}$ (>0) сводится к алгебраическому:

$$\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}-\frac{t-1}{\sqrt{1-t^2}+t-1}\ge\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}-\frac{t-1}{\sqrt{1-t}\left(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}\right)}\ge\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}\ge\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\\ \sqrt{1-t}\ne0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\right)^2}{\left(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}\right)\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\right)} \geq \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2+2\sqrt{1-t^2}}{2t} \geq \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow t<1 \Leftrightarrow 3^{-x}<1 \Leftrightarrow x\in(0,+\infty).$$

Замена переменных: рационализирующие подстановки (*)

Метод замены переменных часто позволяет преобразовать иррациональное уравнение (неравенство) к рациональному виду. В этом случае говорят о *рационализации* уравнений (неравенств), а используемые подстановки называют *рационализирующими*.

Рассмотрим наиболее типичные алгебраические, тригонометрические и гиперболические подстановки. Обозначим символом $R(x,y)$ рациональную дробь, т.е. дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами относительно переменных x и y.

1. *Рационализация выражений вида* $R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)$, содержащих линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}$, где a и b – постоянные ($a\neq 0$, $n\in N$, $n>1$), осуществляется с помощью алгебраической подстановки $t=\sqrt[n]{ax+b}$. Возводя обе части этого равенства в степень n, получим $t^n=ax+b$, откуда $x=\left(t^n-b\right)/a$. Переходя в R от переменной x к переменной t, получим рациональное выражение

$$R\left(\left(t^n-b\right)/a,t\right).$$

Аналогичным образом *рационализируются* выражения вида

$$R\left(x^m,\sqrt[n]{ax^m+b}\right), \text{ где } m,n\in N.$$

При этом используется подстановка $t=\sqrt[n]{ax^m+b}$.

Пример 1*. Решить уравнение* $\sqrt{8-x}=2-x$.

Решение. Сделаем рационализирующую подстановку $t=\sqrt{8-x}$ $(t\geq 0)$, откуда находим $x=8-t^2$. Подставим в уравнение: $t^2-t-6=0$, решая которое, находим корни $t=-2$ и $t=3$. Поэтому $\sqrt{8-x}=3 \Leftrightarrow x=-1$.

2. ***Рационализация выражений вида*** $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, содержащих дробно-линейную иррациональность $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$, где a, b, c, d – постоянные ($ad \neq bc$, $c \neq 0$), осуществляется с помощью алгебраической подстановки $t = \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$.

Пример 2 [Ф-т наук о материалах–2000]. ***Решить неравенство***

$$\sqrt{2-\frac{2}{x+1}} < \sqrt{2+\frac{2}{x}}+1.$$

Решение. Сначала преобразуем неравенство к виду

$$\sqrt{\frac{2x}{x+1}} < \sqrt{4\cdot\frac{x+1}{2x}}+1.$$

Сделаем подстановку $t = \sqrt{2x/(x+1)} > 0$ и получим рациональное неравенство относительно t:

$$t < \frac{2}{t}+1 \Leftrightarrow \frac{t^2-t-2}{t} < 0 \Leftrightarrow \frac{(t+1)(t-2)}{t} < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 2.$$

Осталось сделать обратную подстановку:

$$0 < \sqrt{\frac{2x}{x+1}} < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{2x}{x+1} < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} > 0 \\ \dfrac{2x}{x+1} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 0. \end{array}\right.$$

3. ***Иррациональные уравнения вида*** $R\left(\sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{cx+d}\right) = p$, где a, b, c, d, p – некоторые числа ($a \cdot c \neq 0$), $m, n \in N$, двойной подстановкой $u = \sqrt[m]{ax+b}$, $v = \sqrt[n]{cx+d}$ сводятся к системе двух рациональных уравнений

$$\begin{cases} R(u,v) = p \\ (u^m - b)/a = (v^n - d)/c. \end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{x+5} = 2$.

Решение. Выполним двойную (рационализирующую) подстановку

$$u = \sqrt{x-3}, \; v = \sqrt[3]{x+5}.$$

Уравнение примет вид $u+v=2$. Составим ещё одно уравнение относительно неизвестных u и v. Так как $u^2=x-3$, $v^3=x+5$, то, исключая x, находим: $v^3-u^2=8$. Добавляя это уравнение к исходному уравнению, получим систему уравнений с двумя неизвестными u и v:

$$\begin{cases} u+v=2 \\ v^3-u^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ v^3-(2-v)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ (v-2)(v^2+v+6)=0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $u=0$, $v=2$, откуда находим $x=3$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Решение. Положим $u=\sqrt[3]{x+45}$, $v=\sqrt[3]{x-16}$. Тогда $u^3=x+45$, $v^3=x-16$ и $u^3-v^3=61$. Таким образом, приходим к системе двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} u-v=1 \\ u^3-v^3=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ (u-v)(u^2+uv+v^2)=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v+1 \\ u^2+uv+v^2=61 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=v+1 \\ \left[\begin{array}{l} v=4 \\ v=-5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=5 \\ v=4 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-4 \\ v=-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{x+45}=5 \\ \sqrt[3]{x-16}=4 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x+45}=-4 \\ \sqrt[3]{x-16}=-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=80 \\ x=-109. \end{array}\right.$$

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Решение. Аналогично двум предыдущим примерам, положим $u=\sqrt[4]{97-x}$, $v=\sqrt[4]{x}$. Исходное уравнение примет вид $u+v=5$. Заметим, что $u^4+v^4=97$. Имеем систему

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ \left((u+v)^2-2uv\right)^2-2(uv)^2=97 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ (uv)^2-50uv+264=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ \left[\begin{array}{l} uv=6 \\ uv=44 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=5 \\ uv=44. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вторая система решений не имеет, а первая даёт два решения:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=2\\ v=3\end{cases}\\ \begin{cases}u=3\\ v=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[4]{97-x}=2\\ \sqrt[4]{x}=3\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[4]{97-x}=3\\ \sqrt[4]{x}=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=81\\ x=16.\end{array}\right. \quad \textit{Ответ}:\ x\in\{16;81\}.$$

Иногда при рационализации иррациональных уравнений и неравенств оказываются эффективными *тригонометрические подстановки.* Здесь следует иметь в виду следующие рекомендации.

4. *Рационализацию выражений вида* $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ рекомендуется делать с помощью подстановки $x=|a|\cdot\sin t$, где $t\in[-\pi/2,\pi/2]$. Тогда $\sqrt{a^2-x^2}=$ $=|a|\cdot|\cos t|=|a|\cdot\cos t$, так как на промежутке $[-\pi/2,\pi/2]$ косинус принимает неотрицательные значения. При этом алгебраическое иррациональное выражение $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ преобразуется к виду тригонометрического, но уже рационального выражения

$$R(|a|\cdot\sin t,|a|\cdot\cos t).$$

Также в этом случае можно сделать подстановку $x=|a|\cdot\cos t$, где $t\in[0,\pi]$, и тогда вместо иррациональной функции $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ получили бы рациональную тригонометрическую функцию [20]

$$R(|a|\cdot\cos t,|a|\cdot\sin t).$$

Пример 6 [ВМиК–2000, устн.]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$$

Решение. Сделаем тригонометрическую подстановку $x=\cos t$, $t\in[0,\pi]$. Получим

$$\sqrt{1-\cos^2 t}=4\cos^3 t-3\cos t \Leftrightarrow \sin t=\cos 3t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin t-\sin(\pi/2-3t)=0 \Leftrightarrow 2\sin(2t-\pi/4)\cos(t-\pi/4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(2t-\pi/4)=0\\ \cos(t-\pi/4)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\pi/8+\pi n/2,\ n\in Z\\ t=3\pi/4+\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Из первой серии в отрезок $[0,\pi]$ попадают два значения $t_1=\pi/8$, $t_2=5\pi/8$, а из второй $t_3=3\pi/4$. Им соответствуют $x_1=\cos(\pi/8)=$ $=\sqrt{(1+\cos\frac{\pi}{4})/2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$, $x_2=\cos(5\pi/8)=\cos(\pi/2+\pi/8)=$ $=-\sin(\pi/8)=-\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $x_3=\cos(3\pi/4)=-\sqrt{2}/2$.

Пример 7 [Эконом.–2003, отделение менеджмента]. *Решить уравнение*

$$6x\sqrt{1-9x^2}+18x^2-3\sqrt{2}x-1=0.$$

Решение. Сделаем тригонометрическую подстановку $3x=\sin t$, где $t\in[-\pi/2,\pi/2]$. Тогда $\sqrt{1-9x^2}=\cos t$, $18x^2-1=2\sin^2 t-1=$ $=-\cos 2t$ и уравнение примет вид:

$$\sin 2t-\cos 2t-\sqrt{2}\sin t=0 \Leftrightarrow \sin(2t-\pi/4)-\sin t=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-\dfrac{\pi}{4}=t+2\pi n,\ n\in Z \\ 2t-\dfrac{\pi}{4}=\pi-t+2\pi k,\ k\in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n \\ t=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{2\pi k}{3}. \end{array}\right.$$

Из 1-й серии в отрезок $[-\pi/2,\pi/2]$ попадает одно значение $t_1=\pi/4$, из 2-й – два значения $t_2=-\pi/4$, $t_3=5\pi/12$.

Следовательно, уравнение имеет три решения:

$$x_1=\frac{1}{3}\sin t_1=\frac{\sqrt{2}}{6},\ x_2=\frac{1}{3}\sin t_2=-\frac{\sqrt{2}}{6},\ x_3=\frac{1}{3}\sin t_3=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{12}=$$

$$=\frac{1}{3}\cos 15^\circ=\frac{1}{3}\cos(45^\circ-30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{12}.$$

5. Для *рационализации выражений вида* $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ применяют подстановку $x=|a|\cdot tgt$, где $t\in(-\pi/2,\pi/2)$. В этом случае

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\cdot tg^2t}=|a|\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{|a|}{|\cos t|}=\frac{|a|}{\cos t},$$

так как на рассматриваемом интервале косинус положителен. В результате выражение $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ преобразуется к виду $R\left(|a|\cdot tgt,\dfrac{|a|}{\cos t}\right)$.

В данной ситуации можно было также сделать подстановку

$$x = |a| \cdot ctgt \text{, где } t \in (0, \pi),$$

или *гиперболическую подстановку* $x = |a| \cdot sht$. В последнем случае

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \cdot sh^2 t} = |a| \cdot \sqrt{ch^2 t} = |a| \cdot |cht| = |a| \cdot cht$$

(так как $cht > 0 \ \forall t \in R$).

Пример 8. *Решить уравнение* $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической подстановкой вида $x = tgt$, где $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{1+tg^2 t} - tgt = \frac{5}{2\sqrt{1+tg^2 t}} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} - tgt = \frac{5\cos t}{2}.$$

Умножая уравнение на $\cos t \neq 0$, получим равносильное уравнение

$$1 - \sin t = \frac{5}{2}\cos^2 t,$$

которое сводится к квадратному уравнению относительно $\sin t$:

$$5\sin^2 t - 2\sin t - 3 = 0,$$

откуда находим $\left[\begin{array}{l} \sin t = 1 \\ \sin t = -3/5. \end{array}\right.$ Случай $\sin t = 1$ невозможен, так как $t \notin \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\sin t = -3/5 \Rightarrow \cos t = \sqrt{1-(-3/5)^2} = 4/5$ и, следовательно, $x = tgt = -3/4$. *Ответ*: $x \in \{-3/4\}$.

6. Для *рационализации выражений вида* $R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ применяют одну из следующих тригонометрических подстановок:

$$x = |a|/\sin t \text{, где } t \in [-\pi/2, \ 0) \cup (0, \ \pi/2],$$

или

$$x = |a|/\cos t \text{, где } t \in [0, \ \pi/2) \cup (\pi/2, \ \pi].$$

В первом случае радикал упрощается следующим образом:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = |a| \cdot \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = |a| \cdot \sqrt{\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^2} = |a||ctgt|.$$

Для рационализации данного выражения $R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ можно также использовать *гиперболическую подстановку* $x = |a| \cdot cht$, если $x > 0$, и подстановку $x = -|a| \cdot cht$, если $x < 0$. В первом случае имеем

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cdot ch^2 t - a^2} = |a| \cdot \sqrt{sh^2 t} = |a \cdot sht|,$$

и выражение приводится к рациональному виду $R(|a| \cdot cht, |a \cdot sht|)$.

7. Существуют приёмы, позволяющие рационализировать выражения с *квадратичными иррациональностями* общего вида

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right),$$

где $a \neq 0$, b и c – постоянные. В частности, уравнения вида

$$\sqrt{ax^2 + b_1 x + c} \pm \sqrt{ax^2 + b_2 x + c} = dx,$$

а также вида

$$\sqrt{a_1 x^2 + bx + c} \pm \sqrt{a_2 x^2 + bx + c} = dx,$$

где $a, a_1, a_2, d \neq 0$, b_1, b_2, b, c – постоянные, заменой

$$u = \sqrt{ax^2 + b_1 x + c}, \quad v = \sqrt{ax^2 + b_2 x + c}$$

соответственно,

$$u = \sqrt{a_1 x^2 + bx + c}, \quad v = \sqrt{a_2 x^2 + bx + c},$$

сводятся к системе рациональных уравнений.

Пример 9. *Решить уравнение*

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 2} + \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4x.$$

Решение. Положим $u = \sqrt{2x^2 + 5x + 2}$, $v = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$ $(u, v \geq 0)$. Тогда уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} u + v = 4x \\ u^2 - v^2 = 8x \end{cases}$$

(из первого уравнения $x \geq 0$), откуда, как следствие, получаем

$$u^2 - v^2 = 2(u + v) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = 2 \\ u + v = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2 + 5x + 2} - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 2 \\ \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 0. \end{array}\right.$$

Для решения первого из уравнений сложим его с исходным:

$$2\sqrt{2x^2+5x+2}=4x+2 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1/2<0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности неотрицательных корней не имеет. Проверка показывает, что $x=1$ удовлетворяет исходному уравнению. *Ответ*: $x\in\{1\}$.

Рассмотрим ещё один пример с квадратичной иррациональностью.

Пример 10 [Эконом.–2006]. *Решить уравнение*

$$2\sqrt{2x^2-x+8}=x-2x^2+7.$$

Решение. Положим $t=\sqrt{2x^2-x+8}$, тогда уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} t\ge 0 \\ t^2+2t-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=3.$$

Выполняя обратную подстановку, получим уравнение

$$2x^2-x+8=9 \Leftrightarrow x\in\{-1/2;1\}.$$

8. Рационализирующие подстановки используются также в задачах с *несколькими неизвестными*, например при решении систем.

Пример 11 [Воронежский госуниверситет–1997]. *Решить систему*

$$\begin{cases} \sqrt{y+7x}-\sqrt{y+2x}=4 \\ 2\sqrt{y+2x}-\sqrt{5x+8}=2. \end{cases}$$

Решение. Сделаем тройную подстановку $a=\sqrt{y+7x}$, $b=\sqrt{y+2x}$, $c=\sqrt{5x+8}$. Составив самостоятельно третье уравнение, зависящее только от a,b и c (и не зависящее от x и y), приходим к несложной системе целых алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a-b=4 \\ 2b-c=2 \\ a^2=b^2+c^2-8. \end{cases}$$

Система имеет единственное неотрицательное решение $a=9$, $b=5$, $c=8$. Выполняя обратную подстановку, находим решения: $(x;y)\in\{(56/5;13/5)\}$.

9. Выше мы рассматривали различные способы рационализации алгебраических уравнений. В общем случае решаемое уравнение или неравенство с радикалами может не иметь алгебраический вид. В этой ситуации также могут быть использованы рационализирующие подстановки. Например, в следующей задаче двойная подстановка преобразует неравенство показательного вида с радикалами в целое алгебраическое неравенство.

Пример 12 [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2003, май]. *При всех натуральных значениях n решить неравенство*

$$\sqrt[n]{\left(1+2^x\right)^2}-\sqrt[n]{1-4^x}\ge\sqrt[n]{\left(1-2^x\right)^2}$$

Решение. Пусть $u=\sqrt[n]{1-2^x}$, $v=\sqrt[n]{1+2^x}$. Тогда неравенство примет вид $v^2-uv\ge u^2$. Поделим на v^2 (>0) и обозначим $t=u/v$:

$$t^2+t-1\le 0\Leftrightarrow\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\le t\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

1) Если n – чётное, то $u\ge 0\Rightarrow t\ge 0$. Поэтому

$$0\le t\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow 0\le\frac{\sqrt[n]{1-2^x}}{\sqrt[n]{1+2^x}}\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Возводя неравенство в n-ю степень, получим

$$0\le\frac{1-2^x}{1+2^x}\le\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\dfrac{1-2^x}{1+2^x}\\ \dfrac{1-2^x}{1+2^x}\le\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x\le 1\\ 2^x\ge\dfrac{2^n-\left(\sqrt{5}-1\right)^n}{2^n+\left(\sqrt{5}-1\right)^n}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x\ge\log_2\left(\dfrac{2^n-\left(\sqrt{5}-1\right)^n}{2^n+\left(\sqrt{5}-1\right)^n}\right),\end{cases}\text{ т.е. } x\in\left[\log_2\left(\frac{2^n-\left(\sqrt{5}-1\right)^n}{2^n+\left(\sqrt{5}-1\right)^n}\right),\,0\right].$$

2) Если n – нечётное, то

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\le\frac{\sqrt[n]{1-2^x}}{\sqrt[n]{1+2^x}}\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\le\frac{1-2^x}{1+2^x}\le\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n.$$

Решая это неравенство, получаем $x\in\left[\log_2\left(\dfrac{2^n-\left(\sqrt{5}-1\right)^n}{2^n+\left(\sqrt{5}-1\right)^n}\right),+\infty\right)$.

Осталось объединить полученные решения.

Смысл всех указанных выше подстановок состоит в том, что они позволяют рационализировать уравнение, избавить его от присутствия радикалов и, следовательно, тем самым сделать его проще для дальнейшего решения.

Решение задачи на отдельных промежутках ОДЗ

В некоторых случаях при решении задачи может возникнуть необходимость разбить ОДЗ на отдельные промежутки, и затем на каждом из них решать задачу (возможно даже, разными методами).

Такая ситуация возникает, например, при выполнении преобразований, связанные с необходимостью разбить корень из произведения двух чисел на произведение корней, или если надо внести какую-либо величину под знак радикала чётной степени. При этом следует помнить, что, например,

$$\sqrt{ab}=\begin{cases}\sqrt{a}\sqrt{b}, & \text{если } a\ge 0,\ b\ge 0;\\ \sqrt{-a}\sqrt{-b}, & \text{если } a\le 0,\ b\le 0;\end{cases}$$

а также

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, & \text{если } a\ge 0;\\ -\sqrt{a^2b}, & \text{если } a\le 0.\end{cases}$$

Пример [Геолог.–2003, устн.]. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x(x+4)}+(x+4)\sqrt{\frac{x}{x+4}}\le x+8$$

Решение. ОДЗ: $\dfrac{x}{x+4}\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-4)\cup[0,+\infty)$.

Решим неравенство на каждом из этих промежутков.

1) $x\in(-\infty,-4)$: $\sqrt{x(x+4)}+(x+4)\sqrt{\dfrac{-x}{-x-4}}\le x+8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+4)}+(x+4)\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x-4}}\le x+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+4)}-(-x-4)\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x-4}}\le x+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+4)}-\sqrt{-x-4}\sqrt{-x}\le x+8 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+4)}-\sqrt{(-x)(-x-4)}\le x+8 \Leftrightarrow 0\le x+8$. Итак, $x\in[-8,-4)$.

2) $x \in [0,+\infty)$: $\sqrt{x(x+4)} + (x+4)\sqrt{\dfrac{x}{x+4}} \le x+8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+4)} + (x+4)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} \le x+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+4)} + \sqrt{x(x+4)} \le x+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+4)} \le x+8.$$

Так как обе части последнего неравенства неотрицательны, то возведём его в квадрат и получим равносильное неравенство

$$4(x(x+4)) \le (x+8)^2 \Leftrightarrow x^2 \le 64/3 \Leftrightarrow -\sqrt{64/3} \le x \le \sqrt{64/3}.$$

Пересекая с рассматриваемым промежутком, получаем $x \in \left[0,\ 8/\sqrt{3}\right]$.

Ответ: $x \in [-8,-4) \cup \left[0,\ 8/\sqrt{3}\ \right]$.

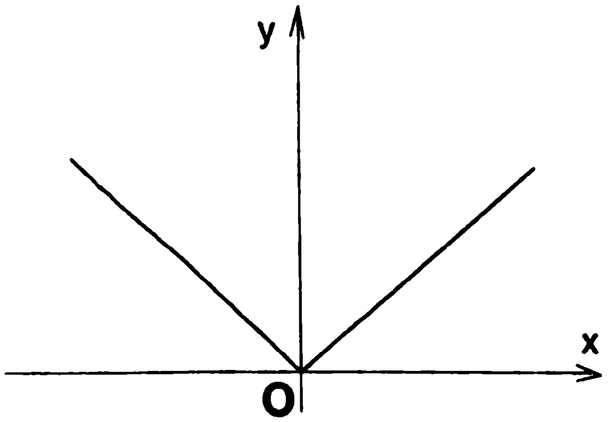
3.3.4. Задачи с модулем

В силу важности задач, связанных с раскрытием модулей действительных чисел, и достаточной распространённости их во время конкурсных испытаний, задачи с модулем выделены в отдельный пункт. Понятие модуля действительного числа закладывает основы для введения в будущем таких понятий, как модуль комплексного числа, модуль вектора, а также дальнейшего обобщения – понятия нормы.

Понятие модуля действительного числа, его график и свойства

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа x называется само это число, если x – положительно; нуль, если x равен нулю; число, противоположное числу x, если x – отрицательно.

Модуль действительного числа x обозначается $|x|$. Функция $y=|x|$ относится к алгебраическим, так как $|x| = \sqrt{x^2}$. Итак, по определению, имеем:



$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x=0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Аналогично водится понятие модуля для произвольного выражения:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) > 0, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) = 0, \\ -f(x), & \text{если} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля

Пусть $x, y \in R$. Тогда справедливы следующие свойства.

1. Модуль числа неотрицателен: $|x| \geq 0$.

2. Модуль числа не меньше самого числа: $|x| \geq x$, причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x \geq 0$.

Модуль числа не меньше того же числа, взятого со знаком минус: $|x| \geq -x$, причём неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow$ $x \leq 0$.

3. Модули противоположных чисел равны: $|x| = |-x|$.

4. Квадраты числа и его модуля равны: $|x|^2 = x^2$.

5. Арифметический корень чётной степени, извлечённый из такой же степени числа, равен модулю числа: $\sqrt{x^2} = |x|$; $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$ $(k \in N)$.

6. Модуль произведения двух чисел равен произведению их модулей:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

7. Модуль частного равен частному модулей: $|x/y| = |x|/|y|$ $(y \neq 0)$.

8. Модуль суммы двух чисел не превышает суммы их модулей:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда числа имеют одинаковые знаки либо хотя бы одно из них обращается в нуль (т.е. когда $xy \geq 0$).

Модуль разности двух чисел также не превосходит суммы их модулей: $|x - y| \leq |x| + |y|$, причём равенство имеет место $\Leftrightarrow$ $xy \leq 0$.

Доказательство. Пользуясь тем, что обе части неравенства $|x + y| \leq$ $\leq |x| + |y|$ неотрицательны, возведём его в квадрат и получим равносильное неравенство $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$ $\Leftrightarrow$ $xy \leq |xy|$, которое, очевидно, верно при всех $x, y \in R$. Следовательно, исходное неравенство также верно. При этом доказываемое неравенство обращается в равенство одновременно с неравенством $xy \le |xy|$, т.е. когда $xy \ge 0$. Для доказательства свойства $|x-y| \le |x| + |y|$ достаточно подставить в неравенство $|x+y| \le |x| + |y|$ вместо y выражение $(-y)$.

Приведём здесь также известное *обобщение* этого неравенства на случай произвольного количества чисел: если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – любые действительные числа, то

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

(неравенство доказывается методом математической индукции).

9. Модуль суммы (разности) двух чисел не меньше модуля разности их модулей:

$$|x+y| \ge \big||x| - |y|\big|,$$

причём неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow$ $xy \le 0$.

А также $|x-y| \ge \big||x| - |y|\big|$, причём неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow$ $xy \ge 0$.

Доказательство. Пользуясь тем, что обе части неравенства $|x+y| \ge$ $\ge \big||x| - |y|\big|$ неотрицательны, возведём его в квадрат и получим равносильное неравенство

$$(x+y)^2 \ge (|x| - |y|)^2 \Leftrightarrow |xy| \ge -xy,$$

которое, очевидно, выполняется при всех $x, y \in R$. При этом исходное неравенство обращается в равенство одновременно с неравенством $|xy| \ge -xy$, т.е. когда $xy \le 0$ (числа x, y имеют разные знаки или хотя бы одно из них обращается в нуль). Для доказательства свойства $|x-y| \ge \big||x| - |y|\big|$ достаточно подставить в доказанное неравенство $|x+y| \ge \big||x| - |y|\big|$ вместо y выражение $(-y)$.

10. Действительное число всегда представимо в виде произведения его модуля на функцию его знака: $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, где

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x > 0, \\ 0 & \textit{если} \quad x = 0, \\ -1, & \textit{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

есть известная в математике функция, называемая «сигнум», или «знак числа».

Методы решения задач с модулями

Обратимся к рассмотрению основных приёмов и методов решения задач, содержащих модули. Их условно можно разбить на две группы.

1) *Специальные приёмы* раскрытия модулей, характерные именно для задач, содержащих модули:

– раскрытие модуля по определению;

– метод интервалов как базовый метод раскрытия модулей в случаях, когда подмодульные выражения содержат одну неизвестную;

– метод областей, обобщающий метод интервалов на случай, когда количество неизвестных под знаком модуля больше одной;

– раскрытие модуля с помощью его геометрического смысла;

– методы, основанные на использовании разнообразных свойств модуля (в том числе в виде неравенств, когда уравнение реализует частный случай обращения неравенства в равенство; при этом проводится анализ необходимых и достаточных условий достижения равенства);

– метод замены множителей вида $|a|-|b|$, $\sqrt{a}-|b|$ в отдельных типах неравенств на множители эквивалентного знака, не содержащие модулей и др.

В частности, на некоторых из перечисленных приёмов основаны схемы решения наиболее часто встречающихся типов уравнений и неравенств с модулями.

2) *Универсальные приёмы и методы*, используемые не только при решении задач с модулями, но и в других разделах математики:

– возведение в степень (чаще всего, в квадрат);

– графический подход (метод координат), когда в решении используются графические образы уравнений или неравенств с модулями;

– метод замены переменных;

– метод оценок, функциональные методы и многие другие известные подходы.

Чтобы успешно решать задачи на данную тему, необходимо не только хорошо разбираться в различных методах решения, но и уметь отбирать для конкретной задачи наиболее оптимальный способ.

Специальные методы

Раскрытие модулей по определению

Если в задаче содержится модуль (как правило, один), то рассматривают два случая: когда выражение под знаком модуля больше либо равно нулю и когда оно меньше нуля. В первом случае модуль опускают (это часто называют «раскрыть модуль со знаком плюс»), а во втором – модуль заменяют скобками, перед которыми ставится знак минус (называется «раскрыть модуль со знаком минус»). В отдельных задачах бывает удобнее рассмотреть три случая: когда подмодульное выражение больше, меньше или равно нулю. Например, уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ этим способом сводятся к совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Аналогично можно решать неравенства вида $|f(x)| \vee g(x)$, где знак $\vee$ заменяет любой из знаков неравенства.

<u>*Замечание*</u>. Раскрывать модули по определению можно и в случаях, когда их количество в задаче больше одного, но тогда, например, при решении уравнения $|2x+8| - |x-5| = 12$ придётся рассмотреть четыре случая:

$$1) \begin{cases} 2x+8 \ge 0 \\ x-5 \ge 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x+8 \ge 0 \\ x-5 < 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x+8 < 0 \\ x-5 \ge 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x+8 < 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

(и в каждом случае раскрывать модули и решать уравнение), в то время как при использовании метода интервалов – всего три:

1) $x < -4$; 2) $-4 \le x < 5$; 3) $x \ge 5$, что эффективнее.

Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 1*. Решить уравнение* $|2x-4| = x^2 - 3x$.

Решение. Рассмотрим два случая:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-4 \ge 0 \\ x^2-3x = 2x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-4 < 0 \\ x^2-3x = 4-2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2-5x+4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x^2-x-4 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$$

Пример 2 [Геолог.–2002, май]. ***Решить неравенство***

$$\frac{x+1}{|2-x|} + \frac{x+1}{x-5} \le 0.$$

Решение. Раскладывая левую часть неравенства на множители, имеем

$$(x+1)\left(\frac{1}{|x-2|} + \frac{1}{x-5}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2\\ \dfrac{3(x+1)}{x-5}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>2\\ \dfrac{(x+1)(2x-7)}{x-5}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -1\\ \dfrac{7}{2}\le x<5.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty,-1]\cup[7/2,5)$.

Пример 3 [Геолог.–1992, устн.]. ***Решить уравнение***

$$\frac{4\sin x}{(x-3)^2}+|\sin x|=0.$$

Решение. ОДЗ: $x\ne 3$. Рассмотрим два случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\ge 0\\ \sin x\cdot\left(\dfrac{4}{(x-3)^2}+1\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \sin x\cdot\left(\dfrac{4}{(x-3)^2}-1\right)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\ge 0\\ \sin x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \dfrac{4}{(x-3)^2}-1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\{\pi n;\ 5\}$, где $n\in Z$.

Пример 4 [Психолог.–2000]. ***Решить уравнение*** $4x\sin 3x=3x+|x|$.

Решение.
$$\left[\begin{array}{l}x=0\\ \begin{cases}x>0\\ \sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \sin 3x=1/2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \begin{cases}x>0\\ 3x=\pi/2+2\pi n, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ 3x=(-1)^k\pi/6+\pi k, k\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $x=0$; $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}$, $n\ge 0$; $(-1)^k\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi k}{3}$, $k<0$, $n,k\in Z$.

Пример 5 [Черноморский филиал МГУ–2001]. ***Найти все пары*** $(x;y)$, ***удовлетворяющие условию*** $(|x|-2x)y^2\le 18x(6-2y)$.

Решение. 1) При $x=0$ неравенство верно при любом действительном y. Отсюда получаем пары чисел $(0;y)$, где $y\in R$.

2) При $x>0$ имеем: $-xy^2\le 18x(6-2y) \Leftrightarrow y^2\ge -18(6-2y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y^2-36y+108\ge 0$, откуда получаем пары чисел вида $(x;y)$, где $x\in(0,+\infty)$, $y\in\left(-\infty,18-6\sqrt{6}\right]\cup\left[18+6\sqrt{6},+\infty\right)$.

3) При $x<0$ имеем: $-3xy^2\le 18x(6-2y) \Leftrightarrow y^2\le -6(6-2y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y^2-12y+36\le 0 \Leftrightarrow y=6$, т.е. получили пары $(x;6)$, $x\in(-\infty,0)$.

Ответ: $(0;y)$, где $y\in R$; $(x;6)$, где $x\in(-\infty,0)$;

$(x;y)$, где $x\in(0,+\infty)$, $y\in\left(-\infty,18-6\sqrt{6}\right]\cup\left[18+6\sqrt{6},+\infty\right)$.

Пример 6. *Решить неравенство* $|ax|\ge 1+x$.

Решение. Здесь целесообразно вначале «отделить» параметр от переменной $|a||x|\ge 1+x$, и уже затем раскрывать модуль, но только над x.

1) При $x\ge 0$ имеем: $|a|x\ge 1+x \Leftrightarrow x(|a|-1)\ge 1$.

Если $|a|>1$, то решением будет $x\ge 1/(|a|-1)$ (>0). Пересекая с промежутком $x\ge 0$, получаем $x\in\left[1/(|a|-1),+\infty\right)$. Если $|a|<1$, то решением будет $x\le 1/(|a|-1)$ (<0). Пересекая с промежутком $x\ge 0$, получаем $x\in\varnothing$. Если $|a|=1$, то неравенство примет вид $x\cdot 0\ge 1$, что не выполняется ни при каких x.

2) При $x<0$ имеем:

$$|a|x\ge 1+x \Leftrightarrow x(|a|+1)\le -1 \Leftrightarrow x\le -1/(|a|+1) \ (<0).$$

Пересекая с промежутком $x<0$ получаем, что при всех a решением будет любое $x\in\left(-\infty,-1/(|a|+1)\right]$. Осталось объединить полученные решения.

Ответ: при $|a|>1$ $x\in\left(-\infty,-1/(|a|+1)\right]\cup\left[1/(|a|-1),+\infty\right)$;

при $|a|\le 1$ $x\in\left(-\infty,-1/(|a|+1)\right]$.

Пример 7 [РЭА им. Плеханова]. *Найти сумму целых решений неравенства*

$$\left||x+1|+3x\right|\le 5.$$

Решение. В этой задаче имеются вложенные модули. Раскроем их, начиная с внутреннего модуля. Для этого рассмотрим два случая.

1) $x\in(-\infty,-1]$: $|-(x+1)+3x|\le 5 \Leftrightarrow |2x-1|\le 5$. Поскольку на рассматриваемом промежутке $2x-1<0$, то оставшийся модуль раскрывается со знаком «минус», и получаем $-(2x-1)\le 5 \Leftrightarrow x\ge -2$. Пересекая с данным промежутком, имеем результат: $x\in[-2,-1]$.

2) $x\in(-1,+\infty)$: раскрывая внутренний модуль, получаем $|(x+1)+3x|\le 5$ $\Leftrightarrow |4x+1|\le 5$. Если при этом $x\in(-1,-1/4]$, то имеем $-(4x+1)\le 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\ge -3/2$, пересекая с данным промежутком, получаем решения $x\in(-1,-1/4]$; если же $x\in(-1/4,+\infty)$, то имеем $4x+1\le 5 \Leftrightarrow x\le 1$ или, с учётом промежутка, $x\in(-1/4,1]$.

Объединяя результаты, находим множество всех решений неравенства: $x\in[-2,1]$. *Ответ*: $(-2)+(-1)+0+1=-2$.

Метод интервалов

В отличие от рассмотренного выше приёма, основанного на раскрытии модулей по определению, метод интервалов оказывается эффективен в задачах, содержащих сразу несколько модулей.

Пусть, например, дано уравнение с одним неизвестным x вида

$$|f_1(x)|\pm|f_2(x)|\pm\ldots\pm|f_n(x)|=g(x),$$

где $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ и $g(x)$ – некоторые заданные функции.

Чтобы решить его *методом интервалов*, надо сделать следующее.

1) Приравнять к нулю все подмодульные выражения $f_i(x)$ и решить полученные уравнения: $f_i(x)=0$, $i=1,\ldots,n$. Допустим, решениями этой совокупности уравнений являются числа $x_1, x_2,\ldots, x_k$.

2) Найденные k чисел разбивают всю область допустимых значений переменной x на конечное число интервалов (отсюда название метода), на каждом из которых каждая из функций $f_i(x)$ сохраняет определённый знак. Затем задача решается на каждом из этих интервалов.

3) Возьмём, к примеру, первый из интервалов. Пусть это будет интервал $(-\infty, x_1)$. Подставляя поочерёдно любое удобное число x из этого интервала в подмодульные выражения и оценивая их знак, раскрываем каждый из модулей, по определению, либо со знаком «плюс», либо со знаком «минус». Технически

это происходит так: если выражение под модулем положительно, то модуль опускается (заменяется обычными скобками); если же выражение под знаком модуля отрицательно, то модуль заменяется скобками, перед которыми ставится знак минус. Таким образом, в задаче не остается нераскрытых модулей, после чего она решается.

4) Из найденных решений отбираются те, которые принадлежат рассматриваемому интервалу $(-\infty, x_1)$. Только они будут решениями задачи. Затем переходим к следующему промежутку $[x_1, x_2)$.

5) Рассмотрев по очереди все промежутки, объединяем в ответе решения, полученные на каждом из промежуточных интервалов.

Аналогичным образом можно решать и неравенства. Если в задаче имеется единственный модуль, то метод интервалов сводится фактически к раскрытию этого модуля по определению.

Теоретически метод интервалов может быть применён для решения большинства задач, содержащих модули. Однако, несмотря на его широкую распространённость, в экзаменационной практике встречаются задачи, для решения которых гораздо целесообразнее применять другие способы (задачи такого рода будут рассмотрены далее). Обратимся к примерам на использование метода интервалов.

Пример 1 [ГФА]. *Решить уравнение*

$$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$$

Решение. Решим задачу методом интервалов. Определив три точки ($x=1;\ 2;\ 3$), в которых подмодульные выражения обращаются в нуль (и меняют свои знаки), получаем четыре промежутка, и далее раскрываем модули последовательно на каждом из них.

1) Пусть $x \in (-\infty, 1]$: подставляя вместо x любое число, лежащее внутри этого промежутка, например (-10), оцениваем знак каждого подмодульного выражения. Так как при $x=-10$ имеем $x-1<0$, $x-2<0$, $x-3<0$, то все три модуля на данном промежутке раскроем со знаком «минус», и уравнение примет вид

$$-(x-1)+2(x-2)-3(x-3)=4 \Leftrightarrow x=1 \in (-\infty, 1] \text{ – решение.}$$

2) $x \in (1,2]$: подставляя вместо x, например, число $3/2$, оцениваем знаки выражений под модулями. При этом значении x имеем $x-1>0$, $x-2<0$, $x-3<0$, поэтому первый модуль раскроем со знаком «плюс», а остальные два – со знаком «минус»:

$$(x-1)+2(x-2)-3(x-3)=4 \Leftrightarrow 0=0.$$

Полученное равенство не содержит x, а значит, выполняется при всех x из данного промежутка. Таким образом, весь промежуток войдёт в ответ.

3) $x \in (2,3]$: действуя аналогично предыдущему, получим:

$$(x-1)-2(x-2)-3(x-3)=4 \Leftrightarrow x=2 \notin (2,3] \text{ – нет решений.}$$

4) $x \in (3,+\infty)$: на последнем промежутке уравнение примет вид

$$(x-1)-2(x-2)+3(x-3)=4 \Leftrightarrow x=5 \in (3,+\infty) \text{ – решение.}$$

Для получения ответа осталось объединить все найденные решения.

Ответ: $x \in [1,2] \cup \{5\}$.

Полностью аналогичный подход используется и при решении *неравенств с модулями*.

Пример 2 [Геолог. –1985]. *Решить неравенство* $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1} \geq 1$.

Решение. Согласно методу интервалов, для освобождения от знаков абсолютной величины разобьём числовую ось на промежутки.

1) Если $x \in (-\infty,1]$, то $x-2<0$ и $x-1 \leq 0$. Значит, на этом промежутке оба модуля раскрываются со знаком «минус»: $|x-2| = -(x-2) = 2-x$, $|x-1| = -(x-1) = 1-x$, и неравенство принимает вид $\dfrac{2-x}{1-x-1} \geq 1$, что равносильно неравенству $2/(-x) \geq 0 \Leftrightarrow x<0$. Все эти значения x входят в рассматриваемый промежуток и поэтому являются решениями исходного неравенства.

2) Если $x \in (1,2]$, то $x-2 \leq 0$ и $x-1>0$. Значит, $|x-2| = 2-x$, $|x-1| = x-1$, и исходное неравенство принимает вид $\dfrac{2-x}{x-1-1} \geq 1$. Оно не имеет решений, а следовательно, исходное неравенство не имеет решений в промежутке $(1,2]$.

3) Наконец, если $x \in (2,+\infty)$, то $x-2>0$ и $x-1>0$. Значит, $|x-2| = x-2$, $|x-1| = x-1$, и исходное неравенство принимает вид $(x-2)/(x-2) \geq 1$. Множество решений этого неравенства состоит из двух промежутков $-\infty < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. В рассматриваемую область попадает лишь второй из промежутков $2 < x < +\infty$. Все значения x из него и будут решениями исходного неравенства. Объединяя полученные решения, приходим к ответу. *Ответ*: $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$.

Метод интервалов используется и при решении задач, в которых имеются вложенные друг в друга модули.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\left|\left|3-x\right|-x+1\right|+x=6:$$

Решение. Раскроем модули, начиная с внутреннего модуля. Для этого рассмотрим два случая.

1) $x<3$: имеем $\left|4-2x\right|+x=6$. Если при этом $x\le 2$, то, раскрывая оставшийся модуль, получим $x=-2\in(-\infty,2]$. Если же $2<x<3$, то, раскрывая модуль, найдём $x=10/3\notin(2,3)$.

2) $x\ge 3$: имеем $\left|-2\right|+x=6$, т.е. $x=4\in[3,+\infty)$.

Объединяя найденные решения, приходим к ответу: $x\in\{-2;4\}$.

Особый интерес (и часто наибольшие трудности) представляют задачи, содержащие наряду с модулями *параметры*. Рассмотрим пример.

Пример 4 [ВМиК–1982; Академия гражданской авиации–1993].
Для каждого значения a найти все x, удовлетворяющие уравнению

$$\left|x-2\right|+a\left|x+3\right|=5.$$

Решение. Воспользуемся методом интервалов, для этого рассмотрим три промежутка, на которые точки $x=2$ и $x=-3$ разбивают ОДЗ уравнения (всю числовую прямую), и решим задачу на каждом из них.

1) Пусть $x\in(-\infty,-3)$: раскрывая модули со знаком «минус», получаем линейное уравнение $-(x-2)-a(x+3)=5$, и приводим его к виду

$$x(a+1)=-3(a+1). \qquad (1)$$

Если $a+1\ne 0$, то $x=-3$, однако это число не принадлежит рассматриваемому промежутку и поэтому не будет решением ни при каких a.

Если $a+1=0$, то, подставляя $a=-1$ в уравнение (1), получаем уравнение $x\cdot 0=0$, которому удовлетворяет произвольное действительное x. С учётом рассматриваемого промежутка имеем $x\in(-\infty,-3)$.

2) Пусть $x\in[-3,2)$: раскрывая первый из модулей со знаком «минус», а второй со знаком «плюс», получаем уравнение $-(x-2)+\ +a(x+3)=5$, и приводим его к виду

$$x(a-1)=-3(a-1). \qquad (2)$$

Если $a-1\ne 0$, то $x=-3\in[-3,2)$ – решение.

Если же $a-1=0$, то имеем уравнение $x\cdot 0=0 \Leftrightarrow x\in R$. Учитывая промежуток, получаем $x\in[-3,2)$.

3) Пусть $x\in[2,+\infty)$: раскрывая оба модуля со знаком «плюс», получаем уравнение $(x-2)+a(x+3)=5$ и приводим его к виду

$$x(a+1)=7-3a. \qquad (3)$$

Если $a+1\neq 0$, то $x=(7-3a)/(a+1)$. Выясним, при каких значениях параметра a найденное число будет принадлежать рассматриваемому промежутку (т.е. являться решением). Для этого составим и решим неравенство

$$(7-3a)/(a+1)\geq 2 \Leftrightarrow a\in(-1,1].$$

Если же $a+1=0$, то уравнение (3) приобретает вид $x\cdot 0=10$ и, очевидно, не имеет решений.

Наконец, объединяя полученные результаты, приходим к ответу.

Ответ: при $a\in(-\infty,-1)$ $x=-3$; при $a=-1$ $x\in(-\infty,-3]$;

при $a\in(-1,1)$ $x=-3$, $x=\dfrac{7-3a}{a+1}$; при $a=1$ $x\in[-3,2]$;

при $a\in(1,+\infty)$ $x=-3$.

Метод интервалов используют и в случаях необходимости построения *графика функции*, если она содержит неизвестную под знаком модуля.

Пример 5 [ВМиК–1996]. *Найти наименьшее значение функции*

$$y=\big|x+|x-1|\big|+|x+1|.$$

Решение. Воспользуемся методом интервалов, начав раскрывать модули с модулей $|x-1|$ и $|x+1|$.

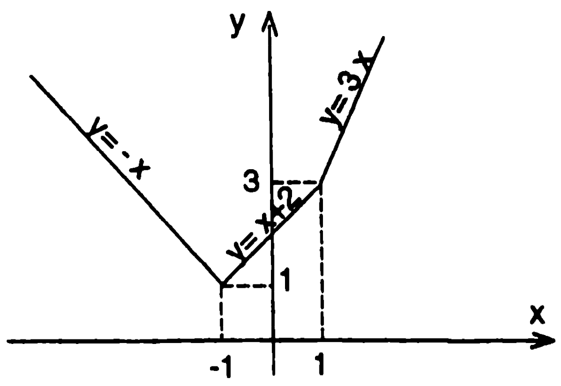
1) $x\in(-\infty,-1)$: на этом интервале уравнение функции примет вид $y=|x-(x-1)|-(x+1)=-x$.

2) $x\in[-1,1)$: раскрывая модули, получаем $y=x+2$.

3) $x\in[1,+\infty)$: раскрывая модули и упрощая функцию, получаем

$$y=|2x-1|+(x+1)=3x.$$

Итак, при помощи метода интервалов удалось найти аналитическое представление функции. Построим её график.



$$y=\begin{cases} -x, & \text{если} \quad x<-1, \\ x+2, & \text{если} \quad -1\le x<1, \\ 3x, & \text{если} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Из графика ясно, что функция принимает наименьшее значение, равное 1, при $x=-1$.

Метод областей – обобщение метода интервалов

Если требуется решить уравнение (неравенство) с *двумя неизвестными* x и y, например, вида

$$|f_1(x,y)|\pm|f_2(x,y)|\pm\ldots\pm|f_n(x,y)|=g(x,y)$$

(под знаком модуля содержатся выражения от двух неизвестных), то прибегают к аналогу метода интервалов на плоскости – *методу областей.*

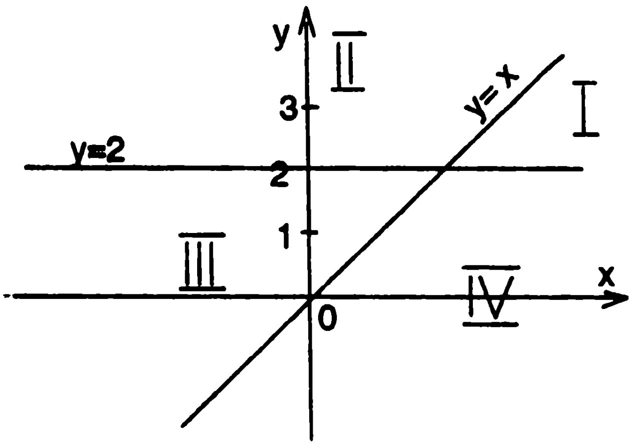
Отличие его от метода интервалов состоит в следующем. Если в методе интервалов приравнивались к нулю подмодульные выражения и находились точки x на числовой прямой, в которых каждое из подмодульных выражений могло поменять знак, то теперь, приравнивая выражения под знаком модуля к нулю, будем получать некоторые кривые, которые разбивают координатную плоскость на области. Перебирая поочерёдно все области, в каждой из них раскрывают с соответствующим знаком имеющиеся в задаче модули, и затем изображают графически в виде кривой или иной фигуры на плоскости решение полученного уравнения (неравенства) в рассматриваемой области. В заключение следует объединить полученные по всем областям результаты и пересечь их с ОДЗ.

Пример 1*. Изобразить на координатной плоскости геометрическое место точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$|y-x|+|y-2|+x=4.$$

Решение. Воспользуемся методом областей. Приравняв к нулю подмодульные выражения, получаем уравнения двух прямых $y=x$ и $y=2$. Указанные прямые разбивают всю координатную плоскость Oxy на четыре области. Рассмотрим поочерёдно каждую из областей, раскрывая в ней модули.

Например, первый модуль раскрывается со знаком «плюс» там, где $y\ge x$, т.е. во II и III областях, и со знаком «минус» соответственно в I и IV областях.



Второй модуль раскрывается со знаком «плюс» там, где $y \geq 2$, т.е. в I и II областях, и со знаком «минус» соответственно в III и IV областях.

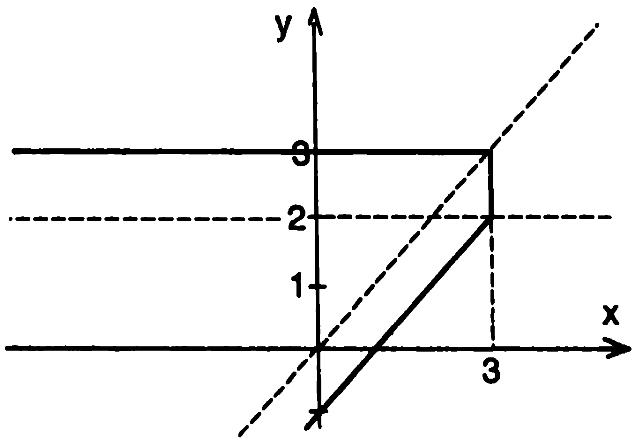
Область I: после раскрытия модулей уравнение принимает вид

$$-(y-x)+(y-2)+x=4 \Leftrightarrow x=3.$$

Таким образом, в данной области искомое ГМТ представляет собой отрезок прямой $x=3$, попадающий в эту область.

Область II: после раскрытия модулей уравнение принимает вид

$$(y-x)+(y-2)+x=4 \Leftrightarrow y=3.$$



Таким образом, в данной области искомое ГМТ представляет собой часть прямой $y=3$, попадающую в эту область.

Область III: после раскрытия модулей уравнение принимает вид

$$(y-x)-(y-2)+x=4$$

и не имеет решений. Поэтому в данной области ГМТ отсутствует.

Область IV: после раскрытия модулей уравнение принимает вид

$$-(y-x)-(y-2)+x=4 \Leftrightarrow y=x-1.$$

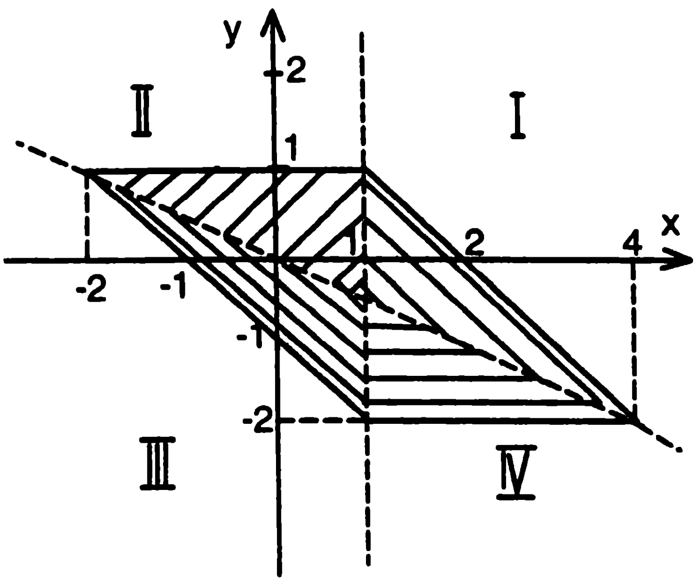
Таким образом, в данной области искомое ГМТ представляет собой часть прямой $y=x-1$, попадающую в эту область. Объединяя полученные ГМТ, строим окончательно фигуру (см. рис. выше). Задача решена.

Пример 2 [Геолог.–2008, устн.]. ***Найти площадь фигуры, заданной неравенством***

$$|x+2y|+|x-1| \leq 3.$$

Решение. Построим указанную фигуру. Прямые $y=-x/2$ и $x=1$ разбивают координатную плоскость на четыре области.

В I области (см. рис.) оба модуля раскрываются положительно, и неравенство принимает вид $y \leq 2-x$. Пересечение полуплоскости, задаваемой этим неравенством, и I области, образует часть искомой фигуры. Во II области 1-й модуль раскрывается положительно, а второй – отрицательно, в результате полу-



чаем неравенство $y \le 1$. Достраиваем вторую часть фигуры. В III области, аналогично действуя, получаем $y \ge -x-1$, а в IV области, соответственно, $y \ge -2$. Объединяя все четыре части, получаем искомую фигуру в виде параллелограмма.

Очевидно, что длина верхней стороны параллелограмма равна 3, длина высоты, проведённой к этой стороне (её роль выполняет меньшая диагональ параллелограмма), также равна 3. Искомая площадь фигуры равна произведению длин указанных отрезков. *Ответ*: 9 кв.ед.

Построение на плоскости $(x; y)$ фигуры, задаваемой уравнением

$$f(x,y)=0 \qquad (1)$$

или неравенством

$$f(x,y) \vee 0 \qquad (2)$$

(знак $\vee$ заменяет любой из знаков неравенства), можно значительно упростить, если эта фигура обладает свойством *симметрии* относительно координатных осей или прямых, им параллельным. Так, если, например, функция $f(x,y)$ чётна относительно переменной x, т.е. для всех допустимых x и y выполняется равенство

$$f(-x,y)=f(x;y),$$

то фигура, определяемая уравнением (1) или неравенством (2), будет симметрична относительно прямой $x=0$ (ось ординат Oy), а если функция $f(x,y)$ чётна относительно переменной y, т.е. для всех допустимых x и y выполняется равенство

$$f(x,-y)=f(x;y),$$

то фигура, определяемая (1) или (2), симметрична относительно прямой $y=0$ (ось абсцисс Ox).

Пользуясь аналогичными рассуждениями, можно заметить, что, например, уравнение $(x-1)^2+2|y+2|=3$ задаёт на плоскости фигуру, симметричную относительно прямых $x=1$ и $y=-2$. В этом случае при построении данной фигуры достаточно изобразить её, например, только в области $x\ge 1$, $y\ge -2$, а затем достроить полученный участок симметрично осей симметрии фигуры.

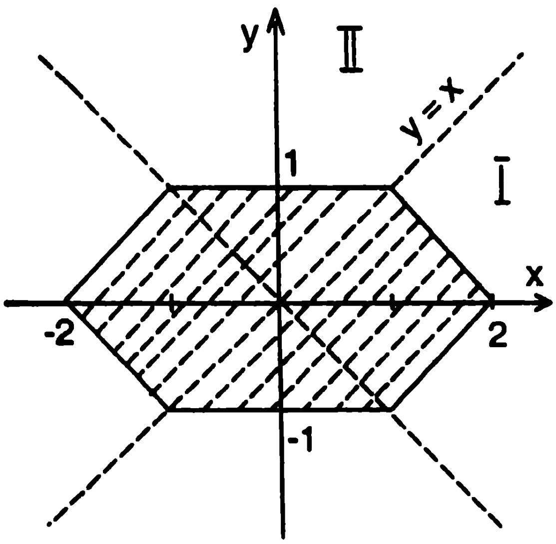
Подумайте, какой вывод о свойствах фигуры можно сделать в случае, когда функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию

$$f(-x,-y)=-f(x,y).$$

Пример 3 [ВМК–1999, устн.]. *Найти площадь фигуры, заданной неравенством*

$$|y-x|+2|y|+|y+x|\le 4.$$

Решение. Заметим, что при замене в данном неравенстве x на $(-x)$ значение функции в левой части неравенства не изменится. Это означает, что данная фигура симметрична относительно оси ординат. Аналогично заметим, что ничего не изменится и при замене y на $(-y)$, т.е. фигура к тому же обладает свойством симметрии относительно оси абсцисс.



Поэтому достаточно построить фигуру, например, в первой четверти, а затем отобразить её симметрично обеим координатным осям.

В области I (см. рис.) раскрываем модули и получаем, что

$$(x-y)+2y+(y+x)\le 4,$$

т.е. $y\le 2-x$. В области II соответственно получаем:

$$(y-x)+2y+(y+x)\le 4,$$

т.е. $y\le 1$. Используя симметрию относительно координатных осей, достраиваем фигуру: это шестиугольник площади 6 кв.ед.

Пример 4 [ВМК–2008, устн.]. *Изобразить на координатной плоскости* $(x;y)$ *множество точек, координаты которых удовлетворяют условию*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)+\frac{y}{\sqrt{y^2}}.$$

Решение. Это условие равносильно условию $\sin x+\sin y=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}$. ОДЗ:

$x \neq 0,\ y \neq 0$. Так как функция $f(x,y)=\sin x+\sin y-\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}$ удовлетворяет условию $f(-x,-y)=-f(x,y)$, то искомая фигура центрально симметрична относительно начала координат. Поэтому построим её вначале в 1-й и 4-й четвертях.

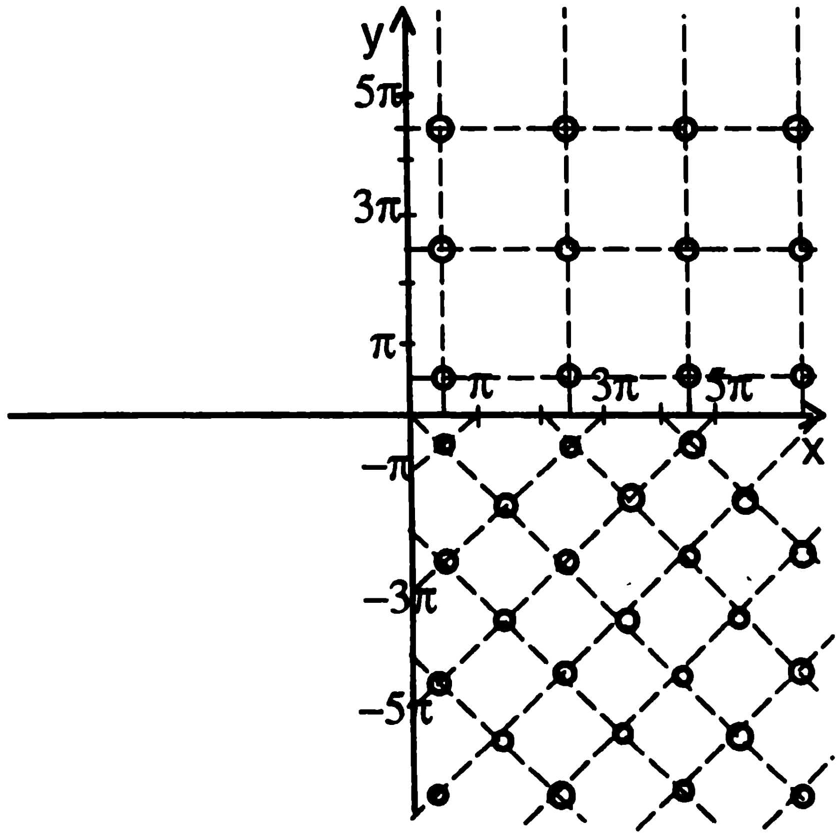
1) Пусть $x>0,\ y>0$, тогда условие примет вид

$$\sin x+\sin y=2 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1\\ \sin y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pi/2+2\pi n, & n=0,1,..\\ y=\pi/2+2\pi k, & k=0,1,..\end{cases}$$

2) Пусть $x>0,\ y<0$, тогда получим условие в виде

$$\sin x+\sin y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-x+2\pi n,\ n\in Z\\ y=\pi+x+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

В 1-й и 4-й четвертях имеем бесконечную совокупность отдельных точек, образованных пересечениями соответствующих прямых (см. рис.):



Для получения искомой фигуры осталось центрально симметрично достроить полученное множество в левую полуплоскость.

Рассмотрим, какие ещё приёмы и методы используются при решении задач с модулями.

Раскрытие модуля, используя его геометрический смысл

Пусть a, b – действительные числа. Тогда выражение $|a-b|$ имеет геометрический смысл *расстояния* на числовой прямой от точки с координатой a до точки с координатой b. Геометрическую интерпретацию модуля как расстояния бывает достаточно удобно использовать при решении некоторых уравнений и неравенств с модулями.

Например, решить уравнение $|x-3|=1$ геометрически означает найти на числовой прямой все точки x, расположенные от точки 3 на расстоянии 1. Представим себе числовую прямую, отметим на ней точку, отвечающую числу 3, и отложим в обе стороны от неё единичные отрезки. Получим две точки, координаты которых $x=2$ и $x=4$ будут искомыми решениями уравнения.

Другой пример. Пусть требуется решить неравенство $|x-3|<1$. Это означает, что надо найти на числовой прямой все точки, отстоящие от точки 3 на расстояние, меньшее 1. Опять представим себе числовую прямую, отметим на ней точку 3, отложим от неё в обе стороны отрезки единичной длины и получим две точки 2 и 4 (их следует выколоть). Тогда искомые точки x образуют интервал с центром в точке 3 длины 2, т.е. $x\in(2,4)$. Таким же образом можно решить неравенства $|x-3|\geq 1$, $|x-3|\neq 1$, $1<|x-3|\leq 2$ и многие другие.

Рассмотрим теперь более сложный пример.

Пример [Мехмат–2008, 1]. *Решить неравенство*

$$\left||1-x^2|-|x^2-3x+2|\right|\geq 3|x-1|.$$

Решение. Так как $\left||(1-x)(1+x)|-|(x-1)(x-2)|\right|\geq 3|x-1|$, то перенесём все слагаемые в левую часть и разложим её на множители:

$$|x-1|\left(\left||x+1|-|x-2|\right|-3\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \left||x+1|-|x-2|\right|\geq 3. \end{array}\right.$$

Решим последнее неравенство, привлекая геометрический смысл модуля. Представим числовую прямую и на ней точки -1 и 2.

Решить неравенство $\left||x+1|-|x-2|\right|\geq 3$ означает найти на числовой прямой такие точки x, что модуль разности расстояний от x до точек -1 и 2 не меньше 3. Заметим, что расстояние между этими точками в точности равно 3. Если точка $x\in(-1,2)$, то сумма расстояний от неё до -1 и 2 равна 3, а соответствующая разность расстояний будет меньше 3, т.е. неравенство не выполняется. Если же $x\notin(-1,2)$, то модуль разности расстояний от x до -1 и 2 будет равен 3, т.е. неравенство верно. Таким образом, получаем ответ: $x\in(-\infty,-1]\cup\{1\}\cup[2,+\infty)$.

Раскрытие модулей на ОДЗ

При решении задач с модулями не всегда сразу возникает необходимость в применении метода интервалов или каких-либо других способов избавления от модулей. Иногда бывает достаточно провести *анализ ОДЗ*, и в результате по крайней мере часть модулей удаётся однозначно раскрыть. Рассмотрим три примера.

Пример 1 [Географ.–2002]. *Решить уравнение* $|x-2|=1/(x-2)$.

Решение. Очевидно, $x\neq 2$. Более того, так как левая часть уравнения неотрицательна, то и равная ей правая часть должна быть неотрицательна, т.е. $\dfrac{1}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow x>2$. Но при $x>2$ модуль раскрывается положительно, и, решая полученное уравнение $(x-2)^2=1$, находим $x=1$ или $x=3$. Только второе число удовлетворяет условию $x>2$ и поэтому будет решением.

Пример 2 . *Решить уравнение* $|x-1|+|x+2|\leq 3(x-2)$.

Решение. Заметим, что левая часть уравнения положительна (как сумма двух неотрицательных слагаемых, одновременно не обращающихся в нуль). Следовательно, $x-2>0$. Но при $x>2$ оба модуля раскрываются положительно, и, решая полученное неравенство, находим $x\geq 7$. Так как все такие x удовлетворяют условию $x>2$, то они являются решениями. *Ответ*: $x\in[7,+\infty)$.

Пример 3 [Глобальных процессов ф-т–2006]. *Решить неравенство*

$$\frac{|x^2+x-12|}{x-3}\geq 1.$$

Решение. Очевидно, $x\neq 3$. Более того, так как дробь, по условию, больше

1, то она, как минимум, положительна. При этом числитель дроби положителен, а значит, и знаменатель должен быть положительным, т.е. $x > 3$. Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{|(x-3)(x+4)|}{x-3} \geq 1.$$

Видно, что при $x > 3$ подмодульное выражение положительно, следовательно, модуль однозначно раскрывается, и получаем неравенство

$$\frac{(x-3)(x+4)}{x-3} \geq 1 \Leftrightarrow x+4 \geq 1$$ – верно при $x > 3$. *Ответ*: $x \in (3,+\infty)$.

Умножение на сопряжённое выражение

Назовём выражение A, зависящее от одной или нескольких переменных (и тождественно не равное нулю), *сопряжённым* к выражению B, содержащему модули, если произведение AB не содержит модулей.

Например, выражение вида $|a|-|b|$ является сопряжённым к выражению $|a|+|b|$, и наоборот, выражение $|a|+|b|$ является сопряжённым к выражению $|a|-|b|$, поскольку их произведение $(|a|+|b|)(|a|-|b|) = a^2 - b^2$ не содержит модулей. Рассмотрим пример, где приём умножения на сопряженное выражение (в указанном выше смысле) позволяет существенно упростить решение задачи.

Пример [Мехмат–2000, март]. *Решить неравенство*

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}.$$

Решение. Поищем более эффективный способ решения, чем стандартный метод интервалов. Умножим неравенство на положительное выражение $|x-4|+|x-1|$ (сопряжённое к числителю левой дроби), и одновременно поделим неравенство на положительное выражение $|x-3|+|x-2|$ (сопряжённое к знаменателю левой дроби). В результате не только исчезнут все модули в левой части неравенства, но и, в результате сокращения на $|x-3|+|x-2|$, упростится правая часть:

$$\frac{(x-4)^2-(x-1)^2}{(x-3)^2-(x-2)^2} < \frac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|} \Leftrightarrow \frac{-3(2x-5)}{-(2x-5)} < \frac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|}.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}3|x-4|<|x-4|+|x-1|\\ x\neq 5/2,\ x\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2|x-4|<|x-1|\\ x\neq 5/2,\ x\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-8)^2<(x-1)^2\\ x\neq 5/2,\ x\neq 4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3x-9)(x-7)<0\\ x\neq 5/2,\ x\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3<x<7\\ x\neq 5/2,\ x\neq 4.\end{cases}\Leftrightarrow x\in(3,4)\cup(4,7).$$

Замена в неравенствах множителей вида $|a|-|b|$, $\sqrt{a}-|b|$ множителями эквивалентного знака a^2-b^2, $a-b^2$

Рассмотрим приём, позволяющий избавляться от модулей в определённой группе задач и, тем самым, существенно их упрощать. Он непосредственно следует из рассмотренного выше приёма умножения на выражение, сопряжённое к выражению $|a|-|b|$.

Пусть требуется решить неравенство, в котором с одной стороны от знака неравенства (он может быть произвольным) находится произведение (частное) нескольких сомножителей, а с другой стороны – число нуль. К этой группе, в частности, относятся неравенства, решаемые методом интервалов. Например, это может быть неравенство вида

$$\frac{A\cdot B}{C}\leq 0. \qquad (1)$$

Пусть, кроме того, хотя бы один из сомножителей имеет вид *разности двух модулей* $|a|-|b|$, где a, b – некоторые выражения, зависящие от неизвестной (-ых). Ради определённости будем считать, что это A:

$$A=|a|-|b|.$$

Если умножить обе части неравенства (1) на положительное выражение $|a|+|b|$ (будем дополнительно считать, что a и b одновременно не обращаются в нуль), то получим равносильное неравенство, в котором вместо множителя $|a|-|b|$ появился множитель $\tilde{A}=a^2-b^2$, не содержащий модулей. Таким образом, решение исходного неравенства (1) оказалось сведено к равносильному неравенству

$$\frac{\tilde{A}\cdot B}{C}\leq 0.$$

Выражения $|a|-|b|$ и a^2-b^2 всегда имеют один и тот же знак, и одновременно обращаются в нуль. Поэтому этот подход часто называют *методом замены множителей на множители эквивалентного знака.*

В действительности область применимости данного приёма гораздо шире. Пусть a и b – любые *неотрицательные* (на ОДЗ) выражения, одновременно не обращающиеся в нуль (случай их одновременного обращения в нуль всегда можно рассмотреть отдельно). Тогда можно утверждать, что выражения $a-b$ и a^2-b^2 имеют один и тот же знак, и, следовательно, в неравенствах указанного типа сомножитель вида $a-b$ можно заменять выражением вида a^2-b^2.

В частности, сомножители вида $A=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ или $A=\sqrt{a}-|b|$ с успехом могут быть заменены выражениями $\tilde{A}=a-b$ и $\tilde{A}=a-b^2$ соответственно (при условии $a\ge 0$, а в первом случае и $b\ge 0$).

Рассмотрим примеры применения этого – иногда очень эффективного – метода.

Пример 1 [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2001].

Решить неравенство $\dfrac{|x-1|-|2x+1|}{|x-2|-|2x+2|}\ge 0$.

Решение. Применяя указанный выше приём, приходим к равносильному неравенству и решаем его:

$$\frac{(x-1)^2-(2x+1)^2}{(x-2)^2-(2x+2)^2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+2)}{x(x+4)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+2}{x+4}\ge 0\\ x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-4)\cup[-2,0)\cup(0,+\infty).$$

Пример 2 [Олимпиада «Ломоносов–2007»]. *Решить неравенство*

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|}\le 1.$$

Решение. ОДЗ: $-7\le x\le 8$. Перенесём все слагаемые в одну сторону:

$$\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-|2x-1|}\le 0.$$

Так как на ОДЗ выражения $\sqrt{8-x}-\sqrt{x+7}$ и $\left(\sqrt{8-x}\right)^2-\left(\sqrt{x+7}\right)^2$, а также выражения $\sqrt{x+7}-|2x-1|$ и $\left(\sqrt{x+7}\right)^2-|2x-1|^2$ имеют одинаковые знаки (и одновременно обращаются в нуль), то приходим к равносильному (на ОДЗ), но более простому неравенству

$$\frac{\left(\sqrt{8-x}\right)^2-\left(\sqrt{x+7}\right)^2}{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-|2x-1|^2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(8-x)-(x+7)}{(x+7)-(2x-1)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{(4x+3)(x-2)^2}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\infty<x<-3/4 \\ 1/2\le x<2. \end{array}\right.$$

Пересекая с ОДЗ, получаем ответ. *Ответ*: $x\in[-7,-3/4)\cup[1/2,2)$.

Задачи, содержащие «скрытый» модуль

В некоторых задачах модуль присутствует *неявно*, принимая форму, например, квадратного корня из квадрата некоторого выражения. Если при этом извлечь этот корень, руководствуясь правилом $\sqrt{a^2}=|a|$, то в задаче появляется модуль.

Выбранный *способ решения* задачи также может подразумевать переход к модулю. Например, простейшие квадратные уравнения и неравенства, приведённые ниже, достаточно легко решаются извлечением корня (переходом к модулю):

$$(x-1)^2=4 \Leftrightarrow |x-1|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1; \end{array}\right.$$

$$(x-1)^2\le 4 \Leftrightarrow |x-1|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-1\le 2 \Leftrightarrow -1\le x\le 3;$$

$$(x-1)^2>4 \Leftrightarrow |x-1|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1>2 \\ x-1<-2. \end{array}\right.$$

Пример 1 [Химфак–2007]. ***Решить неравенство***

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12}\le 1-\frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

Решение. Так как $\sqrt{x^2+8x+16}=\sqrt{(x+4)^2}=|x+4|$, то неравенство можно переписать в виде:

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12}\le 1-\frac{|x+4|}{x+4}.$$

1) Если $x+4>0$, то неравенство принимает вид $\dfrac{(x+2)^2}{2(x+6)}\le 0$. Будем упрощать дальше. Поскольку в рассматриваемом случае $x+6>0$, то получаем неравенство $(x+2)^2\le 0 \Leftrightarrow x=-2$.

2) Если $x+4<0$, то неравенство принимает вид

$$\frac{x^2+4x+4}{2(x+6)}\le 2 \Leftrightarrow \frac{\left(x-2\sqrt{5}\right)\left(x+2\sqrt{5}\right)}{x+6}\le 0.$$

Поскольку в данном случае $x-2\sqrt{5}<0$, то имеем

$$\frac{x+2\sqrt{5}}{x+6}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x\ge -2\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Осталось учесть $x<-4$. *Ответ*: $x\in(-\infty,-6)\cup\left[-2\sqrt{5},-4\right)\cup\{-2\}$.

***Пример 2**. Решить уравнение*

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Решение. Сделаем замену переменной, положив $t=\sqrt{x-1}\ge 0$. Отсюда находим $x=t^2+1$, и, подставляя в уравнение, получим:

$$\sqrt{t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-6t+9}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |t-2|+|t-3|=1.$$

Решая последнее уравнение методом интервалов, найдём

$$2\le t\le 3 \Leftrightarrow 2\le\sqrt{x-1}\le 3 \Leftrightarrow 4\le x-1\le 9 \Leftrightarrow 5\le x\le 10.$$

***Пример 3** [ВМиК–2007, устн.]. Изобразить на координатной плоскости $(x;y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют*

$$y=x\cdot\cos(arctg(y/x))\cdot\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. ОДЗ: $x\ne 0$. Так как $\cos(arctg\,\alpha)=1/\sqrt{1+\alpha^2}$, $\alpha\in R$, то

$$\cos(arctg(y/x))=|x|/\sqrt{x^2+y^2}\quad\left(x^2+y^2\ne 0\right).$$

Подставляя в уравнение и упрощая, получаем $y=x|x|=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ -x^2, & x<0. \end{cases}$

Осталось на ОДЗ посторонить график (сделайте это самостоятельно).

***Пример 4**.* Ниже в примере 3 пункта 2.3 будет показано, как свести уравнение вида $\max(2x;3-x)=\min(5+2x;6x)$ к равносильному ему уравнению с модулями $3|x-1|+|5-4x|=2+7x$.

Использование свойств модулей

Упростить и решить некоторые из задач, содержащих модули, помогут знание и активное использование (там, где это оправданно) свойств модулей.

Отдельно можно выделить *класс уравнений*, в которых реализуется частный случай обращения какого-либо известного неравенства с модулями в равенство. При решении таких уравнений часто используется замена переменных, помогающая выявить, что данное уравнение есть случай обращения в равенство некоторого неравенства с модулями. Метод решения состоит в переходе к равносильному условию, принимающему форму неравенства или системы неравенств, но уже не содержащих модули (таким образом происходит избавление в задаче от модулей).

Приведём примеры равносильных преобразований, сводящих уравнение с модулем (модулями) к задаче, их не содержащей:

$$|a| = a \Leftrightarrow a \ge 0; \qquad |a| = -a \Leftrightarrow a \le 0;$$

$$|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \ge 0; \qquad |a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \le 0;$$

$$|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ b \ge 0; \end{cases} \qquad |a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ b \le 0; \end{cases}$$

$$|a| + |b| = -a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0, \\ b \le 0; \end{cases} \qquad |a+b| = \big||a| - |b|\big| \Leftrightarrow ab \le 0.$$

Обратимся теперь к рассмотрению задач указанного типа.

В первых трёх примерах используется свойство неотрицательности модуля: показан способ решения неравенств, в которых с одной стороны от знака неравенства находится нуль, а с другой – произведение (частное) нескольких сомножителей, один из которых имеет вид модуля некоторого выражения (следовательно, не меняет знака на ОДЗ). В этом случае рекомендуется рассмотреть два случая: когда этот сомножитель обращается в нуль, и когда он сохраняет положительный знак. В последнем случае на него можно поделить обе части неравенства, и задача упростится.

Пример 1 [ИСАА–2007]. *Решить неравенство* $|x+3|(|x-1|-3) \le 0$.

Решение. Заметим, что $x = -3$ – решение неравенства. Найдём другие решения. При $x \ne -3$ сократим неравенство на $|x+3|$ (>0):

$$|x-1| - 3 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x - 1 \le 3. \text{ *Ответ*: } x \in \{-3\} \cup [-2{,}4].$$

Пример 2 [Геолог.–1998, май]. *Решить неравенство*

$$(x^2 + 5x - 6) \cdot |x+4|^{-1} < 0.$$

Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ x^2 + 5x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ -6 < x < 1. \end{cases}$$ *Ответ*: $x \in (-6,-4) \cup (-4,1)$.

Пример 3 [Олимпиада «Ломоносов–2008», Геолог., устн.]. *Решить неравенство*

$$\frac{|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2007|}{|2008 - x| - 1} \leq 0.$$

Решение. Заметим, что числитель дроби положителен при любом действительном x (как сумма неотрицательных модулей, одновременно не обращающихся в нуль), поэтому в результате деления обеих частей неравенства на этот числитель, приходим к равносильному неравенству

$$\frac{1}{|2008 - x| - 1} \leq 0 \Leftrightarrow |x - 2008| < 1 \Leftrightarrow 2007 < x < 2009.$$

В следующем примере используются свойства $|-a| = |a|$, $|a|^2 = a^2$.

Пример 4 [Социолог.–2006]. *Решить неравенство* $\dfrac{5-4x}{|x-2|} \leq |2-x|$.

Решение. Так как $|2-x| = |x-2|$ и $|x-2|^2 = (x-2)^2$, то имеем:

$$\frac{5-4x}{|x-2|} \leq |2-x| \Leftrightarrow 5-4x \leq (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \neq 2. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty,-1] \cup [1,2) \cup (2,+\infty)$.

В очередной задаче применение метода интервалов возможно лишь теоретически, зато использование простейшего свойства $|a| \geq a$ (причём $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$) позволяет эффективно решить уравнение.

Пример 5 [Химфак–2001]. *Решить уравнение*

$$|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \ldots + |x-100| + |x+100| = 200x.$$

Решение. Применим указанное свойство к каждому из двухсот модулей:

$$|x-1| \geq x-1,\quad |x+1| \geq x+1, \ldots,\quad |x-100| \geq x-100,$$

$$|x+100| \geq x+100.$$

Складывая эти двести неравенств, получаем оценку:

$$|x-1| + |x+1| + \ldots + |x-100| + |x+100| \geq 200x.$$

Осталось выяснить, когда последнее неравенство обращается в равенство. Это происходит тогда и только тогда, когда каждое из двухсот складываемых неравенств обращается в равенство. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x+1\geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x-100\geq 0, \\ x+100\geq 0, \end{cases}$$

решая которую, находим $x\geq 100$. *Ответ*: $x\in[100,+\infty)$.

В следующих примерах также демонстрируется применение различных свойств модулей.

Пример 6 [Геолог.–2004, устн.]. *Решить неравенство*

$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-1}\right|<|x|+\frac{1}{|x-1|}.$$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left|\frac{x(x-1)+1}{x-1}\right|<|x|+\frac{1}{|x-1|}\Leftrightarrow\left|x+\frac{1}{x-1}\right|<|x|+\frac{1}{|x-1|}. \qquad (1)$$

Воспользуемся для дальнейшего решения свойством модулей: $|a+b|\leq|a|+|b|$ при всех действительных a и b. При этом неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда числа a и b имеют один знак или обращаются в нуль, т.е. когда $ab\geq 0$. В остальных случаях (когда a и b разных знаков, т.е. $ab<0$) имеет место строгое неравенство $|a+b|<|a|+|b|$.

Обозначая в рассматриваемом неравенстве $a=x$, $b=1/(x-1)$, получаем, что неравенство (1) равносильно более простому неравенству $x\cdot 1/(x-1)<0$, решая которое, получаем $x\in(0,1)$.

Пример 7 [ВМиК–1993]. *Решить неравенство*

$$|3^x-4|+|x^2-4x+3|\leq 3^x+4x-x^2-7.$$

Решение. Обозначим $a=3^x-4$, $b=-x^2+4x-3$. Тогда имеем

$$|a|+|b|\leq a+b. \qquad (2)$$

Поскольку из свойств модулей известно, что при всех действительных a,b справедливо $|a|+|b|\ge a+b$, то последнее неравенство совместно с (2) означает, что $|a|+|b|=a+b$, что, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда одновременно $a\ge 0$ и $b\ge 0$.

Таким образом, исходное неравенство оказалось равносильно системе

$$\begin{cases}3^x-4\ge 0\\ -x^2+4x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\log_3 4\\ 1\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow x\in[\log_3 4,\ 3].$$

Пример 8 [Мехмат–2005]. *Найти* $\log_2(2x/2^x)$ *при условии*

$$\left|\log_{\sqrt{2}} x^{x/2}-2\log_2 x\right|+\left||2-x|-|\log_2 x|\right|\le(x-2)\log_8 x^3.$$

Решение. Положим $a=x-2$, $b=\log_2 x$. Тогда исходное неравенство можно переписать в виде $|ab|+\left||a|-|b|\right|\le ab$. С другой стороны, поскольку при любых действительных a,b справедливо $|ab|\ge ab$ и $\left||a|-|b|\right|\ge 0$, то, складывая последние неравенства, получим, что $|ab|+\left||a|-|b|\right|\ge ab$. Таким образом, имеем: $|ab|+\left||a|-|b|\right|=ab$, что выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}|ab|=ab\\ \left||a|-|b|\right|=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab\ge 0\\ |a|=|b|\end{cases}\Leftrightarrow a=b.$$

Итак, $\log_2(2x/2^x)=1+\log_2 x-x=\log_2 x-(x-2)-1=b-a-1=-1$.

Пример 9 [Эконом.–1998, вечернее отделение]. *Решить уравнение*

$$25\cdot 3^{|x-5|+|x-3|}+9\cdot 5^{|x-4|+|x-6|}=450.$$

Решение. Поделим обе части уравнения на $25\cdot 9=225$:

$$3^{|x-5|+|x-3|-2}+5^{|x-4|+|x-6|-2}=2.$$

Так как $|a|+|b|\ge|a-b|$ (причём $|a|+|b|=|a-b|\Leftrightarrow ab\le 0$), то имеем

$$|x-5|+|x-3|\ge|(x-5)-(x-3)|=2,$$

$$|x-4|+|x-6|\ge|(x-4)-(x-6)|=2,$$

поэтому $3^{|x-5|+|x-3|-2}\ge 1$, $5^{|x-4|+|x-6|-2}\ge 1$ и, следовательно,

$$3^{|x-5|+|x-3|-2}+5^{|x-4|+|x-6|-2}\ge 2.$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |x-5|+|x-3|=2 \\ |x-4|+|x-6|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-3)\le 0 \\ (x-4)(x-6)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4\le x\le 5.$$

Схемы решения типовых задач

Говоря о специальных методах, приведём известные *схемы* раскрытия модулей, рассчитанные на определённые, наиболее часто встречающиеся виды уравнений и неравенств.

1) ***Уравнения вида*** $|f(x)|=A \Leftrightarrow x\in\varnothing,$ если $A<0$,

$|f(x)|=A \Leftrightarrow f(x)=0,$ если $A=0$,

$$|f(x)|=A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=A, \\ f(x)=-A, \end{array}\right. \text{ если } A>0.$$

Пример 1*. Решить уравнение* $\big|\big||x|-2\big|-2\big|-2\big|=0$.

Решение. $\big|\big||x|-2\big|-2\big|-2\big|=0 \Leftrightarrow \big||x|-2\big|-2\big|-2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \big|\big||x|-2\big|-2\big|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \big||x|-2\big|-2=2 \\ \big||x|-2\big|-2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \big||x|-2\big|=4 \\ |x|-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|-2=4 \\ |x|-2=-4 \\ |x|-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=6 \\ |x|=-2 \\ |x|=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 6 \\ x=\pm 2. \end{array}\right.$$

Пример 2*. При всех* a *решить уравнение*

а) $|x-2|=a$; *б)* $|x-a|=2$.

Решение. а) При $a\ge 0$ имеем, в соответствие с данной схемой, что

$$|x-2|=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=a \\ x-2=-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+a \\ x=2-a. \end{array}\right.$$ При $a<0$ решений нет.

б) При всех $a\in R$ имеем: $\left[\begin{array}{l} x-a=2 \\ x-a=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a+2 \\ x=a-2. \end{array}\right.$

Пример 3 [Геолог.–1996, устн.]. *Сколько решений имеет уравнение*

$$\left|\left|x-\sqrt{3}\right|-\pi/2\right|=\sqrt{2}\ ?$$

Решение. Раскроем вначале внешний модуль, сведя уравнение к совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\left|x-\sqrt{3}\right|-\pi/2=\sqrt{2}\\ \left|x-\sqrt{3}\right|-\pi/2=-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x-\sqrt{3}\right|=\pi/2+\sqrt{2}\\ \left|x-\sqrt{3}\right|=\pi/2-\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Правая часть первого уравнения положительна, поэтому оно имеет два различных решения (можно было бы даже найти эти решения:

$$\left[\begin{array}{l}x-\sqrt{3}=\pi/2+\sqrt{2}\\ x-\sqrt{3}=-\pi/2-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi/2+\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ x=\sqrt{3}-\sqrt{2}-\pi/2\end{array}\right.).$$

Чтобы узнать, имеет ли решения второе уравнение, оценим знак его правой части: $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi \ \vee \ 2\sqrt{2}$. Известно, что $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2{,}8<2\sqrt{2}<3$, а $3{,}14<\pi<3{,}15$. Из приведённых оценок следует, что $\pi>2\sqrt{2}$. Итак, второе уравнение также имеет два решения

$$(\left[\begin{array}{l}x-\sqrt{3}=\pi/2-\sqrt{2}\\ x-\sqrt{3}=\sqrt{2}-\pi/2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi/2+\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ x=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\pi/2\end{array}\right.).$$

Так как все решения разные, то получаем ответ. *Ответ*: 4 решения.

Пример 4 [Геолог.–1998, 2]. *Решить уравнение* $\left|\left|4-x^2\right|-x^2\right|=1$.

Решение. Эта задача также относится к указанному типу, но её можно решать иначе, начав с раскрытия внутреннего модуля:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 4\\ \left|-\left(4-x^2\right)-x^2\right|=1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2<4\\ \left|\left(4-x^2\right)-x^2\right|=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 4\\ \left|-4\right|=1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2<4\\ \left|4-2x^2\right|=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая из систем не имеет решений. Осталось решить вторую систему:

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} 4-2x^2 = 1 \\ 4-2x^2 = -1 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 3/2 \\ x^2 = 5/2. \end{array} \right. \end{cases}$$ *Ответ*: $x \in \left\{ \pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \right\}$.

2) ***Неравенства вида*** $|f(x)| \le A \Leftrightarrow x \in \varnothing$, если $A < 0$,

и $|f(x)| \le A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le A, \\ f(x) \ge -A, \end{cases}$ если $A \ge 0$.

Пример 1 [Почвовед.–2002]. *Решить неравенство* $|5-7x| < 2$.

Решение. $|5-7x| < 2 \Leftrightarrow -2 < 5-7x < 2 \Leftrightarrow 3/7 < x < 1$.

Пример 2. *При всех* a *решить неравенство* $|x-2| \le a$.

Решение. Действуя по предложенной схеме, сразу получаем ответ.

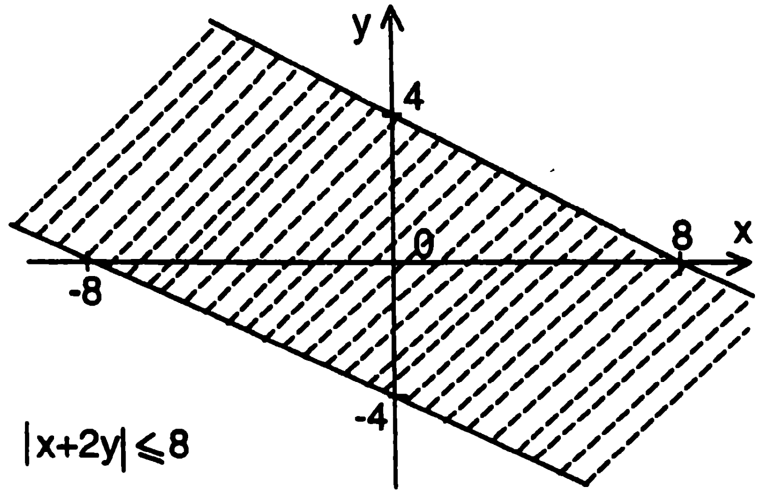
Ответ: при $a < 0$ $x \in \varnothing$; при $a \ge 0$ $x \in [2-a,\ 2+a]$.

Пример 3 [Геолог.–2002, устн.]. *На плоскости* Oxy *изобразить множество точек, координаты* x *и* y *которых удовлетворяют условию*

$$|x+2y| \le 8.$$

Решение. Раскроем модуль: $\begin{cases} x+2y \le 8 \\ x+2y \ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -x/2-4 \\ y \le -x/2+4. \end{cases}$

Искомое ГМТ представляет собой *полосу* на координатной плоскости Oxy,



состоящую из точек, расположенных между двумя параллельными прямыми $y = -(x/2) - 4$ и $y = -(x/2) + 4$ (включая эти прямые).

3) ***Неравенства вида*** $|f(x)| \geq A \Leftrightarrow \forall x \in$ ОДЗ, если $A \leq 0$,

$$|f(x)| \geq A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq A, \\ f(x) \leq -A, \end{array}\right. \text{ если } A > 0.$$

Пример 1 [Почвовед.–2002]. ***Решить неравенство*** $|9-5x| > 1$.

Решение. $|9-5x| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9-5x > 1 \\ 9-5x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 8/5 \\ x > 2. \end{array}\right.$

Пример 2. ***При всех*** a ***решить неравенство*** $|x-2| \geq a$.

Решение. Действуя по предложенной схеме, приходим к ответу.

Ответ: при $a \leq 0$ $x \in (-\infty, +\infty)$;

при $a > 0$ $x \in (-\infty, 2-a] \cup [2+a, +\infty)$.

Пример 3. ***Решить неравенство*** $2 < |x-1| \leq 5$.

Решение. $x - 1 \in [-5, -2) \cup (2, 5] \Leftrightarrow x \in [-4, -1) \cup (3, 6]$.

В других случаях бывает удобнее не применять этой схемы.

Пример 4 [Черноморский филиал МГУ–2007]. ***Найти все целые значения*** x, ***для которых справедливо неравенство*** $\left|\dfrac{3}{x-2}\right| > \dfrac{9}{7}$.

Решение. Воспользуемся приёмом обращения дроби:

$$\left|\frac{3}{x-2}\right| > \frac{9}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| < \frac{7}{3} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3} < x-2 < \frac{7}{3} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < x < \frac{13}{3} \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Осталось отобрать все целые x. *Ответ*: $x \in \{0;1;3;4\}$.

4) ***Уравнения вида*** $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 1 [Социолог.–2000]. ***Решить уравнение*** $|x^2 - 3x| = 2x - 4$.

Решение. Воспользуемся указанным способом:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-4\ge 0\\ x^2-3x=2x-4\end{cases}\\ \begin{cases}2x-4\ge 0\\ x^2-3x=4-2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ x^2-x-4=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}.\end{array}\right.$$

Пример 2 [Психолог.–2006, 1]. *Решить уравнение* $\left|7^x-3\right|=7^x+1$.

Решение. Так как $7^x+1>0$ при любом $x\in R$, то уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}7^x-3=7^x+1\\ 7^x-3=-7^x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3=1\\ 7^x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

5) ***Неравенства вида*** $\left|f(x)\right|\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)\ge g(x)\\ f(x)\le -g(x).\end{array}\right.$

Пример 1 [Биолог.–2002]. *Решить неравенство* $|x-2|>2x+1$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}x-2>2x+1\\ x-2<-2x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-3\\ x<1/3\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right).$$

В других задачах бывает удобнее рассмотреть два случая:

$$g(x)\ge 0 \text{ и } g(x)<0.$$

Пример 2 [ИСАА–2000, 1]. Решить неравенство

$$|2x-1|>1/(x-2).$$

Решение. При $x<2$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая – отрицательна, следовательно, все такие значения x будут решениями. Если же $x>2$, то имеем $2x-1>\dfrac{1}{x-2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+1>0$, откуда $x>\left(5+\sqrt{17}\right)/4$.

Ответ: $x\in(-\infty,2)\cup\left(\left(5+\sqrt{17}\right)/4,+\infty\right)$.

6) ***Неравенства вида*** $\left|f(x)\right|\le g(x) \Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x)$.

Пример 1 [Моск. гос. акад. приборостроения и информатики–1993].

Решить неравенство $\left|x^2-8x+15\right|<x-3$.

Решение. Сведём неравенство к равносильной ему системе

$$\begin{cases} x^2-8x+15<x-3 \\ x^2-8x+15>3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+18<0 \\ x^2-7x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(4,6).$$

Пример 2 [ВМиК–2000, апр.]. *Решить неравенство*

$$\left|\left|x^2-8x+2\right|-x^2\right|\geq 2x+2.$$

Решение. Имеем: $\left[\begin{array}{l} \left|x^2-8x+2\right|\geq x^2+2x+2 \\ \left|x^2-8x+2\right|\leq x^2-2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+2\geq x^2+2x+2 \\ x^2-8x+2\leq -x^2-2x-2 \\ \begin{cases} x^2-8x+2\leq x^2-2x-2 \\ x^2-8x+2\geq -x^2+2x+2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x^2-3x+2\leq 0 \\ \begin{cases} 3x\geq 2 \\ x^2-5x\geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty,0]\cup[1,2]\cup[5,+\infty)$.

Пример 3 [ВМиК–2002, отделение прикладной информатики].
При всех значениях параметра a решить неравенство

$$|2x+a|\leq x+2.$$

Решение. Воспользуемся известным приёмом и получим, что неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x+a\leq x+2 \\ -x-2\leq 2x+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2-a \\ x\geq -(a+2)/3. \end{cases}$$

Очевидно, что данная система имеет решения тогда и только тогда, когда

$$-(a+2)/3\leq 2-a \Leftrightarrow a\leq 4.$$

Эти решения x представляют собой отрезок $[-(a+2)/3,2-a]$.

Ответ: при $a\in(-\infty,4)$ $x\in[-(a+2)/3,2-a]$;

при $a=4$ $x=-2$; при $a\in(4,+\infty)$ $x\in\varnothing$.

7) ***Уравнения вида*** $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

Пример 1 [Гос. управления ф-т–2001]. *Решить уравнение*

$$\left|x^2-13x+36\right|=\left|36-x^2\right|.$$

Решение. Согласно предложенной схеме

$$\left|x^2-13x+36\right|=\left|36-x^2\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-13x+36=36-x^2 \\ x^2-13x+36=x^2-36. \end{array}\right.$$

Решая совокупность уравнений, получаем ответ: $x\in\{0;72/13;13/2\}$.

Пример 2 [Химфак–2001, май]. *Решить уравнение*

$$\frac{|x-1|}{|x-2|}=\frac{|x+1|}{|x+2|}.$$

Решение. $\dfrac{|x-1|}{|x-2|}=\dfrac{|x+1|}{|x+2|} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x-1)(x+2)|=|(x+1)(x-2)| \\ x\neq\pm2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=\pm\left(x^2-x-2\right) \\ x\neq\pm2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2 \end{array}\right. \\ x\neq\pm2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Пример 3 [Геолог.–1999, 5]. *Решить уравнение*

$$\left|ctg^2 2x+8\sqrt{-ctg2x}-3\right|=\left|ctg^2 2x-8\sqrt{-ctg2x}-3\right|$$

Решение. Сделаем замену $t=\sqrt{-ctg2x}\geq0$. Тогда уравнение примет алгебраический вид

$$\left|t^4+8t-3\right|=\left|t^4-8t-3\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^4+8t-3=t^4-8t-3 \\ t^4+8t-3=-t^4+8t+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^4=3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\sqrt[4]{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-ctg2x}=0 \\ \sqrt{-ctg2x}=\sqrt[4]{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ctg2x=0 \\ ctg2x=-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\pi/2+\pi n, n\in Z \\ 2x=5\pi/6+\pi k, k\in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi/4+\pi n/2 \\ x=5\pi/12+\pi k/2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}$, $n,k\in Z$.

8) ***Неравенства*** $|f(x)| \le |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \le g^2(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f(x)+g(x))\cdot(f(x)-g(x)) \le 0.$$

Пример 1 [МТУСИ–1996, эконом. ф-т]. *Найти наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее неравенству*

$$|2x^2+18x+39| > |2x^2+2x-63|.$$

Решение. Возведём данное неравенство в квадрат (равносильное преобразование) $(2x^2+18x+39)^2 > (2x^2+2x-63)^2$ и, не раскрывая квадратов, тут же перенесём все слагаемые в одну сторону и разложим на множители:

$$(8x+51)(x^2+5x-6) > 0 \Leftrightarrow (x+51/8)(x+6)(x-1) > 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем

$$x \in (-51/8, -6) \cup (1, +\infty).$$

Ответ: наименьшее целое положительное число x есть 2.

Пример 2 [Химфак–2001]. *Решить неравенство*

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|}.$$

Решение. Воспользуемся приёмом обращения дробей:

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| > |x-1| \\ x \ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 > (x-1)^2 \\ x \ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

9) ***Неравенства вида*** $|f(x)| \ne |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ne g(x) \\ f(x) \ne -g(x). \end{cases}$

Пример. *Решить неравенство*

$$|2x^2+18x+39| \ne |2x^2+2x-63|.$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе двух неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2+18x+39 \ne 2x^2+2x-63 \\ 2x^2+18x+39 \ne -2x^2-2x+63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -51/8 \\ x \ne -6, \quad x \ne 1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty, -51/8) \cup (-51/8, -6) \cup (-6, 1) \cup (1, +\infty)$.

Универсальные методы

Наряду со специальными методами при решении задач с модулями могут быть использованы любые из известных в элементарной математике и широко применимых методов, не привязанных жёстко к какой-либо группе задач (отсюда их название – *универсальные*). Рассмотрим эти методы, проиллюстрировав их применение примерами.

Возведение в степень

Как уже было показано выше, с целью избавления от модуля бывает эффективен приём *возведения в чётную степень*, чаще всего в квадрат. Приём обычно используется в ситуации, когда хотя бы с одной стороны от знака равенства (неравенства) находится модуль некоторого выражения, т.е. при решении задач вида

$$|f(x)| \vee |g(x)|,\quad |f(x)| \vee g(x) \text{ и пр.}^{1}$$

Именно возведением в квадрат проще всего доказывается справедливость при всех действительных x, y известных неравенств

$$|x+y| \le |x|+|y|,\quad |x+y| \ge \big||x|-|y|\big| \text{ и др.}$$

Даже простейшее неравенство вида $|x-1|<2$ в принципе можно решать возведением в квадрат:

$$|x-1|<2 \Leftrightarrow (x-1)^2<4 \Leftrightarrow (x-1)^2-2^2<0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)<0,$$

и далее, скажем, методом интервалов. Но обычно сразу переходят к двойному неравенству $-2<x-1<2$.

При использовании данного приёма, как правило, следят за тем, чтобы обе части возводимого в чётную степень уравнения (неравенства) были неотрицательны. Это необходимо для сохранения равносильности преобразования. Возможен и переход к следствию, но только в тех случаях, когда можно сделать проверку.

Пример 1 [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы–2006»]. *Найти наименьшее целое число* x, *удовлетворяющее неравенству*

$$|2x^2-7x-1| \ge |2x^2-9x+5|.$$

Решение. Возведём неравенство в квадрат. Так как обе его части были неотрицательны, то получим неравенство, равносильное исходному. Затем, собрав оба слагаемых слева от знака неравенства, разложим левую часть полученного неравенства на множители (как разность квадратов):

---

[1] Знак $\vee$ заменяет любой из знаков равенства или неравенства.

$$(2x^2-7x-1)^2 \geq (2x^2-9x+5)^2 \Leftrightarrow (2x^2-7x-1)^2-(2x^2-9x+5)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-4x+1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})(x-3) \geq 0.$$

Методом интервалов получаем решения:

$$x \in [2-\sqrt{3},3] \cup [2+\sqrt{3},+\infty).$$

Ответ: наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству, есть 1.

Пример 2 [Геолог.–2006, устн.]. *Решить уравнение*

$$|\sin x|+|\cos x|=1.$$

Решение. Возведём уравнение в квадрат (равносильное преобразование, так как обе части возводимого в квадрат уравнения неотрицательны):

$$\sin^2 x+2|\sin x||\cos x|+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow |\sin 2x|=0 \Leftrightarrow 2x=\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x \in \{\pi n/2\}$, где $n \in Z$.

Пример 3 [Геолог.–2001, устн.]. *Решить уравнение*

$$2|\sin x|+\cos x=1.$$

Решение. Приведём уравнение к виду $2|\sin x|=1-\cos x$. Так как обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведём в квадрат и придём к равносильному уравнению:

$$4\sin^2 x=(1-\cos x)^2.$$

Заменяя в левой части $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$, получаем уравнение, квадратное относительно $\cos x$:

$$4(1-\cos^2 x)=(1-\cos x)^2 \Leftrightarrow 4(1-\cos x)(1+\cos x)=(1-\cos x)^2.$$

Таким образом, уравнение раскладывается на множители, и приходим к совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ 4(1+\cos x)=1-\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-3/5.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{2\pi n; \pm\arccos(-3/5)+2\pi k; n,k \in Z\}$.

Пример 4 [Геолог.–2000, май, устн.]. *Решить уравнение*

$$(3-x)^5=|x+a|^5.$$

Решение. Извлекая корень пятой степени (возводя в степень $1/5$), получим равносильное уравнение

$$|x+a|=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x+a=3-x \\ x+a=x-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq 3 \\ x=(3-a)/2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 3 \\ a=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq -3 \\ x=(3-a)/2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 3 \\ a=-3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений $\Leftrightarrow$ $a<-3$, вторая система не имеет решений $\Leftrightarrow$ $a\neq -3$. Обе системы неразрешимы $\Leftrightarrow$ $a<-3$.

Ответ: наибольшее целое a равно -4.

Метод замены неизвестных

Суть метода состоит в том, что в целях упрощения дальнейшего решения задачи вводится одна или несколько новых переменных. В конце решения задачи делается так называемая обратная подстановка, в результате которой осуществляется переход к первоначальным переменным. Возможные трудности при использовании этого метода связаны с необходимостью подбора удачной подстановки, которую не всегда бывает легко увидеть. Рассмотрим примеры использования этого подхода в задачах с модулями.

Пример 1. *Решить неравенство* $x^2+|x|-2<0$.

Решение. Положим $t=|x|$ (≥ 0), тогда имеем квадратное неравенство $t^2+t-2<0$ $\Leftrightarrow$ $(t-1)(t+2)<0$ $\Leftrightarrow$ $t-1<0$ (так как $t+2>0$). Итак, $|x|<1$. *Ответ*: $x\in(-1,1)$.

Пример 2 [Геолог.–2004, устн.]. *Решить неравенство*

$$|x^2-1|+|x^2-3|\leq 4.$$

Решение. Положим $y=x^2-2$, тогда неравенство примет вид $|y+1|+|y-1|\leq 4$. Решим его с помощью метода интервалов.

1) $y\in(-\infty,-1]$: раскрыв модули на этом промежутке, получим $y\geq -2$. Пересекая с промежутком, находим решения $-2\leq y\leq -1$;

2) $y\in(-1,1]$: раскрывая оба модуля, получим $y+1-y+1\leq 4$, т.е. $2\leq 4$. Это неравенство выполняется при всех y из рассматриваемого полуинтервала, поэтому имеем решения $-1<y\leq 1$;

3) $y\in(1,+\infty)$: на этом интервале неравенство приводится к виду $y\leq 2$. Пересекая с промежутком, получим $1<y\leq 2$.

Объединяя все найденные решения, получаем $-2 \le y \le 2$. Осталось сделать обратную подстановку: $-2 \le x^2 - 2 \le 2 \Leftrightarrow x^2 \le 4$. Отсюда получаем окончательный ответ. *Ответ*: $x \in [-2,2]$.

Пример 3 [ВМиК–2002, устн.]. *Решить уравнение*

$$x^4 - 7x^2 + 2x + 2 = |4x-1| - |2x^2 - 3|.$$

Решение. Выполним двойную подстановку: $y = |4x-1|$, $z = |2x^2 - 3|$.

Так как $z^2 - y^2 = (2x^2-3)^2 - (4x-1)^2 = 4(x^4 - 7x^2 + 2x + 2)$, то исходное уравнение в результате замены примет вид:

$$\frac{z^2 - y^2}{4} = y - z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - y = 0 \\ z + y = -4. \end{array}\right.$$

Первое из уравнений сводится в результате обратной подстановки к уравнению

$$|2x^2 - 3| = |4x-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3 = 4x - 1 \\ 2x^2 - 3 = 1 - 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} \\ x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Второе из уравнений $|2x^2 - 3| + |4x-1| = -4$ не имеет решений.

Ответ: $x \in \{1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{3}\}$.

Пример 4 [Психолог.–2002]. *Решить уравнение*

$$|x^3 + 7x^2 - 11x - 6| + |x^3 - 12x^2 - 5x + 3| = 18x^2 - 2x - 13.$$

Решение. Положим $a = x^3 + 7x^2 - 11x - 6$, $b = -x^3 + 12x^2 + 5x - 3$, $c = x - 2$. Тогда уравнение примет вид

$$|a| + |-b| - a - b + c^2 = 0 \Leftrightarrow (|a| - a) + (|b| - b) + c^2 = 0.$$

Поскольку все три слагаемых в левой части уравнения неотрицательны, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |a| = a \\ |b| = b \\ c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 7x^2 - 11x - 6 \ge 0 \\ -x^3 + 12x^2 + 5x - 3 \ge 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Пример 5. *Числа* a,b,c,d *удовлетворяют условиям* $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. *Доказать, что* $|ac - bd| \le 1$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической подстановкой. Из условий задачи следует, что $\exists \alpha, \beta \in R$:

$$\begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases} \text{и} \begin{cases} c = \cos\beta \\ d = \sin\beta. \end{cases}$$

Подставляя в неравенство, получим

$$|ac - bd| = |\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta| = |\cos(\alpha+\beta)| \le 1 \text{ - верно,}$$

что и требовалось доказать.

Другие примеры на замену переменной были рассмотрены выше в пункте, посвящённом использованию свойств модулей.

Разложение на множители

Иногда удаётся, перенося все слагаемые в уравнении (неравенстве) в одну сторону, разложить полученное выражение на множители. Разложение осуществляется различными способами, в том числе группировкой и вынесением общего множителя за скобку, рассмотрением данного уравнения как квадратного относительно какой-либо величины, с использованием формул сокращённого умножения и прочими приёмами. В результате уравнение на ОДЗ сводится к совокупности нескольких, вообще говоря, более простых уравнений, а неравенство может быть решено, например, методом интервалов или каким-либо иным способом.

Пример 1 [Мехмат–2008, 1]. *Решить неравенство*

$$\left| |1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2| \right| \ge 3|x - 1|.$$

Решение задачи рассмотрено выше в пункте «Раскрытие модуля, используя его геометрический смысл».

Пример 2*. При каких значениях* a *уравнение имеет ровно три корня:*

$$a^2 + 4ax - (x^2+1)(a+1) + a + x^2|x-2| = |x-2|(a+4x) - 4x - |x-2| \ ?$$

Решение. Преобразуем данное уравнение, перенося все слагаемые в одну сторону, группируя их и выделяя общие множители:

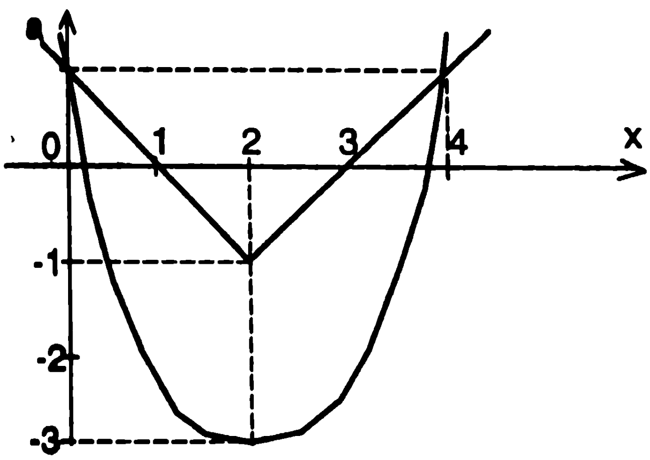
$$(a^2 + 4ax + a + 4x) - (x^2+1)(a+1) + \left(\left(x^2|x-2| + |x-2|\right)\right) - |x-2|(a+4x) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (a+4x)(a+1) - (x^2+1)(a+1) + |x-2|(x^2+1) - |x-2|(a+4x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+4x)(a+1-|x-2|) - (x^2+1)(a+1-|x-2|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+1-|x-2|)(a+4x-x^2-1) = 0.$$

Таким образом, удалось разложить левую часть уравнения (1) на множители. Далее, уравнение распадается на совокупность двух уравнений



$$\left[\begin{array}{l} a+1-|x-2|=0 \\ a+4x-x^2-1=0. \end{array}\right.$$

Приведём данную совокупность уравнений к виду

$$\left[\begin{array}{l} a=x^2-4x+1=(x-2)^2-3 \\ a=|x-2|-1, \end{array}\right.$$

и далее будем решать оба уравнения, вводя систему координат, в которой на оси абсцисс откладываются значения неизвестной x, а на оси ординат – значения параметра a.

Графическим образом решений данной совокупности служит объединение графиков модуля и параболы. Из рисунка видно, что ровно три корня уравнение имеет только при $a=-1$.

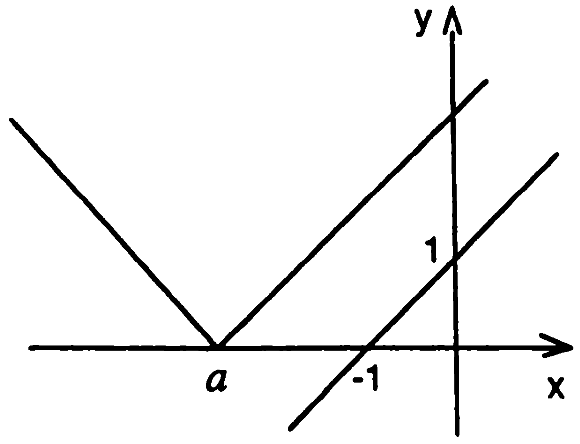
Графический подход (метод координат)

При решении уравнения (неравенства) при помощи графического подхода в одной системе координат строятся графики функций, расположенных в левой и правой частях уравнения (неравенства). Затем ищутся точки пересечения этих графиков, после чего на оси абсцисс находится решение. В других случаях на плоскости Oxy изображается геометрическое место точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют заданным в задаче условиям, и это помогает в дальнейшем сделать решение задачи более наглядным и простым.

Возможные трудности связаны с необходимостью быстро и правильно строить графики функций с модулями, а также изображать фигуры на координатной плоскости в случае, когда уравнение или неравенство, их задающие, содержат модули. Необходимо при этом иметь навыки использования основных преобразований функций таких, как сдвиг графика вдоль координатных осей, его растяжение или, наоборот, сжатие, осевая и центральная симметрия. Надо уметь строить графические образы решений систем и совокупностей уравнений и неравенств, содержащих модули, раскрывая эти модули при помощи метода интервалов или, соответственно, метода областей и находя пересечение или объединение полученных в результате фигур. В качестве одной из иллюстраций данного подхода можно рассмотреть предыдущий пример.

Рассмотрим ещё несколько типичных примеров.

Пример 1 [Геолог.–2002, устн.]. *При каких значениях параметра a уравнение $|x-a| = x+1$ не имеет корней?*



Решение. Построим в одной системе координат Oxy графики функций $y=|x-a|$ (это семейство «уголков» с вершиной, «плавающей» вправо-влево в зависимости от значения a вдоль оси абсцисс) и прямая $y=x+1$. Очевидно, графики этих функций не пересекаются (уравнение не имеет корней) при $a<-1$.

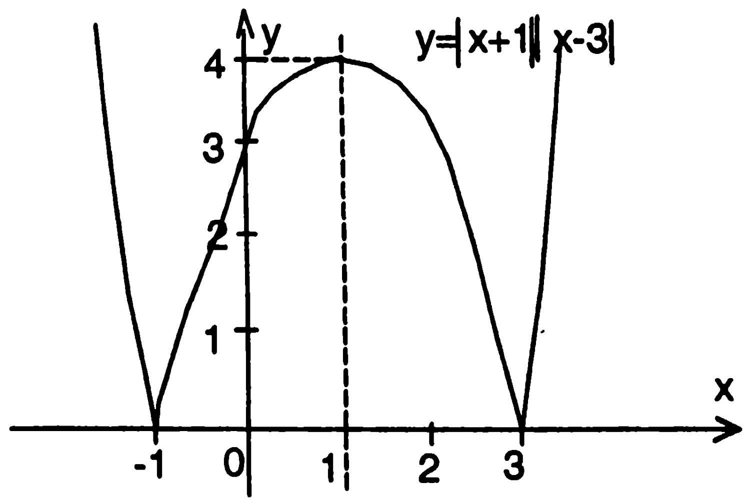
Пример 2 [Геолог.–1992, устн.]. *Построить график функции*

$$y=|x+1|\cdot|x-3|.$$

Решение. В данном случае проще всего преобразовать функцию к виду

$$y=|x+1|\cdot|x-3|=|(x+1)(x-3)|$$

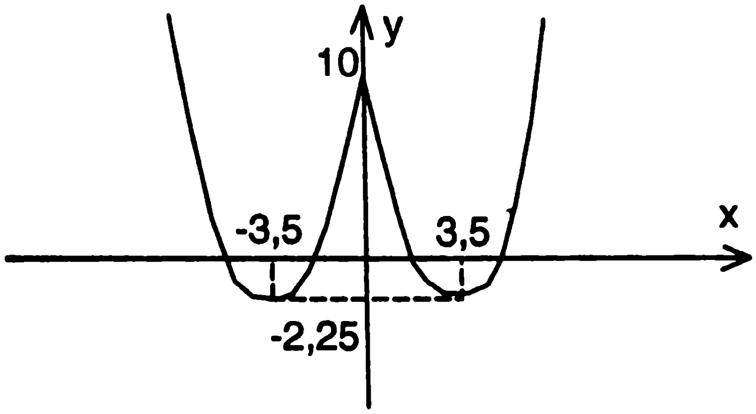
и построить параболу $y=(x+1)(x-3)$. На участке между нулями этой функции $x=-1$ и $x=3$ отобразим график вверх симметрично оси абсцисс. В результате получим искомый график функции. Он симметричен относительно прямой $x=-1$.



Пример 3 [Геолог.–1992, устн.]. *Построить график функции*

$$y=x^2-7|x|+10.$$

Решение. Преобразуем данную функцию: $y=|x|^2-7|x|+10$.



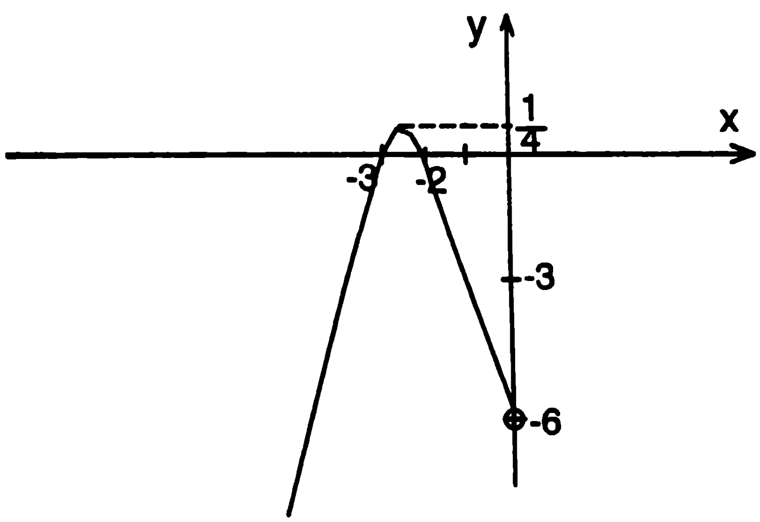
$y=x^2-7|x|+10$

Пусть $f(x)=x^2-7x+10$, тогда исходную функцию можно представить в виде $y=f(|x|)$. Для построения её графика достаточно вначале построить в области $x \ge 0$ график функции $y=f(x)$, а затем отобразить эту кривую симметрично оси Oy в область $x<0$. Объединяя обе ветви кривых, получаем искомый график.

Пример 4 [Геолог.–2003, устн.]. *Построить график функции*

$$y=2\frac{x^3+5x^2+6x}{|x|-x}.$$

Решение. Найдём область определения функции: $|x|-x \ne 0 \Leftrightarrow x<0$. Теперь упростим функцию на её области определения.



$$y=2\frac{x^3+5x^2+6x}{-2x}=$$
$$=-x^2-5x-6.$$

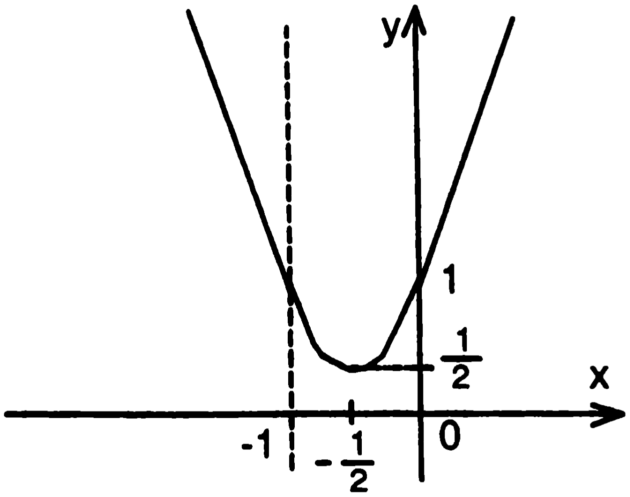
Графиком исходной функции будет та часть параболы (с вершиной в точке $x_в=-5/2$, $y_в=1/4$; ветви направлены вниз), которая попадает в левую полуплоскость $x<0$.

Пример 5 [Геолог.–2002, устн.]. *Найти наименьшее значение функции*

$$y=\Big|\,(x+1)\cdot|x+1|-|x|\cdot x\,\Big|.$$

Решение. Построим график функции методом интервалов.

1) $x\in(-\infty,-1)$: $y=\left|(x+1)(-x-1)+x^2\right|=|-2x-1|=-2x-1$;



2) $x \in [-1,0]$:

$$y = \left|(x+1)^2 + x^2\right| = 2x^2 + 2x + 1;$$

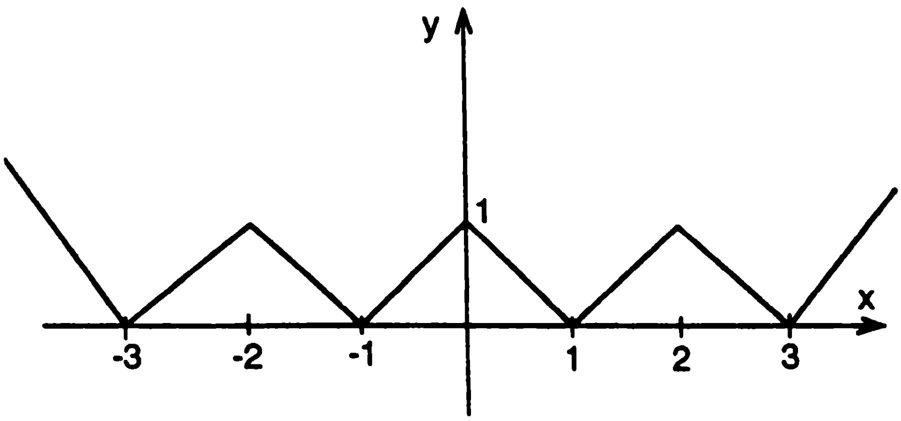
3) $x \in (0,+\infty)$:

$$y = \left|(x+1)^2 - x^2\right| = |2x+1| = 2x+1.$$

График состоит из трёх ветвей, объединённых в одну непрерывную кривую. По графику определяем, что $y_{\min} = y(-1/2) = 1/2$.

Пример 6. Построить график функции $y = \left| \left|\left||x|-1\right|-1\right|-1 \right|$.

Решение. Построим график при помощи двух преобразований: параллельного переноса вдоль оси Oy вниз на 1 и графического «взятия» модуля. Для этого последовательно построим графики функций:



$$y = |x| \Rightarrow y = |x| - 1$$

$$\Rightarrow y = \left||x|-1\right| \Rightarrow$$

$$y = \left||x|-1\right| - 1$$

и т.д. Эскиз искомого графика изображён на рисунке.

Пример 7 [Геолог.–2002, устн.]. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} |x-y| = 2 \\ |x| - |y| = 4. \end{cases}$$

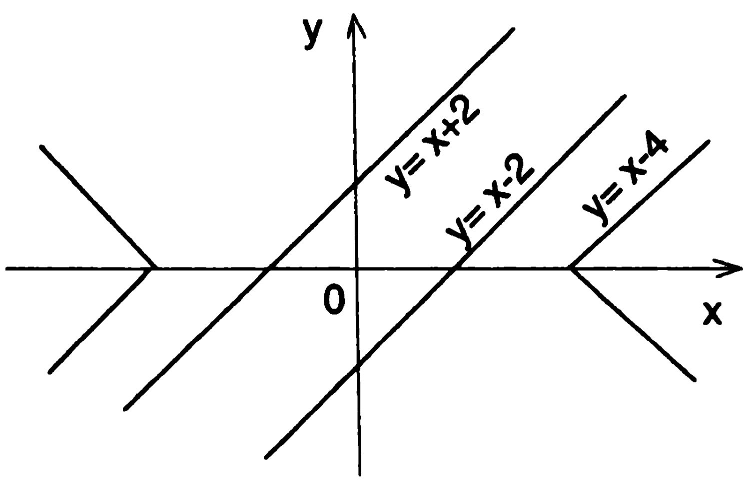
Решение. Один из наиболее наглядных и быстрых способов решить данную систему уравнений – *графический*. Для этого достаточно изобразить в одной системе координат Oxy графики первого и второго уравнений системы. Тогда количество точек пересечения этих графиков будет равно количеству решений системы, а координаты этих точек будут решениями системы.

Чтобы построить графический образ первого уравнения, перепишем его в виде

$$\left[\begin{array}{l} x-y=2 \\ x-y=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-2 \\ y=x+2, \end{array}\right.$$

т.е. первое уравнение задаёт на плоскости две параллельные прямые.

Чтобы построить график второго уравнения, заметим предварительно, что поскольку при замене x на $(-x)$, а y на $(-y)$ это уравнение на меняет своего вида, то фигура на плоскости, задаваемая этим уравнением, должна быть симметрична сама себе относительно обеих координатных осей. Поэтому достаточно построить, например в 1-й четверти, часть графика, а затем симметрично отобразить её относительно прямых $x=0$ и $y=0$. В 1-й четверти $x, y \geq 0$, поэтому модули раскрываются со знаком «плюс», и уравнение приобретает вид $y=x-4$. Таким образом, в 1-й четверти второе уравнение задает часть прямой $y=x-4$, в неё попадающую.



Симметричным образом достраивая фигуру на всей координатной плоскости, обнаруживаем, что графики первого и второго уравнений не имеют общих точек. Это означает, что система не имеет решений.

__Замечание__. Можно было воспользоваться для решения одним из известных свойств модуля, а именно, что $|x-y| \geq |x|-|y|$ при всех действительных x и y. В рассматриваемой системе, наоборот,

$$|x-y| = 2 < 4 = |x|-|y|.$$

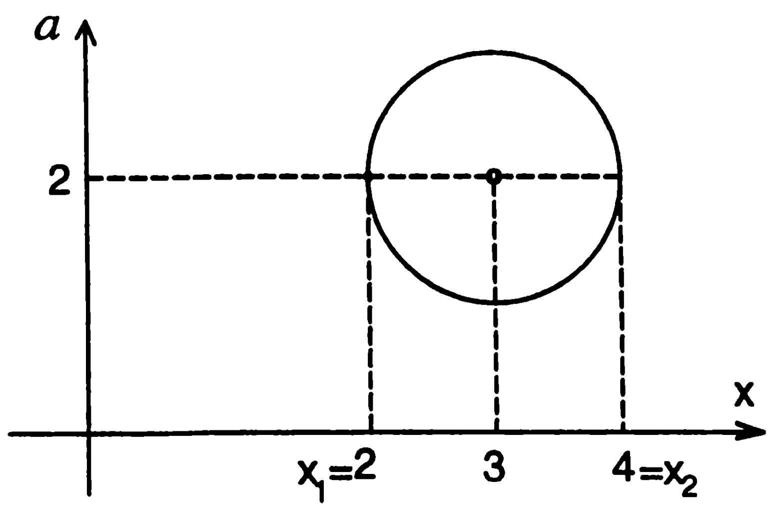
То есть условия системы вступают в противоречие с указанным свойством модулей, что также доказывает отсутствие решений у системы.

Пример 8 [Геолог.–1999, устн.]. *При каких значениях параметра a модуль разности корней уравнения*

$$x^2-6x+12+a^2=4a$$

принимает наибольшее значение?

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(x-3)^2+(a-2)^2=1$.



Введём на плоскости прямоугольную систему координат, на оси абсцисс будем откладывать значения переменной x, а на оси ординат – значения параметра a. В этой системе координат уравнение задаёт окружность единичного радиуса с центром в точке $(3;2)$. По рисунку видно, что модуль разности корней уравнения достигает наибольшего значения при $a = 2$.

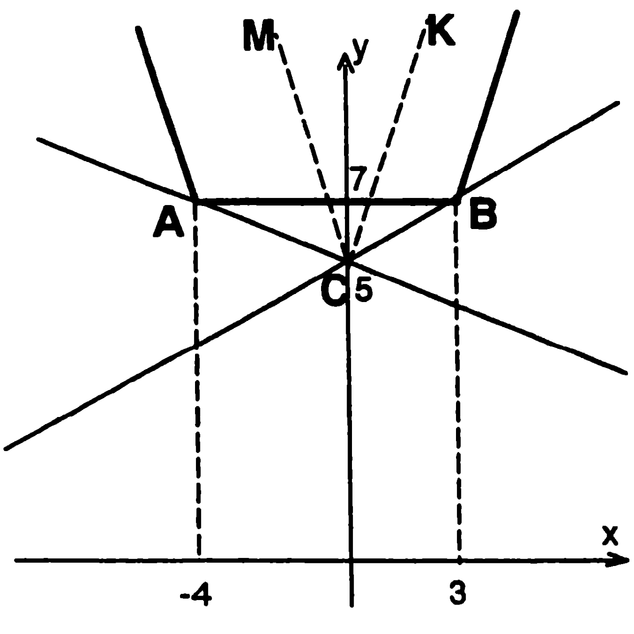
Пример 9 [Геолог.–2001]. *При каких значениях параметра z уравнение $|2x-6|+|2x+8| = zx+10$ имеет единственное решение x ?*

Решение. *__1-й способ__*. Поделим уравнение на 2:

$$|x-3|+|x+4| = (z/2)x+5$$

и обозначим выражение $z/2$ через a, а функцию в левой части последнего уравнения – через $f(x)$. Методом интервалов строим график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} -2x-1, если \quad x \le 4; \\ 7, \quad если \quad -4 \le x \le 3; \\ 2x+1, \quad если \quad x \ge 3. \end{cases}$$



По условию задачи требуется найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\underbrace{|x-3|+|x+4|}_{f(x)} = ax+5$$

имеет единственное решение, т.е. графики функций $y = f(x)$ и $y = ax+5$ пересекаются в одной точке.

На рисунке график функции

$y = f(x)$ в виде ломаной линии выделен полужирной линией, графики линейных функций $y = ax + 5$ имеют вид пучка прямых линий (кроме прямой $x = 0$), проходящих через точку $C(0;5)$. Очевидно, что прямая вида $y = ax + 5$ имеет единственную общую точку с ломаной линией лишь в следующих случаях.

1) Прямая $y = ax + 5$ проходит через точку $A(-4;7)$. Подставляя в уравнение прямой координаты этой точки, находим соответствующее значение параметра $a = -1/2 \Rightarrow z = -1$.

2) Прямая $y = ax + 5$ проходит через точку $B(3;7)$. Подставляя в уравнение прямой координаты этой точки, находим отвечающее ему значение параметра $a = 2/3 \Rightarrow z = 4/3$.

3) Прямая $y = ax + 5$ проходит параллельно левой ветви ломаной, т.е. совпадает с прямой CM (её уравнение $y = -2x + 5$), или имеет более вертикальное положение. Несложно вычислить, что указанным положениям прямой соответствуют угловые коэффициенты $-\infty < a \le -2$, т.е. $-\infty < z \le -4$.

4) Наконец, прямая $y = ax + 5$ может проходить параллельно правой ветви ломаной, т.е. совпадать с прямой CK (её уравнение $y = 2x + 5$), или иметь более вертикальное положение. В этом случае получаем для угловых коэффициентов следующий диапазон изменения: $2 \le a < +\infty$, т.е. $4 \le z < +\infty$. Объединяя полученные значения z, приходим к ответу.

Ответ: $z \in (-\infty,-4] \cup \{-1; 4/3\} \cup [4,+\infty)$.

2-й способ. Воспользуемся *методом интервалов*.

1) $x \in (-\infty,-4]$: уравнение принимает вид $x(4 + z) = -12$; если $z \ne -4$, то получаем единственное решение

$$x_1 = -12/(4 + z) \le -4 \Leftrightarrow z \in (-4,-1].$$

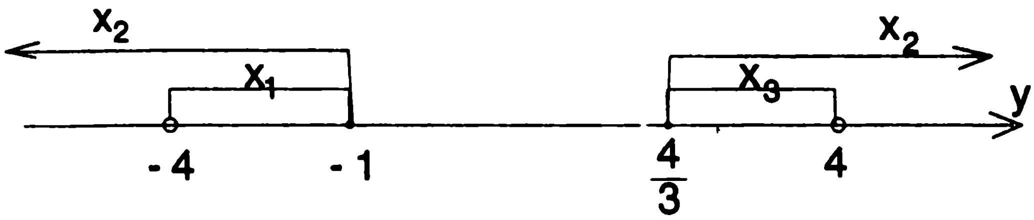
Итак, при $z \in (-4,-1]$ имеем решение $x_1 = -12/(4 + y)$.

2) $x \in (-4,3]$: уравнение принимает вид $xz = 4$; если $z \ne 0$, то получаем решение $x_2 = 4/z \in (-4,3] \Leftrightarrow z \in (-\infty,-1) \cup [4/3,+\infty)$.

Итак, при $z \in (-\infty,-1) \cup [4/3,+\infty)$ имеем решение $x_2 = 4/z$.

3) $x \in (3,+\infty)$: уравнение принимает вид $x(4 - z) = 8$; если $z \ne 4$, то получаем решение $x_3 = 8/(4 - z) > 3 \Leftrightarrow z \in (4/3,4)$.

Итак, при $z \in (4/3,4)$ имеем решение $x_3 = 8/(4 - z)$.



Объединяя полученные результаты, получим тот же ответ.

Пример 10 [Эконом.–1997]. ***Решить систему уравнений***

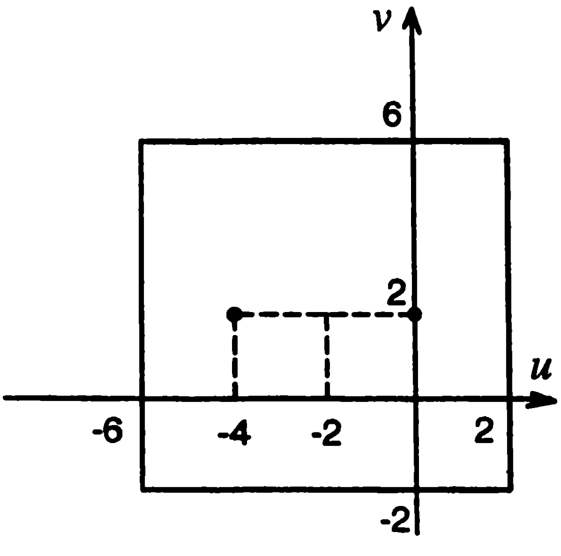
$$\begin{cases} \left|\sin\frac{\pi(x+y)}{4}\right| + \left|1-\sin\frac{\pi(x-y)}{4}\right| = 0 \\ \sqrt{4-|x|-|y+2|} = \sqrt{4-|x|-|y+2|}. \end{cases}$$

Решение. Сведём систему к равносильной системе

$$\begin{cases} \sin(\pi(x+y)/4) = 0 \\ 1-\sin(\pi(x-y)/4) = 0 \\ 4-|x|-|y+2| \ge 0, \end{cases}$$

и сделаем замену переменных: $u = x + y$, $v = x - y$. Тогда получим

$$\begin{cases} \sin(\pi u/4) = 0 \\ 1-\sin(\pi v/4) = 0 \\ |(u+v)/2| + |(u-v)/2+2| \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi u/4 = \pi n, \ n \in Z \\ \pi v/4 = \pi/2 + 2\pi k, \ k \in Z \\ |u+v| + |u-v+4| \le 8. \end{cases}$$



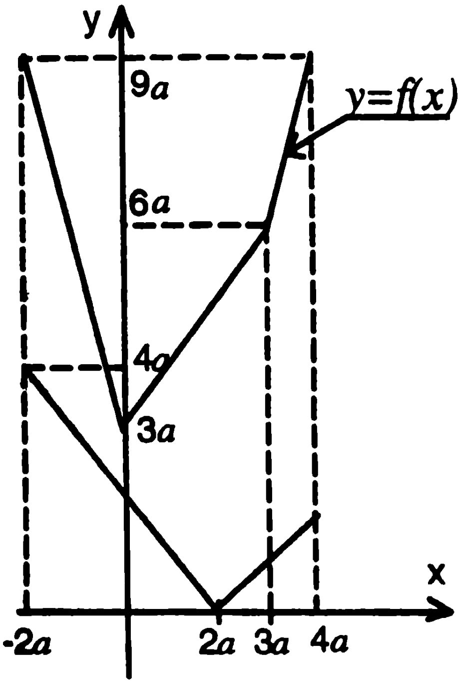
Неравенство последней системы описывает на координатной плоскости $(u;v)$ квадрат с центром в точке $u=-2$, $v=2$ и сторонами длиной 8, параллельными осям координат (см. рисунок). Среди бесконечного числа точек $(u;v)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы, в этот квадрат попадут лишь две:

$$\begin{cases} u = -4 \ (n=-1) \\ v = 2 \ (k=0) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} u = 0 \ (n=0) \\ v = 2 \ (k=0). \end{cases}$$

Отсюда, возвращаясь к первоначальным переменным, находим

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=1 \\ y=-1. \end{cases} \quad \textit{Ответ}: (x;y) \in \{(-1;-3);(1;-1)\}.$$

Пример 11 [Мехмат–1994, устн.]. *Для каждого* $a>0$ *найти наибольшее значение величины* $|x-2a|$ *при условии* $2|x|+|x-3a| \le 9a$.



Решение. Для решения задачи воспользуемся графическим подходом.

Обозначим $f(x)=2|x|+|x-3a|$ и построим график этой функции. Из рисунка видно, что неравенство $f(x) \le 9a$ выполняется на отрезке $x \in [-2a, 4a]$. Наибольшее значение функции $y=|x-2a|$, судя по её графику, изображённому ниже на том же рисунке, достигается при $x=-2a$ и равно $4a$.

Ответ: $\max\limits_{-2a \le x \le 4a} |x-2a| = 4$.

Пример 12 [МФТИ–2005]. *При каких значениях* a *уравнение* $|x^5|-x+a=0$ *имеет единственное решение? Решить это уравнение для всех найденных значений параметра* a.

Решение. Перепишем уравнение в виде $|x^5| = x-a$. Уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики функций $y=|x^5|$ и $y=x-a$ имеют единственную общую точку $(x_0;y_0)$, т.е. когда прямая $y=x-a$ касается графика $y=|x^5|$ (или, что то же самое, графика $y=x^5=f(x)$). Угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$, а, с другой стороны, он равен 1. Таким образом, имеем уравнение

$$f'(x_0)=1 \Leftrightarrow 5x_0^4=1,\ x_0>0 \Leftrightarrow x_0=5^{-1/4}.$$

Следовательно, $y_0=x_0-a \Leftrightarrow x_0^5=x_0-a \Leftrightarrow 5^{-5/4}=5^{-1/4}-a$, откуда $a=4\cdot 5^{-5/4}$. *Ответ*: при $a=4\cdot 5^{-5/4}$, $x=5^{-1/4}$.

Для получения дополнительного опыта решения задач с параметрами рекомендуем обратиться к специализированным пособиям, например [14,24,25].

Метод оценок

Метод оценок, суть которого в широком смысле слова состоит в том, что при анализе задачи используются полезные для её дальнейшего решения оценки неизвестных или выражений, получаемые на ОДЗ с привлечением производной или всевозможных неравенств. Например, одна из типичных ситуаций: решается уравнение

$$f(x) = g(x),$$

при этом, оценив независимо друг от друга возможные значения левой и правой частей уравнения, в ряде случаев (как раз тогда, когда этот метод дает положительный результат) обнаруживаем, что, например, левая часть уравнения при всех допустимых значениях неизвестных принимает значения меньшие либо равные некоторому числу, а правая, наоборот, – большие либо равные этому же числу значения. Иными словами, наибольшее значение левой части равно наименьшему значению правой части. Тогда делается вывод, что данное уравнение равносильно системе двух, вообще говоря, более простых уравнений, получаемых приравниванием отдельно левой и правой частей уравнения к данному числу. Существуют и другие разновидности метода оценок (см. п. 3.4 раздела 3).

Этот метод часто напрямую связан с группой функциональных методов, так как при оценивании выражений зачастую используются различные свойства функций, входящих в решаемое уравнение (например, ограниченность, монотонность). Возможные трудности связаны с необходимостью выполнить правильные оценки, привлекая для этих целей известные неравенства, производную и пр.

Пример 1*. Решить неравенство*

$$\left|(x+1)^{-2}\left(x^6+4x^2-1\right)\right| > -x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{10}{9}.$$

Решение. Выделяя в правой части полный квадрат по x, получим $-\left(x-1/3\right)^2-1$. Отсюда, учитывая неотрицательность модуля и ОДЗ, приходим к ответу. *Ответ*: $x \in R \setminus \{-1\}$.

Пример 2 [Геолог.–1997]. *Решить уравнение*

$$\left|x+y-3xy+13\right| + \left|x^2y+xy^2-30\right| = 0.$$

Решение. Сумма двух неотрицательных выражений обращается в нуль тогда и только тогда, когда оба слагаемых одновременно равны нулю. Поэтому данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+y-3xy+13=0 \\ x^2y+xy^2-30=0. \end{cases}$$

Данная система относится к группе *симметрических систем*, в которых каждое уравнение не меняет своего вида при одновременной замене x на y, а y на x. Такие алгебраические системы решаются обычно при помощи двойной подстановки $u=x+y$, $v=xy$. Преобразовав уравнения системы к виду

$$\begin{cases} (x+y)-3xy+13=0 \\ xy(x+y)-30=0 \end{cases}$$

и сделав соответствующую замену, приходим к системе

$$\begin{cases} u-3v+13=0 \\ uv-30=0. \end{cases}$$

Далее решаем её методом подстановки:

$$\begin{cases} u=3v-13 \\ 3v^2-13v-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-18 \\ v=-5/3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-18 \\ xy=-5/3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая из систем имеет два решения $(2;3),(3;2)$, вторая – ещё два:

$$\left(-9+\sqrt{248/3};-9-\sqrt{248/3}\right),\ \left(-9-\sqrt{248/3};-9+\sqrt{248/3}\right).$$

Объединяя эти решения, получаем ответ:

$$(x;y)\in\left\{(2;3);(3;2);\left(-9+\sqrt{\frac{248}{3}};-9-\sqrt{\frac{248}{3}}\right);\left(-9-\sqrt{\frac{248}{3}};-9+\sqrt{\frac{248}{3}}\right)\right\}.$$

Пример 3. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2 \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Решение. Преобразуем систему к виду $\begin{cases} 5\left(|x|-x^2\right)=3\left(y-2^{|x|}\right) \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Из второго уравнения следуют оценки $|x|\le 1$, $|y|\le 1$. Так как $|x|\le 1$, то $|x|-x^2=|x|(1-|x|)\ge 0$, т.е. левая часть первого из уравнений принимает неотрицательные значения. Так как $|y| \le 1$, то $y - 2^{|x|} \le 1 - 2^{|x|} \le \ \le 0$, т.е. правая часть того же уравнения неположительна. Это означает, что данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x| - x^2 = 0 \\ y - 2^{|x|} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 1; \\ x = 1, y = 2; \\ x = -1, y = 2. \end{array}\right.$$

Только первая пара удовлетворяет второму уравнению исходной системы. *Ответ*: $(x; y) \in \{(0;1)\}$.

Другие примеры на метод оценок были приведены выше в пункте, посвящённом использованию свойств модулей.

Метод «от частного к общему»

Подробнее о данном методе см. в пункте 3.4 раздела 3 («Алгебраические уравнения и неравенства». Приведём лишь один пример.

Пример [5-я Всероссийская олимпиада 1978/79, 10 класс]. *Найти все значения a и b такие, что для любого x из отрезка $[-1,1]$ будет выполняться неравенство $|2x^2 + ax + b| \le 1$.*

Решение. Раскроем модуль: $-1 \le 2x^2 + ax + b \le 1$, и решим задачу методом «от частного к общему».

Так как это неравенство, по условию, выполняется при всех x из указанного отрезка, то, в частности, оно должно выполняться для $x = -1$:

$$-1 \le 2 - a + b \le 1. \qquad (1)$$

Положив в неравенстве $x = 0$ и $x = 1$, получим ещё два неравенства

$$-1 \le b \le 1 \qquad (2)$$

и

$$-1 \le 2 + a + b \le 1. \qquad (3)$$

Сложив неравенства (1) и (3), получим, что $b \le -1$. С учётом (2) это означает, что $b = -1$. Подставляя это значение в (1) и (3), находим $a = 0$.

Таким образом, если существуют числа a и b, удовлетворяющие условию задачи, то это $a = 0$, $b = -1$, и других решений задача иметь не может. Чтобы доказать, что найденные a и b являются решениями задачи, осталось проверить, что для любого $x \in [-1,1]$ справедливо неравенство $-1 \le 2x^2 - 1 \le 1$, что верно. *Ответ*: $a = 0$, $b = -1$.

3.3.5. Задачи, использующие понятия наименьшего и наибольшего из двух или нескольких чисел

Иногда в условиях задач встречаются обозначения вида

$$\max(a_1;a_2;...;a_n) \text{ или } \min(a_1;a_2;...;a_n).$$

Под этими обозначениями, если не оговорено противное, обычно понимают наибольшее и, соответственно, наименьшее из n действительных чисел $a_1,a_2,...,a_n$. В простейшей ситуации, когда количество чисел равно двум, для раскрытия этого понятия в задаче достаточно рассмотреть два случая, когда одно из чисел больше либо равно или меньше другого.

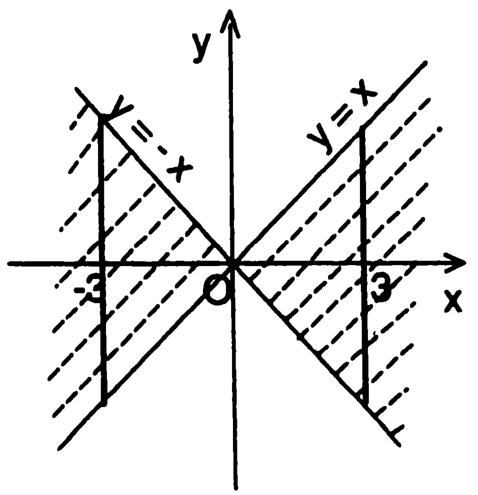
Пример 1. *Построить на плоскости Oxy геометрическое место точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению*

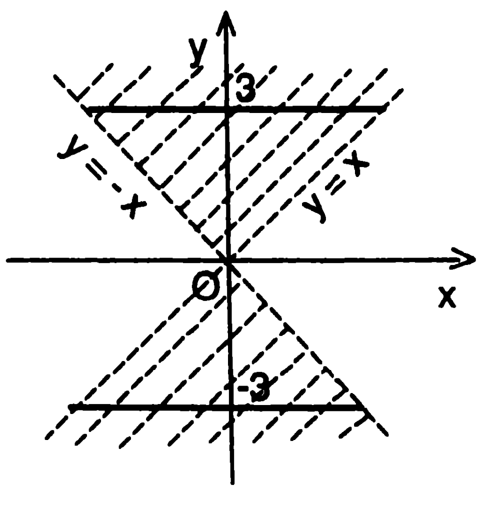
$$\max(|x|;|y|)=3.$$

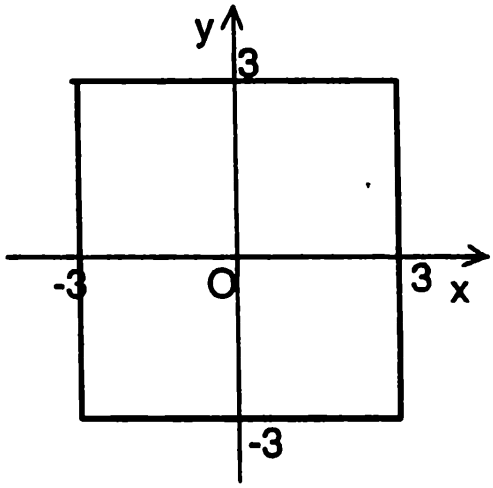
Решение. Перейдём от уравнения к равносильной ему совокупности, раскрыв понятие наибольшего из двух чисел $|x|$ и $|y|$ по определению:

$$\max(|x|;|y|)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\ge|y|\\|x|=3;\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<|y|\\|y|=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Далее строим геометрические образы решений первой и второй систем, это будут соответственно объединения отрезков, изображённых на рисунке:







Объединяя все полученные отрезки, получаем искомое ГМТ в виде границы квадрата с центром в начале координат и сторонами длины 6, параллельными координатным осям. Задача решена.

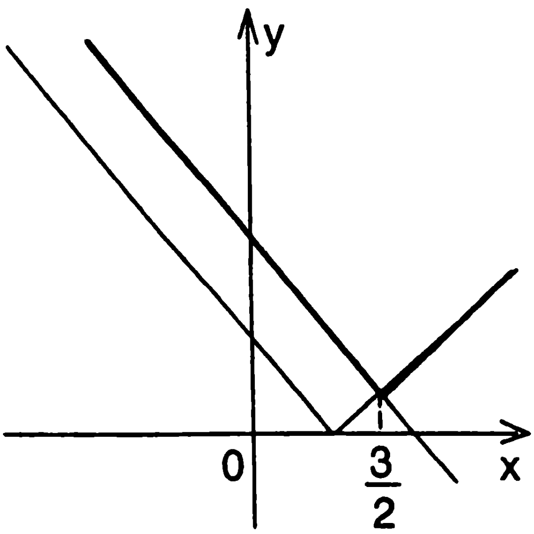
В других ситуациях можно поступить иначе. Рассмотрим пример.

Пример 2. Построить график функции $y = \max(|x-1|; 2-x)$.

Решение. Построим в одной системе координат графики обеих функций $y = |x-1|$ и $y = 2-x$, найдём единственную точку их пересечения, её абсцисса равна $3/2$. При $x < 3/2$ график функции

$$y = \max(|x-1|; 2-x)$$

будет совпадать с графиком функции $y = 2-x$, а при $x \geq 3/2$ искомый график будет совпадать с графиком функции $y = |x-1|$ (т.е. на каждом из участков выбираем тот из графиков, который лежит выше). В результате получаем график функции $y = \max(|x-1|; 2-x)$, который на рисунке обозначен полужирной линией.



Если в задаче идет речь о наименьшем или наибольшем из двух действительных чисел, то иногда бывает удобно воспользоваться следующими тождествами.

<u>Теорема</u>. *Для произвольных действительных чисел* a *и* b *выполняются следующие тождества*:

1) $\max(a;b) \equiv \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$; 2) $\min(a;b) \equiv \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$;

3) $\max(|a+b|;|a-b|) \equiv |a|+|b|$; 4) $\min(|a+b|;|a-b|) \equiv ||a|-|b||$.

Доказательство. 1) Если $a \geq b$, то левая часть тождества, т.е. $\max(a;b)$, равна a; с другой стороны, правая часть тождества, т.е. $(a+b+|a-b|)/2$, после раскрытия модуля $|a-b| = a-b$ также оказывается равной a, что и доказывает данное тождество. Если же $a<b$, то в левой части будет $\max(a;b)=b$, и в правой части также

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = b,$$

что подтверждает справедливость тождества и в этом случае.

2) Доказывается аналогично предыдущему случаю.

3) Если $ab \geq 0$, то $|a+b| \geq |a-b|$, и тождество принимает вид $|a+b| \equiv |a|+|b|$, что верно при всех $a,b \in R$, $ab \geq 0$. Если же $ab<0$, то $|a+b|<|a-b|$, и тождество принимает вид $|a-b| \equiv |a|+ \ +|b|$, что верно при всех $a,b \in R$, $ab<0$. Таким образом, справедливость тождества доказана при всех действительных a,b.

4) Доказывается аналогично предыдущему случаю.

Пример 3 [ВМиК–1997, устн.]. *Решить уравнение*

$$\max(2x;3-x) = \min(5+2x;6x).$$

Решение. Воспользуемся доказанными выше тождествами:

$$\max(2x;3-x) = \frac{2x+(3-x)+|2x-(3-x)|}{2} = \frac{x+3+|3x-3|}{2} \quad \text{и}$$

$$\min(5+2x;6x) = \frac{5+2x+6x-|5+2x-6x|}{2} = \frac{5+8x-|5-4x|}{2}.$$

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{x+3+|3x-3|}{2} = \frac{5+8x-|5-4x|}{2} \Leftrightarrow 3|x-1|+|5-4x| = 2+7x,$$

которое можно решить методом интервалов. *Ответ*: $x \in \{3/7\}$.

В ряде случаев при решении подобного рода задач удобно использовать *свойства* наибольшего и наименьшего из нескольких чисел. Например, для произвольных действительных чисел a, b, c справедливы следующие свойства:

$$\max(a;b) \le c \Leftrightarrow \begin{cases} a \le c \\ b \le c; \end{cases} \quad \max(a;b) \ge c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge c \\ b \ge c; \end{array}\right.$$

$$\min(a;b) \le c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le c \\ b \le c; \end{array}\right. \quad \min(a;b) \ge c \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge c \\ b \ge c. \end{cases}$$

В самом деле, докажем первое из них. Начнём с *необходимости*. Пусть наибольшее из двух чисел a и b не превышает числа c, тогда, очевидно, и каждое из чисел a и b не будет превышать числа c. Теперь докажем *достаточность*. Если каждое из чисел a и b не превышает числа c, то, значит, и наибольшее из них также не будет превышать это число. Таким образом, свойство доказано. Остальные свойства доказываются аналогичными логическими рассуждениями.

Пример 4*. Решить неравенство* $\max(2-3|x|;|x|+2) \le 5$.

Решение. Воспользуемся равносильным переходом:

$$\max(a;b) \le c \Leftrightarrow \begin{cases} a \le c \\ b \le c. \end{cases}$$

Применяя его, сразу сводим исходное неравенство к равносильной ему системе, решить которую уже не составляет труда:

$$\begin{cases} 2-3|x| \le 5 \\ |x|+2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \ge -1 \\ |x| \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 3.$$

Пример 5 [ВШБ–2004]. *Найти все значения* x, *удовлетворяющие неравенству*

$$\min\left(\log_3(3x+5); \sqrt{x^2-x-2}\right) < 2.$$

Решение. Для решения задачи воспользуемся свойством

$$\min(a;b) < c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < c \\ b < c \end{array}\right.$$

(убедитесь в том, что другие способы решения данной задачи существенно менее приемлемы). Естественно, применять указанное свойство можно только с учётом ОДЗ:

$$\min\left(\log_3(3x+5); \sqrt{x^2-x-2}\right) < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}<2 \\ 3x+5>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3(3x+5)<2 \\ x^2-x-2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)(x-3)<0 \\ (x+1)(x-2)\ge 0 \\ x>-5/3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<3x+5<9 \\ (x+1)(x-2)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-5/3,-1]\cup[2,3).$$

Пример 6 [Мехмат–2006]. *Найти наименьшее значение выражения*

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y|,$$

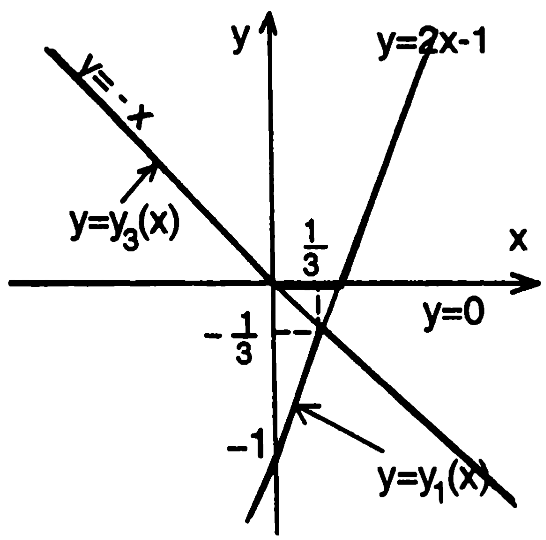
где x, y ***– произвольные действительные числа.***

Решение. Заметим, что при фиксированном x выражение

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y| = |y-(2x-1)|+|y-(-x)|+|y-0|$$

не меньше, чем

$$|y-y_1|+|y-y_3| \ge (y-y_1)+(y_3-y) = y_3-y_1,$$



где y_3 – наибольшее, а y_1 – наименьшее из трёх чисел $2x-1$, $-x$, 0, при этом своё наименьшее значение $m(x)=y_3-y_1$ оно принимает при y, равном среднему y_2 из тех же чисел. В свою очередь, наименьшее значение функции $m(x)$ достигается при $x=-1/3$ (см. рис.) и равно $1/3$.

Ответ: $1/3$.

Пример 7 [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы–2007»]. ***Решить уравнение***

$$f(x,y,z)+|f(x,y,z)|=0,$$

$$\textit{где } f(a,b,c)=(a+b+2c+|a-b|)+|a+b-2c+|a-b||.$$

Решение. Исходное неравенство, очевидно, равносильно неравенству

$$f(x,y,z)\le 0.$$

Обозначим для краткости $u = x + y + |x - y|$, тогда из определения $f(x, y, z)$ следует, что последнее неравенство равносильно

$$u + 2z + |u - 2z| \le 0 \Leftrightarrow |u - 2z| \le -u - 2z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - 2z \le -u - 2z \\ u - 2z \ge u + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \le 0 \\ z \le 0. \end{cases}$$

Аналогичными преобразованиями решаем неравенство $u \le 0$:

$$x + y + |x - y| \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \le -x - y \\ x - y \ge x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0. \end{cases}$$

Так как $\max(a;b) \equiv (a + b + |a - b|)/2$, то

$$u = x + y + |x - y| = 2\max(x, y),$$

следовательно,

$$f(x, y, z) = u + 2z + |u - 2z| = 2\max(u, 2z) =$$

$$= 2\max(2\max(x, y), 2z) = 4\max(x, y, z).$$

Отсюда

$$f(x, y, z) \le 0 \Leftrightarrow \max(x, y, z) \le 0 \Leftrightarrow x \le 0; y \le 0; z \le 0.$$

Ответ: $(x; y; z)$, где $x \le 0,\ y \le 0,\ z \le 0$.

3.4. Универсальные приёмы и методы решения уравнений и неравенств

Перечислим и кратко охарактеризуем наиболее известные (универсальные) приёмы и методы, используемые в элементарной математике при решении уравнений, неравенств и прочих задач, причём не только алгебраических. Часть из этих методов в приложении к решению целых алгебраических уравнений уже рассматривалась выше в пункте 3.3.1.

Разложение на множители

Это общий метод, который может быть использован при решении любых, не обязательно алгебраических, уравнений и неравенств. Под разложением на множители некоторого многочлена, вообще говоря, произвольного вида (алгебраического, тригонометрического и т.д.) понимают его *представление в виде произведения* нескольких сомножителей. В результате разложения на множители решаемое уравнение оказывается сведено к решению на ОДЗ совокупности нескольких, как правило, более простых уравнений. Для разложения на множители существуют различные приёмы, включая группировку и вынесение общего множителя за скобку, одновременное прибавление и вычитание некоторого одночлена или же, наоборот, разбиение одночлена на сумму (разность) нескольких, и другие.

При решении неравенств разложение на множители часто используют для приведения неравенства к виду, удобному для последующего применения метода интервалов.

Пример 1 [ИСАА–2002]. *Решить неравенство*

$$x\sqrt{2-x} \le x^2 - x - 2 - \sqrt{2-x}\,.$$

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$$(x+1)\sqrt{2-x} \le (x+1)(x-2),$$

откуда получаем следующее разложение на множители

$$(x+1)\left(\sqrt{2-x} + 2 - x\right) \le 0\,.$$

Так как на ОДЗ $x \le 2$, то рассмотрим два случая. Если $x = 2$, то неравенство, очевидно, выполняется. Если $x < 2$, то сократим на $\sqrt{2-x} + \; + 2 - x > 0$, получив равносильное неравенство $x + 1 \le 0$, т.е. $x \le -1$. Объединяя, получаем ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup \{2\}$.

Пример 2 [Высшая школа бизнеса–2005]. *Решить уравнение*

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2+5x+6} = \sqrt[3]{x^2+4x+3} - \sqrt[3]{x^2+3x+2}\,.$$

Решение. Найдя корни, разложим квадратные трёхчлены под радикалами на линейные множители:

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+2)(x+3)}=\sqrt[3]{(x+1)(x+3)}-\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}.$$

Далее, группируя и вынося общие множители за скобки, получим

$$\sqrt[3]{x+1}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+3}\right)=\sqrt[3]{x+2}\left(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+3}\right)\left(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}\right)=0.$$

Заметим, что выражение в первых скобках в нуль не обращается. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=0,$$

решая которое находим единственный корень $x=-3/2$.

Метод замены переменных

Этот распространённый метод используется для разных целей: упрощение задачи и повышение её наглядности, придание уравнению (неравенству, системе и проч.) более симметричного вида, сведение одного уравнения к системе нескольких уравнений, рационализация иррациональностей (см. пункт 3.3) и т.д. Иными словами, введение новых переменных производится в тех случаях, когда есть возможность свести задачу к другой, для которой существует более эффективный способ решения.

Существуют виды уравнений, для которых разработаны специальные подстановки, позволяющие наиболее оптимально решать эти уравнения (например, симметрические и возвратные уравнения, однородные уравнения и многие другие). Рассмотрим дополнительно группу примеров, иллюстрирующих различные цели использования этого подхода.

1. Начнём с примера, в котором при помощи замены неизвестной рациональное неравенство сводится также к рациональному, но более простому алгебраическому неравенству.

Пример 1 [ВМиК–2004]. *Решить неравенство*

$$\frac{1}{x^2-5x+7}\le 5x-x^2-5.$$

Решение. Положим $t=x^2-5x+7>0$. Тогда необходимо решить неравенство $1/t\le -t+2 \Leftrightarrow 1\le -t^2+2t \Leftrightarrow (t-1)^2\le 0 \Leftrightarrow t=1$. Выполнив обратную подстановку, получим квадратное уравнение $x^2-5x+7=1$, решив которое, приходим к ответу. *Ответ*: $x\in\{2;3\}$.

2. В следующем примере дробно-рациональное уравнение заменой сводится к целому алгебраическому уравнению.

Пример 2. *Решить уравнение* $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$.

Решение. Обозначим разность $\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}$ через y, тогда уравнение перепишется в виде $3y^2-10y+8=0$. Это уравнение имеет два корня $y=2$ и $y=4/3$, что приводит к совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}(x/3)-(4/x)=2\\(x/3)-(4/x)=4/3.\end{array}\right.$$

Первое уравнение даёт корни $x_{1,2}=\left(3\pm\sqrt{21}\right)/2$, а второе – $x_3=-2$, $x_4=6$, которые и будут решениями исходного уравнения.

3. В некоторых случаях алгебраическую задачу (даже если в её условиях не содержится радикалов) с помощью специальных тригонометрических подстановок бывает целесообразно свести к тригонометрической задаче, и далее уже решать её методами тригонометрии.

Пример 3 [ВМиК–2000, устн.]. *Известно, что* $m^2+n^2=1$, $k^2+l^2=1$ *и* $mk+nl=0$. *Чему равно значение* $mn+kl$?

Решение. Воспользуемся тем, что если два действительных числа x, y удовлетворяют равенству

$$x^2+y^2=a^2, \tag{1}$$

где $a>0$ – заданное число, то x и y можно представить в тригонометрическом виде $\begin{cases}x=a\cos t\\y=a\sin t\end{cases}$, где $t\in[0,2\pi)$. В самом деле, уравнение (1) задаёт на плоскости Oxy окружность радиуса a с центром в начале координат. При изменении t от 0 до 2π точка с координатами $(x;y)$ ровно один раз обходит окружность, и таким образом между точками окружности и полуинтервалом $[0,2\pi)$ оказывается установлено взаимно однозначное соответствие. Это означает, что каждому значению t из $[0,2\pi)$ соответствует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющих равенству (1), и наоборот, каждой паре чисел, удовлетворяющих (1), соответствует единственное значение t из $[0,2\pi)$.

Итак, поскольку числа m, n удовлетворяют равенству $m^2 + n^2 = 1$, то найдётся такое число $\alpha \in [0, 2\pi)$, что $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$. Аналогично, поскольку числа k, l удовлетворяют равенству $k^2 + l^2 = 1$, то найдётся такое число $\beta \in [0, 2\pi)$, что $k = \cos\beta$, $l = \sin\beta$. При этом условие $mk + nl = 0$ примет вид

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Выполнив тригонометрическую подстановку в искомом выражении $mn + kl$, получим:

$$mn + kl = \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \cos\beta \cdot \sin\beta = (1/2)(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) =$$
$$= \sin\frac{2\alpha + 2\beta}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha - 2\beta}{2} = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

4. Введение новых переменных может быть вызвано необходимостью понизить степень уравнения, упростив при этом решение задачи.

Пример 5. *Решить уравнение* $(6x + 7)^2 (3x + 4)(x + 1) = 1$.

Решение. Сведём данное уравнение 4-й степени к квадратному уравнению. Для этого вначале умножим обе части уравнения на 12 и приведём его к виду

$$(6x + 7)^2 (6x + 8)(6x + 6) = 12.$$

Затем сделаем подстановку $y = 6x + 7$, что приведёт к уравнению

$$y^2 (y + 1)(y - 1) = 12 \Leftrightarrow y^2 (y^2 - 1) = 12.$$

Сделав ещё одну подстановку $z = y^2$, сведём окончательно данное биквадратное уравнение к квадратному уравнению $z^2 - z - 12 = 0$, решив которое, находим корни $z = 4$, $z = -3$. Тогда $y^2 = 4$ и $\left[\begin{array}{l} 6x + 7 = 2 \\ 6x + 7 = -2. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in \{-3/2; -5/6\}$.

5. В следующем примере используется *симметризирующая* подстановка. Название говорит само за себя: уравнению придаётся более «симметричный» вид. Новая переменная является средним арифметическим входящих в уравнение выражений. При её применении уравнение 4-й степени общего вида приводится к более простому частному случаю, а именно, симметризация уравнения позволяет «убрать» из уравнения нечётные степени неизвестной, оставив только чётные и превратив его, таким образом, в биквадратное уравнение.

Пример 6. Решить уравнение

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2.$$

Решение. Выполним симметризирующую подстановку

$$y=\frac{(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)}{4}=x+\frac{1+2+3+4}{4}=x+2{,}5.$$

Тогда уравнение примет вид

$$(y-1{,}5)(y-0{,}5)(y+0{,}5)(y+1{,}5)=(y-1{,}5)^2+(y-0{,}5)^2+(y+0{,}5)^2+(y+1{,}5)^2$$

$$\Leftrightarrow\ y^4-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{16}=4y^2+5\Leftrightarrow\ y^2=\frac{13}{4}\pm\sqrt{15}.$$

Ответ: $x\in\left\{-2,\ 5\pm\sqrt{3{,}25+\sqrt{15}}\right\}$.

6. Близко к методу введения новых переменных стоит так называемый метод *введения параметра*. Не всегда введение параметра усложняет задачу. На примере, рассмотренном ниже, видно, как включение параметра в уравнение вместо числового коэффициента позволяет лучше «разглядеть» способ дальнейшего его решения – рассмотрение уравнения как квадратного относительно введённой величины.

Пример 7 [ВМиК–2001, устн.]. ***Решить уравнение***

$$x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0.$$

Решение. Введём в уравнение параметр, положив $a=\sqrt{2}$:

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0.$$

Рассмотрим теперь это уравнение как квадратное относительно a. Приведём его к стандартному виду $a^2-x^2a+x^3-x^2=0$ и вычислим дискриминант $D=x^4-4(x^3-x^2)=(x(x-2))^2\geq 0$. Найдём корни:

$$a_{1,2}=\frac{x^2\pm(x(x-2))}{2}, \tag{1}$$

т.е. $a=x$ или $a=x^2-x$. Параметр к этому моменту сыграл свою положительную роль, позволив свести решение кубического относительно x уравнения к совокупности двух уравнений более низкой степени: квадратного и линейного. Заменяя a числом $\sqrt{2}$, получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\ x^2-x-\sqrt{2}=0.\end{array}\right.$$

Отсюда находим решения: $x \in \left\{ \sqrt{2}; \frac{1-\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}; \frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} \right\}$.

Замечание. В формуле корней квадратного уравнения более корректным было, вообще говоря, написать

$$a_{1,2} = \frac{x^2 \pm |x(x-2)|}{2}. \qquad (2)$$

Однако когда ищутся оба корня, то использование формул (1) и (2) приводит к одному результату. Именно поэтому часто в подобных ситуациях модуль опускают.

7. Отметим, что, вообще говоря, не всегда в задаче нужно полностью переходить к новым переменным. Иногда имеет смысл, вводя новую переменную, сохранить в задаче и первоначальную переменную, т.е. сделать *частичную замену переменных*. Так, сведением к системе уравнений, решаются некоторые уравнения. Рассмотрим в качестве пояснения пример.

Пример 8 [МГИМО]. *Решить уравнение*

$$(12-x^2)(x+2)^2 = 4x^2.$$

Решение. Так как $x=-2$ не является корнем, то уравнение можно привести к равносильному виду

$$12-x^2 = (2x/(x+2))^2.$$

Положим $y = 2x/(x+2)$, тогда уравнение сведётся к равносильной ему системе

$$\begin{cases} y = 2x/(x+2) \\ 12-x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2(x-y) \\ (x-y)^2 + 2xy = 12. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно xy и $x-y$, приходим к ответу: $x \in \{1 \pm \sqrt{5}\}$.

Метод неопределённых коэффициентов (*)

Иногда для решения алгебраических задач с одной или несколькими переменными используют *метод неопределённых коэффициентов*. Суть метода состоит в том, что для исследуемого выражения подбирается подходящая параметрическая модель, которая описывает это выражение при всех значениях входящих в него переменных. Модель содержит в себе неизвестные параметры (неопределённые коэффициенты), подлежащие определению. Применение метода в конечном итоге сводится к составлению системы уравнений, из которой и находятся неопределённые коэффициенты и затем подставляются в математическую модель. К недостаткам метода можно отнести то, что получаемая система уравнений может оказаться громоздкой и поэтому трудной не только для нахождения решения, но даже для его подбора.

Пример 1 [Черноморский филиал МГУ–2003]. *Найти такие числа a и b, что при всех x справедливо равенство*

$$\left(x^2+5x+6\right)\left(x+a\right)=\left(x^2-9\right)\left(x+b\right).$$

Решение. Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Раскроем скобки в левой и правой частях уравнения, и приведём образовавшиеся при этом многочлены 3-й степени к стандартному виду:

$$x^3+(5+a)x^2+(6+5a)x+6a\equiv x^3+bx^2-9x-9b.$$

Учитывая, что два кубических многочлена тождественно (при всех $x\in R$) равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, выписываем систему:

$$\begin{cases}5+a=b\\6+5a=-9\\6a=-9b,\end{cases}$$

решая которую находим $a=-3,\ b=2$.

Пример 2 [Моск. ин-т коммун. хоз-ва и строит-ва–1998]. *Квадратный трёхчлен $24x^2+48x+26$ является разностью кубов двух линейных функций с положительными коэффициентами. Найти эти функции.*

Решение. Согласно условию, при всех действительных x выполняется тождество

$$24x^2+48x+26\equiv(ax+b)^3-(cx+d)^3.$$

Раскроем кубы в правой части этого равенства и приведём образовавшийся кубический многочлен к стандартному виду:

$$24x^2+48x+26\equiv\left(a^3-c^3\right)x^3+\left(3a^2b-3c^2d\right)x^2+$$
$$+\left(3ab^2-3cd^2\right)x+b^3-d^3.$$

Используя условие тождественного равенства двух многочленов и приравнивая коэффициенты, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}0=a^3-c^3\\24=3\left(a^2b-c^2d\right)\\48=3\left(ab^2-cd^2\right)\\26=b^3-d^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b-d=8/a^2\\b+d=16/(a(b-d))\\26=(b-d)\left(b^2+bd+d^2\right)\end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений находим

$$\begin{cases} b = a + \left(4/a^2\right) \\ d = a - \left(4/a^2\right). \end{cases}$$

Подставляя в четвёртое уравнение, получим:

$$26 = \frac{8}{a^2}\left(\left(a + \frac{4}{a^2}\right)^2 + a^2 - \frac{16}{a^4} + \left(a - \frac{4}{a^2}\right)^2\right).$$

Умножим последнее равенство на a^6:

$$13a^6 = 64 + 12a^6, \text{ или } a = \pm 2.$$

Учитывая, что по условию $a > 0$, имеем $a = 2$. Тогда $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$, и искомые линейные функции имеют вид $2x + 3$ и $2x + 1$.

Метод «от частного к общему» (*)

Среди конкурсных задач иногда встречаются такие (обычно они содержат параметр или несколько неизвестных), для решения которых вначале, исходя из условий задачи, делается вывод, что искомая величина (величины) должна удовлетворять, в частности, некоторому, вообще говоря, более слабому по сравнению с исходными, условию. Затем отбираются все возможные значения искомой величины, удовлетворяющие этому условию. При этом, по-сути, осуществляется переход к следствию. В конце делается обязательная полная проверка исходных условий задачи для всех найденных решений.

Назовём приведённый подход к решению задач «*методом от частного к общему*», поскольку суть метода состоит в том, что вначале отбираются все решения, удовлетворяющие частному условию, а последующая проверка позволяет отсечь все посторонние решения, и, таким образом, определить (общее) решение задачи. Рассмотрим две наиболее часто встречающиеся разновидности задач, решаемых этим методом.

1. Пусть, например, требуется найти все значения a и b, при которых некоторое условие A, зависящее от величин a, b и x, должно выполняться сразу при всех значениях x, принадлежащих заданному бесконечному множеству E (иногда подобные задачи решаются также методом неопределённых коэффициентов).

Поскольку условие $A(a; b; x)$ должно выполняться сразу при всех значениях $x \in E$, то можно подставить вместо x отдельные частные значения $x_1, x_2, \ldots, x_l$ из E (их вид и количество выбирают из соображений целесообразности и удобства). Иногда этого бывает достаточно, чтобы, решив полученную систему условий

$$\begin{cases} A(a;b;x_1) \\ A(a;b;x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A(a;b;x_l), \end{cases} \qquad (1)$$

найти из неё все возможные значения a, b, а затем сделать их проверку. Проверка в данном случае обязательна, поскольку множество E бесконечно, и все значения x подставить невозможно, а подстановка каждого очередного значения x приводит к возникновению ещё одного ограничения на значения a и b. Таким образом, множество первоначально найденных значений $(a;b)$ может впоследствии лишь сужаться, и в конечном итоге таких значений $(a;b)$, которые бы удовлетворяли условию $A(a;b;x)$ при всех $x \in E$, может не оказаться вовсе. Иными словами, полученная система условий (1) является набором необходимых, но не достаточных требований к $(a;b)$ в исходной задаче (т.е. если $(a;b)$ удовлетворяют условиям задачи, то они удовлетворяют и системе (1). Обратное утверждение о том, что если $(a;b)$ удовлетворяют системе (1), то они удовлетворяют условиям задачи, вообще говоря, неверно, и именно это подлежит проверке.)

Пример 1 [Черноморский филиал МГУ–2003]. *Найти такие числа a и b, что при всех x справедливо равенство*

$$(x^2+5x+6)(x+a)=(x^2-9)(x+b).$$

Решение. Разложим квадратичные выражения в обеих частях уравнения на линейные множители:

$$(x+3)(x+2)(x+a) \equiv (x+3)(x-3)(x+b). \qquad (2)$$

Поскольку, по условию, данное равенство должно выполняться сразу при всех действительных значениях x, то, в частности, оно должно выполняться и при $x=3$ и $x=-2$. Подставляя эти значения в равенство, приходим к системе двух линейных уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} 6\cdot 5\cdot(3+a)=0 \\ 0=1\cdot(-5)\cdot(-2+b), \end{cases}$$

решая которую, находим $a=-3$, $b=2$. Для проверки подставим найденную пару $(a;b)$ в равенство (2): $(x+3)(x+2)(x-3) \equiv (x+3)(x-3)(x+2)$ – верно при всех x. *Ответ*: $(a;b)=(-3;2)$.

Пример 2. *Найти все пары* $(a;b)$ *такие, что равенство* $(x+y)^2=b$ *выполняется при всех* x, y, *удовлетворяющих условию* $y/x=a$.

Решение. Заметим, например, что пары чисел $(x;y)$ вида $(1;a)$ и $(2;2a)$ удовлетворяют условию $y/x=a$. Подставим их в равенство $(x+y)^2=b$:

$$\begin{cases}(1+a)^2=b\\(2+2a)^2=b,\end{cases}$$

откуда имеем $(1+a)^2=(2+2a)^2 \Leftrightarrow a=-1$, тогда $b=0$.

Проверкой убеждаемся, что для единственной найденной пары $(a;b)=(-1;0)$ равенство $(x+y)^2=0$ действительно выполняется при всех $(x;y)$ таких, что $y/x=-1$. *Ответ*: $(a;b)=(-1;0)$.

2. Близкими (по методу решения) к задачам рассмотренной выше группы являются некоторые из задач типа: «Найти все значения параметра, при которых уравнение (неравенство, система) имеет единственное решение». Например, в задачах с одной неизвестной x (при условии единственности решения) обнаруживается, что наряду с x число $(-x)$ (или $1/x$ и т.д.) также удовлетворяет условиям задачи, а поэтому они должны совпадать. Отсюда находится, что $x=0$, подставляется в исходное условие, и определяются искомые значения параметров, которые в конце проверяются.

Пример 3. *При каких значениях* a *неравенство*

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-x}\ge\sqrt[4]{24+|a|+2y^2}$$

имеет единственное решение?

Решение. ОДЗ: $x\in[0,\ 3]$. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ функции в левой и в правой частях неравенства соответственно. Во-первых, так как $f(x)=f(3-x)$, то наряду с решением $(x;y)$ пара $(3-x;y)$ также будет решением данного неравенства. Поэтому необходимым условием единственности решения является требование $x=3-x$, т.е. $x=3/2$. Во-вторых, так как $g(-y)=g(y)$, то наряду с решением $(3/2;y)$ неравенство имеет решение $(3/2;-y)$. Поэтому для единственности решения необходимо, чтобы $-y=y$, т.е. $y=0$. Итак, если решение единственно, то это $(3/2;0)$.

Найдём a, для этого подставим $x=3/2$ и $y=0$ в исходное неравенство:

$$\sqrt[4]{24}=2\sqrt[4]{3/2}\geq\sqrt[4]{24+|a|}\geq\sqrt[4]{24}$$, следовательно, $a=0$.

Проверка $a=0$: $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-x}\geq\sqrt[4]{24+2y^2}\ \left(\geq\sqrt[4]{24}\right)$. Найдём наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-x}$:

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt[4]{(3-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[4]{(3-x)^3}}=0\Leftrightarrow x=3/2,$$

причём на отрезке $[0,\ 3/2]$ функция $f(x)$ возрастает, а на отрезке $[3/2\ ,3]$ убывает, достигая в точке $x=3/2$ своего наибольшего значения $f(3/2)=\sqrt[4]{24}$. Значит, $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-x}\leq\sqrt[4]{24}$, и неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-x}=\sqrt[4]{24}\\ \sqrt[4]{24+2y^2}=\sqrt[4]{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3/2\\ y=0\end{cases}$$ – единственное решение. *Ответ*: $a=0$.

Пример 4 [Филолог.–1984]. *Найти все a, при которых система неравенств*

$$\begin{cases}y\geq x^2+2a\\ x\geq y^2+2a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если $(x;y)$ – решение системы, то пара чисел $(y;x)$ также будет решением системы, поэтому необходимым условием единственности решения является требование $x=y$. Подставляя в систему, получим неравенство $x^2-x+2a\leq0$, которое имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow D=1-8a=0\Leftrightarrow a=1/8$. Для проверки найденного значения параметра подставим его в исходную систему и проверим, будет ли она иметь единственное решение:

$$\begin{cases}y\geq x^2+1/4\\ x\geq y^2+1/4.\end{cases}$$

Складывая неравенства системы, получим неравенство

$$x+y\geq x^2+y^2+1/2\Leftrightarrow(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\leq0,$$

которое имеет единственное решение $x=y=1/2$, удовлетворяющее системе.

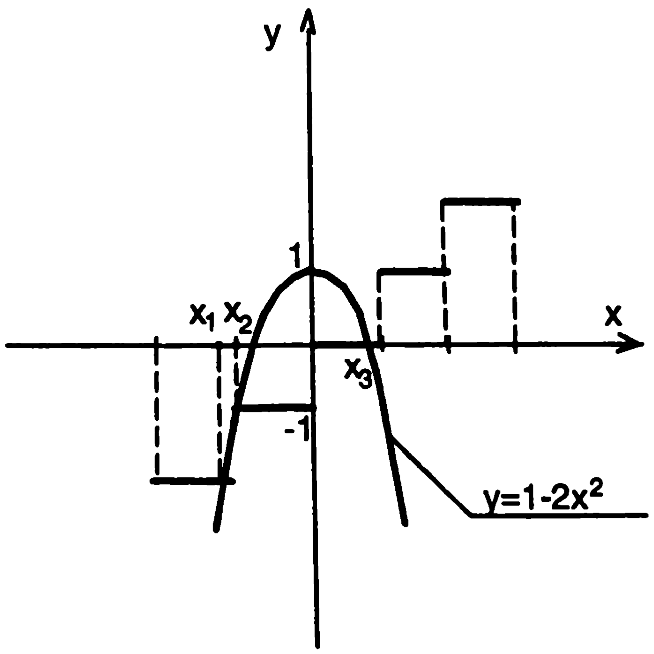
Ответ: $a\in\{1/8\}$.

Графический подход (метод координат)

Основное достоинство графического подхода к решению задачи – это, как уже отмечалось выше, его высокая наглядность, а естественное ограничение в применении этого метода состоит в сложности построения графиков входящих в уравнение или неравенство функций. Часто с помощью графического подхода оценивают количество решений в задаче. Найденные «на глазок» при помощи построения графиков решения подлежат обязательной проверке. Если графически решается уравнение или неравенство с одним неизвестным, то, как правило, в одной системе координат строятся графики функций, расположенных слева и справа от знака равенства (неравенства), и затем с помощью этих графиков ищется решение.

Пример 1. Решить уравнение $x^2+\frac{1}{2}\cdot[x]-\frac{1}{2}=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $[x]=1-2x^2$ и решим его графическим способом. Построим в одной системе координат графики функций $y=[x]$ и $y=1-2x^2$, расположенных в левой и правой частях уравнения. На рисунке правые концы отрезков прямых линий на графике функции $y=[x]$ считаются «выколотыми». Хорошо видно, что графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых удовлетворяют ограничениям: $-2<x_1<-1$, $x_2=-1$, $0<x_3<1$. Один корень ($x_2=-1$) находится сразу, а другие два пока что лишь локализованы, и требуется найти их точные значения.



Чтобы найти корень x_1, отметим, что на интервале $-2<x<-1$, которому принадлежит этот корень, целая часть $[x]=-2$. Подставляя это значение в уравнение, получим $-2=1-2x^2$, ткуда легко теперь находим корень $x_1=-\sqrt{3/2}$. Аналогично на промежутке $0<x<1$, которому принадлежит корень x_3, $[x]=0$. Подставляя в уравнение, получаем $0=1-2x^2$, откуда определяем $x_3=\sqrt{1/2}$. *Ответ*: $x\in\{-1;-\sqrt{3/2};\sqrt{1/2}\}$.

В следующем примере не требуется вводить вспомогательную систему координат – она задана по условию задачи. Это так называемый тип задач «*на построение ГМТ*» (чаще практикуется на устных экзаменах по математике).

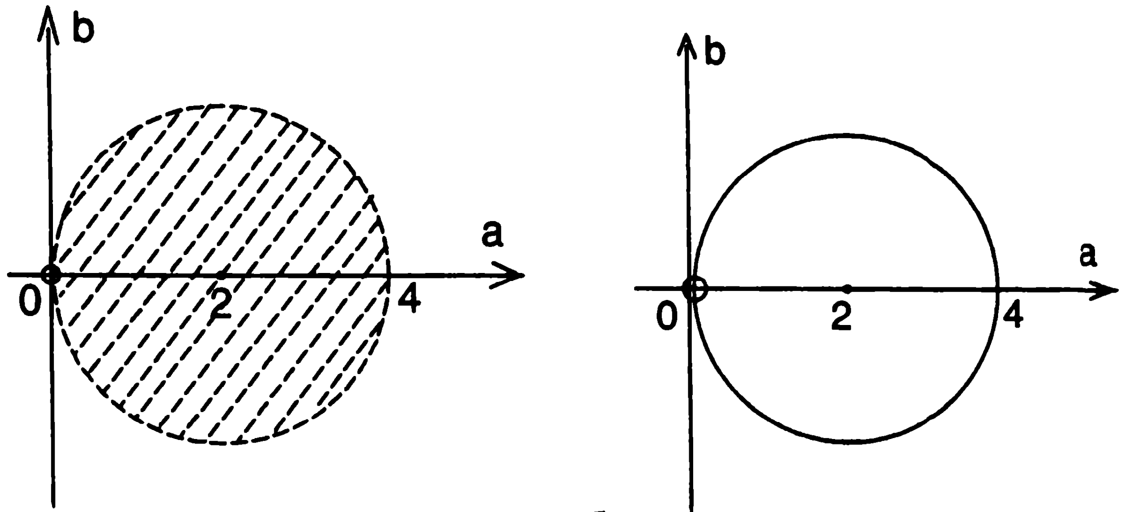
Пример 2 [ВМиК–1998, устн.]. *Построить на плоскости Oab геометрическое место точек $(a;b)$, при которых у уравнения*

$$ax^2 + 2bx - a + 4 = 0:$$

а) нет решений; б) ровно одно решение.

Решение. а) Если $a \neq 0$, то уравнение квадратное, и соответственно оно не имеет решений тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = 4\left(b^2 + (a-2)^2 - 4\right) < 0$. На плоскости Oab это неравенство задаёт открытый круг (граница – окружность – ему не принадлежит) с центром в точке $(2;0)$ и радиусом 2. Если же $a = 0$, то уравнение становится линейным $bx = -2$ и не имеет решений при $b = 0$. На плоскости Oab это даёт точку $(0;0)$ – начало координат. Объединяя открытый круг и точку, получим ГМТ (см. рис. а)).

б) При $a \neq 0$ квадратное уравнение имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда $D = 0$; это уравнение задаёт на плоскости Oab окружность с центром в точке $(2;0)$ и радиусом 2. Учитывая условие $a \neq 0$, выкалываем на этой окружности точку $(0;0)$. Если же $a = 0$, то линейное уравнение $bx = -2$ имеет единственное решение при $b \neq 0$. Это задаёт на плоскости вертикальную прямую, совпадающую с осью ординат. На этой прямой надо выколоть точку $(0;0)$.



а) б)

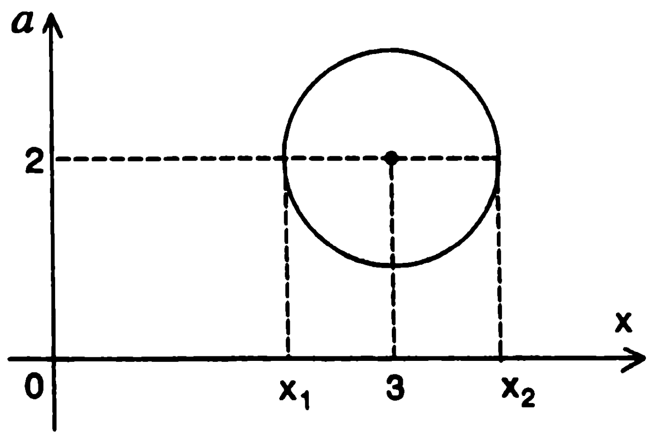
В итоге получаем следующую фигуру, состоящую из объединения указанных окружности и прямой (с выколотой точкой начала координат). Задача решена.

Графический подход часто оказывается удобен и при решении уравнений (неравенств, систем) с двумя неизвестными x, y, а также тогда, когда в задаче имеются неизвестная x и параметр a. В первом случае вводится система координат Oxy с осями, на которых откладываются значения неизвестных x, y. Во втором случае также вводится вспомогательная система координат, но на осях уже откладываются значения неизвестной x и параметра a. В обоих случаях решение видно наглядно в виде некоторого геометрического места точек координатной плоскости.

Пример 3 [Геолог.–1999, устн.]. *При каких значениях параметра a модуль разности корней уравнения $x^2-6x+12+a^2=4a$ принимает наибольшее значение?*

Решение. Решим задачу с помощью метода координат. Вначале, выделяя полные квадраты как по x, так и по a, перепишем уравнение в виде

$$(x-3)^2+(a-2)^2=1.$$



Введём систему координат, в которой на оси абсцисс будем откладывать значения переменной x, а на оси ординат – значения параметра a. В такой системе координат уравнение задаёт окружность единичного радиуса с центром в точке $(3;2)$. По рисунку видно, что, какое бы значение a в пределах от 1 до 3 мы ни зафиксировали, уравнение имеет корни x_1, x_2, расположенные на оси абсцисс. Очевидно, что расстояние между этими корнями максимально и равно диаметру окружности при $a=2$ (соответствует центру окружности).

Пример 4 [РЭА им. Плеханова–2003]. *При каком значении a система неравенств*

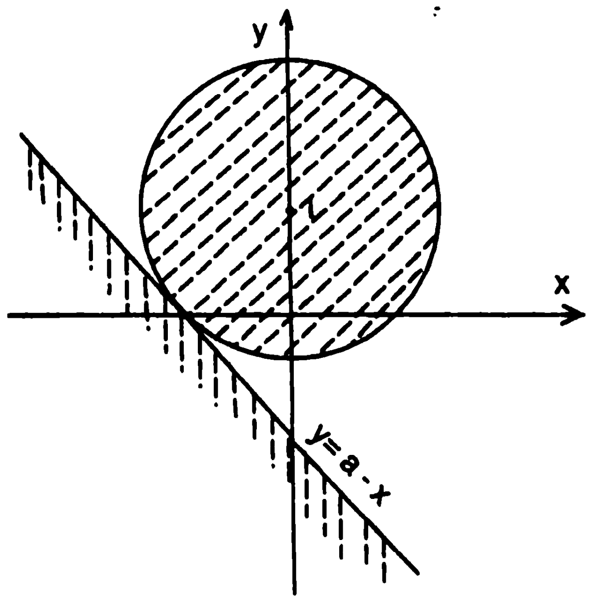
$$\begin{cases} x^2+y^2-2y\le 1 \\ x+y-a\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Приведём систему к виду

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2\le 2 \\ y\le a-x, \end{cases}$$

и рассмотрим графическую интерпретацию неравенств системы на плоскости Oxy. Первое неравенство задаёт на координатной плоскости замкнутый круг с центром в точке $(0;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$. Второе, линейное, неравенство определяет полуплоскость, состоящую из точек плоскости, лежащих не выше прямой $y = a - x$ (граница полуплоскости).



Уравнение $y = a - x$ задаёт семейство параллельных прямых, зависящих от параметра a. Система неравенств имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность

$$x^2 + (y-1)^2 = 2$$

касается прямой $y = a - x$ так, как это изображено на рисунке. В этом случае система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y = a - x \end{cases}$$

должна иметь единственное решение. Подставляя в первое уравнение вместо x выражение $a - y$, приходим к квадратному уравнению

$$(a-y)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2y^2 - 2(a+1)y + a^2 - 1 = 0,$$

которое также должно иметь единственное решение. Это выполняется лишь в случае, когда его дискриминант равен нулю:

$$D = 4(a^2 - 2a - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3. \end{array}\right.$$

При этом значение $a = 3$ не удовлетворяет условиям задачи (круг будет лежать в полуплоскости). *Ответ*: при $a = -1$.

***Пример** 5* [Социолог., Филолог.–2007]. *При каких значениях c уравнение $-\sqrt{16 - x^2} = c + x$ имеет единственное решение?*

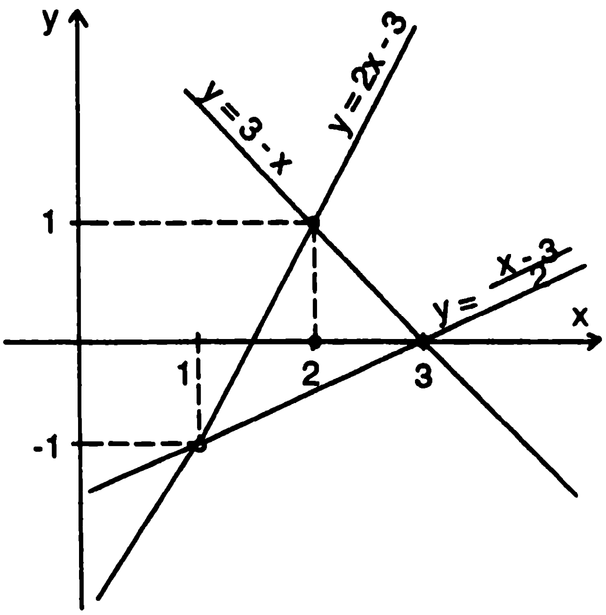
Решение. График функции в левой части уравнения

$$y = -\sqrt{16 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

задаёт нижнюю полуокружность с центром в начале координат и радиусом 4 (сделайте чертёж самостоятельно), а график правой части $y = x + c$ – семейство прямых, пересекающих ось ординат в точке $(0;c)$ под углом 45°. Эти графики имеют ровно одну общую точку $\Leftrightarrow$ прямая $y = x + c$ либо касается снизу полуокружности (в этом случае её уравнение будет $y = x - 4\sqrt{2}$ (докажите), либо лежит между прямыми $y = x - 4$ и $y = x + 4$ (может совпадать с последней). Таким образом, $c = -4\sqrt{2}$ или $-4 < c \le 4$.

В следующем примере графический подход используется для нахождения области допустимых значений неизвестных.

Пример 6 [Химфак–2005]. *Найти все целочисленные пары $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению* $\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y}$.



Решение. Найдём ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 \ge 0 \\ 2y - x + 3 \ge 0 \\ 3 - x - y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 2x - 3 \\ y \ge \dfrac{x-3}{2} \\ y \le 3 - x. \end{cases}$$

Данные три неравенства задают на координатной плоскости Oxy треугольник, внутрь которого попадают только четыре точки с целочисленными координатами:

$$(1;-1), (2;1), (3;0), (2;0).$$

Проверкой оставляем $(2;0)$.

Пример 7 [Олимпиада «Ломоносов–2007»]. *Определить, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого угла с вершиной в точке $(0;0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством*

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

Решение. Обозначим множество, заданное в условии неравенством, через M. Заметим, что прямая $x = 0$ не пересекает множество M, так как неравенство $y^2 + 2y + 4 < 0$ не выполняется ни при каких y.

Выясним, при каких k у прямой $y = kx$ есть общие точки с M, т.е. когда имеет решения система

$$\begin{cases} y = kx \\ 14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0. \end{cases}$$

Подставляя вместо y выражение kx в неравенство системы, получим

$$\left(k^2+k+14\right)x^2+2(k+7)x+4<0.$$

Это квадратное неравенство имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен:

$$D>0 \Leftrightarrow (k+7)^2-4\left(k^2+k+14\right)>0 \Leftrightarrow 3k^2-10k+7<0.$$

Решением последнего неравенства является интервал $1<k<7/3$. При этом в I четверти координатной плоскости нет точек M, так как при $x\geq 0$, $y\geq 0$ левая часть неравенства не может быть отрицательна. Следовательно, множество M расположено в III четверти, и угол, под которым это множество видно из начала координат, равен $arctg\frac{7}{3}-\frac{\pi}{4}$.

Умножение на функцию

Этот приём используют иногда в преобразованиях, например, с целью свести к известной формуле сокращённого умножения или избавиться от иррациональности (домножение на сопряжённое выражение). Важно при этом анализировать, сохранится ли в результате такого домножения множество решений задачи, не допустить потери корней и отследить возникновение посторонних решений.

При решении неравенств обычно приходится следить за равносильностью преобразований неравенства на его ОДЗ, и поэтому можно умножать обе части неравенства на функцию, принимающую на ОДЗ неравенства только значения одного знака, либо разбивать ОДЗ на промежутки, на которых функция знакопостоянна, и делать равносильные преобразования на этих промежутках.

Пример 1. *Решить уравнение* $x^4-x^3+x^2-x+1=0$.

Решение. Умножим обе части уравнения на $x+1$:

$$(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)=0 \Leftrightarrow x^5+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Заметим, что при умножении уравнения на $x+1$ был приобретён посторонний корень $x=-1$ (это показывает проверка, которую сделать необходимо).

Ответ: уравнение не имеет решений.

Пример 2. *Решить уравнение* $6x^2-x-20+\dfrac{12}{x}=0$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$. Умножим обе части данного уравнения на выражение $x(x+(1/2))$. Получаем уравнение-следствие:

$$6x^4+2x^3-\tfrac{41}{2}x^2+2x+6=0 \Leftrightarrow 12x^4+4x^3-41x^2+4x+12=0.$$

Данное уравнение является симметрическим уравнением 4-й степени. Решим его. Для этого разделим обе части уравнения на x^2:

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$$

и сделаем замену $y=x+\dfrac{1}{x}$: $12y^2+4y-65=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-5/2 \\ y=13/6. \end{array}\right.$

Тогда имеем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+(1/x)=-5/2 \\ x+(1/x)=13/6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2;\ x=-1/2; \\ x=2/3;\ x=3/2. \end{array}\right.$$

Легко проверить, что $x=-1/2$ не удовлетворяет исходному уравнению, это посторонний корень. *Ответ*: $x\in\{-2;2/3;3/2\}$.

Рассмотрим некоторые из *нестандартных методов*, применяемых для решения математических задач. Именно знание этих методов и умение воспользоваться ими в подходящей ситуации отличает хорошо подготовленного абитуриента от абитуриента со стандартным базовым набором знаний классических и хорошо известных приёмов. Многие из методов, рассмотренных ниже, основаны на таких свойствах функций, как ограниченность, монотонность, обратимость [7,15,23,30,31,32].

Уравнения вида $f(x)=g(x)$, где $f(x)\le A$, а $g(x)\ge A$, и другие задачи этого типа. Метод оценок

Уравнения вида

$$f(x)=g(x),$$

где функции, расположенные в левой и правой частях, удовлетворяют оценкам $f(x)\le A$, а $g(x)\ge A$ (A – фиксированное число), равносильны на ОДЗ системе

$$\begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A. \end{cases}$$

Здесь существенно используется ограниченность на ОДЗ функций $f(x)$ и $g(x)$. Так как при использовании этого метода приходится независимо друг от друга оценивать возможные значения левой и правой частей уравнения, то метод иногда называют *методом оценок*.

Существуют и другие разновидности этого метода, например, если при решении уравнения

$$f(x) = A,$$

где A – некоторая заданная константа, оказывается, что наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$, стоящей в левой части данного уравнения и рассмотренной на ОДЗ уравнения, совпадает с A, то решениями уравнения будут как раз те значения неизвестной $x \in$ ОДЗ, при которых $f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения, и надо лишь отследить все те значения x, при которых неравенство $f(x) \le A$ (соответственно $f(x) \ge A$) обращается в равенство.

В другой ситуации требуется решить неравенство вида

$$f(x) \le g(x),$$

и при анализе и независимом оценивании значений функций $f(x)$, $g(x)$ на ОДЗ задачи оказалось, что эти функции удовлетворяют оценкам в виде неравенств:

$$f(x) \ge A \text{ и } g(x) \le A.$$

Тогда имеем тройное неравенство $A \le f(x) \le g(x) \le A$, необходимым и достаточным условием выполнения которого является одновременное обращение всех трёх неравенств в равенства. Таким образом, исходное неравенство сводится к равносильной ему на ОДЗ системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Пример 1 [Химфак–2001]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}.$$

Решение. Воспользуемся для решения задачи *методом оценок*. Вначале выделим полные квадраты под знаками радикалов в левой части уравнения:

$$\sqrt{4 - (x-2)^2} + \sqrt{1 - (x-2)^2} = 3 + \sqrt{2x - x^2}.$$

Теперь хорошо видно, что $\sqrt{4 - (x-2)^2} \le \sqrt{4} = 2$, $\sqrt{1 - (x-2)^2} \le 1$. Из этих оценок следует, что левая часть уравнения принимает на ОДЗ значения, меньшие либо равные 3, в то время как правая часть уравнения больше либо равна 3. Это означает, что решаемое уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4 - (x-2)^2} + \sqrt{1 - (x-2)^2} = 3 \\ 3 + \sqrt{2x - x^2} = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{2\}$.

Пример 2. *Решить уравнение* $4x^2+4x+17=\dfrac{12}{x^2-x+1}$.

Решение. Перепишем это уравнение в виде

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{3}{(x-(1/2))^2+3/4}. \qquad (1)$$

Очевидно, что для любых действительных x имеем оценки:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\geq 4 \quad \text{и} \quad \frac{3}{(x-(1/2))^2+3/4}\leq 4.$$

Следовательно, уравнение (1) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}(x+1/2)^2+4=4\\ (x-1/2)^2+3/4=3/4.\end{cases}$$

Эта система уравнений не имеет решений, поэтому исходное уравнение также не имеет решений.

Пример 3 [ВМиК–1997, устн.]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{1+\frac{16}{x^2}}=\sqrt{9-2x}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}x(x-2)\geq 0\\ 9-2x\geq 0;\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup[2,\ 9/2]$.

Возведём на ОДЗ обе части уравнения в квадрат и после упрощения получим:

$$x^2+(16/x^2)+2\sqrt{x(x-2)(1+(16/x^2))}=8.$$

Применяя неравенство $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ $(a\geq 0, b\geq 0)$, полагая в нём $a=x^2$, $b=\frac{16}{x^2}$, получим, что $x^2+\frac{16}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}}=8$. Поскольку, кроме того, $2\cdot\sqrt{x(x-2)(1+(16/x^2))}\geq 0$, то левая часть неравенства принимает на ОДЗ значения большие либо равные 8, а правая часть уравнения при этом равна 8. Отсюда следует, что уравнение выполняется тогда и только тогда, когда левая часть достигает своего наименьшего значения, равного 8, т.е. уравнение равносильно системе двух уравнений $\begin{cases}x^2+(16/x^2)=8\\ \sqrt{x(x-2)(1+(16/x^2))}=0,\end{cases}$ решая которую, находим решение $x=2$.

Пример 4. ***Решить неравенство***

$$x^2+\frac{16}{x^2}+2\sqrt{x(x-2)\left(1+\frac{16}{x^2}\right)}\le\sqrt{64-(x-2)^6}.$$

Решение. Решая предыдущую задачу, мы показали, что левая часть в данном неравенстве принимает на ОДЗ значения большие либо равные 8. Заметим, что правая часть неравенства принимает на ОДЗ значения меньшие либо равные 8. Таким образом, данное неравенство может выполняться тогда и только тогда, когда справедлива система условий

$$\begin{cases}x^2+\left(16/x^2\right)+2\cdot\sqrt{x(x-2)\left(1+\left(16/x^2\right)\right)}=8\\ \sqrt{64-(x-2)^6}=8\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

К группе задач, решаемых методом оценок, можно отнести решение ***уравнений вида***

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(x)=0,\text{ где } f_i(x)\ge 0\ \ (i=1,2,\ldots,n).$$

Такое уравнение сводится к решению равносильной ему системы

$$\begin{cases}f_1(x)=0\\ f_2(x)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)=0.\end{cases}$$

Пример 5. ***Найти действительные корни уравнения***

$$\left(2x^2-5x+3\right)^8+\left|2x^2+x-6\right|\cdot\left(2x^2-5x+3\right)^2+\left(2x^2+x-6\right)^6=0.$$

Решение. Данное уравнение как раз относится к указанному типу. Сумма трёх неотрицательных слагаемых может обращаться в нуль тогда и только тогда, когда все они одновременно обращаются в нуль, т.е. уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}2x^2-5x+3=0\\ 2x^2+x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1{,}5.$$

Рассмотрим ещё несколько примеров, когда использование различных алгебраических неравенств позволяет получать необходимые оценки, с помощью которых затем находится решение.

Пример 6 [ВМиК–2000, устн.]. *Решить уравнение*

$$2^{x^6}+2^{x^2}=2^{x^4+1}.$$

Решение. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим $(a,b\geq 0)$: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow$ $a=b$). Положим в нём $a=2^{x^6}$, $b=2^{x^2}$. Получаем первую оценку:

$$2^{x^6}+2^{x^2}\geq 2\cdot\sqrt{2^{x^6}\cdot 2^{x^2}}=2^{1+\frac{x^6+x^2}{2}}. \qquad (1)$$

Далее, ещё раз воспользуемся неравенством, положив на этот раз $a=x^6$, $b=x^2$. Тогда получим вторую оценку

$$\frac{x^6+x^2}{2}\geq\sqrt{x^6\cdot x^2}=x^4. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим неравенство

$$2^{1+\frac{x^6+x^2}{2}}\geq 2^{1+x^4}. \qquad (3)$$

Из неравенств (1) и (3) по свойству транзитивности заключаем, что

$$2^{x^6}+2^{x^2}\geq 2^{x^4+1}.$$

Чтобы это неравенство обращалось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы оба неравенства (1) и (2) одновременно обращались в равенства, т.е. чтобы

$$x^6=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1.\end{array}\right.\quad \textit{Ответ}:\ x\in\{-1;0;1\}.$$

Пример 7. Решить уравнение $x\cdot\sqrt{2x-x^2+3}=x^2+1$.

Решение. Так как $x=0$, очевидно, не является корнем уравнения (более того, так как правая часть больше нуля, то и левая часть больше нуля, а значит $x>0$), то поделим на x обе части уравнения:

$$\sqrt{4-(x-1)^2}=x+\tfrac{1}{x}.$$

Левая часть уравнения меньше либо равна 2, а правая – больше либо равна 2 (здесь мы применили известное алгебраическое неравенство о сумме двух положительных взаимно обратных чисел), следовательно, равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}\sqrt{4-(x-1)^2}=2\\x+(1/x)=2.\end{cases}\quad \textit{Ответ}:\ x\in\{1\}.$$

Пример 8 [ВМиК–2000, устн.]. *Решить систему*

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1 \\ x+y+z\le 1/3. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся для решения задачи вспомогательным алгебраическим неравенством

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\sqrt{z}-\frac{1}{3}\right)^2\ge 0, \qquad (1)$$

или

$$x+y+z-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+\frac{1}{3}\ge 0. \qquad (1^*)$$

Поскольку в силу первого уравнения системы $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$, то из (1^*) получаем оценку $x+y+z\ge 1/3$. С другой стороны, в силу 2-го неравенства системы $x+y+z\le 1/3$. Следовательно, $x+y+z=1/3$. Но это возможно тогда и только тогда, когда неравенство (1) обращается в равенство, т.е. $\sqrt{x}=\sqrt{y}=\sqrt{z}=1/3$, а значит, $x=y=z=1/9$.

Ответ: $(x;y;z)\in\{(1/9;1/9;1/9)\}$.

Пример 9 [ВМиК–2000, устн.]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2.$$

Решение. Воспользуемся неравенством $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ $(a,b\ge 0)$:

На ОДЗ имеем: $\sqrt{(x^2+x-1)\cdot 1}\le\frac{(x^2+x-1)+1}{2}=\frac{x^2+x}{2}$,

$$\sqrt{(x-x^2+1)\cdot 1}\le\frac{(x-x^2+1)+1}{2}=\frac{x-x^2+2}{2}.$$

Складывая почленно эти неравенства, получим неравенство-следствие

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\le x+1.$$

Заменим в силу исходного уравнения сумму радикалов на x^2-x+2:

$$x^2-x+2\le x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2\le 0.$$

Проверкой убеждаемся, что $x=1$ удовлетворяет исходному уравнению.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=2\,.$$

Решение. Согласно неравенству Бернулли $(1+x)^r \le 1+rx$, при $x>-1$, $0<r<1$ имеем

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}} \le 1+\frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}\,, \tag{1}$$

$$\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} \le 1-\frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}\,. \tag{2}$$

Складывая неравенства почленно, получим оценку

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} \le 2\,.$$

Заметим, что последнее неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда неравенства (1) и (2) одновременно обращаются в равенство, т.е. при условии $\sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. *Ответ*: $x\in\{\pm 1\}$.

Пример 11. Решить уравнение

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}\,.$$

Решение. ОДЗ: $x\ge 1$. *<u>1-й способ</u>*. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского: для любых действительных a_i, b_i, $i=1,2$, имеем

$$a_1b_1+a_2b_2 \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\,,$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда или все числа a_i одновременно равны нулю (или все b_i одновременно равны нулю), или существует такое $k\ne 0$, что $a_i=b_ik$, $i=1,2$.

Положим $a_1=2$, $a_2=x$, $b_1=\sqrt{x-1}$, $b_2=5$, тогда неравенство Коши-Буняковского примет вид

$$2\sqrt{x-1}+5x \le \sqrt{(x^2+4)(x+24)}\,.$$

По условию неравенство обращается в равенство. В данной задаче это возможно, только если $\sqrt{x-1}/2=5/x \Leftrightarrow x=5$.

<u>2-й способ</u>. Рассмотрим два ненулевых вектора $\vec a=\{a_1;a_2\}$, $\vec b=\{b_1;b_2\}$. По определению скалярного произведения имеем

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos(\vec a,\vec b)\,.$$

Используя оценку $\cos(\vec{a},\vec{b}) \le 1$, получим векторный аналог неравенства Коши–Буняковского: $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|$, или, переходя к координатам векторов,

$$a_1b_1 + a_2b_2 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Заметим, что данное неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, т.е. когда их соответствующие координаты одновременно равны нулю или имеют один знак и пропорциональны.

Положим $\vec{a} = \{2; x\}$, $\vec{b} = \{\sqrt{x-1}; 5\}$. По условию неравенство обращается в равенство, а это возможно $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x-1}}{2} = \dfrac{5}{x}$.

<u>*3-й способ*</u>. Уравнение можно было решить возведением на ОДЗ в квадрат, при этом получается уравнение

$$x^2(x-1) - 20x\sqrt{x-1} + 100 = 0,$$

которое заменой $t = x\sqrt{x-1}$ сводится к квадратному. *Ответ*: $x \in \{5\}$.

Уравнения и неравенства вида $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют разную монотонность (*)

Уравнения вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ являются функциями разной монотонности (т.е. одна из них на ОДЗ возрастает, а другая, напротив, убывает), имеют не более одного решения. Если корень удаётся найти (подобрать), то это будет единственное решение. Отметим, что если вы используете данный метод для решения задачи, следует привести всю логическую цепочку обоснований (см. примеры ниже), включая обоснование монотонности функций (по определению или с помощью производной).

При этом если $f(x)$ – возрастает, $g(x)$ – убывает, а x_0 – корень уравнения, то $f(x) < g(x)$ при $x \in (-\infty, x_0) \cap D$, где $D = D(f) \cap D(g)$ и $f(x) > g(x)$ при $x \in (x_0, +\infty) \cap D$, т.е. данный подход можно применять и для решения соответствующих неравенств.

Метод применим и в том случае, когда в одной части уравнения стоит строго монотонная функция, а в другой – постоянная функция.

Пример 1 [Моск. гос. академия химического машиностроения–1997].

Решить уравнение $\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{5+x} = 2$.

Решение. Очевидно, что $x=3$ является решением. Покажем, что других корней нет. В самом деле, в левой части уравнения находится сумма двух монотонно возрастающих на ОДЗ уравнения функций

$$y=\sqrt{x-3} \text{ и } y=\sqrt[3]{5+x}.$$

Докажем, например, что функция $y=\sqrt{x-3}$ возрастает при $x\ge 3$. По определению, функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на множестве X, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого множества таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. Зафиксируем любые два значения x_1 и x_2 из промежутка $[3,+\infty)$ такие, что $x_1<x_2$. Так как неравенство $\sqrt{x_1-3}<\sqrt{x_2-3}$ верно для таких x_1 и x_2, то монотонное возрастание первой из функций доказано. Аналогично доказывается возрастание второй функции $y=\sqrt[3]{5+x}$.

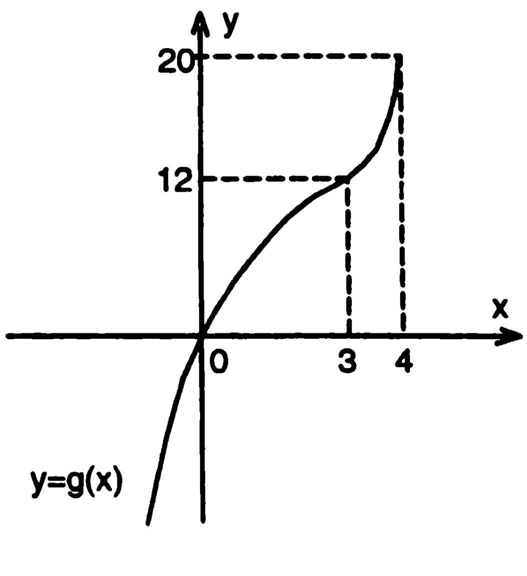
Итак, в левой части уравнения находится возрастающая функция (как сумма двух возрастающих функций). В правой части уравнения стоит постоянная функция $y\equiv 2$. Графики таких функций пересекаются не более чем в одной точке. Следовательно, уравнение имеет не более одного решения. Так как одно решение выше было найдено ($x=3$), то других решений нет.

Пример 2 [Олимпиада «Ломоносов–2006»]. *Решить неравенство*

$$\sqrt{4-x}-2\le x|x-3|+4x.$$

Решение. Заметим, что функция $f(x)=\sqrt{4-x}-2$, расположенная в левой части неравенства, монотонно убывает при $x\le 4$.

Действительно, возьмём произвольные числа $x_1,x_2\le 4$ такие, что $x_1<x_2$, и покажем, что $f(x_1)>f(x_2)$. В самом деле,



$$\sqrt{4-x_1}-2>\sqrt{4-x_2}-2 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{4-x_1}>\sqrt{4-x_2} \Leftrightarrow x_2>x_1,$$

что верно. Так как для функции $f(x)$ на луче $x\le 4$ выполняется определение монотонно убывающей функции, то убывание $f(x)$ доказано.

Заметим, далее, что функция в правой части неравенства

$$g(x)=x|x-3|+4x=$$

$$= \begin{cases} 7x - x^2, & x \le 3, \\ x^2 + x, & 3 \le x \le 4, \end{cases}$$

наоборот, возрастает при $x \le 4$ как функция, возрастающая на каждом из двух смежных промежутков $(-\infty, 3]$ и $[3,4]$ (см. рис.). Графики таких функций $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются не более чем в одной точке. Учитывая, что $f(0) = g(0)$, получаем, что решением неравенства $f(x) \le g(x)$ будет отрезок $0 \le x \le 4$.

В частности, ***неравенства вида*** $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ – возрастающая функция, а x_0 – её единственный нуль, имеют своим решением промежуток $(x_0, +\infty) \cap D(f)$ (соответственно промежуток $(-\infty, x_0) \cap D(f)$), где $D(f)$ – область определения функции. Аналогично, если $f(x)$ – убывающая функция, то решением неравенства $f(x) > 0$ будет $(-\infty, x_0) \cap D(f)$, а решением неравенства $f(x) < 0$ – промежуток $(x_0, +\infty) \cap D(f)$.

Пример 3. Решить неравенство $2x^9 - x^5 + x > 2$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $2x^9 - x^5 + x - 2 > 0$, и обозначим $f(x) = 2x^9 - x^5 + x - 2$. Требуется определить, при каких значениях переменной x данная функция принимает положительные значения. Покажем, что функция возрастает на всей числовой прямой. Действительно, найдём её производную $f'(x) = 18x^8 - 5x^4 + 1$. Так как дискриминант квадратного трёхчлена $18t^2 - 5t + 1$ отрицателен, то $f'(x) > 0$ при всех x, т.е. функция монотонно возрастает. Но если функция непрерывна и монотонно возрастает на всей числовой прямой, то её график пересекает ось Ox в единственной точке. Заметим, что $f(1) = 0$. Осталось с учётом положительности значений функции выписать ответ. *Ответ*: $x \in (1, +\infty)$.

Уравнения и неравенства вида $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$, $\varphi(f(x)) < \varphi(g(x))$, где $\varphi(x)$ – строго монотонная функция.

Применение к уравнению (неравенству) монотонной функции (*)

1. Если $\varphi(t)$ – строго монотонная функция, то уравнение вида

$$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$$

равносильно на ОДЗ уравнению

$$f(x)=g(x).$$

Простая же замена уравнения $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$ приводит, вообще говоря, к следствию (так как снимаются требования, что значения функций $f(x)$ и $g(x)$ должны принадлежать области определения $\varphi(t)$).

Аналогично, если к обеим частям уравнения $f(x)=g(x)$ применить функцию $\varphi(y)$, определённую и строго монотонную на $E(f)\cap E(g)$, то полученное уравнение $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ будет (на ОДЗ исходного уравнения!) эквивалентно ему, т.е.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \varphi(f(x))=\varphi(g(x)).$$

Пример 1 [Мехмат–2001]. ***Решить уравнение***

$$3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$$

Решение. Введём в рассмотрение функцию

$$f(t)=3t-2|t-2|=\begin{cases} t+4, & \text{если} \quad t\ge 2 \\ 5t-4, & \text{если} \quad t\le 2. \end{cases}$$

Функция $f(t)$ возрастает на каждом из лучей $(-\infty,2]$ и $[2,+\infty)$, а поэтому возрастает на всей числовой прямой. Используя обозначение функции, уравнение можно переписать в виде

$$f(x)=f\left(\sqrt{3x+18}\right).$$

В силу строгой монотонности функции $f(t)$, данное уравнение равносильно уравнению

$$x=\sqrt{3x+18},$$

решая которое находим $x=6$. *Ответ*: $x\in\{6\}$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2^x=y+2^y \\ x^2+xy+y^2=12. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение в системе имеет вид $f(x)=f(y)$, где $f(t)=t+2^t$ монотонно возрастает при всех $t\in R$ и, следовательно, принимает каждое своё значение один раз. Откуда получаем $x=y$.

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 12, \end{cases}$$

решая которую находим все решения задачи: $(x;\, y) \in \{(2;2);(-2;-2)\}$.

2. Если φ – монотонно возрастающая (убывающая) функция, то неравенство

$$\varphi(f(x)) < \varphi(g(x))$$

равносильно (на ОДЗ!) неравенству $f(x) < g(x)$ (соответственно неравенству $f(x) > g(x)$).

В то же время, замена, например, неравенства $\varphi(f(x)) < \varphi(g(x))$ неравенством $f(x) < g(x)$ приводит, вообще говоря, к следствию (так как снимаются требования, что значения функций $f(x)$ и $g(x)$ должны принадлежать области определения функции φ).

Аналогично, если к обеим частям неравенства $f(x) < g(x)$ (знак в неравенстве может быть любым) применить функцию φ, определённую и монотонно возрастающую (убывающую) на множестве $E(f) \cap E(g)$, то полученное неравенство $\varphi(f(x)) < \varphi(g(x))$ (соответственно $\varphi(f(x)) > \varphi(g(x))$) будет эквивалентно исходному на его ОДЗ.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$3x - 2|x-2| \geq 3\sqrt{3x+18} - 2\left|\sqrt{3x+18} - 2\right|.$$

Решение. Введём функцию

$$f(t) = 3t - 2|t-2| = \begin{cases} t+4, & \text{если} \quad t \geq 2, \\ 5t-4, & \text{если} \quad t \leq 2. \end{cases}$$

Функция $f(t)$ определена и монотонно возрастает на каждом из лучей $(-\infty, 2]$ и $[2, +\infty)$, а поэтому возрастает на всей числовой прямой. Используя обозначение данной функции, перепишем исходное неравенство в виде

$$f(x) \geq f\left(\sqrt{3x+18}\right).$$

В силу строгого возрастания функции $f(t)$ данное неравенство равносильно неравенству $x \geq \sqrt{3x+18} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,\ 3x+18 \geq 0 \\ x^2 \geq 3x+18 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 6$.

Пример 4 [МГУЛ–1994]. *Решить неравенство* $\arcsin 2x > -\pi/6$.

Решение. ОДЗ: $-1 \le 2x \le 1$. Заметим, что обе части неравенства принимают значения в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а на промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$ функция $f(t) = \sin t$ монотонно возрастает. Поэтому, применяя к обеим частям неравенства операцию взятия синуса и сохраняя знак неравенства, получим новое неравенство, равносильное на ОДЗ исходному:

$$\sin(\arcsin 2x) > \sin(-\pi/6).$$

Упрощая, получим $2x > -1/2$, т.е. $x > -1/4$. С учётом ОДЗ приходим к окончательному ответу. *Ответ*: $x \in (-1/4, 1/2]$.

Пример 5 [Олимпиада «Ломоносов–2006», 2]. *Что больше:* $tg\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ *или меньший корень квадратного трёхчлена* $11x^2 - 17x - 13$ *?*

Решение. Упростим $tg\left(\frac{11\pi}{6}\right) = tg\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Пусть x_1 и x_2 – соответственно меньший и больший корни квадратного трёхчлена $f(x) = 11x^2 - 17x - 13$. Если решать эту задачу напрямую, то надо найти меньший корень x_1 (он равен $\left(17 - \sqrt{861}\right)/22$) и затем сравнить его с числом $-1/\sqrt{3}$. Но при этом возникают существенные вычислительные трудности (а пользоваться калькулятором на экзамене запрещено). Поэтому решим задачу иначе. Это можно сделать даже не находя в явном виде корня x_1. Итак, убедившись в положительности дискриминанта, что гарантирует наличие двух различных действительных корней, найдём по теореме Виета, что $x_1 x_2 = -13/11 < 0$. Следовательно, корни имеют разные знаки. Это означает, что меньший корень x_1 – отрицательный. Заметим, что вершина параболы $f(x)$ имеет абсциссу $x_в = 17/22 > 0$, а старший коэффициент положителен. Тогда при $x < x_в$ и, в частности, при $x < 0$ функция $f(x)$ монотонно убывает, а значит, большему значению аргумента отвечает меньшее значение функции. Поэтому задачу сравнения чисел x_1 и $-1/\sqrt{3}$ можно свести к равносильной, но более простой задаче сравнения чисел $f\left(-1/\sqrt{3}\right)$ и $f(x_1)$. Поскольку $f\left(-1/\sqrt{3}\right) = \left(17\sqrt{3} - 28\right)/3 > 0 = f(x_1)$, то $x_1 > tg(11\pi/6)$.

Ответ: второе число больше.

Уравнения и неравенства вида

$$\underbrace{f(f(f(...f(x))))}_{n}=x,\ \underbrace{f(f(f(...f(x))))}_{n}>x,\ \textit{где}\ n\geq 2,\ n\in N.^{(*)}$$

1. Пусть $f(x)$ – функция, не совпадающая со своей обратной, и $E(f)\subseteq D(f)$. Тогда если уравнение $f(x)=x$ имеет на $D(f)$ корни, то все они будут корнями уравнения $f(f(x))=x$, т.е. имеем переход к следствию:

$$f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=x.$$

Аналогично

$$f(x)=x \Rightarrow \underbrace{f(f(f(...f(x))))}_{n}=x.$$

Если при этом $f(x)$ – монотонно возрастающая на $D(f)$ функция, то уравнение

$$f(f(x))=x$$

равносильно на $D(f)$ уравнению

$$f(x)=x.$$

Докажем последнее утверждение.

Необходимость. Пусть некоторое число x_0 удовлетворяет уравнению $f(f(x))=x$. Покажем, что тогда это x_0 будет корнем уравнения $f(x)=x$. Предположим противное, т.е. $f(x_0)\neq x_0$. Возможны два случая: $f(x_0)>x_0$ и $f(x_0)<x_0$.

В первом случае, применяя к неравенству $f(x_0)>x_0$ монотонно возрастающую функцию f, получим $f(f(x_0))>f(x_0)$, но так как $f(x_0)>x_0$, то, согласно свойству транзитивности неравенств, имеем $f(f(x_0))>x_0$, что противоречит условию $f(f(x_0))=x_0$. Во втором случае, применяя к неравенству $f(x_0)<x_0$ монотонно возрастающую функцию f, получим $f(f(x_0))<$ $<f(x_0)$. Поскольку $f(x_0)<x_0$, то согласно свойству транзитивности неравенств имеем $f(f(x_0))<x_0$, что также противоречит условию $f(f(x_0))=$ $=x_0$. Следовательно, предположение было неверным и $f(x_0)=x_0$.

Достаточность. Пусть, наоборот, некоторое число x_0 удовлетворяет уравнению $f(x)=x$. Покажем, что тогда оно будет решением уравнения $f(f(x))=x$. В самом деле, если $f(x_0)=x_0$, то $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$.

Аналогично можно доказать, что если $f(x)$ – возрастающая на $D(f)$ функция и $E(f)\subseteq D(f)$, то уравнение

$$\underbrace{f(f(f(\ldots f(x))))}_{n}=x,$$

где $n\geq 2,\ n\in N$, равносильно на $D(f)$ уравнению $f(x)=x$.

***Пример 1**. Решить уравнение*

$$\left(x^2+2x-5\right)^2+2\left(x^2+2x-5\right)-5=x.$$

Решение. Введём в рассмотрение функцию $f(x)=x^2+2x-5$. Тогда уравнение принимает вид $f(f(x))=x$. Очевидно, что если x_0 – корень уравнения $f(x)=x$, то x_0 также будет корнем уравнения $f(f(x))=x$. Решим уравнение

$$f(x)=x \Leftrightarrow x^2+2x-5=x \Leftrightarrow x_{1,2}=\left(-1\pm\sqrt{21}\right)/2.$$

Осталось найти другие корни. Раскрыв скобки, перепишем исходное уравнение в виде

$$x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0.$$

Поделим многочлен в левой части на многочлен $(x-x_1)(x-x_2)=$ $=x^2+x-5$, получив разложение на множители:

$$\left(x^2+x-5\right)\left(x^2+3x-2\right)=0.$$

Решая уравнение $x^2+3x-2=0$, находим ещё два корня $x_{3,4}=\left(-3\pm\sqrt{17}\right)/2$. *Ответ*: $x\in\left\{\left(-1\pm\sqrt{21}\right)/2;\left(-3\pm\sqrt{17}\right)/2\right\}$.

Замечание. Уравнение можно было решить, вводя новую переменную $y=x^2+2x-5$. Таким образом, уравнение сводится к системе двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y^2+2y-5=x \\ x^2+2x-5=y. \end{cases}$$

Пример 2. *Решить уравнение* $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}=x$.

Решение. Введём в рассмотрение функцию $f(x)=\sqrt{1+x}$, монотонно возрастающую на всей области определения. Следовательно, исходное уравнение, имеющее вид $f(f(f(x)))=x$, равносильно более простому уравнению $f(x)=x$, т.е.

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}=x \Leftrightarrow \sqrt{1+x}=x.$$

Решая последнее уравнение, находим:

$$\sqrt{1+x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 1+x=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \text{ *Ответ*: } x\in\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

2. Если $f(x)$ – монотонно возрастающая на $D(f)$ функция, причём $E(f)\subseteq D(f)$, то неравенство $f(f(x))>x$ равносильно на $D(f)$ неравенству $f(x)>x$. Более того, при этих условиях неравенство

$$\underbrace{f(f(f(\ldots f(x))))}_{n}>x\ (n\ge 2, n\in N)$$

также равносильно на $D(f)$ неравенству $f(x)>x$.

Пример 3 [Эконом.–1983]. *Для каждого неотрицательного значения* a *решить неравенство*

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\ge 0.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$a(a^2x^4+6ax^2+9)+3\ge x \Leftrightarrow a(ax^2+3)^2+3\ge x.$$

Введём в рассмотрение функцию $f(t)=at^2+3$, тогда неравенство примет вид $f(f(x))>x$.

Если $a=0$, то $x\le 3$. Если $a>0$, то $f(t)\ge 3$ при всех $t\in R$, поэтому все числа $x\le 0$ удовлетворяют неравенству. Остается рассмотреть промежуток $x>0$, где функция $f(x)$ монотонно возрастает. Согласно теории имеем:

$$\begin{cases} f(f(x))\ge x \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge x \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2-x+3\ge 0 \\ x>0, a>0. \end{cases}$$

1) Если дискриминант квадратного трёхчлена $D=1-12a\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\ge \frac{1}{12}$, то решением последней системы будет любое $x>0$.

2) Если $D=1-12a>0 \Leftrightarrow 0<a<1/12$, то решением системы является множество $x\in\left(0,\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a},+\infty\right)$.

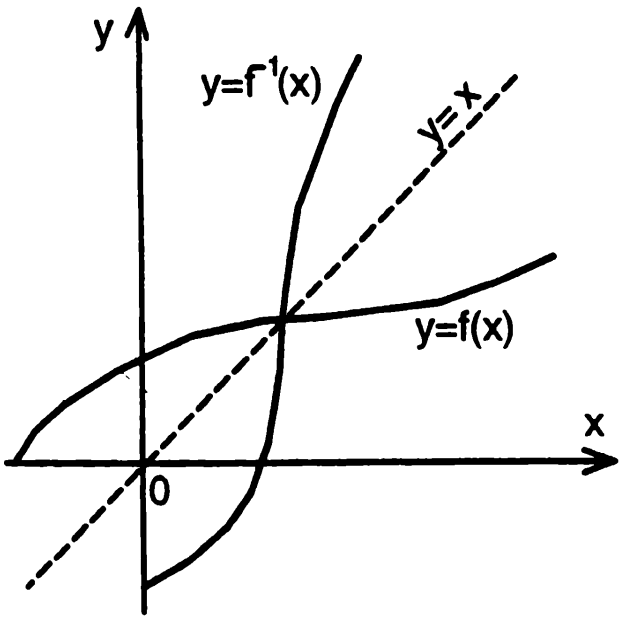
Ответ: при $a=0$ $x\in(-\infty,3]$; при $a\ge 1/12$ $x\in R$:

при $0<a<\frac{1}{12}$ $x\in\left(0,\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a},+\infty\right)$.

Уравнения вида $f(x)=f^{-1}(x)$,
где $f(x)$, $f^{-1}(x)$ – взаимно обратные возрастающие функции (*)

Теорема. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая функция, $f^{-1}(x)$ – её обратная функция. Тогда уравнение $f(x)=f^{-1}(x)$ равносильно на ОДЗ уравнению $f(x)=x$ (или $f^{-1}(x)=x$).

Доказательство. Действительно, графики взаимно обратных функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y=x$ (см. рис.).



В случае возрастания функции $f(x)$ все точки пересечения этих графиков (при условии, что они существуют) лежат на этой прямой. Поэтому уравнение

$$f(x)=f^{-1}(x)$$

равносильно на ОДЗ каждому из уравнений

$$f(x)=x \text{ или } f^{-1}(x)=x.$$

Заметим, что решение любого из последних уравнений может оказаться намного проще решения исходного.

Следствие. Если, кроме того, $E(f)\subseteq D(f)$, то на множестве $E(f)$ следующие уравнения являются равносильными:

$$f(f(x))=x \quad \Leftrightarrow f(x)=f^{-1}(x).$$

Для доказательства последнего утверждения достаточно применить к обеим частям второго из уравнений функцию f (применение к уравнению строго монотонной функции приводит к равносильному уравнению), и учесть, что

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x.$$

Пример [ВМиК–2004, устн.]. *Решить уравнение*

$$\sqrt[3]{3x+9}=27(x+1)^3-6.$$

Решение. Вначале приведём уравнение к виду

$$\sqrt[3]{(3x+3)+6}=(3x+3)^3-6.$$

Введя переменную $t=3x+3$, придём к уравнению

$$\sqrt[3]{t+6}=t^3-6. \qquad (1)$$

Покажем, что в левой и правой частях последнего уравнения находятся взаимно обратные функции. Действительно, рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{t+6}$. Это монотонно возрастающая функция, следовательно, она имеет обратную. Найдём её:

$$y=\sqrt[3]{t+6} \quad y^3=t+6 \Leftrightarrow t=y^3-6.$$

Поменяв местами обозначения переменных $t \leftrightarrow y$, находим, что обратная функция имеет вид $y=t^3-6$.

Далее, поскольку графики взаимно обратных возрастающих функций пересекаются в точках, лежащих на прямой $y=t$, то уравнение (1) равносильно уравнению

$$t^3-6=t \Leftrightarrow t^3-t-6=0 \Leftrightarrow (t-2)\left(t^2+2t+3\right)=0 \Leftrightarrow t=2.$$

Таким образом, уравнение (1) имеет единственный корень $t=2$, которому соответствует $x=-1/3$. *Ответ*: $x\in\{-1/3\}$.

Геометрический подход (*)

Иногда задачи могут быть решены с помощью геометрического подхода. Рассмотрим один из таких примеров.

Пример [ВМиК–2002, устн.]. *Решить уравнение*

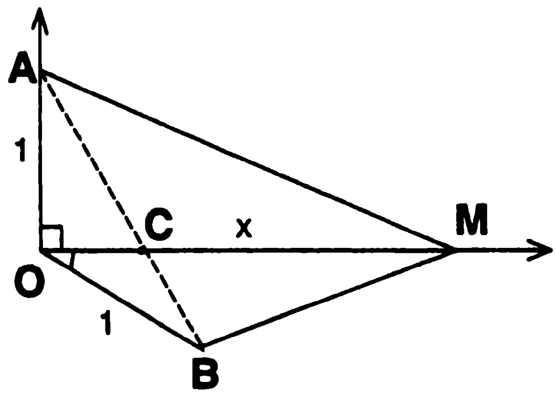
$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Решение. Придадим каждому из двух радикалов в уравнении определённый геометрический смысл. Действительно, рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle OAM$ со сторонами $OA = 1$, $OM = x$ и углом $\angle AOM = 90^\circ$ между ними. Тогда геометрический смысл первого из радикалов $\sqrt{1+x^2}$ есть длина гипотенузы AM.

Рассмотрим теперь треугольник $\triangle OBM$ со сторонами $OB = 1$, $OM = x$ и углом $\angle BOM = 30^\circ$ между ними. Тогда геометрический смысл второго корня

$$\sqrt{1+x^2 - x\sqrt{3}} = \sqrt{1^2 + x^2 - 2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot x},$$

согласно теореме косинусов, есть длина третьей стороны BM этого треугольника.



Изобразим оба треугольника с общей стороной OM на одном рисунке и соединим отрезком точки A и B. Согласно неравенству треугольника, имеем: $AM + BM \ge AB$, причём $AM + BM = AB$ тогда и только тогда, когда точка M лежит между точками A и B, совпадая с C.

Введём систему координат, поместив начало координат в точку O и направив ось абсцисс вдоль стороны OM, а ось ординат – перпендикулярно ей вдоль стороны OA. Тогда в выбранной системе координат $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{3}/2;-1/2\right)$, и длина отрезка AB равна

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}/2-0\right)^2+(-1/2-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Так как в правой части уравнения стоит как раз $\sqrt{3}$, то решить уравнение означает найти абсциссу точки $C(x;0)$, в которой прямая AB пересекает ось абсцисс. Уравнение прямой AB имеет вид $y = -\sqrt{3}x + 1$. Составляя уравнение $-\sqrt{3}x + 1 = 0$, находим искомое и единственное решение $x = \sqrt{3}/3$.

Функциональные уравнения (*)

Функциональным уравнением называется уравнение, в котором в роли неизвестного выступает функция (или функции). В этом случае решением уравнения является любая функция, при подстановке которой в уравнение оно превращается в тождество. Решить функциональное уравнение значит найти множество всех его решений. Например, дифференциальные уравнения являются частными случаями функциональных уравнений.

Один из основных методов решения функциональных уравнений – *метод замены переменной* (метод подстановки) [7].

Пример 1*. Решить уравнение* $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}\ (x\neq 0)$.

Решение. Положив $x+(1/x)=y$, возведём это равенство в квадрат:

$$x^2+2+(1/x^2)=y^2 \Rightarrow x^2+(1/x^2)=y^2-2.$$

После перехода к новой переменной функциональное уравнение примет вид $f(y)=y^2-2$. Следовательно, мы нашли функцию, это $f(x)=x^2-2$ (какой буквой при этом обозначен аргумент функции – не играет большой роли, поэтому обозначим так, как привычно – буквой x).

Однако необходимо сделать проверку найденного решения. Проверка нужна, в частности, по следующей причине: функция $y=x+(1/x)$ обладает тем свойством, что $|y|=|x+(1/x)|\geq 2$, поэтому остаётся вопрос – удовлетворяет ли найденная функция $f(x)=x^2-2$ функциональному уравнению при $|f(x)|<2$? Подставим функцию в исходное уравнение и проверим, действительно ли она удовлетворяет ему при всех $x\neq 0$:

$$(x+(1/x))^2-2=x^2+(1/x^2).$$

Полученное равенство, очевидно, выполняется при всех действительных $x\neq 0$, поэтому функция $f(x)=x^2-2$ будет единственным решением функционального уравнения.

Пример 2 [ВШЭ–1996]. *Найти функцию $f(x)$, при всех допустимых значениях x удовлетворяющую уравнению*

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)-5f\left(\frac{x}{x+1}\right)=12x+6.$$

Решение. ОДЗ: $x\neq 0,\ x\neq -1$. Обозначим $y=(x+1)/x$, отсюда $x=1/(y-1)$, и исходное равенство примет вид

$$f(y)-5f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{6(y+1)}{y-1}. \tag{1}$$

Если бы сделали замену $y=x/(x+1)$, то получили бы равенство

$$f\left(\frac{1}{y}\right)-5f(y)=-\frac{6(y+1)}{y-1}. \qquad (2)$$

При этом оба равенства (1) и (2), согласно условию, выполняются при всех допустимых значениях y. Решая систему уравнений (1) и (2) относительно $f(y)$ и $f(1/y)$, находим $f(y)=(y+1)/(y-1)$. В ответе аргумент можно привычно обозначить буквой x. *Ответ*: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

При решении функциональных уравнений нередко используется метод «от частного к общему». Рассмотрим примеры.

Пример 3. *Существует ли функция f такая, что при любых действительных x и y выполняется равенство $f(x)+f(y)=xy$?*

Решение. Пользуясь тем, что x и y – любые числа, положим в равенстве $y=x$: $2f(x)=x^2$, т.е. $f(x)=x^2/2$. Сделаем проверку, которая в данном случае обязательна (если при $y=x$ получается функция $f(x)=x^2/2$, которая при подстановке в функциональное уравнение превращает его в тождество, то это ещё не значит, что аналогичное положение будет и при $y\neq x$). Получаем $(x^2/2)+(y^2/2)=xy$, но это равенство тождеством не является. Следовательно, такая функция не существует.

Пример 4. *Существуют ли функции f и g такие, что при любых действительных x и y выполняется равенство*

$$f(x)\cdot g(y)=x+y+1?$$

Решение. Допустим, что такие функции f и g существуют, и попробуем их найти. Положим в функциональном уравнении $x=y=0$:

$$f(0)\cdot g(0)=1.$$

Теперь положим в нём $x=0$:

$$f(0)\cdot g(y)=y+1.$$

Наконец, положим в исходном равенстве $y=0$:

$$f(x)\cdot g(0)=x+1.$$

Перемножим два последних равенства:

$$f(0)\cdot g(y)\cdot f(x)\cdot g(0)=(y+1)(x+1).$$

Но в этом равенстве $f(0)\cdot g(0)=1$, следовательно,

$$f(x)\cdot g(y)=(y+1)(x+1).$$

Сделаем проверку, подставив в исходное равенство:

$$(y+1)(x+1)=x+y+1.$$

Очевидно, последнее равенство выполняется не при всех x и y. Пришли к противоречию. Следовательно, таких функций f и g не существует.

Пример 5 [Мехмат–2008, 5]. *Найти все функции f, удовлетворяющие уравнению*

$$f(x)+(x-2)f(1)+3f(0)=x^3+2,\ x\in R.$$

Решение. Подставим в уравнение $x=1$ и $x=0$:

$$\begin{cases} f(1)+(1-2)f(1)+3f(0)=1^3+2 \\ f(0)+(0-2)f(1)+3f(0)=0^3+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=1, \end{cases}$$

откуда получаем

$$f(x)=x^3+2-f(1)(x-2)-3f(0)=x^3-x+1.$$

Проверкой убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет уравнению.

Ответ: $f(x)=x^3-x+1$.

В следующем примере требуется найти не саму функцию, удовлетворяющую заданному функциональному уравнению, а лишь её значение в некоторой точке. При решении необходимое значение последовательно выражается через другие (которые можно найти) значения этой функции.

Пример 6 [ВМиК–2008]. *Числовая функция для всех действительных x и y удовлетворяет равенству*

$$g(x+y)=g(x)+g(y)+80xy.$$

Найти $g(4/5)$, если $g(1/4)=2$.

Решение. $g(1/2)=g(1/4+1/4)=g(1/4)+g(1/4)+80\cdot 1/4\cdot 1/4=9$, откуда $g(1)=g(1/2+1/2)=g(1/2)+g(1/2)+80\cdot 1/2\cdot 1/2=38$.

Пусть $g(1/5)=x$, тогда

$$g(2/5)=g(1/5)+g(1/5)+80\cdot 1/5\cdot 1/5=2x+16/5,$$

отсюда $g(4/5)=g(2/5)+g(2/5)+80\cdot 2/5\cdot 2/5=4x+96/5$.

Записивая цепочку соотношений

$$38 = g(1) = g(4/5 + 1/5) = g(4/5) + g(1/5) + 80 \cdot 4/5 \cdot 1/5 = 5x + 32,$$

находим $x = 16/5$, следовательно, $g(4/5) = 24$.

Перечисленные ниже вспомогательные приёмы и средства вряд ли претендуют на то, чтобы называться методами, однако используются при решении разнообразных задач довольно часто, поэтому мы приводим их здесь, чтобы подчеркнуть их значимость.

Вспомогательные приёмы и средства, используемые для преобразований в уравнениях и неравенствах

Формулы сокращённого умножения

Как отмечалось выше, формулы сокращённого умножения нередко используются во время преобразований с целью упрощения решения задачи. Приведём ещё один пример.

Пример [ВМиК–2000, устн.]. *Решить уравнение* $x^3 + x^3 + x = -1/3$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 3 и перенесём все слагаемые в одну сторону

$$3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = -2x^3.$$

Преобразуем выражение в левой части уравнения по формуле куба суммы:

$$(x+1)^3 = -2x^3.$$

Приведя уравнение к виду $(x+1)^3 = \left(-\sqrt[3]{2}x\right)^3$, и извлекая кубический корень, получим линейное уравнение, равносильное исходному

$$x + 1 = -\sqrt[3]{2}x,$$

решая которое, находим единственный действительный корень

$$x = -1/\left(\sqrt[3]{2} + 1\right).$$

Выделение полного квадрата (куба)

Этот небольшой вспомогательный приём достаточно часто оказывается полезным при выполнении преобразований.

Пример 1 [РЭА им. Плеханова–2003]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{4x + 2 \cdot \sqrt{4x^2 - 25}} + 4 = x + \sqrt{2x + 5}.$$

Решение. Заметим, что выражение, стоящее под первым радикалом, является полным квадратом:

$$\sqrt{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-5}\right)^2}+4=x+\sqrt{2x+5}.$$

Упрощая, получаем уравнение

$$\left|\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-5}\right|+4=x+\sqrt{2x+5}.$$

Так как под модулем стоит положительное выражение, то модуль можно опустить:

$$\sqrt{2x-5}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0 \\ 2x-5=(x-4)^2. \end{cases} \quad \textit{Ответ}:\ x\in\{7\}.$$

Пример 2*. Решить уравнение* $x^3+9x+\dfrac{27}{x}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=64.$

Решение*.* Заметим, что в левой части уравнения находится полный куб:

$$(x+3/x)^3=64 \Leftrightarrow x+3/x=4 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x\in\{1;3\}.$$

Пример 3*. Решить уравнение* $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{40}{9}.$

Решение*.* Вычитая из обеих частей уравнения выражение $2x^2/(x+1)$ и выделяя в левой части полный квадрат, получим:

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1}.$$

Сделав подстановку $y=x^2/(x+1)$, придём к квадратному уравнению

$$y^2+2y-\frac{40}{9}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4/3 \\ y=-10/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-4x-4=0 \\ 3x^2+10x+10=0. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\{-2/3;2\}$.

Пример 4 [Химфак, Наук о материалах, Физ.-хим. факультеты–2006]. *Найти все значения параметра* a*, при каждом из которых уравнение*

$$\sqrt{\left(x^2+|x|\right)\left(x^2+5|x|+6\right)+1}=3|x|-3ax-a^2-a+1$$

имеет корни, как большие (-3)*, так и меньшие* (-3).

Решение*.* Покажем, что подкоренное выражение является полным квадратом:

$$\left(x^2+|x|\right)\left(x^2+5|x|+6\right)+1=|x|\left(|x|+1\right)\left(|x|+3\right)\left(|x|+2\right)+1=$$

$$=\left(|x|\left(|x|+3\right)\right)\left(\left(|x|+1\right)\left(|x|+2\right)\right)+1=\left(x^2+3|x|\right)\left(x^2+3|x|+2\right)+1=$$

$$=(y-1)(y+1)+1=y^2,$$

где $y=x^2+3|x|+1\ (>0)$. Поэтому уравнение преобразуется к виду

$$x^2+3|x|+1=3|x|-3ax-a^2-a+1 \Leftrightarrow x^2+3ax+a^2+a=0.$$

Левая часть полученного уравнения представляет собой квадратный трёхчлен $f(x)$ с положительным старшим коэффициентом. Согласно методу парабол, он имеет корни, лежащие по разные стороны от числа -3, тогда и только тогда, когда $f(-3)<0 \Leftrightarrow a^2-8a+9<0 \Leftrightarrow a\in\left(4-\sqrt{7},4+\sqrt{7}\right)$.

Рассмотрение уравнения относительного некоторой величины

Пусть имеется уравнение (неравенство), которое необходимо решить относительно неизвестной x. Если в уравнении имеется параметр, то в некоторых случаях такое уравнение удобно решать относительно параметра (или какой-либо другой величины). Наиболее часто среди задач этой группы встречаются задачи, решаемые как квадратные относительно параметра.

Пример 1 [ВМиК–1996, устн.]. *Решить уравнение*

$$2x^2+13y^2-10xy-2x+4y+1=0.$$

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x. Приведя его к стандартному виду, получим

$$2x^2-2x(5y+1)+13y^2+4y+1=0.$$

Чтобы уравнение имело решения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицателен:

$$D=4(5y+1)^2-8\left(13y^2+4y+1\right)=-4(y-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow y=1.$$

Тогда $x=2(5y+1)/4=3$. *Ответ*: $(x;y)\in\{(3;1)\}$.

Пример 2 [ИСАА]. *При каких значениях* a *уравнение*

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{x-2}=2\sqrt{2}-3 \text{ *имеет решения?*}$$

Решение. ОДЗ: $x\ge 2$. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно параметра a. Приведём его к стандартному виду

$$x^2a^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x\cdot a+\left(\sqrt{x-2}+3-2\sqrt{2}\right)=0.$$

Квадратное уравнение (на ОДЗ $x\ne 0$) имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D(x)=4\left(\sqrt{2}-1\right)^2x^2-4x^2\left(\sqrt{x-2}+3-2\sqrt{2}\right)=-4x^2\cdot\sqrt{x-2}\ge 0 \quad\Leftrightarrow$$

$x=2$. Тогда, подставляя это значение $x=2$ в уравнение, получим

$$4a^2+4\left(\sqrt{2}-1\right)a+3-2\sqrt{2}=0,\text{ откуда находим } a=\left(1-\sqrt{2}\right)/2.$$

Замечание. Задачу можно было также решить, рассматривая данное уравнение как квадратное относительно выражения ax.

Пример 3 [ВМиК–2004, устн.]. *Найти множество значений функции*

$$y=x/\left(1+x^2\right).$$

Решение. Рассмотрим данное равенство, которое задаёт функцию, как алгебраическое уравнение относительно x с параметром y. Преобразуем его к виду:

$$yx^2-x+y=0. \qquad (1)$$

Сформулируем задачу в новой постановке: «При каких значениях y уравнение (1) имеет решения?»

1) Если $y=0$, то, подставляя в уравнение (1), находим $x=0$.

2) Если $y\neq 0$ (тогда и $x\neq 0$), то уравнение является квадратным относительно x, и оно будет иметь решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D=1-4y^2\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1/2\leq y<0\\ 0<y\leq 1/2.\end{array}\right.$$

Объединяя все найденные значения y, получаем: $-1/2\leq y\leq 1/2$. Следовательно, множество значений функции представляет собой отрезок $[-1/2,1/2]$. *Ответ*: $E(y)=[-1/2,1/2]$.

Пример 4 [ВМиК–2005, устн.]. *Решить уравнение*

$$2x\cdot\sin\left(\frac{\pi x^2}{x^4+4}\right)+\frac{x^2}{2}+1=0.$$

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x:

$$x^2+4\sin\left(\pi x^2/\left(x^4+4\right)\right)\cdot x+2=0.$$

Необходимым и достаточным условием существования решений у этого уравнения является условие неотрицательности его дискриминанта:

$$D=4^2\cdot\sin^2\left(\pi x^2/\left(x^4+4\right)\right)-8\geq 0 \Leftrightarrow \cos\left(2\pi x^2/\left(x^4+4\right)\right)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2\pi n\leq\frac{2\pi x^2}{x^4+4}\leq\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Оценим значения выражения $2\pi x^2/\left(x^4+4\right)$ при помощи неравенства $ab/\left(a^2+b^2\right)\leq 1/2$. Тогда $0\leq 2x^2/\left(x^4+4\right)\leq 1/2$, и, значит,

$0 \le 2\pi x^2/(x^4+4) \le \pi/2$, следовательно, $0 \le \cos(2\pi x^2/(x^4+4)) \le 1$. Поэтому

$$D \ge 0 \Leftrightarrow \cos(2\pi x^2/(x^4+4)) = 0.$$

Отсюда находим

$$\sin^2\left(\frac{\pi x^2}{x^4+4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(\pi x^2/(x^4+4)) = \sqrt{2}/2 \\ \sin(\pi x^2/(x^4+4)) = -\sqrt{2}/2. \end{array}\right.$$

С учётом решаемого уравнения приходим к двум случаям:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(\pi x^2/(x^4+4)) = \sqrt{2}/2 \\ x^2 + 2\sqrt{2}\cdot x + 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin(\pi x^2/(x^4+4)) = -\sqrt{2}/2 \\ x^2 - 2\sqrt{2}\cdot x + 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 & \textit{– верно} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 - & \textit{неверно} \\ x = \sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

Приведём в заключение высказывания двух известных людей по поводу математики, удивительным образом совпавшие в главном:

«Решение задач является наиболее характерной и специфической разновидностью свободного мышления» (*Уильям Джеймс* (1842–1910), американский философ и психолог).

«Сущность математики заключается в её свободе» (*Георг Кантор* (1845–1918), немецкий математик).

Раздел 4

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

К РАЗДЕЛУ 1

Решить задачи на сравнение целых чисел и их цифровое представление:

1.1.1. [Геолог.–1993, устн.]. Сравнить числа 3^{400} и 4^{300}.

1.1.2. [Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. Какое из чисел 31^{11} или 17^{14} больше?

1.1.3. [ВМиК–2002, апрель, устн.]. Что больше:

$$1!\cdot 1+2!\cdot 2+3!\cdot 3+\ldots+n!\cdot n \text{ или } (n+1)! \text{ ?}$$

1.1.4. [Геолог.–1999, устн.]. Найти сумму цифр в десятичной записи числа

$$N=10^{1999}-1999.$$

1.1.5. [Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. Найти сумму цифр в десятичной записи числа $N=10^{2006}-2006$.

1.1.6. [Мехмат–2001, устн.]. Найти все числа, кратные числу 72 и имеющие десятичную запись вида $\overline{74X23Y}$, где X, Y – цифры.

1.1.7. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Найти все пятизначные числа, делящиеся на 45, запись которых в десятичной системе имеет вид $\overline{53X1Y}$.

1.1.8. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Доказать, что ни при каком натуральном n число $1+2+3+\ldots+n$ не может оканчиваться цифрой 7.

1.1.9. [ВМиК–1998, апрель, устн.]. Доказать, что целое число, в десятичной записи которого имеется триста единиц, а остальные цифры – нули, не является точным квадратом целого числа.

1.1.10. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из 243 единиц, делится на 243.

Решить задачи на полный квадрат:

1.2.1. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что произведение четырёх последовательных целых чисел в сумме с 1 даёт полный квадрат.

1.2.2. [Физфак–1965, ВМиК–2002, устн.]. Доказать, что число

$$M = \underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n}$$

при любом натуральном n является полным квадратом.

1.2.3. [ВМиК–2002, апрель, устн.]. Показать, что каждое число в последовательности

$$49,\ 4489,\ 444889,\ 44448889, ...$$

является полным квадратом.

1.2.4. [ВМиК–2005, устн.]. Существуют ли пятёрки последовательных целых чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа?

1.2.5. [ВМиК–2006, устн.]. Найти все четырёхзначные числа, являющиеся квадратом целого числа, у которых первая цифра совпадает со второй, а третья цифра совпадает с четвёртой.

1.2.6. [ВМиК–2003, устн.]. Пусть A, B, C – три натуральных числа, записанных в десятичной системе: A – единицами, число которых $2m$, B – единицами, число которых $m+1$, C – шестёрками, число которых m. Доказать, что число $A+B+C+8$ – точный квадрат.

1.2.7. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Доказать, что ни при каком натуральном n число $3^n + 2\cdot 17^n$ не является квадратом натурального числа.

1.2.8. [ВМиК–2003, устн.]. Натуральное число является полным квадратом и оканчивается на 5. Доказать, что его третья справа цифра чётная (подразумевается, что число по крайней мере трёхзначное).

1.2.9. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Найти все натуральные числа k, l, m, n, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} k^2 + l = m^2 \\ k + l^2 = n^2. \end{cases}$$

Решить задачи на делимость нацело:

1.3.1. [Геолог.–1994, устн.]. Доказать, что при любом натуральном n выражение $n^3 - n$ делится нацело на 6.

1.3.2. [ВМиК–2008, апрель, устн.]. Доказать, что при любом натуральном n число $n^3 - 7n$ делится нацело на 6.

1.3.3. [Геолог.–1994, устн.]. Доказать, что при любом натуральном n выражение $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится нацело на 6.

1.3.4. [Геолог.–1999, устн.]. Доказать, что число $10^{1999} - 1999$ делится нацело на 9.

1.3.5. [Геолог.–2000, ВМиК–2006, устн.]. Доказать, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится нацело на 9.

1.3.6. [ВМиК–2006, устн.]. Существует ли такое натуральное число n, что выражение $2n^2 + 3n + 4$ делится нацело на 1995?

1.3.7. [ВМиК–2004, устн.]. Сколько различных целых делителей имеет число

$$210^{37}\ ?$$

1.3.8. [ВМиК–1996, устн.]. Доказать, что целые числа n и n^5 всегда оканчиваются на одну и ту же цифру.

1.3.9. [ВМиК–1999, устн.]. Доказать, что если a,b,c – целые числа, и $a+b+c$ делится нацело на 6, то и $a^3+b^3+c^3$ делится нацело на 6.

1.3.10. [ВМиК–1998, устн.]. Доказать, что $32n^5 - 40n^3 + 8n$ делится нацело на 240 для всех целых $n > 2$.

1.3.11. [ВМиК–2002, апрель, устн.]. Доказать, что для любого натурального $n \geq 2$ число $n^{n-1} - 1$ кратно $(n-1)^2$.

1.3.12. [ВМиК–2005, устн.]. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

1.3.13. [ИСАА–2000, 6]. Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n+5$ соответственно.

1.3.14. [ВМиК–2005, май, устн.]. Доказать, что для всех натуральных k число $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ делится на 11.

1.3.15. [ВМиК–2005, май, устн.]. Найти все натуральные n, при которых число $2^n - 1$ делится нацело на 7.

1.3.16. [ВМиК–2005, устн.]. Известно, что натуральное трёхзначное число $p = \overline{abc}$ делится нацело на 37. Могут ли числа $q = \overline{bca}$ и $r = \overline{cab}$ также делиться нацело на 37?

1.3.17. [Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. Может ли натуральное число при зачёркивании первой цифры уменьшиться: а) в 58 раз; б) в 57 раз?

1.3.18. [Мехмат–2003, устн.]. Для каких целых n выражение

$$\frac{n^3 - \frac{1}{5}n^2 - n + 115}{5n^2 - 4n - 1}$$

принимает целочисленные значения?

Решить задачи на делимость с остатком:

1.4.1. [ВМиК–2008, май, устн.]. Доказать, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

1.4.2. [ВМиК–2008, май, устн.]. Каждое из целых чисел n, m, k не делится на 3. Доказать, что число $n^6 + m^4 + k^2$ делится на 3.

1.4.3. [Почвовед.–2003, май, 3]. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8. Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность цифры десятков и цифры единиц исходного числа, то в частном получится 15, а в остатке 2. Найти это число.

1.4.4. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что существует бесконечно много целых чисел, которые не представимы в виде суммы квадратов двух других целых чисел.

1.4.5. [ВМиК–1997, устн.]. Доказать, что ни при каком натуральном n число $n^2 + 3n + 1$ не делится на 7.

1.4.6. [ВМиК–1998, устн.]. Доказать, что число $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком целом n.

1.4.7. [ВМиК–1998, апрель, устн.]. Целое число кратно 7 и при делении на 4 даёт в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

1.4.8. [ВМиК–2008, май, устн.]. Найти остаток от деления целого числа n на 30, если известно, что остаток от его деления на 15 равен 4, а остаток от деления на 18 равен 7.

1.4.9. [Наук о материалах ф-т–2001]. Учительница принесла в класс счётные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счётных палочек?

1.4.10. [Эконом., отделение экономики–2008, 5]. Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остаётся 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались три золотые монеты. Затем в перестрелке погибли ещё три пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остаётся 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет?

1.4.11. [ВМиК–2007, устн.]. Найти наименьшее натуральное число x такое, что остаток от деления x на 8 ровно на 5 больше остатка от деления x на 5 и в два раза больше остатка от деления x на 7.

Решить задачи на простые и составные числа:

1.5.1. [Геолог.–2002, устн.]. Является ли простым число $43^{111} + 8^{37}$?

1.5.2. [Геолог.–2004, устн.]. Является ли простым число $50^{20} - 49^{11}$?

1.5.3. [ВМиК–2006, устн.]. Является ли число

$$100007 \cdot 100013 \cdot 100001 + 55$$

простым? Ответ обосновать.

1.5.4. [ВМиК–1998, устн.]. Найти все p, при которых p, $p+10$, $p+14$ простые числа.

1.5.5. [ВМиК–2001, апрель, устн.]. Корни уравнения $x^2 + ax + b + \ \ +1 = 0$ являются натуральными числами. Может ли число $a^2 + b^2$ быть простым?

1.5.6. [ВМиК–1997, устн.]. Найти все простые числа x, y, удовлетворяющие равенству $x^2 - 3y = 19$.

1.5.7. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что квадрат любого простого числа $p > 3$ при делении на 12 даёт в остатке 1.

1.5.8. [ВМиК–2004, устн.]. Найти все простые числа вида

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1,\ n \in N.$$

1.5.9. [ВМиК–2006, устн.]. Доказать, что если p и $8p-1$ – простые числа, то $8p+1$ – составное число.

1.5.10. [ВМиК–2006, устн.]. Доказать, что если p и $8p^2+1$ – простые числа, то $8p^2-1$ – тоже простое число.

1.5.11. [ВМиК–2007, устн.]. Доказать, что для всех простых чисел p число p^2+4 является составным.

1.5.12. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что если $(n-1)!+1$ делится на n, то n – простое число.

1.5.13. [ВМиК–2005, апрель, устн.]. Найти все простые числа p, q, r, удовлетворяющие равенству $p^q + q^p = r$.

1.5.14. [ВМиК–1999, устн.]. Доказать, что число $n^3 - n + 3$ – составное для любого натурального $n > 1$.

Решить задачи на НОД и НОК:

1.6.1. [ВМиК–2007, отд. бакалавров, 1]. Найти наибольший общий делитель чисел $n = 720$, $m = 756$, $k = 468$.

1.6.2. [Эконом.–2000, 2]. Интервалы движения городских автобусов по трём маршрутам, проходящим через общую остановку, составляют 15, 20 и 24 минуты соответственно. Сколько раз с 7-55 до 17-05 того же дня на этой остановке одновременно встречаются автобусы всех трёх маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 12-35?

1.6.3. [Олимпиада «Ломоносов–2007», 6]. Натуральные числа a,b,c таковы, что $НОК(a,b)=60$ и $НОК(a,c)=270$. Найти $НОК(b,c)$.

1.6.4. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Натуральные числа m и n таковы, что

$$НОД(n,m)+НОК(n,m)=n+m.$$

Доказать, что одно из них является делителем другого.

1.6.5. [Олимпиада «Ломоносов–2009», 5]. Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

Решить задачи на составление и решение уравнений в натуральных и целых числах:

1.7.1. [Черноморский филиал МГУ–2008, 1]. Пообедав в кафе, однокурсники решили поделить расходы поровну. Если каждый внесёт по 23 гривны, то для оплаты обеда не хватит 20 гривен. Если же каждый внесёт по 29 гривен, то после оплаты останется 10 гривен. Сколько было однокурсников, и сколько стоил обед?

1.7.2. [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы–2005», 6]. В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

1.7.3. [Геолог.–1996, май, устн.]. Доказать, что уравнение $35x-20y=13$ не имеет целочисленных решений.

1.7.4. [Геолог.–1999, устн.]. Известно, что $4n=5m$. Найти m и n, если известно, что они натуральны.

1.7.5. [ВМиК–2007, устн.]. На какую минимальную величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m и n, если известно, что дробь $89/(3m+7n)$ является натуральным числом?

1.7.6. [ВМиК–2004, апрель, устн.]. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2+1954=n^2$?

1.7.7. [Геолог.–1996, май, устн.]. Найти все целочисленные решения уравнения $2xy-14y-x+2=0$.

1.7.8. [Геолог.–2002, май, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$xy+x-3y=4.$$

1.7.9. [Геолог.–2001, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$xy=2x+y.$$

1.7.10. [Геолог.–2005, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$xy = 2x + 2y.$$

1.7.11. [Геолог.–2004, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$xy = 2003(x + y).$$

1.7.12. [ИСАА–1997, 7]. Найти все пары целых x, y, удовлетворяющих уравнению $3xy + 16x + 13y + 61 = 0$.

1.7.13. [Геолог.–2001, устн.]. Найти все целочисленные пары $(x; y)$, где $|x| \le 1$, удовлетворяющие уравнению $xy = x^2 + \frac{1}{4}y^2$.

1.7.14. [Почвовед.–2001, май, 5]. Решить уравнение в целых числах

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7.$$

1.7.15. [Геолог.–1999, май, 4]. Найти такое натуральное двузначное число, что разность удвоенного квадрата числа единиц и утроенного квадрата числа его десятков равна сумме 27 и произведения цифр этого числа.

1.7.16. [Геолог.–2000, май, 6]. Любая из трёх барж разной грузоподъёмности может при полной загрузке в каждом рейсе перевезти некоторый груз, причём баржа наименьшей грузоподъёмности – за 15 рейсов. Две другие баржи перевозят весь этот груз за три совместных рейса. Сколько рейсов необходимо сделать барже наибольшей грузоподъёмности для перевозки всего груза (недогрузка запрещается)?

1.7.17. [Черноморский филиал МГУ–2003, 9]. Для всех значений параметра $a \in (2;4)$ найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$x^2 + 5xy + 6y^2 = a.$$

1.7.18. [ФГУ–2004, 7]. На плоскости Oxy найти наибольшее расстояние между такими двумя точками с координатами $(x; y)$, что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$4 \cdot \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{xy}.$$

1.7.19. [ВШБ–2004, 6]. Найти все пары целых неотрицательных чисел $(k; m)$, являющихся решениями уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

1.7.20. [Психолог.–1975]. Найти все целые положительные решения уравнения $3x^2 + 3xy + 2x - y = 56$.

1.7.21. [Геолог.–2008, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$9^x - 12y = 1.$$

1.7.22. [Геолог.–2000, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$2^x - 1 = y^2.$$

1.7.23. [ВМиК–1999, устн.]. Решить в натуральных числах уравнение

$$3^{x^2+y-1} - 3^{x^2+1} = 486.$$

1.7.24. [ВМиК–2008, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$x^3 = 2 + 3y^2.$$

1.7.25. [ВМиК–1997, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - 7y^2 + 2 = 0.$$

1.7.26. [ВМиК–2001, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - 7y^2 = 5.$$

1.7.27. [Географ.–1998, 6]. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $3x = 5y^2 + 4y - 1$, и доказать, что для каждой такой пары сумма $x^3 + y^3$ является нечётным числом.

1.7.28. [Олимпиада «Абитуриент–2005», ВМиК, 3]. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0.$$

1.7.29. [Почвовед.–2003, май, 4]. Найти все целочисленные решения уравнения $34x^2 + y^2 + 5z^2 - 10xy - 22xz + 2yz = 0$.

1.7.30. [ВМиК–1996, пробный экзамен, 5]. Найти все целочисленные решения уравнения $10x^4 - 2y^4 + x^2y^2 + 29y^2 - 113x^2 + 171 = 0$.

1.7.31. [МШЭ–2007]. Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0.$$

1.7.32. [Олимпиада «Ломоносов–2008», устн.]. Решить в натуральных числах уравнение $k^3 - l^3 = kl + 61$.

1.7.33. [Химфак–2003, май, 5]. Найти все целочисленные пары $(x; y)$, удовлетворяющие системе $\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0 \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{cases}$

1.7.34. [ВМиК–2007, 4]. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} x - y \le -25, \\ x^2 - y \le 8, \\ 4x + y \le 1. \end{cases}$

1.7.35. [ВМиК–2005, устн.]. Сумма обратных величин трёх натуральных чисел равна 1. Найти эти числа.

1.7.36. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$$

не имеет целых положительных решений.

1.7.37. [ВМиК–2004, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3.$$

1.7.38. [ВМиК–2005, устн.]. Найти все упорядоченные тройки $(x;y;z)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{30}{13}.$$

1.7.39. [ВМиК–2004, апрель, 3]. Найти все целые n, при которых справедливо равенство

$$\frac{2n^2-3n+12}{n-2}=11-5\sqrt{13-3n}.$$

1.7.40. [ВМиК–2003, устн.]. Найти все целые a, при которых $x^2-3ax+2a^2+1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

1.7.41. [Олимпиада «Абитуриент–2008», ВМиК, 3]. Целые числа x,y,z образуют геометрическую прогрессию, а числа $5x+3$, y^2 и $3z+5$ – арифметическую прогрессию (в указанных порядках). Найти x,y и z.

Решить задачи на свойства, вычисление, упрощение и сравнение рациональных чисел и выражений, решение уравнений в рациональных числах:

1.8.1. [Геолог.–1999, устн.]. Числа a и b такие, что $a/b=4/5$. Найти значение выражения $a/(b-a)$.

1.8.2. [Геолог.–1998, 1]. Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2-16b^2}{4b+3a}-\frac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2:\left(6ab-\frac{8a^3-b^3}{2a-b}\right).$$

1.8.3. [Олимпиада «Ломоносов–2005», 1]. Вычислить значение выражения
$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}-\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2} \text{ при } x=1,\underbrace{2...2}_{46}2,\ y=-2,\underbrace{7...7}_{45}78.$$

1.8.4. [ВМиК–2006, устн.]. Известно, что $m^2+n^2=1$, $k^2+l^2=1$ и $mk+nl=0$. Чему равно значение $mn+kl$?

1.8.5. [Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. Числа x, y, z таковы, что $xyz=1$. Найти значение выражения
$$A=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx},$$
если известно, что это выражение определено.

1.8.6. [ВМиК–2002, апрель, устн.]. Вычислить сумму
$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}.$$

1.8.7. [Геолог.–2001, май, устн.]. Представить число $0,(25)$ в виде обыкновенной дроби.

1.8.8. [Геолог.–2001, устн.]. Представить число $0,2(13)$ в виде обыкновенной дроби.

1.8.9. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2005, 1]. Сравнить числа: 10^5 и $(-1/16)^{-2}\cdot 2^{-3}\cdot 5^5$.

1.8.10. [Геолог.–2008, устн.]. Известно, что числа a и b связаны равенством $b-a^2=10-5a$. Какое из этих чисел больше?

1.8.11. [ВМиК–1999, устн.]. Сравнить числа a и b, если известно, что $5(a-1)=a^2+b$.

1.8.12. [Геолог.–2004, устн.]. Сравнить числа: $2,(004)$ и $2,005$.

1.8.13. [Геолог.–2006, устн.]. Сравнить числа: $2,(005)$ и $2,006$.

1.8.14. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2006, 4]. Сравнить числа: $0,2(1):4+0,(2)$ и $0,275$.

1.8.15. [ВМиК–2001, устн.]. Что больше: $0,7(621)$ или $141/185$?

1.8.16. [ВМиК–2001, устн.]. Сравнить числа: $\dfrac{7}{33}$ и $\dfrac{21212121}{99999999}$.

1.8.17. [ВМиК–2005, устн.]. Три числа a, b и c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Доказать, что какие-либо два из них равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

1.8.18. [ВМиК–2005, устн.]. Для каждой допустимой тройки чисел $(a;b;c)$ сравнить значения выражений

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca} \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{1+ab}\cdot\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}.$$

1.8.19. [ВМиК–2005, устн.]. Можно ли представить единицу в виде суммы 2005 попарно различных чисел, обратных натуральным?

1.8.20. [ВМиК–2004, устн.]. Пусть числа x, y, a, b таковы, что $x+y=a+b$ и $x^2+y^2=a^2+b^2$. Выразить через числа a и b сумму x^n+y^n, где $n\geq 3$ – натуральное.

1.8.21. [ВМиК–1998, устн.]. Доказать, что уравнение $x^3-px+1=0$, где $p>0$ – целое, не имеет рациональных корней.

1.8.22. [ВМиК–2003, устн.]. При каких натуральных n уравнение

$$2x^4-x^3+nx^2-1=0$$

имеет рациональные корни?

1.8.23. [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы–2006», заочный тур, 9]. Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)^6+\left(u+v\sqrt{2}\right)^6=7+5\sqrt{2}\ ?$$

1.8.24. [Геолог.–2007, ВМиК–1996, устн.]. Известно, что числа a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рациональны. Доказать, что числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ также рациональны.

1.8.25. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Найти все рациональные числа x, при которых выражение $\sqrt{x^2+x+1}$ является рациональным числом.

1.8.26. [ВМиК–2003, устн.]. Пусть x и y – рациональные числа, удовлетворяющие равенству $x^5+y^5=2x^2y^2$. Доказать, что $1-xy$ является квадратом рационального числа.

1.8.27. [Эконом.–2005, 6]. Найти все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{y(x+1)^2-x^2+x+1}+\log^2_{|y+2|/21}\cos^2\pi y=0.$$

Решить задачи на сократимость (несократимость) дробей:

1.9.1. [ВМиК–1972, 1998, устн.]. Найти все целые числа, на которые может быть сократима дробь $\dfrac{5l+6}{8l+7}$ при целых l.

1.9.2. [ВМиК–2003, устн.]. Доказать, что дробь $\dfrac{10n+3}{6n+2}$, где $n \in N$, несократима.

1.9.3. [Черноморский филиал МГУ, г. Севастополь–2004, 1].

Сократить дробь $\dfrac{64x^3-27y^6}{9y^4-16x^2}$.

1.9.4. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Пусть $n \geq 3$ – натуральное число. Может ли число несократимых дробей в последовательности

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \ldots,\ \frac{n-3}{n},\ \frac{n-2}{n},\ \frac{n-1}{n}$$

быть нечётным?

Решить задачи на упрощение иррациональных выражений:

1.10.1. [Почвовед.–1996]. Доказать, что число

$$\left(\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)^2-6\right)\left(\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)^2+6\right)$$

является целым, и найти это число.

1.10.2. [Почвовед.–2004, май, 2]. Пусть $a=\sqrt{10}-\sqrt{11}$. Доказать, что число $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ является целым.

1.10.3. [Почвовед.–2002, 3]. Пусть $a=\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{50}$. Доказать, что число a^3-30a является целым, и найти его.

1.10.4. [Геолог.–1994, 2]. Упростить до целого числа выражение

$$2\cdot\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}}}{\sqrt{7-\sqrt{5}}}\cdot 2\sqrt{11}.$$

1.10.5. [Геолог.–1993, 1]. Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2.$$

1.10.6. [Геолог.–1994, май, 2]. Упростить до численного значения выражение

$$\frac{7\sqrt{3}\sqrt{a}-7\sqrt{5}\sqrt{b}}{6\sqrt{3}\sqrt{a}+6\sqrt{5}\sqrt{b}}:\frac{3a-5b}{9a+15b+6\sqrt{15ab}}.$$

1.10.7. [ИСАА–1999, 2]. Упростив выражение

$$A=\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\sqrt{2^{-2}\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)-0{,}5}}-2ab-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}},$$ где $a>b>0$ – действительные числа, выяснить, что больше: A или $0{,}01$?

Решить задачи на свойства действительных чисел:

1.11.1. [Мехмат–1964, ВМиК–2002, устн.]. Определить все целые числа a и b, для которых один из корней уравнения $3x^3+ax^2+bx+12=0$ равен $1+\sqrt{3}$.

1.11.2. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что в представлении в виде десятичной дроби числа $\left(\sqrt{26}+5\right)^{99}$ первые 98 цифр справа после запятой равны нулю.

Решить задачи на сравнение иррациональных чисел:

1.12.1. [Геолог.–1993, устн.]. Сравнить числа: $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$.

1.12.2. [Геолог.–1994, май, 1]. Что меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?

1.12.3. [ВМиК–1992]. Сравнить числа: $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$.

1.12.4. [Ташкентский филиал МГУ–2007, 1]. Сравнить числа

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 \text{ и } 14+\sqrt{200}.$$

1.12.5. [Геолог.–1994, 1]. Какое из чисел больше:

$$2\cdot\sqrt{17} \text{ или } 8,(24)?$$

1.12.6. [Геолог.–2002, устн.]. Сравнить два числа:

$$\sqrt{2001}+\sqrt{2003} \text{ и } 2\cdot\sqrt{2002}.$$

1.12.7. [Геолог.–2006, устн]. Сравнить два числа:

$$\sqrt{2004}+\sqrt{2006} \text{ и } 2\cdot\sqrt{2005}.$$

1.12.8. [Геолог.–2002, устн.]. Сравнить два числа:

$$\frac{1}{\sqrt{47}-\sqrt{45}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{46}-\sqrt{44}}.$$

1.12.9. [Геолог.–2003, устн.]. Сравнить числа:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ и } \sqrt{6}.$$

1.12.10. [Геолог.–2002, май, устн.] Сравнить числа: $\sqrt[5]{2}+7$ и $8\cdot\sqrt[10]{2}$.

1.12.11. [ВМиК–2002, устн.]. Сравнить два числа:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \text{ и } 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$$

(a и b – неотрицательные числа, $a \neq b$).

1.12.12. [Геолог.–2004, устн.]. Сравнить числа: $\dfrac{12}{25}$ и $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}}$.

1.12.13. [Эконом.–1988]. Что больше: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ или 3 ?

1.12.14. [ВМиК–2004, устн.]. Сравнить числа: $3^{\sqrt{\log_3 5}}$ и $5^{\sqrt{\log_5 3}}$.

1.12.15. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Что бóльше:

$$2^{\sqrt{\log_2 11}} \text{ или } 11^{\sqrt{\log_{11} 2}}\ ?$$

1.12.16. [Геолог.–2005, устн.]. Сравнить числа: $2005^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2005}}$ и $3/2$.

1.12.17. [ВМиК–1999, апрель, устн.]. Сравнить числа:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \text{ и } 1.$$

1.12.18. [ВМиК–1996, устн.]. Что больше:

$$\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}} \text{ или } \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\ ?$$

1.12.19. [ВМиК–2005, устн.]. Упорядочить по величине три числа:

$$\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13},\ \sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12} \text{ и } \sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}.$$

1.12.20. [Олимпиада «Ломоносов–2006», 2]. Что больше: $tg(11\pi/6)$ или меньший корень квадратного трёхчлена $11x^2-17x-13$?

1.12.21. [ВМиК–2006, устн]. Сравнить числа:

$$\log_{\log_3 2} 0{,}5 \text{ и } \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}.$$

1.12.22. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Сравнить числа:

$$\sum_{k=2}^{15}\log_2\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \text{ и } 3-\log_2 15.$$

1.12.23. [Геолог–2004, устн]. Сравнить числа: $\cos 5$ и $0{,}5$.

1.12.24. [ВМиК–2006, устн]. Сравнить числа: $\cos(3\pi/11)$ и $0{,}67$.

Решить задачи на доказательство иррациональности чисел:

1.13.1. [Геолог.–2002, устн.]. Является ли число $\sqrt{7}$ рациональным?

1.13.2. [Геолог.–2004, устн.]. Является ли число $\sqrt{5}$ рациональным?

1.13.3. [ВМиК–1998, устн.]. Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом.

1.13.4. [ВМиК–1998, устн.]. Доказать, что $\sqrt[4]{5}$ не является рациональным числом.

1.13.5. [ВМиК–1998, устн.]. Доказать, что $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ не является рациональным числом.

1.13.6. [ВМиК–2004, устн.]. Доказать, что число $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$ является иррациональным.

1.13.7. [Мехмат–1996, устн.]. Доказать, что число

$$A=\sqrt{3-\sqrt{4+\sqrt{12}}}+\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}$$

не является рациональным.

1.13.8. [Геолог.–2000, устн.]. Доказать иррациональность числа

$$\sqrt{3\sqrt{2}+4}+\sqrt{3\sqrt{2}-4}.$$

Решить задачи на целую и дробную части числа:

1.14.1. [Геолог.–2006, устн.]. Сколькими нулями оканчивается число $53!$ (произведение всех целых чисел от 1 до 53)?

1.14.2. [Геолог.–2008, устн.]. На отрезке $[4,5]$ найти корни уравнения $\{x\}=2/x$, где $\{x\}$ – дробная часть действительного числа x.

1.14.3. [Олимпиада «Ломоносов–2008», Геолог., устн.]. Решить уравнение

$$\{x\}=(3-x)/2.$$

1.14.4. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Решить неравенство

$$[x]\cdot\{x\}<x-1.$$

1.14.5. [ВМиК–2008, апрель, устн.]. Решить уравнение $\{2\{2x\}\}=x$.

1.14.6. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Найти все решения уравнения $[2x]-[x]=5$.

1.14.7. [Всероссийская математическая олимпиада–1990, 11 класс; Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. Решить уравнение

$$[x]-3=\left[\frac{x+1}{2}\right].$$

1.14.8. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Найти все решения уравнения $[2x+1]=[x]+[x+1]$.

1.14.9. [ВМиК–2000, устн.]. Решить уравнение $\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$.

1.14.10. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2005, 8]. Решить уравнение $x^2+[x]=4$.

1.14.11. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Решить уравнение $x^3-[x]=3$.

1.14.12. [ВМиК–2004, устн.]. Решить уравнение $\{x\}=\frac{1}{x}$.

1.14.13. [ВМиК–2004, устн.]. Решить уравнение $[x^2]=[x]^2$.

1.14.14. [ВМиК, отделение прикладной информатики–2001, 6]. Найти все корни уравнения $\left[x+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}x^6-[x]$.

1.14.15. [Олимпиада «Ломоносов–2008», 9]. Найти все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2002\left[n\sqrt{1001^2+1}\right]=n\left[2002\sqrt{1001^2+1}\right],$$

где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

Решить задачи, используя различные методы:

1.15.1. [Географ.–2003, 3]. Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Чётных чисел в X меньше двух третей от N, а нечётных не больше 36% от N. Какое наименьшее значение может принимать число N?

1.15.2. [Геолог.–2003, 7]. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует нечётное число n, удовлетворяющее равенству

$$3^a n^2-3^a+3^{4-a}n^2=96n+3^{4-a}.$$

К РАЗДЕЛУ 2

Используя свойства числовых неравенств и монотонность показательной функции, решить задачу:

2.1.1. [ИСАА–2003, 1]. Числа x, y изменяются в пределах: $3\le x\le 4$ и $1\le y\le 2$. Найти, в каких пределах изменяется величина выражения

$$A=4^{x-2y-1}-4y+4x-4.$$

Применяя подходящие формулы сокращённого умножения, решить задачи:

2.2.1. [Почвовед.–1999]. Сумма десяти чисел равна нулю, и сумма их попарных произведений равна нулю. Чему равна сумма кубов этих чисел?

2.2.2. [ВМиК–2005, май, устн.]. Доказать, что для всех натуральных k число $5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$ делится на 11.

2.2.3. [ВМиК–1996, устн.]. Что больше:

$$\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}} \text{ или } \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\,?$$

Доказать следующие числовые и алгебраические равенства и неравенства:

2.3.1. [ВМиК–2007, устн.]. Доказать, что

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\geq 100.$$

2.3.2. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Доказать неравенство

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}<2.$$

2.3.3. [ВМиК–2003, устн.]. Доказать, что $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

2.3.4. [ВМиК–2000, устн.]. Доказать, что сумма

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots+\frac{1000}{2^{1000}}<2.$$

2.3.5. [ВМиК–2000, устн.]. Доказать, что при допустимых a, b и c, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5.$$

2.3.6. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Доказать, что если $a>0,\ b>0$, то $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{a^2/b}+\sqrt{b^2/a}$.

2.3.7. [ВМиК–1994, устн.]. Известно, что пять положительных чисел a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 связаны соотношением $a_1a_2a_3a_4a_5=1$. Доказать, что в этом случае справедливо неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)(1+a_5)\geq 32.$$

2.3.8. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что для неотрицательных чисел a и b имеет место неравенство

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

2.3.9. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что если $b \geq -1,\ b \neq 0$, то

$$\frac{4b^2+b+1}{4|b|} \geq \sqrt{b+1}.$$

2.3.10. [ВМиК–1994, устн.]. Доказать, что для любых четырёх действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd.$$

2.3.11. [Мехмат–1958]. Доказать, что если $x^2+y^2=1$, то справедливо неравенство $-\sqrt{2} \leq x+y \leq \sqrt{2}$.

2.3.12. [ВМиК–1992, устн.]. Доказать, что если $a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1$, то

$$|ac-bd| \leq 1.$$

2.3.13. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Положительные числа a и b таковы, что $a+b \geq 2$. Доказать, что $a^3+b^3 \geq 2$.

2.3.14. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. Доказать, что если $a \geq 0$, то $a^3+2 \geq a^2+2\sqrt{a}$.

2.3.15. [ВМиК–1990, устн.]. Доказать, что для всех x верно неравенство

$$x^8-x^5+x^2-x+1>0.$$

2.3.16. [ВМиК–1994, устн.]. Известно, что три положительных числа a, b и c связаны соотношением $a+b=c$. Доказать, что

$$a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}>c^{\frac{3}{4}}.$$

2.3.17. [ВМиК–1990, устн.]. Доказать, что для любых трёх положительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

2.3.18. [Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. Пусть a, b, c – положительные числа. Доказать, что

$$\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a} \geq a+b+c.$$

2.3.19. [ВМиК–1996, устн.]. Для положительных чисел a, b и c доказать неравенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geq 3$.

2.3.20. [ВМиК–2000, устн.]. Доказать, что для неотрицательных чисел a, b и c имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

2.3.21. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Три положительных числа a, b и c таковы, что $ab+ac+bc \ge 12$. Доказать, что $a+b+c \ge 6$.

2.3.22. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Доказать, что если положительные числа a,b и c таковы, что $a+b+c=1$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 9$.

2.3.23. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Пусть $a>b>c$. Доказать, что

$$a^2b+b^2c+c^2a > a^2c+c^2b+b^2a.$$

2.3.24. [ВМиК–2003, устн.]. Доказать справедливость неравенства

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2} \le \frac{3}{2}$$

для любых действительных чисел a,b и c.

2.3.25. [ВМиК–2004, устн.]. Пусть a, b и c – положительные числа и $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Доказать, что $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b} \ge 4$.

2.3.26. [ВМиК–2000, устн.]. Доказать, что для любых трёх положительных чисел x, y и z выполнено неравенство

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}.$$

2.3.27. [ВМиК–2004, устн.]. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{b+a} \ge 3.$$

2.3.28. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Доказать, что для любых положительных a, b и c не могут одновременно выполняться неравенства

$$a(1-b)>1/4,\ b(1-c)>1/4,\ c(1-a)>1/4.$$

2.3.29. [ВМиК–2003, устн.]. Пусть $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Доказать, что для нечётных натуральных n выполняется равенство

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

2.3.30. [ВМиК–1996, устн.]. Сумма четырёх чисел равна 2. Доказать, что сумма их квадратов не меньше 1.

2.3.31. [Физфак–1958]. Доказать, что если $a>0$ и $b>0$, то для любых x и y справедливо неравенство

$$a\cdot 2^x+b\cdot 3^y+1\le\sqrt{4^x+9^y+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}.$$

2.3.32. [ВМиК–1996, устн.]. Доказать, что для любых положительных чисел a, b и c верно неравенство

$$\sqrt{a^2+c^2-ac}\ge\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2-\sqrt{3}bc}.$$

2.3.33. [ВМиК–2005, устн.]. Доказать, что при любых положительных x, y и z выполняется неравенство

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\ge\sqrt{y^2+yz+z^2}.$$

Используя понятие среднего арифметического, решить задачу:

2.4.1. [Геолог.–2008, 6]. Среди 40 ненулевых чисел, среднее арифметическое которых равно 5, есть как положительные, так и отрицательные числа. Какие из перечисленных ниже утверждений относительно этих чисел верны, а какие – нет? Ответ обосновать.

а) Среднее арифметическое положительных чисел больше 5.

б) Модуль наименьшего отрицательного числа меньше, чем наибольшее положительное число.

в) Максимальное положительное число не меньше 5.

г) Количество положительных чисел больше количества отрицательных чисел.

К РАЗДЕЛУ 3

Используя стандартные подходы, решить линейные и квадратные уравнения (неравенства):

3.1.1. [Физфак–1982, 2]. При каких значениях параметра a решение уравнения

$$15x-7a=2+6a-3ax$$

меньше 2?

3.1.2. [ВМиК–2004, 1]. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-3\cos\left(arctg\left(2\sqrt{2}\right)\right)+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)\cdot x=2^{\log_{\sqrt{2}}3}-9.$$

3.1.3. [Геолог.–2008, 1]. Найти целые корни уравнения

$$x^2-\left(1+\sqrt{5}\right)x+3\left(\sqrt{5}-2\right)=0.$$

3.1.4. [Физфак–1992, 1]. Решить неравенство $1+2x^2<4x$.

3.1.5. [Геолог.–1997, 1]. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{6}\left(x^2+2\right)+2x\sqrt{5}=\sqrt[4]{35}\left(x^2-2\right)+2x\sqrt{7}\ ?$$

3.1.6. [Химфак–2003, май, 1]. Найти все значения параметра b, для которых уравнение

$$(b+1)x^2+(b+2)x+1=0$$

имеет единственное решение.

3.1.7. [Ташкентский филиал МГУ–2007]. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(a-3)x^2+5x-2}{x-4}=0$$

имеет единственное решение?

3.1.8. [Московская школа экономики–2005]. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

3.1.9. [Филолог.–2004, 1]. При каких значениях параметра a уравнение $x^2+x+\dfrac{2a-1}{a+5}=0$ не имеет решений?

3.1.10. [Геолог.–2000, май, устн.]. При каком a расстояние между корнями уравнения $x^2+(a-34)x-35a-36=0$ минимально?

3.1.11. [Химический, Биологический, Фундаментальной медицины, Биоинженерии и биоинформатики, Географический, Психологии ф-ты–2007]. Найти все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2+(a+4)x+a+1=0,$$

имеется ровно один отрицательный.

3.1.12. [ФГУ–2003, 5]. Для каждой пары чисел a и b найти все решения неравенства

$$bx^2+a\le 0.$$

3.1.13. [Физфак–1991, 5]. При каких значениях параметра a все корни уравнения

$$2ax^2-\left(4a^3+8a^2+1\right)x+2a(a+2)=0$$

удовлетворяют условию $|x|<1$?

3.1.14. [ФГУ–2006, 6]. Найти все значения параметра a, для которых неравенство

$$(a+b+36)x^2-5(x-1)(b+1)\le 0$$

имеет решение при любом b.

3.1.15. [ВМиК–2004, отд. бакалавров, 4]. При всех значениях параметра d решить неравенство $4^x-d\le 2^{x+2}$.

Используя теорему Виета для квадратных (кубических) уравнений, обратную теорему Виета, а также теорему об определении знаков корней квадратного уравнения по известным коэффициентам, решить задачи:

3.2.1. [Геолог.–1999, 2]. Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения

$$2x^2-\left(\sqrt{3}+5\right)x-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=0.$$

Найти значение $A=x_1+x_1x_2+x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или $1{,}999$, а также A или $1,(9)$?

3.2.2. [ВМиК–2008, устн.]. Корни уравнения $x^2+ax+b+1=0$ являются натуральными числами. Может ли число a^2+b^2 быть простым?

3.2.3. [Физфак–1993, 7]. Одним из корней уравнения $bx^2+cx+5=0$, где $b<0$, является число $x=2$. Найти действительные корни уравнения

$$bx^4+cx^2+5=0.$$

3.2.4. [ИСАА–1992, 6]. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

3.2.5. [Социолог.–2003, 6]. Определить все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3+\left(a^2-15a\right)x^2+12ax-216=0$$

образуют геометрическую прогрессию? Найти эти корни.

3.2.6. [Физфак–1994, май, 7]. При каких значениях a уравнение

$$a(x+3)^2-2|x+3|+2=0$$

имеет четыре различных решения?

3.2.7. [Социолог.–2004, 6]. Для каждого положительного значения параметра c изобразить множество тех пар $(b;a)$, для каждой из которых уравнение

$$bx^2+ax-(b/4)+c=0$$

имеет два различных отрицательных корня, и указать все значения параметра a, при каждом из которых множество соответствующих значений b состоит из двух непересекающихся интервалов.

3.2.8. [ВМиК–2006, отделение бакалавров]. Пусть $(x;y)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases}3x+y=\alpha+2\\9x^2+y^2=5\alpha-2.\end{cases}$$

При каком значении α произведение xy принимает наибольшее значение? Чему равно это значение?

3.2.9. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2006, 9]. Пусть x_1 и x_2 суть действительные корни уравнения

$$x^2+2bx+b^2+2b-1=0.$$

Найти все действительные значения b, при которых число

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_1-x_2)^2-2}{(x_1+x_2)^2+2}\text{ – целое.}$$

3.2.10. [Физфак–2006, март, 7]. При каких значениях m уравнение

$$(2x)^2-4x\left(m\cdot3^m\right)^{1/2}+3^{m+1}+m-3=0$$

имеет корни, и каковы знаки корней при различных значениях m?

3.2.11. [Эконом.–2005, отд. менеджмента, 6]. Найти все целые значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$\sqrt[3]{x^6}-\left(\frac{1}{a}-2\right)\sqrt[4]{x^4}+1-\frac{2}{a}=0$$

являются целыми числами.

3.2.12. [Олимпиада «Ломоносов–2007», ВМиК, устн.]. При каких значениях параметра a уравнение

$$54x^3+54ax^2+9a^2x-a^3=0$$

имеет три действительных корня, образующих арифметическую прогрессию?

3.2.13. [ВШБ–2003, 8]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5+25(a-1)x^3-4(a-7)x=0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию?

3.2.14. [Черноморский филиал МГУ–2008, 7]. Найти все такие значения параметра a, что уравнение

$$ax^2+\left(4a^2-3\right)x-10=0$$

имеет два различных корня, модули которых равны.

Используя метод парабол, решить задачи:

3.2.15. [Олимпиада «Ломоносов–2008», ВМиК, устн.]. При каких значениях a один из корней уравнения

$$x^2-2ax-a=0$$

больше 1, а другой – меньше 1?

3.2.16. [ВМиК–2004, устн.]. Найти наименьшее и наибольшее среди значений параметра a, при которых неравенство

$$3a+\frac{1}{4}-ax+a^2x^2\le 0$$

выполняется при всех $x\in[-1,0]$.

3.2.17. [ВМиК–1997, апрель, устн.]. Какие значения может принимать выражение $x+2y^2$, если $2x^2+y^2\le 1$?

3.2.18. [Химфак–2006, 6]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{\left(x^2+|x|\right)\left(x^2+5|x|+6\right)+1}=3|x|-3ax-a^2-a+1$$

имеет корни, как большие (-3), так и меньшие (-3).

Подбирая корень и понижая степень, или используя группировку и вынесение общего множителя за скобку, разложить на множители и решить следующие целые уравнения и неравенства:

3.3.1. [Физфак–1993, май, 1]. Решить неравенство $x^5<x$.

3.3.2. [Геолог.–2001, май, устн.]. Решить неравенство $x^3+x\le 2x^2$.

3.3.3. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2005, 4]. Решить уравнение $x^3+4x^2=5$.

3.3.4. [ВМиК–2005, устн.]. Решить уравнение

$$x^4-2x^2-400x=9999.$$

3.3.5. [ВМиК–2002, апрель, устн.]. Разложить $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ в произведение двух множителей, сумма которых равна $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Доказать единственность этого разложения.

Используя стандартные подходы, решить рациональные уравнения и неравенства:

3.4.1. [ИСАА–2008, 1]. Решить уравнение $\frac{3x^2-5x}{3x-2}-1=\frac{2}{2-3x}$.

3.4.2. [Почвовед.–2000, май]. Решить уравнение $\dfrac{x^{17}-1}{1-x^{15}}=\dfrac{1-x^{15}}{x^{13}-1}$.

3.4.3. [Геолог.–1987, 3]. Решить неравенство $\dfrac{1}{1-x}\ge -3$.

3.4.4. [Геолог.–1996, май, 1]. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1996}\le\frac{x}{x-1996}.$$

3.4.5. [Физфак–1986, 2]. Решить неравенство $\dfrac{9-2x}{2-x}<x+4$.

3.4.6. [Физфак–1995, май, 3]. Решить неравенство $\dfrac{x+2}{x+1}\ge\dfrac{x}{x+2}$.

3.4.7. [Физфак–1987, 2]. Решить неравенство $\dfrac{16}{x^3}\le x$.

3.4.8. [Геолог.–1995, май, 1]. Решить неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)}+\frac{9}{x-3}+1\le 0.$$

3.4.9. [Геолог.–2001, 1]. Решить неравенство $\dfrac{\frac{1}{x-1}-1}{1-\frac{1}{x-7}}\ge 0$.

3.4.10. [ФГУ–2002, 3]. Решить неравенство $\dfrac{-1}{\dfrac{8}{9-x^2}+1}\le 3-x$.

3.4.11. [Геолог.–2004, устн.]. Решить неравенство $\dfrac{1+x^2}{x^2-5x+6}<0$.

3.4.12. [Геолог.–2005, устн.]. Решить неравенство $\dfrac{x^2+3}{x^2+3x-4}\ge 0$.

3.4.13. [Химфак–2004, 1]. Решить неравенство $\dfrac{10+3x-x^2}{x^2-3x+2}\le 1$.

3.4.14. [ФГП–2005, 2]. Решить неравенство $\dfrac{1}{2x^2+3x}\le\dfrac{1}{3x-2x^3}$.

3.4.15. [ИСАА–2006, 1]. Решить неравенство

$$\frac{5x+1}{(x+2)(x-3)}\ge 1+\frac{16}{x-3}.$$

3.4.16. [Социолог. и Филолог. ф-ты–2007]. Решить неравенство

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \ge -1.$$

3.4.17. [Эконом.–2004, 1]. Вычислить произведение всех отрицательных корней уравнения

$$\frac{3x^3}{2\sin(14\pi/3)} + \frac{1}{\sqrt{3}x} = 2\sqrt{5}x \cdot tg(13\pi/4).$$

3.4.18. [Ташкентский филиал МГУ–2007, 7]. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{(a-3)x^2+5x-2}{x-4} = 0$ имеет единственное решение?

Используя различные приёмы, решить рациональные уравнения и неравенства:

3.5.1. [Олимпиада «Ломоносов–2008», 1]. Найти k, если .

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4} + 4 = \sqrt{5}+2\cdot$$

3.5.2. [Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. Решить уравнение

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{1}{(x+98)(x+99)} = -1.$$

3.5.3. [Физфак–1997, май, 7]. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{x+3a-2}{x-2a-1} \le 0$$

выполняется для всех x из промежутка $3 \le x \le 4$.

3.5.4. [Почвовед.–2003, 6]. Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3,-1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x-3b}{b-2x} < 0.$$

3.5.5. [Геолог.–2002, май, 7]. При каких положительных значениях параметра a неравенство $\dfrac{a+2x}{ax-4} \ge \dfrac{5}{x}$ выполнено для всех $x > 10$?

3.5.6. [Физфак–2003,7]. Для каждого значения a решить неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 3^{|3a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-3)x - 3a} > 0.$$

Используя разложение на множители, решить иррациональные уравнения и неравенства:

3.6.1. [Физфак–2000, март, 3]. Решить неравенство $x^2+\sqrt{3x^3}>x$.

3.6.2. [ИСАА–2002, 3]. Решить неравенство

$$x\sqrt{2-x}\le x^2-x-2-\sqrt{2-x}.$$

3.6.3. [Геолог.–2002, май, устн.]. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{3-x^2}}{1-2x}\ge\frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}-x}.$$

3.6.4. [Геолог.–1999, май]. Решить неравенство

$$\sqrt{10x-x^2-24}\ge\sqrt{x^2-13x+42}-\sqrt{x^2-11x+30}.$$

3.6.5. [ВШБ–2005, 6]. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2+5x+6}=\sqrt[3]{x^2+4x+3}-\sqrt[3]{x^2+3x+2}.$$

3.6.6. [ВМиК–2004, 2]. Решить неравенство

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}}\ge|x|-2.$$

3.6.7. [Олимпиада «Ломоносов–2005», 6]. Решить неравенство

$$5|x|\le x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

Используя графический подход (метод координат), решить задачи:

3.7.1. [Геолог.–2001, устн.]. Имеет ли корни уравнение

$$\sqrt{x}+x^2=8x-15?$$

3.7.2. [ВМиК–2006, устн.]. Построить на плоскости Oab геометрическое место точек $(a;b)$, при которых у уравнения

$$ax^2+2bx-a+4=0$$

а) нет решений; б) ровно одно решение; в) ровно два решения.

3.7.3. [ВМиК–2006, устн.]. Построить на плоскости Oab геометрическое место точек $(a;b)$, при которых у уравнения

$$ax^2+2(b-1)x-a-6=0$$

а) два решения разных знаков; б) два положительных решения; в) два отрицательных решения.

3.7.4. [Геолог.–2000, устн.]. На плоскости Oxy изобразить множество точек $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{(y-x)(xy-1)}{(y-x)^2+(xy-1)^2}=0.$$

3.7.5. [ВМиК–2003, устн.]. На плоскости Oxy изобразить множество точек $(x;\,y)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{x+1}{x+y}=\frac{x^2-1}{x-y}.$$

3.7.6. [Геолог.–1993, устн.]. На координатной плоскости построить множество точек $M(x;\,y)$, координаты которых $(x;\,y)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} y\le x \\ y\ge x^3. \end{cases}$$

3.7.7. [Геолог.–1993, устн.]. На координатной плоскости построить множество точек $M(x;\,y)$, координаты которых $(x;\,y)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 1-x\le y\le \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

3.7.8. [Геолог.–1995, устн.]. Изобразить на плоскости геометрическое место точек, координаты которых $(x;\,y)$ удовлетворяют неравенству:

а) $y\le\sqrt{4-x^2}$; б) $x\le\sqrt{4-y^2}$.

3.7.9. [Геолог.–1999, 3]. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости $(x;\,y)$ системой неравенств

$$\begin{cases} x\left(x+y-\sqrt{2}\right)\le 0 \\ x^2+y^2\le 2. \end{cases}$$

3.7.10. [Геолог.–2001, устн.]. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2+4y\le -6 \\ x\le 2. \end{cases}$$

3.7.11. [Геолог.–2004, устн.]. На плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\dfrac{x^2+y^2}{x}\le 2$.

3.7.12. [Олимпиада «Ломоносов–2006», Геолог., устн.]. На плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют условию $x/(2y)>1$.

3.7.13. [Социолог., Филолог.–2008, 6]. Изобразить на координатной плоскости множество решений уравнения

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+3}=\sqrt{x+y}+2.$$

3.7.14. [Геолог.–1990, 2]. Найти площадь треугольника OAB, образованного на плоскости отрезками прямых OA, OB, AB, где O – начало координат, A – точка пересечения прямых $y=2x$ и $y=-x+3$, а B – точка пересечения прямой $y=-x+3$ и оси Ox.

3.7.15. [Геолог.–2006, 8]. Найти значения параметра a, при которых наибольшее значение функции

$$f(x)=2x^2+x(5-3a)+a^2-3a+4$$

на отрезке с концами в точках $a-1$ и (-4) минимально. Указать это значение.

3.7.16. [Социологический и Филологический ф-ты–2007]. При каких значениях c уравнение $-\sqrt{16-x^2}=c+x$ имеет единственное решение?

3.7.17. [Филолог.–2003, 5]. Найти все значения параметра b, при каждом из которых для любого a неравенство

$$(x-a-2b)^2+(y-3a-b)^2<1/2$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение $(x;y)$.

3.7.18. [ВМиК–2007, устн.]. Изобразить на координатной плоскости $(x;y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$y=x\cdot\cos(arctg(y/x))\cdot\sqrt{x^2+y^2}.$$

3.7.19. [Химфак–2005, 5]. Найти все целочисленные пары $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}.$$

3.7.20. [Олимпиада «Ломоносов–2007», 7]. Определить, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0;0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2+xy+y^2+14x+2y+4<0.$$

3.7.21. [ИСАА–2005, 7]. Фигура на плоскости $(x;y)$ состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$\left(p^4+4p^2+16\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2=16\left(p^3+4p\right)xy+2\left(p^4+12p^2+16\right)\left(x^2+y^2\right)$$

при различных действительных значениях p. Найти длину линии, ограничивающей эту фигуру.

Используя подходящую замену переменных, решить задачи:

3.8.1. [Почвовед.–1996, 2]. Решить неравенство $3x^4+4<13x^2$.

3.8.2. [Геолог.–1996, устн.]. Решить уравнение

$$\left(x^2+5x+3\right)\left(x^2+5x+4\right)=6.$$

3.8.3. [ВМиК–2004, апрель, 2]. Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2-5x+7}\le 5x-x^2-5.$$

3.8.4. [Физфак–2004, март, 2]. Решить систему неравенств

$$-2<\frac{6}{x^2-x-6}<-1.$$

3.8.5. [Ташкентский филиал МГУ–2007, 5]. Решить неравенство

$$\frac{8}{9x^2+6x}+3x^2+2x\le\frac{11}{3}.$$

3.8.6. [Физфак–1999, 5]. Решить уравнение $\sqrt{1-\dfrac{4}{2-x}}=\dfrac{1}{2-x}$.

3.8.7. [Геолог.–2002, май, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt{6x-x^2-8}-\sqrt{7-2x}\ge\sqrt{8x-x^2-15}.$$

3.8.8. [Химфак–2000, заочный тур, 2]. Решить уравнение

$$\left(x^2+3x-2\right)^2+3\left(x^2+3x-2\right)-2=x.$$

3.8.9. [Геолог.–2000, 7]. Решить уравнение

$$2\left(2-x^2-x\right)=\sqrt{1-x^2}\cdot\left(3x^2-6x+4\right).$$

3.8.10. [ВМиК–2006, 5]. При каждом значении параметра d решить уравнение

$$\sqrt{x^2-y^2-dx+3dy-2d^2}+\sqrt{x-y+d}\cdot\sqrt{4-2x+d}+$$
$$+\sqrt{-2x^2-2xy+(5d+4)x+(d+4)y-2d^2-8d}=4.$$

Используя симметризирующую подстановку, решить уравнение:

3.9.1. [ВМиК–2007, устн.]. Решить уравнение

$$x^4+(x+1)^4=3.$$

Используя рационализирующие алгебраические подстановки, решить задачи:

3.10.1. [Социолог. и Филолог. ф-ты–2007]. Решить уравнение

$$-x-3\sqrt{-x}=10.$$

3.10.2. [Экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады школьников–2004, 1]. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}=x-2.$$

3.10.3. [Геолог.–1994, 3]. Решить уравнение

$$y^2+2\sqrt{y^2+3y-4}-4+3y=0.$$

3.10.4. [Геолог.–1997, 3]. Решить неравенство $30>\dfrac{x}{60-\sqrt{x}}$.

3.10.5. [Геолог.–1991, 3]. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\ge\dfrac{2}{4-\sqrt{x}}$.

3.10.6. [ВМиК–1999, устн.]. Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

3.10.7. [Сканави 6.277, ВМиК–2003, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$$

3.10.8. [ВМиК–2004, устн.]. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x.$$

3.10.9. [ВМиК–2005, устн.]. Решить уравнение

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

3.10.10. [ВМиК–2003, устн.]. Решить уравнение

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$$

3.10.11. [ИСАА–2008, 7]. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4x-5}+4}{x^2-4x-21}<\frac{2|x+2|+5}{4x^2+16x-9}.$$

3.10.12. [ВМИК–2000, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

3.10.13. [Черноморский филиал МГУ–2003, май, 8]. При всех натуральных значениях n решить неравенство

$$\sqrt[n]{\left(1+2^x\right)^2}-\sqrt[n]{1-4^x}\ge\sqrt[n]{\left(1-2^x\right)^2}.$$

3.10.14. [Высшая школа бизнеса–2004, 3]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{y-2}=1\\ x+y-20=0.\end{cases}$$

3.10.15. [Черноморский филиал МГУ–2001, 6]. Решить неравенство

$$x>\sqrt{1+\frac{3x}{4}}-\sqrt{1-\frac{3x}{4}}.$$

3.10.16. [Наук о материалах ф-т–2000, май, 3]. Решить неравенство

$$\sqrt{2-\frac{2}{x+1}}<\sqrt{2+\frac{2}{x}}+1.$$

3.10.17. [ВМиК–2006, устн.]. Решить уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Используя тригонометрические подстановки, решить задачи:

3.11.1. [ВМиК–2000, устн.]. Решить уравнение $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

3.11.2. [ВМиК–2007, устн.]. Известно, что $16y^2+x^2=4$. Какие значения может принимать xy?

3.11.3. [Геолог.–1981, 6]. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1.$$

3.11.4. [Эконом., отделение менеджмента–2003, апрель, 4]. Решить уравнение

$$6x\cdot\sqrt{1-9x^2}+18x^2-3\sqrt{2}x-1=0.$$

3.11.5. [ВМиК–2004, устн.]. Решить уравнение $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$.

3.11.6. [Биолог.–1985, 5]. Сколько корней на отрезке $[0,1]$ имеет уравнение

$$8x\left(2x^2-1\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1?$$

3.11.7. [Химфак–2000, заочный тур олимпиады «Абитуриент», 5]. Решить уравнение

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}.$$

3.11.8. [ВМиК–2004, устн.]. Найти наибольшее значение функции

$$y = x\sqrt{1-3x^2}.$$

3.11.9. [Высшая школа бизнеса–2004, 7]. Найти наибольшее значение выражения $3x-2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию

$$4x^2+y^2=16.$$

3.11.10. [ВМиК–2004, устн.]. Числа a, b, c таковы, что

$$3a^2+b^2+c^2=4.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $a-2b+c$?

3.11.11. [Глоб. процессов ф-т–2005, 8]. Переменные x, y связаны условием

$$x^2+y^2-6x+4y+10=0.$$

Найти все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения $2ax-3y-10$ больше 12.

3.11.12. [ВМиК–2005, устн.]. Для каждой допустимой тройки чисел $(a;b;c)$ сравнить значения выражений

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca} \text{ и } \frac{a-b}{1+ab}\cdot\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}.$$

3.11.13. [ИСАА–2004, 6]. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $(y^2/25)+(w^2/144)$, если величины x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-20=0 \\ z^2+w^2-2w-143=0 \\ xw+yz-x+w+2z-61\ge 0. \end{cases}$$

Используя приём рассмотрения данного в условии задачи равенства (неравенства) относительно параметра или какой-либо иной величины, решить задачи:

3.12.1. [ВМиК–2004, апрель, устн.]. Найти все x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

3.12.2. [Олимпиада «Абитуриент–2005», ВМиК, 3]. Найти все пары целых x, y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2-2xy+2y^2+y-2x-1=0.$$

3.12.3. [Эконом., отделение менеджмента–2003, апрель, 4]. Решить уравнение

$$6x\cdot\sqrt{1-9x^2}+18x^2-3\sqrt{2}x-1=0.$$

3.12.4. [ВМиК–2003, 3]. Найти множество значений функции

$$y=\sqrt{x^2-3x+2}-x.$$

3.12.5. [Высшая школа бизнеса–2004, 7]. Найти наибольшее значение выражения $3x-2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию

$$4x^2+y^2=16.$$

3.12.6. [Геолог.–1996, май, 8]. Найти все значения параметра a, для которых неравенство $ax^2+1>4x-3a$ выполняется для всех x из интервала $(-1{,}0)$.

3.12.7. [ИСАА–2007, 6]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$$

содержит хотя бы одно целое число.

3.12.8. [ВМиК–2000, устн.]. Решить уравнение $x+\sqrt{\pi+\sqrt{x}}=\pi$.

3.12.9. [ВМиК–2001, устн.]. Решить уравнение

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0.$$

3.12.10. [Мехмат–1989]. Найти наименьшее из чисел x, для которых существуют числа y и z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1.$$

3.12.11. [ВМиК–2004, 5]. Для каждого значения параметра a найти число решений уравнения

$$\frac{2}{16^x}-\frac{1}{8^x}-\frac{a+8}{4^x}+\frac{4-2a}{2^x}-a^2+4a+5=0.$$

Извлекая корень необходимой степени, решить уравнение:

3.13.1. [Почвовед.–2005, 1]. Решить уравнение $(y+1)^{10}=(6y-3)^5$.

Используя приём выделения полных квадратов, решить задачи:

3.14.1. [ВМиК–2004, апрель, устн.]. Найти все x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

3.14.2. [Московская школа экономики–2007, 6]. Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2-14x+4y^2+32y+88=0.$$

3.14.3. [ВМиК–2000, апрель, устн.]. Решить в целых числах уравнение

$$x^2=2\left(xy-y^2-y\right).$$

3.14.4. [ВМиК–2005, апрель, устн.]. Для каждого $a>0$ найти наименьшее значение функции

$$f(x)=4^x+2^{x+1}ax+a^2x^2.$$

3.14.5. [Геолог.–1990, 5]. Найти все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение

$$\left(3x-a^2+ab-b^2\right)^2+\left(2x^2-a^2-ab\right)^2+x^2+9=6x$$

имеет хотя бы одно решение.

3.14.6. [ИСАА–1994, 6]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{x-4}=2\sqrt{3}-4$$

имеет решение.

3.14.7. [ИСАА–2007, 4]. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+1}+\sqrt{6x+2y-x^2-y^2-9}+\sqrt{x+y-1}=$$
$$=2\sqrt{x-y+1}\cdot\sin z+6\sin^2(z/2).$$

Используя соответствующие формулы сокращённого умножения, решить задачи:

3.15.1. [Геолог.–1993, устн.]. Решить уравнение $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$.

3.15.2. [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы–2007», заочный тур, 3]. Какие значения в зависимости от параметра a может принимать выражение $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, в котором x_1, x_2 – два различных корня уравнения

$$x^3-2007x=a\,?$$

3.15.3. [ВМиК–2000, апрель, устн.]. Решить уравнение

$$x^3+x^2+x=-1/3.$$

3.15.4. [ВМиК–2002, устн.]. Решить уравнение

$$8x^3+36x^2+54x+33=0.$$

Разбивая ОДЗ на подходящие промежутки, решить неравенство:

3.16.1. [Геолог.–2000, май, устн.]. Решить неравенство

$$x^8-x^5+x^2-x+1>0.$$

3.16.2. [ВМиК–2001, устн.]. Решить уравнение

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=0.$$

3.16.3. [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»–2008, 2]. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x\left(10-x^2\right)}}{x} \le 2x+5.$$

3.16.4. [Эконом.–1988, 3]. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}+3x+13}{x+5} > 1.$$

3.16.5. [Геолог.–2003, устн.]. Решить неравенство

$$\sqrt{x(x+4)}+(x+4)\sqrt{\frac{x}{x+4}} \le x+8.$$

Выделяя множители, сохраняющие определённый знак, поделить (умножить) на них и упростить задачу (случай их обращения в нуль рассмотреть отдельно):

3.17.1. [Социолог.–2004, 1]. Решить неравенство $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+7x+14} \le 0$.

3.17.2. [ИСАА–2004, 1]. Решить неравенство $\sqrt{x^2-25}\cdot(x+3)<0$.

3.17.3. [Геолог.–1994, май]. Решить неравенство

$$|x|\cdot\left(x^4-2x^2-3\right)\ge 0.$$

3.17.4. [Геолог.–1988, 2]. Решить неравенство

$$\left(x^2+8x+15\right)\sqrt{x+4} \ge 0.$$

3.17.5. [Геолог.–2007, устн.]. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \le 0.$$

3.17.6. [Эконом.–1986, 3]. Решить неравенство

$$\left(8x^2-6x+1\right)\sqrt{-25x^2+15x-2} \ge 0.$$

3.17.7. [ВШБ–2003, 1]. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(x+5)(x-3)}}{x+5} \le 0$.

3.17.8. [ИСАА–2001, 1]. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{6+3\sqrt{3}x-2x^2} \ge 0$.

3.17.9. [Государственного управления ф-т–2005, 2]. Решить неравенство

$$1<\frac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}.$$

3.17.10. [Геолог.–2002, май, устн.]. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{3-x^2}}{1-2x} \ge \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}-x}.$$

3.17.11. [Физфак–1996, 2]. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}} > 0$.

3.17.12. [Геолог.–2003, май, 4]. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-6x-7}}{x-7} \ge \frac{x+1}{3}.$$

3.17.13. [Геолог.–1999, май, 7]. Решить неравенство

$$\sqrt{10x-x^2-24} \ge \sqrt{x^2-13x+42} - \sqrt{x^2-11x+30}.$$

Используя метод «от частного к общему» или метод неопределённых коэффициентов, решить задачи:

3.18.1. [Черноморский филиал МГУ–2003, май, 5]. Найти такие числа a и b, что при всех x справедливо равенство

$$(x^2+5x+6)(x+a) = (x^2-9)(x+b).$$

3.18.2. [Филолог.–1984]. Найти все a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \ge x^2+2a \\ x \ge y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3.18.3. [Мехмат–1990]. Найти все a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\cdot\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

3.18.4. [Геолог.–2003, май, 6]. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cdot\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

3.18.5. [Геолог.–1998, май, 8]. При каких a для любого $b \ge 2$ неравенство

$$(b-1)x + 2\sqrt{1-(b-1)^{-2}} < \left(\frac{a+1}{b-1} - b + 1\right)\frac{1}{x}$$

выполняется для всех $x < 0$?

3.18.6. [ВМиК–2002, апрель, устн]. Определить три числа p, q, r такие, что равенство

$$\sqrt{x^4+4x^3-2x^2-12x+9}=px^2+qx+r$$

выполняется при всех действительных значениях x.

3.18.7. [Стэндфордский ун-т (Калифорния, США); ВМиК–2002, устн]. Показать, что невозможно представить выражение $x^2+y^2+z^2$ в виде следующего разложения на множители:

$$x^2+y^2+z^2=(ax+by+cz)(Ax+By+Cz),$$

т.е. нельзя определить числа a, b, c, A, B, C так, чтобы равенство выполнялось тождественно для независимых переменных x, y, z.

Используя стандартные схемы решения уравнений (неравенств), основанные на приёме возведения в степень с соблюдением равносильности этого преобразования, решить задачи:

Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ *и сводимые к ним*

3.19.1. [Геолог.–1996, 1]. Решить уравнение $\sqrt{3x-5}=x-11$.

3.19.2. [Геолог.–1995, 1]. Решить уравнение $\sqrt{5x-6}+x=4$.

3.19.3. [Физфак–1988, 3]. Решить уравнение $x+5=\sqrt{-x^2-8x+9}$.

3.19.4. [Физфак–1985, 2]. Решить уравнение $\sqrt{x^4-4x-16}=2-x$.

3.19.5. [ВШБ–2003, апрель, 1]. Решить уравнение

$$22x^2+10x=\sqrt{1276x^3+364x^2}.$$

3.19.6. [Физфак–2000, 2]. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x-1}.$$

Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

3.19.7. [ФГУ–2006, 2]. Решить уравнение

$$\sqrt{x^4-10x^2+25}=\sqrt{x^4-4x^2+4}.$$

3.19.8. [Психолог.–1987, 4]. Решить уравнение

$$\sqrt{(3/4)-\cos x}=\sqrt{(3/4)-\cos 3x}.$$

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \le g(x)$

3.19.9. [Геолог.–2008, устн.]. Решить неравенство $\sqrt{1-x^2} \le 1+x$.

3.19.10. [Геолог.–1984, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2-6x+4} < x+2.$$

3.19.11. [Геолог.–2004, 3]. Решить неравенство $\sqrt{361-x^2} \le x+19$.

3.19.12. [МШЭ–2007, 1]. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} \le x-1$.

3.19.13. [Геолог.–2004, устн.]. Решить неравенство

$$\sqrt{5-|x+1|} \le 2+x.$$

3.19.14. [Физфак–1997, 3]. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+2x+9} \le x+|2x-3|.$$

3.19.15. [Физфак–2005, март, 3]. Решить неравенство

$$2\sqrt{(x-3)(x^2-5x+6)} \le x^2-5x+6.$$

3.19.16. [Физфак–2006, 3]. Решить неравенство

$$\sqrt{(4-x)\sqrt{2x^2-2x-4}} \le 4-x.$$

3.19.17. [Физфак–2005, март, 3]. Решить неравенство

$$2\sqrt{(x-3)(x^2-5x+6)} \le x^2-5x+6.$$

3.19.18. [Экономический ф-т–2007]. Для каждого значения x, удовлетворяющего условию $x^2-|x|-42=0$, найти все числа y, для которых выполнено неравенство $-7\cdot\sqrt{y^2-10y+34} \ge 4x+7$.

3.19.19. [Географ.–2003, май, 3]. Решить неравенство

$$2\sqrt{9-x^2} < x+3(\sqrt{2}+1)-|x+3(\sqrt{2}-1)|.$$

3.19.20. [Мехмат–2003, март, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{5x^7-32x^3}{5x-x^3-4}} \le x^3.$$

3.19.21. [ФГУ–2005, 2]. Решить неравенство $1 < \dfrac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}$.

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

3.19.22. [Геолог.–2003, май, устн.]. Решить неравенство

$$\sqrt{7+x} \geq 7-2x.$$

3.19.23. [Геолог.–1994, устн.]. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}} \geq \dfrac{1}{x-2}$.

3.19.24. [Физфак–2001, 2]. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}} > \dfrac{1}{2x-1}$.

3.19.25. [Ташкентский филиал МГУ–2006, 6]. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x+8}{2-x}} > x+2.$$

3.19.26. [Геолог.–1994, май, 3]. Решить неравенство

$$\sqrt{24-10x+x^2} > x-4.$$

3.19.27. [Геолог.–2001, май, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-8x+12} \geq x-5.$$

3.19.28. [Геолог.–2005, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2-x+6}-x \geq 2.$$

3.19.29. [Физфак–2000, май, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+|3-x|-10} > x-3.$$

3.19.30. [Физфак–2003, май, 5]. Решить неравенство

$$\sqrt{12x^2+54x+6}+\left|2x^2+9x\right| \geq 11.$$

3.19.31. [Ташкентский филиал МГУ–2008, 6]. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3x^2-10x}{x-4}} \geq 3x-10.$$

3.19.32. [ИСАА–2006, 3]. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{243+9x-2x^2}{2x+3}} > 9-x.$$

3.19.33. [Олимпиада «Абитуриент–2006», ВМиК]. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2-24x+144}{x^2-26x+165}} \geq 54x-2x^2-\frac{721}{2}.$$

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$

3.19.34. [Геолог.–2006, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{5}{2}x^2 - x^3} \geq \sqrt{6x - \frac{5}{2}x^2}.$$

3.19.35. [Геолог.–1997, май, 1]. Решить неравенство

$$\sqrt{|x+1|-1} > \sqrt{|x+1|-1997}.$$

Используя приём возведения в степень (с уединением радикала или без, и, возможно, несколько раз), соблюдая при этом равносильность перехода, или же переходя к следствию (в последнем случае делая в конце проверку), решить задачи:

3.20.1. [Физфак–1999, май, 2]. Решить уравнение

$$\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{2x+3} = x+7.$$

3.20.2. [Геолог.–1992, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3x+1} = 7.$$

3.20.3. [Социолог.–2003, 1]. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x+7}.$$

3.20.4. [Почвовед.–2004, 3]. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+5x+4} - \sqrt{x^2-x-6} = -\sqrt{2x^2+4x-2}.$$

3.20.5. [ИСАА–2005, 3]. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{(x+2)^3}.$$

3.20.6. [Геолог.–2002, май, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt{6x-x^2-8} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-15}.$$

3.20.7. [Геолог.–2008, 2]. Решить неравенство

$$|x+1| \leq \sqrt{(x+1)^2(x^2-25)}.$$

3.20.8. [ВМиК–1997, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{x(2x+3)} + \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2\sqrt{2}} = \sqrt{3\sqrt{2}+3x}.$$

3.20.9. [ВМиК–2001, устн.]. Решить неравенство

$$4\sqrt{1-(1/x)} + \sqrt{x-(16/x)} < x.$$

3.20.10. [Мехмат–2002, май, 2]. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{2x - x\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{1-2x} \leq 0.$$

3.20.11. [Мехмат, заочный тур олимпиады «Абитуриент–2000», 2]. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{15x+1-x^2}+\sqrt[3]{x^2-15x+27}=4.$$

3.20.12. [Социолог.–2001, 6]. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(2+x)/x}-\sqrt[3]{(2-6x)/x}=1.$$

3.20.13. [ВМиК–2005, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}.$$

Используя разную монотонность функций, расположенных в левой и в правой частях уравнения (неравенства), и подбирая корень, решить задачи:

3.21.1. [Геолог.–1992, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+1}=7.$$

3.21.2. [ВМиК–2006, устн.]. Решить уравнение

$$x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3.$$

3.21.3. [Геолог.–2007, устн.]. Решить уравнение

$$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=120/x.$$

3.21.4. [Олимпиада «Ломоносов–2006», 6]. Решить неравенство

$$\sqrt{4-x}-2\le x|x-3|+4x.$$

Выделяя полный квадрат под знаком квадратного корня, решить задачи:

3.22.1. [Эконом.–2000, 1]. Решить уравнение

$$3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x=\left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)^2.$$

3.22.2. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2007, 3]. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}=2x.$$

3.22.3. [Черноморский филиал МГУ в г. Севастополь–2003, 1]. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+2x+1}=3.$$

3.22.4. [Химический, Биологический, Фундаментальной медицины, Биоинженерии и биоинформатики, Географический, Психологии ф-ты–2007]. Решить неравенство

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12}\le 1-\frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

3.22.5. [ВМиК–2006, 3]. Решить неравенство

$$11\sqrt{2x-\sqrt{48x-144}}>2x-12.$$

3.22.6. [ВМиК–2000, апрель, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Получая необходимые оценки (в том числе, с помощью неравенств Коши, Коши–Буняковского, Бернулли, неравенства о сумме взаимно обратных чисел), решить задачи:

3.23.1. [Олимпиада «Ломоносов–2008», Геолог., устн.]. Найти числа $x, y\in[0,\ 1]$ такие, что $4x+5y=7+2xy$.

3.23.2. [Ф-т наук о материалах–2002, апрель, 3]. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-3xy+y^2+1}+\left|2x^2+5xy-3y^2\right|=0.$$

3.23.3. [Геолог.–2004, устн.]. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-y^2-1}\le 1.$$

3.23.4. [ВМиК–2003, устн.]. Решить уравнение

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$$

3.23.5. [Химфак–2003, 4]. Решить уравнение

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)=8.$$

3.23.6. [Геолог.–2008, устн.]. Найти положительные корни уравнения

$$x\sqrt{y^3+y}+y\sqrt{x^3+x}=2\sqrt{2}xy.$$

3.23.7. [Геолог., отд. геофизики–1985, 5]. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$$

3.23.8. [Гос. управления ф-т–2008, 5]. Решить неравенство

$$x-\sqrt{6x-x^2-8}\le 2-\sqrt{x^2-2x-3}.$$

3.23.9. [ВМиК–2000, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2.$$

3.23.10. [Химфак–2001, 4]. Решить уравнение

$$\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{2x-x^2}.$$

3.23.11. [ВМиК–2000, устн.]. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{1-(x/3)}+\sqrt[6]{1+x}.$$

3.23.12. [Мехмат–2001, 5]. Найти все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4+x^3}=a\cdot\sqrt[4]{4-a^4}\left(x+4x^2-8\right)$$

ни при каком значении параметра a.

3.23.13. [ВМиК–2005, устн.]. Решить уравнение

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+24\right)}.$$

3.23.14. [Ф-т наук о материалах–2004, заочный тур, 3]. Найти все действительные решения уравнения

$$2\sqrt{x+7}+3\sqrt{37-2x}+6\sqrt{3x+93}=7\sqrt{2x+137}.$$

3.23.15. [ВМиК–2005, апрель, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{1+16x^{-2}}=\sqrt{9-2x}.$$

Используя векторный подход, решить уравнение:

3.24.1. [ВМиК–2005, устн.]. Решить уравнение

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+24\right)}.$$

Используя приём умножения (деления) на сопряжённое выражение, решить задачи:

3.25.1. [Эконом.–2008, 1]. Решить уравнение

$$\frac{6x^2-21x+16}{1+\sqrt{2x-4}}=\sqrt{2x-4}-1.$$

3.25.2. [Олимпиада «Ломоносов–2006», ВМиК, устн.]. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+98}+\sqrt{x+99}}=9.$$

3.25.3. [Мехмат–2003, 1]. Решить неравенство

$$4\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}}+3\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}}\le 7\sqrt{x-2}.$$

3.25.4. [Черноморский филиал МГУ–2001, 6]. Решить неравенство

$$x>\sqrt{1+\frac{3x}{4}}-\sqrt{1-\frac{3x}{4}}.$$

3.25.5. [Геолог., отд. общей геологии–1985, 5]. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

3.25.6. [Геолог., отд. геофизики–1985, 5]. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$$

Начиная с анализа (учёта) ОДЗ, решить задачи:

3.26.1. [Геолог.–2008, устн.]. Решить неравенство $\sqrt{1-x^2}\le 1+x$.

3.26.2. [Почвоведения, Глобальных процессов ф-ты–2007]. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-7}}+x\le\frac{1}{\sqrt{x^2-7}}+9.$$

3.26.3. [Химический, Биологический, Фундаментальной медицины, Биоинженерии и биоинформатики, Географический, Психологии ф-ты–2007]. Решить уравнение

$$\left(x^2-7|x|+6\right)\sqrt{4x+23}=0.$$

3.26.4. [Геолог.–1999, устн.]. Для всех значений действительного параметра a решить уравнение $\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=a$.

3.26.5. [ВМиК–2007, устн.]. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{46+19x-2x^2}+x\cdot\sqrt{2x^2-19x-33}>3.$$

3.26.6. [Олимпиада «Абитуриент–2006», ВМиК]. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2-24x+144}{x^2-26x+165}}\ge 54x-2x^2-\frac{721}{2}.$$

3.26.7. [Механико-математический ф-т–2007]. Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)}+\sqrt{(7-y)(1-x)}+\sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x\in[-2{,}3]$, $y\in[0{,}11]$.

Используя геометрический подход, решить задачи:

3.27.1. [ВМиК–2006, устн.]. Решить уравнение

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

3.27.2. [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы–2005», заочный тур, 8]. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}.$$

Решить однородные уравнения:

3.28.1. [ВМиК–2004, устн.]. Решить уравнение
$$6\cdot\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\cdot\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

3.28.2. [ВШБ–2005, 6]. Решить уравнение
$$\sqrt[5]{32x^2-32}+\sqrt[5]{(x+1)^2}+\sqrt[5]{x^2-2x+1}=0.$$

3.28.3. [Эконом.–2003, 6]. Найти все значения b, при которых уравнение $3\cdot\sqrt[5]{x+2}-16b^2\cdot\sqrt[5]{32x+32}=\sqrt[10]{x^2+3x+2}$ имеет единственное решение.

Решить уравнения вида 1) $f(x)=f^{-1}(x)$, **где** $f(x)$ **и** $f^{-1}(x)$ **– пара взаимно обратных возрастающих функций, 2)** $f(h(x))=f(g(x))$, **где** $f(x)$ **– строго монотонная функция, 3)** $\underbrace{f(f(f(\ldots f(x))))}_{n}=x$:

3.29.1. [ВМиК–2004, устн.]. Решить уравнение $\sqrt[3]{3x+9}=27(x+1)^3-6$.

3.29.2. [ВМиК–2006, устн.]. Решить уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

3.29.3. [Мехмат–2001, март, 1]. Решить уравнение
$$3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$$

3.29.4. [ВМиК–2006, устн.]. Решить уравнение
$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)-3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

3.29.5. [Химфак–2000, заочный тур, 2]. Решить уравнение
$$\left(x^2+3x-2\right)^2+3\left(x^2+3x-2\right)-2=x.$$

3.29.6. [Почвовед.–1984, 5]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$ имеет решение.

Решить задачи на функциональные уравнения и функциональные последовательности:

3.30.1. [ВМиК–1997, апрель, устн.]. Существует ли линейная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x соотношению
$$f(x+3)-f(2-x)=3x+1\,?$$

3.30.2. [ВМиК–1997, апрель, устн.]. Существует ли квадратичная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x уравнению
$$f(1-x)-f(2-x)=-2x+7\,?$$

3.30.3. [ВМиК–2008, май, устн.]. Найти все функции $f(x)$, которые при каждом $x \in R$ удовлетворяют уравнению
$$f(x)+x\cdot f(1-x)=3x.$$

3.30.4. [ВМиК–1996, устн.]. Найти все функции $f(x)$, удовлетворяющие при всех $x \neq 0$ условию
$$f(x)+5x\cdot f(1/x)=3x^3.$$

3.30.5. [Мехмат–2008, 5]. Найти все функции f, удовлетворяющие уравнению
$$f(x)+(x-2)f(1)+3f(0)=x^3+2,\ x\in R.$$

3.30.6. [Химфак–2001, 7]. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению
$$f(x+1)=f(x)+2x+1.$$
Найти $f(2001)$, если $f(0)=0$.

3.30.7. [ВМиК–2002, устн.]. Найти все функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству
$$x\cdot f(y)+y\cdot f(x)\equiv(x+y)\cdot f(x)\cdot f(y)$$
для любых $x, y \in R$.

3.30.8. [ВМиК–2006, май, устн.]. Числовая функция для всех действительных x, y удовлетворяет равенству
$$g(x+y)=g(x)+g(y)+80xy.$$
Найти $g(4/5)$, если $g(1/4)=2$.

3.30.9. [Биолог.–2005, 7]. Задана функция f, причём $f(x+y)=f(x)+$ $+f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(10)=-\pi$. Найти $f(-2/7)$.

3.30.10. [Мехмат–2001, олимпиада, 10 класс]. Числовая функция $f(x)$ при каждом действительном x удовлетворяет равенству
$$x+f(x)=f(f(x)).$$
Решить уравнение $f(f(x))=0$.

3.30.11. [ВМиК–2006, май, устн.]. Последовательность функций $f_n(x)$ определяется следующим образом: $f_1(x)=x$, $f_{n+1}(x)=1/(1-f_n(x))$, $n\in N$. Найти $f_{2006}(2006)$.

Используя замену на ОДЗ иррационального множителя вида $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (или $\sqrt{a}-|b|$) на рациональный множитель $a-b$ (соответственно $a-b^2$) того же знака, решить задачу:

3.31.1. [Олимпиада «Ломоносов–2007»]. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|}\le 1.$$

Используя различные приёмы, решить иррациональные задачи:

3.32.1. [Дополнит. набор–2008, 5]. При каких значениях x числа $x+\sqrt{2x}-4$ и $4+\sqrt{2x}-x$ имеют противоположные знаки?

3.32.2. [Геолог.–1994, 5]. Решить неравенство $\sqrt{4z-3-z^2}\ne 0$.

3.32.3. [Геолог.–2000, май, 1]. Решить уравнение $\dfrac{x^3-3x^2-4x}{\sqrt[3]{x}}=0$.

3.32.4. [Геолог.–2008, устн.]. Решить неравенство

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2-2x}\le 2\sqrt{3}.$$

3.32.5. [Физфак–2002, 2]. Решить неравенство $\sqrt{5-x}/(3-x)<1$.

3.32.6. [Физфак–2002, март, 3]. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{9-4x-x^2}}{x+3}<1$.

3.32.7. [Социолог.–2004, апрель, 1]. Решить уравнение

$$\frac{x^3+7x^2+10x-3(x^2+7x)-30}{\sqrt{x+2}}=0.$$

3.32.8. [ВМиК–1982]. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2$.

3.32.9. [Почвовед., Глобальных процессов ф-ты, Высшая школа современных социальных наук–2006, 2]. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x^3}.$$

3.32.10. [Физфак–2003, май, 5]. Решить неравенство

$$\sqrt{12x^2+54x+6}+|2x^2+9x|\ge 11.$$

3.32.11. [Физфак–2003, март, 7]. Для каждого допустимого значения b в уравнении $\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{b}-x}=b$: 1) найти число различных решений уравнения; 2) найти эти решения.

3.32.12. [Физфак–1997,7]. Для любых значений a решить неравенство

$$(a+4)\sqrt{5-x}>a+3.$$

3.32.13. [Геолог.–2000, май, 7]. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства $x^2+a\le 0$ удовлетворяет неравенству

$$(x+2a)\sqrt{3-x}\le 0.$$

3.32.14. [Физфак–2000, 7]. При каких значениях a неравенство

$$\left(x^2-(a+8)x-6a^2+24a\right)\sqrt{3-x}\le 0$$

имеет единственное решение?

3.32.15. [Физфак–2001, март, 7]. Для любого значения a решить неравенство

$$4(a-3x)-3a\sqrt{a-3x}-a^2>0.$$

3.32.16. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2006, 7]. Для всех действительных значений a найти число точек пересечения графиков функций

$$y=\sqrt{2x-1} \text{ и } y=x+a.$$

3.32.17. [МШЭ–2006, 7]. При всех значениях параметра b решить неравенство $2(b-1)\sqrt{3x+1}+1\ge 3bx+b-3x$.

3.32.18. [Мехмат–2001, устн.]. Сколько корней может иметь уравнение

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+4}=\sqrt{3x+10}\,?$$

Решить задачи на многочлены:

3.33.1. [ВМиК–2004, устн.]. Найти хотя бы один многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

3.33.2. [ВМиК–2004, устн.]. Найти сумму коэффициентов многочлена, который получится после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$\left(1-3x+3x^2\right)^{34}\left(1+5x-5x^2\right)^{249}.$$

3.33.3. [Почвовед–2005, 5]. Для каких значений параметра q отношение суммы коэффициентов многочлена $\left(qx^3-9\right)^{14}$ к его свободному члену минимально?

3.33.4. [ВМиК–2002, апрель, устн.]. Найти остаток от деления многочлена $x^{2002}+x^{2001}+x^{1002}+x^{1001}+x^2+x+1$ на многочлен x^3-x.

Решить системы уравнений:

3.34.1. [Физфак–2003, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y| \\ x(4y+x-3) + y(4y+3) = 61. \end{cases}$$

3.34.2. [Физфак–2005, 5]. Решить систему

$$\begin{cases} y + 3\sqrt{x+y} = 18 - x \\ \left|3x - (y+1)\right| + 3\left|3(x+1) - y\right| = 4. \end{cases}$$

3.34.3. [Физфак–2006, 5]. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + \sqrt{4x^2 - y^2} = 6 \\ y\sqrt{(2x+y)(2x-y)} = 2, \end{cases}$$

и, считая в них x и y координатами точек, указать, какая из этих точек ближе к началу координат.

3.34.4. [ВМиК–2004, устн.]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^4 = 13x - 4 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Решить задачи смешанного типа:

3.35.1. [Ташкентский филиал МГУ–2007, 4]. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x}{\pi - x}} \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

3.35.2. [Физфак–2001, март, 1]. Решить неравенство

$$\frac{3x + 7^x - 25}{x+8} \ge 3.$$

3.35.3. [Геолог.–2007, 3]. Решить неравенство

$$\sqrt{2^{x^2-4} - 1} \cdot \left(x^2 - 7x + 6\right) \le 0.$$

3.35.4. [ВМиК–2007, устн.]. Решить неравенство

$$\frac{x^2 + \lg^2 x}{1 + x^2 + \lg^2 x} \le \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{\lg^2 x}{1 + \lg^2 x}.$$

3.35.5. [МШЭ–2007]. При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x - 3 \cdot 2^{3x+1} + 2 \cdot 4^{x+1} - (4 - 4a) \cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет три различных корня?

3.35.6. [Геолог.–2008, 7]. При всех значениях a решить уравнение
$$x^2+4x+6-4a(x-a)-\cos(x+2)=8a+\cos(x-4a+2).$$

Задачи с модулями

Раскрывая модуль по определению, решить задачи:

3.36.1. [Геолог.–1990, 2]. Решить уравнение $\dfrac{x}{|x|}+x=x^2+1$.

3.36.2. [Геолог.–2004, 1]. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{|x-1|}\le 3-x^2$.

3.36.3. [Физфак–1993, 5]. Решить неравенство $\dfrac{|x+2|-x}{x}<2$.

3.36.4. [Геолог.–2003, 1]. Решить неравенство $\dfrac{x-2}{|x+2|}+\dfrac{2x+5}{x+2}\le 0$.

3.36.5. [Геолог.–2002, 1]. Решить неравенство $\dfrac{x\cdot|x|+1}{x-2}+1\ge x$.

3.36.6. [Ташкентский филиал МГУ–2006, 2]. Решить неравенство
$$x(|x-1|-2)\ge 0.$$

3.36.7. [Геолог.–2005, 1]. Решить неравенство
$$(|x|-1)(2x^2+x-1)\le 0.$$

3.36.8. [Физфак–1997, май, 3]. Решить неравенство
$$\sqrt{x^2+2x+9}\le x+|2x-3|.$$

3.36.9. [Физфак–2000, май, 2]. Решить неравенство
$$\sqrt{x^2+|3-x|-10}>x-3.$$

3.36.10. [Олимпиада «Абитуриент–2008», ВМиК, 2]. Решить неравенство
$$\sqrt{4x^2+4x-|2x-1|-3}\ge 4x-3.$$

3.36.11. [Геолог.–1992, устн.]. Решить уравнение
$$\frac{4\sin x}{(x-3)^2}+|\sin x|=0.$$

3.36.12. [ВМиК–2004, устн.]. Решить неравенство
$$5|\sin x|+12\cos x\ge 13.$$

Используя метод интервалов, решить задачи:

3.37.1. [Психолог.–2005, 1]. Решить уравнение $|x-2|+2|x+1|=9$.

3.37.2. [ФГУ–2003, 2]. Решить неравенство $|2x+8|\geq 8-|1-x|$.

3.37.3. [Геолог.–1985, 2]. Решить неравенство $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}\geq 1$.

3.37.4. [Геолог.–2001, май, 1]. Решить неравенство $\dfrac{|x-3|+2}{|2x-3|-5}\leq 0$.

3.37.5. [ИСАА–2003, 2]. Решить уравнение $(|x|-5)^2-|5-x|=30$.

3.37.6. [Физфак–2003, 2]. Решить неравенство $|x^2+2x|+x^2-\dfrac{3}{2}\geq 0$.

3.37.7. [Высшая школа государственного аудита–2008, 4]. Решить уравнение

$$\sqrt{(7/4)-|x+1|}=1-|x|.$$

3.37.8. [ИСАА–1997, 2]. Решить уравнение

$$4|x+1|-1=3|2x+5|-2|x+5|.$$

3.37.9. [Психолог.–1985, 4]. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=|x^2+x|+|x^2-3x+2| \text{ на отрезке } [-1/2,3/2].$$

3.37.10. [Геолог.–1991, 6]. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$|x+2|+a|x-4|=6.$$

3.37.11. [Физфак–1993, май, 7]. Для любого a решить уравнение

$$2|x|+|x-3|=a.$$

3.37.12. [Геолог.–2001, май, 7]. При каких значениях y уравнение

$$|2x-6|+|2x+8|=yx+10$$

имеет единственное решение x?

Используя разложение на множители, решить задачи:

3.38.1. [Геолог.–2002, май]. Решить неравенство $\dfrac{x+1}{|2-x|}+\dfrac{x+1}{x-5}\leq 0$.

3.38.2. [Мехмат–2008, 1]. Решить неравенство

$$\big||1-x^2|-|x^2-3x+2|\big|\geq 3|x-1|.$$

Используя подходящую формулу сокращённого умножения, упростить и затем решить задачу:

3.39.1. [Геолог.–2006, 1]. Решить неравенство $\dfrac{x^2-9}{|x|-3}\cdot(x+4)\geq 0$.

Используя стандартные схемы, решить задачи:

Уравнения вида $|f(x)|=A$

3.40.1. [Высшая школа государственного аудита–2008, 1]. Решить уравнение
$$\frac{\big|3\cdot|1-x|-|x+2|\big|}{|1-4x|}=0.$$

3.40.2. [Почвовед., Глобальных процессов ф-ты–2007]. Решить уравнение
$$\big||x-1|-7\big|=10.$$

3.40.3. [Геолог.–1988, 1]. Решить уравнение
$$(x-2)\left(|x|+\sqrt{3}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

3.40.4. [ВМиК–2003, устн.]. Сколько корней имеет уравнение
$$\Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big|=1?$$

3.40.5. [Геолог.–1996, май, устн.]. Сколько решений имеет уравнение
$$\left||x-\sqrt{3}|-\frac{\pi}{2}\right|=\sqrt{2}\ ?$$

3.40.6. [Физфак–1983, 2]. Решить уравнение $|3x^2-20|=7$.

3.40.7. [Геолог.–1998, 2]. Решить уравнение $\big||4-x^2|-x^2\big|=1$.

3.40.8. [Филолог.–2005, 1]. Решить уравнение $\big|x^2-3|x|+1\big|=1$.

Неравенства вида $|f(x)|<A$

3.40.9. [Физфак–1996, май, 3]. Решить неравенство
$$-3<|x^2-9|<16.$$

3.40.10. [Олимпиада «Абитуриент–2005», ВМиК, отд. бакалавров, 2].
Решить неравенство $|x^2-2x-4|\leq 11$.

3.40.11. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2007]. Найти все целые x, для которых справедливо неравенство

$$\left|\frac{3}{x-2}\right| > \frac{9}{7}.$$

3.40.12. [Черноморский филиал МГУ–2004, 6]. Решить систему

$$\begin{cases} \left|x^2-4x\right|<2 \\ |x+1|<5. \end{cases}$$

Неравенства вида $|f(x)| > A$ и сводимые к ним

3.40.13. [Химфак–1996, май, 3]. Решить неравенство

$$\big|x+|1-x|\big|>3.$$

3.40.14. [Физфак–1995, май, 5]. Решить неравенство

$$\left|\log_5(x+3)\right|>1.$$

3.40.15. [ИСАА–2000, 5]. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left|x^2-2x+a\right|>5$ не имеет решений на отрезке $[-1,\ 2]$.

Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$

3.40.16. [Физфак–1995, 3]. Решить уравнение $2|x-1|=2+x$.

3.40.17. [Геолог.–1991, 2]. Решить уравнение

$$\left|x^2-2x-1\right|-x+1=0.$$

3.40.18. [Почвовед.–2001, май, 2]. Решить уравнение $|2x+3|=x^2$.

3.40.19. [Психолог.–2006, 1]. Решить уравнение $\left|7^x-3\right|=7^x+1$.

3.40.20. [Почвовед.–2004, май, 4]. Решить уравнение

$$|\cos x-2\sin x|+\cos x=0.$$

3.40.21. [Мехмат–2006, 4]. Решить уравнение

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x.$$

3.40.22. [Гос. управления ф-т–2007]. Решить уравнение

$$\left|\left|\sin x-\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}\left(\sin x+\frac{1}{4}\right).$$

3.40.23. [Мехмат–2003, 2]. Решить уравнение

$$\left|5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614\right| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}.$$

3.40.24. [ВМиК–2007, устн.]. Найти множество всех значений выражения

$$2a^2 + \left(b^2/2\right),$$

если $4a^2 + 6\left|4a^2 + b^2 - 6\right| = b^2 + 10$.

Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$

3.40.25. [Химфак.–2005, 1]. Решить уравнение $|2x-1| = |x-2|$.

3.40.26. [Химфак–2001, май, 1]. Решить уравнение $\dfrac{|2x-1|}{|x-1|} = \dfrac{|2x+1|}{|x+1|}$.

3.40.27. [Эконом.–2001, 2]. Решить уравнение

$$\left|x^2 - 8x + 15\right| = \left|15 - x^2\right|.$$

3.40.28. [Геолог.–2005,устн.]. Решить уравнение

$$\left|x^2 - 1\right| = \left|x^3 - x^2 - 1\right|.$$

3.40.29. [Геолог.–1999, 5]. Решить уравнение

$$\left|ctg^2 2x + 8\sqrt{-ctg 2x} - 3\right| = \left|ctg^2 2x - 8\sqrt{-ctg 2x} - 3\right|.$$

Неравенства вида $|f(x)| > g(x)$ *и сводимые к ним*

3.40.30. [Физфак–1998, май, 2]. Решить неравенство

$$\left|x^2 + 3x - 4\right| > x.$$

3.40.31. [Физфак–2003, 2]. Решить неравенство

$$\left|x^2 + 3x\right| + x^2 - 2 \ge 0.$$

3.40.32. [ИСАА–2000, 1]. Решить неравенство

$$|2x-1| > \frac{1}{x-2}.$$

3.40.33. [ВШБ–2003, апрель, 3]. Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x+4} - 2\right| > \frac{6}{\sqrt{x+4} - 3}.$$

3.40.34. [ВМиК–2000, апрель, 1]. Решить неравенство

$$\left|\left|x^2 - 8x + 2\right| - x^2\right| \ge 2x + 2.$$

Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ и сводимые к ним

3.40.35. [Ташкентский филиал МГУ–2007]. Решить неравенство
$$|2x-3|-x\le 1.$$

3.40.36. [Эконом.(отд. полит. экономии)–1969, 2]. Решить неравенство
$$|x^2-1|-2x<0.$$

3.40.37. [Геолог.–2002, май, устн.]. На плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют условию
$$|x-y|<2x.$$

3.40.38. [Высшая школа бизнеса–2004, 1]. Решить неравенство
$$\frac{x+1}{|x-1|}\ge 1.$$

3.40.39. [Географ.–2003, май, 3]. Решить неравенство
$$2\sqrt{9-x^2}<x+3\left(\sqrt{2}+1\right)-\left|x+3\left(\sqrt{2}-1\right)\right|.$$

Неравенства вида $|f(x)| > |g(x)|$ и сводимые к ним

3.40.40. [Почвовед.–2005, 3]. Решить неравенство $|x-1|\le|x|$.

3.40.41. [Физфак–1993, 5]. Решить неравенство $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|>2$.

3.40.42. [Физфак–1999, 2]. Решить неравенство $\left|3+\dfrac{1}{x+2}\right|<5$.

3.40.43. [Московская школа экономики–2007]. Решить неравенство
$$\left|\frac{x}{10}-\frac{1}{5}\right|\ge\left|\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right|.$$

3.40.44. [Эконом.–2001, 1]. Решить неравенство
$$|x^2-8x+15|\le|15-x^2|.$$

3.40.45. [«Покори Воробьёвы горы–2007», очный тур, ВМиК, 1]. Найти наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенству
$$|2x^2-7x-1|\ge|2x^2-9x+5|.$$

3.40.46. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2003, май, 4]. Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}\right|\le 1.$$

3.40.47. [Мехмат–2004, март, заочный тест, 1]. Решить неравенство

$$\left|x^3+2x^2+2\right|<\left|x^3+3x^2+3x-2\right|.$$

3.40.48. [ВМиК–2001, устн.]. Изобразить на координатной плоскости геометрическое место точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$\left|x^2+xy+y^2\right|\ge\left|x^2+xy-y^2\right|.$$

Используя приём возведения в квадрат, решить задачи:

3.41.1. [Геолог., МШЭ–2008, 2]. Решить неравенство

$$|x+1|\le\sqrt{(x+1)^2\left(x^2-25\right)}.$$

3.41.2. [Геолог.–2004, устн.]. Решить уравнение $|\sin x|+|\cos x|=1$.

3.41.3. [Геолог.–1986, 5]. Для каждой пары положительных чисел a и b найти решение неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}>\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right|.$$

Используя подходящую замену переменных, решить задачи:

3.42.1. [Физфак–1990, 1]. Решить уравнение $x^2-4|x|-2=0$.

3.42.2. [Геолог.–1995, 2]. Решить неравенство $x^2-6\ge|x|$.

3.42.3. [Физфак–1974, 2]. Решить неравенство $3|x-1|>(x-1)^2+1$.

3.42.4. [Геолог.–2004, устн.]. Решить неравенство

$$\left|x^2-1\right|+\left|x^2-3\right|\le 4.$$

3.42.5. [Физфак–2000, 5]. Решить уравнение

$$2\left|2^{x-1}-1\right|+\left|4^{x/2}-3\right|=1.$$

3.42.6. [Физфак–2004, 2]. Решить неравенство $\dfrac{|x-3|}{2-\dfrac{8}{|x-3|}}<-1$.

3.42.7. [Химфак, Биофак, Фунд. медицины, Биоинж. и биоинформ., Географ., Психфак–2007]. Решить уравнение

$$\left(x^2-7|x|+6\right)\sqrt{4x+23}=0.$$

3.42.8. [Эконом.–2007]. Для каждого значения x, удовлетворяющего условию $x^2-|x|-42=0$, найти все числа y, для которых выполнено неравенство

$$-7\cdot\sqrt{y^2-10y+34}\geq 4x+7.$$

3.42.9. [Физфак–2003, май, 5]. Решить неравенство

$$\sqrt{12x^2+54x+6}+\left|2x^2+9x\right|\geq 11.$$

3.42.10. [ФНМ–2004, апрель, 2]. Решить неравенство

$$|3x+1|+2+\frac{3}{|3x+1|-2}\leq\frac{1}{|3x+1|+2}.$$

3.42.11. [Геолог.–1998, май, 6]. Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|-3x+3\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3x^2}{2}-\left|\frac{x^2}{2}+x-\sqrt{2}\right|.$$

3.42.12. [ВМиК–2003, устн.]. Решить уравнение

$$x^4-7x^2+2x+2=|4x-1|-\left|2x^2-3\right|.$$

3.42.13. [Физфак–1994, май, 7]. При каких значениях параметра a уравнение

$$a(x+3)^2-2|x+3|+2=0$$

имеет четыре различных решения?

3.42.14. [ВМиК–1999, устн.]. Решить уравнение

$$x^2=\left(|x|^{1/|x|}+2\right)^{|x|}.$$

Выделяя множители, сохраняющие определённый знак, сократить на них (или умножить) и упростить задачу (случай их обращения в нуль рассмотреть отдельно):

3.43.1. [Геолог.–1995, май, устн.]. Решить неравенство $\dfrac{5-x^2}{|x|}\geq 0$.

3.43.2. [Геолог.–1994, май, 6]. Решить неравенство

$$|x|\cdot\left(x^4-2x^2-3\right)\geq 0.$$

3.43.3. [Геолог.–1998, май, 1]. Решить неравенство

$$\left(x^2+5x-6\right)\cdot|x+4|^{-1}<0.$$

3.43.4. [Институт стран Азии и Африки–2007]. Решить неравенство

$$|x+3|\cdot(|x-1|-3)\le 0.$$

3.43.5. [Высшая школа бизнеса–2004, 1]. Решить неравенство

$$\frac{x+1}{|x-1|}\ge 1.$$

3.43.6. [Высшая школа бизнеса–2005, 1]. Решить неравенство

$$\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x-|2x-1|}}\ge 0.$$

Найдя ОДЗ, упростить задачу и затем решить её:

3.44.1. [Геолог.–2007]. Решить неравенство $|x-12|\le\dfrac{x}{12-x}$.

3.44.2. [Химфак, ФНМ–2006, 1]. Решить неравенство $\sqrt{1-|x|}\ge x-2$.

3.44.3. [МШЭ–2006, 5]. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}|x^2-2x|<y+1\\ y+|x-1|<2.\end{cases}$$

3.44.4. [Государственного управления ф-т–2008, 1]. Решить уравнение

$$|1-x|+|x+1|=\frac{2x}{|x|}.$$

3.44.5. [Глобальных процессов ф-т–2006, 3]. Решить неравенство

$$\frac{|x^2+x-12|}{x-3}\ge 1.$$

Используя метод оценок и (или) свойства модуля, решить задачи:

3.45.1. [Московская школа экономики–2005, 1]. Решить уравнение

$$|2x-4|+4=2x.$$

3.45.2. [Химфак–1999, май, 1]. Решить уравнение

$$x^2+1+|x-1|=2|x|.$$

3.45.3. [Филолог., Социолог.–2006, 1]. Решить неравенство

$$\frac{5-4x}{|x-2|}\le|2-x|.$$

3.45.4. [Геолог.–1997, 7]. Решить уравнение
$$|x+y-3xy+13|+|x^2y+xy^2-30|=0.$$

3.45.5. [Глобальных процессов ф-т–2006, 1]. Решить неравенство
$$\left(|x+1|+|2x-1|\right)\cdot\lg\left(\pi/\sqrt{10}\right)^{2x}\ge 0.$$

3.45.6. [Олимпиада «Ломоносов–2008», Геолог., устн.]. Решить неравенство
$$\frac{|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-2007|}{|2008-x|-1}\le 0.$$

3.45.7. [Химфак–2003, 3]. Решить неравенство
$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(2-|x-1|\right)>\log_{\sqrt{10}}\left(2x-x^2\right).$$

3.45.8. [Геолог.–2004, устн.]. Решить неравенство
$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-1}\right|<|x|+\frac{1}{|x-1|}.$$

3.45.9. [Олимпиада «Покори Воробьёвы горы–2005», заочный тур, 2]. Решить неравенство
$$\left|\sqrt{x+3}-2\right|+\sqrt{x+3}+|x+1|\le x+3.$$

3.45.10. [Химфак–2001, 5]. Решить уравнение
$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+\ldots+|x-100|+|x+100|=200x.$$

3.45.11. [Геолог.–1998, 8]. При каких значениях параметра a уравнение
$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x-1=0$$
имеет хотя бы одно решение?

3.45.12. [Почвовед., Глобальных процессов ф-ты, Высшая школа современных социальных наук–2008, 7]. Определить, какое наименьшее значение может принимать выражение
$$|x-3y-4|+|3y+8-x|+\sqrt{x^2-xy-2y^2},$$
и найти суммарную длину линий, состоящих из всех точек $(x;y)$ координатной плоскости, в которых это значение достигается.

3.45.13. [ВМиК–1993, 3]. Решить неравенство
$$|3^x-4|+|x^2-4x+3|\le 3^x+4x-x^2-7.$$

3.45.14. [Химфак–1996, 5]. Решить уравнение

$$\left|1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|+\left|x^2-15x+44\right|=15x-x^2-\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)-45.$$

3.45.15. [ВМиК–2008, 3]. Решить неравенство

$$\sqrt{1+\sin 2x}+|\cos x|\le \sin x.$$

3.45.16. [Олимпиада «Ломоносов–2007»]. Найти все возможные значения $x\in(0,\pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|tgx\cdot tg2x\cdot tg3x|+|tgx+tg2x|=tg3x.$$

3.45.17. [Мехмат–2005, 2]. Найти $\log_2\left(2x/2^x\right)$ при условии

$$\left|\log_{\sqrt{2x}}x^{x/2}-2\log_2 x\right|+\left|\left|2-x\right|-\left|\log_2 x\right|\right|\le (x-2)\log_8 x^3.$$

Используя метод замены множителей вида $|a|-|b|$ на множители a^2-b^2 эквивалентного знака или домножение на «сопряжённое» выражение, решить задачи:

3.46.1. [Мехмат–2004, 2]. Решить неравенство $\dfrac{|x-2|+1}{|2x+3|-7}\le 0$.

3.46.2. [Мехмат–2000, март, 1]. Решить неравенство

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}.$$

3.46.3. [Мехмат–2004, 2]. Решить неравенство

$$\frac{\left(x^2+x+1\right)^2-2\left|x^3+x^2+x\right|-3x^2}{10x^2-17x-6}\ge 0.$$

3.46.4. [Мехмат–1998, 2]. Решить неравенство

$$\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{1/2}(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|}\ge 0.$$

Используя графический и (или) функциональный подходы, решить задачи:

3.47.1. [Геолог.–1997, май, устн.]. Построить график функции

$$y=\left|x+\sqrt{5}\right|.$$

3.47.2. [Геолог.–1992, устн.]. Построить график функции

$$y=|x+1|\cdot|x-3|.$$

3.47.3. [Геолог.–1992, устн.]. Построить график функции

$$y = x^2 - 7|x| + 10.$$

3.47.4. [Геолог.–1995, май, устн.]. Построить график функции

$$y = |x+1| \cdot x.$$

3.47.5. [Геолог.–1998, май, устн.]. Построить график функции

$$y = |x^2 + x| - 2.$$

3.47.6. [Геолог.–1998, устн.]. Построить график функции

$$y = x^2 + |x| - 6.$$

3.47.7. [Геолог.–2004, устн.]. Построить график функции

$$y = |x^2 - 2x| - x^2.$$

3.47.8. [Геолог.–1993, устн.]. Построить график функции

$$y = 1 - \sqrt{|x|}.$$

3.47.9. [Геолог.–1992, устн.]. Построить график функции $y = ||x| - 2|$.

3.47.10. [Геолог.–1993, устн.]. Построить график функции $y = 1 - \dfrac{1}{|x|}$.

3.47.11. [ВМиК–2004, устн.]. Построить график функции $y = \dfrac{|x|}{1-x}$.

3.47.12. [Геолог.–2001, устн.]. Имеет ли корни уравнение

$$|x| = x^2 - 8x + 18?$$

3.47.13. [Геолог.–2004, устн.]. При каких значениях параметра a уравнение $|x - a| = x + 1$ не имеет корней?

3.47.14. [Геолог.–2005, устн.]. При каких значениях параметра a уравнение $|x - a| = (x/2) + 1$ имеет не более одного корня?

3.47.15. [Геолог.–2002, май, устн.]. Найти наибольшее целое значение a, при котором уравнение $(3 - x)^5 = |x + a|^5$ не имеет решений.

3.47.16. [ВМиК–2003, устн.]. Сколько корней имеет уравнение

$$|||x - 1| - 2| - 3| = 1?$$

3.47.17. [Геолог.–2007, устн.]. Найти наименьшее значение функции

$$y = |x + 2| + |x - 1|.$$

3.47.18. [Социолог.–2004, апрель, 2]. Дана функция

$$y(x)=|x-3|+|2x-4|+1.$$

а) Найти наименьшее значение функции $y(x)$.

б) Решить неравенство $y(x)>8$.

3.47.19. [Геолог.–2008, устн.]. Найти наименьшее значение функции

$$y=|x-2006|+|x-2007|+|x-2008|.$$

3.47.20. [Геолог.–2002, устн.]. Найти наименьшее значение функции

$$y=\left|(x+1)\cdot|x+1|-|x|\cdot x\right|.$$

3.47.21. [Геолог.–2003, устн.]. Построить график функции

$$y=2\frac{x^3+5x^2+6x}{|x|-x}.$$

3.47.22. [Геолог.–2006, устн.]. Построить график функции

$$y=\log_2(2-|x|).$$

3.47.23. [Геолог.–2007, устн.]. Построить график функции

$$y=2^{\frac{|x|-x}{x}}.$$

3.47.24. [Геолог.–2006, устн.]. Построить график функции

$$y=\sin x-|2\sin x|.$$

3.47.25. [Геолог.–2002, устн.]. Построить график функции

$$y=0{,}5(tg|x|\cdot tgx).$$

3.47.26. [Геолог.–1999, устн.]. Построить график функции

$$y=(\sin|x|+\cos|x|)^2.$$

3.47.27. [ВМиК–1999, устн.]. Построить график функции

$$y=\arcsin(|\sin x|).$$

3.47.28. [Олимпиада «Абитуриент–2007», ВМиК, устн.]. Найти главный период функции

$$y=|tgx|+|ctgx|.$$

3.47.29. [Олимпиада «Абитуриент–2007», ВМиК, устн.]. Найти главный период функции

$$y=|\sin x|+|\cos x|.$$

3.47.30. [Геолог.–2001, май, устн.]. На плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют условию $|x|-2y=2x$.

3.47.31. [Геолог.–1994, устн.]. Изобразить на плоскости Oxy множество точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$y-|y|=2(x+1).$$

3.47.32. [Геолог.–2002,устн.]. На плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют условию

$$|x+2y|\le 8.$$

3.47.33. [Геолог.–1994, устн.]. Изобразить на плоскости Oxy множество точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$|y-1|+|x+3|=2.$$

3.47.34. [Геолог.–2008, устн.]. Найти площадь фигуры, задаваемой неравенством

$$|x+2y|+|x-1|\le 3.$$

3.47.35. [Геолог.–2001, устн.,2]. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $|y-2x|+|y+2x|\le 2$.

3.47.36. [Геолог.–1995, май, 8]. Изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством

$$x^2+y^2+6(x-|y|)\le 0.$$

Найти площадь этой фигуры.

3.47.37. [Геолог.–2002, устн.]. На плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству

$$3|x-y|\ge 2+(x-y)^2.$$

3.47.38. [Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь)–2006, 6]. Найти площадь фигуры на плоскости Oxy, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам

$$1-x-|y|\ge 0 \text{ и } x-2|y|\ge 0.$$

3.47.39. [Геолог.–2007, устн.]. Изобразить на координатной плоскости множество точек $M(x;y)$, для которых $\dfrac{y-x}{|y+x|}\le 1$.

3.47.40. [Геолог.–2007, устн.]. Изобразить на координатной плоскости множество точек $M(x;y)$, для которых $\big|2x-|x+y|\big|\le x+y$.

3.47.41. [ВМиК–2008, устн.]. Изобразить на координатной плоскости $(x;y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$|y-1|-x^2+3x-2=y+|x^2-3x+2|-1.$$

3.47.42. [ВМиК–1999, устн.]. Изобразить на координатной плоскости $(x;y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$|y-2x|+|y-x|+|y+x|+|y+2x|=4.$$

3.47.43. [ВМиК–2003, апрель, устн.]. Изобразить на координатной плоскости $(x;y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$2y^2 \le \log_2|x|\cdot\left(3|y|-2\log_4|x|\right).$$

3.47.44. [Геолог.–1999, устн.]. При каких значениях параметра a модуль разности корней уравнения $x^2-6x+12+a^2=4a$ принимает наибольшее значение?

3.47.45. [Геолог.–2002, устн.]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}|x-y|=2\\ |x|-|y|=4.\end{cases}$$

3.47.46. [Геолог.–2002, устн.]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}|x-y|=4\\ |x|-|y|=2.\end{cases}$$

3.47.47. [ВМиК–2003, устн.]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}|x|+|y|=1\\ |x+y|=1.\end{cases}$$

3.47.48. [Географ.–2005, 4]. Найти периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости удовлетворяют системе

$$\begin{cases}y>\big||x-2|-1\big|\\ x^2+y^2<4x+2y-3.\end{cases}$$

3.47.49. [ВМиК–2006, устн.]. Найти минимальное значение величины $x+y$, если x и y – целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases}|y-2x+1|\le 3\\ y>-4.\end{cases}$$

3.47.50. [Геолог.–2005, 7]. Найти все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a|+|x-2+a|\le 3$.

3.47.51. [Геолог.–2001, май, 7]. При каких значениях y уравнение

$$|2x-6|+|2x+8|=yx+10$$

имеет единственное решение x?

3.47.52. [Олимпиада «Ломоносов–2005», 8]. Найти все значения a, при которых уравнение

$$4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

3.47.53. [Психолог.–2003, 5]. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-9a|-2a^2+35+x=0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30,63]$?

3.47.54. [Химфак–2005, 6]. При каких значениях a уравнение

$$|x|+\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=a \quad \text{имеет ровно три решения?}$$

3.47.55. [Географ.–1992, 5]. Найти все значения параметра c, при каждом из которых уравнение

$$|x^2-2x|+|x^2-3x+2|=x^2-4x+c$$

имеет ровно три различных решения.

3.47.56. [Олимпиада «Ломоносов–2009», 9]. Найти все пары $(x;y)$, при каждой из которых для чисел

$$u=\sqrt{4+x^3-9x}-x-3^y \text{ и } v=2-x-3^y$$

справедливы сразу все три следующих высказывания: если $|u|>|v|$, то $u>0$, если $|u|<|v|$, то $0>v$, а если $|u|=|v|$, то $u>0>v$.

Решить задачи, в которых используются понятия наименьшего (наибольшего) из двух или нескольких чисел:

3.48.1. [Психолог.–1971, 3]. Найти все такие x, что наименьшее из чисел $1-x^2$, $(1-x)/2$ больше $1/2$.

3.48.2. [ВМиК–2003, устн.]. Решить уравнение

$$\max(x,\ 2-x)=\min(3x,\ 1+2x).$$

3.48.3. [Почвовед.–1990, 5]. Найти все значения x, при которых наибольшее из значений функций $y=2x+1$ и $y=x+2$ больше -1.

3.48.4. [ВМиК–2004, устн.]. Решить неравенство

$$\min\left(1-x^2, \frac{1-x}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

3.48.5. [ВМиК–2004, устн.]. Найти наибольшее значение функции

$$y = \min\left(1-x,\ 2x-1,\ x/3\right) \text{ на отрезке } [0,1].$$

Используя различные подходы, решить системы:

3.49.1. [Физфак–1994, май, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x+2|+|y-3|=1 \\ y=3-|x+2|. \end{cases}$$

3.49.2. [Геолог.–1998, устн.]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$$

3.49.3. [Физфак–1997, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y-|x-3|=1 \\ |x-y|=3. \end{cases}$$

3.49.4. [Геолог.–2004, устн.]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y^2|=1 \\ |x|-|y|=1. \end{cases}$$

3.49.5. [Физфак–1998, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+|x+y|=0 \\ y-2+\sqrt{x-y+5}=0. \end{cases}$$

3.49.6. [Физфак–1999, март, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+2}-|y+2|=0 \\ 2\sqrt{y^2+4y+4}+\sqrt{x^2-x-2}=0. \end{cases}$$

3.49.7. [Физфак–2001, май, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |\cos y|\cos y = |\sin x|/(4\sin x) \\ |\sin x-2|^2+|\cos y|^2=9. \end{cases}$$

3.49.8. [Физфак–2003, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x-y}=9-|x+2y|\\ x(4y+x-3)+y(4y+3)=61.\end{cases}$$

3.49.9. [Мехмат–2003, март, 4]. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases}|y+\log_2 x|+\left|y+1-2^{x-1}\right|=\left|2y-2^{x-1}+1+\log_2 x\right|\\ |x|+|y+1|+|y-1|=x+2.\end{cases}$$

3.49.10. [Физфак–2004, март, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\left|7^y-7^x\right|+7^y+3\cdot 7^x=16\sqrt{7}\\ \left|7^{y-1}+7^{-x}\right|+6\cdot 7^{y-1}-50\cdot 7^{-x}=0.\end{cases}$$

3.49.11. [Физфак–2005, 5]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+2\sqrt{x-y}=y+3\\ |(x+1)+2y|+2|x+2(y-1)|=3.\end{cases}$$

3.49.12. [МШЭ–2005, 7]. Найти все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x^2+1)b=y+\cos 2x\\ 2^{|\sin x|}+|y|=2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

3.49.13. [Психолог.–2006, 5]. При каждом a решить систему

$$\begin{cases}|2x+2a|>|x|+a\\ ax<0.\end{cases}$$

Используя разную монотонность функций в левой и правой частях уравнений (неравенства), подбирая корень, решить задачу:

3.50.1. [Олимпиада «Ломоносов–2006», 6]. Решить неравенство

$$\sqrt{4-x}-2\le x|x-3|+4x.$$

Используя различные приёмы, решить задачи:

3.51.1. [Эконом. (отделение менеджмента)–2006, 4]. Найти решения уравнения $\sin x=\left|2\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\right|$, принадлежащие интервалу $(8,12)$.

3.51.2. [Мехмат–2006, 6]. Найти наименьшее значение выражения

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y|,$$

где x и y – произвольные действительные числа.

3.51.3. [Мехмат–2003, май]. Решить неравенство

$$\frac{1}{|7-\log_3(3x)|}+\frac{1}{|4-\log_9(9x^2)|}\le\frac{1}{|\log_9(81x)|}.$$

3.51.4. [Почвовед.–2003, май, 5]. Решить неравенство

$$\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5|>0.$$

3.51.5. [Геолог., МШЭ–2008]. Решить неравенство

$$\log_{x-3}(5-x)\le\log_{x-3}|4x-14|.$$

3.51.6. [Геолог.–2006, 4]. Решить неравенство

$$\left(\log_{|x+2|}4\right)\left(\log_4\left(x^2+x-2\right)\right)\le 1.$$

3.51.7. [ФГП–2005, 3]. Решить неравенство

$$\log_{0,5-|2x^2-5x+2|}\left(0,5+|8x^2-2x-1|\right)\ge 1.$$

3.51.8. [ИСАА–2005, 5]. Решить неравенство

$$\log_{4|x|+1}(6x+2)-\log_{6x+2}(4|x|+1)<0.$$

3.51.9. [Психолог.–2006, 3]. Решить уравнение

$$\log_2(3|\sin x|-|\cos x|)+\log_2|\cos x|=0.$$

3.51.10. [ФГУ–2006, 4]. Решить уравнение $\sin|1-2x|+\cos x=0$.

3.51.11. [Факультет Глоб. процессов–2006, 4]. Решить уравнение

$$\log_{|\cos(x/2)|}|1-2\cos(\pi/6)|=\log_{\cos|x/2|}\sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$

3.51.12. [ИСАА–2006, 6]. Решить неравенство

$$\left(3-\log_{\left|2x+\frac{1}{2}\right|}\left(\frac{1}{4}-x\right)\right)\cdot\log\left(\frac{1}{4}-x\right)<2\log_3\left|2x+\frac{1}{2}\right|.$$

🕮 ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

К РАЗДЕЛУ 1

1.1.1. Первое число больше. *Указание*: представить числа в виде $\left(3^4\right)^{100}$ и $\left(4^3\right)^{100}$. **1.1.2.** Второе число больше. *Указание*: сравнить каждое из чисел с ближайшей к нему степенью числа 2. **1.1.3.** Первое число меньше. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.1.4.** 17964. *Указание.* Вычтем «столбиком» из первого числа второе:

$$\begin{array}{r} -\overbrace{1000\ldots\ldots000000}^{1999} \\ \underline{000\ldots\ldots001999} \\ \underbrace{999\ldots\ldots99}_{1995}8001 \end{array}.$$

Получается, что сумма цифр этой разности составляет $9\cdot 1995+8+$ $+0+0+1=17964$. **1.1.5.** Сумма цифр равна 18047. **1.1.6.** *Указание*: так как $72=8\cdot 9$, то воспользоваться соответствующими признаками делимости. **1.1.7.** $53010,\ 53910,\ 53415$. *Указание*: применить признаки делимости на 5 и 9. **1.1.8.** *Указание*: преобразовать сумму к виду $n(n+1)/2$, умножить на 2 и свести задачу к доказательству того, что произведение двух последовательных натуральных чисел $n(n+1)$ не может оканчиваться цифрой 4 (достаточно найти все возможные цифры, на которые может оканчиваться это произведение, и убедиться в том, что среди них нет цифры 4). **1.1.9.** *Указание*: число делится на 3, но не делится на 9. **1.1.10.** *Указание*: заметим, что $243=3^5$. Докажем по индукции более общее утверждение, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, делится на 3^n. Для $n=1$ утверждение верно (111 делится на 3). Заметим, что $111\,111\,111=111\cdot 1001001$, и вообще $\underbrace{1\ldots1}_{3^{n+1}}=\underbrace{1\ldots1}_{3^n}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{3^n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{3^n-1}1$, причём второй множитель делится на 3. Это обосновывает индуктивный переход, что и требовалось доказать.

1.2.1. $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$. *Указание*: привести выражение $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ к виду $(n(n+3))\,((n+1)(n+2))+1=$ $=\left(n^2+3n\right)\cdot\left(n^2+3n+2\right)+1$, и сделать замену $k=n^2+3n+1$. **1.2.2.** *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.2.3.** *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.2.4.** Не существуют. *Решение.* Пусть $n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2$ – искомые числа. По условию, $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2)$. Если бы $5(n^2+2)$ было полным квадратом, то оканчивалось бы на 0 или 5, но это выражение может оканчиваться только на 1, 2, 3, 6, 7, 8. **1.2.5.** 7744. *Указание*: по условию, $\overline{aabb}=n^2 \Leftrightarrow 11(100a+b)=n^2 \Rightarrow n=11k,\ k\in N \Rightarrow$ число $100a+b$ делится нацело на 11, а значит, по признаку делимости на 11, $(a+b)\vdots 11$. Далее перебором с учётом того, что полный квадрат может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9. **1.2.6.** *Решение*: $A=1+10+\ldots+10^{2m-1}=\dfrac{10^{2m}-1}{9}$, аналогично $B=\dfrac{10^{m+1}-1}{9}$, $C=6\cdot\dfrac{10^m-1}{9}$. Отсюда $A+B+C+8=\left((10^m+8)/3\right)^2$. **1.2.7.** *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.2.8.** *Решение*: из условий задачи следует, что заданное число N оканчивается на 25 или 75 и является квадратом числа вида $10k+5$. Если $N=100m+75=(10k+5)^2$, то $2m+1=2(k+1)k$, противоречие. Если $N=100m+25=(10k+5)^2$, то $m=(k+1)k$, значит, m – чётное, что и требовалось доказать. **1.2.9.** Таких чисел не существует. *Решение.* 1) Пусть $k\ge l$, тогда $k^2<k^2+l\le\le k^2+k<(k+1)^2$. Так как k^2+l лежит строго между двумя последовательными квадратами целых чисел, то само не может быть квадратом целого числа. Следовательно, в этом случае первое уравнение системы не имеет решений. 2) Пусть $k<l$, тогда $l^2<k+l^2\le l+l^2<(l+1)^2$. Аналогично рассуждая, получаем, что $k+l^2$ не может быть квадратом целого числа. Значит, второе уравнение системы не имеет решений.

1.3.1. *Указание*: преобразовать выражение к виду $(n-1)n(n+1)$, или воспользоваться методом математической индукции. **1.3.2.** *Указание*: преобразовать выражение к виду $(n-1)n(n+1)-6n$, или воспользоваться методом математической индукции. **1.3.3.** *Указание*: преобразовать выражение к виду $n(n+1)(n+2)$, или воспользоваться методом математической индукции. **1.3.4.** *Указание*: преобразовать число к виду $\underbrace{99\ldots9}_{1999}-1998$. **1.3.5.** *Указание*: рассмотреть случаи $n=3k+q$, $q=0,\ 1,\ 2$, или воспользоваться методом математической индукции. **1.3.6.** Не существует. *Указание*: достаточно доказать, что данное выражение не делится на 5. Например, это можно сделать, проанализировав его возможную последнюю цифру, или воспользоваться методом анализа остатков (рассмотреть случаи $n=5p+q,\ q=0,1,..,4$, и показать, что остатки от деления данного выражения на 5 отличны от нуля). **1.3.7.** $2\cdot 38^4$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.3.8.** *Указание*: свести задачу к доказательству того, что разность n^5-n делится нацело на 10 (для этого можно рассмотреть случаи $n=5p+q,\ q=0,1,..,4$). **1.3.9.** *Указание*: достаточно доказать, что разность $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)$ кратна 6. **1.3.10.** *Решение*. Представим число в виде $(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)(2n+2)$, при этом $240=$ $=15\cdot 16$. Очевидно, что произведение пяти последовательных целых чисел кратно 5 и кратно 3. Осталось доказать делимость на 16. Но произведение трёх последовательных чётных чисел кратно 16. **1.3.11.** *Указание*: сделать замену $m=n-1$. Решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.3.12.** 686. *Решение*. Вычеркнем из 999 чисел, меньших тысячи, числа, кратные 5: их количество равно $[999/5]=199$. Далее вычёркиваем числа, кратные 7, их количество равно $[999/7]=142$. Но среди чисел, кратных 7, имеется $[999/35]=28$ чисел, одновременно кратных 5. Они вычеркнуты дважды. Всего вычеркнуто $199+142-28=313$ чисел. Осталось $999-313=686$. **1.3.13.** 30. *Решение*: найдём все такие натуральные n, чтобы $K_1=\dfrac{5600}{n}=\dfrac{2^5\cdot 5^2\cdot 7}{n}\in N$ и $K_1=\dfrac{3024}{n+5}=\dfrac{2^4\cdot 3^3\cdot 7}{n+5}\in N$. Так как n и $n+5$ одновременно кратны 5, а 3024 не делится на 5, то n может принимать лишь значения $2^k\cdot 7^m$, где $k\in\{0;1;2;3;4;5\}$, $m\in\{0;1\}$. Остаётся произвести перебор, проверяя делимость числа 3024 на $n+5$: 1) $m=0$, $n\in\{0;2;4;8;16;32\}$, $n+5\in\{6;7;9;13;21;37\}$; 2) $m=1$, $n\in\{7;14;28;56;112;224\}$, $n+5\in\{12;19;33;61;117;229\}$. Итак, искомые числа: 1, 2, 4, 16, 7, а их сумма равна 30. **1.3.14.** *Указание*: группировкой привести к виду $5\left(5^{5k}-4^{5k}\right)+\left(3^{5k}-4^{5k}\right)+22\cdot 4^{5k}$, и доказать, используя формулу сокращённого умножения $a^n-b^n==(a-b)\left(a^{n-1}+\ldots+b^{n-1}\right)$, что выражения в скобках делятся на 11. **1.3.15.** $n=3k,\ k\in N$. *Указание*: рассмотреть случаи

$n = 3k + q$, $q = 0,1,2$. **1.3.16.** q и r всегда делятся на 37. *Указание*: $p = 100a + 10b + c = 37k$, $k \in N$, тогда $q = 100b + 10c + a = 10(100a + {} + 10b + c) - 999a = 37(10k - 27a) \vdots 37$. Аналогично доказывается, что $r \vdots 37$. **1.3.17.** а) Не может. б) Может, например, 7125. *Решение.* а) $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0} = \overline{a_{k-1} \ldots a_0} \cdot 58$. Обозначив $n = \overline{a_{k-1} \ldots a_0}$, получим $a_k \cdot 10^k + n = {} = 58n \Leftrightarrow a_k \cdot 10^k = 57n$. Число справа делится на 19, а слева – нет. Противоречие. Следовательно, не может. б) $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0} = \overline{a_{k-1} \ldots a_0} \cdot 57$. Пусть $n = \overline{a_{k-1} \ldots a_0}$, тогда $a_k \cdot 10^k + n = 57n \Leftrightarrow a_k \cdot 10^k = 56n$. При $k \geq 3$ $10^k \vdots 8$, а a_k можно взять равным 7. Например, $\overline{7abc} = 57 \cdot \overline{abc} \Leftrightarrow 7000 + \overline{abc} = {} = 57 \cdot \overline{abc} \Leftrightarrow 7000 = 56 \cdot \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} = 125$. Число 7125 удовлетворяет условиям. **1.3.18.** $n \in \{-5;0\}$. *Решение.* Поскольку $5(n^3 + n^2/5 - n + 115) = {} = (n+1)(5n^2 - 4n - 1) + 576$, то увеличенная в 5 раз исходная дробь r равна $5r = (n+1) + 576/d \in Z$, где $d = 5n^2 - 4n - 1 = (5n+1)(n-1)$, поэтому число $576 = 2^6 \cdot 3^2$ делится на d (так как $5r \in Z$ и $n + 1 \in Z$), причём $n \vdots 5$ (иначе $n^2/5 \notin Z \Rightarrow r \notin Z$) и $|n| < 15$ (иначе $|d| \geq 5 \cdot 15^2 - 4 \cdot 15 - 1 > 576 \Rightarrow {} \Rightarrow r \notin Z$). Подставляя значения $n = 0, \pm 5, \pm 10$, получаем $d = -1$, $26 \cdot 4$, $24 \cdot 4$, $51 \cdot 9$, $49 \cdot 9$, откуда выводим, что $r \in Z$ в точности при $n = 0, -5$.

1.4.1. *Указание*: имеем $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2 + 2)$. Если $n \not\vdots 3$, то на 3 делится $n^2 + 2$. **1.4.2.** *Указание*: если целое число не делится на 3, то его квадрат (а значит, и любая чётная степень) при делении на 3 дают остаток 1.

1.4.3. 74. *Указание*: по условию имеем систему $\begin{cases} 10x + y = 6(x+y) + 8 \\ 10y + x = 15(x-y) + 2. \end{cases}$

1.4.4. *Решение.* Такими числами, например, являются все числа, дающие при делении на 4 остаток 3. В самом деле, из равенств $(2k)^2 = 4k^2$ и $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$ следует, что квадрат целого числа при делении на 4 даёт в остатке либо 0, либо 1. Поэтому сумма двух квадратов при делении на 4 не может дать в остатке 3. **1.4.5.** *Указание*: разбить множество всех натуральных n на 7 групп в зависимости от остатка при делении на 7 (т.е. рассмотреть случаи $n = 7p + q$, $q = 0,1,..,6$). **1.4.6.** *Решение.* Представим выражение в виде

$n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$. Числа $n+7$ и $n-4$ делятся (либо не делятся) на 11 одновременно. Если они оба не делятся на 11, то их произведение также не будет делиться на 11, поэтому $(n+7)(n-4)+33$ не будет делиться даже на 11 (не говоря уже о 121). Если же оба эти числа кратны 11, то их произведение кратно 121, но 33 не делится на 121, поэтому $(n+7)(n-4)+33$ не будет делиться на 121. **1.4.7.** 7. *Решение.* $x=7m=4n+3 \Rightarrow 4(n-1)=7(m-1) \Rightarrow m-1=4k$, $k\in Z$, $\Rightarrow m=4k+1 \Rightarrow x=7(4k+1)=7+28k$. **1.4.8.** 19. *Решение.* Пусть $n=30k+r$, где $r=0,1,..,29$. Из условия задачи имеем $n=15m+4$, $n=18l+7$. Отсюда следует, что $n-4=15m$ и, значит, $r-4$ делится на 15. В диапазоне изменения r таких значений два: $r=4$ и $r=19$. Но при $r=4$ имеем $30k+4=18l+7 \Leftrightarrow 10k=6l+1$, что невозможно. При $r=19$ получаем $3l=5k+2$, что выполняется для бесконечного числа пар l,k. **1.4.9.** 189. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.4.10.** 333. *Решение.* Пусть N – общее количество золотых монет, и пусть каждому пирату досталось по x,y,z монет при первом, втором и третьем дележе соответственно. Тогда по условию задачи: $N=13x+8=11y+3=8z+5$, $N\le 500$, N,x,y,z – натуральные числа. Из уравнения $13x+8=11y+3$ имеем $13x+5=11y \Leftrightarrow 13(x-3)=11(y-4)$, откуда $(x-3)\vdots 11 \Rightarrow x=11m+3$, где $m=0,1,..$, тогда $y=13m+4$. Аналогично решая уравнение $11y+3=8z+5$, находим $y=8n+6$, $z=11n+8$, где $n=0,1,...$ Используя полученные выражения для y, получаем связь между параметрами m и n: $13m+4=8n+6 \Leftrightarrow 13(m-2)=8(n-3)$, откуда $m=8k+2$, $n=13k+3$, где $k=0,1,...$ Тогда $y=13m+4=104k+30$, $N=11y+3=11\cdot 104k+ +333$. Условию $N\le 500$ отвечает лишь значение $k=0$, так что $N=333$. **1.4.11.** 206. *Указание*: по условию, имеем систему

$$\begin{cases} x=8p_1+q_1,\ 0\le q_1\le 7; \\ x=5p_2+q_2,\ 0\le q_2\le 4; \\ x=7p_3+q_3,\ 0\le q_3\le 6; \\ q_1=5+q_2;\ q_1=2q_3. \end{cases}$$

Отсюда $q_1=6$, $q_2=1$, $q_3=3$. Далее, решая уравнение $8p_1+6=5p_2+1$, находим $p_1=5k$, $k\in N$, т.е. $x=40k+6$. Решая уравнение $40k+6=$ $=7p_3+3$, находим $p_3=40l+29$, $l=0,1,\ldots$ Тогда $x=7(40l+29)+3=$ $=280l+206$. При $l=0$ получаем $x_{\min}=206$.

1.5.1. Число не является простым. *Указание*: разложить число на множители, используя формулу суммы кубов. **1.5.2.** Число не является простым. *Указание*: разложить число на множители, используя формулу разности квадратов. **1.5.3.** Нет. *Указание*: число составное, поскольку является чётным как сумма двух нечётных чисел, и при этом, очевидно, оно больше числа 2. Иначе: число чётное, так как оканчивается на цифру 6. **1.5.4.** 3. *Решение*. Представим p в виде $p=3n+q$, $q=0,1,2$. Тогда $p+10=3(k+3)+q+1$, $p+14=3(k+4)+$ $+q+2$, т.е. все три числа имеют разные остатки от деления на 3. Значит, одно из этих чисел делится на 3, а единственное простое число, кратное 3, есть число 3. **1.5.5.** Нет. *Решение*. Пусть x_1,x_2 – корни уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=b+1$. Тогда $a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=$ $\ldots=(1+x_1^2)(1+x_2^2)$. Так как оба сомножителя есть натуральные числа, большие 1, то число a^2+b^2 – составное. **1.5.6.** $(x;y)\in\{(5;2)\}$. *Решение*. Возможны три случая. 1) x,y – оба чётны $\Rightarrow$ $x=y=2$ – не удовлетворяют равенству. 2) x,y – оба нечётны $\Rightarrow$ x^2 и $3y$ – также нечётны, тогда их разность x^2-3y – чётна, а в правой части – нечётное число 19 $\Rightarrow$ противоречие. 3) x,y – разной чётности, следовательно, одно из них равно 2. Если $x=2$ $\Rightarrow$ $y\notin N$, если же $y=2$ $\Rightarrow$ $x=5$. **1.5.7.** *Указание*: воспользоваться тем, что произвольное простое число, большее 3, представимо в виде $6n\pm1$, $n\in N$. **1.5.8.** $n\in\{2;5\}$. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.5.9.** *Указание*: рассмотреть три последовательных целых числа $8p-1$, $8p$ и $8p+1$. Одно из них делится на 3, и это не могут быть числа $8p$ и $8p-1$. Значит, на 3 делится $8p+1$. **1.5.10.** *Указание*: если $p\not\vdots\,3$, то остаток от деления p^2 на 3 равен 1. Но тогда $8p^2+1$ – делится на 3 (противоречие с условием). Значит, $p\,\vdots\,3$ $\Rightarrow$ $p=3$, тогда $8p^2+1=73$ – простое (условие задачи выполнено), и число $8p^2-1=71$ также простое. **1.5.11.** *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.5.12.** *Решение*. От противного: предположим, что n имеет натуральный (больший единицы) делитель m, тогда $(n-1)!$ делится на m, следовательно, $(n-1)!+1$ не делится на m, и тем более не делится на n. Противоречие доказывает неправомерность предположения. **1.5.13.** $(p;q;r)\in\{(2;3;17);\ (3;2;17)\}$. *Решение*. Допустим, все три числа – нечётные, тогда в равенстве в левой части находится чётное число (как сумма двух нечётных чисел), а в правой – нечётное число, что невозможно. Следовательно, хотя бы одно из чисел чётно, а значит, равно 2. Так как $r\neq 2$, то или $p=2$, или $q=2$. Пусть, ради определённости, $q=2$, тогда имеем уравнение $p^2+2^p=r$. Решим его. Пусть $p=3k \Rightarrow p=3 \Rightarrow r=17$. Если $p=3k+1$ $(k\in N)$ или $p=3k+2 \Rightarrow p^2$ делится на 3 с остатком 1. Найдём остаток от деления на 3 числа 2^p. Так как p – простое $(p>2)$, то p – нечётно $\Rightarrow p=2l+1$ $(l\in N) \Rightarrow 2^p=2^{2l+1}=2\cdot 4^l=\ 2(4^l-1)+2$. Так как $(4^l-1)\vdots 3$, то 2^p делится на 3 с остатком 2. Итак, сумма p^2+2^p должна делиться нацело на 3 $\Rightarrow$ $r\vdots 3$ $\Rightarrow$ противоречие. Следовательно, других решений нет. **1.5.14.** *Указание*. $n^3-n+3=(n-1)n(n+1)+3$ – делится нацело на 3.

1.6.1. 36. *Указание*: воспользоваться стандартным алгоритмом (для упрощения вычислений можно использовать свойства $НОД$). **1.6.2.** 5 раз. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.6.3.** 108 или 540. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.6.4.** *Указание*: ввести $d=НОД(n,m)$, тогда $\exists p,q\in N:\ НОД(p,q)=1$ и $n=pd$, $m=qd$. Далее подставить в уравнение, перенести всё в одну сторону и разложить на множители. Решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.6.5.** 2 или 6. *Решение*. Пусть $НОД(n,m)=d$, тогда $НОД(n,m+6)=4d$, $d\in N$. Из первого условия следует, что $n\vdots d$ и $m\vdots d$, а из второго, дополнительно, что $(m+6)\vdots d$. Следовательно, $6\vdots d$, т.е. $d\in\{1;2;3;4\}$. Из второго условия также следует, что поскольку $n\vdots 4$ и $(m+6)\vdots 4$, то n и m – чётные $\Rightarrow$ d – чётное. Итак, $d\in\{2;4\}$. Покажем, что оба случая возможны. Например, если $n=8$, $m=2$, то $d=2$, а если $n=24$, $m=18$, то $d=6$.

1.7.1. 5 однокурсников, 135 гривен. *Решение*. Пусть n – количество однокурсников, тогда стоимость всего обеда составляет $23n+20=29n-10$ (гривен). Из уравнения находим $n=5$, поэтому стоимость обеда равна $23\cdot 5+20=135$ (гривен). **1.7.2.** 218. *Решение*. Пусть n – число этажей в доме, а m – количество квартир на каждом этаже. По условию $n \geq 8$ и $m \geq 2$. Так как нумерация квартир начинается с первой, то номер последней квартиры на седьмом этаже третьего подъезда равен $m(2n+7)=105$. Учитывая, что $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $2n+7 \geq 23$, приходим к единственно возможному варианту $m=3$, $2n+7=35 \Rightarrow n=14$. Тогда вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда имеет номер $(5 \cdot 14+2) \cdot 3+2=218$. **1.7.3.** *Указание*: проанализировать, на что делятся обе части уравнения. Решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.7.4.** $(m;n)$, где $m=4k$, $n=5k$, $k \in N$. *Указание*: так как левая часть уравнения делится на 4, то и правая часть должна делиться на 4 $\Rightarrow$ $m \vdots 4 \Rightarrow m=4k$, $k \in N$. Подставить в уравнение и найти n. **1.7.5.** На 3 (при $m=11$, $n=8$). *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.6.** Нет. *Указание*: решение аналогичной задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.7.** $(x;y) \in \{(8;3);(12;1);(6;-2);(2;0)\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $(x-7)(2y-1)=5$, и рассмотреть всевозможные случаи, когда число 5 представимо в виде произведения двух целых чисел. **1.7.8.** $(x;y) \in \{(4;0);(2;-2)\}$. *Указание*: преобразовать уравнение к виду $x=3+(1/(y+1))$. Так как все слагаемые в этом уравнении, кроме дроби, являются целыми числами, то и дробь также должна быть целым числом, а, следовательно, знаменатель дроби может принимать значения ± 1. **1.7.9.** $(x;y) \in \{(2;4);(3;3);(0;0);(-1;1)\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $(y-2)(x-1)=2$, и рассмотреть все возможные варианты, когда целое число 2 представимо в виде произведения двух целых чисел. **1.7.10.** $(x;y) \in \{(3;6);(1;-2);(4;4);(0;0);(6;3);(-2;1)\}$. *Указание*. Убедившись подстановкой в исходное уравнение, что $x=2$ не является решением, приведём уравнение к виду: $y=\dfrac{2x}{x-2}=2+\dfrac{4}{x-2}$. Так как y и 2 – целые числа, то отсюда следует, что дробь $4/(x-2)$ также должна быть целым числом. А это, в свою очередь, возможно, только если $x-2 \in \{\pm 1;\pm 2;\pm 4\}$ и т.д. **1.7.11.** $(x,y) \in \{ (2003 \cdot 2004;\ 2004), (-2002 \cdot 2003;2002), (0;0), (4006;4006), (2004;2003 \cdot 2004), (2002;-2002 \cdot 2003) \}$. *Указание*. Так как правая часть уравнения $xy=2003(x+y)$ делится на 2003, то $xy \vdots 2003 \Rightarrow x \vdots 2003$ или $y \vdots 2003$. Пусть, ради определённости, $x \vdots 2003$. Найдём все такие решения

$(x;y)$ и учтём, что, в силу симметрии, пары $(y;x)$ тоже будут решениями. Итак, $x \vdots 2003 \Rightarrow x = 2003n,\ n \in Z$. Подставим в уравнение: $2003ny = 2003(2003n + y) \Leftrightarrow ny = 2003n + y \Leftrightarrow (n-1)(y-2003) = 2003$. Возможны 4 случая: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n-1=1 \\ y-2003=2003 \end{cases} \text{или} \begin{cases} n-1=2003 \\ y-2003=1 \end{cases} \\ \begin{cases} n-1=-1 \\ y-2003=-2003 \end{cases} \text{или} \begin{cases} n-1=-2003 \\ y-2003=-1 \end{cases} \end{array}\right.$ и так далее. **1.7.12.** $(x;y) \in \{(4;-5);(-4;3);(-6;-7)\}$. *Указание*: умножить обе части уравнения на 3, и после этого привести к виду $(3y+16)(3x+13) = 25$. Далее перебор возможных случаев. **1.7.13.** $(x;y) \in \{(-1;-2);(0;0);(1;2)\}$. *Указание*: преобразовать уравнение к виду $(2x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x$. Поскольку $x \in Z$ и $|x| \le 1$, то x может принимать одно из трёх значений: –1, 0, 1. **1.7.14.** $(x;y) \in \{(5;-4);(-5;4);(-13;20);(13;-20)\}$. *Указание*: преобразовать уравнение к виду $(3x+2y)(x+y) = 7$. **1.7.15.** 36. *Указание*: если $\overline{xy}$ – искомое число, где $x, y \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $x \ne 0$, то имеем $2y^2 - 3x^2 = 27 + xy \Leftrightarrow (2y-3x)\cdot(y+x) = 27$. Далее рассмотреть все возможные способы, какими целое число 27 можно представить в виде произведения двух целых чисел $(2y-3x)$ и $(y+x)$ (причём второе число $(y+x)$ положительно и не превышает 18 как сумма двух цифр). Таких способов три. **1.7.16.** 4 рейса. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.17.** $(x;y) \in \{(3;-2);(-3;2);(-7;2);(7;-2)\}$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.18.** $2\sqrt{65}$. *Решение*. Заметим, что $x \ne 0$, $y \ne 0$, и если пара $(x;y)$ является решением уравнения, то пары $(-x;y)$, $(-x;-y)$ и $(x;-y)$ также будут его решениями, поэтому достаточно рассмотреть натуральные x, y. Приведём уравнение к виду $4x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (2x+y)(2x-y) = 15$, и рассмотрим все возможные случаи, когда число 15 представимо в виде произведения двух целых чисел (с учётом $2x + y > 2x - y > 0$). Имеем два случая: $\begin{cases} 2x+y=15 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x-y=3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$ Всего исходное уравнение имеет восемь целочисленных решений, задаваемых парами $(\pm 4;\pm 7)$, $(\pm 2;\pm 1)$ со всевозможными сочетаниями знаков. Рассматривая координатную плоскость Oxy, построим все восемь соответствующих точек. Легко видеть, что среди них наиболее удалены друг от друга точки $(4;7)$ и $(-4;-7)$ либо $(-4;7)$ и $(4;-7)$. При этом расстояние между ними равно $\sqrt{8^2+14^2}=2\sqrt{65}$. **1.7.19.** $(k;m)\in\{(9;9)\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $m=k+2-\dfrac{42}{2k+3}$. Дробь $\dfrac{42}{2k+3}$ является целым числом, при этом её знаменатель есть нечётное число и $k\geq 0$. Следовательно, возможны три случая: $2k+3\in\{3;7;21\}$. **1.7.20.** $(x;y)\in\{(2;8)\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $y=-x-1+\dfrac{55}{3x-1}$. **1.7.21.** $(x;y)\in\{(0;0)\}$. *Решение.* Заметим, что если $x<0$, то 9^x будет дробным числом, и поэтому не может быть равным целому числу $12y+1$. Если $x=0$, то, подставляя в уравнение, находим $y=0$. Пусть теперь $x>0$, тогда перепишем уравнение в виде $9^x-1=12y$ $\Leftrightarrow$ $(3^x-1)(3^x+1)=12y$. В левой части мы видим произведение двух последовательных чётных чисел (они являются чётными как разность или сумма двух нечётных чисел), т.е. левая часть делится нацело на 8, а правая на 8 не делится. Иначе: число слева не кратно 3, а справа – делится на 3. Полученное противоречие означает, что в этом случае решений нет. **1.7.22.** $(x;y)\in\{(0;0);(1;1);(1;-1)\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $2^x=1+y^2$, и рассмотреть случаи: $x\geq 2$, $x<0$, $x=0$, $x=1$. В первом случае $2^x \vdots 4$ $\Rightarrow$ необходимо выяснить, с какими остатками делится на 4 правая часть уравнения. Для этого разбить множество всех целых y на 4 группы в зависимости от остатка при делении на 4: $y=4p+q$, $q=0,1,2,3$, и показать, что $1+y^2$ не делится нацело на 4, т.е. решений нет. При $x<0$ левая часть меньше единицы, а правая часть при любом целом y больше единицы, т.е. уравнение также не имеет решений. Наконец, если $x=0$, то $y=0$, а если $x=1$, то $y=\pm 1$. **1.7.23.** $(x;y)\in\{(2;3)\}$. *Решение.* $3^{x^2+1}(3^{y-2}-1)=3^5\cdot 2^1$. Если $y=1$, то слева – дробь, а справа – целое число. Если $y=2$, то слева – нуль, а справа – нет. При

$y>2$ $\left(3^{y-2}-1\right)\wr 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2+1=5 \\ 3^{y-2}-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3. \end{cases}$ **1.7.24.** Нет решений. *Указание*. Рассмотреть случаи $x=3p+q$, $q=0,1,2$. Решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.25.** Нет решений. *Указание*. Рассмотреть случаи $x=7p+q$, $q=0,1,..,6$. **1.7.26.** Нет решений. *Указание*. Рассмотреть случаи $x=7p+q$, $q=0,1,..,6$. **1.7.27.** *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.7.28.** $(x;y)\in\{(0;-1)\}$. *Указание*. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно x. **1.7.29.** $(x;y;z)\in\{(2n;\ 7n;\ 3n)\}$, где $n\in Z$. *Указание*: решение аналогичной задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.30.** *Указание*: рассмотреть уравнение как квадратное относительно x^2. **1.7.31.** $(x;y)\in$ $\in\{(12;-4);(10;-2);(2;-4);(10;-6);(4;-2);(4;-6)\}$. *Указание*: привести к виду $(x-7)^2+4(y+4)^2=25$, и сделать замену $u=x-7$, $v=y+4$. Решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.7.32.** $(k;l)\in\{(6;5)\}$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.33.** $(x;y)\in\{(3;0);(3;2);(3;-2)\}$. *Решение*. Приведём систему к виду $\begin{cases} y^3-4y>3x^2-18x+26 \\ y^3-4y<-x^2+8x-14, \end{cases}$ откуда $-x^2+8x-14>3x^2-18x+26 \Leftrightarrow x\in(5/2,4)$. С учётом $x\in Z$, имеем $x=3$. Подставим в систему: $\begin{cases} y^3-4y>-1 \\ y^3-4y<1. \end{cases}$ Так как $y^3-4y\in Z$, то $y^3-4y=0$ и т.д. **1.7.34.** $(x;y)\in\{(-5;20);(-5;21)\}$. *Указание*: сложив первое и третье неравенства системы, получим $x\le -24/5$. Сложив второе и третье неравенства, найдём $x^2+4x-9\le 0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{13}\le x\le -2+\sqrt{13}$. Таким образом, $-2-\sqrt{13}\le x\le -24/5$, т.е. $x=-5$, и т.д. **1.7.35.** $\{(2;4;4);\ (2;3;6);\ (3;3;3)\}$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.36.** *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.37.** $(x;y;z)\in\{(1;1;1);(-1;-1;1);(1;-1;-1);(-1;1;-1)\}$. *Решение*. Приведём уравнение к виду $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=3xyz$. Если $(x;y;z)$ есть решение, то либо все x,y,z положительны, либо одно из них положительно, а два других числа отрицательны. Можно ограничиться случаем $x>0$, $y>0$, $z>0$. Используя неравенство $a^2+b^2\ge 2ab$, из последнего равенства имеем: $6xyz=2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2=\left(x^2y^2+x^2z^2\right)+\left(x^2y^2+y^2z^2\right)+\left(x^2z^2+y^2z^2\right)\ge$ $\ge 2x^2yz+2y^2xz+2z^2xy=2xyz(x+y+z)$, поэтому $x+y+z\le 3$. Далее перебором. **1.7.38.** $(x;y;z)\in\{(2;3;4)\}$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.39.** $n=-12$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.7.40.** $a=\pm 2$. *Решение.* $D=a^2-4\ge 0$ – должен быть полным квадратом. Обозначим $\sqrt{a^2-4}=m$, $m\in Z$, $m\ge 0$. Тогда $a^2-4=m^2 \Leftrightarrow$ $(a-m)(a+m)=4$. Учитывая, что $a-m\le a+m$, и $a-m$, $a+m$ – числа одной чётности, получаем, что возможны два случая: $\begin{cases}a-m=2\\a+m=2\end{cases}$ и $\begin{cases}a-m=-2\\a+m=-2\end{cases}$, откуда находим $a=\pm 2$. Проверкой убеждаемся, что условия задачи выполнены. **1.7.41.** $(x;y;z)\in\{(2;6;18);(2;-6;18)\}$. *Указание*. По условию $\begin{cases}y^2=xz\\2y^2=5x+3z+8.\end{cases}$ Исключая y^2, получаем уравнение-следствие: $2xz=5x+3z+8 \Leftrightarrow 2x=5+\dfrac{31}{2z-3}$. Дробь $\dfrac{31}{2x-3}$ должна быть целым числом.

1.8.1. 4. *Указание*: $\dfrac{a}{b-a}=\dfrac{a/b}{1-a/b}$. **1.8.2.** –1. **1.8.3.** 64. *Решение.*

$$\frac{(x-y)\left(x^4-y^4\right)}{x^2-y^2}-\frac{2xy\left(x^3-y^3\right)}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}-$$

$$-\frac{2xy(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^2+xy+y^2}=(x-y)\left(x^2+y^2\right)-2xy(x-y)=(x-y)^3=$$

$=(1,\underbrace{2\ldots 2}_{46}2+2,\underbrace{7\ldots 7}_{45}78)^3=4^3=64$. **1.8.4.** 0. *Указание*: сделать тригонометрическую подстановку $m=\cos\alpha$, $n=\sin\alpha$, $k=\cos\beta$, $l=\sin\beta$, где $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$. **1.8.5.** 1. *Решение.*

$$A=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+zx^2y}=$$
$$=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=1.$$

1.8.6. *Указание*: воспользоваться тождеством $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-$ $-\frac{1}{(k+1)!}$. **1.8.7.** $25/99$. *Решение.* Пусть $x=0,(25)$, тогда $100x=25,(25)$. Вычтем из второго равенства первое: $99x=25 \Rightarrow x=25/99$. **1.8.8.** $211/990$. *Решение.* Воспользуемся одним из способов перевода периодической десятичной дроби в дробь обыкновенную: $0{,}2(13)=\frac{213-2}{990}=\frac{211}{990}$. **1.8.9.** Числа равны. **1.8.10.** Число b больше. *Решение.* Воспользуемся методом от противного. Предположим, $b\le a$. Тогда $b=a^2-5a+10\le a$, но неравенство $a^2-6a+10\le 0 \Leftrightarrow (a-3)^2+1\le 0$ не имеет решений. Противоречие. Следовательно, $b>a$. **1.8.11.** *Указание*: оценить знак разности $a-b$. **1.8.12.** Первое число меньше. *Решение.* Заметим, что $2,(004)=2{,}004004(004)$. Воспользуемся правилом сравнения двух положительных действительных чисел, представленных бесконечными десятичными дробями. Целые части этих чисел равны, равны у них и две первые цифры после запятой, однако третья цифра после запятой у первого из чисел меньше соответствующей цифры у второго числа, поэтому заключаем, что $2,(004)<2{,}005$. Можно было решить эту задачу иначе, переведя предварительно каждое из сравниваемых чисел в обыкновенную дробь:

$$2,(004)=\frac{2002}{999}<\frac{401}{200}=2{,}005.$$

1.8.13. Первое число меньше. **1.8.14.** Числа равны. **1.8.15.** Числа равны. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.8.16.** Числа равны. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.8.17.** *Указание*: преобразовать равенство к виду $(a+b)(a+c)(b+c)=0$. **1.8.18.** Значения выражений равны. *Решение.* Пусть $a=tg\alpha$, $b=tg\beta$, $c=tg\gamma$, где $\alpha,\beta,\gamma\in(-\pi/2,\pi/2)$. Используя известные тригонометрические тождества, получаем, что $tg(\alpha-\beta)+tg(\beta-\gamma)+tg(\gamma-\alpha)=tg(\alpha-\beta)\,tg(\beta-\gamma)\,tg(\gamma-\alpha)$. **1.8.19.** Да. *Решение.* При любом целом неотрицательном n и любом натуральном

$k \geq 2$ имеет место равенство $\frac{1}{k^n(k-1)} = \frac{1}{k^{n+1}} + \frac{1}{k^{n+1}(k-1)}$. Значит, единицу можно представить так: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{2003}} + \frac{1}{3^{2003} \cdot 2}$. **1.8.20.** $x^n + y^n = a^n + b^n$. *Указание*: доказать, что $xy = ab$, и далее доказать по индукции с помощью равенства $\left(x^{n-1} + y^{n-1}\right)(x+y) = \left(a^{n-1} + b^{n-1}\right)(a+b)$. **1.8.21.** *Указание*: воспользоваться методом от противного. **1.8.22.** $n \in \{3;4\}$. *Решение.* Если уравнение имеет рациональные корни, то это могут быть только $x \in \{\pm 1; \pm 1/2\}$. Подставим в уравнение. 1) $x = 1 \Rightarrow n = 0 \notin N$; 2) $x = -1 \Rightarrow n = -2 \notin N$; 3) $x = 1/2 \Rightarrow n = 4 \in N$; 4) $x = -1/2 \Rightarrow n = 3 \in N$. **1.8.23.** Нет. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.8.24.** *Указание*: воспользоваться разложением $a - b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$. Решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.8.25.** $x = \frac{r^2 - 1}{1 - 2r}$, где r – любое рациональное число, не равное $1/2$. *Указание*: решение задачи см. в тексте пособия. **1.8.26.** *Решение.* Если $y = 0$, то $1 - xy = 1$ и утверждение справедливо. Если $x = -y$, то $xy = 0$, и утверждение также справедливо. Пусть $y \neq 0$, $x \neq -y$. Положим $t = x/y$. Тогда $t^5 + 1 = 2t^2 \cdot \frac{1}{y}$, и если x и y – рациональны, то и t рационально. Выражая x и y через t, имеем $y = 2t^2/\left(t^5 + 1\right)$, $x = 2t^3/\left(t^5 + 1\right) \Rightarrow$
$1 - xy = 1 - \frac{4t^5}{\left(t^5 + 1\right)^2} = \left(\frac{t^5 - 1}{t^5 + 1}\right)^2$. **1.8.27.** $(x;y) \in \left\{(-2/3;1); \left(-1 - \frac{1}{l-1}; l^2 + l - 1\right); \left(-1 + \frac{1}{l+2}; l^2 + l - 1\right)\right\}$, где $l \in Z$, $l \neq -5;-2;1;4$.

1.9.1. На ± 13. *Решение.* Пусть дробь сократима на целое число $p \neq 0, \pm 1$, тогда, по определению сократимой дроби, найдутся такие $m, n \in Z$, что $\frac{5l + 6}{8l + 7} = \frac{pm}{pn} \Rightarrow \begin{cases} 5l + 6 = pm \\ 8l + 7 = pn. \end{cases}$ Умножая первое равенство системы на 8, а второе на 5 и вычитая одно из другого, получим $13 = p(8m - 5n)$. Так как p и $8m - 5n$ – целые числа, то p может быть равен только ± 13 (при этом $8m - 5n = \pm 1$). **1.9.2.** *Указание*: см. решение предыдущей задачи. Иначе: так как $\dfrac{10n+3}{6n+2}=\dfrac{(6n+2)+4n+1}{6n+2}=1+\dfrac{4n+1}{6n+2}$, то исходная дробь сократима (либо несократима) одновременно с дробью $\dfrac{4n+1}{6n+2}$, которая, в свою очередь, сократима (либо несократима) одновременно с «перевёрнутой» дробью $\dfrac{6n+2}{4n+1}$. Далее рассуждаем аналогично: так как $\dfrac{6n+2}{4n+1}=\dfrac{(4n+1)+2n+1}{4n+1}=$ $=1+\dfrac{2n+1}{4n+1}$, то дробь $\dfrac{6n+2}{4n+1}$ сократима (либо несократима) одновременно с дробью $\dfrac{2n+1}{4n+1}$. В свою очередь, дробь $\dfrac{2n+1}{4n+1}$ сократима (либо несократима) одновременно с дробью $\dfrac{4n+1}{2n+1}$. Поскольку $\dfrac{4n+1}{2n+1}=1+\dfrac{2n}{2n+1}$, то дробь $\dfrac{4n+1}{2n+1}$ сократима (либо несократима) одновременно с дробью $\dfrac{2n}{2n+1}$. Ещё раз обращая дробь и выделяя целую часть, получим, что исходная дробь сократима (либо несократима) одновременно с дробью $1/(2n)$. Но последняя дробь является несократимой, следовательно, и исходная дробь тоже. **1.9.3.** $-\dfrac{16x^2+12xy^2+9y^4}{4x+3y^2}$. **1.9.4.** Нет. *Решение.* Сгруппируем первую дробь с последней, вторую с предпоследней и так далее. Заметим, что дроби $\dfrac{k}{n}$ и $\dfrac{n-k}{n}$ одновременно сократимы либо несократимы (так как любой общий делитель натуральных чисел n и k является делителем числа $n-k$, и поэтому $НОД(k,n)=НОД(n-k,n)$). Таких дробей будет чётное число. Чтобы в середине осталась непарная дробь, надо, чтобы выполнялось равенство $\dfrac{k}{n}=\dfrac{n-k}{n}\Rightarrow n=2k$ $(k\ge 2)$, но тогда центральная дробь $\dfrac{k}{n}=\dfrac{k}{2k}=\dfrac{1}{2}$ – сократима на k. Таким образом, в данной последовательности число несократимых дробей чётное.

1.10.1. 14. **1.10.2.** *Доказательство.* $a^2+1/a^2=\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)^2+$

$1/\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)^2=\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)^2=42$. **1.10.3.** 70. *Доказательство.* $a=\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{50}=b+c$, где $b^3=20$, $c^3=50$ и $bc=\sqrt[3]{20\cdot 50}=10$ $\Rightarrow$ $a^3-30a=a\left(a^2-30\right)=(b+c)\left(b^2+2bc+c^2-3bc\right)=(b+c)\times\left(b^2-bc+c^2\right)=b^3+c^3=20+50=70$. **1.10.4.** (-4). *Указание*: умножая числитель и знаменатель каждой из дробей на выражение, сопряжённое к знаменателю, избавиться от иррациональностей в знаменателях дробей. **1.10.5.** 2 (при $4a-b\neq 0$, $a\geq 0$, $b\geq 0$). **1.10.6.** $7/2$ (при $3a-5b\neq 0$, $a\geq 0$, $b\geq 0$). **1.10.7.** $A=0<0{,}01$.

1.11.1. $a=-12$, $b=6$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.11.2.** *Решение.* Заметим, что число $\left(\sqrt{26}+5\right)^{99}-\left(\sqrt{26}-5\right)^{99}=n$ является натуральным (для этого необязательно знать бином Ньютона, достаточно осознать, что коэффициенты при раскрытии обеих скобок при одинаковых нечётных степенях числа $\sqrt{26}$ будут одинаковыми, и при взятии разности исчезнут). Но тогда $\left(\sqrt{26}+5\right)^{99}=n+\left(\sqrt{26}-5\right)^{99}<$ (так как $\sqrt{26}<5{,}1$) $<n+(0{,}1)^{99}$, откуда и следует доказываемый результат.

1.12.1. Первое число меньше. *Указание*: возвести в шестую степень. **1.12.2.** Второе число меньше. *Указание*: возвести в шестую степень. **1.12.3.** Первое число меньше. **1.12.4.** Первое число больше. **1.12.5.** Первое число больше. *Указание*: свести задачу к сравнению чисел $\sqrt{17}$ и $4,(12)=\dfrac{412-4}{99}=\dfrac{136}{33}$ $\Leftrightarrow$ $33\sqrt{17}\ \vee\ 136=2^3\cdot 17\Leftrightarrow 33^2\cdot 17\vee\vee 2^6\cdot 17^2\Leftrightarrow 33^2\ \vee\ 32\cdot 34\Leftrightarrow 33^2>>(33-1)(33+1)$. **1.12.6.** Первое число меньше. *Указание*: см. решение следующей задачи. **1.12.7.** Первое число меньше. *Решение.* Возведём оба числа в квадрат:

$$(\sqrt{2004}+\sqrt{2006}\,)^2\vee(2\cdot\sqrt{2005}\,)^2\Leftrightarrow$$
$$(2004+2006)+\ 2\sqrt{2004\cdot 2006}\ \vee\ 4\cdot 2005\Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{2004\cdot 2006}\ \vee\ 2\cdot 2005\Leftrightarrow 2004\cdot 2006\ \vee\ 2005^2\Leftrightarrow$$
$$(2005-1)(2005+1)\ \vee\ 2005^2\Leftrightarrow 2005^2-1\ <\ 2005^2.$$

1.12.8. Первое число больше. *Указание*: умножая числитель и знаменатель каждой из дробей на выражение, сопряжённое к знаменателю, избавимся от иррациональности в знаменателях: $\frac{\sqrt{47}+\sqrt{45}}{2} \vee \frac{\sqrt{46}+\sqrt{44}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{47}+\sqrt{45} \vee$ $\vee \sqrt{46}+\sqrt{44}$. Так как $\sqrt{47}>\sqrt{46}$ и $\sqrt{45}>\sqrt{44}$, то первое число больше **1.12.9.** Числа равны. *Указание*: сравнить квадраты чисел. **1.12.10.** Первое число меньше. *Решение*. Обозначим $t=\sqrt[10]{2}$. Тогда $\sqrt[5]{2}+7 \vee 8\cdot\sqrt[10]{2} \Leftrightarrow t^2+7 \vee$ $\vee 8t \Leftrightarrow t^2-8t+7 \vee 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-7) \vee 0$. Заметим, что $1<\sqrt[10]{2}<7$, и поэтому $(t-1)(t-7)<0$. **1.12.11.** Первое число больше. *Указание*: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=(a+b)+2\sqrt{ab}>2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ (так как для $A,B\geq 0$ имеем: $A+B>2\sqrt{AB} \Leftrightarrow A\neq B$). **1.12.12.** Первое число меньше. *Решение*. $\frac{12}{25} \vee$ $\vee\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} \Leftrightarrow 0{,}48 \vee \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} \Leftrightarrow 0.5-0.02 \vee \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} \Leftrightarrow (0.5-0.02)^2 \vee$ $\vee \frac{\sqrt{3}-1}{3} \Leftrightarrow 3(0.25-0.2+0.004) \vee \sqrt{3} \Leftrightarrow 1{,}6912 \vee \sqrt{3}$. Поскольку известно, что $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$, то получаем $1{,}6912<\sqrt{3}$. **1.12.13.** Первое число больше. *Указание*: свести к сравнению чисел $\sqrt[3]{4}$ и $3-\sqrt{2}$, и возвести в куб. **1.12.14.** Числа равны. *Решение*. $3^{\sqrt{\log_3 5}}=\left(5^{\log_5 3}\right)^{\sqrt{\log_3 5}}=5^{\log_5 3\sqrt{\log_3 5}}=$ $=^{\sqrt{\log_5^2 3\cdot\log_3 5}}=5^{\sqrt{\log_5 3}}$. **1.12.15.** Числа равны. *Указание*: $2^{\sqrt{\log_2 11}}=$ $=\left(11^{\log_{11} 2}\right)^{\sqrt{\log_2 11}}$. **1.12.16.** Первое число меньше. *Решение*. $2005^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2005}}=$ $=2005^{\log_{2005}\lg 2}=\lg 2$. Имеем: $\lg 2<\lg 10<\lg\sqrt{1000}=3/2$. **1.12.17.** Числа равны. *Указание*. Обозначим $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ и возведём это равенство в куб, используя формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$: $x^3=4+$ $+3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}\cdot x \Leftrightarrow x^3+3x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0 \Leftrightarrow$ $x=1$. **1.12.18.** Первое число меньше. *Указание*: $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}=$ $=\sqrt{8+2\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}=1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$. **1.12.19.** $\sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}<\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}<\sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.12.20.** Меньший корень квадратного трёхчлена. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.12.21.** Первое число больше. *Указание*: сравнить оба числа с единицей. **1.12.22.** Числа равны. *Указание*: преобразовать сумму логарифмов в логарифм произведения и воспользоваться тождеством $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$. После упрощения первое число оказывается равно $\log_2(8/15)=3-\log_2 15$. **1.12.23.** Первое число меньше. *Решение.* $\cos 5 \vee 0{,}5 \Leftrightarrow \cos 5 \vee \cos(5\pi/3)$. Так как оба числа 5 и $5\pi/3$ принадлежат интервалу $(3\pi/2, 2\pi)$ (докажите самостоятельно, что они удовлетворяют неравенствам $3\pi/2<5<2\pi$, $3\pi/2<5\pi/3<2\pi$), и при этом $5<5\pi/3$, а функция $y=\cos x$ возрастает на этом интервале, то $\cos 5<\cos(5\pi/3)$. **1.12.24.** Первое число меньше. *Решение.* $\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{33}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{33}+$ $+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{33}<$ (так как $\sin\frac{2\pi}{33}<\frac{2\pi}{33}$) $<\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{33}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{33}$. Покажем, что $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{33}<0{,}67 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\pi}{33}<\frac{17}{100}$. В самом деле, поскольку $\pi<3{,}15$, $\sqrt{3}<1.75$ ($3<1.75^2=3{,}0625$), то $\pi\sqrt{3}<5{,}5125<5{,}52 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{3}\pi/33<5{,}52/33<17/100$.

1.13.1. Число иррационально. *Решение.* От противного: предположим, $\sqrt{7}$ – рациональное число. Тогда его можно представить в виде несократимой обыкновенной дроби вида p/q, где $p,q\in N$. Итак, $\sqrt{7}=p/q \Leftrightarrow q\sqrt{7}=p \Leftrightarrow$ $7q^2=p^2$. Так как левая часть делится нацело на 7, то и правая часть p^2 также должна делиться на 7. Но если квадрат целого числа делится на 7, то и само число кратно 7, поэтому найдётся такое натуральное число k, что $p=7k$. Подставим в равенство $7q^2=p^2$ вместо p выражение $7k$ и получим: $7q^2=(7k)^2 \Leftrightarrow q^2=7k^2$. Аналогично, так как правая часть в последнем равенстве кратна семи, то и левая часть, т.е. q^2, также должна быть кратна семи, следовательно, и само число q будет делиться нацело на 7, но тогда q можно представить в виде $q=7l$, где l – некоторое натуральное число. Таким образом, оказалось, что и числитель, и знаменатель дроби p/q делятся на 7, т.е.

дробь сократима на 7. Полученное противоречие с несократимостью дроби означает, что предположение о рациональности числа $\sqrt{7}$ неверно, а значит, это число иррационально. **1.13.2.** Число иррационально. *Указание*: воспользоваться методом от противного. **1.13.3.** *Указание*: воспользоваться методом от противного. **1.13.4.** *Указание*: воспользоваться методом от противного. **1.13.5.** *Указание*: воспользоваться методом от противного. **1.13.6.** *Решение.* От противного: предположим, $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}=p/q$, где p/q – несократимая дробь. Тогда $\sqrt[3]{2}=\sqrt{2}-p/q \Leftrightarrow 2=\left(\sqrt{2}-p/q\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(2+3p^2/q^2\right)=2+6p/q+p^3/q^3$. Слева в последнем равенстве находится иррациональное число, а справа – рациональное. Противоречие. **1.13.7.** *Указание*: $A=\sqrt{3-\left|\sqrt{3}+1\right|}+$ $+\sqrt{3+\left|\sqrt{3}-1\right|}=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(4+2\sqrt{3}\right)}=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{3}-1\right|+\left|\sqrt{3}+1\right|\right)=\sqrt{6}$. Далее закончить доказательство методом от противного. **1.13.8.** *Решение.* От противного: предположим, что число рационально. Тогда его можно представить в виде несократимой обыкновенной дроби $\sqrt{3\sqrt{2}+4}+\sqrt{3\sqrt{2}-4}=p/q$, где $p,q\in N$. Возводя равенство в квадрат, получаем $6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=p^2/q^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}=p^2/\left(8q^2\right)$. В левой части равенства находится иррациональное число $\sqrt{2}$, а в правой части – рациональное число. Такое равенство невозможно. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение о рациональности данного числа неверно и, следовательно, число является иррациональным.

1.14.1. Двенадцатью нулями. *Решение.* Согласно основной теореме арифметики любое натуральное число, в том числе $53!$, можно единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) разложить на простые множители: $53!=2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot 5^{n_3}\cdot 7^{n_4}\cdot\ldots\cdot p^{n_p}$, где все показатели степеней – натуральные числа. Очевидно, что нуль даёт только произведение «двойки» и «пятёрки», причём двоек в этом разложении больше, чем пятёрок, поскольку каждое второе натуральное число делится на два и только каждое пятое – на пять. Таким образом, количество нулей на конце числа $53!$ определяется количеством пятёрок в разложении этого числа на простые множители. Подсчитаем это количество. Во-первых, каждое пятое натуральное число делится на пять, таких чисел от 1 до 53 будет $[53/5]=10$ (здесь квадратными скобками обозначается целая часть числа). Далее, каждое двадцать пятое число делится ещё на одну пятёрку, таких чисел будет $[53/25]=2$. Суммируя, получаем 12 нулей. **1.14.2.** $x\in\{2+\sqrt{6}\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $[x]=x- \ -2/x$, и рассмотреть случаи $x\in[4,5)$ и $x=5$. При $x\in[4,5)$ имеем $[x]=4$, и уравнение примет вид $4=x-2/x$ и т.д. **1.14.3.** $x\in\{5/3;7/3;3\}$. ОДЗ: $0\le\frac{3-x}{2}<1 \Leftrightarrow 1<x\le 3$. Если $1<x<2$, то $[x]=1 \Rightarrow \{x\}=x-[x]=x-1$, и уравнение примет вид $x-1=\frac{3-x}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}\in(1,2)$. Если $2\le x<3$, то $[x]=2 \Rightarrow \{x\}=x-2$, и уравнение примет вид $x-2=\frac{3-x}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}\in[2,3]$. Значение $x=3$ также удовлетворяет уравнению. **1.14.4.** *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **1.14.5.** $x\in\{0;1/3;2/3\}$. *Указание*: рассмотреть промежутки $\left[0,\frac{1}{4}\right)$, $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $\left[\frac{3}{4},1\right)$. **1.14.6.** $x\in[4.5,\ 5.5)$. *Указание*: рассмотреть промежутки $n\le x<n+\frac{1}{2}$ и $n+\frac{1}{2}\le x<n+1$, $n\in Z$. **1.14.7.** $x\in[6,8)$. *Решение.* 1) Пусть $2n\le x<2n+1$, $n\in Z$, тогда $[x]=2n$, $[(x+1)/2]=n$, и уравнение примет вид $2n-3=n \Leftrightarrow n=3 \Leftrightarrow x\in[6,7)$. 2) Пусть $2n-1\le x<2n$, $n\in Z$, тогда $[x]=2n-1$, $[(x+1)/2]=n$, и уравнение примет вид $2n-4=n \Leftrightarrow n=4 \Leftrightarrow x\in[7,8)$. Объединяя найденные промежутки, получаем ответ. **1.14.8.** $x\in[n,n+(1/2))$, где $n\in Z$. *Решение.* 1) Пусть $n\le x<n+\frac{1}{2}$, $n\in Z$, тогда $[2x+1]=2n+1$, $[x]=n$, $[x+1]=n+1$, и уравнение примет вид $2n+1=n+(n+1)$ – верно при любом $n\in Z$. 2) Пусть $n+\frac{1}{2}\le x<n+1$, $n\in Z$, тогда $[2x+1]=2n+2$, $[x]=n$, $[x+1]=n+1$, и уравнение примет вид $2n+2=n+(n+1)$ – противоречие. Итак, $x\in[n,n+(1/2))$, где $n\in Z$. **1.14.9.** $x\in\{7/15;4/5\}$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **1.14.10.** $x\in\{-\sqrt{7};\sqrt{3}\}$. *Решение.* Так как $0\le x-[x]<1$, то из уравнения $x^2+x-4=x-[x]$ получим, как следствие, $0\le x^2+x-4<1 \quad\Leftrightarrow\quad -(1+\sqrt{21})/2<x\le-(1+\sqrt{17})/2$ или $(-1+\sqrt{17})/2\le x<(-1+\sqrt{21})/2$. Первый из промежутков целиком лежит внутри интервала $(-3,-2)$, а второй – внутри интервала $(1,2)$, поэтому в первом случае имеем $[x]=-3$ (решая уравнение $x^2=7$, находим корень $x=-\sqrt{7}$), а во втором случае $[x]=1$ (решая уравнение $x^2=3$, находим корень $x=\sqrt{3}$). Проверкой убеждаемся, что оба значения удовлетворяют уравнению. Иначе: привести уравнение к виду $[x]=4-x^2$ и далее графическим способом. **1.14.11.** $x\in\{\sqrt[3]{4}\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $x^3-3=[x]$ и далее решать графически. **1.14.12.** $x\in\left\{\left(n+\sqrt{n^2+4}\right)/2\right\}$, где $n\in N$. *Решение*. Приведём уравнение к виду $[x]=x-\dfrac{1}{x}$. Пусть $n\le x<n+1$, $n\in Z$, тогда $[x]=n$, и получаем уравнение $n=x-(1/x)\Leftrightarrow x^2-nx-1=0\Leftrightarrow$ $x_1=\left(n-\sqrt{n^2+4}\right)/2$ и $x_2=\left(n+\sqrt{n^2+4}\right)/2$, причём x_1 не удовлетворяет неравенству $n\le x<n+1$ ни при каком $n\in Z$, а x_2 удовлетворяет этому неравенству при $n>0$. **1.14.13.** $x\in\left[n,\sqrt{n^2+1}\right)$, где $n\ge 0$, $n\in Z$; $x=n$, где $n<0$, $n\in Z$. *Решение*. Пусть $n\le x<n+1$, $n\in Z$. Тогда $[x]=n$, и уравнение примет вид $\left[x^2\right]=n^2\Leftrightarrow n^2\le x^2<n^2+1\Leftrightarrow |n|\le|x|<\sqrt{n^2+1}$. 1) Пусть $n\ge 0$: тогда $n\le|x|<\sqrt{n^2+1}\Leftrightarrow x\in\left[n,\sqrt{n^2+1}\right)$ или $x\in\left(-\sqrt{n^2+1},-n\right]$. Пересекая оба промежутка с $[n,n+1)$, получим $x\in\left[n,\sqrt{n^2+1}\right)$. 2) При $n<0$ имеем: $-n\le|x|<\sqrt{n^2+1}\Leftrightarrow$ $x\in\left[-n,\sqrt{n^2+1}\right)$ или $x\in\left(-\sqrt{n^2+1},n\right]$. Пересекая оба промежутка с $[n,n+1)$, получим $x=n$, $n\in Z$. **1.14.14.** $x\in\{0;\sqrt[3]{2}\}$. *Решение*. Приведём уравнение к виду $x^6=2\left(\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]\right)$. 1) Если $x<0$, то левая часть уравнения неотрицательна, а правая – отрицательна, поэтому решений нет. 2) Пусть $x\ge 0$. Тогда разобьём на промежутки: а) $0\le x<1/2\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=0$ и $[x]=0$, следовательно, уравнение примет вид $x^6=0\Leftrightarrow x=0$; б) $1/2\le x<1\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=1$, $[x]=0$ и уравнение принимает вид $x^6=2\Leftrightarrow$ $x=\pm\sqrt[6]{2}\notin\left[\frac{1}{2},1\right)$; в) $1\le x<3/2\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=1$, $[x]=1$ и получаем уравнение

$x^6 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[3]{2}$; так как $x = \sqrt[3]{2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$, то будет решением; г) $x \geq 3/2$: $x^6 = x^5 \cdot x \geq (3/2)^5 x = 7\frac{19}{32}x > 4x + 1 = \; = 2\left(\left(x + \frac{1}{2} + x\right)\right) \geq 2\left(\left[x + \frac{1}{2}\right] + [x]\right)$. Поэтому на этом промежутке решений нет. **1.14.15.** $n \in \{1;2;3;\ldots;2002\}$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия.

1.15.1. 14. *Решение*. Пусть m – число нечётных чисел в X. Тогда $N/3 < m \leq 36N/100 \Leftrightarrow N < 3m \leq 27N/25$. Так как N – натуральное, то последнее неравенство можно переписать в эквивалентном виде $N + 1 \leq 3m \leq 27N/25 \Leftrightarrow 25(N+1) \leq 75m \leq 27N$. Отсюда по свойству транзитивности следует, что $25(N+1) \leq 27N$, т.е. $N \geq 13$. Далее, начиная с $N = 13$ и увеличивая N, проверяем выполнение условий задачи. Так, если $N = 13$, то, подставляя в исходное неравенство, получим $4\frac{1}{3} < m \leq 4\frac{17}{25}$, однако ни одно натуральное m не удовлетворяет этому неравенству. Если $N = 14$, то исходное неравенство примет вид $4\frac{2}{3} < m \leq 5\frac{1}{25} \Leftrightarrow m = 5$ – нашлось натуральное m. Следовательно, $N_{\min} = 14$. **1.15.2.** $a \in \left\{\log_3\left(18 \pm 9\sqrt{3}\right);\ \log_3\left(10 \pm \sqrt{19}\right)\right\}$ *Решение*. Сделаем замену $b = 3^a$ ($b > 0$), тогда уравнение примет вид $bn^2 - b + (81/b)n^2 = 96n + 81/b$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно b:

$$\left(n^2 - 1\right)b^2 - 96nb + 81\left(n^2 - 1\right) = 0. \qquad (1)$$

Выясним, какие значения может принимать выражение $\left(n^2 - 1\right)$. По условию n – целое нечётное число. Непосредственной подстановкой в уравнение (1) легко убедиться, что значения $n = \pm 1$ ему не удовлетворяют. Для остальных нечётных n выражение $\left(n^2 - 1\right)$ положительно. С учетом $b > 0$ из уравнения (1) следует также, что $n > 0$ (иначе левая часть уравнения была бы строго положительной и не могла бы обращаться в нуль). Итак, $n \in \{3,5,7,\ldots\}$. Далее, необходимым и достаточным условием существования решений у квадратного уравнения (1) является неотрицательность его дискриминанта $D = 96^2 n^2 - 4 \cdot 81 \cdot \left(n^2 - 1\right)^2 = 4\left((48n)^2 - \left(9\left(n^2 - 1\right)\right)^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(48n + 9\left(n^2 - 1\right)\right) \times \left(48n - 9\left(n^2 - 1\right)\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(9n^2 + 48n - 9\right)\left(-9n^2 + 48n + 9\right) \geq 0$. Так как при $n \in \{3,5,7,\ldots\}$ первый сомножитель $9n^2 + 48n - 9 > 0$, то, сократив на него, получаем неравенство $3n^2 - 16n - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\left(8 - \sqrt{73}\right)/3, \left(8 + \sqrt{73}\right)/3\right]$, в который из нечётных чисел $n \geq 3$ попадают только $n = 3$ и $n = 5$. Рассмотрим эти случаи. Если $n = 3$, то уравнение (1) после упрощения принимает вид $b^2 - 36b + 81 = 0 \Leftrightarrow b = 18 \pm 9\sqrt{3}$, откуда, делая обратную подстановку $3^a = 18 \pm 9\sqrt{3}$, находим значения $a = \log_3\left(18 \pm 9\sqrt{3}\right)$. Аналогично для $n = 5$ получаем из (1) уравнение $b^2 - 20b + 81 = 0$, откуда $b = 10 \pm \sqrt{19} \Rightarrow a = \log_3\left(10 \pm \sqrt{19}\right)$.

К РАЗДЕЛУ 2

2.1.1. $1/16 \leq A \leq 12$. *Решение.* Так как $3 \leq x \leq 4$, $-2 \leq -y \leq -1$, то $-2 \leq x - 2y - 1 \leq 1$, $0 \leq 4(x - y - 1) \leq 8$. Поскольку показательная функция с основанием 4 возрастает на всей действительной прямой, то из этих оценок получаем $4^{-2} + 4 \cdot 0 \leq A \leq 4 + 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 1/16 \leq A \leq 12$.

2.2.1. 0. *Указание.* Решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **2.2.2.** См. **1.3.14.** **2.2.3.** См. **1.12.18.**

2.3.1. *Доказательство.* Заметим, что $1 > \frac{1}{\sqrt{10000}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{10000}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{10000}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{9999}} > \frac{1}{\sqrt{10000}}$, $\frac{1}{\sqrt{10000}} \geq \frac{1}{\sqrt{10000}}$. Сложив почленно эти 10000 неравенств, получим: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \geq \frac{10000}{\sqrt{10000}} = 100$. Иначе: воспользоваться методом математической индукции. **2.3.2.** *Указание*: воспользоваться тем, что $\forall k \in N$, $k \geq 2$ справедливо $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. **2.3.3.** *Доказательство.* Обозначим $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}$. Так как $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, ..., $\frac{99}{100} < \frac{100}{101}$, то, перемножая эти неравенства, получим $A < \frac{1}{101A}$, откуда $A < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}$. **2.3.4.** *Указание*: $S - \frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \quad + \frac{1}{2^{1000}} - \frac{1000}{2^{1001}} = 1 - \frac{1}{2^{1000}} - \frac{1000}{2^{1001}} \Rightarrow$

$S = 2 - \frac{1002}{2^{1000}} < 2$. **2.3.5.** *Доказательство.* $\sqrt{(4a+1)\cdot 1} < \frac{(4a+1)+1}{2} = 2a+1$ (неравенство не обращается в равенство, поскольку в условиях задачи $4a+1 \neq 1$). Аналогично для b и c. Складывая все три неравенства и учитывая $a+b+c=1$, получим требуемое неравенство. **2.3.6.** *Доказательство.* $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}}$. Сократим на $\sqrt{a}+\sqrt{b}$:

$1 \le \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. **2.3.7.** *Указание*: перемножить неравенства

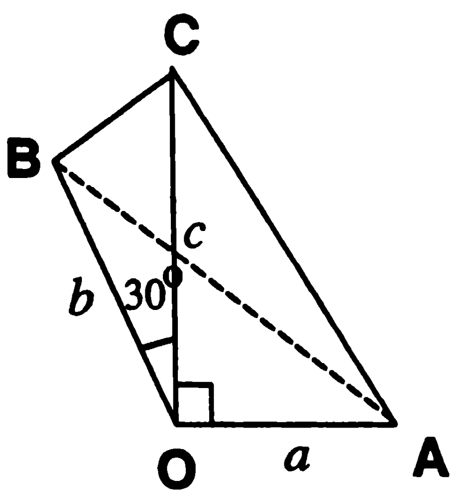
$1+a_i \ge 2\sqrt{a_i}$, $i=1,2,..,5$. **2.3.8.** *Указание*: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (a+b)+2\sqrt{ab} \ge \ge 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$. **2.3.9.** *Доказательство.* $\frac{(4b^2)+(b+1)}{2} \ge \sqrt{(4b^2)(b+1)} = = 2|b|\sqrt{b+1}$. **2.3.10.** *Доказат-во*: $(a^4+b^4)+(c^4+d^4) \ge 2a^2b^2+2c^2d^2 = = 2(|ab|^2+|cd|^2) \ge 4|abcd| \ge 4abcd$. **2.3.11.** *Указание*: сделать тригонометрическую подстановку $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$. **2.3.12.** *Указание*: сделать тригонометрическую подстановку $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, $c=\cos\beta$, $d=\sin\beta$. **2.3.13.** *Указание*: положить $a=1+\varepsilon$, $b=1-\varepsilon$. **2.3.14.** *Доказательство.* $(a^3-a^2)-(a-1)+(a-2\sqrt{a}+1) \ge 0 \Leftrightarrow (a^2(a-1)-(a-1))+(\sqrt{a}-1)^2 \ge 0$ $\Leftrightarrow (a-1)^2(a+1)+(\sqrt{a}-1)^2 \ge 0$. Последнее неравенство выполнено при всех $a \ge 0$, поскольку оба слагаемых в его левой части неотрицательны. **2.3.15.** *Доказательство.* 1) $x \in (-\infty, 0]$: неравенство $x^8+(-x^5)+x^2+(-x)+1>0$ выполнено при всех таких x, так как первые 4 слагаемых в левой части неравенства неотрицательны, а последнее – положительно; 2) $x \in (0,1)$: неравенство $x^8+(x^2-x^5)+ +(1-x)>0$ верно на всём промежутке, так как все три слагаемых в левой части (после группировки) положительны; 3) $x \in [1,+\infty)$: неравенство $(x^8-x^5)+(x^2-x)+1>0$ также выполнено при всех таких x, поскольку первые два слагаемых неотрицательны, а последнее – положительно. **2.3.16.** *Доказательство*: $a+b=c \Rightarrow 0<a/c+b/c=1 \Rightarrow 0<a/c<1$ и $0<b/c<1$. Тогда $(a/c)^{3/4}>a/c$ и $(b/c)^{3/4}>b/c \Rightarrow (a/c)^{3/4}+(b/c)^{3/4}>$

$> a/c + b/c = 1$. **2.3.17.** *Доказательство*:
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 3+6=9.$$

2.3.18. *Доказательство*. Разделив неравенство на abc: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq$ $\geq\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$ и обозначив $A=\frac{1}{a}$, $B=\frac{1}{b}$, $C=\frac{1}{c}$, получим известное алгебраическое неравенство $A^2+B^2+C^2\geq BC+AC+AB$. **2.3.19.** *Указание*: применить неравенство Коши для чисел $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$. **2.3.20.** *Указание*: возвести в квадрат, умножить на 9, перенести все слагаемые в одну сторону и выделить три полных квадрата. **2.3.21.** *Доказательство*. $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0 \Rightarrow$ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac \Rightarrow (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+$ $+2ac\geq 3(ab+ac+bc)\geq 36$. **2.3.22.** *Доказательство*. Из равенства $a+b+$ $+c=1$ имеем $\frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$, $\frac{1}{b}=1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$, $\frac{1}{c}=1+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}$. Отсюда и из неравенства для суммы двух взаимно обратных чисел следует искомое утверждение. **2.3.23.** *Указание*: $a^2b+b^2c+c^2a-(a^2c+c^2b+b^2a)=$ $=(a-b)(b-c)(a-c)$. **2.3.24.** *Указание*: воспользоваться неравенством $\frac{a}{1+a^2}\leq\frac{1}{2}$. **2.3.25.** *Доказательство*. Из условия $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ следует, что $b=\frac{2ac}{a+c}$. Тогда $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{3a+c}{2c}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 4$. **2.3.26.** *Указание*: сделать замену $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$. **2.3.27.** *Указание*: сделать замену $b+c=2x$, $c+a=2y$, $a+b=2z$, и воспользоваться неравенством о сумме взаимно обратных чисел. **2.3.28.** *Доказательство*. Перемножим неравенства: $a(1-b)b(1-c)\ c(1-a)>1/64$. С другой стороны, для любого x имеем $x(1-x)\leq 1/4$, а, следовательно, $a(1-a)\ b(1-b)\times$ $\times c(1-c)\leq 1/64$. Противоречие. **2.3.29.** *Указание*: преобразовать равенство к виду $(a+b)(a+c)(b+c)=0$. Значит, исходное равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=-b$, либо $a=-c$, либо $b=-c$. Но тогда $a^n=-b^n$, либо $a^n = -c^n$, $b^n = -c^n$ для нечётных n. **2.3.30.** *Указание*: применить неравенство Коши–Буняковского

$$(a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d\cdot 1)^2 \le \le (a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+1^2+1^2+1^2).$$

2.3.31. *Указание*: воспользоваться неравенством Коши–Буняковского.



2.3.32. *Доказательство.* Используя теорему косинусов и теорему Пифагора, получаем:

$$AB=\sqrt{a^2+b^2+ab},\ AC=\sqrt{a^2+c^2},$$

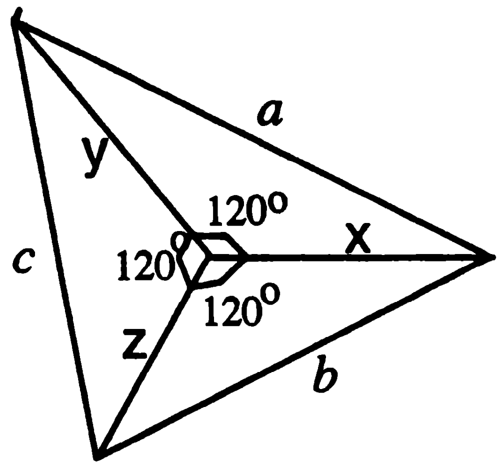
$$BC=\sqrt{b^2+c^2-\sqrt{3}bc}.$$

Тогда доказываемое неравенство превращается в неравенство треугольника $AB \le AC+BC$ (см. рис. слева). **2.3.33.** *Доказательство.* Воспользуемся геометрическим подходом. 1-й способ. По теореме косинусов для соответствующих треугольников (см. рис.) имеем:

$$a=\sqrt{x^2+y^2-2\left(-\tfrac{1}{2}\right)xy},$$

$$b=\sqrt{x^2+z^2-2\left(-\tfrac{1}{2}\right)xz},$$

$$c=\sqrt{y^2+z^2-2\left(-\tfrac{1}{2}\right)yz}.$$



Таким образом, данное неравенство имеет простой геометрический смысл: $a+b \ge c$ – неравенство треугольника.

2-й способ. Рассмотрим на координатной плоскости Oxy точки

$$A(x;0),\ B\left(-y/2;y\sqrt{3}/2\right),$$

$$C\left(-z/2;-z\sqrt{3}/2\right) \Rightarrow$$

$$AB=\sqrt{x^2+xy+y^2},$$

$AC=\sqrt{x^2+xz+z^2}$, $BC=\sqrt{y^2+yz+z^2}$, а неравенство принимает вид $AB+AC \ge BC$.

2.4.1. а) верно; б) неверно; в) верно; г) неверно. *Решение*: Обозначим через p и q соответственно количество положительных и отрицательных чисел в данной совокупности $\{n_k\}$, где $k=1,2,\ldots,40$, $p,q \in N$. Пусть S^+ – сумма всех положительных чисел, а S^- – абсолютная величина суммы отрицательных чисел. Тогда справедливы равенства $p+q=40$, $\frac{S^+-S^-}{40}=5$. а) Утверждение верно, так как из $S^+-S^-=200$ следует $\frac{S^+}{p}=\frac{200+S^-}{p}>\frac{200}{p}>\frac{200}{40}=5$. б) Неверно, что следует из примера: $p=39$, $q=1$, $n_1=\ldots=n_{39}=6$, $n_{40}=-34$. в) Справедливость утверждения следует из а). В самом деле, пусть наибольшее положительное число меньше 5. Тогда $S^+=n_1+n_2+\ldots+n_p<5p \Leftrightarrow S^+/p<5$, что противоречит доказанному в п. а). г) Неверно, например: $n_1=239$, $n_2=n_3=\ldots=n_{40}=-1$.

К РАЗДЕЛУ 3

3.1.1. $a\in(-5,\ 4)$. **3.1.2.** $x\in R$. *Указание*: упрощая коэффициенты, привести уравнение к виду $0\cdot x=0$. **3.1.3.** $\{3\}$. **3.1.4.** $x\in\left(\left(2-\sqrt{2}\right)/2,\left(2+\sqrt{2}\right)/2\right)$. **3.1.5.** 1 решение. **3.1.6.** $b\in\{-1;0\}$. **3.1.7.** $a\in\{-1/8;15/8;3\}$. **3.1.8.** $a\in(-\infty,1]\cup\{5/4\}\cup[4/3,+\infty)$. *Указание*: положить $t=(3/2)^x$. **3.1.9.** $a\in(-\infty,-5)\cup(9/7,+\infty)$. **3.1.10.** $a=-36$. **3.1.11.** $a\in(-1,0]\cup\left\{\left(2+2\sqrt{13}\right)/3\right\}$. **3.1.12.** При $a>0,\ b\geq 0$ решений нет; при $a\leq 0,\ b\leq 0$ $x\in R$; при $a>0, b<0$ $x\in\left(-\infty,-\sqrt{-a/b}\right]\cup\left[\sqrt{-a/b},+\infty\right)$; при $a\leq 0,\ b>0$ $x\in\left[-\sqrt{-a/b},\sqrt{-a/b}\right]$. **3.1.13.** $a\in\{0\}\cup$ $\cup\left(\left(-2-\sqrt{6}\right)/2,\left(-2-\sqrt{2}\right)/2\right)$. *Указание*: при $a\neq 0$ показать, что дискриминант является полным квадратом, найти корни $x_{1,2}$ и учесть условия задачи. Случай $a=0$ рассмотреть отдельно. **3.1.14.** $a\in(-\infty,-35]$. *Указание*: рассмотреть случаи, когда старший коэффициент $=0$, <0, >0. В последнем случае для отбора a можно воспользоваться методом координат на плоскости Oab. **3.1.15.** При $d\in(-\infty,-4)$ нет решений; при $d=-4$ $x=1$; при $d\in(-4,0)$ $x\in\left[\log_2\left(2-\sqrt{d+4}\right),\log_2\left(2+\sqrt{d+4}\right)\right]$; при $d\in[0,+\infty)$ $x\in\left(-\infty,\ \log_2\left(2+\sqrt{d+4}\right)\right]$. *Указание*: сделать замену $t=2^x>0$.

3.2.1. $A=2>1{,}999$, $A=1{,}(9)$. **3.2.2.** Не может. *Указание*: воспользовать-

...ся теоремой Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b + 1, \end{cases}$ откуда $a = -x_1 - x_2$, $b = x_1 x_2 - 1$, и показать, что выражение $a^2 + b^2$ раскладывается на множители, отличные (по модулю) от единицы. **3.2.3.** $x \in \{\pm\sqrt{2}\}$. **3.2.4.** $a = -3$, $S = 18$. **3.2.5.** $a = 13$; $x_1 = 2,\ x_2 = 6,\ x_3 = 18$. **3.2.6.** $a \in (0, 1/2)$. **3.2.7.** $a \in (0,\ 2c]$. **3.2.8.** $\alpha = 4$; $\max\limits_{a \in [2,4]}(xy) = 3$. **3.2.9.** $b \in \{-1/2,\ 1/4\}$. **3.2.10.** Корни существуют при $m = 0$ (нулевой корень) и при $m \geq 3$, когда корни положительны. **3.2.11.** $a \in \{2\}$. **3.2.12.** $a \in R$. **3.2.13.** $a = -2$. **3.2.14.** $a \in \{\sqrt{3}/2\}$. **3.2.15.** *Указание*. Так как старший коэффициент положителен, то условие задачи выполняется $\Leftrightarrow$ $f(1) < 0$, где $f(x) = x^2 - 2ax - a$. **3.2.16.** $a_{\min} = -2 - \frac{\sqrt{15}}{2}$, $a_{\max} = -\frac{1}{12}$. *Указание*. $f(x) = a^2x^2 - ax + 3a + \frac{1}{4} \leq 0$ $(a \neq 0)$. Условия задачи приводят к системе $\begin{cases} f(-1) \leq 0;\ f(0) \leq 0; \\ -1 \leq x_в \leq 0. \end{cases}$ **3.2.17.** *Указание*. Положим $a = x + 2y^2$, тогда исходная задача будет сформулирована в виде: «При каких a неравенство $2(a - 2y^2)^2 + y^2 \leq 1$ имеет решения»? Приведём неравенство к виду $8y^4 - (8a - 1)y^2 + 2a^2 - 1 \leq 0$. Оно имеет решения $\Leftrightarrow$ квадратное неравенство $8t^2 - (8a - 1)t + 2a^2 - 1 \leq 0$ имеет неотрицательные решения. Далее методом парабол. **3.2.18.** $a \in (4 - \sqrt{7};\ \ 4 + \sqrt{7})$. *Указание*: положим $y = x^2 + 3|x| + 1$. Тогда уравнение преобразуется к виду $x^2 + 3ax + a^2 + a = 0$. Далее методом парабол.

3.3.1. $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. **3.3.2.** $x \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$. **3.3.3.** $x \in \{1; (-5 \pm \sqrt{5})/2\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $(x^3 - x^2) + (5x^2 - 5) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2(x - 1) + 5(x - 1)(x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x - 1) \times (x^2 + 5x + 5) = 0$. **3.3.4.** $x \in \{-9; 11\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $(x^4 + 2x^2 + 1) - (4x^2 + 400x + 10000) = 0$. **3.3.5.** $(a + b)/a$ и $(a - b)/b$. *Указание*: воспользоваться теоремой, обратной к теореме Виета.

3.4.1. $x \in \{2\}$. **3.4.2.** $x \in \{-1; 0\}$. **3.4.3.** $x \in (-\infty, 1) \cup [4/3, +\infty)$. **3.4.4.**

$x\in(-\infty,1]\cup(1996,+\infty)$. **3.4.5.** $x\in(2,+\infty)$. **3.4.6.** $x\in(-2,-4/3]\cup(-1,+\infty)$. **3.4.7.** $x\in[-2,0)\cup[2,+\infty)$. **3.4.8.** $x\in[-5,1]\cup(2,3)$. **3.4.9.** $x\in(1,2]\cup(7,8)$. *Указание*: свести неравенство к равносильной ему системе $\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-7)}{(x-1)(x-8)}\le 0\\ x\ne 7.\end{cases}$

3.4.10. $x\in\left(-\infty,-\sqrt{17}\right)\cup[-4,-3)\cup\ \cup(-3,3)\cup\left(\sqrt{17},5\right]$. **3.4.11.** $x\in(2,3)$. *Указание*: неравенство равносильно неравенству $x^2-5x+6<0$. **3.4.12.** $x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$. *Указание*: неравенство равносильно неравенству $x^2+3x-4>0$. **3.4.13.** $x\in(-\infty,-1]\cup(1,2)\cup[4,+\infty)$. **3.4.14.** $x\in\left(-3/2,-\sqrt{3/2}\right)\cup[-1,0)\cup\left(0,\sqrt{3/2}\right)$. **3.4.15.** $x\in\{-5\}\cup(-2,\ 3)$. **3.4.16.** $x\in(-\infty,-8)\cup(-5,-2)\cup[0,+\infty)$. **3.4.17.** $1/\sqrt{3}$. **3.4.18.** $a\in\{-1/8;\ 15/8;\ 3\}$.

3.5.1. $k\in\{-1\}$. *Указание*: перенести второе слагаемое (число 4) в левой части направо, и представить $\sqrt{5}-2$ в виде $1/\left(\sqrt{5}+2\right)$. **3.5.2.** $x\in\left\{\left(-99\pm\sqrt{99\cdot 95}\right)/2\right\}$. *Указание*: воспользоваться тождеством $\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}=\dfrac{1}{x+n-1}-\dfrac{1}{x+n}$, $n=1,2,\ldots,99$. **3.5.3.** $a\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$. *Указание*: рассмотреть два случая $\begin{cases}2a+4\le 1\\ -3a+2>3\end{cases}$ и $\begin{cases}2a+4\ge 3\\ -3a+2<1.\end{cases}$

3.5.4. $b\in(-\infty,-6)\cup(-1/3,+\infty)$. *Указание*: рассмотреть два случая $\begin{cases}3b>-1\\ b/2>-1\end{cases}$ и $\begin{cases}3b<-3\\ b/2<-3.\end{cases}$ **3.5.5.** $a\in[2/5,11/2]$. **3.5.6.** При $a\in(-\infty,-3)$ $x\in(-\infty,a)\cup(-3,+\infty)$; при $a=-3$ $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$; при $a\in(-3,1/3)\cup(1/3,+\infty)$ $x\in(-\infty,-3)\cup(a,+\infty)$; при $a=1/3$ $x\in(-\infty,-3)\cup(1/3,1)\cup(1,+\infty)$.

3.6.1. $x\in\left(\left(5-\sqrt{21}\right)/2,+\infty\right)$. **3.6.2.** $x\in(-\infty,-1]\cup\{2\}$. **3.6.3.** $x\in\left[1-\sqrt{3},1/2\right)\cup\left\{-\sqrt{3}\right\}$. **3.6.4.** $x\in\{6\}$. *Указание*: разложить подкоренные выражения на линейные множители. Заметив, что $x=6$ – решение, для нахожнения других решений (из отрезка $[4,5]$), сократить на $\sqrt{6-x}>0$. **3.6.5.** $x\in\{-3/2\}$. *Указание*: группируя и раскладывая на множители, привести уравнение к виду $\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}\right)\times\left(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+1}\right)=0$. **3.6.6.** $x\in(-3,2]\cup\left[\left(3-\sqrt{31}\right)/2,\left(\sqrt{23}-1\right)/2\right]\cup[2,5)$. **3.6.7.** $x\in\left[-4,\left(2\sqrt{101}-25\right)/13\right]\cup\{0\}\cup[23/13,2]$.

3.7.1. Уравнение не имеет решений. *Указание*: привести уравнение к виду $\sqrt{x}=1-(x-4)^2$, построить графики функций, расположенных в левой и правой частях уравнения, и показать, что они не пересекаются. **3.7.5.** Это точки, лежащие на прямых $x=-1$, $x=0$ и $y=-x+2$, за исключением точек пересечения этих прямых с прямыми $y=\pm x$. **3.7.9.** $1+\pi/2$ (кв.ед.). **3.7.10.** π (кв.ед.). **3.7.13.** Объединение двух полупрямых: $(3,y)$, где $y\in[-3,+\infty)$; $(x,1)$, где $x\in[-1,+\infty)$. **3.7.14.** $S=3$ (кв.ед.). **3.7.15.** Наибольшее значение функции минимально при $a=-5$ и равно (-4). **3.7.16.** $c\in\left\{-4\sqrt{2}\right\}\cup(-4,4]$. **3.7.17.** $b\neq k/5$, $k\in Z$. *Указание.* Неравенство задаёт на плоскости $(x;y)$ открытый круг с центром в точке $(a+2b;\ 3a+b)$ и радиусом $1/\sqrt{2}$. Такой круг не содержит ни одной точки с целыми координатами тогда и только тогда, когда его центр удалён от всех таких точек не менее чем на $1/\sqrt{2}$, т.е. имеет координаты $\left(n+\frac{1}{2};m+\frac{1}{2}\right)$, где $n,m\in Z$. Приравнивая координаты центра, находим $a=\left(2m+\frac{1}{2}-n\right)/5$, $b=(3n+1-m)/5$. Дроби вида $(3n+1-m)/5$ при $n,m\in Z$ пробегают все значения вида $k/5$, где $k\in Z$. Следовательно, они (и только они) должны быть исключены. **3.7.18.** *Указание*: упростить условие с учётом тождества $\cos(arctg\,\alpha)=1/\sqrt{1+\alpha^2}$, $\alpha\in R$. **3.7.19.** $(x;y)\in\{(2;0)\}$. *Указание*: изобразить ОДЗ уравнения на плоскости $(x;y)$, и отобрать точки с целочисленными координатами, попадающие в это множество. **3.7.20.** $arctg(7/3)-(\pi/4)$. *Указание*: выяснить, при каких значениях k прямые $y=kx$ пересекают данное множество (неравенство рассмотреть как квадратное относительно x). Получится, что при $1<k<\frac{7}{3}$. **3.7.21.**

$12\sqrt{2}$. *Указание*: учитывая, что $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2, 2(x^2+y^2)=$ $=(x+y)^2+(x-y)^2$, привести уравнение к виду

$$\left((p^2-2p+4)^2-(x+y)^2\right)\left((p^2+2p+4)^2-(x-y)^2\right)=0, \text{ т.е.}$$

$\left[\begin{array}{l} x+y=p^2-2p+4;\ x+y=-(p^2-2p+4); \\ x-y=p^2+2p+4;\ x-y=-(p^2+2p+4). \end{array}\right.$ При каждом значении p уравнения совокупности задают четыре прямые. Поскольку $p^2-2p+4=(p-1)^2+3\geq 3$ и $p^2+2p+4=(p+1)^2+3\geq 3$, то указанные прямые не проходят только через точки области, определяемой системой неравенств $|x+y|<3$ и $|x-y|<3$. Это внутренность квадрата со стороной $3\sqrt{2}$, а искомая линия – его периметр.

3.8.1. $x\in\left(-2,-\sqrt{3}/3\right)\cup\left(\sqrt{3}/3,\ 2\right)$. **3.8.2.** $x\in\left\{-\left(5+\sqrt{21}\right)/2;-3;\right.$ $\left.-2;\left(\sqrt{21}-5\right)/2\right\}$ *Указание*: сделать замену $y=x^2+5x+3$. **3.8.3.** $x\in\{2;3\}$. *Указание*: сделать замену $y=x^2-5x+7$. **3.8.4.** $x\in\left(\left(1-\sqrt{13}\right)/2,0\right)\cup\left(1,\left(1+\sqrt{13}\right)/2\right)$. *Указание*: сделать замену $y=x^2-x-6$. **3.8.5.** $x\in[-4/3,\ -1]\cup(-2/3,\ 0)\cup[1/3,\ 2/3]$. *Указание*: сделать замену $t=3x^2+2x$. **3.8.6.** $x\in\left\{-\sqrt{5}\right\}$. *Указание*: сделать замену $y=1/(2-x)$. **3.8.7.** $x\in\{3;7/2\}$. *Указание*: сделать двойную подстановку $a=7-2x$, $b=8x-x^2-15$. **3.8.8.** $x\in\left\{-1\pm\sqrt{3};\ -2\pm\sqrt{2}\right\}$. *Указание*: сделать подстановку $y=x^2+3x-2$ и свести к системе $\begin{cases} y^2+3y-2=x \\ x^2+3x-2=y. \end{cases}$

3.8.9. $x\in\left\{0;1;\pm\left(2\sqrt{2}\right)/3\right\}$. *Указание*: преобразовать уравнение к виду $(x-1)^2+3\left(1-x^2\right)=\sqrt{1-x^2}\times\left(3(x-1)^2+1\right)$, ввести переменные $a=(x-1)^2$, $b=\sqrt{1-x^2}$, и затем рассмотреть уравнение как квадратное относительно b. **3.8.10.** $(x;y)\in\left\{\left(\dfrac{3d+8}{6},\dfrac{3d}{2}\right)\right\}$, где $d\in R$. *Указание*: привести уравнение к виду $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\gamma}=4$, где $\alpha=x-y+d$, $\beta=4-2x+d$, $\gamma=x+y-2d$, и воспользоваться неравенством Коши.

3.9.1. $x \in \left\{\left(-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-3}\right)/2\right\}$. *Указание*: сделать подстановку $y = x + (1/2)$.

3.10.1. $x \in \{-25\}$. *Указание*: сделать замену $y = \sqrt{-x}$. **3.10.2.** $x \in \{2;\ 3\}$. *Указание*: сделать замену $y = \sqrt{x-2}$. **3.10.3.** $y \in \{-4;\ 1\}$. *Указание*: сделать замену $x = \sqrt{y^2+3y-4}$. **3.10.4.** $x \in [0,900) \cup\ \cup (3600,+\infty)$. *Указание*: сделать замену $t = \sqrt{x}$. **3.10.5.** $x \in \{0\} \cup (16,+\infty)$. **3.10.6.** $x \in \{16;81\}$. *Указание*: выполнить двойную подстановку $u = \sqrt[4]{97-x}$, $v = \sqrt[4]{x}$, свести уравнение к системе $\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97, \end{cases}$ и воспользоваться тождеством $u^4+v^4 = \left((u+v)^2-2uv\right)^2 - 2(uv)^2$. **3.10.7.** $x \in \{1\}$. *Указание*: положить $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$. **3.10.8.** $x \in \{5;6;7\}$. *Указание*: очевидно, $x = 5$ – корень уравнения. При $x \neq 5$ сделать подстановку $t = \sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}}$. **3.10.9.** $x \in \{5\}$. *Указание*: возвести в квадрат и сделать замену $t = x\sqrt{x-1}$. **3.10.10.** $(x;y) \in \{(2;2)\}$. *Указание*: сделать подстановку $a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{y-1}$, и рассмотреть как квадратное относительно a. **3.10.11.** $x \in \left(-4-\sqrt{6},-9/2\right) \cup \left(-3,\left(\sqrt{22}-8\right)/3\right) \cup [5,7)$. *Указание*: сделать двойную подстановку $a = \sqrt{x^2-4x-5}$, $b = 2|x+2|$. Тогда $\dfrac{a+4}{a^2-16} < \dfrac{b+5}{b^2-25} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a-4} < \dfrac{1}{b-5}$. **3.10.12.** $x \in \{15\}$. **3.10.13.** *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **3.10.14.** $(x;y) \in\ \in \{(26,-6);(-9,\ 29)\}$. *Указание*: положить $u = \sqrt[3]{x+1}$, $v = \sqrt[3]{y-2}$. **3.10.15.** $x \in \left[-4/3,-\sqrt{7}/2\right) \cup \left(0,\sqrt{7}/2\right)$. *Указание*: положить $u =\ = \sqrt{1+(3x/4)}$, $v = \sqrt{1-(3x/4)}$. **3.10.16.** $x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$. *Указание*: положить $y = \sqrt{2x/(x+1)}$. **3.10.17.** $x \in \left\{1;\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)/2\right\}$. *Указание*: положив $y = \sqrt[3]{2x-1}$, свести уравнение к системе $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x. \end{cases}$

3.11.1. $x\in\left\{-\sqrt{2}/2;-\sqrt{2-\sqrt{2}}/2;\sqrt{2+\sqrt{2}}/2\right\}$. *Указание*: сделать тригонометрическую подстановку $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0,\pi]$. **3.11.2.** $-1/2\le xy\le 1/2$. *Указание*: привести уравнение к виду $(2y)^2+(x/2)^2=1$, и сделать двойную подстановку $y=(1/2)\sin\varphi$, $x=2\cos\varphi$. **3.11.3.** $x\in\left\{-\sqrt{2}/2;\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4\right\}$. *Указание*: воспользуйтесь тригонометрической подстановкой $x=\sin t$, $t\in[-\pi/2;\pi/2]$. **3.11.4.** $x\in\left\{-\sqrt{2}/6;\sqrt{2}/6;\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)/12\right\}$. *Указание*: сделать тригонометрическую подстановку $3x=\sin t$, $t\in[-\pi/2;\pi/2]$. **3.11.5.** $x\in\left\{-\left(\sqrt{73}+5\right)/14;3/5;4/5\right\}$. *Указание*: сделать тригонометрическую подстановку $x=\sin t$, $t\in(-\pi/2;\pi/2)$, $t\ne 0$. Затем решить полученное тригонометрическое уравнение с помощью замены $y=\sin t+\cos t$. **3.11.6.** 3. *Указание*: сделать подстановку $x=\cos t$, $t\in[0,\pi/2]$. **3.11.7.** $x\in\left\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}/4\right\}$. **3.11.8.** $y_{\max}=1/\left(2\sqrt{3}\right)$. *Указание*. Функция является нечётной, её наибольшее значение достигается на промежутке $0\le x\le 1/\sqrt{3}$. Положить $x=\left(1/\sqrt{3}\right)\sin\varphi$, где $\varphi\in[0,\pi/2]$. **3.11.9.** 10. *Указание*: приведя уравнение к виду $(x/2)^2+(y/4)^2=1$, положить $x=2\cos\varphi$, $y=4\sin\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi)$. **3.11.10.** $-8/\sqrt{3}$. *Указание*: положить $y=a-2b+c$, тогда $c=2b-a+y$. Подставляя в уравнение, получим квадратное уравнение

$$4a^2-2(y+2b)a+5b^2+y^2+4by-4=0,$$

которое имеет решения $\Leftrightarrow$ $D_1\ge 0$. Последнее неравенство рассмотреть как квадратное относительно b, оно имеет решение $\Leftrightarrow$ $D_2\ge 0$. Из полученного диапазона изменения y выбрать наименьшее значение. **3.11.11.** $a\in\left(-\infty,-\sqrt{3}/2\right)\cup\left(\sqrt{3}/2,+\infty\right)$. *Указание*: привести условие к виду $(x-3)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$, и сделать подстановку $x-3=\sqrt{3}\cos\varphi$, $y+2=\sqrt{3}\sin\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi)$. **3.11.12.** См. **1.8.18.** **3.11.13.**

$(4201/3600)\pm\left(\sqrt{601}/30\right)$. *Указание*: из первого уравнения следует, что $\exists\varphi\in[0,2\pi)$: $x+1=5\cos\varphi$, $y+2=5\sin\varphi$. Аналогично из второго уравнения вытекает, что $\exists\psi\in[0,2\pi)$: $z=12\cos\psi$, $w-1=12\sin\psi$.

3.12.1. *Указание*: рассмотреть уравнение как квадратное относительно x. **3.12.2.** $(x;y)\in\{(0;-1)\}$. **3.12.3.** $x\in\left\{-\sqrt{2}/6;\sqrt{2}/6;\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)/12\right\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $2\left(1-9x^2\right)-6x\cdot\sqrt{1-9x^2}+\ +3\sqrt{2}x-1=0$, и рассмотреть его как квадратное относительно величины $y=\sqrt{1-9x^2}$. **3.12.4.** $E(y)=[-2,-3/2)\cup[-1,+\infty)$. *Указание*: рассмотреть уравнение как иррациональное уравнение с параметром y. **3.12.5.** 10. *Указание*: положить $a=3x-2y$, тогда $y=(3x-a)/2$ и, подставив в уравнение, свести к задаче: «при каких значениях a квадратное уравнение $25x^2-6ax+a^2-64=0$ имеет решения?». **3.12.6.** $a\in[-1/3,+\infty)$. *Указание*: рассмотреть неравенство как линейное относительно параметра a, и привести его к виду $a>(4x-1)/\left(x^2+3\right)$. Обозначив $f(x)=(4x-1)/\left(x^2+3\right)$, доказать монотонное возрастание этой функции на отрезке $[-1,0]$ ($f'(x)>0$). Следовательно, $f(x)$ своё наибольшее значение достигает на правом конце отрезка, т.е. при $x=0$, и $f(0)=-1/3$. Далее воспользоваться, например, графическим подходом. **3.12.7.** $a\in(2,7)$. *Указание*: рассмотреть неравенство как квадратное относительно параметра a, получить оценки для x из условия положительности дискриминанта, и отобрать целые x, им удовлетворяющие. **3.12.8.** *Указание*: обозначить $\pi=a$, уединить в равенстве радикал, возвести на ОДЗ в квадрат, и далее рассмотреть полученное уравнение как квадратное относительно a. **3.12.9.** *Указание*: обозначить $\sqrt{2}=a$ и рассмотреть как квадратное относительно a. **3.12.10.** *Указание*: рассмотреть это уравнение как квадратное относительно z, а затем неравенство, полученное из условия неотрицательности дискриминанта, – как квадратное относительно y. **3.12.11.** При $a\in(-\infty,-5/4)$ одно решение; при $a=-5/4$ два решения; при $a\in(-5/4,-1)$ три решения; при $a\in\left[-1,\ 1-\sqrt{2}\right)$ два решения; при $a=1-\sqrt{2}$ одно решение; при $a\in\left(1-\sqrt{2},\ 5\right)$ два решения; при $a\in[5,+\infty)$ одно решение. *Указание*: сделать замену $t=2^{-x}>0$, и рассмотреть уравнение как квадратное относительно a.

3.13.1. $y \in \{2\}$. *Указание*: извлечь корень пятой степени (равносильное преобразование), и затем решить полученное квадратное уравнение.

3.14.1. $(x;y) \in \{(1;-1)\}$. *Указание*: $(2x+y-1)^2+(x+2y+1)^2=0$. **3.14.2.** $(x;y) \in \{(12;-4);(2;-4);(10;-2);(4;-2);(10;-6);(4;-6)\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $(x-7)^2+4(y+4)^2=25$ и сделать замену $u=x-7,\ v=y+4$. Учесть, что если пара (u,v) есть решение, то решениями также будут $(u,-v)$, $(-u,v)$, $(-u,-v)$. Далее подбором (с учётом $|u| \le 5$, $|v| \le 2$) найти неотрицательные решения уравнения. **3.14.3.** $(x;y) \in \{(0;0);(-2;-2);(0;-1);(-2;-1)\}$. *Указание*: $(x-y)^2+(y+1)^2=1$ $\Rightarrow$ $(x-y)^2=1$ и $(y+1)^2=0$, либо $(x-y)^2=0$ и $(y+1)^2=1$. **3.14.4.** $\min\limits_{x \in R} f(x)=0$. *Указание*: $f(x)=(2^x+ax)^2 \ge 0$ при $\forall x \in R$. При $a>0$ точка пересечения графиков $y=2^x$ и $y=-ax$ существует. **3.14.5.** $(a;b) \in \{(3;3);(-3;-3);(2\sqrt{3};\sqrt{3});\ (-2\sqrt{3};-\sqrt{3})\}$. *Указание*: привести уравнение к виду, когда сумма трёх полных квадратов равна нулю. **3.14.6.** $a \in \{(1-\sqrt{3})/4\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $\left((ax)^2+2(\sqrt{3}-1)ax+(\sqrt{3}-1)^2\right)+\sqrt{x-4}=0$. **3.14.7.** $(x;y) \in$ $\in \{(4;1;\pm\arccos(1/5)-arctg(4/3)+2\pi n)\}$, $n \in Z$. *Указание*: оценить значения x, y на ОДЗ.

3.15.1. $x \in \{9\}$. *Указание*: учесть, что $x-4=(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$, и сократить дробь в левой части уравнения на $\sqrt{x}+2(>0)$. **3.15.2.** При $|a| \le 2(669)^{3/2}$ уравнение имеет по крайней мере два различных корня; для любых двух корней $x_1 \ne x_2$ имеем: $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=2007$. **3.15.3.** $x \in \{-1/(\sqrt[3]{2}+1)\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $(x+1)^3=-2x^3$ и извлечь кубический корень. **3.15.4.** $x \in \{-(\sqrt[3]{6}+3)/2\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $(2x+3)^3=-6$.

3.16.1. $x \in R$. *Указание*: рассмотреть промежутки $-\infty < x \le 0$, $0<x<1$ и $x \ge 1$, и на каждом из них, группируя слагаемые и оценивая их значения, показать положительность левой части неравенства. **3.16.2.** $\varnothing$. *Указание*: рассмотреть промежутки $x \le 0$, $0 < x < 1$, $x \ge 1$. **3.16.3.** $x \in [-3,0) \cup (0,\sqrt{10}]$. *Указание*. ОДЗ: $0 < |x| \le \sqrt{10}$. Рассмотреть отдельно промежутки ОДЗ: $-\sqrt{10} \le x \le -5/2$, $-5/2 < x < 0$, $0 < x \le \sqrt{10}$. **3.16.4.** $x \in (-\infty,-7) \cup (-5,-3] \cup [2,+\infty)$. **3.16.5.** $x \in [-8,-4) \cup [0, 8\sqrt{3}/3]$. *Указание*: рассмотреть отдельно промежутки ОДЗ $(-\infty,-4)$ и $[0,+\infty)$, и на каждом из них преобразовать неравенство.

3.17.1. $x \in [-5,-3]$. **3.17.2.** $x \in (-\infty,-5)$. **3.17.3.** $x \in (-\infty,-\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3},+\infty)$. *Указание*: $x = 0$ – решение неравенства. Для нахождения ненулевых решений поделить обе части на $|x|$. **3.17.4.** $x \in \{-4\} \cup [-3,+\infty)$. *Указание*: $x = -4$ – решение неравенства. При $x > -4$ поделить неравенство на $\sqrt{x+4} > 0$. **3.17.5.** $x \in (-\infty,-1] \cup \{2\}$. *Указание*: $(x-1)\sqrt{(x+1)(x-2)} \le 0$. ОДЗ: $x \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$. Очевидно, $x = -1$ и $x = 2$ являются решениями неравенства. При остальных x из ОДЗ поделить неравенство на $\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$. **3.17.6.** $x \in [1/5, 1/4] \cup \{2/5\}$ **3.17.7.** $x \in (-\infty,-5) \cup \{3\}$. **3.17.8.** $x \in (-\sqrt{3}/2, -1/2] \cup [3, 2\sqrt{3})$. **3.17.9.** $x \in (5,+\infty)$. **3.17.10.** $x \in [1-\sqrt{3}, 1/2) \cup \{-\sqrt{3}\}$. *Указание*: заметим, что $x = -\sqrt{3}$ – решение неравенства. При $x \ne -\sqrt{3}$ на ОДЗ можно сократить неравенство на $\sqrt{3 - x^2} > 0$. **3.17.11.** $x \in (-1,0) \cup (1,4)$. **3.17.12.** $x \in (-\infty,-2] \cup \{-1\} \cup (7,8]$. **3.17.13.** $x \in \{6\}$. *Указание*. Привести неравенство к виду $\sqrt{(x-4)(6-x)} \ge \sqrt{(7-x)(6-x)} - \sqrt{(5-x)(6-x)}$. ОДЗ: $x \in [4,5] \cup \{6\}$. Учесть, что $x = 6$ – решение неравенства, и затем при $x \in [4,5]$ сократить неравенство (на ОДЗ) на $\sqrt{6-x}$.

3.18.1. $a = -3$; $b = 2$. **3.18.2.** $a \in \{1/8\}$. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.18.3.** $a \in \{0;\ 2\sin 1\}$. *Указание*: заметив, что x и $(-x)$ одновременно являются решениями уравнения, найти $x = 0$, и из уравнения определить два возможных значения параметра $a = 0$ и $a = 2\sin 1$. При проверке второго значения учесть, что $x^2 + (2\sin 1)^2 \geq 4\sin^2 1$, и $4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) \leq 4\sin^2 1$. **3.18.4.** При $a \in \{-2/3; 0\}$. ***Решение.*** Приведя уравнение к виду

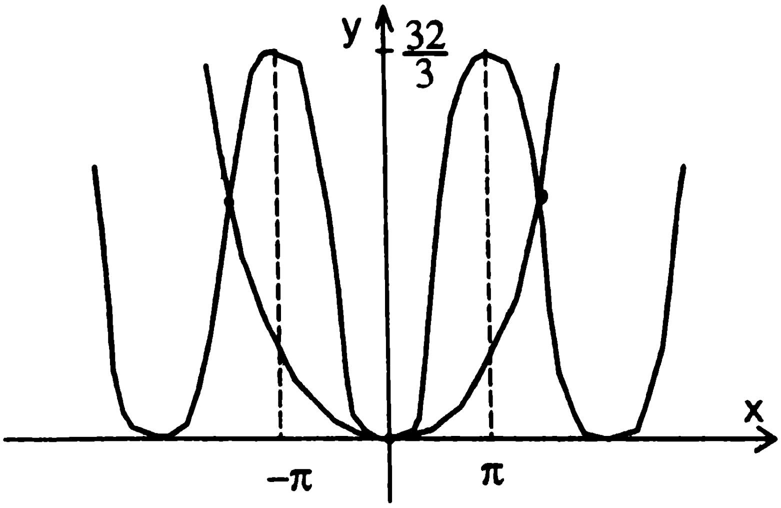
$$0.5(2\pi(x-1))^2 + 4a \cdot \cos 2\pi(x-1) - 9a^3 = 0,$$

и сделав замену $t = 2\pi(x-1)$ (в силу линейности функции каждому x отвечает одно и только одно t), получим уравнение

$$t^2 + 8a \cdot \cos t - 18a^3 = 0. \qquad (1)$$

Если некоторое t является решением (1), то и $(-t)$ также будет решением. Необходимое условие единственности решения: $t = -t$, т.е. $t = 0$. Подставив это значение в (1), найдём три значения параметра $a = 0$ и $a = \pm 2/3$. Проверим достаточность.

1) При $a = 0$ уравнение (1), очевидно, имеет единственное решение.



2) При $a = 2/3$ уравнение примет вид

$$t^2 = \tfrac{16}{3}(1 - \cos t).$$

Решая его графически, обнаруживаем, что уравнение имеет более одного решения.

3) Наконец, при $a = -2/3$ получаем уравнение $t^2 = \frac{16}{3}(\cos t - 1)$. Его левая часть неотрицательна, а правая, наоборот, неположительна при всех t. Поэтому равенство возможно тогда и только тогда, когда $\begin{cases} t^2 = 0 \\ (16/3)(\cos t - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$. **3.18.5.** При $a \in (-\infty, 0]$. *Указание*: свести неравенство к квадратному и учесть, что оно, в частности, должно выполняться при $b = 2$. **3.18.6.** Таких чисел не существует. **3.18.7.** *Указание*: воспользоваться методом от противного.

3.19.1. $x \in \{18\}$. **3.19.2.** $x \in \{2\}$. **3.19.3.** $x \in \{-1\}$. **3.19.4.** $x \in \{-\sqrt{5}\}$. **3.19.5.** $x \in \{0;\ 2\}$. **3.19.6.** $x \in \{(1+\sqrt{11})/2\}$. **3.19.7.** $x \in \{\pm\sqrt{7}/2\}$. **3.19.8.** $x \in \{\pi + 2\pi n; \pi/2 + \pi k\}$, $n, k \in Z$. **3.19.9.** $x \in \{-1\} \cup [0,1]$. **3.19.10.**

$x\in(0,1]\cup[2,10)$. **3.19.11.** $x\in\{-19\}\cup[0,19]$. **3.19.12.** $x\in\{1\}\cup[2,+\infty)$. **3.19.13.** $x\in[0,4]$. **3.19.14.** $x\in(-\infty,0]\cup[5/2,+\infty)$. **3.19.15.** $x\in\{2;3\}\cup[6,+\infty)$. **3.19.16.** $x\in\left[-3-\sqrt{29},-1\right]\cup\left[2,-3+\sqrt{29}\right]\cup\{4\}$. **3.19.17.** $x\in\{2;3\}\cup[6,+\infty)$. **3.19.18.** $x=-7$, $y=5$. **3.19.19.** $x\in\left[-3,-3/\sqrt{2}\right)\cup\left(-3/\sqrt{2},0\right)\cup(0,3]$. **3.19.20.** $x\in\{0\}\cup\left[\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{32/5}\right]$. **3.19.21.** $x\in(5,+\infty)$. **3.19.22.** $x\in[2,+\infty)$. **3.19.23.** $x\in(-\infty,2)\cup[3,4)$. **3.19.24.** $x\in(-\infty,1/2)\cup\left(\left(3+\sqrt{57}\right)/8,\ 4\right)$. **3.19.25.** $x\in[-8,0)\cup(1,2)$. **3.19.26.** $x\in(-\infty,4)$. **3.19.27.** $x\in(-\infty,2]\cup[13/2,+\infty)$. **3.19.28.** $x\in\left[-3,\left(\sqrt{41}-5\right)/4\right]$. **3.19.29.** $x\in\left(-\infty,\left(1-\sqrt{29}\right)/2\right]\cup(22/7)$. **3.19.30.** $x\in(-\infty,-5]\cup[1/2,+\infty)$. **3.19.31.** $x\in[0,10/3]\cup(4,5]$. **3.19.32.** $x\in(-3/2,0)\cup(9/2,27/2]$. **3.19.33.** $x\in(-\infty,11)\cup\{12\}\cup(15,+\infty)$. *Указание*: на ОДЗ правая часть неравенства отрицательна. **3.19.34.** $x\in\{0\}\cup[2,\ 12/5]$. **3.19.35.** $x\in(-\infty,-1998]\cup[1996,+\infty)$.

3.20.1. $x\in\left\{\left(1+\sqrt{137}\right)/2\right\}$. **3.20.2.** $x\in\{5\}$. **3.20.3.** $x\in\{3\}$. **3.20.4.** $x\in\{-4\}$. *Указание*: умножив уравнение на (-1) и записав условие $\sqrt{x^2+5x+4}\le\sqrt{x^2-x-6}$, возвести уравнение в квадрат. **3.20.5.** $x\in\left\{\left(\sqrt{5}-3\right)/2\right\}$. *Указание*: сделать замену $y=x+2$ и, уединив $\sqrt{y^2-1}$, возвести в квадрат (условие $y^3-y+1\ge0$ выполняется при $y\ge1$, поскольку $y\left(y^2-1\right)+1\ge0$). **3.20.6.** $x\in\{3;7/2\}$. *Указание*: приведя неравенство к виду $\sqrt{6x-x^2-8}\ge\sqrt{8x-x^2-15}+\sqrt{7-2x}$, возвести в квадрат. **3.20.7.** $x\in\left(-\infty,-\sqrt{26}\right]\cup\{-1\}\cup\left[\sqrt{26},+\infty\right)$. **3.20.8.** $\varnothing$. *Указание*. Возвести в квадрат: $2x^2+\left(1/x^2\right)+2\sqrt{x(2x+3)\left(\sqrt{2}+\left(1/x^2\right)\right)}=2\sqrt{2}$. При этом $2x^2+\left(1/x^2\right)\ge2\sqrt{2x^2\cdot1/x^2}=2\sqrt{2}$, а радикал неотрицателен. **3.20.9.** $x\in\left[4;\left(\sqrt{65}+1\right)/2\right)\cup\left(\left(\sqrt{65}+1\right)/2,+\infty\right)$. *Указание*. Приведём неравенство к виду $\sqrt{16-(16/x)}<x-\sqrt{x-(16/x)}$. ОДЗ: $x\ge4$. Возведём в квадрат:

$\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{x^2-16}+x^2-16>0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{x^2-16}-\sqrt{x}\right)^2>0$. **3.20.10.** $x\in\{0\}\cup[1/2,1]\cup\left[\left(\sqrt{5}+3\right)/2,+\infty\right)$. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.20.11.** $x\in\{0;2;13;15\}$. **3.20.12.** $x\in\{-1;2/7\}$. **3.20.13.** $x\in\left\{0;-1;1;\pm\sqrt{1+\left(3\sqrt{3}/2\right)}\right\}$.

3.21.1. $x\in\{5\}$. **3.21.2.** $x\in\{1\}$. **3.21.3.** $x\in\{5\}$. **3.21.4.** $x\in[0,4]$. *Указание*. Функция $f(x)=\sqrt{4-x}-2$ убывает на ОДЗ неравенства, а функция $g(x)=x|x-3|+4x=\begin{cases}7x-x^2, & x\le 3;\\ x^2+x, & x\ge 3,\end{cases}$ наоборот, возрастает, причём $f(0)=g(0)$.

3.22.1. $x\in\{0\}$. **3.22.2.** $x\in\{-1/2\}$. **3.22.3.** $x\in(-\infty,-1]$. **3.22.4.** $x\in(-\infty,-6)\cup\left[-2\sqrt{5},-4\right)\cup\{-2\}$. **3.22.5.** $x\in[3,6)\cup\left(6,\frac{133}{2}-11\sqrt{6}\right)$. *Указание*: сделать замену $t=\sqrt{2x-6}$, приведя неравенство к виду $11\left|t-\sqrt{6}\right|>t^2-6$. **3.22.6.** $x\in\{15\}$. *Указание*. Умножим уравнение на $\sqrt{2}$: $\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+3\right)^2}=14$.

3.23.1. $(x;y)\in\{(1;1)\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $y=1+\dfrac{2-2x}{5-2x}$, и учесть, что так как $x\in[0,1]$, то $\dfrac{2-2x}{5-2x}\ge 0$, а значит, $y\ge 1$. **3.23.2.** $(x;y)\in\{(1;2);(-1;-2)\}$. **3.23.3.** $(x;y)\in\{(1;0)\}$. *Указание*: так как $x-y^2-1\ge 0$, то $x\ge y^2+1\ge 1$. Но при $x\ge 1$ $\sqrt{x^2+x-1}\ge 1$. Следовательно, левая часть неравенства больше либо равна единице. **3.23.4.** $(x;y)\in\{(2;2)\}$. *Указание*. Воспользоваться неравенством Коши: $\sqrt{(x-1)\cdot 1}\le((x-1)+1)/2=x/2$, аналогично $\sqrt{(y-1)\cdot 1}\le y/2$, поэтому левая часть неравенства $\le xy$. В силу уравнения, оба раза неравенство должно обращаться в равенство. *Иначе*: поделить на xy, и найти наибольшее значение функции $f(t)=\sqrt{t-1}/t$ при $t\ge 1$. **3.23.5.** $x\in\{1\}$. *Указание*: применить к каждому из трёх сомножителей в левой части неравенство $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

($a \geq 0,\ b \geq 0$). **3.23.6.** $(x;y) \in \{(1;1)\}$. *Указание*: разделить уравнение на xy: $\sqrt{y+1/y}+\sqrt{x+1/x}=2\sqrt{2}$, и воспользоваться неравенством о сумме двух взаимно обратных положительных чисел. **3.23.7.** $x \in \{2\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$. Очевидно, $x=2$ есть корень уравнения. При $x>2$ левая часть уравнения <0, а правая >0. Наоборот, при $x<2$ левая часть уравнения >0, а правая <0. Таким образом, других решений нет. **3.23.8.** $x \in \{3\}$. *Указание.* ОДЗ: $x \in [3,4]$. Пусть $f(x)=x+\sqrt{x^2-2x-3}$, $g(x)=2+\sqrt{6x-x^2-8}$. Показать, что на ОДЗ $g(x) \leq g(3)=3$, а $f(x) \geq f(3)=3$, и учесть монотонность функций. **3.23.9.** $x \in \{1\}$. *Указание.* $\sqrt{x^2+x-1} \leq ((x^2+x-1)+1)/2$, аналогично для второго радикала. **3.23.10.** $x \in \{2\}$. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.23.11.** *Указание*: воспользоваться неравенством Бернулли. **3.23.12.** $x \in (-\infty,-8/7) \cup (-1/2,0) \cup (8/9,+\infty)$. *Указание.* Область значений функции $f(a)=a\sqrt[4]{4-a^4}$, $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$, есть отрезок $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Поэтому корнями уравнения не могут быть те и только те значения x, которые либо не входят в ОДЗ уравнения, т.е. $2x^4+x^3<0$, либо удовлетворяют неравенству $4\sqrt{2x^4+x^3} > \sqrt{2}\left|x+4x^2-8\right|$. **3.23.13.** $x \in \{5\}$. *Указание*: воспользоваться неравенством Коши–Буняковского для чисел $a_1=\sqrt{x-1}$, $a_2=5$, $b_1=2$, $b_2=x$: $a_1b_1+a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$. **3.23.14.** $x \in \{5\}$. *Указание*: воспользоваться неравенством Коши–Буняковского для чисел $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=6$, $b_1=\sqrt{x+7}$, $b_2=\sqrt{37-2x}$, $b_3=\sqrt{3x+93}$. **3.23.15.** $x \in \{2\}$. *Указание.* ОДЗ: $x \in (-\infty,0) \cup [2,9/2]$. Возвести в квадрат: $x^2+16x^{-2}+2\sqrt{x(x-2)(1+16x^{-2})}=8$, тогда левая часть уравнения ≥ 8.

3.24.1. $x \in \{5\}$. *Указание*: ввести два вектора $\vec{a}=\{2;x\}$ и $\vec{b}=\{\sqrt{x-1};\ 5\}$, и учесть, что неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. Записав условие коллинеарности векторов, получить, что если решение существует, то оно содержится среди решений уравнения $\frac{\sqrt{x-1}}{2}=\frac{5}{x}$. Это уравнение имеет единственный корень, проверкой убедиться, что он удовлетворяет исходному уравнению.

3.25.1. $x\in\{7/3\}$. *Указание*: свести уравнение к равносильной ему системе $\begin{cases}6x^2-21x+16=(2x-4)-1\\ x\geq 2.\end{cases}$ **3.25.2.** $x\in\{1\}$. **3.25.3.** $x\in\{3\}$. **3.25.4.** $x\in\left[-4/3,-\sqrt{7}/2\right)\cup\left(0,\sqrt{7}/2\right)$. **3.25.5.** $x\in\{7\}$. *Указание*: предварительно привести уравнение к виду $\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$, а после умножения обеих частей на сопряжённое выражение $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}\right)\neq 0$, возвести в квадрат. **3.25.6.** $x\in\{2\}$.

3.26.1. $x\in\{-1\}\cup[0,1]$. **3.26.2.** $x\in\left(-\infty,-\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7},9\right]$. **3.26.3.** $x\in\left\{-23/4;\ -1;\ 1;\ 6\right\}$. **3.26.4.** При $a=1$ уравнение имеет единственное решение $x=0$; при $a=-1$ уравнение имеет единственное решение $x=1$; при остальных значениях a решений нет. **3.26.5.** $x\in\{11\}$. **3.26.6.** $x\in(-\infty,11)\cup\{12\}\cup(15,+\infty)$. *Указание*: на ОДЗ правая часть неравенства отрицательна. **3.26.7.** 3.

3.27.1. $x\in\left\{\sqrt{3}/3\right\}$. *Решение*. Пусть $f(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$, $f(0)=2\neq\sqrt{3}$. При $x<0$ $f(x)>f(0)>\sqrt{3}$. Пусть $x>0$. Рассмотрим на плоскости два смежных угла с общей стороной OM: $\angle AOM=90^\circ$ и $\angle MOB=30^\circ$, $OA=OB=1$, $OM=x$.. Тогда $MA+MB=$ $=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}\geq\sqrt{3}=AB$. Рассматривая условие обращения неравенства треугольника в равенство, получаем $x=OM=OK=\sqrt{3}/3$, где $K=AB\cap OM$. **3.27.2.** 13. *Указание*. Введём в рассмотрение точки $A(9;2)$, $B(x;0)$, $C(0;y)$, $D(3;3)$, тогда первый, второй и третий радикалы приобретают, соответственно, смысл длин отрезков AB, BC и CD, а данное выражение оказывается равным длине ломаной линии $ABCD$. Задача свелась к нахождению таких положений точек B^* и C^* на осях координат, чтобы ломаная AB^*C^*D имела минимальную длину. В итоге получится, что $B^*\left(\frac{21}{5};0\right)$, $C^*\left(0;\frac{7}{4}\right)$ (минимум достигается при $x=\frac{21}{5}$, $y=\frac{7}{4}$).

3.28.1. $x\in\{190/63;2185/728\}$. **3.28.2.** $x\in\{0\}$. **3.28.3.** $b\in\left(-\infty,-1/\left(2\sqrt{2}\right)\right]\cup[-1/4,1/4]\cup\left[1/\left(2\sqrt{2}\right),+\infty\right)$. *Указание*: разбить ОДЗ на два промежутка $-\infty<x\le-2$ и $-1<x<+\infty$. На каждом из промежутков уравнение решать как однородное, сведя с помощью подстановки $t=\sqrt[10]{(x+2)/(x+1)}$ к квадратному уравнению.

3.29.1. $x\in\{-1/3\}$. *Указание*: сделать подстановку $t=3x+3$. Полученное в результате уравнение имеет вид $f(t)=f^{-1}(t)$, где $f(t)$ и $f^{-1}(t)$ – пара взаимно обратных функций, причём $f(t)$ – возрастает. Далее уравнение решается как уравнение указанного типа. **3.29.2.** $x\in\left\{1;-\left(\sqrt{5}+1\right)/2;\left(\sqrt{5}-1\right)/2\right\}$. *Указание*: поделить обе части уравнения на 2, приведя его к виду $f(x)=f^{-1}(x)$.

3.29.3. $x\in\{6\}$. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.29.4.** $x\in\{1\}$. *Указание*: ввести в рассмотрение функцию $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$, $t\in R$. Она монотонно возрастает при $t\ge0$ и нечётная, а значит, монотонно возрастает на всей числовой прямой. Исходное уравнение преобразуется к виду $f(2x+3)=f(3x)$, что равносильно $2x+3=3x$, откуда находим единственное решение. **3.29.5.** $x\in\left\{-1\pm\sqrt{3};-2\pm\sqrt{2}\right\}$. *Указание*: все корни уравнения $x^2+3x-2=x$ являются корнями данного уравнения. **3.29.6.** $a\in[-1/12,\ 0]$.

3.30.1. Не существует. *Указание*: искать функцию в общем виде $y=ax+b$.

3.30.2. Да, $y=-x^2-4x+c$, где $c\in R$. **3.30.3.** $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-x+1}$. *Указание*: заменить в уравнении x на $1-x$, решить систему исходного и полученного уравнений относительно $f(x)$. **3.30.4.** $f(x)=\dfrac{5}{8x^2}-\dfrac{x^3}{8}$. *Указание*: заменить в уравнении x на $1/x$, и решить систему исходного и полученного уравнений относительно $f(x)$. **3.30.5.** $f(x)=x^3-3+1$. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.30.6.** 2001^2. *Указание*: подставить в уравнение последовательно вместо x значения $0;1;..;2000$, а затем сложить все полученные равенства вместе с $f(0)=0$. **3.30.7.** $f(x)\equiv 0$ или $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ c, & x=0,\end{cases}$ где $c\in R$. *Указание*: полагая $x=y=1$, получаем, что $f(1)=0$ или $f(1)=1$. В первом случае положим в исходном равенстве $y=1$, тогда $f(x)\equiv 0$. Во втором случае также положим в исходном тождестве $y=1$, тогда $x(1-f(x))\equiv 0$, т.е. при $x\neq 0$ имеем $f(x)\equiv 0$, а при $x=0$ $f(0)$ – любое. Проверка показывает, что найденные функции удовлетворяют условиям задачи. **3.30.8.** 24. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.30.9.** $\pi/35$. *Решение*: обозначим $\alpha=f(-2/7)$. Имеем: 1) $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ $\Rightarrow$ $f(0)=0$; 2) $f(2/7)=$ $=f(2/7+(-2/7))-f(-2/7)=f(0)-\alpha=-\alpha$; 3) $f(4/7)=$ $=f(2/7+2/7)=2f(2/7)=-2\alpha$; 4) $f(8/7)=2f(4/7)=-4\alpha$; 5) $f(16/7)=2f(8/7)=-8\alpha$; 6) $f(32/7)=2f(16/7)=-16\alpha$; 7) $f(64/7)=$ $=2f(326/7)=-32\alpha$; 8) $f(6/7)=f(2/7+4/7)=$ $=f(2/7)+f(4/7)=-3\alpha$; 9) $-\pi=f(10)=f(64/7+6/7)=-35\alpha$ $\Rightarrow$ $\alpha=\pi/35$. **3.30.10.** $x\in\{0\}$. *Решение*. Докажем, что из равенства $f(x_1)=f(x_2)$ следует $x_1=x_2$. Действительно, если $f(x_1)=f(x_2)$, то $x_1=f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)=x_2$. Если x_1,x_2 – корни уравнения $f(f(x))=0$, то $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, а тогда, по доказанному, $f(x_1)=f(x_2)$, $x_1=x_2$. Таким образом, уравнение $f(f(x))=0$ не может иметь больше одного корня. Подставим в исходное уравнение вместо x число 0: $f(0)=f(f(0))$, тогда $0=f(0)$, а значит, $f(f(0))=f(0)=0$, т.е. $x=0$ – корень уравнения. **3.30.11.** $-1/2005$. *Указание*: последовательно вычисляя, находим $f_2(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $f_4(x)=x$. Таким образом, $f_{n+3}(x)\equiv f_n(x)$. Но тогда $f_{2006}(x)\equiv f_2(x)$.

3.31.1. $x\in[-7,-3/4)\cup[1/2,2)$.

3.32.1. $x\in[0,2)\cup(8,+\infty)$. *Указание*: неравенство равносильно системе

$\begin{cases}(x-4)^2-2x>0\\ x\ge 0.\end{cases}$ **3.32.2.** $z\in(1,3)$. *Указание*: неравенство $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4z-3-z^2>0$. **3.32.3.** $x\in\{-1;4\}$. **3.32.4.** $x\in\{0\}\cup[2,3]$. **3.32.5.** $x\in(-\infty,1)\cup(3,5]$. *Указание*: рассмотреть случаи: $x>3$ и $x<3$. **3.32.6.** $x\in\left[-2-\sqrt{13},-3\right)\cup\left(0,-2+\sqrt{13}\right]$. *Указание*: рассмотреть случаи: $x>-3$ и $x<-3$. **3.32.7.** $x\in\{3\}$. *Указание*: подобрав корень $x=3$ многочлена в числителе дроби, свести уравнение к системе $\begin{cases}\left(x^2+7x+10\right)(x-3)=0\\ x>-2.\end{cases}$ **3.32.8.** $x\in(-\infty,0)\cup[1,2]$. **3.32.9.** $x\in\{0;2\}$. **3.32.10.** $x\in(-\infty,-5]\cup[1/2,+\infty)$. **3.32.11.** При $b=0$ единственное решение $x=0$; при $b\in(0,1)$ решений нет; при $b\in\left[1,2^{2/3}\right)$ два решения $x=\left(\left(b\pm\sqrt{2\sqrt{b}-b^2}\right)/2\right)^2$; при $b=2^{2/3}$ единственное решение $x=2^{-2/3}$; при $b\in\left(2^{2/3},+\infty\right)$ решений нет. **3.32.12.** При $a\in(-\infty,-4)$ $x\in\left(5-((a+3)/(a+4))^2,5\right]$; при $a\in[-4,-3)$ $x\in(-\infty,5]$; при $a\in[-3,+\infty)$ $x\in\left(-\infty,5-((a+3)/(a+4))^2\right)$. **3.32.13.** $a\in\{0\}\cup$ $\cup[-9,-1/4]$. **3.32.14.** $a\in\left[1,\ 5/2\right]$. **3.32.15.** При $a\in(-\infty,0)$ $x\in\left(-\infty,\dfrac{a}{3}-\dfrac{a^2}{48}\right)$; при $a\in[0,+\infty)$ $x\in\left(-\infty,\dfrac{a}{3}-\dfrac{a^2}{3}\right)$. **3.32.16.** При $a\in(-\infty,-1/2)\cup\{0\}$ одна точка пересечения; при $a\in\left[-1/2,\ 0\right)$ две точки пересечения; при $a\in(0,+\infty)$ графики не пересекаются. **3.32.17.** При $b\in(-\infty,1)$ $x\in\{-1/3\}\cup[1,+\infty)$; при $b=1$ $x\in[1/3,+\infty)$; при $b\in(1,+\infty)$ $x\in\left[-1/3,\ 1\right]$. **3.32.18.** Ни одного или один. *Решение*. Если $a<4$, то левая часть уравнения отрицательна, а правая – неотрицательна, поэтому корней нет. При $a=4$ уравнение имеет один корень. Если $a>4$, то, умножая обе части на выражение $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+4}$ (>0), сопряжённое к левой части, получим уравнение $a-4=\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+4}\right)\sqrt{3x+10}$, равносильное исходному. Его правая часть возрастает (и непрерывна), причём в точке $x=-10/3$, принимает значение 0, а левая часть постоянна и положительна. Графики таких функций пересекаются ровно в одной точке, а значит, уравнение имеет ровно одно решение.

3.33.1. Например, x^4-20x^2+16. **3.33.2.** 1. **3.33.3.** $q\in\{9\}$. **3.33.4.** $3x^2+3x+1$. *Указание*: воспользоваться формулой деления многочлена на многочлен (с остатком).

3.34.1. $(x;y)\in\{(-2;-3);(10/3;7/3)\}$. **3.34.2.** $(x;y)\in\{(3/2;15/2)\}$. **3.34.3.** $\left(4/3;\left(5-\sqrt{7}\right)/3\right)$, $\left(4/3;\left(5+\sqrt{7}\right)/3\right)$; первая ближе. **3.34.4.** $(x;y)\in\{(5/16;13/16);(5/16;-3/16)\}$. *Указание.* Возводя второе уравнение в квадрат, получим $\sqrt{3x^2+2xy-y^2}=1-2x$. Отсюда $x\le 1/2$ и $(x-y)^2=4x-1$. Значит, $13x-4=(4x-1)^2$.

3.35.1. $x\in\{0;\pi/6;5\pi/6\}$. *Указание*: рассмотреть случаи $x=0$ и $0<x<\pi$. **3.35.2.** $x\in(-\infty,-8)\cup[2,+\infty)$. **3.35.3.** $x\in\{-2\}\cup[2,6]$. *Решение.* ОДЗ: $|x|\ge 2$. Очевидно, $x=\pm 2$ – решения. При $|x|>2$ сократить на $\sqrt{2^{x^2-4}-1}>0$. **3.35.4.** $x\in(0,+\infty)$. **3.35.5.** $a\in(0,1)\cup(1,4)\cup(4,5)$. **3.35.6.** При $a=\pi n,\ n\in Z$, решение $x=2\pi n-2$; при остальных a решений нет.

3.36.1. $x\in\{1\}$. **3.36.2.** $x\in[-2,1)\cup\left(1,\sqrt{2}\right]$. **3.36.3.** $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. **3.36.4.** $x\in[-7,-2)\cup(-2,-1]$. **3.36.5.** $x\in(-\infty,1/3]\cup(2,+\infty)$. **3.36.6.** $x\in[-1,0]\cup[3,+\infty)$. **3.36.7.** $x\in\{-1\}\cup[1/2,1]$. **3.36.8.** $x\in(-\infty,0]\cup[5/2,+\infty)$. **3.36.9.** $x\in\left(-\infty,\left(1-\sqrt{29}\right)/2\right]\cup(22/7,+\infty)$. **3.36.10.** $x\in(-\infty,-2]\cup\left[1/2,\left(13+\sqrt{37}\right)/12\right]$. **3.36.11.** $x=\pi n, n\in Z$; $x=5$. **3.36.12.** $x\in\{\pi/2-\arcsin(12/13)+2\pi n;\ -\pi/2+\arcsin(12/13)+2\pi k\}$, $n,k\in Z$.

3.37.1. $x\in\{-3;3\}$. **3.37.2.** $x\in(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty)$. **3.37.3.** $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$. **3.37.4.** $x\in(-1,4)$. **3.37.5.** $x\in\left\{1;\left(-11-\sqrt{161}\right)/2\right\}$. **3.37.6.** $x\in(-\infty,-3/4]\cup[1/2,+\infty)$. **3.37.7.** $x\in\left\{1/2;\left(2\sqrt{2}-3\right)/2\right\}$. **3.37.8.** $x\in(-\infty,-5]\cup\{-5/4\}$. **3.37.9.** $\max\limits_{-1/2\le x\le 3/2} y(x)=y(-1/2)=y(3/2)=4$, $\min\limits_{-1/2\le x\le 3/2} y(x)=y(1/2)=3/2$. **3.37.10.** Если $a\in(-\infty,-1)$, то $x=4$; если $a=-1$, то $x\in[4,+\infty)$; если $a\in(-1,1)$, то $x=4, x=(4a-8)/(a+1)$; если

$a=1$, то $x\in[-2,4]$; если $a\in(1,+\infty)$, то $x=4$. **3.37.11.** При $a\in(-\infty,3)$ решений нет; при $a=3$ $x=0$; при $a\in(3,6]$ $x\in\{a-3;(3-a)/3\}$; при $a\in(6,+\infty)$ $x\in\{\frac{1}{3}(a+3);\frac{1}{3}(3-a)\}$. **3.37.12.** При $y\in(-\infty,-4]\cup\{-1,4/3\}\cup$ $\cup[4,+\infty)$.

3.38.1. $x\in(-\infty,-1]\cup[7/2,5)$. **3.38.2.** $x\in(-\infty,-1]\cup\{1\}\cup[2,+\infty)$. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.39.1.** $x\in[-4,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

3.40.1. $x\in\{5/2\}$. **3.40.2.** $x\in\{-16;18\}$. **3.40.3.** $x\in\{2\}$. **3.40.4.** 5 корней. **3.40.5.** 4 решения. **3.40.6.** $x\in\{\pm 3;\pm\sqrt{13/3}\}$. **3.40.7.** $x\in\{\pm\sqrt{3/2};\pm\sqrt{5/2}\}$ **3.40.8.** $x\in\{0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3\}$. **3.40.9.** $x\in(-5,5)$. **3.40.10.** $x\in[-3,5]$. **3.40.11.** $x\in\{0;1;3;4\}$. *Указание*: свести неравенство к равносильной системе $\begin{cases}|x-2|<7/3;\\ x\neq 2.\end{cases}$ **3.40.12.** $x\in\left(2-\sqrt{6},2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2},4\right)$. **3.40.13.** $x\in(2,+\infty)$. **3.40.14.** $x\in(-3,-14/5)\cup(2,+\infty)$. **3.40.15.** $a\in[-4,\ 2]$. **3.40.16.** $x\in\{0;4\}$. **3.40.17.** $x\in\{2;3\}$. **3.40.18.** $x\in\{-1;3\}$. **3.40.19.** $x\in\{0\}$. **3.40.20.** $x=-3\pi/4+2\pi n;\ x=\pi+2\pi k$, где $n,k\in Z$. **3.40.21.** $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$. **3.40.22.** $x\in\{(-1)^n\arcsin(1/2)+\pi n;$ $(-1)^{k+1}\arcsin(1/4)+\pi k\},\ n,k\in Z$. *Указание*: раскрывать модули, начиная с внешнего (для этого рассмотреть случаи $|\sin x-1/4|\le 1/2$ и $|\sin x-1/4|>1/2$; первый случай разбить на два: $-1/4\le\sin x\le 1/4$ и $1/4\le\sin x\le 3/4$, второй – на два: $\sin x<-1/4$ и $\sin x>3/4$). **3.40.23.** $x\in\{1/25\}$. **3.40.24.** $[13/7,13/5]\cup[23/7,23/5]$. *Указание*: после раскрытия модуля привести оставшееся уравнение к виду $A^2+B^2=1$, а затем сделать тригонометрическую подстановку $A=\cos\alpha$, $B=\sin\alpha$, и в исходном выражении перейти к тригонометрическим функциям параметра α. **3.40.25.** $x\in\{-1;1\}$. **3.40.26.** $x\in\{-1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2}\}$ **3.40.27.** $x\in\{0;15/4;4\}$. **3.40.28.** $x\in\{0;2;\sqrt[3]{2}\}$. **3.40.29.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $n,k\in Z$. **3.40.30.** $x\in\left(-\infty,-2+2\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{5},+\infty\right)$. **3.40.31.** $x\in(-\infty,-2/3]\cup[1/2,+\infty)$.

3.40.32. $x \in (-\infty,-2) \cup \left(\left(5+\sqrt{17}\right)/4,+\infty\right)$. *Указание*: рассмотреть случаи $x > 2$ и $x < 2$. **3.40.33.** $x \in [-4,5) \cup (21,+\infty)$. *Указание*: сделать замену $t = \sqrt{x+4} - 3$, и рассмотреть случаи $t > 0$ и $t < 0$. **3.40.34.** $x \in (-\infty,0] \cup [1,2] \cup [5,+\infty)$. **3.40.35.** $x \in [2/3,4]$. **3.40.36.** $x \in \left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right)$. **3.40.38.** $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$. **3.40.39.** $x \in \left[-3,-3/\sqrt{2}\right) \cup \left(-3/\sqrt{2},0\right) \cup (0,3]$. **3.40.40.** $x \in [1/2,+\infty)$. **3.40.41.** $x \in (3/4,1) \cup (1,+\infty)$. **3.40.42.** $x \in (-\infty,-17/8) \cup (-3/2,+\infty)$. **3.40.43.** $x \in \{2\}$. *Указание*: привести к виду $\frac{1}{10}|x-2| \ge \frac{1}{4}|x-2|$. **3.40.44.** $x \in [0,15/4] \cup [4,+\infty)$. **3.40.45.** 1. **3.40.46.** $x \in (-\infty,5/2] \setminus \{-1\}$ **3.40.47.** $x \in (-4,-3/2) \cup (-1,0) \cup (1,+\infty)$. **3.40.48.** *Указание*: $(x+y)x \geq 0$.

3.41.1. $x \in \left(-\infty,-\sqrt{26}\right] \cup \{-1\} \cup \left[\sqrt{26},+\infty\right)$. **2.41.2.** $x = \pi n/2$, где $n \in Z$. **2.41.3.** $x \in \left(0,\ 2a^2b/\left(a^2+b^2\right)\right)$.

3.42.1. $x \in \left\{\pm\left(2+\sqrt{6}\right)\right\}$. **3.42.2.** $x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$. **3.42.3.** $x \in \left(\left(-1-\sqrt{5}\right)/2,\left(-1+\sqrt{5}\right)/2\right) \cup \left(\left(5-\sqrt{5}\right)/2,\left(5+\sqrt{5}\right)/2\right)$. **3.42.4.** $x \in [-2,2]$. *Указание*: сделать симметризирующую подстановку $y = x^2 - 2$, и далее методом интервалов. **3.42.5.** $x \in [1,\log_2 3]$. **3.42.6.** $x \in (-1,1) \cup (5,7)$. **3.42.7.** $x \in \{-23/4;-1;1;6\}$. **3.42.8.** $x = -7$, $y = 5$. **3.42.9.** $x \in (-\infty,-5] \cup [1/2,+\infty)$. **3.42.10.** $x \in \left(-1,-\sqrt{3}/3\right] \cup \left[\left(\sqrt{3}-2\right)/3,1/3\right) \cup \{-1/3\}$. **3.42.11.** $x \in \left(-\infty,-1-\sqrt{4\sqrt{2}/3+1}\right) \cup \left(-1+\sqrt{4\sqrt{2}/3+1},+\infty\right)$. *Указание.* Сделать замену $t = x^2/2 + x$. **3.42.12.** $x \in \left\{-1-\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3};\ 1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\right\}$. *Указание*: сделать двойную подстановку $y = |4x-1|$, $z = \left|2x^2-3\right|$. **3.42.13.** $a \in (0,1/2)$. **3.42.14.** *Указание*: возвести уравнение в степень $1/|x|$, и сделать замену $y = |x|^{1/|x|}$. Сделав обратную подстановку, возвести в степень $|x|$.

3.43.1. $x \in [-\sqrt{5},0) \cup (0,\sqrt{5}]$. **3.43.2.** $x \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{3},+\infty\right)$. **3.43.3.** $x \in (-6,-4) \cup (-4,1)$. **3.43.4.** $x \in \{-3\} \cup [-2,4]$. **3.43.5.**

$x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$. **3.43.6.** $x\in(1/3,\ 1)$.

3.44.1. $x\in[9,12)$. **3.44.2.** $x\in[-1,1]$. **3.44.3.** $(x;y)\in\{(0;0);(2;0);(1;1)\}$. **3.44.4.** $x\in(0,1]$. **3.44.5.** $x\in(3,+\infty)$.

3.45.1. $x\in[2,+\infty)$. *Указание*: воспользоваться свойством $|a|=a\Leftrightarrow a\geq 0$. **3.45.2.** $x\in\{1\}$. **3.45.3.** $x\in(-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$. *Указание*: при условии $x\neq 2$ умножить на $|x-2|$ (используются свойства $|x-2|=|2-x|$ и $|x-2|^2=(x-2)^2$). **3.45.4.** $(x;y)\in\left\{(2;3);(3;2);\left(-9+\sqrt{248/3};-9-\sqrt{248/3}\right);\left(-9-\sqrt{248/3};-9+\sqrt{248/3}\right)\right\}$. **3.45.5.** $x\in(-\infty,0]$. *Указание*: учитывая, что $(|x+1|+|2x-1|)>0$, сократить на этот множитель. **3.45.6.** $x\in(2007,2009)$. **3.45.7.** $x\in(0,2)$. *Указание*: учесть, что $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x-1|)>\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}1=\log_{\sqrt{10}}1>\log_{\sqrt{10}}\left(1-(x-1)^2\right)$. **3.45.8.** $x\in(0,1)$. *Указание*. Преобразовать неравенство к виду $|a+b|<|a|+|b|$, $a=x$, $b=1/(x-1)$, и выяснить, при каких условиях на a и b оно выполняется. **3.45.9.** $x\in[-1,1]$. *Указание*: привести неравенство к виду $\left(\left|\sqrt{x+3}-2\right|+\sqrt{x+3}-2\right)+\left(|x+1|-(x+1)\right)\leq 0$, где выражения во внешних скобках неотрицательны (в силу свойств $|a|+a\geq 0$, $|a|-a\geq 0$). После этого останется выяснить, когда неравенства обращаются в равенства. **3.45.10.** $x\in[100,+\infty)$. *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.45.11.** $a\in\{0;1\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $\left(|x-2a|+\left(1/|x-2a|\right)\right)+(x-1)^2=2$. **3.45.12.** 4; $\sqrt{2}+4\sqrt{5}$. *Указание*: воспользоваться свойствами $|a|\geq a$, $\sqrt{a}\geq 0$. **3.45.13.** $x\in[\log_3 4,\ 3]$. *Указание*: сделать подстановку $a=3^x-4$, $b=-x^2+4x-3$. **3.45.14.** $x\in\{9\}$. **3.45.15.** $x\in[\pi/2+2\pi n,\ 3\pi/4+2\pi n]$, где $n\in Z$. *Указание*: заменив $1+\sin 2x$ на $(\sin x+\cos x)^2$, затем сделать двойную подстановку $a=\sin x+\cos x$, $b=\cos x$, и воспользоваться свойством $|a|+|b|\leq a-b\Leftrightarrow a\geq 0,\ b\leq 0$. **3.45.16.** $x\in(0,\pi/6)\cup\{\pi/3;2\pi/3;\pi\}$. *Указание*: привести уравнение к виду

$|a|+|b|=a+b$, где $a=tgx\cdot tg2x\cdot tg3x$, $b=tgx+tg2x$, и воспользоваться тем, что на ОДЗ оно равносильно системе $a\geq 0$, $b\geq 0$. **3.45.17.** $x\in\{-1\}$. *Указание*: сделать замену $a=x-2$, $b=\log_2 x$, после чего неравенство примет вид $|ab|+\big||a|-|b|\big|\leq ab \Leftrightarrow \{ab\geq 0; |a|=|b|$.

3.46.1. $x\in(-5,\ 2)$. **3.46.2.** $x\in(3,4)\cup(4,7)$. **3.46.3.** $x\in\left(-\infty,-2-\sqrt{3}\right]\cup$ $\cup\left(-0.3,-2+\sqrt{3}\right)\cup\{1\}\cup(2,+\infty)$. *Указание*: разложить числитель дроби на множители (например, это можно сделать, обозначив $t=x^2+x+1$, тогда числитель примет вид $t^2-2xt-3x^2$; это выражение можно разложить на множители, рассматривая его как квадратное относительно t). Затем к одному из образовавшихся сомножителей применить приём $|a|-|b|\to a^2-b^2$. **3.46.4.** $x\in(-4,\ 1)\cup(1,\ 5/3)\cup(5/3,\ 11)$.

3.47.12. Да. *Указание*: построить в одной системе координат графики функций $y=|x|$ и $y=x^2-8x+18$. **3.47.13.** $a\in(-\infty,-1)$. **3.47.14.** $a\leq -2$. **3.47.15.** $a=-4$. **3.47.16.** 5 корней. **3.47.17.** $\min\limits_{x\in R} y(x)=3$. **3.47.18.** а) 2; б) $x\in(-\infty,0)\cup(14/3,+\infty)$. **3.47.19.** $\min\limits_{x\in R} y(x)=2$. **3.47.20.** $\min\limits_{x\in R} y(x)=0.5$. **3.47.27.** *Указание*: функция чётная и периодическая с периодом π. **3.47.28.** $T=\pi/2$. **3.47.29.** $T=\pi/2$. **3.47.34.** 9 кв. ед. **3.47.35.** 2 кв.ед. **3.47.36.** $18+27\pi$ кв.ед. **3.47.38.** $1/3$ кв.ед. **3.47.41.** *Указание*: начать с раскрытия модуля над y. **3.47.42.** *Указание*: решение задачи рассмотрено в тексте пособия. **3.47.43.** *Указание*: привести неравенство к виду $\left(|y|-\frac{1}{2}\log_2|x|\right)\left(|y|-\log_2|x|\right)\leq 0$. **3.47.44.** $a=2$. *Указание*: выделяя полные квадраты по x и a, привести уравнение к уравнению окружности на плоскости $(x;a)$. Наибольшее значение модуль разности корней будет достигать при a, отвечающем центру окружности. **3.47.45.** Система не имеет решений. **3.47.46.** $(x;y)\in\{(3;-1);(-3;1)\}$. **3.47.47.** $(x;y)\in\{(t;1-t);(-t;t-1)\}$, где $t\in[0,1]$. **3.47.48.** $\left(3\pi/\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}$. **3.47.49.** $\min(x+y)=-5$. *Указание*: обозначить $a=x+y$ и, исключая x, на плоскости (a,y) построить фигуру, задаваемую данной системой. Затем отобрать среди точек с целочисленными координатами, попадающих в фигуру, те, у которых координата a минимальна. **3.47.50.**

$x+a\in[-1,5]$. *Указание*: сделать замену $y=x+a$, тогда неравенство примет вид $2|y+2-2a|+|y-2|\le 3$. В системе координат $(a;y)$ данное неравенство задаёт некоторую фигуру. Останется установить, в каком диапазоне по оси y расположена на плоскости эта фигура. **3.47.51.** $y\in(-\infty,-4]\cup\{-1,4/3\}\cup[4,+\infty)$. *Указание*: привести уравнение к виду $|x-3|+|x+4|=ax+5$, где $a=y/2$, и, построив в одной системе координат графики функций, стоящих в левой и в правой частях уравнения, определить, в каких случаях эти графики будут пересекаться в единственной точке. **3.47.52.** $a\in[-8,6]$. **3.47.53.** $a\in(-5/2,7)$; $a\in\left[\left(9-\sqrt{211}\right)/2,-5/2\right]\cup\{7\}$. **3.47.54.** $a=2$. **3.47.55.** $c\in\{4;19/4\}$. *Указание*: привести уравнение к виду $|x^2-2x|+|x^2-3x+2|-x^2+4x=c$. **3.47.56.** $(x;y)$, где $x\in(-3,0)\cup$ $\cup(3,+\infty)$, $y\in R$. *Указание.* Условия задачи можно представить в виде совокупности систем $\begin{cases}|u|>|v|\\u>0,\end{cases}$ или $\begin{cases}|u|<|v|\\0>v,\end{cases}$ или $\begin{cases}|u|=|v|\\u>0>v,\end{cases}$ решения которой легко изобразить на координатной плоскости (v,u). Объединяя решения всех трёх систем на одном рисунке, получаем множество $u>v$. Подставляя вместо u и v соответствующие выражения, приходим к неравенству $\sqrt{x^3-9x+4}>2$, т.е. $x^3-9x>0$.

3.48.1. $x\in\left(-1/\sqrt{2},\,0\right)$. **3.48.2.** $x\in\{1/2\}$. **3.48.3.** $x\in(-3,+\infty)$. **3.48.4.** $x\in\left(-1/\sqrt{2},0\right)$. *Указание*: воспользоваться тождеством $\min(a,b)=$ $=\left(a+b-|a-b|\right)/2$, или, что проще, свести к равносильной системе, используя переход $\min(a,b)>c \Leftrightarrow a>c$ и $b>c$ **3.48.5.** $\min\limits_{x\in[0,1]}y(x)=y(3/4)=1/4$. *Указание*: построить в одной системе координат графики функций $y=1-x$, $y=2x-1$, $y=x/3$.

3.49.1. $(x;y)\in\{(-5/2;5/2);(-3/2;5/2)\}$. *Указание*: воспользоваться методом подстановки. **3.49.2.** $(x;y)\in\{(1/2;1\,1/2);(3/2;1\,1/2)\}$. **3.49.3.** $(x;y)\in\{(1/2;7/2)\}$. **3.49.4.** $(x;y)\in\{(1;0);(2;1);(2;-1);(3;2);(-1;0);(3;-2)\}$. **3.49.5.** $(x;y)\in\{(-1;0)\}$. **3.49.6.** $(x;y)\in\{(-1;-2)\}$. **3.49.7.**

$(x;y)\in\left\{(-1)^n\arcsin\left(2-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)+\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right\}, n,k\in Z$. **3.49.8.** $(x;y)\in$ $\in\{(-2;-3);(10/3;7/3)\}$. **3.49.9.** 2 кв.ед. **3.49.10.** $(x;y)\in$ $\in\{(1/2;3/2);(1/2+\log_7 4;3/2-\log_7 4)\}$. **3.49.11.** $(x;y)\in\{(4/3;1/3)\}$. **3.49.12.** $b=2$. **3.49.13.** При $a\in(-\infty,0)$ $x\in(0,-a)\cup(-a,+\infty)$; при $a=0$ решений нет; при $a\in(0,+\infty)$ $x\in(-\infty,-3a)\cup(-a/3,0)$.

3.50.1. $x\in[0,4]$. **3.51.1.** $x\in\{14\pi/5\}$. **3.51.2.** $1/3$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **3.51.3.** $x\in\left(0,3^{-4}\right)\cup\left(3^{-4},1\right]$. *Указание*: решение задачи разобрано в тексте пособия. **3.51.4.** $x\in(1,5/4)\cup(5/4,3/2)$. *Указание*: перейти в логарифме к любому числовому основанию, например 10, а затем на ОДЗ избавиться от логарифмов, воспользовавшись методом замены множителей вида $\lg a$ на множители вида $a-1$, а множителей вида $|a|-1$ на a^2-1. **3.51.5.** $x\in(3,7/2)\cup(7/2,19/5]\cup(4,5)$. *Указание*: рассмотреть случаи $x-3>1$ и $0<x-3<1$. **3.51.6.** $x\in(-3,-2)\cup(1,2]$. **3.51.7.** $x\in\{1/2\}$. *Указание*: заметив, что всегда $0{,}5-\left|2x^2-5x+2\right|<1$, $0{,}5+\left|8x^2-2x-1\right|>0$, свести неравенство к равносильной ему системе

$$\begin{cases}0{,}5+\left|8x^2-2x-1\right|\le 0{,}5-\left|2x^2-5x+2\right|\\ 0{,}5-\left|2x^2-5x+2\right|>0.\end{cases}$$

3.51.8. $x\in(-1/3,-1/4)\cup(-1/6,-1/10)$. **3.51.9.** $x\in\{\pm(\pi/4)+\pi n;$ $\pm\, arctg 2+\pi k\}$, $n,k\in Z$. *Указание*: свести уравнение к системе $\left\{3|\sin x||\cos x|-|\cos x|^2=1;\ \cos x\neq 0,\right.$ а затем заменить единицу в правой части на $|\cos x|^2+|\sin x|^2$, и решить полученное однородное уравнение. **3.51.10.** $x\in\left\{1\pm\frac{\pi}{2}\mp 2\pi n;\ \frac{1}{3}\pm\frac{\pi}{6}\mp\frac{2\pi k}{3}\right\}$, где $n,k\in N$. **3.51.11.** $x\in\bigcup\limits_{n\in Z}\{(-\pi+4\pi n,\pi+4\pi n)\setminus\{4\pi n\}\}$. *Указание*: так как $|1-2\cos(\pi/6)|=\sqrt{3}-1$ и $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$, то уравнение равносильно системе $\begin{cases}|\cos(x/2)|=\cos|x/2|\\ \cos(x/2)\neq 0;\cos(x/2)\neq\pm 1.\end{cases}$ **3.51.12.** $x\in(-\infty,-3/4)\cup(-1/12,0)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Список условных обозначений

Для краткой записи формулировок утверждений в книге использованы общепринятые в математической практике *условные знаки* (кванторы) и *обозначения*, смысл которых следующий:

$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A;

$x \in \varnothing$ – такая запись означает, что задача (уравнение, неравенство) с неизвестной x не имеет решений;

$A \subset B$ – множество A принадлежит множеству B (знак строгой принадлежности); в этом случае B может содержать элементы, не принадлежащие множеству A;

$A \subseteq B$ – знак нестрогой принадлежности множества A множеству B, допускается случай совпадения A и B;

$\{a;b;...;c\}$ – множество, состоящее из чисел (элементов) $a,b,...,c$;

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

$(-\infty,+\infty)$, R – числовая прямая, множество всех действительных чисел;

$(-\infty,a),(a,+\infty)$ – числовая полупрямая, открытый луч;

$(-\infty,a],[a,+\infty)$ – числовая полупрямая, замкнутый луч;

$[a,b]$ – отрезок;

(a,b) – интервал;

$[a,b),(a,b]$ – полуинтервал, полуотрезок;

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ – сумма чисел $a_1, a_2, ..., a_n$;

$\Rightarrow$ – означает «следовательно», «следует»;

$\exists$ – означает «существует», «найдётся»;

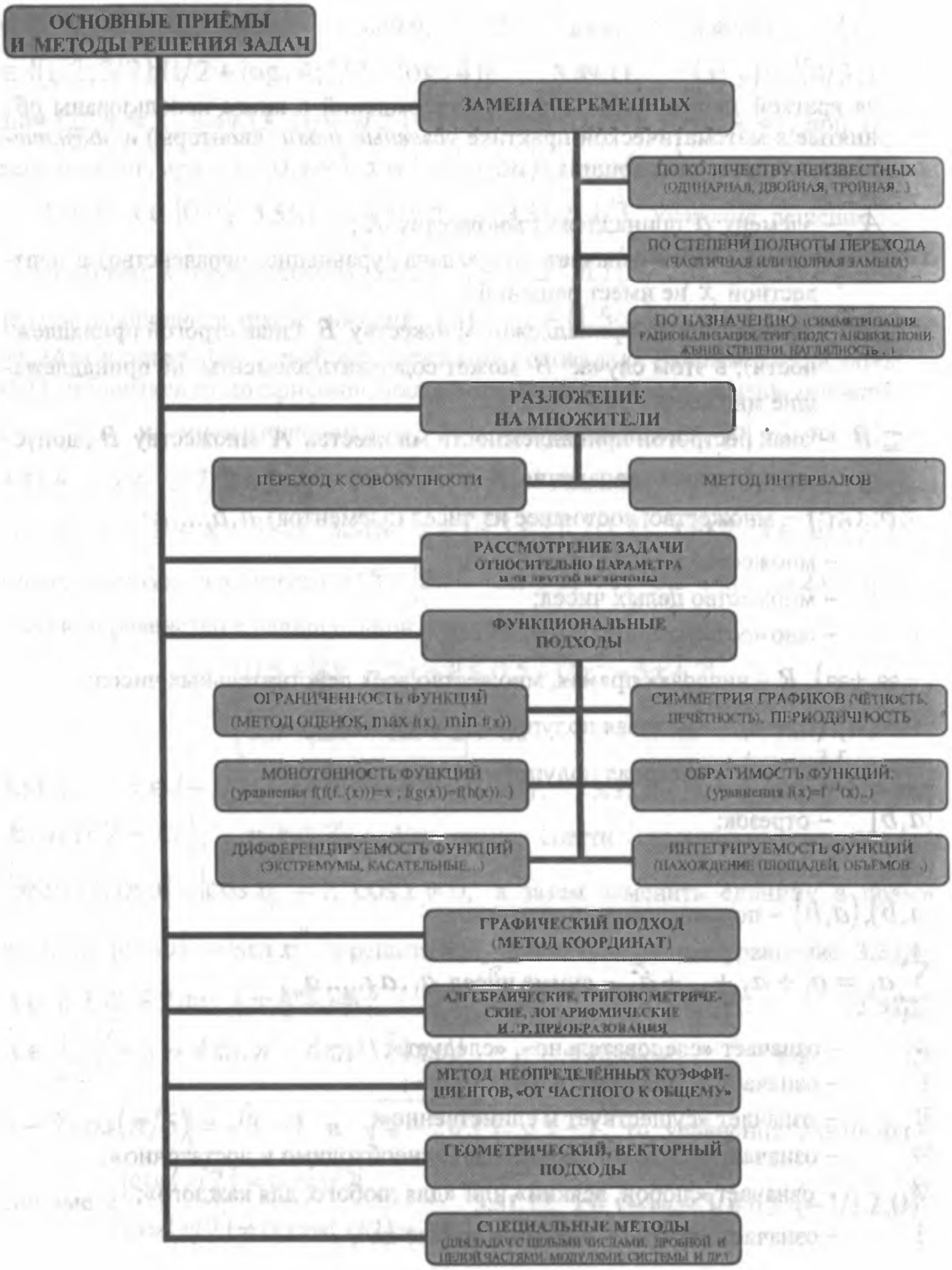
$\exists!$ – означает «существует и единственно»;

$\Leftrightarrow$ – означает «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно»;

$\forall$ – означает «любой, всякий» или «для любого, для каждого»;

$\vdots$ – означает «кратно», «делится нацело на».

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Основные методы элементарной математики



Предметный указатель

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра. Задачник: 10–11 кл.: Учеб. пособие для общеобразоват. заведений/ В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. М.: Дрофа, 1996. 576с.: ил.
2. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции: Учеб. пособие/ М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко. Под ред. В.А. Садовничего. М.: Высш. шк., 2001. 735 с.: ил.
3. *Будак А.Б., Щедрин Б.М.* Элементарная математика: Руководство для поступающих в вузы. 5-е изд., испр. М.: УНЦ ДО, ФИЗМАТЛИТ, 2003. 698с. (Сер. «В помощь абитуриенту»).
4. Вступительные экзамены по математике 2000–2002: задачи с ответами и решениями; варианты письменных и устных экзаменов; программа по математике (по материалам вступительных испытаний в МГУ имени М.В. Ломоносова) /Под ред. И.Н.Сергеева. М.: Изд-во ЦПИ при мехмате МГУ, 2003. 313с.
5. Вступительные экзамены и олимпиады по математике 2003–2005: задачи с ответами и решениями; варианты письменных и устных экзаменов; задания олимпиад; программа по математике (по материалам вступительных испытаний в МГУ имени М.В.Ломоносова) /Под ред. И.Н.Сергеева. М.: Изд-во ЦПИ при мехмате МГУ, 2006. 245с., ил.
6. Вступительные экзамены по математике (2006–2008). /Под общей ред. И.Н. Сергеева. – М.: Изд-во ЦПИ при мехмате МГУ, 2008. 112с., ил.
7. *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащ. 7–11 кл.: Челябинск: Взгляд, 2004. 448с.
8. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для учащ. 10–11 кл. общеобразов. учреждений/ Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. М.: Просвещение, АО «Учеб. лит.», 1996. 320с.: ил.
9. Задачи вступительных экзаменов по математике (1998г.) /Под общ. ред. Е.А. Григорьева. М.: ВМиК МГУ, 1998. 56с.
10. Задачи вступительных экзаменов по математике (2005г.) /Под общ. ред. Е.А. Григорьева. М.: ВМиК МГУ,2005. 138с.
11. Задачи вступительных экзаменов по математике (2006г.) /Под общ. ред. Е.А. Григорьева. М.: ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2006. 152с.
12. Задачи вступительных экзаменов по математике (2007г.) /С.А. Волошин и др. Под общ. ред. Е.А.Григорьева. М.: ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2007. 136с.
13. Олимпиады и вступительные экзамены по математике (2008г.) /С.Н. Аввакумов и др. Под общ. ред. Григорьева Е.А. М.: ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. 156с.

14 Задачи с параметрами /П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. 3-е изд., доп. и исп. М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2002. 336с.
15. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел: Учебное пособие для абитуриентов и школьников/ В.Я. Галкин, Д.Ю. Сычугов, Е.В. Хорошилова. М.: ВМиК МГУ, 2003. 180с.
16. *Малаховский В.С.* Введение в математику. Калининград: Янтар.сказ, 1998. 440с.
17. *Малаховский В.С.* Числа знакомые и незнакомые: Учеб. пособие. Калининград: ФГУ-ИПП Янтарный сказ, 2004. 184с.
18. Математика. Большой энциклопедический словарь /Под ред. Ю.В. Прохорова. 3-е изд. М.: Большая Российская энциклопедия, 2000. 848с.: ил.
19. Математика. Задачи вступительных экзаменов в МГУ им. М.В. Ломоносова с ответами и решениями (1999–2004гг): Учеб. пособие/ Сост. Е.А. Григорьев. 4-е изд., исп. и доп. М.: Изд-во УНЦ ДО, 2005. 399с.
20. Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями (1993–1997гг) / Сост. И.И. Мельников, С.Н. Олехник, И.Н. Сергеев. М., МГУ, 1998. 232с.
21. Математика. Методы решения задач: для поступающих в вузы. Учеб. пособие /М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко. М.: Дрофа, 1995. 336с.
22. *Медведев Г.Н.* Задачи вступительных экзаменов по математике на физическом факультете МГУ. 1971–2006 гг. Изд. 2-е, исп. и доп. М.: КомКнига, 2007. 248с.
23. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных/ С.В. Кравцев и др. М.: Экзамен, 2005. 544с.
24. *Мочалов В.В., Сильвестров В.В.* Уравнения и неравенства с параметрами: Учеб. пособие. 2-е изд. Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2000. 144с.
25. *Натяганов В.Л., Лужина Л.М.* Методы решения задач с параметрами: Учеб.пособие. М.: Изд-во МГУ, 2003. 368с.
26. Начала анализа. Задачник: 10–11 кл.: Учеб. пособие для общеобразоват. учеб. заведений/ В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. М.: Дрофа, 1996. 416с.: ил.
27. *Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К.*. Задачи вступительных экзаменов по математике: Учеб. пособие. М.: Факториал, 1995. 640с., ил.
28. *Пархимович И.В.* Математика для поступающих. Минск: Высш. шк., 1998. 463с.: ил.
29. *Сивашинский И.Х.* Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1971. 368с.
30. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10–11 классы: Учебно-метод. пособие/ С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. М.: Дрофа, 2001. 192с.: ил.
31. *Хорошилова Е.В.* Математика: Задачи с решениями вступительных экзаменов и олимпиад на геологическом факультете МГУ за 1984–2008 годы. Учеб. пособие для старшекл./ Сост. Е.В. Хорошилова. 2-е изд., исп. И доп. М., Макс Пресс, 2009. 436с.
32. *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по математике с решениями: Учеб. пособие для 11 кл. общеобразов. учреждений. М.: ООО «Астрель», ООО «АСТ», 2001. 448с.: ил.
33. Элементарная математика. Повторительный курс/ В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави. 2-е изд. М.: Наука, 1974. 592с.
34. *Якушева Е.В., Попов А.В., Якушев А.Г.* Математика. Всё для экзамена: Учеб.пособие. 2-е изд., исп. и доп. М.: Изд-во УНЦ ДО, 2004. 207с.

Учебное издание

ХОРОШИЛОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для старшеклассников и абитуриентов

Часть 1:
Теория чисел. Алгебра

Подписано в печать 29.09.2009. Формат 60x88 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 29,5.
Тираж 1000 экз. Изд. № 8352. Заказ 6383.

Ордена "Знак Почета" Издательство Московского университета.
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.
Тел.: (495) 629-50-91. Факс: 697-66-71.
Тел.: 939-33-23 (отдел реализации)
E-mail: secretary-msu-press@yandex.ru

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»,
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.

Е.В. Хорошилова

Элементарная МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для старшеклассников
и абитуриентов

Автор книги Хорошилова Елена Владимировна – опытный преподаватель, доцент факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.
В течение многих лет читает курс лекций по элементарной математике на Подготовительном отделении МГУ.

Сильной стороной книги является то, что наряду с известными стандартными методами в ней подробно рассмотрены и систематизированы задачи нестандартного типа и способы их решения, что развивает творческое и логическое мышление будущего студента.
Книгу можно использовать при подготовке к олимпиадам и поступлению в вузы с высокими требованиями к знанию математики.

Академик РАН В.А. Ильин
Академик РАН Е.И. Моисеев

ISBN 978-5-211-05320-5
9785211053205