

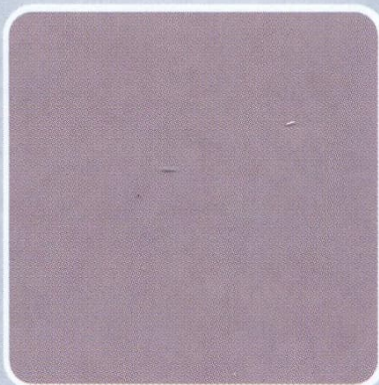
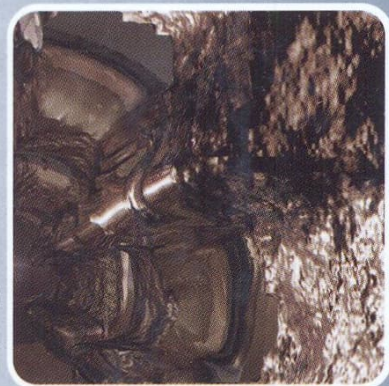
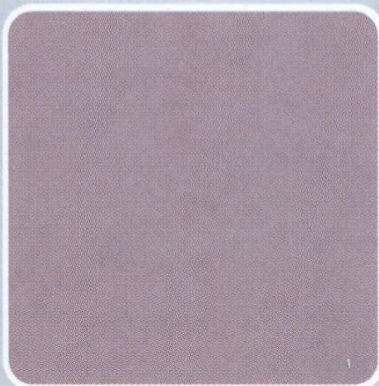
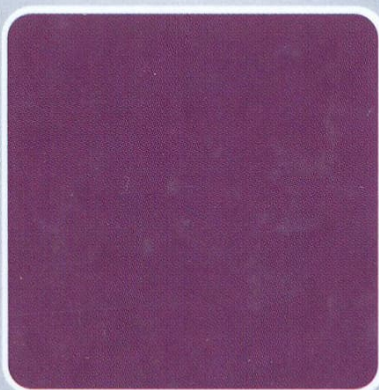
Министерство образования  
и науки РФ рекомендует

Учебник  
и практикум

# Высшая математика для экономического бакалавриата

Под редакцией профессора  
**Н. Ш. Кремера**

у г л у б л е н н ы й    к у р с





# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ

4-е издание, переработанное и дополненное

Под редакцией профессора **Н. Ш. Кремера**

*Рекомендовано Министерством образования  
Российской Федерации в качестве учебника  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по экономическим специальностям*

*Рекомендовано УМО по образованию в области  
математических методов в экономике в качестве учебника  
для студентов, обучающихся по специальности 061800  
«Математические методы в экономике» и другим  
экономическим специальностям*

**Москва • Юрайт • 2013**

УДК 51  
ББК 22.1я73  
К79

**Рецензенты:**

кафедра высшей математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (заведующий кафедрой профессор *Никишкин В. А.*);

*Солодовников А. С.* — заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор Финансовой академии при Правительстве РФ.

**Кремер, Н. Ш.**

К79 Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2013. — 909 с. — Серия : Бакалавр. Углубленный курс.

ISBN 978-5-9916-2773-3 (Издательство Юрайт)

ISBN 978-5-9692-1462-0 (ИД Юрайт)

Эта книга — полноценное руководство к решению задач. Основные положения учебного материала дополняются задачами с решениями для самостоятельной работы, раскрывается экономический смысл математических понятий, приводятся простейшие приложения математики в экономике.

Существенным отличием книги является наличие в ней наряду с традиционными контрольными заданиями (60 вариантов, более 400 задач) тестовых заданий (27 тестов, более 400 тестовых заданий). Это позволяет эффективно использовать учебник при проведении контрольных работ, тестировании студентов, приеме зачетов и экзаменов, а также при самоконтроле.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

*Для бакалавров экономических специальностей и направлений вузов, а также магистров и аспирантов, экономистов, преподавателей и лиц, занимающихся самообразованием.*

УДК 51  
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9916-2773-3  
(Издательство Юрайт)  
ISBN 978-5-9692-1462-0  
(ИД Юрайт)

© Кремер Н. Ш., Путко Б. А.,  
Тришин И. М., Фридман М. Н., 2010  
© Кремер Н. Ш., Путко Б. А.,  
Тришин И. М., Фридман М. Н., 2012,  
с изменениями  
© ООО «ИД Юрайт», 2013

# Оглавление

Предисловие .....	15
Введение .....	20

## Раздел I ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава 1. Матрицы и определители .....	26
---------------------------------------	----

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

1.1. Основные сведения о матрицах .....	26
1.2. Операции над матрицами .....	28
1.3. Определители квадратных матриц .....	37
1.4. Свойства определителей .....	43
1.5. Обратная матрица .....	47
1.6. Ранг матрицы .....	51

### ПРАКТИКУМ

1.7. Действия с матрицами .....	57
1.8. Определители квадратных матриц .....	59
1.9. Обратная матрица .....	64
1.10. Ранг матрицы .....	66
1.11. Задачи с экономическим содержанием .....	70

### Контрольные задания по главе 1

«Матрицы и определители» .....	75
Тест 1 .....	77

Глава 2. Системы линейных уравнений .....	79
---	----

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

2.1. Основные понятия и определения .....	79
2.2. Система $n$ линейных уравнений с $n$ переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера .....	81



2.3. Метод Гаусса .....	86
2.4. Система $m$ линейных уравнений с $n$ переменными .....	91
2.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений .....	96
2.6. Модель Леонтьева — модель многоотраслевой экономики (балансовый анализ) .....	99

## ПРАКТИКУМ

2.7. Система $n$ линейных уравнений с $n$ переменными .....	104
2.8. Система $m$ линейных уравнений с $n$ переменными. Метод Жордана — Гаусса. Фундаментальная система решений .....	112
2.9. Модель Леонтьева — модель многоотраслевой экономики .....	118

## Контрольные задания по главе 2

«Системы линейных уравнений» .....	120
Тест 2 .....	121

## Глава 3. Элементы матричного анализа .....

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве .....	124
3.2. Понятия $n$ -мерного вектора и векторного пространства .....	130
3.3. Размерность и базис векторного пространства .....	132
3.4. Переход к новому базису .....	137
3.5. Евклидово пространство .....	139
3.6. Линейные операторы .....	141
3.7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора .....	145
3.8. Квадратичные формы .....	150
3.9. Линейная модель обмена .....	155

### ПРАКТИКУМ

3.10. Векторы на плоскости и в пространстве .....	158
3.11. Понятия $n$ -мерного вектора и векторного пространства. Евклидово пространство .....	163
3.12. Линейные операторы .....	170

3.13. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (матрицы) .....	173
3.14. Квадратичные формы .....	178
Контрольные задания по главе 3	
«Элементы матричного анализа» .....	182
Тест 3 .....	183
<b>Глава 4. Уравнение линии. Прямая и плоскость .....</b>	<b>186</b>
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС</b>	
4.1. Системы координат. Простейшие задачи .....	186
4.2. Уравнение линии на плоскости .....	188
4.3. Уравнение прямой .....	190
4.4. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой .....	195
4.5. Окружность и эллипс .....	198
4.6. Гипербола и парабола .....	203
4.7. Полярные координаты .....	210
4.8. Плоскость и прямая в пространстве .....	213
<b>ПРАКТИКУМ</b>	
4.9. Простейшие задачи. Уравнение прямой на плоскости .....	217
4.10. Кривые второго порядка .....	227
4.11. Полярные координаты .....	235
4.12. Плоскость и прямая в пространстве .....	237
Контрольные задания по главе 4	
«Уравнение линии. Прямая и плоскость» .....	244
Тест 4 .....	245
<b>КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ТЕСТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ» (РАЗДЕЛУ I)</b>	
Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии» (разделу I) .....	248
Итоговые контрольные задания по дисциплине «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии» (разделу I) .....	255
Итоговый тест ЛА .....	258

## Раздел II

## ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

**Глава 5. Функции одной переменной** ..... 262

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

## 5.1. Понятие множества ..... 262

5.2. Абсолютная величина действительного числа.  
Окрестность точки ..... 264

## 5.3. Понятие функции. Основные свойства функций ..... 265

## 5.4. Основные элементарные функции ..... 269

5.5. Элементарные функции. Классификация функций.  
Преобразование графиков ..... 273

## 5.6. Применение функций в экономике ..... 277

5.7. Интерполирование функций. Основные правила  
приближенных вычислений ..... 280

## ПРАКТИКУМ

## 5.8. Функции и графики ..... 284

Контрольные задания по главе 5 «Функции одной  
переменной» ..... 292

## Тест 5 ..... 292

**Глава 6. Пределы и непрерывность** ..... 294

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

## 6.1. Предел числовой последовательности ..... 294

## 6.2. Предел функции в бесконечности и точке ..... 296

## 6.3. Бесконечно малые величины ..... 300

## 6.4. Бесконечно большие величины ..... 304

6.5. Основные теоремы о пределах.  
Признаки существования предела ..... 3076.6. Замечательные пределы. Задача о непрерывном  
начислении процентов ..... 310

## 6.7. Непрерывность функции ..... 316

## ПРАКТИКУМ

## 6.8. Вычисление пределов ..... 322

6.9. Замечательные пределы. Применение  
эквивалентных бесконечно малых величин  
к вычислению пределов ..... 331



6.10. Непрерывность функции и точки разрыва .....	338
Контрольные задания по главе 6 «Пределы и непрерывность» .....	340
Тест 6 .....	341

### Раздел III ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

<b>Глава 7. Производная и дифференциал .....</b>	<b>344</b>
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС</b>	
7.1. Задачи, приводящиеся к понятию производной ....	344
7.2. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции .....	346
7.3. Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования .....	349
7.4. Производная сложной и обратной функций .....	353
7.5. Производные основных элементарных функций .....	357
7.6. Производные неявной и параметрически заданной функций. Понятие производных высших порядков .....	362
7.7. Понятие дифференциала функции .....	365
7.8. Применение дифференциала в приближенных вычислениях .....	368
7.9. Понятие о дифференциалах высших порядков .....	370
7.10. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике .....	371
<b>ПРАКТИКУМ</b>	
7.11. Вычисление производных .....	378
7.12. Геометрические и механические приложения производной .....	385
7.13. Дифференциал функции .....	388
7.14. Экономические приложения производной .....	389
Контрольные задания по главе 7 «Производная и дифференциал» .....	395
Тест 7 .....	396

**Глава 8. Приложения производной ..... 398****ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС**

8.1. Основные теоремы дифференциального исчисления ...	398
8.2. Правило Лопиталя .....	402
8.3. Возрастание и убывание функций .....	406
8.4. Экстремум функции .....	408
8.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке и интервале .....	414
8.6. Выпуклость функции. Точки перегиба .....	416
8.7. Асимптоты графика функции .....	419
8.8. Общая схема исследования функций и построения их графиков .....	422
8.9. Приложение производной в экономической теории	428

**ПРАКТИКУМ**

8.10. Основные теоремы дифференциального исчисления .....	429
8.11. Правило Лопиталя .....	431
8.12. Интервалы монотонности и экстремумы функции .....	435
8.13. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба .....	440
8.14. Асимптоты. Исследование функций и построение их графиков .....	442
8.15. Применение производной в задачах с экономическим содержанием .....	450

**Контрольные задания по главе 8**

«Приложения производной» .....	455
Тест 8 .....	455

**КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ТЕСТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ****«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ», ЧАСТЬ 1 (РАЗДЕЛАМ II, III)**

Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Математический анализ», часть 1 (разделам II, III) .....	460
Итоговые контрольные задания по дисциплине «Математический анализ», часть 1 (разделам II, III ) .....	467
Итоговый тест МА.1 .....	469

## Раздел IV

### ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

<b>Глава 9. Функции нескольких переменных .....</b>	<b>474</b>
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС</b>	
9.1. Основные понятия .....	474
9.2. Предел и непрерывность .....	479
9.3. Частные производные .....	481
9.4. Дифференциал функции .....	483
9.5. Производная по направлению. Градиент .....	485
9.6. Дифференцирование сложной функции .....	487
9.7. Экстремум функции нескольких переменных .....	490
9.8. Наибольшее и наименьшее значения функции .....	494
9.9. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа ....	497
9.10. Понятие об эмпирических формулах. Метод наименьших квадратов .....	500
9.11. Функции нескольких переменных в экономической теории .....	505
<b>ПРАКТИКУМ</b>	
9.12. Основные понятия .....	510
9.13. Частные производные, градиент, дифференциал .....	513
9.14. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум .....	515
9.15. Метод наименьших квадратов .....	520
9.16. Функции нескольких переменных в экономических задачах .....	525
Контрольные задания по главе 9 «Функции нескольких переменных» .....	530
Тест 9 .....	531

## Раздел V

### ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

<b>Глава 10. Неопределенный интеграл .....</b>	<b>534</b>
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС</b>	
10.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл .....	534



10.2. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций .....	536
10.3. Метод замены переменной .....	543
10.4. Метод интегрирования по частям .....	546
10.5. Интегрирование простейших рациональных дробей .....	549
10.6. Интегрирование некоторых видов иррациональностей .....	554
10.7. Интегрирование тригонометрических функций .....	557
10.8. Об интегралах, «неберущихся» в элементарных функциях .....	559

### ПРАКТИКУМ

10.9. Непосредственное интегрирование .....	559
10.10. Метод замены переменной .....	561
10.11. Метод интегрирования по частям .....	568
10.12. Интегрирование рациональных функций .....	573
10.13. Интегрирование некоторых видов иррациональностей .....	577
10.14. Интегрирование тригонометрических функций .....	581
Контрольные задания по главе 10 «Неопределенный интеграл» .....	584
Тест 10 .....	585

### Глава 11. Определенный интеграл .....

#### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

11.1. Понятие определенного интеграла, его геометрический и экономический смысл .....	587
11.2. Свойства определенного интеграла .....	593
11.3. Определенный интеграл как функция верхнего предела .....	597
11.4. Формула Ньютона — Лейбница .....	600
11.5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле .....	602
11.6. Геометрические приложения определенного интеграла .....	605
11.7. Несобственные интегралы .....	615
11.8. Приближенное вычисление определенных интегралов .....	620

11.9. Применение понятия определенного интеграла в экономике .....	623
11.10. Понятие двойного интеграла .....	626
<b>ПРАКТИКУМ</b>	
11.11. Методы вычисления определенного интеграла .....	630
11.12. Геометрические приложения определенного интеграла .....	636
11.13. Несобственные интегралы .....	646
11.14. Приближенное вычисление определенного интеграла .....	650
11.15. Применение понятия определенного интеграла в экономике .....	652
11.16. Двойные интегралы .....	656
Контрольные задания по главе 11 «Определенный интеграл» .....	658
Тест 11 .....	659
 <b>Глава 12. Дифференциальные уравнения</b> .....	 661
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС</b>	
12.1. Основные понятия .....	661
12.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения .....	665
12.3. Элементы качественного анализа дифферен- циальных уравнений первого порядка .....	668
12.4. Неполные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными .....	671
12.5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка .....	674
12.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка .....	676
12.7. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка .....	678
12.8. Линейные дифференциальные уравнения вто- рого порядка с постоянными коэффициентами .....	679

12.9. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике .....	690
12.10. Системы дифференциальных уравнений .....	694
<b>ПРАКТИКУМ</b>	
12.11. Основные понятия .....	701
12.12. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными .....	704
12.13. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка .....	706
12.14. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка .....	709
12.15. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка .....	714
12.16. Линейные дифференциальные уравнения вто- рого порядка с постоянными коэффициентами .....	717
12.17. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике .....	723
12.18. Системы дифференциальных уравнений .....	728
12.19. Дополнительные задачи .....	731
Контрольные задания по главе 12 «Дифференциаль- ные уравнения» .....	732
Тест 12 .....	733

## Раздел VI РЯДЫ

<b>Глава 13. Числовые ряды .....</b>	<b>736</b>
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС</b>	
13.1. Основные понятия. Сходимость ряда .....	736
13.2. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд .....	740
13.3. Ряды с положительными членами .....	742
13.4. Ряды с членами произвольного знака .....	752
<b>ПРАКТИКУМ</b>	
13.5. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости .....	757



13.6. Сходимость рядов с положительными членами .....	760
13.7. Сходимость рядов с членами произвольного знака....	769
Контрольные задания по главе 13 «Числовые ряды» .....	773
Тест 13 .....	774
<b>Глава 14. Степенные ряды .....</b>	<b>777</b>
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС</b>	
14.1. Область сходимости степенного ряда .....	777
14.2. Ряды Маклорена и Тейлора .....	783
14.3. Формула Тейлора .....	788
<b>ПРАКТИКУМ</b>	
14.4. Область сходимости степенного ряда .....	791
14.5. Ряды Маклорена и Тейлора .....	798
14.6. Применения рядов в приближенных вычислениях .....	805
Контрольные задания по главе 14 «Степенные ряды» .....	816
Тест 14 .....	816

## Раздел VII ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

<b>Глава 15. Комплексные числа .....</b>	<b>820</b>
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС</b>	
15.1. Арифметические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость .....	820
15.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа .....	822
<b>ПРАКТИКУМ</b>	
15.3. Действия над комплексными числами .....	827
Контрольные задания по главе 15 «Комплексные числа» .....	830
Тест 15 .....	831

## КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ТЕСТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ», ЧАСТЬ 2 (РАЗДЕЛАМ IV—VII)

Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Математический анализ», часть 2 (разделам IV—VII) .....	834
---	-----

---

Итоговые контрольные задания по дисциплине «Математический анализ», часть 2 (разделам IV—VII) .....	841
Итоговый тест МА.2 .....	843
<b>Приложение. Об использовании математических пакетов при изучении курса высшей математики .....</b>	<b>847</b>
<b>Литература .....</b>	<b>854</b>
<b>Ответы .....</b>	<b>856</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>894</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Три предыдущих издания учебника выходили под названием «Высшая математика для экономических специальностей». Переход всех экономических вузов и отделений, начиная с 2011/2012 учебного года, на двухуровневую систему подготовки «бакалавр-магистр», определил новое название учебника (4-ое издание): «Высшая математика для экономического бакалавриата».

Учебник написан в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) по экономическим специальностям. Он соответствует Примерной программе дисциплины «Математика», утвержденной Минобразованием России, и содержит учебный материал по курсам «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии» и «Математический анализ», включенным в ФГОСы по экономическим направлениям в виде отдельных математических дисциплин.

При написании курса высшей математики для экономических вузов авторы руководствовались *принципом повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности*. При введении основных понятий отдавалось предпочтение классическому подходу: так, например, понятие непрерывности функции вводится после рассмотрения понятия предела, определенный интеграл определяется как предел интегральной суммы и т.п. Там, где это возможно, даются геометрический и экономический смыслы математических понятий (например, производной, интеграла и т.д.), приводятся математические формулировки ряда экономических законов (закона убывающей доходности, принципа убывающей предельной полезности, условия оптимальности выпуска продукции), рассматриваются простейшие приложения высшей математики в экономике (балансовые модели, предельный анализ, эластичность функции, производственные функции, модели экономической динамики и т.п.). Такие приложения рассчитаны на уровень подготовки студентов первого курса и почти не требуют дополнительной (экономической) информации.

Данный учебник подготовлен на основе учебника [2] и учебного пособия [18] тех же авторов. По сравнению с указанными книгами в него включен ряд дополнительных теоретических вопросов и задач (например, след матрицы, полярные

координаты, системы дифференциальных уравнений, достаточное условие экстремума функции  $n$  переменных, признак сходимости Коши, применение математических пакетов при изучении курса высшей математики и др.). Главное отличие этого издания заключается в совмещении в одной книге и учебника, и полноценного практикума, что позволило, в частности, исключить неизбежные повторы учебного и справочного материала.

Известно, что изучение базовых математических дисциплин в вузе осуществляется по апробированной многолетней практикой схеме: лекции — практические занятия — контрольные работы (типовые расчеты, тестирование) — экзамен. Данный учебник написан в соответствии с этой схемой.

Каждая глава учебника содержит «Теоретический курс», в котором раскрывается основное содержание темы и приводятся иллюстрирующие учебный материал решенные практические примеры и задачи, и «Практикум», в котором представлено достаточно большое число типовых и более сложных комплексных задач с решениями и для самостоятельной работы.

В конце каждой главы по представленной в ней теме приводятся как *традиционные контрольные задания* (три варианта по пять — девять задач), так и тест (10—15 тестовых заданий). Кроме того, в целом по дисциплине «Линейная алгебра (с элементами аналитической геометрии)», по первой и второй частям дисциплины «Математический анализ»<sup>1</sup> даются как *традиционные итоговые контрольные задания* (пять вариантов по восемь задач), так и *итоговые тесты* (по 24 тестовых задания).

Приведенные контрольные задания и тесты могут быть эффективно использованы для аудиторных и домашних контрольных работ, типовых расчетов, собеседований, на зачетах и экзаменах (в частности, письменных), при тестировании студентов (в том числе компьютерном), а также для самоконтроля по вузовскому общему курсу математики.

Такое построение книги потребовало сделать изложение теоретического материала более кратким, отказаться без существенного ущерба от малозначащих, громоздких или повторяющихся по своим идеям доказательств утверждений,

---

<sup>1</sup> Разделение учебного материала дисциплины на части соответствует примерным срокам их изучения в экономическом вузе (соответственно в I и II семестрах).

отличающихся от ранее проведенных лишь техническими деталями. Вместе с тем авторы стремились к более тщательной проработке базовых понятий и доказательств положений, изучение которых предусмотрено настоящим курсом. Для лучшего усвоения учебного материала приведены учебные алгоритмы (схемы) решения определенного круга задач.

Особенностью предлагаемого «Практикума» является то, что значительная часть задач и примеров имеет *экономическое содержание*. Наиболее экономически значимые задачи, представляющие самостоятельный интерес, выделены в отдельные параграфы.

Для оценки уровня подготовленности студентов в настоящее время все шире используются *методы тестирования*, в частности, с применением современных компьютерных технологий. Существенным отличием данной книги от имеющихся на книжном рынке изданий является то, что наряду с *традиционными контрольными заданиями* (60 вариантов, более 400 задач) в нем предлагается достаточно большое число *тестовых заданий* (27 тестов, более 400 тестовых заданий).

При подготовке тестовых заданий авторы ориентировались в основном на *открытую форму*, когда тестируемый сам получает ответ в виде произвольного числа (целого или записанного в виде десятичной дроби) — одного или нескольких, допускаемых при компьютерном тестировании. Такая форма заданий исключает возможность угадывания правильного ответа, подсказок для его получения.

Приведены также задания *в закрытой форме*, когда тестируемый должен выбрать один или несколько вариантов ответа, предложенных на выбор. При этом авторы отказались от альтернативных тестовых заданий (с двумя вариантами ответа) из-за высокой (0,5) вероятности угадывания правильного ответа. В ряде тестов использовались тестовые задания *на выявление соответствия* между элементами двух групп с ответами в виде соответствующих пар «число — буква», характеризующих порядковые номера элементов в каждой группе.

В отдельных случаях применялись тестовые задания *на установление правильной последовательности элементов* с ответами в виде последовательности номеров этих элементов.

*Для усвоения учебного материала каждой главы рекомендуется вначале изучить теоретические основы с иллюстрирующими их решенными задачами и примерами, приведенными*

*ми в «Теоретическом курсе», затем разобрать типовые и более сложные задачи с решениями и решить часть задач для самостоятельной работы из «Практикума». А для проверки уровня подготовленности по материалам каждой главы и дисциплинам «Линейная алгебра» и «Математический анализ» в целом рекомендуется выполнить тематические и итоговые контрольные и тестовые задания.*

При подготовке задач (а их в учебнике около 2700) были использованы различные пособия и методические материалы. Часть задач и, в частности, тестовые задания составлены специально для настоящего учебника. Наряду с авторами в подготовке ряда задач для самостоятельной работы и тестовых заданий принимали также участие преподаватели кафедры высшей математики ВЗФЭИ: доценты Л. Р. Борисова, А. С. Гулько, А. В. Потемкин, А. Ю. Шевелев, канд. физ.-мат. наук Е. М. Воробьева.

Ответы всех задач, контрольных и тестовых заданий по главам (кроме итоговых по дисциплинам) приводятся в конце учебника. Нумерация задач (как с решениями, так и для самостоятельной работы) единая по каждой главе (начинается в «Теоретическом курсе» и продолжается в «Практикуме»). В конце книги дан развернутый предметный указатель.

Знаком  $\square$  обозначается начало доказательства теоремы, знаком  $\blacksquare$  — ее окончание, а знаком  $\blacktriangleright$  — окончание решения задачи.

В третье издание включены *учебно-тренировочные тесты* (девять тестов по 20 тестовых заданий), которые могут быть использованы для контроля (экспресс-проверки) уровня подготовленности студентов перед курсовыми экзаменами (зачетами), для проверки остаточных знаний студентов при подготовке их к аттестации (аккредитации, комплексной проверке) вуза по циклу общих математических и естественнонаучных дисциплин, при решении вопроса о перезачете дисциплин студентам, переводящимся в данный вуз из других учебных заведений, и т.п. Эти тесты по указанным выше дисциплинам (в целом) помещены вместе с их итоговыми контрольными заданиями и тестами в отдельных разделах, а тематические контрольные задания и тесты перенесены из этих разделов в соответствующие главы учебника.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В. А. Нишкину и проф. А. С. Солодовникову за рецензирование рукописи и сделанные ими замечания.

## АВТОРЫ:

- Н. Ш. Кремер*, профессор (предисловие, введение, гл. 2–7, 13–15), а также приложение (совместно с Б. А. Путко));
- И. М. Тришин*, профессор (гл. 10–12);
- Б. А. Путко*, доцент (гл. 8, 9, а также приложение (совместно с Н. Ш. Кремером));
- М. Н. Фридман*, доцент (гл. 1);
- И. М. Эйсымонт*, доцент (учебно-тренировочные тесты).

Итоговые контрольные задания и итоговые тесты подготовлены авторами соответствующих глав учебника совместно.



## ВВЕДЕНИЕ

**Математика** — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. В неразрывной связи с запросами науки и техники запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется, поэтому приведенное определение необходимо понимать в самом общем смысле.

Академик А. Н. Колмогоров<sup>1</sup> выделяет четыре периода развития математики<sup>2</sup>: зарождения математики, элементарной математики, математики переменных величин, современной математики.

Понимание самостоятельного положения математики как особой науки стало возможным после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в VI—V вв. до н.э. Это было началом *периода элементарной математики*.

В течение этого периода математические исследования базировались лишь на достаточно ограниченном количестве основных понятий, возникших в связи с самыми простыми запросами хозяйственной жизни. Вместе с тем уже на данном этапе происходит качественное совершенствование математики как науки. На основе арифметики постепенно зарождается теория чисел. Появляется алгебра как буквенное исчисление. А созданная древними греками система изложения элементарной геометрии — геометрии Евклида — на два тысячелетия вперед стала образцом дуктивного построения математической теории.

В XVII в. запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование

---

<sup>1</sup> Колмогоров Андрей Николаевич (1903—1987) — российский математик.

<sup>2</sup> Колмогоров, А. Н. Математика / А. Н. Колмогоров // Математический энциклопедический словарь. М. : Советская энциклопедия, 1988.

геометрических фигур. С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создания дифференциального и интегрального исчислений начался *период математики переменных величин*.

На первый план выдвигается понятие функции, сыгравшее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятия величины и числа. Изучение функции привело к формулированию основных понятий математического анализа: предела, производной, дифференциала, интеграла. Создание аналитической геометрии позволило существенно расширить предмет изучения геометрии благодаря найденному универсальному способу перевода вопросов геометрии на язык алгебры и анализа — методу координат Р. Декарта. С другой стороны, открылась возможность геометрической интерпретации алгебраических и аналитических фактов.

Дальнейшее развитие математики привело в начале XIX в. к постановке задачи изучения возможных типов количественных отношений и пространственных форм с достаточно общей точки зрения. Связь математики и естествознания, оставаясь по существу не менее тесной, приобретает все более сложные формы. Новые теории возникают не только в результате запросов естествознания и техники, но и вследствие внутренней потребности самой математики. Замечательным примером такой теории является «воображаемая» геометрия Н. И. Лобачевского. Развитие подобного рода исследований в математике XIX—XX вв. позволяет отнести ее к *периоду современной математики*.

Потребности развития самой математики, «математизация» различных областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению ряда новых математических дисциплин, например, исследование операций, теория игр, математическая экономика и др.

В основе построения математической теории лежит *аксиоматический метод*, при котором в фундамент теории закладываются некоторые исходные положения, называемые *аксиомами* теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом. Примером применения аксиоматического подхода является евклидова геометрия, в которой четко проведена идея получения основного содержания геометрической теории чисто дедуктивным путем из

небольшого числа аксиом, истинность которых представлялась наглядно очевидной.

Основным методом в математических исследованиях являются *математические доказательства — строгие логические рассуждения*. Член-корреспондент РАН Л. Д. Кудрявцев указывает, что в силу объективной необходимости *логические рассуждения* (которые по своей природе, если они правильные, являются и строгими) *представляют метод математики, без них математика немыслима*<sup>1</sup>. Следует отметить, что математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям. Для правильной постановки задачи, оценки ее данных, выделения существенных из них и выбора способа ее решения необходима еще *математическая интуиция*, позволяющая предвидеть нужный результат прежде, чем он будет получен, наметить путь исследования с помощью правдоподобных рассуждений. Но *справедливость рассматриваемого факта доказывается* не проверкой ее на ряде примеров, не проведением серии экспериментов (что само по себе играет большую роль в математических исследованиях), а *чисто логическим путем, по законам формальной логики*.

Сказанное, естественно, не означает, что в предлагаемом курсе высшей математики нужно использовать только «строгие» доказательства, сводя все к аксиомам. Такой задачи авторы не ставили, потому что это не только невозможно в рамках вузовского курса (а тем более краткого курса в экономическом вузе), но часто и нецелесообразно с методической точки зрения, так как в процессе изучения дисциплины в ограниченные сроки необходимо уделять большое внимание разъяснению математических понятий (в том числе и на интуитивном уровне), их геометрическому, физическому и экономическому смыслам, решению практических задач.

В математике изучаются *математические модели*. Это могут быть как непосредственно математические модели реальных явлений, так и объекты (структуры) для изучения этих моделей. Одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга по своему конкретному содержанию реальных явлений. Так, одно и то же дифференциальное уравнение может описывать

---

<sup>1</sup> Кудрявцев, Л. Д. Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Наука, 1985.

процессы роста населения и распада радиоактивного вещества. Для математики важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.

В математике используются два вида умозаключений: *дедукция* и *индукция*, позволяющие сделать выводы соответственно на основании общих знаний для конкретного случая и, наоборот, на основании частных случаев об общих суждениях. *Принцип математической индукции* гласит, что утверждение  $A(n)$ , зависящее от натурального параметра  $n$ , считается доказанным, если доказано  $A(1)$  и для любого натурального числа  $n$  из предположения, что верно  $A(n)$ , доказано, что верно также  $A(n+1)$ .

При формулировке математических утверждений часто используются *необходимые и достаточные условия*. Пусть рассматривается какое-либо утверждение (положение)  $B$  в связи с некоторым утверждением (условием)  $A$ . Если из  $B$  следует  $A$ , т.е.  $B \Rightarrow A$ , то  $A$  называется *необходимым условием* для  $B$ , если же из  $A$  следует  $B$ , т.е.  $A \Rightarrow B$ , то  $A$  называется *достаточным условием* для  $B$ . Например, делимость числа на 2 — необходимое условие его делимости на 6 (делимость на  $6 \Rightarrow$  делимость на 2), а, скажем, делимость числа на 12 — достаточное условие его делимости на 6 (делимость на  $12 \Rightarrow$  делимость на 6). Если одновременно верны утверждения  $B \Rightarrow A$  и  $A \Rightarrow B$ , т.е.  $A \Leftrightarrow B$ , то  $A$  называется *необходимым и достаточным условием* для  $B$ . Например, для делимости числа на 6 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и 3, ибо «делимость на 2 и 3  $\Leftrightarrow$  делимость на 6».

Таким образом, необходимые условия — это такие условия, без которых рассматриваемое утверждение заведомо не может быть верным, а достаточные условия — это такие условия, при выполнении которых это утверждение заведомо верно. Выражение «необходимо и достаточно» можно заменить равносильными выражениями «тогда и только тогда», «если и только если», «в том и только в том случае». Необходимые и достаточные условия обладают в математике большой познавательной ценностью.

Математика играет важную роль при проведении естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследований. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования, средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным ап-

паратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

*Математика является не только мощным средством для решения прикладных задач и универсальным языком науки, но и элементом общей культуры.* В связи с этим математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Основы высшей математики были разработаны в трудах выдающихся ученых: математика и механика Древней Греции Архимеда (287—212 до н.э.); французского философа и математика Р. Декарта (1596—1650); английского физика и математика И. Ньютона (1643—1727); немецкого философа, математика и физика Г. Лейбница (1646—1716); математика, механика и физика Л. Эйлера (1707—1783); французского математика и механика Ж. Лагранжа (1736—1813); немецкого математика К. Гаусса (1777—1855); французского математика О. Коши (1789—1857) и многих других крупнейших ученых.

Большой вклад в развитие математики внесли выдающиеся русские ученые Н. И. Лобачевский (1792—1856), М. В. Остроградский (1801—1861), П. Л. Чебышев (1821—1894), А. А. Марков (1856—1922), А. М. Ляпунов (1857—1918) и др.

Современная российская математическая школа занимает передовое место в мировой математической науке благодаря трудам знаменитых математиков: А. Д. Александрова, П. С. Александрова, В. И. Арнольда, С. Н. Бернштейна, Н. Н. Боголюбова, И. Н. Векуа, И. М. Виноградова, В. М. Глушкова, Л. В. Канторовича, М. В. Келдыша, А. Н. Колмогорова, М. А. Лаврентьева, Ю. В. Линника, А. И. Мальцева, П. С. Новикова, Ю. В. Прохорова, В. И. Смирнова, С. Л. Соболева, А. Н. Тихонова и др.

Раздел I

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА  
С ЭЛЕМЕНТАМИ  
АНАЛИТИЧЕСКОЙ  
ГЕОМЕТРИИ**



# Глава 1

## МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

#### 1.1. Основные сведения о матрицах

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики — *матричная алгебра* — имеют чрезвычайно важное значение для экономистов. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное, компактной матричной форме.

*Матрицей* размера  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита, например  $A, B, C, \dots$ , а для обозначения элементов матрицы используются соответственно строчные буквы с двойной индексацией:  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$ , где  $i$  — номер строки,  $j$  — номер столбца.

Например, матрица

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

или в сокращенной записи  $A = (a_{ij}); i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .



Например, если  $m = 2$ ,  $n = 3$ , то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы:  $[ ]$ ,  $\| \|$ .

Две матрицы  $A$  и  $B$  одного размера называются *равными*, если они совпадают поэлементно, т.е.  $a_{ij} = b_{ij}$  для любых  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица распределения ресурсов, усл. ед., по отдельным отраслям экономики

Ресурсы	Отрасль экономики	
	промышленность	сельское хозяйство
Электроэнергетические	5,3	4,1
Трудовые	2,8	2,1
Водные	4,8	5,1

может быть записана в компактной форме в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5,3 & 4,1 \\ 2,8 & 2,1 \\ 4,8 & 5,1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

В этой записи, например, матричный элемент  $a_{11} = 5,3$  показывает, сколько электроэнергии потребляет промышленность, а элемент  $a_{22} = 2,1$  — сколько трудовых ресурсов требуется для сельского хозяйства.

**Виды матриц.** Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей(вектором)-строкой*, или просто *строкой*, а из одного столбца — *матрицей(вектором)-столбцом*, или просто *столбцом*:  $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$  — матрица-строка;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец.}$$

Матрица называется *квадратной*  $n$ -го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно  $n$ . Например,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ — квадратная матрица третьего порядка.}$$

Элементы матрицы  $a_{ij}$ , у которых номер столбца равен номеру строки ( $i = j$ ), называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ .

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*<sup>1</sup>. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ — диагональная матрица третьего порядка.}$$

Если у диагональной матрицы  $n$ -го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной* матрицей  $n$ -го порядка, она обозначается буквой  $E$ , или  $E_n$ . Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица третьего порядка.}$$

Матрица любого размера называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все ее элементы равны нулю:

$$\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые специфические.

<sup>1</sup> Если все диагональные элементы диагональной матрицы одинаковы, то такая матрица называется *скалярной*.

**1. Умножение матрицы на число.** Произведением матрицы  $A$  на число  $\lambda$  называется матрица  $B = \lambda A$ , элементы которой  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Например если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , то  $5A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$ .

**Следствие.** Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы. Например,

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, произведение матрицы  $A$  на число 0 есть нулевая матрица, т.е.  $0 \cdot A = \mathbf{0}$ .

**2. Сложение матриц.** Суммой двух матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера  $m \times n$  называется матрица  $C = A + B$ , элементы которой  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  (т.е. матрицы складываются поэлементно). Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}; C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

В частном случае  $A + \mathbf{0} = A$ .

**3. Вычитание матриц.** Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции «1» и «2»:  $A - B = A + (-1) \cdot B$ .

**4. Умножение матриц.** Операция умножения матрицы  $A$  на матрицу  $B$  определена, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй<sup>1</sup>. Тогда произведением матриц  $A \cdot B$  называется такая матрица  $C$ , каждый элемент  $c_{ij}$  которой равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

**Пример 1.1.** Вычислить произведение матриц  $AB$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> В этом случае матрица  $A$  называется согласованной с матрицей  $B$ .

*Решение.*

1. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно):  $A \cdot B = C$ .

$$2 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 2 \times 3$$

2. Вычислим элементы матрицы-произведения  $C$ , умножая элементы каждой строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы столбцов матрицы  $B$ , следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 1(-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Получаем } C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

- |   |  |
|---|--|
| 1) $A + B = B + A$ ;                          | 5) $(A + B)C = AC + BC$ ;                        |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;              | 6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ ; |
| 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ; | 7) $A(BC) = (AB)C$ .                             |
| 4) $A(B + C) = AB + AC$ ;                     |  |

Однако имеются и специфические свойства матриц. Так, операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел.

а) Если произведение матриц  $AB$  существует, то после перестановки сомножителей местами произведение матриц  $BA$  может и не существовать. Действительно, в примере 1.1 получили произведение матриц  $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3}$ , а произведения  $B_{3 \times 3} \cdot A_{2 \times 3}$  не существует, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй.

б) Если даже произведения  $AB$  и  $BA$  существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

**Пример 1.2.** Найти произведения матриц  $AB$  и  $BA$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Решение. } A_{2 \times 3} = B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix};$$

$$B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = D_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } AB \neq BA. \blacktriangleright$$

в) Если оба произведения  $AB$  и  $BA$  существуют и оба — матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц  $A$  и  $B$  одного порядка), *коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется*, т.е.  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

**Пример 1.3.** Найти произведения матриц  $AB$  и  $BA$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Решение. } AB = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } AB \neq BA. \blacktriangleright$$

Матрицы  $A$  и  $B$ , для которых выполняется коммутативный закон, называются *перестановочными*. Можно показать, что скалярные матрицы перестановочны с любыми квадратными матрицами того же порядка.

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы  $A$   $n$ -го порядка на единичную матрицу  $E$  того же порядка, причем это произведение равно  $A$ :

$$AE = EA = A.$$

$$\square A_{n \times n} \cdot E_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A.$$

$$E_{n \times n} \cdot A_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A. \blacksquare$$

Таким образом, единичная матрица играет при умножении матриц ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

г) Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т.е. из того, что  $AB = \mathbf{0}$ , не следует, что  $A = \mathbf{0}$  или  $B = \mathbf{0}$ . Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \text{ но } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

д) Если  $AB = AD$ , то из этого равенства еще не следует, что матрицы  $B$  и  $D$  равны. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{т.е. } B \neq D, \text{ но } AB = AD = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

**5. Возведение в степень.** Целой положительной степенью  $A^m$  ( $m > 1$ ) квадратной матрицы  $A$  называется произведение  $m$  матриц, равных  $A$ , т.е.

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ раз}}.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

По определению полагают  $A^0 = E$ ;  $A^1 = A$ . Нетрудно показать, что  $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$ ;  $(A^m)^k = A^{mk}$ .

Однако равенство  $(A \cdot B)^m = A^m \cdot B^m$  справедливо только для перестановочных матриц.

**Пример 1.4.** Найти  $A^2$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Решение. } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Если матрица  $A$  диагональная с диагональными элементами  $a_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то для любого натурального  $m$  матрица  $A^m$  тоже диагональная с диагональными элементами  $a_{ii}^m$  (следует из определения произведения матриц). Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

Выражение вида  $P(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_m A^m$ , где  $A$  и  $E$  — соответственно квадратная и единичная матрицы одинакового порядка;  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  — числа, называется *полиномом (многочленом) от матрицы*. Он представляет собой матрицу, которую можно рассматривать как результат подстановки матрицы вместо переменной  $x$  в обычный многочлен степени  $m$ :

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_m x^m.$$

**Пример 1.5.** Вычислить значение многочлена  $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$  от матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Решение.* Вместо  $x$  подставляем в функцию  $f(x)$  матрицу  $A$ , вместо числа 3 используем матрицу  $3 \cdot E$ , где  $E$  — единичная матрица второго порядка, что и  $A$ .

Найдем

$$2A^2 = 2 \cdot A \cdot A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5A = 5 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3E = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} f(A) &= 2A^2 - 5A + 3E = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Если при подстановке матрицы  $A$  вместо  $x$  в многочлен  $P(x)$  получается нулевая матрица, т.е.  $P(A) = \mathbf{0}$ , то матрица  $A$  называется *корнем многочлена  $P(x)$* , а сам многочлен — *аннулирующим многочленом* для матрицы  $A$ .

Отметим также, что если  $A^m$  — нулевая матрица, то из этого не следует, что матрица  $A = \mathbf{0}$ . Например,



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \text{ но } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

**6. Транспонирование матрицы.** Под этой операцией понимают переход от матрицы  $A$  к матрице  $A'$ , в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица  $A'$  называется *транспонированной* относительно матрицы  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Из определения следует, что если матрица  $A$  имеет размер  $m \times n$ , то транспонированная матрица  $A'$  имеет размер  $n \times m$ . Например,

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A'_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например  $A^T$ .

**Свойства операции транспонирования:**

- 1)  $(A')' = A$ ;      2)  $(\lambda A)' = \lambda A'$ ;
- 3)  $(A + B)' = A' + B'$ ;      4)  $(AB)' = B'A'$ .

Рекомендуем читателю доказать их самостоятельно.

Рассмотренные выше операции над матрицами позволяют упростить решения некоторых экономических задач.

**Пример 1.6.** Предприятие выпускает продукцию трех видов:  $P_1, P_2, P_3$  и использует сырье двух типов:  $S_1$  и  $S_2$ . Нормы

расхода сырья характеризуются матрицей  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ , где

каждый элемент  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2$ ) показывает, сколько единиц сырья  $j$ -го типа расходуется на производство еди-

ницы продукции  $i$ -го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой  $C = (100 \ 80 \ 130)$ , а стоимость единицы каж-

дого типа сырья (ден. ед.) — матрицей-столбцом  $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$ .

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

*Решение.* Затраты первого сырья составляют  $S_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$  ед. и второго —  $S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$  ед., поэтому матрица-строка затрат сырья  $S$  может быть записана как произведение  $S = C \cdot A = (100 \ 80 \ 130) \times$

$$\times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \ 980). \text{ Тогда общая стоимость сырья } Q = 730 \times$$

$\times 30 + 980 \cdot 50 = 70\,900$  ден. ед. может быть записана в матричном виде  $Q = S \cdot B = (CA)B = (70 \ 900)$ . Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу

продукции, т.е. матрицу  $R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$ , а затем общую стоимость сырья

$$Q = C \cdot R = C(AB) = (100 \ 80 \ 130) \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70 \ 900). \blacktriangleright$$

На данном примере мы убедились в выполнении свойства 7 (см. с. 24) — ассоциативного закона произведения матриц:  $(CA)B = C(AB)$ .

Очевидно, что при транспонировании матрицы ее диагональные элементы остаются на своих местах.

**7. След матрицы.** Следом квадратной матрицы  $A$  называется сумма ее диагональных элементов.

След обозначается  $\text{tr}A$  (от англ. trace — след)<sup>1</sup>. Он играет важную роль в исследовании матриц и их приложениях (например, в эконометрике).

<sup>1</sup> В технических приложениях встречается также обозначение следа матрицы  $\text{sp}A$  от немец. *spieg* — след.

Отметим основные **свойства следа матрицы**.

1. При транспонировании матрицы ее след не изменяется (так как операция транспонирования не меняет диагональных элементов), т.е.  $\text{tr}A = \text{tr}A'$ .
2. Если матрица  $D$  диагональная с элементами  $d_{ii}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то для любого натурального  $m$   $\text{tr}(D^m) = \sum_{i=1}^m d_{ii}^m$ .
3. Если  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы  $n$ -го порядка, то  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  (хотя в общем случае  $AB \neq BA$ ).
4. Если  $C$  — невырожденная матрица  $n$ -го порядка, то для любой матрицы  $A$   $n$ -го порядка выполняется равенство<sup>1</sup>:  $\text{tr}(C^{-1}AC) = \text{tr}A$ .

**Пример 1.7.** Проверить свойства 1—4 следа матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; m = 4.$$

*Решение.*

1.  $\text{tr}A = 1 + 4 = 5$ ;  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $\text{tr}A' = 1 + 4 = 5$ .
2.  $D^4 = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 3^4 \end{pmatrix}$ ;  $\text{tr}(D^4) = 2^4 + 3^4 = 97$ .
3.  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ ;  
 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = 9$ .
4.  $|C| = -1 \neq 0$ , легко найти  $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , тогда  
 $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\text{tr}(C^{-1}AC) = 5 = \text{tr}A$ . ►

<sup>1</sup> Понятие обратной матрицы  $C^{-1}$  рассмотрено в параграфе 1.5.

### 1.3. Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя — числа, характеризующего квадратную матрицу  $A$ , — тесно связано с решением систем линейных уравнений (см. гл. 2). Определитель матрицы  $A$  обозначается  $|A|$  или  $\Delta$ .

*Определителем матрицы первого порядка  $A_1 = (a_{11})$ , или определителем первого порядка, называется элемент  $a_{11}$ :*

$\Delta_1 = |A_1| = a_{11}$ . Например, пусть  $A_1 = (3)$ , тогда  $\Delta_1 = |A_1| = 3$ .

*Определителем матрицы второго порядка  $A_2 = (a_{ij})$ , или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле*

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.3)$$

Произведения  $a_{11}a_{22}$  и  $a_{12}a_{21}$  называются *членами определителя* второго порядка. Пусть  $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ , тогда

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

*Определителем матрицы третьего порядка  $A_3 = (a_{ij})$ , или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле*

$$\Delta_3 = |A_3| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1.4)$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из шести слагаемых, или шести членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (1.4), легко

запомнить, пользуясь схемой (рис. 1.1), которая называется *правилом треугольников* или *правилом Сарруса*<sup>1</sup>.

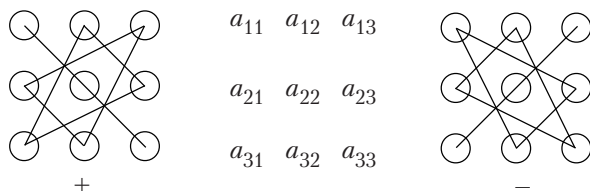


Рис. 1.1

**Пример 1.8.** Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Решение.*  $|A_3| = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \times (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$ . ►

**Замечание.** Обратим внимание на геометрическую интерпретацию определителей второго  $\Delta_2$  и третьего  $\Delta_3$  порядков. Их абсолютные величины  $|\Delta_2|$  и  $|\Delta_3|$  равны соответственно площади  $S$  параллелограмма (рис. 1.2) и объему  $V$  параллелепипеда (рис. 1.3), построенных на двух и трех векторах (см. параграф 3.1), координатами которых являются элементы определителей.

Для того чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

Рассмотрим квадратную матрицу  $n$ -го порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> Саррус Пьер Фредерик (1798–1861) — математик.

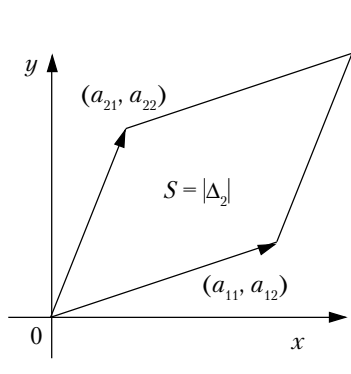


Рис. 1.2

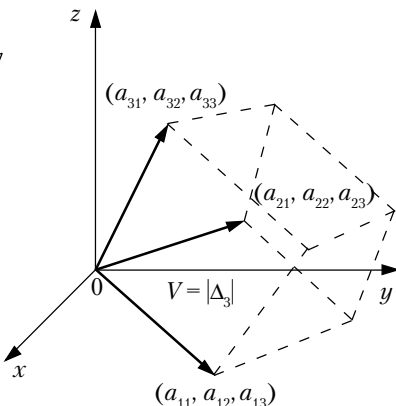


Рис. 1.3

Из общего числа  $n^2$  элементов этой матрицы выберем набор, содержащий  $n$  элементов, таким образом, чтобы в него входило по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Например, набор элементов  $(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn})$  или  $(a_{n1} \ a_{n-1,2} \ \dots \ a_{1n})$  соответственно главной и побочной диагоналей матрицы.

Любой такой набор можно упорядочить, записав сначала элемент из первой строки, затем из второй и т.д., т.е.

$$(a_{1j_1} \ a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}). \quad (1.5)$$

Номера столбцов  $(j_1; j_2; \dots; j_n)$  образуют при этом *перестановку*  $J$  из  $n$  чисел:  $1, 2, \dots, n$ . Всего существует  $n!$ <sup>1</sup> различных перестановок из  $n$  натуральных чисел.

Введем понятие *беспорядка*, или *инверсии*, в перестановке  $J$ . Это наличие пары чисел, в которой большее число предшествует меньшему. Например, в перестановке из трех чисел  $J = (2; 1; 3)$  имеется одна инверсия  $(2; 1)$ , а в перестановке  $J = (3; 2; 1)$  — три:  $(3; 2)$ ,  $(3; 1)$ ,  $(2; 1)$ . Обозначим через  $r(J)$  число инверсий в перестановке  $J$ .

Возвращаясь к наборам (1.5) из элементов матрицы  $A$ , можно каждому такому набору поставить в соответствие произведение его элементов

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \quad (1.6)$$

<sup>1</sup> Определение  $n!$  приведено в сноске на с. 312.

и число  $r(J)$ , равное числу инверсий в перестановке  $J = (j_1; j_2; \dots; j_n)$  из номеров соответствующих столбцов.

**Определение.** *Определителем квадратной матрицы  $n$ -го порядка*, или *определителем  $n$ -го порядка*, называется число<sup>1</sup>, равное алгебраической сумме  $n!$  членов, каждый из которых является произведением  $n$  элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак каждого члена определяется как  $(-1)^{r(J)}$ , где  $r(J)$  — число инверсий в перестановке  $J$  из номеров столбцов элементов матрицы, если при этом номера строк записаны в порядке возрастания:

$$\Delta_n = |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_J (-1)^{r(J)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}. \quad (1.7)$$

Здесь сумма берется по всем перестановкам  $J$ .

Проверим, например, что при  $n = 3$  мы получаем введенный ранее определитель третьего порядка (1.4):

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + \\ & + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned}$$

т.е. то же число, что и по формуле (1.4).

Заметим, что с ростом  $n$  резко увеличивается число членов определителя (равное  $n!$ ), поэтому даже для  $n = 4$  использование формулы (1.7) весьма трудоемко (получим 24 слагаемых!).

На практике при вычислении определителей высоких порядков используют другие формулы. Для их рассмотрения необходимо ввести новые понятия.

Пусть дана квадратная матрица  $A$   $n$ -го порядка.

*Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка* называется определитель матрицы  $(n-1)$ -го порядка, полу-

<sup>1</sup> Еще раз обращаем внимание на то, что определитель — это число, характеризующее квадратную матрицу, и его не следует путать с матрицей — таблицей чисел.



ченной из матрицы  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Например, минором элемента  $a_{12}$  матрицы  $A_3$  третьего порядка будет

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица  $n$ -го порядка имеет  $n^2$  миноров  $(n-1)$ -го порядка.

*Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка называется его минор, взятый со знаком  $(-1)^{i+j}$ :*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (1.8)$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца  $(i+j)$  — четное число, и отличается от минора знаком, когда  $(i+j)$  — нечетное число.

Например,  $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$ ;  $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$ .

**Пример 1.9.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы (из примера 1.6):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3. \blacktriangleright$$

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема.

**Теорема Лапласа<sup>1</sup>.** *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения<sup>2</sup>:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is} \quad (1.9)$$

(разложение по элементам  $i$ -й строки;  $i = 1, 2, \dots, n$ );

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{sj}A_{sj} \quad (1.10)$$

(разложение по элементам  $j$ -го столбца;  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

□ Убедимся в справедливости теоремы Лапласа на примере определителя матрицы третьего порядка. Разложим его вначале по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

После преобразований (предоставляем их сделать читателю) нетрудно убедиться в том, что полученное выражение совпадает с определением (1.4). Аналогичный результат получаем при разложении определителя матрицы по любой строке или столбцу. ■

**Пример 1.10.** Вычислить определитель треугольной матрицы<sup>3</sup>

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

<sup>1</sup> Лаплас Пьер Симон (1749—1827) — французский астроном, математик и физик.

<sup>2</sup> Точнее, данная теорема является частным случаем теоремы Лапласа.

<sup>3</sup> Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

*Решение.* Раскладывая по первому столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \\ + 0 + 0 = 5 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 0 = -15. \blacktriangleright$$

На частном примере мы убедились в том, что *определитель треугольной (и, очевидно, диагональной) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Значение теоремы Лапласа состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей  $n$ -го порядка к вычислению более простых определителей  $(n-1)$ -го порядка.

## 1.4. Свойства определителей

**1.** Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.

**2.** Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число  $\lambda$ , то ее определитель умножится на это число  $\lambda$ .

□ Пусть определитель исходной матрицы равен  $\Delta$ . Для определенности первую строку матрицы умножим на  $\lambda$ , получим новый определитель  $\Delta'$ , который разложим по элементам первой строки:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} A_{11} + \lambda a_{12} A_{12} + \dots + \lambda a_{1n} A_{1n} = \\ = \lambda (a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}) = \lambda \Delta. \blacksquare$$

**Замечание.** За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех элементов. Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \\
 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \text{ но} \\
 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**3.** При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:  $|A'| = |A|$ .

**4.** При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

□ Предположим вначале, что переставлены две соседние строки матрицы:  $i$  и  $i+1$ . Разложим определитель исходной матрицы  $\Delta$  по элементам  $i$ -й строки, а определитель новой матрицы (с переставленными строками)  $\Delta'$  — по элементам  $(i+1)$ -й строки. Разложения будут отличаться только знаком, так как в формуле (1.9) для  $\Delta'$  каждое алгебраическое дополнение будет иметь противоположный знак (множители  $(-1)^{i+j}$  сменятся на множители  $(-1)^{i+1+j}$ ), поэтому  $\Delta' = -\Delta$ .

Если переставить не соседние строки, а, скажем,  $i$ -ю и  $(i+k)$ -ю, то такую перестановку можно представить как последовательное смещение  $i$ -й строки на  $k$  строк вниз (при этом каждый раз знак определителя меняется), а  $(i+k)$ -й строки на  $(k-1)$  вверх, что тоже сопровождается  $(k-1)$  изменением знака, т.е. знак поменяется нечетное число  $(2k-1)$  раз, поэтому  $\Delta' = -\Delta$ .

Доказательство для столбцов аналогично. ■

**5.** Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.

□ Действительно, переставим эти строки (столбцы). С одной стороны, определитель не изменится, но, с другой стороны, по свойству 4 он поменяет знак, т.е.  $\Delta = -\Delta$ , откуда  $\Delta = 0$ . ■

**6.** Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

□ Пусть для определенности пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности  $\lambda$ , получаем по свойству 2, что  $\Delta' = \lambda \cdot \Delta$ , где  $\Delta$  имеет две одинаковые строки и по свойству 5 равен нулю. ■

**7.** Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е.

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{js} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (1.11)$$

□ Рассмотрим квадратную матрицу  $A$  и вспомогательную матрицу, полученную из матрицы  $A$  в результате замены  $j$ -й строки на  $i$ -ю:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е. матрица  $\bar{A}$  имеет две одинаковые строки, поэтому согласно свойству 5 ее определитель равен нулю. Вычисляя его разложением по элементам  $j$ -й строки, получаем

$$\bar{A} = \sum_{s=1}^n a_{is} A_{js} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad \blacksquare$$

**Замечание.** Объединяя результат теоремы Лапласа и свойство 7, получаем

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{js} = \begin{cases} |A| & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1.12)$$

**8.** Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

□ Пусть для определенности к элементам  $i$ -й строки матрицы прибавим элементы  $j$ -й строки, умноженные на  $\lambda$  ( $i \neq j$ ). Тогда первая строка матрицы имеет вид:  $[(a_{i1} + \lambda a_{j1}) (a_{i2} + \lambda a_{j2}) \dots (a_{in} + \lambda a_{jn})]$ . Определитель полученной матрицы вычислим разложением по элементам  $i$ -й строки:

$$\Delta' = (a_{i1} + \lambda a_{j1})A_{i1} + (a_{i2} + \lambda a_{j2})A_{i2} + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})A_{in},$$

где  $A_{is}$  — алгебраические дополнения элементов  $i$ -й строки исходной матрицы ( $s = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ). Раскроем скобки и получим после преобразования

$$\Delta' = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is} + \lambda \sum_{s=1}^n a_{js}A_{is} \quad (i \neq j).$$

Используя формулу (1.12), получаем, что первая сумма равна определителю исходной матрицы, а вторая — нулю, т.е.  $\Delta' = \Delta$ . ■

**9.** Сумма произведений произвольных чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$  на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной матрицы заменой элементов этой строки (столбца) на числа  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Свойство вытекает непосредственно из теоремы Лапласа.

**10.** Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:  $|C| = |A| \cdot |B|$ , где  $C = A \cdot B$ ;  $A$  и  $B$  — матрицы  $n$ -го порядка.

**Замечание.** Из свойства 10 следует, что даже если  $AB \neq BA$ , то  $|AB| = |BA|$ .

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисления, особенно для определителей высоких порядков. При вычислении определителей целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1–9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержащую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

**Пример 1.11.** Вычислить определитель четвертого порядка

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

*Решение.* Преобразуем матрицу так, чтобы в третьей строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы третьего столбца на  $(-4)$  и на 2 и прибавим их соответственно к элементам первого и второго столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, находим

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы второй строки (кроме одного). Для этого элементы третьего столбца матрицы, предварительно умножив на  $(-13)$  и на 4, сложим соответственно с элементами первого и второго столбцов, тогда

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем

$$|A_4| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144. \blacktriangleright$$

## 1.5. Обратная матрица

Для каждого числа  $a \neq 0$  существует обратное число  $a^{-1}$  такое, что произведение  $a \cdot a^{-1} = 1$ . Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

**Определение.** Матрица  $A^{-1}$  называется **обратной по отношению к квадратной матрице  $A$** , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \quad (1.13)$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если  $a \neq 0$  является необходимым и достаточным условием существования числа  $a^{-1}$ , то для существования матрицы  $A^{-1}$  таким условием является требование  $|A| \neq 0$ .

Если определитель матрицы отличен от нуля ( $|A| \neq 0$ ), то такая квадратная матрица называется *невыврожденной*, или *неособенной*; в противном случае (при  $|A| = 0$ ) — *вырожденной*, или *особенной*.

**Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы).** Обратная матрица  $A^{-1}$  существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

□ *Необходимость.* Пусть матрица  $A$  имеет обратную  $A^{-1}$ , т.е.  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ . По свойству 10 определителей имеем  $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$ , т.е.  $|A| \neq 0$  и  $|A^{-1}| \neq 0$ .

*Достаточность.* Пусть  $|A| \neq 0$ . Рассмотрим квадратную матрицу  $n$ -го порядка  $\tilde{A}$ , называемую *присоединенной*<sup>1</sup>. Ее элементы являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы  $A'$ , транспонированной к  $A$ :  $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда элементы произведения матриц  $\tilde{A} \cdot A = B$  определяются по правилу умножения матриц:

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^n \tilde{a}_{is} a_{sj} = \sum_{s=1}^n A_{si} \cdot a_{sj} = \begin{cases} |A| & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \text{ (см. формулу (1.12)).}$$

Поэтому матрица  $B$  является диагональной, элементы ее главной диагонали равны определителю исходной матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> В литературе присоединенную матрицу называют также *взаимной*, или *союзной*.



Аналогично доказывается, что произведение  $A$  на  $\tilde{A}$  равно той же матрице  $B$ :  $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = B$ . Отсюда следует, что если в качестве обратной матрицы взять матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \quad (|A| \neq 0), \quad (1.14)$$

то произведения  $A^{-1} \cdot A$  и  $A \cdot A^{-1}$  равны единичной матрице  $E$   $n$ -го порядка:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B = E$ .

Докажем *единственность* обратной матрицы. Предположим, что существуют еще матрицы  $X$  и  $Y$  такие, что  $X \neq A^{-1}$  и  $Y \neq A^{-1}$  (где матрица  $A^{-1}$  получена по формуле (1.14)), и выполняются равенства:  $AX = E$  и  $YA = E$ . Тогда, умножая на  $A^{-1}$  слева обе части первого из этих равенств, получаем  $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot E$ , откуда  $EX = A^{-1} \cdot E$ , т.е.  $X = A^{-1}$ . Аналогично, умножая обе части второго равенства на  $A^{-1}$  справа, получаем  $Y = A^{-1}$ . Единственность доказана. ■

**Алгоритм вычисления обратной матрицы.** 1°. Находим определитель исходной матрицы. Если  $|A| = 0$ , то матрица  $A$  вырожденная и обратной матрицы  $A^{-1}$  не существует. Если  $|A| \neq 0$ , то матрица  $A$  невырожденная и обратная матрица существует.

2°. Находим матрицу  $A'$ , транспонированную к  $A$ .

3°. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы  $A'_{ij} = A_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ) и составляем из них присоединенную матрицу  $A$ :  $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ).

4°. Вычисляем обратную матрицу по формуле (1.14).

5°. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы  $A^{-1}$ , исходя из ее определения:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$  (п. 5° необязателен).

**Пример 1.12.** Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

1°. Определитель матрицы  $|A| = 5 \neq 0$  (см. пример 1.6), т.е. матрица  $A$  невырожденная и обратная матрица  $A^{-1}$  существует.

2°. Находим транспонированную к  $A$  матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3°. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы  $A'$  и составляем из них присоединенную матрицу  $\tilde{A}$ ,

$$\text{учитывая, что } A'_{ij} = A_{ji} : \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ (см. пример 1.6).}$$

4°. Вычисляем обратную матрицу  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

5°. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формуле

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$  (рекомендуем в этом убедиться самому читателю). ►

Можно показать, что любую невырожденную квадратную матрицу  $A$  с помощью отдельных элементарных преобразований<sup>1</sup> *только строк* или *только столбцов* можно привести к единичной матрице  $E$  того же порядка. При этом те же преобразования, совершенные над матрицей  $\tilde{A}$  в том же порядке, приводят ее к обратной матрице  $A^{-1}$ . На этом основан еще один способ нахождения обратной матрицы. Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами  $A$  и  $E$  одновременно, записывая их рядом через черту (см. пример 1.59).

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства.

$$1. |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}. \quad 2. (A^{-1})^{-1} = A. \quad 3. (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$

$$4. (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \quad 5. (A^{-1})' = (A')^{-1}. \quad 6. (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}; \alpha \neq 0.$$

<sup>1</sup> См. с. 52.

## 1.6. Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице  $A$  размера  $m \times n$  вычеркиванием каких-либо строк или столбцов можно вычленить квадратные подматрицы  $k$ -го порядка, где  $k \leq \min(m; n)$ . Определители таких подматриц называются *минорами  $k$ -го порядка матрицы  $A$* . Например, из матрицы  $A_{3 \times 4}$  можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

**Определение.** *Рангом матрицы  $A$*  называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы  $A$  обозначается  $\text{rang } A$ , или  $r(A)$ .

Из определения следует:

а) *ранг матрицы  $A_{m \times n}$  не превосходит меньшего из ее размеров, т.е.  $r(A) \leq \min(m; n)$ ;*

б)  *$r(A) = 0$  тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е.  $A = 0$ ;*

в) *для квадратной матрицы  $n$ -го порядка  $r(A) = n$  тогда и только тогда, когда матрица  $A$  невырожденная.*

**Пример 1.13.** Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Матрица  $A$  имеет четвертый порядок, поэтому  $r(A) \leq 4$ . Однако  $|A| = 0$ , так как матрица  $A$  содержит нулевой столбец, поэтому  $r(A) \leq 3$ . Все подматрицы третьего порядка тоже содержат нулевой столбец и поэтому имеют нулевые определители,  $r(A) \leq 2$ . Все подматрицы второго порядка либо имеют нулевой столбец (второй или четвертый), либо — пропорциональные столбцы (первый и третий), поэтому тоже имеют нулевые определители; таким образом  $r(A) \leq 1$ . Поскольку матрица  $A$  содержит ненулевые элементы, т.е. невырожденные подматрицы первого порядка, то  $r(A) = 1$ . ►

**Пример 1.14.** Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Для матрицы  $A_{3 \times 4}$   $r(A) \leq \min(3; 4) = 3$ .

Проверим, равен ли ранг трем. Для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего четыре, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые,  $r(A) \leq 2$ . Так как существует ненулевой минор второго порядка, на-

пример  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ , то  $r(A) = 2$ . ►

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Назовем **элементарными преобразованиями** матрицы следующие:

- 1) отбрасывание нулевой строки (столбца);
- 2) умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю;
- 3) изменение порядка строк (столбцов);
- 4) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;
- 5) транспонирование.

**Теорема.** Ранг матрицы не изменяется при ее элементарных преобразованиях.

□ При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок

отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется. ■

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна получается из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований. Из теоремы следует, что эквивалентные матрицы имеют одинаковые ранги.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, тогда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица  $A$  называется *ступенчатой*, если она имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

где  $a_{ii} \neq 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $r \leq k$ .

**Замечание.** Условие  $r \leq k$  всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен  $r$ , так как имеется минор  $r$ -го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

**Алгоритм вычисления ранга матрицы** с помощью элементарных преобразований покажем на следующем примере.

**Пример 1.15.** Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

1°. Если  $a_{11} = 0$ , то при перестановке строк или столбцов добиваемся того, что  $a_{11} \neq 0$ . В данном примере поменяем места, например, первую и вторую строки матрицы (см. ниже).

2°. Если  $a_{11} \neq 0$ , то, умножая элементы второй, третьей и четвертой строк на подходящие числа (а именно, на  $-a_{21}/a_{11} = 0$ ,  $-a_{31}/a_{11} = 2$ ,  $-a_{41}/a_{11} = 1$ ) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам второй<sup>1</sup>, третьей и четвертой строк, добьемся того, чтобы все элементы первого столбца (кроме  $a_{11}$ ) равнялись нулю<sup>2</sup>:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \textcircled{1} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-3} \quad \textcircled{-3} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{matrix}$$

3°. Если в полученной матрице  $a_{22} \neq 0$  (у нас  $a_{22} = -1 \neq 0$ ), то, умножая элементы третьей и четвертой строк на подходящие числа (а именно, на  $-a_{32}/a_{22} = -3$ ,  $-a_{42}/a_{22} = -3$ ), добьемся того, чтобы все элементы второго столбца (кроме  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например,

$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы  $r(A) = 2$ . ►

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

- 1)  $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ ; 2)  $r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|$ ;
- 3)  $r(AB) \leq \min\{r(A); r(B)\}$ ; 4)  $r(A' \cdot A) = r(A)$ ;
- 5)  $r(A') = r(A)$ ;
- 6)  $r(AB) = r(A)$ , если  $B$  — квадратная матрица и  $|B| \neq 0$ ;

<sup>1</sup> В данном примере  $a_{21} = 0$ , поэтому вторая строка не меняется.

<sup>2</sup> Знак « $\sim$ » означает равенство рангов матриц.

7)  $r(ABC) = r(B)$ , если  $A$  и  $C$  — квадратные матрицы;  $|A| \neq 0, |C| \neq 0$ ;

8)  $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ , где  $n$  — число столбцов матрицы  $A$  или строк матрицы  $B$ .

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов<sup>1</sup>.

В матрице  $A$  обозначим ее строки следующим образом:

$$e_1 = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n}), e_2 = (a_{21} a_{22} \dots a_{2n}), \dots, e_m = (a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn}).$$

Две строки матрицы называются *равными*, если равны их соответствующие элементы:  $e_k = e_s$ , если  $a_{kj} = a_{sj}, j = 1, 2, \dots, n$ .

Арифметические операции над строками матрицы (умножение строки на число, сложение строк) вводятся как операции, проводимые поэлементно:

$$\begin{aligned} \lambda e_k &= (\lambda a_{k1} \lambda a_{k2} \dots \lambda a_{kn}); \\ e_k + e_s &= [(a_{k1} + a_{s1}) (a_{k2} + a_{s2}) \dots (a_{kn} + a_{sn})]. \end{aligned}$$

Строка  $e_m$  называется *линейной комбинацией* строк  $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$  матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа:

$$e_m = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{m-1} e_{m-1}; \quad (1.16)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$  — любые числа.

Строки матрицы  $e_1, e_2, \dots, e_m$  называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = \mathbf{0}, \quad (1.17)$$

где  $\mathbf{0} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$ .

*Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.*

□ Действительно, пусть для определенности в формуле (1.17)  $\lambda_m \neq 0$ , тогда

$$\begin{aligned} e_m &= (-\lambda_1/\lambda_m) e_1 + (-\lambda_2/\lambda_m) e_2 + \dots + (-\lambda_{m-1}/\lambda_m) e_{m-1}, \text{ или} \\ e_m &= \tilde{\lambda}_1 e_1 + \tilde{\lambda}_2 e_2 + \dots + \tilde{\lambda}_{m-1} e_{m-1}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где  $\tilde{\lambda}_i = (-\lambda_i/\lambda_m); i = 1, 2, \dots, m-1$ .

<sup>1</sup> В дальнейшем материал излагается для строк матрицы, для столбцов матрицы изложение аналогично.

Таким образом, строка  $e_m$  является линейной комбинацией остальных строк. ■

Если линейная комбинация строк (1.17) равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты  $\lambda_i$  равны нулю, т.е.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ , то строки  $e_1, e_2, \dots, e_m$  называются *линейно независимыми*.

**Теорема о ранге матрицы.** *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).*

□ Пусть матрица  $A$  размера  $m \times n$  имеет ранг  $r$  ( $r \leq \min(m; n)$ ). Это означает, что существует отличный от нуля минор  $r$ -го порядка. Всякий ненулевой минор  $r$ -го порядка будем называть *базисным минором*. Пусть для определенности это минор

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда строки матрицы  $e_1, e_2, \dots, e_r$  линейно независимы. Действительно, предположим противное, т.е. одна из этих строк, например  $e_r$ , является линейной комбинацией остальных:

$$e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{r-1} e_{r-1}.$$

Вычтем из элементов  $r$ -й строки элементы первой строки, умноженные на  $\lambda_1$ , элементы второй строки, умноженные на  $\lambda_2$ , и т.д., наконец, элементы  $(r-1)$ -й строки, умноженные на  $\lambda_{r-1}$ . На основании свойства 8 (см. параграф 1.4) при таких преобразованиях матрицы ее определитель  $\Delta$  не изменится, но так как теперь  $r$ -я строка будет состоять из одних нулей, то  $\Delta = 0$  — противоречие, и наше предположение о том, что строки  $e_1, e_2, \dots, e_r$  матрицы линейно зависимы, неверно.

Строки  $e_1, e_2, \dots, e_r$  назовем *базисными*.

Покажем, что любые  $(r+1)$  строки матрицы линейно зависимы, т.е. любая строка выражается через базисные. Рассмотрим минор  $(r+1)$ -го порядка, который получается при



дополнении рассматриваемого минора элементами еще одной строки  $i$  и столбца  $j$ :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Этот минор равен нулю, так как ранг матрицы равен  $r$ , поэтому любой минор более высокого порядка равен нулю.

Раскладывая его по элементам последнего (добавленного) столбца, получаем  $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0$ , где последнее алгебраическое дополнение  $A_{ij}$  совпадает с базисным минором  $\Delta$ , поэтому оно отлично от нуля, т.е.  $A_{ij} \neq 0$ .

Разделив последнее равенство на  $A_{ij}$ , можем выразить элемент  $a_{ij}$  как линейную комбинацию:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^r \lambda_s a_{sj}, \quad (1.19)$$

где  $\lambda_s = a_{sj} / A_{ij}$ .

Фиксируем значение  $i$  ( $i > r$ ) и получаем, что для любого  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) элементы  $i$ -й строки  $e_i$  линейно выражаются через элементы строк  $e_1, e_2, \dots, e_r$ , т.е.  $i$ -я строка есть

линейная комбинация базисных:  $e_i = \sum_{s=1}^r \lambda_s e_{sj}$ . ■

Теорема о ранге матрицы играет принципиальную роль в матричном анализе, в частности, при исследовании систем линейных уравнений.

## ПРАКТИКУМ

### 1.7. Действия с матрицами

**1.16.** Найти матрицу  $C = A' - 3B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу  $C = -5A + 2B$ :

1.17.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

1.18.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти произведения матриц:

1.19.  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$  1.20.  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

1.21.  $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

1.22.  $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти те из произведений матриц  $AB$  и  $BA$ , которые существуют:

1.23.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.24.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

1.25.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.26.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$

1.27. Вычислить матрицу  $D = (AB)' - C^2$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**1.28.** Вычислить матрицу  $D = ABC - 3E$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; C = (2 \ 0 \ 5); E — \text{единичная матрица.}$$

**1.29.** Вычислить  $A^3$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Найти матрицу  $A^n$  и ее след:

**1.30.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; n = 3.$  **1.31.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; n = 3.$

**1.32.**  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; n = 5.$

Найти следы матриц:

**1.33.**  $C = AB$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

**1.34.**  $C = AB$  и  $D = BA$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Найти значение многочлена  $f(x)$  от матрицы  $A$ :

**1.35.**  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5;$  **1.36.**  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5;$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.8. Определители квадратных матриц

**1.37.** Вычислить определители матрицы  $A$ :

а)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix};$  б)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

*Решение.*

а) По формуле (1.7)  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 6 = -28$ .

б) Определитель вычисляется по формуле (1.4). Запомнить эту формулу не следует; достаточно применить правило треугольников, согласно которому три произведения элементов, показанных на левой схеме рис. 1.1, берутся со знаком «+», а три других произведения элементов, показанных на правой схеме рис. 1.1, — со знаком «-»:

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot \times 5 = -15. \blacktriangleright$$

**1.38.** Вычислить тот же определитель, приведенный в задаче 1.37, б, используя его разложение по элементам: а) первой строки; б) второго столбца.

*Решение.*

а) Находим алгебраические дополнения элементов первой строки по формуле (1.8):

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = \\ &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15. \end{aligned}$$

Теперь по теореме Лапласа (1.9)

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5) + 0 \cdot 15 = -15;$$

б) Находим алгебраические дополнения элементов второго столбца:

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = \\ &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Теперь по формуле (1.10)

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -15. \blacktriangleright$$

**1.39.** Вычислить определитель матрицы четвертого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* С помощью эквивалентных преобразований приведем матрицу  $A$  к треугольному виду. Если возможно, перестановкой строк (столбцов) добиваемся того, чтобы элемент  $a_{11} = 1$ . В данном случае достаточно поменять местами первый и третий столбцы; при этом меняется знак определителя матрицы  $A$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы первой строки на числа  $(-a_{i1})$ ;  $i = 2, 3, 4$ , т.е. в данном случае на числа 1,  $(-2)$ ,  $(-1)$ , и прибавляя их соответственно к элементам второй, третьей и четвертой строк, добиваемся того, чтобы все элементы первого столбца (кроме  $a_{11}$ ) равнялись нулю:

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{-2} \quad \textcircled{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}.$$

Далее, если возможно, перестановкой строк (столбцов) добиваемся, чтобы новый элемент  $a_{22} = 1$ . В данном случае это возможно, если переставить вторую и третью строки; при этом меняется знак определителя. Умножая элементы второй строки полученной матрицы на числа  $(-a_{i2})$  ( $i = 3, 4$ ), в данном случае на числа  $(-2)$  и 1, добиваемся того, чтобы все элементы второго столбца (кроме  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ) равнялись нулю:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{-2} \quad \textcircled{1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \textcircled{1} \\ \leftarrow \end{array}.$$

Для получения треугольной матрицы в данном случае достаточно прибавить элементы третьей строки полученной матрицы к элементам четвертой. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9. \blacktriangleright$$

Вычислить определители второго порядка:

$$\mathbf{1.40.} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{1.41.} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{1.42.} \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители третьего порядка:

$$\mathbf{1.43.} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{1.44.} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{1.45.} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{1.46.} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Доказать тождества:

$$\mathbf{1.47.} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

$$1.48. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Решить уравнения:

$$1.49. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0. \quad 1.50. \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислить определитель:

$$1.51. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad 1.52. \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ b & 3 & 1 & 4 \\ c & 0 & 1 & 2 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам  
третьей строки.

разлагая его по элементам  
первого столбца.

Вычислить определители четвертого порядка:

$$1.53. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \quad 1.54. \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.55. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}. \quad 1.56. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$1.57. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**1.58.** Вычислить определитель пятого порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

### 1.9. Обратная матрица

В примере 1.12 обратная матрица была найдена по формуле (1.14) с помощью присоединенной матрицы. Рассмотрим еще один метод нахождения обратной матрицы — с помощью элементарных преобразований.

**1.59.** Найти матрицу, обратную к матрице  $A$ , преобразуя исходную матрицу в единичную  $E$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Определитель матрицы  $|A| = -20 \neq 0$ , следовательно, матрица  $A$  имеет обратную. Матрицу  $A$  можно привести к единичной  $E$  с помощью элементарных преобразований только строк или только столбцов; при этом единичная матрица, подвергаемая тем же преобразованиям, перейдет в матрицу  $A^{-1}$ . Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами  $A$  и  $E$  одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту в виде объединенной матрицы

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Поменяем местами первый и второй столбцы.

Затем к элементам третьего столбца прибавим элементы первого, а к элементам второго — первого, умноженные на  $(-2)$ . В результате получим



$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

К элементам первого столбца прибавим элементы второго, умноженные на  $(-2)$ , а к элементам третьего столбца — умноженные на  $(-6)$ . Далее в полученной матрице к элементам первого и второго столбцов прибавляем элементы третьего, умноженные на  $(-1)$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -15 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Слева получили единичную матрицу. Найденная справа от черты квадратная матрица является обратной к исходной матрице  $A$ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$  ►

**1.60.** При каких значениях  $\lambda$  матрица  $A$  не имеет обратной:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.61.** Вычислить матрицу  $B = 11(A^{-1})' + A'$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу  $A^{-1}$  двумя способами: с помощью присоединенной матрицы и элементарных преобразований:

$$\mathbf{1.62.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.63.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.64.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.65.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.66.} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.67.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

### 1.10. Ранг матрицы

**1.68.** Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Матрица  $A$  имеет размер  $4 \times 3$ , следовательно,  $r(A) \leq 3$ . С помощью элементарных преобразований, не меняющих ранг матрицы, приведем матрицу  $A$  к ступенчатому виду.

1. Транспонируем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-1} & \textcircled{-1} \\ \leftarrow & \\ \leftarrow & \end{matrix}.$$

2. Умножим элементы первой строки на  $(-1)$ , сложим ее со второй и третьей строками матрицы. В новой матрице поменяем местами вторую и третью строки и прибавим к третьей строке вторую, умноженную на  $(-3)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу размера  $3 \times 4$ , у которой три ненулевых элемента на главной диагонали, следовательно,  $r(A) = 3$ . Эта матрица имеет ненулевой минор

третьего порядка, например  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 5$ . ►

**1.69.** Выяснить, при каком значении параметра  $a$  матрица  $A$  имеет три линейно независимые строки, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Матрица  $A$  имеет три линейно независимые строки, если ее ранг равен трем, т.е.  $|A| \neq 0$ .

Вычислим определитель матрицы  $A$  по правилу треугольников:  $|A| = -a - 6 + 8 = 2 - a$ ;  $|A| \neq 0$ , откуда  $a \neq 2$ , т.е. при всех значениях  $a$ , кроме  $a = 2$ , все строки матрицы линейно независимы. ►

**1.70.** Определить максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* С помощью элементарных преобразований, не меняющих ранга матрицы, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{-2} & \textcircled{-3} \\ \text{←} & \text{←} \end{smallmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{-1} \\ \text{←} \end{smallmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу, у которой существует ненулевой минор третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0, \text{ следовательно, ранг матрицы равен}$$

трем, и исходная матрица имеет три линейно независимые строки (или столбца). ►

Найти ранги матриц:

$$1.71. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad 1.72. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.73. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.74. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.75. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}. \quad 1.76. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.77. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \quad 1.78. A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти максимальное число линейно независимых строк матриц:

$$1.79. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}. \quad 1.80. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$1.81. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}. \quad 1.82. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & -6 & 1 \\ 7 & -2 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$1.83. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, являются ли строки матрицы линейно независимыми:

$$1.84. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad 1.85. \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найти максимальное число линейно независимых столбцов матриц:

$$1.86. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \quad 1.87. A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

### 1.11. Задачи с экономическим содержанием

Понятие матрицы часто используется в практической деятельности. Например, данные о выпуске продукции нескольких видов в каждом квартале года или нормы затрат нескольких видов ресурсов на производство продукции нескольких типов и т.д. удобно записывать в виде матриц.

**1.88.** В некоторой отрасли  $m$  заводов выпускают  $n$  видов продукции. Матрица  $A_{m \times n}$  задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица  $B_{m \times n}$  — во втором;  $(a_{ij}, b_{ij})$  — объемы продукции  $j$ -го типа на  $i$ -м заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) объемы продукции; б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам; в) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в долларах), если  $\lambda$  — курс доллара по отношению к рублю.

*Решение.*

а) Объемы продукции за полугодие определяются суммой матриц  $A$  и  $B$ , т.е.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

где  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  — объем продукции  $j$ -го типа, произведенный за полугодие  $i$ -м заводом.

б) Прирост во втором квартале по сравнению с первым определяется разностью матриц

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные элементы  $d_{ij}$  матрицы  $D$  показывают, что на данном заводе  $i$  объем производства  $j$ -го продукта уменьшился; положительные  $d_{ij}$  — увеличился; нулевые  $d_{ij}$  — не изменился.

в) Произведение  $\lambda C = \lambda(A + B)$  дает выражение стоимости объемов производства за квартал в долларах по каждому заводу и каждому предприятию (соответствующая матрица здесь не выписана). ►

**1.89.** Предприятие производит  $n$  типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей  $A_{1 \times n}$ . Цена реализации единицы  $i$ -го типа продукции в  $j$ -м регионе задана матрицей  $B_{n \times k}$ , где  $k$  — число регионов, в которых реализуется продукция.

Найти матрицу выручки  $C$  по регионам.

Пусть  $A_{1 \times 3} = (100 \ 200 \ 100)$ ;

$$B_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Выручка определяется матрицей  $C_{1 \times k} = A_{1 \times n} \times B_{n \times k}$ , причем  $c_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot b_{ij}$  — это выручка предприятия в  $j$ -м регионе:

$$C = (100 \ 200 \ 100) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (600 \ 1300 \ 700 \ 1300). \text{ ►}$$

**1.90.** Предприятие производит  $n$  типов продукции, используя  $m$  видов ресурсов. Нормы затрат ресурса  $i$ -го вида на производство единицы продукции  $j$ -го типа заданы матрицей затрат  $A_{m \times n}$ . Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа  $x_j$ , записанное матрицей  $X_{n \times 1}$ .

Определить  $S$  — матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени. Дано

$$A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$$

*Решение.* Матрица полных затрат ресурсов  $S$  определяется как произведение матриц  $A$  и  $X$ , т.е.  $S = AX$ .

Согласно условию данной задачи

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 14 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix},$$

т.е. за данный период времени будет израсходовано 930 ед. ресурса первого вида, 960 ед. ресурса второго вида, 450 ед. ресурса третьего вида и 630 ед. ресурса четвертого вида. ►

**1.91.** Дополним условия предыдущей задачи значениями стоимости каждого вида ресурса в расчете на единицу. Они задаются матрицей  $P_{1 \times m}$ . Найти полную стоимость всех затраченных за данный отрезок времени ресурсов, если  $P = (10 \ 20 \ 10 \ 10)$ .

*Решение.* Стоимость всех затраченных ресурсов  $C$  определяется как произведение матриц  $P$  и  $S$ , т.е.  $C = PS$ , или  $C = PAX$ .

$$\text{В данном случае } C = (10 \ 20 \ 10 \ 10) \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix} = 39\,900 \text{ ден. ед.} \quad \blacktriangleright$$

**1.92.** Завод производит двигатели, которые либо сразу могут потребовать дополнительной регулировки (в 40% случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60% случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, через месяц потребуют дополнительной регулировки в 65% случаев, а в 35% будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, через месяц потребуют ее в 20% случаев, а в 80% будут продолжать хорошо работать.

Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через два и три месяца после выпуска соответственно?

*Решение.* В момент после выпуска доля хороших двигателей составляет 0,6, а требующих регулировки — 0,4. Через месяц доля хороших двигателей составит:  $0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,35 = 0,62$ , а требующих регулировки:  $0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,65 = 0,38$ . Введем строку состояния  $X_t$  в момент  $t$ ;  $X_t =$



$= (x_{1t}; x_{2t})$ , где  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  — доли двигателей в момент  $t$  соответственно хороших и требующих регулировки.

Матрица перехода  $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , где  $a_{ij}$  — доля двигателей, которые в настоящее время находятся в состоянии  $i$  (1 — «хороший», 2 — «требует регулировки»), а через месяц — в состоянии  $j$ .

Очевидно, что для матрицы перехода сумма элементов каждой строки равна единице, все элементы ее неотрицательны.

$$\text{Очевидно, что } X_0 = \underset{1 \times 2}{(0,6 \quad 0,4)}, \quad A = \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}}.$$

$$\text{Тогда через месяц } X_1 = \underset{1 \times 2}{X_0} \cdot \underset{1 \times 2}{A} = \underset{1 \times 2}{(0,6 \quad 0,4)} \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}} = (0,62; 0,38);$$

$$\text{через два месяца } X_2 = X_1 A = X_0 A A = X_0 A^2;$$

$$\text{через три месяца } X_3 = X_2 A = X_0 A^3.$$

Найдем матрицы  $A^2$  и  $A^3$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,29 \\ 0,5075 & 0,4925 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,29 \\ 0,5075 & 0,4925 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,58 & 0,42 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если  $A$  — матрица перехода, то  $A^t$  — тоже матрица перехода при любом натуральном  $t$ . Теперь найдем

$$X_2 = (0,6 \quad 0,4) \begin{pmatrix} 0,71 & 0,29 \\ 0,5075 & 0,4925 \end{pmatrix} = (0,629 \quad 0,371);$$

$$X_3 = (0,6 \quad 0,4) \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,58 & 0,42 \end{pmatrix} = (0,634 \quad 0,366).$$

Очевидно, что  $X_t = X_0 A^t$ . ►

**1.93.** Три завода выпускают четыре вида продукции. Необходимо найти: а) матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесечных выпусков  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ ;

б) матрицы приростов выпуска продукции за каждый месяц  $B_1$  и  $B_2$  и проанализировать результаты. Дано

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

**1.94.** Найти  $C$  — матрицу выручки по регионам по условиям задачи 1.89, если

$$A = (10 \quad 40 \quad 10 \quad 20); \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить, в каком из трех регионов наиболее выгодна реализация товара.

**1.95.** Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица  $B = (b_{ij}) =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ задает цены реализации единицы мебели}$$

$i$ -го типа в  $j$ -м регионе. Найти выручку предприятия в каждом регионе, если реализация мебели за месяц (по видам)

$$\text{задана матрицей } A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

**1.96.** Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу

$$\text{продукции каждого вида заданы матрицей } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей  $B = (10 \quad 15)$ . Каковы общие затраты предприятия на производство 100; 200 и 150 ед. продукции соответственно первого, второго и третьего видов?

**1.97.** Используя условия задач 1.90, 1.91, определить:  
1) полные затраты ресурсов трех видов на производство

месячной продукции, если заданы нормы затрат матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и объем выпуска каждого из двух типов продук-}$$

ции  $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ ; 2) стоимость всех затраченных ресурсов, если задана стоимость единицы каждого ресурса  $P = (50 \ 10 \ 20)$ .

**1.98.** Продавец может закупить от одного до пяти билетов на спектакль по цене 100 руб. и продать перед его началом по 200 руб. каждый. Составить матрицу выручки продавца в зависимости от количества купленных им билетов (строка матрицы) и результатов продажи (столбец матрицы).

**1.99.** В ремонтную мастерскую поступают телефонные аппараты, из которых 70% требуют малого ремонта, 20% — среднего, 10% — сложного. Статистически установлено, что через год из аппаратов, прошедших малый ремонт, 10% требуют малого ремонта, 60% — среднего, 30% — сложного; из аппаратов, прошедших средний ремонт, — 20% малого, 50% — среднего, 30% — сложного; из аппаратов, прошедших сложный ремонт, — 60% малого, 40% — среднего. Найти доли из отремонтированных в начале года аппаратов, которые будут требовать ремонта того или иного вида через один, два, три года.

### Контрольные задания по главе 1 «Матрицы и определители»

№	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3
1	Два различных по качеству вида растительного масла продаются в трех магазинах. Матрица $A$ — объемы продаж этих продуктов в магазинах в первом квартале, матрица $B$ — во втором квартале (тыс. руб.). Определить: 1) объем продаж за два квартала; 2) прирост продаж во втором квартале по сравнению с первым:		
	$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

№	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3
2	Найти матрицу $C^{-1}$ , обратную к матрице $C = AB' + 2E$ :		
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3	Вычислить определитель:		
	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ -3 & -10 & -3 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & -3 & 8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$
4	Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы:		
	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 2 & -8 & -11 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 12 & 15 & 6 \\ 1 & -8 & -9 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$
5	Предприятие производит три типа продукции, используя два вида ресурсов. Норма затрат ресурсов $i$ -го вида на производство единицы продукции $j$ -го типа задана матрицей затрат $A$ , выпуск продукции за квартал — матрицей $X$ , стоимость единицы каждого вида ресурсов задана матрицей $P$ . Найти: 1) матрицу $S$ полных затрат ресурсов каждого вида; 2) полную стоимость всех затраченных ресурсов:		
	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$ $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix};$ $P = (5; 2)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$ $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix};$ $P = (2; 4)$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ $X = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix};$ $P = (1; 3)$

№	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3
6	<p>Завод производит швейные машины. Каждая машина может находиться в одном из двух состояний: 1) работает хорошо; 2) требует регулировки. В момент изготовления <math>p(\%)</math> машин работают хорошо, <math>(1-p)(\%)</math> требуют регулировки. Статистические исследования показали, что из тех машин, которые сегодня работают хорошо, через месяц 70% будут работать хорошо, а 30% потребуют регулировки. Среди тех машин, которые сегодня требуют регулировки, через месяц 60% будут работать хорошо, 40% потребуют регулировки. Каковы доли машин, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через месяц после их изготовления?</p>		
	$p = 80\%$	$p = 50\%$	$p = 20\%$

### Тест 1

1. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Выяснить, какие из следующих операций можно выполнить:

- 1)  $A + B$ ; 2)  $A' + B$ ; 3)  $A + B'$ ; 4)  $AB$ ; 5)  $BA$ ; 6)  $A'B$ ; 7)  $AB'$ ; 8)  $A'B'$ ; 9)  $B'A'$ .

2. Даны матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Найти  $B'A'AB$ .

3. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу  $C = A^5$ .

Ответ:  $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , где  $a = \dots$ ;  $b = \dots$ ;  $c = \dots$ ;  $d = \dots$ .

4. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти определитель  $|B|$  матрицы  $B = A'A$ .

5. Выяснить, какие из приведенных ниже матриц имеют обратные:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. При каком значении  $a$  матрица  $D = A^2 + (C^{-1}B^{-1})^{-1}$  будет равна матрице  $BC$ , где  $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ a & -6 \end{pmatrix}$ ?

7. Найти след  $\text{tr } C$  матрицы  $C = (AB)' - B'A' + 3E$ ,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Расположить матрицы в порядке убывания их рангов:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Сколько линейно независимых строк имеет матрица  $C = (BA)' + A'B' - D$ ,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}?$$

10. Предприятие выпускает три вида продукции, используя два вида сырья, нормы расходов сырья на единицу продукции задаются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определить денежные расходы предприятия на осуществление выпуска товаров, задаваемого матрицей

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ если стоимость единицы каждого вида сырья}$$

выражается матрицей  $P = (2; 3)$ .

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

## 2.1. Основные понятия и определения

[illegible]

<sup>1</sup> В линейной алгебре обычно обозначают переменные одной буквой с соответствующими индексами, т.е.  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , вместо принятых в школе обозначений  $x, y, z, \dots$ , которые в данном случае не очень удобны.

В более краткой форме с помощью *знаков суммирования* систему можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (2.2)$$

*Решением системы* (2.1) называется такая совокупность  $n$  чисел ( $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ ), при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если решений больше одного. Например, система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases} \quad \text{совместная и определенная, так как имеет}$$

единственное решение  $(10; 0)$ ; система  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$  несов-

местная; система уравнений  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$  совместная и

неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений ( $x_1 = c, x_2 = 10 - 2c$ ), где  $c$  — любое число.

Две системы уравнений называются *равносильными*, или *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений. С помощью элементарных преобразований системы уравнений, рассмотренных в гл. 1 применительно к матрицам (например, умножение обеих частей уравнений на числа, не равные нулю; сложение уравнений системы), получается система (2.1), равносильная заданной.

Запишем систему (2.1) в матричной форме. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где  $A$  — *матрица коэффициентов при переменных*, или *матрица системы*;  $X$  — *матрица-столбец переменных*;  $B$  — *матрица-столбец свободных членов*.



$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$
$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = B \text{ или } \sum_{j=1}^n A_jx_j = B.$$

<sup>1</sup> Определение вектора дано в гл. 3.

ратной, а ее определитель  $\Delta = |A|$  называется *определителем системы*.

Рассмотрим решение **системы двух уравнений** с двумя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (2.4)$$

в которой хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля.

Для решения этой системы исключим переменную  $x_2$ , умножив первое уравнение на  $a_{22}$ , второе — на  $(-a_{12})$  и сложив их. Затем исключим переменную  $x_1$ , умножив первое уравнение на  $(-a_{21})$ , второе — на  $a_{11}$  и также сложив их. В результате получим систему

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Выражение в скобках есть определитель системы

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

тогда система (2.5) примет вид

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Из полученной системы следует, что если определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то система (2.4) имеет единственное решение, определяемое по формулам:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ,  $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ .

Если  $\Delta = 0$ , а  $\Delta_1 \neq 0$  (или  $\Delta_2 \neq 0$ ), то система (2.4) несовместная, так как в этом случае она приводится к виду

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_1, \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases}$$

Если  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , то система (2.4) неопределенная и имеет бесконечное множество решений, так как в этом случае она приводится к виду: 
$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0, \\ 0 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$$

Для получения решения системы (2.1) при  $m = n$  в **общем виде** предположим, что квадратная матрица системы  $A_{n \times n}$  невырожденная, т.е. ее определитель  $|A| \neq 0$ . В этом случае существует обратная матрица  $A^{-1}$ .

Умножая *слева* обе части матричного равенства (2.3) на матрицу  $A^{-1}$ , получаем  $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ . Так как  $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$ , то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \quad (2.7)$$

**Теорема Крамера<sup>1</sup>.** Пусть  $\Delta$  — определитель матрицы системы  $A$ , а  $\Delta_j$  — определитель матрицы, получаемой из матрицы  $A$  заменой  $j$ -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (2.8)$$

Формулы (2.8) получили название *формул Крамера*.

□ В соответствии с формулой (1.14) обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A},$$

где  $\tilde{A}$  — матрица, присоединенная к матрице  $A$ . Так как элементы матрицы  $\tilde{A}$  есть алгебраические дополнения элементов матрицы  $A'$ , транспонированной к  $A$ , то запишем равенство (2.7) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> Крамер Габриель (1704–1752) — швейцарский математик.

Учитывая, что  $|A| = \Delta$ , получаем после умножения матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что для любого  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

$$x_j = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}).$$

На основании свойства 9 определителей (см. параграф 1.4)  $b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} = \Delta_j$ , где  $\Delta_j$  — определитель матрицы, полученной из матрицы  $A$  заменой  $j$ -го столбца ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) столбцом свободных членов. Следовательно,

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}. \blacksquare$$

Заметим, что фактически формулы Крамера были получены нами в частном случае при решении системы (2.4) двух уравнений ( $n = 2$ ) с двумя переменными.

**Пример 2.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8: \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

*Решение.*

а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система будет иметь вид:  $AX = B$ . Найдем определитель  $|A| = 5$  (см. пример 1.10). Так как  $|A| \neq 0$ , то матрица  $A$  невырожденная, и существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Матрицу  $A^{-1}$  находим по алгоритму, приведенному в параграфе 1.5. Получим (см. пример 1.10)

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь по формуле (2.7) определим

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

б) Найдем определитель системы  $\Delta = |A| = 5$  (см. п. «а» решения). Так как  $\Delta \neq 0$ , то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , полученных из матрицы  $A$  заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

(рекомендуем читателю провести вычисления самостоятельно).

Теперь по формулам Крамера (2.8) определяем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

В конце решения системы (любым способом) рекомендуем сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы, и убедиться в том, что они обращаются в верные равенства. ►

Существенным недостатком решения систем  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными по формулам Крамера и методом обратной матрицы является их большая трудоемкость, связанная с вычислением определителей и нахождением обратной матрицы. Поэтому рассмотренные методы представляют, скорее, теоретический интерес и на практике не





Переход системы (2.1) к равносильной ей системе (2.10) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (2.10) — *обратным ходом*.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя их не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right), \quad (2.11)$$

называемую *расширенной матрицей системы* (2.1), ибо в нее, кроме матрицы системы  $A$ , дополнительно включен столбец свободных членов  $B$ .

**Пример 2.2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

*Решение.* Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{(-2)} \\ \xleftarrow{(-3)} \\ \xleftarrow{(-2)} \end{array}.$$

*Шаг 1.* Так как  $a_{11} = 1 \neq 0$ , то, умножая первую строку матрицы на числа  $(-2)$ ,  $(-3)$ ,  $(-2)$  и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключаем переменную  $x_1$  из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице  $a_{22}^{(1)} = 0$ , поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & \boxed{-4} & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{(-7/4)} \end{array}.$$



*Шаг 2.* Так как теперь  $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$ , то, умножая вторую строку<sup>1</sup> на  $(-7/4)$  и прибавляя полученную строку к четвертой, исключаем переменную  $x_2$  из всех строк, начиная с третьей:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{2} & -9 & \frac{9}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\left( \frac{27}{16} \right)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right).$$

*Шаг 3.* Учитывая, что  $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$ , умножаем третью строку на  $13,5/8 = 27/16$  и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключаем из нее переменную  $x_3$ . Получаем (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6, \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{array} \right.$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения  $x_4 = -2$ ; из третьего —  $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6 + 2}{-8} = -1$ ;

из второго —  $x_2 = \frac{-14 - 8x_3 + 10x_4}{-4} = \frac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$

и из первого уравнения —  $x_1 = 6 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 6 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 1$ , т.е. решение системы  $(1; 2; -1; -2)$ .

**Замечание.** Обратный ход метода Гаусса можно также провести с расширенной матрицей полученной системы. Для этого данную матрицу приводят к диагональному виду, что позволяет осуществить полное выделение переменных, удобное для их нахождения.

<sup>1</sup> Заметим, что умножения строк матрицы на дробные числа, неудобные для последующих вычислений, можно избежать. Так, если в качестве четвертой строки последней матрицы взять третью строку предыдущей матрицы, умноженную на 27, плюс четвертую строку, умноженную на 16, то четвертая строка последней матрицы не будет содержать дробных чисел:  $(0 \ 0 \ 0 \ -117 \mid 234)$ .

Если на прямом ходе с помощью первой, второй и т.д. строки мы добивались получения нулевых элементов *ниже* главной диагонали, то на обратном ходе с помощью последней, предпоследней и т.д. строки добиваемся получения нулевых элементов *выше* главной диагонали матрицы.

Преобразуем расширенную матрицу системы, полученную в конце прямого хода, в которой последнюю строку умножим на  $\frac{16}{117}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & | & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & | & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & | & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{8} \\ \textcircled{-2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & -4 & -10 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{-\frac{5}{4}} \\ \textcircled{\frac{3}{8}} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & \boxed{-4} & 0 & 0 & | & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{\frac{1}{2}} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & | & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

На основе последней матрицы составляем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1 & = 1, \\ -4x_2 & = -8, \\ -8x_3 & = 8, \\ -x_4 & = 2 \end{cases}$$

т.е. решение системы  $(1; 2; -1; -2)$ . ►

**Пример 2.3.** Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

*Решение.* Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво, так как в результате преобразований получено неверное равенство:  $0 = -1$ , следовательно, данная система несовместная. ►

## 2.4. Система $m$ линейных уравнений с $n$ переменными

Ранее было установлено, что ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (см. параграф 1.6), поэтому если строки расширенной матрицы  $(A|B)$ , т.е. уравнения системы (2.1), линейно независимы, то ранг матрицы  $(A|B)$  равен числу ее уравнений, т.е.  $r = m$ , если уравнения линейно зависимы, то  $r < m$ .

Вопрос о разрешимости системы (2.1) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

**Теорема Кронекера — Капелли**<sup>1</sup>. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

□ Не проводя строгого доказательства теоремы, поясним его. В процессе преобразования системы уравнений (2.1) к виду системы (2.10), т.е. при элементарных преобразованиях матрицы  $A$  системы и расширенной матрицы  $(A|B)$  их ранги не изменяются. Ранее (см. параграф 2.3) было установлено, что система (2.10) совместна тогда и только тогда, когда ее свободные члены  $b_{r+1}^{(r-1)}, \dots, b_m^{(r-1)}$  равны нулю. В этом случае, как нетрудно проверить, ранг матрицы и ранг расширенной матрицы системы (2.10) так же, как и данной системы (2.1), совпадают (оба равны  $r$ ). ■

<sup>1</sup> Кронекер Леопольд (1823—1891) — немецкий математик; Капелли Альфредо (1855—1910) — итальянский математик.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие **теоремы**.

**1.** Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е.  $r = n$ , то система (2.1) имеет единственное решение.

**2.** Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е.  $r < n$ , то система (2.1) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Результаты исследования системы (2.1) приведем в виде схемы (рис. 2.1).

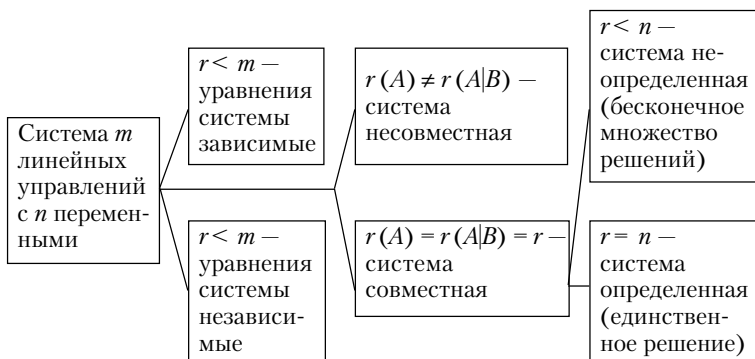


Рис. 2.1

Пусть  $r < n$ ;  $r$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_r$  называются *основными*, или *базисными*, если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. *базисный минор*) отличен от нуля. Остальные  $n - r$  называются *неосновными*, или *свободными*.

Решение системы (2.1), в котором все  $n - r$  неосновных переменных равны нулю, называется *базисным*.

Так как каждому разбиению переменных на основные и неосновные соответствует одно базисное решение, а число способов разбиения не превосходит числа сочетаний<sup>1</sup>, то и базисных решений имеется не более  $C_n^r$ . Таким образом, *совместная система  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными*

<sup>1</sup> Сочетаниями из  $n$  элементов по  $r$  называются комбинации (соединения) из  $n$  элементов по  $r$ , отличающиеся только составом элементов. Число

$C_n^r$  вычисляется по следующей формуле:  $C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r}$ .

ми ( $m < n$ ) имеет бесконечное множество решений, среди которых базисных решений конечное число, не превосходящее  $C_n^r$ , где  $r \leq m$ .

Приведенная на рис. 2.1 схема не означает, что для решения системы (2.1) в общем случае необходимо вычислять отдельно, а затем сравнивать ранги матрицы системы  $A$  и расширенной матрицы  $(A|B)$ . Достаточно сразу применить метод Гаусса.

*Метод Гаусса* по сравнению с другими методами (в частности, приведенными в параграфе 2.2) имеет следующие достоинства:

- значительно менее трудоемкий<sup>1</sup>;
- позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решения (единственное или бесконечное множество);
- дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений — ранг матрицы системы.

**Пример 2.4.** С помощью метода Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

*Решение.* Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при  $x_1$  равен единице):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}, \text{ т.е. ранг матрицы системы } r = 2.$$

<sup>1</sup> Например, при решении системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными по формулам Крамера необходимо выполнить порядка  $n!$  арифметических операций, что при достаточно больших  $n$  затруднительно (или невозможно) даже для современных ЭВМ. В то же время общее число операций при решении тех же систем методом Гаусса значительно меньше и составляет порядка  $n^3$  операций.

Оставляем в левой части переменные  $x_1, x_2$ , которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т.е.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ ). Остальные неосновные переменные  $x_3, x_4$  переносим в правые части уравнений. В результате получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4, \\ -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4, \end{cases}$$

откуда

$$x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4;$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения  $x_3 = c_1, x_4 = c_2$  находим бесконечное множество решений системы, т.е. *общее решение* системы

$$\left( x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2; \quad x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2; \quad x_3 = c_1; \quad x_4 = c_2 \right). \blacktriangleright$$

**Замечание.** В качестве основных переменных можно было взять другие их группы с отличным от нуля базисным минором (см. ниже пример 2.5). Для каждой такой группы получится «свое» общее решение, но все общие решения равносильны в том смысле, что они определяют равные бесконечные множества *частных решений*, получаемых из общего при фиксированных значениях неосновных переменных.

**Пример 2.5.** Найти все базисные решения системы, приведенной в примере 2.4.

*Решение.* Ранг матрицы системы  $r = 2$  (см. пример 2.4), следовательно, одно из уравнений системы, например третье, можно отбросить.

Общее число групп основных переменных не более чем<sup>1</sup>  $C_n^r = C_6^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ , поэтому возможны следующие

<sup>1</sup> См. сноску на с. 92.

группы основных переменных:  $x_1, x_2$ ;  $x_1, x_3$ ;  $x_1, x_4$ ;  $x_2, x_3$ ;  $x_2, x_4$ ;  $x_3, x_4$ .

Выясним, могут ли переменные  $x_1, x_2$  быть основными. Так как определитель матрицы из коэффициентов при

этих переменных, т.е. базисный минор  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ , то  $x_1,$

$x_2$  могут быть основными переменными. Рассуждая аналогично, находим, что из всех возможных групп основных переменных только переменные  $x_2, x_3$  не могут быть основными, ибо  $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ .

Найдем первое базисное решение, взяв в качестве основных переменных  $x_1, x_2$ , а неосновных —  $x_3, x_4$ . Приравняв неосновные переменные нулю, т.е.  $x_3 = x_4 = 0$ , получим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 2x_2 = -6, \end{cases}$$

откуда  $x_1 = 4/5$ ;  $x_2 = -17/5$ , т.е. первое базисное решение будет  $(4/5; -17/5; 0; 0)$ .

Если взять за основные переменные  $x_1, x_3$  и приравнять нулю соответствующие неосновные переменные  $x_2, x_4$ , т.е.  $x_2 = x_4 = 0$ , то получим второе базисное решение  $(4/5; 0; 17/5; 0)$ . Аналогично находятся и остальные базисные решения  $(9/7; 0; 0; -17/7)$ ,  $(0; -9; 0; 4)$  и  $(0; 0; 9; 4)$ . ►

**Замечание.** Все базисные переменные системы можно было найти из общего решения, полученного в примере 2.4, приравнявая соответствующие переменные нулю. Например, при  $x_3 = c_1 = 0$ ,  $x_4 = c_2 = 0$ ,  $x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2 = \frac{4}{5}$ ,  $x_2 = -\frac{17}{5} +$

$+ c_1 - \frac{7}{5}c_2 = -\frac{17}{5}$  получаем базисное решение  $\left(\frac{4}{5}; -\frac{17}{5}; 0; 0\right)$ ,

а при  $x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2 = 0$  или при  $c_1 = 9$ ,

$c_2 = 4$ ,  $x_3 = c_1 = 9$ ,  $x_4 = c_2 = 4$  получаем базисное решение  $(0; 0; 9; 4)$  и т.д.





Из сформулированных свойств следует, что *всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы*. Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (2.12), через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

**Определение.** Система линейно независимых решений  $e_1, e_2, \dots, e_k$  называется **фундаментальной**, если каждое решение системы (2.12) является линейной комбинацией решений  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

**Теорема.** Если ранг  $r$  матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений (2.12) меньше числа переменных  $n$ , то всякая фундаментальная система решений системы (2.12) состоит из  $n - r$  решений.

Поэтому *общее решение* системы (2.12) линейных однородных уравнений имеет вид

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k, \quad (2.13)$$

где  $e_1, e_2, \dots, e_k$  — любая фундаментальная система решений;  $c_1, c_2, \dots, c_k$  — произвольные числа;  $k = n - r$ .

Для нахождения фундаментальной системы решений системы уравнений (2.12) ее  $r$  основных (базисных) переменных (с отличным от нуля базисным минором) выражают через неосновные (свободные) переменные. Затем поочередно заменяют  $n - r$  неосновных переменных элементами каждой строки невырожденной квадратной матрицы порядка  $n - r$ , например, единичной  $E_{n-r}$ .

**Пример 2.6.** Для системы уравнений, приведенной в примере 2.4, найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

*Решение.* Аналогично примеру 2.4 находим выражения основных переменных  $x_1, x_2$  через неосновные  $x_3, x_4$ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 + 2x_3 - 3x_4, \\ -5x_2 = 0 - 5x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

(в отличие от примера 2.4 здесь свободные члены уравнений — нули).

Для нахождения фундаментальной системы решений заменим поочередно неосновные переменные  $x_3, x_4$  элементами строк единичной матрицы  $E_{4-2} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

При  $x_3 = 1, x_4 = 0$  получим из второго уравнения  $x_2 = 1$  и из первого  $x_1 = 0$ , т.е.  $e_1 = (0; 1; 1; 0)$ . При  $x_3 = 0, x_4 = 1$  получим из второго уравнения  $x_2 = -\frac{7}{5}$  и из первого  $x_1 = -\frac{1}{5}$ , т.е.  $e_2 = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}; 0; 1\right)$ .

Итак, фундаментальную систему решений образуют строки<sup>1</sup>

$$e_1 = (0; 1; 1; 0); \quad e_2 = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}; 0; 1\right). \quad \blacktriangleright$$

**Теорема.** *Общее решение системы (2.1)  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными равно сумме общего решения соответствующей ей системы однородных линейных уравнений (2.12) и произвольного частного решения системы (2.1):*

$$x = x^0 + c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n, \quad (2.14)$$

где  $x$  и  $x^0$  — соответственно общее и частное решения системы (2.1);  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — фундаментальная система решений системы (2.12).

**Пример 2.7.** По данным примера 2.4 убедиться в справедливости теоремы об общем решении системы линейных уравнений.

*Решение.* В примере 2.4 было получено общее решение системы в виде  $\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2; -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2; c_1; c_2\right)$ , где  $c_1, c_2$  — любые числа.

Найдем произвольное частное решение системы, например базисное решение при  $c_1 = 0, c_2 = 0$ , т.е.  $x^0 = \left(\frac{4}{5}; -\frac{17}{5}; 0; 0\right)$ .

<sup>1</sup> Умножив компоненты решения  $e_2$  на 5, можно получить фундаментальную систему решений с целыми компонентами  $(0; 1; 1; 0); (-1; -7; 0; 5)$ .

В примере 2.6 была получена фундаментальная система решений  $e_1 = (0; 1; 1; 0)$ ;  $e_2 = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}; 0; 0\right)$  соответствующей однородной системы уравнений.

Итак (для наглядности записываем решения системы в виде столбцов):

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2 \\ -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е.  $x = x^0 + c_1 e_1 + c_2 e_2$ , где первый столбец в правой части равенства — частное решение  $x^0$  неоднородной системы уравнений, а два последних — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. ►

## 2.6. Модель Леонтьева — модель многоотраслевой экономики (балансовый анализ)

Цель балансового анализа — ответить на вопрос, рассматриваемый в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: каким должен быть объем производства каждой из  $n$  отраслей, чтобы удовлетворять все потребности в продукции этой отрасли? При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой — как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями.

Связь между отраслями, как правило, отображается в таблицах межотраслевого баланса. Математическая модель, позволяющая их анализировать, разработана в 1936 г. В. Леонтьевым<sup>1</sup>.

Предположим, что рассматривается  $n$  отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию.

<sup>1</sup> Леонтьев Василий (1906–1999) — американский экономист.

Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отрасли и другими отраслями, а другая часть предназначена для конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год).

Введем следующие обозначения:  $x_i$  — общий (валовой) объем продукции  $i$ -й отрасли ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $x_{ij}$  — объем продукции  $i$ -й отрасли, потребляемой  $j$ -й отраслью в процессе производства ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ );  $y_i$  — объем конечного продукта  $i$ -й отрасли для непроизводственного потребления.

Так как валовой объем продукции любой  $i$ -й отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой  $n$  отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.14)$$

Уравнения (2.14) называются *соотношениями баланса*. Будем рассматривать *стоимостный межотраслевой баланс*, когда все величины, входящие в уравнения (2.14), имеют стоимостное выражение.

Введем *коэффициенты прямых затрат*

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.15)$$

показывающие затраты продукции  $i$ -й отрасли на производство единицы продукции  $j$ -й отрасли.

Можно полагать, что в некотором промежутке времени коэффициенты  $a_{ij}$  будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства. Это означает *линейную* зависимость материальных затрат от валового выпуска, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.16)$$

вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название *линейной*.

Теперь соотношения баланса (2.14) примут следующий вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.17)$$

Обозначим 
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где  $X$  — вектор<sup>1</sup> валового выпуска;  $Y$  — вектор конечного продукта;  $A$  — матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица).

Тогда систему (2.14) можно записать в матричном виде:

$$X = AX + Y. \quad (2.18)$$

**Основная задача межотраслевого баланса** состоит в отыскании такого вектора валового выпуска  $X$ , который при известной матрице прямых затрат  $A$  обеспечивает заданный вектор конечного продукта  $Y$ .

Перепишем уравнение (2.18) в следующем виде:

$$(E - A)X = Y. \quad (2.19)$$

Если матрица  $(E - A)$  невырожденная, т.е.  $|E - A| \neq 0$ , то по формуле (2.7)

$$X = (E - A)^{-1} Y = SY. \quad (2.20)$$

Матрица  $S = (E - A)^{-1}$  называется *матрицей полных затрат*.

Чтобы выяснить экономический смысл элементов матрицы  $S = (s_{ij})$ , будем задаваться единичными векторами конечного продукта<sup>2</sup>  $Y_1 = (1, 0, \dots, 0)'$ ,  $Y_2 = (0, 1, \dots, 0)'$ , ...,  $Y_n = (0, 0, \dots, 1)'$ . Тогда по (2.20) соответствующие векторы валового выпуска будут

$$X_1 = (s_{11}, s_{21}, \dots, s_{n1})', X_2 = (s_{12}, s_{22}, \dots, s_{n2})', \dots, X_n = \\ = (s_{1n}, s_{2n}, \dots, s_{nn})'.$$

<sup>1</sup> См. сноску на с. 81.

<sup>2</sup> Используем для краткости знак «штрих» — знак транспонирования матрицы.

Следовательно, каждый элемент  $s_{ij}$  матрицы  $S$  есть величина валового выпуска продукции  $i$ -й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта  $j$ -й отрасли  $y_j = 1$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Изменение вектора конечной продукции на величину  $\Delta Y = (\Delta y_1, \Delta y_2)'$  влечет за собой изменение вектора валового выпуска продукции на величину  $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2)'$ . Если при этом сохраняются неизменными коэффициенты прямых затрат, а следовательно, и матрица  $S = (E - A)^{-1}$ , то

$$\Delta X = (E - A)^{-1} \Delta Y = S \Delta Y. \quad (2.21)$$

В соответствии с экономическим смыслом задачи значения  $x_i$  должны быть неотрицательны при неотрицательных значениях  $y_i \geq 0$  и  $a_{ij} \geq 0$ , где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Матрица  $A \geq 0$  называется *продуктивной*, если для любого вектора  $Y \geq 0$  существует решение  $X \geq 0$  уравнения (2.19). В этом случае и модель Леонтьева называется *продуктивной*.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы  $A$ . Согласно одному из них матрица  $A$  продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не больше единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы, т.е. матрица  $A$  продуктивна, если  $a_{ij} \geq 0$  для любых  $i, j = 1, 2, \dots, n$  и  $\max_{j=1, 2, \dots, n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$ , и существует номер  $j$  такой, что  $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1$ .

Наряду с валовой и конечной продукциями в межотраслевом балансе рассматривается *чистая продукция* отрасли — разность между валовой продукцией этой отрасли и продукцией всех отраслей на производство этой отрасли.

**Пример 2.8.** В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовый выпуск
	энергетика	машиностроение		
Энергетика	7	21	72	100
Машиностроение	12	15	123	150

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне. Найти чистую продукцию отраслей.

*Решение.* Имеем  $x_1 = 100$ ,  $x_2 = 150$ ,  $x_{11} = 7$ ,  $x_{12} = 21$ ,  $x_{21} = 12$ ,  $x_{22} = 15$ ;  $y_1 = 72$ ,  $y_2 = 123$ .

По формуле (2.15) находим коэффициенты прямых затрат:  $a_{11} = 0,07$ ,  $a_{12} = 0,14$ ,  $a_{21} = 0,12$ ,  $a_{22} = 0,10$ , т.е. матрица пря-

мых затрат  $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}$  имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности:

$$\max \{0,07 + 0,12; 0,14 + 0,10\} = \max \{0,19; 0,24\} = 0,24 < 1.$$

Поэтому для любого вектора конечного продукта  $Y$  можно найти необходимый объем валового выпуска  $X$  по формуле (2.20):

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Найдем матрицу полных затрат  $S = (E - A)^{-1}$ :

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,24 \\ -0,12 & 0,90 \end{pmatrix}. \text{ Так как } |E - A| = 0,8202 \neq 0,$$

по формуле (1.14)

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

По условию вектор конечного продукта  $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$ , тогда

по формуле (2.17) получаем вектор валового выпуска

$$X = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix},$$

т.е. валовый выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179,0 ден. ед., а в машиностроительной — до 160,5 ден. ед.

Из  $x_1 = 179$  ден. ед. валовой продукции энергетики на внутрипроизводственное потребление двух рассматриваемых отраслей (энергетики и машиностроения) уйдет соответственно  $x_{11} = a_{11}x_1 = 0,07 \cdot 179,0 = 12,5$  ден. ед. и  $x_{21} = a_{21}x_1 = 0,12 \cdot 179,0 = 21,5$  ден. ед., так что чистая продукция энергетики составит  $179 - 12,5 - 21,5 = 145,0$  ден. ед. Аналогично, из  $x_2 = 160,5$  ден. ед. валовой продукции машиностроения на внутрипроизводственное потребление уйдет соответственно  $x_{12} = a_{12}x_2 = 0,21 \cdot 160,5 = 33,7$  ден. ед. и  $x_{22} = a_{22}x_2 = 0,15 \cdot 160,5 = 24,1$  ден. ед., так что чистая продукция машиностроения составит  $160,5 - 33,7 - 24,1 = 102,7$  ден. ед. ►

## ПРАКТИКУМ

### 2.7. Система $n$ линейных уравнений с $n$ переменными

#### 2.9. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решить уравнения: а)  $AX = B$ ; б)  $XA = C$ .

*Решение.*

а) Для невырожденной матрицы  $A$  решение уравнения находится по формуле (2.7)  $X = A^{-1}B$ , но здесь необходимо учесть, что  $X$  не является матрицей-столбцом (как это было в параграфе 2.1), а имеет размер  $(2 \times 3)$ , ибо  $A_{2 \times 2}^{-1}B_{2 \times 3} = X_{2 \times 3}$ .

Найдем обратную матрицу  $A^{-1}$  согласно алгоритму, приведенному в параграфе 1.5:

$|A| = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$ ; так как  $|A| \neq 0$ , то  $A^{-1}$  существует. Матрица  $A'$ , транспонированная к  $A$ , имеет вид  $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , а



матрица  $\tilde{A}$  из алгебраических дополнений элементов матрицы  $A'$  есть  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Теперь  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , и матрица переменных

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 \\ -1 & 10 & 17 \end{pmatrix}.$$

б) Полагая матрицу  $A$  невырожденной, умножаем обе части уравнения  $XA = C$  *справа* на обратную матрицу  $A^{-1}$ :  $(XA)A^{-1} = CA^{-1}$ .

Так как  $(XA)A^{-1} = X(AA^{-1}) = XE = X$ , то  $X = CA^{-1}$  и размер матрицы переменных ( $4 \times 2$ ), так как  $C_{4 \times 2} \cdot A_{2 \times 2}^{-1} = X_{4 \times 2}$ . Следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 13 \\ -1 & 3 \\ -1 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

**2.10.** Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Обозначив  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ , представим уравнение в виде  $AXB = C$ . Умножим обе части уравнения *слева* на обратную матрицу  $A^{-1}$  и *справа* на обратную матрицу  $B^{-1}$ , учитывая, что  $A$  и  $B$  — невырожденные матрицы:  $|A| = 1 \neq 0$ ,  $|B| = -10 \neq 0$ .

Получим  $A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1} \cdot CB^{-1}$ . Учитывая, что  $A^{-1}(AXB)B^{-1} = (A^{-1}A)(XB)B^{-1} = E(XB)B^{-1} = (XB)B^{-1} = X(BB^{-1}) = XE = X$ , получаем  $X = A^{-1}CB^{-1}$ .

$$\text{Теперь найдем } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \left[ -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -13 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -64 \\ 5 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & -6,4 \\ 0,5 & 8,0 \end{pmatrix} \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

### 2.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

относительно параметра  $a$ .

*Решение.* Переместив первое уравнение системы на место третьего, запишем расширенную матрицу системы

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-1} \quad \textcircled{-a} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{array} \right).$$

Если  $1 - a = 0$ , т.е.  $a = 1$ , то матрица системы принимает

вид  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ , т.е. система, состоящая из одного уравнения

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , совместна и имеет бесконечное множество решений ( $x_1 = 1 - c_1 - c_2$ ;  $x_2 = c_1$ ;  $x_3 = c_2$ ), где  $c_1$  и  $c_2$  — любые числа.

Если  $1 - a \neq 0$ , т.е.  $a \neq 1$ , то преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ 1/(1-a) \\ 1/(1-a) \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \textcircled{-(1+a)} \end{array} \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 1 \end{array} \right),$$

т.е. система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ (2+a)x_3 = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что при  $a = -2$  система несовместна, так как ее третье уравнение приведет к виду  $0 = 1$ .

Применяя обратный ход к полученной системе уравнений при  $a \neq -2$ , находим из третьего уравнения  $x_3 = \frac{1}{2+a}$ , из второго  $x_2 = x_3 = \frac{1}{2+a}$  и из первого  $x_1 = 1 - x_3 - ax_2 = 1 - \frac{1}{2+a} - \frac{a}{2+a} = \frac{1}{2+a}$ .

Итак, при  $a \neq -2$ ,  $a \neq 1$  система имеет единственное решение  $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2+a}$ , при  $a = -2$  — несовместна и при  $a = 1$  имеет бесконечное множество решений ( $x_1 = 1 - c_1 - c_2$ ;  $x_2 = c_1$ ;  $x_3 = c_2$ ), где  $c_1$  и  $c_2$  — любые числа. ►

**2.12.** Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок; при этом используется сырье трех типов:  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Нормы расхода каждого из них на изготовление одной пары обуви и объем расхода сырья за один день заданы в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление одной пары, усл. ед.			Расход сырья за один день, усл. ед.
	сапог	кроссовок	ботинок	
$S_1$	5	3	4	2700
$S_2$	2	1	1	800
$S_3$	3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви.

*Решение.* Пусть ежедневно фабрика выпускает  $x_1$  пар сапог,  $x_2$  пар кроссовок и  $x_3$  пар ботинок. Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600. \end{cases}$$

При решении системы любым способом находим: (200; 300; 200), т.е. фабрика выпускает 200 пар сапог, 300 — пар кроссовок и 200 пар ботинок. ►

**2.13.** С двух заводов поставляются автомобили для двух автохозяйств, потребности которых соответственно 200 и 300 машин. Первый завод выпустил 350 машин, а второй — 150. Известны затраты на перевозку машин с завода в каждое автохозяйство (см. таблицу).

Завод	Затраты на перевозку в автохозяйства, ден. ед.	
	1	2
1	15	20
2	8	25

Минимальные затраты на перевозку равны 7950 ден. ед. Найти оптимальный план перевозок машин.

*Решение.* Пусть  $x_{ij}$  — количество машин, поставляемых с  $i$ -го завода  $j$ -му автохозяйству ( $i, j = 1, 2$ ). Получаем систему

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 350, \\ x_{21} + x_{22} = 150, \\ x_{11} + x_{21} = 200, \\ x_{12} + x_{22} = 300, \\ 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{21} + 25x_{22} = 7950. \end{cases}$$

Решим данную систему, например, методом Гаусса. (Рекомендуем сделать это читателю самостоятельно.) Найдем  $x_{11} = 50$ ,  $x_{12} = 300$ ,  $x_{21} = 150$ ,  $x_{22} = 0$  (Обращаем внимание на то, что ранг матрицы системы  $r = 4$ , т.е.  $r = n$ , и система имеет единственное решение). ►

Решить системы уравнения методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{ll}
 2.14. \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases} & 2.15. \begin{cases} x_1 - \sqrt{5}x_2 = 0, \\ 2\sqrt{5}x_1 - 5x_2 = -10. \end{cases} \\
 2.16. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases} & 2.17. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases} \\
 2.18. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases} & 2.19. \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases} \\
 2.20. \begin{cases} 3x + 2y + z = -8, \\ 2x + 3y + z = -3, \\ 2x + y + 3z = -1. \end{cases} & 2.21. \begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 6x + 5y + 4z = -2, \\ 9x + 8y + 7z = 3. \end{cases}
 \end{array}$$

Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{array}{ll}
 2.22. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases} & 2.23. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases} \\
 2.24. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases} & \\
 2.25. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases} & \\
 2.26. \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 11. \end{cases} &
 \end{array}$$

$$2.27. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.29. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Решить системы уравнений относительно параметра  $a$ :

$$2.30. \begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a^2. \end{cases}$$

$$2.31. \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1. \end{cases}$$

Решить (любым методом) системы уравнений, заданные в виде  $AX = B$ , где  $A$  — матрица системы;  $B$  — столбец свободных членов:

$$2.32. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$$2.33. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$2.34. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}. \quad 2.35. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Решить матричные уравнения:

$$2.36. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2.37. X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2.38. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$2.39. X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 13 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2.40. AXB = C, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.41. \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2.42. AB'X = C, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

**2.43.** Имеются три банка, каждый из которых начисляет вкладчику определенный годовой процент (свой для каждого банка). В начале года  $1/3$  вклада размером 6000 ден. ед. вложили в банк 1,  $1/2$  вклада — в банк 2 и оставшуюся часть — в банк 3, и к концу года сумма этих вкладов возросла до 7250 ден. ед. Если первоначально  $1/6$  вклада положили бы в банк 1,  $2/3$  — в банк 2 и  $1/6$  вклада — в банк 3, то к концу года сумма вклада составила бы 7200 ден. ед.; если бы  $1/2$  вклада положили в банк 1,  $1/6$  — в банк 2 и  $1/3$  вклада — в банк 3, то сумма вкладов в конце года составила бы вновь 7250 ден. ед. Какой процент выплачивает каждый банк?

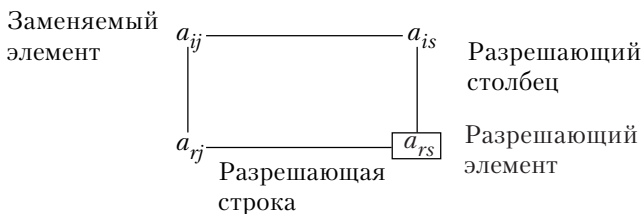
## 2.8. Система $m$ линейных уравнений с $n$ переменными. Метод Жордана — Гаусса. Фундаментальная система решений

Метод Жордана<sup>1</sup> — Гаусса позволяет быстрее, чем классический метод Гаусса, получить решение системы линейных уравнений. Он заключается в преобразовании расширенной матрицы системы  $(A|B)$  к виду, в котором матрица  $A$  диагональная с точностью до перестановки строк или столбцов<sup>2</sup>.

На каждом шаге выбирается любой *разрешающий элемент*  $a_{rs} \neq 0$ , где  $r$ -я строка и  $s$ -й столбец называются соответственно *разрешающей строкой* и *разрешающим столбцом*. Для перехода к следующему шагу переменная  $x_s$  исключается из всех уравнений кроме  $r$ -го уравнения, поэтому все элементы разрешающего столбца, кроме  $a_{rs}$ , становятся равными нулю; все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, а элементы других строк<sup>3</sup> находятся по *правилу прямоугольника*

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}. \quad (2.22)$$

В формулах исключения (2.22) новый элемент  $a'_{ij}$  равен старому элементу  $a_{ij}$  минус произведение элементов в вершинах прямоугольника, деленное на разрешающий элемент.



<sup>1</sup> Жордан Мари Энмон Камиль (1838—1922) — французский математик.

<sup>2</sup> Например, матрица  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  перестановкой строк может быть приведена к виду  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ .

<sup>3</sup> Обозначаем со штрихами.



После получения новой матрицы выбирается новый, отличный от нуля элемент в другой строке, вычисляется новая матрица и так до тех пор, пока не побывает разрешающей каждая строка матрицы.

**2.44.** Методом Жордана — Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -3 & -7 & -8 & -2 & -4 \\ \boxed{1} & 3 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

*Шаг 1.* В качестве разрешающего удобно взять элемент, равный 1 или  $-1$ , например  $a_{21}$ . Делим элементы разрешающей (второй) строки на разрешающий элемент  $a_{21}$ . Так как  $a_{21} = 1$ , то элементы второй строки не меняются. В новой матрице элементы первого столбца, кроме  $a'_{21} = a_{21} = 1$ , становятся равными нулю. Другие элементы новой матрицы находятся по правилу прямоугольника, например,

$$a'_{13} = -8 - \frac{(-3) \cdot 4}{1} = 4; \quad a'_{44} = 0 - \frac{2 \cdot (-2)}{1} = 4 \text{ и т.д.}$$

Новая матрица имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{2} & 4 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & -2 \end{array} \right).$$

*Шаг 2.* В качестве разрешающего элемента берем элемент любой строки, кроме второй, например, элемент

$a'_{12} = 2 \neq 0$ . Делим элементы разрешающей (первой) строки на  $a'_{12} = 2$ ; новые элементы второго столбца, кроме  $a''_{12}$ , будут равны нулю. Другие элементы новой матрицы находятся по правилу прямоугольника, например,

$$a''_{25} = 2 - \frac{3 \cdot 2}{2} = -1; \quad a''_{34} = 4 - \frac{(-7)(-4)}{2} = -10 \text{ и т.д.}$$

Новая матрица имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2/9 & -5/9 \\ 1 & 0 & 0 & 16/9 & 5/9 \\ 0 & 0 & 1 & -10/9 & 7/9 \end{array} \right).$$

*Шаг 3.* В качестве разрешающего элемента берем элемент третьей строки, например  $a'''_{33} = 9 \neq 0$ . После пересчета элементов получается новая матрица, в которой вычеркиваем строку, состоящую из одних нулей (см. последнюю матрицу).

Так как все строки матрицы брались в качестве разрешающих, выпишем систему уравнений, соответствующую последней матрице:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} & x_2 & + \frac{2}{9}x_4 = -\frac{5}{9}, \\ x_1 & & + \frac{16}{9}x_4 = \frac{5}{9}, \\ & x_3 & - \frac{10}{9}x_4 = \frac{7}{9}. \end{array} \right.$$

Полагая неосновную переменную  $x_4 = c$ , получаем общее решение системы

$$\left( x_1 = \frac{5}{9} - \frac{16}{9}c; x_2 = -\frac{5}{9} - \frac{2}{9}c; x_3 = \frac{7}{9} + \frac{10}{9}c; x_4 = c \right).$$

Метод Жордана — Гаусса может быть использован при нахождении обратной матрицы  $A^{-1}$ . По определению обратная матрица является решением матричного уравнения

$$AX=E, \quad (2.23)$$

т.е.  $X = A^{-1}$ .

Матричное уравнение (2.23) представляет совокупность  $n$  систем линейных уравнений:

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad AX_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } X_1, X_2, \dots, X_n -$$

столбцы матрицы  $X = A^{-1}$ . Так как все системы имеют одну и ту же матрицу  $A$ , то все  $n$  систем можно решать одновременно, если в качестве расширенной рассматривать матрицу  $(A|E)$ , которую необходимо преобразовать в матрицу  $(E|B)$ , где  $B$  и будет обратной матрицей, т.е.  $B = A^{-1}$ . ►

**2.45.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Методом Жордана — Гаусса найти  $A^{-1}$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} (A|E) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -13 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -8 & -15 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -15 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) = (E|B). \end{aligned}$$

Последняя матрица, полученная из предыдущей в результате перестановки первой и второй строк, есть матрица  $(E|B)$ , где

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в примере 1.59 та же обратная матрица  $A^{-1}$  была получена путем элементарных преобразований только столбцов матрицы  $(A | E)$ . ►

Преимущество применения метода Жордана — Гаусса при решении систем линейных уравнений и обращении матриц состоит в существенном сокращении трудоемкости решений по сравнению с другими методами. Оно особенно ощутимо при работе с матрицами большой размерности.

Решить системы уравнений методом Гаусса или методом Жордана — Гаусса:

$$2.46. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases} \quad 2.47. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 0, \\ 5x_1 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.48. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2.49. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$2.50. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = -10. \end{cases}$$

$$2.51. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 7, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7. \end{cases}$$

Найти базисные решения систем уравнений:

$$2.52. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases} \quad 2.53. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$2.54. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$$

$$2.55. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Методом Гаусса или методом Жордана — Гаусса решить системы линейных уравнений и найти все базисные решения:

$$2.56. \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10. \end{cases}$$

$$2.57. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$2.58. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$2.59. \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Найти фундаментальные системы решений систем линейных уравнений:

$$2.60. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2.61. \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 8x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$2.62. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2.63. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2.64. \begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2.65. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

## 2.9. Модель Леонтьева — модель многоотраслевой экономики

**2.66.** Выяснить, продуктивна ли матрица  $A$ :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 1,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

**2.67.** Данные об исполнении баланса за отчетный период, ден. ед., приведены ниже в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовый выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт отрасли 1 должен увеличиться в два раза, а отрасли 2 — на 20%.

**2.68.** Экономика разделена на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей (см. таблицу).

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	
Промышленность	0,3	0,25	0,2	56
Сельское хозяйство	0,15	0,12	0,03	20
Прочие отрасли	0,1	0,05	0,08	12

Найти объем валовой продукции каждой отрасли, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

**2.69.** Дана матрица прямых затрат  $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ .

Найти: а) вектор валовой продукции  $X$  для обеспечения выпуска конечной продукции  $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$ ; б) приращение вектора  $\Delta X$  для увеличения выпуска конечной продукции на  $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$ .

**2.70.** Работа системы, состоящей из двух отраслей, в течение некоторого периода характеризуется данными, ден. ед., приведенными в таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция
	1	2	
1	100	160	240
2	275	40	85

Вычислить матрицу прямых затрат.

**2.71.** Имеются данные (см. таблицу) о работе системы нескольких отраслей в прошлом периоде и план выпуска конечной продукции  $Y_1$  в будущем периоде, ден. ед.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Чистая продукция	План $Y_1$
	1	2		
1	80	120	300	350
2	70	30	200	300

Найти матрицы прямых и полных затрат, а также выпуск валовой продукции в плановом периоде, обеспечивающей выпуск конечной продукции  $Y_1$ .

**2.72.** Дана матрица  $S$  полных затрат некоторой модели межотраслевого баланса:

$$S = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 1,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 1,1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) приращение валового выпуска  $\Delta X_1$ , обеспечивающее приращение конечной продукции  $\Delta Y_1 = (10 \ 30 \ 20)'$ ; б) приращение конечной продукции  $\Delta Y_2$ , соответствующее приращению валового выпуска  $\Delta X_2 = (5 \ -10 \ 20)'$ .

### Контрольные задания по главе 2 «Системы линейных уравнений»

№	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3
1	По формулам Крамера решить систему:		
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$
2	Решить матричное уравнение:		
	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$



№	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3
3	Методом Гаусса решить систему уравнений, заданную в матричной форме: $AX = B$ . Дано: $X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)'$ и:		
	$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$ $B = (4 \ 6 \ 2 \ 4)'$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$ $B = (-6 \ 4 \ -5 \ 2)'$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix},$ $B = (5 \ -5 \ 5 \ -2)'$
4	Решить систему, составленную из первых трех уравнений системы в задаче 3. Указать число базисных решений и найти одно из них.		
5	Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:		
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases}$
6	Дана матрица прямых затрат $A$ . Найти изменение векторов: а) конечного продукта $\Delta Y$ при данном изменении вектора валового продукта $\Delta X$ ; б) валового выпуска $\Delta X$ при необходимом изменении вектора конечного продукта $\Delta Y$ .		
	$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix};$ $\text{а) } \Delta X = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix};$ $\text{б) } \Delta Y = \begin{pmatrix} 55 \\ 110 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix};$ $\text{а) } \Delta X = \begin{pmatrix} 140 \\ 100 \end{pmatrix};$ $\text{б) } \Delta Y = \begin{pmatrix} 52 \\ 104 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix};$ $\text{а) } \Delta X = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix};$ $\text{б) } \Delta Y = \begin{pmatrix} 92 \\ 138 \end{pmatrix}$

## Тест 2

1. По формулам Крамера решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = -1, \\ -3x_1 & + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 1. \end{cases}$$

В ответе указать значения переменных  $x_1, x_2$  и определителя  $\Delta_3$ .

**2.** Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & + 2x_3 = 1, \\ & 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 & = 0. \end{cases}$$

В ответе указать  $x_1, x_3$  и элемент  $a_{12}$  обратной матрицы  $A^{-1}$ .

**3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 & + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

**4.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 & + 5x_3 = 2, \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Выберите верное утверждение: 1) система определенная; 2) система несовместная; 3) система неопределенная.

**5.** Система из трех уравнений с тремя переменными, заданная в матричном виде  $AX = B$ , несовместна в следующих случаях:

1)  $r(A) = r(A|B) = 3$ ; 2)  $r(A) = r(A|B) = 2$ ;

3)  $r(A) = 2, r(A|B) = 3$ ; 4)  $r(A) = r(A|B) = 1$ ;

5)  $r(A) = 1, r(A|B) = 2$ .

Выберите верные варианты ответов.

**6.** Найти число базисных решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений (в ответе указать число решений):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

8. Выяснить, какие из приведенных матриц являются продуктивными:

1)  $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix};$       2)  $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,7 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix};$

3)  $\begin{pmatrix} 1,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix};$       4)  $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,9 & 0,2 \end{pmatrix}.$

9. Дана матрица прямых затрат  $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$  и вектор валового выпуска  $X = \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$ . Найти компоненты  $y_1, y_2$  вектора конечного продукта  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

10. Дана матрица полных затрат  $S = \begin{pmatrix} 1,125 & 0,125 \\ 0,125 & 1,125 \end{pmatrix}$  и вектор конечного продукта  $Y = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix}$ . Найти компоненты  $x_1, x_2$  вектора валового выпуска  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

# Глава 3

## ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

#### 3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Обобщим некоторые сведения о векторах, известные в основном из школьного курса геометрии.

*Вектором* называется направленный отрезок  $\overline{AB}$  с начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$  (который можно перемещать параллельно самому себе (рис. 3.1)).

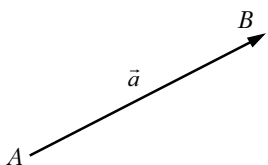


Рис. 3.1

Векторы могут обозначаться как двумя прописными буквами, так и одной строчной с чертой или стрелкой либо выделяться жирным шрифтом, например  $\mathbf{a} = \overline{AB}$ ,  $\vec{a} = \overline{AB}$  или  $\vec{a} = \overline{AB}$ .

Длиной (нормой, или модулем)  $|\overline{AB}|$  вектора  $\overline{AB}$  называется число, равное длине отрезка  $AB$ , изобража-

ющего вектор.

Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Если начало и конец вектора совпадают, например  $\overline{AA}$ , то такой вектор называют *нулевым* и обозначают  $\vec{0} = \overline{AA}$ . Длина нулевого вектора равна нулю:  $|\vec{0}| = 0$ . Так как направление нулевого вектора произвольно, то считают, что он коллинеарен любому вектору.

Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ , имеющий длину  $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$ , направление которого

совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположно ему, если  $\lambda < 0$  (рис. 3.2).

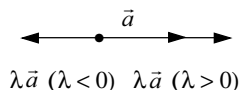


Рис. 3.2

Противоположным вектором  $\vec{a}$  называется произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $(-1)$ , т.е.  $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ .

Суммой двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\vec{a}$ , а конец — с концом вектора  $\vec{b}$  при условии, что начало вектора  $\vec{b}$  совпадает с концом вектора  $\vec{a}$  (*правило треугольника*) (рис. 3.3).

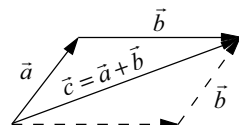


Рис. 3.3

Очевидно, что вектор  $\vec{c}$  в этом случае представляет диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (*правило параллелограмма*) (см. рис. 3.3).

Аналогично определяется сумма нескольких векторов. Так, например, сумма четырех векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  (рис. 3.4, а) есть вектор  $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\vec{a}$ , а конец — с концом вектора  $\vec{d}$  (*правило многоугольника*) (рис. 3.4, б).

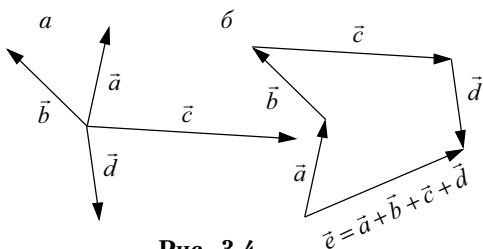


Рис. 3.4

Нетрудно убедиться, что вектор  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ , опреде-

ляемый таким образом, представляет диагональ параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$ , не лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях<sup>1</sup> (*правило параллелепипеда*) (рис. 3.5).

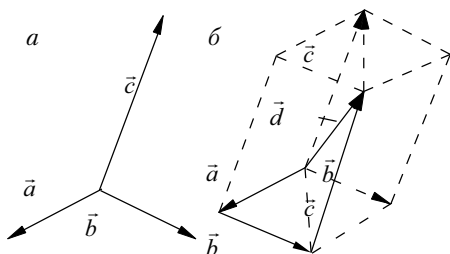


Рис. 3.5

<sup>1</sup> Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

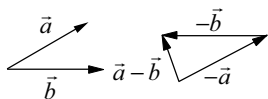


Рис. 3.6

Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется сумма вектора  $\vec{a}$  и вектора  $-\vec{b}$ , противоположного  $\vec{b}$  (рис. 3.6).

Легко убедиться в том, что в параллелограмме, построенном на векторах  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ , одна диагональ — вектор  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$  — представляет сумму векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а другая диагональ — вектор  $\vec{d} = \overrightarrow{DB}$  — их разность (рис. 3.7).

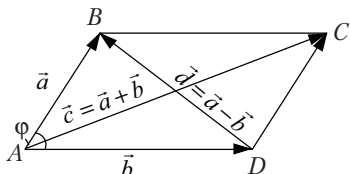


Рис. 3.7

Перенесем вектор  $\vec{a}$  параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат.

Координатами вектора  $\vec{a}$  называются координаты его конечной точки. Так, координатами вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$  на плоскости  $Oxy$  являются два

числа  $x$  и  $y$  ( $\vec{a} = (x, y)$  — рис. 3.8), а в пространстве  $Oxyz$  — три числа  $x, y, z$  ( $\vec{a} = (x, y, z)$  — (см. рис. 3.10)).

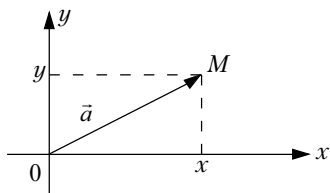


Рис. 3.8

Обозначим через  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  единичные векторы, или орты, совпадающие с положительным направлением осей соответственно  $Ox, Oy, Oz$  (рис. 3.9);  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ . Тогда вектор  $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$  может быть представлен в виде (рис. 3.10):

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \quad \text{или} \quad \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (3.1)$$

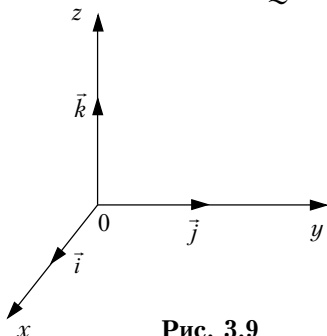


Рис. 3.9

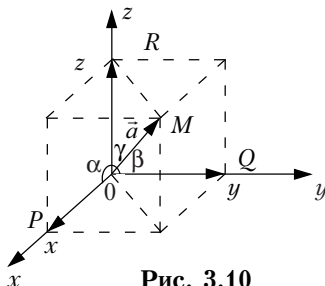


Рис. 3.10

Формула (3.1) называется *разложением вектора  $\vec{a}$  по векторам  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$* . Векторы  $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ , сумма которых равна вектору  $\vec{a} = (x, y, z)$ , называются *компонентами вектора  $\vec{a}$* .

В соответствии с определениями, приведенными выше, нетрудно показать, что суммой и разностью векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  являются соответственно векторы

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

а произведение вектора  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  на число  $\lambda$  есть вектор

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Из рис. 3.8 и 3.10 следует, что длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\vec{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.2)$$

или

$$|\vec{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.3)$$

**Определение.** *Скалярным произведением  $(\vec{a}, \vec{b})$  двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла  $\varphi$  между ними:*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \quad (3.4)$$

Выразим скалярное произведение через координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

В треугольнике  $ABD$  (см. рис. 3.7) сторонами являются векторы  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  и  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ . По теореме косинусов  $|\vec{d}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ , откуда

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2). \quad (3.5)$$

Учитывая формулу длины вектора (3.3), находим

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$|\vec{d}|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$  и после преобразования выражения (3.5) получаем

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad (3.6)$$

т.е. *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.*

Заметим, что при  $\vec{a} = \vec{b}$  угол  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  и

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad (3.7)$$

т.е. *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

В частности, расстояние  $d$  между двумя точками плоскости  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  можно рассматривать как длину вектора  $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ . Следовательно,

$$d = \sqrt{|\vec{AB}|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.8)$$

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (3.9)$$

При  $\varphi = \pi/2$  получаем  $\cos \varphi = 0$ , т.е. *условием перпендикулярности* (или обобщенно *условием ортогональности* векторов (см. параграф 3.5)) двух векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  является равенство нулю их скалярного произведения

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \quad \text{или} \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (3.10)$$

*Условие коллинеарности (параллельности)* двух векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ :

$$\vec{b} = k\vec{a} \quad \text{или} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (3.11)$$

**Пример 3.1.** Даны векторы  $\vec{a} = (2; -1; -2)$  и  $\vec{b} = (8; -4; 0)$ . Найти: а) векторы  $\vec{c} = 2\vec{a}$  и  $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ ; б) длины векторов  $\vec{c}$



и  $\vec{d}$ ; в) скалярный квадрат вектора  $\vec{d}$ ; г) скалярное произведение векторов  $(\vec{c}, \vec{d})$ ; д) угол между векторами  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ .

*Решение.*

а) По определению

$$\vec{c} = 2\vec{a} = (4; -2; -4), \quad \vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6; -3; 2).$$

б) По формуле (3.3) найдем длины векторов  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ :

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, \quad |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

в) По формуле (3.7) скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е.  $(\vec{d}, \vec{d}) = d^2 = |\vec{d}|^2 = 7^2 = 49$ .

г) По формуле (3.6) скалярное произведение

$$(\vec{c}, \vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2)(-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

д) По формуле (3.9) угол между векторами  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  определяется равенством:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{c}, \vec{d})}{|\vec{c}| |\vec{d}|} = \frac{22}{6 \cdot 7} \approx 0,52, \text{ откуда } \varphi = \arccos 0,52 \approx 58^\circ. \blacktriangleright$$

*Проекцией*  $\text{пр}_l \vec{a}$  вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  на ось  $l$  называется величина направленного отрезка  $A'B'$  (где  $AA' \perp l$ ,  $BB' \perp l$  — рис. 3.11), т.е. число, равное длине отрезка  $A'B'$ , взятое со знаком «+», если направление  $A'B'$  совпадает с направлением оси  $l$ , и со знаком «-», если эти направления противоположны. Очевидно, что

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi. \quad (3.12)$$

*Направляющими косинусами вектора*  $\vec{a} = (x, y, z)$  называются косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$ , образуемых вектором  $\vec{a}$  с осями координат (см. рис. 3.10). Найдем  $\cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{a} = (x, y, z)$  и единичным вектором (ортом)  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ . По формуле (3.9)

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{i})}{|\vec{a}| |\vec{i}|} \quad (\text{аналогично определяются } \cos \beta \text{ и } \cos \gamma) \text{ или}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

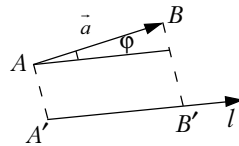


Рис. 3.11

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad (3.13)$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

При этом

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (3.14)$$

### 3.2. Понятия $n$ -мерного вектора и векторного пространства

Множества всех плоских или пространственных векторов, рассмотренных выше, в которых определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, являются простейшими примерами векторных пространств. Ниже обобщается понятие вектора и дается определение векторного пространства.

**Определение.  $n$ -мерным вектором** называется упорядоченная совокупность  $n$  действительных чисел, записываемых в виде  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_i$  —  $i$ -я компонента, или координата, вектора  $\mathbf{x}$ <sup>1</sup>.

Понятие  $n$ -мерного вектора широко используется в экономике, например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а соответствующие цены — вектором  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Два  $n$ -мерных вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т.е.  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , если  $x_i = y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Суммой двух векторов одинаковой размерности  $n$  называется вектор  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , компоненты которого равны суммам соответствующих компонент слагаемых векторов, т.е.  $z_i = x_i + y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

<sup>1</sup> Компоненты  $n$ -мерного вектора удобнее обозначать одной буквой, но с разными индексами (в отличие от двух и трехмерных векторов, компоненты которых мы обозначали выше разными буквами), а сам вектор — той же буквой (без номеров и стрелки), выделенной жирным шрифтом.

Произведением вектора  $\mathbf{x}$  на действительное число  $\lambda$  называется вектор  $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{x}$ , компоненты  $u_i$  которого равны произведению  $\lambda$  на соответствующие компоненты вектора  $\mathbf{x}$ , т.е.  $u_i = \lambda x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют следующим свойствам.

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$  — коммутативное (переместительное) свойство суммы.

2.  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$  — ассоциативное (сочетательное) свойство суммы.

3.  $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$  — ассоциативное относительно числового множителя свойство.

4.  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$  — дистрибутивное (распределительное) относительно суммы векторов свойство.

5.  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$  — дистрибутивное относительно суммы числовых множителей свойство.

6. Существует нулевой вектор  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  такой, что  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$  для любого вектора  $\mathbf{x}$  (особая роль нулевого вектора).

7. Для любого вектора  $\mathbf{x}$  существует противоположный вектор  $(-\mathbf{x})$  такой, что  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

8.  $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$  для любого вектора  $\mathbf{x}$  (особая роль числового множителя 1).

**Определение.** Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше восьми свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется **векторным пространством**.

Следует отметить, что под  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  можно рассматривать не только векторы, но и элементы (объекты) любой природы. В этом случае соответствующее множество элементов называется **линейным пространством**.

Линейным пространством является, например, множество всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа  $n$ . Легко убедиться, что если  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — многочлены степени не выше  $n$ , то они будут обладать свойствами 1–8. Заметим для сравнения, что, например, множество всех многочленов степени, точно равной натуральному числу  $n$ , не является линейным пространством, так как в нем не определена операция сложения элементов, ибо сумма двух многочленов может оказаться многочленом степени ниже  $n$ . А множество многочленов сте-

пени не выше  $n$ , но с положительными коэффициентами, также не является линейным пространством, поскольку в этом множестве не определена операция умножения элемента на число (такие многочлены нельзя умножать на отрицательные числа).

Из определения векторного (линейного) пространства, в частности из аксиом 1–8, вытекает существование единственного нулевого вектора, равного произведению произвольного вектора  $\mathbf{x}$  на действительное число 0, и существование для каждого вектора  $\mathbf{x}$  единственного противоположного вектора  $(-\mathbf{x})$ , равного произведению этого вектора на действительное число  $(-1)$ .

### 3.3. Размерность и базис векторного пространства

Понятия линейной комбинации, линейной зависимости и независимости векторов вводятся так же, как это было сделано в параграфе 1.6 для строк матрицы.

**Определение.** Вектор  $\mathbf{a}_m$  называется *линейной комбинацией векторов*  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{m-1}$  векторного пространства  $R$ , если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа:

$$\mathbf{a}_m = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_{m-1} \mathbf{a}_{m-1}, \quad (3.15)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$  — любые действительные числа.

**Определение.** Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  векторного пространства  $R$  называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = 0. \quad (3.16)$$

В противном случае векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  называются *линейно независимыми*.

Из приведенных выше определений следует, что векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  линейно независимы, если равенство (3.16) справедливо лишь при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ , и линейно зависимы, если это равенство выполняется, когда хотя бы одно из чисел  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) отлично от нуля.

Можно показать (см. параграф 1.6), что если векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  линейно зависимы, то, по крайней мере, один из них линейно выражается через остальные. Верно и обратное утверждение о том, что если один из векторов выражается линейно через остальные, то все эти векторы в совокупности линейно зависимы.

Примером линейно независимых векторов являются два неколлинеарных (не параллельных одной прямой) вектора  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  на плоскости. Действительно, условие (3.16):  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$ , будет выполняться лишь в случае, когда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , ибо если, например,  $\lambda_2 \neq 0$ , то  $\vec{a}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{a}_1$  и векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  коллинеарны.

Однако любые три вектора плоскости линейно зависимы. В самом деле, если векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  — неколлинеарные (рис. 3.12, а), то любой третий вектор  $\vec{a}_3$  можно разложить по векторам  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  (рис. 3.12, б), т.е. представить в виде  $\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$  или  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}$ , т.е. векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  — линейно зависимые.

Если же  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  — коллинеарные векторы, то найдутся не равные одновременно нулю числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , что  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$ .

Тогда и

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 - 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0},$$

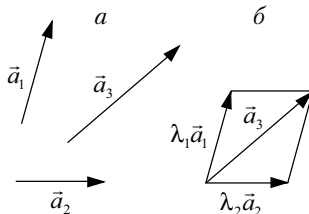


Рис. 3.12

т.е. и в этом случае векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  — линейно зависимые.

Отметим некоторые свойства векторов линейного пространства.

**1.** Если среди векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы. В самом деле, если, например  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ , то равенство (3.16) справедливо при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ .

**2.** Если часть векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  являются линейно зависимыми, то и все эти векторы — линейно зависимые. Действительно, если, например, векторы  $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  линейно зависимы, то справедливо равенство  $\lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ , в котором не все числа  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$  равны нулю. Но тогда с теми же числами  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$  и  $\lambda_1 = 0$  будет справедливо равенство (3.16).

**Пример 3.2.** Выяснить, являются ли векторы  $\mathbf{a}_1 = (1; 3; 1; 3)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (2; 1; 1; 2)$  и  $\mathbf{a}_3 = (3; -1; 1; 1)$  линейно зависимыми.

*Решение.* Составим векторное равенство  $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ . Записывая  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  в виде вектор-столбцов, получаем

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса (см. параграф 2.3), приводим ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

откуда находим бесконечное множество ее решений ( $\lambda_1 = c$ ,  $\lambda_2 = -2c$ ,  $\lambda_3 = c$ ), где  $c$  — произвольное действительное число.

Итак, для данных векторов условие (3.16) выполняется не только при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  (а, например, при  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = 1$  ( $c = 1$ ); при  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -4$ ,  $\lambda_3 = 2$  ( $c = 2$ ) и т.д.), следовательно, эти векторы — линейно зависимые. ►

**Определение.** Линейное пространство  $R$  называется  **$n$ -мерным**, если в нем существуют  $n$  линейно независимых векторов, а любые из  $(n+1)$  векторов уже являются зависимыми. Другими словами, **размерность пространства** — это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Число  $n$  называется **размерностью** пространства  $R$  и обозначается  $\dim(R)$ .

**Определение.** Совокупность  $n$  линейно независимых векторов  $n$ -мерного пространства  $R$  называется **базисом**.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Каждый вектор  $x$  линейного пространства  $R$  можно представить (и притом единственным способом) в виде линейной комбинации векторов базиса.*

□ Пусть векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют произвольный базис  $n$ -мерного пространства  $R$ . Так как любые из  $(n + 1)$  векторов  $n$ -мерного пространства  $R$  зависимы, то будут зависимы, в частности, векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и рассматриваемый вектор  $x$ . Тогда существуют такие не равные одновременно нулю числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda$ , что

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda x = 0. \quad (3.17)$$

При этом  $\lambda \neq 0$ , ибо в противном случае, если  $\lambda = 0$  и хотя бы одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  было бы отлично от нуля, то векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} e_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} e_n$$

или

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \quad (3.18)$$

где  $x_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda} (i = 1, 2, \dots, n)$ .

Это выражение  $x$  через  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — единственное, так как если допустить наличие какого-либо другого выражения, например,

$$x = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n,$$

то, вычитая из него почленно (3.18), получаем

$$(y_1 - x_1) e_1 + (y_2 - x_2) e_2 + \dots + (y_n - x_n) e_n = 0,$$

откуда из условия линейной независимости векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  следует, что

$$y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \dots = y_n - x_n = 0$$

или

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n. \blacksquare$$









Теперь по формуле (3.24)

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix},$$

т.е. новые координаты вектора  $\mathbf{b}$  в базисе  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  есть 0,5; 2; -0,5 и вектор  $\mathbf{b}$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{b} = 0,5\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 0,5\mathbf{a}_3. \blacktriangleright$$

### 3.5. Евклидово пространство

Выше было дано определение линейного (векторного) пространства, в котором можно складывать векторы и умножать их на числа, рассмотрены понятия размерности и базиса, а теперь в данном пространстве введем *метрику*, т.е. способ измерения длин и углов. Это можно сделать, если ввести, например, понятие скалярного произведения.

**Определение.** *Скалярным произведением* двух векторов  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  называется число

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (3.25)$$

Скалярное произведение имеет экономический смысл. Если  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — вектор объемов различных товаров, а  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — вектор их цен, то скалярное произведение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  выражает суммарную стоимость этих товаров.

Скалярное произведение имеет следующие свойства.

1.  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$  — коммутативное свойство.
2.  $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$  — дистрибутивное свойство.
3.  $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — для любого действительного числа  $\alpha$ .
4.  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ , если  $\mathbf{x}$  — ненулевой вектор;  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ , если  $\mathbf{x}$  — нулевой вектор.

**Определение.** Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырем свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется *евклидовым пространством*.

**Длиной (нормой)** вектора  $\mathbf{x}$  в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (3.26)$$

Имеют место следующие свойства длины вектора.

1.  $|\mathbf{x}| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

2.  $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$ , где  $\lambda$  — действительное число.

3.  $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$  (неравенство Коши — Буняковского)<sup>1</sup>. (3.27)

4.  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$  (неравенство треугольника).

Угол  $\varphi$  между двумя векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  определяется равенством

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}, \quad (3.28)$$

где  $0 \leq \varphi < \pi$ .

Такое определение вполне корректно, так как согласно неравенству Коши — Буняковского  $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$ , т.е.  $\cos \varphi \leq 1$ .

Два вектора называются *ортгогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, что нулевой вектор ортгогонален любому другому вектору. Из определения следует, что если два ненулевых вектора ортгогональны, то угол между ними равен  $\pi/2$  (ибо  $\cos \pi/2 = 0$ ).

Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$   $n$ -мерного евклидова пространства образуют *ортгогональный базис*, если эти векторы попарно ортгогональны, т.е.  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ , и *ортонормированный базис*, если эти векторы попарно ортгогональны и норма каждого из них равна единице, т.е. если  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$  при  $i \neq j$  и  $|\mathbf{e}_i| = 1$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Для установления корректности приведенного определения необходимо убедиться в том, что входящие в него векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  образуют один из базисов рассматриваемого  $n$ -мерного пространства  $R$  (т.е.  $R^n$ ). Для этого достаточно показать, что векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  линейно независимы, т.е. равенство

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

справедливо лишь при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

<sup>1</sup> Коши Огюстен Луи (1789—1857) — французский математик; Буняковский Виктор Яковлевич (1804—1889) — русский математик.

Действительно, умножая скалярно равенство (3.29) на любой вектор  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), получаем

$$\lambda_1(e_1, e_i) + \lambda_2(e_2, e_i) + \dots + \lambda_n(e_n, e_i) = 0,$$

откуда, учитывая, что  $(e_i, e_j) = 0$  при  $i \neq j$  и  $(e_i, e_i) \neq 0$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , вытекает, что  $\lambda_i = 0$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Сформулируем теперь (без доказательства) основную теорему.

**Теорема.** Во всяком  $n$ -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Примером ортонормированного базиса является система  $n$  единичных векторов  $e_i$ , у которых  $i$ -я компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю:  $e_1 = (1; 0; \dots; 0)'$ ,  $e_2 = (0; 1; \dots; 0)'$ , ...,  $e_n = (0; 0; \dots; 1)'$ . В частности, ортонормированный базис образует тройка векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (см. параграф 3.1).

### 3.6. Линейные операторы

Одно из фундаментальных понятий матричной алгебры — понятие *линейного оператора*.

Рассмотрим два линейных пространства:  $R^n$  размерности  $n$  и  $R^m$  размерности  $m$ .

**Определение.** Если задан закон (правило), по которому каждому вектору  $x$  пространства  $R^n$  ставится в соответствие единственный вектор  $y$  пространства  $R^m$ , то говорят, что задан **оператор (преобразование, отображение)**  $\tilde{A}(x)$ , действующий из  $R^n$  в  $R^m$ , и записывают  $y = \tilde{A}(x)$ .

Оператор (преобразование) называется *линейным*, если для любых векторов  $x$  и  $y$  пространства  $R^n$  и любого числа  $\lambda$  выполняются соотношения:

1.  $\tilde{A}(x + y) = \tilde{A}(x) + \tilde{A}(y)$  — свойство аддитивности оператора;

2.  $\tilde{A}(\lambda x) = \lambda \tilde{A}(x)$  — свойство однородности оператора.

Вектор  $y = \tilde{A}(x)$  называется *образом вектора  $x$* , а сам вектор  $x$  — *прообразом вектора  $y$* .

Если пространства  $R^n$  и  $R^m$  совпадают, то оператор  $\tilde{A}$  отображает пространство  $R^n$  в себя. Именно такие операторы мы будем рассматривать в дальнейшем.



Матрица  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) называется *матрицей оператора*  $\tilde{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ , а ранг  $r$  матрицы  $A$  — рангом оператора  $\tilde{A}$ .

Таким образом, каждому линейному оператору соответствует матрица в данном базисе. Справедливо и обратное: всякой матрице  $n$ -го порядка соответствует линейный оператор  $n$ -мерного пространства.

Связь между вектором  $\mathbf{x}$  и его образом  $\mathbf{y} = \tilde{A}(\mathbf{x})$  можно выразить в матричной форме уравнением

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad (3.34)$$

где  $A$  — матрица линейного оператора;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  — векторы, записываемые в виде вектор-столбцов.

**Пример 3.5.** Пусть в пространстве  $R^3$  линейный оператор  $\tilde{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  задан матрицей  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ .

Найти образ  $\mathbf{y} = \tilde{A}(\mathbf{x})$  вектора  $\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ .

*Решение.* По формуле (3.21) имеем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $\mathbf{y} = 10\mathbf{e}_1 - 13\mathbf{e}_2 - 18\mathbf{e}_3$ . ►

Определим действия над линейными операторами.

*Суммой двух линейных операторов*  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  называется оператор  $(\tilde{A} + \tilde{B})$ , определяемый равенством:  $(\tilde{A} + \tilde{B})(\mathbf{x}) = \tilde{A}(\mathbf{x}) + \tilde{B}(\mathbf{x})$ .

*Произведением линейного оператора*  $\tilde{A}$  *на число*  $\lambda$ , называется оператор  $\lambda\tilde{A}$ , определяемый равенством  $(\lambda\tilde{A})(\mathbf{x}) = \lambda(\tilde{A}(\mathbf{x}))$ .

*Произведением линейных операторов*  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  называется оператор  $\tilde{A}\tilde{B}$ , определяемый равенством:  $(\tilde{A}\tilde{B})(\mathbf{x}) = \tilde{A}(\tilde{B}(\mathbf{x}))$ .

Можно убедиться в том, что операторы  $(\tilde{A} + \tilde{B})$ ,  $\lambda\tilde{A}$ ,  $\tilde{A}\tilde{B}$ , полученные в результате этих действий, удовлетворяют

отмеченным выше свойствам аддитивности и однородности, т.е. являются линейными.

Определим *нулевой оператор*  $\tilde{O}$ , переводящий все векторы пространства  $R^n$  в нулевые векторы  $\tilde{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , и *тождественный оператор*  $\tilde{E}$ , действующий по правилу:  $\tilde{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

Зависимость между матрицами одного и того же оператора в разных базисах выражается теоремой.

**Теорема.** Матрицы  $A$  и  $A^*$  линейного оператора  $\tilde{A}$  в базисах  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  и  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$  связаны соотношением

$$A^* = C^{-1}AC, \quad (3.35)$$

где  $C$  — матрица перехода от старого базиса к новому<sup>1</sup>.

□ При воздействии линейного оператора  $\tilde{A}$  вектор  $\mathbf{x}$  пространства  $R^n$  переводится в вектор  $\mathbf{y}$  этого пространства, т.е. справедливы равенство (3.34) (в старом базисе) и равенство

$$\mathbf{y}^* = A^* \mathbf{x} \quad (3.36)$$

(в новом базисе). Так как  $C$  — матрица перехода от старого базиса к новому, то в соответствии с формулой (3.24)

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x}^*, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{y}^*. \quad (3.38)$$

Умножим равенство (3.37) слева на матрицу  $A$ , получим  $A\mathbf{x} = AC\mathbf{x}^*$  или с учетом (3.34)  $\mathbf{y} = AC\mathbf{x}^*$ . Заменив левую часть полученного выражения в соответствии с формулой (3.38) имеем  $C\mathbf{y}^* = AC\mathbf{x}^*$  или  $\mathbf{y}^* = C^{-1}AC\mathbf{x}^*$ . Сравнивая найденное выражение с равенством (3.36), получаем доказываемую формулу (3.35). ■

**Пример 3.6.** В базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  оператор (преобразование)  $\tilde{A}$  имеет матрицу  $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу оператора  $\tilde{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2^* = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ .

<sup>1</sup> Квадратные матрицы одного порядка  $A$  и  $A^*$  называются *подобными*, если для них найдется такая невырожденная матрица  $C$  такого же порядка, что верно равенство (3.35). Следовательно, матрицы линейного оператора в разных базисах при  $|C| \neq 0$  являются подобными.







$$|A^* - \lambda E| = |C^{-1}| |A - \lambda E| |C| = |C^{-1}C| |A - \lambda E| = |A - \lambda E|, \text{ т.е.}$$

$$|A^* - \lambda E| = |A - \lambda E| \text{ независимо от выбора базиса.}$$

**Пример 3.7.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора  $\tilde{A}$ , заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Составляем характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0,$$

откуда собственные значения линейного оператора  $\tilde{A}$   $\lambda_1 = -5$ ,  $\lambda_2 = 7$ .

Находим собственный вектор  $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, x_2)$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_1 = -5$ . Для этого решаем матричное уравнение

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда находим  $\mathbf{x}_2 = -1,5\mathbf{x}_1$ . Положив  $\mathbf{x}_1 = c_1$ , получим, что векторы  $\mathbf{x}^{(1)} = (c_1; -1,5c_1)$  при любом  $c_1 \neq 0$  являются собственными векторами линейного оператора  $\tilde{A}$  с собственным значением  $\lambda_1 = -5$ .

Аналогично можно убедиться в том, что векторы  $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}c_2; c_2\right)$  при любом  $c_2 \neq 0$  являются собственными векторами линейного оператора  $\tilde{A}$  с собственным значением  $\lambda_2 = 7$ . ►

Отметим некоторые свойства собственных значений матрицы  $A$  линейного оператора  $\tilde{A}$ .

**1.** Произведение собственных значений матрицы  $A$  равно ее определителю:

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (3.42)$$

2. Сумма собственных значений матрицы  $A$  равна следу этой матрицы:

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \quad (3.43)$$

3. Число отличных от нуля собственных значений матрицы  $A$  равно ее рангу.

4. Все собственные значения матрицы отличны от нуля тогда и только тогда, когда матрица  $A$  невырожденная.

5. Если  $\lambda \neq 0$  — собственное значение невырожденной матрицы  $A$ , то  $\lambda^{-1} = 1/\lambda$  — собственное значение обратной матрицы  $A^{-1}$ .

6. Если  $\lambda$  — собственное значение матрицы  $A$ , то  $\lambda^m$  — собственное значение матрицы  $A^m$ , где  $m$  — натуральное число.

Наиболее простой вид принимает матрица  $A$  линейного оператора  $\tilde{A}$ , имеющего  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  с собственными значениями, соответственно равными  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  примем за базисные. Тогда  $\tilde{A}(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) или с учетом (3.30)

$$\tilde{A}(\mathbf{e}_i) = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{in}\mathbf{e}_n = \lambda_i \mathbf{e}_i,$$

откуда  $a_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ , и  $a_{ii} = \lambda_i$ , если  $i = j$ . Таким образом, матрица оператора  $\tilde{A}$  в базисе, состоящем из его собственных векторов, является диагональной и имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Это означает в соответствии с формулой (3.35), что будет диагональной матрица  $A^* = C^{-1}AC$ , подобная матрице  $A$ , где  $C$  — невырожденная матрица перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  к базису  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ , состоящему из собственных векторов матрицы  $A$ .

Верно и обратное: если матрица  $A$  линейного оператора  $\tilde{A}$  в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса — собственные векторы оператора  $\tilde{A}$ .

Можно доказать, что если линейный оператор имеет  $n$  попарно различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы линейно независимы, и матрица этого оператора в соответствующем базисе имеет диагональный вид.

**Пример 3.8.** Привести матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$  линейного оператора  $\hat{A}$  к диагональному виду.

*Решение.* В примере 3.7 были найдены собственные значения матрицы  $\lambda_1 = -5$ ,  $\lambda_2 = 7$  и соответствующие им собственные векторы  $\mathbf{x}^{(1)} = (c_1; -1,5c_1)$  и  $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}c_2; c_2\right)$ . Так как координаты векторов  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$  не пропорциональны, то векторы  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$  линейно независимы. В связи с этим в базисе, состоящем из любых пар собственных векторов

$\mathbf{x}^{(1)} = (c_1; -1,5c_1)$  и  $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}c_2; c_2\right)$  (т.е. при любых  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ , например, при  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 6$  из векторов  $\mathbf{x}^{(1)} = (2; -3)$  и  $\mathbf{x}^{(2)} = (4; 6)$  и т.д.), матрица  $A$  будет иметь диагональный вид

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ или } A^* = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Это легко проверить, взяв, например, в качестве нового базиса линейно независимые собственные векторы  $\mathbf{x}^{(1)} = (2; -3)$  и  $\mathbf{x}^{(2)} = (4; 6)$ . Действительно, матрица  $C$  перехода от старого базиса к новому в этом случае будет иметь вид  $C = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ . Тогда в соответствии с формулой (3.35) матрица  $A$  в новом базисе  $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$  примет вид

$$A^* = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

или после вычислений (которые мы опускаем)  $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ , т.е. получаем ту же диагональную матрицу, элементы которой по главной диагонали равны собственным значениям матрицы  $A$ . ►

### 3.8. Квадратичные формы

При решении различных прикладных задач часто приходится исследовать квадратичные формы.

**Определение.** *Квадратичной формой*  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от  $n$  переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (3.44)$$

Предполагаем, что коэффициенты квадратичной формы  $a_{ij}$  — действительные числа, причем  $a_{ij} = a_{ji}$ . Матрица  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), составленная из этих коэффициентов, называется *матрицей квадратичной формы*<sup>1</sup>.

В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$L = \mathbf{x}' A \mathbf{x}, \quad (3.45)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  — вектор-столбец переменных.

В самом деле

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \sum a_{1j} x_j \\ \sum a_{2j} x_j \\ \dots \\ \sum a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_1 x_j + \dots + \sum_{j=1}^n a_{nj} x_n x_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

и эквивалентность формул (3.44) и (3.45) установлена<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Матрица, у которой все элементы  $a_{ij} = a_{ji}$ , называется *симметрической*.

<sup>2</sup> Выше под знаком  $\Sigma$  понимается  $\sum_{i=1}^n$ .

**Пример 3.9.** Дана квадратичная форма  $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$ . Записать ее в матричном виде.

*Решение.* Найдем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, т.е. 4, 1,  $-3$ , а другие элементы — половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы. Следовательно,

$$L = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

Выясним, как изменяется квадратичная форма при невырожденном линейном преобразовании переменных.

Пусть векторы-столбцы переменных  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  и  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  связаны линейным соотношением  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ , где  $C = (c_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) есть некоторая невырожденная матрица  $n$ -го порядка. Тогда квадратичная форма<sup>1</sup>

$$L = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = (C\mathbf{y})'A(C\mathbf{y}) = (\mathbf{y}'C')A(C\mathbf{y}) = \mathbf{y}'(C'AC)\mathbf{y}.$$

Итак, при невырожденном линейном преобразовании  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  матрица квадратичной формы принимает вид

$$A^* = C'AC. \quad (3.46)$$

**Пример 3.10.** Дана квадратичная форма  $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ . Найти квадратичную форму  $L(y_1, y_2)$ , полученную из данной, линейным преобразованием  $x_1 = 2y_1 - 3y_2$ ;  $x_2 = y_1 + y_2$ .

*Решение.* Матрица данной квадратичной формы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ , а матрица линейного преобразования  $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Следовательно, по формуле (3.46) матрица искомой квадратичной формы

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup> Транспонирование произведения матриц проводим по формуле  $(C\mathbf{y})' = \mathbf{y}'C'$  (см. свойство на с. 34).

а квадратичная форма имеет вид  $L(y_1, y_2) = 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_2^2$ . ►

Следует отметить, что при некоторых удачно выбранных линейных преобразованиях вид квадратичной формы можно существенно упростить.

Квадратичная форма  $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  называется *канонической* (или имеет *канонический вид*), если все ее коэффициенты  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ :

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2, \quad (3.47)$$

а ее матрица является диагональной.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.*

**Пример 3.11.** Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

*Решение.* Вначале выделим полный квадрат при переменной  $x_1$ , коэффициент при квадрате которой отличен от нуля:

$$\begin{aligned} L &= \left[ x_1^2 - 2x_1 \left( \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3) \right) + \left( \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3) \right)^2 \right] - \left( \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3) \right)^2 + \\ &+ 2x_2x_3 + x_3^2 = \left( x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \\ &= \left( x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2. \end{aligned}$$

Теперь выделяем полный квадрат при переменной  $x_2$ , коэффициент при которой отличен от нуля:



$$L = \left( x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \right)^2 - \frac{9}{4} \left( x_2 - \frac{32}{9}x_2x_3 + \frac{256}{81}x_3^2 \right) + \\ + \frac{9}{4} \cdot \frac{256}{81}x_3^2 - 3x_3^2 = \left( x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \right)^2 - \frac{9}{4} \left( x_2 - \frac{16}{9}x_3 \right)^2 + \frac{37}{9}x_3^2.$$

Итак, невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3, \quad y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3, \quad y_3 = x_3$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2. \quad \blacktriangleright$$

Канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным, так как одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами. Однако полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств. Одно из этих свойств сформулируем в виде теоремы.

**Теорема (закон инерции квадратичных форм).** *Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.*

Например, квадратичную форму  $L$  в примере 3.10 можно было привести к виду

$$L_2(y_1, y_2, y_3) = \frac{37}{4}y_1^2 + y_1^2 - y_3^2,$$

применив невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = 2x_1 + x_2 + x_3, \quad y_3 = \frac{7}{2}x_1 + x_2.$$

Очевидно, что число положительных и отрицательных коэффициентов (соответственно два и один) сохранилось.

Следует отметить, что *ранг матрицы квадратичной формы, называемый рангом квадратичной формы, равен числу*

отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

Квадратичная форма  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *положительно (отрицательно) определенной*, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \quad (L(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0).$$

Например, квадратичная форма  $L_1 = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$  является положительно определенной, а форма  $L_2 = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$  — отрицательно определенной.

**Теорема.** Для того чтобы квадратичная форма  $L = x'Ax$  была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $A$  были положительны (отрицательны).

В ряде случаев для установления знакоопределенности квадратичной формы удобнее бывает применять *критерий Сильвестра*<sup>1</sup>.

**Теорема.** Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны, т.е.  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ , где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следует отметить, что для *отрицательно определенных квадратичных форм* знаки главных миноров чередуются, начиная со знака «минус» для минора первого порядка, т.е. *миноры нечетного порядка отрицательны, а четного порядка — положительны.*

Если квадратичная формула знакоопределенная, то все главные (угловые) миноры ее матрицы отличны от нуля.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы имеют общее название «*знакоопределенные квадратичные формы*». Если квадратичная форма  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$

<sup>1</sup> Сильвестр Джеймс Джозеф (1814—1897) — английский математик.

принимает как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *знакопеременной*.

**Замечание.** Симметрическая матрица  $A=(a_{ij}), i, j=1, \dots, n$  называется *положительно (отрицательно) определенной*, если соответствующая ей квадратичная форма  $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = x'Ax$  является положительно (отрицательно) определенной для любого вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ .

**Пример 3.12.** Доказать, что квадратичная форма  $L = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$  является положительно определенной.

*Решение. Первый способ.* Матрица  $A$  квадратичной формы имеет вид  $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ . Характеристическое уравнение матрицы  $A$  имеет следующий вид:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \text{ или } \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0.$$

Решая уравнение, получаем  $\lambda_1 = 14$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Так как корни характеристического уравнения матрицы  $A$  положительны, то на основании приведенной теоремы квадратичная форма  $L$  — положительно определенная.

*Второй способ.* Так как главные миноры матрицы  $A$

$$|a_{11}| = 13; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 56$$

положительны, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма  $L$  положительно определенная. ►

### 3.9. Линейная модель обмена

В качестве примера математической модели экономического процесса, приводящейся к собственному вектору и собственному значению матрицы, рассмотрим *линейную модель обмена (модель международной торговли)*.

Пусть имеется  $n$  стран  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , национальный доход каждой из которых равен соответственно  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим коэффициентами  $a_{ij}$  долю национального дохода, которую страна  $S_j$  тратит на покупку товаров у страны  $S_i$ . Будем счи-



Учитывая (3.48), выражения в скобках равны единице, следовательно, мы приходим к противоречивому неравенству

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Таким образом, неравенство  $p_i > x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) невозможно, и условие  $p_i \geq x_i$  принимает вид  $p_i = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). (С экономической точки зрения это понятно, так как все страны не могут одновременно получать прибыль.)

Вводя вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  национальных доходов стран, получаем матричное уравнение

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad (3.50)$$

в котором вектор  $\mathbf{x}$  записан в виде вектора-столбца; т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы  $A$ , отвечающего собственному значению  $\lambda = 1$ .

**Пример 3.13.** Структурная матрица торговли трех стран  $S_1, S_2, S_3$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

*Решение.* Находим собственный вектор  $\mathbf{x}$ , отвечающий собственному значению  $\lambda = 1$ , решив уравнение  $(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  или систему

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса. Найдем  $x_1 = \frac{3}{2}c$ ;  $x_2 = 2c$ ;  $x_3 = c$ , т.е.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}.$$

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе нацио-

нальных доходов  $\mathbf{x} = \left( \frac{3}{2}c; 2c; c \right)$ , т.е. при соотношении национальных доходов стран  $\frac{3}{2}:2:1$  или 3:4:2. ►

## ПРАКТИКУМ

### 3.10. Векторы на плоскости и в пространстве

**3.14.** Даны три вектора:  $\vec{a} = (3; -1)$ ;  $\vec{b} = (1; -2)$ ;  $\vec{c} = (-1; 1)$ . Построить вектор  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ , найти его длину и разложить вектор  $\vec{p}$  по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

*Решение.* Построение вектора  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  по правилу многоугольника показано на рис. 3.13. В соответствии с этим правилом каждый следующий прибавляемый вектор переносится в конец предыдущего, а вектор  $\vec{p}$  замыкает ломаную, составленную из векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

Найдем координаты вектора  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3; -1) + (1; -2) + (-1; 1) = (3+1-1; -1-2+1) = (3; -1)$ , т.е.  $\vec{p} = (3; -1)$ . Тогда длина вектора определится по формуле (3.2):

$$|\vec{p}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \approx 3.16.$$

Разложить вектор  $\vec{p}$  по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — значит представить его в виде  $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые числа.

Для их определения запишем

$$(3; -1) = \alpha(3; -1) + \beta(1; -2),$$

или

$$\begin{cases} 3 = 3\alpha + \beta, \\ -1 = -\alpha - 2\beta. \end{cases}$$

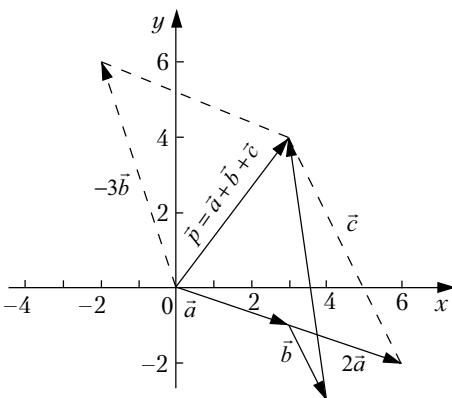


Рис. 3.13

Решив полученную систему, найдем  $\alpha = 2$ ;  $\beta = -3$ , т.е.  $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

Разложение по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  вектора  $\vec{p}$ , представляющего диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $2\vec{a}$  и  $-3\vec{b}$ , приведено на рис. 3.13.

**3.15.** На плоскости даны три единичных вектора  $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ , причем  $(\widehat{\vec{m}\vec{n}}) = 30^\circ$ ,  $(\widehat{\vec{n}\vec{p}}) = 60^\circ$ . Построить вектор  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$  и найти его длину.

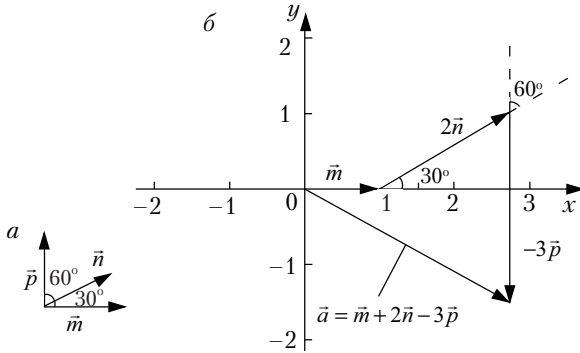


Рис. 3.14

*Решение.* Построение вектора  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$  по заданным векторам  $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$  (рис. 3.14, а) показано на рис. 3.14, б. В системе координат  $Oxy$  вектор  $\vec{m} = (1; 0)$ ,  $\vec{n} = (1 \cdot \cos 30^\circ +$

$+ 1 \cdot \cos 60^\circ)$ , или  $\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ , и  $\vec{p} = (0; 1)$ , поэтому  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} -$

$- 3\vec{p} = (1; 0) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) - 3(0; 1) = (1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot 0; 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 1)$ ,

или  $\vec{a} = (1 + \sqrt{3}; -2)$ .

По формуле (3.2) длина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{8 + 2\sqrt{3}} \approx 3,4.$$

Длина вектора могла быть найдена и иначе; если использовать формулу (3.7),

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}|^2 &= \vec{a}^2 = (\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p})^2 = \vec{m}^2 + 4\vec{n}^2 + 9\vec{p}^2 + 4\vec{m}\vec{n} - 6\vec{m}\vec{p} - 12\vec{n}\vec{p} = \\
 &= |\vec{m}|^2 + 4|\vec{n}|^2 + 4|\vec{m}||\vec{n}|\cos 30^\circ - 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos 90^\circ - 12|\vec{n}||\vec{p}|\cos 60^\circ = \\
 &= 1^2 + 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 - 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 8 + 2\sqrt{3},
 \end{aligned}$$

откуда  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{8 + 2\sqrt{3}} \approx 3,4$ . ►

**3.16.** Даны четыре вектора

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}; \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}; \vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}; \vec{d} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}.$$

Необходимо: а) разложить вектор  $\vec{d}$  по векторам  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ;  
б) найти длину и направление вектора  $\vec{m} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$ .

*Решение.*

а) По условию  $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  — некоторые числа. Следовательно,

$$3\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) + \gamma(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}).$$

Приравнявая коэффициенты при единичных векторах (ортах)  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , получаем систему

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta + 2\gamma, \\ 7 = \alpha - \beta + 2\gamma, \\ -7 = 2\beta - \gamma, \end{cases}$$

решение которой  $\alpha = 2; \beta = -3; \gamma = 1$ , т.е.  $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ .

б) Найдем вектор

$$\vec{m} = 5\vec{a} + 2\vec{b} = 5(2\vec{i} + \vec{j}) + 2(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Его длина  $|\vec{m}| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$ , а направляющие косинусы найдем по формулам (3.13):

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos \beta = \frac{3}{13}, \quad \cos \gamma = \frac{4}{13}. \quad \blacktriangleright$$



**3.17.** Даны два единичных вектора  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , угол между которыми равен  $120^\circ$ . Найти: а) острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = -4\vec{m} + 2\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$ ; б) проекцию вектора  $\vec{a}$  на направление вектора  $\vec{b}$ .

*Решение.*

а) Искомый угол  $\varphi$  (рис. 3.15) определим по формуле (3.9)

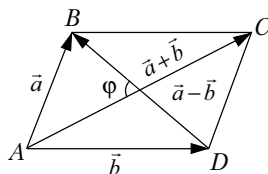
$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{DB}|},$$

где

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} = (-4\vec{m} + 2\vec{n}) + (\vec{m} + 3\vec{n}) = -3\vec{m} + 5\vec{n},$$

$$\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b} = (-4\vec{m} + 2\vec{n}) - (\vec{m} + 3\vec{n}) = -5\vec{m} - \vec{n}.$$

По формулам (3.6)–(3.8) найдем скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{DB}$  и их длины:



**Рис. 3.15**

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (-3\vec{m} + 5\vec{n})(-5\vec{m} - \vec{n}) = 15\vec{m}^2 - 22\vec{m}\vec{n} - 5\vec{n}^2 = 15|\vec{m}|^2 -$$

$$- 22|\vec{m}||\vec{n}|\cos 120^\circ - 5|\vec{n}|^2 = 15 \cdot 1^2 - 22 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1/2) - 5 \cdot 1^2 = 21;$$

$$\overrightarrow{AC}^2 = (-3\vec{m} + 5\vec{n})^2 = 9\vec{m}^2 - 30\vec{m}\vec{n} + 25\vec{n}^2 = 9 \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1/2) + 25 = 49;$$

$$\overrightarrow{DB}^2 = (-5\vec{m} - \vec{n})^2 = 25\vec{m}^2 + 10\vec{m}\vec{n} + \vec{n}^2 = 25 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1/2) + 1^2 = 21;$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{49} = 7; \quad |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{\overrightarrow{DB}^2} = \sqrt{21}.$$

Теперь  $\cos \varphi = \frac{21}{7\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$  и  $\varphi = \arccos \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 49^\circ$ .

б) По формуле (3.12)

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Найдем

$$\vec{a}\vec{b} = (-4\vec{m} + 2\vec{n})(\vec{m} + 3\vec{n}) = -4m^2 - 10\vec{m}\vec{n} + 6n^2 = -4 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 \cdot 1 \times \\ \times \cos 120^\circ + 6 \cdot 1^2 = 7;$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{(\vec{m} + 3\vec{n})^2} = \sqrt{\vec{m}^2 + 6\vec{m}\vec{n} + 9n^2} = \\ = \sqrt{1^2 + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ + 9 \cdot 1^2} = \sqrt{7}.$$

Отсюда  $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$ . ►

**3.18.** Даны векторы  $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ , где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  — единичные векторы, образующие угол в  $120^\circ$ . Найти угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**3.19.** В плоскости находятся три вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Известно, что  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 5$ ,  $(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = 60^\circ$ ,  $(\widehat{\vec{b} \vec{c}}) = 60^\circ$ . Найти длину вектора  $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

**3.20.** Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = -2\vec{j} + \vec{k}$ ;  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ .

**3.21.** Определить длины векторов, на которых построен параллелограмм с диагоналями  $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  и  $\vec{d} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ .

**3.22.** Даны длины векторов  $|\vec{a}| = 11$ ,  $|\vec{b}| = 23$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$ . Определить  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

**3.23.** При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$  и  $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ :

а) коллинеарны; б) ортогональны?

**3.24.** Вектор  $\vec{OA}$  составляет с осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  углы, соответственно равные  $\pi/3$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/4$ . Доказать, что векторы  $\vec{OB}$  и  $\vec{OB}$  перпендикулярны, где точка  $B(2; 2; -2\sqrt{2})$ .

**3.25.** На плоскости  $Oxy$  построить векторы  $\vec{OA} = \vec{a} = 2\vec{i}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$  и  $\vec{OC} = \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ . Разложить геометрически и аналитически вектор  $\vec{c}$  по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**3.26.** Даны три вектора:  $\vec{a} = (2; -2)$ ,  $\vec{b} = (2; -1)$ ,  $\vec{c} = (2; 4)$ . Найти координаты вектора  $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$  и разложить его по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**3.27.** Даны четыре вектора:  $\vec{a} = (2; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{c} = (2; 2; -1)$ ,  $\vec{d} = (3; 7; -7)$ . Разложить вектор  $\vec{a}$  по векторам  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ .

**3.28.** Найти длину вектора  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$  и его направляющие косинусы.

**3.29.** Вектор составляет с осями  $Oy$  и  $Oz$  углы соответственно  $60^\circ$  и  $120^\circ$ . Какой угол он составляет с осью  $Ox$ ?

**3.30.** Даны точки  $M_1(4; -2; 6)$  и  $M_2(1; 4; 0)$ . Найти длину и направление вектора  $\overline{M_1M_2}$ .

**3.31.** Даны векторы  $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 5\sqrt{2}\vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$ . Найти угол, образуемый вектором  $\vec{a} - \vec{b}$  с осью  $Oz$ .

**3.32.** При каком значении  $m$  векторы  $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$  перпендикулярны?

**3.33.** Найти проекцию вектора  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  на вектор  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ .

**3.34.** Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$  и  $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ . Найти проекцию вектора  $\vec{a} + \vec{c}$  на вектор  $\vec{b} + \vec{c}$ .

**3.35.** Найти вектор  $\vec{d}$ , перпендикулярный векторам  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$ , если известно, что его проекция на вектор  $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  равна единице.

### 3.11. Понятия $n$ -мерного вектора и векторного пространства. Евклидово пространство

**3.36.** Выяснить, является ли линейным пространством множество всех действительных, целых и рациональных чисел?

*Решение.* Из указанных множеств только множество действительных чисел образует линейное пространство, так как при сложении действительных чисел и умножении их на любое число получаются всегда действительные числа. А при умножении целых чисел, например, на рациональные числа  $\lambda = p/q$  получаются рациональные числа, но не обязательно целые. Аналогично, при умножении рациональных чисел, например, на иррациональные числа  $\lambda$  получаются иррациональные, а не рациональные числа. ►

**3.37.** Выяснить, являются ли векторы  $\mathbf{a}_1 = (4; -5; 2; 6)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (2; -2; 1; 3)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (6; -3; 3; 9)$ ,  $\mathbf{a}_4 = (4; -1; 5; 6)$  линейно зависимыми?

*Решение.* Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  линейно зависимы, если существуют такие значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  (из которых хотя бы одно отлично от нуля), что будет выполняться векторное равенство<sup>1</sup> (3.16):

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача свелась к решению системы

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0, \\ -5\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0, \\ 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решая систему (1) методом Гаусса, приведем ее к виду

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_2 + 18\lambda_3 + 16\lambda_4 = 0, \\ -6\lambda_4 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

т.е. ранг матрицы системы ( $r = 3$ ) меньше числа переменных ( $n = 4$ ), откуда следует бесконечное множество решений ( $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4$ ) данной системы, следовательно, векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  линейно зависимы.

**Замечание.** Установить неопределенность системы однородных линейных уравнений (1) можно было и иначе, убедившись в том, что определитель ее матрицы  $\Delta = |A| = 0$ . ►

<sup>1</sup> В данном случае векторы удобнее записать в виде вектор-столбцов.

**3.38.** Найти все значения  $m$ , при которых вектор  $\mathbf{b} = (1; m; 3)$  линейно выражается через векторы  $\mathbf{a}_1 = (2; 3; 7)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (3; -2; 4)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (-1; 1; -1)$ .

*Решение.* Вектор  $\mathbf{b}$  есть линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , если

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3,$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — какие-то числа.

Решая соответствующую систему

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 1, \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = m, \\ 7\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса, приводим ее к виду

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 1, \\ 13\lambda_2 - 5\lambda_3 = 3 - 2m, \\ 0 = 2 - 2m. \end{cases}$$

Система будет совместной (а именно, неопределенной), если  $0 = 2 - 2m$ , т.е. при  $m = 1$  вектор  $\mathbf{b}$  есть линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ .

**Замечание.** Задача допускает и другое решение. Так как

определитель матрицы системы  $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$ , то

система будет совместной (а именно, неопределенной), если определитель любой матрицы  $A_j$ , полученной из матрицы  $A$  заменой  $j$ -го столбца столбцом свободных членов, равен нулю, т.е.

$$\Delta_j = |A_j| = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Например, или  $\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$ , или  $\Delta_2 = |A_2| = 0$ ,  
или  $\Delta_3 = |A_3| = 0$  при  $m = 1$ . ►

**3.39.** В базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  даны векторы  $\mathbf{a}_1 = (1; 1; 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0; 2; 3)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (0; 1; 5)$ : а) доказать, что векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , образуют базис; б) найти координаты вектора  $\mathbf{d} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  в базисе  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ .

*Решение.*

а) Три вектора  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  трехмерного пространства образуют базис, если они линейно независимы. Составим векторное равенство (3.16):

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Решая уравнение (1) аналогично примеру 3.37, можно убедиться в единственном нулевом его решении ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ), т.е. векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  представляют совокупность линейно независимых векторов и, следовательно, образуют базис.

б) Выразим связь между базисами  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  и  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

В соответствии с формулой (3.22)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \text{ откуда матрица перехода } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(Обращаем внимание на то, что коэффициенты разложения новых базисных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  по старому базису  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  образуют *столбцы* матрицы перехода  $A$ .)

$$\text{Вычисляем } A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ (см. параграф 1.2).}$$

Теперь по формуле (3.24) при  $\mathbf{x} = (2; -1; 1)'$  получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \mathbf{x}_2^* \\ \mathbf{x}_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. координаты вектора  $\mathbf{d}$  в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  есть  $(2; -2; 1)$ , следовательно,

$$\mathbf{d} = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3. \blacktriangleright$$

**3.40.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  к базису  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ . Найти координаты вектора  $\mathbf{e}_3^*$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

*Решение.* Вектор  $\mathbf{e}_3^*$  в базисе  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$  имеет координаты  $\mathbf{e}_3^* = (0; 0; 1)$ .

Следовательно, по формуле (3.24)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix},$$

т.е. в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  вектор  $\mathbf{e}_3^* = (3; 4; -5)$ .  $\blacktriangleright$

**3.41.** Предприятие выпускает четыре вида продукции  $P_1, P_2, P_3, P_4$  в количествах 50, 80, 20, 120 ед. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно 7; 3,5; 10; 4 кг. Определить суммарный расход сырья и его изменение при изменениях выпуска продукции  $P_1, P_2, P_3, P_4$  соответственно на +5; -4; -2; +10 ед.

*Решение.* Пусть вектор выпуска продукции  $\mathbf{x} = (50; 80; 20; 120)$ , а вектор расхода сырья  $\mathbf{y} = (7; 3,5; 10; 4)$ . Тогда суммарный расход сырья  $S$  есть скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , т.е.

$$S = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 50 \cdot 7 + 80 \cdot 3,5 + 20 \cdot 10 + 120 \cdot 4 = 1310 \text{ (кг)}.$$

По свойству скалярного произведения векторов изменение суммарного расхода сырья

$$\begin{aligned}\Delta S &= (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\Delta \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\ &= +5 \cdot 7 - 4 \cdot 3,5 - 2 \cdot 10 + 10 \cdot 4 = 41 \text{ (кг)}. \blacktriangleright\end{aligned}$$

**3.42.** Даны векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , образующие ортонормированный базис. Найти угол между векторами  $\mathbf{x} = 5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ .

*Решение.* Найдем по формулам (3.25) и (3.26) скалярное произведение векторов и их длины, учитывая, что единичные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  образуют ортонормированный базис:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6; \\ |\mathbf{x}| &= \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}; \quad |\mathbf{y}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

По формуле (3.28)

$$\cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{13}} \text{ и } \varphi = \arccos \sqrt{\frac{6}{13}} \approx 47^\circ. \blacktriangleright$$

**3.43.** Выяснить, является ли линейным пространством множество всех алгебраических многочленов одной переменной: а) степени не выше  $n$ ; б) степени  $n$ ; в) степени выше  $n$ ?

**3.44.** Выяснить, является ли линейным пространством множество всех: а) матриц размера  $m \times n$ ; б) диагональных матриц порядка  $n$ ; в) невырожденных матриц порядка  $n$ ; г) векторов?

**3.45.** Выяснить, является ли множество всех решений системы  $n$  линейных однородных уравнений с  $n$  переменными линейным пространством?

**3.46.** Каким должно быть число  $a$ , чтобы множество, состоящее из одного этого числа, являлось линейным пространством?

**3.47.** Доказать, что в двумерном векторном пространстве  $R^2$ : а) векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  линейно независимы; б) любые два коллинеарных вектора линейно зависимы; в) любые три вектора линейно зависимы.

**3.48.** Доказать, что в трехмерном векторном пространстве  $R^3$ : а) векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — линейно независимы; б) любые



три компланарных вектора линейно зависимы; в) любые четыре вектора линейно зависимы.

**3.49.** Доказать, что система векторов будет линейно зависима, если она содержит: а) два равных вектора; б) два пропорциональных вектора.

**3.50.** В некотором базисе заданы векторы  $\mathbf{a}_1 = (-2; 0; 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1; -1; 0)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (0; 1; 2)$ . Выяснить, является ли вектор  $\mathbf{a}_4 = (2; 3; 4)$  линейной комбинацией векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ .

**3.51.** В некотором базисе даны векторы  $\mathbf{a}_1 = (2; 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (-1; 3)$ . Найти все значения  $m$ , при которых вектор  $\mathbf{b} = (1; m)$  в том же базисе является линейной комбинацией векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ .

**3.52.** В некотором базисе даны векторы  $\mathbf{a}_1 = (1; 2; 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (2; 1; 1)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (-1; -2; -1)$ . Найти все значения  $m$ , при которых вектор  $\mathbf{b} = (2; 3; m)$  линейно выражается через векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ .

Выяснить, являются ли линейно зависимыми или линейно независимыми векторы:

**3.53.**  $\mathbf{a}_1 = (-7; 5; 19)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (-5; 7; -7)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (-8; 7; 14)$ .

**3.54.**  $\mathbf{a}_1 = (1; 8; -1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (-2; 3; 3)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (4; -11; 9)$ .

**3.55.** В базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  даны векторы  $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ : а) доказать, что векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  образуют базис; б) найти координаты вектора  $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$  в базисе  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ .

**3.56.** Выяснить, образуют ли базис трехмерного пространства  $R^3$  векторы  $\mathbf{a}_1 = (1; 1; 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1; 0; 1)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (2; 1; 2)$ .

**3.57.** Выяснить, образуют ли базис четырехмерного пространства  $R^4$  векторы  $\mathbf{a}_1 = (1; 1; 1; 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1; 0; 1; 0)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (0; -1; 0; 1)$ ,  $\mathbf{a}_4 = (1; 0; 0; 1)$ .

**3.58.** В базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  задан вектор  $\mathbf{x} = (4; 0; -12)$ . Найти координаты этого вектора в базисе  $(\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2^* = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^* = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$ .

**3.59.** Найти матрицу перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  к базису  $(\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ .

**3.60.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  к базису  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*)$ . Найти координаты векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  в базисе  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*)$ .

**3.61.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  к базису  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ . Найти координаты векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в базисе  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ .

**3.62.** Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  к базису  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ . Найти координаты вектора  $\mathbf{e}_2^*$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

**3.63.** Найти матрицу перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  к базису  $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ .

**3.64.** Предприятие выпускает три вида продукции  $P_1, P_2, P_3$  в количестве 15, 25, 40 шт., реализуемых по ценам соответственно 30, 40, 50 усл. ден. ед. Найти выручку предприятия от реализации продукции и ее изменение при изменении цен продукции  $P_1, P_2, P_3$  соответственно на +5, -3, +2 усл. ден. ед.

**3.65.** Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  образуют ортогональный базис. Найти скалярное произведение векторов  $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$  и их длины, если  $|\mathbf{e}_1| = 1, |\mathbf{e}_2| = 2, |\mathbf{e}_3| = 2$ .

**3.66.** Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  образуют ортонормированный базис. Найти угол между векторами  $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{y} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ .

### 3.12. Линейные операторы

**3.67.** Выяснить, является ли оператор  $\tilde{A}(\mathbf{x}) = (2x_1 - x_3; x_3; x_1 - x_2)$  линейным, если вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

*Решение.* По условию задачи вектор  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ . Пусть вектор  $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$ . Тогда по определению операций над векторами

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3); \quad \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3).$$

Найдем образы векторов

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (2(x_1 + y_1) - (x_3 + y_3); x_3 + y_3; (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) = \\ &= ((2x_1 - x_3) + (2y_1 - y_3); x_3 + y_3; (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)) = \\ &= (2x_1 - x_3; x_3; x_1 - x_2) + (2y_1 - y_3; y_3; y_1 - y_2); \\ \tilde{A}(\lambda \mathbf{x}) &= (\lambda x_1 - \lambda x_3; \lambda x_3; \lambda x_1 - \lambda x_2) = \lambda(x_1 - x_3; x_3; x_1 - x_2).\end{aligned}$$

Так как  $\tilde{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \tilde{A}(\mathbf{x}) + \tilde{A}(\mathbf{y})$ ,  $\tilde{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \tilde{A}(\mathbf{x})$ , то оператор  $\tilde{A}$  является линейным. ►

**3.68.** Найти матрицу линейного оператора

$\mathbf{y} = A(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 - x_3; 2x_3; 2x_2 + 5x_3)$ , где  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$  в том базисе, в котором даны координаты векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

*Решение.* Запишем связь между координатами векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  и соответственно матрицу линейного оператора  $A$ :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = 2x_3, \\ y_3 = 2x_2 + 5x_3. \end{cases} \text{ следовательно, } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

**3.69.** Найти (в том же базисе) координаты вектора  $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$ , если оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

*Решение.* В соответствии с формулой (3.34)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \mathbf{y} = (-4; 7; 7). \quad \blacktriangleright$$

**3.70.** Матрица линейного оператора в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу  $A^*$  этого оператора в базисе  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ , если

$$e_1^* = 3e_1 + e_2 + 2e_3, \quad e_2^* = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \quad e_3^* = -e_1 + 2e_2 + 5e_3.$$

*Решение.* Матрица  $C$  перехода от старого базиса к новому имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (3.35)

$$A^* = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Расчеты предлагаем провести читателю самостоятельно.) ►

Выяснить, является ли оператор  $\tilde{A}(x)$  линейным, если вектор  $x = (x_1; x_2; x_3)$ :

**3.71.**  $\tilde{A}(x) = (x_2 - 2x_3; x_1 + x_2; x_1).$

**3.72.**  $\tilde{A}(x) = (x_1x_2; x_2x_3; x_1x_3).$

**3.73.**  $\tilde{A}(x) = (x_1^2; x_2^2; x_3^2).$

**3.74.**  $\tilde{A}(x) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_3; x_2 - 2x_3).$

**3.75.**  $\tilde{A}(x)$  — тождественный оператор  $\tilde{E}(x) = (x_1; x_2; x_3).$

**3.76.**  $\tilde{A}(x)$  — нулевой оператор  $\tilde{O}(x) = (0; 0; 0).$

Найти координаты вектора  $y = \tilde{A}(x)$ , если оператор  $\tilde{A}$  задан матрицей  $A$  (в этом же базисе):

**3.77.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; x = e_1.$

**3.78.**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; x = -e_1 + 2e_2 + e_3.$

$$3.79. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{x} = (2; -1).$$

Найти матрицу  $A^*$  линейного оператора в базисе  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ , заданного матрицей  $A$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ :

$$3.80. A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

$$3.81. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_1^* = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{e}_2^* = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_3^* = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3.$$

$$3.82. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_1 = 3\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^*; \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^*.$$

$$3.83. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2 = 3\mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^*;$$

$$\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + 2\mathbf{e}_3^*.$$

### 3.13. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (матрицы)

3.84. Найти собственные значения и собственные векторы оператора  $\tilde{A}$  (матрицы  $A$ ):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* 1. Составляем характеристическое уравнение (3.41)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7 - \lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований уравнение примет вид

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\lambda^2(\lambda - 9) - 81(\lambda - 9) = 0, \text{ или } (\lambda - 9)(\lambda^2 - 81) = 0,$$

откуда собственные значения оператора  $\tilde{A}$  (матрицы  $A$ )  $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ ;  $\lambda_3 = -9$ .

2. Найдем собственный вектор  $\mathbf{x}^{(1)}$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ :

$$(A - 9E)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \text{ или } \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получаем

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений  $r = 1$ , то для получения ее решений нужно рассматривать  $m - r = 3 - 1 = 2$  свободные (неосновные) переменные, например  $x_2$  и  $x_3$ . Полагая  $x_2 = c_1, x_3 = c_2$ , найдем вектор  $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ , который при любых  $c_1, c_2$ , удовлетворяющих условию  $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ , есть собственный вектор оператора  $\tilde{A}$  (матрицы  $A$ ) с собственным значением  $\lambda = 9$ .

3. Аналогично находим, что вектор  $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_3; \frac{1}{2}c_3; c_3 \end{pmatrix}$  при любом  $c_3 \neq 0$  есть собственный вектор оператора  $\tilde{A}$  (матрицы  $A$ ) с собственным значением  $\lambda = -9$ . ►

**3.85.** Привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ линейного оператора } \tilde{A}.$$

*Решение.* В примере 3.84 найдены собственные значения оператора  $\tilde{A}$  (матрицы  $A$ )  $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ ;  $\lambda_3 = -9$  и его собственные векторы  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c_1 - c_2; c_1; c_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} c_3; \frac{1}{2}c_3; c_3 \end{pmatrix}$ , где  $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ ,  $c_3 \neq 0$ . Следовательно, в базисе, состоящем из трех собственных векторов, матрица  $A$  будет иметь диагональный вид

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \text{diag}(9; 9; -9).$$

Это означает, что при переходе от старого базиса

$$\left( \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

к базису, состоящему из собственных векторов (полученных, например, при  $c_1 = 2, c_2 = 0, c_3 = 2$  и  $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 2$ ),

т.е. при матрице перехода  $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  матрица  $A$  в

соответствии с формулой (3.35) станет диагональной:

$$A^* = C^{-1}AC = \text{diag}(9; 9; -9). \text{ ►}$$

**3.86.** Выяснить, приводится ли к диагональному виду матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Аналогично примеру 3.84, устанавливаем, что данная матрица имеет собственные значения  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$  и собственные векторы  $\mathbf{x}^{(1)} = (0; -c_1; c_1)$  и  $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}c_2; -\frac{3}{2}c_2; c_2\right)$ , где  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ . Так как два линейно независимых собственных вектора, получаемых при любых парах значений  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ , не могут образовать базис в пространстве  $R^3$ , то матрица  $A$  не может быть приведена к диагональному виду. ►

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора  $\hat{A}$  (матрицы  $A$ ):

**3.87.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

**3.88.**  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

**3.89.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

**3.90.**  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

**3.91.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

**3.92.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**3.93.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

**3.94.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \\ -1 & -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$



Найти базис, в котором линейный оператор  $\tilde{A}$ , задаваемый матрицей  $A$ , имеет диагональный вид:

$$\mathbf{3.95.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.96.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.97.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, приводится ли к диагональному виду матрица  $A$ . Если приводится, то записать ее диагональный вид:

$$\mathbf{3.98.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.99.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.100.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.101.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран  $S_1, \dots, S_n$  для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли  $A$ :

$$\mathbf{3.102.} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.103.} \quad A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы

торговли  $A$ , если известно, что суммарный доход этих стран равен 402 усл. ден. ед.:

$$\mathbf{3.104.} \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{3.105.} \quad A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.106.} \quad A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 3/10 \\ 1/2 & 3/10 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.107.} \quad A = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/5 & 2/5 \\ 3/10 & 1/10 & 1/10 \\ 2/5 & 7/10 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

### 3.14. Квадратичные формы

**3.108.** Найти квадратичную форму, соответствующую матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* В соответствии с (3.45) после преобразований получим

$$\begin{aligned} L = \mathbf{x}' A \mathbf{x} &= (x_1; x_2; x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**3.109.** Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

*Решение.* Сгруппируем все члены, содержащие  $x_1$ , и дополним их до полного квадрата:

$$\begin{aligned} L &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 = \\ &= (x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2) - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3. \end{aligned}$$

Сгруппируем все члены, содержащие  $x_2$ , и дополним их до полного квадрата:

$$L = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2.$$

Итак, невырожденное линейное преобразование  $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $y_2 = x_2 + x_3$ ,  $y_3 = x_3$  приводит данную квадратичную форму к каноническому виду  $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$ . ►

**3.110.** Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму  $L$ :

а)  $L = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ ;

б)  $L = 2x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$ ; в)  $L = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ .

*Решение.*

а) *I способ.* Матрица  $A$  квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения (находим аналогично, примеру 3.84)  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{7}$  — все положительные, следовательно, квадратичная форма  $L(x_1, x_2, x_3)$  положительно определенная.

*II способ.* Так как все главные (угловые) миноры матрицы  $A$  положительны, т.е.  $\Delta_1 = 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ ,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0, \text{ то по критерию Сильвестра квадра-}$$

тичная форма  $L(x_1; x_2; x_3)$  положительно определенная.

б) Матрица  $A$  квадратичной формы имеет вид  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ . Так как  $\Delta_1 = 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -7 < 0$ , то квадратичная форма  $L(x_1; x_2)$  не является знакоопределенной (она была бы отрицательно определенной, если бы  $\Delta_1 < 0$ , а  $\Delta_2 > 0$ ).

в) Матрица  $A$  квадратичной формы имеет вид  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Так как  $\Delta_1 = 4$ , а  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , то квадратичная форма  $L(x_1; x_2)$  не является знакоопределенной. ►

Написать квадратичную форму  $L$  в матричном виде:

**3.111.**  $L = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ .

**3.112.**  $L = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$ .

**3.113.**  $L = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$ .

Найти ранг квадратичной формы  $L$ :

**3.114.**  $L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$ .

**3.115.**  $L = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$ .

**3.116.**  $L = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$ .

Найти квадратичную форму, полученную из данной указанным преобразованием:

**3.117.**  $L = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ ;

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2. \end{cases}$$

**3.118.**  $L = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_2x_2$ ;

$$\begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_2, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + y_3, \\ x_3 = -2y_1 - y_2. \end{cases}$$

**3.119.**  $L = 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$ ;

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Привести к каноническому виду квадратичные формы:

**3.120.**  $L = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$

**3.121.**  $L = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$

**3.122.**  $L = x_1^2 - 4x_2x_3 + x_3^2.$

**3.123.**  $L = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$

Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму  $L$ :

**3.124.**  $L = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2.$

**3.125.**  $L = -2x_2^2 - x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2.$

**3.126.**  $L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

**3.127.**  $L = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

При каких значениях параметра  $m$  является знакоопределенной квадратичная форма  $L$ :

**3.128.**  $L = mx_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$

**3.129.**  $L = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2mx_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$

**3.130.**  $L = mx_2^2 - x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3.$

Найти все значения параметра  $m$ , при которых положительно определены квадратичные формы  $L$ :

**3.131.**  $L = 2x_1^2 + x_2^2 + mx_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

**3.132.**  $L = mx_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

**3.133.**  $L = 2mx_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$

**3.134.**  $L = 2x_1^2 + mx_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

Найти все значения параметра  $m$ , при которых отрицательно определена квадратичная форма  $L$ :

**3.135.**  $L = -x_1^2 + mx_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

**3.136.**  $L = -2x_1^2 - 2x_2^2 + mx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

**3.137.**  $L = 2mx_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

**3.138.**  $L = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2mx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

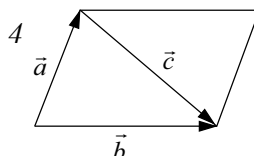
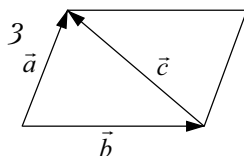
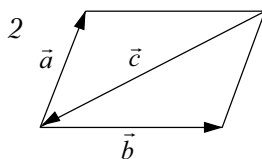
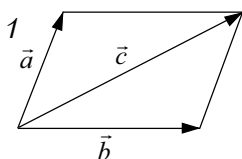
### Контрольные задания по главе 3 «Элементы матричного анализа»

№	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3
1	Даны два единичных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$ , угол между которыми $120^\circ$ . Найти: а) острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ; б) проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$ :		
	$\vec{a} = -2\vec{m} + \vec{n};$ $\vec{b} = -\vec{m} + 3\vec{n}$	$\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n};$ $\vec{b} = -3\vec{m} + \vec{n}$	$\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n};$ $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$
2	Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ :		
	$\mathbf{a}_1 = (1; 4; 6);$ $\mathbf{a}_2 = (1; -1; 1);$ $\mathbf{a}_3 = (1; 1; 3)$	$\mathbf{a}_1 = (2; -3; 1);$ $\mathbf{a}_2 = (3; -1; 5);$ $\mathbf{a}_3 = (1; -4; 3)$	$\mathbf{a}_1 = (1; 2; 3);$ $\mathbf{a}_2 = (4; 5; 6);$ $\mathbf{a}_3 = (7; 8; 9)$
3	Даны четыре вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{b}$ в этом базисе:		
	$\mathbf{a}_1 = (4; 5; 2);$ $\mathbf{a}_2 = (3; 0; 1);$ $\mathbf{a}_3 = (-1; 4; 2);$ $\mathbf{b} = (5; 7; 8)$	$\mathbf{a}_1 = (3; -5; 2);$ $\mathbf{a}_2 = (4; 5; 1);$ $\mathbf{a}_3 = (-3; 0; -4);$ $\mathbf{b} = (-4; 5; -16)$	$\mathbf{a}_1 = (-2; 3; 5);$ $\mathbf{a}_2 = (1; -3; 4);$ $\mathbf{a}_3 = (7; 8; -1);$ $\mathbf{b} = (1; 20; 1)$
4	Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$ (матрицы $A$ ). Привести матрицу $A$ к диагональному виду $A^*$ (если это возможно):		
	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
5	Привести к каноническому виду квадратическую форму $L$ . Найти ранг квадратичной формы $L$ . Выяснить, является ли квадратическая форма $L$ знакоопределенной:		
	$L = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$	$L = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$	$L = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$

№	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3
6	Выяснить, в каком отношении должны быть национальные доходы трех стран для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли $A$ :		
	$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$

## Тест 3

1. Установить соответствие между рисунками и векторными равенствами:



- а)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ; б)  $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ ; в)  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ;  
г)  $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ .

2. Определить длину вектора  $\vec{c} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\vec{a}\vec{b} = 120^\circ$ .

3. Найти  $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}$ , где  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  — единичные векторы, удовлетворяющие условию  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ .

4. Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ ;  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ ;  $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ . Найти (с точностью до 0,1) проекцию вектора  $(\vec{b} + \vec{c})$  на направление вектора  $(\vec{a} + \vec{b})$ .

5. Выяснить, какие множества элементов образуют линейное пространство:

- 1) множество натуральных чисел;

- 2) множество четных чисел;  
 3) множество всех многочленов степени не выше  $n$ ;  
 4) множество всех ненулевых матриц;  
 5) множество всех решений системы  $n$  линейных однородных уравнений с  $n$  переменными.

6. Вектор  $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  представить в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , если  $\mathbf{a} = (3; -1)$ ;  $\mathbf{b} = (1; -2)$ ;  $\mathbf{c} = (-1; 7)$ .

Ответ:  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ , где  $\alpha = \dots$ ;  $\beta = \dots$

7. Выяснить, какие из приведенных троек векторов образуют базис в пространстве  $R^3$ :

- 1)  $(0; 0; 1)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(0; 1; 1)$ ; 2)  $(0; 0; 1)$ ,  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$ ;  
 3)  $(1; 1; 1)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(2; 2; 2)$ ; 4)  $(1; 1; 1)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$ .

8. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  к базису  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*)$ . Найти координаты  $(a, b)$  вектора  $\mathbf{e}_1$  в базисе  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*)$ .

9. Вектор  $\mathbf{x}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  имеет координаты  $(-3; 1)$ . Найти координаты  $(a, b)$  этого вектора в базисе  $(\mathbf{e}_1^* = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_2)$ .

10. Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  образуют ортонормированный базис. Найти (с точностью до 0,01) косинус угла между векторами  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ .

11. Линейный оператор в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  задан матрицей  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Найти образ  $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$  вектора  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ .

Ответ:  $\mathbf{y} = (a; b)$ , где  $a = \dots$ ;  $b = \dots$

12. Известно, что неколлинеарные векторы  $\mathbf{x}_1 = (a; 1)$  и  $\mathbf{x}_2 = (b; 1)$  являются собственными векторами матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти соответствующие собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $A$  и значения  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ).

13. Матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  (см. задание 12) привести к диагональному виду  $A^*$ .

Ответ:  $A^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , где  $a = \dots$ ;  $b = \dots$



14. Найти ранг матрицы квадратичной формы

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

15. Найти наибольшее целое значение  $m$ , при котором квадратичная форма  $L = 4mx_1^2 + 3x_2^2 + 48x_1x_2$  не является знакоопределенной.

# Глава 4

## УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

#### 4.1. Системы координат. Простейшие задачи

Прямая, служащая для изображения действительных чисел, в которой выбрана начальная точка  $O$ , единица измерения и положительное направление, называется *числовой прямой*, или *числовой осью*. Точка  $M$  этой прямой характеризуется определенным числом — *координатой*  $x$ , т.е.  $M(x)$  (рис. 4.1).

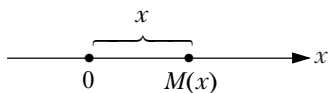


Рис. 4.1

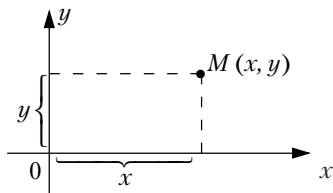


Рис. 4.2

Две взаимно перпендикулярные оси  $Ox$  и  $Oy$ , имеющие общее начало  $O$  и одинаковую единицу масштаба, образуют *прямоугольную* (или *декартову*) систему координат на плоскости (рис. 4.2).

Ось  $Ox$  называется *осью абсцисс*, ось  $Oy$  — *осью ординат*, точка  $O$  — *началом координат* и плоскость  $Oxy$  — *координатной плоскостью*. Каждой точке  $M$  этой плоскости соответствует пара чисел  $(x, y)$ , называемых ее *координатами*, т.е.  $M(x, y)$  ( $x$  — абсцисса,  $y$  — ордината точки  $M$ ).

Три взаимно перпендикулярные оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , имеющие общее начало  $O$  и одинаковую единицу масштаба, образуют *прямоугольную систему координат* в пространстве

$Oxyz$ , где ось  $Oz$  называется *осью аппликата*. Любая точка пространства  $M(x, y, z)$  характеризуется тремя координатами, где  $x$  — абсцисса,  $y$  — ордината,  $z$  — аппликата (рис. 4.3).

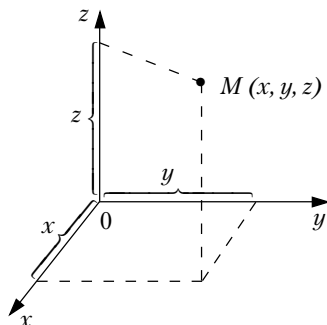


Рис. 4.3

Между числами  $x$  и точками числовой прямой  $Ox$ , между упорядоченными парами чисел  $(x, y)$  и точками координатной плоскости, между упорядоченными тройками чисел  $(x, y, z)$  и точками пространства существует *взаимно однозначное соответствие*. Это означает, что каждой точке числовой прямой, координатной плоскости либо пространства соответствует свое число  $x$ , своя упорядоченная пара  $(x, y)$  или тройка  $(x, y, z)$  чисел, и наоборот, любому числу  $x$ , любой упорядоченной паре  $(x, y)$  или тройке  $(x, y, z)$  чисел соответствует своя точка числовой прямой, координатной плоскости либо пространства.

**Расстояние между двумя точками.** В параграфе 3.1 было установлено, что расстояние между двумя точками  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  координатной плоскости определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (4.1)$$

Полагая в формуле (4.1)  $y_1 = y_2 = 0$ , получаем формулу расстояния между двумя точками  $M(x_1)$  и  $M(x_2)$  числовой оси

$$d = |x_2 - x_1|. \quad (4.2)$$

**Деление отрезка в данном отношении.** Пусть на плоскости  $Oxy$  даны точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . Необходимо внутри отрезка  $M_1M_2$  найти точку  $M(x, y)$ , делящую этот отрезок в отношении  $\lambda$ , т.е.  $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$  (рис. 4.4).

В силу пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми,

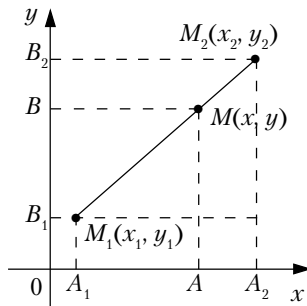


Рис. 4.4

$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{A_1A}{AA_2} = \lambda$ , где по формуле (4.2)  $A_1A = |x - x_1|$ ,

$AA_2 = |x_2 - x|$ . Так как величины  $x - x_1$  и  $x_2 - x$  одного знака (при  $x_1 < x_2$  они положительны, при  $x_1 > x_2$  отрицательны), то

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \text{откуда} \quad x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \quad \text{и} \quad x = (x_1 + \lambda x_2) / (1 + \lambda).$$

Формула для ординаты  $y$  точки  $M$  доказывается аналогично.

Итак, координаты  $(x, y)$  точки  $M$ , делящей отрезок  $M_1M_2$  в отношении  $\lambda$ , находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (4.3)$$

а координаты  $(x, y)$  точки  $M$  — середины отрезка  $M_1M_2$  (при  $\lambda = 1$ ) — по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (4.4)$$

## 4.2. Уравнение линии на плоскости

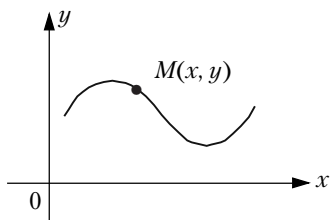


Рис. 4.5

Уравнение линии является важнейшим понятием аналитической геометрии.

Пусть на плоскости имеется некоторая линия (кривая) (рис. 4.5). Координаты  $x$  и  $y$  точки, лежащей на этой линии, не могут быть произвольными, они должны быть определенным образом связаны.

Такая связь аналитически за-

писывается в виде некоторого уравнения.

**Определение.** Уравнением линии (кривой) на плоскости  $Oxy$  называется уравнение, которому удовлетворяют координаты  $x$  и  $y$  каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде  $F(x, y) = 0$  или (если это возможно)  $y = f(x)$ , где  $F(x, y)$  и  $y = f(x)$  — некоторые функции (функции будут рассмотрены в гл. 5).

Если точка  $M(x, y)$  передвигается по линии, то ее координаты, изменяясь, удовлетворяют уравнению этой линии, поэтому координаты  $M(x, y)$  называются *текущими координатами* (от слова «текут», т.е. меняются).

**Пример 4.1.** Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек  $A(-4; 2)$  и  $B(-2; -6)$ .

*Решение.* Расстояние между двумя точками  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  определяется по формуле (4.1).

Если  $M(x, y)$  — произвольная точка искомой линии, то согласно условию имеем  $AM = BM$  (рис. 4.2) или, учитывая формулу (4.1),

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, после преобразований получаем уравнение  $x - 4y - 5 = 0$  или  $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ .

Очевидно, что это уравнение прямой  $MD$  — перпендикуляра, восстановленного из середины отрезка  $AB$  (рис. 4.6). ►

Любую линию в принципе можно выразить соответствующим уравнением (хотя на практике это не всегда просто сделать). Однако не всякое уравнение определяет на плоскости некоторую линию. Например, уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  определяет только одну точку  $(0; 0)$ , а уравнение  $x^2 + y^2 + 7 = 0$  не определяет никакого множества точек, ибо левая часть уравнения не может равняться нулю.

Чтобы убедиться, лежит ли точка  $M(a, b)$  на данной линии  $F(x, y) = 0$ , надо проверить, удовлетворяют ли координаты этой точки уравнению  $F(x, y) = 0$ .

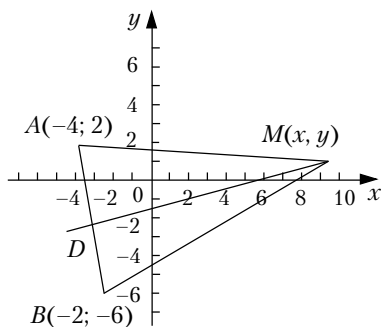


Рис. 4.6

### 4.3. Уравнение прямой

Пусть прямая пересекает ось  $Oy$  в точке  $B(0; b)$  и образуя с осью  $Ox$  угол  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) (рис. 4.7).

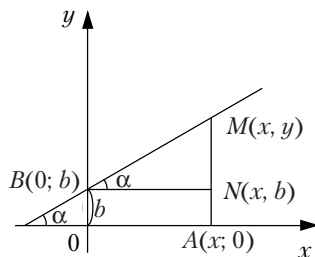


Рис. 4.7

Возьмем на прямой произвольную точку  $M(x, y)$ , тогда тангенс угла  $\alpha$  наклона прямой найдем из прямоугольного треугольника  $MBN$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y - b}{x}. \quad (4.5)$$

Введем *угловой коэффициент* прямой  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , получим,

$$k = \frac{y - b}{x};$$

$$y = kx + b. \quad (4.6)$$

Можно показать, что формула (4.6) остается справедливой и для случая  $\pi/2 < \alpha < \pi$ .

Итак, мы доказали, что координаты каждой точки прямой удовлетворяют уравнению (4.6). Нетрудно показать, что координаты любой точки  $M_1(x_1, y_1)$ , не лежащей на прямой, не удовлетворяют уравнению (4.6). Действительно, в этом случае  $\angle M_1BN \neq \alpha$ , следовательно,  $\frac{y_1 - b}{x_1} \neq k$   
 $y_1 \neq kx_1 + b$ .

Уравнение (4.6) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

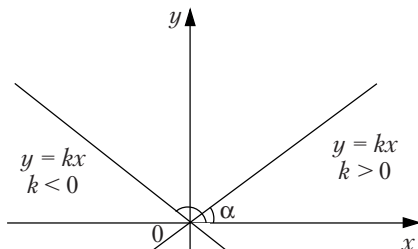


Рис. 4.8

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.6).

1. Если  $b = 0$ , то получаем  $y = kx$  — уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей при  $k = \operatorname{tg} \alpha > 0$  острый угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ , а при  $k = \operatorname{tg} \alpha < 0$  — тупой угол (см. рис. 4.8).

В частности, уравнение биссектрисы I и III координатных углов имеет вид  $y = x$  (так как  $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ), а уравнение биссектрисы II и IV координатных углов  $y = -x$  ( $k = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$ ).

2. Если  $\alpha = 0$ , то  $k = \operatorname{tg} 0 = 0$ , и уравнение прямой, параллельной оси  $Ox$ , имеет вид  $y = b$ , а самой оси  $Ox$  — вид  $y = 0$  (рис. 4.9).

3. Если  $\alpha = \pi/2$ , то прямая перпендикулярна оси  $Ox$  (рис. 4.10) и  $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$  не существует, т.е. вертикальная прямая не имеет углового коэффициента. Предположим, что эта прямая отсекает на оси  $Ox$  отрезок, равный  $a$ . Очевидно, что уравнение такой прямой имеет вид  $x = a$  (так как абсцисса любой точки прямой равна  $a$ ), а уравнение оси  $Oy$  есть  $x = 0$ .

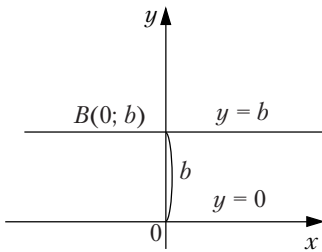


Рис. 4.9

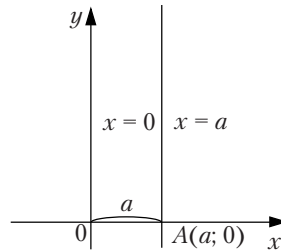


Рис. 4.10

**Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.** Пусть прямая проходит через точку  $M_1(x_1, y_1)$  и образует с осью  $Ox$  угол  $\alpha \neq \pi/2$  (рис. 4.11).

Так как точка  $M_1(x_1, y_1)$  лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению (4.2), т.е.

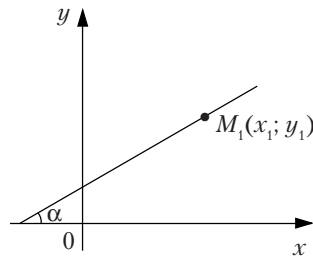


Рис. 4.11

$$y_1 = kx_1 + b. \quad (4.7)$$

Вычитая равенство (4.3) из равенства (4.2), получаем уравнение искомой прямой

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (4.8)$$

**Уравнение пучка прямых.** Если в уравнении (4.8)  $k$  — произвольное число, то это уравнение определяет *пучок прямых*, проходящих через точку  $M_1(x_1, y_1)$ , кроме прямой, параллельной оси  $Oy$  и не имеющей углового коэффициента (рис. 4.12).

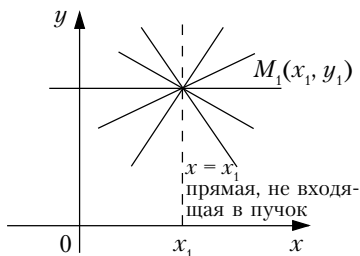


Рис. 4.12

**Пример 4.2.** 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(3; -2)$ : а) под углом  $135^\circ$  к оси  $Ox$ ; б) параллельно оси  $Oy$ . 2. Найти уравнение пучка прямых.

*Решение.*

1. а) Угловой коэффициент прямой  $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ .

Уравнение прямой, проходящей через точку  $A(3; -2)$  (рис. 4.13) по формуле (4.8) имеет вид  $y + 2 = -1(x - 3)$  или  $y = -x + 1$ .

б) Уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$ ,  $x = 3$ .

2. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку  $A(3; -2)$ , имеет вид  $y + 2 = k(x - 3)$ . ►

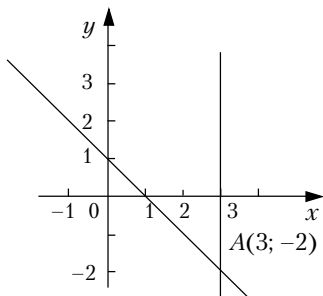


Рис. 4.13

**Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.**

Пусть даны две точки  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  и  $x_1 \neq x_2$ ,  $y_1 \neq y_2$ .

Для составления уравнения прямой  $M_1M_2$  (рис. 4.14) запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку  $M_1$ :

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

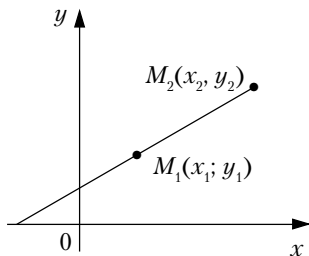


Рис. 4.14



Так как точка  $M_2(x_2, y_2)$  лежит на данной прямой, то, чтобы выделить ее из пучка, подставим координаты точки  $M_2$  в уравнение пучка  $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$  и найдем угловой коэффициент прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (4.9)$$

Теперь уравнение искомой прямой примет вид

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (4.10)$$

**Пример 4.3.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-5; 4)$  и  $B(3; -2)$ .

*Решение.* Уравнение прямой, согласно (4.10), имеет вид

$$\frac{y - 4}{-2 - 4} = \frac{x + 5}{3 + 5}, \quad \text{откуда после преобразований получим}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}. \quad \blacktriangleright$$

**Уравнение прямой в отрезках.** Найдем уравнение прямой по заданным отрезкам  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , отсекаемым на осях координат. Используя формулу (4.10), уравнение прямой, проходящей через точки  $A(a; 0)$  и  $B(0; b)$  (рис. 4.15), примет вид  $\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$  или после преобразований

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (4.11)$$

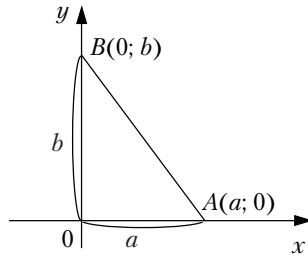


Рис. 4.15

Уравнение (4.11) называется *уравнением прямой в отрезках*.

**Пример 4.4.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2; -1)$ , если эта прямая отсекает от положительной полуоси  $Oy$  отрезок, вдвое больший, чем от положительной полуоси  $Ox$  (рис. 4.16).

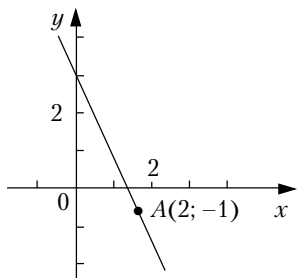


Рис. 4.16

*Решение.* По условию  $b = 2a$  ( $a > 0, b > 0$ ). Подставляя это выражение в уравнение (4.11), получаем  $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1$ . Так как точка  $A(2; -1)$  лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е.  $\frac{2}{a} - \frac{1}{2a} = 1$ , откуда  $a = 1,5$ .

Итак, уравнение искомой прямой имеет вид  $\frac{x}{1,5} + \frac{y}{3} = 1$  или  $y = -2x + 3$ . ►

**Общее уравнение прямой и его исследование.** Рассмотрим уравнение первой степени с двумя переменными в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \quad (4.12)$$

в котором коэффициенты  $A$  и  $B$  не равны одновременно нулю, т.е.  $A^2 + B^2 \neq 0$ .

1. Пусть  $B \neq 0$ . Тогда уравнение (4.12) можно записать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим  $k = -\frac{A}{B}$ ,  $b = -\frac{C}{B}$ . Если  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ , то получим  $y = kx + b$  (уравнение прямой с угловым коэффициентом); если  $A \neq 0$ ,  $C = 0$ , то  $y = kx$  (уравнение прямой, проходящей через начало координат); если  $A = 0$ ,  $C \neq 0$ , то  $y = b$  (уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$ ); если  $A = 0$ ,  $C = 0$ , то  $y = 0$  (уравнение оси  $Ox$ ).

2. Пусть  $B = 0$ ,  $A \neq 0$ . Тогда уравнение (4.12) примет вид  $x = -\frac{C}{A}$ . Обозначим  $a = -\frac{C}{A}$ . Если  $C \neq 0$ , то получим  $x = a$  (уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$ ); если  $C = 0$ , то  $x = 0$  (уравнение оси  $Oy$ ).

Таким образом, при любых значениях коэффициентов  $A, B$  (не равных одновременно нулю) и  $C$  уравнение (4.12) есть уравнение некоторой прямой линии на плоскости  $Oxy$ .

Уравнение (4.12) называется *общим уравнением прямой*. Заметим, что в отличие от уравнения пучка прямых (4.8) общее уравнение (4.12) включает и уравнение любой вертикальной прямой, параллельной оси  $Oy$ .

### 4.4. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой

**Угол между двумя прямыми.** Пусть заданы две прямые

$$y = k_1x + b_1 \quad (1);$$

$$y = k_2x + b_2 \quad (2)$$

и требуется определить угол  $\varphi$  между ними.

Из рис. 4.17 следует, что  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ , причем  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ ,  $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ ,  $\alpha_1 \neq \pi/2$ ,  $\alpha_2 \neq \pi/2$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad (4.13)$$

где стрелка означает, что угол  $\varphi$  получается при повороте прямой (1) к прямой (2) против часовой стрелки.

**Условия параллельности и перпендикулярности прямых.**

Если прямые  $y = k_1x + b_1$  (1) и  $y = k_2x + b_2$  (2) параллельны, то угол  $\varphi = 0$  и  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ , откуда из формулы (4.13)  $k_1 = k_2$ . И наоборот, если  $k_1 = k_2$ , то по формуле (4.13)  $\operatorname{tg} \varphi = 0$  и  $\varphi = 0$ . Таким образом, равенство угловых коэффициентов является необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых.

Если прямые перпендикулярны, то  $\varphi = \pi/2$ , при этом  $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$  или  $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$ , откуда  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$  или  $k_1 k_2 = -1$ . Справедливо также и обратное

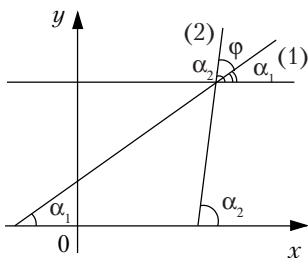


Рис. 4.17

утверждение. Таким образом, для перпендикулярности прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратны по величине и противоположны по знаку.

Если прямые заданы общими уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  (1) и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  (2), то, учитывая, что их угловые коэффициенты  $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$  и  $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ , условие парал-

лельности прямых  $k_1 = k_2$  примет вид  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ . Следовательно,

но, условием параллельности прямых, заданных общими уравнениями, является пропорциональность коэффициентов при переменных.

Условие перпендикулярности прямых  $k_1 k_2 = -1$  в этом случае примет вид  $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$ , или  $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ ,

т.е. условием перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями, является равенство нулю суммы произведений коэффициентов при переменных  $x$  и  $y$ .

**Пример 4.5.** Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку  $A(2; 1)$ , одна из которых параллельна прямой  $3x - 2y + 2 = 0$ , а другая перпендикулярна той же прямой.

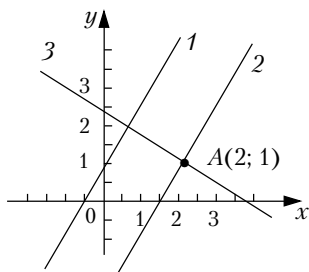


Рис. 4.18

*Решение.* Уравнение пучка прямых, проходящих через точку

$A(2; 1)$ , имеет вид  $y - 1 = k(x - 2)$ .

Из этого пучка надо выделить две прямые 2 и 3 — параллельную и перпендикулярную данной (рис. 4.18). Угловой коэф-

фициент прямой 1  $k_1 = \frac{3}{2}$  (так

как уравнение прямой 1 можно

представить в виде  $y = \frac{3}{2}x + 1$ ).

По условию параллельности угловой коэффициент прямой 2

$k = k_1 = \frac{3}{2}$  и ее уравнение имеет вид  $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$ , или

$3x - 2y - 4 = 0$ . По условию перпендикулярности угловой коэффициент прямой  $3$   $k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{2}{3}$ , и уравнение этой прямой  $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)$ , или  $2x + 3y - 7 = 0$ .

Задачу можно решить и другим способом. Прямая  $Ax + By + C = 0$  будет параллельна прямой  $3x - 2y + 2 = 0$ , если ее коэффициенты при  $x$  и  $y$  пропорциональны, т.е.

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{-2}.$$

Взяв  $A = 3$ ,  $B = -2$  (при коэффициенте пропорциональности, равном единице), получим уравнение  $3x - 2y + C = 0$ . Коэффициент  $C$  найдем с учетом того, что координаты точки  $A(2; 1)$ , лежащей на прямой, должны удовлетворять ее уравнению, т.е.  $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + C = 0$ , откуда  $C = -4$ , и уравнение прямой  $2$   $3x - 2y - 4 = 0$ .

Уравнение прямой, перпендикулярной заданной  $3x - 2y + 2 = 0$ , будет иметь вид  $2x + 3y + C = 0$  (ибо в этом случае сумма произведений коэффициентов при переменных  $x$  и  $y$  равна нулю, т.е.  $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 0$ ). Теперь, подставляя координаты точки  $A(2; 1)$  в уравнение прямой, получаем  $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + C = 0$ , откуда  $C = -7$ , и уравнение прямой  $3$   $2x - 3y - 7 = 0$ . ►

**Точка пересечения прямых.** Пусть даны две прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . Очевидно, координаты их точки пересечения должны удовлетворять уравнению каждой прямой, т.е. они могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если прямые не параллельны, т.е.  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ , то решение системы дает единственную точку пересечения прямых.

**Расстояние от точки до прямой.** Пусть даны точка  $M(x_0, y_0)$  и прямая  $Ax + By + C = 0$ . Под расстоянием от точки  $M$  до прямой  $KL$  понимается длина перпендикуляра  $d = MN$ , опущенного из точки  $M$  на прямую  $KL$  (рис. 4.19). Для определения расстояния  $d$  необходимо: а) составить уравнение прямой  $MN$ , перпендикулярной данной и проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$ ; б) найти точку  $N(x_1, y_1)$  пересечения прямых, решив систему уравнений этих прямых;

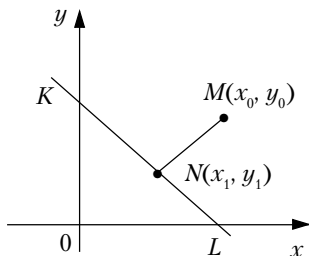


Рис. 4.19

в) по формуле (4.1) определить расстояние между двумя точками, т.е. найти  $d = MN$ . В результате преобразований получаем

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (4.14)$$

(доказательство формулы (4.14) опускаем).

**Пример 4.6.** Найти расстояние между параллельными прямыми

$$3x + 4y - 24 = 0 \text{ и } 3x + 4y + 6 = 0.$$

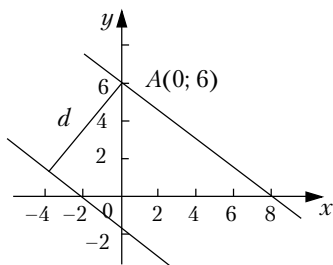


Рис. 4.20

*Решение.* Возьмем на одной из прямых, например, прямой  $3x + 4y - 24 = 0$ , произвольную точку  $A(0; 6)$  (рис. 4.20). Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки  $A$  до прямой  $3x + 4y + 6 = 0$ :

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6. \blacktriangleright$$

## 4.5. Окружность и эллипс

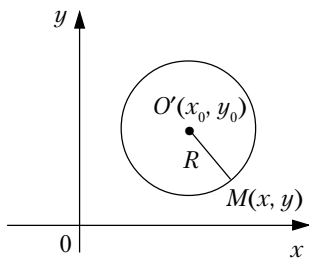


Рис. 4.21

Изучение *кривых второго порядка*, описываемых уравнениями второй степени с двумя переменными, начнем с окружности.

Пусть дана окружность радиуса  $R$  с центром  $O'(x_0, y_0)$  (рис. 4.21). Найдем ее уравнение. Для произвольной точки  $M(x, y)$  окружности выполняется равенство  $O'M = R$ . Ис-

пользуя формулу (4.1) расстояния между двумя точками, получаем

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

или после возведения в квадрат (двух положительных частей уравнения) получим равносильное уравнение

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2. \quad (4.15)$$

Итак, координаты каждой точки окружности  $M(x, y)$  удовлетворяют уравнению (4.15). Нетрудно показать, что координаты любой точки, не лежащей на окружности, этому уравнению не удовлетворяют.

Уравнение (4.15) называется *нормальным уравнением окружности*. В частности, уравнение окружности с центром в начале координат ( $x_0 = y_0 = 0$ ) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (4.16)$$

Рассмотрим уравнение второй степени с двумя переменными в общем виде

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (4.17)$$

в котором  $A$ ,  $B$  и  $C$  не равны нулю одновременно, т.е.  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . Выясним, при каких условиях это уравнение является уравнением окружности. С этой целью представим уравнение (4.15) в виде

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0. \quad (4.18)$$

Чтобы уравнения (4.17) и (4.18) представляли одну и ту же линию, коэффициент  $B$  должен равняться нулю, т.е.  $B = 0$ , а все остальные коэффициенты должны быть пропорциональны, в частности  $\frac{A}{1} = \frac{C}{1}$ , откуда  $A = C \neq 0$  (ибо  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ , а  $B = 0$ ). Следовательно, получаем уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (4.19)$$

называемое *общим уравнением окружности*.

Поделив обе части уравнения на  $A \neq 0$  и дополнив члены, содержащие  $x$  и  $y$ , до полного квадрата, получим

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}. \quad (4.20)$$

Сравнивая уравнение (4.20) с уравнением окружности (4.15), можно сделать вывод, что уравнение (4.17) есть уравнение действительной окружности, если: 1)  $A = C$ ; 2)  $B = 0$ ; 3)  $D^2 + E^2 - 4AF > 0$ . При выполнении этих условий центр окружности (4.17) расположен в точке

$$O\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2A}\right), \text{ а ее радиус } R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}.$$

**Пример 4.7.** Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0.$$

*Решение.* Дополнив члены, содержащие  $y$ , до полного квадрата, получим

$$x^2 + (y^2 + 16y + 64) - 64 - 9 = 0 \text{ или } x^2 + (y + 8)^2 = 73,$$

т.е. центр окружности в точке  $O(0; -8)$ , а ее радиус  $R = \sqrt{73}$ . ►

Рассмотрим уравнение кривой второго порядка (4.17), в котором по-прежнему будем полагать  $B = 0$ . Перепишем уравнение в виде

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

или

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = \delta,$$

где

$$x_0 = -\frac{D}{2A}; \quad y_0 = -\frac{E}{2C}; \quad \delta = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$



Будем предполагать для простоты исследования, что центр кривой находится в начале координат, т.е.  $x_0 = y_0 = 0$ . Тогда уравнение кривой примет вид

$$Ax^2 + Cy^2 = \delta. \quad (4.21)$$

Кривая второго порядка (4.21) называется **эллипсом** (точнее, *кривой эллиптического типа*), если коэффициенты  $A$  и  $C$  имеют одинаковые знаки.

Для определенности будем полагать, что  $A > 0$ ,  $C > 0$  (в противном случае обе части уравнения можно умножить на  $(-1)$ ).

Возможны три случая: а)  $\delta > 0$ ; б)  $\delta = 0$ ; в)  $\delta < 0$ . Очевидно, что в третьем случае (при  $\delta < 0$ ) кривая (4.21) не имеет действительных точек, а во втором случае (при  $\delta = 0$ ) она представляет собой одну точку  $O(0; 0)$ . Поэтому остановимся на первом случае ( $\delta > 0$ ).

Получаемое при этом уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.22)$$

называется *каноническим уравнением эллипса* с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{\delta}{A}} \text{ и } b = \sqrt{\frac{\delta}{C}} \text{ (рис. 4.22).}$$

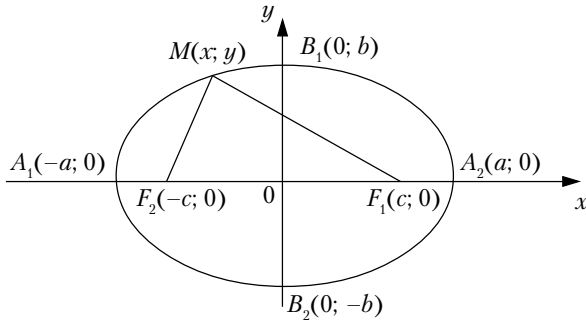


Рис. 4.22

При  $a = b$  уравнение (4.22) представляет частный случай — уравнение окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Точки  $F_1(c; 0)$  и  $F_2(-c; 0)$ , где<sup>1</sup>

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (4.23)$$

называются *фокусами* эллипса, а отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (4.24)$$

— его *эксцентриситетом*. Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Очевидно, что  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , причем для окружности  $\varepsilon = 0$ . Точки  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,  $B_1(0; b)$ ,  $B_2(0; -b)$  называются *вершинами* эллипса.

Найдем сумму расстояний от любой точки эллипса  $M(x, y)$  до ее фокусов, используя формулу (4.1):

$$d = F_2M + MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

С учетом (4.18)–(4.20)

$$\begin{aligned} F_2M &= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + (a^2 - b^2) + (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)} = \\ &= \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{(\frac{c}{a}x + a)^2} = a + \varepsilon x. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить, что  $MF_1 = a - \varepsilon x$ . В результате  $d = F_2M + MF_1 = (a + \varepsilon x) + (a - \varepsilon x) = 2a$ , т.е. для любой точки эллипса сумма расстояний от этой точки до фокусов есть величина постоянная, равная  $2a$ . Это характеристическое свойство эллипса часто принимается за его определение.

**Пример 4.8.** Определить вид и расположение кривой

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 16y = 0. \quad (4.25)$$

*Решение.* Так как  $A = 1$  и  $C = 2$  — числа одного знака, то данное уравнение кривой — эллиптического типа. Допол-

<sup>1</sup> Полагаем  $a \geq b$  (этого всегда можно добиться путем надлежащего выбора осей  $Ox$  и  $Oy$ ).

няя члены, содержащие  $x$  и  $y$ , до полного квадрата, получаем

$$(x - 2)^2 + 2(y + 4)^2 = 36,$$

$$\text{или } \frac{(x - 2)^2}{6^2} + \frac{(y + 4)^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1.$$

Следовательно, кривая (4.25) представляет эллипс с полуосями  $a = 6$  и  $b = 3\sqrt{2}$ , центр которого находится в точке  $O'(2; -4)$  (рис. 4.23). ►

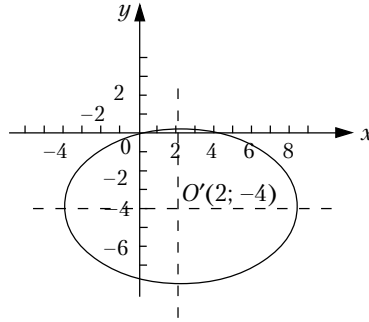


Рис. 4.23

## 4.6. Гипербола и парабола

Кривая второго порядка (4.21) называется **гиперболой** (точнее, *кривой гиперболического типа*), если коэффициенты  $A$  и  $C$  имеют противоположные знаки, т.е.  $AC < 0$ .

Пусть для определенности  $A > 0$ ,  $C < 0$ . Возможны три случая: 1)  $\delta > 0$ ; 2)  $\delta = 0$ ; 3)  $\delta < 0$ .

В **первом случае** (при  $\delta > 0$ ) имеем гиперболу, каноническое уравнение которой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.26)$$

где  $a = \sqrt{\frac{\delta}{A}}$  — действитель-

ная полуось;  $b = \sqrt{\frac{\delta}{-C}}$  —

мнимая полуось (рис. 4.24).

**Фокусы** гиперболы — точки  $F_1(c; 0)$  и  $F_2(-c; 0)$ ,

где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , а ее экс-

центриситет  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  принимает любые значения, большие единицы. **Вершины** гиперболы — точки  $A_1(a; 0)$ ,  $A_2(-a; 0)$ .

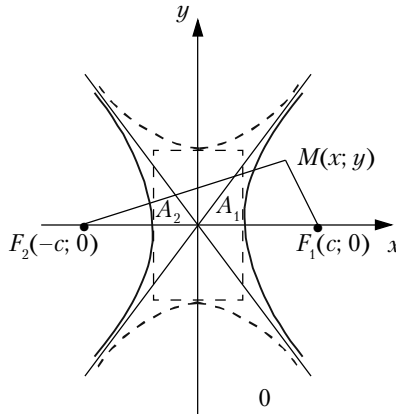


Рис. 4.24

Можно показать (аналогично тому, как это было сделано при исследовании эллипса), что для любой точки гиперболы абсолютная величина разности ее расстояний до фокусов есть величина постоянная, равная  $2a$ :  $d = |F_2M - MF_1| = 2a$ . Это характеристическое свойство гиперболы часто принимается за ее определение.

Перепишем уравнение гиперболы (4.26) в виде

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (4.27)$$

При достаточно больших  $x$   $\sqrt{x^2 - a^2} \approx \sqrt{x^2} = x$ , и уравнение (4.27) принимает вид  $y \approx \pm \frac{b}{a} x$ , т.е. при  $x \rightarrow \infty$  ветви гиперболы как угодно близко подходят к прямым  $y = \pm \frac{b}{a} x$ , называемым *асимптотами гиперболы*.

Для равносторонней гиперболы ( $a = b$ )  $x^2 - y^2 = a^2$  асимптоты  $y = \pm x$  взаимно перпендикулярны и представляют биссектрисы координатных углов.

Во **втором случае** (при  $\delta = 0$ ) уравнение кривой (4.21) принимает вид  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ , т.е. получаем пару пересекающихся прямых

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ и } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

В **третьем случае** (при  $\delta < 0$ ) получаем гиперболу  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  с полуосями  $\sqrt{\frac{\delta}{-A}}$  и  $b = \sqrt{\frac{\delta}{C}}$ , называемую *сопряженной* с гиперболой (4.26) (на рис. 4.24 она изображена пунктиром).

**Пример 4.9.** Написать уравнение гиперболы с асимптотами  $y = \pm \frac{3}{4}x$ , проходящими через точку  $\left(6; \frac{3}{2}\right)$ . Найти расстояние между ее вершинами.

*Решение.* Так как точка  $\left(6; \frac{3}{2}\right)$  лежит на гиперболе, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (4.26)

$$\frac{36}{a^2} - \frac{9}{4b^2} = 1. \text{ Кроме}$$

того,  $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ , так как

асимптоты гипербо-

лы  $y = \pm \frac{3}{4}x$ . Решая

полученную систему

двух уравнений, най-

дем  $a = 4\sqrt{2}$ ,  $b = 3\sqrt{2}$ ,

т.е. уравнение ги-

перболы  $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1$

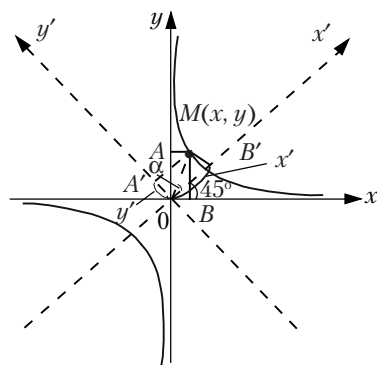
(рис. 4.25). Расстоя-

ние между вершинами гиперболы равно  $2a = 8\sqrt{2}$ . ►

Рассмотрим **обратную пропорциональную зависимость**, задаваемую уравнением  $y = \frac{m}{x}$ , или

$$xy = m. \quad (4.28)$$

Выбрав в качестве новых осей  $Ox'$  и  $Oy'$  биссектрисы координатных углов (рис. 4.26), представим уравнение (4.28) через новые координаты  $x'$  и  $y'$ . Пусть  $OM = r$ , тогда



$$\begin{aligned} r &= OM \\ x' &= OB' \\ y' &= OA' \\ x &= OB \\ y &= OA \end{aligned}$$

Рис. 4.26

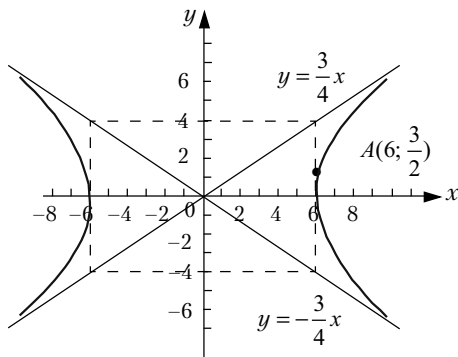


Рис. 4.25

$$x = r \cos(45^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r \cos \alpha - r \sin \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = r \sin(45^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r \cos \alpha + r \sin \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

так как из  $\triangle OMB'$   $r \cos \alpha = x'$ ,  $r \sin \alpha = y'$ .

Теперь уравнение (4.28) в новой системе координат  $Ox'y'$  примет вид  $x'^2 - y'^2 = 2m$ , т.е. *график обратной пропорциональной зависимости есть равносторонняя гипербола с асимптотами — осями координат*.

При  $m > 0$  ветви гиперболы расположены в I и III квадрантах, при  $m < 0$  — во II и IV квадрантах. Нетрудно установить, что координаты любой вершины гиперболы равны (по абсолютной величине), т.е.  $|x| = |y| = \sqrt{|m|}$ , а их знаки определяются в зависимости от квадранта, в котором расположена каждая вершина.

Рассмотрим график **дробно-линейной функции**

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (4.29)$$

где  $c \neq 0$ ,  $bc - ad \neq 0$ .

Преобразуя (4.29), получаем

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left[\left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right]}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Введем новые координаты

$$x + \frac{d}{c} = x'; \quad y - \frac{a}{c} = y'.$$

Обозначим  $m = (bc - ad)/c^2$ . Тогда в новой системе координат  $Ox'y'$ , полученной параллельным переносом осей координат, с новым центром в точке  $O'\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$  (рис. 4.27) уравнение примет вид  $y' = \frac{m}{x'}$ , или  $x'y' = m$ .

Итак, *график дробно-линейной функции (4.29) есть равносторонняя гипербола с асимптотами  $x = -\frac{d}{c}$ ;  $y = \frac{a}{c}$ , параллельными осям координат*.

**Пример 4.10.** Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот той гиперболы  $y = \frac{3-2x}{x+1}$ .

*Решение.* Преобразуем уравнение, выделяя целую часть дробно-линейной функции:

$$y = \frac{-2(x+1)+5}{x+1} = -2 + \frac{5}{x+1},$$

$$\text{или } y+2 = \frac{5}{x+1},$$

откуда  $(x+1)(y+2) = 5$ .

Полагая  $x+1 = x'$ ,  $y+2 = y'$ , получаем  $x'y' = 5$ , т.е. заданное уравнение есть уравнение равно-сторонней гиперболы с центром  $O'(-1; -2)$  и асимптотами  $x+1 = 0$ ,  $y+2 = 0$  (рис. 4.28). Так как  $m = 5 > 0$ , то гипербола располагается в I и III квадрантах, а новые координаты ее вершин  $(\pm\sqrt{5}; \pm\sqrt{5})$ . Переходя к старым координатам по формулам  $x = x' - 1$ ,  $y = y' - 2$ , найдем старые координаты вершин гиперболы  $A(-\sqrt{5}-1; -\sqrt{5}-2)$ ,  $B(\sqrt{5}-1; \sqrt{5}-2)$ . ►

Пусть в уравнении кривой второго порядка (4.17)  $B = 0$ , а также один из коэффициентов  $A$  или  $C$  равен нулю; для определенности  $A = 0$ ,  $C \neq 0$ , т.е.

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (4.30)$$

Пусть также  $D \neq 0$  (в противном случае имели бы пару параллельных горизонтальных прямых  $y = y_1$  и  $y = y_2$ , где

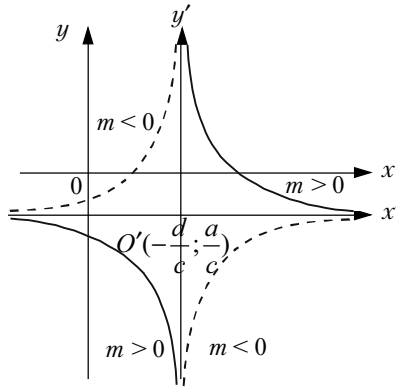


Рис. 4.27

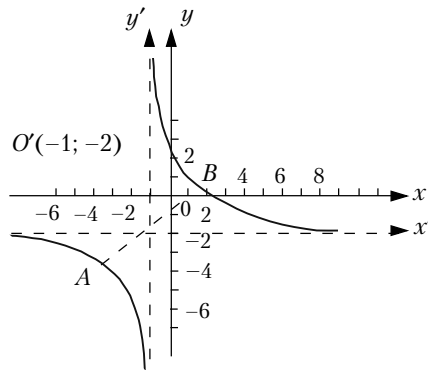


Рис. 4.28

$y_1$  и  $y_2$  — корни уравнения  $Cy^2 + Ey + F = 0$ , или отсутствие каких-либо линий и точек вообще). Дополним члены, содержащие  $y$ , до полного квадрата

$$C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx - F + \frac{E^2}{4C}.$$

Полагая  $x_0 = -\frac{F}{D} + \frac{E^2}{4DC}$ ;  $y_0 = -\frac{E}{2C}$ ;  $2p = -\frac{D}{C}$ , получаем

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \quad (4.31)$$

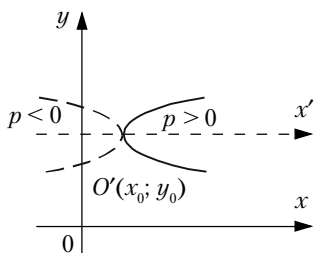


Рис. 4.29

Кривая (4.31) называется **параболой**, а точка  $O'(x_0, y_0)$  — **вершиной** параболы,  $p$  — ее **параметром**. При  $p > 0$  ветви параболы направлены вправо, при  $p < 0$  — влево (рис. 4.29). Прямая  $y = y_0$  является осью симметрии параболы.

Если вершина параболы находится в начале координат, то уравнение (4.31) принимает вид

$$y^2 = 2px. \quad (4.32)$$

Точка  $F(\frac{p}{2}; 0)$  называется **фокусом** параболы, а прямая  $x = -\frac{p}{2}$  — ее **директрисой**.

Для произвольной точки  $M(x, y)$  параболы расстояние до фокуса по формуле (4.1) равно

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

(так как  $x + \frac{p}{2} \geq 0$ ). С другой стороны, расстояние до директрисы  $MN = x + \frac{p}{2}$  (рис. 4.30).

Таким образом, *парабола представляет множество всех точек плоскости, равноотстоящих от данной точки (фоку-*



са) и данной прямой (директрисы). Это характеристическое свойство параболы часто принимается за ее определение.

Если в уравнении (4.32) поменять местами  $x$  и  $y$ , то получим  $x^2 = 2py$  — уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси ординат. Это уравнение обычно записывают в виде  $y = Ax^2$ , где  $A = \frac{1}{2p}$ . При

$A > 0$  ветви параболы направлены вверх, при  $A < 0$  — вниз (рис. 4.31).

Рассмотрим **квадратный трехчлен**  $y = Ax^2 + Bx + C$  ( $A \neq 0$ ). Отсюда

$y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right)$ . Дополнив выражение, стоящее в скобках, до полного квадрата, получим

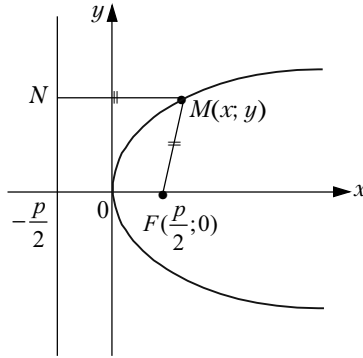


Рис. 4.30

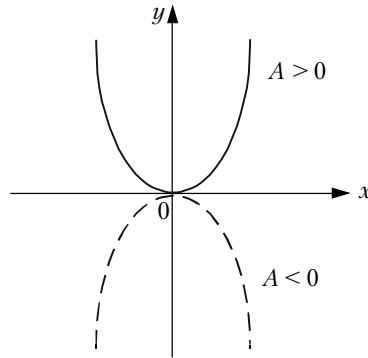


Рис. 4.31

$$y = A \left[ \left( x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} \right] = A \left( x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}. \quad (4.33)$$

Обозначив  $x + \frac{B}{2A} = x'$ ;  $y - \frac{4AC - B^2}{4A} = y'$ , в новой систе-

ме координат  $O'x'y'$  с центром  $O' \left( -\frac{B}{2A}; \frac{4AC - B^2}{4A} \right)$  уравнение (4.33) примет вид  $y' = Ax'^2$ .

Таким образом, график квадратного трехчлена  $y = Ax^2 + Bx + C$  есть парабола с вершиной в точке  $O' \left( -\frac{B}{2A}; \frac{4AC - B^2}{4A} \right)$  и осью симметрии  $x = -\frac{B}{2A}$ , параллельной оси  $Oy$ .

**Пример 4.11.** Построить кривую  $y = -3x^2 + 10x - 3$ .

*Решение.* Вынося коэффициент при  $x^2$  и дополняя правую часть уравнения до полного квадрата, получаем

$$y = -3\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) = -3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9}\right] = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3},$$

$$\text{или } y - \frac{16}{3} = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2.$$

Полагая

$$x - \frac{5}{3} = x'; \quad y - \frac{16}{3} = y',$$

получаем

$$y' = -3x'^2.$$

Таким образом, заданная кривая есть парабола с вершиной в

точке  $O' \left( \frac{5}{3}; \frac{16}{3} \right)$  и осью симметрии

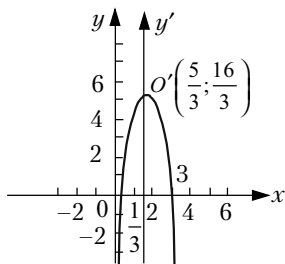


Рис. 4.32

$O'y'$ , параллельной оси  $Oy$  (рис. 4.32). ►

## 4.7. Полярные координаты

Для решения ряда задач может оказаться удобной так называемая полярная система координат.

*Полярная система координат* состоит из некоторой точки  $O$ , называемой *полюсом*, и исходящего из нее луча  $Op$ , называемого *полярной осью*. Точка  $M(\rho, \varphi)$  характеризуется *полярными координатами*:  $\rho$  — *полярным радиусом* (рассто-

анием  $OM$ ) и  $\varphi$  — полярным углом (амплитудой, или фазой) — углом между полярной осью  $Op$  и лучом  $OM$  ( $0 \leq \varphi < \pi$ ) (рис. 4.33).

Между точками плоскости (кроме полюса) и упорядоченными парами чисел  $(\rho, \varphi)$ , где  $0 < \rho < \infty$ ;  $0 \leq \varphi < \pi$ , существует взаимно однозначное соответствие. Аргумент полюса не определен, полюсу соответствует одно число  $\rho = 0$ .

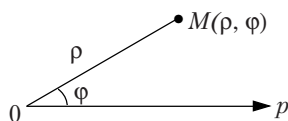


Рис. 4.33

Связь между декартовыми (прямоугольными) и полярными координатами на плоскости (при совпадении осей  $Ox$  и  $Op$ , начала координат системы  $Oxy$  и полюса  $O$ ) выражается следующими формулами:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad (4.34)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}. \quad (4.35)$$

**Пример 4.12.** Найти расстояние между двумя точками  $M_1(\rho_1, \varphi_1)$  и  $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ , заданными полярными координатами.

*Решение.* По формуле (4.34) прямоугольные координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  равны соответственно  $x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1$ ,  $y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1$ ;  $x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2$ ,  $y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2$ .

По формуле (4.1) найдем расстояние между двумя точками

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\rho_2 \cos \varphi_2 - \rho_1 \cos \varphi_1)^2 + (\rho_2 \sin \varphi_2 - \rho_1 \sin \varphi_1)^2},$$

или (после преобразований)

$$M_1 M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (4.36)$$

Полученная формула (4.36) представляет известную из курса элементарной математики теорему косинусов. ►

Представляет интерес уравнение кривых второго порядка в полярных координатах. В качестве направления полярной оси выберем направление оси абсцисс, а в качестве полюса  $O$  — или центр окружности, или левый фокус эллипса, или правый фокус гиперболы, или фокус параболы.

лы. Можно показать, что в этом случае уравнение любой кривой второго порядка в полярных координатах будет иметь вид

$$\rho = \frac{q}{1 - \epsilon \cos \varphi}, \quad (4.37)$$

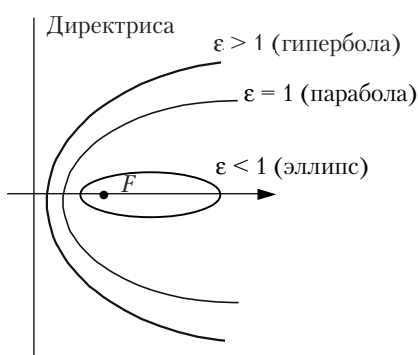


Рис. 4.34

где  $q$  — фокальный параметр кривой;  $\epsilon$  — ее эксцентриситет. При  $\epsilon = 0$  уравнение (4.37) представляет уравнение окружности с центром в точке  $O$ , при  $0 < \epsilon < 1$  — уравнение эллипса, при  $\epsilon = 1$  — уравнение параболы, при  $\epsilon > 1$  — уравнение гиперболы (ее правой ветви) (рис. 4.34). Фокальный параметр  $q$  определяется как ордината точки кривой, абс-

цисса которой равна абсциссе фокуса, принятого за полюс полярной системы координат. Для эллипса и гиперболы  $q = b^2/a$ .

**Пример 4.13.** Уравнение кривой второго порядка  $\rho = \frac{8}{1 - 3 \cos \varphi}$  привести к каноническому виду в прямоугольных координатах.

*Решение.* Данное уравнение есть уравнение гиперболы, так как  $\epsilon = 3 > 1$ . Используя формулы эксцентриситета и фокального параметра гиперболы, получаем

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 3; \quad q = \frac{b^2}{a} = 8.$$

Решая полученную систему относительно  $a$  и  $b$ , найдем  $a^2 = 1$ ,  $b^2 = 8$ , а с ними каноническое уравнение гиперболы  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$ . ►

## 4.8. Плоскость и прямая в пространстве

**Общее уравнение плоскости.** Пусть плоскость  $Q$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

(рис. 4.35).

Этими условиями определяется единственная плоскость в пространстве  $Oxyz$ . Вектор называется *нормальным вектором* плоскости  $Q$ . Возьмем в плоскости  $Q$  произвольную точку  $M(x, y, z)$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  будет перпендикулярен вектору  $\vec{n} = (A, B, C)$ . Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е.  $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ .

Полученное уравнение представим в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.38) представляет *уравнение плоскости*, перпендикулярной данному вектору  $\vec{n} = (A, B, C)$  и проходящей через данную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

Уравнение плоскости, записанное в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (4.39)$$

(где  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ ), называется *общим уравнением плоскости*.

Можно доказать, что *всякое уравнение первой степени с тремя переменными есть уравнение плоскости*.

Если  $D = 0$ , то уравнение  $Ax + By + Cz = 0$  определяет плоскость, проходящую через начало координат. Другие частные случаи определяются расположением нормального вектора  $\vec{n} = (A, B, C)$ . Так, например, если  $A = 0$ , то уравнение  $By + Cz + D = 0$  определяет плоскость, параллельную оси  $Ox$ ; если  $A = D = 0$ , то уравнение  $By + Cz = 0$  определяет плоскость, проходящую через ось  $Ox$ ; если  $A = B = 0$ , то уравнение  $Cz + D = 0$  определяет плоскость, па-

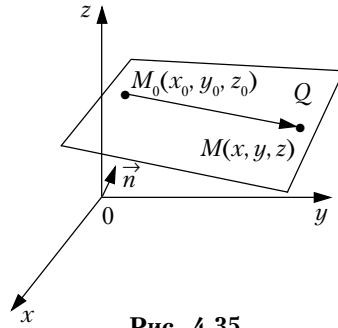


Рис. 4.35

параллельную плоскости  $Oxy$ , если  $A = B = D = 0$ , то уравнение  $Cz = 0$  (или  $z = 0$ ) определяет координатную плоскость  $Oxy$ .

**Уравнение плоскости в отрезках.** Пусть плоскость отсекает на осях координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  отрезки, равные соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рис. 4.36), т.е. плоскость проходит через точки  $M_1(a; 0; 0)$ ,  $M_2(0; b; 0)$ ,  $M_3(0; 0; c)$ .

Подставляя координаты точек в общее уравнение плоскости (4.39), получаем

$$\begin{cases} Aa + D = 0, \\ Bb + D = 0, \\ Cc + D = 0, \end{cases}$$

откуда

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

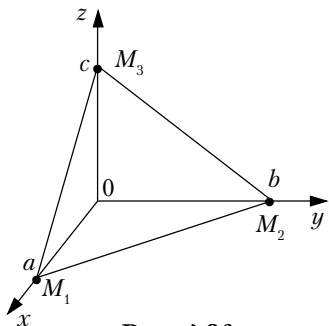


Рис. 4.36

Заменяя коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  уравнения (4.39) найденными значениями, получаем

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0,$$

откуда (после сокращения обеих частей уравнения на  $D \neq 0$ ) находим *уравнение плоскости в отрезках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4.40)$$

Пусть даны две плоскости:  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ .

Угол  $\varphi$ , образованный этими плоскостями, определяется углом между их нормальными векторами  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ , т.е. по формуле

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad (4.41)$$

а условие параллельности и перпендикулярности данных плоскостей — условием коллинеарности и перпендикулярности векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ .

Условием параллельности двух плоскостей является пропорциональность коэффициентов при одноименных переменных

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad (4.42)$$

а условием их перпендикулярности — равенство нулю суммы произведений коэффициентов при одноименных переменных

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (4.43)$$

**Прямая в пространстве** может быть задана как линия пересечения двух плоскостей, т.е. как множество точек, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Если прямая параллельна вектору  $\vec{s} = (m, n, p)$  (называемому *направляющим вектором*) и проходит через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  (рис. 4.37), то ее уравнения могут быть получены из условия коллинеарности векторов  $\overrightarrow{M_1 M} = (x - x_1; y - y_1, z - z_1)$  (где  $M(x, y, z)$  — произвольная точка прямой) и  $\vec{s} = (m, n, p)$ :

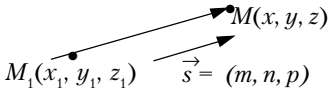


Рис. 4.37

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \quad (4.45)$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой линии в пространстве*.

Обозначая каждое из отношений (4.45) через  $t$ , получаем *параметрические уравнения прямой*

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt. \end{cases} \quad (4.46)$$

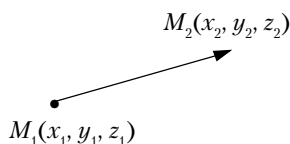


Рис. 4.38

Если прямая проходит через две данные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то в качестве направляющего вектора  $\vec{s}$  можно взять вектор  $\overline{M_1M_2}$  (рис. 4.38):

$$\vec{s} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Тогда уравнение прямой (4.45), проходящей через две данные точки, примет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.47)$$

Пусть даны две прямые с направляющими векторами  $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$  и  $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ . Тогда угол  $\varphi$  между прямыми находится из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (4.48)$$

Условие параллельности прямых —

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}, \quad (4.49)$$

а условие их перпендикулярности —

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (4.50)$$

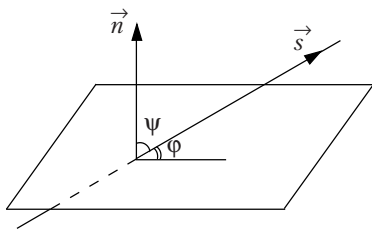


Рис. 4.39

Пусть дана прямая с направляющим вектором  $\vec{s} = (m, n, p)$  и плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

Угол  $\varphi$  между прямой и плоскостью есть дополнительный до  $\pi/2$  угол  $\psi$  между нормальным вектором плоскости  $\vec{n} = (A, B, C)$  и на-

правляющим вектором прямой  $\vec{s}$  (рис. 4.39), т.е.  $\varphi = \pi/2 - \psi$ , следовательно,

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad (4.51)$$



условие параллельности прямой и плоскости (перпендикулярности  $\vec{n}$  и  $\vec{s}$ ) —

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad (4.52)$$

условие их перпендикулярности (параллельности  $\vec{n}$  и  $\vec{s}$ ) —

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (4.53)$$

В качестве расстояния  $d$  от точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  до плоскости  $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$  можно взять проекцию вектора  $\overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$  на нормальный вектор  $\vec{n}$  (рис. 4.40):

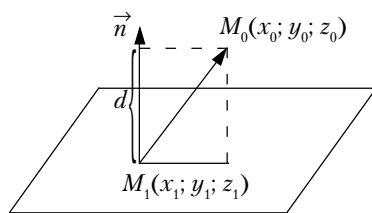


Рис. 4.40

$$d = \text{пр}_{\vec{n}} \overline{M_1M_0} \quad (\text{см. гл. 3}).$$

Можно показать, что в этом случае

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.54)$$

## ПРАКТИКУМ

### 4.9. Простейшие задачи.

#### Уравнение прямой на плоскости

**4.14.** Даны вершины треугольника  $A(7; 9)$ ,  $B(2; -3)$ ,  $C(3; 6)$ . Найти: а) точку  $M$  пересечения медиан треугольника; б) точку  $E$  пересечения биссектрисы  $AE$  со стороной  $BC$ .

*Решение.*

а) По формуле (4.4) найдем середину  $D$  стороны  $CB$  (рис. 4.41):

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2};$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{6 - 3}{2} = \frac{3}{2}, \text{ т.е. } D\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

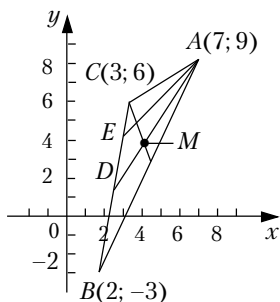


Рис. 4.41

Точка  $M$  пересечения медиан треугольника делит любую медиану, например  $AD$ , в отношении  $\lambda = 2:1$  (считая от вершины). Следовательно, по формуле (4.3)

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1 + \lambda} = \frac{7 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{1 + 2} = 4;$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1 + \lambda} = \frac{9 + 2 \cdot \frac{3}{2}}{1 + 2} = 4,$$

т.е.  $M(4; 4)$ .

б) По формуле (4.1) найдем длины сторон  $AC$  и  $BC$ :

$$AC = \sqrt{(7-3)^2 + (9-6)^2} = 5; \quad AB = \sqrt{(7-2)^2 + (9+3)^2} = 13.$$

Так как биссектриса  $AE$  делит сторону  $BC$  на отрезки, пропорциональные длинам противолежащих сторон, т.е.

$$\lambda = \frac{CE}{EB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13},$$

то

$$x_E = \frac{x_C + \lambda x_B}{1 + \lambda} = \frac{3 + \frac{5}{13} \cdot 2}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{49}{18}; \quad y_E = \frac{y_C + \lambda y_B}{1 + \lambda} = \frac{6 + \frac{5}{13}(-3)}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{7}{2},$$

т.е.  $E\left(\frac{49}{18}; \frac{7}{2}\right)$ . ►

**4.15.** Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки  $A(2; -2)$  равно ее расстоянию от прямой  $x + 1 = 0$ .

*Решение.* Расстояние от любой точки линии  $M(x, y)$  до точки  $A(2; -2)$  находим по формуле (4.1):

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}.$$

Расстояние от точки  $M(x, y)$  до прямой  $x + 1 = 0$  находим по формуле (4.14):

$$d = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x + 1|.$$

По условию

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2} = |x + 1|.$$

После возведения в квадрат и соответствующих преобразований получим уравнение

$$(y + 2)^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Искомая линия (см. параграф 4.6) — парабола, симметричная относительно прямой, параллельной оси  $Ox$ , с вершиной в точке  $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$  (рис. 4.42).

**4.16.** Издержки  $y$  руб. на изготовление партии деталей определяются по формуле  $y = ax + b$ , где  $x$  — объем партии. Для первого варианта технологического процесса  $y = 1,45x + 20$ . Для второго варианта известно, что  $y = 157,5$  руб. при  $x = 100$  дет. и  $y = 452,5$  руб. при  $x = 300$  дет. Провести оценку двух вариантов технологического процесса и найти себестоимость продукции для обоих вариантов при  $x = 200$  дет.

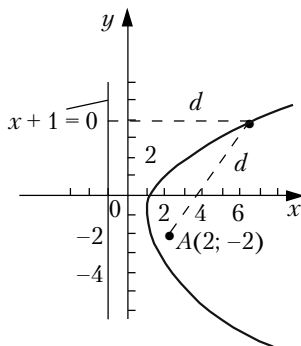


Рис. 4.42

*Решение.* Для второго варианта определяем параметры  $a$  и  $b$  из системы уравнений

$$\begin{cases} 157,5 = a \cdot 100 + b, \\ 452,5 = a \cdot 300 + b, \end{cases}$$

откуда  $a = 1,475$  и  $b = 10$ , т.е.  $y = 1,475x + 10$ .

Точка  $M(x_0, y_0)$  пересечения двух прямых находится из системы их уравнений

$$\begin{cases} y = 1,45x + 20, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1,475x + 10, & (2) \end{cases}$$

откуда  $x_0 = 400$ ,  $y_0 = 600$ .

Очевидно, что при объеме партии  $x < 400$  выгоднее использовать второй вариант технологического процесса, при  $x > 400$  — первый вариант (рис. 4.43). Себестоимость продукции (руб.) при  $x = 200$  по первому варианту составляет  $y = 1,45 \cdot 200 + 20 = 310$ , а по второму —  $y = 1,475 \cdot 200 + 10 = 305$ . ►

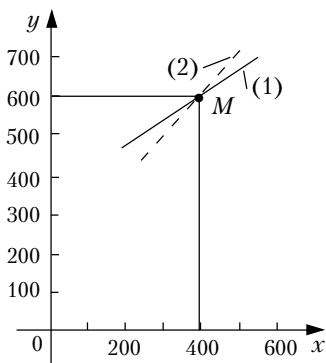


Рис. 4.43

**4.17.** Составить уравнение прямых, которые проходят через точку  $A(10; -6)$  и отсекают от координатного угла треугольники площадью по 15 кв. ед. Найти угол между этими прямыми.

*Решение.* Обозначим отрезки, отсекаемые прямой на осях координат,  $a$  и  $b$  (рис. 4.44). Тогда прямая (4.11)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

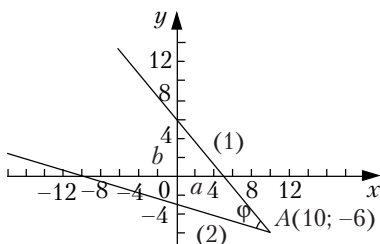


Рис. 4.44

отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого

$$S = \frac{1}{2}|ab| = 15,$$

т.е.  $ab = 30$  или  $ab = -30$ .

Так как точка  $A(10; -6)$  должна удовлетворять уравнению прямой,

то имеем две системы:

$$\begin{cases} \frac{10}{a} - \frac{6}{b} = 1, \\ ab = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{10}{a} - \frac{6}{b} = 1, \\ ab = -30. \end{cases}$$

Из первой системы находим два решения:  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = 6$ ;  $a_2 = -10$ ,  $b_2 = -3$ . Вторая система решений не имеет. Итак, уравнения прямых

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1 \quad \text{или} \quad 6x + 5y - 30 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{x}{-10} + \frac{y}{-3} = 1 \quad \text{или} \quad 3x + 10y + 30 = 0. \quad (2)$$

Для определения угла  $\varphi$  между прямыми найдем их угловые коэффициенты  $k_1 = -6/5$ ,  $k_2 = -3/10$  (ибо уравнения прямых можно представить в виде  $y = -\frac{6}{5}x + 6$ ;  $y = -\frac{3}{10}x - 3$ ). По формуле (4.13)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\frac{3}{10} + \frac{6}{5}}{1 + \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{5}} = \frac{45}{68} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{45}{68} \approx 33,5^\circ. \blacktriangleright$$

**4.18.** Даны вершины  $A(-7; 2)$ ,  $B(5; -3)$ ,  $C(8; 1)$  треугольника  $ABC$ . Составить уравнения медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из вершины  $B$ .

*Решение.*

1. Пучок прямых, проходящих через точку  $B(5; -3)$  (рис. 4.45), имеет вид

$$y + 3 = k(x - 5). \quad (1)$$

2. Найдем уравнение медианы  $BD$ . По формулам (4.5) координаты середины  $D$  отрезка  $AC$ :

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-7 + 8}{2} = \frac{1}{2};$$

$$y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2},$$

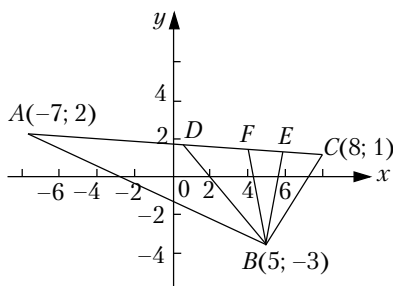


Рис. 4.45

т.е.  $D\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . По формуле (4.9) угловой коэффициент

$$k_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{\frac{3}{2} + 3}{\frac{1}{2} - 5} = -1.$$

Подставляя  $k = -1$  в формулу (1), получаем уравнение медианы  $BD$ :

$$y + 3 = -(x - 5) \text{ или } x + y - 2 = 0.$$

3. Найдем уравнение высоты  $BE$ . По формуле (4.9) угловой коэффициент прямой  $AC$

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1 - 2}{8 + 7} = -\frac{1}{15}.$$

На основании условия перпендикулярности двух прямых  $k_{BE} = -\frac{1}{k_{AC}} = 15$ .

Следовательно, по формуле (1) уравнение высоты  $BE$  примет вид

$$y + 3 = 15(x - 5) \text{ или } 15x - y - 78 = 0.$$

4. Найдем уравнение биссектрисы  $BF$ .

*Первый способ.* Угловой коэффициент  $k_{BF}$  получаем из равенства  $\operatorname{tg} \angle ABF = \operatorname{tg} \angle FBC$ , используя формулу (4.13):

$$\frac{k_{BF} - k_{BC}}{1 + k_{BF}k_{BC}} = \frac{k_{AB} - k_{BF}}{1 + k_{AB}k_{BF}}, \text{ или } \frac{k_{BF} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}k_{BF}} = \frac{-\frac{5}{12} - k_{BF}}{1 - \frac{5}{12}k_{BF}},$$

$$(\text{где } k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1 + 3}{8 - 5} = \frac{4}{3}; k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 2}{5 + 7} = -\frac{5}{12}),$$

откуда после преобразований имеем  $33k_{BF}^2 + 112k_{BF} - 33 = 0$  и  $(k_{BF})_1 = \frac{3}{11}$ ,  $(k_{BF})_2 = -\frac{11}{3}$ . Чертежу на рис. 4.45 удовлетворяет

$(k_{BF})_2 = -\frac{11}{3}$ , так как биссектриса  $BF$  образует тупой угол с осью  $Ox$ .

Теперь по формуле (1) уравнение  $BF$  примет вид

$$y + 3 = -\frac{11}{3}(x - 5) \quad \text{или} \quad 11x + 3y - 46 = 0.$$

*Второй способ.* По формуле (1) найдем уравнения сторон треугольника  $AB$  и  $BC$ , учитывая, что  $k_{AB} = -\frac{5}{12}$ ,  $k_{BC} = \frac{4}{3}$ :

$$y + 3 = -\frac{5}{12}(x - 5) \quad \text{или} \quad 5x + 12y + 11 = 0 \quad (AB);$$

$$y + 3 = \frac{4}{3}(x - 5) \quad \text{или} \quad 4x - 3y - 29 = 0 \quad (BC).$$

Учитывая, что по свойству биссектрисы расстояния ее от любой точки  $M(x, y)$  до сторон  $AB$  и  $BC$  равны, по формуле (4.14) получаем ее уравнение

$$\frac{|5x + 12y + 11|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|4x - 3y - 29|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}.$$

Записанному уравнению удовлетворяют два уравнения:

$$\frac{5x + 12y + 11}{13} = \pm \frac{4x - 3y - 29}{5}, \quad \text{или} \quad (\text{после преобразований})$$

$3x - 11y - 48 = 0$  и  $11x + 3y - 46 = 0$ , из которых последнее — уравнение с отрицательным угловым коэффициентом. ►

**4.19.** По данным примера 4.18 найти длины медианы  $BD$ , высоты  $BE$  и биссектрисы  $BF$  (см. рис. 4.45).

*Решение.*

1. Длину медианы  $BD$  найдем по формуле расстояния между двумя точками  $B(5; -3)$  и  $D\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ :

$$BD = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 3\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

2. Найдем уравнение стороны  $AC$ , проходящей через две данные точки  $A(-7; 2)$  и  $C(8; 1)$ . По формуле (4.10)

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+7}{8+7},$$

откуда  $15(y-2) = -(x+7)$  и  $x+15y-23=0$  ( $AC$ ).

3. Длину высоты  $BE$  проще всего найти по формуле (4.14) расстояния от точки  $B(5; -3)$  до прямой  $x+15y-23=0$  ( $AC$ ):

$$BE = -\frac{|5+15 \cdot (-3)-23|}{\sqrt{1^2+15^2}} = \frac{63}{\sqrt{226}} \approx 4,2.$$

4. Для нахождения длины биссектрисы  $BF$  определим вначале координаты ее точки пересечения  $F$  со стороной  $AC$ , решив систему уравнений

$$\begin{cases} (AC) \quad x+15y-23=0, \\ (BF) \quad 11x+3y-46=0, \end{cases}$$

откуда  $x = \frac{23}{6}$ ;  $y = \frac{23}{18}$ , т.е.  $F\left(\frac{23}{6}; \frac{23}{18}\right)$ .

Теперь по формуле (4.1)

$$BF = \sqrt{\left(5 - \frac{23}{6}\right)^2 + \left(-3 - \frac{23}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{6370}}{18} \approx 4,4.$$

Заметим, что точку  $F$  пересечения биссектрисы со стороной  $AC$  можно было найти по формуле (4.3) аналогично примеру 4.1, так как она делит сторону  $AC$  на отрезки, пропорциональные длинам противоположащих сторон  $AB$  и  $BE$ , т.е. в отношении  $\lambda = AF:FE = 13:5 = 2,6$  (по формуле расстояния между двумя точками легко убедиться в том, что  $AF = 13$ ,  $FE = 5$ ):

$$x_F = \frac{x_A + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \frac{-7 + \frac{13}{5} \cdot 8}{1 + \frac{13}{5}} = \frac{23}{6}; \quad y_F = \frac{y_A + \lambda y_C}{1 + \lambda} = \frac{2 + \frac{13}{5} \cdot 1}{1 + \frac{13}{5}} = \frac{23}{18}. \blacktriangleright$$



**4.20.** На оси абсцисс найти точку, отстоящую на расстоянии  $d = 10$  от точки  $A(2; 6)$ .

**4.21.** На осях абсцисс и ординат найти точки, равноудаленные от точек  $A(2; 3)$  и  $B(5; 6)$ .

**4.22.** Отрезок, ограниченный точками  $A(1; -3)$  и  $B(4; 3)$ , разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

**4.23.** Даны три вершины параллелограмма: точки  $A(3; -5)$ ,  $B(5; -3)$ ,  $C(-1; 3)$ . Определить четвертую вершину  $D$ , противоположную  $B$ .

**4.24.** Точки  $A(-2; 1)$ ,  $B(2; 3)$  и  $C(4; -1)$  — середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.

**4.25.** Даны вершины треугольника:  $A(3; 5)$ ,  $B(-3; 3)$ ,  $C(5; -8)$ . Определить длину медианы, проведенной из вершины  $C$ .

**4.26.** Найти центр масс однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами  $A(2; 4)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $C(4; -2)$ .

**4.27.** Треугольник задан координатами вершин  $A(3; 5)$ ,  $B(9; -3)$  и  $C(0; 1)$ . Найти длину биссектрисы угла  $A$ .

**4.28.** Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек:  $M_1(-4; 3)$  и  $M_2(2; 5)$ .

**4.29.** Составить уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек  $F_1(2; 0)$  и  $F_2(-2; 0)$  равна  $2\sqrt{5}$ .

**4.30.** Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точки  $F(2; 2)$  и оси  $Ox$ .

**4.31.** Составить уравнение множества точек, равноудаленных от оси  $Oy$  и точки  $F(4; 0)$ .

**4.32.** Составить уравнение траектории точки  $M(x, y)$ , которая при своем движении остается вдвое ближе к точке  $A(0; -1)$ , чем к точке  $B(0; -4)$ .

**4.33.** Издержки перевозки  $y$  двумя видами транспорта выражаются уравнениями:  $y = 150 + 50x$  и  $y = 250 + 25x$ , где  $x$  — расстояния в сотнях километров;  $y$  — транспортные расходы. Начиная с какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

**4.34.** Зная, что изменение объема производства  $y$  с изменением производительности труда  $x$  происходит по прямой линии, составить ее уравнение, если при  $x = 3$   $y = 185$ , а при  $x = 5$   $y = 305$ . Определить объем производства при  $x = 20$ .

**4.35.** Лежат ли на одной прямой три данные точки  $A(2; 0)$ ,  $B(6; 4)$ ,  $C(11; 9)$ ?

**4.36.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(5; -1)$  под углом  $45^\circ$  к оси  $Ox$ .

**4.37.** Составить уравнение прямых, проходящих через точку  $A(-4; 1)$  параллельно осям координат.

**4.38.** Составить уравнение прямой, проходящей через две точки  $A(-4; 2)$  и  $B(3; -1)$ .

**4.39.** Найти угол между прямой  $3x + y - 6 = 0$  и прямой, проходящей через точки  $A(-3; 1)$  и  $B(3; 3)$ .

**4.40.** Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $M(2; 3)$  под углом  $45^\circ$  к прямой  $5x + 2y - 4 = 0$ .

**4.41.** Дана прямая  $2x + 5y - 1 = 0$ . Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-1; 3)$ : а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

**4.42.** Через вершины треугольника  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; -1)$  и  $C(0; 4)$  проведены прямые параллельно противоположным сторонам. Составить их уравнения.

**4.43.** Даны две прямые  $y = 3x - 2$  и  $3x - y + 12 = 0$ . Составить уравнение прямой, проведенной параллельно данным на равном расстоянии между ними.

**4.44.** Две стороны квадрата лежат на прямых  $3x + 4y + 22 = 0$ ,  $3x + 4y - 13 = 0$ . Вычислить площадь квадрата.

**4.45.** Через точку  $M(2; 5)$  провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между осями координат, делился в этой точке пополам.

**4.46.** Даны середины сторон треугольника  $P(1; 2)$ ,  $Q(5; -1)$  и  $R(-4; 3)$ . Составить уравнения его сторон.

**4.47.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $5x - y + 10 = 0$  и  $8x + 4y + 9 = 0$  параллельно прямой  $x + 3y = 0$ .

**4.48.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $2x - 3y + 5 = 0$  и  $3x + y - 7 = 0$  перпендикулярно к прямой  $y = 2x$ .

**4.49.** Составить уравнение перпендикуляра к прямой  $8x + 4y - 3 = 0$  в точке пересечения ее с прямой  $x - y = 0$ .

**4.50.** Даны вершины треугольника  $A(-1; 3)$ ,  $B(3; -2)$  и  $C(5; 3)$ . Составить уравнения: а) трех его сторон; б) медианы, проведенной из вершины  $B$ ; в) высоты, опущенной из вершины  $C$  на сторону  $AB$ .

**4.51.** Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма  $x + y + 5 = 0$  и  $x - 4y = 0$ . Составить уравнения двух других сторон, если известна точка пересечения его диагоналей  $P(2; -2)$ .

**4.52.** Даны уравнения сторон прямоугольника  $3x - 4y + 5 = 0$  и  $4x + 3y - 7 = 0$ , а также одна из его вершин  $A(-2; 1)$ . Составить уравнения двух других сторон прямоугольника.

**4.53.** Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы  $2x + 3y - 5 = 0$  и вершину прямого угла  $C(2; -1)$ .

**4.54.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $A(0; 2)$  и уравнения высот ( $BM$ )  $x + y - 4 = 0$  и ( $CM$ )  $y = 2x$ , где  $M$  — точка пересечения высот.

**4.55.** Даны две вершины  $A(-2; 1)$  и  $B(3; -4)$  треугольника и точка  $D(5; -1)$  пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

**4.56.** Составить уравнения биссектрис углов между прямыми  $3x + 4y - 1 = 0$  и  $4x - 3y + 5 = 0$ .

**4.57.** Уравнение одной из сторон некоторого угла  $2x - 9y - 3 = 0$ , а уравнение биссектрисы  $4x - y + 11 = 0$ . Составить уравнение второй стороны угла.

**4.58.** Для треугольника  $ABC$  даны уравнения стороны ( $AB$ )  $x + 7y - 6 = 0$  и биссектрис ( $AL$ )  $x + y - 2 = 0$  и ( $BM$ )  $x - 3y - 6 = 0$ . Найти координаты вершин.

## 4.10. Кривые второго порядка

**4.59.** Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(1; 5)$ ,  $B(-4; 0)$  и  $D(4; -4)$ .

*Решение.* Уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $C(x_0, y_0)$  имеет вид (4.15):  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ . Так как точки  $A, B, D$  лежат на окружности, то их координаты должны удовлетворять этому уравнению:

$$\begin{cases} (1 - x_0)^2 + (5 - y_0)^2 = R^2, \\ (-4 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = R^2, \\ (4 - x_0)^2 + (-4 - y_0)^2 = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, а затем третье, получаем (рекомендуем читателю убедиться в этом само-

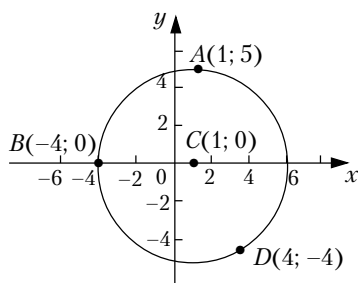


Рис. 4.46

ружность и прямая имеют одну общую точку, следовательно, система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + a = 0, \\ y = x\sqrt{3} \end{cases}$$

или уравнение

$$x^2 + (x\sqrt{3})^2 - 4x + a = 0$$

должны иметь единственное решение.

Это произойдет, если дискриминант полученного квадратного уравнения  $4x^2 - 4x + a = 0$  будет равен нулю, т.е.  $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4a = 16(1 - a) = 0$ , откуда  $a = 1$ .

Решая квадратное уравнение при  $a = 1$ , находим  $x = \frac{1}{2}$ , т.е. точка касания  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Для определения радиуса окружности приведем ее уравнение к нормальному виду, группируя члены, содержащие  $x$ , и дополняя их до полного квадрата:

$$(x^2 - 4x) + y^2 + 1 = 0; (x^2 - 4x + 4) - 4 + y^2 + 1 = 0,$$

откуда  $(x - 2)^2 + y^2 = 3$ , т.е. центр окружности  $(2; 0)$  и радиус  $R = \sqrt{3}$  (рис. 4.47). ►

**4.61.** Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса  $9x^2 + 4y^2 = 36$ .

*Решение.* Разделив на 36, приведем уравнение к виду

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

стоятельно)  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$ , и находим  $R = 5$ , т.е. уравнение окружности:  $(x - 1)^2 + y^2 = 25$  (рис. 4.46). ►

**4.60.** Найти значение параметра  $a$ , при котором окружность  $x^2 + y^2 - 4x + a = 0$  касается прямой  $y = x\sqrt{3}$ . Найти радиус окружности, ее центр и точку касания.

*Решение.* По условию ок-

Отсюда следует, что большая полуось эллипса  $a = 3$ , а малая полуось  $b = 2$ . При этом большая ось эллипса и ее фокусы расположены на оси  $Oy$  (рис. 4.48). По формуле (4.23) расстояние от фокуса эллипса до начала координат  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ , т.е. координаты фокусов  $F_1(0; -\sqrt{5})$  и  $F_2(0; \sqrt{5})$ .

По формуле (4.24) эксцентриситет эллипса  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . ►

**4.62.** Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы  $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ .

*Решение.* Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду, разделив обе части уравнения на

$$(-144): -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Следовательно, гипербола имеет фокусы на оси  $Oy$ , ее действительная полуось  $a = 3$ , а мнимая полуось  $b = 4$  (рис. 4.49).

Асимптоты гиперболы  $x = \pm \frac{a}{b}y$ , т.е.  $x = \pm \frac{4}{3}y$  или  $y = \pm \frac{3}{4}x$ . Вершины данной гиперболы —  $A_1(0; -3)$ ,  $A_2(0; 3)$ .

Далее находим  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ , поэтому фокусы расположены в точках  $F_1(0; -5)$ ,  $F_2(0; 5)$ . Эксцентриситет гиперболы  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ . ►

**4.63.** Составить уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями  $y = \pm \frac{3}{5}x$  и гипербола проходит че-

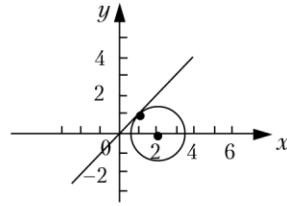


Рис. 4.47

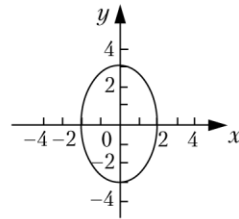


Рис. 4.48

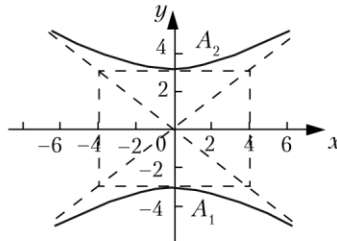


Рис. 4.49

рез точку  $M(10; -3\sqrt{3})$ . Найти расстояние между фокусами и вершинами гиперболы.

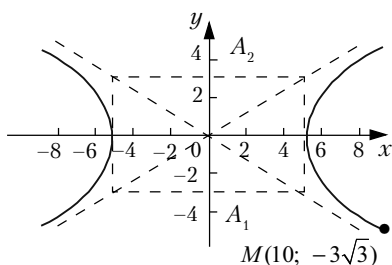


Рис. 4.50

*Решение.* Так как точка  $M(10; -3\sqrt{3})$  лежит на гиперболе (причем выше асимптоты  $y = -\frac{3}{5}x$  (рис. 4.50), то ее координаты должны удовлетворять уравнению (4.26):  $\frac{100}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1$ . Кроме того,  $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$ , так как асимпто-

ты гиперболы  $y = \pm \frac{3}{5}x$ .

Решив полученную систему двух уравнений, найдем  $a = 5$ ,  $b = 3$ , т.е. уравнение гиперболы  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ . Расстояние между вершинами гиперболы  $2a = 10$ , между фокусами  $2c = 2\sqrt{34}$ , где  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ . ►

**4.64.** Дан эллипс  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ . Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

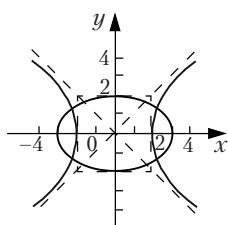


Рис. 4.51

*Решение.* Полуоси эллипса  $a_э = 3$ ,  $b_э = \sqrt{5}$ ,  $c_э = \sqrt{9 - 5} = 2$ . По условию для гиперболы  $a_г = c_э = 2$ ,  $c_г = a_э = 3$ . Следовательно,  $b_г = \sqrt{c_г^2 - a_г^2} = \sqrt{a_э^2 - c_э^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$  и уравнение искомой гиперболы будет  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  (рис. 4.51).

**4.65.** Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку  $A(2; 4)$  и симметрична относительно оси  $Ox$ . Найти фокус и уравнения параболы и ее директрисы.

*Решение.* Так как парабола проходит через точку  $O(0; 0)$  и симметрична относительно оси  $Ox$ , то ее уравнение (4.32)

$y^2 = 2px$ . Подставляя координаты точки  $A$  в это уравнение, т.е.  $4^2 = 2p \cdot 2$ , находим параметр  $p = 4$ . Следовательно, уравнение параболы  $y^2 = 8x$ . Уравнение ее директрисы:  $x = -p/2$ , т.е.  $x = -2$ , фокус параболы  $F(2; 0)$  (рис. 4.52). ►

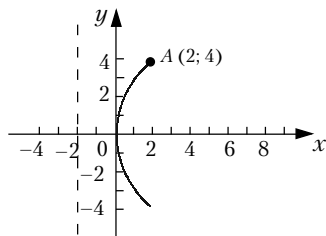


Рис. 4.52

**4.66.** Через точку  $A(3; -1)$  провести такую хорду параболы  $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$ , которая де-

лилась бы в данной точке пополам.

*Решение.* Для построения параболы представим ее в виде

$$y = \frac{1}{4}(x^2 - 4x - 8) = \frac{1}{4}[(x-2)^2 - 4 - 8] = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3,$$

т.е. вершина параболы  $(2; -3)$ . Уравнение прямой (хорды), проходящей через точку  $A(3; -1)$  в соответствии с формулой (4.8) имеет вид:  $y + 1 = k(x - 3)$ . Точки пересечения хорды с параболой определяются системой

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2, \\ y + 1 = k(x - 3), \end{cases}$$

решение которой после исключения  $y$  сводится к уравнению

$$\left(\frac{1}{4}x^2 - x - 2\right) + 1 = k(x - 3) \text{ или } x^2 - 4(k+1)x + 4(3k-1) = 0. \quad (1)$$

По условию, точка  $A(3; -1)$  делит хорду пополам, следовательно,  $x_A = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения (1).

По теореме Виета,  $x_1 + x_2 = 4(k+1)$ , следовательно,  $x_A = \frac{4(k+1)}{2} = 2(k+1)$  или  $x_A = 2(k+1) = 3$ , откуда  $k = \frac{1}{2}$ , и уравнение хорды будет иметь вид:  $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$  или  $x - 2y - 5 = 0$  (рис. 4.53). ►

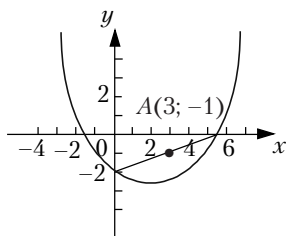


Рис. 4.53

*Решение.*

1. В уравнении гиперболы выделим целую часть; полу-

$$\text{чим } y = \frac{4(x-1)}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{4(x+\frac{1}{2})-6}{2(x+\frac{1}{2})} = 2 - \frac{3}{x+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$y-2 = -\frac{3}{x+\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad (x+\frac{1}{2})(y-2) = -3.$$

Полагая  $x+\frac{1}{2} = x'$ ,  $y-2 = y'$ , получаем в новой системе координат  $O'x'y'$  с центром  $O'(-\frac{1}{2}; 2)$  гиперболу  $x'y' = -3$ , ветви которой расположены во II и IV квадрантах (рис. 4.54).

2. Выделив полный квадрат, представим уравнение параболы в виде

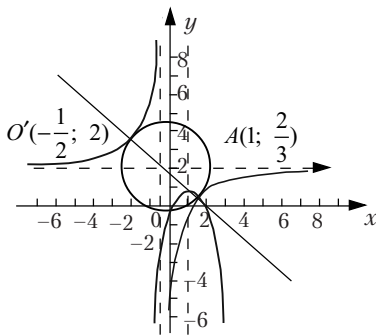


Рис. 4.54

4.67. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы

$$y = \frac{4x-4}{2x+1} \quad \text{и вершину параболы}$$

$$y = -x^2 + 2x - \frac{1}{3}. \quad \text{Составить уравнение окружности, касающейся гиперболы в ее вершинах.}$$

Составить уравнение окружности, касающейся гиперболы в ее вершинах.

$$y = -x^2 + 2x - \frac{1}{3} = -(x-1)^2 - \frac{1}{3} + 1 = -(x-1)^2 + \frac{2}{3},$$

откуда следует, что вершина параболы находится в точке  $A(1; \frac{2}{3})$ , а ветви ее направлены вниз.

3. Составляем уравнение прямой  $O'A$  по формуле (4.10):



$$\frac{y-2}{\frac{2}{3}-2} = \frac{x+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad 8x+9y-14=0.$$

4. Находим расстояние от точки  $O(0; 0)$  до прямой  $8x + 9y - 14 = 0$  по формуле (4.14):

$$d = \frac{|8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 - 14|}{\sqrt{8^2 + 9^2}} = \frac{14}{\sqrt{145}} \approx 1,2.$$

5. Очевидно, что центр искомой окружности должен совпасть с центром гиперболы  $O'(-\frac{1}{2}; 2)$  и иметь радиус  $R$ , равный расстоянию от точки  $O'$  до любой из вершин гиперболы. Для гиперболы  $x'y' = m$  координаты любой вершины (по абсолютной величине)  $|x'| = |y'| = \sqrt{|m|}$ , поэтому расстояние от нового начала координат  $(0; 0)$  по формуле (4.1) равно  $\sqrt{2|m|}$ . Следовательно,  $R = \sqrt{2|m|} = \sqrt{2|-3|} = \sqrt{6}$ . Итак, уравнение искомой окружности по формуле (4.15) есть  $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = 6$ . ►

**4.68.** Найти центр и радиус окружности  $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$ .

**4.69.** Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки  $A(-1; 5)$ ,  $B(-2; -2)$  и  $C(5; 5)$ .

**4.70.** Через точки  $A(8; 2)$  и  $B(10; 0)$  провести окружность радиуса  $R = 10$ .

**4.71.** Составить уравнение окружности, проходящей через точку  $M(5; 3)$  с центром в точке пересечения прямых  $5x - 3y - 13 = 0$  и  $x + 4y + 2 = 0$ .

**4.72.** Составить уравнение окружности, касающейся оси  $Oy$  в начале координат и пересекающей ось  $Ox$  в точке  $M(6; 0)$ .

**4.73.** Составить уравнение окружности, если она проходит через точки  $A(3; 1)$  и  $B(-1; 3)$ , а центр ее лежит на прямой  $3x - y - 2 = 0$ .

**4.74.** Составить уравнение прямой, проходящей через центр окружности  $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 15 = 0$  параллельно прямой  $x + y = 0$ .

**4.75.** Составить уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности  $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$  с прямой  $x + y = 0$  и точку  $M(4; 4)$ .

**4.76.** Определить полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса  $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ .

**4.77.** Определить эксцентриситет эллипса, если его большая ось вдвое больше малой.

**4.78.** Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 12, а эксцентриситет — 0,8. Найти расстояние между фокусами эллипса.

**4.79.** Эллипс проходит через точки  $M_1(2; \sqrt{3})$  и  $M_2(0; 2)$ . Составить уравнение эллипса и найти расстояние точки  $M_1$  от фокусов.

**4.80.** На эллипсе  $9x^2 + 25y^2 = 225$  найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше ее расстояния от левого фокуса.

**4.81.** Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами его большой и малой осей.

**4.82.** Ординаты всех точек окружности  $x^2 + y^2 = 36$  сокращены вдвое. Составить уравнение полученной новой кривой.

**4.83.** Составить каноническое уравнение гиперболы  $9x^2 - 16y^2 = 144$ . Найти координаты ее фокусов и вершин, эксцентриситет и уравнения асимптот.

**4.84.** Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки  $A(2; 1)$  и  $B(-4; \sqrt{7})$ .

**4.85.** Гипербола проходит через точку  $M(6; -2\sqrt{2})$  и имеет мнимую полуось  $b = 2$ . Составить ее уравнение и найти расстояние точки  $M$  от фокусов.

**4.86.** Найти расстояние фокуса гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  от ее асимптот и угол между асимптотами.

**4.87.** Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**4.88.** Составить уравнения касательных к гиперболе  $x^2 - 4y^2 = 16$ , проведенных из точки  $A(0; -2)$ .

**4.89.** Составить уравнение равнобедренной гиперболы, вершины которой удалены от начала координат на расстояние  $d = 4$ .

**4.90.** Составить уравнения асимптот равнобедренной гиперболы  $y = \frac{2x+3}{x-3}$  и найти координаты ее вершин.

**4.91.** Составить уравнения осей симметрии равносторонней гиперболы  $y = \frac{4-3x}{x-1}$ .

**4.92.** Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси  $Ox$ , с вершиной в начале координат и проходящей через точку  $A(-2; -3)$ . Найти фокус и директрису параболы.

**4.93.** Составить уравнение параболы: а) проходящей через точки  $(0; 0)$  и  $(1; -3)$  и симметричной относительно оси  $Ox$ ; б) проходящей через точки  $(0; 0)$  и  $(2; -4)$  и симметричной относительно оси  $Oy$ .

**4.94.** Составить уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси  $Oy$ , если она проходит через точки  $(-2; 8)$ ,  $(0; 2)$  и  $(3; \frac{1}{2})$ .

**4.95.** Вычислить длину хорды, образуемой пересечением прямой  $y = 4x$  с параболой  $y = 3 + 2x - x^2$ .

**4.96.** Составить уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы  $y = -3x^2 + 12x - 9$  параллельно прямой  $\frac{x}{10} + \frac{y}{8} = 1$ .

**4.97.** Составить уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы  $y^2 = 2px$  и касающейся ее директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.

**4.98.** Составить уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой  $x + y = 0$  и окружности  $x^2 + y^2 + 4y = 0$  и симметрична относительно оси  $Oy$ .

**4.99.** Из вершины параболы  $y^2 = 2px$  проведены всевозможные хорды. Составить уравнения множества середин этих хорд.

## 4.11. Полярные координаты

**4.100.** Дана прямая линия  $y = \sqrt{3}x$ . Найти ее уравнение в полярной системе координат.

*Решение.* По формулам (4.34) имеем  $\rho \sin \varphi = \sqrt{3} \rho \cos \varphi$ , откуда искомое уравнение имеет вид:  $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$ . ►

**4.101.** Построить кардиоиду  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$  и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

*Решение.* Для построения кардиоиды находим значения полярного радиуса для различных углов (рис. 4.55):  $\rho(0) = 2a$ ;  $\rho(\pm \frac{\pi}{3}) = \frac{3a}{2}$ ;  $\rho(\pm \frac{\pi}{2}) = a$ ;  $\rho(\pi) = 0$ . Заменяя  $\rho$  и  $\cos \varphi$  по формулам (4.35), получим уравнение кардиоиды в прямоугольной системе координат

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ или } x^2 + y^2 = a(x + \sqrt{x^2 + y^2}),$$

которое можно представить в виде

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2). \blacktriangleright$$

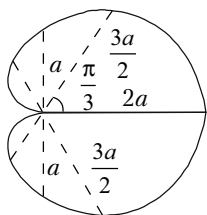


Рис. 4.54

**4.102.** Уравнение эллипса  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  представить в полярной системе координат (полюс находится в фокусе эллипса).

*Решение.* Уравнение эллипса в полярной системе координат имеет вид (4.37). По условию  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{3}$ . Фокальный параметр эллипса  $q = \frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$ , а его эксцент-

$$\text{риситет } \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{4 - 3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, полярное уравнение эллипса есть

$$\rho = \frac{q}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = \frac{3/2}{1 - (1/2) \cos \varphi} = \frac{3}{2 - \cos \varphi}. \blacktriangleright$$

**4.103.** Написать в полярной системе координат уравнение: а) прямой, проходящей через точку  $A(a; b)$  и параллельной полярной оси; б) окружности с центром в точке  $C(0; a)$  и радиусом, равным  $a$ .

**4.104.** Написать в полярной системе координат уравнения линий: а)  $x^2 + y^2 = ax$ ; б)  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

**4.105.** Построить кривые и написать их уравнения в прямоугольной системе координат: а)  $\rho = 2a \sin \varphi$ ;

б)  $\rho^2 \sin 2\varphi = 2a^2$ ; в)  $\rho \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = a\sqrt{2}$ .

**4.106.** Написать канонические уравнения кривых второго порядка: а)  $\rho = \frac{9}{5-4\cos\varphi}$ ; б)  $\rho = \frac{9}{4-5\cos\varphi}$ ; в)  $\rho = \frac{3}{1-\cos\varphi}$ .

**4.107.** Уравнение эллипса  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  представить в полярной системе координат (полюс находится в фокусе эллипса).

## 4.12. Плоскость и прямая в пространстве

**4.108.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1; -2; 3)$  и: а) перпендикулярной вектору  $\vec{n} = (3; -4; 5)$ ; б) параллельной плоскости  $3x - 4y + 5z + 6 = 0$ ; в) точку  $M_1(0; 2; 5)$  и параллельной оси  $Oy$ ; г) проходящей через ось  $Oz$ .

*Решение.*

а) Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{n} = (3; -4; 5)$  и проходящей через точку  $M(1; -2; 3)$ , по формуле (4.38) имеет вид

$$3(x-1) - 4(y+2) + 5(z-3) = 0 \quad \text{или} \quad 3x - 4y + 5z - 26 = 0.$$

б) *Первый способ.* Плоскость, параллельная плоскости  $3x - 4y + 5z + 6 = 0$ , очевидно, перпендикулярна нормальному вектору  $\vec{n} = (3; -4; 5)$ . Уравнение такой плоскости, проходящей через данную точку  $M(1; -2; 3)$ , получено в п. «а».

*Второй способ.* Плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$  параллельна плоскости  $3x - 4y + 5z + 6 = 0$ , если ее коэффициенты при переменных пропорциональны, т.е.  $\frac{A}{3} = \frac{B}{-4} = \frac{C}{5}$ .

Взяв  $A = 3$ ;  $B = -4$ ;  $C = 5$  (при коэффициенте пропорциональности, равном единице), получим уравнение  $3x - 4y + 5z + D = 0$ . Коэффициент  $D$  найдем с учетом того, что координаты точки  $M(1; -2; 3)$ , лежащей на плоскости, должны удовлетворять ее уравнению, т.е.  $3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + D = 0$ , откуда  $D = -26$  и уравнение искомой плоскости есть  $3x - 4y + 5z - 26 = 0$ .

в) Так как плоскость параллельна оси  $Oy$ , то в уравнении (4.39) ее коэффициент  $B = 0$ , т.е. уравнение плоскости име-

ет вид  $Ax + Cz + D = 0$ . Так как точки  $M(1; -2; 3)$  и  $M_1(0; 2; 5)$  лежат на плоскости, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению, т.е.

$$\begin{cases} A + 3C + D = 0, \\ 5C + D = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad A = -\frac{2}{5}D; \quad C = -\frac{1}{5}D, \quad \text{следова-}$$

тельно, уравнение плоскости  $(-\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}z + 1)D = 0$  или (после сокращения на  $D \neq 0$ )  $2x + z - 5 = 0$ .

г) Так как плоскость проходит через ось  $Oz$ , то в уравнении (4.39) ее коэффициенты  $C = 0$ ;  $D = 0$ , т.е. уравнение плоскости имеет вид  $Ax + By = 0$ . Подставляя в уравнение координаты точки  $M(1; -2; 3)$ , лежащей на плоскости, получаем  $1 \cdot A - 2B = 0$ , откуда  $A = 2B$  и уравнение плоскости (после сокращения на  $B \neq 0$ )  $2x + y = 0$ . ►

**4.109.** Составить уравнение плоскости, проходящей через: а) точку  $M(1; 2; 3)$  параллельно двум данным векторам  $\vec{a} = (6; -8; 10)$  и  $\vec{b} = (4; -3; 5)$ ; б) точки  $M_1(1; 2; 3)$  и  $M_2(4; -1; -2)$  параллельно вектору  $\vec{a} = (6; -8; 10)$ ; в) точки  $M_1(1; 2; 3)$ ,  $M_2(4; -1; -2)$  и  $M_3(4; 0; 3)$ .

*Решение.*

а) В соответствии с (4.38) уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1; 2; 3)$  имеет вид

$$A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0. \quad (1)$$

Так как плоскость параллельна двум векторам  $\vec{a} = (6; -8; 10)$  и  $\vec{b} = (4; -3; 5)$ ; то нормальный вектор плоскости  $\vec{n} = (A; B; C)$  перпендикулярен каждому из данных векторов, следовательно, их скалярные произведения равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} \vec{a}\vec{n} = 6A - 8B + 10C = 0, \\ \vec{b}\vec{n} = 4A - 3B + 5C = 0. \end{cases}$$

Из этой системы найдем  $A = -\frac{5}{7}C$ ;  $B = \frac{5}{7}C$  и подставим в уравнение (1), в результате (после сокращения на  $C \neq 0$ ) получим

$$-\frac{5}{7}(x-1) + \frac{5}{7}(y-2) + z - 3 = 0 \quad \text{или} \quad 5x - 5y - 7z + 26 = 0.$$

б) В п. «а» получено уравнение плоскости (1), проходящей через точку  $M_1(1; 2; 3)$ , а в силу того, что плоскость параллельна вектору  $\vec{a} = (6; -8; 10)$ , получаем равенство

$$6A - 8B + 10C = 0. \quad (2)$$

Так как плоскость проходит через точку  $M_2(4; -1; -2)$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению (1), следовательно,

$$A(4-1) + B(-1-2) + C(-2-3) = 0, \text{ или } 3A - 3B - 5C = 0. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (2) и (3):

$$\begin{cases} 6A - 8B + 10C = 0, \\ 3A - 3B - 5C = 0, \end{cases}$$

получаем  $A = \frac{35}{3}C$ ;  $B = 10C$ . Подставляя полученные значения в уравнение (1), имеем (после сокращения на  $C \neq 0$ )

$$\frac{35}{3}(x-1) + 10(y-2) + z - 3 = 0 \text{ или } 35x + 30y + 3z - 104 = 0.$$

в) Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1(1; 2; 3)$ , имеет вид (1). Так как точки  $M_2(4; -1; -2)$  и  $M_3(4; 0; 3)$  лежат на плоскости, то их координаты удовлетворяют уравнению плоскости, т.е.

$$\begin{cases} A(4-1) + B(-1-2) + C(-2-3) = 0, \\ A(4-1) + B(0-2) + C(3-3) = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3A - 3B - 5C = 0, \\ 3A - 2B = 0, \end{cases}$$

откуда  $A = -\frac{10}{3}C$ ;  $B = -5C$ . Подставляя полученные значения в уравнение (1), получаем (после сокращения на  $C \neq 0$ )

$$-\frac{10}{3}(x-1) - 5(y-2) + z - 3 = 0 \text{ или } 10x + 15y - 3z - 31 = 0. \blacktriangleright$$

**4.110.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-1; 0; 5)$  и: а) образующей с осями координат углы  $\alpha = \pi/3$ ,  $\beta = \pi/4$ ,  $\gamma = 2\pi/3$ ; б) параллельной прямой

$\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{-2}$ ; в) параллельной оси  $Oy$ ; г) параллельной прямой

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0; \end{cases}$$

д) точку  $M_1(2; -3; 4)$ .

*Решение.*

а) В качестве направляющего вектора прямой возьмем единичный вектор данной прямой, координатами которого являются направляющие косинусы:  $\vec{s} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma) = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2})$ . По формуле (4.45) канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{1/2} = \frac{y}{\sqrt{2}/2} = \frac{z-5}{-1/2}.$$

б) В качестве направляющего вектора искомой прямой берем направляющий вектор заданной прямой, т.е.  $\vec{s} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ , поэтому по формуле (4.45) канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-2}.$$

в) В качестве направляющего вектора прямой берем единичный вектор, направленный по оси  $Oy$ , т.е.  $\vec{s} = (0; 1; 0)$ , тогда канонические уравнения искомой прямой<sup>1</sup>:

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}.$$

г) Приведем уравнения прямой, заданной системой, к каноническому виду. Выразим одну из переменных, например  $x$ , поочередно через две другие —  $z$  и  $y$ , а затем приравняем полученные выражения. Складывая оба уравнения системы, получаем  $2x + z + 1 = 0$ , откуда  $x = \frac{z+1}{-2}$ .

---

<sup>1</sup> Равенство знаменателей нулю означает, что соответствующие числители  $x + 1 = 0$  и  $z - 5 = 0$ .



Умножая первое уравнение системы на 2 и складывая со вторым, получаем  $3x + y + 3 = 0$ , откуда  $x = \frac{y+3}{-3}$ . Приравняв полученные выражения, имеем канонические уравнения заданной прямой:  $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-2}$ . Далее, решая аналогично задаче «б», получим канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-2}.$$

д) По формуле (4.45) уравнение искомой прямой

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-0}{-3-0} = \frac{z-5}{4-5} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}. \blacktriangleright$$

**4.111.** Составить уравнение плоскости, проходящей через: а) прямую  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$  и точку  $M(2; 0; 1)$ ; б) две параллельные прямые  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$  и  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$ .

*Решение.*

а) Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2; 0; 1)$ , по формуле (4.38) имеет вид

$$A(x-2) + By + C(z-1) = 0.$$

Направляющий вектор прямой  $\vec{s} = (1; 2; -1)$  и нормальный вектор плоскости  $\vec{n} = (A; B; C)$  перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение  $\vec{s} \vec{n} = 0$ , т.е.

$$A + 2B - C = 0. \quad (1)$$

Точка  $A(1; -1; -1)$  лежит на прямой, следовательно, и на плоскости, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости

$$A(1-2) + B(-1) + C(-1-1) = 0 \quad \text{или} \quad -A - B - 2C = 0. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), получим  $A = -5C$ ;  $B = 3C$ . Следовательно, искомое уравнение плоскости име-

ет вид  $(-5(x-2) + 3y + z - 1)C = 0$ , или (после сокращения на  $C \neq 0$  и преобразований)  $5x - 3y - z - 9 = 0$ .

б) Взяв на одной из прямых точку, например, на первой прямой точку  $M(1; 0; -2)$ , получим задачу, аналогичную рассмотренной в п. «а». Искомая плоскость имеет уравнение  $3x - 2y - 3 = 0$  (предоставляем читателю в этом убедиться самостоятельно). ►

**4.112.** Найти проекцию  $B$  точки  $A(5; 2; -1)$  на: а) плоскость  $2x - y + 3z + 23 = 0$ ; б) прямую  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+11}{4} = \frac{z-2}{5}$ .

*Решение.*

а) Найдем уравнение прямой, проходящей через точку  $A(5; 2; -1)$  и перпендикулярной плоскости. В качестве направляющего вектора  $\vec{s}$  прямой берем нормальный вектор плоскости, т.е.  $\vec{s} = \vec{n} = (2; -1; 3)$ . Тогда по формуле (4.45) уравнение перпендикуляра  $AB$  имеет вид

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

Найдем точку пересечения прямой  $AB$  и плоскости. Для этого представим уравнения прямой в параметрическом виде, приравняв к  $t$  каждое из трех данных отношений. В результате получим параметрические уравнения прямой:  $x = 5 + 2t$ ;  $y = 2 - t$ ;  $z = -1 + 3t$ . Подставляя полученные выражения в уравнение плоскости, имеем  $2(5 + 2t) - (2 - t) + 3(-1 + 3t) + 23 = 0$ , откуда  $t = -2$  есть значение параметра, при котором определяется точка пересечения прямой  $AB$  с данной плоскостью, т.е.  $x_B = 5 + 2(-2) = 1$ ;  $y_B = 2 - (-2) = 4$ ;  $z_B = -1 + 3(-2) = -7$ . Итак,  $B(1; 4; -7)$ .

б) Точка  $B$  есть точка пересечения данной прямой с перпендикулярной ей плоскостью, проходящей через точку  $A$ . Вектор  $\vec{s} = (2; 4; 5)$  перпендикулярен этой плоскости, следовательно, по формуле (4.38)

$$2(x-5) + 4(y-2) + 5(z+1) = 0, \text{ или } 2x + 4y + 5z - 13 = 0.$$

Точка  $B(3; -7; 7)$  пересечения этой плоскости с данной прямой находится аналогично задаче а. ►

**4.113.** Найти угол между:

$$\text{а) прямыми } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2} \quad (1) \text{ и } \frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1} \quad (2)$$

и выяснить, являются ли эти прямые пересекающимися или скрещивающимися; б) прямой (1) и плоскостью  $2x + 3y - 6z + 2 = 0$  (3).

*Решение.*

а) По формуле (4.48)

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{-2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9},$$

следовательно, угол  $\varphi = \arccos(-\frac{\sqrt{6}}{9}) \approx 106^\circ$ . Найдем точку пересечения прямых в предположении, что они пересекаются. Представим уравнения (1) в виде параметрических уравнений:  $x = 2t + 1$ ;  $y = -t - 2$ ;  $z = -2t$ . Подставляя полученные

выражения в уравнения прямой (2), получаем  $2t + 2 = \frac{-t + 9}{2} =$

$-2t + 6$ , откуда  $t = 1$ . Так как оба уравнения дают *одно и то же* значение  $t = 1$ , следовательно, существует точка пересечения прямых  $M(3; -3; -2)$ .

б) По формуле (4.51)

$$\sin \varphi = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-6) \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{7 \cdot 3} = \frac{13}{21};$$

$$\varphi \approx \arcsin \frac{13}{21} \approx 38^\circ. \blacktriangleright$$

**4.114.** Составить уравнение плоскости, проходящей через: а) ось  $Ox$  и точку  $A(1; -1; 3)$ ; б) через ось  $Oy$  и точку  $B(2; 1; -1)$ .

**4.115.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(4; -4; 2)$  и параллельной плоскости  $xOz$ .

**4.116.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(2; 3; 4)$  и отсекающей на осях  $Ox$  и  $Oy$  отрезки  $a = 1$ ,  $b = -1$ .

**4.117.** Из точки  $M(-1; -1; 4)$  опущен на плоскость перпендикуляр, его основание  $N(2; 1; 3)$ . Составить уравнение плоскости.

**4.118.** Плоскость проходит через ось  $Oz$  и образует с плоскостью  $2x + y - \sqrt{5}z = 0$  угол  $\pi/3$ . Составить ее уравнение.

**4.119.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(-2; 7; 3)$  параллельно плоскости  $x - 4y + 5z + 1 = 0$ .

**4.120.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2; -3; 1)$  параллельно векторам  $\vec{a} = (-3; 2; -1)$  и  $\vec{b} = (1; 2; 3)$ .

**4.121.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(2; 1; 2)$  и  $M_2(3; 1; 2)$  перпендикулярно плоскости  $3x - y - 4z = 0$ .

**4.122.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(2; -15; 1)$  и  $M_2(-1; 1; -1)$  параллельно прямой, определяемой точками  $A(5; -2; 3)$  и  $B(6; 1; 0)$ .

**4.123.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(3; -1; 2)$ ,  $M_2(4; -1; -1)$  и  $M_3(2; 0; 2)$ .

**4.124.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(-1; 1; -3)$  параллельно вектору  $\vec{s} = (1; -3; 4)$ .

**4.125.** Составить уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(2; -1; -1)$  и  $M_2(3; 3; -1)$ .

**4.126.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(1; -5; 3)$  и образующей с осями координат углы  $\alpha = \pi/4$ ,  $\beta = \pi/3$ ,  $\gamma = 2\pi/3$ .

**4.127.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(1; -3; 5)$  параллельно прямой

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

**4.128.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(3; -2; 4)$  перпендикулярно плоскости  $5x + 3y - 7z + 1 = 0$ .

**4.129.** Найти проекцию точки  $A(4; -3; 1)$  на плоскость  $x + 2y - z - 3 = 0$ .

**4.130.** Найти проекцию точки  $A(1; 2; 1)$  на прямую

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

### Контрольные задания по главе 4 «Уравнение линии. Прямая и плоскость»

№	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3
1	Составить уравнение множества точек:		
	равноудаленных от точки $A(2; 0)$ и прямой $x = 4$	равноудаленных от точек $A(3; 2)$ и $B(-4; 0)$	каждая из которых отстоит от точки $A(0; 2)$ вдвое дальше, чем от точки $B(-4; 0)$

№	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3
2	Даны вершины $A(x_1, y_1)$ , $B(x_2, y_2)$ , $C(x_3, y_3)$ треугольника. Составить: а) уравнение медианы и высоты, проведенной из вершины $A$ ; б) уравнение биссектрисы внутреннего угла $B$ :		
	$A(3; 1);$ $B(-13; -11);$ $C(-6; 13)$	$A(26; -5);$ $B(2; 2);$ $C(-2; -1)$	$A(-2; 3);$ $B(-18; -9);$ $C(-11; 15)$
3	Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $y = x + 7$ , отсеченной гиперболой $xy = -6$	Найти расстояние фокуса параболы $y^2 = 4x$ от точек пересечения ее с окружностью $x^2 + y^2 = 12$	Составить уравнение эллипса, имеющего фокусы в вершинах, а вершины — в фокусах гиперболы $y^2 - x^2 = 4$
4	Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ :		
	$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1};$ $M_0(2; -1; 2)$	$\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3};$ $M_0(2; 1; -3)$	$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z+2}{-3};$ $M_0(-1; 0; 2)$
5	Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , $M_3(x_3, y_3, z_3)$ :		
	$M_0(5; 2; 2);$ $M_1(3; 4; 6);$ $M_2(3; -2; -3);$ $M_3(6; 3; 2)$	$M_0(-6; 1; 3);$ $M_1(2; 3; 0);$ $M_2(1; 2; 2);$ $M_3(-1; 0; -3)$	$M_0(6; 1; 2);$ $M_1(3; 4; 2);$ $M_2(4; 5; 2);$ $M_3(7; 3; -2)$

### Тест 4

1. Траектория движения точки  $M(x, y)$ , которая при своем движении остается вдвое ближе к точке  $A(-1; 1)$ , чем к точке  $B(-4; 4)$ , есть: 1) прямая линия; 2) окружность; 3) гипербола; 4) парабола; 5) эллипс.

2. Найти координаты точки  $(x_0, y_0)$  пересечения медиан треугольника  $ABC$ , где  $A(2; 4)$ ;  $B(-3; 0)$ ;  $C(7; -1)$ .

3. Найти (в градусах) острый угол между прямыми  $4x - 2y - 7 = 0$  и  $y = \frac{1}{3}x - 11$ .

4. Какие из данных прямых перпендикулярны прямой  $2x - y + 3 = 0$ :

1)  $4x + 8y + 17 = 0$ ; 2)  $4x - 8y - 11 = 0$ ; 3)  $y = -\frac{1}{2}x + 5$ ;

4)  $y = -2x - 7$ ; 5)  $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ .

5. В треугольнике  $ABC$  известны его вершины  $A(-4; 3)$ ;  $B(2; 5)$ ;  $C(6; -2)$ . Составить уравнение высоты, проведенной из вершины  $A$ .

Ответ:  $4x + By + C = 0$ , где  $B = \dots$ ;  $C = \dots$

6. Найти расстояние между параллельными прямыми:  $y = -0,75x - 6$  и  $3x + 4y - 12 = 0$ .

7. Найти координаты центра  $(x_0, y_0)$  и радиус  $R$  окружности  $x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 0$ .

8. Найти расстояния  $d_1$  между фокусами эллипса  $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$  и  $d_2$  между фокусами гиперболы  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ .

9. Найти расстояние между центром равносторонней гиперболы  $y = \frac{12x - 5}{4x - 8}$  и вершиной параболы  $y = -2x^2 + 20x - 43$ .

10. Найти соответствие между утверждениями относительно двух плоскостей  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  (1),  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  (2), прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \text{ и их признаками:}$$

1) плоскости параллельны; а)  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ ;

2) плоскости перпендикулярны; б)  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ;

3) плоскость (1) и прямая параллельны; в)  $A_1m + B_1n + C_1p = 0$ ;

4) плоскость (1) и прямая. г)  $\frac{A_1}{m} = \frac{B_1}{n} = \frac{C_1}{p}$ .

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2; 3; -1)$  параллельно плоскости  $4x - 2y + 5z - 3 = 0$ .

Ответ:  $4x + By + Cz + D = 0$ , где  $B = \dots$ ;  $C = \dots$ ;  $D = \dots$

12. Убедившись в том, что прямые

$$\begin{cases} x + y - z + 4 = 0, \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases} \text{ и } \frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$$

пересекаются, найти их точку пересечения  $(x_0, y_0, z_0)$ .

# **КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ТЕСТЫ**

**по дисциплине «Линейная алгебра  
с элементами аналитической  
геометрии» (разделу I)**

Учебно-тренировочные тесты  
Итоговые контрольные задания  
Итоговый тест

**Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Линейная алгебра  
(с элементами аналитической геометрии)» (разделу I)**

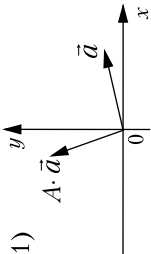
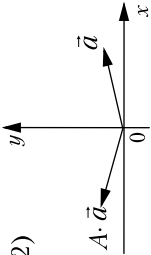
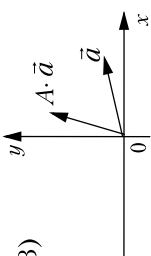
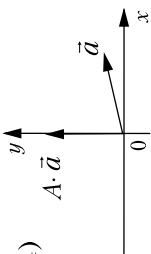
№	Тест ЛА – 1	Тест ЛА – 2	Тест ЛА – 3
1	Найти размер, который должна иметь матрица $B$ , чтобы: существовало произведение $A \cdot B$ , если матрица $A$ имеет размер $2 \times 4$	матрица $A' \cdot B$ была квадратной, если матрица $A$ имеет размер $3 \times 4$	существовали оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ , если матрица $A$ имеет размер $3 \times 2$
	<i>Ответы:</i> 1) $2 \times 3$ ; 2) $4 \times 2$ ;	3) $3 \times 4$ ; 4) $3 \times 2$ ;	5) $4 \times 3$ ; 6) $2 \times 4$
	<i>Матрица <math>C = A'B + 2E</math>, где <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> и <math>B = \begin{pmatrix} 3 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>. Найдти:</i>		
3	след $\text{tr}C$	определитель $ C $	ранг $\text{rang } C$
	Найти матрицу $C = ABE B^{-1} A^{-1}$	Найти решение матричного уравнения $A^{-1} A^2 X B^{-1} = E$	Найти матрицу обратную к матрице $C = (A^{-1} B)^{-1} (AE)^{-1}$
	<i>Ответы:</i> 1) $E$ ; 2) $A$ ; 3) $B$ ; 4) $AB$ ;	5) $AB^{-1}$ ; 6) $A^{-1}B$	
4	Найти алгебраическое дополнение элемента $a_{23}$ матрицы $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	Найти элемент $c_{32}$ матрицы $C = B \cdot A$ , если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	Найти определитель матрицы $C = A - 2B$ , если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$



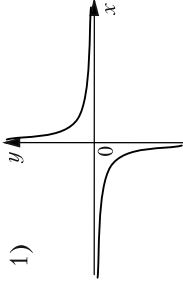
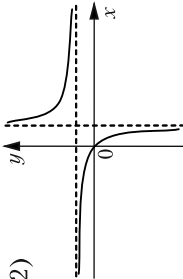
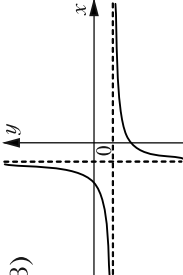
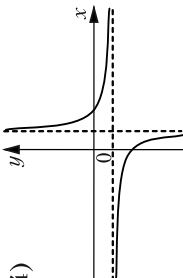
№	Тест ЛА – 1	Тест ЛА – 2	Тест ЛА – 3																												
5	Решить систему линейных уравнений:																														
	$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2, \\ -x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$																												
	<p>Ответы:</p> <table><tr><td>Значения:</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td><math>x_1 =</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td><math>x_2 =</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td><math>x_3 =</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>			Значения:	-2	-1	0	1	2	3	$x_1 =$							$x_2 =$							$x_3 =$						
Значения:	-2	-1	0	1	2	3																									
$x_1 =$																															
$x_2 =$																															
$x_3 =$																															
6	Установить свойства системы линейных уравнений, если при решении методом Гаусса получена расширенная матрица вида:																														
	$\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$																												
	<p>Ответы: 1) совместная; 2) несовместная; 3) определенная; 4) неопределенная</p>																														

№	Тест ЛА – 1	Тест ЛА – 2	Тест ЛА – 3
7	<p>Найти значение параметра <math>a</math>, при котором систему линейных уравнений</p> $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ <p>нельзя решить по формулам Крамера</p>	<p>Найти значение параметра <math>a</math>, при котором при решении системы линейных уравнений</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ <p>по формулам Крамера выполняется равенство <math>\Delta = \Delta_2</math></p>	<p>Найти <math>x_3</math>, если при решении системы линейных уравнений</p> $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ 2x_1 + x_3 = 1, \\ -x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$ <p>по формулам Крамера получены определители <math>\Delta_1 = -10</math>, <math>\Delta_2 = 0</math>, <math>\Delta_3 = 15</math></p>
8	<p>Найти значения параметров <math>a</math> и <math>b</math>, при которых однородная система линейных уравнений:</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_4 = 0, \\ (3-a)x_3 = 0, \\ (b-2)x_4 = 0 \end{cases}$		
	имеет два линейно независимых решения	имеет единственное решение	имеет единственную неосновную переменную
	<p>Ответы:</p> <p>1) <math>a=3</math>, <math>b</math> – любое;  4) <math>b \neq 2</math>, <math>a = 3</math>;</p> <p>2) <math>b=2</math>, <math>a</math> – любое;  5) <math>a=3</math>, <math>b = 2</math>;</p> <p>3) <math>a \neq 3</math>, <math>b = 2</math>;  6) <math>a \neq 3</math>, <math>b \neq 2</math></p>		

№	Тест ЛА – 1	Тест ЛА – 2	Тест ЛА – 3
9	<p>Найти число линейно независимых столбцов матрицы</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	<p>Найти ранг матрицы</p> $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	<p>Найти число линейно независимых строк матрицы</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
10	<p>Найти проекцию вектора <math>\vec{a} - 2\vec{b}</math> на направление вектора <math>\vec{c}</math>, если</p> $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k},$ $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \text{ и}$ $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$	<p>Найти скалярное произведение векторов <math>(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})</math>, если</p> $ \vec{a}  = 2,  \vec{b}  = \sqrt{3} \text{ и }  \vec{a} + \vec{b}  = 3$	<p>Найти длину вектора <math>\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}</math>, если <math> \vec{a}  = 3</math>, <math> \vec{b}  = 2</math>, а угол между векторами <math>\vec{a}</math> и <math>\vec{b}</math> составляет <math>60^\circ</math></p>
11	<p>Найти собственное значение матрицы <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; 1 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Найти собственное значение матрицы <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; 2 \\ 4 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>, которое соответствует собственному вектору <math>(2, -4)</math></p>	<p>Найти значение параметра <math>a</math>, при котором вектор <math>(i; a)</math> является собственным для матрицы <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; 1 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p>

№	Тест ЛА – 1	Тест ЛА – 2	Тест ЛА – 3
12	Указать рисунок, на котором изображено преобразование вектора $\vec{a}$ с помощью линейного оператора:		
	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	<p>Ответы:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>1)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>2)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>3)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>4)</p>  </div> </div>		
13	Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:		
	$L = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$	$L = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2$	$L = 5x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3$
	<p>Ответы:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div>1) положительно определенная;</div> <div>2) отрицательно определенная;</div> <div>3) не является знакоопределенной</div> </div>		
14	Вершины четырехугольника имеют координаты $A(0;1)$ , $B(8;2)$ , $C(6;5)$ и $D(-2;4)$ . Найти:		
	расстояние от точки пересечения диагоналей до оси абсцисс	тангенс угла $A$	угловой коэффициент высоты, опущенной из вершины $C$

Продолжение учебно-тренировочных тестов

№	Тест ЛА – 1	Тест ЛА – 2	Тест ЛА – 3
15	Найти значение параметра $a$ , при котором прямые $2x - 3y + 5 = 0$ и $4x + ay + 1 = 0$ параллельны	Найти значение параметра $a$ , при котором прямые $x - 2y + 3 = 0$ и $y = ax + 5$ перпендикулярны	Найти тангенс угла между прямыми $y = 2x - 1$ и $2y = x + 6$
16	Найти расстояние между центром окружности $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ и центром равносторонней гиперболы $y = \frac{3x - 1}{x + 1}$	Найти расстояние между вершиной параболы $y = x^2 - 2x - 3$ и центром окружности $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 1$	Найти расстояние между вершиной параболы $y^2 = 2(x - 2)$ и центром равносторонней гиперболы $y = \frac{3x + 5}{x - 4}$
17	Определить, какую линию второго порядка задает на плоскости уравнение:		
	$y^2 + 2y - 6x - 10 = 0$	$4x^2 - y^2 + 16x - 2y + 11 = 0$	$4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 12 = 0$
	Ответы: 1) эллипс;	2) окружность;	3) парабола; 4) гиперболы
18	Указать рисунок, на котором изображен график функции:		
	$y = \frac{-2x - 7}{2 + x}$	$y = \frac{5 - x}{x - 1}$	$y = \frac{25}{x}$
Ответы: 1)  2)  3)  4) 			

№	Тест ЛА – 1	Тест ЛА – 2	Тест ЛА – 3
19	Определить взаимное расположение в пространстве прямых:		
	$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$	$\frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{3}$ и $\frac{x+3}{1} = \frac{2y+4}{-1} = \frac{2z-16}{-3}$	$\frac{3x+12}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{3z}{5}$ и $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$
	<b>Ответы:</b> 1) совпадают; 2) параллельны; 3) скрещиваются; 4) пересекаются, но не перпендикулярны; 5) пересекаются под прямым углом		
20	Найти косинус угла между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ и $x - 4y - z + 9 = 0$	Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $4x - 4y + 2z - 9 = 0$ и $4x - 4y + 2z + 15 = 0$	Найти значение параметра $D$ в уравнении плоскости $x - 5y - z + D = 0$ , если она проходит через точку $(-4; 1; 3)$ перпендикулярно вектору $(1; -5; -1)$

**Итоговые контрольные задания по дисциплине «Линейная алгебра  
с элементами аналитической геометрии» (разделу I)**

№	Вариант ЛА. 1	Вариант ЛА. 2	Вариант ЛА. 3	Вариант ЛА. 4	Вариант ЛА. 5
1	<p>Найти матрицу <math>C = B(AB)^{-1} + (B'B)^{-1}B^{-1}</math>, предварительно приведя ее к более простому виду, где:</p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 8 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix}$				
		$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 8 \\ 6 & 1 & -9 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -4 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 8 & 9 \\ -7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -9 & 0 & -8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
2	<p>Методом Гаусса решить систему уравнений, заданную в матричной форме: <math>AX = B</math>. Найти ранг матрицы <math>A</math>. Дано <math>x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)'</math> и:</p>				
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & -6 \end{pmatrix};$ $B = (4 \ 4 \ 2 \ 3)'$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$ $B = (-3 \ 8 \ 6 \ 3)'$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix};$ $B = (5 \ 1 \ 6 \ 1)'$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \\ 7 & 4 & -7 & 5 \end{pmatrix};$ $B = (1 \ 2 \ 4 \ 7)'$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 8 & 7 \\ 2 & -4 & 8 & 8 \\ 2 & -3 & 10 & 8 \end{pmatrix};$ $B = (1 \ 3 \ 0 \ 1)'$

№	Вариант ЛА. 1	Вариант ЛА. 2	Вариант ЛА. 3	Вариант ЛА. 4	Вариант ЛА. 5
3	Даны вершины $A(x_1, y_1)$ ; $B(x_2, y_2)$ ; $C(x_3, y_3)$ треугольника. Найдите уравнения и длины высоты и медианы, проведенные через вершину $C$ ; сделать чертеж:				
	$A(3; 0)$ ; $B(-5; 6)$ ; $C(-4; 1)$	$A(10; 2)$ ; $B(2; 8)$ ; $C(3; 3)$	$A(6; 2)$ ; $B(-2; 8)$ ; $C(-1; 3)$	$A(8; 3)$ ; $B(0; 9)$ ; $C(1; 4)$	$A(5; -1)$ ; $B(-3; 5)$ ; $C(-2; 0)$
4	Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $Ax + By + C = 0$ . Построить графики кривой и прямой:				
	$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ ; $3x + y - 3 = 0$	$2x^2 + y^2 - 12x + 10 = 0$ ; $x + y - 2 = 0$	$2x^2 + 8x + y + 7 = 0$ ; $2x + y + 3 = 0$	$y^2 + x + 4y + 3 = 0$ ; $x + 2y + 2 = 0$	$4x^2 - 8x - y^2 = 0$ ; $2\sqrt{3}x + y = 0$
5	Найти точку $M'$ , симметричную точке $M$ относительно плоскости:				
	$M(1; 0; 1)$ ; $4x + 6y + 4z - 25 = 0$	$M(-1; 0; -1)$ ; $2x + 6y - 2z + 11 = 0$	$M(0; -3; -2)$ ; $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3/2}{-1} = \frac{z}{1}$	$M(2; -1; 1)$ ; $\frac{x-9/2}{1} = \frac{y+3}{-1/2} = \frac{z-2}{1}$	$M(1; 1; 1)$ ; $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3/2}{-2} = \frac{z-1}{1}$
6	Даны четыре вектора: $\mathbf{a}_1$ , $\mathbf{a}_2$ , $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_4$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{a}_1$ , $\mathbf{a}_2$ , $\mathbf{a}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{a}_4$ в этом базисе:				
	$\mathbf{a}_1 = (1; 3; 5)$ ; $\mathbf{a}_2 = (0; 2; 0)$ ; $\mathbf{a}_3 = (5; 7; 9)$ ; $\mathbf{a}_4 = (0; 4; 16)$	$\mathbf{a}_1 = (2; 4; -6)$ ; $\mathbf{a}_2 = (1; 3; 5)$ ; $\mathbf{a}_3 = (0; -3; 7)$ ; $\mathbf{a}_4 = (3; 2; 52)$	$\mathbf{a}_1 = (4; 3; -1)$ ; $\mathbf{a}_2 = (5; 0; 4)$ ; $\mathbf{a}_3 = (2; 1; 2)$ ; $\mathbf{a}_4 = (0; 12; -6)$	$\mathbf{a}_1 = (3; 4; -3)$ ; $\mathbf{a}_2 = (2; 1; -4)$ ; $\mathbf{a}_3 = (-5; 5; 0)$ ; $\mathbf{a}_4 = (8; -16; 17)$	$\mathbf{a}_1 = (-2; 1; 7)$ ; $\mathbf{a}_2 = (3; -3; 8)$ ; $\mathbf{a}_3 = (5; 4; 1)$ ; $\mathbf{a}_4 = (18; 25; 1)$



№	Вариант ЛА. 1	Вариант ЛА. 2	Вариант ЛА. 3	Вариант ЛА. 4	Вариант ЛА. 5
7	Найти собственные значения и собственные векторы матрицы А. Привести к диагональному виду матрицу А (если это возможно):				
	$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$
8	Привести к каноническому виду квадратичную форму L:				
	$L = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$	$L = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$	$L = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$	$L = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$	$L = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

## Итоговый тест ЛА

1. При каких значениях  $a, b, c$  для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ a & 4 & b \\ -1 & c & -5 \end{pmatrix}$$

выполняется равенство  $A^2 = \mathbf{0}$ ?

2. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти определитель  $|B|$  матрицы  $B = AA'$ .

3. Выяснить, какие из приведенных ниже матриц являются нулевыми ( $A$  и  $B$  — квадратные матрицы): 1)  $BA - AB$ ; 2)  $(B'A)' - A'B$ ;

3)  $A^{-1}B^{-1} - B^{-1}A^{-1}$ ; 4)  $(A-B)^{-1} - AB^{-1}$ ; 5)  $AA' - A'A$ .

4. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти след  $\text{tr } C$  матрицы  $C = AB - BA + A + B$ .

5. Выяснить, при каком значении  $a$  ранг матрицы  $A$  является наименьшим среди рангов приведенных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. По формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

В ответе дать значения переменных  $x_1, x_2$  и определителя  $\Delta_3$ .

7. Выяснить, какой из методов можно применить для решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

1) метод обратной матрицы; 2) по формулам Крамера; 3) метод Гаусса.

8. Дано матричное уравнение  $AXB = C$ . Его решение с помощью обратных матриц  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$  имеет вид: 1)  $A^{-1}B^{-1}C$ ; 2)  $B^{-1}CA^{-1}$ ; 3)  $A^{-1}CB^{-1}$ ; 4)  $CA^{-1}B^{-1}$ . Выбрать верный ответ.

9. Для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

найти базисное решение  $(x_1, x_2, x_3)$ , получаемое при выборе в качестве основных (базисных) переменных  $x_1, x_2$ .

10. Для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

найти фундаментальную систему решений. В ответе дать число таких решений.

11. Дана матрица прямых затрат  $A$  в модели

$$\text{Леонтьева: } A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу полных затрат  $S$ . В ответе дать ее элементы  $s_{11}$  и  $s_{21}$ .

12. Две стороны квадрата лежат на двух параллельных прямых:  $3x + 4y + 25$  и  $3x + 4y + 50 = 0$ . Найти площадь квадрата.

13. В треугольнике  $ABC$  заданы вершины  $A(0; 2)$ ;  $B(4; 0)$  и точка пересечения высот

$$M = \left( \frac{8}{7}; \frac{16}{7} \right).$$

Найти уравнение стороны  $BC$ .

$$\text{Ответ: } 4x + By + C = 0, \text{ где } B = \dots; C = \dots$$

14. Составить уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми  $3x + y - 12 = 0$  и  $y = 0$ .

$$\text{Ответ: } 3x + By + C = 0, \text{ где } B = \dots; C = \dots$$

15. Траектория движения линии, расстояние каждой точки которой от точки  $A(2; -2)$  вдвое меньше, чем от прямой  $x + 1 = 0$ , есть:

1) прямая линия; 2) окружность; 3) эллипс; 4) гипербола; 5) парабола.

**16.** Составить уравнение прямой, проходящей через центр гиперболы  $y = \frac{4x+3}{x-2}$  и вершину

параболы  $y = -2x^2 + 16x - 30$ .

*Ответ:*  $x + By + C = 0$ , где  $B = \dots$ ;  $C = \dots$

**17.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $(-1; 2; -3)$  и перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x = 2, \\ y - z = 1. \end{cases}$$

*Ответ:*  $3x + By + C = 0$ , где  $B = \dots$ ;  $C = \dots$

**18.** Найти (в градусах) угол между плоскостью  $y = z$  и прямой

$$\begin{cases} x = -z + 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

**19.** Найти (в градусах) угол между векторами  $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ , где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  — единичные векторы, образующие угол  $120^\circ$ .

**20.** Найти (с точностью до 0,1) проекцию вектора  $\vec{a} = (2; -3; 4)$  на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

**21.** Выяснить, при каком значении  $\lambda$  векторы  $\vec{a}_1 = (-2; 0; 1)$ ;  $\vec{a}_2 = (1; -1; 0)$ ;  $\vec{a}_3 = (0; 1; \lambda)$  не образуют базис в пространстве  $R^3$ .

**22.** Выяснить, при каком значении  $\lambda$  вектор  $\vec{b} = (1; \lambda)$  линейно выражается через векторы  $\vec{a}_1 = (2; 1)$  и  $\vec{a}_2 = (4; 2)$ .

**23.** Векторы  $\vec{x}_1 = (-1; a)$  и  $\vec{x}_2 = (b; 1)$  являются

собственными векторами матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  с

собственными значениями  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 < \lambda_2$ ), соответственно. Найти  $\lambda_1, \lambda_2$  и значения  $a$  и  $b$ .

**24.** Найти наименьшее целое значение  $\lambda$ , при котором будет положительно определенной квадратичная форма  $L = \lambda x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ .

## Раздел II

# ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ



# Глава 5

## ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

#### 5.1. Понятие множества

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под *множеством* понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются *элементами*, или *точками*, этого множества. Примерами множеств являются множество студентов данного вуза, множество предприятий некоторой отрасли, множество натуральных чисел и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы — строчными. Если  $a$  есть элемент множества  $A$ , то используется запись  $a \in A$ . Если  $b$  не является элементом множества  $A$ , то пишут  $b \notin A$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом  $\emptyset$ . Например, множество действительных корней уравнения  $x^2 + 1 = 0$  есть пустое множество.

Если множество  $B$  состоит из части элементов множества  $A$  или совпадает с ним, то множество  $B$  называется *подмножеством* множества  $A$  и обозначается  $B \subset A$ . Если, например,  $A$  — множество всех студентов вуза, а  $B$  — множество студентов-первокурсников этого вуза, то  $B$  есть подмножество  $A$ , т.е.  $B \subset A$ .

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

*Объединением* двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е.  $C = A \cup B$ .

*Пересечением* двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $D$ , состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств  $A$  и  $B$ , т.е.  $D = A \cap B$ .

*Разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $E$ , состоящее из всех элементов множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ , т.е.  $E = A \setminus B$ .

**Пример 5.1.** Даны множества  $A = \{1; 3; 6; 8\}$  и  $B = \{2; 4; 6; 8\}$ . Найти объединение, пересечение и разность множеств  $A$  и  $B$ .

*Решение.* Очевидно, что объединение двух данных множеств —  $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$ , их пересечение  $A \cap B = \{6; 8\}$  а разность  $A \setminus B = \{1; 3\}$ . ►

*Дополнением* множества  $A \subset B$  называется множество  $A^c$ , состоящее из всех элементов множества  $B$ , не принадлежащих  $A$ .

Множество называется *конечным*, если содержит конечное число элементов; в противном случае — *бесконечным*.

Если между множествами  $A$  и  $B$  можно установить взаимно однозначное соответствие (каждому элементу  $a \in A$  соответствует один элемент  $b \in B$  и наоборот), то говорят, что множества  $A$  и  $B$  имеют одинаковую *мощность*, или *эквивалентны*. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счетным* (его элементы можно пронумеровать, пересчитать).

Множество  $X$  называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует такое число  $C$ , что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $x \leq C$  ( $x \geq C$ ). Число  $C$  в этом случае называется *верхней (нижней) гранью* множества  $X$ . Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*.

Наименьшее из чисел, ограничивающих множество  $X$  сверху, называется *точной верхней гранью* данного множества и обозначается символом  $\sup X$  (от лат. *supremum*), а наибольшее из чисел, ограничивающих множество  $X$  снизу, — *точной нижней гранью* этого множества и обозначается символом  $\inf X$  (от лат. *infimum*). Например, для множества  $X = (a, b)$   $a = \inf X$ ,  $b = \sup X$ .

Множества, элементами которых являются действительные числа, называются *числовыми*. Из школьного кур-

са алгебры известны множества чисел:  $R$  — действительных,  $Q$  — рациональных,  $I$  — иррациональных,  $Z$  — целых,  $N$  — натуральных. Очевидно, что  $N \subset Z \subset Q \subset R$ ,  $I \subset R$  и  $R = Q \cup I$ .

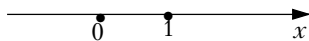


Рис. 5.1

Геометрически множество действительных чисел  $R$  изображается точками *числовой прямой*, или *числовой оси* (рис. 5.1), т.е. прямой, на которой выбрано

начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой — определенное действительное число, поэтому часто вместо «число  $x$ » говорят «точка  $x$ ».

Множество  $X$ , элементы которого удовлетворяют неравенству  $a \leq x \leq b$ , называется *отрезком*, или *сегментом*,  $[a; b]$ , неравенству  $a < x < b$  — *интервалом*  $(a; b)$ , неравенствам  $a \leq x < b$  или  $a < x \leq b$  — *полуинтервалами* соответственно  $[a; b)$  и  $(a; b]$ . Наряду с этим рассматриваются бесконечные интервалы и полуинтервалы  $(-\infty; a)$ ,  $(b; +\infty)$ ,  $(-\infty; +\infty)$ ,  $(-\infty; a]$  и  $[b; +\infty)$ . В дальнейшем все указанные множества объединяем термином *промежуток*  $X$ .

## 5.2. Абсолютная величина действительного числа.

### Окрестность точки

**Определение.** *Абсолютной величиной* (или *модулем*) действительного числа  $x$  называется само число  $x$ , если  $x$  неотрицательно, и противоположное число  $(-x)$ , если  $x$  отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

По определению очевидно, что  $|x| \geq 0$ .



**Пример 5.2.** Найти  $|x - |x||$ .

*Решение.* Если  $x \geq 0$ , то  $|x| = x$  и  $|x - |x|| = |x - x| = |0| = 0$ .

Если  $x < 0$ , то  $|x| = -x$  и  $|x - |x|| = |x - (-x)| = |2x| = -2x$ .

Отметим свойства абсолютных величин:

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y|; & |xy| &= |x||y|; \\ |x - y| &\geq |x| - |y|; & \left| \frac{x}{y} \right| &= \frac{|x|}{|y|}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Абсолютная величина разности двух чисел  $|x - a|$  означает расстояние между точками  $x$  и  $a$  числовой прямой как для случая  $x < a$ , так и для  $x > a$  (рис. 5.2). Поэтому, например, решениями неравенства  $|x - a| < \varepsilon$  (где  $\varepsilon > 0$ ) будут точки  $x$  интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  (рис. 5.3), удовлетворяющие неравенству  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ .

Всякий интервал, содержащий точку  $a$ , называется *окрестностью точки  $a$* .

Интервал  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , т.е. множество точек  $x$  таких, что  $|x - a| < \varepsilon$  (где  $\varepsilon > 0$ ), называется  $\varepsilon$ -*окрестностью точки  $a$* .

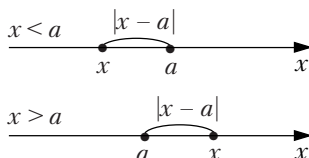


Рис. 5.2

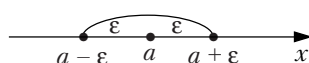


Рис. 5.3

### 5.3. Понятие функции. Основные свойства функций

*Постоянной величиной* называется величина, сохраняющая одно и то же значение. Например, отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянная величина, равная числу  $\pi$ .

Если величина сохраняет постоянное значение лишь в условиях данного процесса, то в этом случае она называется *параметром*.

*Переменной* называется величина, которая может принимать различные числовые значения. Например, при рав-

номерном движении  $S = vt$ , где путь  $S$  и время  $t$  — переменные величины, а скорость  $v$  — параметр.

Перейдем к понятию функции.

**Определение.** Если каждому значению  $x$  множества  $X$  ( $x \in X$ ) ставится в соответствие вполне определенное значение  $y$  множества  $Y$  ( $y \in Y$ ), то говорят, что на множестве  $X$  задана **функция**  $y = f(x)$ .

При этом  $x$  называется *независимой переменной*, или *аргументом*,  $y$  — *зависимой переменной*, а буква  $f$  обозначает закон соответствия.

Множество  $X$  называется *областью определения*, или *существования*, функции, а множество  $Y$  — *областью значений* функции.

Если множество  $X$  специально не оговорено, то под областью определения функции подразумевается область допустимых значений независимой переменной  $x$ , т.е. множество таких значений  $x$ , при которых функция  $y = f(x)$  вообще имеет смысл. Например, область определения функции  $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$  есть полуинтервал  $(-\infty; 10]$ , так как  $10 - x \geq 0$ . Если же переменная  $x$  обозначает, предположим, время, то при естественном дополнительном условии  $x \geq 0$  областью определения функции будет отрезок  $[0; 10]$ .

**Способы задания функций.** Существует несколько способов задания функции.

а) *Аналитический способ*, если функция задана формулой вида  $y = f(x)$ . Этот способ наиболее часто встречается на практике. Так, функция  $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ , рассматриваемая выше, задана аналитически.

Не следует смешивать функцию с ее аналитическим выражением. Например, *одна* функция

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ x + 3, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

имеет два аналитических выражения:  $x^2$  (при  $x < 0$ ) и  $x + 3$  (при  $x \geq 0$ ).

б) *Табличный способ*, если функция задана таблицей, содержащей значения аргумента  $x$  и соответствующие значения функции  $f(x)$ , например, таблица логарифмов.

в) *Графический способ*, если функция изображена в виде графика — множества точек  $(x, y)$  плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента  $x$ , а ординаты — соответствующие им значения функции  $y = f(x)$ .

г) *Словесный способ*, если функция описана правилом ее составления, например, функция Дирихле<sup>1</sup>:  $f(x) = 1$ , если  $x$  — рационально;  $f(x) = 0$ , если  $x$  — иррационально.

Функция может быть задана *программой*, вычисляющей ее значения с помощью компьютера.

**Основные свойства функций.** К ним относятся четность и нечетность, монотонность, ограниченность, периодичность.

1. **Четность и нечетность.** Функция  $y = f(x)$  называется *четной*, если для любых значений  $x$  из области определения  $f(-x) = f(x)$ , и *нечетной*, если  $f(-x) = -f(x)$ . В противном случае функция  $y = f(x)$  называется функцией *общего вида*.

Например, функция  $y = x^2$  является четной, так как  $f(-x) = (-x)^2 = x^2$  и  $f(-x) = f(x)$ , а функция  $y = x^3$  — нечетной, так как  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$  и  $f(-x) = -f(x)$ . В то же время, например, функция  $y = x^2 + x^3$  является функцией общего вида, так как  $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$  и  $f(-x) \neq f(x)$ ,  $f(-x) \neq -f(x)$ .

График четной функции симметричен относительно оси ординат (см., например, график функции  $y = x^2$  на рис. 5.6), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см., например, график функции  $y = x^3$  на рис. 5.5).

2. **Монотонность.** Функция  $y = f(x)$  называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке  $X$ , если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Пусть  $x_1, x_2 \in X$  и  $x_2 > x_1$ . Тогда функция возрастает на промежутке  $X$ , если  $f(x_2) > f(x_1)$ , и убывает, если  $f(x_2) < f(x_1)$  (рис. 5.4).

---

<sup>1</sup> Дирихле Петер Густав (1805—1859) — немецкий математик.

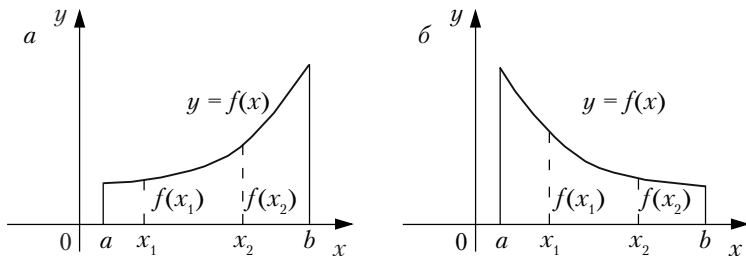


Рис. 5.4

Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными*<sup>1</sup> функциями. Так, например функция  $y = x^2$  (см. рис. 5.6) при  $x \in (-\infty; 0]$  убывает и при  $x \in [0; +\infty)$  возрастает.

3. **Ограниченность.** Функция  $f(x)$  называется *ограниченной* на промежутке  $X$ , если существует такое положительное число  $M > 0$ , что  $|f(x)| \leq M$  для любого  $x \in X$ . В противном случае функция называется *неограниченной*. Например, функция  $y = \sin x$  ограничена на всей числовой оси, ибо  $|\sin x| \leq 1$  для любого  $x \in R$ .

4. **Периодичность.** Функция  $y = f(x)$  называется *периодической* с периодом  $T \neq 0$ , если для любых  $x$  из области определения функций  $f(x + T) = f(x)$ . Например, функция  $y = \sin x$  имеет период<sup>2</sup>  $T = 2\pi$ , так как для любых значений  $x$   $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ .

График периодической функции  $y = f(x)$  может быть получен сдвигом кривой  $y = f(x)$  ( $x \in [0; T]$ ) вправо (влево) на отрезки  $T, 2T, \dots$

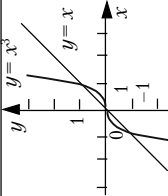
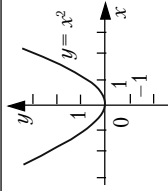
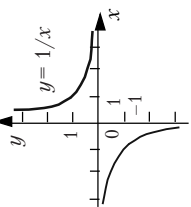
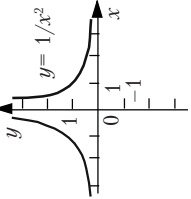
<sup>1</sup> Если говорить точнее, то возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*. К монотонным функциям, кроме указанных, относятся неубывающие и невозрастающие функции, т.е. такие, для которых при  $x_1, x_2 \in X$ , удовлетворяющих условию  $x_2 > x_1$ , соответственно  $f(x_2) \geq f(x_1)$  или  $f(x_2) \leq f(x_1)$ .

<sup>2</sup> Под термином «период» подразумевается наименьший положительный период функции, равный  $2\pi$ ; любой период функции  $y = \sin x$ , как известно, равен  $2\pi n$ , где  $n \in Z$ .

## 5.4. Основные элементарные функции

В таблице приводятся наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

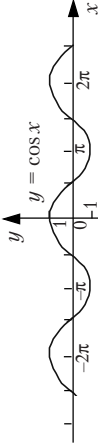
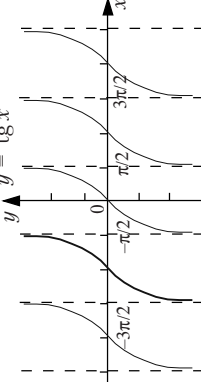
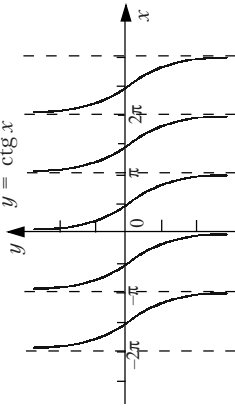
Таблица

Обозначение	Область определения функции	Область значений $X$	Четность, нечетность $Y$	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1	2	3	4	5	6	7
<b>1. Степенная функция</b>						
$y = x^n$	$(-\infty; +\infty)$ ( $n \in N$ )	$(-\infty; +\infty)$ , если $n$ — нечетно; $[0; +\infty)$ , если $n$ — четно	Нечетная, если $n$ — нечетно; четная, если $n$ — четно	Возрастает на $(-\infty; +\infty)$ , если $n$ — нечетно; убывает на $(-\infty; 0]$ , возрастает на $(0; +\infty)$ , если $n$ — четно	Непериодическая	 <p><b>Рис. 5.5</b></p>  <p><b>Рис. 5.6</b></p>
$y = x^{-n}$ ( $n \in N$ )	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ если $n$ — нечетно; $[0; +\infty)$ , если $n$ — четно	Нечетная, если $n$ — нечетно; четная, если $n$ — четно	Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$ , если $n$ — нечетно; возрастает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0; +\infty)$ , если $n$ — четно	Непериодическая	 <p><b>Рис. 5.7</b></p>  <p><b>Рис. 5.8</b></p>

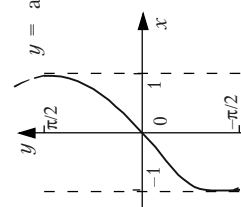
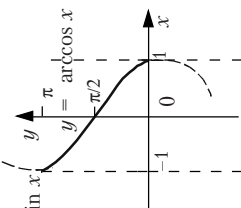
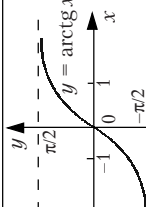
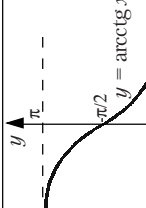
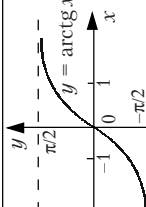
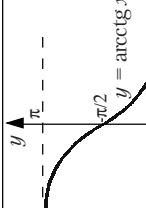
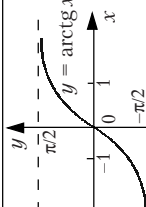
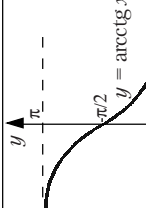
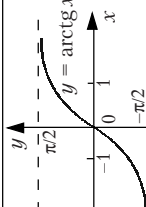
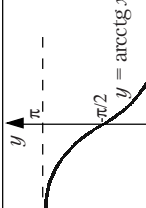
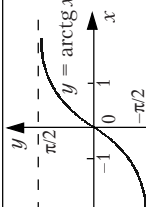
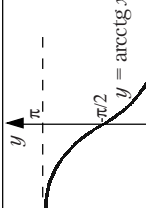
Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6	7
$y = \sqrt[n]{x}$ ( $n \in \mathbb{N}$ , $n > 1$ )	$(-\infty; +\infty)$ , если $n$ — нечетно; $[0; +\infty)$ если $n$ — четно	$(-\infty; +\infty)$ , если $n$ — нечетно; $[0; +\infty)$ если $n$ — четно	Нечетная, если $n$ — нечетно; общего вида, если $n$ — четно	Возрастает на $(-\infty; +\infty)$ , если $n$ — нечетно; возрастает на $[0; +\infty)$ , если $n$ — четно	Непериодическая	<div> <p>Рис. 5.9</p> </div> <div> <p>Рис. 5.10</p> </div>
<b>2. Показательная функция</b>						
$y = a^x$ ( $a > 0$ , $a \neq 1$ )	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	Общего вида	Возрастает на $(-\infty; +\infty)$ , если $a > 1$ ; убывает на $(-\infty; +\infty)$ , если $0 < a < 1$	Непериодическая	<div> <p>Рис. 5.11</p> </div>
<b>3. Логарифмическая функция</b>						
$y = \log_a x$ ( $a > 0$ , $a \neq 1$ )	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	Общего вида	Возрастает на $(0; +\infty)$ , если $a > 1$ ; убывает на $(0; +\infty)$ , если $0 < a < 1$	Непериодическая	<div> <p>Рис. 5.12</p> </div>
<b>4. Тригонометрические функции</b>						
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	Нечетная	Возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n$ ; $\pi/2 + 2\pi n]$ ; убывает на $[\pi/2 + 2\pi n$ ; $3\pi/2 + 2\pi n]$ , $n \in \mathbb{Z}$	Период $T = 2\pi$	<div> <p>Рис. 5.13</p> </div>

Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6	7
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	Четная	Возрастает на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ ; убывает на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ , $n \in \mathbb{Z}$	Период $T = 2\pi$	 <p style="text-align: center;"><math>y = \cos x</math> <b>Рис. 5.14</b></p>
$y = \operatorname{tg} x$	$(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$ ; $n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty; +\infty)$	Нечетная	Возрастает на $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$ , $n \in \mathbb{Z}$	Период $T = \pi$	 <p style="text-align: center;"><math>y = \operatorname{tg} x</math> <b>Рис. 5.15</b></p>
$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi n; \pi + \pi n)$ ; $n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty; +\infty)$	Нечетная	Убывает на $(\pi n; \pi + \pi n)$ , $n \in \mathbb{Z}$	Период $T = \pi$	 <p style="text-align: center;"><math>y = \operatorname{ctg} x</math> <b>Рис. 5.16</b></p>

Окончание табл.

1	2	3	4	5	6	7
<b>5. Обратные тригонометрические функции</b>						
$y = \arcsin x$ (арксинус)	$[-1; 1]$	$[-\pi/2; \pi/2]$	Нечетная	Возрастает на $[-1; 1]$	Неперiodическая	  <b>Рис. 5.17</b>
$y = \arccos x$ (арккосинус)	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	Общего вида	Убывает на $[-1; 1]$	Неперiodическая	  <b>Рис. 5.18</b>
$y = \operatorname{arctg} x$ (арктангенс)	$(-\infty; +\infty)$	$(-\pi/2; \pi/2)$	Нечетная	Возрастает на $(-\infty; +\infty)$	Неперiodическая	  <b>Рис. 5.19</b>
$y = \operatorname{arctg} x$ (арктангенс)	$(-\infty; +\infty)$	$(0; \pi)$	Общего вида	Убывает на $(-\infty; +\infty)$	Неперiodическая	  <b>Рис. 5.20</b>
<b>6. Гиперболические функции</b>						
$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус);	$(-\infty; +\infty)$	$(0; \pi)$	Общего вида	Убывает на $(-\infty; +\infty)$	Неперiodическая	  <b>Рис. 5.20</b>
$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус)	$(-\infty; +\infty)$	$(-\pi/2; \pi/2)$	Нечетная	Возрастает на $(-\infty; +\infty)$	Неперiodическая	  <b>Рис. 5.20</b>



## 5.5. Элементарные функции.

### Классификация функций.

#### Преобразование графиков

Функция называется *явной*, если она задана формулой  $y = f(x)$ , в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например функция  $y = x^2 + 5x + 1$ .

Функция  $y$  аргумента  $x$  называется *неявной*, если она задана уравнением  $F(x, y) = 0$ , не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция  $y$  ( $y \geq 0$ ), заданная уравнением  $x^3 + y^3 - x = 0$ . (Заметим, что последнее уравнение задает две функции:  $y = \sqrt{x - x^3}$  при  $y \geq 0$  и  $y = -\sqrt{x - x^3}$  при  $y < 0$ .)

*Графиком уравнения*  $F(x, y) = 0$  называется множество точек  $(x, y)$  плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Функция  $y = f(x)$  может быть *заданной параметрически* на множестве  $X$  посредством переменной  $t$ , называемой *параметром*:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , где  $t \in X$ . В этом случае график функции  $y = f(x)$  есть множество точек  $(x(t), y(t))$ . Например, параметрическое уравнение *верхней* полуокружности  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $y \geq 0$ ), или  $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ , имеет вид

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad (5.3)$$

где  $t \in [0; \pi]$ . (Заметим, что уравнение окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  определяет две функции:  $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ , задаваемых параметрическими уравнениями (5.3) при  $t \in [0; 2\pi]$ .)

**Обратная функция.** Пусть  $y = f(x)$  есть функция от независимой переменной  $x$ , определенной на множестве  $X$  с областью значений  $Y$ . Поставим в соответствие каждому  $y \in Y$  *единственное* значение  $x \in X$ , при котором  $f(x) = y$ . Тогда полученная функция  $x = \varphi(y)$ , определенная на множестве  $Y$  с областью значений  $X$ , называется *обратной*.

Так как традиционно независимую переменную обозначают через  $x$ , а функцию — через  $y$ , то функция, обратная к функции  $y = f(x)$ , примет вид  $y = \varphi(x)$ . Обратную функцию

$y = \varphi(x)$  обозначают также в виде  $y = f^{-1}(x)$  (аналогично с обозначением обратной величины). Например, для функции  $y = a^x$  обратной будет функция  $x = \log_a y$ , или (в обычных обозначениях зависимой и независимой переменных)  $y = \log_a x$ .

Можно доказать, что для *любой строго монотонной функции*  $y = \varphi(x)$  существует *обратная функция*.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (на рис. 5.21 показаны графики взаимно обратных функций  $y = a^x$  и  $y = \log_a x$  при  $a > 1$ ).

**Сложная функция.** Пусть функция  $y = f(u)$  есть функция от переменной  $u$ , определенной на множестве  $U$  с областью значений  $Y$ , а переменная  $u$  в свою очередь является функцией  $u = \varphi(x)$  от переменной  $x$ , определенной на множестве  $X$  с областью значений  $U$ . Тогда заданная на множестве  $X$  функция  $y = f[\varphi(x)]$  называется *сложной функцией* (или *композицией функций*, *суперпозицией функций*, *функцией от функции*). Например,  $y = \lg \sin x$  — сложная функция, так как ее можно представить в виде  $y = \lg u$ , где  $u = \sin x$ .

**Понятие элементарной функции.** Из основных функций новые функции могут быть получены двумя способами: а) с помощью алгебраических действий; б) с помощью операций образования сложной функции.

**Определение.** Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются *элементарными*.

Например, функция

$$y = \frac{\sqrt{x} \sin^2 x}{\sqrt[3]{x + 5^{2x^3}}} + \sqrt{\lg^3 x - 1}$$

является элементарной, так как здесь число операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции  $\left( \sin^2 x, 5^{2x^3}, \lg^3 x, \sqrt{\lg^3 x - 1} \right)$  конечно.

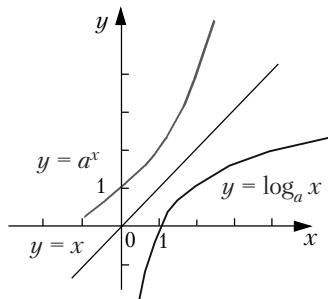


Рис. 5.21

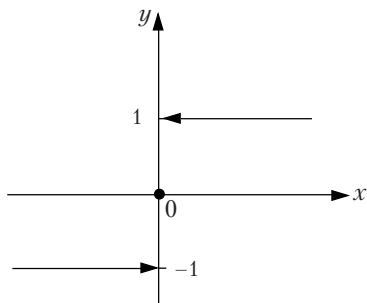


Рис. 5.22

Примерами неэлементарных функций являются функции:  $y = [x]$  — целая часть  $x$  (см. рис. 6.9);  $y = \text{sign } x$  (читается « $y$  равно сигнум  $x$ ») — знак числа  $x$  ( $\text{sign } x = \{-1, \text{ если } x < 0; 0, \text{ если } x = 0; 1, \text{ если } x > 0\}$ , (рис. 5.22); функция Дирихле (с. 267).

### Классификация функций.

Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

*Алгебраической* называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. К числу алгебраических функций относятся:

- *целая рациональная функция* (многочлен или полином):

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n;$$

- *дробно-рациональная функция* — отношение двух многочленов;

- *иррациональная функция* (если в составе операций над аргументом имеется извлечение корня).

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной*. К числу трансцендентных функций относятся: показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические функции.

**Преобразование графиков.** В разд. III будет показано, как проводить исследование функций и построение их графиков с помощью производной. Вместе с тем актуальными остаются приемы построения графиков функций с помощью преобразования графиков основных элементарных функций.

Пусть задан график функции  $y = f(x)$ .

Справедливы следующие утверждения (правила).

1. График функции  $y = f(x + a)$  есть график  $y = f(x)$ , сдвинутый (при  $a > 0$  влево, при  $a < 0$  вправо) на  $|a|$  единиц параллельно оси  $Ox$  (рис. 5.23).

2. График функции  $y = f(x) + b$  есть график  $y = f(x)$ , сдвинутый (при  $b > 0$  вверх, при  $b < 0$  вниз) на  $|b|$  единиц параллельно оси  $Oy$  (см. рис. 5.23).

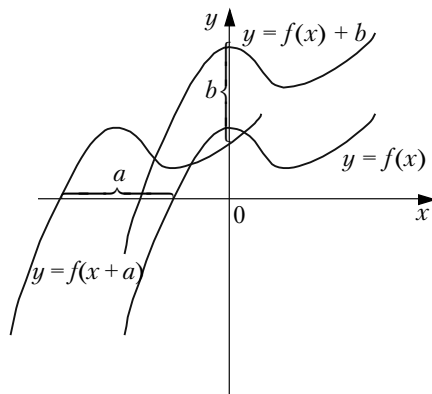


Рис. 5.23

3. График функции  $y = mf(x)$  ( $m \neq 0$ ) есть график  $y = f(x)$ , растянутый (при  $m > 1$ ) в  $m$  раз или сжатый (при  $0 < m < 1$ ) вдоль оси  $Oy$  (рис. 5.24). При  $-\infty < m < 0$  график функции  $y = mf(x)$  есть зеркальное отображение графика  $y = -mf(x)$  от оси  $Ox$ .

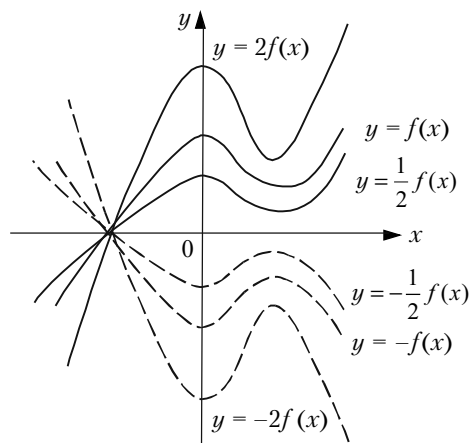


Рис. 5.24

4. График функции  $y = f(kx)$  ( $k \neq 0$ ) есть график  $y = f(x)$ , сжатый (при  $k > 1$ ) в  $k$  раз или растянутый (при  $0 < k < 1$ ) вдоль оси  $Ox$  (рис. 5.25). При  $-\infty < k < 0$  график функции  $y = f(kx)$  есть зеркальное отображение графика  $y = f(-kx)$  от оси  $Oy$ .

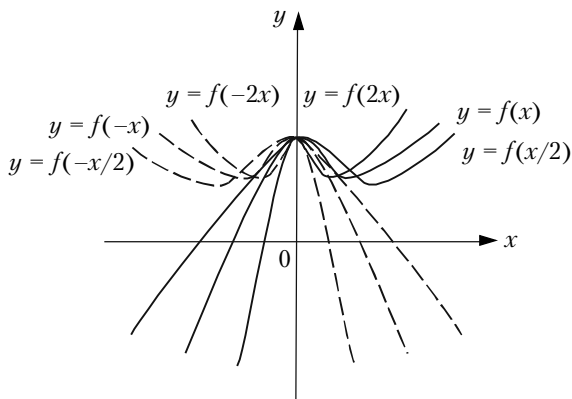


Рис. 5.25

**Пример 5.3.** Построить график функции  $y = -3\cos 2x$ .

*Решение.* Проводим построение графика следующим образом (рис. 5.26):

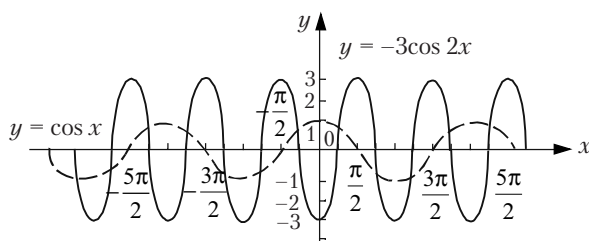


Рис. 5.26

- 1) строим график  $y = \cos x$ ;
- 2)  $y = \cos x \rightarrow$  сжатие графика в два раза вдоль оси  $Ox \rightarrow y = \cos 2x$ ;
- 3)  $y = \cos 2x \rightarrow$  зеркальное отражение графика от оси  $Ox \rightarrow y = -\cos 2x$ ;
- 4)  $y = -\cos 2x \rightarrow$  растяжение графика в три раза вдоль оси  $Oy \rightarrow y = -3\cos 2x$ . ►

## 5.6. Применение функций в экономике

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до

функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

Наряду с линейными используются нелинейные функции: дробно-рациональные, степенные (квадратичная, кубическая и т.д.), показательные (экспоненциальные), логарифмические и др. Периодичность, колеблемость ряда экономических процессов позволяет также применять тригонометрические функции.

Наиболее часто в экономике используются следующие функции.

1. *Функция полезности (функция предпочтений)* — в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. *Производственная функция* — зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) — зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов.

4. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) — зависимость издержек производства от объема выпуска продукции.

5. *Функции спроса, потребления, предложения* — зависимость объема спроса, потребления, предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.).

Учитывая, что экономические явления и процессы обуславливаются действием различных факторов, для их исследований широко используются *функции нескольких переменных*<sup>1</sup>. Среди них выделяются *мультипликативные функции*, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающего его в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора.

Используются также *сепарабельные функции*, которые дают возможность выделить влияние различных факторных переменных на зависимую переменную, и, в частности, *аддитивные функции*, представляющие одну и ту же зави-

<sup>1</sup> Функции нескольких переменных рассмотрены в гл. 9.

симую переменную как при суммарном, но раздельном воздействии нескольких факторов, так и при одновременном их воздействии.

Если действием побочных факторов можно пренебречь или удастся зафиксировать эти факторы лишь на определенных уровнях, то влияние одного главного фактора изучается с помощью функции одной переменной, рассматриваемой в данной и последующих главах. Приведем примеры.

1. Исследуя зависимости спроса на различные товары от дохода

$$y = \frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1} (x > a_1); \quad y = \frac{b_2(x-a_2)}{x-c_2} (x > a_2); \quad y = \frac{b_3(x-a_3)}{x-c_3} (x > a_3)$$

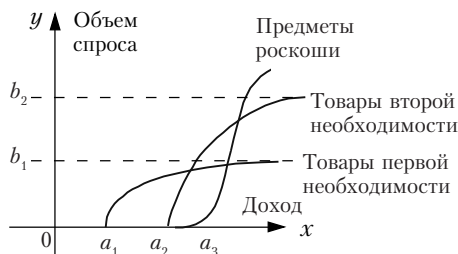


Рис. 5.27

(функции Торнквиста<sup>1</sup>), можно установить уровни доходов  $a_1, a_2, a_3$ , при которых начинается приобретение тех или иных товаров, и уровни (точки) насыщения  $b_1, b_2$  для групп товаров первой и второй необходимости (рис. 5.27).

2. Рассматривая в одной системе координат кривые спроса и предложения, можно установить *равновесную (рыночную) цену* данного товара в процессе формирования цен в условиях конкурентного рынка (*паутинообразная модель*) (рис. 5.28).

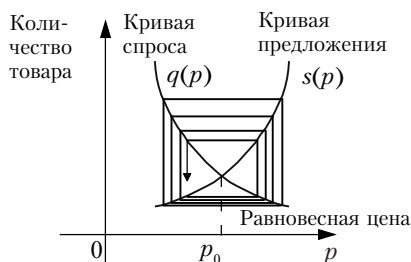


Рис. 5.28

<sup>1</sup> Торнквист Л. — шведский экономист.

3. Изучая в теории потребительского спроса *кривые безразличия* (линии, вдоль которых полезность двух благ  $x$  и  $y$  одна и та же), например, задаваемые в виде  $xu = U$ , и *линию бюджетного ограничения*  $p_x x + p_y y = I$  при ценах благ  $p_x$  и  $p_y$  и доходе потребителя  $I$ , можно установить оптимальные количества благ  $x_0$  и  $y_0$ , имеющих максимальную полезность  $U_0$  (рис. 5.29).

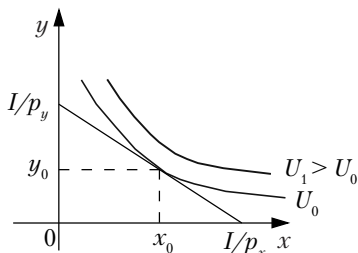


Рис. 5.29

4. Рассматривая *функции издержек (полных затрат)*  $c(q)$  и дохода фирмы  $r(q)$ , можно установить зависимость прибыли  $\pi(q) = c(q) - r(q)$  от объема производства  $q$  (рис. 5.30) и выявить уровни объема производства, при которых производство продукции убыточно ( $0 < q < q_2$ ), приносит прибыль ( $q_2 < q < q_4$ ), дает максимальный убыток ( $q = q_1$ ) и максимальную прибыль ( $q = q_3$ ), и найти размеры этих убытков или прибыли.

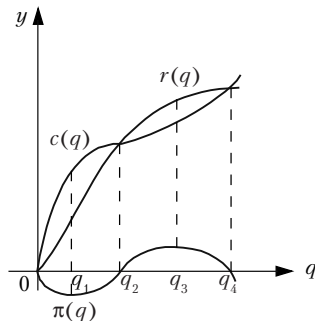


Рис. 5.30

Очевидно, что перечень подобных примеров применения функций в экономической теории и практике можно было бы продолжить (о них, в частности, пойдет речь в последующих главах учебника).

## 5.7. Интерполирование функций.

### Основные правила приближенных вычислений

Остановимся еще на одном важном аспекте использования функций в экономике — **применении таблиц функций**, которые позволяют сделать возможными различные расчеты, исключить или упростить громоздкие вычисления.

При вычислениях значений функции с помощью таблиц часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда аргумент функции задан с большей точностью, чем позволяет



таблица. В этом случае применяют *интерполирование* (*интерполяцию*) — приближенное нахождение неизвестных значений функций по известным ее значениям в заданных точках.

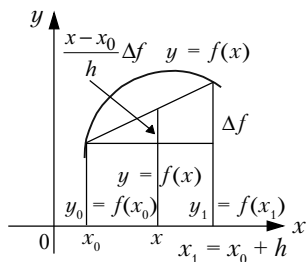


Рис. 5.31

Наиболее простым является *линейное интерполирование*, при котором допускается, что приращение функции пропорционально приращению аргумента. Если заданное значение  $x$  лежит между приведенными в таблице значениями  $x_0$  и  $x_1 = x_0 + h$ , которым соответствуют значения функции  $y_0 = f(x_0)$  и  $y_1 = f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$ , то считают, что (рис. 5.31)

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f. \quad (5.4)$$

Величины  $\frac{x - x_0}{h} \Delta f$  называются *интерполяционными поправками*. Они вычисляются с помощью таблицы или приводятся в дополнении к ней.

Если по заданным значениям функции необходимо найти приближенное значение аргумента, то необходимо провести *обратное интерполирование*.

**Пример 5.4.** Функция  $y = f(x)$  задана таблицей.

$x$	2	2,04	2,08
$y$	2,24	2,88	3,38

а) Используя линейное интерполирование, найти  $f(2,008)$ .

б) Чему равен  $x$ , если  $f(x) = 3,1$ ?

*Решение.*

а) Имеем  $x_0 = 2$ ;  $f(x_0) = 2,42$ ;  $x_1 = 2,04$ ;  $f(x_1) = 2,88$ ;  $h = x_1 - x_0 = 2,04 - 2,0 = 0,04$ ;  $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = 2,88 - 2,42 = 0,46$ .

Теперь по интерполяционной формуле (5.4) получаем

$$y = f(2,008) \approx 2,42 + \frac{2,008 - 2,0}{0,04} \cdot 0,46 = 2,512.$$

в) Обратное интерполирование можно провести по той же формуле, в которой нужно поменять местами переменные  $x$  и  $y$ :

$$\varphi(y) = \varphi(y_0) + \frac{y - y_0}{h} \Delta\varphi, \quad (5.5)$$

где  $x = \varphi(y)$  — неизвестное значение обратной функции.

Имеем  $y_0 = 2,88$ ;  $\varphi(y_0) = 2,04$ ;  $y_1 = 3,38$ ;  $\varphi(y_1) = 2,08$ ;  $h = y_1 - y_0 = 3,38 - 2,88 = 0,50$ ;  $\Delta\varphi = \varphi(y_1) - \varphi(y_0) = 2,08 - 2,04 = 0,04$ .

Теперь по интерполяционной формуле (5.5) получаем

$$x = \varphi(3,1) \approx 2,04 + \frac{3,1 - 2,88}{0,5} \cdot 0,04 = 2,0576 \approx 2,058. \blacktriangleright$$

В ряде случаев точность нахождения неизвестных значений с помощью линейного интерполирования оказывается недостаточной, и используются другие методы интерполирования, например *квадратичное интерполирование*.

При приближенном вычислении значений функций необходимо руководствоваться **правилами приближенных вычислений**.

Обозначим через  $x$  точное (истинное) значение некоторой величины (точное число), а через  $a$  — ее приближенное значение (приближенное число). Число  $\Delta = |x - a|$  называется *истинной абсолютной погрешностью* приближенного числа  $a$ .

Обычно истинная абсолютная погрешность числа  $a$  неизвестна, так как не дано точное значение  $x$ , а известна так называемая предельная абсолютная погрешность. Число  $\alpha$  называется *предельной* (или просто) *абсолютной погрешностью* приближенного числа  $a$ , если

$$|x - a| \leq \alpha. \quad (5.6)$$

*Относительной погрешностью*  $\delta$  приближенного числа  $a$  называется отношение истинной абсолютной погрешности этого числа к абсолютной величине точного числа  $x$ :

$\delta = \frac{\Delta}{|x|} \cdot 100(\%)$ . Если точное значение числа  $x$  неизвестно, а  $\Delta$  мало по сравнению с  $|a|$ , то

$$\delta \approx \frac{\Delta}{|a|} \cdot 100(\%). \quad (5.7)$$

Цифра данного разряда приближенного числа  $a$  называется *верной*, если истинная абсолютная погрешность  $\Delta = |x - a|$  этого числа не превосходит пяти единиц следующего справа разряда. В противном случае эта цифра называется *неверной*.

**Правило округления.** Если первая из отбрасываемых цифр, считая слева направо, меньше 5, то последнюю оставшуюся цифру не меняют, если больше или равна 5, то увеличивают на единицу.

Если отбрасывается *только* цифра 5, а предшествующая ей цифра четная, то последнюю цифру не меняют, если нечетная, то увеличивают на единицу (*правило четных знаков*). Например, число  $\pi = 3,1415926\dots$  приближенно можно записать так:  $\pi = 3,14$  (так как  $1 < 5$ ),  $\pi \approx 3,142$  ( $5 \geq 5$ ),  $\pi \approx 3,1416$  (так как  $9 > 5$ ), а число  $x = 0,6535 \approx 0,654$  (по правилу четных знаков).

Приближенное число характеризуется *числом* сохраненных *десятичных знаков* после запятой или *числом значащих цифр*, к которым относятся все цифры, кроме нулей слева. Например, числа 792; 46,3; 0,00479 имеют по три значащих цифры каждое, но число десятичных знаков соответственно нуль, один и пять.

При *сложении (вычитании)* приближенных чисел в сумме следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их имеет слагаемое с наименьшим числом десятичных знаков.

При *умножении (делении)* приближенных чисел в произведении (частном) следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель (делимое или делитель) с наименьшим числом значащих цифр.

При этом рекомендуется использовать *правило запасной цифры*, состоящее в том, что для получения окончательно результата с  $n$  верными цифрами промежуточные действия проводят с  $n + 1$  (или даже  $n + 2$ ) верными цифрами с последующим округлением ответа до  $n$  цифр.

**Пример 5.5.** Дано:  $\pi \approx 3,14159$ ;  $\lg e \approx 0,434$  (все цифры верные).

Вычислить приближенно: а)  $\pi + \lg e$ ; б)  $\pi \cdot \lg e$ .

*Решение.*

а) Число  $\pi$  содержит пять верных десятичных знаков,  $\lg e$  — три, следовательно, сумма должна содержать три верных десятичных знака. Округляя (с запасной цифрой) число  $\pi$  до четырех десятичных знаков, получаем

$$\pi + \lg e \approx 3,1416 + 0,434 = 3,5756 \approx 3,576.$$

б) Число  $\pi$  содержит шесть верных значащих цифр,  $\lg e$  — три (ноль не считается), следовательно, произведение должно содержать три верных значащих цифры. Округляя (с запасной цифрой) число  $\pi$  до четырех значащих цифр, получаем

$$\pi \cdot \lg e = 3,142 \cdot 0,434 = 1,363628 \approx 1,36. \quad \blacktriangleright$$

## ПРАКТИКУМ

### 5.8. Функции и графики

**5.6.** Найти область определения функций:

а)  $y = \sqrt{x} - \lg(2x-3)$ ; б)  $y = \log_3 \sin x + \sqrt{4-x^2}$ ;

в)  $y = \sqrt{(2x-5)\sqrt{9-x^2}}$ ; г)  $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ .

*Решение.*

а) Область определения функции  $X$  найдем из системы неравенств  $\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x-3 > 0, \end{cases}$  откуда  $x > 3/2$  или  $X = (3/2; +\infty)$ .

б) Имеем систему  $\begin{cases} \sin x > 0, \\ 4-x^2 \geq 0. \end{cases}$  Решая первое неравенство, получаем  $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ ; решая второе, найдем  $x^2 \leq 4$ , откуда  $|x| \leq 2$  или  $-2 \leq x \leq 2$ . С помощью числовой оси (рис. 5.32) находим решение системы неравенств  $0 < x \leq 2$ , т.е. область определения функции  $X = (0; 2]$ .

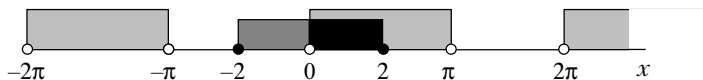


Рис. 5.32

в) Имеем  $(2x-5)\sqrt{9-x^2} \geq 0$ . Так как квадратный корень из неотрицательного числа неотрицателен, то приходим к системе

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ 2x - 5 \geq 0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ x \geq 5/2, \end{cases}$$

т.е.  $x \in [5/2; 3]$ . Но решение еще не закончено. Можно заметить, что неравенство будет справедливо и в случае, когда первый сомножитель отрицателен, а второй равен нулю, т.е.

$$\begin{cases} 9 - x^2 = 0, \\ 2x - 5 < 0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = \pm 3, \\ x < 5/2, \end{cases} \text{ и } x = -3, \text{ т.е. } X = \{-3\} \cup [5/2; 3].$$

г) Область определения найдем из неравенства  $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$ , откуда  $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ . Так как при любом  $x$   $(1+x^2) > 0$ , то перейдем к равносильному неравенству  $-1 - x^2 \leq 2x \leq 1 + x^2$ , откуда

$$\begin{cases} 2x \geq -1 - x^2, \\ 2x \leq 1 + x^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (1+x)^2 \geq 0, \\ (1-x)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что полученные неравенства справедливы при любом  $x$ , т.е. область определения функции  $X = (-\infty; +\infty)$ . ►

**5.7.** Найти область значений функции:

а)  $y = \sin x + \cos x$ ; б)  $y = \frac{6x}{1+x^2}$ ; в)  $y = \lg(1 - 2\cos x)$ .

*Решение.*

а) Преобразуем функцию

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \left( \sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Так как синус любого угла по абсолютной величине не превосходит единицы, т.е.  $\left| \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 1$ , то  $\left| \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}$ ;  $|y| \leq \sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$ . Итак, область значений функции  $Y = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .

б) Область значений может быть найдена с помощью производной, рассматриваемой в разд. III. Но можно поступить иначе: найти обратную функцию  $x = \varphi(y)$ , ее область определения  $Y$ , которая совпадает с областью значений  $Y$  данной функции.

Выразим  $x$  через  $y$ ; получим обратную функцию  $x = \varphi(y)$ , заданную неявно квадратным уравнением  $x^2y - 6x + y = 0$ . Очевидно, область определения этой функции найдется из условия, что дискриминант квадратного уравнения  $D = b^2 - 4ac$  неотрицателен, т.е.  $6^2 - 4y^2 \geq 0$  или  $y^2 \leq 9$ ,  $|y| \leq 3$  и  $-3 \leq y \leq 3$ . Итак, область значений данной функции  $Y = [-3; 3]$ .

в) Выражение  $(1 - 2 \cos x)$  принимает наибольшее значение, равное трем, когда  $\cos x = -1$ , т.е. наибольшее значение функции есть  $\lg 3$ . Если  $(1 - 2 \cos x) \rightarrow 0$  (стремится к нулю), что имеет место при  $\cos x \rightarrow 1/2$ , то логарифм этого выражения стремится к  $-\infty$ . Следовательно, область значений функций  $Y = (-\infty; 3]$ . ►

**5.8.** Выяснить четность (нечетность) функций:

а)  $y = x - \operatorname{ctg}^3 x$ ; б)  $y = x \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$ ; в)  $y = (x - 1)^2 \sin^2 x$ .

*Решение.*

а)  $f(-x) = -x - \operatorname{ctg}^3(-x) = -x + \operatorname{ctg}^3 x$ . Так как  $f(-x) \neq -f(x)$ , то данная функция нечетная.

б)  $f(-x) = (-x) \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} = x \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$  (после преобразований).

Так как  $f(-x) = f(x)$ , то данная функция четная.

в)  $f(-x) = (-x - 1)^2 \sin^2(-x) = (x + 1)^2 \sin^2 x$ . Так как  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ , то данная функция общего вида, т.е. ни четная, ни нечетная. ►

**5.9.** Найти периоды функций: а)  $y = \cos^2 x$ ; б)  $y = \sin^4 x$ .

*Решение.*

а) Представим функцию в виде

$$y = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + \cos(2x + 2\pi)}{2} = \frac{1 + \cos 2(x + \pi)}{2},$$

учитывая, что функция  $\cos \alpha$  имеет период, равный  $2\pi$ . Итак, получили, что  $\cos^2 x = \cos^2(x + \pi)$  для любых  $x$ , следовательно, период данной функции  $T = \pi$ .

б) Если  $T$  — период функции, то для любых  $x$  справедливо равенство  $\sin^4 x = \sin^4(x + T)$ .

Представим это равенство в виде  $\sin^4(x + T) - \sin^4 x = 0$ , или

$$(\sin^2(x+T) + \sin^2 x)(\sin^2(x+T) - \sin^2 x) = 0. \quad (5.8)$$

Преобразовав выражение во вторых скобках в произведение (рекомендуем это сделать читателю самостоятельно), получим

$$(\sin^2(x+T) + \sin^2 x)\sin(2x+T)\sin T = 0. \quad (5.9)$$

Равенство (5.8) или равносильное ему равенство (5.9) будет выполняться при любых  $x$ , если сомножитель, не содержащий  $x$ , будет равен нулю:  $\sin T = 0$  и наименьшее значение  $T = \pi$ . ►

**5.10.** Построить графики функций: а)  $y = -2x^2 + 5x - 2$ ;  
б)  $y = \frac{1-3x}{x-1}$ .

*Решение.*

а) Вынося коэффициент при  $x^2$  за скобки и дополняя правую часть уравнения до полного квадрата, получаем

$$y = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = -2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 1 - \frac{25}{16}\right] = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}.$$

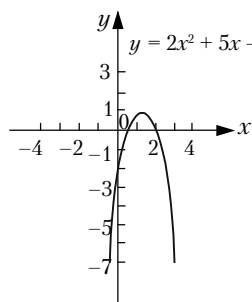
В соответствии с правилами 1 и 2 (с. 275) графиком данной функции будет график  $y = -2x^2$ , сдвинутый вправо

на  $5/4$  ед. параллельно оси  $Ox$   $\left(y = -2x^2 \rightarrow y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2\right)$   
и поднятый вверх на  $9/8$  ед. параллельно оси  $Oy$

$\left(y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \rightarrow y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}\right)$   
т.е. парабола  $y = -2x^2$  (рис. 5.33) с центром в точке  $(5/4; 9/8)$ .

б) Преобразуем уравнение, выделяя целую часть функции:

$$y = \frac{-3(x-1)-2}{x-1} = -3 - \frac{2}{x-1}.$$



**Рис. 5.33**

В соответствии с правилами 1 и 2 (с. 275) график данной функции есть

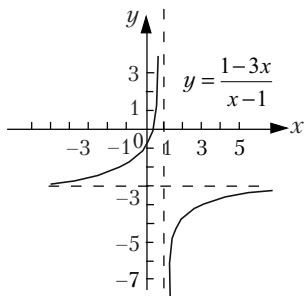


Рис. 5.34

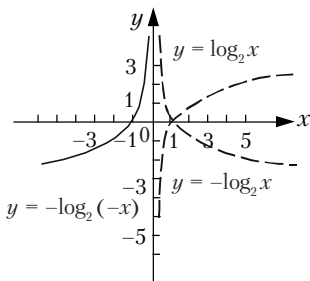


Рис. 5.35

гипербола  $y = -\frac{2}{x}$  (рис. 5.34),  
сдвинутая вправо на одну единицу  
параллельно оси

$Ox \left( y = -\frac{2}{x} \rightarrow y = -\frac{2}{x-1} \right)$  и опу-  
щенная вниз на три единицы па-  
раллельно оси  $Oy$ ,

$$\left( y = -\frac{2}{x-1} \rightarrow y = -3 - \frac{2}{x-1} \right),$$

т.е. гипербола с центром  $(1; -3)$ ,  
(см. рис. 5.34). ►

**5.11.** Построить графики функ-  
ций: а)  $y = -\log_2(-x)$ ;

б)  $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ .

*Решение.*

а) В соответствии с правила-  
ми 3 и 4 (с. 276) график функ-  
ции  $y = -\log_2(-x)$  есть график  
 $y = -\log_2(x)$ , симметрично ото-  
браженный относительно оси  
 $Ox$  ( $y = \log_2 x \rightarrow y = -\log_2 x$ ) и

$Oy$  ( $y = -\log_2 x \rightarrow y = -\log_2(-x)$ ) (рис. 5.35).

б) Представим функцию в виде

$$\begin{aligned} y &= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = \\ &= 2 \left( \sin \frac{\pi}{3} \sin x - \cos \frac{\pi}{3} \cos x \right) = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

В соответствии с правилами 1 и 3 (с. 275, 276) необходимо  
график функции сдвинуть вправо на  $\pi/3$  ед. параллельно оси

$Ox \left( y = \sin x \rightarrow y = \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \right)$  и растянуть вдвое вдоль

оси  $Oy \left( y = \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \rightarrow y = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \right)$  (рис. 5.36). ►



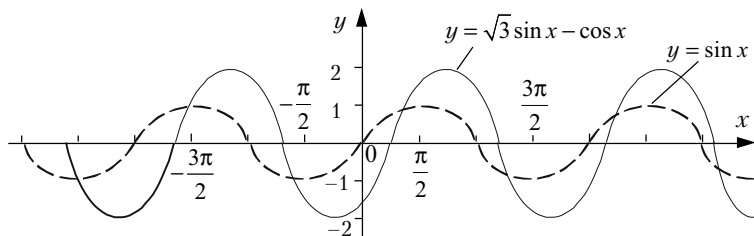


Рис. 5.36

**5.12.** Решить неравенства: а)  $|x+5| \leq 3$ ; б)  $|x^2-3| \geq 13$ .

*Решение.*

а) Данное неравенство равносильно двойному неравенству  $-3 \leq x+5 \leq 3$ , откуда  $-5-3 \leq x \leq 3-5$ , т.е.  $x \in [-8; -2]$ .

б) Неравенство равносильно совокупности двух неравенств:  $x^2-3 \geq 13$  и  $x^2-3 \leq -13$ . Второе неравенство решений не имеет, так как приводится к виду  $x^2 \leq -10$ . Решая первое неравенство, найдем  $x^2 \geq 16$  или  $|x| \geq 4$ , откуда  $x \leq -4$ ,  $x \geq 4$  или  $x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ . ►

**5.13.** Дана функция  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ . Найти  $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ .

*Решение.* Чтобы найти  $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ , нужно вместо  $x$  в выражение для функции  $f(x)$  подставить  $\frac{x+2}{x-2}$ . Получаем  $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \left(\frac{x+2}{x-2} + 2\right) : \left(\frac{x+2}{x-2} - 2\right) = \frac{3x-2}{6-x}$ . ►

**5.14.** Известно, что  $f(x) = 3x+4$ , а  $f(1-2g(x)) = 25-12x$ . Найти  $f(x)$ .

*Решение.* С одной стороны,  $f(1-2g(x))$  можно получить из  $f(x)$ , подставив вместо  $x$   $(1-2g(x))$ , а с другой —  $f(1-2g(x)) = 25-12x$  по условию. Таким образом, имеем уравнение  $3(1-2g(x)) + 4 = 25-12x$ , из которого  $g(x) = 2x-3$ . ►

**5.15.** Постоянные издержки  $F$  (не зависящие от числа  $x$  единиц произведенной продукции) составляют 125 тыс. руб. в месяц, а переменные издержки  $V(x)$  (пропорциональные  $x$ ) — 700 руб. за каждую единицу продукции. Цена единицы продукции равна 1200 руб. Найти объем продукции  $x$ , при котором прибыль равна: а) нулю (точка безубыточности); б) 105 тыс. руб. в месяц.

*Решение.*

а) Издержки производства  $x$  единиц продукции составят  $C(x) = F + V(x) = 125 + 0,7x$ . Совокупный доход (выручка) от реализации этой продукции  $R(x) = 1,2x$ , а прибыль  $P(x) = R(x) - C(x) = 0,5x - 125$  (тыс. руб.). Точка безубыточности, в которой  $P(x) = 0,5x - 125 = 0$ , равна  $x = 250$  ед.

б) Прибыль  $P(x)$  равна 105 тыс. руб., т.е.  $P(x) = 0,5x - 125 = 105$  при  $x = 460$  ед. ►

Найти области определения функций:

$$5.16. y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{2x-1}{x+5}}. \quad 5.17. y = \sqrt{\frac{3-x-2x^2}{\log_2(x+1)}}.$$

$$5.18. y = \frac{2x^2 - \lg(x+5)}{\sqrt{8-x^3}}. \quad 5.19. y = \lg(2^{x-1} + 2^{-x} - 1,5).$$

$$5.20. y = \sqrt{\sin x - \sqrt{3} \cos x}.$$

$$5.21. y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \sqrt{\cos(\sin x)}.$$

Найти область значений функций:

$$5.22. y = \sqrt{3} \sin x + \cos x. \quad 5.23. y = \frac{x}{1+x^2}.$$

$$5.24. y = \sqrt{-x^2 + x + 2}. \quad 5.25. y = \log_3(1 + 3 \sin x).$$

Выяснить четность (нечетность) функций:

$$5.26. y = x^3 \sin x. \quad 5.27. y = x - x^3 + 5x^5.$$

$$5.28. y = \lg \frac{1+x}{1-x}. \quad 5.29. y = x^2 + \sin x.$$

$$5.30. y = x \frac{2^x - 1}{2^x + 1}. \quad 5.31. y = \lg \left( x + \sqrt{1+x^2} \right).$$

Найти наименьший период функций или доказать их неперiodичность:

$$5.32. y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x. \quad 5.33. y = \cos^2 \frac{x}{2}.$$

$$5.34. y = \sin^4 x + \cos^4 x. \quad 5.35. y = \sin^3 x.$$

$$5.36. y = \sin \frac{1}{x}. \quad 5.37. y = x \sin x.$$

Построить графики функций:

5.38. а)  $y = -2x^2$ ; б)  $y = -2(x+3)^2$ ; в)  $y = -2(x+3)^2 + 1$ ;

г)  $y = -2x^2 + 5x - 2$ .

5.39. а)  $y = \frac{3}{x}$ ; б)  $y = -\frac{3}{x}$ ; в)  $y = \frac{3}{x-1}$ ; г)  $y = \frac{3}{x-1} - 2$ ;

д)  $y = \frac{4x-3}{x-1}$ .

5.40. а)  $y = \log_1(2x)$ ; б)  $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x)$ ; в)  $y = \log_{\frac{1}{2}}(3-2x)^2$ ;

г)  $y = 3 \cdot 2^{x-2}$ .

5.41. а)  $y = \sin 2x$ ; б)  $y = -3 \sin 2x$ ; в)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ;

г)  $y = \sin x + \cos x$ ; д)  $y = \cos^2 x$ .

5.42. Дана функция  $y(x) = \frac{1+x}{1-x}$ , найти  $y\left(\frac{4-x}{2+x}\right)$ .

5.43. Дана функция  $y = 2^x$ , найти  $y(\log_{\frac{1}{2}} x)$ .

5.44. Известно, что  $y(x) = \frac{3-x}{2+x}$ , а  $y\left(\frac{1+z(x)}{2}\right) = \frac{1}{x}$ . Найти  $z(x)$ .

5.45. Известно, что  $y(x) = 3^x$ , а  $y(4z(x)) = \frac{1}{x^2}$ . Найти  $z(x)$ .

5.46. Предприятие купило автомобиль стоимостью 150 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации составляет 9%. Полагая зависимость стоимости автомобиля от времени эксплуатации линейной, найти его стоимость через 4,5 года.

5.47. Зависимость уровня потребления  $y$  некоторого вида товара от уровня дохода семьи  $x$  выражается формулой:  $y = a - \frac{b}{x+c}$ . Найти уровень потребления товара при уровне дохода семьи 158 ден. ед. Известно, что при  $x = 50$   $y = 0$ , при  $x = 74$   $y = 0,8$ ; при  $x = 326$   $y = 2,3$ .

5.48. Банк выплачивает ежегодно 5% годовых (сложный процент). Определить: а) размер вклада через три года, если первоначальный вклад составлял 10 тыс. руб.; б) размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад (вместе с начисленными процентами) составит 10 тыс. руб.

Указание. Размер вклада  $Q_t$  через  $t$  лет определяется по формуле

$$Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t, \text{ где } Q_0 \text{ — первоначальный вклад; } p \text{ —}$$

годовая процентная ставка.

## Контрольные задания по главе 5 «Функция»

№	Вариант 5.1	Вариант 5.2	Вариант 5.3
1	Найти область определения функций:		
	$y = \frac{x}{\sqrt[4]{25-x^2}}$	$y = \frac{3\sqrt{x}}{\lg(3-x)}$	$y = \sqrt{x+2} - \ln(4-x)$
2	$y = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \ln(x+1)}{(x^2+1)\sqrt[5]{x}} - \frac{\sqrt[4]{x-1}}{x}$	$y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\operatorname{arctg} x} + \log_2(x-2)$	$y = \frac{\arcsin x}{\sin 5x}$
Выяснить четность (нечетность) функций:			
3	$y = \frac{\sin x}{x^3}$	$y = (\sin^2 x + \cos x) \cdot x^3$	$y = x^2 \ln x$
4	$y = 3^{4x} \cdot x^2 + \cos x$	$y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^4 + x^2 + x}$	$y = \frac{x^4}{\sin x} - x^3 \ln(1+x^2)$
Найти область значений функций:			
5	$y = \frac{2\sqrt{2x-1}}{x^2+1}$	$y = 6\sin x - 8\cos x$	$y = 2 \cdot 5^{-2x^2}$
Найти основной (наименьший) период функций:			
6	$y = \sin^2 4x$	$y = 2\sin \frac{x}{2}$	$y = \operatorname{tg}^2 x$
Построить графики функций:			
7	$y = -3x^2 + 10x - 3;$ $y = \frac{1-6x}{1-2x}$	$y = -5x^2 + 26x - 5;$ $y = \frac{1-5x}{2-5x}$	$y = -4x^2 + 17x - 4;$ $y = \frac{2-9x}{2-3x}$

## Тест 5

1. Выяснить, какие из функций являются сложными:

1)  $y = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$ ; 2)  $y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x$ ; 3)  $y = \arcsin x$ ; 4)  $y = \arcsin(3x)$ .

2. Выяснить, какие из функций заданы неявно:

1)  $y = \sin^3 \ln x$ ; 2)  $y = \operatorname{tg}(x+y) \cdot 3^x$ ; 3)  $x - y = xy$ .

3. Выяснить, какие из функций являются ограниченными:

1)  $y = e^{-x^2}$ ; 2)  $y = e^{x^2}$ ; 3)  $y = \frac{\cos x}{x^2}$ ; 4)  $y = \sin x + \cos x$ .

4. Выяснить, какие из функций являются монотонными при  $x \in (-\infty; +\infty)$ :

1)  $y = x^2$ ; 2)  $y = x^3$ ; 3)  $y = \begin{cases} x, & \text{при } x < 0, \\ 2x, & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$  4)  $y = \sqrt[3]{x}$ .

5. Выяснить, какие из функций являются нечетными:

1)  $y = \frac{x}{\cos x} + \sin x$ ; 2)  $y = \frac{x(x+1)}{\sin x}$ ; 3)  $y = x^3 + \operatorname{tg} x$ ;  
4)  $y = x^3 \cdot \operatorname{tg} x$ .

6. Укажите верные утверждения для функции  $y = \arcsin x$ :

- 1) монотонная; 2) ограниченная; 3) неограниченная;  
4) четная; 5) нечетная; 6) общего вида; 7) явная; 8) неявная; 9) сложная.

7. Сколько натуральных значений  $x$  содержит область определения функции

$$y = \frac{\ln(x^2 - 9)}{x - 4} + \frac{\sqrt{9 - x}}{2^x - 64}?$$

8. Найти область значений  $Y$  функции  $y = \sin x + \sqrt{80} \cos x$ .

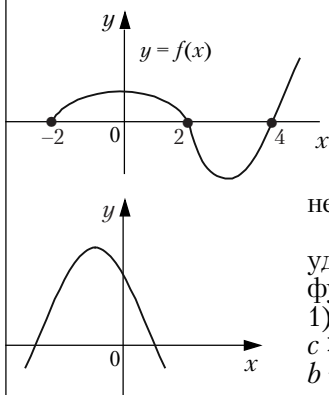
В ответе указать длину отрезка, представляющего  $Y$ .

9. Найти (в градусах) основной (наименьший) период функции  $y = 7 \sin 5x$ .

10. Дан график функции  $y = f(x)$ . Выяснить, сколько различных действительных корней имеет уравнение  $f(4x^2 + 3) = 0$ .

11. Выяснить, каким условиям удовлетворяют  $a, b, c$ , если график функции  $y = a(x+b)^2 + c$  имеет вид:  
1)  $a > 0, b < 0, c > 0$ ; 2)  $a < 0, b > 0, c > 0$ ; 3)  $a < 0, b > 0, c < 0$ ; 4)  $a < 0, b < 0, c > 0$ ; 5)  $a < 0, b < 0, c < 0$ .

12. Затраты на производство продукции  $y$  (тыс. руб.) выражаются уравнением  $y = 100 + 10x$ , где  $x$  — число месяцев. Доход от реализации продукции выражается уравнением  $y = 50 + 15x$ . Начиная с какого месяца производство будет рентабельным?



## Глава 6

# ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

### 6.1. Предел числовой последовательности

**Определение.** Если по некоторому закону каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие вполне определенное число  $a_n$ , то говорят, что задана **числовая последовательность**  $\{a_n\}$ :

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Иными словами, числовая последовательность — это *функция натурального аргумента*:  $a_n = f(n)$ .

Числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называются *членами* последовательности, а число  $a_n$  — *общим*, или  $n$ -м членом данной последовательности. Приведем примеры числовых последовательностей<sup>1</sup>:

2, 4, 6, 8, ...,  $2n$ , ... (монотонная, неограниченная);

1, 0, 1, 0, ... (немонотонная, ограниченная);

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \dots \quad (6.1)$$

(немонотонная, ограниченная).

Рассмотрим числовую последовательность (6.1); изобразим ее члены точками числовой оси (рис. 6.1).

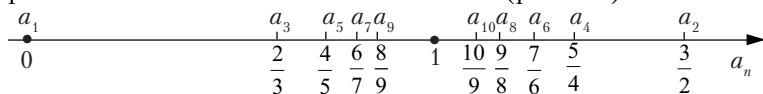


Рис. 6.1

<sup>1</sup> Определения монотонной и ограниченной функций рассмотрены в гл. 5.

Можно заметить, что члены последовательности  $a_n$  с ростом  $n$  как угодно близко приближаются к единице. При этом абсолютная величина разности  $|a_n - 1|$  становится все меньше и меньше. Действительно,

$$|a_1 - 1| = 1, |a_2 - 1| = \frac{1}{2}, |a_3 - 1| = \frac{1}{3}, |a_4 - 1| = \frac{1}{4}, \dots, |a_n - 1| = \frac{1}{n}, \dots,$$

т.е. с ростом  $n$   $|a_n - 1|$  будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа.

**Определение.** Число  $A$  называется *пределом числовой последовательности*  $\{a_n\}$ , если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такой номер  $N$  (зависящий от  $\varepsilon$ ,  $N = N(\varepsilon)$ ), что для всех членов последовательности с номерами  $n > N$  верно неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

Предел числовой последовательности обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  или  $a_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а в противном случае — *расходящейся*.

Используя логические символы — *квантор общности*  $\forall$  (вместо слова «для любого»), *квантор существования*  $\exists$  (вместо слова «найдется»), а также символ равносильности  $\Leftrightarrow$ , определение предела можно записать в виде

$$(A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon))(\forall n > N) |a_n - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших  $n$  члены последовательности  $\{a_n\}$  как угодно мало отличаются от числа  $A$  (по абсолютной величине меньше, чем на число  $\varepsilon$ , каким бы малым оно ни было).

**Пример 6.1.** Доказать, что для последовательности (6.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

*Решение.* Пусть, например,  $\varepsilon = 0,1$ . Тогда неравенство (6.2)

$$|a_n - 1| < 0,1 \quad \text{или} \quad \left| \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - 1 \right| < \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{выполняется}$$

при  $n > 10$ . Аналогично для  $\varepsilon = 0,01$   $|a_n - 1| < 0,01$  при  $n > 100$ .

Для любого  $\varepsilon > 0$  неравенство (6.2)  $|a_n - 1| < \varepsilon$  или  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  выполняется при  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Итак, при любом  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N = \frac{1}{\varepsilon}$  (или равный целой части  $\frac{1}{\varepsilon}$ ), что для всех  $n > N$  (при  $\varepsilon = 0,1$  для  $n > 10$ , при  $\varepsilon = 0,01$  для  $n > 100$  и т.д.) выполняется неравенство  $|a_n - 1| < \varepsilon$ , а это и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . ►

Выясним *геометрический смысл* предела числовой последовательности. Расположим члены последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  на числовой прямой. Неравенство (6.2)  $|a_n - A| < \varepsilon$  равносильно двойному неравенству  $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ , соответствующему попаданию членов последовательности  $a_n$  в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$  (рис. 6.2).

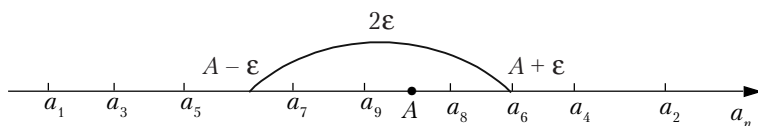


Рис. 6.2

Итак, число  $A$  есть *предел* числовой последовательности  $\{a_n\}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N$ , начиная с которого (при  $n > N$ ) все члены последовательности будут заключены в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$ , какой бы узкой она ни была. Вне этой  $\varepsilon$ -окрестности может быть лишь *конечное* число членов данной последовательности.

## 6.2. Предел функции в бесконечности и точке

**Предел функции в бесконечности.** С понятием предела числовой последовательности  $a_n = f(n)$  тесно связано понятие предела функции  $y = f(x)$  в бесконечности. Если в первом случае переменная  $n$ , возрастая, принимает лишь целые значения, то во втором случае переменная  $x$ , изменяясь, принимает любые значения.

**Определение.** Число  $A$  называется *пределом функции*  $y = f(x)$  *при  $x$ , стремящемся к бесконечности*, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое положительное число  $S > 0$



(зависящее от  $\varepsilon$ ;  $S = S(\varepsilon)$ ), что для всех  $x$ , таких, что  $|x| > S$ , верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \quad (6.3)$$

Этот предел функции обозначается  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  или  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow \infty$ .

С помощью логических символов определение запишется

$$\left( A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists S = S(\varepsilon) > 0) (\forall x: |x| > S) |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения остается тем же, что для предела числовой последовательности: при достаточно больших по модулю значениях  $x$  значения функции  $f(x)$  как угодно мало отличаются от числа  $A$  (по абсолютной величине).

Вясним *геометрический смысл* предела функции  $y = f(x)$  в бесконечности. Неравенство (6.3)  $|f(x) - A| < \varepsilon$  равносильно двойному неравенству  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ , соответствующему расположению части графика в полосе шириной  $2\varepsilon$  (рис. 6.3).

Итак, *число  $A$  есть предел функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $S > 0$ , что для всех  $x$  таких, что  $|x| > S$ , соответствующие ординаты графика функции  $f(x)$  будут заключены в полосу  $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ , какой бы узкой эта полоса ни была.*

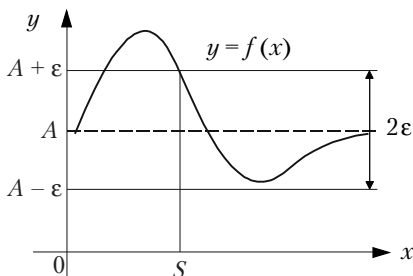


Рис. 6.3

**Пример 6.2.** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{x} = 5$ .

*Решение.* Для любого  $\varepsilon > 0$  неравенство (6.3)  $\left| \frac{5x+1}{x} - 5 \right| < \varepsilon$  или  $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$  выполняется при  $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Итак, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $S = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , что для всех  $x$  таких, что  $|x| > S$ , будет верно неравенство  $|f(x) - 5| < \varepsilon$ , где  $f(x) = \frac{5x+1}{x}$ , а это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ . ►

**Замечание.** Приведенное выше определение предела при  $x \rightarrow \infty$  предполагает неограниченное возрастание независимой переменной  $x$  по абсолютной величине. В то же время можно сформулировать понятие предела при стремлении  $x$  к бесконечности *определенного знака*, т.е. при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ . В первом случае основное неравенство (6.3) должно выполняться для всех  $x$  таких, что  $x > S$ , а во втором — для всех  $x$ , таких, что  $x < -S$ .

**Предел функции в точке.** Пусть функция  $y = f(x)$  задана в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, быть может, самой точки  $x_0$ .

**Определение.** Число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $x_0$*  (или *в точке  $x_0$* ), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое положительное число  $\delta > 0$  (зависящее от  $\varepsilon$ , т.е.  $\delta = \delta(\varepsilon)$ ), что для всех  $x$ , не равных  $x_0$  и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta, \quad (6.4)$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \quad (6.5)$$

Этот предел функции обозначается  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  или  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow x_0$ .

С помощью логических символов определение запишется

$$\left( A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta) \\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения предела функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  состоит в том, что для всех значений  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , значения функции  $f(x)$  как угодно мало отличаются от числа  $A$  (по абсолютной величине).

Рассмотрим *геометрический смысл* предела функции в точке. Как отмечалось выше, неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$  равносильно двойному неравенству  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ , соответствующему расположению части графика в полосе ши-

риной  $2\varepsilon$  (рис. 6.4). Аналогично неравенство  $|x - x_0| < \delta$  равносильно двойному неравенству  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ , соответствующему попаданию точек  $x$  в  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ .

*Число  $A$  есть предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции  $f(x)$  будут заключены в полосе  $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ , какой бы узкой эта полоса ни была.*

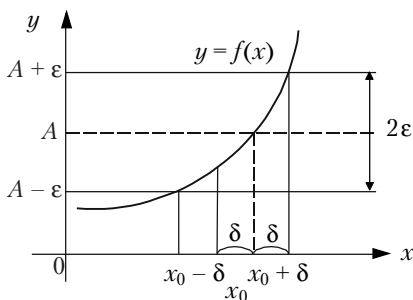


Рис. 6.4

**Пример 6.3.** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$ .

*Решение.* Пусть  $\varepsilon = 0,1$ . Тогда неравенство (6.5)  $|(2x + 3) - 5| < 0,1$  будет выполняться при  $|x - 1| < 0,05$ . Аналогично при  $\varepsilon = 0,01$  то же неравенство (6.5) будет верно при  $|x - 1| < 0,005$ .

Для любого  $\varepsilon > 0$  неравенство (6.5)  $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$  будет выполняться при  $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Итак, при любом  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  (для  $\varepsilon = 0,1$   $\delta = 0,05$ , для  $\varepsilon = 0,01$   $\delta = 0,005$  и т.д.), что для всех  $x \neq 1$  и удовлетворяющих условию  $|x - 1| < \delta$  верно неравенство  $|f(x) - 5| < \varepsilon$ , где  $f(x) = 2x + 3$ , а это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ . ►

**Замечание 1.** Определение предела не требует существования функции в самой точке  $x_0$ , ибо рассматривает значения  $x \neq x_0$  в некоторой окрестности этой точки. Другими словами, рассматривая  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , предполагается, что

$x$  стремится к  $x_0$ , но не достигает значения  $x_0$ . Поэтому наличие или отсутствие предела при  $x \rightarrow x_0$  определяется поведением функции в окрестности точки  $x_0$ , но не связано со значением функции (или его отсутствием) в самой точке  $x_0$ .

**Замечание 2.** Если при стремлении  $x$  к  $x_0$  переменная  $x$  принимает лишь значения, меньшие  $x_0$ , или, наоборот,

лишь значения, большие  $x_0$ , и при этом функция  $f(x)$  стремится к некоторому числу  $A$ , то говорят об *односторонних пределах* функции  $f(x)$  соответственно *слева*  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$  и *справа*  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ . Очевидно, что определение этих пределов будет аналогично рассмотренному выше при  $x \rightarrow x_0$ , если вместо значений  $x$ , удовлетворяющих условию (6.4), при которых верно неравенство (6.5), рассматривать значения  $x$ , такие, что  $x_0 - \delta < x < x_0$  при  $x \rightarrow x_0 - 0$  (слева), или значения  $x$ , такие, что  $x_0 < x < x_0 + \delta$  при  $x \rightarrow x_0 + 0$  (справа).

Разумеется, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

### 6.3. Бесконечно малые величины

**Определение.** Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой величиной** при  $x \rightarrow x_0$  или при  $x \rightarrow \infty$ , если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \alpha(x) = 0.$$

Зная определение предела функции при  $x \rightarrow x_0$  и  $x \rightarrow \infty$ , можно дать развернутое определение бесконечно малой величины.

**Определение.** Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой величиной** при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое положительное число  $\delta > 0$  (зависящее от  $\varepsilon$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon)$ ), что для всех  $x$ , не равных  $x_0$  и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta, \quad (6.6)$$

будет верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon. \quad (6.7)$$

С помощью логических символов приведем это определение к виду

$$\left( \begin{array}{l} \alpha(x) - \text{бесконечно} \\ \text{малая величина при } x \rightarrow x_0, \\ \text{или } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)$$

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Аналогично можно сформулировать определение бесконечно малой величины при  $x \rightarrow \infty$ , если основное неравенство (6.7) рассматривать для достаточно больших  $x$ . Приводим его в краткой форме:

$$\left( \begin{array}{l} \alpha(x) - \text{бесконечно} \\ \text{малая величина при } x \rightarrow \infty, \\ \text{или } \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists S = S(\varepsilon) > 0)(\forall x : |x| > S)$$

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Например, функции  $y = \cos x$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и  $y = \frac{3}{2x-7}$  при  $x \rightarrow \infty$  есть бесконечно малые величины, ибо их пределы равны нулю.

Не следует путать бесконечно малую *переменную* величину  $\alpha(x)$  с очень малым, но постоянным числом  $\varepsilon > 0$ , ибо по мере приближения значений  $x$  к  $x_0$  (при  $x \rightarrow x_0$ ) или по мере увеличения по модулю значений  $x$  (при  $x \rightarrow \infty$ ) функция  $\alpha(x)$  в соответствии с (6.7) окажется меньше этого числа  $\varepsilon$  (по абсолютной величине).

**Связь бесконечно малых величин с пределами функций. Теорема.** Если функция  $f(x)$  имеет при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) предел, равный  $A$ , то ее можно представить в виде суммы этого числа  $A$  и бесконечно малой величины  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ )

$$f(x) = A + \alpha(x). \quad (6.8)$$

□ Докажем теорему для случая  $x \rightarrow x_0$ <sup>1</sup>. По условию  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$  и удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$  будет верно неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , или, обозначив  $\alpha(x) = f(x) - A$ , справедливо неравенство  $|\alpha(x)| < \varepsilon$ . Это и означает, что  $\alpha(x)$  есть бесконечно малая величина при  $x \rightarrow x_0$ . ■

Верна и обратная теорема.

**Теорема.** Если функцию  $f(x)$  можно представить как сумму числа  $A$  и бесконечно малой величины  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), то число  $A$  есть предел этой функции при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = A$ .

□ По условию  $f(x) = A + \alpha(x)$ . Пусть, например,  $x \rightarrow x_0$ . Так как функция  $\alpha(x) = f(x) - A$  есть бесконечно малая величина при  $x \rightarrow x_0$ , то для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$  и удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$  верно неравенство  $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$ . Это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . ■

### Свойства бесконечно малых величин.

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.

3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

□ В качестве примера докажем свойство 1 для двух бесконечно малых величин  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Покажем, что функция  $(\alpha(x) + \beta(x))$  также является бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ .

По условию  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  есть бесконечно малые величины при  $x \rightarrow x_0$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$  най-

<sup>1</sup> Здесь и далее доказательство основных свойств бесконечно малых и бесконечно больших величин, пределов функций проводим для случая  $x \rightarrow x_0$ , рассматривая поведение функции в некоторой окрестности точки  $x_0$ , т.е. для  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , где  $\delta > 0$ . Доказательство тех же утверждений для случая  $x \rightarrow \infty$  полностью идентично, если рассматривать поведение функции при достаточно больших (по модулю) значениях  $x$ , т.е. при  $|x| > S$  (где  $S > 0$ ) или при  $x \in (-\infty; -S) \cup (S; +\infty)$ .

дуются такие числа  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$  и удовлетворяющих условиям

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad (6.9)$$

и

$$|x - x_0| < \delta_2 \quad (6.10)$$

выполняются соответственно неравенства

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.11)$$

и

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.12)$$

Если взять в качестве числа  $\delta$  минимальное из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , т.е.  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , то неравенству  $|x - x_0| < \delta$  будут удовлетворять решения обоих неравенств (6.9) и (6.10), а следовательно, одновременно будут верны неравенства (6.11) и (6.12). Складывая почленно неравенства (6.11) и (6.12), получаем, что

$$|\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Используя свойство абсолютных величин (см. параграф 5.2), т.е.  $|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)|$ , придем к более сильному неравенству

$$|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon. \quad (6.13)$$

Итак, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$  и удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$  верно неравенство (6.13). А это и означает, что функция  $\alpha(x) + \beta(x)$  есть величина бесконечно малая. ■

Пусть, например,  $\alpha(x) = 5x - 10$ ,  $\beta(x) = \lg(x - 1)$  есть бесконечно малые величины при  $x \rightarrow 2$  (ибо  $\lim_{x \rightarrow 2} \alpha(x) = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow 2} \beta(x) = 0$ ), функция  $f(x) = \sin x$  есть функция, ограниченная при  $x \rightarrow 2$  (точнее функция  $f(x) = \sin x$  ограничена в любом промежутке, а не только в окрестности точки  $x = 2$ , ибо всегда  $|\sin x| \leq 1$ ). А функция  $\varphi(x) = x^2 - 5$  при  $x \rightarrow 2$  имеет предел  $(-1)$ , не равный нулю. Тогда функции

$\alpha(x) \pm \beta(x) = 5x - 10 \pm \lg(x - 1)$  (по свойству 1),  $\alpha(x)f(x) = (5x - 10)\sin x$ ,  $6\alpha(x) = 30x - 60$ ,  $\alpha(x)\beta(x) = (5x - 10)\lg(x - 1)$  (по свойству 2),  $\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \frac{5x - 10}{x^2 - 5}$  (по свойству 3) есть величины бесконечно малые при  $x \rightarrow 2$ .

**Замечание.** Свойство 3 не рассматривает предел отношения двух бесконечно малых величин  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  из-за его неопределенности. Этот предел  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  может быть равен нулю, числу  $A \neq 0$ , символу  $\infty$ . В этом случае бесконечно малая величина  $\alpha(x)$  называется соответственно бесконечно малой *более высокого порядка малости*, чем  $\beta(x)$ , *одного порядка малости*, *более низкого порядка малости*, чем  $\beta(x)$ . Тот факт, что  $\alpha(x)$  есть бесконечно малая более высокого порядка, записывается следующим образом:  $\alpha(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) (читается « $\alpha(x)$  есть о малое от  $\beta(x)$ » при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ )).

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то бесконечно малые величины  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) называются *эквивалентными*; в этом случае пишут  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ . Можно показать, что *если предел отношения двух бесконечно малых величин конечный или бесконечный<sup>1</sup>, то он не изменится, если эти бесконечно малые заменить их эквивалентными*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}, \quad (6.13')$$

если  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ,  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

#### 6.4. Бесконечно большие величины

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой величиной* при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого, даже сколь угодно большого положительного числа  $M > 0$ , найдется такое положительное число  $\delta > 0$  (зависящее от  $M$ ,  $\delta = \delta(M)$ ), что для всех  $x$ , не равных  $x_0$  и удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$ , будет верно неравенство

$$|f(x)| > M. \quad (6.14)$$

<sup>1</sup> См. параграф 6.4.



Запись того, что функция  $f(x)$  бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ , следующая:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  или  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Это же определение можно представить в виде

$$\left( \begin{array}{l} f(x) - \text{бесконечно} \\ \text{большая величина при } x \rightarrow x_0, \\ \text{или } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta = \delta(M) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)$$

$$|f(x)| > M.$$

Если в приведенном определении  $f(x) > M$  (или  $f(x) < -M$ ), то пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  (или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ).

Аналогично можно было определить понятие бесконечно большой величины при  $x \rightarrow \infty$ . Приведем его в краткой форме:

$$\left( \begin{array}{l} f(x) - \text{бесконечно} \\ \text{большая величина при } x \rightarrow \infty, \\ \text{или } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists S = S(M) > 0)(\forall x : |x| > S)$$

$$|f(x)| > M.$$

Так, например, функции  $y = \operatorname{tg} x$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $y = \sqrt{5x-7}$  при  $x \rightarrow \infty$  являются бесконечно большими.

Не следует путать бесконечно большую *переменную* величину  $f(x)$  с очень большим, но постоянным числом  $M > 0$ , ибо по мере приближения значений  $x$  к  $x_0$  (при  $x \rightarrow x_0$ ) или по мере увеличения по модулю  $x$  (при  $x \rightarrow \infty$ ) в соответствии с неравенством (6.14) функция  $f(x)$  превзойдет это число  $M$  (по абсолютной величине).

**Замечание.** В параграфе 5.3 было дано определение ограниченной функции на некотором промежутке  $X$ . Следует иметь в виду, что бесконечно большая величина есть функция неограниченная при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ). В то же время *неограниченная функция не обязательно бесконечно большая*. Например, функция  $y = x \sin x$  является неограниченной (ее значения могут быть как угодно большими), но не бесконечно большой при  $x \rightarrow \infty$ , так как с ростом  $x$  функция все время колеблется, переходя от положительных к отрицательным значениям (и наоборот) и обращаясь в нуль при сколь угодно больших значениях  $x$ .

**Свойства бесконечно больших величин.**

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

3. Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, есть величина бесконечно большая.

Например, если функция  $f(x) = \operatorname{tg} x$  есть бесконечно большая величина при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  (ибо  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$ ), функция

$\varphi(x) = 4x - 3$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  имеет предел  $(2\pi - 3)$ , отличный от

нуля, а функция  $\psi(x) = \sin x$  — ограниченная функция, то функции  $f(x)\varphi(x) = (4x - 3)\operatorname{tg} x$  (по свойству 1),  $f(x) + \psi(x) =$

$= \operatorname{tg} x + \sin x$  (по свойству 2),  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\operatorname{tg} x}{4x - 3}$  (по свойству 3) являются бесконечно большими величинами при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

**Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. Теорема.** Если функция  $\alpha(x)$  есть бесконечно малая величина при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), то функция

$f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

И наоборот, если функция  $f(x)$  бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), то функция  $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$  есть величина бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

□ Докажем первое утверждение для случая  $x \rightarrow x_0$ , т.е. если  $\alpha(x)$  — бесконечно малая величина, то  $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  есть бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ .

По условию  $\alpha(x)$  — бесконечно малая величина при  $x \rightarrow x_0$ , следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$  и удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$  будет верно неравенство  $|\alpha(x)| < \varepsilon$ . Последнее неравенство (в предположении, что в некоторой окрестности точки  $x_0$  при

$x \neq x_0$   $\alpha(x) \neq 0$ ) равносильно следующему  $\left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$  или  $|f(x)| > M$ , где  $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  и  $M = \frac{1}{\varepsilon}$ . Это и означает, что при  $x \rightarrow x_0$  функция  $f(x)$  является бесконечно большой.

Доказательство второго утверждения аналогично. ■

Например, если функции  $y = \cos x$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и  $y = \frac{3}{2x-7}$  при  $x \rightarrow \infty$  есть величины бесконечно малые, то функции  $y = \frac{1}{\cos x}$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и  $y = \frac{2x-7}{3}$  при  $x \rightarrow \infty$  есть величины бесконечно большие. И наоборот, если функции  $y = \operatorname{tg} x$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $y = \sqrt{5x-7}$  при  $x \rightarrow \infty$  есть величины бесконечно большие, то функции  $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и  $y = \frac{1}{\sqrt{5x-7}}$  при  $x \rightarrow \infty$  есть величины бесконечно малые.

## 6.5. Основные теоремы о пределах.

### Признаки существования предела

Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — функции, для которых существуют пределы при  $x \rightarrow x_0$  (или при  $x \rightarrow \infty$ ):  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = A$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x) = B.$$

Сформулируем основные **теоремы** о пределах.

**1. Функция не может иметь более одного предела.**

□ Предположим противное, т.е. что функция  $f(x)$  имеет два предела:  $A$  и  $D$  ( $A \neq D$ ). Тогда на основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций в соответствии с формулой (6.8)  $f(x) = A + \alpha(x)$ ,  $f(x) = D + \beta(x)$ ,

где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые величины при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Вычитая почленно эти равенства, получаем  $0 = A - D + (\alpha(x) - \beta(x))$ , откуда  $\alpha(x) - \beta(x) = D - A$ . Это равенство невозможно, так как на основании свойства 1 бесконечно малых величин  $\alpha(x) - \beta(x)$  есть величина бесконечно малая. Следовательно, предположение о существовании второго предела неверно. ■

**2.** Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x) + \varphi(x)] = A + B.$$

**3.** Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x)\varphi(x)] = AB.$$

В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (c f(x)) = cA.$$

**4.** Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что предел делителя не равен нулю)

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

**5.** Если  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ , то предел сложной функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A.$$

**6.** Если в некоторой окрестности точки  $x_0$  (или при достаточно больших  $x$ )  $f(x) < \varphi(x)$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x).$$

□ Докажем в качестве примера теорему 2. По условию

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x) = B, \text{ следовательно, на осно-}$$

вании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций в соответствии с формулой (6.8)  $f(x) = A + \alpha(x)$ ,  $\varphi(x) = B + \beta(x)$ , где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые величины при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Перемножая почленно оба равенства, получаем

$$f(x)\varphi(x) = AB + \underbrace{B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)}_{\gamma(x)}.$$

На основании свойств бесконечно малых последние три слагаемых представляют бесконечно малую величину  $\gamma(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Итак, функция  $f(x)\varphi(x)$  представляет сумму постоянного числа  $AB$  и бесконечно малой  $\gamma(x)$ . На основании обратной теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций это означает, что  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)\varphi(x) = AB$ . ■

**Замечание.** В теоремах о пределах предполагается существование пределов функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , из чего следуют заключения о значениях пределов суммы, произведения или частного функций. Но необходимо учитывать, что из существования предела суммы, произведения или частного функций еще не следует, что существуют пределы самих слагаемых, сомножителей или делимого и делителя.

Например,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 = 1$ , но отсюда еще не следует существование пределов  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$  и  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$ . И действительно, в данном случае первого из этих пределов не существует.

**Признаки существования предела.** Для выяснения вопроса о существовании предела использовать определения предела, сформулированные выше, не всегда удобно. Проще это сделать с помощью признаков существования предела.

**Теорема 1.** Если числовая последовательность  $\{a_n\}$  монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Возможны два случая: а) последовательность неубывающая и ограниченная сверху  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq M$  (рис. 6.5, а); б) последовательность невозрастающая и ограниченная снизу  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq M$  (рис. 6.5, б).

Рис. 6.5 иллюстрирует наличие предела  $A$  числовой последовательности.

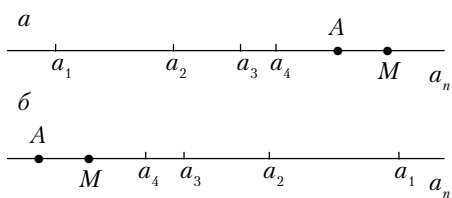


Рис. 6.5

**Теорема 2.** Если в некоторой окрестности точки  $x_0$  (или при достаточно больших значениях  $x$ ) функция  $f(x)$  заключена между двумя функциями  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , имеющими одинаковый предел  $A$  при

$x \rightarrow x_0$  (или  $x \rightarrow \infty$ ), то функция  $f(x)$  имеет тот же предел  $A$ .

□ Пусть при  $x \rightarrow x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$  и удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$  будут верны одновременно неравенства

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon, \quad |\psi(x) - A| < \varepsilon$$

или

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon, \quad A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon. \quad (6.15)$$

Так как по условию функция  $f(x)$  заключена между двумя функциями

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

то из неравенств (6.15) следует, что  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ , т.е.

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

А это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . ■

## 6.6. Замечательные пределы.

### Задача о непрерывном начислении процентов

#### Первый замечательный предел

**Первым замечательным пределом** называется предел функции  $\frac{\sin x}{x}$  в точке  $x = 0$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (6.16)$$

□ Для доказательства формулы (6.16) рассмотрим круг радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ . Пусть  $OB$  — подвижный радиус, образующий угол  $x$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ) с осью  $Ox$  (рис. 6.6). Из геометрических соображений следует, что площадь треугольника  $AOB$  меньше площади сектора  $AOB$ , которая в свою очередь меньше площади прямоугольного треугольника  $AOC$ :

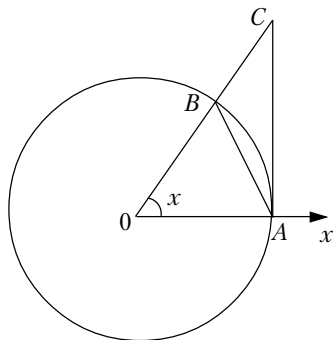


Рис. 6.6

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект.} AOB} < S_{\triangle AOC}.$$

Так как  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} R^2 \sin x$ ,  $S_{\text{сект.} AOB} = \frac{1}{2} R^2 x$ ,  $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot AC = \frac{1}{2} AO \cdot (AO \cdot \operatorname{tg} x) = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$ , то имеем  $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$ , откуда, разделив части двойного неравенства на  $\frac{1}{2} R^2 \sin x > 0$ , получим  $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$  или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как функции  $\cos x$  и  $\frac{\sin x}{x}$  четные, то полученные неравенства справедливы и при  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . Переходя к пределу при  $x \rightarrow 0$ , получаем  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  (обоснование этого факта см. в примере 6.7). На основании признака существования предела промежуточной функции  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . ■

**Пример 6.4.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

*Решение.*

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

### Второй замечательный предел

Рассмотрим числовую последовательность  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Если вычислить значения членов последовательности, то получим  $a_1 = 2,0$ ,  $a_2 = 2,25$ ,  $a_3 = 2,37$ ,  $a_4 = 2,441$ ,  $a_5 = 2,488$ , ... и можно предположить, что последовательность  $\{a_n\}$  является *возрастающей*. Действительно, воспользуемся формулой<sup>1</sup> бинорма Ньютона<sup>2</sup> (см. параграф 14.2)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

или

$$a_n = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (6.17)$$

С ростом  $n$  увеличиваются как число положительных слагаемых (их в формуле  $n+1$ ), так и величина каждого слагаемого, т.е.  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$

Последовательность  $\{a_n\}$  является *ограниченной*. Это вытекает из формулы (6.17), если дать оценку  $a_n$ :

$$a_n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots < 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

(полученную после освобождения от скобок, выражения в каждой из которых меньше единицы, и замены каждой из дробей большей дробью с двойками в знаменателе:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} < \frac{1}{2^{n-1}}).$$

<sup>1</sup> Стоящее в знаменателе общего члена произведение  $n$  первых чисел натурального ряда называется *факториалом* (обозначается  $n!$ , читается «эн факториал»):  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n$ .

<sup>2</sup> Ньютон Исаак (1643–1727) — английский физик и математик.



Сумма  $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$  представляет сумму  $S_{n-1}$  членов геометрической прогрессии с первым членом  $a = \frac{1}{2}$  и знаменателем  $q = \frac{1}{2}$ .

Имеем

$$S_{n-1} = \frac{a(q^{n-1} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Так как  $S_{n-1} < 1$ , то  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + 1 = 3$ .

Согласно признаку существования предела монотонная и ограниченная последовательность  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  имеет предел.

**Определение.** Число  $e$  (вторым замечательным пределом) называется предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (6.18)$$

Выше фактически было установлено, что  $2 < e < 3$ . Более точно  $e \approx 2,718281\dots$ , т.е. число  $e$  — иррациональное число.

Можно показать, что функция  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$  (где  $x$  в отличие от натурального числа  $n$  «пробегают» все значения числовой оси — не только целые) имеет предел, равный числу  $e$ :

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (6.19)$$

Полагая  $y = \frac{1}{x}$ , находим  $x = \frac{1}{y}$ , поэтому при  $x \rightarrow \infty$   $y \rightarrow 0$ .

В результате получается еще одна запись числа  $e$ :

$$e = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}. \quad (6.20)$$

Число  $e$  (*число Эйлера*<sup>1</sup>, *неперово число*) играет весьма важную роль в математическом анализе. График функции  $y = e^x$  (см. рис. 7.8) получил название *экспоненты*. Широко используются логарифмы по основанию  $e$ , называемые *натуральными*. Натуральные логарифмы обозначаются символом  $\ln$ :  $\log_e x = \ln x$ .

**Пример 6.5.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x}$ ; б)  $\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}}$ .

*Решение:*

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right]^{\frac{5}{x} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right]^{15} = e^{15}.$$

$$\text{б) } \lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ (1 - 3y)^{-\frac{1}{3y}} \right]^{-3y \cdot \frac{2}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ (1 - 3y)^{-\frac{1}{3y}} \right]^{-6} = e^{-6}. \blacktriangleright$$

К числу  $e$  приводят решения многих прикладных задач статистики, физики, биологии, химии и др., анализ таких процессов, как рост народонаселения, распад радия, размножение бактерий и т.п.

Рассмотрим **задачу о непрерывном начислении процентов**. Первоначальный вклад в банк составил  $Q_0$  денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно  $p\%$  годовых. Необходимо найти размер вклада  $Q_t$  через  $t$  лет.

При использовании *простых процентов* размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину  $\frac{p}{100} Q_0$ ,

$$\text{т.е.} \quad Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right), \quad Q_2 = \left(1 + \frac{2p}{100}\right), \dots, Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{pt}{100}\right).$$

<sup>1</sup> Эйлер Леонард (1707–1783) — математик, механик и физик.

На практике значительно чаще применяются *сложные проценты*. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число  $(1 + \frac{p}{100})$  раз, т.е.

$$Q_1 = Q_0(1 + \frac{p}{100}), Q_2 = Q_0(1 + \frac{p}{100})^2, \dots, Q_t = Q_0(1 + \frac{p}{100})^t.$$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а  $n$  раз, то при том же ежегодном приросте  $p\%$  процент начисления за  $\frac{1}{n}$ -ю часть года составит  $\frac{p}{n}\%$ , а размер вклада за  $t$  лет при  $nt$  начислениях составит

$$Q_t = Q_0(1 + \frac{p}{100n})^{nt}. \quad (6.21)$$

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие ( $n = 2$ ), ежеквартально ( $n = 4$ ), ежемесячно ( $n = 12$ ), каждый день ( $n = 365$ ), каждый час ( $n = 8760$ ) и т.д., непрерывно ( $n \rightarrow \infty$ ). Тогда размер вклада за  $t$  лет составит

$$Q_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ Q_0 \left( 1 + \frac{p}{100n} \right)^{nt} \right] = Q_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{p}{100n} \right)^{\frac{100n}{p}} \right]^{\frac{pt}{100}}$$

или с учетом (6.19) при  $x = \frac{100n}{p} \rightarrow \infty$

$$Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}. \quad (6.22)$$

Формула (6.22) выражает *показательный (экспоненциальный)* закон роста вклада (при  $p > 0$ ) или убывания (при  $p < 0$ ). Она может быть использована при непрерывном начислении процентов.

Чтобы почувствовать результаты расчетов в зависимости от способа начисления процентов, в таблице в качестве примера приводятся размеры вкладов  $Q_t$ , ден. ед., вычисленные при  $Q_0 = 1$  ден. ед.,  $p = 5\%$ ,  $t = 20$  лет.

Первоначальный вклад	Формула простых процентов	Формула сложных процентов					Формула непрерывного начисления процентов
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 12$	$n = 365$	
1,000	2,0000	2,6355	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Из приведенных в таблице данных следует, что погрешность вычисления суммы вклада по формуле (6.22) непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой (6.21) сложных процентов, начисляемых ежегодно ( $n = 1$ ), при одной и той же процентной ставке ( $p = 5\%$ ) оказалась незначительной (около 2,5%).

**Замечание.** Хотя в практических финансово-кредитных операциях непрерывное начисление процентов применяется крайне редко, оно оказывается весьма эффективным при анализе сложных финансовых вопросов, в частности, при обосновании и выборе инвестиционных решений.

## 6.7. Непрерывность функции

Понятие непрерывности функции, так же как и понятие предела, является одним из основных в математическом анализе.

**Определение 1.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке*  $x_0$ , если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в точке  $x_0$  (т.е. существует  $f(x_0)$ ); 2) имеет конечный предел функции при  $x \rightarrow x_0$ ; 3) этот предел равен значению функции в точке  $x_0$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (6.23)$$

**Пример 6.6.** Исследовать непрерывность в точке  $x = 0$  заданных функций (рис. 6.7):

$$\text{а) } y = \frac{1}{x}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \geq 0, \\ x-1 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad \text{в) } y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } y = x^2.$$

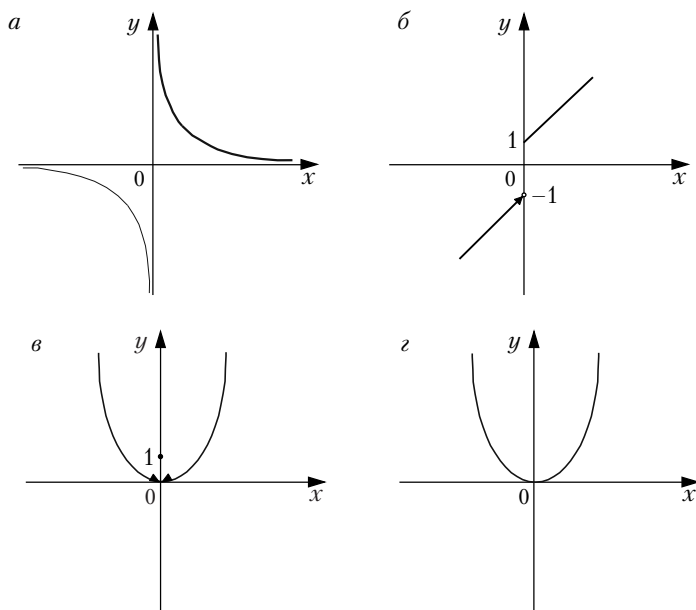


Рис. 6.7

*Решение.*

а) В точке  $x = 0$  функция  $y = f(x)$  (см. рис. 6.7, *а*) не является непрерывной, так как нарушено первое условие непрерывности — существование  $f(0)$ .

б) В точке  $x = 0$  функция  $y = f(x)$  (см. рис. 6.7, *б*) не является непрерывной: первое условие непрерывности выполнено,  $f(0)$  существует ( $f(0) = 1$ ), но нарушено второе условие: отсутствует  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  (точнее говоря, здесь существуют односторонние пределы функции слева  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$  и справа  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ , но общего предела при  $x \rightarrow 0$  не существует).

в) В точке  $x = 0$  функция  $y = f(x)$  (см. рис. 6.7, *в*) не является непрерывной: первые два условия непрерывности выполнены и существуют  $f(0)$  ( $f(0) = 1$ ) и конечный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , но нарушено третье основное условие:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ .

г) В точке  $x = 0$  функция  $y = f(x)$  (см. рис. 6.7, з) непрерывна, так как выполнены все три условия непрерывности:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0. \blacktriangleright$$

Определение непрерывности функции (6.23) в точке  $x_0$  может быть записано и так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x), \quad (6.24)$$

т.е. для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции.

Очевидно, что непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью ее графика при прохождении этой точки (без отрыва карандаша от листа бумаги).

**Замечание.** В математическом анализе рассматривается также понятие *односторонней непрерывности функции*  $f(x)$  в точке  $x_0$  слева (или справа), под которой понимается равенство значению функции  $f(x_0)$  одностороннего предела слева (или справа):  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$  (или  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ ).

Разумеется, функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа, т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ .

Сформулируем еще одно определение непрерывности. Дадим аргументу  $x_0$  приращение  $\Delta x$ . Тогда функция  $y = f(x)$  получит приращение  $\Delta y$ , определяемое как разность наращенного и исходного значения функции:  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  (рис. 6.8).

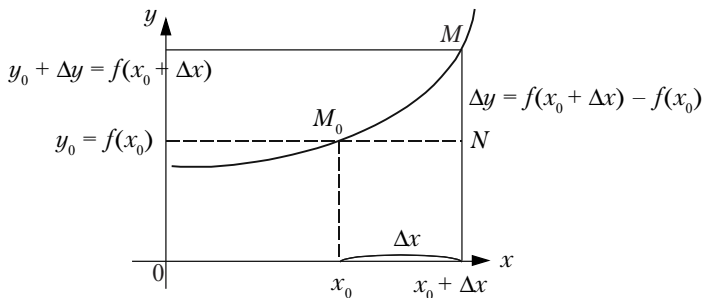


Рис. 6.8

**Определение 2.** Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если она определена в этой точке, и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (6.25)$$

□ Убедимся в равносильности двух приведенных определений непрерывности. Из определения 1 согласно (6.23) при  $x = x_0 + \Delta x$  следует, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ , так как стремление  $x \rightarrow x_0$  равносильно условию  $\Delta x \rightarrow 0$ .

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x)$ , где  $\alpha(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$  — бесконечно малая величина при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т.е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ . ■

Точка  $x_0$  называется *точкой разрыва* функции  $f(x)$ , если эта функция в данной точке не является непрерывной. Различают точки разрыва *первого рода* (когда существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при  $x \rightarrow x_0$ , не равные друг другу) и *второго рода* (когда хотя бы один из односторонних пределов слева или справа равен бесконечности либо не существует). Так, точка  $x_0 = 0$  на рис. 6.7, б — точка разрыва первого рода, а на рис. 6.7, а — точка разрыва второго рода. К точкам разрыва первого рода относятся также точки *устранимого разрыва*, когда предел функции при  $x \rightarrow x_0$  существует, но не равен значению функции в этой точке. Так, точка  $x_0 = 0$  на рис. 6.7, в является точкой *устранимого разрыва*.

### Свойства функций, непрерывных в точке.

**1.** Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , то их сумма  $f(x) + \varphi(x)$ , произведение  $f(x) \cdot \varphi(x)$  и частное  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  (при условии  $\varphi(x_0) \neq 0$ ) являются функциями, непрерывными в точке  $x_0$ .

Доказательство теоремы следует из определения непрерывности и аналогичных свойств пределов функций.

**2.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) > 0$ , то существует такая окрестность точки  $x_0$ , в которой  $f(x) > 0$ .

Доказательство этого свойства основывается на том, что при малых приращениях аргумента  $\Delta x \rightarrow 0$  в соответствии определением 2 непрерывности функции (6.25) можно получить как угодно малое приращение функции  $\Delta y$ , так что знак функции  $y = f(x)$  в окрестности  $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$  не изменится.

**3.** Если функция  $y = f(u)$  непрерывна в точке  $u_0$ , а функция  $u = \varphi(x)$  непрерывна в точке  $u_0 = \varphi(x_0)$ , то сложная функция  $y = f[\varphi(x)]$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Доказательство этого свойства состоит в том, что малому приращению аргумента  $\Delta x \rightarrow 0$  в силу второго определения непрерывности (6.25) функции  $u = \varphi(x)$  соответствует как угодно малое приращение  $\Delta u \rightarrow 0$ , приводящее в свою очередь в силу того же определения непрерывности  $y = f(u)$  к как угодно малому приращению  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Свойство 3 может быть записано в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right], \quad (6.26)$$

т.е. под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной на промежутке*  $X$ , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Можно доказать, что *все элементарные функции непрерывны в области их определения*.

**Пример 6.7.** Доказать непрерывность функции  $y = \cos x$ .

*Решение.* Найдем  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\cos(x + \Delta x) - \cos x) =$   
 $= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$ , так как  $\left| \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \right| \leq 1$ , а  
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \Delta x \right) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0$ , т.е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , и по определению 2 непрерывности (6.25) функция  $y = \cos x$  является непрерывной на всей числовой оси. ►

**Замечание.** Еще раз подчеркнем, что непрерывность функции в любой точке области определения гарантируется лишь для элементарных функций. Рассмотрим в качестве примера



функцию  $f(x) = [x]$  (читается « $y$  равно антье  $x$ »), где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$  (например,  $[2,6] = 2$ ,  $[-2,6] = -3$ ). В точке  $x = \frac{3}{2}$  функция  $f(x) = [x]$  непрерывна, ибо  $\lim_{x \rightarrow 3/2} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ , а в точке  $x = 1$  эта функция определена —  $f(1) = 1$ , но терпит разрыв, ибо  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  не существует (точнее, существуют неравные между собой конечные пределы функции слева  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$  и справа  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$ ) (рис. 6.9)<sup>1</sup>.

Это связано с тем, что  $f(x) = [x]$  не является элементарной функцией, и, хотя она определена на всей числовой прямой, разрывна во всех целых точках.

**Свойства функций, непрерывных на отрезке.**

1. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке (первая теорема Вейерштрасса<sup>2</sup>) (рис. 6.10).

2. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает на этом отрезке наименьшего значения  $m$  и наибольшего значения  $M$  (вторая теорема Вейерштрасса) (рис. 6.11).

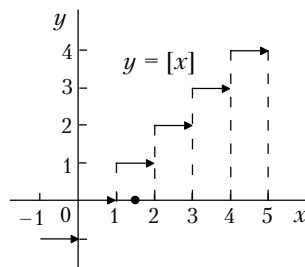


Рис. 6.9

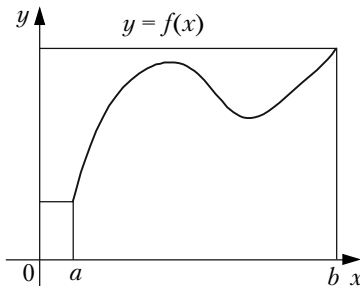


Рис. 6.10

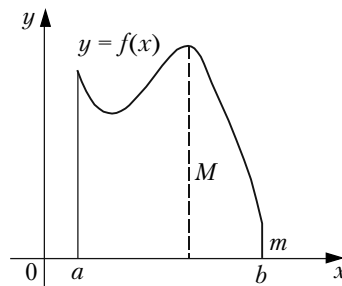


Рис. 6.11

<sup>1</sup> Если говорить точнее, то в точке  $x = 1$  и в других точках разрыва  $x = 0; -1; \pm 2; \pm 3, \dots$  функция  $f(x) = [x]$  односторонне непрерывна (справа).

<sup>2</sup> Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815—1897) — немецкий математик.

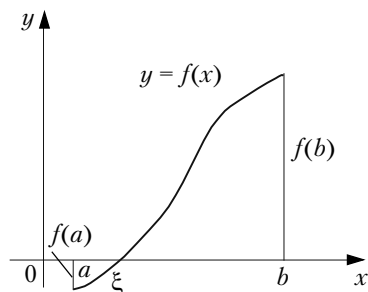


Рис. 6.12

3. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и значения ее на концах отрезка  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется такая точка  $\xi \in (a, b)$ , что  $f(\xi) = 0$  (теорема Больцано<sup>1</sup> — Коши) (рис. 6.12).

## ПРАКТИКУМ

### 6.8. Вычисление пределов

- 6.8. Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x+5}{x-5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+5}{x-5}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cos \frac{1}{x} \right)$ .

*Решение.*

а) На основании непрерывности функции в точке  $x = 7$  искомый предел равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x+5}{x-5} = \frac{3 \cdot 7 + 5}{7 - 5} = 13.$$

б) При  $x \rightarrow 5$  числитель  $(3x + 5)$  стремится к  $3 \cdot 5 + 5 = 20$  (т.е. является ограниченной функцией), а знаменатель  $(x - 5)$  — к нулю (т.е. является бесконечно малой величиной); очевидно, что их отношение есть величина бесконечно

большая:  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+5}{x-5} = \infty$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , ибо отношение ограниченной функции  $\sin x$  ( $|\sin x| \leq 1$ ) к бесконечно большой величине  $x$  (при  $x \rightarrow \infty$ ) есть величина бесконечно малая.

<sup>1</sup> Больцано Бернارد (1781—1848) — чешский математик, философ, геолог.

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cos \frac{1}{x} \right) = 0$ , так как произведение бесконечно малой величины  $x$  (при  $x \rightarrow 0$ ) на ограниченную функцию  $\cos \frac{1}{x}$  ( $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$ ) есть величина бесконечно малая.

Отметим, что этот предел нельзя вычислять с помощью теоремы о пределе произведения, поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$  не существует (при  $x \rightarrow 0$  аргумент косинуса  $\frac{1}{x}$  изменяется непрерывно вдоль числовой оси до бесконечности, при этом значения  $\cos \frac{1}{x}$  колеблются от  $-1$  до  $1$  и от  $1$  до  $-1$ , не стремясь ни к какому числу (пределу)). ►

В рассмотренных примерах предел находился сразу в виде числа или символа  $\infty$ . Но чаще при вычислении пределов приходится сталкиваться с неопределенностями, когда результат нахождения предела неясен, например, в случае отношения двух бесконечно малых функций (условное обозначение  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ ) или бесконечно больших  $\left( \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \right)$ . Кроме

отмеченных неопределенностей вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  и  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , в математическом анализе рассматриваются также неопределенности вида  $[\infty - \infty]$ ,  $[0 \cdot \infty]$ ,  $[1^\infty]$ ,  $[\infty^0]$ ,  $[0^0]$ .

**6.9.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 4}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ .

*Решение.*

а) Для раскрытия неопределенности вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  разложим числитель на множители и сократим дробь на множитель  $(x-1)$ . Сокращение возможно, так как при  $x \rightarrow 1$  множитель  $(x-1)$  стремится к нулю, но не равен ему. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x + \frac{1}{2})(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x-1} = \infty.$$

б) Для раскрытия неопределенности вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$  умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, получим

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \frac{1}{8}.$$

в) Для раскрытия неопределенности вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$  удобно предварительно сделать замену  $t = \sqrt[3]{x}$  (тогда  $\sqrt{x} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ , при  $x \rightarrow 1$ ,  $t \rightarrow 1$ ), а затем полученные многочлены разложить на множители:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{(t-1)(t+1)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + t + 1}{(t+1)} = \frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

**6.10.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^5 + x + 1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + k_1 x + l_1}{a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + \dots + k_2 x + l_2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^9 + 1}}{x^2 + \sqrt{x}}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , где  $f(x) = \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + \sin x}{x - \cos x}$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{2x + 1}$ .

*Решение.*

а) Имеем неопределенность вида  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ . Учитывая, что по-

ведение числителя и знаменателя при  $x \rightarrow \infty$  определяется членами с наибольшими показателями степеней (соответственно  $3x^2$  и  $4x^5$ ), разделим числитель и знаменатель на

$x^5$ , т.е. на  $x$  с наибольшим показателем степени числителя и знаменателя. Используя теоремы о пределах, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^5 + 3x + 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^5}}{4 + \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \frac{0 + 0}{4 + 0 + 0} = 0.$$

б) Используя тот же прием, что и в п. «а», можно показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + k_1 x + l_1}{a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + \dots + k_2 x + l_2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m, \\ a_1 / a_2, & \text{если } n = m, \\ \infty, & \text{если } n > m, \end{cases}$$

т.е. *предел отношения двух многочленов  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  равен нулю, отношению коэффициентов при старших степенях  $x$  или бесконечности, если показатель степени числителя  $n$  соответственно меньше, равен или больше показателя степени знаменателя  $m$ .*

Рекомендуем запомнить это правило.

в) Имеем неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ . Здесь выражению в числителе условно можно приписать степень  $n = \frac{9}{4}$  (ибо при больших значениях  $x$   $\sqrt[4]{x^9 + 1} \approx \sqrt[4]{x^9} = x^{9/4}$ ), а в знаменателе — степень  $m = 2$  (ибо при больших  $x$   $x^2 + \sqrt{x} \approx x^2$ ); так как  $n > m$ , то на основании правила, сформулированного в п. «б», искомый предел равен  $\infty$ .

Действительно, разделив и числитель и знаменатель на  $\sqrt[4]{x^9}$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^9 + 1}}{x^2 + \sqrt{x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^9}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}} = \infty.$$

г) При  $x \rightarrow +\infty$  имеем неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , при этом поведение числителя и знаменателя определяется вторыми слагаемыми, которые возрастают быстрее первых.

Разделив числитель и знаменатель на  $3^x$  и применив теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1} = \frac{0+3}{0+1} = 3,$$

поскольку  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ .

При  $x \rightarrow -\infty$  имеем неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ , при этом поведение числителя и знаменателя определяется первыми слагаемыми, которые убывают медленнее других. Разделив числитель и знаменатель на  $2^x$  и применив теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x} = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

д) Для раскрытия неопределенности вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$  разделим числитель и знаменатель на  $x$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + \sin x}{x - \cos x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = \frac{4+0}{1-0} = 4,$$

так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$  (см. пример 6.8, в).

е) Пусть искомый предел

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} - x}{2x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x}{2x + 1}, \text{ ибо } \sqrt{x^2} = |x|.$$

1. Если  $x \rightarrow +\infty$ , то полагая  $x > 0$ ,  $|x| = x$  и

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1 - 1}{2 + 0} = 0.$$

2. Если  $x \rightarrow -\infty$ , то полагая  $x < 0$ ,  $|x| = -x$  и

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{-1 - 1}{2 + 0} = -1.$$

Итак,  $A = 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $A = -1$  при  $x \rightarrow -\infty$ . ►

**6.11.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5 - 10x^3 - 1)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x)$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$ .

*Решение.*

а) Имеем неопределенность вида  $[\infty - \infty]$ . Вынося за скобку  $x$  в наибольшей степени, получаем  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \left( 2 - \frac{10}{x^3} - \frac{1}{x^5} \right) = \infty$ , ибо произведение бесконечно большой величины  $x^5$  на функцию, предел которой при  $x \rightarrow \infty$  равен двум, т.е. отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

б) Для раскрытия неопределенности вида  $[\infty - \infty]$  умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное ему выражение, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0. \end{aligned}$$

в) При  $x \rightarrow -\infty$  имеем неопределенность вида  $[\infty - \infty]$ , ибо квадратный корень из неотрицательного числа всегда неотрицателен. Решаем задачу так же, как и в примере 6.11, б:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 2} + x \right] &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} + x)(\sqrt{x^2 + 2} - x)}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = 0. \end{aligned}$$

Обращаем внимание на то, что при  $x \rightarrow -\infty$  в знаменателе нет неопределенности, так как он представляет сумму бесконечно больших положительных величин, т.е. величину, бесконечно большую.

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)-2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \\ &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{1+x} \right) = -\frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Доказать, используя определение предела, что:

$$\text{6.12. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2.$$

$$\text{6.13. } \lim_{x \rightarrow 5} (3x-4) = 11.$$

$$\text{6.14. } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1.$$

Найти пределы:

$$\text{6.15. } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2x-7}{x-8}.$$

$$\text{6.16. } \lim_{x \rightarrow 5} (x-5) \sin \frac{1}{x-5}.$$

$$\text{6.17. } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{5x-2x^2-2}{2x-1}.$$

$$\text{6.18. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}.$$

$$\text{6.19. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}.$$

$$\text{6.20. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}.$$

$$\text{6.21. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}.$$

$$\text{6.22. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-5x+4}{x^2-16}.$$

$$\text{6.23. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}.$$

$$\text{6.24. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^2-9}.$$



$$6.25. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}.$$

$$6.26. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{x^2 - 4}.$$

$$6.27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 7x + 6}.$$

$$6.28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2}.$$

$$6.29. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$6.30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}.$$

$$6.31. \lim_{x \rightarrow 1+0} \left( \frac{x^2 - 1}{3x - 3} \right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$6.32. \lim_{x \rightarrow 2+0} \left( \frac{x^3 - 8}{4x - 8} \right)^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$6.33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{3x}.$$

$$6.34. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}.$$

$$6.35. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x) \cdot 2^{x-2}}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$6.36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

$$6.37. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \dots + x^{10}}{\sqrt{x+4} - 2}.$$

$$6.38. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^8}{x^8 - 1}.$$

$$6.39. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 1}{3x^2 - 2x^4 + x}.$$

$$6.40. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 2x}{x^3 - x^4}.$$

$$6.41. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x^3 - 15}{x^2 - 16}.$$

$$6.42. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{64x^3 + 1} + 2}.$$

$$6.43. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 9} - 2x}{2 - \sqrt[3]{x^3 + 5}}.$$

$$6.44. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^8 + 2x} - 10 - 3x^2}{5x^2 - 1 - \sqrt[3]{27x^6 + x^5} - 15x}.$$

$$6.45. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^5 + (2x+2)^5 + (2x+3)^5 + \dots + (2x+100)^5}{10x^5 + 100}.$$

$$6.46. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}.$$

$$6.47. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}.$$

$$6.48. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 2}{3^{x+1} - 1}.$$

$$6.49. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 3^{x+1}}{4^{x+1} + 3^x}.$$

$$6.50. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{20}}{3x^{20} + 100}.$$

$$6.51. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{4^n}}.$$

$$6.52. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{5n^2}.$$

$$6.53. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{2x+4} \right)^{7x}.$$

$$6.54. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9x^2 + 5}{10x^2 - 1} \right)^{\frac{x}{2}}.$$

$$6.55. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4x-2}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{16x^2-x}}.$$

$$6.56. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^7}{2x^5 - 8x^7}.$$

$$6.57. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + 2x}{\sqrt{x^2 + 2x - x}}.$$

$$6.58. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)!}.$$

$$6.59. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot n!}{(n+1)!}.$$

$$6.60. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)n!}{(n+1)!}.$$

$$6.61. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 5)(n-1)!}{(n+1)!}.$$

$$6.62. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right).$$

$$6.63. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$$

$$6.64. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2-x} - \frac{3}{x^3-1} \right).$$

$$6.65. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3}{2x^2-x} - x \right).$$

$$6.66. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^4}{x^2+3} - 3x^2 \right).$$

$$6.67. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^3}{5x-1} - 7x \right).$$

$$6.68. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4}{x^2-2} - \frac{x^4}{x^2+2} \right).$$

$$6.69. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2}).$$

$$6.70. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right).$$

$$6.71. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 5x} \right).$$

$$6.72. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + 1} - x \right).$$

$$6.73. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right).$$

$$6.74. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^2 - 2x} - \sqrt[3]{x^2 + 3x} \right).$$

$$6.75. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{8x^4 + 3x^2} - \sqrt[3]{8x^4 + 2x^2} \right).$$

$$6.76. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( \sqrt[4]{x^2 + 6x} - \sqrt[4]{x^2 - x} \right) \sqrt{x} \right).$$

$$6.77. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{16x - \sqrt{x}} - \sqrt{16x - 3\sqrt{x}} \right).$$

$$6.78. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 5x} - x \right). \quad 6.79. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 2} - 2x \right).$$

### 6.9. Замечательные пределы. Применение эквивалентных бесконечно малых величин к вычислению пределов

6.80. Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^6}{\sin^5 x}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .

*Решение.*

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

(сделали замену  $y = \frac{1}{x}$  (при  $x \rightarrow \infty$   $y \rightarrow 0$ ) и использовали формулу (6.16)).

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{4x} : \frac{\sin 8x}{8x} \right) = \frac{1}{2} (1 : 1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^6}{\sin^5 x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( x \cdot \frac{\sin x^6}{x^6} \right) : \left( \frac{\sin x}{x} \right)^5 \right] = (0 \cdot 1) : 1^5 = 0.$$

г) При  $x \rightarrow 1$  имеем неопределенность вида  $[0 \cdot \infty]$ . Сделаем замену  $1 - x = y$ , тогда  $x = 1 - y$  и при  $x \rightarrow 1$   $y \rightarrow 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= [0 \cdot \infty] = \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \cos \frac{\pi y}{2} : \frac{\sin \frac{\pi y}{2}}{y} \right) = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \cos \frac{\pi y}{2} : \left[ \frac{\pi}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}} \right] = \\ &= 1 : \left( \frac{\pi}{2} \cdot 1 \right) = \frac{2}{\pi}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Простейшие примеры с использованием числа  $e$  при раскрытии неопределенности вида  $[1^\infty]$  фактически уже встречались в примере 6.5. Прежде чем рассмотреть более сложные задачи, обратим внимание, что неопределенности нет при вы-

числении пределов типа  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x = 0$  (так как выражение в скобках стремится к  $\frac{1}{2}$ , а не к 1) или

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x}{x(x-2)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1$  (так как единица в любой степе-

ни равна единице). Поэтому под неопределенностью вида  $[1^\infty]$  понимается функция, основание степени которой *стремится к единице* (но не равно тождественно единице), а показатель степени стремится к бесконечности.

**6.81.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x-1} \right)^{4x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} [x(\ln(1+x) - \ln x)]$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{\sin x}{x^2}}.$

*Решение.*

а) Имеем неопределенность вида  $[1^\infty]$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{2x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (4x) = \infty.$$

Выделим у дроби целую часть  $\frac{2x-3}{2x-1} = \frac{(2x-1)-2}{2x-1} = 1 - \frac{2}{2x-1}$ .

Обозначим  $y = -\frac{2}{2x-1}$ ; при  $x \rightarrow \infty$   $y \rightarrow 0$ , причем  $x = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2}$ .

Теперь, используя определение числа  $e$  (6.19), теорему о пределе произведения и свойство (6.26) непрерывности сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x-1} \right)^{4x} &= \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{-4}{y}+2} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{-4}{y}} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^2 = \\ &= \left[ \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{-4} \cdot 1 = e^{-4}. \end{aligned}$$

б) Имеем неопределенность вида  $[0 \cdot \infty]$ . Это отчетливо видно, если с помощью свойств логарифма представить предел в виде

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [x(\ln(1+x) - \ln x)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \ln \frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \\ &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x. \end{aligned}$$

На основании непрерывности логарифмической функции (6.26) перейдем к пределу под символом логарифма

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = \ln e = 1.$$

в) Имеем неопределенность вида  $[1^\infty]$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x) = 1$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} \right] = \infty$$

(ибо при  $x \rightarrow 0$   $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ , а  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ ). Преобразуя выражение и используя непрерывность степенно-показательной функции, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{\sin x}{x^2}} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} \right]^{\frac{2 \sin x}{x}} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} \right)^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e^{2 \cdot 1} = e^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Эффективным средством для вычисления пределов является применение эквивалентных бесконечно малых величин. Данный способ основан на том, что предел отношения двух бесконечно малых величин не изменится, если эти бесконечно малые заменить им эквивалентными.

Примеры эквивалентных бесконечно малых при  $x \rightarrow 0$ :  
 $\sin x \sim x$ ;  $\operatorname{tg} x \sim x$ ;  $e^x - 1 \sim x$ ;  $\ln(1+x) \sim x$ ;  $(1+x)^m \sim 1+mx$ ;  
 $\arcsin x \sim x$ ;  $\operatorname{arctg} x \sim x$ ;  $1 - \cos x \sim x^2/2$ .

**6.82.** Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{8x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} - 1}{1 - \cos 2x}$ .

*Решение.*

а) Имеем неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Так как при  $x \rightarrow 0$   $\sin 4x \rightarrow 0$ , то, заменяя  $\sin 4x$  эквивалентной бесконечно малой  $4x$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{8x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x)^2}{8x^2} = 2.$$

б) Заменяя бесконечно малые  $e^{5x^2} - 1$  и  $1 - \cos 2x$  им эквивалентными соответственно  $5x^2$  и  $(2x)^2/2 = 2x^2$ , имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} - 1}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2}. \blacktriangleright$$

Найти пределы:

$$6.83. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}. \quad 6.84. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{3x^2}. \quad 6.85. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{10x^3}.$$

$$6.86. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x^2}. \quad 6.87. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{2x}. \quad 6.88. \lim_{x \rightarrow 0} (3x \cdot \operatorname{ctg} 2x).$$

$$6.89. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3}{\sin^3 2x}. \quad 6.90. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 8x}{7x}. \quad 6.91. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\arcsin 9x}.$$

$$6.92. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2x}. \quad 6.93. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}. \quad 6.94. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 10x}.$$

$$6.95. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}. \quad 6.96. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sin x^3}. \quad 6.97. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 2x}{\arcsin^3 3x}.$$

$$6.98. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 8x}{4x}. \quad 6.99. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 7x}{\sin 5x}.$$

$$6.100. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x}{\arcsin x}. \quad 6.101. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{arctg} x^3}.$$

$$6.102. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}. \quad 6.103. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}.$$

$$6.104. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}. \quad 6.105. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 5) \sin \left( \frac{1}{x - 5} \right).$$

$$6.106. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\sqrt{3}/2 - \cos x}. \quad 6.107. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

$$6.108. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( 2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right). \quad 6.109. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x.$$

$$6.110. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x+1} \right)^x. \quad 6.111. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x+5} \right)^{7x}.$$

$$6.112. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{5x}. \quad 6.113. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3}\right)^{x^3 - 5}.$$

$$6.114. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 2}{4x^2 - 1}\right)^{5x^2}. \quad 6.115. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 - 4}\right)^{3x}.$$

$$6.116. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 5}\right)^{-2x}. \quad 6.117. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 - 2}{5x^3 + 1}\right)^{-6x^3}.$$

$$6.118. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 - 2x + 3}\right)^{5x^2}. \quad 6.119. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^{10} - 3}{7x^{10} + 2}\right)^{-2x^{10}}.$$

$$6.120. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 3x}{1 + x}\right)^{\frac{5}{x}}. \quad 6.121. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 - 2x^2}{3 + 3x^2}\right)^{-\frac{4}{x}}.$$

$$6.122. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x^2 - 1}{3x^2 - 1}\right)^{\frac{3}{x^2}}. \quad 6.123. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x^2 + 4x - 3}{5x^2 + x - 3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$6.124. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 - x) - \ln 3}{5x}. \quad 6.125. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 2 - \ln(2 - x)}{10x}.$$

$$6.126. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln x - \ln 4}{2x - 8}. \quad 6.127. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5 - x^2) - \ln 5}{2x^2}.$$

$$6.128. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x}. \quad 6.129. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 5}{3x - 1}\right)^{2x^2}.$$

$$6.130. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9x^2 + 1}{9x^2 + 3}\right)^{7x^3}. \quad 6.131. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 7}{2x^3 + 2}\right)^{6x^4}.$$

$$6.132. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x + 1}\right)^{\frac{1}{2x}}. \quad 6.133. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}.$$



Найти пределы с помощью эквивалентных бесконечно малых:

$$6.134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{6x}}{4x}.$$

$$6.135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{5x^2}.$$

$$6.136. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{x^2}.$$

$$6.137. \lim_{x \rightarrow \infty} [5x(\ln(x+6) - \ln x)].$$

$$6.138. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{125^x - 1}{3x}.$$

$$6.139. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2x \left( e^{\frac{3}{x}} - 1 \right) \right).$$

$$6.140. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}.$$

$$6.141. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{2x^2}.$$

$$6.142. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{10} - 1}{6x}.$$

$$6.143. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^6 - 64}{3x}.$$

$$6.144. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{10x}.$$

$$6.145. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{8x}.$$

Найти значения параметра  $a$ , удовлетворяющие равенствам:

$$6.146. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + 3x^2 - 1}{4 - 5x + 2x^3} = -3. \quad 6.147. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{ax} = e^{27}.$$

$$6.148. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{a}{x} \right)^{4x} = e^{-8}. \quad 6.149. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 ax}{2x^2} = 8.$$

$$6.150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{4x} = \frac{1}{2}.$$

$$6.151. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{4x} = 2.$$

$$6.152. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{ax^2} = 4.$$

$$6.153. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos ax} = 2.$$

6.154. Первоначальный вклад, положенный в банк под 10% годовых, составил 6 млн руб. Найти размер вклада через пять лет при начислении процентов: а) ежегодном; б) поквартальном; в) непрерывном.

### 6.10. Непрерывность функции и точки разрыва

**6.155.** Установить характер точки разрыва функции  $y = f(x)$  в точке  $x = 0$  или доказать непрерывность функций

в этой точке: а)  $y = \frac{\sin x}{x}$ ; б)  $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

в)  $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$ ; г)  $y = 2^{1/x}$ ; д)  $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

*Решение.*

а) При  $x = 0$  функция  $f(x)$  не определена, следовательно, она не непрерывна в этой точке. Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  и, соответственно, пределы функции слева и справа от точки  $x = 0$  конечны и равны, т.е.  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , то  $x = 0$  — точка устранимого разрыва первого рода (рис. 6.13).

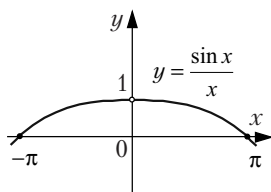


Рис. 6.13

б) По сравнению с п. «а» функция доопределена в точке  $x = 0$  так, что  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ , следовательно, данная функция непрерывна в этой точке.

в) При  $x = 0$  функция  $f(x)$  не определена. Так как пределы функции слева и справа от точки  $x = 0$  конечны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1+2^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 0$$

(ибо  $2^{1/x} \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0+$ ), то в точке  $x = 0$  функция  $f(x)$  имеет разрыв первого рода (рис. 6.14).

г) При  $x = 0$  функция  $f(x)$  не определена;

$$\lim_{x \rightarrow 0-} 2^{1/x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} 2^{1/x} = \infty.$$

Так как один из односторонних пределов бесконечен, то  $x = 0$  — точка разрыва второго рода (рис. 6.15).

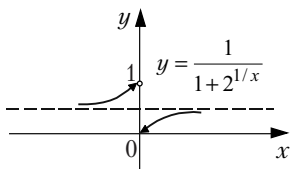


Рис. 6.14

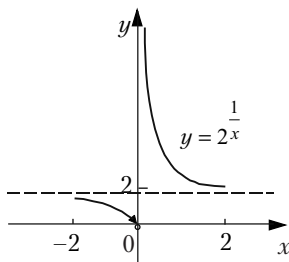


Рис. 6.15

д) При  $x = 0$  функция не определена. Так как односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow 0-} \sin \frac{1}{x}$  и  $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x}$  не существуют (при  $x \rightarrow 0-$  и  $x \rightarrow 0+$  значения  $\sin \frac{1}{x}$  колеблются от  $-1$  до  $1$  и от  $1$  до  $-1$ , не стремясь ни к какому числу (пределу)), то  $x = 0$  — точка разрыва второго рода (рис. 6.16). ►

Какие из данных функций являются непрерывными в точке  $x = 1$ ? В случае нарушения непрерывности установить характер точки разрыва:

$$6.156. y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

$$6.157. y = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{если } x \neq 1, \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

$$6.158. y = \frac{1}{1 + 2^{1/(x-1)}}. \quad 6.159. y = \frac{1}{x-1}.$$

$$6.160. y = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \geq 1, \\ x+1, & \text{если } x < 1. \end{cases} \quad 6.161. y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x-1}.$$

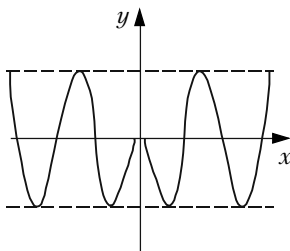


Рис. 6.16

Исследовать на непрерывность функцию  $y = f(x)$ , найти точки разрыва и указать характер разрыва:

$$6.162. y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x < 0, \\ 2, & \text{если } x = 0, \\ x^2-2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$$6.163. y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq -\pi, \\ \sin x, & \text{если } -\pi < x \leq \pi/2, \\ 1, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

$$6.164. y = \begin{cases} -x-3, & \text{если } x < -2, \\ x^2-4, & \text{если } x \geq -2. \end{cases}$$

$$6.165. y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, & \text{если } -2 \leq x < 2, \\ x-2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

### Контрольные задания по главе 6

#### «Пределы и непрерывность»

№	Вариант 6.1	Вариант 6.2	Вариант 6.3
Найти пределы:			
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x^3}{5x^3 + 7x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 + 1}{3x^2 + x^4}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - \sqrt{x}}{1 + 8x^3}$
2	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 9x + 14}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$
3	$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1})$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+5})$
4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+3}{7x-1} \right)^{2x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+4}{x^2+5} \right)^{-3x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x+1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{3x^3}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{3x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (8x \cdot \operatorname{ctg} x)$
6	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x) - \ln 2}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

№	Вариант 6.1	Вариант 6.2	Вариант 6.3
Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функций (указать их характер):			
7	а) $y = \begin{cases} x-1, & \text{при } x \geq 0, \\ -x-1, & \text{при } x < 0; \end{cases}$  б) $y = \frac{1}{\frac{1}{1+2^{x+1}}}$	а) $y = \begin{cases} 2x-1, & \text{при } x \geq 0, \\ -2x-1, & \text{при } x < 0; \end{cases}$  б) $y = \frac{1}{\frac{1}{4+e^{x-1}}}$	а) $y = \begin{cases} 3x+1, & \text{при } x \geq 0, \\ -3x+1, & \text{при } x < 0; \end{cases}$  б) $y = \frac{4}{\frac{3}{3+5^{x-2}}}$

## Тест 6

1. Выяснить, чему равен  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ :

1)  $\infty$ ; 2)  $-1$ ; 3) не существует; 4) 1.

2. Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно малы при  $x \rightarrow 0$ :

1)  $y = \frac{1}{x}$ ; 2)  $y = x^{10}$ ; 3)  $y = \sin \frac{x}{3}$ ; 4)  $y = \cos 2x$ ; 5)  $y = \frac{1}{\cos 3x}$ .

3. Выяснить, какие из перечисленных функций бесконечно большие при  $x \rightarrow \infty$ :

1)  $y = \sqrt[9]{x}$ ; 2)  $y = \operatorname{tg} x$ ; 3)  $y = \log_{0,5} x$ ; 4)  $y = \frac{1}{x^{-2}}$ ;

5)  $y = \operatorname{arctg} x$ .

4. Произведение двух бесконечно малых и бесконечно большой величин является:

1) бесконечно малой величиной; 2) бесконечно большой величиной; 3) неопределенностью.

5. Выяснить, какие из перечисленных функций непрерывны в точке  $x = 0$ :

1)  $y = \frac{1}{x}$ ; 2)  $y = \sqrt{x}$ ; 3)  $y = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leq 0, \\ x, & \text{при } x > 0; \end{cases}$

4)  $y = \begin{cases} -x, & \text{при } x < 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ x, & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$  5)  $y = \operatorname{tg} x$ .

6. Товарооборот фирмы ежемесячно увеличивается на 1%. Через сколько месяцев ее товарооборот, сохраняя темпы роста, увеличится в 2,7 раза по сравнению с первоначальным (считать  $e \approx 2,7$ ). Ответ округлить до целых.

7. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 10}{2x^2 + 7x + 5}$ .

8. Найти  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \right)^{x^2}$ , в ответе указать  $\ln a$ .

9. Найти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - x} \right)$ .

10. Найти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{2x-5} \right)^{6x}$ .

11. Найти  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 3x^2 - 18}{ax^4 - 18x^2 + 3} = \frac{1}{2}$ .

12. Найти  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{8x} = 2$ .

Раздел III

# **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**



## Глава 7

# ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

#### 7.1. Задачи, приводящиеся к понятию производной

**1. Задача о касательной.** Пусть на плоскости  $Oxy$  дана непрерывная кривая  $y = f(x)$ , и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке  $M_0(x_0, y_0)$  (рис. 7.1).

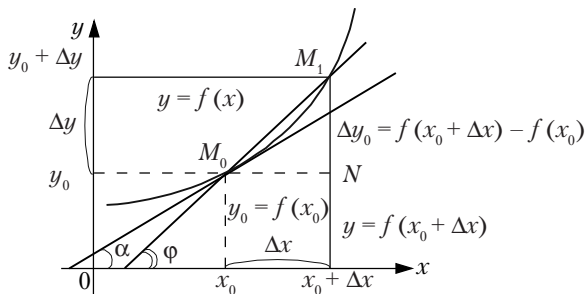


Рис. 7.1

Прежде всего необходимо выяснить, что понимается под касательной к кривой. Касательную нельзя определить как прямую, имеющую с кривой одну общую точку. В самом деле, прямая 1 на рис. 7.2, а имеет одну общую точку с кривой 2, но не является касательной к ней. А прямая 3 на рис. 7.2, б, хотя имеет две общие точки с кривой 4, очевидно, касается ее в точке А. Поэтому для определения касательной к кривой должен быть реализован другой подход.



Дадим аргументу  $x_0$  приращение  $\Delta x$  и перейдем на кривой  $y = f(x)$  от точки  $M_0(x_0; f(x_0))$  к точке  $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ . Проведем секущую  $M_0M_1$  (см. рис. 7.1).

Под касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $M_0$  естественно понимать предельное положение секущей  $M_0M_1$  при приближении точки  $M_1$  к точке  $M_0$ , т.е. при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0$ , в соответствии с формулой (4.8) имеет вид

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Угловым коэффициентом (или тангенсом угла  $\varphi$  наклона) секущей  $k_{M_0M_1}$  может быть найден из  $\triangle M_0M_1N$ :  $k_{M_0M_1} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (см. рис. 7.1). Тогда угловым коэффициентом касательной

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{M_0M_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (7.1)$$

Оставим на время задачу о касательной и рассмотрим другую задачу.

**2. Задача о скорости движения.** Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону  $s = s(t)$ , где  $s$  — пройденный путь;  $t$  — время, и необходимо найти скорость точки в момент  $t_0$ .

К моменту времени  $t_0$  пройденный путь равен  $s_0 = s(t_0)$ , а к моменту  $(t_0 + \Delta t)$  —  $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$  (рис. 7.3).

Тогда за промежуток  $\Delta t$  средняя скорость будет  $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

Чем меньше  $\Delta t$ , тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент  $t_0$ . В связи с этим под скоростью точки в мо-

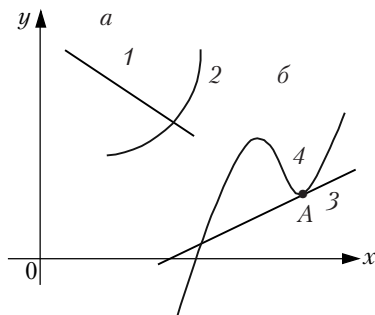


Рис. 7.2

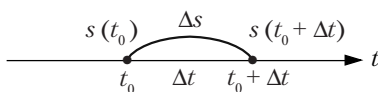


Рис. 7.3

мент  $t_0$  естественно понимать предел средней скорости за промежутки от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$ , когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (7.2)$$

**3. Задача о производительности труда.** Пусть функция  $u = u(t)$  выражает количество произведенной продукции  $u$  за время  $t$ , и необходимо найти производительность труда в момент  $t_0$ .

За период времени от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  количество произведенной продукции изменится от значения  $u_0 = u(t_0)$  до значения  $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$ ; тогда средняя производительность труда за этот период времени составит  $z_{\text{ср}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$ . Очевидно, что *производительность труда в момент  $t_0$*  можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}. \quad (7.3)$$

Рассматривая три различные по характеру задачи, мы пришли к пределу одного вида (7.1)–(7.3). Этот предел играет чрезвычайно важную роль в математическом анализе, являясь основным понятием дифференциального исчисления.

## 7.2. Определение производной.

### Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $X$ . Возьмем точку  $x \in X$ . Дадим значению  $x$  приращение  $\Delta x \neq 0$ , тогда функция получит приращение  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

**Определение. Производной функции  $y = f(x)$**  называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (7.4)$$

Производная функции имеет несколько обозначений:  $y'$ ,  $f'(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$ . Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например  $y'_x$ .

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Если функция в точке  $x$  имеет конечную производную, то функция называется **дифференцируемой** в этой точке. Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка  $X$ , называется **дифференцируемой на этом промежутке**.

Теперь вернемся к рассмотренным выше задачам.

Из задачи о касательной следует **геометрический смысл производной**: производная  $f'(x_0)$  есть **угловой коэффициент** (тангенс угла наклона) **касательной**, проведенной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , т.е.  $k = f'(x_0)$ .

Следовательно, уравнение касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  примет вид<sup>1</sup>

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (7.5)$$

Из задачи о скорости движения следует **механический смысл производной**: производная пути по времени  $s'(t_0)$  есть **скорость** точки в момент  $t_0$ :  $v(t_0) = s'(t_0)$ .

Из задачи о производительности труда следует, что **производная объема произведенной продукции по времени  $v'(t_0)$  есть производительность труда в момент  $t_0$** .

**Пример 7.1.** График функции  $y = f(x)$  есть полуокружность (рис. 7.4). Используя геометрический смысл производной, найти значения производной  $f'(x)$  в точках  $A, B, C, D, E$ , делящих полуокружность на четыре равные части.

**Решение.** В точках  $B$  и  $D$  углы наклона касательных к графику составляют соответственно  $45^\circ$  и  $135^\circ$ , поэтому  $y'_B = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ ;  $y'_D = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ .

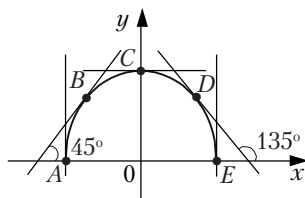


Рис. 7.4

<sup>1</sup> А уравнение нормали (учитывая условие перпендикулярности двух прямых — см. параграф 4.4) имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (7.5^*)$$

В точке  $C$  касательная параллельна оси  $Ox$  ( $\alpha = 0$ ), поэтому  $y'_C = \operatorname{tg} 0 = 0$ . В точках  $A$  и  $E$  касательные перпендикулярны оси  $Ox$ ,  $\alpha = 90^\circ$ , а  $\operatorname{tg} 90^\circ$  не существует, т.е. функция  $f(x)$  недифференцируема в этих точках, точнее, производная в этих точках бесконечна:  $f'_A = +\infty$ ,  $f'_E = -\infty$  (знаки, стоящие перед символами бесконечности, определяются тем, что в окрестности точки  $A$  производная  $f'(x)$  положительна (острый угол наклона касательных), а в окрестности точки  $E$  — отрицательна (тупой угол наклона)). ►

**Пример 7.2.** Доказать, что функция  $y = |x|$  недифференцируема в точке  $x = 0$ .

*Решение.* Производная функции (если она существует) равна

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Очевидно, что при  $x = 0$  производная не существует, так как отношение  $\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$  равно 1 при  $\Delta x > 0$  и  $-1$  при  $\Delta x < 0$ , т.е. не имеет предела при  $\Delta x \rightarrow 0$  (ни конечного, ни бесконечного). Геометрически это означает отсутствие касательной к кривой в точке  $x = 0$  (рис. 7.5). ►

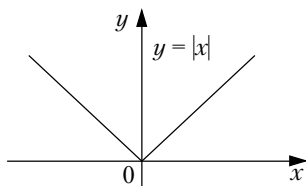


Рис. 7.5

**Замечание.** Наряду с понятием производной в дифференциальном исчислении рассматриваются также понятия *левой*  $f'_-(x)$  и *правой*  $f'_+(x)$  производных, под которыми понимаются односторонние пределы отношения (7.4) соответственно слева при  $\Delta x \rightarrow 0^-$  (когда  $\Delta x < 0$ ) и

справа при  $\Delta x \rightarrow 0^+$  (когда  $\Delta x > 0$ ). Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема, то  $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$ . Для функции  $y = |x|$ , рассмотренной в примере 7.2, при  $x = 0$  существуют левая и правая производные  $f'_-(0) = -1$ ,  $f'_+(0) = 1$ , но  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , следовательно, функция  $y = |x|$  недифференцируема в точке  $x = 0$ .

**Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью. Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она в этой точке непрерывна.

□ По условию функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

где  $f'(x_0)$  — постоянная величина, не зависящая от  $\Delta x$ .

Тогда на основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций (см. параграф 6.3) можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad (7.6)$$

где  $\alpha(\Delta x)$  — бесконечно малая величина при  $\Delta x \rightarrow 0$ , или

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (7.7)$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  на основании свойств бесконечно малых величин устанавливаем, что  $\Delta y \rightarrow 0$  и, следовательно, по определению (6.25) функция  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  является непрерывной. ■

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, функция  $y = |x|$  непрерывна в точке  $x = 0$ , ибо  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$  (см. рис. 7.5), но, как было показано в примере 7.2, недифференцируема в этой точке.

Таким образом, *непрерывность функции — необходимое, но недостаточное условие ее дифференцируемости*. В математике известны непрерывные функции, недифференцируемые ни в одной точке.

**Замечание.** Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке  $X$ , то функция называется *гладкой* на этом промежутке. Если же производная функции допускает конечное число точек разрыва (причем первого рода), то такая функция на данном промежутке называется *кусочно гладкой*.

### 7.3. Схема вычисления производной.

#### Основные правила дифференцирования

Производная функции  $y = f(x)$  может быть найдена по следующей схеме.

1°. Даем аргументу  $x$  приращение  $\Delta x \neq 0$  и находим наращенное значение функции  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ .

2°. Находим приращение функции  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

3°. Составляем отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

4°. Находим предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{если этот предел существует}).$$

**Пример 7.3.** Найти производную функции  $y = x^3$ .

*Решение.* 1°. Даем аргументу  $x$  приращение  $\Delta x \neq 0$  и находим наращенное значение функции  $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$ .

2°. Находим приращение функции

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2).$$

3°. Составляем отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$ .

$$4^\circ. \text{ Находим предел } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2. \blacktriangleright$$

Итак, получили, что  $(x^3)' = 3x^2$ . Можно доказать (см. параграф 7.5), что для любого (не только натурального)  $n$

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (7.8)$$

Следует знать частные случаи этой формулы при  $n = \frac{1}{2}$  и  $n = -1$ :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad (7.9)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \quad (7.10)$$

**Пример 7.4.** Найти производную функции  $y = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$ .

*Решение.* Представим функцию в виде  $y = x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{11}{4}}$ .

Теперь по формуле (7.8)  $y' = \frac{11}{4}x^{\frac{7}{4}}$ .

**Пример 7.5.** Составить уравнение касательной и нормали к кривой  $y = \frac{1}{x}$  в точке  $x = 1$ .

*Решение.* В соответствии с формулой (7.5) уравнение касательной к кривой  $y = f(x) = \frac{1}{x}$  в точке  $x = 1$  имеет вид  $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ . По формуле (7.10) найдем производную  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

Ее значение при  $x = 1$  равно  $f'(1) = -1$ . Значение функции при  $x = 1$  составит  $f(1) = 1$ . Уравнение касательной примет вид  $y - 1 = -1(x - 1)$  или  $x + y - 2 = 0$ . Уравнение нормали по формуле (7.5\*)  $y - 1 = -\frac{1}{-1}(x - 1)$  или  $x - y = 0$  (рис. 7.6). ►

### Правила дифференцирования.

**1. Производная постоянной равна нулю, т.е.**

$$c' = 0.$$

Правило очевидно, так как любое приращение постоянной функции  $y = c$  равно нулю.

**2. Производная аргумента равна единице, т.е.**

$$x' = 1.$$

Правило следует из формулы (7.8) при  $n = 1$ .

В следующих правилах будем полагать, что  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  — дифференцируемые функции.

**3. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, т.е.**

$$(u + v)' = u' + v'. \quad (7.11)$$

**4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е.**

$$(uv)' = u'v + uv'. \quad (7.12)$$

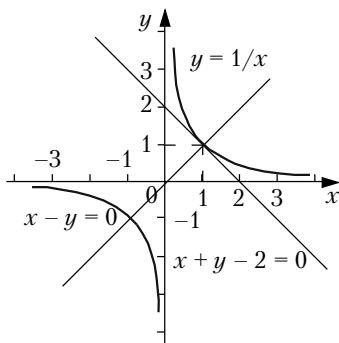


Рис. 7.6

**Следствие 1.** Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cu)' = cu'. \quad (7.13)$$

**Следствие 2.** Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные, например:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \quad (7.14)$$

**5.** Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (7.15)$$

(при условии, что  $v \neq 0$ ).

□ В качестве примера докажем правило 4, т.е. формулу (7.12). Пусть  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  — дифференцируемые функции. Найдем производную функции  $y = uv$ , используя схему, приведенную в начале параграфа 7.3.

1°. Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x \neq 0$ . Тогда функции  $u$  и  $v$  получают наращенные значения  $u + \Delta u$  и  $v + \Delta v$ , а функция  $y$  — значение  $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$ .

2°. Найдем приращение функции

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

3°. Составим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , которое представим в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

4°. Найдем предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$ , используя теоремы о пределах:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x.$$

На основании определения производной получили, что  $y' = u'v + uv' + u'v \cdot 0$ , или  $y' = u'v + uv'$ . ■



**Пример 7.6.** Найти производную функции  $y = f(x)$  и вычислить ее значение в точке  $x = 1$ : а)  $y = x^3 \sqrt[4]{x+1}$ ; б)  $y = 15(x^4 - 1)$ ; в)  $y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x}}$ .

*Решение.*

а) По формулам (7.12), (7.11) и (7.8)

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)'(x^{\frac{1}{4}} + 1) + x^3(x^{\frac{1}{4}} + 1)' = 3x^2(x^{\frac{1}{4}} + 1) + x^3(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 0) = \\ &= x^2(\frac{13}{4}\sqrt[4]{x} + 1). \end{aligned}$$

Значение производной в точке  $x = 1$  есть  $y'(1) = 1(\frac{13}{4} \cdot 1 + 1) = 4,25$ .

б) Сначала вынесем постоянный множитель за знак производной:

$$y' = 15(x^4 - 1)' = 15 \cdot 4x^3 = 60x^3; \quad y'(1) = 60.$$

в) По формуле (7.15)

$$y' = \frac{(x^3 - 1)'\sqrt{x} - (x^3 - 1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{3x^2\sqrt{x} - (x^3 - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{5x^3 + 1}{2x\sqrt{x}};$$

$$y'(1) = 3. \quad \blacktriangleright$$

## 7.4. Производная сложной и обратной функций

Пусть переменная  $y$  есть функция от переменной  $u$  ( $y = f(u)$ ), а переменная  $u$  в свою очередь есть функция от независимой переменной  $x$ , т.е. задана **сложная** функция  $y = f[\varphi(x)]$  (см. параграф 5.5).

**Теорема.** Если  $y = f(u)$  и  $u = \varphi(x)$  — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу  $u$ , умноженной на производную самого промежуточного аргумента и по независимой переменной  $x$ , т.е.

$$y' = f'(u) \cdot u'. \quad (7.16)$$

□ Дадим независимой переменной  $x$  приращение  $\Delta x \neq 0$ . Тогда функции  $u = \varphi(x)$  и  $y = f(u)$  соответственно получат приращения  $\Delta u$  и  $\Delta y$ .

Предположим, что  $\Delta u \neq 0$ . Тогда в силу дифференцируемости функции  $y = f(u)$  можно записать

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u),$$

где  $f'(u)$  — величина, не зависящая от  $\Delta u$ .

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u),$$

где  $\alpha(\Delta u)$  — бесконечно малая величина при  $\Delta u \rightarrow 0$ , откуда

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u. \quad (7.17)$$

Это равенство будет справедливо и при  $\Delta u = 0$ , если полагать, что  $\alpha(\Delta u = 0) = 0$  (т.е. доопределить таким образом функцию  $\alpha(\Delta u)$  при  $\Delta u = 0$ ).

Разделив обе части равенства (7.17) на  $\Delta x \neq 0$ , получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (7.18)$$

Так как по условию функция  $u = \varphi(x)$  дифференцируема, то она непрерывна в точке  $x$ , следовательно, при  $\Delta x \rightarrow 0$   $\Delta u \rightarrow 0$  и  $\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$ .

Поэтому, переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  в равенстве (7.18), получаем

$$y' = f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'.$$

**Замечание.** Если ограничиться случаями, что при  $\Delta x \neq 0$   $\Delta u \neq 0$ , то доказательство теоремы можно провести проще, исходя из очевидного равенства  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$  и переходя в нем к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ . ■

Правило дифференцирования сложной функции (7.16) может быть записано и в других формах:  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$  или  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

Выше были приведены формулы для производной степенной функции  $y = x^n$  и ее частных случаев (см. формулы (7.8)–(7.10)). С учетом полученного правила дифференцирования сложной функции (7.16) для функции  $y = u^n$ , где  $u = u(x)$ , можно записать

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', \quad (7.19)$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \quad (7.20)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'. \quad (7.21)$$

**Пример 7.7.** Найти производные функций: а)  $y = (\sqrt{x} + 5)^3$ ;

б)  $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ ; в)  $y = \frac{12}{x^2+x+1}$ .

*Решение.*

а) Функцию можно представить в виде  $y = u^3$ , где  $u = \sqrt{x} + 5$ . Следовательно, на основании формулы (7.19)

$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3(\sqrt{x} + 5)^2 (\sqrt{x} + 5)' = \frac{3(\sqrt{x} + 5)^2}{2\sqrt{x}}.$$

б) Имеем  $y = \sqrt[3]{u}$ , где  $u = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ , поэтому по формулам (7.16) и (7.19)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot u' = \frac{1}{3} \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{\left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^2} \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{3(x^2+1) \sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-1)^2}}. \end{aligned}$$

в) Вынося постоянный множитель 12 за знак производной и используя формулу (7.21), получаем

$$y' = 12 \left( \frac{1}{x^2+x+1} \right)' = 12 \left( -\frac{1}{(x^2+x+1)^2} \right) (x^2+x+1)' = \frac{-12(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}. \blacktriangleright$$

Перейдем к рассмотрению производной **обратной** функции.

Пусть  $y = f(x)$  — дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке  $X$ . Если переменную  $y$  рассматривать как аргумент, а переменную  $x$  — как функцию, то новая функция  $x = \varphi(y)$  является обратной к данной (см. параграф 5.5) и, как можно показать, непрерывной на соответствующем промежутке  $Y$ .

**Теорема.** Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \quad (7.22).$$

□ По условию функция  $y = f(x)$  дифференцируема и  $y'(x) = f'(x) \neq 0$ .

Пусть  $\Delta y \neq 0$  — приращение независимой переменной  $y$ ,  $\Delta x$  — соответствующее приращение обратной функции  $x = \varphi(y)$ . Тогда справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}. \quad (7.23)$$

Переходя к пределу в равенстве (7.23) при  $\Delta y \rightarrow 0$  и учитывая, что в силу непрерывности обратной функции  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x)}, \text{ т.е. } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \quad \blacksquare$$

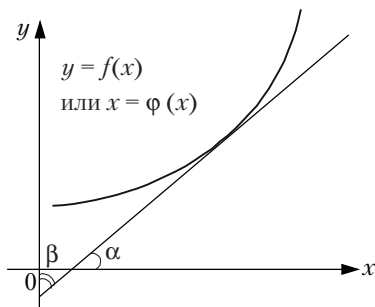


Рис. 7.7

Формула (7.22) имеет простой геометрический смысл. Если  $y'_x$  выражает тангенс угла наклона касательной к кривой  $y = f(x)$  к оси  $Ox$ , то  $x'_y$  — тангенс угла  $\beta$  наклона той же касательной к оси  $Oy$ , причем  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  (если  $\alpha$  и  $\beta$  —

острые углы) (рис. 7.7) или  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$  (если  $\alpha$  и  $\beta$  — тупые углы). Для таких углов  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$  или  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ .  
Этому равенству равносильно условие  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

## 7.5. Производные основных элементарных функций

Выведем формулы производных основных элементарных функций.

### Производная логарифмической функции.

**I.**  $y = \ln x$ . Воспользуемся схемой нахождения производной, приведенной в параграфе 7.3.

$$1^\circ. y + \Delta y = \ln(x + \Delta x).$$

$$2^\circ. \Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$3^\circ. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$4^\circ. y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Обозначив  $\frac{\Delta x}{x} = y$ , найдем  $\Delta x = xy$  и

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \ln(1 + y) = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y)^{\frac{1}{y}}.$$

В силу непрерывности логарифмической функции, используя (6.26), поменяем местами символы предела и логарифма, а затем используем определение числа  $e$  (6.20); получаем

$$y' = \frac{1}{x} \ln \left[ \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

Итак,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ и } (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

**II.**  $y = \log_a x$ . Найдем  $y' = (\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$ , т.е.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \text{ и } (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'.$$

### Производная показательной функции.

**I.**  $y = e^x$ . Прологарифмируем обе части равенства по основанию  $e$ , получим  $\ln y = x$ . Дифференцируя обе части по переменной  $x$  и учитывая, что  $\ln y$  — сложная функция, имеем с учетом формулы (7.16)  $(\ln y)' = x'$  или  $\frac{y'}{y} = 1$ , откуда  $y' = y$ , т.е.

$$(e^x)' = e^x \text{ и } (e^u)' = e^u \cdot u'. \quad (7.24)$$

Заметим, что кривая  $y = e^x$ , называемая *экспонентой*, обладает присущим только ей свойством: в каждой точке  $x$  ордината кривой  $y = e^x$  равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной к кривой в этой точке:  $e^x = \operatorname{tg} \alpha$  (рис. 7.8).

**II.**  $y = a^x$ .

$$y' = (a^x)' = \left[ (e^{\ln a})^x \right]' = (e^{x \ln a})', \text{ и по правилу дифференцирования сложной функции (7.16)}$$

$y' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$ . Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a \text{ и } (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'. \quad (7.25)$$

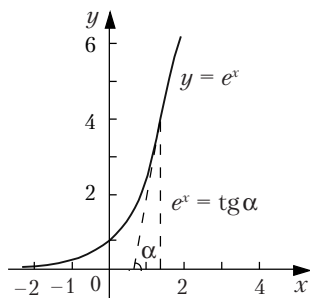


Рис. 7.8

**Производная степенной функции.** Теперь можно доказать формулу производной степенной функции  $y = x^n$  для любого  $n$ .

Действительно,  $\ln y = n \ln x$ . Дифференцируя обе части равенства, получаем  $\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x}$ , откуда  $y' = ny \cdot \frac{1}{x} = nx^n \cdot \frac{1}{x} = nx^{n-1}$ , т.е.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \\ \text{и } (u^n)' = nu^{n-1} u'. \quad (7.26)$$

**Производная степенно-показательной функции** —  $y = f(x)^{\varphi(x)}$ . Найдем  $\ln y = \varphi(x) \ln f(x)$ . Дифференцируя, получаем

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) [\ln f(x)]' = \varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)}.$$

Учитывая, что  $y = f(x)^{\varphi(x)}$ , после преобразований получаем

$$y' = \varphi(x) f(x)^{\varphi(x)-1} \cdot f'(x) + f(x)^{\varphi(x)} \cdot \ln f(x) \varphi'(x). \quad (7.27)$$

Таким образом, для того, чтобы найти производную степенно-показательной функции, достаточно продифференцировать ее вначале как степенную, а затем как показательную и полученные результаты сложить (напомним, что  $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$  и  $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ ).

**Замечание.** Производная логарифмической функции  $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$  называется *логарифмической производной*. Ее удобно использовать для нахождения производных функций, выражения которых существенно упрощаются при логарифмировании. Логарифмическую производную  $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$  называют также *относительной скоростью изменения функции*, или *темпом изменения функции*.

**Пример 7.8.** Найти производные функций: а)  $y = x^x$ ;

б)  $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}.$

*Решение.*

а) По формуле (7.27) дифференцируем функцию вначале как степенную, а затем как показательную и полученные результаты складываем:  $y' = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$ .

б) Производную можно найти, используя правила дифференцирования (7.9)–(7.15), но проще это сделать с помощью логарифмической производной. Действительно,

$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x+1) + \ln(x^2-2) - \ln(3-x)]$ . Дифференцируя, находим

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x+1} (x+1)' + \frac{1}{x^2-2} (x^2-2)' - \frac{1}{3-x} (3-x)' \right]$$

или

$$y' = \frac{1}{2} y \left( \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-2} + \frac{1}{3-x} \right).$$

Подставив выражение для  $y$ , окончательно получим

$$y' = -\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 4}{(3-x)\sqrt{(x+1)(x^2-2)(3-x)}}. \blacktriangleright$$

### Производные тригонометрических функций.

**I.**  $y = \sin x$ . Воспользуемся схемой нахождения производной (см. параграф 7.3):

$$1^\circ. y + \Delta x = \sin(x + \Delta x).$$

$$2^\circ. \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$3^\circ. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

$$4^\circ. y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \quad (\text{учли}$$

первый замечательный предел (6.16) и непрерывность функции  $\cos x$ ).

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x; (\sin u)' = \cos u \cdot u'. \quad (7.28)$$

**II.**  $y = \cos x$ .

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \text{и} \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u' \quad (7.29)$$

(доказательство аналогично п. I).



III.  $y = \operatorname{tg} x$ .

$$y' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\text{т.е. } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'. \quad (7.30)$$

IV.  $y = \operatorname{ctg} x$ .

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u' \quad (7.31)$$

(доказательство аналогично п. III).

V.  $y = \arcsin x$ , где  $-1 \leq x \leq 1$  и  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ .

Обратная функция имеет вид  $x = \sin y$ , причем  $x'_y = \cos y \neq 0$ , если  $-\pi/2 < y < \pi/2$ .

Используем правило дифференцирования обратной функции (7.22)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При  $x = \pm 1$  производной не существует.

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'. \quad (7.32)$$

VI.  $y = \arccos x$ ;  $y = \operatorname{arctg} x$ ;  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

Вывод формул проводится аналогично п. V, формулы соответствующих производных приведены в таблице.

Таблица производных

Функция $y$	Производная $y'$	Функция $y$	Производная $y'$
$c$	0	$e^u$	$e^u \cdot u'$
$x$	1	$a^u$	$a^u \ln a \cdot u'$
$u + v$	$u' + v'$	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$

Окончание табл.

Функция $y$	Производная $y'$	Функция $y$	Производная $y'$
$uv$	$u'v + uv'$	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$uvw$	$u'vw + uv'w + uvw'$	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$cu$	$cu'$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\frac{u}{c}$	$\frac{u'}{c}$	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\frac{c}{v}$	$-\frac{c}{v^2} v'$	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$f(u), u = \varphi(x)$	$f'(u) \cdot u'$	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$u^n$	$nu^{n-1}u'$	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$		

## 7.6. Производные неявной и параметрически заданной функций. Понятие производных высших порядков

**Производная неявной функции.** Выше было рассмотрено дифференцирование явных функций, заданных в виде  $y = f(x)$ . Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$  (см. параграф 5.5).

Для нахождения производной функции  $y$ , заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая  $y$  как функцию от  $x$ , а затем из полученного уравнения найти производную  $y'$ . Фактически этот метод был использован при выводе производных функций  $y = e^x$ ;  $y = x^n$ ;  $y = f(x)^{\varphi(x)}$  и в примере 7.8, б после логарифмирования рассматриваемых функций.

**Пример 7.9.** Найти производную функции  $y$ , заданной уравнением  $x^2 - xy + \ln y = 2$ , и вычислить ее значение в точке  $(2; 1)$ .

*Решение.* Дифференцируя обе части равенства и учитывая, что  $y$  есть функция от  $x$ , получаем  $2x - y - xy' + \frac{y'}{y} = 0$ , откуда

$$y' = \frac{2xy - y^2}{xy - 1}.$$

Значение производной при  $x = 2, y = 1$   $y'(2) = 3$ . ►

**Производные высших порядков.** До сих пор рассматривалась производная  $f'(x)$  от функции  $f(x)$ , называемая *производной первого порядка*. Но производная  $f'(x)$  сама является функцией, которая также может иметь производную.

*Производной  $n$ -го порядка* называется производная от производной  $(n - 1)$ -го порядка.

Обозначения производных:  $f''(x)$  — *второго порядка* (или *вторая производная*),  $f'''(x)$  — *третьего порядка* (или *третья производная*).

Для обозначения производных более высокого порядка используются арабские цифры в скобках или римские цифры, например,  $f^{(4)}(x)$ , ...,  $f^{(n)}(x)$  или  $f^{\text{IV}}(x)$  и т.д.

Выясним *механический смысл второй производной*. Выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону  $s = s(t)$  (где  $s$  — путь,  $t$  — время), то  $s'(t_0)$  представляет скорость изменения пути в момент  $t_0$ . Следовательно, *вторая производная пути по времени*  $s''(t_0) = [s'(t_0)]' = v'(t_0)$  *есть скорость изменения скорости*, или **ускорение точки в момент  $t_0$** .

**Пример 7.10.** Найти производные до  $n$ -го порядка включительно от функции  $y = \ln x$ .

*Решение:*

$$y' = \frac{1}{x}; \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}; \quad y^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \quad \text{и т.д.}$$

Очевидно, что производная  $n$ -го порядка  $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ . ►

**Производная функции, заданной параметрически.** Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически:  $x = x(t)$ ,

$y = y(t)$  (см. параграф 5.5), где  $x(t)$ ,  $y(t)$  непрерывны на некотором интервале  $(\alpha; \beta)$  изменения  $t$ , и для функции  $x = x(t)$  существует обратная функция  $t = t(x)$ . Тогда  $y$  есть сложная функция от  $x$ , т.е.  $y = y[t(x)]$ . Если функции  $x(t)$  и  $y(t)$  дифференцируемые, причем  $x'(t) \neq 0$ , то по правилу дифференцирования сложной функции (7.16)  $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ .

Так как для обратной функции по формуле (7.22)  $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ , то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (7.33)$$

Если функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют производные  $n$ -го порядка, причем  $x'_t \neq 0$ , то и функция  $y = y[t(x)]$  имеет производную  $n$ -го порядка.

Найдем производную второго порядка

$$y''_x = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x.$$

Таким образом,

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; \quad (7.34)$$

вообще

$$y^{(n)}_x = \frac{(y^{(n-1)}_x)'_t}{x'_t}. \quad (7.35)$$

**Пример 7.11.** Найти производные первого и второго порядков для функции  $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y' = R \sin t. \end{cases} (t \in [0; \pi]).$

*Решение.* По формуле (7.33)

$$y'_x = \frac{(R \sin t)'}{(R \cos t)'} = \frac{R \cos t}{R(-\sin t)} = -\operatorname{ctg} t.$$

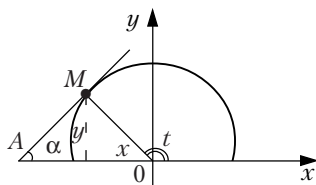


Рис. 7.9

Геометрически равенство  $y'_x = -\operatorname{ctg} t = -x/y$  означает, что в любой точке  $M$  полуокружности  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} t$ , где  $\alpha$  и  $t$  — соответственно углы наклона касательной  $AM$  и луча  $OM$  (рис. 7.9).

По формуле (7.34)

$$y''_x = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'}{(R \cos t)'} = -\frac{1}{R \sin^3 t}. \blacktriangleright$$

## 7.7. Понятие дифференциала функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $X$  и дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x \in X$ . Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где  $\alpha(\Delta x)$  — бесконечно малая величина при  $\Delta x \rightarrow 0$ , откуда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \quad (7.36)$$

Таким образом, приращение функции  $\Delta y$  состоит из двух слагаемых: 1) линейного относительно  $\Delta x$ ; 2) нелинейного (представляющего бесконечно малую величину более высокого порядка, чем  $\Delta x$ , ибо (см. замечание в параграфе 6.3)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ ).

**Определение.** *Дифференциалом функции* называется главная, линейная относительно  $\Delta x$ , часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (7.37)$$

**Пример 7.12.** Найти приращение и дифференциал функции  $y = 2x^2 - 3x$  при  $x = 10$  и  $\Delta x = 0,1$ .

*Решение.* Приращение функции

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = [2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)] - (2x^2 - 3x) = \\ &= \Delta x(4x + 2\Delta x - 3). \end{aligned}$$

Дифференциал функции  $dy = f'(x)\Delta x = (4x - 3)\Delta x$ .

При  $x = 10$  и  $\Delta x = 0,1$  имеем  $\Delta y = 3,72$  и  $dy = 3,70$ . Различие между  $\Delta y$  и  $dy$  составляет всего 0,02, или  $\approx 0,5\%$ . ►

**Пример 7.13.** Найти дифференциал функции  $y = x$ .

*Решение:*  $dy = dx = x' \cdot \Delta x$ , откуда

$$dx = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. ►

Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде

$$dy = f'(x)dx, \quad (7.38)$$

откуда  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ . Следовательно,  $\frac{dy}{dx}$  не просто символическое обозначение производной, а обычная дробь с числителем  $dy$  и знаменателем  $dx$ .

**Геометрический смысл дифференциала.** Возьмем на графике функции  $y = f(x)$  произвольную точку  $M(x, y)$ . Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ . Тогда функция  $y = f(x)$  получит приращение  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  (рис. 7.10).

Проведем касательную к кривой  $y = f(x)$  в точке  $M$ , которая образует угол  $\alpha$  с положительным направлением оси  $Ox$ , т.е.  $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ . Из прямоугольного треугольника  $MKN$

$$\begin{aligned} KN &= MN \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \operatorname{tg} \alpha = \\ &= f'(x)\Delta x, \end{aligned}$$

т.е. в соответствии с формулой (7.37)  $dy = KN$ .

Таким образом, дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в данной точке, когда  $x$  получает приращение  $\Delta x$ .

Не следует думать, что всегда  $dy < \Delta y$ . Так, на рис. 7.11 показан случай, когда  $dy > \Delta y$ .

**Свойства дифференциала.** В основном они аналогичны свойствам производной. Приведем их без доказательства:

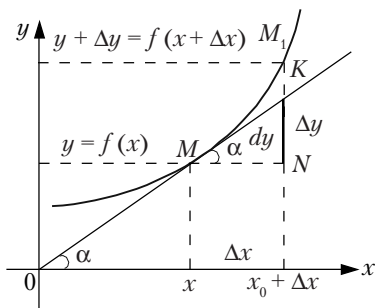


Рис. 7.10

- 1)  $dc = 0$ ;
- 2)  $d(cu) = c du$ ;
- 3)  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ;
- 4)  $d(uv) = v du + u dv$ ;
- 5)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ .

Рассмотрим теперь важное свойство, которым обладает дифференциал функции, но не обладает ее производная.

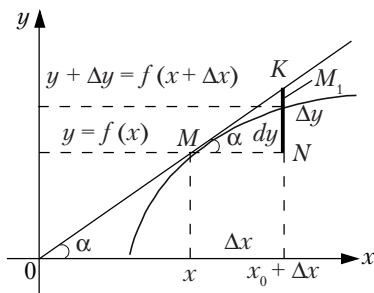


Рис. 7.11

**Инвариантность формы дифференциала.** Рассматривая выше  $y = f(x)$  как функцию независимой переменной  $x$ , было получено, что  $dy = f'(x)dx$ . Рассмотрим функцию  $y = f(u)$ , где аргумент  $u = \varphi(x)$  сам является функцией от  $x$ , т.е. сложную функцию  $y = f[\varphi(x)]$ . Если  $y = f(u)$  и  $u = \varphi(x)$  — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции в соответствии с теоремой, приведенной в параграфе 7.4,  $y' = f'(u) \cdot u'$ .

Тогда дифференциал функции

$$dy = f'(x) dx = f'(u) \cdot u' dx = f'(u) du,$$

ибо по формуле (7.38)  $u' dx = du$ . Итак,

$$dy = f'(u) du. \quad (7.39)$$

Последнее равенство означает, что формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от независимой переменной  $x$  рассматривать функцию от зависимой переменной  $u$ . Это свойство дифференциала получило название *инвариантности* (т.е. неизменности) *формы* (или *формулы*) *дифференциала*.

Однако в содержании формул (7.38) и (7.39) все же есть различие: в формуле (7.38) дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной, т.е.  $dx = \Delta x$ , а в формуле (7.39) дифференциал функции  $du$  есть лишь линейная часть приращения этой функции  $\Delta u$  и только при малых  $\Delta x$   $du \approx \Delta u$ .

## 7.8. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Из изложенного выше следует, что  $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ , т.е. приращение функции  $\Delta y$  отличается от ее дифференциала  $dy$  на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем  $dy = f'(x)\Delta x$ . Поэтому при достаточно малых значениях  $\Delta x$   $\Delta y \approx dy$  или  $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ , откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (7.40)$$

Чем меньше значение  $\Delta x$ , тем точнее формула (7.40).

Формула (7.40) может оказаться полезной для приближенных вычислений.

**Пример 7.14.** Вычислить приближенно: а)  $\sqrt[4]{16,64}$ ; б)  $\operatorname{tg} 46^\circ$ .  
*Решение.*

а) Получим вначале приближенную формулу для вычисления корней любой  $n$ -й степени. Полагая  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , находим

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \text{ и в соответствии с формулой (7.40)}$$

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}\Delta x}{nx} \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} \left( 1 + \frac{\Delta x}{nx} \right). \quad \text{В данном примере}$$

$$\sqrt[4]{x + \Delta x} \approx \sqrt[4]{x} \left( 1 + \frac{\Delta x}{4x} \right).$$

В качестве  $x$  возьмем число, наиболее близкое к 16,64, но чтобы был известен  $\sqrt[4]{x}$ , при этом  $\Delta x$  должно быть достаточно малым. Очевидно, следует взять  $x = 16$ ,  $\Delta x = 0,64$  (но, например, не  $x = 9$ ,  $\Delta x = 7,64$ !). Итак,  $\sqrt[4]{16,64} \approx 16 \left( 1 + \frac{0,64}{4 \cdot 16} \right) = 2 \cdot 1,01 = 2,02$ .

б) Полагая  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , находим  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  и в соответствии с (7.40) получаем  $\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{\Delta x}{\cos^2 x}$ . Учитывая, что  $\operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 1^\circ) = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right)$ , возьмем  $x = \frac{\pi}{4}$  и



$$\Delta x = \frac{\pi}{180}. \quad \text{Тогда} \quad \operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) \approx \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + \frac{\pi}{90} = 1 + 0,0349 \approx 1,035. \quad \blacktriangleright$$

Используя дифференциал, по формуле (7.40) легко получить формулы, часто применяемые на практике при  $\alpha \ll 1$ :

$$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha; \quad \sqrt[n]{1 \pm \alpha} \approx 1 \pm \frac{\alpha}{n}; \quad \frac{1}{1 \pm \alpha} \approx 1 \mp \alpha; \quad e^\alpha \approx 1 + \alpha; \\ \ln(1 \pm \alpha) \approx \pm \alpha; \quad \sin \alpha \approx \alpha; \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

и т.д.

С помощью дифференциала может быть решена задача определения абсолютной и относительной погрешностей функции по заданной погрешности нахождения (измерения) аргумента.

Пусть необходимо вычислить значение данной функции  $y = f(x)$  при некотором значении аргумента  $x_1$ , истинная величина которого неизвестна, а известно лишь его приближенное значение  $x$  с абсолютной погрешностью  $|\Delta x| = |x - x_1|$ . Если вместо истинного значения  $f(x_1)$  взять величину  $f(x)$ , то допустим ошибку, равную  $|f(x) - f(x_1)| = |\Delta y| \approx dy = f'(x)\Delta x$ .

При этом относительная погрешность функции  $\delta_y = \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$  может быть вычислена (при достаточно малых  $\Delta x$ ) по формуле

$$\delta_y = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{f'(x)\Delta x}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \cdot \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \quad \text{или} \\ \delta_y = |E_x(y)| \delta_x, \quad (7.41)$$

где  $|E_x(y)|$  — эластичность функции (по абсолютной величине) (см. параграф 7.10);  $\delta_x = \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$  — относительная погрешность нахождения (измерения) аргумента  $x$ .

**Пример 7.15.** Расход бензина  $y$  (л) автомобиля на 100 км пути в зависимости от скорости  $x$  (км/ч) описывается функцией  $y = 18 - 0,3x + 0,003x^2$ . Оценить относительную

погрешность вычисления расхода бензина при скорости  $x = 90$  км/ч, определенной с точностью до 5%.

*Решение.* Найдем эластичность функции (по абсолютной величине)

$$|E_x(y)| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x(-0,3 + 0,006x)}{18 - 0,3x + 0,003x^2} \right|.$$

При  $x = 90$   $|E_{x=90}(y)| = 1,41$  и по формуле (7.41) относительная погрешность  $\delta_y = 1,41 \cdot 5 \approx 7,1\%$ . ►

**Пример 7.16.** С какой точностью может быть вычислен объем шара, если его радиус измерен с точностью до 2%?

*Решение.* Объем шара радиуса  $x$  равен  $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ . Найдем  $f'(x) = 4\pi x^2$ ,  $|E_x(f)| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| = \frac{x \cdot 4\pi x^2}{\frac{4}{3}\pi x^3} = 3$  и по формуле (7.41)  $\delta_y \approx 3\delta_x = 3 \cdot 2 = 6\%$ . ►

Существенным недостатком применения дифференциала в приближенных вычислениях является невозможность вычисления значений функций с наперед заданной точностью. Этому недостатка лишено использование рядов в приближенных вычислениях (см. параграф 14.3).

## 7.9. Понятие о дифференциалах высших порядков

Для дифференцируемой функции  $y = f(x)$  согласно (7.38)  $y = f'(x)dx$ , т.е. дифференциал функции есть функция от двух аргументов:  $x$  и  $dx$ .

Будем полагать, что дифференциал независимой переменной имеет произвольное, но фиксированное значение, не зависящее от  $x$ . В этом случае  $dy$  есть некоторая функция  $x$ , которая также может иметь дифференциал.

*Дифференциалом второго порядка* (или *вторым дифференциалом*)  $d^2y$  функции  $y = f(x)$  называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е.

$$d^2y = d(dy). \quad (7.42)$$

Аналогично *дифференциалом  $n$ -го порядка* (или  *$n$ -м дифференциалом*)  $d^n y$  называется дифференциал от диф-

ференциала  $(n - 1)$ -го порядка этой функции, т.е.  $d^n y = d(d^{n-1}y)$ .

Найдем выражение для  $d^2 y$ . По определению  $d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx)$ . Так как  $dx$  не зависит от  $x$ , т.е. по отношению к переменной  $x$  является постоянной величиной, то множитель  $dx$  можно вынести за знак дифференциала

$$d^2 y = dx \cdot df'(x) = dx \cdot [f'(x)]' dx = f''(x)(dx)^2.$$

Итак,

$$d^2 y = f''(x)dx^2, \quad (7.43)$$

где  $dx^2 = (dx)^2$ . В общем случае

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n, \quad (7.44)$$

т.е. дифференциал второго (и вообще  $n$ -го) порядка равен произведению производной второго ( $n$ -го) порядка на квадрат ( $n$ -ю степень) дифференциала независимой переменной.

Из формул (7.43) и (7.44) следует, что

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad (7.45)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (7.46)$$

В заключение отметим, что дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают свойством инвариантности формы (или формулы) в отличие от дифференциала первого порядка.

## 7.10. Экономический смысл производной.

### Использование понятия производной

#### в экономике

В параграфе 7.2 было установлено, что производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее *экономический смысл производной*.

Издержки производства  $y$  будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции  $x$ . Пусть  $\Delta x$  — прирост продукции, тогда  $\Delta y$  — приращение издержек производства и  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  — среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  выражает **предельные издержки производства** и *характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции*.

Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции)  $x$  и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и другие предельные величины.

Понятие предельных издержек может быть использовано при определении оптимального для производителя выпуска продукции при известной ее цене.

Пусть при производстве  $x$  единиц продукции издержки составляют  $y = f(x)$  денежных единиц. При увеличении выпуска продукции на  $\Delta x$  единиц издержки производства возрастут на  $\Delta y$  денежных единиц, а стоимость реализованной продукции по цене  $p$  на  $p\Delta x$  денежных единиц. Очевидно, что увеличивать производство продукции экономически оправдано, если  $\Delta y \leq p\Delta x$ . Точно так же сокращать выпуск продукции на величину  $\Delta x$  имеет смысл, когда снижение издержек  $\Delta y$  не менее, чем снижение стоимости  $p\Delta x$ , т.е.  $\Delta y \geq p\Delta x$ . Приведенным неравенствам одновременно удовлетворяет значение  $\Delta y / \Delta x = p$ . Если  $\Delta x$  мало по сравнению с  $x$ , а теоретически при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = p$ , т.е. *оптимальный для производителя выпуск продукции такой, при котором предельные издержки равны ее цене*.

Геометрически оптимальный выпуск продукции  $x_0$  находится параллельным перемещением прямой с угловым коэффициентом  $p$  до тех пор, пока эта прямая не станет касательной к кривой издержек  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (рис. 7.12).

Применение дифференциального исчисления для исследования экономических объектов и процессов на основе анализа предельных величин получило название *предельного анализа*. Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величина), а процесс, т.е. *изменение*

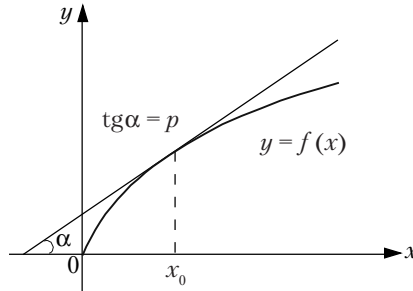


Рис. 7.12

экономического объекта. Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора*. Однако следует учесть, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих объектов экономических расчетов и прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). Вместе с тем в ряде случаев можно отвлечься от дискретности показателей и эффективно применять предельные величины.

Рассмотрим в качестве примера **соотношения между средним и предельным доходами**<sup>1</sup> в условиях монопольного и конкурентного рынков.

Суммарный доход (выручку) от реализации продукции  $r$  можно определить как произведение цены единицы продукции  $p$  на ее количество  $q$ , т.е.  $r = pq$ .

В условиях **монополии** одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции, а следовательно, их цены. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса  $p(q)$  — линейная убывающая функция  $p = aq + b$ , где  $a < 0$ ,  $b > 0$ . Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит

<sup>1</sup> В экономической литературе *предельные* величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква  $M$ ; при записи *средних* величин добавляется буква  $A$  (от англ. average — средняя), например  $MR$  — предельный доход,  $AR$  — средний доход.

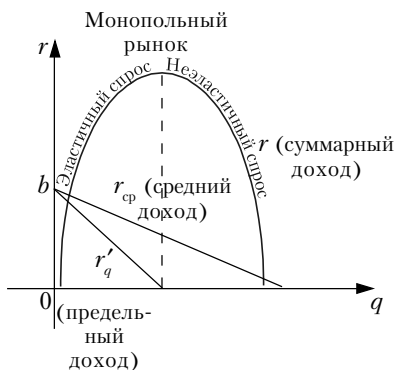


Рис. 7.13

ванной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с меньшей скоростью) среднего дохода.

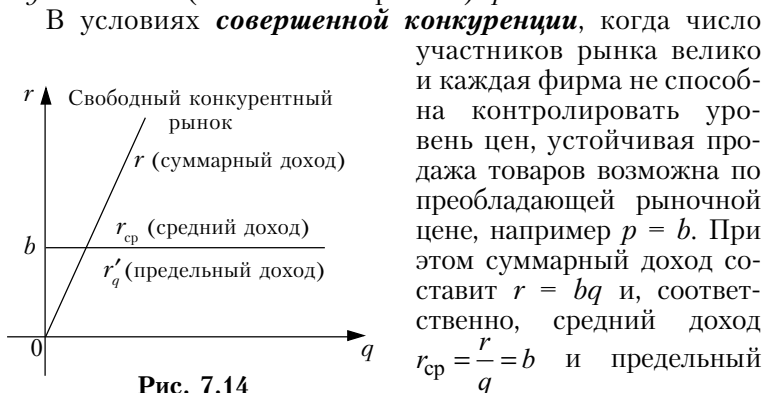


Рис. 7.14

Таким образом, в условиях свободного конкурентного рынка в отличие от монополии *средний и предельный доходы совпадают*.

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие *эластичности функции*.

**Определение.** *Эластичностью функции  $E_x(y)$  называется предел отношения относительного приращения функции  $y$  к относительному приращению переменной  $x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ :*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \quad (7.47)$$

$r = (aq + b)q = aq^2 + bq$  (рис. 7.13). В этом случае средний доход на единицу продукции  $r_{\text{сп}} = \frac{r}{q} = aq + b$ , а предельный доход, т.е. дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции, составит  $r'_q = 2aq + b$  (см. рис. 7.13). Следовательно, в условиях монополии рынок с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с меньшей скоростью) среднего дохода.

Такой доход  $r'_q = b$  (рис. 7.14). Та-

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция  $y = f(x)$  при изменении независимой переменной  $x$  на 1%.

Выясним геометрический смысл эластичности функции. По определению (7.47)  $E_x(y) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{y} \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\operatorname{tg} \alpha$  — тангенс угла наклона касательной в точке  $M(x, y)$  (рис. 7.15). Учитывая, что из треугольника  $MBN$   $MN = x \operatorname{tg} \alpha$ ,  $MC = y$ , а из подобия треугольников  $MBN$  и  $AMC$   $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$ , получаем  $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$ , т.е. эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек ее пересечения с осями  $Ox$  и  $Oy$ . Если эти точки пересечения касательной к графику функции  $A$  и  $B$  находятся по одну сторону от точки  $M$ , то эластичность  $E_x(y)$  положительна (см. рис. 7.15), если по разные стороны, то  $E_x(y)$  отрицательна (рис. 7.16).

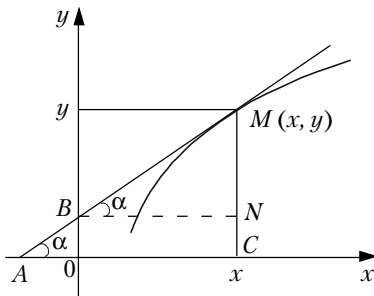


Рис. 7.15

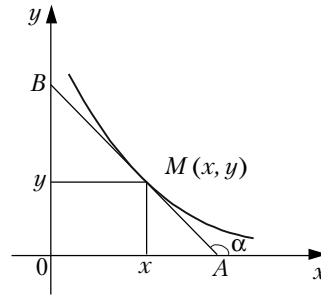


Рис. 7.16

Отметим свойства эластичности функции.

1. Эластичность функции равна произведению независимой переменной  $x$  на темп изменения функции  $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$ :

$$E_x(y) = x T_y. \quad (7.48)$$

2. Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v); \quad (7.49)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v). \quad (7.50)$$

**3. Эластичности взаимнообратных функций — взаимно обратные величины:**

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \quad (7.51)$$

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Например, эластичность спроса  $y$  относительно цены  $x$  (или дохода  $x$ ) — это коэффициент, определяемый по формуле (7.47) и показывающий приблизительно, на сколько процентов изменяется спрос (объем потребления) при изменении цены (или дохода) на 1%.

Если эластичность спроса (по абсолютной величине)  $|E_x(y)| > 1$ , то спрос считают *эластичным* относительно цены (или дохода), если  $|E_x(y)| < 1$ , то *неэластичным*. Если  $|E_x(y)| = 1$ , то говорят о спросе с *единичной эластичностью*.

Выясним, например, как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход  $r = pq$  при реализации продукции. Выше было сделано предположение, что кривая спроса  $p = p(q)$  — линейная функция; теперь будем полагать, что  $p = p(q)$  — произвольная функция. Найдем предельный доход

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p \left( 1 + \frac{q}{p} p'_q \right) = p(1 + E_q(p)).$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (7.51) для эластичности взаимнообратных функций эластичность спроса относительно цены обратна эластичности цены относительно

спроса, т.е.  $E_q(p) = \frac{1}{E_p(q)}$ , а также то, что  $E_p(q) < 0$ , при произвольной кривой спроса получаем

$$r'_q = p \left( 1 - \frac{1}{|E_p(q)|} \right). \quad (7.52)$$

Если спрос неэластичен, т.е.  $|E_p(q)| < 1$ , то в соответствии с формулой (7.52) предельный доход  $r'_q$  *отрицателен* при любой цене; если спрос эластичен, т.е.  $|E_p(q)| > 1$ , то предельный доход  $r'_q$  *положителен*. Таким образом, для неэластичного спроса изменения цены и предельного дохода про-



исходят в одном направлении, а для эластичного спроса — в разных. Это означает, что с *возрастанием цены для продукции эластичного спроса суммарный доход от ее реализации увеличивается, а для товаров неэластичного спроса уменьшается*. На рис. 7.13 на кривых доходов выделены области эластичного и неэластичного спроса.

Понятие производной может быть использовано для оценки **соотношения потребления и сбережения**. Пусть доход населения  $x$  состоит из двух частей:  $x = C(x) + S(x)$ , где  $C(x)$  — функция потребления,  $S(x)$  — функция сбережения.

Дифференцируя, получаем

$$C'(x) + S'(x) = 1.$$

Функции  $C'(x)$  и  $S'(x)$  называются *предельными склонностями* соответственно *к потреблению* и *сбережению* и показывают приближенно при данном уровне дохода населения  $x$  денежные средства, выделяемые на потребление и сбережение из каждой дополнительной единицы дохода.

**Пример 7.17.** Зависимость между издержками производства  $y$  (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции  $x$  (ед.) выражается функцией  $y = 5x - 0,05x^3$ . Определить средние и предельные издержки при объеме выпускаемой продукции, равном 10 ед.

*Решение.* Функция средних издержек (на единицу продукции) выражается отношением  $y_{\text{ср}} = \frac{y}{x} = 50 - 0,05x^2$ ; при  $x = 10$  средние издержки (на единицу продукции) равны  $y_{\text{ср}}(10) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 45$  ден. ед. Функция предельных издержек выражается производной  $y'(x) = 50 - 0,15x^2$ ; при  $x = 10$  предельные издержки составят  $y'(10) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 35$  ден. ед. Итак, если средние издержки на производство единицы продукции 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составят 35 ден. ед. ►

**Пример 7.18.** Зависимость между себестоимостью единицы продукции  $y$  (тыс. руб.) и выпуском продукции  $x$  (млрд руб.) выражается функцией  $y = -0,5x + 80$ . Найти

эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн руб.

*Решение.* По формуле (7.33) эластичность себестоимости

$$E_x(y) = \frac{-0,5x}{-0,5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При  $x = 60$   $E_{x=60}(y) = -0,6$ , т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%. ►

## ПРАКТИКУМ

### 7.11. Вычисление производных

**7.19.** Используя определение производной, найти производную функции  $y = e^x$ .

*Решение.* Применяя схему, приведенную в параграфе 7.3, получаем следующее.

$$1^\circ. y + \Delta y = e^{x+\Delta x}.$$

$$2^\circ. \Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1).$$

$$3^\circ. \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

$$4^\circ. y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

ибо  $e^{\Delta x} - 1$  и  $\Delta x$  — эквивалентные бесконечно малые величины при  $\Delta x \rightarrow 0$ . (Напомним, что в параграфе 7.5 та же формула была получена с помощью логарифмической производной.) ►

**7.20.** Найти производные функций:

$$\text{а) } y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1); \quad \text{б) } y = 5^{x^3} \ln^2 x;$$

$$\text{в) } y = \log_2 \frac{(x-2)^5}{(x+3)^2}; \quad \text{г) } y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}};$$

$$\text{д) } y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln \sqrt{x^2 + 3}.$$

*Решение.*

а) При дифференцировании следует учесть, что первое слагаемое представляет степенную функцию ( $y = \sqrt{u}$ ), ее

аргумент — логарифмическую функцию плюс постоянную ( $u = \ln x + 1$ ), а второе слагаемое — логарифмическую функцию ( $y = \ln u$ , где  $u = \sqrt{x} + 1$ ):

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} (\ln x + 1)' + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} (\sqrt{x} + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x + 1)} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right).$$

б) Данная функция представляет произведение двух функций  $5^{x^3}$  и  $\ln^2 x$ , каждая из которых является сложной функцией ( $y = 5^u$ , где  $u = x^3$ ;  $y_1 = u_1^2$ , где  $u_1 = \ln x$ ), поэтому

$$y' = (5^{x^3})' \ln^2 x + 5^{x^3} (\ln^2 x)' = \left[ 5^{x^3} \ln 5(x^3)' \right] \ln^2 x + 5^{x^3} [2 \ln x (\ln x)'] = 5^{x^3} \ln 5 \cdot 3x^2 \ln^2 x + 5^{x^3} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = 5^{x^3} \ln x (3 \ln 5 \cdot x^2 \ln x + \frac{2}{x}).$$

в) Прежде чем дифференцировать функцию, целесообразно упростить ее выражение, применяя формулы логарифмирования:

$$y = 5 \log_2 (x - 2) - 2 \log_2 (x + 3).$$

Теперь

$$y' = 5(\log_2 (x - 2))' - 2(\log_2 (x + 3))' = \frac{5}{(x - 2) \ln 2} (x - 2)' - \frac{2}{(x + 3) \ln 2} (x + 3)' = \frac{1}{\ln 2} \left[ \frac{5}{x - 2} - \frac{2}{x + 3} \right] = \frac{3x + 19}{\ln 2 (x - 2)(x + 3)}.$$

г) По правилу дифференцирования частного двух функций

$$y' = \frac{(\sin^2 x)' \sqrt{\cos 2x} - \sin^2 x (\sqrt{\cos 2x})'}{(\sqrt{\cos 2x})^2}.$$

$$\text{Учитывая, что } (\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, \\ (\sqrt{\cos 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} (\cos 2x)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} (-\sin 2x)(2x)' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}},$$

получаем после преобразований

$$y' = \frac{\sin 2x \cos^2 x}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$$

д) Представим функцию в виде  $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3)$ .  
Теперь

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)' + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 3} (x^2 + 3)' = \frac{3}{x^2 + 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + 3)} = \frac{x + \sqrt{3}}{x^2 + 3}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**7.21.** Вычислить значение производной функции  $y = f(x)$  при  $x = \pi/4$ : а)  $y = \ln \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$ ; б)  $y = \ln^4 \sin x$ .

*Решение.*

а) Вначале найдем производную функции, предварительно заметив, что  $y = \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ . Теперь

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} (1 + \operatorname{ctg}^2 x)' = \frac{1}{2(1 + \operatorname{ctg}^2 x)} \cdot 2 \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x)' = \\ &= \frac{1}{(1 + \operatorname{ctg}^2 x)} \operatorname{ctg} x \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

Решение можно упростить, если вначале преобразовать функцию  $y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\ln \sin x$ .

Находим значение производной при  $x = \pi/4$ :  $y'(\pi/4) = -\operatorname{ctg}(\pi/4) = -1$ .

б) Производная функции

$$\begin{aligned} y' &= 4(\ln \sin x)^3 (\ln \sin x)' = 4 \ln^3 \sin x \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = \frac{4 \ln^3 \sin x \cos x}{\sin x} = \\ &= 4 \ln^3 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

Значение производной при  $x = \pi/4$

$$y'(\pi/4) = 4 \ln^3 \sin(\pi/4) \cdot \operatorname{ctg}(\pi/4) = 4 \ln^3 (1/\sqrt{2}) \cdot 1 = -0,5 \ln^3 2. \quad \blacktriangleright$$

- 7.22.** Найти производные функций: а)  $y = \frac{(x^2 - 1)\cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}$ ;  
 б)  $y = x^{\sin^2 x}$ .

*Решение.*

а) Производную данной функции можно найти, используя формулы производных (7.9)–(7.15). Но проще это сделать с помощью логарифмической производной. В самом деле,

$$\ln y = \ln(x^2 - 1) + 6 \ln \cos x - \frac{5}{7} \ln x.$$

Дифференцируя, получаем  $(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{6(-\sin x)}{\cos x} - \frac{5}{7x}$ , откуда

$$y' = y(\ln y)' = \frac{(x^2 - 1)\cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}} \left( \frac{2x}{x^2 - 1} - 6 \operatorname{tg} x - \frac{5}{7x} \right).$$

б) По правилу дифференцирования степенно-показательной функции (7.27)

$$y' = \sin^2 x \cdot x^{\sin^2 x - 1} + x^{\sin^2 x} \cdot \ln(\sin^2 x)'.$$

Учитывая, что  $(\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ , после преобразований получаем

$$y' = x^{\sin^2 x} \left( \frac{\sin^2 x}{x} + \ln x \sin 2x \right). \blacktriangleright$$

**7.23.** Найти производную неявно заданной функции  $e^y - e^{-x} + xy = 0$  и вычислить ее значение при  $x = 0$ .

*Решение.* Дифференцируя, получаем

$$e^y \cdot y' - e^{-x}(-x)' + x'y + xy' = 0 \quad \text{или} \quad e^y \cdot y' + e^{-x} + y + xy' = 0,$$

откуда  $y' = -\frac{e^{-x} + y}{x + e^y}$ .

Для вычисления  $y'(0)$  найдем вначале  $y(0)$ , подставив в выражение функции  $x = 0$ :  $e^y - e^0 + 0 \cdot y$ , откуда  $e^y = 1$  и  $y = 0$ .

Теперь при  $x = 0, y = 0$   $y'(0) = -\frac{e^0 + 0}{0 + e^0} = -1$ .  $\blacktriangleright$

**7.24.** Найти производную функции, заданной параметрически:  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ .

*Решение.* По формуле (7.33)

$$y'_x = \frac{(\sin^3 t)'}{(\cos^3 t)'} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = -\operatorname{tg} t. \blacktriangleright$$

**7.25.** Найти производные второго, третьего и  $n$ -го порядков функций: а)  $y = 2^x$ ; б)  $y = \cos^2 x$ .

*Решение.*

а)  $y' = 2^x \ln 2$ ;  $y'' = 2^x \ln^2 2$ ;  $y''' = 2^x \ln^3 2$ . Очевидно, что  $y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$ .

б)  $y' = 2 \cos x (-\sin x) = -\sin 2x = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$ ;

$$y'' = -2 \cos 2x = 2 \cos(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$
;

$$y''' = 2^2 \sin 2x = 2^2 \cos(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Очевидно, что  $y^{(n)} = 2^{n-1} \cos(2x + n \cdot \frac{\pi}{2})$ .  $\blacktriangleright$

Используя определение производной, найти производные функций:

**7.26.**  $y = 5x - 2$ . **7.27.**  $y = \frac{3}{x^2 + 1}$ . **7.28.**  $y = e^{4x}$ .

**7.29.**  $y = \sqrt{1 + 2x}$ .

Найти производные функций:

**7.30.**  $y = \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^4$ . **7.31.**  $y = x^4 (8 \ln^2 x - 4 \ln x + 1)$ .

**7.32.**  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ . **7.33.**  $y = x^3 \log_2 x$ .

**7.34.**  $y = \frac{x + e^{3x}}{x - e^{3x}}$ . **7.35.**  $y = x^3 \sin(\cos x)$ .

**7.36.**  $y = \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}$ .

**7.37.**  $y = 4 \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{x}) + \sqrt{x^2 - 4x}$ .

**7.38.**  $y = \sqrt[3]{x}(e^{3x} - 5)$ . **7.39.**  $y = \sqrt[4]{1 + e^{4x}} + \sqrt{5}$ .

$$7.40. y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{1-3x}{1+3x}\right)^2}. \quad 7.41. y = \ln \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$7.42. y = 3x \ln(1-x^2). \quad 7.43. y = x^3 \ln^2 x.$$

$$7.44. y = 3\sqrt{\frac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}. \quad 7.45. y = (xe^{2x} + 3)^5.$$

$$7.46. y = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad 7.47. y = \sin(x^2 + 2^x).$$

$$7.48. y = 4e^{\sqrt{\ln x}} (1 - \sqrt{\ln x}). \quad 7.49. y = \frac{\ln \cos x}{\cos x}.$$

$$7.50. y = \cos^2 x + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$7.51. y = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^x} + 1).$$

$$7.52. y = e^x \ln \sin x. \quad 7.53. y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}.$$

$$7.54. y = \left( \frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) \sin x. \quad 7.55. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$7.56. y = \sqrt{1-x^2} \arccos x. \quad 7.57. y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2).$$

$$7.58. y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \arcsin \frac{1}{x}. \quad 7.59. y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \ln \cos x.$$

$$7.60. y = \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x. \quad 7.61. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x).$$

$$7.62. y = e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x.$$

$$7.63. y = \sqrt{4x-x^2} + 4 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Найти производные функций и вычислить их значения при  $x = x_0$ :

$$7.64. y = \sqrt{1 + \ln^2 x}; \quad x_0 = 1. \quad 7.65. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 12}); \quad x_0 = 2.$$

$$7.66. y = \sin x \cdot e^{\cos x}; \quad x_0 = \frac{\pi}{2}. \quad 7.67. y = \ln 4 \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}; \quad x_0 = 0.$$

Используя логарифмическую производную, найти производные функций:

$$7.68. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$7.69. y = x^{\sqrt{\ln x}}.$$

$$7.70. y = x^{-x} e^{-2x}.$$

$$7.71. y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Найти производные  $x'_y$  обратных функций:

$$7.72. y = x - \cos x.$$

$$7.73. y = 2x + x^3.$$

$$7.74. y = x^2 - 3 \cos 2x.$$

$$7.75. y = 2^x \ln(1 - \sqrt{x}).$$

Найти производные  $y'_x$  от неявных функций:

$$7.76. 2x + y - 4 = 0.$$

$$7.77. x \ln y + y \ln x = 0.$$

$$7.78. x \cos y - y \sin x = 0.$$

$$7.79. \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0.$$

$$7.80. xy - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0.$$

$$7.81. \operatorname{arctg}(x + y) = x.$$

$$7.82. \ln y + \frac{x}{y} - a = 0.$$

$$7.83. \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

$$7.84. x^y - y^x = 0.$$

$$7.85. e^x + e^y - e^{xy} - 1 = 0.$$

Найти производные функций, заданных параметрически:

$$7.86. \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t^3. \end{cases}$$

$$7.87. \begin{cases} x = \frac{1}{t+1}; \\ y = \frac{t}{t+1}. \end{cases}$$

$$7.88. \begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$$

$$7.89. \begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$$

Найти производные второго порядка функций:

$$7.90. y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1.$$

$$7.91. y = x^2 \sqrt{1-x^2}.$$

$$7.92. y = x \ln(x+1).$$

$$7.93. y = \sin^2 3x.$$

$$7.94. y = \frac{x+1}{2x+3}.$$

$$7.95. \begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$$



Найти производные  $n$ -го порядка функций:

7.96.  $y = xe^x$ .

7.97.  $y = \ln x$ .

7.98.  $y = 5^x$ .

7.99.  $y = \sin x$ .

7.100.  $y = \frac{1}{3x+5}$ .

7.101.  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

7.102. Показать, что функция  $y = 2\operatorname{tg}(2x - 1)$  удовлетворяет уравнению  $y'' = 2yy'$ .

7.103. Показать, что функция  $y = 2e^{3x} - e^{-3x}$  удовлетворяет уравнению  $yy''' = y'y''$ .

7.104. Показать, что функция  $y = (1 - \frac{x^2}{4})\cos x + (1 + \frac{x}{4})\sin x$  удовлетворяет уравнению  $y'' + y = x\sin x$ .

## 7.12. Геометрические и механические приложения производной

7.105. Дана кривая  $y = \frac{x^2}{4} - x$ . Составить уравнения касательных: а) в точках пересечения кривой с прямой  $3x + 2y - 4 = 0$ ; б) параллельной и перпендикулярной этой прямой; в) проходящих через точку  $(2; -5)$ .

*Решение.*

а) 1. Найдем точки пересечения двух линий, решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} - x, \\ 3x + 2y - 4 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4, \\ y_2 = 8. \end{cases}$$

2. Найдем производную функции  $y' = \frac{1}{2}x - 1$ . Значения производной в найденных точках  $y'(2) = 0$ ,  $y'(-4) = -3$ .

3. Уравнения касательных по формуле (7.5) будут:  $y + 1 = 0$  и  $y - 8 = -3(x + 4)$  или  $3x + y + 4 = 0$  (рис. 7.17, прямые 1 и 2).

б) Угловой коэффициент заданной прямой  $k = -\frac{3}{2}$ , а прямой, параллельной и перпендикулярной заданной, соответственно  $k_3 = k = -\frac{3}{2}$  и  $k_4 = -\frac{1}{k} = \frac{2}{3}$ . Поэтому точки, в

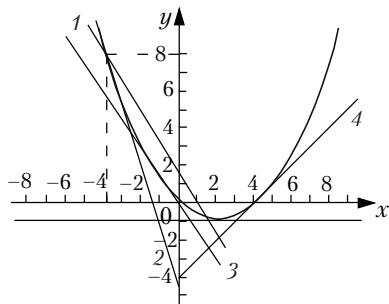


Рис. 7.17

которых касательная к кривой параллельна и перпендикулярна данной прямой, находятся из уравнений  $f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{3}$ , откуда, соответственно  $x_1 = -1$  и  $x_2 = \frac{10}{3}$ .

Найдем ординаты кривой в полученных точках

$$f(-1) = \frac{5}{4} \quad \text{и} \quad f\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{5}{9}.$$

Соответствующие уравнения касательных будут:  $y - \frac{5}{4} = -\frac{3}{2}(x+1)$  или  $6x + 4y + 1 = 0$  и  $y + \frac{5}{9} = \frac{2}{3}(x - \frac{10}{3})$  или  $6x - 9y - 25 = 0$  (рис. 7.17, прямые 3 и 4).

в) Точка  $(2; -5)$  не лежит на данной кривой. Ее координаты должны удовлетворять уравнению касательной (7.5)

или  $y - (\frac{x_0^2}{4} - x_0) = \frac{1}{2}(x_0 - 1)(x - x_0)$ , где  $x_0$  — абсцисса точки

касания;  $f(x_0) = \frac{x_0^2}{4} - x_0$ ;  $f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0 - 1$ .

Следовательно,

$$-5 - (\frac{x_0^2}{4} - x_0) = \frac{1}{2}(x_0 - 1)(2 - x_0),$$

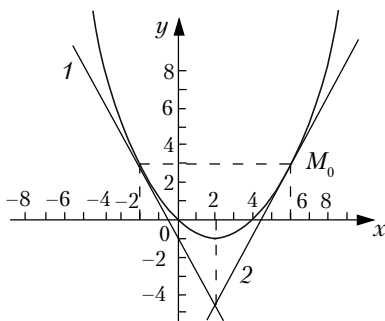


Рис. 7.18

откуда (после преобразований)  $x_0^2 - 4x_0 - 12 = 0$  и  $(x_0)_1 = -2$ ;  $(x_0)_2 = 6$ . Подставляя полученные значения  $x_0$ , найдем два уравнения касательных:  $y = -2x - 1$  и  $y = 2x - 9$  (рис. 7.18, прямые 1 и 2). ►

**7.106.** Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону  $s(t) = 4 + 8t - 5t^2$ , где высота  $s(t)$  изме-

руется в метрах, а время  $t$  — в секундах. Найти: а) скорость тела в начальный момент; б) скорость тела в момент соприкосновения с землей; в) наибольшую высоту подъема тела.

*Решение.*

а) Скорость тела в момент  $t$  равна производной  $s'(t)$ , т.е.  $v(t) = s'(t) = 8 - 10t$ ; в момент  $t = 0$   $v(0) = s'(0) = 8$  м/с.

б) В момент соприкосновения с землей  $s(t) = 0$ , т.е.  $4 + 8t - 5t^2 = 0$ , откуда  $t_1 = 2$ ;  $t_2 = -0,4$  (не подходит по смыслу, ибо  $t > 0$ ). Скорость тела в момент  $t = 2$   $v(2) = s'(2) = 8 - 10 \cdot 2 = -12$  м/с (минус указывает на то, что скорость тела в момент  $t = 2$  противоположна направлению начальной скорости).

в) Наибольшая высота подъема  $s_{\text{наиб}}(t)$  будет в момент, когда скорость тела равна нулю и происходит переход от подъема к опусканию тела, т.е.  $v(t) = 8 - 10t = 0$ , откуда  $t = 0,8$ .

Наибольшая высота подъема  $s_{\text{наиб}}(t) = s(0,8) = 5 + 8 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,8^2 = 8,2$  м. ►

**7.107.** Какой угол образует с осью абсцисс касательная к графику функции, проведенная в указанной точке? Написать уравнение касательной: а)  $y = x^2 - 5x + 8$ ,  $x_0 = 3$ ; б)  $y = \ln(1 - x)$ ;  $x_0 = 0$ .

**7.108.** Составить уравнение касательной и нормали к кривой  $y = \frac{8}{4 + x^2}$ : а) в точке  $x = 2$ ; б) в точке пересечения с осью  $Oy$ .

**7.109.** Составить уравнение касательной к кривой  $y = 5x - x^2$ , параллельной прямой, проходящей через точки  $(1; 7)$  и  $(-2; -2)$ .

**7.110.** Составить уравнения касательных к кривой  $y = x^3 + 2x + 1$ , перпендикулярных прямой  $5y + x - 4 = 0$ .

**7.111.** Составить уравнение касательной к кривой  $y = \ln(x - 1)$ , перпендикулярной прямой, образующей с осью абсцисс угол  $135^\circ$ .

**7.112.** Составить уравнения касательных к кривой  $y = \frac{2x-7}{x-3}$ : а) параллельных прямой  $4x - y - 2 = 0$ ; б) перпендикулярных прямой  $2x + 2y - 5 = 0$ .

**7.113.** Дана кривая  $y = x^2 - 2x$ . Составить уравнения касательных: а) в точках пересечения кривой с прямой  $3x + y - 2 = 0$ ; б) параллельной и перпендикулярной этой прямой; в) проходящих через точку  $(1; -5)$ .

**7.114.** Составить уравнение касательной к кривой  $y = e^{-x}$ : а) проходящей параллельно биссектрисе второго и четвер-

того координатных углов; б) отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный  $-1$ .

**7.115.** Составить уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{2x+3}{x+4}$ , проходящей через точку  $M(6; 2)$ .

**7.116.** Составить уравнения общих касательных к кривым  $y = x^2$  и  $y = -2x^2 + 4x - 4$ .

**7.117.** Тело движется прямолинейно по закону  $s(t) = \frac{4t+3}{t+4}$ , где  $s$  измеряется в метрах, а  $t$  — в секундах. Найти скорость и ускорение тела в момент  $t = 6$ .

**7.118.** Тело движется прямолинейно по закону  $s(t)$ . Определить скорость и ускорение тела в указанный момент времени  $t_0$ : а)  $s(t) = t^3 - 2t^2 - t$ ;  $t_0 = 2$ ; б)  $s(t) = \frac{2t+1}{t+3}$ ;  $t_0 = 7$ .

**7.119.** Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону:  $h(t) = 9t - 2t^2$ . Найти начальную скорость и ускорение тела ( $t_0 = 0$ ) и максимальную высоту подъема, при которой скорость  $v(t) = 0$ .

### 7.13. Дифференциал функции

**7.120.** Найти дифференциалы первого и второго порядков функции  $y = x^2 \ln x$ .

*Решение.* Учитывая, что  $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$ , по формуле (7.37)  $d^2y = (2 \ln x + 1)dx$ .

Учитывая, что  $f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3$ , по формуле (7.43)  $d^2y = (2 \ln x + 3)dx^2$ . ►

**7.121.** Используя понятие дифференциала, вычислить приближенно  $\arccos 0,49$ .

*Решение.* Получим вначале приближенную формулу для вычисления значений арккосинуса. Полагая  $f(x) = \arccos x$ , находим  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  и в соответствии с формулой (7.40)

$$\arccos(x + \Delta x) \approx \arccos x - \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Взяв в качестве  $x = 0,5$ ;  $\Delta x = -0,01$ , получим

$$\arccos 0,49 \approx \arccos 0,5 - \frac{(-0,01)}{\sqrt{1-0,5^2}} = \frac{\pi}{3} + \frac{0,01}{\sqrt{0,75}} \approx 1,059. \text{ ►}$$

Найти выражения приращений функций и их дифференциалов и вычислить их значения при заданных  $x$  и  $\Delta x$ :

**7.122.**  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ ;  $x = 2$ ;  $\Delta x = 0,01$ .

**7.123.**  $y = \sqrt{1+x^2}$ ;  $x = 0$ ;  $\Delta x = -0,01$ .

Найти дифференциалы первого порядка функций:

**7.124.**  $y = \frac{1}{2}\sqrt{49-x^2} + \frac{49}{2}\arcsin \frac{x}{7}$ . **7.125.**  $y = \frac{1}{12}\ln \frac{x-6}{x+6}$ .

**7.126.**  $y = \arcsin x^2$ .

**7.127.**  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ .

**7.128.**  $y = x^4 - 3x^2 + 4$ .

**7.129.**  $y = \sin^3 2x$ .

Найти дифференциалы второго порядка функций:

**7.130.**  $y = 4x^5 - 7x^2 + 3$ .

**7.131.**  $y = \cos 2x$ .

**7.132.**  $y = 4^{-x^2}$ .

**7.133.**  $y = x \sin x$ .

Используя понятие дифференциала, вычислить:

**7.134.**  $\sqrt[6]{67,84}$ .

**7.135.**  $\sqrt[5]{255,15}$ .

**7.136.**  $e^{1,03}$ .

**7.137.**  $\ln(e+0,272)$ .

**7.138.**  $\ln(0,1+\sqrt{0,1^2+1})$ .

**7.139.**  $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{0,99}{1,01}}$ .

**7.140.** Используя понятие дифференциала, выяснить, с какой точностью должен быть измерен радиус круга, чтобы его площадь можно было определить с точностью до 10%?

**7.141.** Используя понятие дифференциала, определить, на сколько процентов изменится величина степени  $2,1^{3,1}$  при изменении основания степени на 5%.

## 7.14. Экономические приложения производной

**7.142.** Объем продукции  $u$  (ед.), произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением  $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$  (ед.),  $1 \leq t \leq 8$ , где  $t$  — рабочее время, часы. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее

изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

*Решение.* Производительность труда выражается производной

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \quad (\text{ед/ч}),$$

а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной  $z'(t)$  и логарифмической производной  $T_z(t) = [\ln z(t)]'$ :

$$z'(t) = -5t + 15 \quad (\text{ед/ч}^2),$$

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40} \quad (\text{ед/ч}).$$

В заданные моменты времени  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 8 - 1 = 7$  соответственно имеем:  $z(1) = 112,5$  (ед/ч),  $z'(1) = 10$  (ед/ч<sup>2</sup>),  $T_z(1) = 0,09$  (ед/ч) и  $z(7) = 82,5$  (ед/ч),  $z'(7) = -20$  (ед/ч<sup>2</sup>),  $T_z(7) = -0,24$  (ед/ч).

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака  $z'(t)$  и  $T_z(t)$  с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы. ►

**7.143.** Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид:  $y(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250$  (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значения при  $x = 10$ .

*Решение.* Найдем производную  $y'(x)$  и ее значение  $y'(10)$  — предельные издержки производства:

$$y'(x) = 0,3x^2 - 2,4x + 5; \quad y'(10) = 30 - 24 + 5 = 11.$$

Средние издержки

$$y_1(x) = \frac{0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250}{x} = 0,1x^2 - 1,2x + 5 + \frac{250}{x};$$

$$y_1(10) = 10 - 12 + 5 + 25 = 28.$$

Это означает, что при данном уровне производства (количестве выпускаемой продукции) средние затраты на произ-

водство одной единицы продукции составляют 28 ден. ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме приблизительно в 11 ден. ед. ►

**7.144.** Зависимость между спросом  $q$  и ценой  $p$  единицы продукции, выпускаемой некоторым предприятием, задается соотношением  $q = 18 - \sqrt{p}$ . Найти эластичность спроса. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене единицы продукции можно дать руководителям предприятия при  $p = 100$  и  $p = 150$  ден. ед.?

*Решение.* Эластичность спроса по формуле (7.35)

$$E_p(q) = \frac{p}{18 - \sqrt{p}} (18 - \sqrt{p})' = -\frac{\sqrt{p}}{2(18 - \sqrt{p})}.$$

Спрос нейтрален, если  $|E_p(q)| = 1$ . Решая это уравнение, имеем  $p = 144$  ден. ед. Далее, принимая во внимание, что  $p > 0$  и  $q > 0$  (т.е.  $p < 324$ ) получаем, что если  $0 < p < 144$ , то спрос является неэластичным; а при  $144 < p < 324$  — эластичным.

*Рекомендации.* Если цена единицы продукции составляет 100 ден. ед., то спрос является неэластичным и можно повысить цену продукции, выручка при этом будет расти. При стоимости продукции 150 ден. ед. спрос является эластичным. В данном случае целесообразно рассмотреть предложение о снижении цены, выручка от реализации будет расти в результате увеличения спроса на продукцию. ►

**7.145.** Опытным путем установлены функции спроса  $q = \frac{p+8}{p+2}$  и предложения  $s = p + 0,5$ , где  $q$  и  $s$  — количество товара, соответственно, покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени,  $p$  — цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравниваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% относительно равновесной.

*Решение.*

а) Равновесная цена определяется из условия  $q = s$ :

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0,5, \text{ откуда } p = 2, \text{ т.е. равновесная цена равна}$$

2 ден. ед.

б) Найдем эластичности спроса и предложения по формуле (7.33):

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для равновесной цены  $p = 2$  имеем  $E_p = {}_2(q) = -0,3$ ;  $E_p = {}_2(s) = 0,8$ .

Так как полученные значения эластичностей по (абсолютной величине) меньше единицы, то и спрос, и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. Так, при увеличении цены  $p$  на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

в) При увеличении цены  $p$  на 5% относительно равновесной спрос уменьшается на  $5 \cdot 0,3 = 1,5\%$ , следовательно, доход возрастает на 3,5%. ►

**7.146.** Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна единице?

*Решение.* Пусть полные затраты предприятия  $y$  выражаются функцией  $y = f(x)$ , где  $x$  — объем выпускаемой продукции. Тогда средние затраты на производство единицы продукции  $y_{\text{ср}} = \frac{y}{x}$ . Найдем предельные издержки предприятия  $y'$ . По условию  $E_x(y) = 1$ , т.е. учитывая (7.33),  $\frac{x}{y} y' = 1$ , откуда  $y' = \frac{y}{x}$ . Итак,  $y' = y_{\text{ср}}$ , т.е. предельные издержки равны средним издержкам (заметим, что полученное утверждение справедливо только для линейных функций издержек). ►

**7.147.** Задана функция  $y = f(x)$  полных затрат предприятия на производство  $x$  единиц продукции. Определить связь между коэффициентами эластичности полных и средних затрат.

*Решение.* Средние затраты на единицу продукции составляют  $y_1 = \frac{y}{x}$ . По формуле (7.35) коэффициенты эластичности полных и средних затрат равны:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y';$$



$$E_x(y_1) = \frac{x}{y_1} \cdot y'_1 = x \frac{x}{y} \left( \frac{y}{x} \right)' = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x}{y} y' - 1 = E_x(y) - 1,$$

т.е. коэффициент эластичности средних затрат на единицу меньше коэффициента эластичности полных затрат. ►

**7.148.** Объем производства зимней обуви  $u$  (ед.), выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением  $u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$  (ед.), где  $t$  — календарный месяц года.

Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения: а) в начале года ( $t = 0$ ); б) в конце года ( $t = 12$ ).

**7.149.** Зависимость между издержками производства  $y$  (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции  $x$  (ед.) выражается функцией  $y = 10x - 0,04x^3$ . Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.

**7.150.** Функция полных затрат в зависимости от объема выпускаемой продукции задана соотношением:  $y = x^3 - 2x^2 + 96$ . При каком объеме производства предельные и средние затраты совпадают? Найти коэффициенты эластичности полных и средних затрат при данном объеме.

**7.151.** Зависимость между количеством выпускаемых деталей в партии  $x$  (тыс. ед.) и затратами на их изготовление  $y$  (тыс. руб.) для предприятий отрасли выражается уравнением  $y = \frac{27}{x} + 6$ . Найти эластичность затрат для предприятий, выпускающих по 10 тыс. деталей в партии.

**7.152.** Найти эластичность функции спроса при заданной стоимости  $p$ :

а)  $q + 10p = 50$ ;  $p = 3$ ; б)  $5q + 3p = 70$ ;  $p = 10$ ; в)  $p^2 + p + 4q = 26$ ;  $p = 2$  и  $p = 4$ .

**7.153.** Для следующих функций спроса найти значение  $p$ , при которых спрос является эластичным: а)  $2p + 3q = 12$ ; б)  $q = 50(15 - \sqrt{p})$ ; в)  $q = \sqrt[3]{3600 - p^2}$ .

**7.154.** Выручка от продажи конфет составляет  $p = 100x - 0,5x^2$ , где  $x$  — объем проданной продукции (тыс. ед.). Найти среднюю и предельную выручки, если продано: а) 10 тыс. ед.; б) 60 тыс. ед.

**7.155.** Себестоимость производства телевизоров  $y$  (тыс. руб.) описывается функцией  $y = 0,01x^2 - 0,5x + 12$  ( $5 \leq x \leq 50$ ), где  $x$  — объем выпускаемой продукции в месяц (тыс. ед.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 20 и 40 тыс. ед. продукции.

**7.156.** Себестоимость продукции  $y$  связана с объемом выпускаемой продукции  $x$  уравнением:  $y = 6 \ln(1 + 3x)$ . Опреде-

лить среднюю и предельную себестоимости выпускаемой продукции при объеме, равном 10 ед.

**7.157.** Зависимость между себестоимостью единицы продукции  $y$  (руб.) и выпуском продукции  $x$  (млн руб.) выражается уравнением  $y = -0,5x + 80$ . Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции на 30 млн руб.

**7.158.** Зависимость между себестоимостью готовой продукции предприятия  $y$  (млн руб.) и объемом выпускаемых изделий  $x$  (тыс. шт.) выражается уравнением:  $y = \sqrt{x+4} - 2$ . Найти эластичность себестоимости продукции предприятия, выпускающего 12 тыс. шт. изделий. Какие рекомендации можно дать руководителям предприятий об изменении величины объема выпускаемой продукции?

**7.159.** Зависимость между объемом выпуска готовой продукции  $y$  (млн руб.) и объемом производственных фондов  $x$  (млн руб.) выражается уравнением:  $y = 0,6x - 4$ . Найти эластичность выпуска продукции для предприятия, имеющего фонды в размере 40 млн руб.

**7.160.** Функции спроса  $q$  и предложения  $s$  от цены  $p$  выражаются соответственно уравнениями:  $q = 7 - p$  и  $s = p + 1$ .

Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5% относительно равновесной.

**7.161.** Функции спроса  $q$  и предложения  $s$  на некоторый товар от его цены  $x$  задаются уравнениями:  $q = \frac{2x+15}{x+5}$ ;  
 $s = \frac{3x+15}{x+10}$ .

Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; в) изменение дохода при изменении равновесной цены на 5%.

**7.162.** Зависимость потребления  $y$  от дохода  $x$  задается функцией  $y = \frac{ax}{x+b}$ . Показать, что эластичность функции потребления от дохода не зависит от параметра  $a$  и стремится к нулю при неограниченном возрастании дохода.

**7.163.** Функция потребления некоторой страны имеет вид:  $C(x) = 13 + 0,25x + 0,37x^{4/5}$ , где  $x$  — совокупный национальный доход.

Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 32.

**7.164.** Функция сбережения некоторой страны имеет вид:  
 $S(x) = 25 - 0,53x - 0,41x^{2/3}$ , где  $x$  — совокупный национальный доход.

Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27.

## Контрольные задания по главе 7

### «Производная и дифференциал»

№	Вариант 7.1	Вариант 7.2	Вариант 7.3
1	Найти производные функций:		
а)	$y = (3x - 1) \times \ln(\sqrt{1 + 2x^2} + 2x);$	$y = (5x - 4) \times \ln(\sqrt{1 - 3x^2} - 3x);$	$y = (2 - x) \times \ln(\sqrt{1 + 5x^2} + 5x);$
б)	$y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2};$	$y = \arccos \sqrt{1 - x^2}$ ( $x > 0$ );	$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{1 - x^2}$
2	Показать что функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y, y', y'') = 0$ :		
	$y = 3e^{x^2};$ $xyy'' - xy'^2 - xy' = 0$	$y = 2xe^{-\frac{1}{x}};$ $x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0$	$y = \frac{1}{2}e^{2x+1}(x - \frac{1}{2});$ $xy'' - y' \ln \frac{y'}{x} = 0$
3	Найти производную функции, заданной параметрически:		
	$\begin{cases} x = e^{-2t} \sin 2t, \\ y = e^{2t} \cos 2t \end{cases}$	$\begin{cases} x = e^{2t} \sin 2t, \\ y = e^{-2t} \cos 2t \end{cases}$	$\begin{cases} x = e^{3t} \sin 3t, \\ y = e^{-3t} \cos 3t \end{cases}$
4	Найти производную $n$ -го порядка:		
	$y = \frac{1}{2x - 3}$	$y = \frac{1}{1 - 3x}$	$y = \frac{1}{5x + 2}$
5	Найти $\Delta y$ и $dy$ функции $y = 3x + x^2$ при:		
	$x = 2, \Delta x = 0,001$	$x = 3, \Delta x = 0,002$	$x = 1, \Delta x = 0,003$
6	Вычислить приближенно с помощью дифференциала:		
а)	$\sqrt{4,08};$	$\sqrt{8,94};$	$\sqrt[3]{8,012};$

№	Вариант 7.1	Вариант 7.2	Вариант 7.3
б)	$e^{0,015}$	$\sin(\pi + 0,01)$	$\ln 0,99$
7	С помощью дифференциала выяснить, на сколько процентов увеличится $y = x^{0,75}$ , если $x$ увеличится на:		
	2%	3%	1%
8	Составить уравнения касательных к графику функции:		
	$y = \frac{2x+1}{x+1}$ , перпендикулярных прямой $y + x + 7 = 0$	$y = \frac{x+2}{x+4}$ , параллельных пря- мой $y - 2x + 1 = 0$	$y = \frac{2-x}{2x-1}$ , проходящих через точку $M(2; -2)$
9	Для следующих функций спроса $q = f(p)$ найти значение стоимости единицы продукции $p$ , при которых спрос является эластичным:		
	$q = \frac{1}{3}(100 - 5p)$	$q = \frac{1}{5}(20 - 2p)$	$q = \frac{1}{7}(80 - 4p)$

### Тест 7

1. Выяснить, какие функции являются непрерывными, но не дифференцируемыми в точке  $x_0$ :

1)  $y = |x + 2|$ ,  $x_0 = 2$ ; 2)  $y = |x - 5|$ ,  $x_0 = 5$ ;

3)  $y = \sqrt[5]{x - 8}$ ,  $x_0 = 8$ ; 4)  $y = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$ ,  $x_0 = \pi$ ;

5)  $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ ,  $x_0 = 0$ .

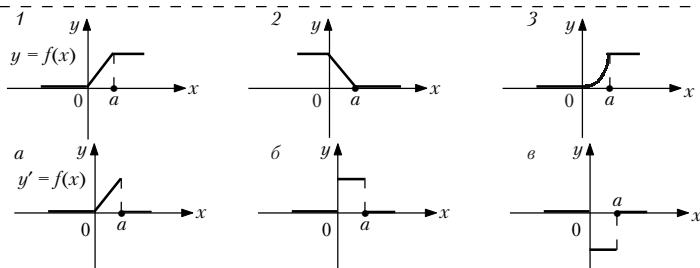
2. Выяснить, какие из функций являются дифференцируемыми в точке  $x_0 = 1$ : 1)  $y = \operatorname{tg}(1 + \sqrt{x})$ ;

2)  $y = x \arccos x$ ; 3)  $y = \sqrt[5]{x^2 - 8x + 3}$ ; 4)  $y = x^2 \ln(1 - x^2)$ ;

5)  $y = |3x - 2|$ .

3. При каком значении параметра  $a$  функция  $y = \ln(x + a\sqrt{x^2 - 1})$  является дифференцируемой в точке  $x_0 = 1$ ?

4. Установить соответствие между графиками функций  $y = f(x)$  (1, 2, 3) и их производными  $y' = f'(x)$  (a, б, в):



Вычислить значения производных функции в точке  $x_0$ :

5.  $y = (x^2 + 5x - 4) \ln x$ ,  $x_0 = 1$ .

6.  $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^x + 1}) - 2\sqrt{2}x$ ,  $x_0 = 0$ .

7. Вычислить значение производной функции  $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ , заданной неявно в точке  $M(2; -1)$ .

8. Вычислить значение производной функции  $x = \arctg t$ ,  $y = \arctg \sqrt{t-1}$ , заданной параметрически при  $t = 2$ .

9. Вычислить значение дифференциала функции  $y = \frac{5}{11}(\arctg(1+x^2) - \sqrt{3x^2+1})$  при  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0,1$ .

10. Вычислить приближенно (с помощью дифференциала)  $\ln 1,05$ .

11. Составить уравнение касательной к графику  $y = 4x - x^2$  в точке  $x_0 = 3$ .

Ответ:  $y = kx + b$ , где  $k = \dots$ ;  $b = \dots$

12. При каком значении  $x_0$  касательная к графику функции  $y = 2\sqrt{2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$  наклонена к оси абсцисс под углом  $45^\circ$ ?

13. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы его объем можно было определить с точностью до 6%? (Использовать понятие дифференциала.)

14. Зависимость между издержками производства сигарет  $y$  и процентным содержанием вредных веществ в них  $x$  выражается функцией  $y = \frac{10\,000}{x} - 100$ . Найти средние и предельные издержки производства, если количество вредных веществ составляет 10%.

15. Спрос  $q$  на некоторые товары народного потребления зависит от их стоимости  $p$  следующим образом:  $q = \frac{6000}{\sqrt{p}} - 40$ . Найти, при каком значении  $p$  спрос будет нейтральным (с единичной эластичностью).

## Глава 8

# ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

Прежде чем перейти к наиболее важным приложениям производной при исследовании функций и построении их графиков, рассмотрим несколько основных теорем.

#### 8.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

**Теорема Ферма<sup>1</sup>.** Если дифференцируемая на промежутке  $X$  функция  $y = f(x)$  достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке  $x_0$  этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е.  $f'(x_0) = 0$ .

□ Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на промежутке  $X$  и в точке  $x_0 \in X$  принимает наименьшее значение (рис. 8.1).

Тогда  $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$ , если  $x_0 + \Delta x \in X$  и, следовательно, величина  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$  при достаточно малых  $\Delta x$  независимо от знака  $\Delta x$ .

Отсюда  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$  при  $\Delta x > 0$  и  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$  при  $\Delta x < 0$ . Переходя к

пределу при  $\Delta x \rightarrow 0+$  (справа) и при  $\Delta x \rightarrow 0-$  (слева), получаем  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ .

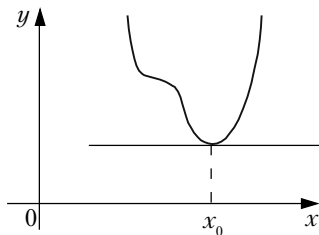


Рис. 8.1

<sup>1</sup> Ферма Пьер (1601–1655) — французский математик.

По условию функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , следовательно, ее предел при  $\Delta x > 0$  не должен зависеть от способа стремления  $\Delta x > 0$  (справа или слева), т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ откуда следует, что } f'(x_0) = 0.$$

Аналогично рассматривается случай, когда функция принимает в точке  $x_0$  наибольшее значение. ■

*Геометрический смысл* теоремы Ферма очевиден: *в точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка  $X$ , касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.*

Теорема Ферма может быть использована для доказательства так называемых *теорем о среднем*, к рассмотрению которых мы переходим.

**Теорема Ролля**<sup>2</sup>. Пусть функция  $y = f(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
- 2) дифференцируема на интервале  $(a, b)$ ;
- 3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е.

$$f(a) = f(b).$$

*Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой производная функции равна нулю:  $f'(\xi) = 0$ .*

□ На основании теоремы Вейерштрасса (см. параграф 6.7) функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений. Если оба эти значения достигаются на концах отрезка, то по условию они равны (т.е.  $m = M$ ), а это значит, что функция тождественно постоянна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда производная равна нулю во всех точках этого отрезка. Если же хотя бы одно из этих значений — максимальное или минимальное — достигается внутри отрезка (т.е.  $m < M$ ), то производная в соответствующей точке равна нулю в силу теоремы Ферма. ■

Отметим *геометрический смысл* теоремы Ролля (рис. 8.2): *найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс; в этой точке производная и будет равна нулю* (заметим, что на рис. 8.2 таких точек две:  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ).

<sup>1</sup> Роль Мишель (1652–1719) — французский математик.

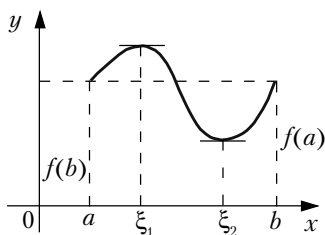


Рис. 8.2

Если  $f(a) = f(b) = 0$ , то теорему Ролля можно сформулировать следующим образом: *между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.*

Следует отметить, что все условия теоремы Ролля существенны и при невыполнении хотя бы одного из них заключение теоремы может оказаться неверным. Так, для функций, приведенных на рис. 8.3, нарушено только одно условие: на рис. 8.3, *а* — непрерывность на отрезке  $[a, b]$ , на рис. 8.3, *б* — дифференцируемость на интервале  $(a, b)$ , на рис. 8.3, *в* — равенство значений  $f(a) = f(b)$ .

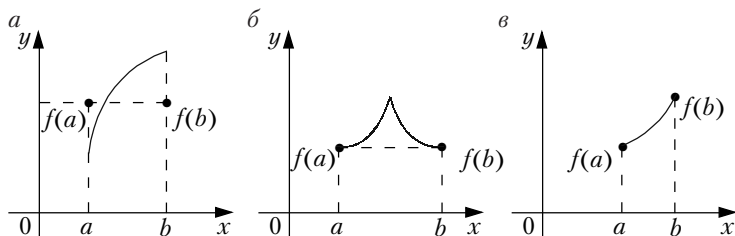


Рис. 8.3

В результате не существует такой точки  $\xi \in (a, b)$ , в которой  $f'(\xi) = 0$ .

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

**Теорема Лагранжа<sup>1</sup>.** Пусть функция  $y = f(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
- 2) дифференцируема на интервале  $(a, b)$ .

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке, т.е.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (8.1)$$

<sup>1</sup> Лагранж Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик и механик.



□ Введем новую функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция  $g(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля, т.е. она непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и принимает на его концах равные значения:

$$g(a) = f(a);$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Следовательно, существует точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что  $g'(\xi) = 0$  или  $g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ , откуда  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . ■

Заключение (8.1) теоремы Лагранжа может быть записано и в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (8.2)$$

Выясним *механический* и *геометрический* смыслы теоремы Лагранжа.

Приращение  $f(b) - f(a)$  — это изменение функции на отрезке  $[a, b]$ ;  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  — средняя скорость изменения функции на этом отрезке; значения же производной в точке —

это «мгновенная» скорость изменения функции. Таким образом, теорема утверждает: *существует хотя бы одна точка внутри отрезка, такая, что скорость изменения функции в ней равна средней скорости изменения функции на этом отрезке.*

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа приведена на рис. 8.4.

Если перемещать прямую  $AB$  параллельно начальному положению, най-

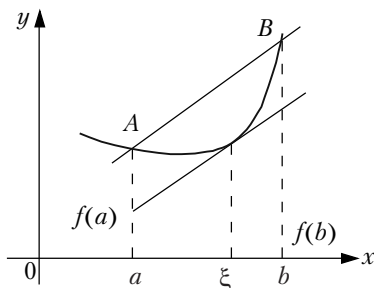


Рис. 8.4

дётся хотя бы одна точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой касательная к графику  $f(x)$  и хорда  $AB$ , проведенная через концы дуги  $AB$ , параллельны (ибо в соответствии с формулой (4.9) угловой коэффициент секущей  $k_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , а касательной —  $k = f'(\xi)$ ).

**Следствие.** Если производная функции  $f(x)$  равна нулю на некотором промежутке  $X$ , то функция тождественно постоянна на этом промежутке.

□ Возьмем на рассматриваемом промежутке  $X$  отрезок  $[a, x]$ . Согласно теореме Лагранжа  $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$ , где  $a < \xi < x$ . По условию  $f'(\xi) = 0$ , следовательно,  $f(x) - f(a) = 0$ , т.е.  $f(x) = f(a) = \text{const}$ . ■

Теорема Лагранжа допускает следующее обобщение.

**Теорема Коши.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируемы на интервале  $(a, b)$  и  $g'(x) \neq 0$  на  $(a, b)$ , то существует точка  $\xi \in (a, b)$ , такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Очевидно, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши (при  $g(x) = x$ ).

## 8.2. Правило Лопиталё<sup>1</sup>

**Теорема.** Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Итак, если имеется неопределенность вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$  или  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ , то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (8.3)$$

□ Рассмотрим доказательство теоремы для неопределенности вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$  при  $x \rightarrow x_0$ .

<sup>1</sup> Лопиталь Гийом Франсуа (1661–1704) — французский математик.

Будем предполагать, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , а также их производные непрерывны в точке  $x_0$ , причем  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = 0$ .

$$\text{В этом случае } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Применяя теорему Лагранжа для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  на отрезке  $[x, x_0]$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_1)(x - x_0)}{g'(\xi_2)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)},$$

где  $x < \xi_1 < x_0$ ,  $x < \xi_2 < x_0$ .

При  $x \rightarrow x_0$  в силу непрерывности производных  $f'(x)$  и  $g'(x)$  имеем  $f'(\xi_1) \rightarrow f'(x_0)$  и  $g'(\xi_2) \rightarrow g'(x_0)$ . Используя теорему о пределе частного двух функций, получаем равенство (8.3). ■

**Замечание.** Обращаем внимание, что в правой части формулы (8.3) берется *отношение* производных, а не производная отношения.

**Пример 8.1.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^k}$ .

*Решение.*

а) Имеем неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ . Применяя правило Лопиталья, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

б) Имеем также неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ . Применим правило Лопиталья  $k$  раз, если  $k$  — целое, и  $[k] + 1$  раз, (где  $[k]$  — целая часть числа  $k$ ), если  $k$  — нецелое:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^{k-1}}{a^x \ln a} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^x \ln^2 a} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k(k-1)\dots(k-[k])x^{k-[k]-1}}{a^x \ln^{[k]+1} a}. \end{aligned}$$

При каждом применении правила Лопиталья степень числителя будет уменьшаться на единицу и через  $[k] + 1$  раз станет отрицательной, т.е. числитель обратится в бесконечно малую величину, если  $k$  — не целое число; если  $k$  — целое, то в постоянную величину. Знаменатель же будет оставаться бесконечно большой величиной. Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^k} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^k} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log_a x)'}{(x^k)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{kx^{k-1} \ln a} = \\ &= \frac{1}{k \ln a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Правило Лопиталья дает возможность сравнивать бесконечно большие величины: степенная функция  $x^n$  — бесконечно большая более высокого порядка, чем логарифмическая  $\log_a x$ , а показательная  $a_x$  — бесконечно большая более высокого порядка, чем степенная  $x^n$ ; это означает,

$$\text{что } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\log_a x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty \text{ и тем более } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{\log_a x} = \infty.$$

**Пример 8.2.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ .

*Решение.*

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}.$$

Неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  по-прежнему сохраняется.

Применим правило Лопиталья еще раз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$$

б) Имеем неопределенность вида  $[0 \cdot \infty]$ . Переписывая

данное выражение в виде  $\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ , по-

лучаем неопределенность вида  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ . Применяя правило Лопиталья, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0. \blacktriangleright$$

Заметим, что если имеется неопределенность вида  $[0^0]$  или  $[\infty^0]$  при вычислении предела функции  $f(x)^{g(x)}$ , то логарифм этой функции представляет собой неопределенность вида  $[0 \cdot \infty]$ .

При этом

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) \ln f(x)}. \quad (8.3^*)$$

**Пример 8.3.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^x$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(\sin x) &= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-x) \cos x \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = 0, \text{ так как } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \end{aligned}$$

Отсюда  $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^x = 1. \blacktriangleright$

Правило Лопиталья является эффективным методом раскрытия неопределенностей. Однако применение его не всегда приводит к цели.

**Пример 8.4.** Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$ .

*Решение.*

а) Если применить правило Лопиталья, то получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

т.е. числитель и знаменатель просто меняются местами; неопределенность же сохраняется. Если применить правило Лопиталя вторично, то функция под знаком предела примет первоначальный вид. Таким образом, использование этого правила в данном случае не позволяет раскрыть неопределенность. В то же время легко установить, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = 1.$$

б) Если применить правило Лопиталя, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x},$$

то можно сделать ошибочный вывод о том, что предел данной функции не существует, так как не существует  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ .

$$\text{На самом деле } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = 1,$$

так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  (см. пример 6.8в). ►

### 8.3. Возрастание и убывание функций

Напомним (см. параграф 5.3), что функция  $y = f(x)$  называется возрастающей (убывающей) на промежутке  $X$ , если для любых  $x_1, x_2 \in X$  при  $x_2 > x_1$  верно неравенство  $f(x_2) > f(x_1)$  ( $f(x_2) < f(x_1)$ ).

**Теорема (достаточное условие возрастания функции).**  
Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка  $X$ , то она возрастает на этом промежутке.

□ Рассмотрим два значения  $x_1$  и  $x_2$  на данном промежутке  $X$ . Пусть  $x_2 > x_1$ ,  $x_1, x_2 \in X$ . Докажем, что  $f(x_2) > f(x_1)$ .

Для функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_1, x_2]$  выполняются условия теоремы Лагранжа, поэтому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad (8.4)$$

где  $x_1 < \xi < x_2$ , т.е.  $\xi$  принадлежит промежутку, на котором производная положительна, откуда следует, что  $f'(\xi) > 0$  и правая часть равенства (8.3) положительна. Отсюда  $f(x_2) - f(x_1) > 0$  и  $f(x_2) > f(x_1)$ . ■

Аналогично доказывается другая теорема.

**Теорема (достаточное условие убывания функции).** Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка  $X$ , то она убывает на этом промежутке.

Геометрическая интерпретация условия монотонности функции приведена на рис. 8.5.

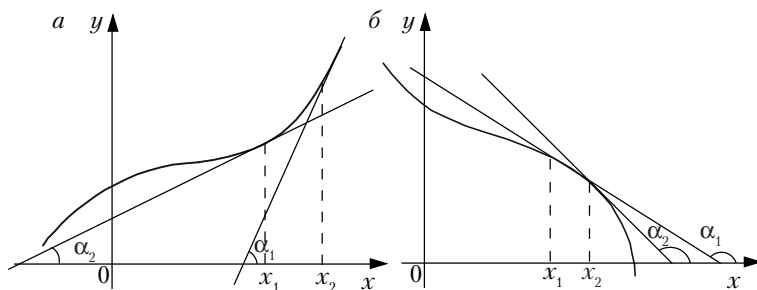


Рис. 8.5

Если касательные к кривой в некотором промежутке направлены под острыми углами к оси абсцисс (рис. 8.5, а), то функция возрастает, если под тупыми (рис. 8.5, б), то убывает.

**Пример 8.5.** Найти интервалы монотонности функции  $y = x^2 - 4x + 3$ .

**Решение.** Имеем  $y' = 2x - 4$ . Очевидно  $y' > 0$  при  $x > 2$  и  $y' < 0$  при  $x < 2$ , т.е. функция убывает на интервале  $(-\infty, 2)$  и возрастает на интервале  $(2, +\infty)$ , где  $x_0 = 2$  — абсцисса вершины параболы. ►

Заметим, что **необходимое** условие монотонности более слабое. Если функция возрастает (убывает) на некото-

ром промежутке  $X$ , то можно лишь утверждать, что *производная неотрицательна (неположительна) на этом промежутке*:  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ),  $x \in X$ , т.е. в отдельных точках производная монотонной функции может равняться нулю.

**Пример 8.6.** Найти интервалы монотонности функции  $y = x^3$ .

*Решение.* Найдем производную  $y' = 3x^2$ . Очевидно, что  $y' > 0$  при  $x \neq 0$ . При  $x = 0$  производная обращается в нуль. Функция же монотонно возрастает на всей числовой оси (см. рис. 5.5). ►

## 8.4. Экстремум функции

В определенном смысле материал этого параграфа наиболее важен для решения задач исследования функций и построения их графиков. Выделим наиболее важные («узловые») точки функции, нахождение которых во многом определяет структуру графика. Таковыми являются точки экстремума — максимума и минимума функции.

**Определение 1.** Точка  $x_0$  называется *точкой максимума* функции  $f(x)$ , если в некоторой окрестности точки  $x_0$  выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$  (рис. 8.6).

**Определение 2.** Точка  $x_1$  называется *точкой минимума* функции  $f(x)$ , если в некоторой окрестности точки  $x_1$  выполняется неравенство  $f(x) \geq f(x_1)$  (см. рис. 8.6).

Значения функции в точках  $x_0$  и  $x_1$  называются соответственно *максимумом* и *минимумом функции*. Максимум и минимум функции объединяются общим названием *экстремума функции*.

Экстремум функции часто называют *локальным экстремумом*, подчеркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки  $x_0$ . Так что на одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может случиться, что минимум в одной точке больше максимума в другой, например, на рис. 8.6  $f_{\min}(x_2) > f_{\max}(x_0)$ . Наличие максимума (минимума) в отдельной точке промежутка  $X$  вовсе не означает, что в этой точке функция  $f(x)$  принимает наибольшее (наименьшее) значение на данном промежутке (или, как говорят, имеет *глобальный максимум (минимум)*).



Важность точек экстремума иллюстрирует следующий пример (рис. 8.7).

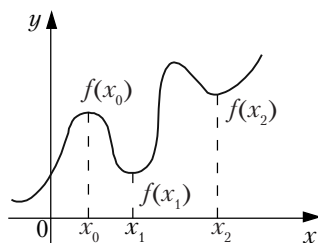


Рис. 8.6

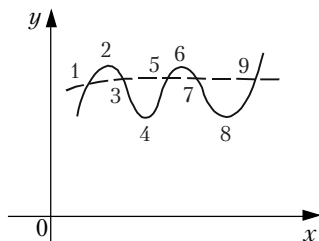


Рис. 8.7

Предположим, что график функции  $y = f(x)$  имеет вид, представленный на рис. 8.7 сплошной линией. Допустим, что он строится по точкам, и на рисунок нанесены точки 1, 3, 5, 7, 9. Тогда скорее всего будет получена кривая, изображенная пунктиром, которая совершенно не похожа на истинный график функции  $y = f(x)$ .

Если же на рисунок нанесены точки 2, 4, 6, 8, то качественная картина графика определена практически однозначно (по крайней мере, на промежутке, содержащем эти точки).

**Необходимое условие экстремума.** Если в точке  $x_0$  дифференцируемая функция  $y = f(x)$  имеет экстремум, то в некоторой окрестности этой точки выполнены условия теоремы Ферма (см. параграф 8.1), и, следовательно, производная функции в этой точке равна нулю, т.е.  $f'(x_0) = 0$ . Но функция может иметь экстремум и в точках, в которых она не дифференцируема. Так, функция  $y = |x|$  имеет экстремум (минимум) в точке  $x = 0$ , но не дифференцируема в ней (см. пример 7.2 и рис. 7.5), а функция  $y = \sqrt[3]{x^2}$  также имеет в точке  $x = 0$  минимум (рис. 8.8),

но производная ее  $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$  в

этой точке бесконечна:  $y'(0) = \infty$ .

Поэтому необходимое условие экстремума может быть сформулировано следующим образом.

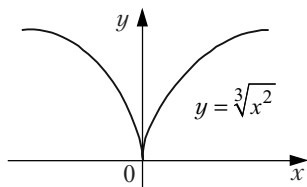


Рис. 8.8

Для того чтобы функция  $y = f(x)$  имела экстремум в точке  $x_0$ , необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ( $f'(x_0) = 0$ ) или не существовала.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, т.е. производная равна нулю или не существует, называются *критическими* (или *стационарными*<sup>1</sup>). Обращаем внимание на то, что эти точки должны входить в область определения функции.

Таким образом, если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка критическая. Однако обратное утверждение неверно. *Критическая точка вовсе не обязательно является точкой экстремума.*

**Пример 8.7.** Найти критические точки функции и убедиться в наличии или отсутствии экстремума в этих точках: а)  $y = x^2$ ; б)  $y = x^3 + 1$ ; в)  $y = \sqrt[3]{x-1}$ .

*Решение.*

а) Производная  $y' = 2x$ . В точке  $x = 0$   $y'(0) = 0$ , и действительно в точке  $x = 0$  функция  $y = x^2$  имеет экстремум (см. рис. 5.6).

б) Функция  $y = x^3 + 1$  возрастает на всей числовой оси по свойству степенной функции. Производная  $y' = 3x^2$  в точке  $x = 0$  равна нулю, т.е.  $y'(0) = 0$ , но экстремума в точке  $x = 0$  нет (рис. 8.9).

в) Функция  $y = \sqrt[3]{x-1}$  также возрастает на всей числовой оси; производная  $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$  при  $x = 1$  не существует, т.е.  $y'(1) = \infty$ , но экстремума в этой точке нет (рис. 8.10). ►

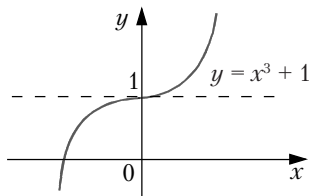


Рис. 8.9

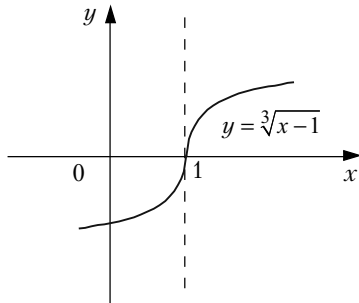


Рис. 8.10

<sup>1</sup> Если говорить точнее, то *стационарные* — это точки, в которых производная равна нулю.

Таким образом, для нахождения экстремумов функции требуется дополнительное исследование критических точек. Иными словами, нужно знать достаточное условие экстремума.

**Первое достаточное условие экстремума. Теорема.**  
*Если при переходе через точку  $x_0$  производная дифференцируемой функции  $y = f(x)$  меняет свой знак с плюса на минус, то точка  $x_0$  есть точка максимума функции  $y = f(x)$ , а если с минуса на плюс, то точка минимума.*

□ Пусть производная меняет знак с плюса на минус, т.е. в некотором интервале  $(a, x_0)$  производная положительна ( $f'(x) > 0$ ), а в некотором интервале  $(x_0, b)$  — отрицательна ( $f'(x) < 0$ ). Тогда в соответствии с достаточным условием монотонности функция  $f(x)$  возрастает на интервале  $(a, x_0)$  и убывает на интервале  $(x_0, b)$  (рис. 8.11).

По определению возрастающей функции  $f(x_0) > f(x)$  при всех  $x \in (a, x_0)$ , а по определению убывающей функции  $f(x) < f(x_0)$  при всех  $x \in (x_0, b)$ , т.е.  $f(x_0) \geq f(x)$  при всех  $x \in (a, b)$ , следовательно,  $x_0$  — точка максимума функции  $y = f(x)$ .

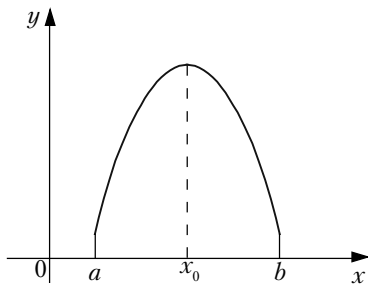


Рис. 8.11

Аналогично рассматривается случай, когда производная меняет знак с минуса на плюс. ■

Отметим, что дифференцируемость функции в самой точке  $x_0$  не использовалась при доказательстве теоремы. На самом деле она и не требуется, так как достаточно, чтобы функция была непрерывна в точке  $x_0$ .

Таким образом, достаточным условием существования экстремума функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  является изменение знака ее производной, т.е. углов наклона касательных к кривой  $y = f(x)$ : с острых на тупые (рис. 8.12, а) при переходе через точку максимума или с тупых на острые (рис. 8.12, б) при переходе через точку минимума. Верно и обратное утверждение, т.е. сформулированное достаточное условие экстремума является также и необходимым условием. Это означает, что если изменения знака производной не происходит, то экстремума нет.

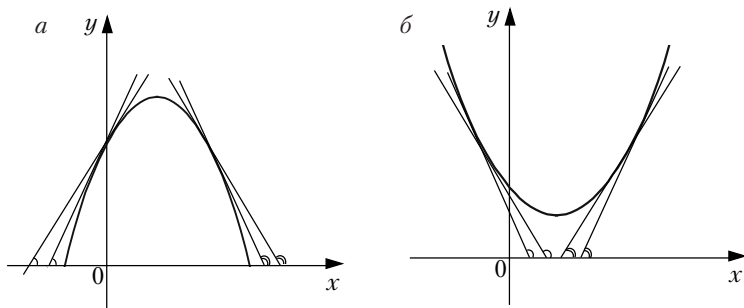


Рис. 8.12

**Схема исследования функции  $y = f(x)$  на экстремум.**

1°. Находим производную  $y' = f'(x)$ .

2°. Находим критические точки функции, в которых производная  $f'(x) = 0$  или не существует.

3°. Исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки и делаем вывод о наличии экстремумов функции.

4°. Находим экстремумы (экстремальные значения) функции.

**Пример 8.8.** Исследовать на экстремум функцию  $y = x(x - 1)^3$ .

*Решение.* 1°. Производная данной функции  $y' = (x - 1)^3 + 3x(x - 1)^2 = (x - 1)^2(4x - 1)$ .

2°. Приравняв производную к нулю, находим критические точки функции  $x_1 = \frac{1}{4}$ ;  $x_2 = 1$ . (Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет —  $f'(x)$  определена на всей числовой оси.)

3°. Нанесем критические точки на числовую прямую (рис. 8.13).

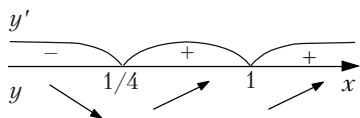


Рис. 8.13

Для определения знака производной слева и справа от критической точки  $x = \frac{1}{4}$  выберем, например, значения  $x = 0$  и  $x = \frac{1}{2}$  и найдем

$f'(0) = -1 < 0$  и  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} > 0$ ; следовательно,  $f'(x) < 0$  при всех  $x < \frac{1}{4}$  и  $f'(x) > 0$  на интервале  $(\frac{1}{4}; 1)$ .

Аналогично устанавливаем, что  $f'(x) > 0$  и на интервале  $(1, +\infty)$ .

Согласно достаточному условию  $x = \frac{1}{4}$  — точка минимума данной функции. В точке  $x = 1$  экстремума нет.

$$4^\circ. \text{ Находим } f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)^3 = -\frac{27}{256}. \blacktriangleright$$

**Второе достаточное условие экстремума. Теорема.**

*Если первая производная  $f'(x)$  дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке  $x_0$ , а вторая производная в этой точке  $f''(x_0)$  положительна, то  $x_0$  есть точка минимума функции  $f(x)$ ; если  $f''(x_0)$  отрицательна, то  $x_0$  — точка максимума.*

□ Пусть  $f'(x_0) = 0$ , а  $f''(x_0) > 0$ . Это означает, что  $f''(x) = (f'(x))' > 0$  также и в некоторой окрестности точки  $x_0$ , т.е.  $f'(x)$  возрастает на некотором интервале  $(a, b)$ , содержащем точку  $x_0$ .

Но  $f'(x_0) = 0$ , следовательно, на интервале  $(a, x_0)$   $f'(x) < 0$ , а на интервале  $(x_0, b)$   $f'(x) > 0$ , т.е.  $f'(x)$  при переходе через точку  $x_0$  меняет знак с минуса на плюс, т.е.  $x_0$  — точка минимума.

Аналогично рассматривается случай, когда  $f'(x_0) = 0$  и  $f''(x_0) < 0$ . ■

Схема исследования на экстремум функции  $y = f(x)$  с помощью второго достаточного условия в целом аналогична схеме, приведенной выше (совпадают полностью п. 1°, 2°, 4°). Отличается лишь п. 3°, устанавливающий наличие экстремума: здесь *необходимо найти вторую производную  $f''(x)$  и определить ее знак в каждой критической точке.*

**Пример 8.9.** Исследовать на экстремум функцию  $y = 2\ln x - 5\arctg x$ .

*Решение.* 1°. Находим производную функции

$$y' = \frac{2}{x} - \frac{5}{1+x^2} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x(1+x^2)}.$$

2°. Находим критические точки:  $y' = 0$ , т.е.  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ , откуда  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 2$ .

3°. Находим вторую производную  $y'' = -\frac{2}{x^2} + \frac{10x}{(1+x^2)^2}$  и

выясним ее знак в каждой критической точке:  $y''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{24}{5} < 0$ ;

$y''(2) = \frac{3}{10} > 0$ . Таким образом,  $x = \frac{1}{2}$  — точка максимума,  $x = 2$  — точка минимума.

4°. Находим экстремум функции:  $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \ln 2 - 5 \arctg \frac{1}{2}$ ;  $y_{\min}(2) = 2 \ln 2 - 5 \arctg 2$ . ►

Второе достаточное условие экстремума утверждает, что если в критической точке  $x_0$   $f''(x_0) \neq 0$ , то в этой точке имеется экстремум. Обратное утверждение, однако, неверно. Экстремум в критической точке может быть и при равенстве в ней нулю второй производной.

Рассмотрим, например, функцию  $y = x^4$ . Имеем  $y' = 4x^3$ ,  $y'' = 12x^2$ . В критической точке  $x = 0$  вторая производная также обращается в нуль. Но  $x = 0$  — точка экстремума, а именно минимума. Так что в отличие от первого второе достаточное условие является именно только достаточным, но не необходимым. В связи с этим, если в критической точке  $x_0$   $f'(x_0) = 0$ , то рекомендуется перейти к первому достаточному условию экстремума.

## 8.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке и интервале

При решении прикладных задач, в частности оптимизационных, важное значение имеет нахождение *наибольшего и наименьшего значений* (глобального максимума и глобального минимума) функции на промежутке  $X$ .

Согласно теореме Вейерштрасса (см. параграф 6.7), если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она

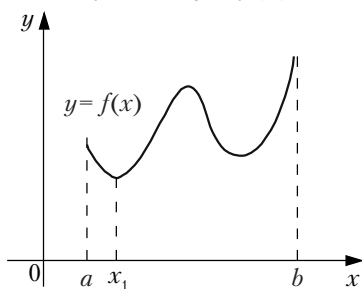


Рис. 8.14

принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Наибольшее или наименьшее значение функции может достигаться как в точках экстремума, так и в точках на концах отрезка. На рис. 8.14 наибольшее значение функция имеет на конце отрезка  $x = b$ , а наименьшее — в точке минимума  $x_1$ .

Для отыскания **наибольшего и наименьшего значений** на отрезке рекомендуется пользоваться следующей схемой.

1°. Находим производную  $f'(x)$ .

2°. Определяем критические точки функции, в которых  $f'(x) = 0$  или не существует.

3°. Находим значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбираем из них наибольшее  $f_{\text{наиб}}$  и наименьшее  $f_{\text{наим}}$ .

**Пример 8.10.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = (x - 2)^2 e^{-x}$  на отрезке  $[0; 5]$ .

*Решение.*

1°. Производная функции  $f'(x) = 2(x - 2)e^{-x} - (x - 2)^2 e^{-x} = -e^{-x}(x - 2)(x - 4)$ .

2°. Приравняем производную функции нулю  $f'(x) = 0$ , откуда критические точки  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 4$ .

3°. Значения функции в критических точках  $f(2) = 0$ ,  $f(4) = \frac{4}{e^4}$  и на концах отрезка  $f(0) = 4$  и  $f(5) = \frac{9}{e^5}$ .

Итак,  $f_{\text{наиб}} = f(0) = 4$ ,  $f_{\text{наим}} = f(2) = 0$ . ►

**Замечание.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на интервале  $(a, b)$ , то она может не принимать на нем наибольшее и наименьшее значения.

Если  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$  больше большего из значений функции в критических точках интервала, то наибольшего значения на всем интервале не существует. Аналогично не существует наименьшего значения, если

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$  меньше меньшего из значений в критических точках.

В частном случае, если дифференцируемая функция на интервале  $(a, b)$  имеет лишь одну точку максимума (или одну точку минимума), то наибольшее (или наименьшее) значение функции совпадает с максимумом (или минимумом) этой функции. Например, на интервале  $(1; 2)$  функция  $y = x^2 - 6x + 5$  имеет один минимум  $y_{\min} = y(3) = -4$ , следовательно, это и есть наименьшее значение функции  $y_{\text{наим}} = -4$ . Заметим, что наибольшего значения данная функция на указанном интервале не имеет.

## 8.6. Выпуклость функции. Точки перегиба

Ранее подробно были изучены точки экстремума, нахождение которых во многом определяет структуру графика функции. Определим теперь другие «узловые» точки функции, которые также следует находить, чтобы качественно построить ее график.

Рассмотрим функцию, график которой изображен на рис. 8.15, *а*. Эта функция возрастает на всей числовой оси и не имеет экстремумов. Очевидно, однако, ее отличие от функций, изображенных на рис. 8.15, *б* и 8.15, *в*. В точках  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  график как бы «перегибается», поэтому такие точки называются точками перегиба. Дадим их строгое определение.

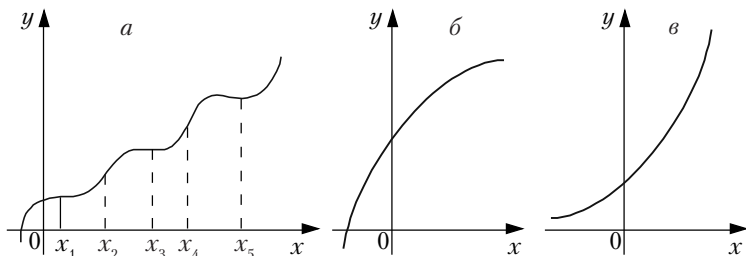


Рис. 8.15

Прежде всего определим различие в поведении функции по разные стороны от точек  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ .

**Определение 1.** Функция  $y = f(x)$  называется **выпуклой вниз** на промежутке  $X$ , если для любых двух значений  $x_1, x_2 \in X$  из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (8.5)$$

**Определение 2.** Функция называется **выпуклой вверх**<sup>1</sup> на промежутке  $X$ , если для любых двух значений  $x_1, x_2 \in X$  из этого промежутка выполняется неравенство

<sup>1</sup> Иногда *выпуклой* называют только функцию, выпуклую вверх, а функцию вниз — *вогнутой*.



$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (8.6)$$

Графики функций, выпуклых вниз и вверх, изображены на рис. 8.16. Очевидно, что если функция выпукла вниз, то отрезок, соединяющий любые две точки графика, целиком лежит над графиком (см. рис. 8.16, а), если она выпукла вверх, то весь такой отрезок целиком лежит под графиком (см. рис. 8.16, б).

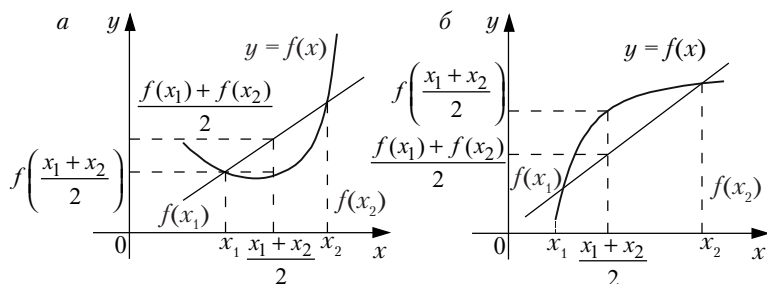


Рис. 8.16

**Теорема.** *Функция выпукла вниз (вверх) на промежутке  $X$  тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).*

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что если  $f'(x)$  возрастает (убывает) на промежутке  $X$ , то возрастает (убывает) угол наклона касательных к графику (рис. 8.17, а, б). Это и означает выпуклость функции вниз (вверх).

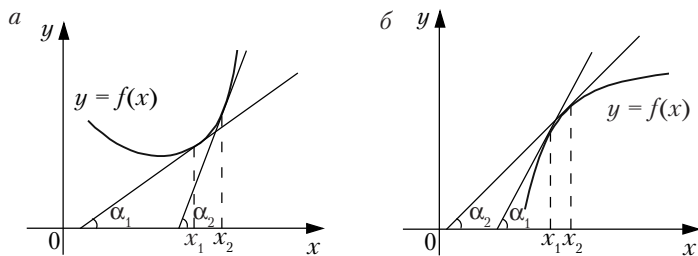


Рис. 8.17

Используя условия монотонности, можно определить следующее достаточное условие выпуклости функции вниз (вверх).

**Теорема.** Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка  $X$ , то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

□ Если  $f''(x) = (f'(x))' > 0$ ,  $x \in X$ , то  $f'(x)$  возрастает на промежутке  $X$ , следовательно, на основании предыдущей теоремы функция выпукла вниз на этом промежутке. Аналогично рассматривается случай, когда  $f''(x) < 0$ ,  $x \in X$ . ■

Необходимое условие выпуклости слабее: если функция выпукла на промежутке  $X$ , то можно утверждать лишь, что  $f''(x) \geq 0$  (или  $f''(x) \leq 0$ ),  $x \in X$ . Например, функция  $y = x^4$  выпукла на всей числовой оси, хотя вторая производная  $y'' = 12x^2$  не всюду положительна, так как при  $x = 0$   $f''(0) = 0$ .

**Определение.** Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.

Из сказанного выше следует, что точки перегиба — это точки экстремума первой производной. Отсюда вытекают следующие утверждения.

**Теорема (необходимое условие перегиба).** Вторая производная дважды дифференцируемой функции в точке перегиба  $x_0$  равна нулю, т.е.  $f''(x) = 0$ .

**Теорема (достаточное условие перегиба).** Если вторая производная  $f''(x)$  дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку  $x_0$  меняет свой знак, то  $x_0$  есть точка перегиба ее графика.

Нужно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию точек перегиба (рис. 8.18). В окрестности точки  $x_1$  функция выпукла вверх, и график ее лежит ниже касательной, проведенной в этой точке. В окрестности точки  $x_2$ , на которой функция выпукла вниз, картина обратная: график лежит выше касательной. В точке же перегиба касательная разделяет график, и он лежит по разные стороны касательной.

Следует отметить, что если критическая точка дифференцируемой

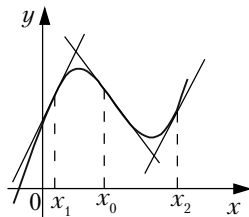


Рис. 8.18

функции не является точкой экстремума, то она есть точка перегиба.

**Схема исследования функции на выпуклость и наличие точек перегиба.**

1°. Находим вторую производную функции  $f''(x)$ .

2°. Находим точки, в которых вторая производная  $f''(x) = 0$  или не существует.

3°. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба.

4°. Находим значения функции в точках перегиба.

**Пример 8.11.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции  $y = x(x - 1)^3$ .

*Решение.* 1°.  $y' = (x - 1)^2(4x - 1)$  (см. пример 8.7).

$$2°. y'' = 2(x - 1)(4x - 1) + (x - 1)^2 \cdot 4 = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1).$$

$$y'' = 0 \text{ при } x_1 = \frac{1}{2} \text{ и } x_2 = 1 \text{ (рис. 8.19).}$$

3°.  $y'' > 0$  на интервалах  $(-\infty, \frac{1}{2})$  и  $(1, +\infty)$ , следовательно, на этих интервалах функция выпукла вниз;  $y'' < 0$

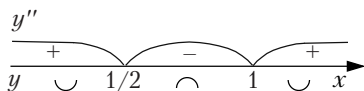


Рис. 8.19

на интервале  $(\frac{1}{2}, 1)$ , следо-

вательно, функция на нем выпукла вверх, а  $x_1 = \frac{1}{2}$  и  $x_2 = 1$  есть точки перегиба.

4°. Значения функции в точках перегиба  $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{16}$ ,  $f(1) = 0$ . ►

## 8.7. Асимптоты графика функции

В предыдущих параграфах были изучены характерные точки функции. Теперь рассмотрим характерные линии. Важнейшими из них являются асимптоты.

**Определение.** Асимптотой графика функции  $y = f(x)$  называется прямая, обладающая таким свойством, что расстояние от точки  $(x, f(x))$  до этой прямой стре-

мится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

На рис. 8.20, *а* изображена *вертикальная* асимптота, на рис. 8.20, *б* — *горизонтальная*, а на рис. 8.20, *в* — *наклонная*. Очевидно, что этими тремя случаями исчерпываются все возможные расположения асимптот.

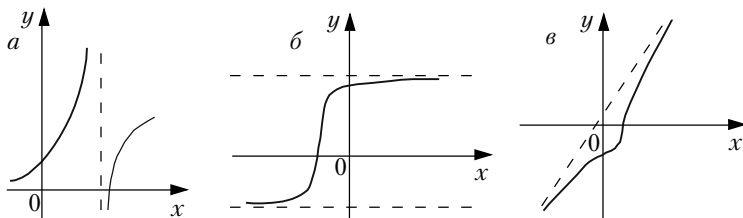


Рис. 8.20

Нахождение асимптот графика основано на следующих утверждениях.

**Теорема 1.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности<sup>1</sup> точки  $x_0$  (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при  $x \rightarrow x_0 - 0$  (слева) или при  $x \rightarrow x_0 + 0$  (справа) равен бесконечности, т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$ . Тогда прямая  $x = x_0$  является вертикальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ .

Очевидно, что прямая  $x = x_0$  не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке  $x_0$ , так как в этом случае  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Следовательно, вертикальные асимптоты  $x = x_0$  следует искать в точках разрыва функции  $y = f(x)$  или на концах ее области определения  $(a, b)$ , если  $a$  и  $b$  — конечные числа.

Элементарная функция, определенная на всей числовой оси, не может иметь вертикальных асимптот.

**Теорема 2.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена при достаточно больших  $x$  и существует конечный предел функции

<sup>1</sup> Или в полукрестности точки  $x_0$ , расположенной по одну сторону от этой точки.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ . Тогда прямая  $y = b$  есть горизонтальная асимптота графика функции  $y = f(x)$ .

**Замечание.** Если конечен только один из пределов  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_{\text{л}}$  или  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_{\text{п}}$ , то функция имеет лишь левостороннюю  $y = b_{\text{л}}$  или правостороннюю  $y = b_{\text{п}}$  горизонтальную асимптоту.

В том случае, если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , функция может иметь наклонную асимптоту.

**Теорема 3.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена при достаточно больших  $x$ , и существуют ее конечные пределы

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$ . Тогда прямая  $y = kx + b$  является наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ .

□ Если  $y = kx + b$  — наклонная асимптота, то очевидно,

что  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$  и тем более  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0$ .

Следовательно,  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ . Теперь из равенства

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ , учитывая, что  $k$  — конечное число, получаем:  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$ . ■

Наклонная асимптота так же, как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.

**Пример 8.12.** Найти асимптоты графика дробно-линейной функции  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ , где  $c \neq 0$  и  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ .

**Решение.** Из области определения выпадает точка  $x = -\frac{d}{c}$ .

Найдем пределы функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\frac{d}{c}$ . Запишем  $\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ax + b}{c(x + \frac{d}{c})}$ . В силу того, что  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$  число  $-\frac{d}{c}$  не является корнем числителя, т.е. при  $x \rightarrow -\frac{d}{c}$  числитель не стремится к нулю. Отсюда  $\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax + b}{cx + d} = \pm \infty$  и прямая

$x = -\frac{d}{c}$  является вертикальной асимптотой. Далее нахо-

$$\text{дим } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c}.$$

Отсюда следует, что прямая  $y = \frac{a}{c}$  является горизонтальной асимптотой. (Заметим, что в параграфе 4.5 уравнения асимптот дробно-линейной функции были найдены путем параллельного переноса осей координат в центр ее графика — равносторонней гиперболы.)

Так, например, асимптотами функции  $y = \frac{3-2x}{x+1}$  являются прямые  $x = -1$ ,  $y = -2$  (график функции приведен на рис. 4.28). ►

**Пример 8.13.** Найти асимптоты графика функции  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ .

*Решение.* Очевидно, что график функции не имеет ни вертикальных асимптот (нет точек разрыва), ни горизонтальных ( $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty$ ). Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} : x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( -\frac{x}{x^2+1} \right) = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота графика функции имеет вид  $y = kx + b = 1 \cdot x + 0$  или  $y = x$ . ►

## 8.8. Общая схема исследования функций и построения их графиков

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую **схему**.

- 1°. Находим область определения функции.
- 2°. Исследуем функцию на четность — нечетность.
- 3°. Находим вертикальные асимптоты.
- 4°. Исследуем поведение функции в бесконечности, находим горизонтальные или наклонные асимптоты.
- 5°. Находим экстремумы и интервалы монотонности функции.
- 6°. Находим интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
- 7°. Находим точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Заметим, что *исследование функции проводится одновременно с построением ее графика.*

**Пример 8.14.** Исследовать функцию  $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  и построить ее график.

*Решение.* 1°. Находим область определения функции:  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ , т.е.  $x \neq \pm 1$ .

2°. Функция четная, так как  $f(-x) = f(x)$ , и ее график симметричен относительно оси ординат.

3°. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точках  $x = \pm 1$ . Так как пределы функции при  $x \rightarrow 1 - 0$  (слева) и  $x \rightarrow 1 + 0$  (справа) бесконечны,

$\left( \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty \right)$ , то прямая  $x = 1$  есть вертикальная асимптота. В силу симметрии графика  $f(x)$  прямая  $x = -1$  также является вертикальной асимптотой.

4°. Исследуем поведение функции в бесконечности. Вычислим  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$ . В силу четности имеем также

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$ , т.е. прямая  $y = -1$  — горизонтальная асимптота.

тота.

5°. Находим экстремумы и интервалы монотонности.

Найдем  $y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$ ;  $y' = 0$

при  $x = 0$ , и  $y'$  не существует при  $x = \pm 1$ .

Однако критической является только точка  $x = 0$  (так как значения  $x = \pm 1$  не входят в область определения функции). Поскольку при  $x < 0$   $f'(x) < 0$ , а при  $x > 0$   $f'(x) > 0$  (рис. 8.21), то  $x = 0$  — точка минимума и  $f_{\min} = f(0) = 1$  — минимум функции. На интервалах  $(-\infty, -1)$  и  $(-1, 0)$  функция убывает, на интервалах  $(0, 1)$  и  $(1, +\infty)$  она возрастает.

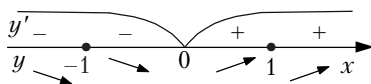


Рис. 8.21

6°. Находим интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем

$$y'' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Очевидно, что  $y'' > 0$  на интервале  $(-1, 1)$  и функция выпукла вниз на этом интервале;  $y'' < 0$  на интервалах  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$ , и на этих интервалах функция выпукла вверх. Точек перегиба нет.

7°. Находим точки пересечения с осями. Значение  $f(0) = 1$ , т.е. точка пересечения с осью ординат  $(0; 1)$ . Уравнение  $f(x) = 0$  решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

График функции изображен на рис. 8.22. ►

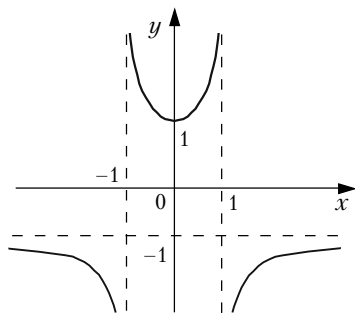


Рис. 8.22

**Пример 8.15.** Исследовать функцию  $y = 2xe^{-x^2}$  и построить ее график.

*Решение.* 1°. Находим область определения функции  $(-\infty, +\infty)$ .

2°. Функция нечетная, так как  $f(-x) = -f(x)$  и график ее симметричен относительно начала координат.

3°. Вертикальных асимптот нет, так как функция определена при всех действительных значениях  $x$ .



4°. Поведение функции в бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{\left( e^{\frac{x^2}{2}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

В силу нечетности функции  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , т.е. прямая  $y = 0$  (ось абсцисс) — горизонтальная асимптота.

5°. Находим экстремумы и интервалы монотонности:

$$y' = 2e^{\frac{-x^2}{2}} + 2xe^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = 2e^{\frac{-x^2}{2}}(1 - x^2);$$

$y' = 0$  при  $x = \pm 1$ , т.е. критические точки  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . Знаки производной изображены на рис. 8.23.

Таким образом,  $x = -1$  есть точка минимума;  $x = 1$  — точка максимума и

$$f_{\min} = f(-1) = -\frac{2}{\sqrt{e}} \approx -1,21;$$

$$f_{\max} = f(1) = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21.$$

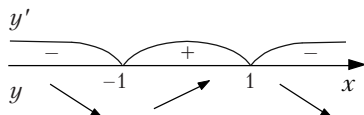


Рис. 8.23

Функция убывает на интервалах  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$  и возрастает на интервале  $(-1, 1)$ .

6°. Находим интервалы выпуклости и точки перегиба:

$$y'' = 2e^{\frac{-x^2}{2}}(-x)(1 - x^2) + 2e^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = -2xe^{\frac{-x^2}{2}}(3 - x^2);$$

$y'' = 0$  при  $x = 0$  и  $x = \pm\sqrt{3}$ . Знаки второй производной изображены на рис. 8.24.

Таким образом, функция выпукла вниз на интервалах  $(-\sqrt{3}, 0)$  и  $(\sqrt{3}, +\infty)$  и выпукла

вверх на интервалах  $(-\infty, -\sqrt{3})$  и  $(0, \sqrt{3})$ , а  $x_1 = -\sqrt{3}$ ,  $x_2 = 0$ ,

$x_3 = \sqrt{3}$  — точки перегиба.

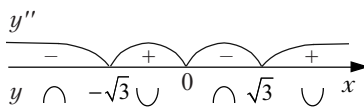


Рис. 8.24

7°. Находим  $f(0) = 0$ . Уравнение  $f(x) = 0$  имеет единственное решение  $x = 0$ , т.е. график функции пересекает ось в начале координат  $(0; 0)$ .

График функции изображен на рис. 8.25. ►

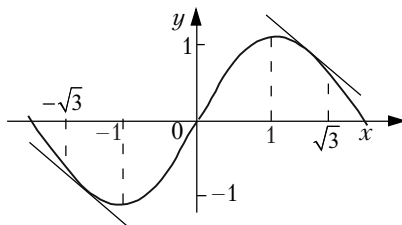


Рис. 8.25

### Пример 8.16. Исследо-

вать функцию  $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$  и построить ее график.

Решение. 1°. Находим область определения функции:  $(-\infty; +\infty)$ .

2°. Функция общего вида (ни четная, ни нечетная), так как  $f(-x) \neq \pm f(x)$ .

3°. Вертикальных асимптот нет, так как функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел.

4°. Поведение функции в бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = \pm\infty.$$

Следовательно, горизонтальных асимптот функция не имеет. Найдем наклонные асимптоты:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = 1; \\ b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x) = [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x)(\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + x^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = -1 \end{aligned}$$

(так как после упрощения числителя его старший член равен  $-3x^2$ , а выражение в знаменателе при больших (по модулю) значениях  $x$  приближенно равно  $\sqrt[3]{x^6} + x\sqrt[3]{x^3} + x^2 = 3x^2$ );  $y = x - 1$  есть наклонная асимптота.

5°. Найдем экстремумы и интервалы монотонности:

$$y' = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 6x) = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}} = \frac{x - 2}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x - 3)^2}},$$

$y' = 0$  при  $x = 2$ ,  $y'$  не существует при  $x = 0$ ;  $x = 3$ , т.е. критические точки  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 3$ .

Знаки производной указаны на рис. 8.26.

Таким образом,  $x = 0$  — точка максимума и  $f_{\max} = f(0) = 0$ ,  $x = 2$  — точка минимума и  $f_{\min} = f(2) = -\sqrt[3]{4} \approx -1,6$ , а  $x = 3$  не является точкой экстремума.

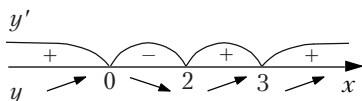


Рис. 8.26

6°. Найдем интервалы выпуклости и точки перегиба. После преобразований получим

$$y'' = -\frac{2}{x^3(x-3)^3},$$

т.е.  $y'' = f''(x)$  нигде не обращается в нуль и не существует в точках  $x = 0$  и  $x = 3$ . Знаки  $f''(x)$  указаны на рис. 8.27.

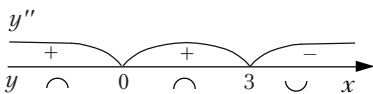


Рис. 8.27

Таким образом, интервалы выпуклости вниз  $(-\infty; 0)$  и  $(0; 3)$ , интервал выпуклости вверх  $(3; +\infty)$ , а  $x = 3$  — точка перегиба.

7°. Найдем точки пересечения с осями. Функция  $f(0) = 0$ , следовательно, ось ординат пересекает график в точке  $(0; 0)$ . Уравнение  $f(x) = 0$  имеет два решения:  $x = 0$  и  $x = 3$ . Следовательно, график пересекает ось абсцисс в двух точках:  $x = 0$  и  $x = 3$ .

График функции изображен на рис. 8.28.

Обратим внимание на то, что в точке экстремума  $x = 0$  и в точке перегиба  $x = 3$  со-

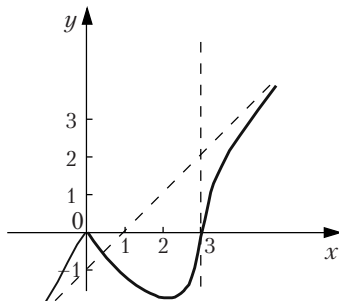


Рис. 8.28

ответственно первая и вторая производные не обращаются в нуль — они не существуют в этих точках. ►

### 8.9. Приложение производной в экономической теории

Рассмотрим некоторые примеры приложения производной в экономической теории. При этом убедимся, что многие, в том числе базовые, законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем, сформулированных в настоящей главе.

Рассмотрим *экономическую интерпретацию теоремы Ферма*.

Один из базовых законов теории производства звучит так: *оптимальный для производителя уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода*. Отсюда следует, что уровень выпуска  $x_0$  является оптимальным для производителя, если  $MS(x_0) = MD(x_0)$ , где  $MS$  — предельные издержки, а  $MD$  — предельный доход.

Обозначим функцию прибыли  $C(x)$ . Тогда  $C(x) = D(x) - S(x)$ . Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т.е. такое значение выпуска  $x_0$ , при котором функция  $C(x)$  имеет экстремум (максимум). По теореме Ферма, в этой точке  $C'(x) = 0$ . Но  $C'(x) = D'(x) - S'(x)$ , поэтому  $D'(x_0) = S'(x_0)$ , т.е.  $MD(x_0) = MS(x_0)$ .

Другое важное понятие теории производства — это уровень наиболее экономичного производства, при котором средние издержки по производству товара минимальны. Соответствующий экономический закон гласит: *уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек*.

Получим это утверждение как следствие теоремы Ферма. Средние издержки  $AS(x)$  определяются как  $\frac{S(x)}{x}$ , т.е. издержки по производству товара, деленные на произведенное его количество. Минимум этой величины достигается в критической точке функции  $y = AS(x)$ , т.е. при условии

$$AS'(x) = \frac{S'x - S}{x^2} = 0, \text{ откуда } S' \cdot x - S = 0 \text{ или } S' = \frac{S}{x}, \text{ т.е.}$$

$$MS(x) = AS(x).$$

Понятие выпуклости функции также находит свою интерпретацию в экономической теории.

Один из наиболее основных экономических законов — закон убывающей доходности — формулируется следующим образом: *с увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса (трудового, технологического и т.д.), с некоторого момента убывает.*

Иными словами, величина  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , где  $\Delta x$  — приращение ресурса, а  $\Delta y$  — приращение выпуска продукции уменьшается при увеличении  $x$ . Таким образом, закон убывающей доходности формулируется так: *функция  $y = f(x)$ , выражающая зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, является функцией, выпуклой вверх.*

Другим базисным понятием экономической теории является функция полезности  $U = U(x)$ , где  $x$  — количество товара, а  $U$  — полезность. Эта величина очень субъективна для каждого отдельного потребителя, но достаточно объективна для общества в целом. Закон убывающей полезности звучит следующим образом: *с ростом количества товара дополнительная полезность от каждой новой его единицы с некоторого момента убывает.* Очевидно, этот закон можно переформулировать так: *функция полезности является функцией, выпуклой вверх.* В такой постановке закон убывающей полезности служит отправной точкой для математического исследования теории спроса и предложения.

## ПРАКТИКУМ

### 8.10. Основные теоремы дифференциального исчисления

- 8.17.** Выяснить, может ли быть применена теорема Лагранжа для функции  $y = \sqrt[3]{1-x^2} + \frac{1}{x}$  на отрезке: а)  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ; б)  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ ; в)  $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ .

*Решение.*

а) Функция не является непрерывной в точке  $x = 0 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ , поэтому на данном отрезке теорема Лагранжа не применима.

б)  $y' = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} - \frac{1}{x^2}$ . Производная не существует в точке  $x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ , поэтому на этом отрезке теорема Лагранжа также не может быть применима.

в) На отрезке  $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$  оба условия теоремы Лагранжа выполнены, так что теорема применима. ►

**Замечание.** Если теорема Лагранжа не применима на отрезке  $[a, b]$ , то это не означает, что в нем не может быть точки  $\xi$ , удовлетворяющей равенству (8.1).

**8.18.** Указать хотя бы одно значение  $a$ , при котором функция  $y = e^{\sqrt{x}} + a \cos x$  имеет на интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  точку, в которой производная обращается в нуль.

*Решение.* Очевидно, функция непрерывна на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  и дифференцируема в интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Если при этом окажется, что  $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , то требуемая точка будет существовать по теореме Ролля. Таким образом, если выполняется равенство  $e^0 + a \cos 0 = e^{\sqrt{\pi/2}} + a \cos \frac{\pi}{2}$ , то условие задачи будет выполнено. Рассматривая это равенство как уравнение относительно  $a$ , получаем  $a = e^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} - 1$ .

Отметим, что найденное значение  $a$ , безусловно, не единственное, при котором условие задачи выполняется. ►

**8.19.** Найти все значения  $a$ , при которых функция  $y = \left(1 + a^2\right)^{\sin \frac{\pi x}{2}} + x$  удовлетворяет условию  $y' < 2$  при всех  $x \in (0; 1)$ .

*Решение.* Так как функция непрерывна на отрезке  $[0; 1]$  и дифференцируема в интервале  $(0; 1)$ , то существует точка  $\xi \in (0; 1)$ , такая, что  $f'(\xi) = f(1) - f(0) = 2(1 + a^2) + 2 - (1 + a^2) = 3 + a^2 \geq 3$  при любых значениях  $a$ . Таким образом, ни при каких значениях  $a$  условие задачи выполняться не может. ►

**8.20.** Функция  $y = \sqrt[3]{x^2}$  равна единице при  $x = 1$  и  $x = -1$ , но  $y' \neq 0$  для всех  $x \in (-1; 1)$ . Выяснить, противоречит ли это условиям теоремы Ролля.

**8.21.** Выяснить, можно ли применить теорему Лагранжа для функции  $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  на промежутке: а)  $(0; 1)$ ; б)  $(1; 2)$ .

**8.22.** Выяснить, применима ли для функции  $y = \frac{1}{x} + |x|$  на промежутке  $[-2; -1]$ : а) теорема Ролля; б) теорема Лагранжа.

**8.23.** Дифференцируемая при всех значениях  $x$  функция  $y = f(x)$  удовлетворяет условиям  $f(2) = 5$ ,  $f(4) = 3$ . Для какого значения  $a$  уравнение  $f'(x) = a$  заведомо имеет решение?

**8.24.** Функция  $y = f(x)$  имеет производную, равную  $y' = 2 + \sqrt{1 + x^2} + \sin(2^x + 3)$ . Может ли выполняться равенство  $f(1) - f(0) = \sin a$ ?

## 8.11. Правило Лопиталья

**8.25.** Найти  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} + x}{\ln(2+x)}$ .

*Решение.* Так как в данном случае имеется неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ , можно применить правило Лопиталья (8.3):

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} + x}{\ln(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{2+x} + x)'}{(\ln(2+x))'} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2+x}} + 1}{\frac{1}{2+x}} = \frac{3}{2}. \quad \blacktriangleright$$

**8.26.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3^x}{x^2}$ .

*Решение.* Имеет место неопределенность вида  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ . Применяя правило Лопиталя (8.3), получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \ln 4 - 3^x \ln 3}{2x}.$$

Следовательно, неопределенность вида  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  остается. Применим правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \ln 4 - 3^x \ln 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \ln^2 4 - 3^x \ln^2 3}{2} = \infty. \blacktriangleright$$

**8.27.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}.$

*Решение.* Так как  $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}},$

то  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = 0;$   $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0.$  Таким образом, присутствует неопределенность вида  $\left[\frac{0}{0}\right].$  Применим правило Лопиталя (8.3):

Применим правило Лопиталя (8.3):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{x^2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})} \cos \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{x^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x^4}} + \sqrt{\frac{x(x-1)^2}{x^4}} \right) \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 0 \cdot 1 = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$



**8.28.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ .

*Решение.* Имеем неопределенность вида  $\left[ \infty^0 \right]$ . Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{1}{x} \right)}{\left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

По формуле (8.3\*)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^{\frac{1}{\sqrt{x}}})} = e^0 = 1$ . ►

**8.29.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} [(x - \sqrt{x}) \ln \ln x]$ .

*Решение.* Так как при  $x > 1$   $\ln x > 0$ , то  $\ln \ln x = \ln(\ln x) \rightarrow -\infty$ . Таким образом, имеем неопределенность вида  $[0 \cdot \infty]$ .

Сведем ее к неопределенности вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$  и применим правило Лопиталья (8.3):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sqrt{x}) \ln \ln x &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \ln x}{\frac{1}{x - \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 2\sqrt{x}}{\ln x (2\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\ln x} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left[ \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{x}} \right]}{\left[ \frac{1}{x} \right]} \cdot 2 = 0. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**8.30.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \ln^2 x - \sqrt{1 + x + x^2} \right)$ .

*Решение.* Имеем неопределенность вида  $[\infty - \infty]$ . Преобразуем искомый предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \ln^2 x - \sqrt{1+x+x^2} \right) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln^2 x \left( 1 - \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x \ln^2 x} \right)$  и найдем отдельно предел  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x \ln^2 x}$ , используя правило Лопиталя (8.3):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x \ln^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + 2}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} (\ln^2 x + 2 \ln x)} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \ln^2 x - \sqrt{1+x+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln^2 x = \infty. \blacktriangleright$$

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

$$8.31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{x}.$$

$$8.32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}.$$

$$8.33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \ln(1+x) - 1}{x}.$$

$$8.34. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}.$$

$$8.35. \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^3 x.$$

$$8.36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{x^2}.$$

$$8.37. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 1 - e^{\frac{1}{x}} \right).$$

$$8.38. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \ln x - \sqrt{1+x^2} \right).$$

$$8.39. \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}.$$

$$8.40. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$8.41. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x) - \ln 2}{\sqrt{1+2x} - 3} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{2}}.$$

$$8.42. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

$$8.43. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$8.44. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x-3}{x-2} \right)^{\sqrt{2x}-2}.$$

$$8.45. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \ln(x^2 - 3)}{\ln(x - 2)}.$$

$$8.46. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x - e} \right).$$

$$8.47. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin x + \sqrt{x} \right)^x.$$

$$8.48. \lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} \frac{\ln \frac{x^2}{\pi}}{\sin x^2}.$$

$$8.49. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin x}.$$

$$8.50. \lim_{x \rightarrow 1+0} \left( \frac{1}{\sin(x+1)} + \ln(1+x) \right).$$

## 8.12. Интервалы монотонности и экстремумы функции

**8.51.** Найти интервалы монотонности и экстремумы функции  $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$ .

*Решение.* В соответствии со схемой исследования (п. 6<sup>о</sup>) найдем  $y = 2x^2 - 5x + 2$ . Очевидно, производная существует при всех значениях  $x$ . Приравнявая  $y'$  к нулю, получаем уравнение  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ , откуда  $x_1 = \frac{1}{2}$  и  $x_2 = 2$  — критические точки. Знаки производной представлены на рис. 8.29.

На интервалах  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  и  $\left(2; +\infty\right)$  производная  $f'(x) > 0$  и функция возрастает; на интервале  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$   $f'(x) < 0$ , и

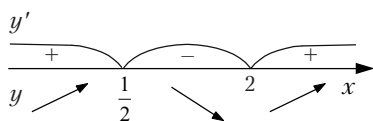


Рис. 8.29

функция убывает;  $x = \frac{1}{2}$  — точка максимума и  $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{24}$ ,  $x = 2$  — точка минимума и  $f_{\min}(2) = -\frac{2}{3}$ , так как при переходе через эти точки производная меняет свой знак соответственно с «+» на «-» и с «-» на «+».

**Замечание.** Установить существование экстремума в критических точках  $x = \frac{1}{2}$  и  $x = 2$ , в которых  $f'(x) = 0$  можно было и с помощью второй производной  $f''(x) = 4x - 5$  (см. п. 5°). Так как  $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$ , а  $f''(2) = 3 > 0$ , то  $x = \frac{1}{2}$  — точка максимума, а  $x = 2$  — точка минимума.

График данной функции схематично показан на рис. 8.30. ►

**8.52.** Найти экстремумы и интервалы монотонности функции  $y = (x \ln x - x)^2$ .

*Решение:*  $y' = 2(x \ln x - x) \left[ \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \right] = 2x \ln x (\ln x - 1)$ .

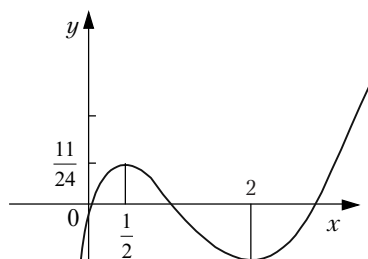


Рис. 8.30

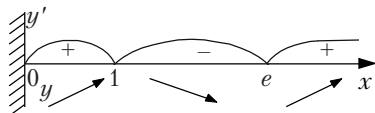


Рис. 8.31

Производная существует во всех точках, в которых существует и сама функция, т.е. при  $x > 0$ . Точки, в которых производная обращается в нуль, задаются равенствами  $\ln x = 0$ ,  $\ln x - 1 = 0$ , откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = e$  — критические точки. Знаки производной указаны на рис. 8.31.

Таким образом, функция монотонно возрастает на промежутках  $(0; 1)$  и  $(e; +\infty)$  и монотонно убывает на промежутке  $(1; e)$ . Точка  $x = 1$  — точка максимума и  $f_{\max}(1) = 1$ , точка  $x = e$  — точка минимума и  $f_{\min}(e) = 0$ . ►

**8.53.** Найти экстремумы и интервалы монотонности функции  $y = \sqrt{1 - \cos x}$ .

*Решение:*  $y' = \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$ . Производная не существует при  $\cos x = 1$ , т.е. при  $x = 2\pi n$  и равна нулю при  $x = \pi + 2\pi n$ . Знак производной совпадает со знаком  $\sin x$ ; таким образом,  $y' > 0$  при  $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$  и  $y' < 0$  при  $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$ . Это, соответственно, интервалы возрастания и убывания функции;  $x = \pi + 2\pi k$  — точки максимума и  $f_{\max}(\pi + 2\pi k) = \sqrt{2}$ ,  $x = 2\pi k$  — точки минимума и  $f_{\min}(2\pi k) = 0$ . ►

**8.54.** Найти наибольшее и наименьшее значения (глобальные максимум и минимум) функции  $y = 3x - x^3$  на отрезке  $[-2; 4]$ .

*Решение.* Производная функции  $y' = 3 - 3x^2$  обращается в нуль в двух точках  $x = \pm 1$ . Найдем значения функции в этих точках и на концах отрезка:  $f(-2) = 2$ ,  $f(-1) = -2$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f(4) = -52$ .

Таким образом,  $f_{\text{наиб}} = f(-2) = f(1) = 2$ ,  $f_{\text{наим}} = f(4) = -52$ . ►

**8.55.** Найти наибольшее значение (глобальный максимум) функции  $y = \frac{x\sqrt{x}}{8-3\sqrt{x}}$  на интервале  $(10; 18)$ .

*Решение.* Найдем  $y' = \frac{3\sqrt{x}(4-\sqrt{x})}{(8-3\sqrt{x})^2}$ . На интервале  $(10; 18)$

имеется всего одна критическая точка  $x = 16$ . Производная при переходе через эту точку меняет знак с «+» на «-», т.е.  $x = 16$  — точка максимума. Следовательно, функция достигает наибольшего значения при  $x = 16$ , т.е.  $f_{\text{наиб}} = f_{\max}(16) = -16$ . (Заметим, что наименьшего значения (глобального минимума) данной функции на указанном интервале не существует.) ►

**8.56.** Забором длиной 24 м требуется огородить с трех сторон прямоугольный палисадник наибольшей площади. Найти размеры палисадника.

*Решение.* Пусть длины сторон палисадника  $x, y$ . Тогда  $2x + y = 24$ , т.е.  $y = 24 - 2x$ . Площадь палисадника  $S = xy = x(24 - 2x) = 24x - 2x^2$ , где  $0 < x < 12$  (ибо  $24 - 2x > 0$ ). Таким образом, задача свелась к отысканию значения  $x$ , при котором  $S(x)$  принимает наибольшее значение на интервале  $(0; 12)$ . Найдем  $S'(x) = 24 - 4x = 0$  при  $x = 6$ . Точка  $x = 6$  — единственная точка экстремума — максимума функ-

ции  $S(x)$ . Это означает, что на интервале  $(0; 12)$   $S(x)$  принимает наибольшее значение при  $x = 6$ , т.е. искомые размеры палисадника 6 м и  $24 - 2 \cdot 6 = 12$  м. ►

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции:

$$8.57. y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2. \quad 8.58. y = \frac{x}{\ln x}.$$

$$8.59. y = (2x+1)e^{-\frac{x}{2}}. \quad 8.60. y = \frac{x^3}{1+x}.$$

$$8.61. y = x^3(x-1). \quad 8.62. y = \frac{x^3}{1+x^2}.$$

$$8.63. y = \frac{e^{2x}}{1+x}. \quad 8.64. y = (1+x^2)e^{-\frac{4x}{5}}.$$

$$8.65. y = x^3 e^{-\frac{3x^2}{2}}. \quad 8.66. y = \sqrt{x e^{3x} + 1}.$$

$$8.67. y = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3}. \quad 8.68. y = x \ln x - 3x.$$

$$8.69. y = \ln(1 + 2 \cos x). \quad 8.70. y = \arctg \frac{\ln x}{x}.$$

$$8.71. y = 2x^2 \ln x. \quad 8.72. y = \frac{x^2}{\ln x}.$$

$$8.73. y = \frac{1 + \sqrt{x}}{3 + x}. \quad 8.74. y = \cos(\ln x).$$

$$8.75. y = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}. \quad 8.76. y = \sqrt{1 - 2 \sin x} + \sqrt{1 + 2 \sin x}.$$

Найти наибольшее и наименьшее значения (глобальные максимум и минимум) функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$8.77. f(x) = x^3 - 3x^2; [-1; 4]. \quad 8.78. f(x) = x \ln x; [0, 1; 1].$$

$$8.79. f(x) = \frac{x}{2 + x^3}; [0; 3].$$

$$8.80. f(x) = 3 \sin x + 4 \cos^3 x; \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$8.81. f(x) = \frac{x+1}{e^x}; [-1; 1]. \quad 8.82. f(x) = \frac{2x-1}{2+x^2}; [-2; 0].$$

$$8.83. f(x) = 2 \sin 2x + 3 \cos 2x; \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$8.84. f(x) = \frac{2x}{1+x^4}; [-2; 0,5].$$

Найти наибольшее или наименьшее значение (глобальные максимум или минимум) функции  $y = f(x)$  на интервале  $(a, b)$ :

$$8.85. y = -3x^4 + 6x^2; (-\sqrt{2}; \sqrt{2}). \quad 8.86. y = \frac{1+x}{3+x^2}; (0; 2).$$

$$8.87. y = \frac{2+x^2}{1-x^2}; \left(-\frac{1}{2}; 1\right). \quad 8.88. y = \operatorname{tg}^2 x; \left(-1; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$8.89. y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}; \left(0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$8.90. y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}; (-1; 1).$$

**8.91.** Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых сторон имеет периметр, равный 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и этот объем.

**8.92.** Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном, при которых на облицовку стен и дна пойдет наименьшее количество материала. Объем бассейна  $V$  фиксирован.

**8.93.** Требуется огородить два участка: один — в форме правильного треугольника, другой — в форме полукруга. Длина изгороди фиксирована и равна  $P$ . Определить разме-

ры участков (сторону треугольника и радиус полукруга) так, чтобы сумма площадей этих участков была бы наибольшей.

**8.94.** В треугольник с основанием  $a$  и высотой  $h$  вписан прямоугольник, основание которого лежит на основании треугольника, а две вершины — на боковых сторонах. Найти наибольшую площадь вписанного прямоугольника.

### 8.13. Интервалы выпуклости функции.

#### Точки перегиба

**8.95.** Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции  $y = 4x^3 - 2x^4$ .

*Решение.* В соответствии со схемой исследования (п. 5°), найдем  $y' = 12x^2 - 8x^3$ ,  $y'' = 24x - 24x^2 = 24x(1 - x)$ . Очевидно,  $y'' = 0$  при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . Знаки второй производной  $y''$  указаны на рис. 8.32.

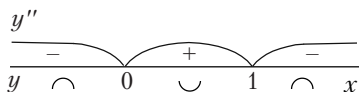


Рис. 8.32

Функция является выпуклой вверх на интервалах  $(-\infty; 0)$  и  $(1; +\infty)$  (так как  $f''(x) < 0$ ) и выпуклой вниз на интервале  $(0; 1)$  ( $f''(x) > 0$ );  $x = 0$  и  $x = 1$  — точки перегиба, так как при переходе через них  $f''(x)$  меняет свой знак. ►

**8.96.** Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции  $y = 5x^4 - 3x^5$ .

*Решение:*  $y' = 20x^3 - 15x^4$ ,  $y'' = 60x^2 - 60x^3 = 60x^2(1 - x)$ . Вторая производная обращается в нуль в тех же точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ , что и в предыдущем примере. Однако в данном случае вторая производная имеет другие знаки (рис. 8.33).

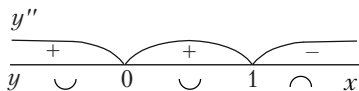


Рис. 8.33

Таким образом, функция выпукла вниз на всем интервале  $(-\infty; 1)$ , и точка  $x = 0$  не является точкой перегиба.

Нетрудно заметить, что это точка экстремума (максимума) функции. Точка  $x = 1$  — точка перегиба. На интервале  $(1; +\infty)$  функция выпукла вверх. ►



**8.97.** Найти точки перегиба функции  $y = \sin x + 2\cos x$ .

*Решение.* Имеем  $y' = \cos x - 2\sin x$ ,  $y'' = -\sin x - 2\cos x$ .

Вторая производная обращается в нуль при выполнении равенства  $\sin x = -2\cos x$ , или  $\operatorname{tg} x = -2$ , т.е. в точках  $x = -\arctg 2 + \pi n$ . На рис. 8.34 показано, что при  $-\arctg 2 + 2\pi n < x < \pi - \arctg 2 + 2\pi n$   $f''(x) < 0$  и функция является выпуклой вниз, а при  $\pi - \arctg 2 + 2\pi n < x < 2\pi - \arctg 2 + 2\pi n$   $f''(x) > 0$  и функция является выпуклой вверх. Точки  $x = -\arctg 2 + \pi n$  — точки перегиба. ►

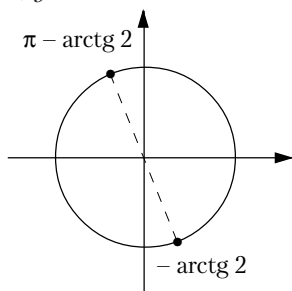


Рис. 8.34

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции:

**8.98.**  $y = \frac{1}{6}x^3(x^2 - 5)$ . **8.99.**  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

**8.100.**  $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ . **8.101.**  $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ .

**8.102.**  $y = (x+1)\arctg x$ . **8.103.**  $y = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$ .

**8.104.**  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ . **8.105.**  $y = x^2 e^{\frac{2}{x}}$ .

**8.106.**  $y = x^3 \ln x + 1$ . **8.107.**  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

**8.108.**  $y = \left( \frac{x^3}{6} - x^2 \right) \ln x - \frac{5x^3}{36} + \frac{3x^2}{2}$ .

**8.109.**  $y = \frac{x^3}{3\sqrt[3]{x^3 + 2}}$ .

### 8.14. Асимптоты. Исследование функций и построение их графиков

**8.110.** Исследовать функцию  $y = \frac{2x}{1-x^2}$  и построить ее график.

*Решение.* 1°. Область определения:  $(-\infty; 1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ . Точки  $x = -1$  и  $x = 1$  — точки разрыва функции.

2°.  $f(-x) = -f(x)$ , т.е. функция нечетная; ее график симметричен относительно начала координат и достаточно провести исследование функции на интервале  $[0; +\infty)$ .

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty.$$

Прямые  $x = 1$  и (в силу симметрии графика)  $x = -1$  — вертикальные асимптоты.

4°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$ . Прямая  $y = 0$  (ось абсцисс) — двусторонняя горизонтальная асимптота.

$$5^\circ. y' = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} > 0 \text{ при всех допустимых значениях } x.$$

Экстремумов нет, функция возрастает на интервалах  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

6°.  $y'' = \frac{4x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$ ,  $y'' = 0$  при  $x = 0$ . Знаки второй производной показаны на рис. 8.35.

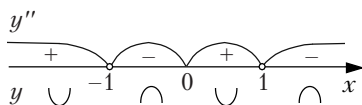


Рис. 8.35

Функция выпукла вниз на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$  и выпукла вверх на интервалах  $(-1; 0)$ ,  $(1; +\infty)$ . Хотя  $f''(x)$  меняет свой знак при переходе через три точки:  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ , но график

функции имеет только одну точку перегиба  $x = 0$ , ибо в двух других точках  $x = -1$ ,  $x = 1$  — функция не определена.

7°. Точка пересечения графика с осями единственная — начало координат  $(0; 0)$ .

График функции показан на рис. 8.36.

**8.111.** Исследовать функцию  $y = (x-1)e^x$  и построить ее график.

*Решение.* 1°. Область определения:  $(-\infty; +\infty)$ .

2°. Функция общего вида, так как  $f(-x) = (-x - 1)e^x \neq \pm f(x)$ .

3°. Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

$$4^0. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)}{e^{-x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0. \text{ Следовательно, прямая}$$

$y = 0$  (ось абсцисс) является левосторонней горизонтальной асимптотой.

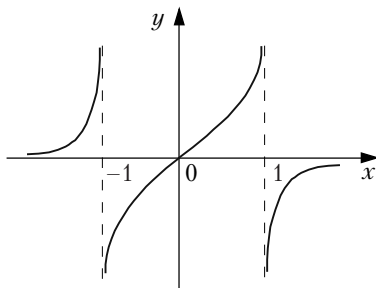


Рис. 8.36

5°.  $y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ . Производная обращается в нуль в точке  $x = 0$ . Знаки производной показаны на рис. 8.37.

Таким образом, функция убывает на интервале  $(-\infty; 0)$ , возрастает на интервале  $(0; +\infty)$ ;  $x = 0$  — точка минимума и  $f_{\min}(0) = -1$ .

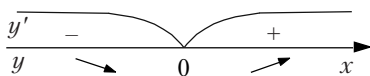


Рис. 8.37

6°.  $y'' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$ ;  $y'' = 0$  при  $x = -1$ . Производная  $y'' < 0$ , если  $x + 1 < 0$ , т.е. на интервале  $(-\infty; -1)$ . На интервале  $(-1; +\infty)$   $y'' > 0$ . Таким образом, функция выпукла вверх на интервале  $(-\infty; -1)$  и выпукла вниз на интервале  $(-1; +\infty)$ ;  $x = -1$  — точка перегиба.

7°. Точка пересечения с осью ординат —  $(0; -1)$ , с осью абсцисс —  $(1; 0)$ .

График функции изображен на рис. 8.38. ►

**8.112.** Исследовать функцию  $y = x \ln x$  и построить ее график.

*Решение.* 1°. Область определения функции —  $(0; +\infty)$ .

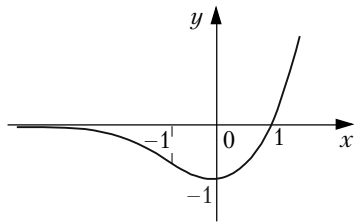


Рис. 8.38

2°. Так как при  $x < 0$  функция не определена, рассмотрение вопроса о четности (нечетности) не имеет смысла.

3°. Точка  $x = 0$  — единственная граничная точка области определения (точек разрыва нет). Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Таким образом, вертикальных асимптот функция не имеет.

4°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$ , горизонтальных асимптот нет. Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x} = +\infty$ , то нет и наклонных асимптот.

5°.  $y' = \ln x + 1$ ;  $y' = 0$  при  $\ln x = -1$ , т.е. в точке  $x = \frac{1}{e}$ . Знаки производной показаны на рис. 8.39.

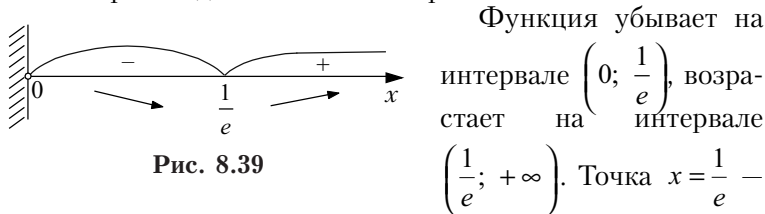


Рис. 8.39

точка минимума и  $f_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ .

6°.  $y'' = \frac{1}{x} > 0$  при всех  $x > 0$ . Таким образом, функция выпукла вниз на всей области определения.

7°. Так как  $x \neq 0$ , то график не пересекает ось ординат. С осью абсцисс график пересекается в точке, задаваемой условием  $x \ln x = 0$ , т.е.  $x = 1$ .

График функции показан на рис. 8.40.

**8.113.** Исследовать функцию  $y = \frac{1}{e^x}$  и построить ее график.

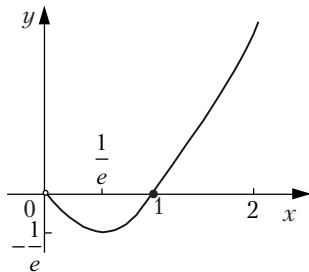


Рис. 8.40

Решение. 1°. Область определения:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

2°.  $f(-x) = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \neq \pm f(x)$ , т.е. функция общего вида.

3°. Единственная точка разрыва  $x = 0$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} ye^y = +\infty \quad (\text{ибо при } x \rightarrow 0+ \quad y = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} ye^y = 0 \quad (\text{см. пример 8.111}).$$

Таким образом, прямая  $x = 0$  (ось ординат) является вертикальной асимптотой графика функции, но асимптотическое поведение функции наблюдается только справа от оси ординат.

4°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$ , т.е. ось абсцисс  $y = 0$  является двусторонней горизонтальной асимптотой.

5°.  $y' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ;  $y' = 0$  при  $1 + \frac{1}{x} = 0$ , т.е. при  $x = -1$ , причем знак производной противоположен знаку  $1 + \frac{1}{x}$ . Зна-

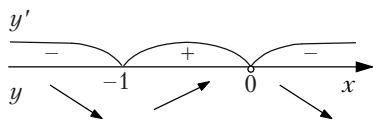


Рис. 8.41

ки производной на интервалах числовой оси показаны на рис. 8.41.

Функция возрастает на интервале  $(-1; 0)$  и убывает на интервале  $(-\infty; -1)$  и  $(0; +\infty)$ . Точка  $x = -1$  — точка мини-

мума,  $f_{\min}(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$ .

$$6°. y'' = -\frac{x^3 - 3x^2(x+1)}{x^6}e^{\frac{1}{x}} - \frac{x+1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\frac{2x^2 + 4x + 1}{x^5};$$

$y'' = 0$  при  $2x^2 + 4x + 1 = 0$ , т.е. при  $x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Знаки второй производной показаны на рис. 8.42.

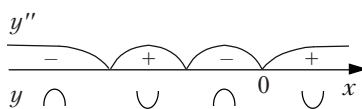


Рис. 8.42

Следовательно, функция является выпуклой вверх на интервалах  $\left(-\infty; -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  и

$\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ , а выпуклой

вниз — на интервалах  $\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  и  $(0; +\infty)$ .

Точки  $x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  являются точками перегиба.

7°. Точек пересечения с осями координат график функции не имеет.

График функции представлен на рис. 8.43.

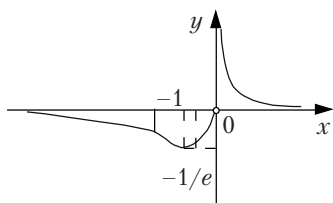


Рис. 8.43

**8.114.** Исследовать функ-

цию  $y = \sqrt{1 - \cos^3 x}$  и построить ее график.

*Решение.* 1°. Область определения —  $(-\infty; +\infty)$ , так как неравенство  $1 - \cos^3 x \geq 0$  выполняется при всех действительных значениях  $x$ .

2°. Так как  $\cos x$  — функция четная, то четной является и рассматриваемая функция.

3°. Так как функция непрерывна при всех действительных значениях  $x$ , то вертикальных асимптот нет.

4°. Пределы  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1 - \cos^3 x}$  не существуют (ни конечные, ни бесконечные). Функция не имеет ни горизонтальных, ни наклонных асимптот.

$$5^\circ. y' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \cos^3 x}} (-3\cos^2 x)(-\sin x) = \frac{3\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^3 x}}.$$

Производная обращается в нуль при  $\cos x = 0$ , т.е. в точках  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , а также в точках, в которых  $\sin x = 0$ , но  $\cos \neq \pm 1$ , т.е.  $x = \pi + 2\pi n$ . В точках  $x = 2\pi n$  производная  $y'$  не су-

ществует. Знаки производной совпадают со знаками  $\sin x$  (рис. 8.44).

Таким образом, в точках  $x = 2\pi n$  функция имеет минимум, в точках  $x = \pi + 2\pi n$  — максимум. Точки вида  $\frac{\pi}{2} + \pi n$  не являются точками экстремума.

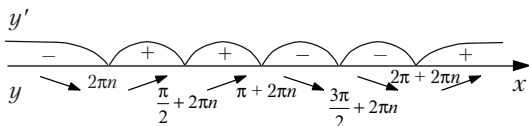


Рис. 8.44

$$6^{\circ}. y'' = \frac{\cos x(1 - \cos x) \left[ 63 \cos^2 x \left( \cos x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{33}{4} \cos^2 x \right] + 48}{4(1 - \cos^3 x)^{\frac{3}{2}}}$$

(предлагаем читателю проделать соответствующие выкладки самостоятельно);  $y'' = 0$  при  $\cos x = 0$ , т.е. в точках  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , и не существует в точках, в которых  $\cos x = 1$ , т.е. в точках  $x = 2\pi n$ . Знак  $y''$  совпадает со знаком  $\cos x$ . Точки  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$  являются точками перегиба.

7°. Пересечение графика с осью ординат происходит в начале координат. С осью абсцисс график пересекается в точках  $x = 2\pi n$ . Заметим, что функция является периодической с периодом  $T = 2\pi$ .

График функции показан на рис. 8.45. ►

**8.115.** Исследовать функцию  $y = \frac{x}{2} - \arctg x$  и построить ее график.

*Решение.* 1°. Область определения —  $(-\infty; +\infty)$ .

$$2^{\circ}. f(-x) = -\frac{x}{2} - \arctg(-x) = -\frac{x}{2} +$$

$+\arctg x = -f(x)$ ; функ-

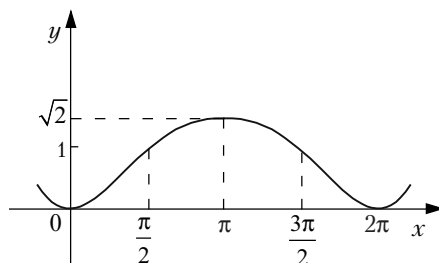


Рис. 8.45

ция нечетная. В силу симметрии графика относительно на-

чала координат достаточно провести исследование на интервале  $[0; +\infty)$ .

3°. Функция непрерывна при всех действительных значениях  $x$ ; вертикальных асимптот нет.

4°.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{2} - \arctg x \right) = +\infty$ . Горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{\arctg x}{x} \right) = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{2} - \arctg x - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\arctg x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, правосторонняя наклонная асимптота  $y = kx + b$  имеет вид:

$y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$ , а в силу симметрии графика левосторонняя асимптота —  $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$ .

5°. Производная существует при всех значениях  $x$  и обращается в нуль при  $x^2 - 1 = 0$ , т.е. при  $x = \pm 1$ . Знаки производной указаны на рис. 8.46.

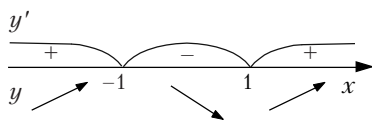


Рис. 8.46

Функция возрастает на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$ , а убывает на интервале  $(-1; 1)$ ;  $x = -1$  — точка максимума и  $f_{\max}(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ;  $x = 1$  — точка минимума и

$$f_{\min}(1) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

6°.  $y'' = \frac{2x}{1+x^2}$ ;  $y'' = 0$  при  $x = 0$ ,  $y'' > 0$  при  $x > 0$  и  $y'' < 0$

при  $x < 0$ . Функция выпукла вверх на интервале  $(-\infty; 0)$  и выпукла вниз на интервале  $(0; +\infty)$ ,  $x = 0$  — точка перегиба.

7°.  $f(0) = 0$ , следовательно, график пересекает ось ординат в начале координат (это следует и из нечетности функции). Точки пересечения графика с осью абсцисс задаются равенствами:  $\frac{x}{2} = \arctg x$ . Решить точно эти уравнения



нельзя, но для схематического построения графика это несущественно.

Схематически график функции показан на рис. 8.47. ►

Найти асимптоты графиков функций:

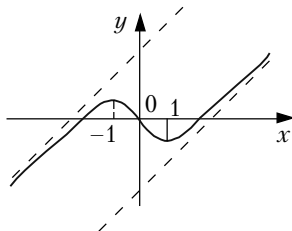


Рис. 8.47

$$8.116. y = \frac{1-x^3}{(2-x)(1+3x^2)}.$$

$$8.117. \frac{2+xe^x}{3+e^x}.$$

$$8.118. y = \frac{(2x^2-1)}{x} e^{-x}.$$

$$8.119. y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

$$8.120. y = \frac{\arccos x}{x^2 - \frac{\pi}{4}}.$$

$$8.121. y = \sqrt{3x^3 - x^2}.$$

$$8.122. y = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

$$8.123. y = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$8.124. y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$8.125. y = x^2(x-4)^2.$$

$$8.126. y = \frac{2x}{2+x^3}.$$

$$8.127. y = (x+1)e^{-x}.$$

$$8.128. y = xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$8.129. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$8.130. y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$8.131. y = \sqrt[3]{1-\ln x}.$$

$$8.132. y = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$8.133. y = xe^{\frac{1}{x}}.$$

$$8.134. y = \frac{1}{1-e^x}.$$

$$8.135. y = \sin x + \cos^2 x.$$

$$8.136. y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 + 1)}}.$$

$$8.137. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$8.138. y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

$$8.139. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}.$$

$$8.140. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

### 8.15. Применение производной в задачах с экономическим содержанием

**8.141.** Функция издержек имеет вид  $C(x) = 100 + \frac{1}{2}x^2$ , а доход при производстве  $x$  единиц товара определяется следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 4000x, & \text{если } x < 100, \\ 4000(100 + \sqrt{x-100}), & \text{если } x > 100. \end{cases}$$

Определить оптимальное для производителя значение выпуска  $x_{\text{опт}}$ .

*Решение.* Функция прибыли имеет вид

$$P(x) = \begin{cases} -100 + 4000x - \frac{1}{2}x^2, & \text{если } x < 100, \\ 399\,900 + 400\sqrt{x-100} - \frac{1}{2}x^2, & \text{если } x > 100. \end{cases}$$

Найдем производную функции прибыли

$$P'(x) = \begin{cases} 4000 - 2x, & \text{если } x < 100, \\ \frac{2000}{\sqrt{x-100}} - x, & \text{если } x > 100. \end{cases}$$

Очевидно,  $P'(x) > 0$  при  $x < 100$ , так что наибольшее значение прибыли на отрезке  $[0; 100]$  есть  $P(100) = 399\,900$ . Найдем теперь наибольшее значение прибыли на интервале

$(100; +\infty)$ . Имеется одна критическая точка  $x = 200$ . При этом  $P'(x) > 0$  при  $100 < x < 200$  и  $P'(x) < 0$  при  $x > 200$ , т.е.  $x = 200$  — максимальное значение  $P(x)$  на интервале  $(100; +\infty)$ .  $P(200) = 419\,900 > P(100)$ , таким образом,  $x_{\text{опт}} = 200$  (ед.). ►

**8.142.** Капитал в 1 млрд руб. может быть размещен в банке под 10% годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 20%, а издержки задаются квадратичной зависимостью. Прибыль облагается налогом в  $p(\%)$ . При каких значениях  $p$  вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке?

*Решение.* Пусть  $x$  (млрд руб.) инвестируется в производство, а  $1 - x$  размещается под проценты. Тогда размещенный капитал через год станет равным  $(1 - x(1 + 10/100)) = 1,1 - 1,1x$ , а капитал, вложенный в производство,  $x(1 + 20/100) = 1,2x$ . Издержки составят  $\alpha x^2$ , т.е. прибыль от вложения в производство  $C = 1,2x - \alpha x^2$ . Налоги составят

$(1,2x - \alpha x^2) \cdot \frac{p}{100}$ , т.е. чистая прибыль ожидается равной

$$(1 - p/100)(1,2x - \alpha x^2).$$

Общая сумма через год составит

$$\begin{aligned} A(x) &= 1,1 - 1,1x + (1 - p/100)(1,2x - \alpha x^2) = \\ &= 1,1 + [1,2(1 - p/100) - 1,1]x - \alpha(1 - p/100)x^2, \end{aligned}$$

и требуется найти максимальное значение этой функции на отрезке  $[0; 1]$ .

Имеем

$$A'(x) = 1,2(1 - p/100) - 1,1 - 2\alpha(1 - p/100)x \quad \text{и} \quad A'(x) = 0 \quad \text{при}$$

$$x_0 = \frac{1,2(1 - p/100) - 1,1}{2\alpha(1 - p/100)}; \quad A''(x) = -2\alpha(1 - p/100) < 0, \quad \text{т.е.} \quad x_0 -$$

точка максимума.

Чтобы точка  $x_0$  принадлежала отрезку  $[0; 1]$ , необходимо выполнение условия  $0 < 1,2(1 - p/100) - 1,1 < 2\alpha(1 - p/100)$ ,

$$\text{т.е.} \quad p < \frac{2\alpha - 0,1}{2\alpha - 1,2} \cdot 100 \quad \text{и} \quad p < 8\frac{1}{3}.$$

Очевидно, что при всех  $\alpha > 0$  выполняется условие  $\frac{2\alpha - 0,1}{2\alpha - 1,2} \cdot 100 > 8\frac{1}{3}$ . Следовательно, при  $p > 8\frac{1}{3}$  выгодно весь

капитал размещать в банке под проценты, а при  $p < 8\frac{1}{3}$  — определенную часть инвестировать в производство. ►

**8.143.** Функция издержек имеет вид  $C(x) = 10 + \frac{x^2}{10}$ . На начальном этапе фирма организует производство так, чтобы минимизировать средние издержки  $A(x)$ . В дальнейшем на товар устанавливается цена, равная 4 ден. ед. за единицу. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск?

*Решение.* Средние издержки  $A(x) = \frac{10}{x} + \frac{x}{10}$  принимают минимальное значение при  $x = 10$ . Предельные издержки  $M(x) = \frac{x}{5}$ . При установившейся цене  $p = 4$  оптимальное значение выпуска задается условием максимизации прибыли:

$P(x) = 4x - C(x) \rightarrow \max$ , т.е.  $4 = M(x)$ , откуда  $x_{\text{опт}} = 20$ . Таким образом, производство следует увеличить на 10 ед. ►

**8.144.** Фирма минимизирует средние издержки, которые получаются в результате равными 30 руб/ед. Чему равны при этом предельные издержки?

Определить оптимальное для производителя значение выпуска  $x_{\text{опт}}$  при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене  $p$  за единицу и известен вид функции издержек  $C(x)$ :

**8.145.**  $C(x) = 13 + 2x + x^3$ ;  $p = 14$ .

**8.146.**  $C(x) = 10 + x + \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ ;  $p = 8$ .

**8.147.**  $C(x) = 8 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{10}e^x$ ;  $p = 21,85$ .

Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене  $p$  за единицу и известен вид функции издержек  $C(x)$ :

**8.148.**  $C(x) = 10 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$ ;  $p = 10,5$ .

**8.149.**  $C(x) = 8 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}$ ;  $p = 6,5$ .

$$8.150. C(x) = 2x + \frac{1}{20}e^{\frac{x}{2}}; \quad p = 40.$$

При производстве монополией  $x$  единиц товара цена за единицу составляет  $p(x)$ . Определить оптимальное для монополии значение выпуска  $x_{\text{опт}}$  (предполагается, что весь производственный товар реализуется), если издержки  $C(x)$  имеют вид:

$$8.151. C(x) = 10 + x + \frac{x^2}{2}; \quad p(x) = 8 - \sqrt{x}.$$

$$8.152. C(x) = 10 + (x-1)^2; \quad p(x) = 10 - \frac{4}{3}\sqrt{x}.$$

$$8.153. C(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}; \quad p(x) = 8 - \frac{x}{2}.$$

8.154. Монополия устанавливает фиксированную цену  $p = 380$  за единицу товара. Издержки при производстве  $x$  единиц товара равны  $C(x) = 292x + x^2$ . При этом количество реализуемого товара  $K(x)$  зависит от  $x$  следующим образом:  $K(x) = x + (\sqrt{x_0} - \sqrt{x})$ . Определить значение  $x$ , при котором монополия получит максимальную прибыль.

8.155. Монополия производит фиксированное количество  $x$  единиц товара и устанавливает цену единицы товара  $p > p_0$ . Количество реализованного товара  $K$  зависит от  $p$  следующим образом:

$$K(p) = xe^{p_0 - p} \quad (p_0 < 1),$$

где  $p_0$  — цена, при которой будет реализован весь товар.

Определить значение  $p$ , при котором монополия получит максимальную прибыль.

8.156. Решить задачу 8.155 при условии, что

$$K(p) = \frac{x}{(1 + p - p_0)^2} \quad (p_0 < \frac{1}{2}).$$

8.157. На начальном этапе производства фирма минимизирует средние издержки, причем функция издержек имеет вид  $C(x) = 10 + 2x + \frac{5}{2}x^2$ . В дальнейшем цена единицы товара устанавливается  $p = 37$ . На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск? На сколько при этом изменятся средние издержки?

**8.158.** Функция издержек имеет вид  $C(x) = 40x + 0,08x^3$ . Доход от реализации единицы продукции равен 200. Найти оптимальное для производителя значение выпуска продукции.

**8.159.** Зависимость объема выпуска продукции  $V$  (в денежных единицах) от капитальных затрат  $x$  определяется функцией  $V(x) = \frac{3}{4} \ln(1 + x^3)$ . Найти интервал значений  $x$ , на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

**8.160.** Считается, что увеличение реализации  $y$  от затрат на рекламу  $x$  (млн руб.) определяется соотношением:  $y = 0,1\sqrt{x}$ . Доход от реализации единицы продукции равен 20 тыс. руб. Найти уровень рекламных затрат, при котором фирма получит максимальную прибыль.

**8.161.** Количество реализуемой монополией продукции  $x$  в зависимости от цены единицы товара  $p$  определяется соотношением  $x = x_0 \left( \sqrt{\frac{p_0}{p}} - 1 \right)$  ( $p < p_0$ ). Найти значение цены  $p$ , при котором монополия получит наибольшую прибыль.

**8.162.** Доход от производства продукции с использованием  $x$  единиц ресурсов составляет величину  $400\sqrt{x}$ . Стоимость единицы ресурсов — 10 ден. ед. Какое количество ресурсов следует приобрести, чтобы прибыль была наибольшей?

**8.163.** Функция издержек имеет вид  $C(x) = x + 0,1x^2$ . Доход от реализации единицы продукции равен 50. Найти максимальное значение прибыли, которое может получить производитель.

**8.164.** Зависимость дохода монополии от количества выпускаемой продукции  $x$  определяется как  $D(x) = 100x - 1000\sqrt{x}$  ( $400 \leq x \leq 900$ ). Функция издержек на этом промежутке имеет вид  $C(x) = 50x + \frac{4}{5}x\sqrt{x}$ . Найти оптимальное для монополии-производителя значение выпуска продукции.

**8.165.** Цена на продукцию монополии-производителя устанавливается в соответствии с соотношением, идентифицируемым как  $p = p_0(1 - 0,2\sqrt{x})$ . При каком значении выпуска продукции доход от ее реализации будет наибольшим?

**8.166.** Функция издержек имеет вид  $C(x) = 2x$  при  $x \leq 100$ ;  $C(x) = 200 + p(x - 100)^2$  при  $x > 100$ . В настоящий момент уровень выпуска продукции  $x = 200$ . При каком условии на параметр  $p$  фирме выгодно уменьшить выпуск продукции, если доход от реализации единицы продукции равен 50?

## Контрольные задания по главе 8

### «Приложение производной»

№	Вариант 8.1	Вариант 8.2	Вариант 8.3
	Найти пределы:		
1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1) \ln x}{\sqrt{3+x}(3^x - 2^x) - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 6) \sin x}{(1 + \sqrt{x}) \ln(1 + x)}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})(\sqrt{1+x} - 1)}{e^x - e^{-x}}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{x}}$
	Исследовать функции $y = f(x)$ и построить их графики:		
3	$y = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x^2}}$	$y = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x^2}}$	$y = \frac{1}{x^2} e^x$
4	$y = \sqrt[3]{2x^3 - 6x^2}$	$y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$	$y = \sqrt[3]{8x^3 - 12x^2}$
При производстве первых 20 единиц продукции издержки имеют вид $C(x) = px$ . Далее при производстве каждой последующей единицы продукции издержки возрастают на 2 ден. ед. Цена единицы продукции равна $a$ денежных единиц. Найти оптимальное значение выпуска продукции:			
5	$p = 5; a = 40$	$p = 6; a = 23$	$p = 8; a = 281$

### Тест 8

**1.** Правило Лопиталья не может быть применено для нахождения предела:

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - x}{x^2 - 1}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 - 1}$ ;

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\sqrt{x} - \sin x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}.$$

$$2. \text{ Найти следующий предел: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Выяснить, к какой из приведенных ниже функций не может быть применена теорема Лагранжа на отрезке

$$[0; 2]: 1) y = \frac{2x}{x-2}; \quad 2) y = \frac{2x}{x-3}; \quad 3) y = \frac{x-2}{x+2}; \quad 4) y = \ln(1+\sqrt{x}).$$

4. Среди перечисленных функций убывает на всей области определения функция:

$$1) y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad 2) y = \frac{2x}{1-x^2}; \quad 3) y = \frac{1-x^2}{x};$$

$$4) y = x^3 - x^2; \quad 5) y = x^3 + x^2.$$

5. Найти длину интервала возрастания функции  $y = 3x - x^3$ .

6. Выяснить, какое из приведенных утверждений является неверным:

1) в точке экстремума производная функции равна нулю или не существует;

2) в точке экстремума функция меняет знак;

3) в точке экстремума производная меняет знак;

4) в точке, в которой производная равна нулю или не существует, может не быть экстремума?

7. Найти точку  $x_0$  максимума функции  $y = x^2(x-4)^2$ .

8. Среди перечисленных функций горизонтальную асимптоту имеет функция:

$$1) y = 3^x - 2^x; \quad 2) y = 3^x - x^2 2^x;$$

$$3) y = xe^{-x}; \quad 4) y = \frac{2+x^2}{1+x\sqrt{x}}.$$

9. Следующее из перечисленных утверждений является всегда верным:

1) в точке перегиба всегда существует конечная первая производная;

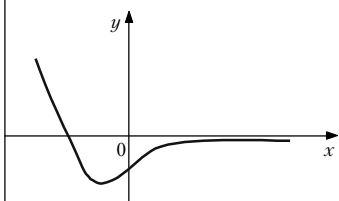
2) в точке перегиба существует конечная вторая производная;

3) точка перегиба является точкой экстремума первой производной функции;

4) точка перегиба является точкой экстремума второй производной функции.



10. Выяснить, график какой функции изображен на рисунке:



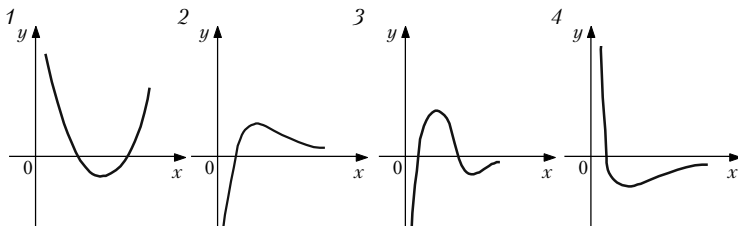
1)  $y = (x+1)e^x$ ;

2)  $y = -(x+1)e^{-x}$ ;

3)  $y = (x+1)e^{-x}$ ;

4)  $y = -(x+1)e^x$ .

11. Выяснить, какой из графиков, приведенных на рисунке, есть график функции  $y = \frac{\ln x}{x}$ .



12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^3 + x^2$  на отрезке  $[-1; 2]$ .

13. Требуется огородить прямоугольную площадку площадью  $600 \text{ м}^2$  и перегородить ее таким же забором пополам. При каких размерах  $a, b$  площадки расход материала на забор будет наименьшим?

14. Если изобразить на одном рисунке графики предельных и средних издержек, то:

1) они будут пересекаться в точке минимума средних издержек;

2) они будут пересекаться в точке минимума предельных издержек;

3) они будут пересекаться в точке, в которой предельные издержки равны нулю;

4) график средних издержек будет в любом случае выше графика предельных издержек.

15. Функция издержек имеет вид

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{при } x \leq 20, \\ \frac{x}{5} + \frac{1}{8}(x-20)^2 & \text{при } x > 20. \end{cases}$$

При какой цене  $p$  единицы товара оптимальное значение выпуска  $x_{\text{опт}} = 30$ ?

# **КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ТЕСТЫ**

**по дисциплине  
«Математический анализ»,  
часть 1 (разделам II и III)**

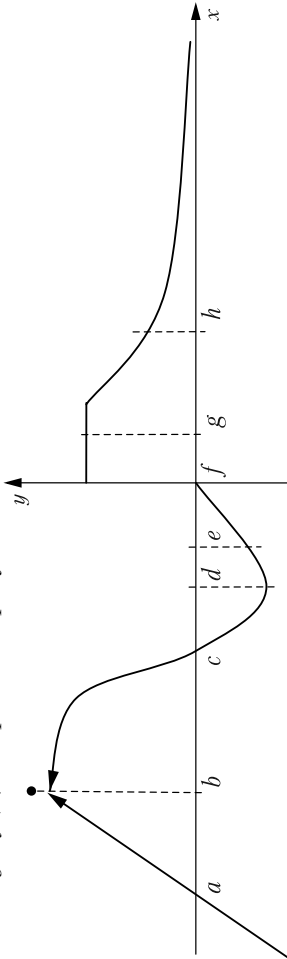
Учебно-тренировочные тесты  
Итоговые контрольные задания  
Итоговый тест

## Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Математический анализ»,

## часть 1 (разделам II–III)

№	Тест МА – 1.1	Тест МА – 1.2	Тест МА – 1.3
1	Найти область определения функции:		
	$y = 2^x + \frac{5}{\sqrt{x^2 - 9}}$	$y = \log_2(x+3) + \frac{\sqrt{x-3}}{5}$	$y = \log_2(5-x) + \frac{\sqrt{9-x^2}}{2}$
	<p>Ответы:</p> 1) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ ;    2) $[-3; 3]$ ;    3) $(-\infty; -3)$ ;    4) $(-\infty; -3]$ ; 5) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ ;    6) $(-3; 3)$ ;    7) $(3; +\infty)$ ;    8) $[3; +\infty)$		
2	Найти значение параметра $a$ , при котором на всей числовой прямой непрерывна функция:		
	$f(x) = \begin{cases} \log_2(4-x) & \text{при } x \leq 3, \\ x^2 + ax & \text{при } x > 3 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{при } x \leq a, \\ 4x - 2 & \text{при } x > a \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 3^x - a & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x & \text{при } x > 0 \end{cases}$
3	Указать функции, которые в точке $x = 0$ имеют:		
	разрыв второго рода	неустраняемый разрыв первого рода	устраняемый разрыв первого рода
	<p>Ответы:</p> $1) y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1-x & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} \ln x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ \ln(-x) & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad 3) y = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad 4) y = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 - 2^{-x} & \text{при } x < 0 \end{cases}$		

## Продолжение учебно-тренировочных тестов

№	Тест МА – 1.1	Тест МА – 1.2	Тест МА – 1.3
4	Указать четные функции	Указать функции, у которых графики симметричны относительно начала координат	Указать функции общего вида (ни четные, ни нечетные)
	<p>Ответы: 1) <math>y = \ln x^2</math>; 2) <math>y = x^2 - x^3</math>; 3) <math>y = \frac{x^2+1}{x^2-1}</math>; 4) <math>y = \frac{x}{x^2+1}</math>; 5) <math>y = \ln(x+5)</math>; 6) <math>y = x^3 - x</math></p>		
5	<p>График функции <math>y = f(x)</math> изображен на рисунке:</p>  <p>Указать точки, в которых:</p>		
	функция терпит устранимый разрыв первого рода	у функции не существует ни конечного, ни бесконечного предела	функция имеет неустранимый разрыв первого рода

№	Тест МА – 1.1	Тест МА – 1.2	Тест МА – 1.3
6	Указать функции, которые являются ограниченными на всей числовой прямой	Указать функции, которые определены на всей числовой прямой	Указать функции, которые являются непрерывными на всей области определения
	<i>Ответы:</i> 1) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ; 2) $y = \frac{x}{x^2-1}$ ; 3) $y = \sqrt{x+1}$ ; 4) $y = x + \sin x$ ; 5) $y = \operatorname{tg}(x+5)$ ; 6) $y = 5 - \operatorname{arctg} x$		
7	Указать функции, которые являются ограниченными:		
	на отрезке $[-2; 2]$	на полуинтервале $(0; 2]$	на интервале $(2; +\infty)$
8	Указать функции, которые являются бесконечно:		
	большими при $x \rightarrow 1$	малыми при $x \rightarrow +\infty$	большими при $x \rightarrow +\infty$
<i>Ответы:</i> 1) $y = \frac{x}{x^2-1}$ ; 2) $y = 5^{x+2}$ ; 3) $y = \frac{x^2+1}{x^2-5}$ ; 4) $y = \ln(x-1)$			

1) 

2) 

3) 

4) 

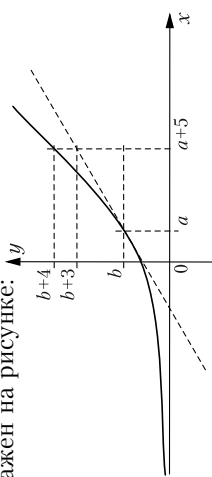
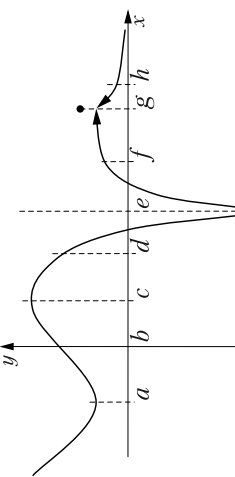
Продолжение учебно-тренировочных тестов

№	Тест МА – 1.1	Тест МА – 1.2	Тест МА – 1.3
9	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{3x-1} \right)^{x+1}$	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^{\frac{x}{4}}$	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+x}{2} \right)^{\frac{4}{x}}$
	Ответы: 1) 0; 2) 1;	3) $e$ ; 4) $\sqrt{e}$ ;	5) $e^2$ ; 6) $e^4$
	Указать функции, для которых прямая:		
10	$y = 1$ является горизонтальной асимптотой	$x = 0$ является вертикальной асимптотой	$y = x$ является наклонной асимптотой
	Ответы: 1) $y = \frac{x^2+1}{x}$ ;	2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ;	4) $y = x + e^{-x^2}$
	Найти значение производной функции:		
11	$y = \frac{1}{x} + \arctg(x^2-5)$ в точке $x = 2$	$e^{2-x} + xy = \frac{5}{2}$ в точке $(2, -3)$	$\begin{cases} x = \sqrt{t+1}, \\ y = \ln 2 \cdot \log_2(t+1) \end{cases}$ при $t = 3$
	Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = e^{-x}$ в точке $x = \ln 5$	Найти угол (в градусах), под которым наклонена к оси абсцисс касательная, проведенная к кривой $y = 2\sqrt{x-4}$ в точке $x = 5$	Найти тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = \ln(x^3+1)$ в точке $x = 1$

№	Тест МА – 1.1	Тест МА – 1.2	Тест МА – 1.3					
13	Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\ln x}$	Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x}$	Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 5}{5e^{2x} - 1}$					
14	Найти значение $x$ , при котором функция:							
	$y = x(3 - x^2)$ достигает максимума	$y = \frac{x}{(x-3)^2}$ имеет экстремум	$y = \frac{e^x}{x+1}$ достигает минимума					
15	В соответствующих клетках таблицы указать наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-1; 4]$ функции:							
	$y = \frac{1}{4}x^2(x-3)$	$y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$	$y = x(x-3)^2$					
	<i>Ответы:</i>							
	Значения	-1	0	1	2	3	4	Не существует
	$x_{\text{наим}} =$							
	$y_{\text{наим}} =$							
	$x_{\text{наиб}} =$							
	$y_{\text{наиб}} =$							
16	Указать интервалы, на которых функция:							
	$y = (x+2)^2(1-x)$ возрастает	$y = 0,25x^4 - 2x^2 + 3$ убывает					$y = x^3 - 3x^2$ убывает	
	<i>Ответы:</i>	1) $(-\infty; -2)$ ;	2) $(-2; 0)$ ;	3) $(0; 2)$ ;	4) $(2; +\infty)$			



Продолжение учебно-тренировочных тестов

№	Тест МА – 1.1	Тест МА – 1.2	Тест МА – 1.3
17	График функции $y = f'(x)$ изображен на рисунке:		
	Найти значение производной $y = f'(x)$ в точке $x = a$	Найти значение дифференциала функции $y = f(x)$ при $x = a$ и $\Delta x = 5$	Найти погрешность приближенного вычисления $f(a+5) \approx f(a) + df$
18	График функции $y = f'(x)$ изображен на рисунке:		
	Указать точки, для которых выполнены условия:	$y' > 0, y'' < 0$	
	$y' = 0, y'' > 0$	$y' < 0, y'' > 0$	

№	Тест МА – 1.1	Тест МА – 1.2	Тест МА – 1.3									
19	Указать рисунок, на котором изображен график функции:											
	$y = \log_{0,5}(x-1)$	$y = 2^x - 1$	$y = \log_2(x+1)$									
Ответы:												
	1)	2)	3)									
	4)											
20	Указать рисунок, на котором изображен график функции $y = f(x)$ , если при исследовании получена следующая таблица знаков производной:											
	$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; 2)$	$2$	$(2; +\infty)$	$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; 2)$	$2$	$(2; +\infty)$
	$y'$	+	0	-	0	+	$y'$	+	н/с	+	н/с	-
Ответы:												
	1)	2)	3)	4)								

**Итоговые контрольные задания по дисциплине  
«Математический анализ», часть 1 (разделам II, III)**

№	Вариант МА.1.1	Вариант МА.1.2	Вариант МА.1.3	Вариант МА.1.4	Вариант МА.1.5
Вычислить пределы:					
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 4x}}{4\sqrt[4]{16x^4 + 2} - \sqrt[3]{x}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2x^3 + x^2} - \sqrt[4]{3x^2 + 2}}{\sqrt{x-1} + 4}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 \sqrt{16x^4 - x}}{5x^2 + 4x - \sqrt[3]{1 - 8x^6}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 9} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3x - \sqrt{9x^2 + 5x - 7} \right)$
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - 1}{3x^2 + 2} \right)^{4x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} [2x(\ln(x+3) - \ln x)]$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 2} \right)^{-3x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^{2x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \right)^{4x}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 6x}{3x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 4x}{5x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x}$
Найти производную функции:					
4	$y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{8 - x^2}}$	$y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}$	$y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}$	$y = \log_2 \left( x + 4\sqrt{x^2 + 8x - 5} \right)$	$y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{1 - \sqrt{1 + x^2}}$

№	Вариант МА.1.1	Вариант МА.1.2	Вариант МА.1.3	Вариант МА.1.4	Вариант МА.1.5
Составить уравнение касательной(-ых) к графику функции:					
5	$y = \sqrt{2x-5}$ , проходящей через точку $(-1; -3)$ ; сделать чертеж	$y = \frac{3x+5}{x+4}$ в точке $x_0 = -3$ ; сделать чертеж	$y = \frac{x-3}{x+5}$ в точках его пересечения с прямой $y + 2x + 3 = 0$ ; сделать чертеж	$y = e^{2x-4}$ , параллельной прямой $y - 2x + 1 = 0$ ; сделать чертеж	$e = 4 + \ln(3-x)$ , перпендикулярной прямой $2y - 2x + 3 = 0$ ; сделать чертеж
Исследовать функции и построить их графики:					
6	$y = e^x - x$	$y = x^2 \ln x$	$y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$	$y = \frac{1}{x} - e^{\frac{x^3}{3}}$	$y = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}$
7	$y = \frac{x^2+2x}{3x+8}$	$y = (\sqrt{x}-\sqrt{2})e^{-x}$	$y = e^x + e^{-x} - 2x$	$y = \sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x^2}$	$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$
8	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \ln(x+y)$ на полукруглости с центром в начале координат и радиусом единица, лежащей в верхней полуплоскости	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x+y)$ на границе треугольника с вершинами в точках $(-1; 1)$ , $(2; 3)$ , $(4; 0)$	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 - 15x^2$ на отрезке, заключенном между точками пересечения параболы $y = x^2 - 2x$ и прямой $y = 2x - 3$	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ на отрезке графика экспоненты $y = e^{2x}$ , ограниченной прямыми $x = -4$ и $x = 2$	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ на отрезке графика экспоненты $y = e^{2x}$ , ограниченной прямыми $x = -4$ и $x = 2$

## Итоговый тест МА.1

1. По виду графика функции  $y = \frac{ax+b}{cx+1}$  (рис. 1) определить знаки постоянных  $a, b, c$ :

- 1)  $a < 0, b > 0, c > 0$ ; 2)  $a > 0, b > 0, c < 0$ ; 3)  $a < 0, b < 0, c > 0$ ; 4)  $a > 0, b < 0, c > 0$ ; 5)  $a < 0, b > 0, c < 0$ .

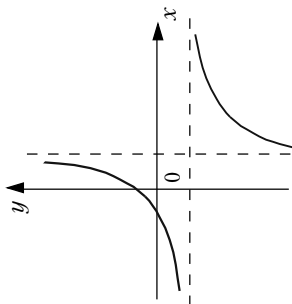


Рис. 1

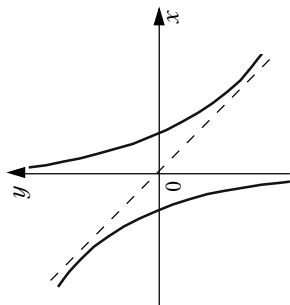


Рис. 2

2. Выбрать функцию, график которой наиболее точен соответствует рис. 2: 1)  $y = -x + \frac{1}{x}$ ; 2)  $y = -x - \frac{1}{x}$ ; 3)  $y = -x - \frac{1}{x^2}$ ;

4)  $y = -x + \frac{1}{x^2}$ ; 5)  $y = x - \frac{1}{x^2}$ .

3. Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ .

4. Найти  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+2^{x-1}} + \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1+2^{x-1}}$ .

5. При каком значении  $a$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{ax^2 + 7x - 14}{4x - x^2 + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 2?$$

6. При каком значении  $a$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{6}{x} \right)^{ax} = e^3?$$

7. В точке  $x = 0$  функция  $y = x \sin \frac{\pi}{x}$  не определена. Каким должно быть значение  $y(0)$ , чтобы доопределенная этим значением функция стала непрерывной?

8. Дана функция

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{при } x < -5, \\ 2x + 20 & \text{при } -5 \leq x < -2, \\ \sin \frac{2x}{x} & \text{при } -2 \leq x < 0, \\ x + 0,5 & \text{при } 0 \leq x \leq 5, \\ \frac{1}{x-5} & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Сколько эта функция имеет точек разрыва первого рода; второго рода?

9. Установить соответствие между точками кривой  $y = f(x)$  (A, B, C; D, E, F) и величинами производных в этих точках (рис. 3):

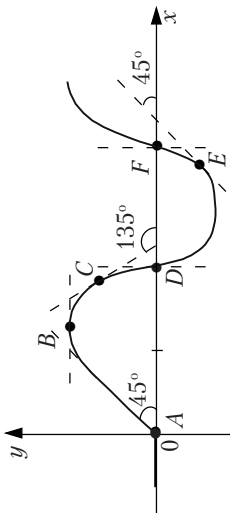


Рис. 3

1) 0; 2) -1; 3) 1; 4)  $-\infty$ ; 5)  $+\infty$ ; 6)  $f'(x)$  не существует (ни конечная, ни бесконечная).

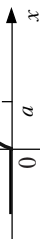
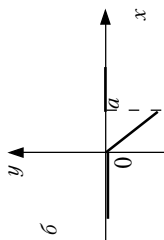
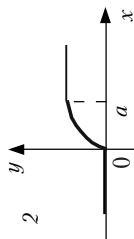
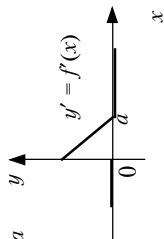
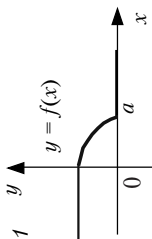
10. Какие из функций являются непрерывными в указанной точке  $x_0$ :

1)  $y = |x - 3|$ ,  $x_0 = 3$ ; 2)  $y = |x^2 - 3x + 2|$ ,  $x_0 = 1$ ;

3)  $y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ ,  $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ ; 4)  $y = \sqrt[3]{x+2}$ ,  $x_0 = -2$ ;

5)  $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ ,  $x_0 = -2$ .

11. Установить соответствие между графиками функций  $y = f(x)$  (1, 2, 3) и их производных  $y' = f'(x)$  (a, б, в) (рис. 4):



17. Выяснить, для каких функций на отрезке  $[0; 2]$  применима теорема Лагранжа:

1)  $y = \frac{1}{x}$ ; 2)  $y = 4 - x^2$ ; 3)  $y = x^{\frac{4}{3}}$ ; 4)  $y = \ln|x|$ ;

5)  $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$  6)  $y = \begin{cases} x & \text{при } x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$

18. Найти, применяя правило Лопиталя,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (\ln x \cdot \ln(x-1)).$$

19. Найти, применяя правило Лопиталя,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^{\ln(e^x - 1)}}.$$

20. Найти (с точностью до 0,1) экстремальное значение (максимум) функции  $y = x^4 e^{-x^2}$ .

21. Найти наименьшее значение функции  $y = \sqrt{x - \ln x}$  на полуинтервале  $(0; e]$ .

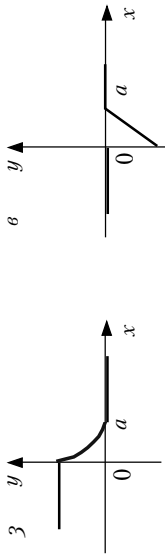


Рис. 4

12. Дано:  $y = \sqrt{1 + \arcsin x + \cos(\ln(x+1))}$ . Найти  $y'(0)$ .

13. Дано:  $y = (\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{3} \cos x)$ . Найти  $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

14. Дано:  $y = \sqrt{8 \ln(e^x + \sqrt{2e^{2x} + 1})}$ . Найти  $y'(0)$ .

15. Составить уравнение нижней касательной к окружности  $x^2 + y^2 = 20$ , перпендикулярной к прямой  $x + 2y - 2 = 0$ .

Ответ:  $y = kx + b$ , где  $k = \dots$ ;  $b = \dots$

16. Зависимость между спросом  $q$  и ценой  $p$  единицы продукции задана соотношением  $q = 4 - \sqrt[3]{p}$ . Найти значение цены, при которой спрос будет нейтральным (с единичной эластичностью).

22. Найти расстояние между точками перегиба функции  $y = x^2 - \frac{16}{3x^2}$ .

23. При подготовке к экзамену студент за  $t$  дней изучает  $\frac{t}{t+1}$ -ю часть курса, а забывает  $\frac{t}{36}$ -ю часть. Сколько дней надо затратить студенту на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

24. Используя понятие дифференциала, вычислить приближенно  $\sqrt[4]{24}$ .



## Раздел IV

# ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ



# Глава 9

## ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

В предыдущих главах нами были изучены функции одной переменной. Однако многим явлениям, в том числе экономическим, свойственна многофакторная зависимость. Исследование таких зависимостей потребовало совершенствования математического аппарата, в частности, введения понятия функции нескольких переменных.

#### 9.1. Основные понятия

**Определение.** Пусть имеется  $n$  переменных величин, и каждому набору их значений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  из некоторого множества  $X$  соответствует одно вполне определенное значение переменной величины  $z$ . Тогда говорят, что задана **функция нескольких переменных**  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ .

Например, формула  $z = \pi x_1^2 x_2$  задает объем цилиндра  $z$  как функцию двух переменных:  $x_1$  (радиуса основания) и  $x_2$  (высоты).

Переменные  $x_1, \dots, x_n$  называются *независимыми переменными*, или *аргументами*,  $z$  — *зависимой переменной*, а символ  $f$  означает *закон соответствия*. Множество  $X$  называется *областью определения функции*. Очевидно,  $X$  — подмножество  $n$ -мерного пространства.

**Пример 9.1.** Найти область определения функции:

а)  $z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ ; б)  $z = \frac{1}{x_1 x_2}$ .

*Решение.*

а) Область определения задается условием:  $1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$  или  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ , т.е. представляет собой единичный круг с центром в начале координат.

б) Имеем  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$ , т.е. область определения — это плоскость  $Ox_1x_2$  за исключением координатных прямых  $Ox_1$  и  $Ox_2$ . ►

Рассмотрим некоторые примеры функций нескольких переменных.

1. Функция  $z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$ , где  $a_1, \dots, a_n$ ;  $b$  — постоянные числа, называется *линейной*. Ее можно рассматривать как сумму  $n$  линейных функций от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

2. Функция  $z = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_ix_j$  ( $b_{ij}$  — постоянные числа) на-

зывается *квадратической*. В отличие от предыдущего примера квадратическая функция не является сепарабельной, т.е. не раскладывается в сумму функций одной переменной.

3. В параграфе 5.6 было определено понятие *функции полезности*, являющееся одним из базовых в экономической теории. Многомерный аналог этой функции — функция  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ , выражающая полезность от  $n$  приобретенных товаров. Чаще всего встречаются следующие ее виды:

а) *логарифмическая функция*

$$z = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - c_i), \text{ где } a_i > 0, x_i > c_i \geq 0;$$

б) *функция постоянной эластичности*

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-b_i} (x_i - c_i)^{1-b_i}, \text{ где } a_i > 0, 0 < b_i < 1, x_i > c_i \geq 0.$$

4. Для случая  $n$  переменных также обобщается понятие *производственной функции* (см. параграф 5.6), выражающей результат производственной деятельности от обусловивших его факторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Приведем наиболее часто встречающиеся виды производственных функций ( $z$  — величина общественного продукта;  $x_1$  — затраты труда;  $x_2$  — объем производственных фондов), полагая для простоты  $n = 2$ :

а) функция Кобба — Дугласа<sup>1</sup>

$$z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2};$$

б) функция с постоянной эластичностью замещения

$$z = e_0 \left[ e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta} \right]^{-\frac{1}{\beta}}.$$

В настоящей главе в основном будут рассматриваться функции двух переменных ( $n = 2$ ), что позволит использовать наглядную геометрическую иллюстрацию основных понятий. При этом практически все понятия и теоремы, сформулированные для  $n = 2$ , легко переносятся и на случай  $n > 2$ .

Функцию двух переменных будем обозначать в дальнейшем  $z = f(x, y)$ . Тогда ее область определения  $X$  есть подмножество координатной плоскости  $Oxy$ .

Окрестностью точки  $M_0(x_0, y_0) \in X$  называется круг, содержащий точку  $M_0$  (рис. 9.1).

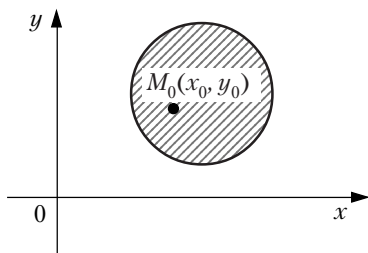


Рис. 9.1

Очевидно, что круг на плоскости есть двумерный аналог интервала на прямой.

При изучении функций нескольких переменных во многом используется уже рассмотренный в предыдущих главах математический аппарат. Так, любой функции  $z = f(x, y)$  можно поставить в соответствие две функции одной переменной:

при фиксированном значении  $x = x_0$  функцию  $z = f(x_0, y)$  и при фиксированном значении  $y = y_0$  функцию  $z = f(x, y_0)$ .

Следует иметь в виду, что хотя функции  $z = f(x, y_0)$  и  $z = f(x_0, y)$  имеют одно и то же «происхождение», их вид может существенно отличаться. Рассмотрим, например,

функцию  $z = K_0 \left( 1 + \frac{x}{100} \right)^y$ , выражающую величину вклада через  $y$  лет при ставке  $x\%$ . Очевидно, что эта функция степенная по  $x$  и показательная по  $y$ .

<sup>1</sup> Кобб Чарльз — американский математик; Дуглас Пол Говард (1892—1976) — американский экономист.

Графиком функции двух переменных  $z = f(x, y)$  называется множество точек трехмерного пространства  $(x, y, z)$ , аппликата  $z$  которых связана с абсциссой  $x$  и ординатой  $y$  функциональным соотношением  $z = f(x, y)$ . График функции двух переменных  $z = f(x, y)$ , вообще говоря, представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве<sup>1</sup>.

Для построения графика функции  $z = f(x, y)$  полезно рассматривать функции одной переменной  $z = f(x, y_0)$  и  $z = f(x_0, y)$ , представляющие сечения поверхности  $z = f(x, y)$  плоскостями, параллельными координатным плоскостям  $Oxz$  и  $Oyz$ , т.е. плоскостями  $y = y_0$  и  $x = x_0$ .

**Пример 9.2.** Построить график функции  $z = x^2 + y^2 - 2y$ .

**Решение.** Сечения поверхности  $z = x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y - 1)^2 - 1$  плоскостями, параллельными координатным плоскостями  $Oyz$  и  $Oxz$ , представляют параболы (например, при  $x = 0$   $z = (y - 1)^2 - 1$ , при  $y = 1$   $z = x^2 - 1$  и т.д.). В сечении поверхности координатной плоскостью  $Oxy$ , т.е. плоскостью  $z = 0$ , получается окружность  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . График функции  $z$  представляет поверхность, называемую *параболоидом* (рис. 9.2). ►

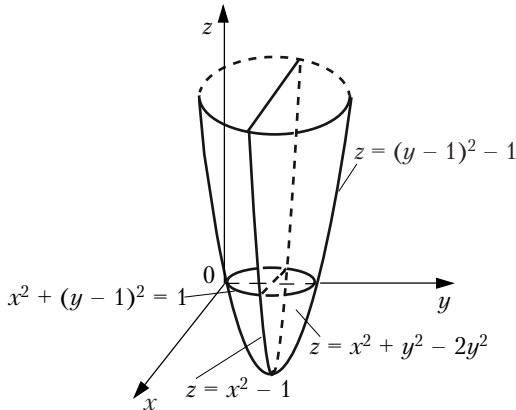


Рис. 9.2

<sup>1</sup> Формально график можно определить и для  $n > 2$ . В этом случае он называется *гиперповерхностью* в  $(n + 1)$ -мерном пространстве. О таком графике можно говорить только абстрактно, так как изобразить его на рисунке не представляется возможным.

Очевидно, что график функции двух переменных — значительно более сложный объект, чем график функции одной переменной. Как правило, построение поверхности оказывается довольно трудной задачей. В то же время поверхность в пространстве обладает гораздо меньшей наглядностью, чем линия на плоскости, поэтому в случае двух переменных для изучения поведения функции желательно использовать другие, более наглядные инструменты. Важнейшим из них являются линии уровня.

**Определение.** *Линией уровня* функции двух переменных  $z = f(x, y)$  называется множество точек на плоскости, в которых значение функции одно и то же и равно  $C$ .

Число  $C$  в этом случае называется *уровнем*.

На рис. 9.3 изображены линии уровня, соответствующие значениям  $C = 1$  и  $C = 2$ . Линия уровня  $L_1$  состоит из двух непересекающихся кривых, а линия  $L_2$  — самопересекающаяся кривая.

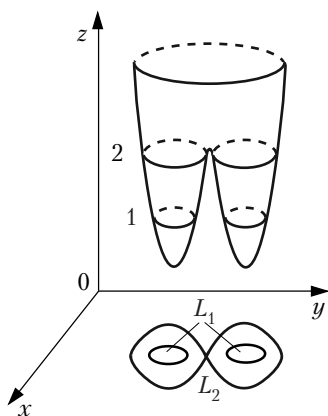


Рис. 9.3

Многие примеры линий уровня хорошо известны. Например, параллели и меридианы на глобусе — это линии уровня функций широты и долготы. Синоптики публикуют карты с изображением изотерм — линий уровня температуры. В параграфе 9.10 будут рассмотрены примеры использования линий уровня функций нескольких переменных в экономическом анализе. Построение линий уровня оказывается существенно более легкой задачей, чем построение графиков самих функций.

**Пример 9.3.** Построить линии уровня функции  $z = x^2 + y^2 - 2y$ .

**Решение.** Линия уровня  $z = C$  — это кривая на плоскости  $Oxy$ , задаваемая уравнением  $x^2 + y^2 - 2y = C$  или  $x^2 + (y - 1)^2 = C + 1$ , т.е. уравнением окружности с центром в точке  $(0; 1)$  и радиусом  $\sqrt{C+1}$  (рис. 9.4).

Точка  $(0; 1)$  — это вырожденная линия уровня, которая соответствует минимальному значению функции  $z = -1$ , достигаемому в точке  $(0; 1)$ . Линии уровня — концентрические окружности, радиус которых увеличивается с ростом  $z = C$ , причем расстояния между линиями с одинаковым шагом уровня уменьшаются по мере удаления от центра. Линии уровня позволяют представить график данной функции, построенный на рис. 9.2. ►

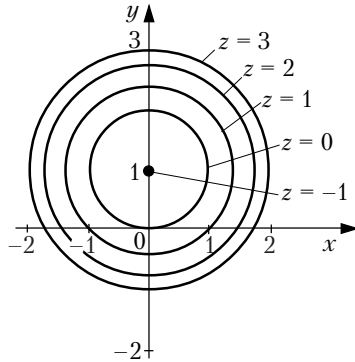


Рис. 9.4

## 9.2. Предел и непрерывность

Большая часть понятий анализа, определенных ранее для функций одной переменной, может быть перенесена на случай функций двух переменных.

**Определение.** Число  $A$  называется **пределом функции**  $z = f(x, y)$  при  $x \rightarrow x_0$  и  $y \rightarrow y_0$  (или **в точке**  $(x_0, y_0)$ ), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , найдется положительное число  $\delta > 0$  (зависящее от  $\varepsilon$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon)$ ), такое, что для всех точек  $(x, y)$ , отстоящих от точки  $(x_0, y_0)$  на расстояние<sup>1</sup>  $\rho$  меньшее, чем  $\delta$  (т.е. при  $0 < \rho < \delta$ ), выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Предел обозначается следующим образом:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

**Пример 9.4.** Найти предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

<sup>1</sup> Напомним, что расстояние между точками  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$  на плоскости определяется по формуле (3.5)  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

*Решение.* Обозначим  $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ . Условие  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  равносильно тому, что  $\rho \rightarrow 0$ . Запишем предел в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)'}{\rho'} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 - \rho^2}(-2\rho)}{1} = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Как правило, вычисление пределов функций двух переменных оказывается существенно более трудной задачей по сравнению со случаем одной переменной. Причина заключается в том, что на прямой существуют всего два направления, по которым аргумент может стремиться к предельной точке, т.е. справа и слева (см. параграф 6.2). На плоскости же таких направлений — бесконечное множество, и пределы функции по разным направлениям могут не совпадать.

**Пример 9.5.** Доказать, что  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  не существует.

*Решение.* Будем приближаться к точке  $(0; 0)$  по прямым  $y = kx$ .

$$\text{Если } y = kx, \text{ то } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(kx)}{x^2 + (kx)^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Получили, что значение предела зависит от углового коэффициента прямой. Но так как предел функции не должен зависеть от способа приближения точки  $(x, y)$  к точке  $(0; 0)$  (например по прямой  $y = 2x$  или  $y = 5x$ ), то рассматриваемый предел не существует.  $\blacktriangleright$

**Определение.** Функция  $z = f(x, y)$  называется **непрерывной в точке**  $(x_0, y_0)$ , если: 1) она определена в точке  $(x_0, y_0)$ ; 2) имеет конечный предел при  $x \rightarrow x_0$  и  $y \rightarrow y_0$ ; 3) этот предел равен значению функции в точке  $(x_0, y_0)$ , т.е.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Геометрический смысл непрерывности очевиден: график в точке  $(x_0, y_0)$  представляет собой сплошную, нераслаивающуюся поверхность.



### 9.3. Частные производные

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , аргументу  $y$  — приращение  $\Delta y$ . Тогда функция  $z$  получит наращенное значение  $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Величина  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  называется *полным приращением функции* в точке  $(x, y)$ . Если задать только приращение аргумента  $x$  или только приращение аргумента  $y$ , то полученные, соответственно, приращения функции  $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$  и  $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$  называются *частными*.

Полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

**Пример 9.6.** Найти частные и полное приращения функции  $z = xy$ .

*Решение.*

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x; \quad \Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y.$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y.$$

Получили, что

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z. \blacktriangleright$$

**Определение.** *Частной производной функции нескольких переменных* по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Обозначается частная производная так:  $z'_x, z'_y$  или  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , или  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ .

Таким образом, для функции  $z = f(x, y)$  по определению

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}; \quad (9.1)$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (9.2)$$

Геометрический смысл частных производных функции  $z = f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  показан на рис. 9.5.

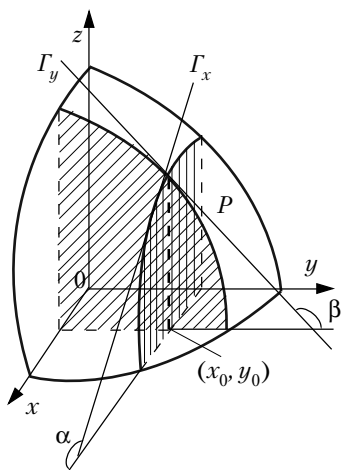


Рис. 9.5

Пусть график функции  $z = f(x, y)$  представляет некоторую поверхность  $P$ . Тогда при  $y = y_0$  получается кривая  $\Gamma_x$  — сечение этой поверхности соответствующей плоскостью. В этом случае производная  $z'_x$  выражает угловой коэффициент касательной к кривой  $\Gamma_x$  в заданной точке  $(x_0, y_0)$ , т.е.  $z'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона касательной к оси  $Ox$ . Аналогично  $z'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$ .

Из определения частных производных (см. формулы (9.1) и (9.2)) следует, что для нахождения производной

$z'_x(x, y)$  надо считать постоянной переменную  $y$ , а для нахождения  $z'_y(x, y)$  — переменную  $x$ . При этом сохраняются известные из гл. 7 правила дифференцирования.

**Пример 9.7.** Найти частные производные функций:

а)  $z = x \ln y + \frac{y}{x}$ ; б)  $z = x^y$ .

*Решение.*

а) Чтобы найти частную производную по  $x$ , считаем  $y$  постоянной величиной. Таким образом,  $z'_x = \ln y + y \left( \frac{1}{x} \right)' = \ln y - \frac{y}{x^2}$ . Аналогично, дифференцируя по  $y$ , считаем  $x$  постоянной величиной, т.е.  $z'_y = x(\ln y)' + \frac{1}{x} \cdot y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}$ .

б) При фиксированном  $y$  имеем степенную функцию от  $x$ . Таким образом,  $z'_x = yx^{y-1}$ . При фиксированном  $x$  функция является показательной относительно  $y$  и  $z'_y = x^y \ln x$ . ►

**Пример 9.8.** Поток пассажиров  $z$  выражается функцией  $z = \frac{x^2}{y}$ , где  $x$  — число жителей;  $y$  — расстояние между го-

родами. Найти частные производные этой функции и пояснить их смысл.

*Решение.* Производная  $z'_x = \frac{2x}{y}$  показывает, что при одном и том же расстоянии между городами увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей. Производная  $z'_y = -\frac{x^2}{y^2}$  показывает, что при одной и той же численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами. ►

## 9.4. Дифференциал функции

В параграфе 7.7 дифференциал функции  $y = f(x)$  определялся как главная, линейная относительно  $\Delta x$ , часть приращения функции, равная произведению  $f'(x)\Delta x$ .

Обобщая определение дифференциала функции на случай двух независимых переменных, приходим к следующему определению.

**Определение. Дифференциалом функции** называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y. \quad (9.3)$$

По формуле (9.3) найдем дифференциалы функций  $f(x, y) = x$ ,  $g(x, y) = y$ :  $df = dx = \Delta x$ ,  $dg = dy = \Delta y$ . Тогда формулу дифференциала (9.3) для функции  $z = f(x, y)$  можно записать в виде

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \quad (9.4)$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

**Определение.** Функция  $z = f(x, y)$  называется **дифференцируемой** в точке  $(x, y)$ , если ее полное приращение  $\Delta z$  может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \quad (9.5)$$

где  $dz$  — дифференциал функции,  $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ ,  $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$  — бесконечно малые при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Таким образом, *дифференциал функции нескольких переменных*, как и в случае одной переменной, *представляет главную, линейную относительно приращений  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , часть полного приращения функции*.

Можно показать, что если полное приращение функции  $\Delta z$  геометрически представляет приращение аппликаты поверхности  $z = f(x, y)$ , то *дифференциал функции  $dz$  есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверх-*

*ности  $z = f(x, y)$  в данной точке, когда переменные  $x$  и  $y$  получают приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  (рис. 9.6).*

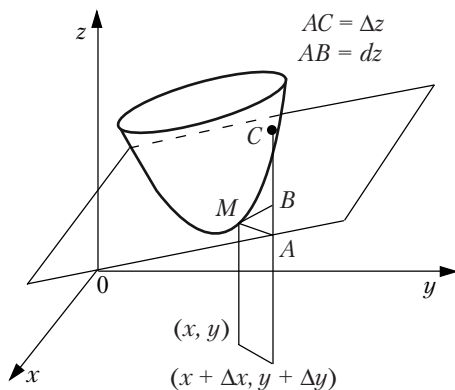


Рис. 9.6

Следует отметить, что для функции одной переменной  $y = f(x)$  существование конечной производной  $f'(x)$  и представление приращения функции в виде (7.3) (см. параграф 7.7), т.е.  $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$ , являются равнозначными утверждениями, и любое из

них могло быть взято за определение дифференцируемости функции<sup>1</sup>.

Для функции нескольких переменных дело обстоит иначе: *существование частных производных является лишь необходимым, но недостаточным условием дифференцируемости функции*.

Приведенная ниже теорема выражает *достаточное* условие дифференцируемости функции двух переменных.

<sup>1</sup> Напомним, что в гл. 7 за определение дифференцируемости функции  $y = f(x)$  было взято первое утверждение — существование производной.

**Теорема.** Если частные производные функции  $z'_x(x, y)$  и  $z'_y(x, y)$  существуют в окрестности точки  $(x, y)$  и непрерывны в самой точке  $(x, y)$ , то функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в этой точке.

### 9.5. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M(x, y)$ ,  $l$  — некоторое направление, задаваемое единичным вектором  $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ , где  $|\vec{e}| = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ , ибо  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  (или  $\frac{3\pi}{2}$ );  $\cos \alpha, \cos \beta$  — косинусы углов, образуемых вектором  $\vec{e}$  с осями координат и называемые *направляющими косинусами*.

При перемещении в данном направлении  $l$  точки  $M(x, y)$  в точку  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$  функция  $z$  получает приращение  $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ , называемое *приращением функции  $z$  в данном направлении  $l$*  (рис. 9.7).

Если  $MM_1 = \Delta l$ , то очевидно, что  $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$ ,  $\Delta y = \Delta l \cos \beta$ , следовательно,  $\Delta_l z = f(x + \Delta l \cos \alpha, y + \Delta l \cos \beta) - f(x, y)$ .

**Определение.** Производной  $z'_l$  по направлению  $l$  функции двух переменных  $z = f(x, y)$  называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения  $\Delta l$  при стремлении последней к нулю, т.е.

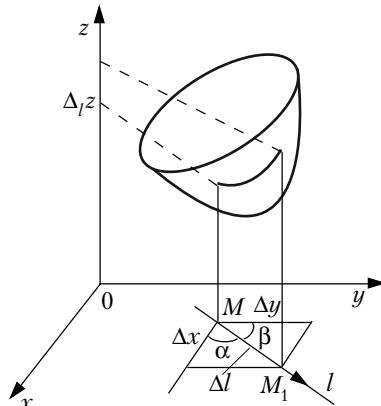


Рис. 9.7

$$z'_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}. \quad (9.6)$$

Производная  $z'_l$  характеризует скорость изменения функции в направлении  $l$ .

Очевидно, что рассмотренные ранее частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  представляют производные по направлениям, параллельным соответственно осям  $Ox$  и  $Oy$ . Нетрудно показать, что

$$z'_l = z'_x \cos \alpha + z'_y \cos \beta. \quad (9.7)$$

Рассмотрим понятие градиента функции  $z = f(x, y)$ .

**Определение.** *Градиентом  $\nabla z$  функции  $z = f(x, y)$  называется вектор с координатами  $(z'_x, z'_y)$ .*

Рассмотрим скалярное произведение (см. параграф 3.1) векторов  $\nabla z = (z'_x, z'_y)$  и единичного вектора  $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ . Получим

$$(\nabla z, \vec{e}) = z'_x \cos \alpha + z'_y \cos \beta. \quad (9.8)$$

Сравнение равенств (9.7) и (9.8) показывает, что  $z'_l = (\nabla z, \vec{e})$ , т.е. *производная по направлению есть скалярное произведение градиента  $\nabla z$  и единичного вектора, задающего направление  $l$ .*

Известно (см. параграф 3.1), что скалярное произведение двух векторов максимально, если они направлены одинаково. Следовательно, *градиент функции  $\nabla z$  в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.*

Зная градиент функции в каждой точке, можно, по крайней мере, локально строить линии уровня функции.

**Теорема.** *Пусть задана дифференцируемая функция  $z = f(x, y)$  и пусть в точке  $M(x_0, y_0)$  величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку.*

□ Линия уровня  $L_C$  задается уравнением  $f(x, y) = C$ , (где  $C = f(x_0, y_0)$ ). Предположим, что это уравнение можно разрешить относительно  $y$ , т.е.  $y = g(x)$  на  $L_C$  (если это невозможно, то следует разрешить уравнение относительно  $x$  и повторить все рассуждения с точностью до обозначений).

Таким образом, касательный вектор имеет координаты  $(1, g'(x))$ . Умножив его компоненты на  $dx$ , получим, что вектор  $(dx, g'(x)dx)$ , т.е.  $(dx, dy)$ , касателен к линии уровня  $L_C$  (рис. 9.8).

Между тем на линии уровня  $f(x, y) = \text{const}$ , т.е.  $df|_{L_C} = 0$ , откуда  $z'_x dx + z'_y dy = 0$  на  $L_C$ . Но  $z'_x dx + z'_y dy$  — скалярное произведение вектора градиента  $(z'_x, z'_y)$  и вектора  $(dx, dy)$ , касательного к  $L_C$ , т.е. рассматриваемые векторы перпендикулярны. ■

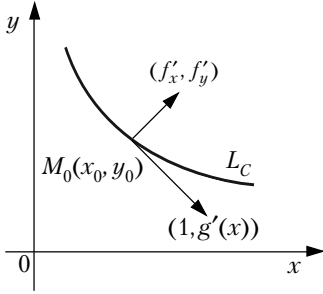


Рис. 9.8

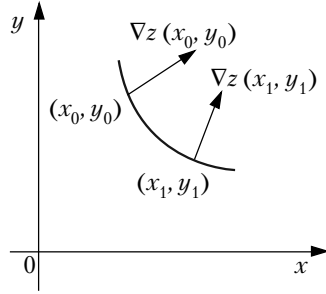


Рис. 9.9

Таким образом, линии уровня можно построить следующим образом (рис. 9.9). Предположим, мы начинаем с точки  $(x_0, y_0)$ . Построим в этой точке градиент и зададим направление, перпендикулярное градиенту. Оно позволяет построить малую часть линии уровня. Далее рассмотрим близкую точку  $(x_1, y_1)$  и построим градиент в ней. Продолжая этот процесс, можно (с определенной погрешностью) построить линии уровня.

## 9.6. Дифференцирование сложной функции

Пусть  $z = f(x, y)$  — дифференцируемая функция двух переменных, причем ее частные производные — непрерывные функции. При этом допустим, что ее аргументы  $x, y$  сами являются дифференцируемыми функциями переменной  $t$ , т.е.  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ . Рассмотрим  $z$  как функцию от  $t$ :

$$z = f(\varphi(t), \psi(t))$$

и найдем ее производную в точке  $t_0$ . Зададим приращение  $\Delta t$  и найдем приращение  $\Delta z$ :

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(\varphi(t_0 + \Delta t), \psi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = \\ &= f(\varphi(t_0 + \Delta t), \psi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0 + \Delta t)) + \\ &+ f(\varphi(t_0), \psi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0)). \end{aligned}$$

Пусть  $x_0 = \varphi(t_0)$ ,  $y_0 = \psi(t_0)$ . Тогда  $\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) = \Delta x$ ;  $\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0) = \Delta y$ , т.е.  $\varphi(t_0 + \Delta t) = x_0 + \Delta x$ ;  $\psi(t_0 + \Delta t) = y_0 + \Delta y$  и приращение  $\Delta z$  имеет вид

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta_x z(x_0, y_0 + \Delta y) + \Delta_y z(x_0, y_0).$$

Предположим, что  $\Delta x \neq 0$  и  $\Delta y \neq 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} z'_t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta_x z(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta t} + \frac{\Delta_y z(x_0, y_0)}{\Delta t} \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_x z(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta_y z(x_0, y_0)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \\ &= z'_x(x_0, y_0) x'(t_0) + z'_y(x_0, y_0) y'(t_0) \end{aligned}$$

(в силу непрерывности частных производных в точке  $(x_0, y_0)$ ). Таким образом,

$$z'_t = z'_x \cdot x' + z'_y \cdot y'. \quad (9.9)$$

Формула (9.9) может быть записана в виде

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (9.10)$$

Если же аргументы  $x$  и  $y$  являются дифференцируемыми функциями двух переменных, т.е.  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ , то соответствующие частные производные будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Таким образом, *частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной.*



Формула (9.9) может быть представлена в виде скалярного произведения векторов градиента  $\nabla z$  функции  $z = f(x, y)$  и  $\vec{a} = (\varphi'(t), \psi'(t))$ :

$$z'_t = (\nabla z, \vec{a}). \quad (9.12)$$

Формула (9.12), очевидно, остается справедливой и для функции произвольного числа переменных.

**Пример 9.8а.** Найти частные производные сложной функции

$$z = x^2 \ln y, \text{ где } x = \frac{u}{v}, \quad y = uv.$$

*Решение.* Найдем вначале частные производные данных функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}; \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u. \end{aligned}$$

По формуле (9.11) находим производные сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= 2x \ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} v = 2 \frac{u}{v} \ln(uv) \cdot \frac{1}{v} + \frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{1}{uv} \cdot v = \\ &= \frac{u}{v^2} (2 \ln(uv) + 1); \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= 2x \ln y \cdot \left( -\frac{u}{v^2} \right) + \frac{x^2}{y} u = -2 \frac{u}{v} \ln(uv) \cdot \frac{u}{v^2} + \frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{1}{uv} u = \\ &= \frac{u^2}{v^3} (1 - 2 \ln(uv)). \end{aligned}$$

Очевидно, что тот же результат был бы получен, если представить функцию  $z$  в виде функции двух переменных  $u$  и  $v$ , т.е.  $z = z(u, v) = \frac{u^2}{v^2} \ln(uv)$  и затем найти ее частные производные. ►

## 9.7. Экстремум функции нескольких переменных

Функция  $z = f(x, y)$ , как и в случае одной переменной, имеет узловые точки, определяющие структуру графика. В первую очередь таковыми являются точки экстремума.

**Определение.** Точка  $M(x_0, y_0)$  называется **точкой максимума (минимума)** функции  $z = f(x, y)$ , если существует окрестность точки  $M$  такая, что для всех точек  $(x, y)$  из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)).$$

На рис. 9.10 точка  $A(x_1, y_1)$  есть точка минимума, а точка  $B(x_2, y_2)$  — точка максимума.

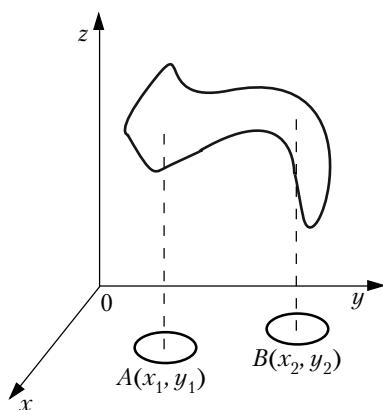


Рис. 9.10

Обращаем внимание на *локальный* характер экстремума (максимума и минимума) функции, так как речь идет о максимальном и минимальном значении лишь в достаточно малой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

Сформулируем *необходимое* условие экстремума — многомерный аналог теоремы Ферма.

**Теорема.** Пусть точка  $(x_0, y_0)$  есть точка экстремума дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$ . Тогда частные производные  $f'_x(x_0, y_0)$  и  $f'_y(x_0, y_0)$  в этой точке равны нулю.

□ Пусть точка  $M(x_0, y_0)$  — точка максимума. Зафиксируем одну из переменных, например  $y$ , полагая  $y = y_0$ . Тогда получим функцию одной переменной  $z_1 = f(x, y_0)$ , которая, очевидно, будет иметь максимум при  $x = x_0$ . Согласно теореме Ферма  $z'_1(x_0) = f'_x(x, y_0) = 0$ . Аналогично можно доказать, что и  $f'_y(x_0, y) = 0$ . ■

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума функции  $z = f(x, y)$ , т.е. частные производные  $z'_x$

и  $z'_y$  равны нулю, называются *критическими* или *стационарными*.

Необходимое условие экстремума можно сформулировать также следующим образом: *в точке минимума или максимума дифференцируемой функции градиент равен нулю*. Можно доказать и более общее утверждение: *в точке экстремума обращаются в нуль производные функции по всем направлениям*.

Равенство частных производных нулю выражает *лишь необходимое, но недостаточное* условие экстремума функции нескольких переменных.

На рис. 9.11 изображена так называемая *седловая точка*  $M(x_0, y_0)$ . Частные производные  $f'_x(x_0, y_0)$  и  $f'_y(x_0, y_0)$  равны нулю, но, очевидно, никакого экстремума в этой точке нет. Такие седловые точки являются двумерными аналогами точек перегиба функций одной переменной. Задача заключается в том, чтобы отделить их от точек экстремума. Иными словами, требуется знать *достаточное* условие экстремума.

Прежде чем это сделать, введем понятия частных производных второго порядка.

Если частные производные  $z'_x = f'_x(x, y)$  и  $z'_y = f'_y(x, y)$  сами являются дифференцируемыми функциями, то найти можно также и их частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Вычислив частные производные функции  $z'_x = f'_x(x, y)$ , получим  $z''_{xx} = f''_{xx}(x, y)$  и  $z''_{yx} = f''_{yx}(x, y)$ . Аналогично для функции  $z'_y = f'_y(x, y)$  можно определить две ее частные производные  $z''_{xy} = f''_{xy}(x, y)$  и  $z''_{yy} = f''_{yy}(x, y)$ .

Можно доказать, что если частные производные второго порядка функции  $z = f(x, y)$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ , то в этой точке  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .

Теперь можно сформулировать достаточное условие экстремума.

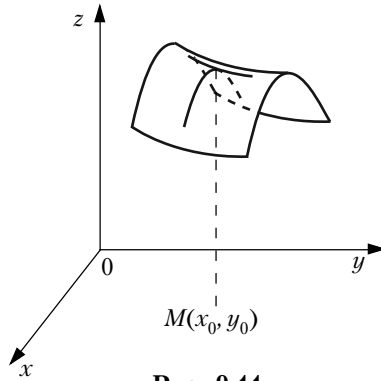


Рис. 9.11

**Теорема (достаточное условие экстремума функции двух переменных).** Пусть функция  $z = f(x, y)$ : а) определена в некоторой окрестности критической точки  $(x_0, y_0)$ , в которой  $f'_x(x_0, y_0) = 0$  и  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ; б) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка  $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$ ;  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B$ ;  $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$ . Тогда если  $\Delta = AC - B^2 > 0$ , то в точке  $(x_0, y_0)$  функция  $z = f(x, y)$  имеет экстремум, причем если  $A < 0$  — максимум, если  $A > 0$  — минимум. При  $\Delta = AC - B^2 < 0$  функция  $z = f(x, y)$  экстремума не имеет. Если  $\Delta = AC - B^2 = 0$ , то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Исследование функции двух переменных на экстремум рекомендуется проводить по следующей схеме:

1°. Найти частные производные функции  $z'_x$  и  $z'_y$ .

2°. Решить систему уравнений  $z'_x = 0, z'_y = 0$  и найти критические точки функции.

3°. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4°. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

**Пример 9.9.** Найти экстремумы функции

$$z = \frac{2(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

*Решение.*

1°. Находим частные производные

$$z'_x = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}; \quad z'_y = \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

2°. Критические точки функции находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0, \\ \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} = 0, \end{cases}$$

имеющей четыре решения  $(1; 1)$ ,  $(1; -1)$ ,  $(-1; 1)$  и  $(-1; -1)$ .

3°. Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0; \quad z''_{yy} = \frac{4y(y^2-3)}{(1+y^2)^2}, \quad \text{вычис-$$

ляем их значения в каждой критической точке и проверяем в ней выполнение достаточного условия экстремума.

Например, в точке  $(1; 1)$   $A = z''_{xx}(1; 1) = -1$ ;  $B = 0$ ;  $C = z''_{yy}(1; 1) = -1$ . Так как  $\Delta = AC - B^2 = (-1)^2 - 0 = 1 > 0$  и  $A = -1 < 0$ , то точка  $(1; 1)$  есть точка максимума.

Аналогично устанавливаем, что  $(-1; -1)$  — точка минимума, а в точках  $(1; -1)$  и  $(-1; 1)$ , в которых  $\Delta = AC - B^2 < 0$ , — экстремума нет. Эти точки являются седловыми.

4°. Находим экстремумы функции  $z_{\max} = z(1; 1) = 2$ ,  $z_{\min} = z(-1; -1) = -2$ . ►

Сформулированная выше теорема специфична для случая двух переменных. Приведем теперь достаточное условие экстремума для общего случая функции  $n$  переменных  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ .

Для каждой точки  $(x_1, \dots, x_n)$  определим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} z''_{x_1x_1} & z''_{x_1x_2} & \dots & z''_{x_1x_n} \\ z''_{x_2x_1} & z''_{x_2x_2} & \dots & z''_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z''_{x_nx_1} & z''_{x_nx_2} & \dots & z''_{x_nx_n} \end{pmatrix},$$

элементы которой есть вторые частные производные функции  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ . Матрица  $H$  называется *матрицей Гессе*<sup>1</sup> функции  $n$  переменных, а ее определитель  $|H|$  — *гессианом*. В силу равенства  $z''_{x_i x_j} = z''_{x_j x_i}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) матрица Гессе является симметрической.

**Теорема (достаточное условие экстремума функции  $n$  переменных).** Пусть  $(x_1, \dots, x_n)$  — критическая точка функции  $z$  и в некоторой окрестности этой точки частные производные второго порядка существуют и непрерывны. Пусть  $H$  — матрица Гессе в точке  $(x_1, \dots, x_n)$ . Тогда: 1) если  $H$  положительно определена<sup>2</sup>, то  $(x_1, \dots, x_n)$  — точка минимума функции  $z$ ; 2) если  $H$  отрицательно определена, то

<sup>1</sup> Гессе Людвиг Отто (1811–1874) — немецкий математик.

<sup>2</sup> См. параграф 3.8.

$(x_1, \dots, x_n)$  — точка максимума функции  $z$ ; 3) в противном случае<sup>1</sup> функция  $z$  в точке  $(x_1, \dots, x_n)$  экстремума не имеет.

## 9.8. Наибольшее и наименьшее значения функции

При нахождении *наибольшего и наименьшего значений* (т.е. *глобального максимума* и *глобального минимума*) функции нескольких переменных, непрерывной на некотором замкнутом<sup>2</sup> множестве, следует иметь в виду, что эти значения достигаются или в точках экстремума, или на границе множества.

**Пример 9.10.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$  на круге радиуса единица и центром в начале координат.

*Решение.*

1°. Найдем частные производные функции

$$z'_x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \quad z'_y = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

2°. Найдем критические точки функции из системы уравнений  $z'_x = 0, z'_y = 0$ , откуда  $x = 0, y = 0$ , т.е. имеется одна критическая точка  $(0; 0)$ .

3°. Найдем критические точки функции на границе области — окружности, задаваемой уравнением  $x^2 + y^2 = 1$ . Подставляя  $y^2 = 1 - x^2$  в функцию  $z = z(x, y)$ , получаем функцию одной переменной  $z = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2-x^2} = \frac{3}{2+x^2-x^4}$ , причем  $x \in [-1; 1]$ .

Найдя производную  $z' = \frac{2x(2x^2-1)}{(2+x^2-x^4)^2}$  и приравняв ее к нулю, получаем критические точки на границе области:  $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

<sup>1</sup> Имеется в виду, если квадратичная форма  $x'Hx$  не является знакоопределенной.

<sup>2</sup> Множество называется *замкнутым*, если оно включает все свои *граничные (предельные) точки*, т.е. точки, окрестности которых содержат точки как принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему.

4°. Определим значения функции  $z = f(x, y)$  в критических точках внутри области  $z = (0; 0) = 2$  и на ее границе  $z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3}$ , а также на концах отрезка  $[-1; 1]$  на границе области  $z(-1) = z(1) = \frac{3}{2}$  и выберем среди них наибольшее и наименьшее.

Итак,  $z_{\text{наиб}} = z(0; 0) = 2$  и  $z_{\text{наим}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3}$  (рис. 9.12). ►

В заключение рассмотрим класс выпуклых функций, для которых задача нахождения экстремальных значений существенно упрощается. Определим сначала множество, на которых задается этот класс функций.

**Определение.** Подмножество  $D$   $n$ -мерного пространства называется **выпуклым**, если для любых двух точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих  $D$ , отрезок, соединяющий эти точки, также целиком принадлежит  $D$ .

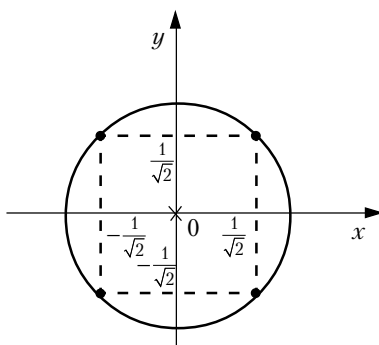


Рис. 9.12

× — точка наибольшего значения;  
● — точка наименьшего значения

Например, множества, изображенные на рис. 9.13, *а*, *б*, *в* — выпуклые, а множество на рис. 9.13, *г* — невыпуклое.

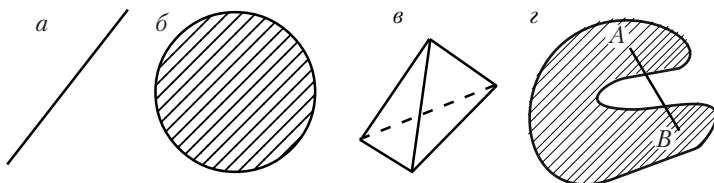


Рис. 9.13

Наиболее естественными и простыми примерами выпуклых множеств являются само пространство, а также его положительный сектор, заданный условиями  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

**Определение.** Функция  $z = f(x, y)$ , заданная на выпуклом множестве  $D$ , называется **выпуклой вниз**, если для любых двух точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2},$$

и **выпуклой вверх**, если

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}.$$

График функции, выпуклой вниз, изображен на рис. 9.14.

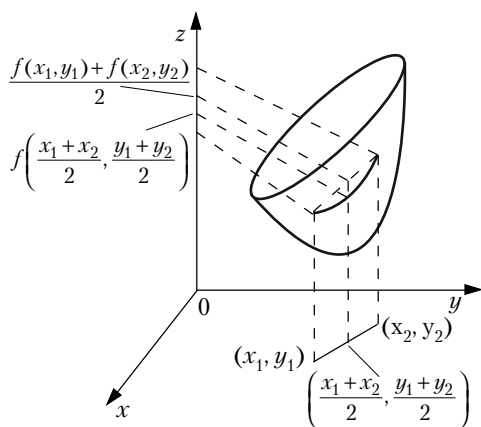


Рис. 9.14

Очевидно, что выпуклая функция не может иметь седловых точек, подобных изображенной на рис. 9.11. Это означает, что для выпуклой функции равенство ее частных производных нулю — не только необходимое, но и достаточное условие экстремума. Более того, экстремум выпуклой функции является глобальным, т.е. наименьшим значением

для функции, выпуклой вниз, и наибольшим для функции, выпуклой вверх.

Задача нахождения максимумов и минимумов функций многих переменных значительно сложнее аналогичной задачи для функций одной переменной. Даже в самых простых случаях чисто технические проблемы могут вызвать существенные трудности. Задаче нахождения подобных экстремумов посвящен специальный раздел математики —



*вариационное исчисление.* В последние десятилетия бурное развитие получила комплексная научная дисциплина — *исследование операций*, посвященная поиску оптимальных решений в различных, в том числе и экономических, задачах, в которых исследуемая (*целевая*) функция нескольких переменных принимает наибольшее или наименьшее значение.

## 9.9. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу, специфическую для функции нескольких переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть имеется функция  $z = f(x, y)$ , аргументы  $x$  и  $y$  которой удовлетворяют условию  $g(x, y) = C$ , называемому *уравнением связи*.

**Определение.** Точка  $(x_0, y_0)$  называется **точкой условного максимума (минимума)**, если существует такая ее окрестность, что для всех точек  $(x, y)$  из этой окрестности, удовлетворяющих условию  $g(x, y) = C$ , выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)).$$

На рис. 9.15 изображена точка условного максимума  $(x_0, y_0)$ . Очевидно, что она не является точкой безусловного экстремума функции  $z = f(x, y)$  (на рис. 9.15 таковой является точка  $(x_1, y_1)$ ).

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной перемен-

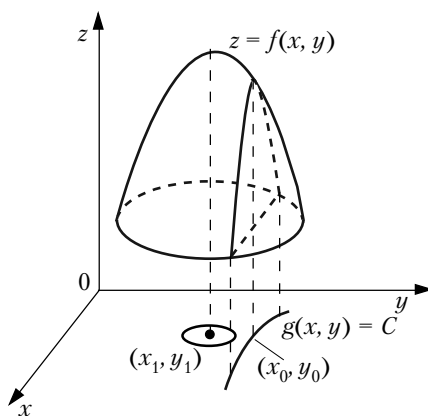


Рис. 9.15

ной. Допустим, уравнение связи  $g(x, y) = C$  удалось разрешить относительно одной из переменных, например выразить  $y$  через  $x$ , т.е.  $y = \varphi(x)$ . Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим  $z = f(x, y) = f(x, \varphi(x))$ , т.е. функцию одной переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции  $z = f(x, y)$ .

**Пример 9.11.** Найти точки максимума и минимума функции  $z = x^2 + 2y^2$  при условии  $3x + 2y = 11$ .

*Решение.* Из уравнения  $3x + 2y = 11$  выразим переменную  $y$  через переменную  $x$  и подставим полученное выражение  $y = \frac{11-3x}{2}$  в функцию  $z$ . Получим  $z = x^2 + 2\left(\frac{11-3x}{2}\right)^2$  или  $z = \frac{11}{2}(x^2 - 6x + 11)$ . Эта функция имеет единственный минимум при  $x_0 = 3$ . При этом соответствующее значение функции  $y_0 = \frac{11-3x_0}{2} = 1$ . Таким образом,  $(3; 1)$  — точка условного экстремума (минимума). ►

В рассмотренном примере уравнение связи  $g(x, y) = C$  оказалось линейным, поэтому его легко удалось разрешить относительно одной из переменных. Однако в более сложных случаях сделать это не удастся.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется *метод множителей Лагранжа*.

Рассмотрим функцию трех переменных

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[g(x, y) - C]. \quad (9.13)$$

Эта функция называется *функцией Лагранжа*, а  $\lambda$  — *множителем Лагранжа*. Верна следующая теорема.

**Теорема.** Если точка  $(x_0, y_0)$  является точкой условного экстремума функции  $z = f(x, y)$  при условии  $g(x, y) = C$ , то существует значение  $\lambda_0$  такое, что точка  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  является точкой экстремума функции  $L(x, y, \lambda)$ .

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции  $z = f(x, y)$  при условии  $g(x, y) = C$  требуется найти решение следующей системы:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda = g(x, y) - C = 0. \end{cases} \quad (9.14)$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Первые два уравнения системы можно переписать в виде

$$\text{grad } f = -\lambda \text{ grad } g,$$

т.е. в точке условного экстремума градиенты функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  коллинеарны.

На рис. 9.16 показан геометрический смысл условий Лагранжа. Линия  $g(x, y) = C$  пунктирная, линии уровня  $g(x, y) = Q$  функции  $z = f(x, y)$  — сплошные. В точке условного экстремума линия уровня функции  $z = f(x, y)$  касается линии  $g(x, y) = C$ .

**Пример 9.12.** Найти точки экстремума функции  $z = x^2 + y^2$  при условии  $3x + 2y = 11$ , используя метод множителей Лагранжа.

**Решение.** Составляем функцию Лагранжа  $L = x^2 + y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$ . Приравняв к нулю ее частные производные, получаем систему уравнений (9.14):

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda = 0, \\ 4y + 2\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Ее единственное решение ( $x = 3, y = 1, \lambda = -2$ ). Таким образом, точкой условного экстремума может быть только точка  $(3; 1)$ . Нетрудно убедиться в том, что в этой точке функция  $z = f(x, y)$  имеет условный минимум. ►

Если число переменных более двух, может рассматриваться и несколько уравнений связи. Соответственно, в этом случае будет и несколько множителей Лагранжа.

Здесь не рассматриваются достаточные условия условного экстремума. Следует только отметить, что во многих задачах критическая точка функции Лагранжа оказывается единственной и соответствует не только локальному, но и глобальному условному минимуму или максимуму.

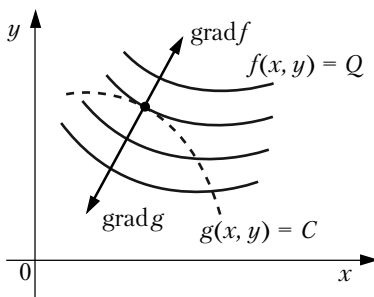


Рис. 9.16

Задача нахождения условного экстремума используется при решении таких экономических задач, как нахождение оптимального распределения ресурсов, выбор оптимального портфеля ценных бумаг и др. (подробнее см. в параграфе 9.11).

## 9.10. Понятие об эмпирических формулах.

### Метод наименьших квадратов

На практике часто приходится сталкиваться с задачей сглаживания экспериментальных зависимостей.

Пусть зависимость между двумя переменными  $x$  и  $y$  выражается в виде таблицы, полученной опытным путем. Значения  $x$  и  $y$  могут быть результатами опытов или наблюдений, статистической обработки материала и т.п.

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_i$	...	$y_n$

Требуется наилучшим образом сгладить экспериментальную зависимость между переменными  $x$  и  $y$ , т.е. по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости  $y$  от  $x$ , исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями измерений или статистических наблюдений. Такую сглаженную зависимость стремятся представить в виде формулы  $y = f(x)$ .

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название *эмпирических формул*.

Задача нахождения эмпирических формул разбивается на два этапа. На первом этапе нужно установить **вид зависимости**  $y = f(x)$ , т.е. решить, является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой.

Предположим, например, что результаты экспериментальных исследований нанесены на плоскость (паре чисел  $(x_i, y_i)$  соответствует точка с такими же координатами). Разумеется, существует множество кривых, проходящих через эти точки (рис. 9.17).

Обычно предполагают, что кривая истинной зависимости — это наиболее «гладкая» кривая, согласованная с эмпирическими данными. Так, в случае, представленном на рис. 9.17, исследователь несомненно предпочтет кривую I кривой II.

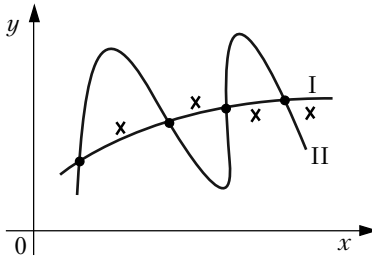


Рис. 9.17

Для проверки правильности вывода проводятся дополнительные исследования, т.е. производится еще ряд одновременных измерений величин  $x$  и  $y$ . Дополнительные точки наносятся на плоскость. Если они оказываются достаточно близкими к выбранной кривой (на рис. 9.17 дополнительные точки изображены крестиками), то можно считать, что вид кривой установлен. В противном случае кривую надо скорректировать и вновь провести дополнительные измерения.

Кроме того, для выбора функции  $y = f(x)$  руководствуются другими соображениями, как правило, не математического характера (теоретическими предпосылками, опытом предшествующих исследований и т.п.).

Предположим, что первый этап завершен, т.е. вид функции  $y = f(x)$  установлен. Тогда переходят ко второму этапу — **определению неизвестных параметров этой функции.**

Согласно наиболее распространенному и теоретически обоснованному *методу наименьших квадратов* в качестве неизвестных параметров функции  $f(x)$  выбирают такие значения, чтобы сумма квадратов *невязок*  $\delta_i$  или отклонений «теоретических» значений  $f(x_i)$ , найденных по эмпирической формуле  $y = f(x)$ , от соответствующих *опытных значений*  $y_i$ , была минимальной (рис. 9.18), т.е.

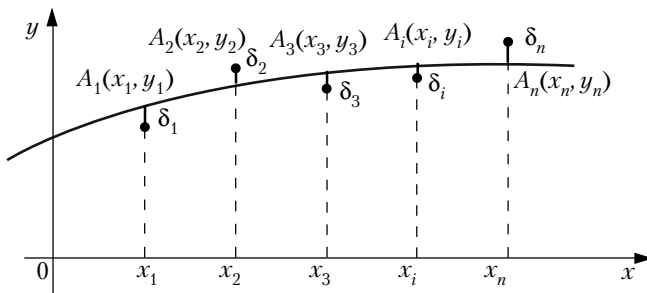


Рис. 9.18

$$S = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2. \quad (9.15)$$

Следует отметить, что в качестве величины отклонения  $S$  эмпирических точек  $(x_i, y_i)$  от точек сглаживающей экспериментальную зависимость кривой  $y = f(x)$  в принципе можно было взять обычную сумму невязок  $\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)$  или сумму их абсолютных величин  $\sum_{i=1}^n |\delta_i| = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i|$ . Но делать это нецелесообразно, так как в первом случае  $\sum_{i=1}^n \delta_i$  может быть малой или даже равняться нулю при значительном разбросе эмпирических точек, потому что положительные отклонения  $\delta_i$  компенсируются отрицательными. Во втором случае функция  $\sum_{i=1}^n |\delta_i|$  лишена этого недостатка, но имеет другой: она не является дифференцируемой, что существенно затрудняет решение задачи.

Пусть в качестве функции  $y = f(x)$  взята линейная функция  $y = ax + b$ , и задача сводится к отысканию таких значений параметров  $a$  и  $b$ , при которых функция (9.15)

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

принимает наименьшее значение. Заметим, что функция  $S = S(a, b)$  есть функция двух *переменных*  $a$  и  $b$  до тех пор, пока не найдены, а затем не зафиксированы их «наилучшие» (в смысле метода наименьших квадратов) значения, а  $x_i, y_i$  — *постоянные* числа, полученные экспериментально.

Таким образом, для нахождения прямой, наилучшим образом согласованной с опытными данными, достаточно решить систему

$$\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

После алгебраических преобразований эта система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (9.16)$$

Система (9.16) называется *системой нормальных уравнений*. Она имеет единственное решение, так как ее определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \neq 0 \quad (9.17)$$

(а точнее  $|A| > 0$ , что можно доказать методом математической индукции при  $n \geq 2$ ).

Убедимся, что полученные из системы (9.16) значения дают минимум функции  $S = S(a, b)$ . Найдем частные производные

$$S''_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = A; \quad S''_{ab} = 2 \sum_{i=1}^n x_i = B; \quad S''_{bb} = 2n = C.$$

Выражение  $\Delta = AC - B^2 = 4(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2) > 0$  в силу

изложенного выше и  $A = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ , следовательно, соглас-

но достаточному условию функция имеет единственную точку минимума, определяемую из системы нормальных уравнений (9.16). Заметим, что в этой точке функция  $S = S(a, b)$  имеет не просто локальный минимум, а наименьшее значение (глобальный минимум).

**Пример 9.13.** Имеются следующие данные о цене нефти  $x$  (ден. ед.) и индексе акций нефтяных компаний  $y$  (усл. ед.).

$x$	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
$y$	537	534	550	555	560	552

Предполагая, что между переменными  $x$  и  $y$  существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу вида  $y = ax + b$ , применяя метод наименьших квадратов.

*Решение.* Найдем необходимые для расчетов суммы  $\sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ . Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$
1	17,28	537	9279,36	298,5984
2	17,05	534	9104,70	290,7025
3	18,30	550	10 065,00	334,8900
4	18,80	555	10 434,00	353,4400
5	19,20	560	10 752,00	368,6400
6	18,50	552	10 212,00	342,2500
$\Sigma$	109,13	3288	59 847,06	1988,5209

Система нормальных уравнений (9.16) имеет вид

$$\begin{cases} 1988,5209a + 109,13b = 59\,847,06, \\ 109,13a + 6b = 3288. \end{cases}$$

Ее решение  $a = 12,078$ ,  $b = 328,32$  дает искомую зависимость:  $y = 12,078x + 328,32$ . Таким образом, с увеличением цены нефти на 1 ден. ед. индекс акций нефтяных компаний в среднем возрастает на 12,08 усл. ед. ►

Иногда в качестве  $f(x)$  при минимизации функции (9.15) выбирается квадратичная функция  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . В этом случае система нормальных уравнений

$$\begin{cases} S_a^i = 0, \\ S_i^a = 0, \\ S_b^i = 0 \end{cases}$$



принимает вид

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (9.18)$$

и параметры  $a, b, c$  определяются в результате решения системы (9.18).

### 9.11. Функции нескольких переменных в экономической теории

Рассмотрим некоторые приложения функций нескольких переменных в экономической теории.

Значительная часть экономических механизмов иллюстрируется на рисунках, изображающих линии уровня функции двух переменных  $z = f(x, y)$ . Например, линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

Пусть  $x$  и  $y$  — два различных фактора производства, а функция  $z = f(x, y)$  характеризует выпуск продукции, который позволяют значения факторов  $x$  и  $y$ . На рис. 9.19 линии уровня  $f(x, y) = Q$  изображены сплошными линиями, а пунктиром выделена так называемая *экономическая область*. Части изоквант, попавшие в эту область, представляют собой графики убывающих функций, т.е. увеличение количества одного фактора позволяет уменьшить количество другого, не меняя размера выпуска. Следовательно, *экономическая область* — это множество значений факторов, допускающих замещение одного из них другим. Очевид-

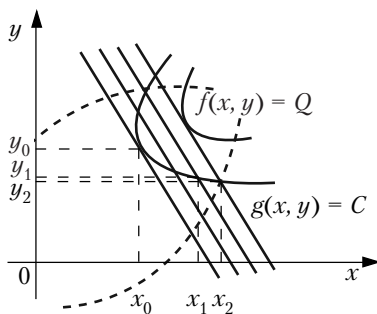


Рис. 9.19

но, что все «разумные» значения  $x$  и  $y$  принадлежат экономической области.

Изокванты позволяют геометрически иллюстрировать решение **задачи об оптимальном распределении ресурсов**. Пусть  $z = g(x, y)$  — функция издержек, характеризующая затраты, необходимые для обеспечения значений ресурсов  $x$  и  $y$  (часто можно считать, что функция издержек линейная:  $g(x, y) = p_x x + p_y y$ , где  $p_x$  и  $p_y$  — «цены» факторов  $x$  и  $y$ ). Линии уровня этой функции также изображены на рис. 9.16. Комбинации линий уровня функций  $f(x)$  и  $g(x)$  позволяют делать выводы о предпочтительности того или иного значения факторов  $x$  и  $y$ . Очевидно, например, что пара значений  $(x_1, y_1)$  более предпочтительна, чем пара  $(x_2, y_2)$ , так как обеспечивает тот же выпуск, но с меньшими затратами. Оптимальными же значениями факторов будут значения  $(x_0, y_0)$  — координаты точки касания линии уровня функции выпуска и функции издержек.

Линии уровня **функции полезности** (они называются *кривыми безразличия*) — см. параграф 5.6 — также позволяют рассматривать вопросы замещения одного товара другим и

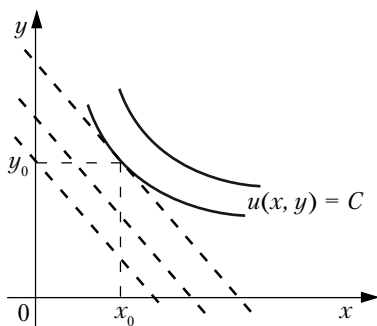


Рис. 9.20

иллюстрировать решение задачи об оптимальном потреблении (потребительского выбора) (рис. 9.20).

Линии уровня затрат на приобретение товаров  $x$ ,  $y$  изображены на рис. 9.20 пунктиром. Оптимальное потребление обеспечивается значениями  $(x_0, y_0)$  — координатами точки касания кривой безразличия и линии уровня затрат. В этой точке заданная полезность достигается наиболее

экономичным образом.

Кривые безразличия могут быть использованы и в **теории инвестиций**.

*Портфель ценных бумаг* (под портфелем здесь понимается совокупность определенных ценных бумаг в определенных количествах) характеризуется двумя основными параметрами — ожидаемой доходностью  $r$  и риском  $\sigma$  (точное определение этих величин в данном случае не мо-

жет быть приведено, так как оно использует понятия теории вероятностей и математической статистики). Каждому портфелю можно поставить в соответствие точку координатной плоскости  $(\sigma, r)$ ; тогда множество всех возможных портфелей образует некоторую область  $D$  (рис. 9.21).

Очевидно, что при равных доходностях инвестор предпочтет портфель с меньшим риском. Таким образом, кривые безразличия — линии уровня функции предпочтения  $U = U(\sigma, r)$  — выпуклы вниз. Точка  $T$ , в которой линия безразличия касается области  $D$ , соответствует наиболее предпочтительному для данного инвестора портфелю.

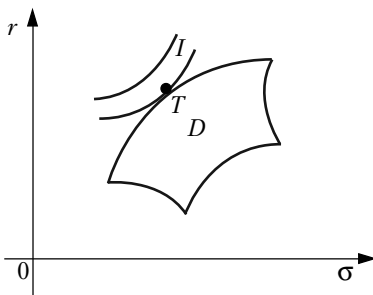


Рис. 9.21

Соответствующая теория была предложена американским экономистом Х. Марковицем в 1952 г. и с тех пор получила широкое развитие в теории инвестиций.

Понятие частной производной также используется в экономической теории. В параграфе 7.6 было введено понятие **эластичности функции** одной переменной  $E_x(y)$ . Аналогично можно ввести понятие *частной эластичности функции* нескольких переменных  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  относительно переменной  $x_i$ :

$$E_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x_i z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i}.$$

Так, например, в производственной функции Кобба — Дугласа (см. параграф 15.1)  $z = b_0 x^{b_1} y^{b_2}$ , как нетрудно убедиться,  $E_x(z) = b_1$ ,  $E_y(z) = b_2$ , т.е. показатели  $b_1$  и  $b_2$  приблизительно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат труда  $x$  или только объема производственных фондов  $y$  на 1%.

Рассмотрим частные производные  $u'_x, u'_y$  — функции полезности. Они называются *предельными полезностями* и обозначаются  $Mu_x, Mu_y$ . Если измерять количество товара в стоимостном выражении, то предельные полезности можно рассматривать как функции спроса на соответствую-

ющий товар. Найдем предельные полезности для функции постоянной эластичности

$$u(x, y) = \frac{a_1}{1-b_1} x^{1-b_1} + \frac{a_2}{1-b_2} y^{1-b_2}.$$

Имеем  $Mu_x = a_1 x^{-b_1}$ ,  $Mu_y = a_2 x^{-b_2}$ , т.е. функции спроса с ростом стоимости каждого товара являются убывающими, а параметры  $b_1$  и  $b_2$  представляют частные эластичности спроса на эти товары.

Если рассматривать спрос  $q$  как функцию нескольких переменных, например двух: цены товара  $p$  и доходов потребителей  $r$ , т.е.  $q = f(p, r)$ , то можно говорить о *частных эластичностях спроса от цены*  $E_p(q) = \frac{p}{q} q'_p$  и *спроса от доходов*  $E_r(q) = \frac{r}{q} q'_r$ .

Например, можно установить, что  $E_r(q) > 0$  для качественных товаров и  $E_r(q) < 0$  для низкосортных, так как с ростом доходов спрос на качественные товары увеличивается, а на низкосортные уменьшается.

Если при исследовании спроса на данный товар рассматривать влияние другого, *альтернативного* товара ценой  $p_1$ , т.е. рассматривать спрос как функцию трех переменных  $q = f(p, p_1, r)$ , то можно ввести *перекрестный коэффициент эластичности спроса*. Он определяется по формуле  $E_{p_1}(q) = \frac{p_1}{q} q'_{p_1}$  и показывает приближенно про-

центное изменение спроса на данный товар при изменении цены альтернативного товара на 1%. Очевидно, что для *взаимозаменяемых* товаров  $E_{p_1}(q) > 0$ , так как увеличение цены одного товара приводит к повышению спроса на другой. В то же время для *взаимодополняющих* товаров  $E_{p_1}(q) < 0$ , ибо в этом случае рост цены любого товара приводит к снижению спроса.

Рассмотрим еще один коэффициент эластичности, характеризующий производственную функцию нескольких переменных и имеющий важное значение для экономической теории.

Пусть  $z = f(x, y)$  — производственная функция и  $MP(x) = f'_x(x, y)$ ,  $MP(y) = f'_y(x, y)$  — предельные продукты, соответствующие затратам ресурсов  $x$  и  $y$ . *Коэффициентом эластичности замещения* называется величина

$$\sigma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta \ln \frac{x}{y}}{\Delta \ln \frac{MP(x)}{MP(y)}} = - \frac{d \ln \frac{x}{y}}{d \ln \frac{MP(x)}{MP(y)}}.$$

Так как при малых приращениях аргумента  $\Delta t$  имеет место приближенное равенство  $\Delta \ln t \approx \frac{\Delta t}{t}$ , приращение логарифма переменной величины можно рассматривать как относительное приращение самой величины. Таким образом, *величина, обратная коэффициенту эластичности замещения, показывает приближенно, на сколько процентов изменится отношение предельных продуктов  $\frac{MP(x)}{MP(y)}$  при изменении отношения затрат ресурсов  $\frac{x}{y}$  на 1%.*

В параграфе 9.1 приведена производственная функция с постоянной эластичностью замещения. В общем случае коэффициент эластичности замещения есть функция двух переменных. Рассмотрим ее выражение в точках изокванты. Так как вдоль изокванты значение функции  $z = f(x, y)$  постоянно, то ее полный дифференциал  $dz = f'_x dx + f'_y dy$  вдоль изокванты равен нулю, т.е.  $MP(x)dx + MP(y)dy = 0$ .

Отсюда имеем  $-\frac{dy}{dx} = \frac{MP(x)}{MP(y)}$ , т.е. при сохранении объема

выпуска  $z$  величина  $\left(-\frac{dy}{dx}\right)$ , называемая *предельной нормой замещения ресурса  $x$  ресурсом  $y$* , равна отношению их предельных продуктов. С учетом последнего равенства

можно записать, что  $\frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{d \ln \left(-\frac{dy}{dx}\right)}{d \ln \frac{x}{y}}$ .

Очевидно, что  $\frac{dy}{dx}$  — тангенс угла  $\alpha$  наклона касательной к изокванте в точке  $M(x, y)$ ;  $\frac{y}{x}$  — тангенс угла наклона радиуса-вектора  $\overline{OM}$  точки  $M(x, y)$  (рис. 9.22). Таким образом, величина  $\frac{1}{\sigma_{xy}}$  характеризует относительное изме-

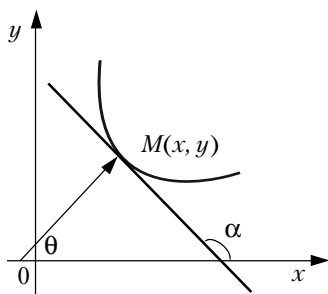


Рис. 9.22

нение угла наклона касательной к изокванте при изменении угла наклона ее радиуса-вектора, т.е. кривизну изокванты.

Если рассматривать  $\operatorname{tg} \alpha$  как функцию  $\operatorname{tg} \theta$ , то  $\frac{1}{\sigma_{xy}}$  — это коэффициент эластичности в обычном смысле (см. параграф 7.6).

Понятие **выпуклости функции** также играет существенную роль в понимании важнейших экономических законов. Многомерные аналоги примеров, рассмотренных в параграфе 8.10, позволяют в математической форме представить законы убывающей доходности и убывающей предельной полезности.

## ПРАКТИКУМ

### 9.12. Основные понятия

**9.14.** Найти область определения функции

$$z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}.$$

*Решение.* Область определения представляет собой решение системы неравенств:

$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ \ln(x^2 + y^2 - 1) \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + y^2 > 1, \\ x^2 + y^2 \neq 2. \end{cases} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \\ (***) \end{matrix}$$

Множество значений  $x, y$ , удовлетворяющих условию (\*), представляет собой «внутренность» круга радиуса 2 с центром  $(0; 0)$ . Решения неравенства (\*\*) — «внешность» круга радиуса 1 с центром  $(0; 0)$ . Условие (\*\*\*) означает, что в область определения не входит окружность радиуса  $\sqrt{2}$  с

центром в начале координат. Таким образом, область определения представляет собой два кольца (рис. 9.23). ►

**9.15.** Построить графики функций:

$$\text{а) } z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}; \text{ б) } z = 9 - x^2 - y^2.$$

*Решение.*

а) Так как  $z \geq 0$ , график расположен выше плоскости  $Oxy$ . Его сечения плоскостями  $x = 0$  и  $y = 0$  представляют собой полуокружности радиуса 3 с центром в начале координат. «Нижняя» граница графика (пересечение с плоскостью  $Oxy$ ) представляет собой окружность радиуса 3 (рис. 9.24).

б) В этом случае сечения графика плоскостями  $x = 0$  и  $y = 0$  представляют собой параболы с вершиной в точке  $(0; 0; 9)$  и ветвями, направленными вниз. Сечение плоскостью  $z = 0$  есть окружность радиуса 3 с центром в начале координат. Функция не ограничена снизу (рис. 9.25). ►

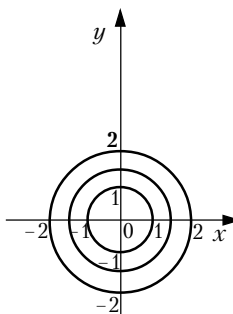


Рис. 9.23

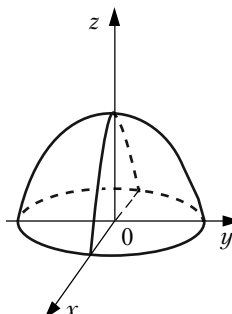


Рис. 9.24

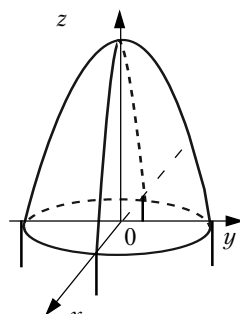


Рис. 9.25

**9.16.** Построить линии уровня функции  $z = \frac{xy}{\ln x}$ .

*Решение.* Линии уровня имеют вид  $\frac{xy}{\ln x} = C$ , т.е. представ-

ляют собой график функции  $y = \frac{C \ln x}{x} (x > 0, x \neq 1)$ . Функция определена при  $x > 0$ , имеет правостороннюю асимптоту — ось абсцисс, вертикальную асимптоту — ось ординат. Единственная критическая точка  $x = e$  — это точка макси-

му. Значение функции при этом  $y = \frac{C}{e}$ . Таким образом, линии уровня имеют вид, показанный на рис. 9.26.

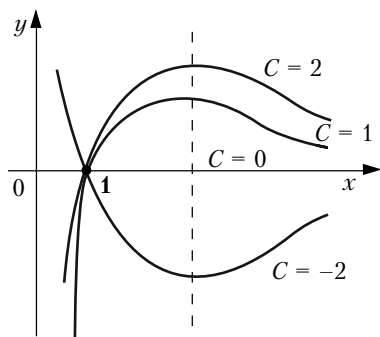


Рис. 9.26

**9.17.** Найти предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arcsin(x^2 + y^2)}{\ln(1 - \sqrt{x^2 + y^2})}$ .

*Решение.* Обозначим  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Тогда условие  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$  равносильно тому, что  $r \rightarrow 0$  и искомый предел примет вид

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\arcsin r^2}{\ln(1-r)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\arcsin r^2)'}{(\ln(1-r))'} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot 2r}{\frac{1}{1-r}(-1)} = 0$$

(применили правило Лопиталя (см. параграф 8.2)). ►

**9.18.** Исследовать на непрерывность в точке  $(0; 0)$  функцию  $z = \frac{x+y}{x-y}$ .

*Решение.* Будем приближаться к точке  $(0; 0)$  по направлению прямых  $y = kx$ . Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k}.$$

Значения пределов различны при разных  $k$ , следовательно, предела функции двух переменных не существует, и функция не является непрерывной в точке  $(0; 0)$ . ►



Найти области определения функций:

$$9.19. z = \frac{1}{x^2 + y^4}.$$

$$9.20. z = \frac{1}{x^2 + y^3}.$$

$$9.21. z = \sqrt[8]{1 - x^2 + y}.$$

$$9.22. z = \sqrt[7]{1 - x^2 + y}.$$

$$9.23. z = \ln(x + y).$$

$$9.24. z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$9.25. z = \arcsin x + \arccos y.$$

$$9.26. z = \frac{\arcsin(x + y)}{\arccos(x - y)}.$$

Найти линии уровня функции в явном виде  $y = g(x, C)$ :

$$9.27. z = xy^3.$$

$$9.28. z = x \ln(x^2 + y).$$

$$9.29. z = e^{x+y}.$$

$$9.30. z = \sqrt{y - x^2}.$$

$$9.31. z = \frac{1}{x + 2y}.$$

$$9.32. z = \frac{y - x^2}{x^2}.$$

$$9.33. z = \operatorname{tg}(x + y).$$

Найти пределы:

$$9.34. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} [xy\sqrt{1 + xy}].$$

$$9.35. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^3}{x^3 + y^3}.$$

$$9.36. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\sin(x + y)}{x + y}.$$

$$9.37. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} [xy \ln(xy)].$$

$$9.38. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + 2y)e^{\frac{1}{x}}.$$

$$9.39. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x - y}{x^3 - y^2}.$$

### 9.13. Частные производные, градиент, дифференциал

$$9.40. \text{Найти частные производные функции } z = x^2 e^{y^2}.$$

*Решение.* При дифференцировании по  $x$  считаем постоянной величину  $y$ . Таким образом,  $z'_x = 2xe^{y^2}$ . При дифференцировании по  $y$  считаем постоянной величину  $x$ , следовательно,  $z'_y = x^2 e^{y^2} \cdot 2y = 2x^2 y e^{y^2}$ . ►

9.41. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных  $z = \ln(1 + x + 2y)$ .

*Решение.* Частные производные первого порядка имеют вид

$$z'_x = \frac{1}{1+x+2y}; \quad z'_y = \frac{2}{1+x+2y}.$$

Считая их новыми функциями двух переменных, найдем их частные производные. В результате получаем

$$z''_{xx} = -\frac{1}{(1+x+2y)^2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{2}{(1+x+2y)^2};$$

$$z''_{yy} = -\frac{4}{(1+x+2y)^2}. \blacktriangleright$$

**9.42.** Найти длину вектора  $\nabla z$  градиента функции  $z = x + e^{x+5y}$  в точке  $(0; 0)$ .

*Решение.* Компонентами вектора  $\nabla z$  являются частные производные функции, т.е.  $\nabla z = (1 + e^{x+5y}, 5e^{x+5y})$ . В точке  $(0; 0)$  получаем  $\nabla z = (2; 5)$ . Соответственно, длина вектора  $\nabla z$  равна  $|\nabla z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ .  $\blacktriangleright$

**9.43.** Найти производную функции  $z = 3y \ln x$  в точке  $(2; 0)$  по направлению, параллельному биссектрисе первого координатного угла.

*Решение.* Прямая, проходящая через точку  $(2; 0)$  параллельно биссектрисе первого координатного угла, задается уравнением  $y = x - 2$  (см. формулу (4.7)). Ее углы с осями координат (как и у биссектрисы) равны  $\frac{\pi}{4}$ .

Следовательно, по формуле (9.8)

$$z'_l = z'_x \cos \frac{\pi}{4} + z'_y \cos \frac{\pi}{4} = \left( \frac{3y}{x} + 3 \ln x \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = z'_l(2; 0) = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln 2. \blacktriangleright$$

Найти частные производные функций:

**9.44.**  $z = e^{x-y}(2x-1).$

**9.45.**  $z = \sin(x + \sqrt{y}).$

**9.46.**  $z = xe^y + x^y.$

**9.47.**  $z = \ln \sqrt{x+y^2}.$

**9.48.**  $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$

**9.49.**  $z = x^{\sqrt{y}}.$

**9.50.**  $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x} + 1\right).$

**9.51.**  $z = xy e^{xy}.$

$$9.52. z = \frac{\cos y^2}{x}.$$

$$9.53. z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Найти полные дифференциалы функций:

$$9.54. z = e^{xy}(x+y).$$

$$9.55. z = \ln(1 + e^x + y^2).$$

$$9.56. z = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x+y}.$$

$$9.57. z = \sin\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$9.58. z = \frac{x \arcsin y}{y}.$$

$$9.59. z = x^y + y^x.$$

Найти производные функций по заданным направлениям  $l$ :

$$9.60. z = 3x^4 - xy + y^3; l \text{ составляет с осью } Ox \text{ угол } 60^\circ.$$

9.61.  $z = x + y^2$ ;  $l$  — биссектриса первого координатного угла.

9.62. Вычислить производную функции  $z = 5x^4 - 3x - y - 1$  в точке  $M(2; 1)$  по направлению  $l$  — прямой  $MN$ , где  $N(5; 5)$ .

9.63. Вычислить производную функции  $z = \frac{x}{y}$  в точке  $M(1; 1)$  по направлению  $l$  — перпендикуляра к прямой  $y = 2x - 1$ .

Найти градиент функции  $z = f(x, y)$  и его модуль для функций в указанных точках  $M$ :

$$9.64. z = 7 - x^2 - y^2; M(1; 2). \quad 9.65. z = (x - y)^2; M(0; 3).$$

$$9.66. z = xye^{1+x+y}; M(0; -1). \quad 9.67. z = x \ln(x + y); M(-1; 2).$$

$$9.68. z = \sin(x + y^2); M\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right).$$

### 9.14. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

9.69. Найти экстремумы функции  $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ .

*Решение.*

1°. Находим частные производные.

$$z'_x = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}(x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 1 \right); \quad z'_y = e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y.$$

2°. Определим критические точки функции из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Получаем  $x = -2, y = 0$ , т.е. точка  $(-2; 0)$  — единственная критическая точка.

3°. Находим частные производные второго порядка:

$$A = z''_{xx} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 1 \right) + e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 2 \right);$$

$$B = z''_{xy} = z''_{yx} = e^{\frac{x}{2}}y; \quad C = z''_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Отсюда

$$\Delta = AC - B^2 = e^x \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 2 \right) - e^x y^2 = e^x \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 2 \right).$$

В точке  $(-2; 0)$  имеем  $\Delta = e^{-x} > 0, A = z''_{xx} = \frac{1}{2}e^{-1} > 0$ . Таким образом, точка  $(-2; 0)$  — точка минимума.

$$\begin{aligned} 4°. \text{Находим минимум функции } z_{\min}(-2; 0) &= e^{-\frac{2}{2}}(-2+0) = \\ &= -\frac{2}{e}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**9.70.** Найти экстремумы функции  $z = x^y - xy$ .

*Решение.* Находим частные производные:  $z'_x = yx^{y-1} - y$  и  $z'_y = x^y \ln x - x$ . Легко проверить, что равенство  $z'_x = 0$  выполняется в трех случаях: при  $x = 1$ , при  $y = 0$  и при  $y = 1$ . В первых двух случаях уравнение  $z'_y = 0$  не имеет решений,

поэтому единственное решение системы  $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$  есть  $x = e$ ,

$y = 1$ , т.е. критическая точка  $(e; 1)$  — единственная.

Имеем  $A = z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2} - 1; B = z''_{xy} = x^{y-1}(1 + y \ln x) - 1; C = z''_{yy} = x^y \ln^2 x$ . В точке  $(e; 1)$   $A = z''_{xx} = -1; B = z''_{xy} = 1; C = z''_{yy} = e$ .

Отсюда  $\Delta = AC - B^2 = -e - 1 < 0$ , поэтому функция экстремумов не имеет. Такая точка  $(e; 1)$  есть *седловая* точка.  $\blacktriangleright$

**9.71.** Найти экстремумы функции  $z = x^3y^3$ .

*Решение.* Находим частные производные:  $z'_x = 3x^2y^3; z'_y = 3x^3y^2$ . Очевидно, что точка  $(0; 0)$  — единственная критиче-

ская точка. Находим  $z''_{xx} = 6xy^3$ ;  $z''_{xy} = 9x^2y^2$ ;  $z''_{yy} = 6x^3y$ .

В точке  $(0; 0)$   $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = 0$ , т.е.  $A = B = C = 0$ ;  $\Delta = 0$  и вопрос об экстремуме остается открытым, поэтому требуется дополнительное исследование.

Очевидно, в любой окрестности точки  $(0; 0)$  функция может принимать и положительные, и отрицательные значения (например, в точке  $(1; 1)$   $z = 1 > 0$ , а в точке  $(-1; 1)$   $z = -1 < 0$ ); в самой же точке  $(0; 0)$  функция равна нулю. Таким образом, ни в какой своей окрестности точка  $(0; 0)$  не является ни точкой максимального, ни точкой минимального значения, т.е. функция экстремумов не имеет. ►

**9.72.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = y^2 + 4x^2$  на круге  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

*Решение.* Критическая точка  $x = 0$ ,  $y = 0$  — единственная и расположена внутри круга; значение  $z(0; 0) = 0$ . На границе круга  $y^2 = 1 - x^2$  и  $z = 1 + 3x^2$ , где  $0 \leq x^2 \leq 1$ . Таким образом, на границе имеем  $z_{\min} = 1$ ,  $z_{\max} = 4$ . Следовательно, наименьшее значение  $z = 0$  принимается внутри круга, наибольшее  $z = 4$  — на его границе. ►

**9.73.** Найти экстремумы функции  $z = e^{x+2y}$  при условии, что  $x^2 + y^2 = 1$ .

*Решение. Первый способ.* При условии  $x^2 + y^2 = 1$  имеем  $x = \pm\sqrt{1-y^2}$  и получаем две функции одной переменной  $z_{1,2} = e^{2y \pm \sqrt{1-y^2}}$ ;  $z' = e^{2y \pm \sqrt{1-y^2}} \left( 2 \mp \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right)$ .

Критические точки задаются равенствами  $2\sqrt{1-y^2} = \pm y$ , т.е.  $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Таким образом, имеем две критические точки

$\left( \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$  и  $\left( -\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ . Легко проверить (см. параграф 8.4), что  $\left( \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$  — точка максимума,  $\left( -\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$  —

точка минимума функции  $z$ .

Второй способ. Функция Лагранжа (9.13) имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = e^{x+2y} - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Приравнявая ее частные производные к нулю, получаем систему

$$\begin{cases} e^{x+2y} = 2\lambda x, \\ 2e^{x+2y} = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы находим  $y = 2x$ ; подставляя это выражение в третье уравнение, получаем два решения  $x = \frac{1}{\sqrt{5}}, y = \frac{2}{\sqrt{5}}$  и  $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ . Таким образом, находим те же две критические точки

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  — точку максимума и  $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  — точку минимума функции  $z$ . ►

**9.74.** При каком соотношении между высотой и радиусом основания прямого кругового конуса его объем будет наибольшим, если площадь боковой поверхности фиксирована?

*Решение.* Пусть площадь боковой поверхности  $S = \pi Rl = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}$  (где  $l$  — образующая конуса;  $R$  — радиус основания;  $h$  — высота). Объем  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ . Таким образом, требуется найти наибольшее значение функции  $V(h, R) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$  при условии  $\pi R\sqrt{h^2 + R^2} = S$ .

Составим функцию Лагранжа (9.13)

$$L(h, R, \lambda) = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \lambda(\pi R\sqrt{h^2 + R^2} - S).$$

Ее частные производные по  $h$  и по  $R$  соответственно равны

$$V'_h = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{\lambda\pi R h}{\sqrt{h^2 + R^2}}; \quad V'_R = \frac{2}{3}\pi R h - \lambda\left(\pi\sqrt{h^2 + R^2} + \frac{\pi R^2}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right).$$

Приравнявая их к нулю, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{3}R^2 = \lambda \frac{Rh}{\sqrt{h^2 + R^2}}, \\ \frac{2}{3}Rh = \lambda \frac{h^2 + 2R^2}{\sqrt{h^2 + R^2}}. \end{cases}$$

Поделив обе части первого уравнения системы на аналогичные части второго, получим

$$2\frac{h}{R} = \frac{h}{R} + 2\frac{R}{h},$$

откуда  $h^2 = 2R^2$ , т.е.  $h = R\sqrt{2}$ .

Таким образом, имеется одна критическая точка

$\left( \sqrt{\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}}; \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}} \right)$ . Допустимые значения  $R$  принадлежат от-

резку  $\left[ 0; \sqrt{\frac{S}{\pi}} \right]$ , причем на его границе значения  $V$  равны

нулю. Так как  $V \geq 0$  при всех  $R$ , то в единственной критической точке достигается его наибольшее значение функции  $V$ .

Таким образом, искомое соотношение имеет вид  $h = R\sqrt{2}$ . ►

Исследовать функции на экстремум:

**9.75.**  $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$ .      **9.76.**  $z = xy(1 - x - y)$ .

**9.77.**  $z = x^3 y^2 (2 - x - y)$ .      **9.78.**  $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

**9.79.**  $z = \sin x + \sin y +$       **9.80.**  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ .  
 $+\sin(x + y)$

$(0 < x < \pi; 0 < y < \pi)$ .

**9.81.**  $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$ .      **9.82.**  $z = e^{\frac{y}{x}}(x^2 + y)$ .

**9.83.**  $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ .      **9.84.**  $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ .

**9.85.**  $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ .      **9.86.**  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

**9.87.**  $z = xy - \ln(x + y)$ .      **9.88.**  $z = \sqrt{x}\sqrt[4]{y} - x - 2y$ .

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в областях, задаваемых неравенствами:

**9.89.**  $z = x - 2y + 5; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1.$

**9.90.**  $z = x^3 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1.$

**9.91.**  $z = \ln(x + y); (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 1.$

**9.92.** Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длин ребер  $a$ , найти параллелепипед, имеющий наибольший объем.

Исследовать функции на условный экстремум:

**9.93.**  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при  $x + y = 2.$

**9.94.**  $z = x - y$  при  $x^2 + y^2 = 1.$

**9.95.**  $z = xy^2$  при  $x + 2y = 4.$

**9.96.**  $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$  при  $x^2 + y^2 = 1.$

**9.97.**  $z = \sqrt[4]{x} \sqrt[3]{y}$  при  $2x + 5y = 100.$

**9.98.** Найти высоту и радиус основания цилиндра наибольшего объема, если его полная поверхность равна  $6\pi$ .

**9.99.** Прямоугольный параллелепипед вписан в полусферу радиуса  $R$ . Найти такие длины сторон параллелепипеда, чтобы его объем был наибольшим.

**9.100.** Определить такие наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок  $d$  и внутренней емкостью  $V$ , чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

### 9.15. Метод наименьших квадратов

**9.101.** Имеются следующие данные о величине пробега автомобиля  $x$  (тыс. км) и расходе масла  $y$  (л/тыс. км):

$x_i$	50	70	90	110	130
$y_i$	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

Полагая, что между переменными  $x$  и  $y$  существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу  $y = ax + b$  методом наименьших квадратов.



*Решение.* Вычислим необходимые для решения суммы  $\sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Промежуточные вычисления представлены в таблице.

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$
1	50	0,2	10	2500
2	70	0,5	35	4900
3	90	0,8	72	8100
4	110	1,1	121	12 100
5	130	1,3	169	16 900
$\Sigma$	450	3,9	407	44 500

Система нормальных уравнений (9.16) примет вид

$$\begin{cases} 44\,500a + 450b = 407, \\ 450a + 5b = 3,9. \end{cases}$$

Ее решения  $a = 0,014$ ,  $b = -0,48$ . Таким образом, линейная зависимость имеет вид  $y = 0,014x - 0,48$ . ►

**9.102.** Имеются четыре измерения пары переменных  $(x, y)$ , результаты которых приведены в таблице.

$x$	1	2	3	4
$y$	0,2	0,3	1,0	1,2

Методом наименьших квадратов построить линейную зависимость  $y = ax + b$  и сравнить ее с квадратичной зависимостью  $y = \frac{1}{8}x^2$ .

*Решение.* Аналогично задаче 9.101 найдем уравнение линейной зависимости:  $y = 0,37x - 0,25$ .

Сравним величины  $S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$  для найденной линейной зависимости и зависимости  $y = \frac{1}{8}x^2$ . Промежуточные вычисления представим в таблице.

$i$	$x_i$	$y_i$	$\frac{1}{8}x_i^2$	$0,37x_i - 0,25$	$\left(\frac{1}{8}x_i^2 - y_i\right)^2$	$(0,37x_i - 0,25 - y_i)^2$
1	1	0,2	0,125	0,12	0,005625	0,0064
2	2	0,3	0,500	0,49	0,040000	0,0361
3	3	1,0	1,125	0,86	0,015625	0,0196
4	4	1,2	2,000	1,23	0,640000	0,0009
$\Sigma$	—	—	—	—	<b>0,701250</b>	<b>0,0630</b>

Очевидно, что  $S_{\text{лин}} < S_{\text{кв}}$ , следовательно, линейная зависимость предпочтительнее<sup>1</sup>. ►

**9.103.** Имеются следующие данные о расходах на рекламу  $x$  (тыс. ден. ед.) и сбыте продукции  $y$  (тыс. ед.):

$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Предполагая, что между переменными  $x$  и  $y$  существует квадратичная зависимость вида  $y = ax^2 + bx + c$ , найти значения параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  методом наименьших квадратов.

*Решение.* Вычислим необходимые для решения суммы

$$\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n x_i^3, \sum_{i=1}^n x_i^4, \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i.$$

<sup>1</sup> Следует отметить, что задачи, в которых требуется сравнить выравнивание по двум заданным линиям, носят в известной степени формальный характер. В практике экономико-математического моделирования линейная зависимость часто оказывается предпочтительней даже в том случае, если сумма квадратов невязок для нее оказывается больше, чем для других функций.

Расчеты приведены в таблице:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4,0	4	8	16	8,0	16,0
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12,0	16	64	256	48,0	196,0
5	5	18,0	25	125	625	90,0	450,0
$\Sigma$	<b>15</b>	<b>43,0</b>	<b>55</b>	<b>225</b>	<b>979</b>	<b>169,8</b>	<b>680,2</b>

Система нормальных уравнений (9.18) примет вид:

$$\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 680,2, \\ 225a + 55b + 15c = 169,8, \\ 55a + 15b + 5c = 49,0. \end{cases}$$

Ее решение  $a = 0,3$ ,  $b = 0,48$ ,  $c = 5,06$ . Таким образом, искомая зависимость имеет вид  $y = 0,3x^2 + 0,48x + 5,06$ . ►

Имеются данные о переменных  $x$  и  $y$ . Предполагая, что между  $x$  и  $y$  существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу  $y = ax + b$  методом наименьших квадратов:

**9.104.**  $x$  — цена на товар (ден. ед.);  $y$  — уровень продаж (тыс. ед.):

$x_i$	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
$y_i$	200	160	120	90	80

**9.105.**  $x$  — уровень потребления электроэнергии на предприятии (млн кВт · ч);  $y$  — себестоимость единицы продукции (ден. ед.):

$x_i$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$y_i$	20,0	18,8	18,2	18,1	18,0

**9.106.**  $x$  — мощность двигателя (л.с.);  $y$  — средний срок его эксплуатации (мес.):

$x_i$	30	40	50	60	70
$y_i$	18	20	21	24	25

По экспериментальным данным построить методом наименьших квадратов линейную эмпирическую зависимость  $y = ax + b$ . Сравнить полученную зависимость с альтернативной и определить, какая из них лучше соответствует экспериментальным данным:

**9.107.**

$x_i$	2	2,5	3	3,5	4
$y_i$	4,2	5,5	6,9	8	9,5

Альтернативная зависимость  $y = 2x + 0,1x^2$ .

**9.108.**

$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2

Альтернативная зависимость  $y = \sqrt{x}$ .

**9.109.**

$x_i$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$y_i$	0,50	0,30	0,25	0,18	0,12

Альтернативная зависимость  $y = 2^{-x}$ .

**9.110.** Имеются следующие экспериментальные данные о количестве единиц произведенной продукции  $x$  и издержках  $y$  (тыс. ден. ед.):

$x_i$	10	20	30	40	50
$y_i$	2,0	5,9	12,0	20,0	30,0

Функция издержек (см. параграф 8.6) ищется в виде  $y = ax + bx^2$ . Определить параметры  $a$  и  $b$  функции методом наименьших квадратов<sup>1</sup>.

**9.111.** Имеются следующие экспериментальные данные о количествах произведенного  $x$  и реализованного  $K(x)$  товара (тыс. ед.):

$x_i$	100	120	140	160	180	200
$y_i$	100	114	130	146	163	180

Зависимость ищется в виде  $y = 100 + a(x - 100) - b\sqrt{x - 100}$ . Найти ее параметры  $a$  и  $b$  методом наименьших квадратов<sup>1</sup>.

**9.112.** Имеются следующие экспериментальные данные о цене единицы товара  $p$  (ден. ед.) и доле реализованного товара  $w = \frac{K(x)}{x}$ :

$p_i$	10	12	15	16	20
$w_i$	1,95	0,93	0,92	0,90	0,89

Функция  $w(p)$  ищется в виде  $w = 1 - ap - bp^2$ . Определить ее параметры  $a$  и  $b$  методом наименьших квадратов<sup>1</sup>.

## 9.16. Функции нескольких переменных в экономических задачах

**9.113.** Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид  $K(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$  (где  $x, y$  — количество единиц соответственно первого и второго ресурса). Стоимость единицы первого ресурса — 5, второго — 10 (ден. ед.). Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

*Решение.* Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов. При этом

<sup>1</sup> Для решения задач 9.110–9.112 вначале необходимо получить свою систему нормальных уравнений, исходя из равенств  $S'_a = 0$ ,  $S'_b = 0$ , где  $S$  определяется по формуле (9.15).

издержки  $C(x) = 5x + 10y$ . Таким образом, функция прибыли

$$\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y.$$

Требуется найти ее максимум.

Частные производные функции  $\pi(x, y)$  равны  $\pi'_x = 15x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 5$ ;  $\pi'_y = 10x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 10$ . Приравнивая их к нулю, найдем решение  $x = 81$ ,  $y = 27$ . Частные производные второго порядка имеют следующий вид:

$$\pi''_{xx} = -\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}; \pi''_{xy} = \pi''_{yx} = 5x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}; \pi''_{yy} = -\frac{20}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}.$$

$$\text{Отсюда } \Delta = \pi''_{xx}\pi''_{yy} - (\pi''_{xy})^2 = 25x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{4}{3}} > 0; \pi''_{xx} < 0.$$

Таким образом, найденная критическая точка есть точка максимума. Соответствующее значение прибыли равно 135 (ден. ед.). ►

**9.114.** Производственная функция  $\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ , стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго — 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 (ден. ед.). В этих условиях найти оптимальное для производителя значение  $(x, y)$  количества используемых ресурсов.

*Решение.* В данном случае следует максимизировать функцию  $\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y$ , но при условии, что  $5x + 10y \leq 600$ . В предыдущей задаче было найдено оптимальное распределение ресурсов в ситуации, когда ограничения отсутствовали. Оказалось, что оптимальные затраты на ресурсы равны  $5 \cdot 81 + 10 \cdot 27 = 675 > 600$ . Можно показать, что в этом случае при наличии ограничений на ресурсы следует потратить всю возможную сумму.

Итак, имеем задачу максимизации функции

$$\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 5x - 10y$$

при условии, что  $5x + 10y = 600$ , или  $x + 2y = 120$ .

*Первый способ.* В силу ограничений имеем  $x = 120 - 2y$  и  $\pi(y) = 30\sqrt{120 - 2y}\sqrt[3]{y} - 5(120 - y) - 10y = 30\sqrt{120 - 2y}\sqrt[3]{y} - 600$ .

$$\text{Производная функции } \pi'_y(y) = \frac{30\sqrt[3]{y}}{\sqrt{120-2y}} + \frac{10\sqrt{120-2y}}{\sqrt[3]{y}}.$$

Приравнявая ее к нулю, получаем решение  $y = 24$ , откуда  $x = 120 - 2 \cdot 24 = 72$ . Максимальная прибыль при этом равна  $30 \cdot 72 \cdot 24 - 5 \cdot 72 - 10 \cdot 24 = 51\,240$  (ден. ед.).

*Второй способ.* При условии, что  $5x + 10y = 600$ , функция прибыли имеет вид  $\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 600$ . Очевидно, что для любого значения  $C$  линия уровня функции  $\pi(x, y) = C$  должна пересекаться с прямой  $5x + 10y = 600$ .

Уравнение линии уровня функции прибыли  $30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 600 = C$  может быть записано как  $y = \frac{A}{x^{\frac{2}{3}}}$ , где  $A = \frac{C + 600}{30}$ .

Очевидно, что максимальное значение  $A$ , а следовательно, и уровня  $C$  достигается в том случае, если соответствующая линия уровня касается прямой  $5x + 10y = 600$ . Так как градиент в каждой точке ортогонален линии уровня, то условие максимальности прибыли может быть сформулировано следующим образом: вектор  $(\pi'_x, \pi'_y)$  ортогонален прямой  $5x + 10y = 600$ . Эта прямая имеет угловой коэффициент, равный  $-\frac{1}{2}$ . Угловым коэффициентом прямой, проходящей через вектор  $(\pi'_x, \pi'_y)$ , равен  $\frac{\pi'_y}{\pi'_x}$ . По условию перпендикулярности прямых имеем  $\frac{\pi'_y}{\pi'_x} = 2$ , т.е.

$$\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}} = 2,$$

или  $x = 3y$ . Подставляя полученное выражение в уравнение прямой  $5x + 10y = 600$ , находим  $x = 72$ ,  $y = 24$ . ►

**Замечание.** Оптимальное решение лежит на прямой ограничений (в данном случае на прямой  $5x + 10y = 600$ ) только в том случае, если при оптимальном решении без ограничений сумма, затрачиваемая на ресурсы, больше ограничительной. В противном случае решения задач с ограничениями просто совпадают с решениями задачи без ограничений.

**9.115.** Функция полезности имеет вид:  $U(x, y) = 2\ln(x - 1) + 3\ln(y - 1)$ . Цена единицы первого блага равна 8, второго — 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равная 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

*Решение.* Рассмотрим линии уровня функции полезности  $U(x, y) = C$ , т.е.  $2\ln(x - 1) + 3\ln(y - 1) = C$ . Используя свойства логарифмов, имеем

$$\ln(x-1)^2(y-1)^3 = C, \text{ т.е. } (y-1)^3 = \frac{A}{(x-1)^2}, \text{ где } A = e^C.$$

Таким образом, линии уровня представляют собой графики функции  $y = \frac{\sqrt[3]{A}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + 1$ .

Используя рассуждения, приведенные в предыдущем примере, получаем, что в точке  $(x, y)$ , в которой достигается максимальная полезность, линия уровня касается прямой  $8x + 16y = 1000$ , или  $x + 2y = 125$ . Следовательно, градиент функции полезности должен быть перпендикулярен этой линии. Градиент функции полезности имеет вид  $\left(\frac{2}{x-1}, \frac{3}{y-1}\right)$ . Угловым коэффициентом прямой  $k = -\frac{1}{2}$ . Используя условие перпендикулярности прямых, имеем  $\frac{3(x-1)}{2(y-1)} = 2$ , или  $3x - 4y = -1$ . Следовательно, оптимальное распределение потребления товаров находится как решение системы

$$\begin{cases} x + 2y = 125, \\ 3x - 4y = -1, \end{cases} \text{ т.е. } x = 49,5; y = 37,75. \blacktriangleright$$

Найти величины используемых ресурсов  $(x, y)$ , при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция  $K(x, y)$  и цены  $p_1$  и  $p_2$  единицы первого и второго ресурсов:

**9.116.**  $K(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ ;  $p_1 = 4$ ,  $p_2 = \frac{1}{48}$ .



$$9.117. K(x, y) = 10\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}; \quad p_1 = 2, \quad p_2 = \frac{2}{3}.$$

Заданы производственная функция, цены единицы первого и второго ресурсов, а также ограничения  $I$  в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма  $\leq I$ ). Найти величины используемых ресурсов  $(x, y)$ , при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

$$9.118. K(x, y) = 10\sqrt{x}\sqrt[3]{y}; \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 4, \quad I = 12.$$

$$9.119. K(x, y) = 24\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}; \quad p_1 = 27, \quad p_2 = 4, \quad I = 6.$$

Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение  $x$  единиц первого товара и  $y$  единиц второго товара. Заданы функция полезности  $U(x, y)$  и цены  $p_1, p_2$  единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения  $(x, y)$ , при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$9.120. U(x, y) = 0,5\ln(x-2) + 2\ln(y-1); \quad p_1 = 0,2, \quad p_2 = 4.$$

$$9.121. U(x, y) = 2(x-1)^{\frac{1}{4}} + (y-1)^{\frac{1}{3}}; \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 3.$$

Идентифицированы функция издержек  $C(x)$ , а также функция количества реализованного товара  $K(p, x)$  при установленной цене его единицы, равной  $p(p > p_0)$ . Найти оптимальные значения  $x$  и  $p$  для монополиста-производителя:

$$9.122. C(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3; \quad K(x, p) = \frac{x}{1 + (p - p_0)^2}.$$

$$9.123. C(x) = 10 + x^2; \quad K(x, p) = \frac{x}{1 + \frac{p^2}{16}}.$$

9.124. Решить задачу 9.114 с помощью функции Лагранжа.

9.125. Функция полезности имеет вид

$$U(x, y) = \ln(x-1) + \frac{1}{4}\ln(y-2),$$

где  $x, y$  — количества приобретенных единиц первого и второго благ. Найти частные эластичности функции полезности по переменным  $x$  и  $y$  и пояснить их смысл.

**9.126.** Полезность от приобретения  $x$  единиц первого блага и  $y$  единиц второго блага имеет вид  $U(x, y) = \ln x + \ln(2y)$ . Единица первого блага стоит 2, а второго — 3 (ден. ед.). На приобретение этих благ планируется потратить 100 (ден. ед.). Как следует распределить эту сумму, чтобы полезность была наибольшей?

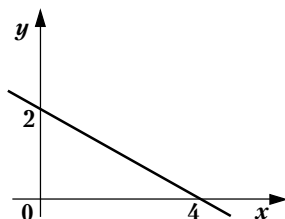
### Контрольные задания по главе 9 «Функции нескольких переменных»

№	Вариант 9.1	Вариант 9.2	Вариант 9.3												
1	Найти значения частных производных функций в заданных точках:														
	а) $z = x^{y^3}; (1;0)$ б) $\ln(x \ln y); (1;e)$	а) $z = x^{\sqrt{y}}; (1;1)$ б) $\ln \frac{x}{\sqrt{y}}; (1;4)$	а) $z = x^{\frac{1}{y}}; (1;1)$ б) $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}); (1;1)$												
2	Найти экстремумы функции:														
	$z = \sqrt{x} \sqrt[4]{y} - 2x - y$	$z = \sqrt[3]{x} \sqrt{y} - 2x - 3y$	$z = \sqrt[4]{x} \sqrt{y} - x - 2y$												
3	Найти наибольшее значение функции $z = f(x, y)$ в области, задаваемой системой неравенств:														
	$z = \sqrt{x^2 + y^2};$ $\begin{cases} 2x + y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$	$z = \ln(x^2 + y^2);$ $\begin{cases} x + 2y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$	$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2);$ $\begin{cases} 2x + 4y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$												
4	Найти максимальное значение функции при заданном ограничении:														
	$z = 2x + y - y^2 - x^2$ при $x + 2y = 1$	$z = 1 - 2x = (y - x)^2$ при $x + y = 2$	$z = 4 - x - y - x^2 - 2y^2$ при $2x + y = 4$												
5	Предполагая, что между переменными $x$ и $y$ существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по следующим данным:														
	$x_i$	1	2	3	4	$x_i$	1	2	3	4	$x_i$	1	2	3	4
	$y_i$	1,3	2	2,5	2,8	$y_i$	4	3	1	0	$y_i$	3	3,4	3,6	4

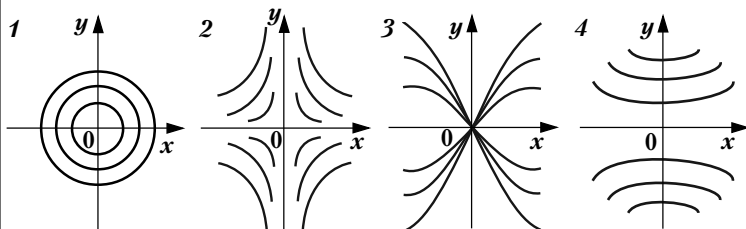
## Тест 9

1. Найти площадь фигуры, представляющей область определения функции  $y = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Считать  $\pi = 3,14$ .

2. На рисунке изображена линия уровня функции  $z = ax + by$ . Найти  $\frac{a}{b}$ .



3. Выяснить, на каком рисунке изображены линии уровня функции  $z = xy$ .



4. Найти сумму частных производных функции  $z = x^{2y}$  в точке  $(1; 1)$ .

5. Найти длину вектора-градиента функции  $z = x^3 + \frac{9}{4}x^2 \ln y$  в точке  $(2; 1)$ .

6. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через вектор-градиент функции  $z = x^2y^3 + 2x + y$  в точке  $(-1; 0)$ .

7. Касательная к линии уровня функции  $z = x^3y^4 + x^2y^3 + 2x$  в точке  $(1; 2)$  имеет угловой коэффициент  $k = -\frac{a}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a$  и  $b$  — целые числа, а дробь  $\frac{a}{b}$  — несократимая).

8. Найти координаты  $(x_0, y_0)$  критической точки функции

$$z = \frac{\ln x}{y} + x.$$

9. Функция  $z = xy$ :

- 1) имеет единственную точку максимума  $(0; 0)$ ;
- 2) имеет единственную точку минимума  $(0; 0)$ ;
- 3) имеет несколько точек экстремума;
- 4) не имеет точек экстремума;
- 5) имеет бесконечное множество точек экстремума.

10. Максимальное значение функции  $z = 4 - x - x^2 - y - 4y^2$  равно:  $\frac{a}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a$  и  $b$  — целые числа, а дробь  $\frac{a}{b}$  — несократима).

11. В точке максимума функции градиент:

- 1) равен нулю;
- 2) достигает максимальной длины;
- 3) равен нулю или не существует;
- 4) не равен нулю и параллелен оси  $Oz$ ;
- 5) может быть произвольным вектором.

12. Методом наименьших квадратов найти линейную зависимость  $y = ax + b$  для функции, заданной следующей таблицей:

$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	-1	0	2	3

Ответ:  $a = \dots$ ,  $b = \dots$ .

13. Производственная функция имеет вид  $K(x, y) = 10\sqrt{x} \sqrt[4]{y}$  ( $x$  — количество единиц первого ресурса,  $y$  — второго). Цена на единицу первого ресурса равна 1, на единицу второго — 2. Максимальное значение прибыли в этом случае составляет  $\frac{a}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a$  и  $b$  — целые числа, а дробь  $\frac{a}{b}$  — несократима).

14. Производственная функция имеет вид  $K(x, y) = 100\sqrt{x} \sqrt[4]{y}$  ( $x$  — количество единиц первого ресурса,  $y$  — второго). Цена за единицу первого ресурса равна 8, за единицу второго — 4. На эти ресурсы может быть затрачена сумма не более 54 (ден. ед.). Чему равно оптимальное потребление ресурсов (соответственно  $x$  и  $y$ )?

Раздел V

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ  
ИСЧИСЛЕНИЕ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ**



Одной из основных задач дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу — нахождение самой функции по ее производной или дифференциалу.

## Глава 10

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

#### 10.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

**Определение.** Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , если в каждой точке  $x$  этого промежутка  $F'(x) = f(x)$ .

Например,  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  является первообразной для функции  $f(x) = x^2$ , так как  $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ .

По геометрическому смыслу производной  $F'(x)$  есть угловой коэффициент касательной к кривой  $y = F(x)$  в точке с абсциссой  $x$ . Геометрически найти первообразную для функции  $f(x)$  — значит найти такую кривую  $y = F(x)$ , чтобы угловой коэффициент касательной к ней в произвольной точ-

ке  $x$  равнялся значению  $f(x)$  заданной функции в этой точке (рис. 10.1).

Следует отметить, что для заданной функции  $f(x)$  ее первообразная определена неоднозначно. Дифференцируя, нетрудно убе-

диться, что функции  $\frac{x^3}{3} + 1$ ,

$\frac{x^3}{3} - 5$  и вообще  $\frac{x^3}{3} + C$

(где  $C$  — некоторое число) являются первообразными для функции  $f(x) = x^2$ . Аналогично в общем случае, если  $F(x)$  — некоторая первообразная для  $f(x)$ , то, поскольку  $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ , функции вида  $F(x) + C$  (где  $C$  — произвольное число) также являются первообразными для  $f(x)$ .

Геометрически это означает, что если найдена одна кривая  $y = F(x)$ , удовлетворяющая условию  $F'(x) = \operatorname{tg} \alpha = f(x)$ , то, сдвигая ее вдоль оси ординат, вновь получаются кривые, удовлетворяющие указанному условию (поскольку такой сдвиг не меняет углового коэффициента касательной в точке с абсциссой  $x$ ) (см. рис. 10.1).

Остается вопрос, описывает ли выражение вида  $F(x) + C$  все первообразные функции для  $f(x)$ . Ответ на него дает следующая теорема.

**Теорема.** Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  — первообразные для функции  $f(x)$  на некотором промежутке  $X$ , то найдется такое число  $C$ , что будет справедливо равенство

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

□ Поскольку  $(F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$ , то, по следствию из теоремы Лагранжа (см. параграф 8.1), найдется такое число  $C$ , что  $F_2(x) - F_1(x) = C$  или  $F_2(x) = F_1(x) + C$ . ■

Из данной теоремы следует, что, если  $F(x)$  — первообразная функция для  $f(x)$ , то выражение вида  $F(x) + C$  (где  $C$  — произвольное число) задает **все** возможные первообразные для  $f(x)$ .

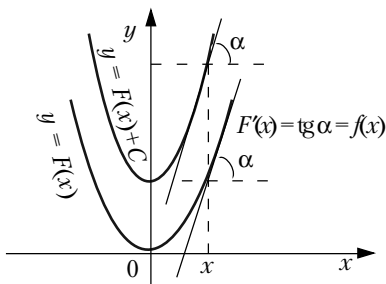


Рис. 10.1

**Определение.** Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  называется **неопределенным интегралом** от функции  $f(x)$  и обозначается  $\int f(x)dx$ , где  $\int$  — знак интеграла,  $f(x)$  — подынтегральная функция,  $f(x)dx$  — подынтегральное выражение, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (10.1)$$

где  $F(x)$  — некоторая первообразная для  $f(x)$ ,  $C$  — произвольная постоянная.

Например, поскольку  $\frac{x^3}{3}$  — первообразная для функции  $f(x) = x^2$ , то  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ .

Отметим, что в определении неопределенного интеграла не исключается, что  $x$  сама, возможно, является функцией некоторой переменной, однако при проверке правильности нахождения первообразной это несущественно, так как дифференцировать следует лишь по переменной  $x$  (по переменной, стоящей в формуле (10.1) под знаком дифференциала).

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется *интегрированием* этой функции.

В гл. 11 будет показано, что достаточным условием интегрируемости функции на промежутке  $X$  является ее непрерывность на данном промежутке. (Заметим, что для дифференцируемости функции ее непрерывность является лишь необходимым, но недостаточным условием (см. параграф 7.2).)

## 10.2. Свойства неопределенного интеграла.

### Интегралы от основных элементарных функций

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

**1.** Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left( \int f(x)dx \right)' = f(x). \quad (10.2)$$



□ Дифференцируя левую и правую части равенства (10.1), получаем

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x). \blacksquare$$

**2.** Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \quad (10.2')$$

□ По определению дифференциала и свойству 1 имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx. \blacksquare$$

**3.** Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянно-го слагаемого, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad (10.3)$$

где  $C$  — произвольное число.

□ Рассматривая функцию  $F(x)$  как первообразную для некоторой функции  $f(x)$ , можно записать

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

и на основании формулы (10.2) дифференциал неопределенного интеграла равен  $f(x)dx = dF(x)$ , откуда  $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$ . ■

Сравнивая между собой свойства 2 и 3, можно сделать вывод, что операции нахождения неопределенного интеграла и дифференциала взаимнообратны (знаки  $d$  и  $\int$  взаимно «уничтожают» друг друга, в случае свойства 3, правда, с точностью до постоянного слагаемого).

**4.** Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad (10.4)$$

где  $\alpha$  — некоторое число.

□ Найдем производную функции  $g(x) = \int \alpha f(x) dx - \alpha \int f(x) dx$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left( \int \alpha f(x) dx - \alpha \int f(x) dx \right)' = \\ &= \left( \int \alpha f(x) dx \right)' - \alpha \left( \int f(x) dx \right)' = \alpha f(x) - \alpha f(x) = 0 \end{aligned}$$

(см. свойство 1). По следствию из теоремы Лагранжа (см. параграф 8.1) найдется такое число  $C$ , что  $g(x) = C$  и значит

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx + C.$$

Так как сам неопределенный интеграл находится с точностью до постоянного слагаемого, то в окончательной записи свойства 4 постоянную  $C$  можно опустить. ■

**5.** *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx. \quad (10.5)$$

Доказательство аналогично доказательству свойства 4.

Следует отметить, что свойство 5 остается справедливым для любого конечного числа слагаемых.

Перечислим интегралы от элементарных функций, которые в дальнейшем будем называть *табличными*:

$$\int 0 dx = C; \quad (10.6)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \quad (10.7)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (10.8)$$

для произвольного интервала, не содержащего точки  $x = 0$ ;

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad (10.9)$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad (10.9')$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (10.10)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C; \quad (10.11)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (-a < x < a, a > 0); \quad (10.12)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0); \quad (10.13)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0); \quad (10.14)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \quad (a \neq 0); \quad (10.15)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad (10.16)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \quad (10.17)$$

Справедливость приведенных формул проверяется непосредственно дифференцированием (см. определение неопределенного интеграла). Так, формула (10.7) верна,

потому что производная ее правой части  $\left( \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$  равна подынтегральной функции левой части.

Докажем равенство (10.8). Пусть  $x > 0$ . Тогда  $|x| = x$  и  $(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$ . Если  $x < 0$ , то и  $|x| = -x$  и  $(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ , т.е. в обоих случаях производная правой части (10.8) равна подынтегральной функции левой части. Аналогично доказываются остальные формулы.

**Пример 10.1.** Найти интегралы:

а)  $\int \frac{dx}{x^4}$ ; б)  $\int \sqrt[3]{x} dx$ ; в)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

*Решение.* Во всех трех случаях следует воспользоваться одним и тем же табличным интегралом (10.7) от степенной функции, но при разных значениях  $n$ :

$$\text{а) при } n = -4: \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C;$$

$$\text{б) при } n = \frac{1}{3}: \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C;$$

$$\text{в) при } n = -\frac{1}{2}: \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C. \blacktriangleright$$

**Пример 10.2.** Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3^x}; \text{ б) } \int 2^{3x-1} dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{9x^2-1}; \text{ г) } \int \frac{dx}{4x^2+25}; \text{ д) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

*Решение.*

а) Учитывая, что  $\frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , и используя табличный интеграл (10.9) при  $a = \frac{1}{3}$ , получаем

$$\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C.$$

б) Так как  $2^{3x-1} = 2^{3x} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} 8^x$ , то используя свойство (10.4) и табличный интеграл (10.9) при  $a = 8$ , получаем

$$\int 2^{3x-1} dx = \int \frac{1}{2} 8^x dx = \frac{1}{2} \int 8^x dx = \frac{1}{2} \frac{8^x}{\ln 8} + C.$$

в) Поскольку  $\frac{1}{9x^2-1} = \frac{1}{9} \frac{1}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$ , воспользуемся свойством (10.4) и табличным интегралом (10.14) при  $a = \frac{1}{3}$ ,

тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{9x^2-1} &= \int \frac{1}{9} \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+1} \right| + C.\end{aligned}$$

г) Так как  $4x^2 + 25 = 4 \left( x^2 + \left( \frac{5}{2} \right)^2 \right)$ , то используя свойство (10.4) и табличный интеграл (10.13) при  $a = \frac{5}{2}$ , получаем

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 25} = \int \frac{1}{4} \frac{dx}{x^2 + \left( \frac{5}{2} \right)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \left( \frac{5}{2} \right)^2} = \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{2x}{5} + C.$$

д) Так как  $\sqrt{4x^2 + 1} = 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}$ , то используя свойство (10.4) и табличный интеграл (10.15) при  $a = \frac{1}{4}$ , получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right| + C. \blacktriangleright$$

Метод интегрирования, основанный на применении свойств 4 и 5, называется *методом разложения*.

**Пример 10.3.** Используя метод разложения, найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2} dx;$$

$$\text{в) } \int \left( \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 dx; \quad \text{г) } \int \frac{x^2}{x^2+4} dx.$$

*Решение.* Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задачах «а» и «б» воспользуемся соответствующими формулами сокращенного умножения и последующим почленным делением числителя на знаменатель.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \int \frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}} dx &= \int \frac{8x^{\frac{3}{2}} + 12x + 6x^{\frac{1}{2}} + 1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \\
 &= \int (8x + 12x^{-\frac{1}{2}} + 6 \cdot \frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}}) dx = 8 \int dx + 12 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 6 \int \frac{dx}{x} + \\
 &+ \int x^{-\frac{3}{2}} dx = 8x + 24\sqrt{x} + 6\ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C
 \end{aligned}$$

(см. табличные интегралы (10.7) и (10.8)). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную  $C$ , не выписывая постоянных от интегрирования отдельных слагаемых. В дальнейшем будем опускать при записи постоянные от интегрирования отдельных слагаемых до тех пор, пока выражение содержит хотя бы один неопределенный интеграл. В окончательном ответе тогда будет стоять одна постоянная.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \int \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} + 2} dx &= \int \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x + 4)}{\sqrt{x} + 2} dx = \\
 &= \int (x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} - 2x - 8) dx = \\
 &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int x dx - 8 \int dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 - 8x + C.
 \end{aligned}$$

в) Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\begin{aligned}
 &\int \left( \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 dx = \int \left( \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \right. \\
 &+ 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Big) dx = \\
 &= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C
 \end{aligned}$$

(см. табличный интеграл (10.10)).

г) Выделяя из дроби целую часть, имеем

$$\frac{x^2}{x^2 + 4} = \frac{(x^2 + 4) - 4}{x^2 + 4} = 1 - \frac{4}{x^2 + 4},$$

тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+4} dx &= \int dx - 4 \int \frac{dx}{x^2+4} = x - 4 \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C = \\ &= x - 2 \arctg \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

(см. табличный интеграл (10.13)). ►

### 10.3. Метод замены переменной

Одним из основных методов интегрирования является *метод замены переменной* (или *метод подстановки*), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (10.18)$$

где  $x = \varphi(t)$  — функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

□ Найдем производные по переменной  $t$  от левой и правой частей равенства (10.18):

$$\left( \int f(x) dx \right)'_t = \left( \int f(x) dx \right)'_x x'_t = f(x) \varphi'(t);$$

$$\left( \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_t = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

(см. свойство 1 неопределенного интеграла).

Так как  $x = \varphi(t)$ , то эти производные равны, поэтому по следствию из теоремы Лагранжа левая и правая части равенства (10.18) отличаются на некоторую постоянную. Поскольку сами неопределенные интегралы определены с точностью до неопределенного постоянного слагаемого, то указанную постоянную в окончательной записи можно опустить. ■

Формула (10.18) показывает, что, переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену переменной в подынтегральном выражении. Действительно, по определению дифференциала подынтегральные выражения левой и правой частей равенства (10.18) совпадают.

Удачная замена переменной позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

**Пример 10.4.** Найти  $\int \frac{dx}{1-2x}$ .

*Решение.* Пусть  $t = 1 - 2x$ . Тогда  $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$ ,

$$dx = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)' dt = -\frac{1}{2}dt$$

и

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{t}\right) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|1-2x| + C$$

(см. формулу (10.4) и табличный интеграл (10.8)). ►

Следует отметить, что новую переменную можно не выписывать явно (в таких случаях говорят о *преобразовании функции под знаком дифференциала* или о *введении постоянных и переменных под знак дифференциала*).

**Пример 10.5.** Найти  $\int \cos(3x+2)dx$ .

*Решение.* Используя свойства дифференциала (см. параграф 9.1), получаем

$$dx = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \cos(3x+2)dx &= \int \frac{1}{3} \cos(3x+2)d(3x+2) = \\ &= \frac{1}{3} \int \cos(3x+2)d(3x+2) = \frac{1}{3} \sin(3x+2) + C \end{aligned}$$

(см. формулу (10.4) и табличный интеграл (10.11)). ►

В примерах 10.4 и 10.5 для нахождения интегралов была использована линейная подстановка  $t = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  — некоторые числа ( $k \neq 0$ ). В общем случае справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $F(x)$  некоторая первообразная функция для  $f(x)$ . Тогда

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C, \quad (10.19)$$

где  $k$  и  $b$  — некоторые числа,  $k \neq 0$ .



□ Перепишем формулу (10.1) в виде  $\int f(kx+b)d(kx+b) = F(kx+b)+C$ .

Но  $d(kx+b) = (kx+b)'dx = kdx$ . Вынося постоянный множитель  $k$  за знак интеграла и деля левую и правую части равенства на  $k$ , приходим к формуле (10.19). ■

Данная теорема утверждает, что если в равенство (10.1) вместо аргумента  $x$  подынтегральной функции  $f(x)$  и первообразной  $F(x)$  подставить выражение  $(kx+b)$ , то это приведет к появлению дополнительного множителя  $\frac{1}{k}$  перед первообразной.

**Пример 10.6.** Найти интегралы:

а)  $\int \sqrt[3]{3-x} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{4x+3}$ ; в)  $\int e^{-2x+7} dx$ .

*Решение.* Искомые интеграла однотипны, так как каждый из них может быть найден путем применения формулы (10.19) к одному из табличных интегралов.

а) Из (10.7) и (10.19) следует, что

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k} \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1, k \neq 0). \quad (10.20)$$

Тогда, полагая  $n = \frac{1}{3}$ ,  $k = -1$ ,  $b = 3$ , получаем

$$\int \sqrt[3]{3-x} dx = -\frac{3}{4}(3-x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

б) Из (10.8) и (10.19) следует, что

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \ln|kx+b| + C \quad (k \neq 0). \quad (10.21)$$

Полагая  $k = 4$ ,  $b = 3$ , получаем  $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4} \ln|4x+3| + C$ .

в) Из (10.9') и (10.19) следует, что

$$\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C. \quad (10.22)$$

Полагая в (10.22)  $k = -2$ ,  $b = 7$ , имеем

$$\int e^{-2x+7} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x+7} + C. \blacktriangleright$$

Рассмотрим пример нахождения интеграла с помощью нелинейных подстановок.

**Пример 10.7.** Найти  $\int x e^{-x^2} dx$ .

*Решение.* Пусть  $t = -x^2$ . Продолжение решения может быть аналогичным решению примера 10.4: следует выразить  $x$  через  $t$ , затем найти выражение для  $dx$ . Это позволит реализовать замену переменной в искомом интеграле. Но здесь поступим по-другому.

Найдем дифференциал от левой и правой частей формулы  $t = -x^2$ :  $dt = d(-x^2) = (-x^2)' dx$ , т.е.  $dt = -2x dx$ . Из полученного равенства удобно выразить  $x dx$ , поскольку это выражение является множителем подынтегрального выражения искомого интеграла:  $x dx = -\frac{1}{2} dt$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \int x e^{-x^2} dx &= \int \left(-\frac{1}{2}\right) e^t dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \text{ (см. табличный интеграл (10.9)). } \blacktriangleright \end{aligned}$$

## 10.4. Метод интегрирования по частям

Пусть  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  — дифференцируемые функции. По свойству дифференциала (см. параграф 7.7)

$$d(uv) = v du + u dv$$

или

$$u dv = d(uv) - v du.$$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства и учитывая свойства (10.5) и (10.2), получаем

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (10.23)$$

Формула (10.23) называется *формулой интегрирования по частям* для неопределенного интеграла. При ее применении фиксируется разбиение подынтегрального выражения искомого интеграла на два сомножителя ( $u$  и  $dv$ ). При переходе к правой части формулы (10.23) первый из них дифференцируется (при нахождении дифференциала  $du = u' dx$ ), второй интегрируется ( $v = \int dv + C$  (см. (10.3))).

Возможности применения формулы (10.23) связаны с тем, что дифференцирование может существенно упростить один из сомножителей (при условии, что интегрирование не слишком усложнит другой).

**Пример 10.8.** Найти интегралы:

а)  $\int x e^{-2x} dx$ ; б)  $\int x \ln x dx$ .

*Решение.*

а) Поскольку  $x' = 1$ , а функция  $e^{-2x}$  при интегрировании практически не изменяется (согласно формуле (10.22) появляется лишь постоянный множитель), данный интеграл можно найти интегрированием по частям, полагая  $u = x$ ,  $dv = e^{-2x} dx$ . Найдем необходимые для записи правой части формулы (10.23)  $v$  и  $du$ .

Так как  $u = x$ , то  $du = dx$ . Согласно (10.3) и (10.22) при  $k = -2$  имеем

$$v = \int dv = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

Теперь, применяя формулу интегрирования по частям (10.23), получаем

$$\int x e^{-2x} dx = x \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) - \int \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) dx.$$

Используя метод разложения, убеждаемся, что полученный интеграл — это сумма табличного интеграла и интеграла, который был определен при нахождении  $v$ . Таким образом, окончательно

$$\begin{aligned} \int x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + Cx + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-2x} - Cx + C_1 = \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C_1. \end{aligned}$$

**Замечание.** Анализ полученного решения показывает, что постоянная  $C$ , возникшая при нахождении  $v$  (по заданному  $dv$ ), не входит в запись окончательного ответа. Аналогично в общем случае постоянная  $C$ , появляющаяся при нахождении  $v$ , исключается в процессе решения. В связи с этим в дальнейшем, применяя формулу интегрирования по частям и найдя  $v$ , будем полагать  $C = 0$ , что несколько упрощает запись решения.

б) «Препятствием» к нахождению данного интеграла является присутствие сомножителя  $\ln x$  в записи подынтегральной функции. Исключить его в данном случае можно с помощью интегрирования по частям, полагая  $u = \ln x$ . Тогда  $dv = x dx$ . (Существенно, что при интегрировании функции  $f(x) = x$  получается функция того же типа

(степенная).) Так как  $du = d \ln x = \frac{dx}{x}$  и  $v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2}$

( $C = 0$ , см. замечание к п. «а» данного примера), используем формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

В некоторых случаях для нахождения искомого интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять более одного раза.

**Пример 10.9.** Найти  $\int x^2 \sin x dx$ .

*Решение.* Пусть  $u = x^2$ ,  $\sin x dx = dv$ . Тогда  $du = dx^2 = 2x dx$  и  $v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x$  (см. формулу (10.10)).

Применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx. \end{aligned}$$

Полученный интеграл не является табличным, однако очевидно, что путь решения избран верно, так как по сравнению с исходным интегралом степень переменной  $x$  в подынтегральном выражении уменьшилась на единицу, при этом второй сомножитель  $\cos x$  того же типа, что и в исходном интеграле. Повторное применение формулы интегрирования по частям приводит к табличному интегралу. Действительно, положим теперь  $u = x$ ,  $\cos x dx = dv$ . Тогда  $du = dx$ ,  $v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x$  (см. (10.11)) и

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x \, dx) = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \blacktriangleright\end{aligned}$$

Анализируя разобранные примеры, можно указать типы интегралов, для нахождения которых используется формула интегрирования по частям:

1.  $\int x^n e^{ax} \, dx$ ;  $\int x^n \sin mx \, dx$ ;  $\int x^n \cos mx \, dx$ .
2.  $\int x^k \ln^n x \, dx$ ;  $\int x^k \arcsin x \, dx$ ;  $\int x^k \arccos x \, dx$ ;  
 $\int x^k \operatorname{arctg} x \, dx$ ;  $\int x^k \operatorname{arccotg} x \, dx$ ,

где  $a, m, k$  — действительные числа ( $k \neq -1$ ),  $n$  — целое положительное число.

Для нахождения интегралов из первой группы формулу интегрирования по частям придется применять  $n$  раз (при первом ее применении полагают  $u = x^n$ , остальные сомножители подынтегрального выражения задают  $dv$ ), пока степень  $n$  переменной  $x$  не станет равной нулю, а сам интеграл — табличным (см. примеры 10.8, 10.9). Для нахождения интегралов второй группы полагают  $x^k dx = dv$  (оставшиеся сомножители подынтегрального выражения задают выражение для  $u$ ). Отметим, что для нахождения  $\int x^k \ln^n x \, dx$  формулу интегрирования по частям придется применять  $n$  раз (при каждом ее применении степень функции  $\ln x$  уменьшается на единицу, пока не станет равной нулю, а сам интеграл — табличным).

На практике метод интегрирования по частям часто комбинируют с другими методами интегрирования.

## 10.5. Интегрирование простейших рациональных дробей

Напомним, что многочленом степени  $n$  называется выражение вида  $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — действительные числа ( $a_n \neq 0, n \geq 0$ ). Так,  $3 + 2x$  — многочлен первой степени,  $-x^4 + 3x + 2$  — многочлен четвертой степени и т.д. Рациональной дробью называется отношение

двух многочленов, например  $\frac{3x+1}{x^2+1}$ ,  $\frac{2+x^2+4x^3}{x+1}$ , ... — рациональные дроби.

Нас интересуют интегралы от рациональных дробей. Если степень многочлена знаменателя дроби равна нулю (т.е. в знаменателе стоит число), то дробь является многочленом. Интеграл от многочлена находится с помощью метода разложения (см. параграф 10.2). Далее будем предполагать, что степень знаменателя дроби больше нуля. Примеры таких интегралов встречались выше (см. табличные интегралы (10.7) при целом отрицательном  $n$  (10.8), (10.13), (10.14)). В этом параграфе наметим общий подход к интегрированию рациональных дробей.

Прежде всего отметим, что достаточно рассмотреть лишь правильные дроби, т.е. такие, у которых степень числителя меньше степени знаменателя. Действительно, если это не так, то, используя алгоритм деления многочленов «углом», известный из школьного курса, исходную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби, например,

$$\frac{x^3-3x+4}{x-2} = x^2+2x+1+\frac{6}{x-2},$$

$$\frac{4x^4-4x+5}{x^2-2x+1} = 4x^2+8x+12+\frac{12x-7}{x^2-2x+1}$$

и т.д. Тогда интеграл от исходной дроби с помощью метода разложения (см. параграф 10.2) сведется к сумме интегралов от многочлена и правильной дроби.

Если степень знаменателя равна 1, то искомым интеграл имеет вид  $\int \frac{dx}{kx+b}$  и для его нахождения достаточно воспользоваться формулой (10.21) (см. пример 10.6, б) или заменой переменной  $t = kx + b$  (см. пример 10.4).

Пусть степень знаменателя равна 2, т.е. искомым является интеграл вида

$$\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c} dx, \quad (10.24)$$

где  $a, b, c, e, f$  — действительные числа,  $a \neq 0$ . Рассмотрим сначала один важный частный случай — интеграл вида

$$\int \frac{ex+f}{ax^2+c} dx, \quad (10.25)$$

а затем укажем, как общий случай свести к данному. Если  $c = 0$ , то интеграл (10.25) представляет сумму двух табличных интегралов (с точностью до множителей; см. метод разложения). Пусть  $c \neq 0$ . Тогда для нахождения интеграла (10.25) достаточно найти интегралы

$$\int \frac{dx}{ax^2+c} \quad (10.26)$$

и

$$\int \frac{xdx}{ax^2+c}. \quad (10.27)$$

Интеграл (10.26) сводится (за счет вынесения множителя) либо к табличному интегралу (10.13), если  $ac > 0$ , либо к интегралу (10.14), если  $ac < 0$  (см. пример 10.2, в, г).

Для нахождения интеграла (10.27) используем замену переменной  $t = ax^2 + c$ . Тогда  $dt = 2ax dx$ ,  $x dx = \frac{1}{2a} dt$  и

$$\int \frac{x dx}{ax^2+c} = \int \frac{dt}{2at} = \frac{1}{2a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2a} \ln|t| + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{x dx}{ax^2+c} = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+c| + C, \quad (10.28)$$

где  $a \neq 0$ .

Возвращаясь к интегралу (10.24), заметим, что его можно привести к виду (10.25), если сначала выделить полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, а затем использовать соответствующую (линейную) замену переменной.

**Пример 10.10.** Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx; \text{ б) } \int \frac{x+1}{4x^2+4x-3} dx; \text{ в) } \int \frac{8-x}{x^2-4x+13} dx.$$

*Решение.*

а) Поскольку  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ , то используем замену переменной  $t = x + 1$ . Тогда  $dt = dx$ ,  $x = t - 1$  и

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx &= \int \frac{2t-1}{t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t} - \int t^{-2} dt = \\ &= 2 \ln|t| + \frac{1}{t} + C = 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.\end{aligned}$$

б) Так как  $4x^2 + 4x - 3 = (2x+1)^2 - 4$ , то положим  $t = 2x+1$ . Тогда  $x = \frac{1}{2}(t-1)$ ,  $dx = \frac{1}{2}dt$  и

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3} dx &= \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(t-1)+1}{t^2-4} \cdot \frac{1}{2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{t+1}{t^2-4} dt = \frac{1}{4} \int \frac{t dt}{t^2-4} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2-4}.\end{aligned}$$

Для нахождения первого интеграла воспользуемся формулой (10.28) при  $a = 1$ ,  $c = -4$ . Второй интеграл — табличный (см. (10.14)).

Теперь имеем

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3} dx &= \frac{1}{8} \ln|t^2-4| + \frac{1}{16} \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \\ &= \frac{1}{8} \ln|4x^2+4x-3| + \frac{1}{16} \ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C.\end{aligned}$$

в) Так как  $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$ , то положим  $t = x-2$ . Тогда  $dt = dx$ ,  $x = t+2$  и

$$\int \frac{8-x}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{6-t}{t^2+9} dt = 6 \int \frac{dt}{t^2+9} - \int \frac{t dt}{t^2+9}.$$

Первый из интегралов — табличный (см. (10.13)), для нахождения второго воспользуемся формулой (10.28). Тогда получаем

$$\begin{aligned}\int \frac{8-x}{x^2-4x+13} dx &= 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{3} - \frac{1}{2} \ln(t^2+9) + C = \\ &= 2 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} - \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+13| + C. \blacktriangleright\end{aligned}$$

Рассмотренный прием интегрирования правильных дробей, знаменатель которых имеет степень 2 (выделение пол-



ного квадрата в знаменателе с последующей заменой переменной), обладает существенным недостатком: он не обобщается на случаи, когда степень знаменателя больше двух. Поэтому рассмотрим также другой возможный подход.

Пусть требуется найти  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$  (получим другой вывод формулы (10.14)). Представим подынтегральную функцию искомого интеграла в виде

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right).$$

Тогда, используя метод разложения и формулу (10.21), получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln|x - a| - \ln|x + a|) + C = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \end{aligned}$$

Аналогично в общем случае можно доказать, что если подынтегральная дробь  $f(x)/g(x)$  — правильная, а ее знаменатель  $g(x)$  — многочлен степени  $n$ , имеющий  $n$  попарно различных действительных корней  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , то существует представление подынтегральной функции в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x - \alpha_n},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — некоторые числа. Тогда исходный интеграл сводится к сумме табличных.

**Пример 10.11.** Найти  $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx$ .

*Решение.* Так как  $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x - 2)(x + 4)$ , то

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{x + 4}.$$

Из последнего равенства найдем постоянные  $A_1, A_2, A_3$ . Приводя дроби правой части к общему знаменателю, приходим к равенству

$$A_1(x - 2)(x + 4) + A_2(x + 4)x + A_3(x - 2)x = x^2 - 2x + 2.$$

Если  $x = 0$ , то имеем  $-8A_1 = 2$  и  $A_1 = -\frac{1}{4}$ . Если  $x = 2$ , то  $12A_2 = 2$  и  $A_2 = \frac{1}{6}$ . Если  $x = -4$ , то  $24A_3 = 26$ , т.е.  $A_3 = \frac{13}{12}$ .

(Обратим внимание читателя, что прием нахождения постоянных  $A_1, A_2, \dots$  нетрудно обобщить и использовать при доказательстве существования указанного разложения в общем случае.) Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{13}{12} \int \frac{dx}{x+4} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{13}{12} \ln|x+4| + \frac{1}{6} \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

(см. (10.21)). Рассмотренный метод интегрирования называется *методом неопределенных коэффициентов*. ►

### 10.6. Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Рассмотрим случаи, в которых замена переменной позволяет интегралы от иррациональных функций свести к интегралам от рациональных функций, описанных в параграфе 10.5 (т.е. рационализировать интеграл).

Обозначим через  $R(u, v)$  функцию от переменных  $u, v$  и некоторых постоянных, которая построена с использованием лишь четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления), например,  $R(u, v) = u^2 + 2v^5$ ,  $R(u, v) = \frac{u+3v}{2-u^2}$  и т.д.

Рассмотрим интегралы вида  $\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$ . Такие интегралы рационализируются заменой переменной  $t = \sqrt[n]{x}$ .

**Пример 10.12.** Найти  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ .

*Решение.* Подынтегральная функция искомого интеграла записана как функция от радикалов степеней 2 и 3. Так как наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6, то дан-

ный интеграл является интегралом типа  $\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$  и может быть рационализирован посредством замены переменной  $\sqrt[n]{x} = t$ . Тогда  $x = t^n$ ,  $dx = nt^{n-1} dt$ ,  $\sqrt{x} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ . Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt.$$

Пусть  $t + 1 = z$ . Тогда  $dz = d(t + 1) = dt$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6 \int \frac{(z-1)^3}{z} dz = 6 \int z^2 dz - 18 \int z dz + 18 \int \frac{dz}{z} = \\ &= 2z^3 - 9z^2 + 18z - 6 \ln|z| + C = 2(\sqrt[6]{x} + 1)^3 - 9(\sqrt[6]{x} + 1)^2 + \\ &+ 18(\sqrt[6]{x} + 1) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C_1, \end{aligned}$$

где  $C_1 = C - 11$ . ►

Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$  являются частным случаем интегралов от дробно-линейных иррациональностей, т.е. интегралов вида  $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ , где  $ad - cb \neq 0$ , которые допускают рационализацию посредством замены переменной  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

**Пример 10.13.** Найти  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1+x}$ .

*Решение.* Пусть  $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . Тогда  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = -\frac{4t dt}{(1+t^2)^2}$ ,  $1+x = \frac{2}{1+t^2}$ ,  $\frac{1}{x+1} = \frac{1+t^2}{2}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1+x} &= \int \frac{t(1+t^2)}{2} \left( -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \right) dt = \\ &= -2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = -2 \int dt + 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= -2t + 2 \operatorname{arctg} t + C = -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . В простейших случаях такие интегралы сводятся к табличным (см. (10.12), (10.15)). (Необходимая замена переменной предполагается после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене  $ax^2 + bx + c$ .)

**Пример 10.14.** Найти интегралы:

а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$ ; б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 4x - 4x^2}}$ .

*Решение.*

а) Учитывая, что  $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$ , положим  $t = x + 2$ . Эта замена переменной позволяет свести искомым интеграл к табличному (см. (10.15)):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 1} \right| + C = \\ &= \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5} \right| + C. \end{aligned}$$

б) Так как  $8 + 4x - 4x^2 = 9 - (1 - 2x)^2$ , то положим  $1 - 2x = t$ . Тогда  $x = \frac{1-t}{2}$ ,  $dx = -\frac{1}{2}dt$  и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 4x - 4x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{9 - t^2}} dt.$$

Окончательно (см. табличный интеграл (10.12) при  $a = 3$ ) получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 4x - 4x^2}} = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{3} + C = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{1-2x}{3} + C. \blacktriangleright$$

В более сложных случаях для нахождения интегралов вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  используются *подстановки Эйлера* (см., например, [6]).

### 10.7. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ . Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональных функций в результате замены  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , где  $-\pi < x < \pi$ . Действительно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2 \arctg t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt.$$

**Пример 10.15.** Найти  $\int \frac{dx}{\sin x}$ .

*Решение.* Положим  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Тогда, используя указанные выше выражения через  $t$  для  $dx$  и  $\sin x$ , получаем, что искомый интеграл равен

$$\int \frac{(1+t^2)2dt}{(1+t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \blacktriangleright$$

Если функция  $R(u, v)$  обладает свойствами четности или нечетности по переменным  $u$  или  $v$ , то для рационализации интеграла могут быть использованы также и другие подстановки.

Так, если  $R(u, v)$  — дробь, числитель и знаменатель которой многочлены по переменным  $u$  и  $v$  и  $R(-u, v) = -R(u, v)$ , то рационализация интеграла  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  достигается заменой переменной  $t = \cos x$ .

**Пример 10.16.** Найти  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ .

*Решение.* В данном случае  $R(u, v) = \frac{u^3}{v^4}$ , а потому  $R(-u, v) = -R(u, v)$ . Пусть  $\cos x = t$ ,  $dt = -\sin x dx$ . Следовательно, учитывая, что  $\sin^2 x = 1 - t^2$ , получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx &= -\int \frac{1-t^2}{t^4} dt = -\int t^{-4} dt + \int t^{-2} dt = \frac{t^{-3}}{3} - t^{-1} + C = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Если  $R(u, v) = -R(u, v)$ , то рационализация интеграла  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  достигается заменой переменной  $t = \sin x$ .

**Пример 10.17.** Найти  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ .

*Решение.* В данном случае  $R(u, v) = u^2 v^3$ . Положим  $t = \sin x$ . Тогда  $dt = \cos x dx$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int t^2 (1-t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы вида  $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ ,

$\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ ,  $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ , где  $\alpha, \beta$  — некоторые действительные числа. С помощью известных формул для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму такие интегралы сводятся к сумме табличных.

**Пример 10.18.** Найти  $\int \sin 3x \cos 5x dx$ .

*Решение.* Так как  $\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$ , то

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int \sin 8x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \sin 8x d(8x) - \frac{1}{4} \int \sin 2x d(2x) = \\ &= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

## 10.8. Об интегралах, «неберущихся» в элементарных функциях

Из основных правил дифференцирования следует, что производная произвольной элементарной функции вновь является функцией элементарной. Однако операция нахождения первообразной функции (неопределенного интеграла) таким свойством не обладает, т.е. существуют элементарные функции, первообразные которых элементарными функциями уже не являются. В связи с этим соответствующие неопределенные интегралы называются «неберущимися» в элементарных функциях, а сами функции — *неинтегрируемыми в конечном виде*. Так,  $\int e^{-x^2} dx$ ,  $\int \sin x^2 dx$ ,  $\int \cos x^2 dx$ ,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int \frac{\cos x}{x} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\ln x}$  — «неберущиеся», т.е. не существует такой элементарной функции  $f(x)$ , что  $f'(x) = e^{-x^2}$  или  $f'(x) = \sin x^2$  и т.д.

Все методы интегрирования, рассмотренные в данной главе, применяемые для нахождения интегралов от элементарных функций, вновь приводят к элементарным функциям. Поэтому указанные «неберущиеся» интегралы не могут быть найдены, по крайней мере, с помощью методов, приведенных в данной главе. Однако это не означает, что такие интегралы не существуют или их невозможно найти (соответствующие методы интегрирования будут описаны в гл. 14).

## ПРАКТИКУМ

### 10.9. Непосредственное интегрирование

**10.19.** Найти неопределенные интегралы:

а)  $\int (2\sin x - 3^{x+2} + 5) dx$ ; б)  $\int \frac{(2\sqrt[3]{x} + 1)^2}{\sqrt[3]{x^4}} dx$ ;

в)  $\int \frac{2x^4 + 3x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$ ; г)  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ .

*Решение.*

а) Используя свойства интеграла (10.4) и (10.5), приходим к сумме табличных интегралов (10.10), (10.9) при  $a = 3$  и (10.7) при  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}\int (2\sin x - 3^{x+2} + 5) dx &= 2 \int \sin x dx - 9 \int 3^x dx + 5 \int dx = \\ &= -2\cos x - 9 \frac{3^x}{\ln 3} + 5x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{б) } \int \frac{(2\sqrt[3]{x} + 1)^2}{\sqrt[3]{x^4}} dx &= \int \frac{4x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{4}{3}}} dx = \int \left( 4x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{x} + x^{-\frac{4}{3}} \right) dx = \\ &= 4 \int x^{-\frac{2}{3}} dx = 4 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{4}{3}} dx = 12x^{\frac{1}{3}} + 4\ln|x| - 3x^{-\frac{1}{3}} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{в) } \int \frac{2x^4 + 3x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx &= \int \frac{2x^2(x^2 + 1) + (x^2 + 1) + x}{x(x^2 + 1)} dx = \\ &= \int \left( 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = 2 \int x dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= x^2 + \ln|x| + \arctg x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{г) } \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C. \blacktriangleright\end{aligned}$$

Найти неопределенные интегралы:

10.20.  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$

10.21.  $\int (2x^8 + e^{x^{2x}}) dx.$

10.22.  $\int \frac{dx}{9x^2 + 1}.$

10.23.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

10.24.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$

10.25.  $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx.$

10.26.  $\int \frac{(1-x)^3}{x^3 \sqrt{x}} dx.$

10.27.  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$

10.28.  $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$

10.29.  $\int (2x^3 - 3x^2 + 4^{2x+1}) dx.$



$$\begin{array}{ll}
 10.30. \int (2x^2+1)(2+3x^3)dx. & 10.31. \int \frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{\sqrt[4]{x}+2} dx. \\
 10.32. \int \frac{(2\sqrt[3]{x}+1)^2}{\sqrt{x}} dx. & 10.33. \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx. \\
 10.34. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx. & 10.35. \int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+1} dx. \\
 10.36. \int \frac{x^3-x+2}{x^2-1} dx. & 10.37. \int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx. \\
 10.38. \int \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} dx. & 10.39. \int \frac{dx}{\sin^2 2x}. \\
 10.40. \int \frac{3x^4-x^2-1}{x^2(x^2-1)} dx.
 \end{array}$$

### 10.10. Метод замены переменной

10.41. Найти интегралы:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а) } \int \sqrt{\frac{x+5}{3}} dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}; & \text{в) } \int \frac{dx}{9x^2+6x+5}; \\
 \text{г) } \int \frac{xdx}{\sqrt{3-4x^2-4x}}; & \text{д) } \int \frac{8x^3 dx}{2x+1}; & \text{е) } \int \frac{3x+2}{x^2-4x+3} dx.
 \end{array}$$

*Решение.*

а) Пусть  $t = \frac{x+5}{3}$ . Тогда  $dt = d\left(\frac{x+5}{3}\right)$ . По определению дифференциала получаем

$$dt = \left(\frac{x+5}{3}\right)' dx = \frac{1}{3}(x+5)' dx = \frac{1}{3} dx,$$

откуда  $dx = 3dt$ . Учитывая выражение для  $t$ , исключим  $x$  из записи подынтегрального выражения искомого интеграла, тогда

$$\int \sqrt{\frac{x+5}{3}} dx = \int \sqrt{t} 3dt.$$

Используя свойство (10.4), приходим к табличному интегралу (10.7) при  $n = \frac{1}{2}$ :

$$\int \sqrt{t} 3dt = 3 \int t^{\frac{1}{2}} dt = 3 \left( \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_1 \right) = 2 \left( \frac{x+5}{3} \right)^{\frac{3}{2}} + C,$$

где  $C = 3C_1$ .

Как было отмечено в параграфе 10.3, в простейших случаях замена переменной может не записываться явно, а используется преобразование переменной под знаком дифференциала.

б) Заметим, что  $4x^2 + 1 = (2x)^2 + 1$ , а  $dx = \frac{1}{2}d(2x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 + 1}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2 + 1}| + C \end{aligned}$$

(см. табличный интеграл (10.15) при  $a = 1$ ).

в) В знаменателе подынтегрального выражения выделим полный квадрат:  $9x^2 + 6x + 5 = (3x + 1)^2 + 4$ . Учитывая, что  $dx = \frac{1}{3}d(3x + 1)$ , получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5} &= \int \frac{1}{3} \cdot \frac{d(3x + 1)}{(3x + 1)^2 + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x + 1)}{(3x + 1)^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x + 1}{2} + C \end{aligned}$$

(см. табличный интеграл (10.13) при  $a = 2$ ).

г) Выделим полный квадрат в подкоренном выражении:  $3 - 4x^2 - 4x = 4 - (2x + 1)^2$ . Положим  $2x + 1 = t$ . Тогда  $x = \frac{1}{2}(t - 1)$  и  $dx = \frac{1}{2}dt$ . Следовательно,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{3 - 4x^2 - 4x}} = \int \frac{1}{4} \cdot \frac{(t - 1) dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{t dt}{\sqrt{4 - t^2}} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}}.$$

Второй из двух полученных интегралов — табличный (см. (10.12) при  $a = 2$ ). Для нахождения первого заметим,

что  $t dt = -\frac{1}{2}d(4 - t^2)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x dx}{\sqrt{3-4x^2-4x}} &= -\frac{1}{8} \int (4-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(4-t^2) - \frac{1}{4} \arcsin \frac{t}{2} = \\
 &= -\frac{1}{4} (4-t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{t}{2} + C = \\
 &= -\frac{1}{4} \sqrt{3-4x^2-4x} - \frac{1}{4} \arcsin \left( x + \frac{1}{2} \right) + C.
 \end{aligned}$$

д) Пусть  $t = 2x + 1$ . Тогда  $dt = 2dx$  и, следовательно,  $dx = \frac{1}{2}dt$ . Так как  $x = \frac{(t-1)}{2}$ , то

$$\begin{aligned}
 \int \frac{8x^3}{2x+1} dx &= \int \frac{8\left(\frac{t-1}{2}\right)^3}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int \left( t^2 - 3t + 3 - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{6} t^3 - \frac{3}{4} t^2 + \frac{3}{2} t - \frac{1}{2} \ln |t| + C_1.
 \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной ( $t = 2x + 1$ ), получаем

$$\int \frac{8x^3}{2x+1} dx = \frac{4}{3} x^3 - x^2 + x - \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C,$$

где  $C = C_1 + \frac{11}{12}$ .

е) Выделяя полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, получаем

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3} dx = \int \frac{3x+2}{(x-2)^2-1} dx.$$

Пусть  $t = x - 2$ . Тогда  $dt = d(x - 2) = (x - 2)' dx = dx$ ,  $x = t + 2$  и

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x+2}{(x-2)^2-1} dx &= \int \frac{3(t+2)+2}{t^2-1} dt = 3 \int \frac{tdt}{t^2-1} + 8 \int \frac{dt}{t^2-1} = \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2-1)}{t^2-1} + 4 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \frac{3}{2} \ln |t^2-1| + 4 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной, окончательно имеем

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2-4x+3| + 4 \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C. \blacktriangleright$$

**10.42.** Найти интегралы:

а)  $\int x e^{-3x^2+4} dx$ ; б)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^6}}$ ; в)  $\int \frac{dx}{2x+3x \ln x}$ ;

г)  $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} dx$ ; д)  $\int \frac{dx}{\cos x}$ ; е)  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ ; ж)  $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) } \int x e^{-3x^2+4} dx &= \int e^{-3x^2+4} \left( -\frac{1}{6} \right) d(-3x^2+4) = \\ &= -\frac{1}{6} \int e^{-3x^2+4} d(-3x^2+4) = -\frac{1}{6} e^{-3x^2+4} + C \quad (\text{см. табличный} \end{aligned}$$

интеграл (10.9')).

$$\text{б) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^6}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{\sqrt{4-(x^3)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x^3}{2} + C \quad (\text{см. таблич-}$$

ный интеграл (10.12) при  $a = 2$ ).

$$\text{в) } \int \frac{dx}{2x+3x \ln x} = \frac{1}{3} \int \frac{d(2+3 \ln x)}{2+3 \ln x} = \frac{1}{3} \ln |2+3 \ln x| + C \quad (\text{см.}$$

табличный интеграл (10.8)).

$$\begin{aligned} \text{г) Пусть } e^x &= t. \text{ Тогда } dx = \frac{dt}{t} \text{ и } \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{t^3 dt}{(t^2+1)t} = \\ &= \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = \int \left( 1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - \arctg t + C = \\ &= e^x - \arctg e^x + C. \end{aligned}$$

Отметим, что замена переменной  $t = e^x$  позволяет рационализировать произвольный интеграл вида  $\int R(e^x) dx$ .

д) Преобразуем сначала знаменатель подынтегральной функции:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \\ &= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Пусть  $t = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ . Тогда  $dt = -\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}dx$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = \\ &= -\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.\end{aligned}$$

е) Пусть  $x = \sin t$ , где  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Тогда  $dx = \cos t dt$ ,  $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ , так как при сделанных предположениях  $\cos t > 0$ . Тогда

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt.$$

Воспользуемся формулой понижения степени и свойствами интеграла (10.4), (10.5):

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos 2t d(2t).$$

Учитывая (10.11), имеем

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C. \quad (10.29)$$

Применяя формулу для синуса двойного угла и осуществляя возврат к исходной переменной, окончательно получаем

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \cdot 2\sin t \cos t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

ж) Пусть  $x = \operatorname{tg} t$ . Тогда  $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$  и  $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} =$   
 $= \int \frac{\cos^4 t dt}{\cos^2 t} = \int \cos^2 t dt.$

Применяя формулу (10.29), получаем

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + C. \blacktriangleright$$

Используя указанные замены переменной, найти интегралы:

$$10.43. \int \frac{dx}{e^x x^2}, \quad t = -\frac{1}{x}. \quad 10.44. \int \frac{(1+x)dx}{1+\sqrt{x}}, \quad t = 1+\sqrt{x}.$$

$$10.45. \int \operatorname{tg} \frac{x}{3} dx, \quad t = \cos \frac{x}{3}. \quad 10.46. \int \frac{dx}{e^x + 1}, \quad t = 1 + e^{-x}.$$

$$10.47. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad x = \frac{1}{t}. \quad 10.48. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = \sin t.$$

$$10.49. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx, \quad x = \operatorname{tg} t.$$

Найти интегралы:

$$10.50. \int \frac{dx}{e^{2x-1}}. \quad 10.51. \int \sqrt[5]{3x+2} dx.$$

$$10.52. \int \frac{dx}{(4x+3)^5}. \quad 10.53. \int \frac{dx}{3x+1}.$$

$$10.54. \int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}. \quad 10.55. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$$10.56. \int \frac{x^2 dx}{2x^3+5}. \quad 10.57. \int \left(x + \frac{1}{4}\right) \sin(2x^2+x) dx.$$

10.58.  $\int \sqrt[3]{2 + \cos 3x} \sin 3x \, dx.$

10.59.  $\int e^{-\sqrt{2x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

10.60.  $\int e^x \sqrt{2 + 5e^x} \, dx.$

10.61.  $\int \cos \frac{2x+1}{5} \, dx.$

10.62.  $\int \frac{\sin \ln x}{x} \, dx.$

10.63.  $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg \frac{x}{3}}}{9+x^2} \, dx.$

10.64.  $\int \frac{dx}{2x^2+1}.$

10.65.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}.$

10.66.  $\int \frac{e^{-x} dx}{1-e^{-2x}}.$

10.67.  $\int \frac{x^2+1}{x+1} \, dx.$

10.68.  $\int \frac{x^3 dx}{1-x}.$

10.69.  $\int \frac{2x-1}{2x+1} \, dx.$

10.70.  $\int \frac{dx}{3x^2-5}.$

10.71.  $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{16-x^4}}.$

10.72.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}.$

10.73.  $\int \frac{2x+1}{3x^2+2} \, dx.$

10.74.  $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx.$

10.75.  $\int \frac{\sqrt{x} + \ln^2 x}{x} \, dx.$

10.76.  $\int \frac{x^2 dx}{x^2+3}.$

10.77.  $\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} \, dx.$

10.78.  $\int \frac{3^{5x}-1}{\sqrt{3^x}} \, dx.$

10.79.  $\int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

10.80.  $\int \frac{x+2x^3}{\sqrt{x^2+9}} \, dx.$

10.81.  $\int \frac{x \, dx}{x^2-2}.$

10.82.  $\int \frac{dx}{x^2+2x}.$

10.83.  $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}.$

10.84.  $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

10.85.  $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}.$

10.86.  $\int \frac{dx}{4x^2+12x+13}.$

10.87.  $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{-x^2-4x}}.$

$$10.88. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}.$$

$$10.89. \int \sin^4 \frac{x}{2} dx.$$

$$10.90. \int \frac{dx}{\sin 2x}.$$

$$10.91. \int \operatorname{ctg} \frac{x+3}{2} dx.$$

$$10.92. \int \sin^2 2x \cos x dx.$$

$$10.93. \int \sqrt{1 + \cos^2 x} \sin 2x dx.$$

$$10.94. \int \frac{(\cos x)^{\frac{1}{2}}}{(\sin x)^{\frac{5}{2}}} dx.$$

### 10.11. Метод интегрирования по частям

10.95. Найти интегралы:

а)  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ ; б)  $\int x^3 e^{x^2} dx$ ; в)  $\int x^2 e^{-x+1} dx$ ;

г)  $\int \ln^2(2x+3) dx$ ; д)  $\int \sqrt{1+x^2} dx$ .

*Решение.*

а) Пусть  $u = \ln x$  и  $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ . Тогда  $du = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$  и

$$v = \int dv = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}}.$$

Вообще говоря, по формуле (10.3) полученное выражение для  $v$  должно содержать постоянную интегрирования  $C$ . Однако при применении формулы (10.23) эта постоянная из окончательного выражения выпадает. В связи с этим в выражении для  $v$  удобно полагать  $C = 0$ .

Согласно формуле (10.23), имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - \int 2x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 4x^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

б) Используя замену переменной, сведем данный интеграл к интегралу, который может быть найден методом интегрирования по частям.



Положим  $x^2 = t$ . Тогда  $\frac{1}{2}dt = x dx$  и  $\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 e^{x^2} x dx = \int t e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t e^t dt$ .

Пусть теперь  $t = u$ ,  $e^t dt = dv$ . Тогда  $du = dt$ ,  $v = \int e^t dt = e^t$  и  $\frac{1}{2} \int t e^t = \frac{1}{2} (t e^t - \int e^t dt) = \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$ .

в) Пусть  $u = x^2$ ,  $dv = e^{-x+1} dx$ . Тогда  $du = 2x dx$ ,  $v = \int dv = \int e^{-x+1} dx = -\int e^{-x+1} d(-x+1) = -e^{-x+1}$ .

Применяя формулу (10.23), получаем

$$\int x^2 e^{-x+1} dx = -x^2 e^{-x+1} + 2 \int e^{-x+1} x dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу (10.23), полагая  $u = x$ ,  $dv = e^{-x+1} dx$ . Тогда  $du = dx$ ,  $v = -e^{-x+1}$  и

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x+1} dx &= -x^2 e^{-x+1} - 2x e^{-x+1} + 2 \int e^{-x+1} dx = \\ &= -x^2 e^{-x+1} - 2x e^{-x+1} - 2e^{-x+1} + C = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x+1} + C. \end{aligned}$$

г) Выполним сначала замену переменной, полагая  $t = 2x + 3$ . Тогда  $dt = d(2x + 3) = 2dx$  и  $dx = \frac{1}{2} dt$ . Следовательно,

$$\int \ln^2(2x+3) dx = \int \ln^2 t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \ln^2 t dt.$$

Пусть  $\ln^2 t = u$ ,  $dt = dv$ . Тогда  $du = d \ln^2 t = 2 \ln t \frac{1}{2} dt$ ,  $v = \int dv = \int dt = t$  и, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \ln^2(2x+3) dx = \frac{1}{2} (t \ln^2 t - \int t \cdot 2 \ln t \frac{1}{t} dt) = \frac{1}{2} t \ln^2 t - \int \ln t dt.$$

Полагая в формуле интегрирования по частям  $u = \ln t$ ,  $dv = dt$ , получаем  $\int \ln t dt = t \ln t - t + C$ . Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int \ln^2(2x+3) dx &= \frac{1}{2} t \ln^2 t - t \ln t + t + C = \\ &= \frac{1}{2} (2x+3) \ln^2(2x+3) - (2x+3) \ln(2x+3) + 2x + C. \end{aligned}$$

д) Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Пусть  $u = \sqrt{1+x^2}$ ,  $dv = -dx$ . Тогда  $du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $v = \int dv = \int dx = x$  и

$$\begin{aligned} J &= \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \\ &- \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C. \end{aligned}$$

Но второе слагаемое в последнем выражении совпадает с искомым интегралом  $J$ , т.е. имеем равенство

$$J = x\sqrt{1+x^2} - J + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C,$$

откуда

$$2J = x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C;$$

$$J = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C_1,$$

где  $C_1 = \frac{1}{2}C$ .

Следует отметить, что данный интеграл принадлежит к семейству интегралов вида  $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$ , каждый из которых может быть найден с помощью тригонометрической подстановки  $x = a \operatorname{tg} t$  (см. пример 10.42, ж). ►

**10.96.** Найти интегралы:

а)  $\int x \arcsin x dx$ ;   б)  $\int e^{2x} \cos 3x dx$ .

*Решение.*

а) Пусть  $u = \arcsin x$ ,  $dv = x dx$ . Тогда  $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $v = \frac{x^2}{2}$ .

Применяя формулу (10.23), получаем

$$\begin{aligned} \int x \arcsin x \, dx &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2} \arcsin x + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{(\sqrt{1-x^2})^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Второй из полученных интегралов табличный (см. (10.12)), а первый был найден ранее (см. пример 10.42, е). Окончательно получаем

$$\int x \arcsin x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C.$$

б) Пусть  $u = \cos 3x$ ,  $dv = e^{2x} dx$ . Тогда  $du = -3 \sin 3x dx$ ,  $v = \frac{1}{2} e^{2x}$ . Обозначая искомый интеграл через  $J$  и применяя формулу (10.23), получаем

$$J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x \, dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям (10.23), где  $u = \sin 3x$ ,  $dv = e^{2x} dx$ :

$$J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x \, dx \right)$$

или

$$J = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} J + C_1.$$

Выражая из последнего равенства искомый интеграл  $J$ , окончательно имеем

$$J = \frac{1}{13} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) e^{2x} + C,$$

где  $C = \frac{4}{13} C_1$ . ►

Прием, использованный в примере 10.96, б, применяется для нахождения интегралов вида:

$\int e^{ax} \sin bx dx$ ;  $\int e^{ax} \cos bx dx$ , где  $a, b$  — действительные числа,  $a \neq 0$ .

Найти интегралы:

$$10.97. \int x e^{5x} dx. \qquad 10.98. \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$10.99. \int x^3 e^{2x} dx. \qquad 10.100. \int \ln(1-x) dx.$$

$$10.101. \int (x^2 - 3x) \ln x dx. \qquad 10.102. \int x^2 x dx.$$

$$10.103. \int \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}} dx. \qquad 10.104. \int x \sin 3x dx.$$

$$10.105. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx. \qquad 10.106. \int \sqrt{x^2 - 4} dx.$$

$$10.107. \int \sqrt{2-x^2} dx. \qquad 10.108. \int x \cos^2 x dx.$$

$$10.109. \int \arctg \sqrt{7x-1} dx. \qquad 10.110. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$10.111. \int x^2 \cos x dx. \qquad 10.112. \int e^x \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$10.113. \int \cos(\ln x) dx. \qquad 10.114. \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$10.115. \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx. \qquad 10.116. \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx.$$

$$10.117. \int x \operatorname{tg}^2 2x dx. \qquad 10.118. \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$$

$$10.119. \int \cos^2(\ln x) dx. \qquad 10.120. \int x^2 \arctg 3x dx.$$

$$10.121. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx. \qquad 10.122. \int (\arcsin x)^2 dx.$$

$$10.123. \int 3^x \cos x dx. \qquad 10.124. \int e^{3x} \sin 2x dx.$$

$$10.125. \int \ln(1+x^2) dx. \qquad 10.126. \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx.$$

## 10.12. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим общий подход к интегрированию рациональных функций вида  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (где  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены от переменной  $x$ ) — так называемый метод неопределенных коэффициентов. Будем предполагать, что дробь  $\frac{f(x)}{g(x)}$  — правильная, т.е. степень числителя  $f(x)$  меньше степени знаменателя  $g(x)$ .

Пусть знаменатель  $g(x)$  можно разложить на линейные множители:

$$g(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l}, \quad (10.30)$$

где  $\alpha_i \neq \alpha_j$  при  $i \neq j$  и  $k_1, \dots, k_l$  — положительные целые числа.

В этом случае дробь  $\frac{f(x)}{g(x)}$  можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} = & \frac{A_{11}}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \dots + \\ & + \frac{A_{l1}}{(x - \alpha_l)} + \dots + \frac{A_{lk_l}}{(x - \alpha_l)^{k_l}}, \end{aligned} \quad (10.31)$$

где  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{lk_l}$  — некоторые неизвестные числа.

**10.127.** Найти интеграл  $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

*Решение.* Записывая подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, имеем

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1}$$

или после приведения правой части к общему знаменателю получаем

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1(x^2-1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Это равенство выполняется тождественно (т.е. при любых значениях переменной  $x$ ) только в том случае, если

$$x^2 = A_1(x^2 - 1) + A_2(x + 1) + A_3(x - 1)^2. \quad (10.32)$$

Полагая в равенстве (10.32)  $x = 1$ , получаем  $1 = 2A_2$  и, следовательно,  $A_2 = \frac{1}{2}$ . При  $x = -1$  из равенства (10.32) имеем  $1 = 4A_3$ , поэтому  $A_3 = \frac{1}{4}$ . Пусть  $x = 0$ . Тогда из равенства (10.32) следует, что  $0 = -A_1 + A_2 + A_3$ .

Подставляя в последнее равенство найденные значения  $A_2$  и  $A_3$ , получаем  $A_1 = \frac{3}{4}$ .

Используя полученное представление для подынтегральной функции в виде суммы простейших дробей, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)} &= \int \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Если многочлен  $g(x)$  не допускает разложения на линейные множители ( $g(x)$  имеет комплексные корни), то в выражении (10.30) дополнительно содержатся сомножители вида  $(x^2 + px + q)^m$ , где  $m$  — положительное целое число. Тогда разложение (10.31) дроби  $\frac{f(x)}{g(x)}$  дополнительно содержит слагаемые вида

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m}.$$

**10.128.** Найти интеграл  $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-x+1)}.$

*Решение.* Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{M_1x + N_1}{x^2-x+1}.$$

Выполняя приведение к общему знаменателю и приравняв между собой числители левой и правой частей получаемого равенства, имеем

$$1 = A_1(x^2 - x + 1) + (M_1x + N_1)(x - 1). \quad (10.33)$$

Если  $x = 1$ , то  $A_1 = 1$ ; если  $x = 0$ , то приходим к равенству  $1 = A_1 - N_1$  и, следовательно,  $N_1 = 0$ .

Полагая в равенстве (10.33)  $x = -1$ , получаем

$$1 = 3A_1 + (-M_1 + N_1)(-2),$$

откуда  $M_1 = -1$ . Тогда

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-x+1)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{xdx}{x^2-x+1}.$$

Для первого интеграла (в правой части) преобразуем функцию под знаком дифференциала:  $dx = d(x - 1)$ ; для второго выделим полный квадрат в знаменателе

$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$  и воспользуемся заменой переменной  $t = x - \frac{1}{2}$ . Тогда  $dt = dx$ ,  $x = t + \frac{1}{2}$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-x+1)} &= \int \frac{d(x-1)}{x-1} - \int \frac{t + \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \\ &= \ln|x-1| - \int \frac{tdt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} = \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2 - x + 1| - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**10.129.** Найти интеграл  $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+1)^2}$ .

*Решение.* Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Выполняя приведение к общему знаменателю, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \\ & = \frac{(A_1+M_1)x^4 + N_1x^3 + (2A_1+M_1+M_2)x^2 + N_2x + (A_1+N_1)}{x(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Условие тождественности данного равенства приводит к системе

$$\begin{cases} A_1 + M_1 = 0, \\ N_1 = 0, \\ 2A_1 + M_1 + M_2 = 0, \\ N_2 = 1, \\ A_1 + N_1 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем  $A_1 = 1$ ,  $M_1 = M_2 = -1$ ,  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 1$ . Тогда

$$\int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

В полученной сумме первый интеграл — табличный, второй и третий находятся с помощью замены  $t = x^2 + 1$ , а четвертый — с помощью замены  $x = \operatorname{tg} t$  (см. пример 10.42, ж). Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)dx}{x(x^2+1)^2} &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2(x^2+1)} + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$



Найти интегралы:

$$10.130. \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}.$$

$$10.131. \int \frac{x^2}{(1-x)^3} dx.$$

$$10.132. \int \frac{dx}{x^3 - x^2}.$$

$$10.133. \int \frac{dx}{x^3 + x}.$$

$$10.134. \int \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

$$10.135. \int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$$

$$10.136. \int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

$$10.137. \int \frac{dx}{(x^2 - 1)(x + 2)}.$$

$$10.138. \int \frac{(x^2 + 2)dx}{(x+1)^2(x-1)}.$$

$$10.139. \int \frac{x dx}{x^2 + 3x - 4}.$$

$$10.140. \int \frac{x^2 - x}{x^2 - 6x + 10} dx.$$

$$10.141. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

$$10.142. \int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx.$$

$$10.143. \int \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

$$10.144. \int \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

$$10.145. \int \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

$$10.146. \int \frac{3x + 5}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx.$$

$$10.147. \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

$$10.148. \int \frac{dx}{(4 + x^2)^2}.$$

$$10.149. \int \frac{x^3 - 3}{x^4 + 10x^2 + 25} dx.$$

$$10.150. \int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

$$10.151. \int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}.$$

$$10.152. \int \frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)} dx.$$

$$10.153. \int \frac{dx}{x^8 + x^6}.$$

### 10.13. Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Простейшие интегралы от функций, содержащие иррациональности, являются табличными (см. (10.7), (10.12)),

(10.14)) либо сводятся к ним с использованием свойств интеграла и (или) замены переменной (см. примеры в параграфах 10.2, 10.3, 10.9, 10.10). В более сложных случаях основной подход состоит в сведении искомого интеграла к интегралу от рациональной функции (см. параграф 10.6) с помощью подходящей замены переменной (так называемой *рационализации интеграла*).

Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ ,  $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$ ,  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$  (где  $R$  — рациональная функция) находятся с помощью подстановок соответственно  $x = a \sin t$ ,  $x = a \operatorname{tg} t$ ,  $x = \frac{a}{\cos t}$  (см. пример 10.42, е, ж).

**10.154.** Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{(4 - x^2)^3}}{x^6} dx.$$

*Решение.*

$$\text{а) Пусть } x = \frac{1}{\cos t}, \text{ где } t \in [0, \pi] \text{ и } t \neq \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } dx &= \frac{\sin t \, dt}{\cos^2 t} \text{ и } \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \int \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} \frac{\cos t \sin t}{\cos^2 t} dt = \\ &= \int \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int |\operatorname{tg} t| \operatorname{tg} t \, dt. \end{aligned}$$

При сделанных предположениях  $\sin t > 0$ .

Если  $x > 0$ , т.е.  $\cos t > 0$ , то  $|\operatorname{tg} t| = \operatorname{tg} t$  и

$$\int \operatorname{tg}^2 t \, dt = \int ((1 + \operatorname{tg}^2 t) - 1) dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = \operatorname{tg} t - t + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } \cos t &= \frac{1}{x}, \text{ то } t = \arccos \frac{1}{x} \text{ и } \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\sqrt{\cos^2 t}} = \\ &= \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos \frac{1}{x} + C.$$

Если  $x < 0$ , т.е.  $\cos t < 0$ , то  $|\operatorname{tg} t| = -\operatorname{tg} t$  и аналогично получаем, что

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 1} + \arccos \frac{1}{x} + C.$$

б) Пусть  $x = 2\sin t$ . Тогда  $dx = 2\cos t \, dt$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx &= \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t} 2\cos t \, dt = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{ctg}^4 t \, dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^4 t \, d\operatorname{ctg} t = -\frac{1}{20} \operatorname{ctg}^5 t + C = \\ &= -\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5} + C. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx \quad (10.34)$$

рационализируется с помощью замены  $t = \sqrt[n]{x}$ .

Очевидно, что интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_l]{x^{m_l}}) dx$$

являются частными случаями (10.34), где  $n$  — наименьшее общее кратное чисел  $n_1, \dots, n_l$ .

Обобщением интеграла (10.34) является

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad (10.35)$$

где  $ad \neq bc$ . Для рационализации интеграла (10.35) исполь-

зуется подстановка  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

**10.155.** Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[4]{x^3}}; \quad \text{в) } \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx.$$

*Решение.*

а) Наименьшее общее кратное степеней 2 и 4 радикалов, через которые записана подынтегральная функция, равно 4, поэтому полагаем  $x = t^4$ . Тогда  $dx = 4t^3 dt$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1+t}{t^4+t^2} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right) dt = \\ &= 4 \left( \int dt + \int \frac{t \, dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} \right) \end{aligned}$$

Первый и третий интеграл — табличные, а для нахождения второго используем формулу (10.26). В результате получаем

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx &= 4t + 2\ln(t^2+1) - 4\operatorname{arctg} t + C = \\ &= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C.\end{aligned}$$

б) Наименьшее общее кратное степеней 4 и 6 радикалов, через которые записана подынтегральная функция, равно 12, поэтому полагаем  $t = x^{\frac{1}{12}}$ . Тогда  $x = t^{12}$ ,  $dx = 12t^{11} dt$  и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{12t^{11} dt}{t^{10} - t^9} = 12 \int \frac{t^2 dt}{t-1}.$$

Используя эквивалентные преобразования, сведем полученный интеграл к сумме табличных:

$$\begin{aligned}12 \int \frac{t^2 dt}{t-1} &= 12 \int \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt = 12 \int \left( t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= 12 \left( \frac{t^2}{2} + t + \int \frac{d(t-1)}{t-1} \right) = 6t^2 + 12t + 12\ln|t-1| + C.\end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной, окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} = 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} + 12\ln|\sqrt[12]{x} - 1| + C.$$

в) Данный интеграл имеет вид (10.35), поэтому полагаем  $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$ . Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{x} &= t^2, \quad x = \frac{1}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{2t dt}{(t^2-1)^2} \text{ и} \\ \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (t^2-1)^2 t \frac{-2t dt}{(t^2-1)^2} = \\ &= -2 \int t^2 dt = -\frac{2}{3} t^3 + C = -\frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} + C. \blacktriangleright\end{aligned}$$

Найти интегралы:

$$10.156. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$10.157. \int \frac{\sqrt{x} dx}{2\sqrt{x+3}}.$$

$$10.158. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$10.159. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x+1}}.$$

$$10.160. \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$$

$$10.161. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

$$10.162. \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$10.163. \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$$

$$10.164. \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx.$$

$$10.165. \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx.$$

$$10.166. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}.$$

$$10.167. \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$$

### 10.14. Интегрирование тригонометрических функций

10.168. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ .

*Решение.* Полагая  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3+5\cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left( 3 + \frac{5(1-t^2)}{1+t^2} \right)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Использование универсальной подстановки  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  при интегрировании функции вида  $R(\sin x, \cos x)$  часто

приводит к громоздким подынтегральным функциям. В частных случаях можно применять другие подстановки. Так, если функция  $R(u, v)$  обладает свойством нечетности по переменной  $u$ , т.е.  $R(-u, v) = -R(u, v)$ , то используется подстановка  $t = \cos x$ ; если, напротив,  $R(u, -v) = -R(u, v)$ , то  $t = \sin x$ . Если же функция обладает свойством четности сразу по двум переменным, т.е.  $R(-u, -v) = R(u, v)$ , то применяется подстановка  $t = \operatorname{tg} x$ , где  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

**10.169.** Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\cos^3 x}, \quad \text{б) } \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$$

*Решение.*

а) Пусть  $t = \sin x$ . Тогда  $dt = \cos x dx$  и

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов (см. параграф 10.2), найдем разложение подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} &= -\frac{1}{4} \int \frac{d(t-1)}{t-1} + \frac{1}{4} \int (t-1)^{-2} d(t-1) + \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{d(t+1)}{t+1} + \frac{1}{4} \int (t+1)^{-2} d(t+1) = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|t-1| - \frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4} \ln|t+1| - \frac{1}{4(t+1)} + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| - \frac{\sin x}{2(\sin^2 x - 1)} + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + C. \end{aligned}$$

б) Пусть  $t = \operatorname{tg} x$ , где  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . Так как  $1+t^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$ , то  $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ ; поскольку  $x = \operatorname{arctg} t$ , то  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} &= \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{3}{1+t^2}\right)} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**10.170.** Найти интеграл

$$\int \sin x \cos^2 2x dx.$$

*Решение.* Используя тригонометрическую формулу понижения степени, получаем

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos^2 2x dx &= \int \sin x \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int \sin x \cos 4x dx. \end{aligned}$$

Для нахождения второго интеграла воспользуемся формулой, преобразующей произведение в сумму:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int \sin x \cos 4x dx &= -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \int (\sin 5x - \sin 3x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{20} \int \sin 5x d(5x) - \frac{1}{12} \int \sin 3x d(3x) = \\ &= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{20} \cos 5x + \frac{1}{12} \cos 3x + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Найти интегралы:

**10.171.**  $\int \sin^3 x dx.$

**10.172.**  $\int \cos^7 x dx.$

**10.173.**  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

**10.174.**  $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

- 10.175.  $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$ .      10.176.  $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}$ .
- 10.177.  $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ .      10.178.  $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$ .
- 10.179.  $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx$ .      10.180.  $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$ .
- 10.181.  $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$ .      10.182.  $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}$ .
- 10.183.  $\int \operatorname{tg}^3 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{x} \right) dx$ .      10.184.  $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$ .
- 10.185.  $\int \sin 9x \sin x dx$ .      10.186.  $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$ .
- 10.187.  $\int \frac{\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin x \cos x} dx$ .      10.188.  $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$ .

**Контрольные задания по главе 10**  
**«Неопределенный интеграл»**

№	Вариант 10.1	Вариант 10.2	Вариант 10.3
	Найти интегралы:		
1	$\int \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} dx$	$\int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$	$\int \frac{\sqrt{1 + x^2} - x^2 - x^4}{1 + x^2} dx$
2	$\int \frac{1 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x} + x}} dx$	$\int \frac{5x - 6}{\sqrt{1 - 3x}} dx$	$\int \frac{(2 + x)\sqrt{2\ln x + x}}{x} dx$
3	$\int (2x + 3)e^{2x} dx$	$\int (x^2 + 3x + 2) \ln x dx$	$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$
4	$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$	$\int \sqrt{e^x + 1} dx$	$\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 15} dx$
5	$\int \frac{5x + 11}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} dx$	$\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 6x + 10}$	$\int x \operatorname{arctg} x dx$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} dx$	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x} dx$	$\int \frac{e^{3x} + 2e^x}{e^{2x} + e^x + 1} dx$
7	$\int x^3 \arcsin \frac{1}{x} dx$	$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$	$\int (x^2 - 3x) \sin 5x dx$



**Тест 10**

1. При каких  $a$  и  $b$  функция  $F(x) = \frac{a}{3}x^b + 2x^2 + x + 1$  является первообразной для  $f(x) = (2x+1)^2$ ?

2. При каких целых  $a, b, c$  функция  $F(x) = 2e^{3x+1}$  является первообразной для функции  $f(x) = ae^{bx+c}$ ?

3. При каких целых  $a, b, c$  функции  $F_1(x) = \frac{1}{a}(1+bx)^c$  и  $F_2(x) = 1+x-1,5x^2$  являются первообразными для одной и той же функции  $f(x)$ ?

4. Найти  $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x} dx$ .

Ответ:  $ax + b\sqrt{x} + d\ln|x| + C$ , где  $a, b, d$  — целые числа:  $a = \dots, b = \dots, d = \dots$

5. Найти  $\int \left( \frac{17-2x}{3} \right)^3 dx$ .

Ответ:  $\frac{3}{a} \left( \frac{17+bx}{3} \right)^d + C$ , где  $a, b, d$  — целые числа:  $a = \dots, b = \dots, d = \dots$

6. Найти  $\int \frac{2x+3}{4x-7} dx$ .

Ответ:  $\frac{1}{a}x + \frac{b}{d}\ln|4x-7| + C$ , где  $a, b, d$  — целые числа, дробь  $\frac{b}{d}$  — несократима,  $b > 0$ :  $a = \dots, b = \dots, d = \dots$

7. Найти  $\int xe^{x^2-3} dx$ .

Ответ:  $\frac{a}{b}e^{x^2+d}$  где  $a, b, d$  — целые числа, дробь  $\frac{a}{b}$  — несократима,  $a > 0$ :  $a = \dots, b = \dots, d = \dots$

8. Найти  $\int x^3 \ln x dx$ .

Ответ:  $\frac{1}{a}x^b + \frac{1}{d}x^4 \ln x + C$ , где  $a, b, d$  — целые числа:  
 $a = \dots, b = \dots, d = \dots$

9. Найти  $\int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$ .

Ответ:  $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x+b}{x+d} \right| + C$ , где  $a, b, d$  — целые числа,  $a > 0$ :  
 $a = \dots, b = \dots, d = \dots$

10. Найти  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{ax+b}{d} + C$ , где  $a, b, d$  — целые числа,  $a > 0$ :  
 $a = \dots, b = \dots, d = \dots$

## Глава 11

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

#### 11.1. Понятие определенного интеграла, его геометрический и экономический смысл

**Задача о площади криволинейной трапеции.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана неотрицательная функция  $y = f(x)$ . Требуется найти площадь  $S$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и осью абсцисс  $y = 0$  (рис. 11.1). (Говорят также о площади  $S$  под кривой  $y = f(x)$  на  $[a, b]$ .)

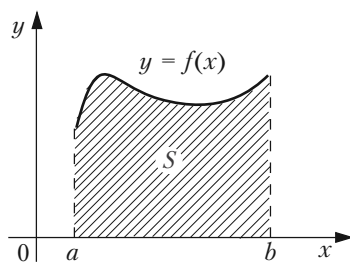


Рис. 11.1

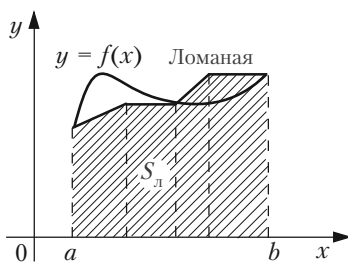


Рис. 11.2

Наметим общий подход к решению этой задачи. Введем в рассмотрение некоторую ломаную, которая расположена достаточно близко к кривой  $y = f(x)$  на  $[a, b]$  (рис. 11.2). Фигура под ломаной состоит из трапеций (прямоугольников), и ее площадь  $S_{\text{л}}$  (равная сумме площадей этих трапеций) может быть вычислена с использованием известных формул планиметрии. Поскольку ломаная выбрана

достаточно близко к кривой  $y = f(x)$ , то справедливо приближенное равенство  $S \approx S_{\text{л}}$ . Оно оказывается тем более точным, чем ближе расположена ломаная к исходной кривой. Поэтому естественно за искомую площадь  $S$  взять предел площади  $S_{\text{л}}$  под ломаной в предположении неограниченного приближения последней к заданной кривой.

Приведенные рассуждения носят качественный характер. Для того чтобы их можно было использовать на практике, необходимо уточнить в них то, что описывалось нестрого: процедура выбора ломаной и последующий предельный переход. В результате получим, в частности, понятие определенного интеграла.

**Понятие интегральной суммы.** Пусть на  $[a, b]$  задана функция  $y = f(x)$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  элементарных отрезков точками  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . На каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  разбиения выберем некоторую точку  $\xi_i$  и положим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Сумму вида

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (11.1)$$

будем называть *интегральной суммой* для функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Очевидно, что интегральная сумма (11.1) зависит как от способа разбиения  $[a, b]$  точками  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , так и от выбора точек  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  на каждом из отрезков разбиения  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Геометрический смысл интегральной суммы.** Пусть функция  $y = f(x)$  неотрицательна на  $[a, b]$ . Отдельное слагаемое  $f(\xi_i) \Delta x_i$  интегральной суммы (11.1) в этом случае

равно площади  $S_i$  прямоугольника со сторонами  $f(\xi_i)$  и  $\Delta x_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  (рис. 11.3, где  $x_1 - x_0 = \Delta x_1$ ,  $x_2 - x_1 = \Delta x_2$  и т.д.). Другими словами,  $S_i$  — это площадь прямоугольника под прямой  $y = f(\xi_i)$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ .

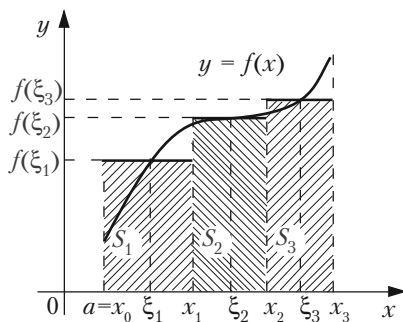


Рис. 11.3

Поэтому вся интегральная сумма (11.1) равна площади  $S_{\text{л}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n$  под ломаной, об-

разованной на каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  прямой  $y = f(\xi_i)$ , параллельной оси абсцисс (см. рис. 11.3).

**Понятие определенного интеграла.** Для избранного разбиения отрезка  $[a, b]$  на части обозначим через  $\max_i \Delta x_i$  максимальную из длин отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Определение.** Пусть предел интегральной суммы (11.1) при стремлении  $\max_i \Delta x_i$  к нулю существует, конечен и не зависит от способа выбора точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и точек  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Тогда этот предел называется **определенным интегралом от функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$** ,

обозначается  $\int_a^b f(x)dx$ , а сама функция  $y = f(x)$  называется **интегрируемой на отрезке  $[a, b]$** , т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

При этом число  $a$  называется *нижним пределом*, число  $b$  — *верхним пределом* интеграла; функция  $f(x)$  — *подынтегральной функцией*, выражение  $f(x)dx$  — *подынтегральным выражением*, а задача о нахождении  $\int_a^b f(x)dx$  — *интегрированием функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$* .

Следует заметить, что не имеет значения, какой буквой обозначена переменная интегрирования определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \dots,$$

поскольку смена обозначений такого рода никак не влияет на поведение интегральной суммы (11.1).

Несмотря на сходство в обозначениях и терминологии, определенный и неопределенный интегралы являются различными понятиями: в то время как  $\int f(x)dx$  представляет семейство функций,  $\int_a^b f(x)dx$  есть определенное число.

Во введенном определении определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  предполагается, что  $a < b$ . По определению полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \quad (11.2)$$

Принимая во внимание (11.2), для нас отныне будет не существенно, какой из пределов интегрирования больше: верхний или нижний.

Полагая в (11.2)  $b = a$ , получаем  $\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$  или  $2\int_a^a f(x)dx = 0$ , т.е.

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \quad (11.3)$$

**Геометрический смысл определенного интеграла.** Понятие определенного интеграла введено таким образом, что в случае, если функция  $y = f(x)$  неотрицательна на отрезке  $[a, b]$  (где  $a < b$ ),  $\int_a^b f(x)dx = 0$  численно равен площади  $S$  под кривой  $y = f(x)$  на  $[a, b]$  (см. рис. 11.1). Действительно, при стремлении  $\max_i \Delta x_i$  к нулю ломаная (см. рис. 11.3) неограниченно приближается к исходной кривой, и площадь под ломаной переходит в площадь под кривой. Учитывая сказанное, можно указать значения некоторых интегралов, используя известные планиметрические формулы для площадей плоских фигур. Так,

$$\int_0^1 dx = 1; \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}; \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \text{ и т.д.}$$

(Первый из интегралов — площадь квадрата со стороной единичной длины; второй — площадь прямоугольного треугольника, оба катета которого единичной длины; третий — площадь четверти круга единичного радиуса; предлагаем читателю в качестве упражнения выполнить необходимые чертежи самостоятельно.)

Заметим, что равенство (11.3) отражает геометрический смысл определенного интеграла: в случае, когда отрезок ин-

тегрирования стянут в точку, фигура под кривой стягивается в отрезок, площадь которого равна нулю, поскольку это площадь прямоугольника, длина одной из сторон которого равна нулю.

**Экономический смысл интеграла.** Пусть функция  $z = f(t)$  описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдём объем продукции  $u$ , произведенной за промежуток времени  $[0, T]$ .

Отметим, что если производительность не изменяется с течением времени ( $f(t)$  — постоянная функция), то объем продукции  $\Delta u$ , произведенной за некоторый промежуток времени  $[t, t + \Delta t]$  задается формулой  $\Delta u = f(t)\Delta t$ . В общем случае справедливо приближенное равенство  $\Delta u = f(\xi)\Delta t$ , где  $\xi \in [t, t + \Delta t]$ , которое оказывается тем более точным, чем меньше  $\Delta t$ .

Разобьём отрезок  $[0, T]$  на промежутки времени точками:  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ . Для величины объема продукции  $\Delta u_i$ , произведенной за промежуток времени  $[t_{i-1}, t_i]$ , имеем  $\Delta u_i = f(\xi_i)\Delta t_i$ , где  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$$u \approx \sum_{i=1}^n \Delta u_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i.$$

При стремлении  $\max_i \Delta t_i$  к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$u = \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i.$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем

$$u = \int_0^T f(t)dt,$$

т.е. если  $f(t)$  — *производительность труда в момент  $t$* , то  $\int_0^T f(t)dt$  — *объем выпускаемой продукции за промежуток  $[0, T]$* .

Сравнение данной задачи с задачей о площади криволинейной трапеции (см. выше) показывает, что *величина  $u$*

объема продукции, произведенной за промежуток времени  $[0, T]$ , численно равна площади под графиком функции  $z = f(t)$ , описывающей изменение производительности труда

с течением времени, на промежутке  $[0, T]$  или  $\int_0^T f(t) dt$ .

**Достаточное условие существования определенного интеграла (интегрируемости функции). Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема на этом отрезке.

Приведем пример нахождения определенного интеграла на основании определения.

**Пример 11.1.** Вычислить  $\int_0^1 x^2 dx$ .

*Решение.* Запишем выражение для интегральной суммы, предполагая, что все отрезки  $[x_{i-1}, x_i]$  разбиения имеют одинаковую длину  $\Delta x_i$ , равную  $\frac{1}{n}$  (где  $n$  — число отрезков разбиения), причем для каждого из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  разбиения точка  $\xi_i$  совпадает с правым концом этого отрезка, т.е.  $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . (В силу интегрируемости функции  $y = x^2$ , выбор такого «специального» способа разбиения отрезка интегрирования на части и точек  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  на отрезках разбиения не повлияет на искомый предел интегральной суммы.) Тогда

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$$

Известно, что сумма квадратов чисел натурального ряда

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$



Анализ приведенного примера показывает, что успешное решение поставленной задачи оказалось возможным благодаря тому, что интегральную сумму удалось привести к виду, удобному для нахождения предела. Однако такая возможность существует далеко не всегда, поэтому долгое время задача интегрирования конкретных функций оставалась чрезвычайно сложной. Установление связи между определенным и неопределенным интегралами позволило разработать эффективный метод вычисления определенного интеграла, который будет рассмотрен в параграфе 11.4.

## 11.2. Свойства определенного интеграла

В данном параграфе будем предполагать интегрируемость всех рассматриваемых функций на выделенных отрезках интегрирования.

Рассмотрим сначала свойства определенного интеграла, которые имеют аналоги в случае неопределенного интеграла.

**1.** *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.*

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad (11.4)$$

где  $\alpha$  — некоторое число.

□ Пусть фиксированы разбиение отрезка  $[a, b]$  и выбор точек  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  на каждом из отрезков разбиения. Используя ассоциативный (распределительный) закон умножения чисел, имеем

$$\sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Перейдем к пределу в левой и правой частях последнего равенства при  $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i) \Delta x_i &= \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \alpha \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

По определению определенного интеграла первый из пределов равен левой части равенства (11.4), последний — правой. ■

**2.** *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \quad (11.5)$$

Очевидно, что это свойство остается справедливым для любого конечного числа слагаемых.

Доказательство свойства 2 аналогично доказательству свойства 1.

Перейдем теперь к свойствам определенного интеграла, которые не имеют аналогов для случая неопределенного интеграла.

**3.** *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т.е. при любых  $a, b, c$*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (11.6)$$

Рассмотрим геометрический смысл свойства 3. Пусть  $a < c < b$  и функция  $f(x)$  неотрицательна на  $[a, b]$ . Согласно геометрическому свойству определенного интеграла

$$\int_a^c f(x) dx = S_1, \quad \int_c^b f(x) dx = S_2 \quad (\text{рис. 11.4}), \quad \int_a^b f(x) dx = S, \quad \text{где}$$

$S$  — площадь под кривой  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  (площадь всей заштрихованной фигуры на рис. 11.4). Тогда при сделанных предположениях равенство (11.6) утверждает наличие следующего (очевидного) соотношения между площадями:  $S = S_1 + S_2$ .

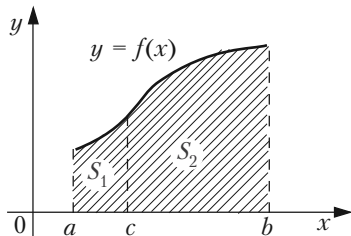


Рис. 11.4

Пусть  $a < b < c$  и функция  $y = f(x)$  неотрицательна на отрезке  $[a, c]$ . Применяя равенство (11.2) ко второму интегралу из правой части (11.6), запишем его так, чтобы верхний предел был больше ниж-

него (для остальных интегралов (11.6) верхний предел больше нижнего по предположению):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx. \quad (11.7)$$

Тогда равенство (11.7) утверждает наличие следующего (очевидного) соотношения между площадями криволинейных трапеций (рис. 11.5):  $S_1 = S - S_2$ , где  $S$  — площадь под кривой  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, c]$ .

4. Если на отрезке  $[a, b]$   $f(x) \leq g(x)$ , то и

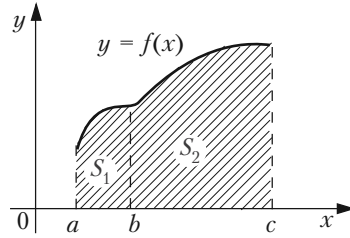


Рис. 11.5

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \quad (11.8)$$

т.е. обе части неравенства можно почленно интегрировать.

□ Пусть фиксированы разбиение отрезка  $[a, b]$  и выбор точек  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  на каждом из отрезков разбиения. Тогда из неравенства  $f(x) \leq g(x)$  вытекает аналогичное неравенство для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при  $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ , получаем неравенство (11.8). ■

**Следствие.** Пусть на отрезке  $[a, b]$   $m \leq f(x) \leq M$ , где  $m$  и  $M$  — некоторые числа. Тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \quad (11.9)$$

□ По свойству 4 имеем

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Остается заметить, что по свойству 1 и геометрическому смыслу определенного интеграла  $\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a)$  и аналогично  $\int_a^b M dx = M(b-a)$ . ■

**5. Теорема о среднем.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то найдется такое значение  $\xi \in [a, b]$ , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \quad (11.10)$$

□ По свойству функции, непрерывной на отрезке, для произвольного значения  $x$  из  $[a, b]$  верно, что  $m \leq f(x) \leq M$ , где  $m$  и  $M$  — наименьшее и наибольшее значения функции на  $[a, b]$ . Тогда согласно неравенству (11.9) имеем

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Но функция, непрерывная на отрезке, принимает любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значениями, поэтому, в частности, найдется такое число  $\xi \in [a, b]$ , что

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi). \quad \blacksquare$$

Пусть  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Тогда теорема о среднем утверждает: найдется такая точка  $\xi$  из отрезка  $[a, b]$ , что площадь под кривой  $y = f(x)$  на  $[a, b]$  равна площади прямоугольника со

сторонами  $f(\xi)$  и  $(b-a)$  (см. рис. 11.6 и геометрический смысл определенного интеграла). Еще одно возможное объяснение геометрического смысла теоремы о среднем см. в параграфе 11.6.

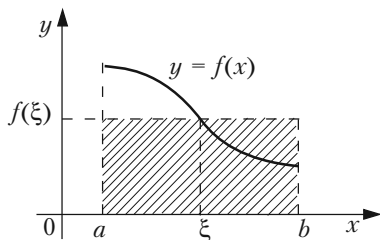


Рис. 11.6

### 11.3. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Для построения новых функций, из известных ранее, применялись четыре арифметических действия и нахождение функции от функции (см. гл. 5). В данном параграфе рассмотрим принципиально иной способ построения новых функций из известных.

Если функция  $y = f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то, очевидно, она интегрируема также на произвольном отрезке  $[a, x]$ , вложенном в  $[a, b]$ .

Пусть по определению

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt, \quad (11.11)$$

где  $x \in [a, b]$ , а функция  $\Phi(x)$  называется *интегралом с переменным верхним пределом*<sup>1</sup>.

Пусть  $f(t) \geq 0$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда (см. параграф 11.1) значение функции  $\Phi(x)$  в точке  $x$  равно площади  $S(x)$  под кривой  $y = f(t)$  на отрезке  $[a, x]$  (рис. 11.7). (В этом состоит геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом.)

Последнее замечание позволяет, в частности, по-новому посмотреть на некоторые известные функции. Напри-

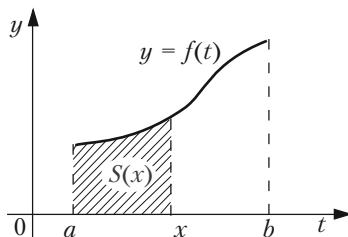


Рис. 11.7

мер<sup>2</sup>, функция  $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ , где

$x > 1$ , в точке  $x$  численно равна площади  $S(x)$  под гиперболой  $y = \frac{1}{t}$  на отрезке  $[1, x]$  (рис. 11.8).

<sup>1</sup> В правую часть определения (11.11) переменная  $x$  входит трижды, но смысл этих «вхождений» неодинаков. Верхний предел интегрирования — это аргумент функции  $\Phi(x)$ , но переменная в записи подынтегрального выражения является переменной интегрирования, которую (см. параграф 11.1) можно обозначить другой буквой, например  $t$ .

<sup>2</sup> Здесь использована формула Ньютона — Лейбница (см. параграф 11.4).

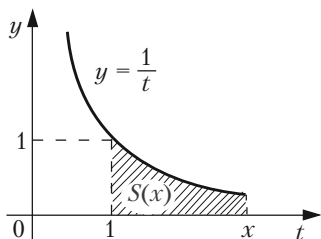


Рис. 11.8

Рассмотрим теперь свойства функции  $\Phi(x)$  (интеграла с переменным верхним пределом; см. (11.11)).

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $\Phi(x)$  также непрерывна на  $[a, b]$ .

□ Пусть  $\Delta x$  таково, что  $x + \Delta x$  принадлежит отрезку  $[a, b]$ .

Согласно формулам (11.1) и (11.6) имеем

$$\begin{aligned}\Phi(x + \Delta x) &= \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = \\ &= \Phi(x) + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt.\end{aligned}$$

По теореме о среднем (см. параграф 11.2) найдется такое значение  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ , что  $\int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x$  и, следовательно,

$$\Phi(x + \Delta x) = \Phi(x) + f(\xi) \Delta x. \quad (11.12)$$

Поскольку точка  $\xi$  принадлежит, в частности, отрезку  $[a, b]$ , то  $m \leq f(\xi) \leq M$ , где  $m$  и  $M$  – наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ . (При изменении  $\Delta x$  значение  $f(\xi)$ , возможно, меняется, но в любом случае функция остается ограниченной.)

Переходя в равенстве (11.12) к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  и используя теорему о пределах, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Phi(x + \Delta x) = \Phi(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) \Delta x = \Phi(x). \blacksquare$$

Теперь докажем, что производная от интеграла с переменным верхним пределом по верхнему пределу равна подынтегральной функции. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда в каждой точке  $x$  отрезка  $[a, b]$  производная

функции  $\Phi(x)$  по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции  $f(x)$ , т.е.

$$\Phi'(x) = \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x). \quad (11.13)$$

□ Воспользуемся равенством (11.12) из доказательства теоремы 1. Тогда

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi), \quad (11.14)$$

где  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ .

Переходя в (11.14) к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  и учитывая, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$  (в силу непрерывности функции  $f(x)$ ), приходим к формуле (11.13). ■

Рассмотрим геометрический смысл доказательства теоремы 2.

Пусть  $f(t) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Согласно геометрическому смыслу интеграла с переменным верхним пределом  $\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = S_{ABEF} - S_{ABCD} = S_{DCEF}$  (рис. 11.9), т.е. приращение функции  $\Phi(x)$  равно приращению площади под кривой  $y = f(t)$  при изменении абсциссы от  $x$  до  $x + \Delta x$ . По теореме о среднем найдется такое значение  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ , что площадь  $S_{DCEF}$  криволинейной трапеции будет равна площади  $S_{DGHF}$  прямоугольника со сторонами  $f(\xi)$  и  $\Delta x$ . В результате  $\Delta\Phi = S_{DGHF} = f(\xi)\Delta x$  и, следовательно, приходим к равенству (11.14). При  $\Delta x \rightarrow 0$  отрезок  $[x, x + \Delta x]$  стягивается в точку, и  $f(\xi)$  переходит в  $f(x)$ , а предел левой части формулы (11.14) равен  $\Phi'(x)$ .

**Следствие.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то для этой функции существует первообразная на отрезке  $[a, b]$ .

Действительно, примером первообразной для  $f(x)$  является функция  $\Phi(x)$ , заданная формулой (11.11).

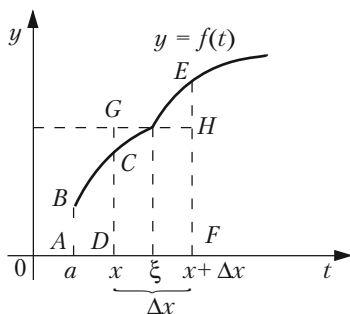


Рис. 11.9

**Замечание.** Четыре арифметических действия и нахождение функции от функции, примененные к элементарным функциям (конечное число раз), вновь приводят к функциям элементарным. Что же касается интеграла с переменным верхним пределом (11.11), то в этом случае элементарность функции  $y = f(x)$ , вообще говоря, не обеспечивает элементарности функции  $\Phi(x)$ . Например, функции  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ ,  $\int_e^x \frac{dt}{\ln t}$  и т.п. (функции, связанные с неберущимися интегралами; см. параграф 10.9) неэлементарны, так как они являются первообразными для функций  $e^{-x^2}$ ,  $\frac{1}{\ln x}$ , которые не имеют первообразных в классе элементарных функций.

#### 11.4. Формула Ньютона — Лейбница

Свойства интеграла с переменным верхним пределом, рассмотренные выше, позволяют получить основную формулу интегрального исчисления, традиционно связываемую с именами И. Ньютона и Г. В. Лейбница<sup>1</sup>.

**Теорема.** Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $F(x)$  — любая первообразная для  $f(x)$  на  $[a, b]$ . Тогда определенный интеграл от функции  $f(x)$  на  $[a, b]$  равен приращению первообразной  $F(x)$  на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (11.15)$$

□ Пусть  $F(x)$  — некоторая первообразная для функции  $f(x)$ . Но по теореме 2 (см. параграф 11.3) функция  $\Phi(x)$ , заданная формулой (11.11), также является первообразной для функции  $f(x)$ , и по теореме из параграфа 10.1 найдется такое число  $C$ , что  $F(x) = \Phi(x) + C$ .

Тогда для приращения первообразной имеем

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646—1716) — немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед.



(см. определение (11.11) функции  $\Phi(x)$ ). Для завершения доказательства достаточно заметить, что согласно формуле (11.3)

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \blacksquare$$

Вычисление определенных интегралов с использованием формулы Ньютона — Лейбница (11.5) осуществляется в два шага. На первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, получают некоторую первообразную  $F(x)$  для подынтегральной функции  $f(x)$ , а на втором применяется собственно формула Ньютона — Лейбница, т.е. вычисляется приращение первообразной, равное искомому интегралу. В связи с этим введем обозначение для приращения первообразной, которое удобно использовать при записи решений. По определению положим

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (11.16)$$

Следует отметить, что при применении формулы Ньютона — Лейбница можно использовать любую первообразную  $F(x)$  для подынтегральной функции  $f(x)$ , например, имеющую наиболее простой вид при  $C = 0$ .

**Пример 11.2.** Вычислить: а)  $\int_0^1 x^2 dx$ ; б)  $\int_1^2 2^{3x-4} dx$ .

*Решение.*

а) Произвольная первообразная для функции  $f(x) = x^2$  имеет вид  $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ . Для нахождения интеграла по формуле Ньютона — Лейбница возьмем такую первообразную, у которой  $C = 0$  (см. замечание выше). Тогда

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

что совпадает, разумеется, с результатом, полученным в примере 11.1.

б) Первообразную подынтегральной функции найдем, используя формулу (10.9). Применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\begin{aligned}\int_1^2 2^{3x-4} dx &= \left( \frac{1}{3\ln 2} 2^{3x-4} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2} \left( 2^{3x-4} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{3\ln 2} \left( 4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6\ln 2}. \blacktriangleright\end{aligned}$$

При нахождении интеграла в примере 11.2, б было использовано свойство приращения первообразной

$$(\alpha F(x)) \Big|_a^b = \alpha \left( F(x) \Big|_a^b \right), \quad (11.17)$$

где  $\alpha$  — некоторое число.

Заметим, что введенное ранее определение (11.2) и его следствие (11.3) согласованы с формулой Ньютона — Лейбница. Действительно,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$$

и

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Таким образом, и при применении формулы Ньютона — Лейбница несущественно, какой из пределов интегрирования больше: верхний или нижний.

### 11.5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

При вычислении определенных интегралов с использованием формулы Ньютона — Лейбница предпочтительно жестко не разграничивать этапы решения задачи (нахождение первообразной подынтегральной функции и вычисления ее приращения). Такой подход, использующий, в частности, формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла, обычно позволяет упростить запись решения.

**Теорема 1.** Пусть функция  $\varphi(t)$  имеет непрерывную производную на отрезке  $[\alpha, \beta]$ ,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$  и функция  $f(x)$  непрерывна в каждой точке  $x$  вида  $x = \varphi(t)$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Тогда справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (11.18)$$

Формулу (11.18) называют *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

□ Пусть  $F(x)$  и  $\Phi(t)$  — некоторые первообразные для функций  $f(x)$  и  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ . В гл. 10 было доказано, что  $F(\varphi(t))$  также является первообразной для функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ . Тогда по следствию из теоремы Лагранжа найдется такое число  $C$ , что  $\Phi(t) = F(\varphi(t)) + C$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ . Следовательно,

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = (F(\varphi(\beta)) + C) - (F(\varphi(\alpha)) + C) = F(b) - F(a).$$

Но по формуле Ньютона — Лейбница  $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$  совпадает с правой частью равенства (11.18), а  $F(b) - F(a)$  — с левой частью (11.18). ■

Как и в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному (табличным). При этом в отличие от неопределенного интеграла здесь нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования. Достаточно лишь найти пределы интегрирования  $\alpha$  и  $\beta$  по новой переменной  $t$  как решение относительно переменной  $t$  уравнений  $\varphi(t) = a$  и  $\varphi(t) = b$ . На практике, выполняя замену переменной, часто начинают с того, что указывают выражение новой переменной  $t = \psi(x)$  через старую. В этом случае нахождение пределов интегрирования по переменной  $t$  упрощается:  $\alpha = \psi(a)$ ,  $\beta = \psi(b)$ .

**Пример 11.3.** Вычислить  $\int_0^1 x(2-x^2)^5 dx$ .

*Решение.* Пусть  $t = 2 - x^2$ . Тогда

$$dt = d(2 - x^2) = (2 - x^2)' dx = -2x dx \text{ и } x dx = -\frac{1}{2} dt. \text{ Если } x = 0,$$

то  $t = 2 - 0^2 = 2$ ; если  $x = 1$ , то  $t = 2 - 1^2 = 1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(2-x^2)^5 dx &= \int_2^1 t^5 \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int_2^1 t^5 dt = -\frac{1}{2} \left( \frac{t^6}{6} \Big|_2^1 \right) = \\ &= -\frac{1}{12} \left( t^6 \Big|_2^1 \right) = -\frac{1}{12} (1-2^6) = \frac{21}{4}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь, как выполняется интегрирование по частям в определенном интеграле.

**Теорема 2.** Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  имеют непрерывные производные на отрезке  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad (11.19)$$

где  $uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$ .

Формула (11.19) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла*.

□ Поскольку  $(uv)' = u'v + uv'$ , то функция  $uv$  является первообразной для функции  $u'v + uv'$ .

Тогда по формуле Ньютона–Лейбница и свойству (11.5) получаем

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b (u'v + uv') dx = \int_a^b v u' dx + \int_a^b u v' dx,$$

что равносильно формуле (11.19), поскольку по определению дифференциала  $u'(x) dx = du$  и  $v'(x) dx = dv$ .

**Пример 11.4.** Вычислить  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ .

*Решение.* Пусть  $u = \ln(1+x)$ ,  $dv = dx$ . Тогда  $du = d(\ln(1+x)) = (\ln(1+x))' dx = \frac{dx}{1+x}$  и  $v = \int dv = \int dx = x$  (см. гл. 10).

Применяя формулу (11.19), получаем

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{dx}{1+x}.$$

Для нахождения полученного интеграла положим  $1 + x = t$ . Тогда  $dx = dt$ ,  $x = t - 1$ . Если  $x = 0$ , то  $t = 1$ ; если  $x = 1$ , то  $t = 2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_1^2 \frac{t-1}{t} dt = \ln 2 - \int_1^2 dt + \int_1^2 \frac{dt}{t} = \\ &= \ln 2 - t \Big|_1^2 + \ln |t| \Big|_1^2 = \ln 2 - (2-1) + \ln 2 - \ln 1 = \ln 4 - 1. \blacktriangleright \end{aligned}$$

## 11.6. Геометрические приложения определенного интеграла

**Вычисление площадей плоских фигур. 1.** Пусть функция  $y = f(x)$  неотрицательна и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла (см. параграф 11.1) площадь  $S$  под кривой  $y = f(x)$  на  $[a, b]$  (см. рис. 11.1) численно равна определенному интегралу  $\int_a^b f(x) dx$ , т.е.

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

**Пример 11.5.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = \sqrt{y}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 4$ .

*Решение.* Из рис. 11.10 следует, что искомая площадь  $S$  криволинейного треугольника  $OAB$  равна разности двух площадей:

$$S = S_{OABC} - S_{OBC},$$

каждая из которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла. Решая систе-

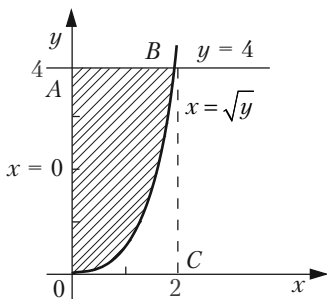


Рис. 11.10

му  $\begin{cases} y = 4, \\ x = \sqrt{y}, \end{cases}$  получаем, что точка  $B$  пересечения прямой  $y = 4$

и кривой  $x = \sqrt{y}$  имеет координаты  $(2; 4)$ . Тогда

$$S_{OABC} = \int_0^2 4 dx = 4 \int_0^2 dx = 4x \Big|_0^2 = 8; \quad S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Окончательно } S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Отметим, что данная задача может быть также решена другим способом. Сделаем сначала некоторые замечания общего характера.

По определению определенного интеграла

$$\int_c^d \varphi(y) dy = \lim_{\max_i \Delta y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \Delta y_i.$$

Это равенство можно понимать так, что при построении интегральной суммы разбиению подвергается отрезок  $[c, d]$  оси ординат. Соответственно, точки  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — это ординаты, фиксированные на каждом из отрезков разбиения. В связи с этим, если  $x = \varphi(y) \geq 0$  на  $[c, d]$ , то интеграл  $\int_c^d \varphi(y) dy$  численно равен площади  $S$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $x = \varphi(y)$  и прямыми  $x = 0, y = c, y = d$  (рис. 11.11).

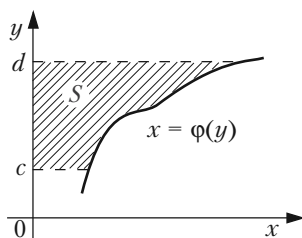


Рис. 11.11

(Другими словами, в данном случае площадь вычисляется посредством проецирования криволинейной трапеции на ось ординат.) Теперь, возвращаясь к задаче данного примера, можем записать

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{2}{3} (4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) = \frac{16}{3} \text{ (ед}^2\text{)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

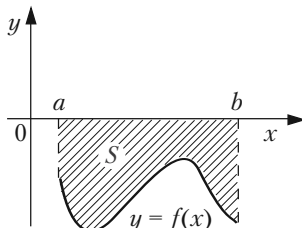


Рис. 11.12

2. Пусть функция  $y = f(x)$  неположительна и непрерывна на  $[a, b]$  (рис. 11.12). Выясним, какая связь в этом случае существует между площадью  $S$  криволиней-

ной трапеции над кривой  $y = f(x)$

на  $[a, b]$  и интегралом  $\int_a^b f(x)dx$ .

Если кривую  $y = f(x)$  отразить относительно оси абсцисс, то получим кривую с уравнением  $y = -f(x)$ . Функция  $y = -f(x)$  уже неотрицательна на  $[a, b]$ , а площадь под этой кривой на  $[a, b]$  из соображений симметрии равна площади  $S$  (рис. 11.13). Тогда

$$S = \int_a^b (-f(x))dx, \text{ т.е. } S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, если функция  $y = f(x)$  неположительна на  $[a, b]$ , то площадь  $S$  над кривой  $y = f(x)$  на  $[a, b]$  отлича-

ется знаком от определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$ .

**Пример 11.6.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = -x^2$ ,  $y = x - 2$ ,  $y = 0$ .

*Решение.* Из рис. 11.14 следует, что искомая площадь  $S$  криволинейного треугольника  $OAB$  может рассматриваться как площадь над кривой  $OAB$  на отрезке  $[0; 2]$ . Однако указанная кривая (ломаная) не задается одним уравнением. Поэтому для нахождения  $S = S_{OAB}$  разобьем криволинейный треугольник  $OAB$  на части, проецируя точку  $A$  излома на ось абсцисс. Тогда  $S = S_{OAC} + S_{ABC}$  (см. рис. 11.14). Абсциссы точек  $O, A, B$  задают пределы интегрирования. (Проверку того, что координаты точек  $O, A, B$  равны соответственно  $(0; 0)$ ,  $(1; -1)$   $(2; 0)$ , оставляем читателю в качестве упражнения.)

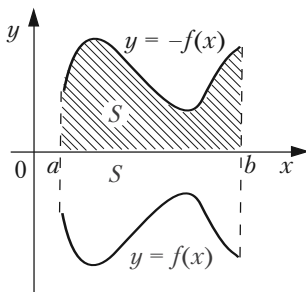


Рис. 11.13

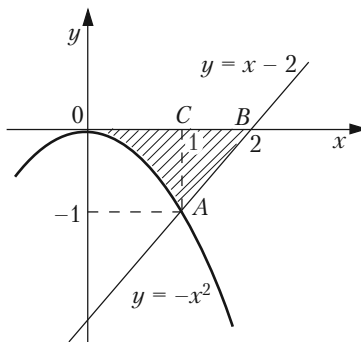


Рис. 11.14

$$S_{OAC} = -\int_0^1 (-x^2) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$S_{ABC} = -\int_1^2 (x-2) dx = \left( -\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Окончательно  $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$  (ед<sup>2</sup>). ►

**3.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x)$  общего вида. Предположим также, что исходный отрезок можно разбить точками на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция  $y = f(x)$  будет знакопостоянна или равна нулю. Выясним, какая в данном случае существует связь между определенным интегралом

$\int_a^b f(x) dx$  и площадями образовавшихся криволинейных трапеций. В качестве примера рассмотрим функцию, изоб-

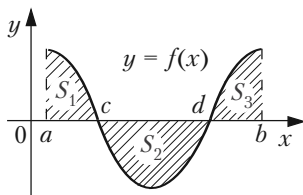


Рис. 11.15

раженную на рис. 11.15. Площадь заштрихованной фигуры  $S = S_1 + S_2 + S_3$ , т.е. равна алгебраической сумме соответствующих определенных интегралов:

$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx.$$

Сделанные замечания позволяют дать еще одну геометрическую интерпретацию теоремы о среднем (см. параграф 11.2). Равенство (11.10) можно переписать в виде

$$\int_a^b (f(x) - f(\xi)) dx = 0,$$

т.е. теорема о среднем утверждает, что найдется такая точка  $\xi \in [a, b]$ , что после сдвига исходной кривой  $y = f(x)$  вдоль оси ординат на величину  $f(\xi)$  для полученной кривой  $y = f(x) - f(\xi)$  площади частей криволинейной трапеции, расположенных выше и ниже оси  $Ox$ , равны (например, на рис. 11.16  $S_1 = S_2$ ).

**4.** Приведем формулу, применение которой часто упрощает решение задач на вычисление площадей плоских фигур.



**Теорема.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы непрерывные функции  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  такие, что  $f_2(x) \geq f_1(x)$ . Тогда площадь  $S$  фигуры, заключенной между кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , на отрезке  $[a, b]$  вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (11.21)$$

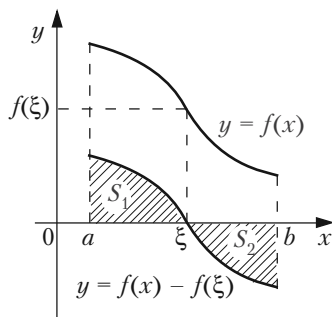


Рис. 11.16

Проиллюстрируем теорему графически (рис. 11.17).

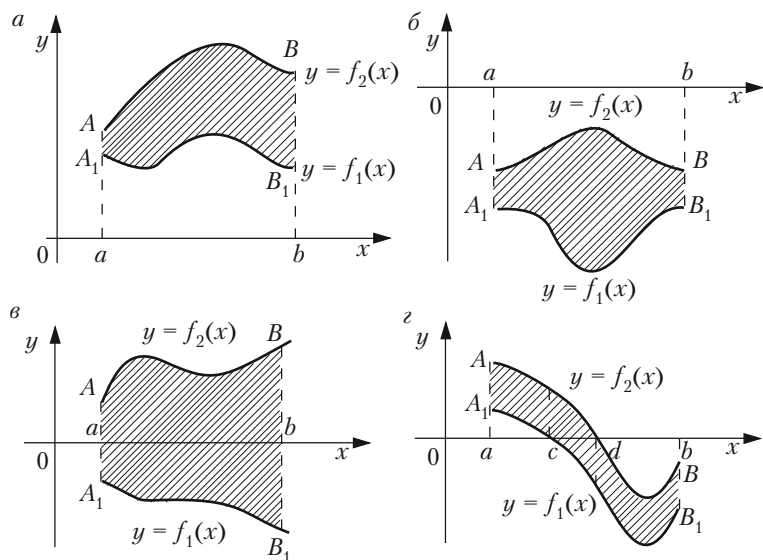


Рис. 11.17

Возможны несколько случаев расположения кривых на отрезке  $[a, b]$ :

а)  $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$  (рис. 11.17, а), при этом

$$S = S_{aABb} - S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx,$$

откуда следует формула (11.21);

б)  $0 \geq f_2(x) \geq f_1(x)$  (рис. 11.17, б), при этом

$$S = S_{aA_1B_1b} - S_{aABb} = -\int_a^b f_1(x) dx - \left( -\int_a^b f_2(x) dx \right),$$

откуда следует формула (11.21);

в)  $f_2(x) \geq f_1(x)$ ,  $f_2(x) \geq 0$ ,  $f_1(x) \leq 0$  (рис. 11.17, в), при этом

$$S = S_{aABb} + S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f_2(x) dx + \left( -\int_a^b f_1(x) dx \right),$$

откуда следует формула (11.21);

г) общий случай (рис. 11.17, г) сводится к частным случаям, рассмотренным выше, если разбить отрезок  $[a, b]$  на отдельные отрезки  $[a, c]$ ,  $[c, d]$ ,  $[d, b]$ .

**Пример 11.7.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 2$ ,  $y = x$  (рис. 11.18).

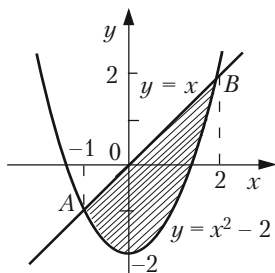


Рис. 11.18

*Решение.* Найдем точки пересечения параболы  $y = x^2 - 2$  и прямой  $y = x$ . Решив систему этих уравнений, получим  $A(-1; -1)$  и  $B(2; 2)$ . На отрезке  $[-1, 2]$   $x \geq x^2 - 2$ .

Воспользуемся формулой (11.21), полагая  $f_2(x) = x$ ,  $f_1(x) = x^2 - 2$ . Абсциссы точек  $A$  и  $B$  пересечения рассматриваемых линий зададут пределы интегрирования:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x - (x^2 - 2)) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^2 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^2 + 2x \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{2}(4 - (-1)^2) - \frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) + 2(2 - (-1)) = 4,5 \text{ (ед.}^2\text{)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**5.** Если верхняя ограничивающая линия фигуры (см. рис. 11.1) задана параметрически:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , то площадь  $S$  этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (11.22)$$

**Пример 11.8.** Найти площадь фигуры, ограниченной осью  $Ox$  и циклоидой  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  (рис. 11.19).

*Решение.* Используя формулу (11.22), получаем

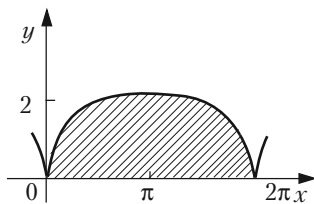


Рис. 11.19

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \\ &= \left( \frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi \approx 9,4 \text{ (ед.}^2\text{)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Вычисление объемов тел вращения.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная знакопостоянная функция  $y = f(x)$ . Необходимо найти объем  $V_x$  тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 11.20).

Для решения задачи применим тот же подход, который был использован выше для нахождения площади криволинейной трапеции. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на элементарные отрезки точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  и на каждом из отрезков разбиения  $[x_{i-1}, x_i]$  некоторым образом выберем точку  $\xi_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда некоторое приближение для искомого объема даст следующая сумма:

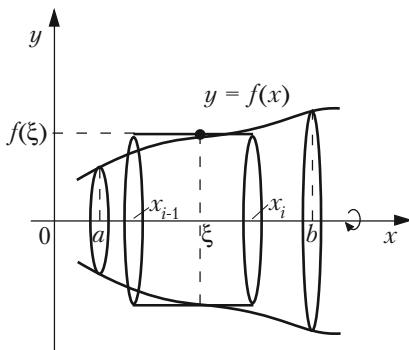


Рис. 11.20

$$\sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i, \quad (11.23)$$

$i$ -е слагаемое которой ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — это объем цилиндра с высотой  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  и радиусом основания  $f(\xi_i)$  (см. рис. 11.20). Очевидно, что приближение для искомого объема  $V_x$  будет тем лучше, чем меньше длина отрезков разбиения  $\Delta x_i$ , поэтому за искомым объемом  $V_x$  естественно взять следующий предел:

$$V_x = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i, \quad (11.24)$$

где  $\max_i \Delta x_i$  — максимальная из длин отрезков разбиения.

Но выражение, стоящее в правой части (11.24), не что иное, как предел интегральной суммы для функции  $\varphi(x) = \pi f^2(x)$ , поэтому (см. определение определенного интеграла и формулу (11.4)) окончательно получаем

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (11.25)$$

**Пример 11.9.** Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями  $y = e^{-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  вокруг оси  $Ox$  (рис. 11.21).

*Решение.* По формуле (11.25) искомый объем

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \pi \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right) \approx 1,36 \text{ (ед.}^3\text{)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Формально заменяя в формуле (11.25) переменную  $x$  на  $y$ , получаем формулу для вычисления объема  $V_y$  тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси ординат:

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \quad (11.26)$$

(на рис. 11.22 — вращаемая криволинейная трапеция заштрихована).

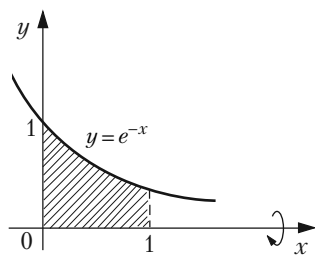


Рис. 11.21

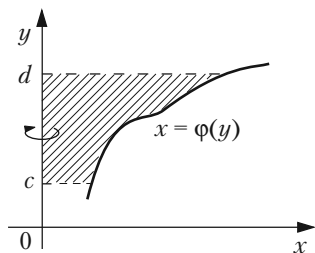


Рис. 11.22

**Пример 11.10.** Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ .

*Решение.* Проецируя вращаемую фигуру на ось ординат (рис. 11.23), убеждаемся, что искомый объем  $V$  равен разности двух объемов: объема  $V_{y1}$ , полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями  $x = \sqrt[3]{y}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ , и объема  $V_{y2}$ , который образуется от вращения фигуры, ограниченной линиями  $x = \sqrt{y}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ . (С учетом предстоящего применения формулы (11.26) уравнения кривых записаны в виде  $x = \varphi(y)$ , предполагающем переменную  $y$  независимой.) Применяя формулу (11.26), получаем

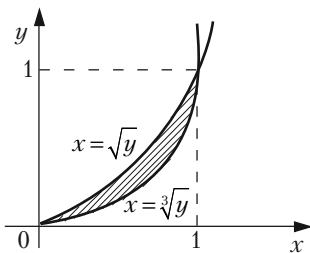


Рис. 11.23

$$V_{y1} = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{5}\pi;$$

$$V_{y2} = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно имеем

$$V = V_{y1} - V_{y2} = \frac{3}{5}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0,1\pi \text{ (ед.}^3\text{)}. \blacktriangleright$$

**Вычисление длины дуги кривой.** Длина  $s$  дуги кривой  $y = f(x)$ , заключенной между точками с абсциссами  $x = a$  и  $x = b$ , определяется по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx. \quad (11.27)$$

**Пример 11.11.** Найти длину дуги полукубической параболы  $y^2 = x^3$  от начала координат до точки с координатами  $\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ .

*Решение.* Указанный участок кривой расположен в первой четверти и задается уравнением  $y = x^{\frac{3}{2}}$ . Так как в этом

случае  $f'(x) = 1,5x^{\frac{1}{2}}$ , то, применяя формулу (11.27), получаем

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{4/3} \sqrt{1+(f')^2} dx = \int_0^{4/3} \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left( 1+\frac{9}{4}x \right)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{4/3} = \\ &= \frac{8}{27} \left( 4^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{56}{27} \text{ (ед.)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Вычисление площади поверхности вращения.** Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  кривой  $y = f(x)$ , заключенной между точками с абсциссами  $x = a$  и  $x = b$ , определяется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b f \sqrt{1+(f')^2} dx. \quad (11.28)$$

**Пример 11.12.** Найти площадь поверхности, образованной вращением циклоиды  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  при  $t \in [0; 2\pi]$  (см. рис. 11.19) вокруг оси  $Ox$ .

*Решение.* Для получения формулы площади поверхности вращения при параметрическом задании кривой достаточно произвести соответствующую замену переменной в исходной формуле (11.28). Более точно, если для кривой  $y = f(x)$ , где  $x \in [a, b]$ , имеем  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  и  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , то

$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Полагая теперь  $\varphi(t) = t - \sin t$ ,  $\psi(t) = 1 - \cos t$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2\pi$ , получаем выражение для искомой площади поверхности

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) 2 \sin \frac{t}{2} dt = -16\pi \int_0^{2\pi} \left( 1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right) d \cos \frac{t}{2} = \\ &= -16\pi \left( \cos \frac{t}{2} \bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \bigg|_0^{2\pi} \right) = \frac{64\pi}{3} \approx 67 \text{ (ед.)}^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

## 11.7. Несобственные интегралы

В предыдущих параграфах мы рассматривали интегралы от функций, интегрируемых (и, следовательно, ограниченных) на конечных отрезках интегрирования. На практике возникает необходимость обобщения этих понятий на случаи, когда либо один из концов (или оба) отрезка интегрирования удален в бесконечность, либо функция не ограничена на отрезке интегрирования.

**Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена и интегрируема на произвольном отрезке  $[a, t]$ , т.е. функция  $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$  определена для произвольного  $t \geq a$ .

**Определение.** Несобственным интегралом  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  от функции  $f(x)$  на полуинтервале  $[a, +\infty)$  называется предел функции  $\Phi(t)$  при  $t$ , стремящемся к  $+\infty$ , т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx. \quad (11.29)$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (11.29), существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся* (к данному пределу), в противном случае — *расходящимся*.

По аналогии с теорией числовых рядов (см. гл. 13) при работе с несобственными интегралами обычно выделяют следующие две задачи:

- а) исследование вопроса о сходимости заданного несобственного интеграла;
- б) вычисление значения интеграла в случае, если последний сходится.

В некоторых случаях решения этих двух задач удастся объединить.

Использование несобственных интегралов позволяет придать смысл такому понятию, как *площадь полубесконечной (бесконечной) фигуры* (см. примеры ниже).

**Пример 11.15.** Вычислить  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ .

Решение. По определению

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2}.$$

Для нахождения интеграла, стоящего под знаком предела, воспользуемся формулой Ньютона — Лейбница:

$$\int_1^t x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{t} \right) = 1,$$

т.е. искомый несобственный интеграл сходится к 1.

Аналогично, используя формулу Ньютона — Лейбница, можно убедиться, что  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$  является сходящимся к  $\frac{1}{m-1}$ ,

если  $m > 1$ , и расходящимся, если  $m \leq 1$ . Геометрический смысл этого результата состоит в том, что среди всех кривых вида  $y = \frac{1}{x^m}$  гипербола  $y = \frac{1}{x}$  является своеобразным «порогом»: те кривые данного вида, которые на полуинтервале  $[1; +\infty)$  лежат ниже

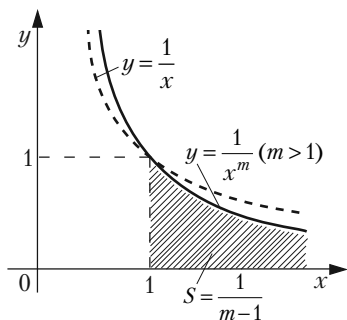


Рис. 11.24

нее, ограничивают полубесконечную фигуру конечной площади; если же кривая лежит выше или совпадает с гиперболой  $y = \frac{1}{x}$ , то соответствующая фигура имеет бесконечную площадь (рис. 11.24). ►

По аналогии с формулой (11.29) определяется *несобственный интеграл на полуинтервале*  $(-\infty, b]$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx. \quad (11.30)$$



Определение сходимости интеграла  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  аналогично приведенному выше.

Введем понятие несобственного интеграла на интервале  $(-\infty, +\infty)$ . Пусть для некоторого числа  $a$  несобственные интегралы  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  и  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходятся. Тогда положим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad (11.31)$$

при этом интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  называется *сходящимся*. Если хотя бы один из интегралов, входящих в правую часть формулы (11.31), расходится, то несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  называется *расходящимся*. (Можно доказать, что введенное определение не зависит от выбора числа  $a$ .)

**Пример 11.14.** Вычислить  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ .

*Решение.* Исследуем на сходимость интегралы  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$  и  $\int_0^{+\infty} e^x dx$ . (В формуле (11.31) полагаем  $a = 0$ .)

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^0 - e^t) = 1,$$

т.е. первый из интегралов сходится к единице. Но

$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^x dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t - 1) = +\infty$ , т.е.  $\int_0^{+\infty} e^x dx$  расходится и, следовательно, расходится несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ . ►

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ , называемый *интегралом Эйлера — Пуассона*. Доказано, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}, \quad (11.32)$$

(см. пример 11.22). Другими словами, площадь  $S$  под кри-

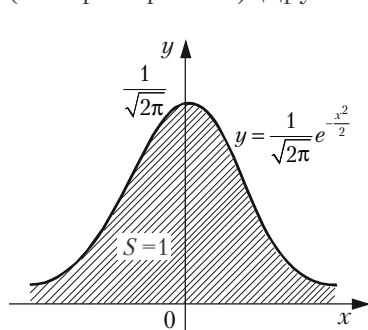


Рис. 11.25

вой  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  (получившей название *кривой Гаусса*) на интервале  $(-\infty, +\infty)$  равна единице (рис. 11.25).

**Несобственные интегралы от неограниченных функций.** Начнем с рассмотрения важного частного случая. Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна, но не ограничена на полуинтервале  $[a, b)$ .

**Определение.** Несобственным интегралом  $\int_a^b f(x) dx$  от функции  $y = f(x)$  на полуинтервале  $[a, b)$  называется предел  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$ , где  $\delta > 0$ , т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_a^{b-\delta} f(x) dx. \quad (11.33)$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (11.33), существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции  $y = f(x)$  непрерывной, но неограниченной на полуинтервале  $(a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{a+\delta}^b f(x) dx. \quad (11.34)$$

**Пример 11.15.** Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

*Решение.* По определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_{\delta}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{\delta}^1 = 2(1 - \sqrt{\delta}).$$

Тогда  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} 2(1 - \sqrt{\delta}) = 2$ , т.е. полубесконечная фигура, ограниченная осями координат, кривой  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  и прямой  $x = 1$ , имеет конечную площадь, равную 2 (ед<sup>2</sup>) (рис. 11.26). ►

**Замечание.** Если функция  $f(x)$  не ограничена при  $x = c$ , где  $c \in (a, b)$ , то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  также называется *несобственным*. В этом случае

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

считается *сходящимся*, если сходятся два несобственных интеграла в правой части последнего равенства. В противном случае  $\int_a^b f(x) dx$  называется *расходящимся*. Например,

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$  является расходящимся, так как расходятся оба несобственных интеграла в правой части равенства (предлагаем убедиться в этом читателю самостоятельно).

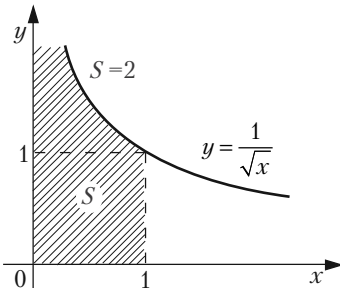


Рис. 11.26

## 11.8. Приближенное вычисление определенных интегралов

Эффективным средством вычисления определенных интегралов является формула Ньютона — Лейбница (см. параграф 11.4). Однако ее применение на практике связано с существенными трудностями, возникающими при нахождении первообразной в случае усложнения подынтегральной функции. В связи с этим в приложениях интегрального исчисления используют так называемые *численные методы*, позволяющие найти приближенное значение искомого интеграла с требуемой точностью. Этот подход оказывается еще более предпочтительным в связи с возрастающими возможностями современной вычислительной техники, реализующей алгоритмы с необходимой скоростью.

В данном параграфе рассмотрим одну из приближенных формул вычисления определенного интеграла — формулу трапеций.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x)$ . Предположим дополнительно, что  $f(x) \geq 0$  на

$[a, b]$ . Тогда  $\int_a^b f(x)dx$  численно равен площади под кривой

$y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Приближенное значение искомого интеграла можно получить, если вместо площади под кривой взять площадь под ломаной, расположенной достаточно близко к исходной кривой (см. также параграф 11.1).

Для построения этой ломаной поступим следующим образом: разобьем отрезок интегрирования на  $n$  равных

частей длиной  $h = \frac{b-a}{n}$  и на

каждом из отрезков разбиения  $[x_{i-1}, x_i]$  (где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_i = x_0 + ih$ ) заменим участок кривой  $y = f(x)$  хордой, стягивающей концевые точки (рис. 11.27)

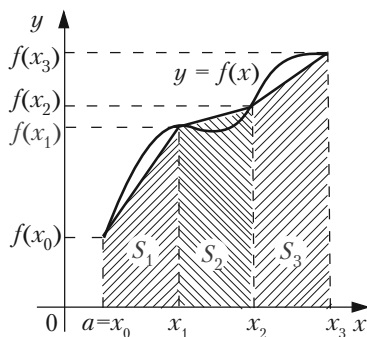


Рис. 11.27

Тогда  $\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n$  (где  $S_1, S_2, \dots, S_n$  — площади трапеций (площади под хордами на каждом из отрезков разбиения), на рис. 11.27 эти трапеции заштрихованы. Но

$$S_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}h; S_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}h; \dots;$$

$$S_n = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}h.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}h + \dots + \\ &+ \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}h = \\ &= h \left( \frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_n)}{2} \right). \end{aligned}$$

Вынося множитель  $h$ , заметим, что все слагаемые данной суммы, отличные от  $\frac{f(x_0)}{2}$  и  $\frac{f(x_n)}{2}$ , встречаются в ней дважды. Приводя подобные члены и учитывая, что  $h = \frac{b-a}{n}$ , окончательно получаем

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right) \quad (11.35)$$

где  $x_0 = a, x_i = x_0 + ih, i = 1, 2, \dots, n$ .

Формула (11.35) носит название *формулы трапеций*. Она получена в предположении неотрицательности функции  $y = f(x)$ , но можно доказать, что этот результат остается справедливым и в общем случае.

Рассмотрим теперь вопрос об оценке погрешности в результате применения формулы трапеций (существенно, что без изучения этого вопроса формула (11.35) будет носить лишь качественный характер).

Обозначим через  $S(n)$  выражение, стоящее в правой части формулы (11.35). Тогда

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x) dx - S(n) \right|$$

есть абсолютная погрешность от применения формулы трапеций (11.35). Обозначим через  $M_2$  максимальное значение модуля второй производной  $f''(x)$  подынтегральной функции  $y = f(x)$  на  $[a, b]$ , т.е.  $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ .

Доказано, что абсолютная погрешность  $\Delta$  от применения формулы трапеций

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2. \quad (11.36)$$

**Пример 11.16.** Вычислить по формуле трапеций при  $n = 5$  определенный интеграл  $\int_1^{1.5} \frac{dx}{x}$ . Оценить погрешность.

*Решение.* Поскольку число  $n$  отрезков разбиения равно 5, то длина отрезков разбиения  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1,5-1}{5} = 0,1$ , и так как  $x_i = x_0 + ih, i = 1, 2, \dots, 5, x_0 = 1$ , имеем  $x_1 = 1,1; x_2 = 1,2; x_3 = 1,3; x_4 = 1,4; x_5 = 1,5$ . Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{x}$ , поэтому согласно формуле (11.35) получаем

$$\int_1^{1.5} \frac{dx}{x} \approx 0,1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1,5} \right) + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,4} \right) = 0,4059.$$

Перейдем теперь к оценке погрешности:  $f''(x) = \left( \left( \frac{1}{x} \right)' \right)' = \frac{2}{x^3}$ . Эта функция монотонно убывает на отрезке  $[1; 1,5]$ ,

поэтому достигает своего максимального значения в ле-

вой концевой точке этого отрезка (т.е. при  $x = 1$ ). Тогда

$$M_2 = f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 \text{ и согласно формуле (11.36) имеем}$$

$$\Delta \leq \frac{0,5^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 2 = 0,84 \cdot 10^{-3}.$$

Заметим, что по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_1^{1,5} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^{1,5} = \ln 1,5,$$

поэтому найденное значение 0,4059 заданного интеграла является также приближением (с указанной точностью) для числа  $\ln 1,5$ . Таким образом, формула трапеций может оказаться удобной для вычисления значений некоторых функций. ►

## 11.9. Применение понятия определенного интеграла в экономике

Выше мы отмечали экономический смысл определенного интеграла, выражающего объем произведенной продукции при известной функции производительности труда. Рассмотрим другие примеры использования интеграла в экономике.

Если в функции Кобба — Дугласа (см. гл. 15) считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид  $g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$ . Тогда объем выпускаемой продукции за  $T$  лет составит

$$u = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t} dt. \quad (11.37)$$

**Пример 11.17.** Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба — Дугласа имеет вид  $g(t) = (1+t)e^{3t}$ .

**Решение.** По формуле (11.37) объем произведенной продукции

$$u = \int_0^4 (1+t)e^{3t} dt.$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть  $u = t + 1$ ,  $dv = e^{3t} dt$ . Тогда  $du = dt$ ,  $v = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} u &= (t+1) \frac{1}{3} e^{3t} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3} e^{3t} dt = \frac{1}{3} (5e^{12} - 1) - \frac{1}{9} e^{3t} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{1}{9} (14e^{12} - 2) \approx 2,53 \cdot 10^5 \text{ (усл. ед.)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $y = g(x)$ , характеризующую неравномерность распределения доходов среди населения, где  $y$  — доля совокупного дохода, получаемого долей  $x$  беднейшего населения. График этой функции называется *кривой Лоренца*<sup>1</sup> (рис. 11.28).

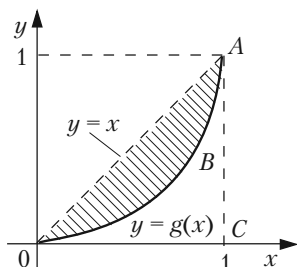


Рис. 11.28

Очевидно, что  $0 \leq g(x) \leq x$  при  $x \in [0; 1]$ , и неравномерность распределения доходов тем больше, чем больше площадь фигуры  $OAB$  (см. рис. 11.28). В связи с этим в качестве меры указанной неравномерности используют так называемый *коэффициент Джини*<sup>2</sup>  $k$ , равный отношению площади фигуры  $OAB$  к площади треугольника  $OAC$ .

**Пример 11.18.** По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца  $OBA$  (см. рис. 11.28) может быть описана уравнением  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ , где  $x$  — доля населения,  $y$  — доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

**Решение.** Очевидно, что коэффициент Джини (см. рис. 11.28)

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\triangle OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\triangle OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}, \text{ так как } S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}.$$

<sup>1</sup> Лоренц Макс (1876–1959) — американский экономист и математик.

<sup>2</sup> Джини Корrado (1884–1965) — итальянский экономист, статистик, демограф.



$$S_{OBAC} = \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\text{Поэтому } k = 1 - 2(1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx) = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - 1.$$

С помощью замены, например,  $x = \sin t$  можно вычислить  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ . Итак, коэффициент Джини  $k = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$ .

Достаточно высокое значение  $k$  показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране. ►

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время  $t$  (лет) при годовом проценте (процентной ставке)  $p$ , называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть  $K_t$  — конечная сумма, полученная за  $t$  лет, и  $K$  — дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной суммой*. Если проценты простые, то  $K = K_t (1 + it)$ , где  $i = \frac{p}{100}$  — удельная ставка процента. Тогда  $K = \frac{K_t}{1+it}$ . В случае сложных процентов  $K = K_t(1+it)^t$ , поэтому  $K = \frac{K_t}{(1+i)^t}$ .

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией  $f(t)$  и при удельной норме процента, равной  $i$ , процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход  $K$  за время  $T$  вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it} dt. \quad (11.38)$$

**Пример 11.19.** Определить дисконтированный доход за три года при ставке процента 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн руб., и ежегодно намечается увеличивать капиталовложения на 1 млн руб.

*Решение.* Очевидно, что капиталовложения задаются функцией  $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$ . Тогда по формуле (11.38) дисконтированная сумма капиталовложений

$$K = \int_0^3 (10+t)e^{-0,08t} dt.$$

Интегрируя (аналогично примеру 11.17), получаем  $K = 30,5$  млрд руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 млн до 13 млн руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млн руб. при той же процентной ставке, начисляемой непрерывно. ►

Пусть известна функция  $t = t(x)$ , описывающая изменение затрат времени  $t$  на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где  $x$  — порядковый номер изделия в партии. Тогда *среднее время*  $t_{\text{cp}}$ , затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от  $x_1$  до  $x_2$  изделий, вычисляется по теореме о среднем (11.10):

$$t_{\text{cp}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx. \quad (11.39)$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий  $t = t(x)$ , то часто она имеет вид

$$t = ax^{-b}, \quad (11.40)$$

где  $a$  — затраты времени на первое изделие;  $b$  — показатель производственного процесса.

**Пример 11.20.** Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от  $x_1 = 100$  до  $x_2 = 121$  изделий, полагая в формуле (11.40)  $a = 600$  мин,  $b = 0,5$ .

*Решение.* Используя формулу (11.39), получаем

$$t_{\text{cp}} = \frac{1}{121-100} \int_{100}^{121} 600x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{600}{21} 2\sqrt{x} \Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57,2 (\text{мин}). \quad \blacktriangleright$$

## 11.10. Понятие двойного интеграла

Понятие двойного интеграла вводится аналогично понятию определенного интеграла.

Пусть  $D$  — некоторая область на координатной плоскости  $Oxy$  и функция  $z = f(x, y)$  определена в данной области.

Разобьем область  $D$  на  $n$  элементарных областей  $D_1, D_2, \dots, D_n$  (например с помощью сети кривых, рис. 11.29).

Обозначим через  $S_i$  площадь области  $D_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Очевидно, что, если  $S$  — площадь об-

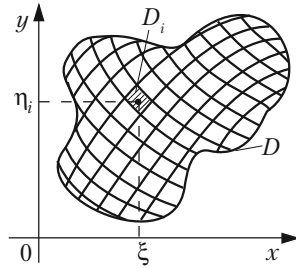


Рис. 11.29

ласти  $D$ , то  $S = \sum_{i=1}^n S_i$ . В каждой из областей  $D_i$  выберем произвольно точку  $(\xi_i, \eta_i)$  (см. рис. 11.29). Тогда сумма вида

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i \quad (11.41)$$

называется *интегральной суммой* для функции  $z = f(x, y)$  в области  $D$ .

Через  $d_i$  обозначим максимальный линейный размер элементарной области  $D_i$  (так, если  $D_i$  — прямоугольник, то  $d_i$  — длина его диагонали и т.п.). Пусть

$$d = \max_i d_i,$$

т.е.  $d$  — максимальный из линейных размеров  $d_i$  областей  $D_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Определение.** Пусть предел  $I$  интегральной суммы (11.41) для функции  $z = f(x, y)$  по области  $D$  при стремлении  $d$  к нулю существует, конечен и не зависит от способа разбиения области  $D$  на элементарные части и выбора точек  $(\xi_i, \eta_i)$  в областях  $D_i$ . Тогда функция  $z = f(x, y)$  называется **интегрируемой в области  $D$** , а число  $I$  — **двойным интегралом** от данной функции **по области  $D$**  и обозначается

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (11.42)$$

т.е.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i. \quad (11.43)$$

**Теорема (достаточное условие интегрируемости).** Если функция  $z = f(x, y)$  непрерывна в области  $D$ , то она интегрируема в этой области.

**Геометрический смысл двойного интеграла.** Пусть функция  $z = f(x, y)$  неотрицательна и интегрируема в области  $D$ , тогда  $\iint_D f(x, y) dx dy$  численно равен объему прямого цилиндрического тела (цилиндроида), построенного на области  $D$  как на основании и ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y)$  (рис. 11.30).

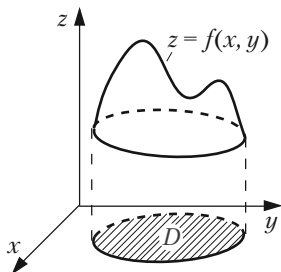


Рис. 11.30

Если  $f(x, y) = 1$  на области  $D$ , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D dx dy \quad (11.44)$$

численно равен площади области  $D$ .

Задача вычисления двойного интеграла в общем случае является существенно более сложной, чем задача вычисления интеграла от функции одной переменной. Ситуация упрощается, если область  $D$  является элементарной относительно оси  $Ox$ , т.е. область  $D$  ограничена кривыми  $y = h(x)$ ,  $y = g(x)$ , где  $h(x) \geq g(x)$  при  $x \in [a, b]$ , и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 11.31).

Тогда справедлив следующий двумерный аналог формулы Ньютона — Лейбница.

**Теорема.** Пусть область  $D$  элементарна относительно оси  $Ox$ , следовательно,

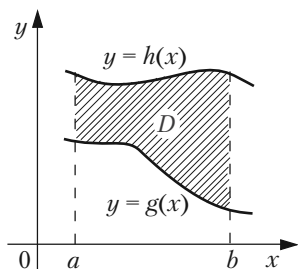


Рис. 11.31

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, называется *повторным* и записывается в виде

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

**Пример 11.21.** Вычислить  $\iint_D (x+y) dx dy$ , где  $D$  — часть круга единичного радиуса, лежащая в первой четверти (рис. 11.32).

*Решение.* Сводя двойной интеграл к повторному, получаем

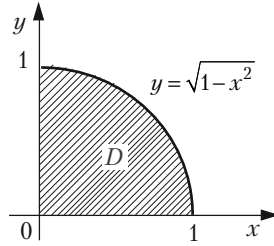


Рис. 11.32

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) dy = \int_0^1 \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
 &= \int_0^1 \left( x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2) \right) dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-x^2) + \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат  $x, y$  к полярным  $r, \varphi$ , связанным с прямоугольными координатами соотношениями  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  (см. параграф 4.7), справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (11.45)$$

Пусть область интегрирования  $D$  ограничена лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$ , где  $\alpha < \beta$ , и кривыми  $r = r_1(\varphi)$ ,  $r = r_2(\varphi)$ , где функции  $r_1(\varphi)$  и  $r_2(\varphi)$  однозначны на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и  $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$  (рис. 11.33).

Тогда двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  по области  $D$  сводится к повторному по формуле

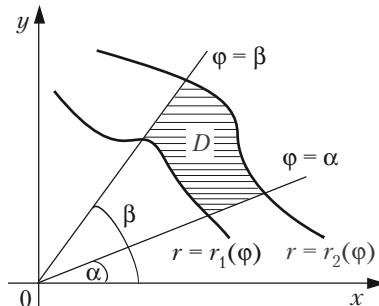


Рис. 11.33

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

**Пример 11.22.** Вычислить интеграл Эйлера — Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

*Решение.* Искомый интеграл обозначим через  $I$ . Заметим, что

$$\int_{R^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = I^2$$

(если интеграл  $I$  сходится).

Для вычисления двойного интеграла, стоящего в левой части последнего равенства, воспользуемся переходом к полярным координатам

$$\begin{aligned} \int_{R^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = -2\pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{2}} d\left(-\frac{r^2}{2}\right) = \\ &= 2\pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = 2\pi, \end{aligned}$$

т.е.  $I^2 = 2\pi$ , откуда  $I = \sqrt{2\pi}$  или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \blacktriangleright$$

## ПРАКТИКУМ

### 11.11. Методы вычисления определенного интеграла

**11.23.** Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx; \quad \text{б) } \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}; \quad \text{в) } \int_0^{\pi} |\cos x| dx;$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}; \quad \text{д)} \int_{0,5}^0 \ln(1-x^2) dx; \quad \text{е)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx; \\ \text{ж)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx; \quad \text{з)} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1) dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

*Решение.*

а) Используя эквивалентное преобразование подынтегральной функции (почленное деление числителя на знаменатель) и свойства определенного интеграла (11.4), (11.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx &= \int_1^2 \left( 3x^3 - 5x + \frac{7}{x} \right) dx = \\ &= 3 \int_1^2 x^3 dx - 5 \int_1^2 x dx + 7 \int_1^2 \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Все три интеграла — табличные; согласно формуле (11.15) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x} dx &= 3 \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 - 5 \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + 7 \ln|x| \Big|_1^2 = \frac{3}{4}(16-1) - \\ &- \frac{5}{2}(4-1) + 7(\ln 2 - \ln 1) = 3,75 + \ln 2. \end{aligned}$$

б) Воспользуемся заменой переменной  $t = \sqrt{1+3x}$ . Тогда  $x = \frac{t^2-1}{3}$  и  $dx = \frac{2}{3}t dt$ . Если  $x = 0$ , то  $t = 1$ , и если  $x = 5$ , то  $t = 4$ . Выполняя замену, получаем

$$\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2-1) dt = \frac{2}{9} \left( \frac{t^3}{3} \Big|_1^4 - t \Big|_1^4 \right) = \frac{2}{9} \left( \frac{64-1}{3} - 4 + 1 \right) = 4.$$

Отметим, что полагая  $x = \frac{t^2-1}{4}$ , можно также считать, что  $t \in [-4; -1]$ . При этом все условия теоремы 1 из параграфа 11.5 выполнены и, поскольку в этом случае  $\sqrt{t^2} = -t$ , получаем

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} &= \int_{-1}^{-4} \frac{(t^2-1)2t dt}{3(-t)3} = \frac{2}{9} \int_{-1}^{-4} (1-t^2) dt = \frac{2}{9} \left( t \Big|_{-1}^{-4} - \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{-4} \right) = \\ &= \frac{2}{9} \left( -4+1 - \frac{1}{3} \left( (-4)^3 - (-1)^3 \right) \right) = 4.\end{aligned}$$

в) Так как

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ -\cos x & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \end{cases}$$

то (см. (11.7))

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \\ &= (1-0) - (0-1) = 2.\end{aligned}$$

г) Положим  $t = e^x$ , тогда  $x = \ln t$ ,  $dx = \frac{dt}{t}$ . Если  $x = \ln 2$ , то  $t = 2$ , если  $x = \ln 3$ , то  $t = 3$ . Выполняя замену, получаем

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int_2^3 \frac{dt}{t(t-t^{-1})} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

д) Воспользуемся формулой (11.13) интегрирования по частям. Пусть  $u = \ln(1-x^2)$ ,  $dv = dx$ . Тогда  $du = (\ln(1-x^2))' dx =$

$$\begin{aligned}&= -\frac{2x}{1-x^2} dx; \quad v = \int dv = \int dx = x \quad \text{и} \\ &\int_{0,5}^0 \ln(1-x^2) dx = x \ln(1-x^2) \Big|_{0,5}^0 + \int_{0,5}^0 \frac{2x^2}{1-x^2} dx = \\ &= 0,5 \ln \frac{4}{3} - 2 \int_{0,5}^0 \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} dx = \\ &= 0,5 \ln \frac{4}{3} - 2 \int_{0,5}^0 dx - 2 \int_{0,5}^0 \frac{dx}{x^2-1} = \\ &= 0,5 \ln \frac{4}{3} - 2x \Big|_{0,5}^0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{0,5}^0 = 1 + 0,5 \ln \frac{4}{27}.\end{aligned}$$



е) Как было отмечено выше (см. параграф 10.3), данный интеграл находится с помощью последовательного применения формулы интегрирования по частям. Пусть  $u = x^2$ ,  $dv = \cos x \, dx$ . Тогда  $du = (x^2)' dx = 2x \, dx$ ,  $v = \int \cos x \, dx = \sin x$  и (см. (11.13))

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x \sin x \, dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx.$$

Для нахождения последнего интеграла вновь применим формулу (11.13):  $u = x$ ,  $dv = \sin x \, dx$ . Тогда  $du = dx$ ,  $v = \int \sin x \, dx = -\cos x$  и

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx &= \frac{\pi^2}{4} - 2x(-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2. \end{aligned}$$

ж) В силу четности подынтегральной функции и симметричности отрезка интегрирования относительно начала координат имеем

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

Для нахождения последнего интеграла воспользуемся тригонометрической подстановкой  $x = \sin t$ . Будем полагать, что  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Если  $t = 0$ , то  $x = 0$ ; если  $t = \frac{\pi}{2}$ , то  $x = 1$ . Тогда  $dx = \cos t \, dt$  и

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t \, dt.$$

Так как  $\cos t > 0$  при  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , то  $|\cos t| = \cos t$ . Применяя тригонометрическую формулу понижения степени, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 2t d(2t) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \left( \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

3) Полагая  $x = 2 \sin t$ , получаем, что  $dx = 2 \cos t dt$  и  $x \in [1; \sqrt{3}]$ , если (одна из возможностей)  $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{8 \sin^3 t + 1}{4 \sin^2 t} dt = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin t dt + \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin^2 t} = \\ &= -2 \cos t \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} t \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Вычислить определенные интегралы:

$$11.24. \int_0^8 (\sqrt{2} + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$11.25. \int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy.$$

$$11.26. \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$$

$$11.27. \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+3x+2}.$$

$$11.28. \int_4^5 x \sqrt{x^2-16} dx.$$

$$11.29. \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}.$$

$$11.30. \int_1^2 \frac{4x+2}{2x-1} dx.$$

$$11.31. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$11.32. \int_e^{e^2} \frac{2\ln x + 1}{x} dx.$$

$$11.34. \int_{-2}^1 x^2 \sqrt{1-x^3} dx.$$

$$11.36. \int_0^{\ln 2} x e^x dx.$$

$$11.38. \int_1^e \ln^2 x dx.$$

$$11.40. \int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx.$$

$$11.42. \int_0^{\pi/2} (x+3) \sin x dx.$$

$$11.44. \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx.$$

$$11.46. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx.$$

$$11.48. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$11.50. \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}}.$$

$$11.52. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x}.$$

$$11.54. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x dx.$$

$$11.33. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$11.35. \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$11.37. \int_1^e x \ln x dx.$$

$$11.39. \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx.$$

$$11.41. \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

$$11.43. \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx.$$

$$11.45. \int_{-7}^7 \frac{x^4 \sin x}{x^6 + 2} dx.$$

$$11.47. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$11.49. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}.$$

$$11.51. \int_0^{0.5} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

$$11.53. \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$11.55. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

## 11.12. Геометрические приложения определенного интеграла

### Вычисление площадей плоских фигур

**11.56.** Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

- а)  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ; б)  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 4$  (фигура расположена в первой четверти); в)  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 2x$ ; г)  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ ; д)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{4}{x}$ ,  $y = 4x$ ,  $y = \frac{x}{4}$  (фигура расположена в первой четверти); е)  $y = \ln x$ ,  $y = \ln(x + 1)$ ,  $y = 1$ ,  $y = -1$ .

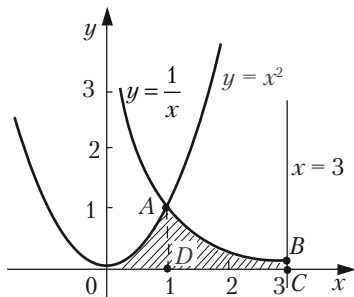


Рис. 11.34

*Решение.*

а) Искомая площадь  $S = S_{OABCD}$  — это площадь под «кривой»  $OAB$  (рис. 11.34) на отрезке  $[0; 3]$ . Линия  $OAB$  состоит из части  $OA$  параболы  $y = x^2$  и части  $AB$  гиперболы  $y = \frac{1}{x}$ . Следовательно, площадь  $S$  найдем как сумму двух площадей:  $S = S_{OAD} + S_{ABCD}$ .

Каждую из них вычислим, используя геометрический смысл определенного интеграла (см. параграф 11.1). Решая систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = \frac{1}{x}, \end{cases}$$

находим координаты точки  $A(1; 1)$ . Тогда

$$S_{OAD} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}; \quad S_{ABCD} = \int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln 3,$$

и

$$S = S_{OAD} + S_{ABCD} = \frac{1}{3} + \ln 3 \approx 1,43 \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

б) Искомая площадь  $S = S_{ABC}$  — площадь криволинейного треугольника  $ABC$  (рис. 11.35).

Решая соответствующие системы уравнений, получаем, что точками пересечения заданных линий являются

$$A = \left(\frac{1}{4}; 4\right), B(2; 4), C(1; 1)$$

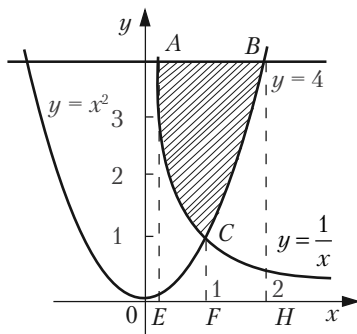


Рис. 11.35

(см. рис. 11.35). Проецируя точки  $A, B, C$  на ось абсцисс, очевидно, что искомая площадь  $S_{ABC}$  равна разности между площадью прямоугольника  $ABHE$  и суммой площадей, двух криволинейных трапеций  $ACFE$  и  $CBHF$   $S = S_{ABHE} - (S_{ACFE} + S_{CBHF})$ . Вычислим

$$S_{ABHE} = \int_{1/4}^2 4dx = 4x \Big|_{1/4}^2 = 4 \left( 2 - \frac{1}{4} \right) = 7;$$

$$S_{ACFE} = \int_{1/4}^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{1/4}^1 = \ln 1 - \ln \left( \frac{1}{4} \right) = \ln 4;$$

$$S_{CBHF} = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Итак, } S = 7 - \left( \ln 4 + \frac{7}{3} \right) = \frac{14}{3} - \ln 4 \approx 3,28 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

в) Искомой в данном случае является площадь  $S$  криволинейной фигуры, выделенной штриховкой на рис. 11.36.

Координаты точек пересечения кривых  $y = 4 - x^2$  и  $y = x^2 - 2x$  найдем из системы их уравнений:  $(-1; 3)$  и  $(2; 0)$ . Проецируя фигуру на ось абсцисс, видим, что искомая площадь — это площадь фигуры, заключенной меж-

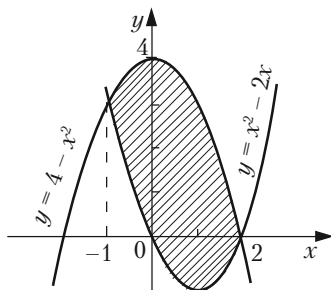


Рис. 11.36

ду кривыми; при этом на отрезке  $[-1; 2]$   $f_2(x) = 4 - x^2 \geq f_1(x) = x^2 - 2x$ .

Применяя формулу (11.21), получаем

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (4 - x^2 - (x^2 - 2x)) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = \\ &= 4x \Big|_{-1}^2 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 + x^2 \Big|_{-1}^2 = \\ &= 4(2 - (-1)) - \frac{2}{3} (2^3 - (-1)^3) + 2^2 - (-1)^2 = 9 \text{ (ед.}^2\text{)}. \end{aligned}$$

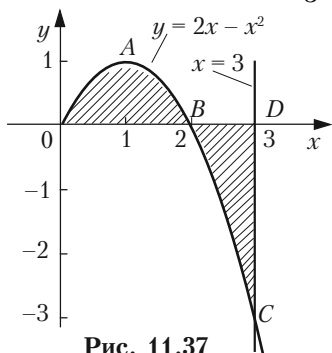


Рис. 11.37

г) Фигура искомой площади  $S$  состоит из двух криволинейных треугольников  $OAB$  и  $BCD$ , расположенных соответственно выше и ниже оси  $Ox$  (рис. 11.37).

Площади этих треугольников найдем исходя из геометрического смысла определенного интеграла с учетом формулы (11.20):

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}; \\ S_{BCD} &= -\int_2^3 (2x - x^2) dx = \left( -x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

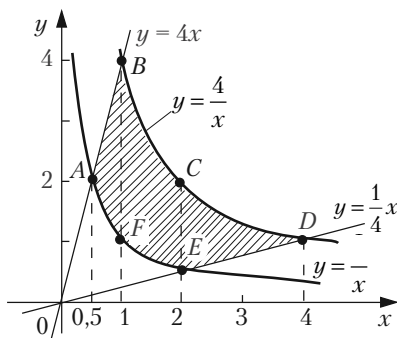


Рис. 11.38

Тогда

$$\begin{aligned} S &= S_{OAB} + S_{BCD} = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ (ед.}^2\text{)}. \end{aligned}$$

д) Найдем координаты точек пересечения заданных линий (рис. 11.38).

Решая систему

$$\begin{cases} y = 4x, \\ y = \frac{1}{x}, \end{cases}$$

получаем  $A = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ . Аналогично находим  $B(1; 4)$ ,  $D(4; 1)$ ,  $E = \left(2; \frac{1}{2}\right)$ . Искомой в данном случае является площадь  $S$  криволинейной трапеции  $ABDE$ . Выполняя проецирование «угловых» точек этой трапеции на ось  $Ox$ , разобьем ее на части:

$$S = S_{ABF} + S_{BCEF} + S_{CDE}.$$

Площадь каждой из частей найдем по формуле (11.21):

$$S_{ABF} = \int_{1/2}^1 \left(4x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \ln|x|\right) \Big|_{1/2}^1 = 1,5 - \ln 2;$$

$$S_{BCEF} = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = 3\ln|x| \Big|_1^2 = 3\ln 2;$$

$$S_{CDE} = \int_2^4 \left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right) dx = \left(4\ln|x| - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right) \Big|_2^4 = 4\ln 2 - 1,5.$$

Окончательно получаем

$$S = (1,5 - \ln 2) + 3\ln 2 + (4\ln 2 - 1,5) = 6\ln 2 \approx 4,2 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

е) Искомой здесь (рис. 11.39) является площадь  $S$  криволинейной трапеции  $ABCD$ .

В данном случае будет удобно использовать проецирование фигуры на ось  $Oy$ , т.е. поменять местами функцию  $y$  и аргумент  $x$ . Используя формулу (11.21) (с учетом последнего замечания), получаем

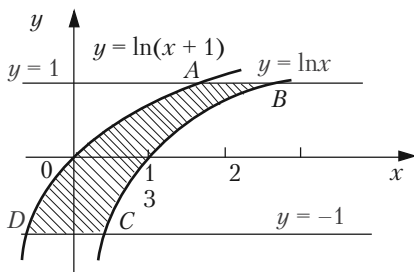


Рис. 11.39

$$S = \int_{-1}^1 (e^y - (e^y - 1)) dy = \int_{-1}^1 dy = y \Big|_{-1}^1 = 2 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Заметим, что использование традиционного проецирования фигуры на ось  $Ox$  приведет к существенно более трудоемкому решению (предлагаем читателю в качестве упражнения убедиться в этом самостоятельно). ►

### Вычисление объемов тел вращения

**11.57.** Найти объемы тел, образованных вращением вокруг координатных осей и прямой  $y = 2$  плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{2}{x+1}$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x=1$ .

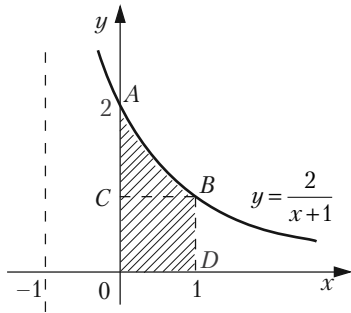


Рис. 11.40

*Решение.* Объем  $V_x$  находим непосредственно по формуле (11.25) (рис. 11.40):

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 \left( \frac{2}{x+1} \right)^2 dx = \\ &= 4\pi \int_0^1 (x+1)^{-2} d(x+1) = \\ &= -4\pi(x+1)^{-1} \Big|_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Объем  $V_y$  равен сумме двух объемов:

$$V_y = V_{ABC} + V_{BDOC},$$

где  $V_{ABC}$  и  $V_{BDOC}$  — объемы тел, полученных при вращении вокруг оси  $Oy$  соответственно криволинейного треугольника  $ABC$  и квадрата  $BDOC$  (см. рис. 11.40). По формуле (11.26) получаем

$$\begin{aligned} V_{ABC} &= \pi \int_1^2 \left( \frac{2-y}{y} \right)^2 dy = \pi \int_1^2 \left( 4y^{-2} - \frac{4}{y} + 1 \right) dy = \\ &= \pi \left( -4y^{-1} - 4 \ln|y| + y \right) \Big|_1^2 = \pi(3 - 4 \ln 2); \\ V_{BDOC} &= \pi \int_0^1 1^2 dy = \pi y \Big|_0^1 = \pi \end{aligned}$$

(последний объем не что иное, как объем цилиндра с радиусом основания  $R = 1$  и высотой  $H = 1$ ).

Окончательно имеем

$$V_y = \pi(3 - 4 \ln 2) + \pi = 4\pi(1 - \ln 2) \approx 3,86 \text{ (ед.}^3\text{)}.$$



Выполняя параллельный перенос оси  $Ox$  на две единицы вверх, получаем новые уравнения линий, ограничивающих плоскую фигуру:

$$y = \frac{2}{x+1} - 2 = \frac{-2x}{x+1},$$

$$x = 0, x = 1, y = -2.$$

Тогда искомый объем — это объем тела, полученного при вращении фигуры  $B_1C_1D_1O$  (рис. 11.41) вокруг оси  $Ox$ .

Этот объем равен разности двух объемов:

$$V_x = V_{A_1C_1D_1O} - V_{A_1B_1O}.$$

По формуле (11.25) получаем

$$V_x = \pi \int_0^1 2^2 dx - \pi \int_0^1 \left( \frac{2x}{x+1} \right)^2 dx = 4\pi - 4\pi \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^2} dx.$$

Воспользуемся заменой переменной  $t = x + 1$ . Тогда  $x = t - 1$ ,  $dx = dt$ . Если  $x = 0$ , то  $t = 1$ ; если  $x = 1$ , то  $t = 2$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} V_x &= 4\pi - 4\pi \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t^2} dt = 4\pi - 4\pi \int_1^2 \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} dt = \\ &= 4\pi - 4\pi \int_1^2 \left( 1 - \frac{2}{t} + t^{-2} \right) dt = 4\pi - 4\pi \left( t - 2\ln|t| - \frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \\ &= 2\pi(4\ln 2 - 1) \approx 11,1 \text{ (ед.}^3\text{)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**11.58.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  круга единичного радиуса с центром в точке  $(0; 2)$ .

*Решение.* Отметим, что тело указанного вида в геометрии называется *тором*. Искомый объем  $V_x = V_{ABCEF} - V_{ADCEF}$  где  $V_{ABCEF}$  и  $V_{ADCEF}$  — объемы, полученные при вращении вокруг оси  $Ox$  фигур, ограниченных соответственно линиями  $ABCEF$  и  $ADCEF$  (рис. 11.42).

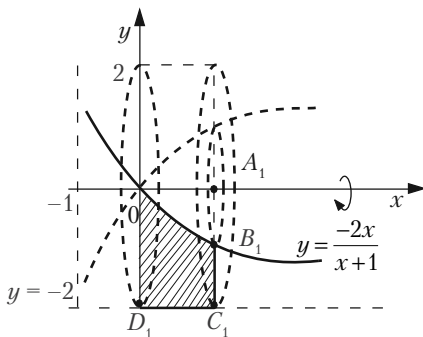


Рис. 11.41

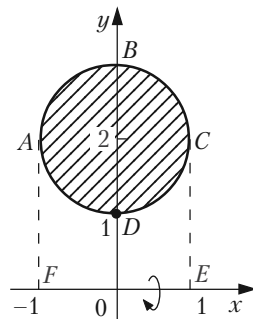


Рис. 11.42

Уравнения полуокружностей  $ABC$  и  $ADC$  имеют соответственно вид

$$y = 2 \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Используя формулы (11.25), (11.5), получаем

$$V_x = \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (2 - \sqrt{1 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-1}^1 8\sqrt{1 - x^2} dx.$$

Используя результат примера 11.23, ж, окончательно имеем

$$V_x = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 8\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi^2 \approx 39,5 \text{ (ед.}^3\text{)}. \blacktriangleright$$

**11.59.** Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями  $x = y^2 - 2$ ,  $y = x$ .

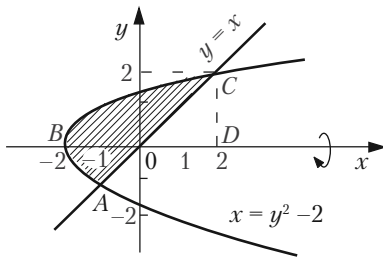


Рис. 11.43

*Решение.* Выделим на чертеже вращаемую фигуру (рис. 11.43, криволинейный треугольник  $ABC$ ). Заметим, что точно такое же тело вращения получится, если вокруг оси абсцисс вращать криволинейный треугольник  $OBC$ . Тогда искомый объем равен разности двух объемов:  $V_x = V_{BCD} - V_{OCD}$ ,

где  $V_{BCD}$ ,  $V_{OCD}$  — объемы тел, полученных при вращении вокруг оси абсцисс криволинейных треугольников соответственно  $BCD$  и  $OCD$ . Записывая уравнения ограничивающих линий в виде  $y = f(x)$  и используя формулу (11.25), получаем

$$V_{BCD} = \pi \int_{-2}^2 (\sqrt{x+2})^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x+2) dx = \pi \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^2 = 8\pi;$$

$$V_{OCD} = \pi \int_0^2 x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}\pi;$$

$$V_x = 8\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{16\pi}{3} \text{ (ед.}^3\text{)}. \blacktriangleright$$

**Вычисление длины дуги кривой**

**11.60.** Найти длину дуги кривой  $y = x^2$  от  $x = 0$  до  $x = 2$ .  
*Решение.* Согласно формуле (11.27)

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx.$$

Пусть  $x = 0,5 \operatorname{tg} t$ . Тогда  $dx = 0,5 \cos^{-2} t dt$ . Если  $x = 0$ , то  $t = 0$ ; если  $x = 2$ , то  $t = \operatorname{arctg} 4$ . Следовательно,

$$s = \int_0^{\operatorname{arctg} 4} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt}{2 \cos^2 t} = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} 4} \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Используя результат, полученный в примере 10.169, а, имеем

$$s = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right| + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} t}{\cos t} \right) \Big|_0^{\operatorname{arctg} 4}.$$

Если  $\alpha = \operatorname{arctg} 4$ , то  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$ . Окончательно

$$s = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\frac{4}{\sqrt{17}} + 1}{\frac{4}{\sqrt{17}} - 1} \right| + \sqrt{17} = \frac{1}{4} \ln (4 + \sqrt{17}) + \sqrt{17}. \blacktriangleright$$

**Вычисление площади поверхности вращения**

**11.61.** Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  дуги кривой  $y = 2\sqrt{x}$  при  $x \in [0; 3]$ .

*Решение.* Используя формулу (11.28), получаем

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x} \sqrt{1 + ((2\sqrt{x})')^2} dx = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \\ &= 4\pi \int_0^3 \sqrt{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = 4\pi \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{8\pi}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \\ &= \frac{8\pi}{3} (8-1) = \frac{56\pi}{3} \text{ (ед}^2\text{)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

$$11.62. y = e^x, y = e^{\frac{x}{2}}, y = e^2.$$

$$11.63. y = x^4 - 2x^2, y = 0.$$

$$11.64. y = 3 + 2x - x^2, y = x + 1.$$

$$11.65. y = x^2 + 3, xy = 4, y = 2, x = 0.$$

$$11.66. y = x^3, y = -2x^2 + 3x \text{ (фигура расположена в первой четверти)}.$$

$$11.67. y = \sqrt{1-x}, y = x+1, y = 0.$$

$$11.68. y = \cos 2x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$$

$$11.69. y = 2 - x^4, y = x^2.$$

$$11.70. xy = 1, y = x^2, x = 3, y = 0.$$

$$11.71. y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0.$$

$$11.72. y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2.$$

$$11.73. y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1.$$

$$11.74. y = x^2, y = 1 + \frac{3}{4}x^2.$$

$$11.75. y = \frac{2}{x}, y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}.$$

$$11.76. y = x^2 + 2, y = 1 - x^2, x = 0, x = 1.$$

$$11.77. y = -x^2, y = 2e^x, x = 0, x = 1.$$

$$11.78. y = \frac{4}{x^2}, x = 1, y = x - 1.$$

$$11.79. y = \sqrt{x}, y = \sqrt{4-3x}, y = 0.$$

$$11.80. y = \ln x, x = e, y = 0.$$

$$11.81. x = 0, x = 2, y = 2^x, y = 2x - x^2.$$

$$11.82. y = \arcsin 2x, x = 0, y = -\frac{\pi}{2}.$$

$$11.83. y = x^2 + 1, x = y^2, 3x + 2y - 16 = 0, x = 0.$$

$$11.84. y = (x+1)^2, y^2 = x+1.$$

$$11.85. y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x, y = 0 \text{ (фигура расположена во второй четверти)}.$$

**11.86.**  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ ,  $x + 2y - 4 = 0$ ,  $y = 0$  (фигура расположена в первой четверти).

**11.87.**  $x = 0$ ,  $y = 4x - x^2$  и касательной к графику этой функции в точке с абсциссой  $x = 3$ .

**11.88.**  $x = \cos t$ ,  $y = 2\sin t$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ .

**11.89.**  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ .

Найти объемы тел, образованных при вращении вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  плоских фигур, ограниченных линиями:

**11.90.**  $y = x^3$ ,  $y = 4x$ .

**11.91.**  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ , при  $0 \leq x \leq \pi$ .

**11.92.**  $y = \frac{4}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ .

**11.93.**  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ ,  $y = 0$ .

**11.94.**  $y = x^2$ ,  $xy = 8$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ .

**11.95.**  $x = \sqrt{y-1}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 5$ .

**11.96.**  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$ .

**11.97.**  $y = -x^2 + 4$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 0$ .

**11.98.**  $y = \sqrt{6x}$ ,  $y = \sqrt{16-x^2}$ ,  $x = 0$ .

**11.99.**  $y = x^2 + 1$ ,  $x = y^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

**11.100.**  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ , где  $x \geq 0$ .

**11.101.**  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

**11.102.**  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

**11.103.**  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ .

**11.104.** Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг прямых: а)  $x = -1$ ; б)  $y = 1$ .

Найти длины дуг следующих кривых:

**11.105.**  $y = 2\sqrt{x}$  от  $x = 0$  до  $x = 1$ .

**11.106.**  $y = \ln x$  от  $x = \sqrt{3}$  до  $x = \sqrt{8}$ .

**11.107.**  $y = \arcsin e^{-x}$  от  $x = 0$  до  $x = 1$ .

**11.108.**  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  от  $t = 0$  до  $t = 2\pi$ .

Найти площади поверхностей вращения, полученных при вращении кривых вокруг оси  $Ox$ :

11.109.  $y = x^3$  при  $x \in \left[0; \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right]$ .

11.110.  $9y^2 = x(3-x)^2$  при  $x \in [0; 3]$ .

11.111.  $x^2 + y^2 = 9$  при  $x \in [-2; 1]$ .

11.112.  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$  при  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

### 11.13. Несобственные интегралы

*Несобственные интегралы  
с бесконечными пределами интегрирования*

11.113. Вычислить интегралы:

а)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ ; б)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ ; в)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ; г)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x+1} dx$ ,

если они сходятся.

*Решение.*

а) По определению (11.29) получаем

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_2^t = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( \ln \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t-1}{t+1} - \ln \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 1 + \ln 3) = 0,5 \ln 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{d \ln x}{\ln x} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln |\ln x|_2^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln \ln t - \ln \ln 2) = +\infty, \end{aligned}$$

т.е. данный интеграл расходится.

в) Полагая в определении (11.31), что  $a = 0$  и учитывая четность подынтегральной функции, имеем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} (\arctg t - \arctg 0) = 2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi.\end{aligned}$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} x e^{-x+1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x e^{-x+1} dx.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям (11.19). Пусть  $u = x$ ,  $e^{-x+1} dx = dv$ . Тогда  $du = dx$ ,  $v = \int e^{-x+1} dx = -e^{-x+1}$  и

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x e^{-x+1} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -x e^{-x+1} \Big|_0^t + \int_0^t e^{-x+1} dx \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t e^{-t+1} - e^{-t+1} + e) = e. \blacktriangleright\end{aligned}$$

Геометрически, если  $f(x) \geq 0$  на полуинтервале  $[a, +\infty)$ ,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  численно равен площади под кривой  $y = f(x)$  на  $[a; +\infty)$ . В этом смысле, в частности, результаты примера 11.113, в, г означают, что площадь под кривой  $y = \frac{1}{1+x^2}$  (кривая Аньези) на интервале  $(-\infty; +\infty)$  равна  $\pi$  (ед.<sup>2</sup>) (рис. 11.44), а площадь под кривой  $y = x e^{-x+1}$  на полуинтервале  $[0; +\infty)$  равна  $e$  (ед.<sup>2</sup>) (рис. 11.45).

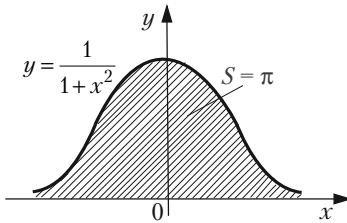


Рис. 11.44

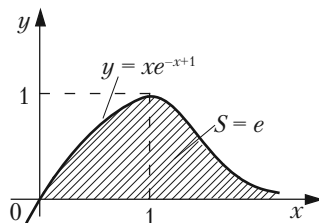


Рис. 11.45

### Несобственные интегралы от неограниченных функций

**11.114.** Вычислить интегралы (если они сходятся):

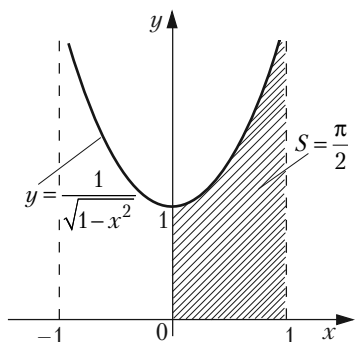
а)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;    б)  $\int_{-7}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ .

*Решение.*

а) Подынтегральная функция  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  не ограничена вблизи точки  $x = 1$ . Согласно определению (11.33) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \arcsin x \Big|_0^{1-\delta} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \arcsin(1-\delta) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Геометрически этот результат означает, что площадь



**Рис. 11.46**

под кривой  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на полуинтервале  $[0; 1)$  равна  $\frac{\pi}{2}$  (ед.<sup>2</sup>) (рис. 11.46).

б) Подынтегральная функция  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$  не определена во внутренней точке  $x = 1$  отрезка интегрирования  $[-7; 2]$  и не ограничена вблизи нее.

Используя свойство (11.6) определенного интеграла, запишем исходный интеграл в виде суммы двух слагаемых:

$$\int_{-7}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int_{-7}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$



для вычисления которых применим определения соответственно (11.33), (11.34). Тогда получаем

$$\begin{aligned} \int_{-7}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{-7}^{1-\delta} (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{1+\delta}^2 (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{-7}^{1-\delta} + \lim_{\delta \rightarrow 0+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{1+\delta}^2 = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} 3\delta^{\frac{1}{3}} + 6 + 3 - \lim_{\delta \rightarrow 0+} 3(-\delta)^{\frac{1}{3}} = 9. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Вычислить интегралы (если они сходятся):

$$11.115. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

$$11.116. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$11.117. \int_0^{\infty} e^{-2x} dx.$$

$$11.118. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$11.119. \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$11.120. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

$$11.121. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^4}.$$

$$11.122. \int_{-1}^{-\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}.$$

$$11.123. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx.$$

$$11.124. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

$$11.125. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

$$11.126. \int_0^{+\infty} \arctg x dx.$$

$$11.127. \int_0^{+\infty} x e^{2x} dx.$$

$$11.128. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$11.129. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$11.130. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}.$$

$$11.131. \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

$$11.132. \int_1^0 \ln x dx.$$

$$11.133. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

**11.134.** Найти площадь фигуры, заключенной между кривой  $y = \frac{1}{x^2 + 2x}$  и ее горизонтальной асимптотой при  $x \geq 1$ .

**11.135.** Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси  $Ox$  плоской фигуры, заключенной между кривой  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4-x}}$ , ее вертикальной асимптотой и осью  $Ox$  на отрезке  $[2; 6]$ .

**11.136.** Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси  $Ox$  фигуры, заключенной между линиями  $y = \ln x$  и  $y = 0$  на полуинтервале  $(0; 1]$ .

### 11.14. Приближенное вычисление определенного интеграла

**11.137.** Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  по формуле трапеций с точностью до 0,01.

*Решение.* Известно, что  $k$ -я производная функции  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  может быть представлена в виде

$$f^{(k)}(x) = k! \cos^{k+1} u \sin \left( (k+1) \left( u + \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

где  $u = \arctg x$ .

Так как  $|\sin \alpha| \leq 1, |\cos \alpha| \leq 1$  при любом аргументе  $\alpha$ , то

$$|f^{(k)}(x)| \leq k!$$

Тогда  $|f''(x)| \leq 2! = 2$  и (см. формулу (11.36))

$$\Delta \leq \frac{(1-0)^3}{12n^2} \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}.$$

Из условия  $\Delta \leq 0,01$  находим  $n \geq 4,08$ , т.е. для достижения требуемой точности в формуле (11. 35) достаточно поло-

$$\begin{aligned} \text{жить } n = 5. \text{ Тогда } h = \frac{1-0}{5} = 0,2 \text{ и } x_0 = 0, x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, \\ x_3 = 0,6, x_4 = 0,8, x_5 = 1. \text{ Следовательно, } f(x_0) = \frac{1}{1+0^2} = 1, \\ f(x_1) = \frac{1}{1+0,2^2} = 0,96154, f(x_2) = \frac{1}{1+0,4^2} = 0,86207, \\ f(x_3) = \frac{1}{1+0,6^2} = 0,73529, f(x_4) = \frac{1}{1+0,8^2} = 0,60976, \end{aligned}$$

$f(x_5) = \frac{1}{1+1^2} = 0,5$ . Подставляя теперь эти значения в формулу (11.35), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,2 \left( \frac{1+0,5}{2} + 0,96154 + 0,86207 + 0,73529 + 0,60976 \right) = \\ = 0,78373. \end{aligned}$$

По формуле Ньютона — Лейбница  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ , поэтому применение формулы трапеций для данного определенного интеграла позволяет, в частности, найти число  $\pi$  с требуемой точностью. ►

**11.138.** Вычислить  $\ln 2$  с точностью до 0,01.

*Указание:* воспользоваться равенством  $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$  и формулой трапеций.

**11.139.** Вычислить по формуле трапеций для  $n = 10$  интеграл  $\int_0^4 x^2 dx$ . Найти значение погрешности полученного результата.

**11.140.** Вычислить по формуле трапеций для  $n = 8$  интеграл  $\int_1^9 \sqrt{6x-5} dx$ . Найти значение погрешности полученного результата.

**11.141.** При каком значении  $n$  следует применить формулу трапеций для вычисления интеграла  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  с точностью до 0,001?

### 11.15. Применение понятия определенного интеграла в экономике

**11.142.** Изменение производительности выпуска продукции с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией  $f = 32 - 2^{-0,5t+5}$ , где  $t$  — время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц; б) третий месяц; в) шестой месяц; г) последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

*Решение.* Используя экономический смысл интеграла (см. параграф 11.1), получаем, что объем продукции  $u(t_1, t_2)$ , произведенной за промежуток времени  $[t_1, t_2]$ , вычисляется следующим образом:

$$u(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} (32 - 2^{-0,5t+5}) dt = 32(t_2 - t_1) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,5t_2} - 2^{-0,5t_1}).$$

Тогда:

$$\text{а) } u(0; 1) = 32(1-0) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,5} - 2^0) = 4,95;$$

$$\text{б) } u(2; 3) = 32(3-2) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,5 \cdot 3} - 2^{-0,5 \cdot 2}) = 18,48;$$

$$\text{в) } u(5; 6) = 32(6-5) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,5 \cdot 6} - 2^{-0,5 \cdot 5}) = 27,22;$$

$$\text{г) } u(11; 12) = 32(12-11) + \frac{64}{\ln 2} (2^{-0,05 \cdot 12} - 2^{-0,5 \cdot 11}) = 31,4.$$

Сравнивая между собой полученные результаты, можно сделать вывод о том, что основная работа по внедрению данного технологического процесса приходится в основном на первую половину года. ►

Пусть влияние различных факторов на изменение производительности труда описывается функцией Кобба — Дугласа вида

$$f(t) = a_0 A^\alpha(t) L^\beta(t) K^\gamma(t),$$

где функции  $A(t)$ ,  $L(t)$ ,  $K(t)$  — величины затрат природных ресурсов, труда и капитала;  $a_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — некоторые числа.

**11.143.** Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба — Дугласа  $A(t) = e^t$ ,  $L(t) = (t + 1)^2$ ,  $K(t) = (100 - 3t)^2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0,5$  ( $t$  — время в годах).

*Решение.* Используя экономический смысл интеграла, получаем

$$u = (0; 5) = \int_0^5 e^t (t+1)(100-3t) dt = \int_0^5 e^t (-3t^2 + 97t + 100) dt.$$

Применяя дважды последовательно формулу интегрирования по частям (11.19), имеем

$$u = (0; 5) = (-3t^2 + 97t + 100)e^t \Big|_0^5 - (97 - 6t) \Big|_0^5 - 6e^t \Big|_0^5 = 64\,825. \blacktriangleright$$

**11.144.** По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением  $y = \frac{x}{3-2x}$ , где  $x \in [0; 1]$ . Вычислить коэффициент Джини  $k$ .

*Решение.* По формуле (11.21) получаем (см. рис. 11.28)

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \int_0^1 \left( x - \frac{x}{3-2x} \right) dx = \int_0^1 \left( x + \frac{x-1,5+1,5}{2x-3} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{2x-3} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{3}{4} \ln|2x-3| \Big|_0^1 = 1 - 0,75 \ln 3 \approx 0,176. \end{aligned}$$

Тогда

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\triangle OAC}} = \frac{0,176}{0,5} = 0,352. \blacktriangleright$$

Пусть  $p = f(x)$  — кривая спроса  $D$  на некоторый товар и  $p = g(x)$  — кривая предложения  $S$ , где  $p$  — цена товара,  $x$  — величина спроса (предложения).

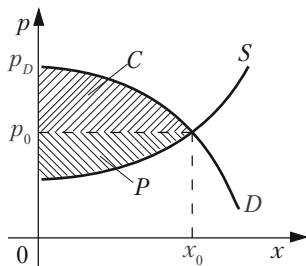


Рис. 11.47

Обозначим через  $(x_0, p_0)$  точку рыночного равновесия (рис. 11.47).

Доход от реализации количества товара  $x_0$  по равновесной цене  $p_0$  равен произведению  $x_0 p_0$ . Если предполагать непрерывное снижение цены от максимальной  $p_D = f(0)$  до равновесной  $p_0$  по мере удовлетворения спроса,

то доход составит  $\int_0^{x_0} f(x) dx$ . Величина денежных средств

$C = \int_0^{x_0} f(x) dx - p_0 x_0$  сберегается потребителями, если предполагать продажу товара по равновесной цене  $p_0$ , поэтому  $C$  называется также *выигрышем потребителей*.

Аналогично

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x) dx$$

называется *выигрышем поставщиков*.

Величины  $C$  и  $P$  численно равны площадям соответствующих криволинейных треугольников (см. рис. 11.47).

**11.145.** Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предположении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид  $p = 186 - x^2$ ,  $p = 20 + \frac{11}{6}x$ .

*Решение.* Решая систему

$$\begin{cases} p = 186 - x^2, \\ p = 20 + \frac{11}{6}x, \end{cases}$$

найдем точку рыночного равновесия  $x_0 = 12, p_0 = 42$ . Тогда

$$C = \int_0^{12} (186 - x^2) dx - 12 \cdot 42 = 186x \Big|_0^{12} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{12} - 504 = 1152;$$

$$\begin{aligned} P &= 12 \cdot 42 - \int_0^{12} \left(20 + \frac{11}{6}x\right) dx = 504 - 20x \Big|_0^{12} - \frac{11}{6} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{12} = \\ &= 132 \text{ (ден. ед.)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**11.146.** Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией  $z(t) = -0,00625t^2 + 0,05t + 0,5$  (ден. ед/ч), где  $t$  — время в часах от начала работы ( $0 \leq t \leq 8$ ). Найти функцию  $u = u(t)$ , выражающую объем продукции от времени  $t$  (в денежных единицах) и его величину за рабочий день.

**11.147.** Стоимость перевозки 1 т груза на 1 км (тариф перевозки) задается функцией  $f(x) = \frac{10}{x+2}$  (ден. ед/км). Определить затраты на перевозку 1 т груза на расстояние 20 км.

**11.148.** Определить объем выпуска продукции за первые 5 ч работы при производительности  $f(t) = 11,3e^{-0,417t}$ , где  $t$  — время в часах.

**11.149.** Найти объем продукции, выпущенной предприятием за год (258 рабочих дней), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией  $f(t) = -0,0033t^2 - 0,089t + 20,96$ , где  $t$  — время в часах ( $1 \leq t \leq 8$ ).

**11.150.** При непрерывном производстве химического волокна производительность  $f(t)$  (т/ч) растет с момента запуска в течение 10 часов, а затем остается постоянной. Сколько волокна дает аппарат в первые сутки после запуска, если  $f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1$  при  $t \in [0; 10]$ .

**11.151.** Найти объем выпуска продукции за четыре года, если в функции Кобба — Дугласа  $A(t) = e^{3t}$ ,  $L(t) = t + 1$ ,  $K(t) = 10$ ,  $a_0 = \alpha = \beta = \gamma = 1$ .

**11.152.** Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями:

а)  $y = 0,85x^2 + 0,15x$ ; б)  $y = 2^x - 1$ ; в)  $y = 0,7x^3 + 0,3x^2$ .

Какую часть дохода получают 10% наиболее низкооплачиваемого населения? Вычислить коэффициенты Джини для этих стран.

**11.153.** Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид  $p = 134 - x^2$ . Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

**11.154.** Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид  $p = \frac{100}{x+15}$ . Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

**11.155.** Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а)  $p = 250 - x^2$ ,  $p = \frac{1}{3}x + 20$ ; б)  $p = 240 - x^2$ ,  $p = x^2 + 2x + 20$ .

### 11.16. Двойные интегралы

**11.156.** Вычислить  $I = \iint_D y^2 \sin x \, dx \, dy$ , где  $D$  — область, ограниченная линиями  $y = 1 + \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  ( $x \in [0; \pi]$ ).

*Решение.* Данная область является элементарной, так как на отрезке  $[0; \pi]$  имеем  $h(x) = 1 + \cos x \geq g(x) = 0$  (см. параграф 11.10 и рис. 11.48). Следовательно, искомый интеграл сводится к повторному:

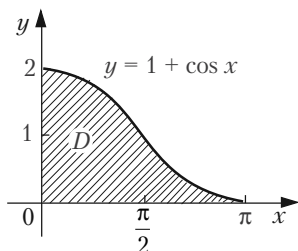


Рис. 11.48

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x \, dy = \\ &= \int_0^{\pi} \sin x \left( \frac{y^3}{3} \Big|_0^{1+\cos x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin x (1 + \cos x)^3 dx. \end{aligned}$$

Для нахождения последнего интеграла воспользуемся переменной  $t = 1 + \cos x$ . Тогда  $dt = -\sin x \, dx$ . Если  $x = 0$ , то  $t = 2$ , если  $x = \pi$ , то  $t = 0$ . Следовательно,

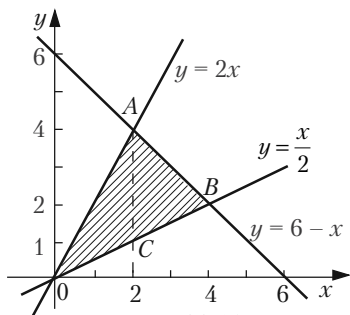


Рис. 11.49

$$I = -\frac{1}{3} \int_2^0 t^3 dt = -\frac{1}{3} \frac{t^4}{4} \Big|_2^0 = \frac{4}{3}.$$

**11.157.** Вычислить  $I = \iint_D x \, dx \, dy$ , где  $D$  — область, ограниченная линиями:  $y = \frac{x}{2}$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 6 - x$  (рис. 11.49).

*Решение.* Область  $D$  — «внутренность» треугольника  $ABO$  (см. рис. 11.49) — является объединением двух эле-



ментарных областей:  $D = D_1 \cup D_2$ , где  $D_1$  и  $D_2$  — «внутренности» треугольников соответственно  $ACO$  и  $ABC$ . Тогда (по аналогии со свойством (11.6) определенного интеграла) имеем

$$I = \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_2} x dx dy.$$

В силу элементарности областей  $D_1$  и  $D_2$  каждый из двух последних интегралов сводится к повторному:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} x dy + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} x dy = \int_0^2 x \left( y \Big|_{x/2}^{2x} \right) dx + \int_2^4 x \left( y \Big|_{x/2}^{6-x} \right) dx = \\ &= \int_0^4 x \left( 2x - \frac{x}{2} \right) dx + \int_2^4 x \left( 6 - x - \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^2 \frac{3}{2} x^2 dx + \int_2^4 \left( 6x - \frac{3}{2} x^2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^2 + 3x^2 \Big|_2^4 - \frac{1}{2} x^3 \Big|_2^4 = 12. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**11.158.** Вычислить  $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $D$  — часть

круга единичного радиуса с центром в начале координат, расположенная в первой четверти.

*Решение.* Искомый интеграл сводится к повторному:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

Используем переход к полярным координатам (см. параграф 11.10):

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}. \blacktriangleright$$

Вычислить двойные интегралы:

**11.159.**  $\iint_D (x + y^2) dx dy$ , где  $D$  ограничена прямыми  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = -x + 4$ .

**11.160.**  $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$ , где  $D$  ограничена линиями  $y = e^x$ ,  $y = e^{2x}$ ,  $x = 2$ .

**11.161.**  $\iint_D e^{xy} dx dy$ , где  $D$  ограничена гиперболой  $xy = 1$ , осью абсцисс и прямыми  $x = 2$ ,  $x = 3$ .

**11.162.**  $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$ , где  $D$  ограничена параболой  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$  и прямой  $x = 2$ .

**11.163.**  $\iint_D \sin(x - y) dx dy$ , где  $D$  ограничена прямыми  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x = \pi$ .

### Контрольные задания по главе 11 «Определенный интеграл»

№	Вариант 11.1	Вариант 11.2	Вариант 11.3
1	Вычислить определенные интегралы:		
	$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}$	$\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$	$\int_0^7 \frac{x^3}{\sqrt[3]{7+x^2}} dx$
	$\int_0^{\ln 0,5} \sqrt{1 - e^{2x}} dx$	$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$	$\int_1^e (x \ln x)^2 dx$
	$\int_0^3 x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx$	$\int_1^9 x^3 \sqrt{1-x} dx$	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$
2	$\int_0^{0,5} \frac{3-2x}{x^2-1} dx$	$\int_4^5 \frac{dx}{x^2-3x}$	$\int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x} dx}{1+e^{3x}}$
3	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2$ , $y = -1$ , $y = 2$	$y = \ln x$ , $y = e^x$ , $x = 2$ , $x = 0$ , $y = 0$	$y = 3x^3 - x$ , $y = 2x$
4	Найти объем тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ , $xy = 8$ , $x = 0$ , $y = 8$ (вокруг оси $Oy$ )	$xy = 6$ , $x = 1$ , $x = 6$ , $y = 0$ (вокруг оси $Ox$ )	$y = x^2$ , $y = \frac{1}{x}$ , $x = 2$ (вокруг оси $Oy$ )
5	Вычислить несобственный интеграл (если он сходится):		
6	$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(5x+7)^3}$	$\int_{-7}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

№	Вариант 11.1	Вариант 11.2	Вариант 11.3
8	Вычислить двойной интеграл, если область $D$ ограничена линиями $y = 1 - x^2$ и $y = 0$ :		
	$\iint_D (x + y^2) dx dy$	$\iint_D (x + 2y) dx dy$	$\iint_D xy dx dy$

## Тест 11

1. Найти максимальное значение интегральной суммы функции  $y = x^2$  на отрезке  $[0; 1]$ , если число отрезков разбиения равно 4.

Ответ:  $\frac{a}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a$  и  $b$  – положительные целые числа, дробь  $\frac{a}{b}$  – несократима).

2. При каких целых значениях параметров  $a$  и  $b$  справедливо равенство

$$\int_0^1 x \sqrt{e^{x^2+1}} dx = e^a - \sqrt{e^b}?$$

3. Найти такие целые значения  $a$  и  $b$ , при которых справедливо равенство

$$\int_1^{e-1} \ln(x+1) dx = a + 2 \ln b.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 7x}$$

Ответ:  $\frac{1}{a} \ln \frac{9}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a$  и  $b$  – целые числа).

5. При каком значении параметра  $a$  интеграл  $\int_0^3 \frac{ax+1}{x+1} dx$  равен площади  $S$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{x-2}{x+1}$ ,  $y = -2$ ,  $x = 3$ ? Найти эту площадь  $S$ .

-----  
*Ответ:*  $a = \dots$ ,  $S = 9 - \ln b$ , где  $b = \dots$  ( $a$  и  $b$  — целые числа).

6. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$  на отрезке  $[1; 4]$ .

*Ответ:*  $\frac{a}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a$  и  $b$  — положительные целые числа, дробь  $\frac{a}{b}$  — несократима).

7. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной линиями  $x = y^2$ ,  $x = 4y - y^2$ ,  $x = 0$ .

*Ответ:*  $\frac{a\pi}{3}$ , где  $a = \dots$

8. При каком минимальном значении  $n$  формула трапеций обеспечивает вычисление определенного интеграла

$$\int_1^5 \ln x \, dx \text{ с точностью до } 0,001?$$

9. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой  $y = (2x - 3)e^{-x}$  и ее горизонтальной асимптотой на промежутке  $[0; +\infty)$ .

10. Вычислить определенный интеграл  $\int_0^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$ , если он сходится.

# Глава 12

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

#### 12.1. Основные понятия

**Определение.** *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков данной функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если от нескольких — то *уравнением в частных производных*. Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения (и по этой причине само слово «обыкновенные» будет опускаться).

Простейший пример дифференциального уравнения дает задача о нахождении первообразной  $F(x)$  для заданной функции  $f(x)$  (см. гл. 10), поскольку ее можно рассматривать как задачу о нахождении функции  $F(x)$ , удовлетворяющей уравнению  $F'(x) = f(x)$ .

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (12.1)$$

где  $G$  — некоторая функция от  $n + 2$  переменных ( $n \geq 1$ ).

Порядок  $n$  старшей производной, входящей в запись уравнения, называется *порядком* дифференциального урав-

нения. Например, задача о нахождении первообразной приводит к дифференциальному уравнению первого порядка, уравнение

$$x^2(y''')^4 - x(y')^5 + 8 = 0$$

является уравнением третьего порядка и т.п.

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка называется *разрешенным относительно старшей производной*, если оно имеет вид

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

где  $F$  — некоторая функция от  $n + 1$  переменных.

*Решением дифференциального уравнения* (12.1) называется такая функция  $y = y(x)$ , которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество. Так, функция  $y = \sin x$  является решением уравнения  $y'' + y = 0$ , так как  $(\sin x)'' + \sin x = 0$  для любых  $x$ .

Если решение уравнения (12.1) получено в неявной форме, т.е. в виде уравнения  $G(x, y) = 0$ , то это решение называется *интегралом* дифференциального уравнения (12.1).

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется *задачей интегрирования* данного дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

**Пример 12.1.** Решить уравнение  $y'' = x$ .

*Решение.* Поскольку  $y'' = \frac{dy'}{dx}$ , то исходное уравнение равносильно следующему равенству дифференциалов:  $dy' = x dx$ . Выполняя почленное интегрирование, получаем  $y' = \frac{x^2}{2} + C_1$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная. Вновь записывая производную как отношение двух дифференциалов, приходим к равенству  $dy = \left( \frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx$ . Интегрируя почленно, окончательно получаем  $y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$ , где  $C_2$  — произвольная постоянная.

Отметим, что без дополнительных предположений решение данного уравнения принципиально неоднозначно. Иными словами, *дифференциальное уравнение задает семейство интегральных кривых на плоскости*. Для выделения однозначно определенной интегральной кривой (решения) в данном случае достаточно указать точку плоскости, через которую проходит искомая интегральная кривая, и направление, в котором она проходит через эту точку. (Дополнительные условия такого рода обычно называют *начальными*, поскольку часто дифференциальные уравнения используются для описания динамических процессов, т.е. процессов, происходящих во времени. В этих случаях независимая переменная  $x$  обозначает время.) Например, если известно, что

$$y(0) = 1 \text{ и } y'(0) = 2, \text{ то приходим к решению } y = \frac{x^3}{6} + 2x + 1.$$

Аналогично, для выделения однозначно определенного решения дифференциального уравнения  $n$ -го порядка следует, вообще говоря, дополнительно задать  $n$  начальных условий. ►

*Общим решением* дифференциального уравнения (12.1)  $n$ -го порядка называется такое его решение

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \quad (12.2)$$

которое является функцией переменной  $x$  и  $n$  произвольных независимых постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . (Независимость постоянных означает отсутствие каких-либо соотношений между ними.)

*Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

В примере 12.1  $y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$  — общее,  $y = \frac{x^3}{6} + 2x + 1$  — частное решения дифференциального уравнения  $y'' = x$ .

Чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства (12.2), следует продифференцировать равенство (12.2)  $n$  раз, считая, что  $y$  — функция независимой переменной  $x$ , а затем из полученных равенств и (12.2) исключить  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

**Пример 12.2.** Составить дифференциальное уравнение семейства кривых  $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ .

*Решение.* Дифференцируя заданную функцию, находим, что

$$y' = C_2 e^x + y, \quad y'' = 2C_2 e^x + y.$$

Исключая из этих двух равенств постоянную  $C_2$ , приходим к уравнению  $y'' - 2y' + y = 0$ . ►

К дифференциальным уравнениям приводится ряд задач экономики, физики, биологии, экологии и т.п. Рассмотрим некоторые из них.

**Пример 12.3.** Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности  $k_1$  и  $k_2$  соответственно. Найти закон изменения численности населения с течением времени, т.е. построить математическую модель демографического процесса.

*Решение.* Пусть  $y = y(t)$  — число жителей региона в момент времени  $t$ . Прирост населения  $\Delta y$  за время  $\Delta t$  равен разности между числом родившихся и умерших за это время, т.е.

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky,$$

где  $k = k_1 - k_2$ .

Переходя к пределу при  $\Delta y \rightarrow 0$ , получаем уравнение

$$y' = ky, \quad (12.3)$$

представляющее математическую модель демографического процесса. Решая это уравнение (см. параграф 12.4, а также пример 12.8), получаем закон изменения численности населения

$$y = Ce^{kt}, \quad (12.4)$$

где  $C$  — постоянная, определяемая начальными условиями.

Например, если в начальный момент  $t_0$  население региона составляло  $y_0$ , т.е.  $y_0 = Ce^{kt_0}$  (откуда  $C = y_0 e^{-kt_0}$ ), то математическая модель демографического процесса при начальном условии  $y(t_0) = y_0$  примет вид

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (12.5)$$



**Пример 12.4.** Найти уравнения кривых, в каждой точке которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам точкой касания.

*Решение.* Пусть  $M(x, y)$  — произвольная точка кривой указанного типа;  $y = kx + b$  — касательная к кривой в точке  $M$ ;  $A(a; 0)$  и  $B(0; b)$  — точки пересечения касательной с осями соответственно абсцисс и ординат (рис. 12.1). По условию имеем  $AM = BM$ , поэтому  $b = 2y$  или  $y - kx = 2y$ . Так как угловой коэффициент касательной является производной, т.е.  $k = y'$ , то приходим к уравнению

$$y' = -\frac{y}{x},$$

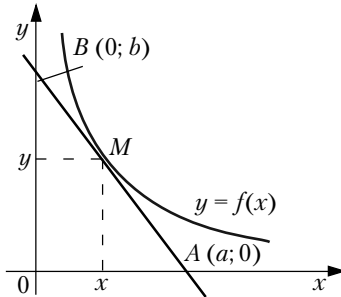


Рис. 12.1

решая которое (см. параграф 12.5), получаем уравнение обратной пропорциональной зависимости

$$y = \frac{C}{x}, \quad (12.6)$$

где  $C$  — некоторое число. ►

## 12.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.

### Теорема о существовании и единственности решения

Рассмотрим вопросы теории дифференциальных уравнений на примере уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, т.е. таких, которые могут быть представлены в виде

$$y' = f(x, y), \quad (12.7)$$

где  $f$  — некоторая функция двух переменных.

Будем обозначать через  $\Gamma$  множество точек плоскости  $Oxy$ , на котором функция  $f(x, y)$  определена, дополнительно предполагая, что множество  $\Gamma$  является открытым.

(Множество точек плоскости называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторую окрестность этой точки.)

Рассмотрим *геометрический смысл* уравнения (12.7). Производная функции  $y'$  представляет угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к кривой  $y = y(x)$  в точке с абсциссой  $x$ . Следовательно, уравнение (12.7) в каждой

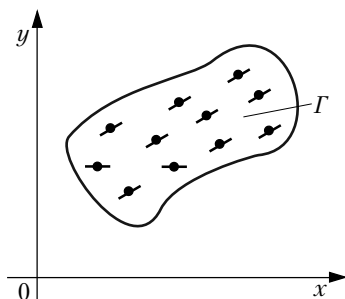


Рис. 12.2

точке  $(x, y)$  плоскости  $Oxy$  задает направление  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$  касательной к интегральной кривой  $y = y(x)$ , проходящей через эту точку. Говорят также, что уравнение (12.7) задает поле направлений в области  $\Gamma$  (рис. 12.2). Решить уравнение (12.7) — значит найти семейство кривых, отвечающих заданному полю направлений.

Перейдем теперь к теореме существования и единственности решения, играющей важную роль при описании решений дифференциального уравнения.

**Теорема.** Пусть в дифференциальном уравнении (12.7) функция  $f(x, y)$  и ее частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны на

открытом множестве  $\Gamma$  координатной плоскости  $Oxy$ . Тогда:

1. Для всякой точки  $(x_0, y_0)$  множества  $\Gamma$  найдется решение  $y = y(x)$  уравнения (12.7), удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

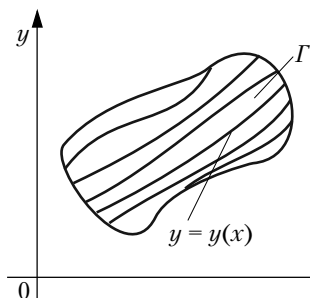


Рис. 12.3

2. Если два решения  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  уравнения (12.7) совпадают хотя бы для одного значения  $x = x_0$ , т.е. если  $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ , то эти решения совпадают для всех значений переменной  $x$ , для которых они определены.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что через каждую точку  $(x_0, y_0)$  множе-

ства  $\Gamma$  проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (12.7) (рис. 12.3).

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения (12.7), удовлетворяющего начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , называется *задачей Коши*. Таким образом, рассмотренная теорема устанавливает условия существования и единственности решения задачи Коши.

Приведем пример использования теоремы.

**Пример 12.5.** Решить уравнение

$$y' = y. \quad (12.8)$$

*Решение.* В данном случае  $f(x, y) = y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$  определены и непрерывны при любых  $x$  и  $y$ , и, следовательно, условия теоремы выполнены на всей плоскости  $Oxy$ .

Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся в том, что каждая функция вида

$$y = Ce^x, \quad (12.9)$$

где  $C$  — некоторое число, является решением уравнения (12.8).

Покажем, что все решения уравнения (12.8) имеют такой же вид при некотором значении постоянной  $C$ . Пусть  $y = y(x)$  — некоторое решение уравнения (12.8),  $x = x_0$  — точка, в которой это решение определено, и  $y_0 = y(x_0)$ . Положим  $C = y_0 e^{-x_0}$ . Тогда решения  $y = y(x)$  и  $y = Ce^x = y_0 e^{-x_0} e^x = y_0 e^{x-x_0}$  уравнения (12.8) совпадают при  $x = x_0$ , а потому, согласно п. 2 теоремы, совпадают для всех точек. ►

Приведем пример уравнения, для которого не выполняется условие единственности решения, т.е. существует такая точка плоскости  $Oxy$ , через которую проходит более одной интегральной

кривой. Пусть  $y' = y^{\frac{2}{3}}$ . Непосредственно проверяем, что  $y = 0$  и  $y = \left(\frac{x}{3}\right)^3$  — решения данного уравнения, проходящие через точку  $(0; 0)$  (рис. 12.4).

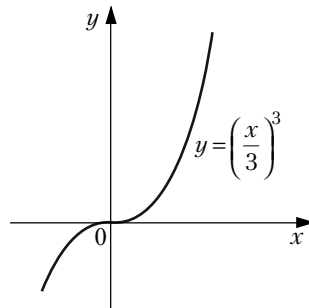


Рис. 12.4

### 12.3. Элементы качественного анализа дифференциальных уравнений первого порядка

Дифференциальное уравнение (12.7) называется *автономным*, если функция  $f$  зависит только от переменной  $y$ , т.е. если уравнение имеет вид

$$y' = f(y). \quad (12.10)$$

Например, уравнение (12.8) является автономным.

Уравнения такого типа часто встречаются на практике. Например, если дифференциальное уравнение описывает динамическое действие некоторого закона природы, то естественно предположить, что сам закон не будет изменяться с течением времени, поэтому в запись правой части уравнения (12.10) время  $x$  не входит (см., например, задачу о росте населения в примере 12.3).

Ниже будем предполагать, что для функции  $f(y)$  выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решения уравнения (12.10) при произвольном значении переменной  $y$ , т.е. положим, что функция  $f(y)$  имеет непрерывную производную при любом  $y$  (см. параграф 12.2). Кроме того, пусть нули функции  $f(y)$  (корни уравнения  $f(y) = 0$ ) не имеют предельных точек, т.е. все они отстоят друг от друга не менее, чем на заданную положительную величину.

Пусть уравнение (12.10) описывает процесс движения точки по прямой  $Oy$ , которая называется также *фазовой прямой* (переменная  $x$  обозначает время). В этом случае  $y'$  — это скорость движения точки. Согласно (12.10) она зависит только от координаты точки и не зависит от значения текущего момента времени.

Особую роль в проводимом анализе будут играть нули функции  $f(y)$ . Убедимся в том, что если  $f(a) = 0$  и точка в некоторый момент времени имеет координату  $y_0 = a$ , то с течением времени  $x$  она не меняет своего положения на фазовой прямой (оси  $Oy$ ). (Равно как и во все предшествующие моменты времени она находилась в этой же точке.) Действительно, проверяем подстановкой, что  $y = a$  — решение уравнения (12.10). Но решение  $y = a = \text{const}$  как раз и описывает точку, не меняющую с течением времени своего положения. Ввиду изложенных причин нули функции

$f(y)$  называются также *положениями равновесия* или *стационарными точками*.

Пусть  $a, b, c, \dots$  нули функции  $f(y)$ . Прямые  $y = a, y = b, y = c, \dots$  разбивают всю координатную плоскость на полосы, расположенные параллельно оси абсцисс. Рассмотрим особенности интегральных кривых, заполняющих одну из таких полос. Так как функция  $f(y)$  непрерывна, то согласно (12.10) производная  $y'$  знакопостоянна на произвольном интервале между положениями равновесия. В связи с этим все интегральные кривые, лежащие в одной полосе, задаются либо только возрастающими, либо только убывающими функциями.

**Пример 12.6.** Построить семейства интегральных кривых уравнения (12.8).

*Решение.* В данном случае  $f(y) = y$  и единственным нулем этой функции является  $y = 0$ . В результате вся координатная плоскость разбивается прямой  $y = 0$  на две полуплоскости («полосы»). Решения уравнения (12.8) описываются функциями вида (12.9). При  $C = 0$  получаем решение  $y = 0$ , отвечающее неподвижной точке. Для всех  $C > 0$  имеем семейство монотонно возрастающих функций, для  $C < 0$  — монотонно убывающих (рис. 12.5).

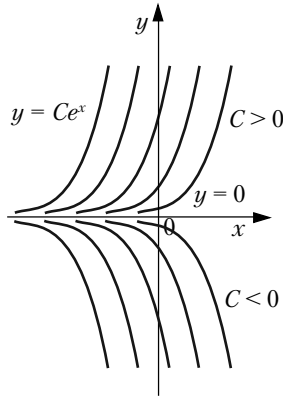


Рис. 12.5

Рассмотрим интегральные кривые, лежащие в выделенной полосе, например кривые  $y = Ce^x$ , где  $C > 0$ . Поскольку  $Ce^{x-x_0} = C_1e^x$ , где  $C_1 = Ce^{-x_0} > 0$ , то при *параллельном переносе* интегральной кривой вдоль оси абсцисс вновь получается интегральная кривая, причем из *того же* семейства.

Пусть  $y = C_1e^x$  и  $y = C_2e^x$  — две интегральные кривые указанного семейства и  $C_1 > 0, C_2 > 0$ . Переноса вторую кривую вдоль оси абсцисс на  $x_0 = \ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$  единиц, приходим к первой кривой. Действительно,

$y = C_2 e^{x-x_0} = C_2 e^{\ln\left(\frac{C_1}{C_2}\right)e^x} = \frac{C_2 C_1}{C_2} e^x = C_1 e^x$ . Таким образом, все

интегральные кривые одной полосы получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси абсцисс.

Отметим также, что прямая  $y = 0$ , отвечающая неподвижной точке дифференциального уравнения, является горизонтальной асимптотой интегральных кривых этого уравнения. ►

Можно доказать, что утверждения, сформулированные при решении примера 12.6, остаются справедливыми и в общем случае.

Описывая движение точки по фазовой прямой, мы полностью сохраним качественную информацию об этом движении, если вместо интегральных кривых изобразим лишь возможные траектории точки с указанием направления движения. Графическое изображение этих траекторий, называемых *фазовыми*, дает *фазовый портрет* автономного уравнения (12.10).

Например, фазовый портрет уравнения  $y' = y$  (см. пример 12.6) изображен на рис. 12.6. В данном случае фазовая прямая распадается на три траектории: интервалы  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; +\infty)$  и положение равновесия  $y = 0$ .

**Пример 12.7.** Найти фазовый портрет уравнения  $y' = 1 - y^2$ .

**Решение.** Решая уравнение  $1 - y^2 = 0$ , получаем положения равновесия:  $y = \pm 1$ . Траекторий в данном случае будет пять: интервалы  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(1; +\infty)$  и точки  $y = \pm 1$ . Из вида решаемого уравнения следует, что если  $y > 1$  или  $y < -1$ , то  $y' < 0$ , решение  $y = y(x)$  — убывающая функция,

и, следовательно, точка движется по фазовой прямой с уменьшением своей координаты (влево). Если  $-1 < y < 1$ , то  $y' > 0$ , и точка движется вправо. Окончательный фазовый портрет изображен на рис. 12.7. ►

Направления движения точки вблизи ее положения равновесия определяют тип положения равновесия. Например (см. рис. 12.7), находясь в достаточной близости от точки  $y = 1$ , подвижная точка будет лишь приближаться к точке равновесия  $y = 1$ . Такие положения равновесия называются *устойчи-*

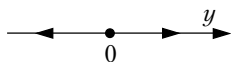


Рис. 12.6

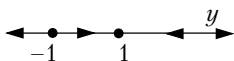


Рис. 12.7

выми. Наоборот, находясь в достаточной близости от точки  $y = -1$ , подвижная точка будет лишь удаляться от положения равновесия  $y = -1$ . Такие положения равновесия называются *неустойчивыми*. Возможен также третий тип точек равновесия — так называемые точки *полуустойчивого равновесия*. (Например, точка  $y = 0$  уравнения  $y' = y^2$  (рис. 12.8) или точка  $y = 0$  уравнения  $y' = y^4 - y^2$  (рис. 12.9).)

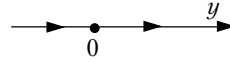


Рис. 12.8

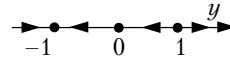


Рис. 12.9

## 12.4. Неполные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (12.7) первого порядка называется *неполным*, если функция  $f$  явно зависит либо только от  $x$ , либо только от  $y$ . Рассмотрим решения таких уравнений.

1. Уравнение  $y' = f(x)$  или  $\frac{dy}{dx} = f(x)$ . Перепишем уравнение в виде  $dy = f(x) dx$ , откуда его решение  $y = \int f(x) dx$ .

2. Уравнение

$$y' = f(y). \quad (12.11)$$

Его решение удобно искать в виде  $x = x(y)$ , т.е. считать, что переменная  $y$  обозначает независимую переменную, а переменная  $x$  — функцию. (Поскольку  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то уравнение (12.7) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

и в силу инвариантности формы дифференциала считать переменные  $x$  и  $y$  равноправными.) В этом случае из уравнения (12.11) получаем  $\frac{dy}{f(y)} = dx$  и

$$x = \int \frac{dy}{f(y)}. \quad (12.12)$$

**Пример 12.8.** Решить уравнение (12.8):

$$y' = y.$$

*Решение.* Найдем решение в виде  $x = x(y)$ . Полагая, что  $y \neq 0$  из уравнений (12.8) и (12.12), получаем  $x = \int \frac{dy}{y}$  и

$$x = \ln|y| + C_1, \quad (12.13)$$

откуда  $|y| = e^{-C_1} e^x$  и  $y = \pm e^{-C_1} e^x$ . Полагая, что произвольная постоянная  $C = \pm e^{-C_1}$ , получаем  $y = Ce^x$ . (Заметим, что это общее решение уравнения при  $C = 0$  дает частное решение  $y = 0$ , «потерянное» в процессе преобразований.) ►

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (12.14)$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0, \quad (12.15)$$

где  $f(x)$ ,  $M(x)$ ,  $P(x)$  — некоторые функции переменной  $x$ ;  $g(y)$ ,  $N(y)$ ,  $Q(y)$  — функции переменной  $y$ .

Для решения такого уравнения следует преобразовать его к виду, в котором дифференциал и функции переменной  $x$  окажутся в одной части равенства, а переменной  $y$  — в другой, а затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Так, из уравнения (12.14) следует, что

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$  и  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ . Выполняя интегрирование, приходим к решению уравнения (12.14).

**Пример 12.9.** Решить уравнение  $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$ .

*Решение.* Разделив левую и правую части уравнения на выражение  $x\sqrt{y^2 + 1}$  (при  $x \neq 0$ ), приходим к равенству

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}. \text{ Интегрируя, получаем}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}} \quad (12.16)$$



или

$$\ln|x| = \sqrt{y^2 + 1} + C_1, \quad (12.17)$$

так как интеграл в левой части (12.16) табличный, а интеграл в правой части может быть найден, например, с помощью замены  $\sqrt{y^2 + 1} = t$ ,  $y^2 + 1 = t^2$ ,  $2y dy = 2t dt$  и  $\int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t + C_1 = \sqrt{y^2 + 1} + C_1$ .

Решение (12.17) перепишем в виде  $x = \pm e^{C_1 \sqrt{y^2 + 1}}$  или  $x = Ce^{\sqrt{y^2 + 1}}$ , где  $C = \pm e^{C_1}$ .

Заметим, что  $x = 0$  — решение исходного дифференциального уравнения, которое в процессе выполнения задания не учитывалось, получается из найденного общего решения при  $C = 0$ . ►

Уравнения вида

$$y' = f(ax + by), \quad (12.18)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые числа, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой  $z = ax + by$  (или  $z = ax + by + c$ , где  $c$  — некоторое число).

**Пример 12.10.** Решить уравнение

$$(x + 2y)y' = 1. \quad (12.19)$$

*Решение.* Положим  $z = x + 2y$ . Тогда  $z' = 1 + 2y'$ , откуда  $y' = \frac{1}{2}(z' - 1)$  и исходное уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}z(z' - 1) = 1,$$

который допускает разделение переменных. Действительно, из последнего равенства получаем

$$z' = \frac{z + 2}{z}$$

и, следовательно,

$$\frac{z dz}{z + 2} = dx,$$

где  $z \neq -2$ . Выполним почленное интегрирование данного равенства:

$$\int dx = \int \frac{z dz}{z + 2} \text{ или } x = z - 2\ln|z + 2| + C_1$$

$$(\text{ибо } \int \frac{z dz}{z+2} = \int \left(1 - \frac{2}{z+2}\right) dz = \int dz - 2 \int \frac{dz}{z+2} = z - 2 \ln|z+2| + C_1).$$

Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем

$$x = x + 2y - 2 \ln|x + 2y + 2| + C_1$$

или

$$y - \ln|x + 2y + 2| = C, \quad (12.20)$$

где  $C = -\frac{1}{2}C_1$ .

Если  $z = -2$ , то  $y = -1 - \frac{1}{2}x$ . Проверка показывает, что эта функция также является решением исходного уравнения (12.19). Предлагаем читателю в качестве упражнения убедиться, что неявные функции (12.20) действительно удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению (12.19). ►

## 12.5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \quad (12.21)$$

где  $g$  — некоторая функция (одной переменной).

Например, уравнение  $y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}$  — однородное.

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями. Функция  $y = f(x, y)$  называется *однородной степени  $k$*  (по переменным  $x$  и  $y$ ), если для произвольного числа  $\alpha$  выполняется равенство

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y). \quad (12.22)$$

**Пример 12.11.** Выяснить, являются ли однородными следующие функции:

а)  $f(x, y) = x^2 - xy$ ; б)  $f(x, y) = \frac{2x + 3y}{x - y}$ ;

в)  $f(x, y) = xy + 1$ .

*Решение.*

а) Так как  $f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^2 - (\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2(x^2 - xy) = \alpha^2 f(x, y)$ , то данная функция однородная степени 2.

б) Так как  $f(\alpha x, \alpha y) = \frac{2(\alpha x) + 3(\alpha y)}{\alpha x - \alpha y} = \frac{2x + 3y}{x - y} = \alpha^0 f(x, y)$ , то данная функция однородная степени 0.

в) Так как  $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 xy + 1 \neq \alpha^k(xy + 1)$  ни для какого  $k$ , то данная функция неоднородная. ►

Если функция  $f(x, y)$  однородная степени 0, то уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (12.23)$$

может быть сведено к однородному. Действительно, положим  $\alpha = \frac{1}{x}$ . Тогда, согласно равенству (12.22), при  $k=0$   $f(x, y) =$

$= f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ . Полагая, что  $g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ , приводим уравнение (12.23) к виду (12.21).

Из доказанного следует, что если дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (12.24)$$

(где функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  являются однородными степени  $k$ ), то это уравнение может быть сведено к однородному, так как из (12.24) получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

а функция, стоящая в правой части последнего равенства, однородная степени 0.

Рассмотрим теперь способ решения дифференциального уравнения (12.21). Убедимся, что введение вспомогательной функции  $z$  от переменной  $x$  (замена переменной)

$z = \frac{y}{x}$  позволяет свести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, так как  $y = zx$ , то  $y' = z'x + z$ , поэтому уравнение (12.21) приобретает следующий вид:

$$z'x + z = g(z),$$

откуда получаем, что

$$\frac{dz}{g(z)-z} = \frac{dx}{x}. \quad (12.25)$$

**Пример 12.12.** Решить уравнение

$$y' = \frac{x+2y}{x}. \quad (12.26)$$

*Решение.* Так как  $\frac{x+2y}{x} = 1 + \frac{2y}{x}$ , то уравнение (12.26) имеет вид (12.21) при  $g\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + \frac{2y}{x}$ . Положим  $z = \frac{y}{x}$ . Тогда

$g(z) - z = 1 + 2z - z = 1 + z$  и согласно (12.25) принимает вид

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x},$$

где  $z \neq -1$ . Интегрируя почленно последнее равенство, получаем

$$\ln|1+z| = \ln|x| + C_1,$$

откуда  $|1+z| = e^{C_1}|x|$  или  $1+z = Cx$ , где  $C = \pm e^{C_1}$ . Возвращаясь к первоначальным переменным, имеем  $1 + \frac{y}{x} = Cx$ , откуда  $y = (Cx - 1)x$ .

Заметим, что при  $z = -1$  функция  $y = -x$  — решение данного уравнения (12.26), которая в процессе выполнения задания не учитывалась, получается из найденного общего решения при  $C = 0$ . ►

## 12.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид

$$y' + f(x)y = g(x), \quad (12.27)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — некоторые (непрерывные) функции переменной  $x$ .

Если функция  $g(x)$  тождественно равна нулю, уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Рассмотрим один из возможных способов решения уравнения (12.27). Будем искать решение в виде  $y = u(x)v(x)$  (тем самым искомыми становятся функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая должна определяться из уравнения (12.27)).

Так как  $y' = u'v + uv'$ , то из (12.27) следует, что  $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$  или

$$uv' + u(v' + f(x)v) = g(x). \quad (12.28)$$

Найдем сначала какое-либо частное решение  $v = v(x)$  уравнения

$$v' + f(x)v = 0. \quad (12.29)$$

Тогда (см. (12.28)) функция  $u = u(x)$  — решение уравнения

$$uv' = g(x). \quad (12.30)$$

Тем самым решение исходного уравнения (12.27) сводится к решению двух уравнений с разделяющимися переменными (см. (12.29) и (12.30)).

**Пример 12.13.** Решить уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4. \quad (12.31)$$

*Решение.* Разделив левую и правую части (12.31) на  $x$ , получаем линейное неоднородное уравнение

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

Пусть  $y = uv$ , т.е.  $y' = u'v + uv'$ , тогда уравнение (12.31) примет вид:  $u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3$  или

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x}v) = 2x^3. \quad (12.32)$$

Положим  $v' - \frac{2}{x}v = 0$  или  $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$ , откуда  $\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$ . Проинтегрировав, найдем какое-либо частное решение этого уравнения, например, при  $C = 0$   $\ln|v| = 2\ln|x|$  и  $v = x^2$ .

При  $v = x^2$  равенство (12.32) обратится в уравнение  $u'x^2 = 2x^3$  или  $\frac{du}{dx} = 2x$ . Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем  $u = x^2 + C$ . Тогда окончательно имеем  $y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2$ . ►

## 12.7. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка (тогда говорят, что данное дифференциальное уравнение допускает *понижение порядка*).

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' = f(x),$$

то оно решается последовательным интегрированием (см. пример 12.1).

Если в запись уравнения не входит искомая функция  $y(x)$ , т.е. оно имеет вид

$$G(x, y', y'') = 0,$$

то такое уравнение можно решить, найдя сначала вспомогательную функцию  $z = y'$ .

**Пример 12.14.** Решить уравнение  $xy'' + y' = 0$ .

*Решение.* Положим  $z = y'$ . Тогда  $y'' = z'$ , и исходное уравнение принимает вид  $xz' + z = 0$ . Откуда  $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$ . Интегрируя, приходим к решению  $z = \frac{C_1}{x}$ . Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение  $y' = \frac{C_1}{x}$  или  $dy = \frac{C_1 dx}{x}$ , решая которое, окончательно имеем  $y = C_1 \ln|x| + C_2$ . ►

Если в уравнение не входит переменная  $x$ , т.е. оно имеет вид

$$G(y, y', y'') = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, если за независимую переменную взять  $y$ , а за неизвестную функцию —  $z = z(y) = y'$ .

**Пример 12.15.** Решить уравнение  $2yy'' = (y')^2 + 1$ .

*Решение.* Положим  $z = z(y) = y'$ . Тогда  $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'z$ , и исходное уравнение принимает вид

$$2yzz' = z^2 + 1.$$

Данное уравнение — с разделяющимися переменными:

$\frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$  или  $\frac{d(z^2+1)}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$ . Выполняя интегрирование, получаем  $\ln(z^2+1) = \ln|y| + C$  или, полагая  $C = \ln C_1$ ,  $z = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$ . Так как  $z = y'$ , то приходим к следующему уравнению относительно функции  $y(x)$ :

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\pm \sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2)$$

или

$$C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2. \blacktriangleright$$

## 12.8. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x), \quad (12.33)$$

где  $p, q$  — некоторые действительные числа;  $r(x)$  — некоторая функция.

Если  $r(x) \equiv 0$ , то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (12.34)$$

называется *однородным*; если  $r(x) \not\equiv 0$ , то уравнение (12.33) называется *неоднородным*.

Можно доказать, что существует единственное решение уравнения (12.33), удовлетворяющее начальным условиям  $y(x_0) = z_1$ ,  $y'(x_0) = z_2$ , где  $x_0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  — некоторые (действительные) числа.

Рассмотрим сначала **решение линейного однородного уравнения** (12.34) с постоянными коэффициентами.

Напомним, что линейной комбинацией функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  с коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$  называется выражение вида  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ . Если линейная комбинация функций  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  равна нулевой функции только тогда, когда коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  равны нулю, то функции  $y_1$  и  $y_2$  называются *линейно независимыми*, в противном случае — *линейно зависимыми*.

**Пример 12.16.** Убедиться в линейной независимости следующих функций:

а)  $e^{\lambda_1 x}$  и  $e^{\lambda_2 x}$ , где  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ; б)  $e^{\lambda x}$  и  $x e^{\lambda x}$ ; в)  $e^{\alpha x} \sin \beta x$  и  $e^{\alpha x} \cos \beta x$ , где  $\beta \neq 0$ .

*Решение.*

а) Если  $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \equiv 0$ , то  $C_1 \equiv -C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ , но так как  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , функция, стоящая в правой части последнего равенства, является постоянной, только если  $C_2 = 0$  и, следовательно,  $C_1 = 0$ .

б) Тождественное равенство  $C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \equiv 0$  возможно, только если функция  $C_1 + C_2 x$  является нулевой, откуда следует, что  $C_1 = C_2 = 0$ .

в) Предположим, что  $C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \equiv 0$ . Тогда  $C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x \equiv 0$ . Если хотя бы один из коэффициентов  $C_1$  или  $C_2$  отличен от нуля, то нетрудно подобрать такое значение переменной  $x$ , что функция в левой части последнего равенства будет отлична от нуля (например  $x = 0$  или  $x = \frac{\pi}{2\beta}$ ). Поскольку это невозможно, то  $C_1 = C_2 = 0$ . ►

Рассматривая решения уравнения (12.34), прежде всего отметим, что они обладают, как говорят, структурой линей-



ного пространства: если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — решения уравнения (12.34), то их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (12.35)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые числа, также является решением этого уравнения. Действительно, подставляя функцию (12.35) в уравнение (12.34), получаем

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \\ &= C_1 (y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2 (y_2'' + py_2' + qy_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Другими словами, формула (12.35) указывает способ построения новых решений уравнения (12.34) из уже имеющихся. Возникает вопрос: сколько и какие решения уравнения (12.34) следует задать, чтобы с его помощью можно было описать все решения этого уравнения? Ответ на него дает следующая теорема.

**Теорема 1.** Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — линейно независимые частные решения уравнения (12.34), то общее решение этого уравнения является линейной комбинацией этих частных решений, т.е. имеет вид (12.35) для произвольных действительных чисел  $C_1$  и  $C_2$ .

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (12.34), надо знать два его частных решения  $y_1$  и  $y_2$ .

Будем искать решение уравнения (12.34) в форме

$$y = e^{\lambda x}, \quad (12.36)$$

где  $\lambda$  — некоторое (действительное) число (если такое существует).

Так как  $(e^{\lambda x})'' + p(e^{\lambda x})' + qe^{\lambda x} = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x}$ , то функция (12.36) является решением уравнения (12.34), если число  $\lambda$  — корень уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (12.37)$$

которое называется *характеристическим уравнением* исходного уравнения (12.34).

Описание решений уравнения (12.34) зависит от того, имеет ли соответствующее характеристическое уравнение (12.37) два различных корня, один корень или не имеет действительных корней. Справедлива теорема.

**Теорема 2. 1.** Пусть характеристическое уравнение (12.37) уравнения (12.34) имеет действительные корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , причем  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тогда общее решение уравнения (12.34) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (12.38)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые числа.

**2.** Если характеристическое уравнение (12.37) имеет один корень  $\lambda$  (кратности 2), то общее решение уравнения (12.34) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \quad (12.39)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые числа.

**3.** Если характеристическое уравнение (12.37) не имеет действительных корней, то общее решение уравнения (12.34) имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (12.40)$$

где  $\alpha = -\frac{p}{2}$ ,  $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ ,  $C_1, C_2$  — некоторые числа.

□ Принимая во внимание теорему 1 и результаты, полученные в примере 12.16, для доказательства достаточно проверить, что функции, линейные комбинации которых рассматриваются в п. «а», «б», «в» примера 12.16, действительно являются решениями уравнения (12.34) при сделанных предположениях. Для функций  $e^{\lambda_1 x}$  и  $e^{\lambda_2 x}$  из п. «а» и функции  $e^{\lambda x}$  из п. «б» справедливость этого утверждения вытекает из замечания о функциях вида (12.36) (см. выше). Проверку остальных случаев читателю в качестве упражнения предлагается сделать самостоятельно. ■

**Пример 12.17.** Найти частное решение следующих уравнений при указанных начальных условиях:

а)  $y'' - 3y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 4$ ;

б)  $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ;

в)  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

*Решение.*

а) Решая характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , получаем его корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Тогда общее решение данно-

го уравнения имеет вид  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ . Найдем такие значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , при которых выполняются заданные начальные условия. Так как  $y(0) = C_1 + C_2$  и  $y'(0) = C_1 + 2C_2$ , то постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находим, решая систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + 2C_2 = 4, \end{cases}$$

откуда  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 1$ .

По теореме о существовании и единственности решения уравнения вида (12.33) найденное частное решение  $y = 2e^x + e^{2x}$  — искомое.

б) Решая характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ , получаем его корни  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Согласно п. 2 теоремы 2 общее решение дифференциального уравнения (12.34) имеет вид  $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ . Так как  $y(0) = 1$ , следовательно,  $C_1 = 1$  и, поскольку  $y' = y + C_2 e^x$  и  $y'(0) = 0$ , то  $C_2 = -1$ . Таким образом, окончательно получаем частное решение

$$y = (1 - x)e^x.$$

в) Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$  не имеет действительных корней. В этом случае согласно п. 3 теоремы 2 общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x (\alpha = \beta = 1).$$

Так как  $y(0) = 1$ , то  $C_2 = 1$ . Найдем  $y' = (C_1 - C_2)e^x \sin x + (C_1 + C_2)e^x \cos x$ . Учитывая, что  $y'(0) = 1$ , получим  $C_1 = 0$ . Таким образом, приходим к частному решению  $y = e^x \cos x$ . ►

Перейдем теперь к **решению линейного неоднородного уравнения** (12.33) с постоянными коэффициентами.

Это уравнение может быть, в частности, решено *методом вариации произвольных постоянных*, который заключается в следующем. Сначала находится общее решение  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  однородного уравнения (12.34), имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение (12.33). Затем решение уравнения (12.33) ищется в виде  $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ , т.е. предполагается, что постоянные  $C_1$  и  $C_2$  являются функциями независимой пере-

менной  $x$ . При этом функции  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  могут быть найдены как решения системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = r. \end{cases} \quad (12.41)$$

**Пример 12.18.** Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = e^x. \quad (12.42)$$

*Решение.* Решая соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (12.43)$$

(см. пример 12.17, а), находим

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Полагая теперь, что  $C_1$  и  $C_2$  — функции переменной  $x$ , определим первые производные этих функций, решая систему (12.41)

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x + C_2' 2e^{2x} = e^x. \end{cases}$$

Найдем  $C_1' = -1$ ,  $C_2' = e^{-x}$ . Полученные дифференциальные уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными. Решая их, получаем  $C_1 = -x + C_3$ ,  $C_2 = -e^{-x} + C_4$ , где  $C_3$ ,  $C_4$  — некоторые постоянные. Таким образом, окончательно решение уравнения имеет вид

$$y = (-x + C_3) e^x + (-e^{-x} + C_4) e^{2x} = C_3 e^x + C_4 e^{2x} + (-x - 1) e^x. \blacktriangleright$$

Обратим внимание на структуру полученного решения. Первые два слагаемых — это общее решение однородного уравнения (12.43), соответствующего исходному дифференциальному уравнению (12.42). Последнее слагаемое, как нетрудно убедиться при непосредственном вычислении, — частное решение исходного уравнения (12.42). Аналогичное утверждение справедливо и в общем случае, т.е. справедлива теорема.

**Теорема 3.** *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (12.33) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (12.34) и частного решения исходного неоднородного уравнения (12.33).*

Следует отметить, что метод вариации произвольных постоянных достаточно сложен, поэтому в ряде случаев целесообразнее использовать другие методы решения, основанные на теореме 3. Сначала, как и в методе вариации произвольных постоянных, находится общее решение однородного дифференциального уравнения (12.34), а затем отыскивается частное решение неоднородного уравнения (12.33). При этом вид частного решения устанавливается по виду правой части уравнения (12.33), и задача сводится к отысканию коэффициентов этого частного решения.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

**1.** Пусть правая часть уравнения (12.33) является многочленом степени  $m$ , т.е. имеет вид

$$r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_m$  — действительные числа и  $a_m \neq 0$ .

Тогда частное решение уравнения (12.33) следует искать в виде

$$u(x) = (C_0 + C_1x + \dots + C_mx^m)x^k,$$

т.е. в виде произведения многочлена той же степени  $m$  на  $x^k$ , где  $k = 0$ , если  $q \neq 0$  (см. (12.37)),  $k = 1$ , если  $q = 0$  и  $p \neq 0$  и  $k = 2$ , если  $q = p = 0$ . (Другими словами, показатель степени  $k$  равен кратности значения  $x = 0$  как корня характеристического многочлена (12.37).)

**Пример 12.19.** Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' = 1 + 6x. \quad (12.44)$$

*Решение.* По сформулированному правилу частное решение уравнения (12.44) следует искать в виде

$$u(x) = (C_0 + C_1x)x. \quad (12.45)$$

Найдем значения параметров  $C_0$  и  $C_1$  в данном выражении для  $u(x)$ . Дифференцируя равенство (12.45), получаем

$$u'(x) = C_0 + 2C_1x, \quad u''(x) = 2C_1.$$

Так как  $u(x)$  — решение уравнения (12.44), то значения  $C_0$  и  $C_1$  должны быть такими, что равенство  $u'' - 3u' = 1 + 6x$ , т.е.

$$2C_1 - 3(C_0 + 2C_1x) = 1 + 6x$$

или

$$(2C_1 - 3C_0) - 6C_1x = 1 + 6x, \quad (12.46)$$

будет удовлетворяться тождественно, т.е. при всех  $x$ .

В связи с этим уравнение (12.46) равносильно системе

$$\begin{cases} 2C_1 - 3C_0 = 1, \\ -6C_1 = 6. \end{cases}$$

Решая ее, находим, что  $C_0 = C_1 = -1$ , т.е. искомое частное решение уравнения (12.44)

$$u(x) = -x - x^2. \quad \blacktriangleright$$

**2.** Пусть правая часть уравнения (12.33) имеет вид

$$r(x) = Ae^{ax},$$

где  $a$  и  $A$  — некоторые действительные числа.

Тогда частное решение уравнения (12.33) следует искать в виде

$$u(x) = C_0 x^k e^{ax}, \quad (12.47)$$

где показатель степени  $k$  равен кратности значения  $x = a$  как корня характеристического многочлена (12.37).

**Пример 12.20.** Найти частные решения уравнений:

а)  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ ; б)  $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ ;

в)  $y'' - 2y' + y = 6e^x$ .

*Решение.*

а) В данном случае  $a = 3$  и поскольку такого значения нет среди корней ( $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ) характеристического урав-

нения  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , то  $k = 0$ . Таким образом, частное решение заданного уравнения будем искать в виде  $u = C_0 e^{3x}$ .

Тогда  $u' = 3C_0 e^{3x}$ ,  $u'' = 9C_0 e^{3x}$ . Подставляя выражения  $u''$ ,  $u'$ ,  $u$  в заданное уравнение, приходим к равенству

$$9C_0 e^{3x} - 9C_0 e^{3x} + 2C_0 e^{3x} = 2e^{3x}$$

или

$$2C_0 e^{3x} = 2e^{3x},$$

которое должно удовлетворяться тождественно. Поэтому  $C_0 = 1$ , и искомое частное решение имеет вид  $u = e^{3x}$ .

б) Здесь  $a = 2$ , и это значение совпадает с одним из двух различных корней ( $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ) соответствующего характеристического уравнения. Поэтому  $k = 1$ , и частное решение заданного уравнения будем искать в виде  $u = C_0 x e^{2x}$ .

Подставляя выражения функции  $u$  и ее производных в заданное уравнение, получаем (после преобразований)  $u = x e^{2x}$ .

в) В данном случае  $a = 1$ . Одновременно корнями характеристического уравнения  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  заданного уравнения являются  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  (т.е. значение  $\lambda = 1$  — это корень кратности 2). Поэтому  $k = 2$ , и частное решение заданного уравнения следует искать в виде  $u = C_0 x^2 e^{2x}$ .

Подставляя выражения для функции  $u$  и ее производных в заданное уравнение, получаем после преобразований  $u = 3x^2 e^x$ . ►

**3.** Пусть правая часть уравнения (12.33) имеет вид

$$r(x) = A \cos bx + B \sin bx,$$

где  $A, B, b$  — некоторые действительные числа и  $b \neq 0$ .

Тогда частное решение уравнения (12.33) следует искать в виде

$$u(x) = x^k (C_0 \cos bx + C_1 \sin bx),$$

где  $k = 1$ , если одновременно выполнены условия  $p = 0$  (см. (12.37)),  $q > 0$ ,  $\beta = \sqrt{q}$ , и  $k = 0$  в остальных случаях. (Условия для случая  $k = 1$  равносильны требованию, чтобы значение  $b$  в выражении  $r(x)$  было таково, что комп-

лексное число<sup>1</sup>  $ib$  являлось одним из корней характеристического уравнения (12.33).)

**Пример 12.21.** Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x. \quad (12.48)$$

*Решение.* По сформулированному правилу частное решение в данном случае следует искать в виде  $u = C_0 \cos x + C_1 \sin x$ .

Найдем  $u' = -C_0 \sin x + C_1 \cos x$ ,  $u'' = -C_0 \cos x - C_1 \sin x$ .

Подставляя выражения  $u''$ ,  $u'$ ,  $u$  в уравнение (12.48), приходим к равенству

$$(-3C_1 + C_0) \cos x + (-C_1 + 3C_0 + 2C_1) \sin x = \sin x,$$

которое должно удовлетворяться тождественно.

Учитывая, что  $\sin x \equiv 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x$ , получаем систему

$$\begin{cases} -3C_1 + C_0 = 0, \\ C_1 + 3C_0 = 1, \end{cases}$$

откуда  $C_0 = 0,3$ ,  $C_1 = 0,1$  и, следовательно, искомое частное решение имеет вид  $u = 0,3 \cos x + 0,1 \sin x$ . ►

Рассмотренные случаи различных выражений правой части уравнения (12.33) являются частными случаями функции вида

$$r(x) = e^{ax} (f(x) \cos bx + g(x) \sin bx), \quad (12.49)$$

где  $f(x)$ ,  $g(x)$  — многочлены (с действительными коэффициентами);  $a$ ,  $b$  — некоторые (действительные) числа.

Через  $\lambda_r$  обозначим (комплексное) число, ассоциированное с неоднородностью вида (12.49):  $\lambda_r = a + ib$ . Пусть  $k = k(\lambda_r)$  — кратность числа  $\lambda_r$  как корня характеристического многочлена (12.37) решаемого уравнения (12.33). Тогда можно доказать, что частное решение уравнения (12.33) с правой частью (12.49) следует искать в виде

$$u = x^k e^{ax} (v(x) \cos bx + w(x) \sin bx), \quad (12.50)$$

где  $v(x)$ ,  $w(x)$  — многочлены, степень  $m$  которых равна наибольшей из степеней многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  в выражении (12.49).

<sup>1</sup> Комплексные числа рассмотрены в гл. 15.



Коэффициенты многочленов  $v(x)$  и  $w(x)$  находятся из системы линейных уравнений, получаемой после подстановки решения (12.50) и его производных в уравнение (12.33).

**Замечание.** Если правая часть  $r(x)$  уравнения (12.33) является суммой некоторых функций, т.е.

$$r(x) = r_1(x) + r_2(x) + \dots + r_n(x),$$

то для нахождения частного решения такого уравнения достаточно сложить частные решения  $u_i(x)$  уравнений

$$y'' + py' + qy = r_i(x), \text{ где } i = 1, 2, \dots, n, \text{ т.е.}$$

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

**Пример 12.22.** Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x} + e^{2x} + \sin x. \quad (12.51)$$

*Решение.* Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . Получим (см. пример 12.18)  $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ . Учитывая замечание (см. выше), частное решение дифференциального уравнения (12.51) будет равно сумме частных решений уравнений

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}, \quad y'' - 3y' + 2y = e^{2x}, \quad y'' - 3y' + 2y = \sin x,$$

найденных в примерах 12.20, а, б, 12.21, т.е.

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) = e^{3x} + x e^{2x} + 0,3 \cos x + 0,1 \sin x.$$

На основании теоремы 3 общее решение неоднородного дифференциального уравнения примет вид

$$y = \tilde{y} + u = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x} + x e^{2x} + 0,3 \cos x + 0,1 \sin x. \quad \blacktriangleright$$

## 12.9. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

Дифференциальные уравнения находят достаточно широкое применение в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени.

Рассмотрим некоторые (простейшие) задачи макроэкономической динамики.

**Задача 1.** Пусть  $y(t)$  — объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени  $t$ . Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене  $p$ , т.е. выполнено условие ненасыщаемости рынка. Тогда доход к моменту времени  $t$  составит  $Y(t) = py(t)$ .

Обозначим через  $I(t)$  величину инвестиций, направляемых на расширение производства. В модели *естественного роста* полагают, что скорость выпуска продукции (*акселерация*) пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$y'(t) = I(t), \quad (12.52)$$

где  $1/l$  — норма акселерации.

(Здесь мы пренебрегаем временем между окончанием производства продукции и ее реализацией, т.е. считаем, что инвестиционный лаг равен нулю.)

Полагая, что величина инвестиций  $I(t)$  составляет фиксированную часть дохода, получаем

$$I(t) = mY(t) = mpy(t), \quad (12.53)$$

где коэффициент пропорциональности  $m$  (так называемая *норма инвестиций*) — постоянная величина ( $0 < m < 1$ ).

Подставляя выражение (12.53) для  $I(t)$  в (12.52), приходим к уравнению

$$y' = ky, \quad (12.54)$$

где  $k = mpl$ .

Полученное дифференциальное уравнение — с разделяющимися переменными. Решая его, приходим к функции  $y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$ , где  $y_0 = y(t_0)$  (см. пример 12.3).

Заметим, что уравнение (12.54) описывает также рост народонаселения (демографический процесс, см. параграф 12.1), динамику роста цен при постоянной инфляции, процесс радиоактивного распада и др.

На практике условие насыщаемости рынка может быть принято только для достаточно узкого временного интервала. В общем случае кривая спроса, т.е. зависимость цены  $p$  реализованной продукции от ее объема  $y$  является убывающей функцией  $p = p(y)$  (с увеличением объема произведенной продукции ее цена падает в результате насыщения рынка). В связи с этим модель роста в *условиях конкурентного рынка* примет вид

$$y' = mlp(y)y, \quad (12.55)$$

оставаясь по-прежнему уравнением с разделяющимися переменными.

Так как все сомножители в правой части уравнения (12.55) положительны, то  $y' > 0$ , и это уравнение описывает возрастающую функцию  $y(t)$ . При исследовании функции  $y(t)$  на выпуклость естественно используется понятие эластичности функции. Действительно, из формулы (12.55) следует, что

$$y'' = mly' \left( \frac{dp}{dy} y + p \right).$$

Напомним, что эластичность спроса (относительно цены) определяется по формуле  $E_p(y) = \frac{p}{y} \frac{dy}{dp}$  (см. параграф 7.6). Тогда выражение для  $y''$  можно записать в виде

$$y'' = mly' p \left( \frac{1}{E_p(y)} + 1 \right)$$

и условие  $y'' = 0$  равносильно равенству  $E_p(y) = -1$ .

Таким образом, если спрос эластичен, т.е.  $|E_p(y)| > 1$  или  $E_p(y) < -1$ , то  $y'' > 0$  и функция  $y(t)$  выпукла вниз; если спрос не эластичен, т.е.  $|E_p(y)| < 1$  или  $-1 < E_p(y) < 1$ , то  $y'' < 0$  и функция  $y(t)$  выпукла вверх.

**Пример 12.23.** Найти выражение для объема реализованной продукции  $y = y(t)$ , если известно, что кривая спроса  $p(y)$  задается уравнением  $p(y) = 2 - y$ , норма акселерации  $\frac{1}{l} = 2$ , норма инвестиций  $m = 0,5$ ,  $y(0) = 0,5$ .

*Решение.* Уравнение (12.55) в этом случае принимает вид

$$y' = (2 - y)y$$

или

$$\frac{dy}{(2 - y)y} = dt.$$

Выполняя почленное интегрирование, получаем

$$\ln \left| \frac{y-2}{y} \right| = -2t + C_1$$

или

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t}, \quad (12.56)$$

где  $C = \pm e^{C_1}$ .

Учитывая, что  $y(0) = 0,5$ , имеем  $C = -3$ . Выражая теперь  $y$  из равенства (12.56), окончательно имеем

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}.$$

График данной функции схематично представлен на рис. 12.10. (В данном случае эластичность спроса задается

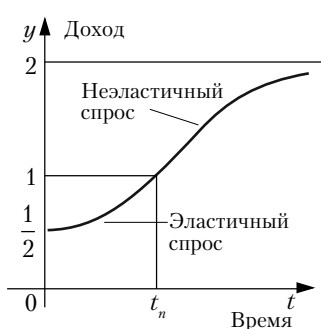


Рис. 12.10

функцией  $E_p(y) = \frac{y-2}{y}$  и условие  $E_p(y) = \frac{pdy}{ydp} = \frac{y-2}{y}$ , определяющее положение точки перегиба на кривой, дает  $y = 1$ .)

Кривая, изображенная на рис. 12.10, называется *логистической*. Подобные кривые описывают процесс распространения информации (рекламы), динами-

ку эпидемий, процесс размножения бактерий в ограниченной среде и др. ►

**Задача 2.** Доход  $Y(t)$ , полученный к моменту времени  $t$  некоторой отраслью, является суммой инвестиций  $I(t)$  и величины потребления  $C(t)$ , т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(t). \quad (12.57)$$

Как и ранее в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций:

$$bY'(t) = I(t), \quad (12.58)$$

(где  $b$  — коэффициент капиталоемкости прироста дохода), что равносильно условию (12.52) при постоянной цене продукции  $p$  и  $l = \frac{1}{pb}$ .

Рассмотрим поведение функции дохода  $Y(t)$  в зависимости от функции  $C(t)$ .

Пусть  $C(t)$  представляет фиксированную часть получаемого дохода:  $C(t) = (1-m)Y(t)$ , где  $m$  — норма инвестиций (см. задачу 1). Тогда из соотношений (12.57) и (12.58) получаем

$$Y' = \frac{m}{b}Y, \quad (12.59)$$

что равносильно уравнению (12.54) при  $p = \text{const}$ .

В ряде случаев вид функции потребления  $C(t)$  бывает известен (из некоторых дополнительных соображений).

**Пример 12.24.** Найти функцию дохода  $Y = Y(t)$ , если известно, что величина потребления задается функцией  $C = 2t$ , коэффициент капиталоемкости прироста дохода  $b = \frac{1}{2}$ ,  $Y(0) = 2$ .

*Решение.* Из соотношений (12.57) и (12.58) имеем уравнение

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t,$$

т.е. функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка.

Для решения этого уравнения воспользуемся методом, описанным в параграфе 12.6. Будем искать решение в виде  $Y(t) = u(t)v(t)$ . Тогда имеем  $u(t) = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$ ,  $v(t) = e^{2t}$ . Значение постоянной  $C$  находим из начальных условий: поскольку  $Y(0) = u(0)v(0) = 2$ , то  $C = 1$ . Окончательно имеем  $Y(t) = 2t + e^{2t} + 1$ . ►

## 12.10. Системы дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений называется *нормальной*, если она имеет вид

$$x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (12.60)$$

где  $t$  — независимая переменная,  $x_1, \dots, x_n$  — функции этой переменной,  $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Геометрически решение системы (12.60) представляет кривую в пространстве  $(n + 1)$  с координатами  $t, x_1, \dots, x_n$ .

В простейших случаях последовательным исключением переменных такая система сводится к дифференциальному уравнению более высокого порядка, зависящему только от одной функции.

**Пример 12.25.** Решить систему

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = e^{2t} + x_1. \end{cases}$$

*Решение.* Из второго уравнения следует, что  $x''_2 = 2e^{2t} + x'_1$ , где  $x''_2 = \frac{d}{dt}(x'_2)$ . Принимая во внимание первое уравнение исходной системы, получаем

$$x''_2 - x_2 = 2e^{2t}, \quad (12.61)$$

т.е. дифференциальное уравнение второго порядка. Решением соответствующего однородного уравнения

$$x''_2 - x_2 = 0$$

является функция

$$x_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Частным решением неоднородного уравнения (12.61) является функция

$$z = \frac{2}{3} e^{2t}.$$

Поэтому общее решение уравнения (12.61) имеет вид

$$x_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{2}{3} e^{2t}.$$

Теперь из второго уравнения исходной системы следует

$$x_1 = x_2' - e^{2t} = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{4}{3} e^{2t} - e^{2t} = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{3} e^{2t}. \blacktriangleright$$

Сформулируем теорему существования и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений.

**Теорема.** Пусть для нормальной системы уравнений

(12.60) функции  $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , где  $1 \leq i, j \leq n$ , непрерывны на некотором открытом множестве  $\Gamma$  пространства  $(n+1)$  измерений с координатами  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Тогда для каждой точки  $t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  множества  $\Gamma$  существует решение

$$x_i = \varphi_i(t), \quad 1 \leq i \leq n,$$

системы (12.60), определенное на некотором интервале значений переменной  $t$  и удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_i(t_0) = x_{i0}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (12.62)$$

Если найдутся два решения системы (12.60), удовлетворяющих начальным условиям (12.62) (каждое возможно на своем собственном интервале значений переменной  $t$ ), то эти решения совпадают всюду, где они оба определены.





*Решение.* Характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

системы имеет вид  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  (см. параграф 3.7).

Его корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Собственные векторы матрицы  $A$ , отвечающие этим собственным значениям, например,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$X = C_1 X_1 e^t + C_2 X_2 e^{2t}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t}, \\ x_2 = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Тот же результат можно было получить, применяя последовательное исключение переменных (аналогично примеру 12.15) и методы, описанные в параграфе 12.8 (предлагаем убедиться в этом читателю самостоятельно). ►

Пусть  $\lambda$  — корень кратности  $k$  характеристического многочлена матрицы  $A$ ,  $m$  — максимальное число линейно независимых собственных векторов матрицы  $A$ , отвечающих собственному значению  $\lambda$ , причем  $m < k$ . Тогда решение системы (12.64), отвечающее собственному значению  $\lambda$ , можно искать в виде

$$(B_0 + B_1 t + \dots + B_{k-m} t^{k-m}) e^{\lambda t}, \quad (12.65)$$

где  $B_0, B_1, \dots, B_{k-m}$  — некоторые векторы размерности  $n$ .

Для нахождения этих векторов следует подставить выражение (12.65) в систему (12.64) и найти общее решение полученной системы (относительно компонент векторов  $B_i$  как неизвестных, которые будут зависеть от  $k$  произвольных постоянных). Тогда сумма векторов вида (12.65), отвечающих различным значениям  $\lambda$ , дает общее решение системы (12.64).

**Пример 12.27.** Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = -x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

*Решение.* Характеристическое уравнение матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  системы имеет вид  $(\lambda - 2)^2 = 0$ . Единственным корнем (кратности 2) этого уравнения является  $\lambda = 2$ . Нетрудно убедиться в том, что максимальное число  $m$  линейно независимых собственных векторов матрицы  $A$  равно единице. Следовательно, решение заданной системы будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (B_0 + B_1 t) e^{2t}, \quad (12.66)$$

где  $B_0 = \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{pmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ .

Подставляя выражения для  $x_1$  и  $x_2$  из (12.66) в исходную систему, приходим к равенствам

$$\begin{cases} b_{11} + 2b_{10} + 2b_{11}t = b_{10} + b_{11}t + b_{20} + b_{21}t, \\ b_{21} + 2b_{20} + 2b_{21}t = -b_{10} - b_{11} + 3b_{20} + 3b_{21}t. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются тождественно (т.е. при любых значениях переменной  $t$ ), если компоненты  $b_{ij}$  векторов  $B_0$ ,  $B_1$  удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} b_{11} + b_{10} - b_{20} = 0, \\ b_{11} - b_{21} = 0, \\ b_{21} + b_{10} - b_{20} = 0, \\ b_{11} - b_{21} = 0. \end{cases}$$

В полученной системе последнее уравнение совпадает со вторым, а третье есть разность первого и второго уравне-

ний, которые линейно независимы. В связи с этим данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} b_{11} + b_{10} = b_{20}, \\ b_{11} = b_{21}. \end{cases}$$

Общее решение последней системы получим, полагая, что параметры  $C_1 = b_{20}$ ,  $C_2 = b_{21}$  независимо друг от друга принимают все возможные значения. Тогда  $b_{11} = C_2$ ,  $b_{10} = C_1 - C_2$ .

Окончательно общее решение исходной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (B_0 + B_1 t) e^{2t} = \begin{pmatrix} (C_1 - C_2) + C_2 t \\ C_1 + C_2 t \end{pmatrix} e^{2t}. \blacktriangleright$$

Пусть

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12.67)$$

является некоторым решением автономной системы (12.63). Каждому значению  $t$  (из области допустимых значений) решение (12.67) ставит в соответствие точку

$$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (12.68)$$

так называемого *фазового пространства*. Частным случаем фазового пространства является фазовая прямая (см. параграф 12.3). Совокупность всех таких точек образует кривую, которая называется *фазовой*. Тем самым (по аналогии со случаем одной переменной — см. параграф 12.3) решение (12.68) может рассматриваться как описание движения точки по фазовой кривой.

**Пример 12.28.** Найти фазовые кривые системы, приведенной в примере 12.26.

*Решение.* Наиболее наглядное представление о характере фазовых кривых можно получить, если подходящим образом выбрать систему координат в исходном фазовом пространстве. Более точно, исходному вектору

$$X = C_1 e^t X_1 + C_2 e^{2t} X_2$$

поставим в соответствие вектор

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Такое преобразование равносильно переходу от базиса  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (называемого *каноническим*) исходного фазового пространства к базису, образованному собственными векторами  $X_1, X_2$  матрицы  $A$  данной системы. Если

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}, \quad \text{то}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1^* + 3x_2^*, \\ x_2 = x_1^* + 2x_2^*. \end{cases}$$

Пусть решение исходной системы дифференциальных уравнений таково, что постоянная  $C_1 = 0$ . Тогда фазовая кривая имеет уравнение  $x_1^* = 0$ . Аналогично при  $C_2 = 0$  фазовая кривая описывается уравнением  $x_2^* = 0$ .

Если  $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ , то

$$x_2^* = C_2 e^{2t} = C_2 (C_1 e^t)^{-2} C_1^{-2} = C_2 C_1^{-2} (x_1^*)^2,$$

т.е. графиком фазовой кривой является парабола.

Отметим, что при  $C_1 = C_2 = 0$  возникает положение равновесия, которому соответствует стационарная точка фазового портрета решаемой системы дифференциальных уравнений. Действительно,  $x_1^* = x_2^* = 0$  — это решение исходной системы, и с изменением переменной  $t$  положение этой точки на фазовой плоскости не меняется. Более того, можно заметить, что точка  $(x_1^*, x_2^*) = (0; 0)$  является точкой неустойчивого равновесия, поскольку с увеличением переменной  $t$  точка  $(x_1^*, x_2^*) = (C_1 e^t, C_2 e^{2t})$  удаляется от этой стационарной точки. ►

## ПРАКТИКУМ

**12.11. Основные понятия**

**12.29.** Доказать, что функция

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (12.69)$$

является решением уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (12.70)$$

*Решение.* Последовательно дифференцируя (12.69), приходим к следующим равенствам:

$$\begin{cases} y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}, \\ y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно  $C_1 e^x$  и  $C_2 e^{2x}$ , получаем

$$\begin{aligned} C_1 e^x &= 2y' - y'', \\ C_2 e^x &= \frac{1}{2}(y'' - y'). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (12.69), приходим к уравнению (12.70). ►

**12.30.** Проверить, что функция

$$y^3 - Cx^3 + 3xy = 0 \quad (12.71)$$

является общим интегралом дифференциального уравнения

$$y^3 - (xy^2 + x^2)y' + 2xy = 0. \quad (12.72)$$

*Решение.* Дифференцируя (12.71) по  $x$  в предположении, что  $y = y(x)$ , приходим к равенству

$$y^2 y' - Cx^2 + y + xy' = 0,$$

откуда

$$Cx^2 = (y^2 + x)y' + y.$$

Подставляя выражение для  $Cx^2$  из последнего равенства в формулу (12.71), имеем

$$y^3 - (y^2 y' + xy' + y)x + 3xy = 0,$$

что равносильно уравнению (12.72). ►

**12.31.** Найти дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = C(x - C)^2. \quad (12.73)$$

*Решение.* Дифференцируя (12.73) по переменной  $x$ , получаем

$$y' = 2C(x - C), \quad (12.74)$$

откуда

$$C^2 = Cx - 0,5y'. \quad (12.75)$$

С помощью равенства (12.75) преобразуем (12.73) так, что постоянная  $C$  будет входить в запись слагаемых полученного выражения в степенях не более первой:

$$y = 0,5xy' - 0,5Cy'.$$

Следовательно,

$$Cy' = xy' - 2y. \quad (12.76)$$

Умножая (12.74) на  $(y')^2$ , получаем

$$(y')^3 = 2xy'(Cy') - 2(Cy')^2.$$

Исключая с помощью (12.76) из полученного равенства  $Cy'$ , окончательно имеем

$$(y')^3 = 4xyy' - 8y^2. \quad \blacktriangleright$$

**12.32.** Найти решение уравнения

$$y' = 2xe^{x^2},$$

удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 1$ .

*Решение.* Из определения неопределенного интеграла (см. гл. 10) следует, что общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = \int 2xe^{x^2} dx.$$

Используя преобразование переменной под знаком дифференциала, получаем

$$y = \int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + C.$$

Учитывая начальное условие, приходим к равенству  $1 = 1 + C$ , откуда  $C = 0$ . Таким образом, искомое частное решение

$$y = e^{x^2}.$$

Геометрически найденная функция представляет интегральную кривую дифференциального уравнения, проходящую через точку  $(0; 1)$ . ►

Проверить, что функции являются интегралами дифференциальных уравнений:

$$12.33. \quad x^2 - xy + y^2 = C^2, \quad (x - 2y)y' = 2x - y.$$

$$12.34. \quad x\sqrt{1+y^2} = Cy, \quad xy' - y = y^3.$$

$$12.35. \quad y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}, \quad 2x^2yy' + y^2 = 2.$$

$$12.36. \quad y = C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} + C_2, \quad x(y'' + 1) + y' = 0.$$

При каких значениях параметра  $a$  следующие функции являются решениями (интегралами) дифференциальных уравнений:

$$12.37. \quad x = Cy^2 - y^a, \quad y^2 - (2xy + 3)y' = 0.$$

$$12.38. \quad y = ax^4 + \frac{C}{x^2}, \quad y' + \frac{2y}{x} = x^3.$$

Составить дифференциальные уравнения семейств кривых:

$$12.39. \quad y = Ce^x.$$

$$12.40. \quad x^2 + Cy^2 = 2y.$$

$$12.41. \quad Cy = \sin Cx.$$

$$12.42. \quad y^3 = C_1(x + C_2)^2.$$

## 12.12. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

**12.43.** Найти решение уравнения

$$yx^2 dy - \ln x dx = 0, \quad (12.77)$$

удовлетворяющее начальному условию  $y(1) = 2$ .

*Решение.* Исходное уравнение перепишем в виде

$$y dy = \frac{\ln x dx}{x^2}. \quad (12.78)$$

Таким образом, имеем уравнение с разделяющимися переменными, и из равенства (12.78) следует, что

$$\int y dy = \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Интеграл левой части — табличный. Для нахождения интеграла правой части воспользуемся формулой интегрирования по частям (см. гл. 10), где  $u = \ln x$ ,  $dv = \frac{dx}{x^2}$ :

$$\frac{y^2}{2} = -x^{-1} \ln x + \int x^{-2} dx.$$

Окончательно интеграл уравнения (12.77) имеет вид

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C.$$

Учитывая начальное условие  $y(1) = 2$ , получаем  $\frac{2^2}{2} = -(\ln 1 + 1) + C$ , откуда  $C = 3$  и искомое частное решение имеет вид

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + 3.$$

**Замечание.** Если ищется не общее, а частное решение уравнения (12.14) с разделяющимися переменными, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , то неопределенное интегрирование обеих частей уравнения можно заменить определенным; тогда получим

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$



В данном случае (см. пример 12.43)

$$\int_2^y y dy = \int_1^x \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

откуда (после интегрирования)

$$\frac{y^2}{2} \Big|_2^y = -\frac{1}{x} (\ln x + 1) \Big|_1^x$$

и  $\frac{1}{2}(y^2 - 4) = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + (\ln 1 + 1)$ , т.е.  $\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + 3$ . ►

**12.44.** Решить уравнение  $y' + 1 = \sqrt{x + y + 1}$ .

*Решение.* Воспользуемся заменой  $z = x + y + 1$ , где  $z = z(x)$ . Тогда  $z' = y' + 1$ , и исходное уравнение принимает вид

$$z' = \sqrt{z}$$

или

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = dx,$$

т.е. становится уравнением с разделяющимися переменными относительно переменной  $z$ , где  $z \neq 0$ .

Решая это уравнение, получаем

$$\int z^{-\frac{1}{2}} dz = \int dx;$$

$$2z^{\frac{1}{2}} = x + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, имеем

$$2\sqrt{x + y + 1} = x + C$$

или

$$y = 0,25(x + C)^2 - x - 1, \text{ где } x \geq -C.$$

Если  $z = 0$ , то  $y = -x - 1$ . Проверка показывает, что эта функция также является решением исходного дифференциального уравнения. ►

Решить дифференциальные уравнения:

12.45.  $(3x-1)dy + y^2dx = 0$ .

12.46.  $3x^2ydx + 2\sqrt{4-x^3}dy = 0$ .

12.47.  $xy' + 2y = 2xyy'$ .      12.48.  $e^{1-2x}(y^2-1)dy - dx = 0$ .

12.49.  $x^2(y'-1) = 2y'$ .      12.50.  $e^{x+y}dx + ydy = 0$ .

12.51.  $y' = (x+y)^2$ .

12.52.  $(2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0$ .

12.53.  $y' = \sqrt{4x+2y-1}$ .      12.54.  $y'e^{-x} = x-1$ .

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанному начальному условию:

12.55.  $(1+x^2)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0$ ,  $y(1) = -1$ .

12.56.  $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

12.57.  $x^2(2yy'-1) = 1$ ,  $y(1) = 0$ .

12.58.  $ydx + \operatorname{ctg} x dx = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ .

### 12.13. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

12.59. Решить уравнение

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}. \quad (12.79)$$

*Решение.* Правая часть  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$  уравнения (12.79) является однородной функцией степени нуль по переменным  $x$  и  $y$ , так как

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2}{2(\alpha x)^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y).$$

Поэтому само уравнение (12.79) — однородное. Для его решения воспользуемся заменой переменной  $z = \frac{y}{x}$ , где  $z = z(x)$ . Тогда  $y = zx$ ,  $y' = z'x + z$ , и уравнение (12.79) принимает вид

$$z'x + z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2$$

или

$$z'x = \frac{(z-1)^2}{2},$$

что при  $z \neq 1$  равносильно

$$\frac{2dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x},$$

т.е. приходим к уравнению с разделяющимися переменными.

Выполняя почленное интегрирование последнего равенства, получаем

$$-\frac{2}{z-1} = \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, после преобразования имеем

$$y = x - \frac{2x}{\ln|x| + C}.$$

Если  $z = 1$ , то  $y = x$ . Проверка показывает, что эта функция при  $x \neq 0$  также является решением уравнения (12.79). ►

Уравнение вида

$$y' = h\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (12.80)$$

приводится к однородному в том случае, если прямые  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  пересекаются: достаточно перенести начало координат в точку пересечения этих прямых. Если указанные прямые не пересекаются, то выражения  $(a_1x + b_1y)$  и  $(a_2x + b_2y)$  пропорциональны, и уравнение (12.80) решается с помощью замены переменной  $z = a_1x + b_1y$  (см. параграф 12.4).

**12.60.** Решить уравнение

$$y' = \frac{x+y}{x+1} + \left(\frac{y-1}{x+1}\right)^2. \quad (12.81)$$

*Решение.* Поскольку  $\frac{y-1}{x+1} = \frac{x+y-(x+1)}{x+1} = \frac{x+y}{x+1} - 1$ , то правая часть уравнения (12.81) является функцией от выражения  $\frac{x+y}{x+1}$ .

Прямые  $x+y=0$  и  $x+1=0$  пересекаются в точке  $(-1; 1)$ , поэтому перейдем к новым переменным, выполняя параллельный перенос осей координат в эту точку:  $t = x+1$ ,  $z = y-1$ . Искомой функцией становится  $z = z(t)$ . Так как  $z' = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = y'$ , то исходное уравнение принимает вид

$$z' = 1 + \frac{z}{t} + \left(\frac{z}{t}\right)^2. \quad (12.82)$$

Для решения полученного однородного уравнения воспользуемся заменой переменной  $u = \frac{z}{t}$ , где  $u = u(t)$ . Тогда  $z = ut$ ,  $z' = u't + u$ , и уравнение (12.82) принимает вид

$$u't = 1 + u^2$$

или

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{dt}{t},$$

т.е. является уравнением с разделяющимися переменными.

Выполняя почленное интегрирование последнего равенства, получаем

$$\operatorname{arctg} u = \ln|t| + C$$

или

$$u = \operatorname{tg}(\ln|t| + C).$$

Так как  $u = \frac{z}{t} = \frac{y-1}{x+1}$ , то (после преобразования) окончательно имеем

$$y = 1 + (x+1)\operatorname{tg}(\ln|x+1| + C). \blacktriangleright$$

Решить дифференциальные уравнения:

$$12.61. (xy - x^2)y' = y^2. \quad 12.62. xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx.$$

$$12.63. xy' = y \ln \frac{x}{y}. \quad 12.64. y - xy' = x + yy'.$$

$$12.65. x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

$$12.66. (4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0.$$

$$12.67. y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}.$$

$$12.68. (y + 2)dx = (2x + y - 4)dy.$$

$$12.69. (y' + 1) \ln \frac{y + x}{x + 3} = \frac{y + x}{x + 3}.$$

$$12.70. y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1}.$$

12.71. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и начала координат.

12.72. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

## 12.14. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

12.73. Решить уравнение  $y' + \frac{y}{x+1} = x^2$ .

*Решение.* Будем искать решение этого линейного уравнения в виде

$$y = u \cdot v,$$

где  $v = v(x)$  — некоторое решение уравнения

$$v' + \frac{v}{x+1} = 0, \quad (12.83)$$

$u = u(x)$  — решение уравнения

$$vu' = x^2. \quad (12.84)$$

Уравнение (12.83) — с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+1}.$$

Выполняя почленное интегрирование последнего равенства, получаем

$$\ln|v| = -\ln|x+1| + C.$$

Поскольку в данном случае достаточно найти *некоторое* решение уравнения (12.15), то удобно полагать  $C = 0$ ,  $v > 0$ ,  $x + 1 > 0$ , тогда

$$v = \frac{1}{x+1}.$$

Подставляя найденную функцию  $v$  в уравнение (12.84), приходим к уравнению

$$du = (x^3 + x^2)dx.$$

В результате почленного интегрирования последнего равенства получаем

$$u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C \right) \frac{1}{x+1}. \blacktriangleright$$

Уравнение (12.27) может быть также решено с помощью метода вариации произвольной постоянной, при этом сначала находят решение  $v$  соответствующего однородного уравнения. Это решение (как и любое общее решение дифференциального уравнения первого порядка) зависит от постоянной  $C$  ( $v = v(x, C)$ ). Затем предполагая, что  $C$  является функцией переменной  $x$ , находят эту функцию  $C = C(x)$  из условия, что  $y = v(x, C(x))$  удовлетворяет исходному уравнению (12.27).

**12.74.** Решить уравнение  $(y^3 - xy)y' = 1$ .

*Решение.* Будем искать решение этого уравнения в виде  $x = x(y)$  (т.е. считая, что  $y$  — независимая переменная, а  $x$  — функция от  $y$ ). Так как  $y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = (x')^{-1}$ , то исходное уравнение линейно относительно функции  $x$ :

$$x' + xy = y^3. \quad (12.85)$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$x' + xy = 0. \quad (12.86)$$

Пусть  $x \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= -y dy; \\ \ln|x| &= -\frac{y^2}{2} + C_1. \end{aligned}$$

Последнее равенство равносильно

$$x = \pm e^{C_1} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Учитывая, что  $x = 0$  является решением уравнения (12.86), получаем его общее решение в следующем виде:

$$x = C_2 e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (12.87)$$

Полагая, что  $C_2 = C_2(y)$ , найдем эту функцию из условия, что функция (12.87) — решение уравнения (12.85). Из (12.87) следует, что

$$x' = C_2' e^{-\frac{y^2}{2}} + C_2 e^{-\frac{y^2}{2}} (-y). \quad (12.88)$$

Подставляя (12.88), (12.87) в (12.85), приходим к уравнению

$$C_2' e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3$$

или

$$dC_2 = y^3 e^{\frac{y^2}{2}} dy.$$

Тогда

$$C_2 = \int y^3 e^{\frac{y^2}{2}} dy = 2 \int \frac{y^2}{2} e^{\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$C_2 = y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}} + C.$$

Подставляя найденное выражение для функции  $C_2 = C_2(y)$  в (12.87), получаем решение уравнения (12.85), т.е.

$$x = y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} - 2. \blacktriangleright$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если оно имеет вид

$$y' + f(x)y = g(x)y^n,$$

где  $n \neq 0, n \neq 1$ .

Это уравнение приводится к линейному с помощью подстановки  $z = y^{1-n}$  либо может быть непосредственно решено любым из двух описанных выше способов решения линейных уравнений.

**12.75.** Решить уравнение  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$ .

*Решение.* Данное уравнение — это уравнение Бернулли при  $n = 2$ . Отметим, что  $y = 0$  является решением этого уравнения. Пусть  $y \neq 0$ . Воспользуемся заменой переменной  $z = y^{1-n} = y^{-1}$ . Тогда  $y = z^{-1}$ ,  $y' = -z^{-2}z'$ , и исходное уравнение принимает вид

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x. \quad (12.89)$$

Решим сначала однородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}. \quad (12.90)$$



Пусть  $z \neq 0$ . Тогда

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_2, \quad (12.91)$$

где  $C_2$  — произвольное положительное число.

Равенство (12.91) перепишем в следующем виде:

$$|z| = C_2 |x| \quad \text{или} \quad z = \pm C_2 x.$$

Учитывая, что  $z = 0$  является решением уравнения (12.90), получаем, что его произвольное решение имеет вид

$$z = C_1 x, \quad (12.92)$$

где  $C_1$  — любое число.

Положим теперь, что  $C_1 = C_1(x)$  и найдем эту функцию из условия, что функция (12.92) — решение уравнения (12.89). Из (12.92) следует, что

$$z' = C_1' x + C_1.$$

Тогда, учитывая формулу (12.92), получаем, что уравнение (12.89) принимает вид

$$C_1' x + C_1 - \frac{C_1 x}{x} = x$$

или

$$dC_1 = dx,$$

поэтому

$$C_1 = x + C.$$

Подставляя это выражение в (12.92), имеем решение уравнения (12.89), т.е.

$$z = (x + C) x.$$

Так как  $y = \frac{1}{z}$ , то окончательно решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x^2 + Cx) = 1$$

или  $y = 0$ . ►

Решить уравнения:

$$12.76. y' - 2y = e^{2x}. \quad 12.77. y' + \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}.$$

$$12.78. 4y' + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}. \quad 12.79. (y^2 + x)y' = 1.$$

$$12.80. 1 - 2xyy' = y^3y'. \quad 12.81. y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

$$12.82. 2xy \frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0.$$

$$12.83. 3xdy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x)dx.$$

$$12.84. xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

$$12.85. (2x^2y \ln y - x)y' = y.$$

**12.86.** Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси абсцисс, равен квадрату ординаты точки касания.

**12.87.** Найти уравнение кривой, у которой равны расстояния от точки пересечения касательной с осью  $Ox$  до точки касания и точки  $M(0; 1)$ .

### 12.15. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

**12.88.** Решить уравнение  $y'' = y' \operatorname{ctg} x$ .

*Решение.* Положим  $z = y'$ . Тогда  $y'' = (y')' = z'$ , и исходное уравнение принимает вид

$$z' = z \operatorname{ctg} x. \quad (12.93)$$

Пусть  $z \neq 0$ . Тогда из (12.93) следует, что

$$\frac{dz}{z} = \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

или

$$\frac{dz}{z} = \frac{d \sin x}{\sin x}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, получаем

$$\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln C_1,$$

где  $C_1 > 0$ , или

$$z = \pm C_1 \sin x.$$

Так как  $z = 0$  является решением уравнения (12.93), то произвольное решение этого уравнения имеет вид

$$z = C_1 \sin x, \quad (12.94)$$

где  $C_1$  — произвольное число.

Так как  $z = \frac{dy}{dx}$ , то из (12.94) следует, что

$$dy = C_1 \sin x \, dx.$$

Интегрируя последнее равенство, окончательно получаем

$$y = -C_1 \cos x + C_2. \quad \blacktriangleright$$

**12.89.** Решить уравнение  $yy'' = y^2 y' + (y')^2$ .

*Решение.* Пусть  $z = y'$ , тогда  $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$ , где  $z' = \frac{dz}{dy}$ , и исходное уравнение принимает вид

$$yzz' = y^2 z + z^2, \quad (12.95)$$

т.е. становится уравнением относительно функции  $z = z(y)$ . Очевидно, что  $z = 0$  — решение уравнения (12.95), откуда  $y = C$  (где  $C$  — произвольное число).

Пусть  $z \neq 0$ . Тогда из формулы (12.95) следует, что

$$yz' = y^2 + z \quad (12.96)$$

является линейным уравнением первого порядка (см. параграф 12.6). Решение этого уравнения будем искать в виде  $z = uv$ . Здесь  $v = v(y)$  — некоторое решение уравнения

$$yv' - v = 0, \quad (12.97)$$

$u = u(y)$  — решение уравнения

$$u'v = y. \quad (12.98)$$

Решая уравнение (12.97), в частности, имеем  $v = y$ . Тогда уравнение (12.98) приводится к виду  $u' = 1$ , откуда  $u = y + C_1$ , т.е. решение уравнения (12.96) имеет вид

$$z = y^2 + C_1 y.$$

Так как  $z = y'$ , то приходим к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 y.$$

Пусть  $C_1 = 0$ . Тогда при  $y \neq 0$  имеем

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

и, следовательно,  $x = -y^{-1} + C_2$  или

$$y = (C_2 - x)^{-1}. \quad (12.99)$$

Пусть  $C_1 \neq 0$ , тогда

$$x = \int \frac{dy}{y^2 + C_1 y} = \frac{1}{C_1} \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{C_1} \int \frac{dy}{y + C_1},$$

и после интегрирования получаем

$$x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_3. \quad (12.100)$$

Окончательно решение исходного уравнения имеет вид или  $y = C$ , или (12.99), или (12.100). ►

Решить уравнения:

$$12.90. y'' = -\frac{x}{y}. \quad 12.91. xy'' + y' = 0.$$

$$12.92. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}. \quad 12.93. yy'' - y'(1 + y') = 0.$$

$$12.94. yy'' = (y')^2. \quad 12.95. 4y' + (y'')^2 = 4xy''.$$

$$12.96. y''' = (y'')^2. \quad 12.97. y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{ctg} x.$$

Найти решение уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$12.98. (y''x - y')y' = x^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

$$12.99. 2y(y')^3 + y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3.$$

### 12.16. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

12.100. Решить дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } 2y'' - y' - y = 0; \quad \text{б) } 4y'' + 4y' + y = 0; \quad \text{в) } y'' + 2y' + 5y = 0.$$

*Решение.*

а) Характеристическое уравнение  $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$  имеет различные корни  $\left(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}\right)$ , поэтому (см. (12.38)) общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

б) В данном случае характеристическое уравнение имеет один корень кратности 2  $\left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$ , поэтому (см. (12.39)) искомое общее решение будет

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}}.$$

в) Характеристическое уравнение имеет комплексные корни ( $\lambda = -1 \pm 2i$ ), поэтому (см. (12.40) при  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ ) общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos 2x. \blacktriangleright$$

**12.101.** Решить уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}. \quad (12.101)$$

*Решение.* Поскольку корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 1 = 0$  комплексные ( $\lambda = \pm i$ ), то общее решение однородного уравнения

$$y'' + y = 0$$

имеет вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad (12.102)$$

(см. (12.40) при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ).

Общее решение уравнения (12.101) будем искать в виде (12.102), полагая, что  $C_1$  и  $C_2$  — функции переменной  $x$ . Эти функции найдем, используя систему (12.41), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0, \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases} \quad (12.103)$$

Решая систему (12.103), получаем  $C_1' = 1$ ,  $C_2' = -\operatorname{tg} x$ . Тогда  $C_1 = x + C_3$  и

$$C_2 = \int (-\operatorname{tg} x) dx = \int \frac{d \cos x}{\cos x} = \ln |\cos x| + C_4.$$

Таким образом, общее решение уравнения (12.101):

$$y = (x + C_3) \sin x + (\ln |\cos x| + C_4) \cos x,$$

где  $C_3$ ,  $C_4$  — произвольные постоянные.  $\blacktriangleright$

**12.102.** Найти частные решения неоднородных уравнений:

а)  $y'' + 2y' - 3y = xe^{2x}$ ; б)  $y'' + 3y' - 4y = (x + 1)e^x$ .

*Решение.*

а) Так как  $\lambda_r = 2$  ( $a = 2$ ,  $b = 0$ ) не является корнем характеристического многочлена

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

то  $k = 0$ . Так как  $f(x) = x$  и, можно полагать, что  $g(x) = 1$ , то  $m = 1$ . В связи с этим частное решение будем искать в виде

$$u = (Ax + B)e^{2x}.$$

Подставляя эту функцию в исходное уравнение, после приведения подобных слагаемых и сокращения на  $e^{2x}$  приходим к равенству

$$5Ax + 6A + 5B = x,$$

которое удовлетворяется тождественно (при всех  $x$ ), если

$$\begin{cases} 5A = 1, \\ 6A + 5B = 0. \end{cases}$$

Откуда  $A = \frac{1}{5}$ ,  $B = -\frac{6}{25}$  и искомое частное решение имеет вид

$$u = \left( \frac{1}{5}x - \frac{6}{25} \right) e^{2x}$$

б) Правая часть уравнения имеет вид (12.49) при  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $f(x) = x + 1$  и, можно считать, что  $g(x) = 1$ . Следовательно,  $\lambda_r = 1$  и  $m = 1$ . Так как  $\lambda_r = 1$  является корнем кратности 1 характеристического многочлена

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$

то  $k = 1$ , поэтому частное решение уравнения будем искать в виде

$$u = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Подставляя эту функцию в исходное уравнение, приходим к равенству

$$10Ax + 2A + 5B = x + 1,$$

которое выполняется тождественно, если

$$\begin{cases} 10A = 1, \\ 2A + 5B = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем  $A = 0,1$ ,  $B = 0,16$ , и, следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$u = (0,1x^2 + 0,16x)e^x. \blacktriangleright$$

**12.103.** Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = (x-1)e^x, \quad (12.104)$$

удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

*Решение.* Найдем сначала общее решение уравнения (12.104). Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

однородного уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (12.105)$$

имеет единственный корень  $\lambda = 1$  (кратности 2), поэтому общее решение уравнения (12.105) будет

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Правая часть уравнения (12.104) имеет вид (12.49), где  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $f(x) = x - 1$  и, можно считать, что  $g(x) = 1$ . Тогда  $\lambda_r = 1$ ,  $m = 1$ . Поскольку  $\lambda_r = 1$  является корнем кратности 2 характеристического уравнения, то  $k = 2$ , поэтому частное решение уравнения (12.104) будем искать в виде

$$u = x^2(Ax + B)e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x.$$



Подставляя эту функцию в уравнение (12.104), приходим к равенству

$$6Ax + 2B = x - 1,$$

откуда  $A = \frac{1}{6}$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ .

Объединяя полученные результаты, приходим к выводу, что общее решение уравнения (12.104) имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right) e^x.$$

Из условий  $y(0) = 0$  и  $y'(0) = 1$  получаем  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 1$  соответственно. Окончательно искомое частное решение задается функцией

$$y = x e^x + \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right) e^x = \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x \right) e^x. \blacktriangleright$$

**12.104.** Решить уравнение

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos x. \quad (12.106)$$

*Решение.* Корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

являются комплексные числа  $\lambda = 1 \pm 2i$ , поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x \sin 2x + C_2 x e^x \sin 2x \quad (12.107)$$

(см. (12.40) при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ).

Найдем частное решение неоднородного уравнения (12.106). Правая часть этого уравнения имеет вид (12.49), где  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = 1$ , поэтому  $m = 0$  и  $\lambda_r = 1 + i$ . Так как число  $\lambda_r$  не является корнем характеристического многочлена, то  $k = 0$ , поэтому частное решение уравнения (12.106) будем искать в виде

$$u = A e^x \sin x + B e^x \cos x.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (12.106), получаем  $A = 0$ ,  $B = \frac{1}{3}$ , и, следовательно,

$$u = \frac{1}{3}e^x \cos x.$$

Принимая во внимание (12.107), общее решение уравнения (12.106) примет вид

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + \frac{1}{3}e^x \cos x. \blacktriangleright$$

**12.105.** Решить уравнение  $y'' + y = 2 \sin 2x \cos x$ .

*Решение.* Применяя формулы тригонометрии, преобразуем правую часть уравнения:

$$y'' + y = \sin 3x + \sin x.$$

Характеристическое уравнение имеет корни  $\lambda = \pm i$ , поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

(см. (12.40) при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ).

Частное решение неоднородного уравнения

$$y'' + y = \sin 3x \quad (12.108)$$

будем искать в виде

$$u_1 = A \sin 3x + B \cos 3x.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (12.108), находим  $A = -\frac{1}{8}$ ,  $B = 0$ , поэтому

$$u_1 = -\frac{1}{8} \sin 3x.$$

Аналогично для частного решения

$$u_2 = x(A \sin x + B \cos x)$$

уравнения

$$y'' + y = \sin x$$

находим  $A = 0$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ , т.е.

$$u_2 = -\frac{1}{2}x \cos x.$$

Объединяя полученные результаты, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{1}{2} x \cos x. \blacktriangleright$$

Решить уравнения:

$$12.106. \quad y'' - 9y = 0. \qquad 12.107. \quad y'' - 2y' + 2y = 0.$$

$$12.108. \quad y'' - 2y' + y = 2e^x. \quad 12.109. \quad y'' + y' - 6y = xe^{2x}.$$

$$12.110. \quad y'' + y = \cos x. \qquad 12.111. \quad y'' + y' = \sin^2 x.$$

$$12.112. \quad y'' - 3y' = x + \cos x. \quad 12.113. \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Найти решение уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$12.114. \quad y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3.$$

$$12.115. \quad y'' + y = 4 \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

$$12.116. \quad y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$12.117. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 3e.$$

## 12.17. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

**12.118.** Выяснить, по истечении какого промежутка времени объем реализованной продукции удвоится по сравнению с первоначальным, если значение коэффициента пропорциональности  $k$  в уравнении (12.54) равно 0,1. На сколько процентов следует увеличить норму инвестиций, чтобы промежуток времени, необходимого для удвоения объема реализованной продукции, уменьшился на 20%?

*Решение.* Полагая в решении

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}$$

уравнения (12.54)  $t_0 = 0$ ,  $k = 0,1$ ,  $y = 2y_0$ , приходим к равенству

$$2y_0 = y_0 e^{0,1t},$$

откуда  $t = 10 \ln 2 \approx 6,93$  (ед. времени). Полагая теперь, что  $t_1 = 0,8t$ , получаем  $k_1 = \frac{k}{0,8} = 1,25k$ , т.е. норму инвестиций следует увеличить на 25%. ►

**12.119.** Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением:

$$y' = 0,3y(2 - 10^{-4}y),$$

где  $y = y(t)$ ;  $t$  — время в годах. В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

*Решение.* Разделяя переменные в уравнении, приходим к равенству:

$$\frac{dy}{0,3y(2 - 10^{-4}y)} = dt.$$

Выполняя почленное интегрирование этого равенства, получаем

$$\ln \left| \frac{y}{2 - 10^{-4}y} \right| = 0,6t + C_1$$

или

$$\frac{y}{2 - 10^{-4}y} = Ce^{0,6t}. \quad (12.109)$$

Значение постоянной  $C$  находим из начальных условий. Так как  $y(0) = 500$ , то  $C \approx 256,4$ . Выразим теперь функцию  $y$  из равенства (12.109):

$$y = \frac{512,8e^{0,6t}}{1 - 0,02564e^{0,6t}}.$$

Тогда  $y(3) = \frac{512,8e^{1,8}}{1 - 0,02564e^{1,8}} \approx 2685$ . ►

Напомним (см. параграф 7.6), что эластичность спроса (относительно цены) определяется формулой  $E_p(y) = \frac{p}{y} \frac{dy}{dp}$ .

В некоторых случаях представляет интерес функция спроса при заданной эластичности.

**12.120.** Найти функцию спроса, если  $E_p = -2 = \text{const}$  и  $y(3) = \frac{1}{6}$ .

*Решение.* Из определения эластичности следует, что

$$-2 = \frac{p}{y} \frac{dy}{dp},$$

т.е. искомая функция задается уравнением с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, получаем

$$p^{-2} = Cy.$$

Учитывая начальное условие  $y(3) = \frac{1}{6}$ , имеем  $C = \frac{2}{3}$ . Окончательно  $y = 1,5p^{-2}$ . ►

В простейших ситуациях спрос на товар (предложение товара) предполагается зависящим лишь от его цены. В более сложных случаях в расчет принимается также зависимость спроса (предложения) от скорости изменения цены.

**12.121.** Функции спроса и предложения имеют соответственно вид

$$y = 25 - 2p + 3 \frac{dp}{dt};$$

$$x = 15 - p + 4 \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент  $p = 9$ .

*Решение.* Из условия равенства спроса и предложения имеем

$$25 - 2p + 3 \frac{dp}{dt} = 15 - p + 4 \frac{dp}{dt},$$

откуда

$$\frac{dp}{dt} = 10 - p,$$

т.е. получаем уравнение с разделяющимися переменными (см. параграф 12.4).

Решая это уравнение, приходим к функции

$$p = 10 - Ce^{-t}.$$

Из условия  $p(0) = 9$  следует, что  $C = 1$ , поэтому окончательно

$$p = 10 - e^{-t}.$$

Отметим, что поскольку  $\lim_{t \rightarrow \infty} p = \lim_{t \rightarrow \infty} (10 - e^{-t}) = 10 = \text{const}$ , цена обладает устойчивостью. ►

**12.122.** В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении шести месяцев, при норме инвестиций  $m = 0,6$ , продажной цене  $p = 0,15$  (ден. ед.) и  $l = 0,4$ , если в начальный момент времени объем производства  $y_0 = y(0) = 24$  (ден. ед.).

**12.123.** Предполагая, что цена товара задается функцией  $p(y) = (5 + 3e^{-y})y^{-1}$ ,  $m = 0,6$ ,  $l = 0,4$ ,  $y(0) = 1$  (см. формулу (12.55)), найти зависимость  $y = y(t)$  объема реализованной продукции от времени.

**12.124.** Известно, что рост числа  $y = y(t)$  жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0,2y}{m}(m - y),$$

где  $m$  — максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80% от максимального?

**12.125.** В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = 0,001y(3000 - y),$$

где  $y$  — число заболевших в момент времени  $t$ ;  $t$  — число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных?

**12.126.** Найти функцию спроса  $y = y(p)$ , если эластичность  $E_p$  постоянна и задана цена  $p$  при некотором значении спроса  $y$ :

а)  $E_p = -\frac{1}{2}$ ,  $p = 5$  при  $y = 2$ ;

б)  $E_p = -3$ ,  $p = 2$  при  $y = 27$ .

**12.127.** Найти функцию спроса, если известно значение цены  $p$  при некотором спросе  $y$  и эластичность имеет следующий вид:

а)  $E_p = \frac{y-100}{y}$ ,  $0 < y < 100$ ,  $p = 90$  при  $y = 10$ ;

б)  $E_p = \frac{p}{p-20}$ ,  $0 < p < 20$ ,  $p = 18$  при  $y = 1$ .

**12.128.** Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно вид

$$y = 50 - 2p - 4 \frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2p - 5 \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если  $p(0) = 10$ , и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

**12.129.** Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно следующий вид:

$$y = 30 - p - 4 \frac{dp}{dt};$$

$$x = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

**12.130.** За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% первоначального количества?

*Указание.* Использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству вещества, имеющегося в рассматриваемый момент.

**12.131.** Найти выражение объема реализованной продукции  $y = y(t)$  и его значение при  $t = 2$ , если известно, что кривая спроса имеет вид  $p(y) = 3 - 2y$ , норма акселерации  $\frac{1}{l} = 1,5$ , норма инвестиций  $m = 0,6$ ,  $y(0) = 1$ .

## 12.18. Системы дифференциальных уравнений

**Пример 12.132.** Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = \frac{t}{x}, \\ y' = -\frac{t}{x}, \end{cases}$$

где  $x' = \frac{dx}{dt}$ ,  $y' = \frac{dy}{dt}$ .

*Решение.* Из первого уравнения системы следует, что

$$x'' = \frac{y - ty'}{y^2}.$$

Учитывая, что  $y = \frac{t}{x'}$ ,  $y' = -\frac{t}{x}$  (см. систему), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$txx'' = xx' + t(x')^2. \quad (12.110)$$

Это уравнение однородное степени 2 по производным различных порядков функции  $x = x(t)$  (т.е. замена  $x^{(k)} \rightarrow \alpha x^{(k)}$ , где  $k \geq 0$ , переводит это уравнение в исходное). Такие уравнения допускают понижение порядка с помощью замены



$$u = \frac{x'}{x}, \quad (12.111)$$

где  $u = u(t)$ . Тогда  $x'' = xu'^2 + xu'$ ,  $x' = ux$  и, учитывая, что  $x \neq 0$ , из (12.110) получаем

$$tu' = u.$$

Решением этого уравнения с разделяющимися переменными является функция

$$u = C_1 t,$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная.

Тогда (см. (12.111)) для функции  $x = x(t)$  имеем уравнение

$$x' = C_1 x t. \quad (12.112)$$

Это уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, получаем

$$x = C_2 e^{\frac{C_1 t^2}{2}}, \quad (12.113)$$

где  $C_2$  — произвольная постоянная.

Так как  $y = \frac{t}{x'} = \frac{1}{C_1 x}$  (см. исходную систему и (12.112)),

то, учитывая (12.113), получаем

$$y = C_1^{-1} C_2^{-1} e^{-\frac{C_1 t^2}{2}}. \blacktriangleright$$

**Пример 12.133.** Решить систему

$$\begin{cases} x'_1 = -2x_2, \\ x'_2 = x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Установить характер положения равновесия этой системы.

*Решение.* Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен  $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$   
 $= \lambda^2 + 3\lambda + 2$  имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Решая уравнения

$$AX_i = \lambda_i x_i,$$

(где  $i = 1, 2$ ), найдем собственные векторы  $X_1, X_2$ , отвечающие найденным собственным значениям. Эти векторы определены с точностью до постоянных множителей, например, можно положить

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы  $X_1, X_2$  не пропорциональны между собой, а потому линейно независимы. Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$X = C_1 X_1 e^{-t} + C_2 X_2 e^{-2t},$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Точка  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  фазовой плоскости является положением равновесия. Так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X = \lim_{t \rightarrow \infty} (C_1 X_1 e^{-t} + C_2 X_2 e^{-2t}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то это положение равновесия является устойчивым. ►

Решить системы уравнений, где  $x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}$ :

$$12.134. \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \quad 12.135. \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases}$$

$$12.136. \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases} \quad 12.137. \begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$$

$$12.138. \begin{cases} x' = \frac{x^2}{y-t}, \\ y' = x+1. \end{cases} \quad 12.139. \begin{cases} x' = \frac{t}{x}, \\ y' = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

### 12.19. Дополнительные задачи

Составить дифференциальные уравнения семейств кривых:

$$12.140. y = Cx^2.$$

$$12.141. y^2 = 2Cx.$$

$$12.142. x^3 = C(x^2 - y^2). \quad 12.143. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Решить дифференциальные уравнения:

$$12.144. y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0. \quad 12.145. xy' - y = y^3.$$

$$12.146. y' = \frac{y}{x} - 1. \quad 12.147. y' - y = e^x.$$

$$12.148. y dy + (x - 2y) dx = 0.$$

$$12.149. xy dx + (x+1) dy = 0.$$

$$12.150. xy y' = 1 - x^2. \quad 12.151. y = x \left( y' - \sqrt[3]{e^y} \right).$$

$$12.152. y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0.$$

$$12.153. (x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0.$$

$$12.154. y y' + x = 1.$$

$$12.155. (2x - y) dx + (4x - 2y + 3) dy = 0.$$

$$12.156. 2x^2 y y' + y^2 = 2. \quad 12.157. y' = 10^{x+y}.$$

$$12.158. \sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy. \quad 12.159. y' + \frac{2y}{x} = x^3.$$

$$12.160. y - x y' = 1 + x^2 y'. \quad 12.161. y' - y = 2x - 3.$$

$$12.162. (x - y) y dx - x^2 dy = 0.$$

12.163.  $y'' - 5y' + 6y = 0$ .

12.164.  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$ .

12.165.  $y'' - 8y' + 7y = 14$ .

12.166.  $y'' - 4y' + 4y = x^2$ .

12.167.  $y'' + 2y' + y = 0$ .

12.168.  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

12.169.  $y'' - y = e^x$ .

12.170.  $y' - y = 3y''$ .

12.171.  $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ .

12.172.  $x(y'' + 1) + y' = 0$ .

12.173.  $y''' = e^{2x}$ .

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

12.174.  $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

12.175.  $2y(y')^3 + y'' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -3$ .

12.176.  $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y(2) = 1$ ,  $y'(2) = -2$ .

12.177.  $y'' + y = 4e^x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -3$ .

12.178.  $y'' - 2y' = 2e^x$ ,  $y(1) = -1$ ,  $y'(1) = 0$ .

12.179.  $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

## Контрольные задания по главе 12

### «Дифференциальные уравнения»

№	Вариант 12.1	Вариант 12.2	Вариант 12.3
	Решить дифференциальные уравнения:		
1	$2xy' + y^2 = 1$	$x^2(dy - dx) =$ $= (x + y)ydx$	$x^2y' - 2xy = 3y$
2	$x^2y' = y(x + y)$	$(1 - x^2)dy + xydx = 0$	$x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y}$
3	$x^2y^2y' + 1 = y$	$(x + 2y^3)y' = y$	$x^2y'' = (y')^2$
4	$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$	$(x + y)^2y' = 1$	$y - y' = y^2 + xy'$
5	$y'(x - y^2) = 1$	$y''(e^x + 1) + y' = 0$	$\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$

№	Вариант 12.1	Вариант 12.2	Вариант 12.3
	Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным условиям:		
6	$y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{x},$ $y(0)=1$	$y'' + 4y = 5e^x,$ $y(0)=0, y'(0)=3$	$2(x-y^2)dy = ydx,$ $y(1)=1$
7	$y'' - 2y' = x^2 - 1,$ $y(0)=0, y'(0)=\frac{9}{4}$	$x(x+1)(y'-1) = y,$ $y(1)=0,5$	$y'' + 9y = 15\sin 2x,$ $y(0)=-7,$ $y'(0)=0$

## Тест 12

1. Установить соответствие между приведенными дифференциальными уравнениями первого порядка и их типами:

- 1)  $y = x(y' - \sqrt[3]{e^y})$ ;                      а) с разделяющимися переменными;  
 2)  $x^2(yy' + 2) = x - 1$ ;                      б) линейное;  
 3)  $x^2(2x + y)dx = dy$ .                      в) однородное.

2. Выяснить, при каких целых значениях параметров  $a$  и  $b$  функция  $y = e^{bx^2 + \frac{x^4}{a}}$  является решением уравнения

$$dy - (x^3y + 2xy)dx = 0.$$

3. Найти интегральную кривую уравнения  $dy = xe^y dx$ , проходящую через точку  $(2; 0)$ .

Ответ:  $2e^{ay} + bx^2 + d = 0$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$ ,  $d = \dots$

4. Пусть  $y = y(x)$  — решение уравнения  $e^{-2x}y' = e^3$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(-1,5) = 0,5$ . Найти (с точностью до целых)  $y(0)$ .

5. Пусть  $y = y(x)$  — интегральная кривая уравнения

$$dx - (3x + 1)y^2 dy = 0,$$

проходящая через точку  $(1; \sqrt[3]{\ln 4})$ . Найти  $y(0)$ .

6. Пусть  $x = x(y)$  — решение уравнения

$$2yy' + 3y' = 1,$$

удовлетворяющее начальному условию  $x(0) = 0$ . Найти  $x(2)$ .

7. Найти уравнение касательной в точке  $(1; 2)$  к интегральной кривой уравнения

$$2yy' + xy + 2x^2 = 0.$$

*Ответ:*  $y = ax + b$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$

8. Пусть  $y = y(x)$  — решение уравнения  $y' + xy = x$ , удовлетворяющее условию  $y(0) = 2$ . Найти  $y(\sqrt{2})$  (с точностью до 0,1).

9. Найти решение уравнения  $y' = -\frac{x+y}{x}$ , удовлетворяющее условию  $y(1) = 0$ . В ответе дать значение  $y(2)$ .

10. Найти решение уравнения  $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 12$ ,  $y'(0) = -12$ . В ответе дать значение  $y(3)$ .

## **Раздел VI**

# **РЯДЫ**



# Глава 13

## ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

При решении ряда математических задач, в том числе и в приложениях математики в экономике, приходится рассматривать суммы, составленные из бесконечного множества слагаемых. Из теории действительных чисел известно лишь, что означает сумма любого конечного числа слагаемых. Задача суммирования бесконечного множества слагаемых решается в теории рядов.

#### 13.1. Основные понятия. Сходимость ряда

**Определение.** *Числовым рядом* называется бесконечная последовательность чисел  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ , соединенных знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (13.1)$$

Числа  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  называются *членами ряда*, а член  $u_n$  — общим или  $n$ -м *членом ряда*.

Ряд (13.1) считается заданным, если известен его общий член  $u_n = f(n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), т.е. задана функция  $f(n)$  натурального аргумента. Например, ряд с общим членом

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}$$
 имеет вид

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)} + \dots$$



Более сложной является обратная задача: по нескольким первым членам ряда написать общий член. Эта задача имеет бесконечное множество решений, но иногда удается найти самое естественное решение.

**Пример 13.1.** Найти в простейшей форме общий член ряда:

$$\text{а) } \frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \dots; \quad \text{б) } \frac{3}{5} - \frac{8}{10} + \frac{15}{17} - \frac{24}{26} + \dots$$

*Решение.* Нетрудно убедиться, что для ряда а) общий член  $u_n = \frac{2n}{4n+1}$ , а для ряда б)  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}[(n+1)^2 - 1]}{(n+1)^2 + 1}$ . ►

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Сумма  $n$  первых членов ряда  $S_n$  называется  $n$ -й *частичной суммой ряда*.

**Определение.** Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (13.2)$$

Число  $S$  называется *суммой* ряда. В этом смысле можно записать

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \quad (13.3)$$

Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся*.

**Пример 13.2.** Исследовать сходимость *геометрического ряда*, т.е. ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \quad (13.4)$$

*Решение.* Необходимо установить, при каких значениях знаменателя прогрессии  $q$  ряд (13.4) сходится, а при каких — расходится.

Из школьного курса алгебры известно, что сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии, т.е.  $n$ -я частичная сумма ряда при  $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \quad (13.5)$$

Возможно несколько случаев:

1) если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1} \right) = \frac{a}{1-q}$ , т.е. ряд сходится и его сумма

$$S = \frac{a}{1-q}; \quad (13.5')$$

2) если  $|q| > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ , следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  и ряд расходится;

3) если  $q = 1$ , то ряд (13.4) примет вид  $a + a + \dots + a + \dots$ , его  $n$ -я частичная сумма  $S_n = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ раз}} = na$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$ , т.е. ряд расходится;

4) если  $q = -1$ , то ряд (13.4) примет вид  $a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$  и  $S_n = 0$  при  $n$  четном,  $S_n = a$  при  $n$  нечетном, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует и ряд расходится.

Таким образом, *геометрический ряд сходится к сумме*  $S = \frac{a}{1-q}$  *при*  $|q| < 1$  *и расходится при*  $|q| \geq 1$ . ►

**Пример 13.3.** Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad (13.6)$$

*Решение.*  $n$ -я частичная сумма ряда

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}. \text{ Учитывая, что } \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , т.е. сумма ряда  $S = 1$ . ►

**Свойства сходящихся рядов. 1.** Если ряд  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  сходится и имеет сумму  $S$ , то и ряд  $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \dots + \lambda u_n + \dots$  (полученный умножением данного ряда на число  $\lambda$ ) также сходится и имеет сумму  $\lambda S$ .

**2.** Если ряды  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  и  $v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$  сходятся и их суммы соответственно равны  $S_1$  и  $S_2$ , то и ряд  $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots$  (представляющий сумму данных рядов) также сходится, и его сумма равна  $S_1 + S_2$ .

Свойства 1 и 2 непосредственно вытекают из свойств пределов числовых последовательностей.

**3.** Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.

□ Пусть в сходящемся ряде (13.1) отброшены  $n$  членов (в принципе можно отбрасывать члены с любыми номерами, лишь бы их было конечное число). Покажем, что полученный ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots, \quad (13.7)$$

имеющий частичную сумму  $\sigma_m = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m}$ , также сходится.

Очевидно, что  $S_{n+m} = S_n + \sigma_m$ . Отсюда следует, что при фиксированном  $n$  конечный предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{n+m}$  существует

тогда и только тогда, когда существует конечный предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m$ . А это и означает, что ряд (13.7) сходится. ■

**Замечание.** Если ряд расходится, то очевидно, что отбрасывание (приписывание) конечного числа членов не повлияет и на расходимость полученного ряда.

Ряд (13.7), полученный из данного ряда (13.1) отбрасыванием его первых  $n$  членов, называется  $n$ -м *остатком ряда*.

Если сумму  $n$ -го остатка ряда обозначить через  $r_n$ , т.е.

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m, \quad (13.8)$$

то сумму ряда (13.1) можно представить в виде

$$S = S_n + r_n. \quad (13.9)$$

Теперь можно сформулировать свойство 4.

**4.** *Для того чтобы ряд (13.1) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы при  $n \rightarrow \infty$  остаток ряда стремился к нулю, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ .*

Это свойство вытекает из теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций (см. параграф 6.3).

Установить сходимость (расходимость) ряда путем определения  $S_n$  и вычисления  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  (как это сделано в примерах 13.2, 13.3) возможно далеко не всегда из-за принципиальных трудностей при нахождении  $S_n$  (суммировании  $n$  членов ряда). Проще это можно сделать на основании *признаков сходимости*, к изучению которых мы переходим.

## 13.2. Необходимый признак сходимости.

### Гармонический ряд

**Теорема (необходимый признак сходимости).** *Если ряд сходится, то предел его общего члена  $u_n$  при  $n \rightarrow \infty$  равен нулю, т.е.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (13.10)$$

□ Выразим  $n$ -й член ряда через суммы его  $n$  и  $(n - 1)$  членов, т.е.  $u_n = S_n - S_{n-1}$ . Так как ряд сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

**Пример 13.4.** Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда (13.6).

*Решение.* Выше было доказано (см. пример 13.3), что ряд (13.6) сходится, и, действительно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$ , т.е. необходимый признак сходимости выполняется. ►

**Следствие.** Если предел общего члена ряда (13.1) при  $n \rightarrow \infty$  не равен нулю, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд расходится.

□ Предположим противное, т.е. ряд (13.1) сходится. Но в этом случае из приведенной выше теоремы следует  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , что противоречит условию, заданному в следствии, т.е. ряд (13.1) расходится. ■

**Пример 13.5.** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{5n-7}$ .

*Решение.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{5n-7} = \frac{4}{5} \neq 0$ , т.е. необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится. ►

**Замечание.** Следует подчеркнуть, что рассмотренная теорема выражает лишь необходимый, но недостаточный признак сходимости ряда. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , то из этого еще не следует, что ряд сходится.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

называемый *гармоническим*.

Необходимый признак сходимости выполнен:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Докажем, что несмотря на это, гармонический ряд расходится.

□ Вначале получим вспомогательное неравенство. С этой целью запишем сумму первых  $2n$  и  $n$  членов ряда:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n};$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Найдем разность

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Заменяя в сумме каждое слагаемое наименьшим, равным  $\frac{1}{2n}$ , придем к вспомогательному неравенству

$$S_{2n} - S_n > \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ раз}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}.$$

Предположим противное, т.е. что гармонический ряд сходится, тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$  и, переходя к пределу в неравенстве (см. параграф 6.5), получаем, что  $S - S \geq \frac{1}{2}$  или  $0 \geq \frac{1}{2}$ .

Мы пришли к противоречию, следовательно, предположение о сходимости гармонического ряда неверно, т.е. гармонический ряд расходится. ■

В следующих двух параграфах рассмотрим *достаточные* признаки сходимости.

### 13.3. Ряды с положительными членами

**Теорема (признак сравнения).** Пусть даны два ряда с положительными членами:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(2)$ , причем члены первого ряда не превосходят членов второго, т.е. при любом  $n$

$$u_n \leq v_n. \quad (13.11)$$

Тогда: 1) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1); 2) если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

□ 1. Пусть частичные суммы рядов (1) и (2) равны соответственно  $s_n$  и  $S_n$ . По условию ряд (2) сходится, следовательно, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  и  $S_n \leq S$ , так как члены ряда (2) положительны. Рассмотрим последовательность частичных сумм  $s_n$  ряда (1). Эта последовательность

является возрастающей (так как с ростом  $n$  увеличивается сумма  $n$  положительных слагаемых) и ограниченной (так как  $s_n \leq S_n$  в силу условия (13.11), т.е.  $s_n \leq S_n \leq S$ ). Следовательно, на основании признака существования предела (см. параграф 6.5) последовательность  $s_n$  имеет предел, т.е. ряд (1) сходится.

2. Применим метод доказательства от противного. Предположим, что ряд (2) сходится. Тогда согласно первой части теоремы сходится и ряд (1), что противоречит предположению, т.е. ряд (2) расходится. ■

**Замечание.** Так как сходимость ряда не изменяется при отбрасывании конечного числа членов ряда, то условие (13.11) не обязательно должно выполняться с первых членов рядов и только для членов с одинаковыми номерами  $n$ . Достаточно, чтобы оно выполнялось, начиная с некоторого номера  $n = k$ , или чтобы имело место неравенство  $u_n \leq v_{m+n}$ ,  $m$  – некоторое целое число.

**Пример 13.6.** Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} + \dots$$

*Решение.* Сравним данный ряд со сходящимся геометрическим рядом  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$  (его знаменатель  $q = \frac{1}{3} < 1$ ).

Так как члены данного ряда не превосходят членов сходящегося геометрического ряда  $\left(1 \leq 1, \frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{3}, \frac{1}{3 \cdot 3^2} < \frac{1}{3^2} \text{ и вообще } \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} \leq \frac{1}{3^{n-1}}\right)$ , то на основании признака сравнения ряд сходится. ►

**Пример 13.7.** Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} + \dots$$

*Решение.* Сравним данный ряд с гармоническим  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ , мысленно отбросив его первый член,

равный единице (что, естественно, не повлияет на расходимость ряда). Так как  $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2} > \frac{1}{3}$ , и вообще  $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n}$  (ибо  $\sqrt{2} \cdot 1 < 2 = \sqrt{2^2}$ ,  $\sqrt{3} \cdot 2 < 3 = \sqrt{3^2}$ , ...,  $\sqrt{n(n-1)} < n = \sqrt{n^2}$ ), т.е. члены данного ряда больше членов расходящегося гармонического ряда, то на основании признака сравнения ряд расходится. ►

Приведем «эталонные» ряды, часто используемые для сравнения:

1) *геометрический ряд*  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  сходится при  $|q| < 1$  и расходится при  $|q| \geq 1$ ;

2) *гармонический ряд*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится;

3) *обобщенный гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots \quad (13.12)$$

сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$  (доказательство см. в примере 13.11; здесь же отметим, что при  $\alpha < 1$  расходимость ряда (13.12) следует из признака сравнения, так

как в этом случае члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  больше соответствующих членов гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , а в частном случае

при  $\alpha = 2$  сходимость ряда (13.12) может быть доказана сравнением его со сходящимся рядом (13.6)).

Нестандартность применения признака сравнения заключается в том, что надо не только подобрать соответствующий «эталонный» ряд, но и доказать неравенство (13.11), для чего часто требуется преобразование рядов (например, отбрасывание или приписывание конечного числа членов, умножение на определенные числа и т.п.). В ряде случаев более простым оказывается предельный признак сравнения.



**Теорема (предельный признак сравнения).** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  — ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ , то ряды одновременно либо сходятся, либо расходятся.

□ Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ , то по определению предела числовой последовательности (см. параграф 6.1) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что для всех  $n > N$  выполняется неравенство  $\left| \frac{u_n}{v_n} - k \right| < \varepsilon$  или  $|u_n - kv_n| < \varepsilon v_n$ , откуда  $(k - \varepsilon)v_n < u_n < (k + \varepsilon)v_n$ .

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  сходится, то сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)v_n$  и в силу признака сравнения будет сходиться ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ; аналогично, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , то сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (k - \varepsilon)v_n$  и сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ . Таким образом, из сходимости одного ряда следует сходимость другого. Утверждение теоремы о расходимости рядов доказывается аналогично. ■

**Пример 13.8.** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{n^3}$ .

*Решение.* Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (выбор такого ряда для сравнения может подсказать то, что при больших  $n$   $\frac{2n^2 + 5}{n^3} \approx \frac{2}{n}$ ). Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 5}{n^3} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{n^2} = 2 \neq 0$ , то данный ряд, так же как и гармонический, расходится. ►

Весьма удобным на практике является признак Даламбера.

**Теорема (признак Даламбера)<sup>1</sup>.** Пусть для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с положительными членами существует предел отношения  $(n+1)$ -го члена к  $n$ -му члену:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ . Тогда, если  $l < 1$ , то ряд сходится; если  $l > 1$ , то ряд расходится; если  $l = 1$ , то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

□ Из определения предела последовательности следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что для всех  $n > N$  выполняется неравенство  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon$  или  $l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$ .

1. Пусть  $l < 1$ . Выберем  $\varepsilon$  настолько малым, что число  $q = l + \varepsilon < 1$ , т.е.  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$  или  $u_{n+1} < qu_n$ .

Последнее неравенство будет выполняться для всех  $n > N$ , т.е. для

$$n = N+1, N+2, \dots : u_{N+2} < qu_{N+1}, \quad u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2 u_{N+1}, \dots, \\ u_{N+k} < qu_{N+k-1} < \dots < q^{k-1} u_{N+1}.$$

Получили, что члены ряда  $u_{N+2} + u_{N+3} + \dots + u_{N+k} + \dots$  меньше соответствующих членов геометрического ряда  $qu_{N+1} + q^2 u_{N+1} + \dots + q^{k-1} u_{N+1} + \dots$ , сходящегося при  $q < 1$ . Следовательно, на основании признака сравнения этот ряд сходится, а значит сходится и рассматриваемый ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , отличающийся от полученного на первые  $(n+1)$  членов.

2. Пусть  $l > 1$ . Возьмем  $\varepsilon$  настолько малым, что  $l - \varepsilon > 1$ . Тогда из условия  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon$  следует, что  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ . Это

<sup>1</sup> Даламбер Жан Лерон (1717–1783) — французский математик и философ.

означает, что члены ряда возрастают, начиная с номера  $N + 1$ , поэтому предел общего члена ряда не равен нулю, т.е. не выполнен необходимый признак сходимости, и ряд расходится. ■

**Пример 13.9.** Исследовать сходимость рядов:

$$\text{а) } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

*Решение.*

$$\text{а) Так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1, \text{ то}$$

по признаку Даламбера ряд сходится.

$$\begin{aligned} \text{б) Так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n n!}{n^n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3n!(n+1)n^n}{(n+1)^n (n+1)3^n \cdot n!} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{3}{e} > 1, \end{aligned}$$

то по признаку Даламбера ряд расходится. ►

Сравнение рассматриваемых рядов с геометрическими рядами приводит и к другому признаку сходимости.

**Теорема (признак Коши).** Пусть для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с положительными членами предел корня  $n$ -й степени из общего члена  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ . Тогда если  $l < 1$ , то ряд сходится; если  $l > 1$ , то ряд расходится; если  $l = 1$ , то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

□ Идея доказательства теоремы та же, что и для признака Даламбера. Из определения предела последовательности следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что для всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$|\sqrt[n]{u_n} - l| < \varepsilon \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon, \text{ откуда } (l - \varepsilon)^n < u_n < (l + \varepsilon)^n.$$

1. Пусть  $l < 1$ . Выберем  $\varepsilon$  настолько малым, что число  $q = l + \varepsilon < 1$ , т.е.  $u_n < q^n$ . Это означает, что члены данного

ряда будут меньше членов сходящегося при  $q < 1$  геометрического ряда. Следовательно, по признаку сравнения данный ряд сходится.

2. Пусть  $l > 1$ . Возьмем  $\varepsilon$  настолько малым, что  $q = l - \varepsilon > 1$ . Тогда  $u_n > q^n$ . Это означает, что с ростом  $n$  члены ряда возрастают, и необходимый признак сходимости не выполняется, т.е. ряд расходится. ■

**Пример 13.10.** Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

*Решение.* Для данного ряда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится. ►

**Замечание.** Отметим некоторые особенности применения признаков Даламбера и Коши:

- а) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \infty$ , то ряд расходится;
- б) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l = 1$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$ , то, как отмеча-

лось выше, признаки Даламбера и Коши ответа о сходимости ряда не дают, и рекомендуется перейти к другим признакам сходимости, например признаку сравнения рядов (см. выше) или интегральному признаку сходимости, к рассмотрению которого мы переходим.

**Теорема (интегральный признак сходимости).** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , члены которого положительны и не возрастают, т.е.  $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$ , а функция  $f(x)$ , определенная при  $x \geq 1$ , непрерывная и невозрастающая и

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \quad \dots, \quad f(n) = u_n, \quad \dots \quad (13.13)$$

Тогда для сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x)dx$ .

□ Рассмотрим ряд

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)dx + \dots \quad (13.14)$$

Его  $n$ -й частичной суммой будет

$$S_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx. \quad (13.15)$$

Сходимость ряда (13.14) означает существование предела последовательности его частичных сумм (13.15), т.е. сходимость несобственного интеграла  $\int_1^{\infty} f(x)dx$ , поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx$ . В силу монотонности функции  $f(x)$  на любом отрезке  $[n, n+1]$   $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$  или, учитывая (13.13),

$$u_n \geq f(x) \geq u_{n+1}. \quad (13.16)$$

Интегрируя (13.16) на отрезке  $[n, n+1]$ , получаем

$$\int_1^{n+1} u_n dx \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \int_1^{n+1} u_{n+1} dx,$$

откуда

$$u_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq u_{n+1}. \quad (13.17)$$

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится, то по признаку сравнения рядов в силу первого неравенства (13.17) должен сходиться ряд (13.14), а следовательно, и несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x)dx$ . Обратно, если сходится  $\int_1^{\infty} f(x)dx$ , т.е. ряд (13.14),

то согласно тому же признаку сравнения на основании второго неравенства (13.17) будет сходиться ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots, \text{ а следовательно, и данный ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Отметим *геометрический смысл* теоремы. Интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  означает площадь неограниченной криволинейной трапеции под кривой  $f(x)$ , т.е. площадь криволинейной

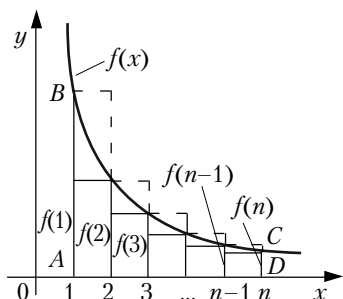


Рис. 13.1

трапеции  $ABCD$  при  $n \rightarrow \infty$  (рис. 13.1).

Составим две ступенчатые фигуры из прямоугольников с основаниями единичной длины: ниже кривой  $f(x)$  с высотами  $f(2), f(3), \dots, f(n)$  (показана сплошными линиями) и выше кривой  $f(x)$  с высотами  $f(1), f(2), \dots, f(n-1)$  (выделена пунктирными линиями). Очевидно, что площадь криволинейной трапеции  $ABCD$

больше площади нижней ступенчатой фигуры, но меньше площади верхней, т.е.

$$f(2) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x) dx < f(1) + \dots + f(n-1)$$

или

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x) dx < S_n - f(n),$$

где  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ .

Следовательно,

$$S_n < \int_1^n f(x) dx + f(1), \quad S_n > \int_1^n f(x) dx + f(n).$$

Полученные неравенства означают, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность частичных сумм  $S_n$  сходится (расходится).

ся) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ . ■

**Пример 13.11.** Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ .

*Решение.* Пусть  $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ . Функция  $f(x)$  при  $x > 0$  (а следовательно, и при  $x \geq 1$ ) положительная и невозрастающая (точнее убывающая). Поэтому сходимость ряда равносильна сходимости несобственного интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ .

$$\text{Имеем } I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

$$\text{Если } \alpha = 1, \text{ то } I = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln|b| - \ln 1) = \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \alpha \neq 1, \text{ то } I &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-\alpha} - 1) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1; \\ \infty & \text{при } \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, данный ряд сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ . ►

**Замечание.** Сравнивая различные достаточные признаки сходимости для рядов с положительными членами, можно отметить относительную простоту признаков Даламбера и Коши, которые наиболее часто используются на практике. Вместе с тем эти признаки, основанные по существу на сравнении исследуемых рядов с геометрическими рядами, уступают интегральному признаку сходимости по его исключительно высокой чувствительности, позволяющей проводить различие между сходящимися и расходящимися рядами, даже если члены одного из них лишь незначительно отличаются от членов другого.

Например, с помощью интегрального признака (см. примеры 13.11, 13.35) устанавливается расходимость гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  или ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ , члены которого убывают даже быстрее, чем в гармоническом ряде, в то время (как можно показать) признаки Даламбера и Коши дают соответственно  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$  и вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Недостатком интегрального признака является сложность вычисления отдельных несобственных интегралов. Например, для исследования сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}}$  следовало доказать сходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , а это сделать непросто, учитывая, что первообразная подынтегральной функции не является элементарной функцией (т.е.  $\int e^{-x^2} dx$  — «неберущийся» интеграл)<sup>1</sup>.

### 13.4. Ряды с членами произвольного знака

**Знакопередающиеся ряды.** Под *знакопередающимся* рядом понимается ряд, в котором члены попеременно то положительные, то отрицательные:  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1}u_n + \dots$ , где  $u_n > 0$ .

**Теорема (признак Лейбница).** Если члены знакопередающегося ряда убывают по абсолютной величине  $u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$  и предел его общего члена при  $n \rightarrow \infty$  равен нулю, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена:  $S \leq u_1$ .

□ Рассмотрим последовательность частичных сумм четного числа членов при  $n = 2m$ :

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

<sup>1</sup> Здесь, правда, можно заметить, что  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (меньше сходящегося интеграла Эйлера — Пуассона (см. параграф 11.7)), т.е. сходится.



Эта последовательность возрастающая (так как с ростом  $n = 2m$  увеличивается число положительных слагаемых в скобках) и ограниченная (это видно из того, что  $S_{2m}$  можно представить в виде

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m},$$

откуда следует, что  $S_{2m} < u_1$ ). На основании признака существования предела (см. параграф 6.5) последовательность  $S_{2m}$  имеет предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ .

Попутно заметим, что, переходя к пределу в неравенстве  $S_{2m} < u_1$  при  $m \rightarrow \infty$ , получаем  $S \leq u_1$ .

Теперь рассмотрим последовательность частичных сумм нечетного числа членов при  $n = 2m + 1$ . Очевидно, что  $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ , поэтому, учитывая необходимый признак сходимости ряда,  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$ .

Итак, при любом  $n$  (четном или нечетном)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , т.е. ряд сходится. Рис. 13.2 иллюстрирует сходимость  $S_n$  к числу  $S$  слева при четном  $n$  и справа при нечетном  $n$ . ■

Из рис. 13.2 вытекает еще одна оценка для суммы  $S$  сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница: при любом  $m$

$$S_{2m} \leq S \leq S_{2m+1}.$$

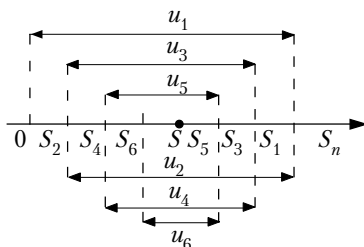


Рис. 13.2

**Пример 13.12.** Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots$$

*Решение.* Так как члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине  $1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \dots > \frac{1}{n^2} > \dots$  и предел общего члена  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ , то по признаку Лейбница ряд сходится. ►

**Замечание.** В теореме Лейбница существенно не только условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , но и условие  $u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$

Так, для ряда  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$  второе условие нарушено и, хотя  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

ряд расходится. Это видно, если данный ряд представить (после попарного сложения его членов) в виде

$$2 + 1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{n-1} + \dots = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \dots \right), \text{ т.е. «удво-}$$

енного» гармонического ряда.

**Следствие.** Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакопеременного ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

□ По формуле (13.9) сумму сходящегося ряда можно представить как сумму  $n$  членов ряда и суммы  $n$ -го остатка ряда, т.е.  $S = S_n + r_n$ . Полагая приближенно  $S \approx S_n$ , допускается погрешность, равная  $r_n$ . Так как при четном  $n$   $n$ -й остаток знакопеременного ряда  $u_{n+1} - u_{n+2} + \dots$  представляет ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, то его сумма  $r_n$  не превосходит первого члена  $u_{n+1}$ , т.е.  $r_n \leq u_{n+1}$ . Так как при нечетном  $n$  для  $n$ -го остатка ряда  $-u_{n+1} + u_{n+2} - \dots$  его сумма  $r_n < 0$ , то, очевидно, что при любом  $n$

$$|r_n| \leq u_{n+1}. \quad \blacksquare \quad (13.18)$$

**Пример 13.13.** Какое число членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$  надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

**Решение.** По условию  $|r_n| < 0,001$ . Учитывая следствие теоремы Лейбница (13.18), запишем более сильное неравенство  $|u_{n+1}| \leq 0,001$  или  $\frac{1}{(n+1)^2} \leq 0,001$ , откуда  $(n+1)^2 \geq 1000$  и  $n \geq \sqrt{1000} - 1$ , или  $n \geq 30,6$ , т.е. необходимо взять не менее 31 члена ряда. ►

**Знакопеременные ряды.** Пусть  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  *знакопеременный ряд* (13.1), в котором любой его член  $u_n$  может быть как положительным, так и отрицательным.

**Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).** Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда (13.1)

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (13.19)$$

сходится, то сходится и данный ряд.

□ Обозначим  $S_n^+$  и  $S_n^-$  суммы абсолютных величин членов данного ряда (13.1), входящих в него со знаками «плюс» и «минус».

Тогда частичная сумма данного ряда  $S_{n_1} = S_n^+ - S_n^-$ , а ряда, составленного из абсолютных величин его членов,  $S_{n_2} = S_n^+ + S_n^-$ . По условию ряд (13.19) сходится, следовательно, существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n_2} = S$ .

Последовательности  $S_n^+$  и  $S_n^-$  являются возрастающими (так как с увеличением  $n$  увеличиваются  $S_n^+$  и  $S_n^-$ ) и ограниченными ( $S_n^+ \leq S$ ,  $S_n^- \leq S$ ), следовательно, существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^-$ , и, соответственно, предел частичной суммы данного ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^-$ , т.е. ряд (13.1) сходится. ■

Следует отметить, что обратное утверждение неверно. Ряд (13.19) может расходиться, а ряд (13.1) сходиться. Например, ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$  сходится по признаку

Лейбница, а ряд из абсолютных величин его членов

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (\text{гармонический ряд})$$

расходится.

Поэтому введем следующие определения.

**Определение 1.** Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

**Определение 2.** Ряд называется *условно сходящимся*, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Таким образом, рассмотренный выше ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  — абсолютно сходящийся, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  — условно сходящийся.

В принципе, различие между абсолютно сходящимися и условно сходящимися рядами заключается в следующем: абсолютно сходящиеся ряды сходятся в основном в силу того, что их члены быстро убывают, а условно сходящиеся — в результате того, что положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов существенно различаются. Абсолютно сходящиеся ряды по своим свойствам напоминают конечные суммы, их можно складывать, перемножать, переставлять местами члены ряда.

Условно сходящиеся ряды такими свойствами не обладают. Возьмем в качестве примера ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$ . Переставим члены местами и сгруппируем их следующим образом:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

Перепишем ряд в виде

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right),$$

т.е. от перестановки членов ряда сумма его уменьшилась в два раза.

Можно показать (*теорема Римана*<sup>1</sup>), что от перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд (см. пример 13.104).

<sup>1</sup> Риман Георг Фридрих Бернхард (1826—1866) — немецкий математик.

## ПРАКТИКУМ

**13.5. Сходимость ряда.****Необходимый признак сходимости**

**13.14.** Найти сумму ряда  $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \dots$ , доказав его сходимость.

*Решение.* Очевидно, что общий член ряда  $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ . Представим сумму  $n$  членов ряда в виде

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \\ &= \frac{4-1}{1 \cdot 4} + \frac{9-4}{4 \cdot 9} + \frac{16-9}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Так как при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $S_n$  имеет конечный предел, то ряд сходится, и его сумма

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1. \blacktriangleright$$

**13.15.** Используя определение, доказать расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{4n+3}{4n-1}$ .

*Решение.* Найдем частичную сумму ряда

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n = \ln \frac{7}{3} + \ln \frac{11}{7} + \ln \frac{15}{11} + \dots + \\ &+ \ln \frac{4(n-1)+3}{4(n-1)-1} + \ln \frac{4n+3}{4n-1} = \\ &= \ln \left( \frac{7}{3} \cdot \frac{11}{7} \cdot \frac{15}{11} \cdot \dots \cdot \frac{4n-1}{4n-5} \cdot \frac{4n+3}{4n-1} \right) = \ln \frac{4n+3}{3}, \end{aligned}$$

ибо сумма логарифмов нескольких чисел равна логарифму их произведения. Теперь  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{4n+3}{3} = \infty$ , следовательно, данный ряд расходится. ►

**13.16.** Проверить выполнение необходимого признака сходимости и, если это возможно, сделать вывод о сходимости (расходимости) ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{\ln n + 2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

*Решение.*

а) Найдем предел общего члена

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{\ln n + 2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right].$$

Для вычисления предела отношения двух бесконечно больших функций натурального аргумента правило Лопиталя непосредственно применять нельзя, ибо для таких функций не определено понятие производной. В связи с этим, применяя *теорему о «погружении» дискретного аргумента  $n$  в непрерывный<sup>1</sup>  $x$* , получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lg x}{\ln x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\lg x)'}{(\ln x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x \ln 10}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln 10} \neq 0,$$

следовательно, ряд расходится.

б) Найдем

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{n^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} =$$

---

<sup>1</sup> Согласно этой теореме если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  существует и равен  $A$  ( $A$  может равняться нулю или бесконечности), то  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  также существует и равен  $A$ .

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left[ \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{e} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0 \quad (\text{ибо } \ln A = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{e} \right)^{\frac{1}{n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{n}{e} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n - 1}{n} = 0,
\end{aligned}$$

в этом можно убедиться, например, применив правило Лопиталя). Итак,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , т.е. данный ряд расходится. ►

Написать в простейшей форме общий член ряда:

$$13.17. \frac{4}{3} + \frac{7}{4} + \frac{10}{5} + \frac{13}{6} + \dots \quad 13.18. \frac{3}{5} + \frac{8}{10} + \frac{15}{17} + \frac{24}{26} + \dots$$

Найти частичную сумму ряда  $S_n$ . В случае сходимости ряда найти его сумму  $S$ :

$$13.19. \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots \quad 13.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

$$13.21. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \dots$$

$$13.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

$$13.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}. \quad 13.24. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{5n-3}{5n+2} \right).$$

Проверить выполнение необходимого признака сходимости и, где это возможно, сделать вывод о сходимости (расходимости) ряда  $S$ :

$$13.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{100n-1}. \quad 13.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3} - 25}{\sqrt{n} + 50}.$$

$$13.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}. \quad 13.28. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{2n-3} \right)^n.$$

$$13.29. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{n^2 + 1}.$$

$$13.30. \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{3n}{3n-1}.$$

### 13.6. Сходимость рядов с положительными членами

**13.31.** С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 5}{(n^2 + 1)^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (e^{\frac{1}{n^3}} - 1)^2.$$

*Решение.*

а) Очевидно, что задан ряд с положительными членами, так как  $\sin \frac{\pi}{2^n} > 0$ , ибо аргумент синуса  $0 < \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$  при любом  $n$ . Так как члены данного ряда меньше членов сходящегося геометрического ряда со знаменателем  $q = \frac{1}{2} < 1$ , т.е.  $\sin \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$  (ибо при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$   $\sin x < x$ ), то данный ряд сходится.

б) Если общий член ряда представляет собой отношение двух многочленов относительно  $n$ , то вопрос о сходимости ряда полностью исчерпывается сравнением его с «эталонным» рядом (13.12), где показатель  $\alpha$  равен разности степеней знаменателя и числителя. В данном случае числитель — многочлен третьей степени, а знаменатель — четвертой, следовательно,  $\alpha = 4 - 3 = 1$ , и надо сравнивать данный ряд с гармоническим. Применяя предельный признак сравнения, находим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^3 + 5}{(n^2 + 1)^2} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(4n^3 + 5)}{(n^2 + 1)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^4}} = 4 \neq 0, \end{aligned}$$



т.е. данный ряд, как и «эталонный» гармонический, расходится.

в) Представим общий член ряда в виде

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}.$$

Применим предельный признак сравнения. Так как при больших значениях  $n$  выражение в скобках  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \approx 2\sqrt{n}$ , а знаменатель выражения общего члена  $u_n \approx n \cdot 2\sqrt{n} = 2n^{\frac{3}{2}}$ , то в качестве «эталонного» ряда целесообразно взять ряд (13.12) при  $\alpha = \frac{3}{2}$ . Так как предел отношения общих членов двух рядов

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} : \frac{1}{n^{3/2}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

есть конечное число, не равное нулю, то данный ряд, так же как и «эталонный», сходится.

г) Заметим, что при  $n \rightarrow \infty$  бесконечно малая  $e^{\frac{1}{n^3}} - 1$  эквивалентна  $\frac{1}{n^3}$  (см. параграф 6.9). Это означает, что при больших значениях  $n$  общий член ряда  $u_n$  будет приближенно равен  $n^4 \left( \frac{1}{n^3} \right)^2 = \frac{1}{n^2}$ , т.е. в качестве «эталонного» можно взять сходящийся ряд (13.12) при  $\alpha = 2 > 1$ . Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 (e^{\frac{1}{n^3}} - 1)^2 : \frac{1}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^6 \left( \frac{1}{n^3} \right)^2 \right) = 1 \neq 0,$$

то данный ряд, как и эталонный, расходится. ►

**13.32.** С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов:

а)  $\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{n!}$ ; в)  $\frac{2}{1!} + \frac{2^4}{(2!)^2} + \frac{2^9}{(3!)^2} + \dots + \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} + \dots$ .

*Решение.*

а) Общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)}.$$

Тогда  $u_{n+1} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)(3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)(4n+2)}$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1,$$

т.е. данный ряд сходится.

б) Найдем  $u_{n+1} = \frac{7^{n+1} + 3^{n+1}}{(n+1)!}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7^{n+1} + 3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{7^n + 3^n}{n!} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7^{n+1} + 3^{n+1})n!}{(n+1)!(7^n + 3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n \left( 7 + 3 \left( \frac{3}{7} \right)^n \right) n!}{n!(n+1) 7^n \left( 1 + \left( \frac{3}{7} \right)^n \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n+1} = 0 < 1 \end{aligned}$$

(ибо  $(n+1)! = n!(n+1)$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{7} \right)^n = 0$ ), т.е. ряд сходится.

в) Так как

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^2} : \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(n+1)^2} \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2} \cdot 2^{2n+1} (n!)^2}{(n!)^2 (n+1)^2 \cdot 2^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1}}{(n+1)^2} = \infty, \end{aligned}$$

то ряд расходится. ►

**13.33.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!} = 0$ .

*Решение.* Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с общим членом  $u_n = \frac{1000^n}{n!}$ . Так как

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{1000^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 1000^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1, \end{aligned}$$

то по признаку Даламбера этот ряд сходится; следовательно, в силу необходимого признака сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!} = 0. \quad \blacktriangleright$$

**13.34.** С помощью признака Коши исследовать сходимость ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}.$$

*Решение.*

а) Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = [1^{\infty}].$$

Так как  $\frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \right]^{\frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

б) При  $a = 0$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos 0)^n = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$  расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости.

При  $a \neq 0$  данный ряд в зависимости от значения  $a$  будет содержать как положительные, так и отрицательные члены. Однако, начиная с некоторого  $n$ ,  $\left| \frac{a}{n} \right| < \frac{\pi}{2}$ , и все члены ряда положительны, т.е.  $\cos \frac{a}{n} > 0$ . Если отбросить конечное число отрицательных членов этого ряда, он станет знакоположительным. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость (см. параграф 13.1), следовательно, к этому ряду можно применить признак Коши. Найдем

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} = \\ &= [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \sin^2 \frac{a}{n} \right)^{\frac{n^2}{2}}. \end{aligned}$$

Полагая  $\frac{a}{n} = y$ , откуда  $n = \frac{a}{y}$ , получаем

$$l = \lim_{y \rightarrow 0} \left( 1 - \sin^2 y \right)^{\frac{a^2}{2y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \left( 1 - \sin^2 y \right)^{-\frac{1}{\sin^2 y}} \right]^{\frac{a^2 \sin^2 y}{2y^2}} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$$

(ибо  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin y}{y} \right)^2 = 1^2 = 1$ ), т.е. ряд сходится. ►

**13.35.** С помощью интегрального признака исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ .

*Решение.* Функция  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  при  $x > 1$  является положительной и убывающей. Найдем

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |\ln x| \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty,$$

следовательно, ряд расходится. ►

**13.36.** Исследовать сходимость ряда:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}; \quad б) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

*Решение.*

а) Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(n+2)} : \frac{1}{\ln(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = 1,$$

т.е. вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Тот же результат получится при использовании признака Коши. Проверим выполнение необходимого признака (с этого можно было начать исследование):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0, \text{ т.е. необходимый признак выполнен,}$$

но вопрос о сходимости ряда по-прежнему не решен.

Для исследования сходимости данного ряда не применим и интегральный признак, так как исследование сходимости несобственного интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln(x+1)}$  затруднительно, поскольку первообразная подынтегральной функции не является элементарной функцией (т.е. соответствующий неопределенный интеграл — «неберущийся»).

Применим признак сравнения в более простой предельной форме. Сравним данный ряд, например, с гармоническим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(n+1)} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(n+1)} = \infty,$$

т.е. ответа о сходимости ряда нет.

Аналогичная картина  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty \right)$  наблюдается и при использовании других «эталонных» рядов (см. параграф 13.3). Применим, наконец, признак сравнения в обычной форме. Сравним данный ряд с тем же гармоническим рядом, у которого отброшен первый член:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$ . Так как члены рассматриваемого

ряда больше членов расходящегося гармонического ряда ( $\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{3}$  и вообще  $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{(n+1)}$ , что вытекает из очевидного неравенства  $\ln x < x$ ), то данный ряд расходится.

б) В силу определения  $n! < n^n$  и, соответственно,  $\ln(n!) < \ln n^n$  или  $\ln(n!) < n \ln n$ , а значит  $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n \ln n}$ . Ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  расходится (см. пример 13.35), следовательно, по признаку сравнения данный ряд расходится. ►

С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

$$13.37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2 - 5}.$$

$$13.38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7}{3n^3+11}.$$

$$13.39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}.$$

$$13.40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$13.40. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2}.$$

$$13.42. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$13.43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n}{n^3+5n-5}.$$

$$13.44. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

$$13.45. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+7}}{n^5+12}.$$

$$13.46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}.$$

$$13.47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n-4)}.$$

$$13.48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+3)}{n^2}.$$

$$13.49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3} \ln(n+1)}.$$

$$13.50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3} \ln(n+1)}.$$

$$13.51. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{4^n}{5^n + n}.$$

$$13.52. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left( 1 - \cos \frac{1}{n^2} \right).$$

Исследовать сходимость рядов с помощью предельного признака сравнения. В качестве эталонного ряда рассмот-

реть ряд с общим членом  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ . В ответе указать также подходящее значение  $\alpha$ :

$$13.53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 7n + 10}{3n^5 + 10n - 12}.$$

$$13.54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 2} + \sqrt{n^3 - 1}}{\sqrt[5]{n^{15}} + 14n^{11} + 1}.$$

$$13.55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3 + \sqrt{n^8 + 10}}{35\sqrt{n^4 + 1} + n^5}.$$

$$13.56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3n + 1}.$$

$$13.57. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{4}{n^3 + 7} \right).$$

$$13.58. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{3^n + 1}{\sqrt{n} \cdot 3^n}.$$

$$13.59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n}.$$

$$13.60. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:

$$13.61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

$$13.62. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{3n^2 - 1} \right)^n.$$

$$13.63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}}{3^n}.$$

С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов:

$$13.64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n + 7}.$$

$$13.65. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{5^n + 12}.$$

$$13.66. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)}.$$

$$13.67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 - 5}.$$

$$13.68. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}.$$

$$13.69. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}.$$

$$13.70. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

$$13.71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

$$13.72. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + n}.$$

$$13.73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{n^n}.$$

$$13.74. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n + n^2}.$$

$$13.75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n + 2^n}.$$

$$13.76. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{5n+4} \right)^n.$$

$$13.77. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+2}{3n+1} \right)^{-2n^2}.$$

$$13.78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{3^n}.$$

$$13.79. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{n^2+5} \right)^n.$$

$$13.80. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi \cdot 3^n}{4^n + e^n}.$$

$$13.81. \sum_{n=1}^{\infty} n \left( 1 - \cos \frac{1}{3^n} \right).$$

С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

$$13.82. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}.$$

$$13.83. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln^5 n}}.$$

$$13.84. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Исследовать сходимость рядов:

$$13.85. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n + 5}.$$

$$13.86. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)2^{2n-1}}.$$

$$13.87. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 1}{n^3 - n + 3}.$$

$$13.88. \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots$$

$$13.89. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{5^n}.$$

$$13.90. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+7}}{3n^2-15}.$$

$$13.91. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n n^2}.$$

$$13.92. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 12n}{\sqrt[5]{n^8 + n^3 + 2}}.$$

$$13.93. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{\ln^3 n}}.$$

$$13.94. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{12^n + n^2}.$$

$$13.95. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{50}}{3^n}.$$

$$13.96. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^n + 1}{(3n+1)^n}.$$

$$13.97. \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + 3\operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + 4\operatorname{tg} \frac{\pi}{32} + \dots$$



$$13.98. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{8^n}.$$

$$13.99. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2^n}.$$

$$13.100. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{n}.$$

$$13.101. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{4^n}{n(4^n + 1)} \right).$$

$$13.102. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{2n+5} \right)^{3n}.$$

### 13.7. Сходимость рядов с членами произвольного знака

**13.103.** Исследовать сходимость ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^7}{7n^6 + 3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{2n-1};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi n}{3}}{n^2 + 1}; \quad \text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

*Решение.*

а) Предел общего члена ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^7}{7n^6 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\frac{7}{n} + \frac{3}{n^7}} = \infty, \text{ так как знамена-}$$

тель дроби стремится к нулю, а числитель колеблется, принимая значения 1 (при четном  $n$ ) и  $-1$  (при нечетном  $n$ ). Следовательно, необходимый признак сходимости не выполнен, и ряд расходится.

б) Так как члены знакопеременного ряда, начиная со второго, убывают по абсолютной величине:

$$\frac{\ln 2}{3} > \frac{\ln 3}{5} > \dots > \frac{\ln n}{2n-1} > \dots$$

и предел общего члена  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2n-1} = 0$  (это можно устано-

вить, например, с помощью правила Лопиталя), то по признаку Лейбница ряд сходится. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n-1}$ , составленный

из абсолютных величин членов данного ряда, расходится, так как его члены больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда, умноженного на  $\frac{1}{2}$ , т.е.  $\frac{\ln n}{2n-1} > \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ . Следовательно, данный ряд условно сходящийся.

в) Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, так как его члены меньше соответствующих членов сходящегося ряда (13.12) при  $\alpha = 2 > 1$ ,

$$\text{т.е. } \left| \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi n}{3}}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}. \text{ Следовательно, данный ряд}$$

сходится, и притом абсолютно.

г) Представим общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n [\sqrt{n} - (-1)^n]}{(\sqrt{n})^2 - [(-1)^n]^2} = \frac{(-1)^n \sqrt{n} - 1}{n-1} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

(здесь учли, что  $(-1)^{2n} = [(-1)^2]^n = 1$ , и формулу разности квадратов).

Ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$  сходится условно по признаку Лейбница, а ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$  — гармонический — расходится, следовательно, данный ряд расходится. ►

**13.104.** Доказать, что если в ряде

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dots$$

переставить члены таким образом, чтобы за тремя положительными следовал один отрицательный:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots, \quad (*)$$

то полученный ряд с общим членом  $u_n = \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}$  будет расходящимся.

*Решение.* В силу того, что  $\frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} > \frac{1}{\sqrt{6n}} + \frac{1}{\sqrt{6n}} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ , т.е.  $\frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$  и  $u_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ , ряд (\*) с положительными членами расходится по признаку сравнения, ибо его члены больше членов расходящегося при  $\alpha = \frac{1}{2}$  ряда (13.12), умноженного на  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ . ►

**13.105.** Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(4n+1)5^n} = -\frac{2}{5 \cdot 5^1} + \frac{4}{9 \cdot 5^2} - \frac{6}{13 \cdot 5^3} + \frac{8}{17 \cdot 5^4} - \dots$$

надо взять, чтобы найти его сумму  $S$  с точностью до 0,001? Вычислить  $S$ .

*Решение.* С помощью признака Лейбница (аналогично примеру 13.103, б) нетрудно убедиться в том, что ряд сходится. В соответствии с неравенством (13.18) погрешность  $r_n$  при замене суммы  $S$  сходящегося знакопередающегося ряда суммой  $S_n$  его первых  $n$  членов, т.е.  $S_n = -0,0800 +$

$$+ 0,0178 - 0,0037 + 0,0008 - \dots + \frac{(-1)^n 2n}{(4n+1)5^n}, \text{ не будет превосходить}$$

первого отброшенного члена:  $|r_n| < u_{n+1}$ . Так как

$|r_n| < u_4 = 0,0008 < 0,001$ , то для обеспечения заданной точности необходимо взять  $n = 3$  члена ряда, т.е. сумма ряда  $S \approx S_3 \approx -0,0800 + 0,0178 - 0,0037 = -0,0659 \approx -0,065$  (округляем с недостатком, так как  $u_4 > +0,0005$ ). ►

Исследовать сходимость ряда (для сходящегося ряда с членами произвольного знака установить, сходится он абсолютно или условно):

**13.106.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$

**13.107.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^3+10}.$

$$13.108. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n+7}.$$

$$13.109. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+4}.$$

$$13.110. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+2}.$$

$$13.111. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}.$$

$$13.112. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^5+7}}.$$

$$13.113. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$13.114. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{4^n+7}.$$

$$13.115. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cdot 2^n}{n^3+1}.$$

$$13.116. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(-1)^{n+1}}{4^n}.$$

$$13.117. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{10-n \cdot 3^n}.$$

$$13.118. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^3+7)}{3n^4+12\sqrt{n+5}}.$$

$$13.119. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{\sqrt{n^8+7}+\sqrt{n^6-1}}.$$

$$13.120. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{n^n+2}.$$

$$13.121. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi n}{3}}{2\sqrt{n^3+1}}.$$

$$13.122. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-2n+5}{4n-15} \right)^n.$$

$$13.123. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{3n+4}{3n-7} \right)^n.$$

$$13.124. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln \frac{n^2}{n^2+1}.$$

$$13.125. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \left( \frac{(-1)^n}{3^n} \right).$$

Определить, сколько членов ряда надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001:

$$13.126. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+5}.$$

$$13.127. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

$$13.128. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$13.129. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

$$13.130. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n \cdot n!}.$$

Найти (с точностью до 0,00001) сумму ряда. Сколько членов ряда следует взять, чтобы гарантировать требуемую точность?

$$13.131. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n \cdot n!}. \quad 13.132. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)! 2^n}.$$

13.133. Зная, что сумма ряда<sup>1</sup>  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ , найти суммы рядов:

а)  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots$ ;

б)  $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

### Контрольные задания по главе 13 «Числовые ряды»

№	Вариант 13.1	Вариант 13.2	Вариант 13.3
1	Найти сумму ряда:		
	$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5} \right)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5n-1} - \frac{1}{5n+4} \right)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right)$
2	Исследовать сходимость рядов:		
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{\sqrt[3]{3n^9-4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^{n+2}}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + \sqrt{n^8+10}}{6n^6-14}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5n-11}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + \sqrt{n^{10}+4}}{\sqrt[3]{n^{12}+18}}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n! \cdot 2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$

<sup>1</sup> Указанное значение  $\ln 2$  может быть получено по формуле (14.18) гл. 14 при  $x = 2$ .

№	Вариант 13.1	Вариант 13.2	Вариант 13.3
	Определить, какие из приведенных рядов являются сходящимися, а какие — расходящимися. Для сходящихся рядов указать тип сходимости:		
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^5}{4n^2 + 3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{3^n + n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 7^n}{7^n + 2 \cdot 5^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^3}{\sqrt{n^8 + 10}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^4}{n^4 + 3n^2 + 1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4 + 3^n}$
	Выяснить, сколько членов ряда надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001:		
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^4 + 1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5 - 10}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^6 + \ln n}$

## Тест 13

1. Закончить утверждение. Ряд называется сходящимся, если:

- 1) последовательность его частичных сумм имеет конечный или бесконечный предел;
- 2) предел общего члена ряда равен нулю;
- 3) последовательность его частичных сумм имеет конечный предел;
- 4) предел модуля общего члена равен нулю;
- 5) последовательность его частичных сумм является бесконечно большой.

2. Дан сходящийся ряд. При отбрасывании нескольких его ненулевых членов:

- 1) ряд останется сходящимся и его сумма не изменится;
- 2) ряд останется сходящимся и его сумма изменится;
- 3) ряд станет расходящимся;
- 4) ряд останется сходящимся и его сумма обязательно уменьшится;

5) не зная членов ряда, ничего нельзя сказать о сходимости или расходимости нового ряда.

3. Из данных рядов выбрать сходящиеся:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n; 4) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n; 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

4. Найти соответствие между числовыми рядами и утверждениями:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n+4};$$

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ , ряд расходится;

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n};$$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ , ряд расходится;

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{4n-1};$$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , для ответа на вопрос о сходимости ряда требуется дополнительное исследование;

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n^2+7}.$$

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , ряд сходится.

5. Для каждого из данных рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  указать такое значение  $\alpha$ , что для ряда с общим членом  $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$  выполняется условие предельного признака сравнения: существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ ,  $k \neq 0$ ,  $k \neq \infty$ . Сделать вывод о сходимости исходного ряда (1 — сходится; 2 — расходится):

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{n^2 + \sqrt{n^2} + 7}; б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{n^2 \sqrt{n^2} + 7}.$$

6. Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с членами  $u_n = \frac{5^n}{n+2^n}$  найти  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  и на основании этого сделать вывод о сходимости ряда (1 — сходится, 2 — расходится, 3 — требуется дополнительное исследование).

7. Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  — положительный ряд и  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

Выбрать верные окончания утверждения. Существует

такой положительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , у которого:

1)  $l = 0,1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ ;      2)  $l = 1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ;

3)  $l = 2$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  бесконечен;      4)  $l = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

8. Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^4 - 15}$  указать тип сходимости (1 — абсолютная сходимость, 2 — условная сходимость, 3 — расходимость).

9. Сколько членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 10^n}$  надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,00005?

10. Указать наиболее точную оценку для суммы  $S$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$ :

1)  $0 < S < \frac{1}{2}$ ; 2)  $\frac{3}{8} < S < \frac{5}{8}$ ; 3)  $\frac{1}{8} < S < \frac{3}{8}$ ;

4)  $0 < S < \frac{1}{8}$ .



# Глава 14

## СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

До сих пор рассматривались ряды, членами которых были числа, т.е. числовые ряды. Теперь перейдем к изучению рядов, членами которых являются функции, в частности, степенные

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (14.1)$$

Такие ряды называются *степенными*, а числа  $c_0, c_1, \dots, c_n$  — *коэффициентами* степенного ряда.

#### 14.1. Область сходимости степенного ряда

Совокупность тех значений  $x$ , при которых степенной ряд (14.1) сходится, называется *областью сходимости степенного ряда*.

**Пример 14.1.** Найти область сходимости степенного ряда  $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

*Решение.* Данный ряд можно рассматривать как геометрический ряд со знаменателем  $q = x$ , который сходится при  $|q| = |x| < 1$ . Отсюда  $-1 < x < 1$ , т.е. областью сходимости является интервал  $(-1; 1)$ . ►

Структура области сходимости степенного ряда устанавливается с помощью теоремы Абеля.

**Теорема Абеля.**<sup>1</sup> 1. Если степенной ряд сходится при значении  $x = x_0 \neq 0$  (отличном от нуля), то он сходится и притом абсолютно, при всех значениях  $x$  таких, что

---

<sup>1</sup> Абель Нильс Хендрик (1802—1829) — норвежский математик.

$|x| < |x_0|$ . 2. Если степенной ряд расходится при  $x = x_1$ , то он расходится при всех значениях  $x$  таких, что  $|x| > |x_1|$ .

□ 1. По условию ряд (14.1) сходится при  $x = x_0 \neq 0$ , следовательно, выполняется необходимый признак сходимости  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0$ . Отсюда следует, что последовательность  $|c_n x_0^n|$  ограничена, т.е. существует такое число  $M > 0$ , что для всех  $n$  выполняется неравенство

$$|c_n x_0^n| < M. \quad (14.2)$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (14.1), т.е. ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x_0^n|$ , который представим в виде

$$|c_0| + |c_1 x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + \dots + |c_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (14.3)$$

Члены ряда (14.3) согласно неравенству (14.2) меньше соответствующих членов ряда

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots,$$

представляющего геометрический ряд, который сходится,

когда его знаменатель  $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ , т.е.  $|x| < |x_0|$ , следовательно,

но, на основании признака сравнения ряд (14.1) сходится.

2. По условию ряд (14.1) расходится при  $x = x_1$ . Покажем, что он расходится для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x| > |x_1|$ . Предположим противное, т.е. при  $|x| > |x_1|$  ряд (14.1) сходится. Тогда по доказанному выше он должен сходиться и в точке  $x_1$  (ибо  $|x_1| < |x|$ ), что противоречит условию. Таким образом, для всех  $x$  таких, что  $|x| > |x_1|$ , ряд (14.1) расходится. ■

Из теоремы Абеля (рис. 14.1) следует, что существует такое число  $R \geq 0$ , что

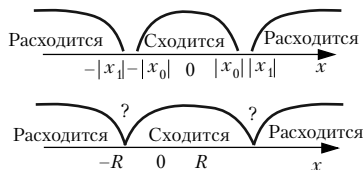


Рис. 14.1

при  $|x| < R$ , или  $x \in (-R; R)$ , ряд сходится, а при  $|x| > R$  — расходится.

Число  $R$  получило название *радиуса сходимости*, а интервал  $(-R; R)$  — *интервала сходимости* степенного ряда.

На концах интервала сходимости, т.е. при  $x = -R$  и  $x = R$  ряд может как сходиться, так и расходиться (см. рис. 14.1).

□ Найдем выражение радиуса сходимости степенного ряда (14.1) через его коэффициенты. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|c_0| + |c_1x| + |c_2x^2| + \dots + |c_nx^n| + \dots, \quad (14.4)$$

в котором *все коэффициенты  $c_n$ , по крайней мере, начиная с некоторого номера  $n$ , отличны от нуля*. По признаку Даламбера ряд (14.4) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_nx^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

будет меньше единицы, т.е.

$$|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1 \quad \text{или} \quad |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Если этот предел существует, то он и является радиусом сходимости ряда (14.1), т.е.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \quad \blacksquare \quad (14.5)$$

Аналогично можно было получить формулу радиуса сходимости с помощью признака Коши:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}. \quad (14.5')$$

Наряду с рядами вида (14.1), рассматриваются также степенные ряды более общего вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots \quad (14.6)$$

Для таких рядов радиус сходимости находится по той же формуле (14.5), или (14.5'), а интервал сходимости из условия  $|x - x_0| < R$ , т.е. имеет вид  $(x_0 - R; x_0 + R)$ .

**Замечание.** Следует отметить, что у некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ( $R = 0$ ), а у других охватывает всю ось  $Ox$  ( $R = \infty$ ).

**Пример 14.2.** Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \dots + \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}} + \dots$$

*Решение.* Найдем по формуле (14.5) радиус сходимости<sup>1</sup> ряда

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}} : \frac{2^{n+1}}{[2(n+1)]^2\sqrt{3^{n+1}}} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

т.е. интервал сходимости ряда  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Теперь выясним поведение ряда на концах интервала сходимости. На левом конце при  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  данный степенной ряд принимает вид  $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \dots$ ; этот ряд сходится по признаку Лейбница. На правом конце при  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  получаем ряд  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$ , представляющий обобщенный гармонический ряд (13.12) при

<sup>1</sup> Заметим, что радиус сходимости ряда мог быть найден и по формуле (14.5'):  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^{\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

ибо применяя формулу (8.3') (см. параграф 8.2), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^{\frac{2}{n}} = [\infty^0] = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\ln(2n+1)}{n}} = e^0 = 1.$$

$\alpha = 2$ , у которого все члены с четными номерами равны нулю. Так как  $\alpha = 2 > 1$ , то этот ряд сходится.

Следует отметить, что сходимость ряда на левом конце

интервала сходимости при  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  могла быть установ-

лена с помощью достаточного признака сходимости знакопеременного ряда (см. параграф 13.4), так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ сходится.}$$

Итак, область сходимости данного ряда  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ . ►

**Замечание.** При исследовании сходимости на концах интервала сходимости для получающегося ряда с положительными членами применять признаки Даламбера или Коши не имеет смысла, так как в этом случае всегда будем

получать  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l = 1$  либо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$  с нерешен-

ным вопросом о сходимости ряда. В этом случае рекомендуется рассматривать другие признаки сходимости (например признаки сравнения, интегральный, необходимый и др.).

**Пример 14.3.** Найти области сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots; \text{ б) } 1 + x + 2^2 x^2 + \dots + n^n x^n + \dots$$

*Решение.*

а) По формуле (14.5) радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \text{ т.е. область схо-}$$

димости ряда  $(-\infty; +\infty)$ .

б) Данную задачу можно решать аналогично предыдущим. Решение упрощается, если заметить, что при  $x \neq 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^n x^n \neq 0$ , т.е. необходимый признак сходимости не выполняется, и ряд расходится.

Итак, область сходимости ряда состоит из одной точки  $x = 0$ . ►

**Пример 14.4.** Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^{n^2} = 1 + 3x + 3^4 x^4 + 3^9 x^9 + \dots$$

*Решение.* Найти радиус сходимости по формуле (14.5) в данном случае не представляется возможным, так как коэффициенты ряда  $c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8, c_{10}$  и т.д. равны нулю. Поэтому непосредственно применим признак Даламбера.

Данный ряд будет сходиться, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ , и расходиться, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$ . Поэтому найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3x)^{(n+1)^2}}{(3x)^{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |3x|^{2n+1} = \begin{cases} \infty, & \text{если } |3x| > 1, \\ 0, & \text{если } |3x| < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд сходится при  $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ , или на интервале  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

Исследуем сходимость на концах интервала сходимости.

При  $x = -\frac{1}{3}$  ряд принимает вид  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n^2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , а при  $x = \frac{1}{3}$  — вид  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n^2} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ , т.е. оба ряда расходятся, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Итак, область сходимости ряда  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ . ►

**Свойства степенных рядов.** Пусть функция  $f(x)$  является суммой степенного ряда, т.е.  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . В подробных курсах математического анализа доказывается, что степенные ряды по своим свойствам напоминают конеч-

ные суммы (многочлены): на любом отрезке  $[a, b]$ , целиком принадлежащем интервалу сходимости  $(-R; R)$ , функция  $f(x)$  является непрерывной, а следовательно, степенной ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \dots + \int_a^b c_n x^n dx + \dots \quad (14.7)$$

Кроме того, в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots \quad (14.8)$$

При этом после интегрирования или дифференцирования полученные ряды имеют тот же радиус сходимости  $R$ .

## 14.2. Ряды Маклорена и Тейлора

Предположим, что функция  $f(x)$ , определенная и  $n$  раз дифференцируемая в окрестности точки  $x = 0$ , может быть представлена в виде суммы степенного ряда или, другими словами, может быть разложена в степенной ряд

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots + c_nx^n + \dots$$

Выразим коэффициенты ряда через  $f(x)$ . Найдем производные функции  $f(x)$ , почленно дифференцируя ряд  $n$  раз:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots;$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \dots;$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4x + \dots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3} + \dots;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 2c_n + \dots$$

Полагая в полученных равенствах  $x = 0$ , получаем  $f(0) = c_0$ ,  
 $f'(0) = c_1$ ,  $f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 = 2!c_2$ ,  $f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot c_3 = 3!c_3$ , ...,  $f^{(n)}(0) =$   
 $= n!c_n$ , откуда

$$c_0 = f(0), c_1 = f'(0), c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Подставляя значения коэффициентов  $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , получаем ряд

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad (14.9)$$

называемый *рядом Маклорена*<sup>1</sup>.

Следует отметить, что не все функции могут быть разложены в ряд Маклорена. Может оказаться, что ряд Маклорена, составленный формально для функции  $f(x)$ , является расходящимся либо сходящимся не к функции  $f(x)$ .

Примером может служить функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция  $n$  раз дифференцируема в окрестности точки  $x=0$ , и каждая ее производная равна нулю при  $x=0$ . Действительно,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ при } x \neq 0 \text{ и } f'(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{так как } f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} - 0}{\Delta x} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^{z^2}} = \\ &= 0 \text{ (положили } z = \frac{1}{\Delta x} \text{)}. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что  $f''(0) = 0, \dots, f^{(n)}(0) = 0$ .

Следовательно, все коэффициенты ряда Маклорена равны нулю, и этот ряд сходится не к функции  $f(x)$ , а к функции, тождественно равной нулю.

Так же, как и для числовых рядов, сумму  $f(x)$  ряда Маклорена можно представить в виде (13.9)

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \quad (14.10)$$

где  $S_n(x)$  —  $n$ -я частичная сумма ряда;  $r_n(x)$  —  $n$ -й остаток ряда.

<sup>1</sup> Маклорен Колин (1698—1746) — шотландский математик.



Тогда на основании свойства 4 сходящихся рядов (см. параграф 13.1) можно сформулировать теорему.

**Теорема.** Для того чтобы ряд Маклорена сходиллся к функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы при  $n \rightarrow \infty$  остаток ряда стремился к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad (14.11)$$

для всех значений  $x$  из интервала сходимости ряда.

Можно доказать, что достаточным условием разложения функции  $f(x)$  в ряд Маклорена является ограниченность всех ее производных в окрестности точки  $x_0 = 0$  одним и тем же числом, т.е.  $|f^{(n)}(x)| \leq C$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Если функция  $f(x)$  может быть разложена в ряд Маклорена, то это разложение единственное.

Наряду с рядом Маклорена в теории рядов рассматривается ряд Тейлора<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots, \end{aligned} \quad (14.12)$$

представляющий разложение данной функции по степеням  $(x - x_0)$ . Ряд Маклорена (14.9) является частным случаем ряда Тейлора (14.12) при  $x_0 = 0$ .

**Разложение в ряд Маклорена некоторых функций.**

1.  $y = e^x$ .

Имеем  $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ ;

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

По формуле (14.9)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (14.13)$$

Область сходимости ряда  $(-\infty; +\infty)$  (см. пример 14.3, а).

<sup>1</sup> Тейлор Брук (1685–1731) — английский математик.

2.  $y = \sin x$ .

Имеем  $f(x) = \sin x$ ,  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$ , откуда  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = -1$ ,  $f^{(4)}(0) = 0$  и т.д. Очевидно, что производные четного порядка  $f^{(2n)}(0) = 0$ , а нечетного порядка  $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

По формуле (14.9)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (14.14)$$

Область сходимости ряда  $(-\infty; +\infty)$ .

3.  $y = \cos x$ .

Разложение в ряд этой функции получаем аналогично:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (14.15)$$

Область сходимости ряда  $(-\infty; +\infty)$ .

4.  $y = (1+x)^m$ , где  $m$  — любое действительное число.

Имеем  $f(x) = (1+x)^m$ ,  $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$ ,  $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$ ,  $f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$ , ...,  $f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$ .

При  $x=0$   $f(0)=1$ ,  $f'(0)=m$ ,  $f''(0)=m(m-1)$ ,  $f'''(0)=m(m-1)(m-2)$ , ...,  $f^{(n)}(0)=m(m-1) \dots (m-n+1)$ . По формуле (14.9)

$$\begin{aligned} (1+x)^m = & 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ & + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!}x^n + \dots \end{aligned} \quad (14.16)$$

Интервал сходимости ряда  $(-1; 1)$  (на концах интервала при  $x = \pm 1$  сходимость ряда зависит от конкретных значений  $m$ ).

Ряд (14.16) называется *биномиальным*. Если  $m$  — целое положительное число, то биномиальный ряд представляет формулу *бинома Ньютона*, так как при  $n = m+1$ ,  $m-n+1 = 0$   $n$ -й член ряда и все последующие равны нулю, т.е. ряд обрывается, и вместо бесконечного разложения получается конечная сумма.

5.  $y = \ln(1+x)$ .

Разложение для этой функции можно получить проще, не вычисляя непосредственно коэффициенты ряда (14.9) с помощью производных.

Рассмотрим геометрический ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (14.17)$$

со знаменателем  $q = -x$ , который сходится при  $|q| = |-x| < 1$ , т.е. при  $-1 < x < 1$  к функции  $f(x) = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1+x}$ .

Интегрируя почленно равенство (14.12) в интервале  $(0; x)$  (где  $|x| < 1$ ) с учетом того, что  $\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_0^x = \ln(1+x)$ , получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (14.18)$$

Область сходимости ряда (после выяснения сходимости на концах интервала сходимости) есть  $(-1; 1]$ .

6.  $y = \arctg x$ .

Разложение этой функции в ряд Маклорена получается аналогично. Заменив в ряде (14.17)  $x$  на  $x^2$ , получим

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (14.19)$$

Интегрируя в пределах от 0 до  $x$  и считая, что  $|x| < 1$ , находим

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (14.20)$$

Область сходимости ряда  $[-1; 1]$ . (В сходимости на концах интервала при  $x = \pm 1$  можно убедиться отдельно).

Можно доказать, что ряды, приведенные в формулах (14.13)–(14.20), сходятся к функциям, для которых они составлены.

При разложении более сложных функций используют непосредственно формулу (14.9) либо таблицу простейших разложений функций (14.13)–(14.20).

**Пример 14.5.** Разложить в ряд функции: а)  $y = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$ ;  
 б)  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

*Решение.*

а) Так как по формуле (14.13)  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ , то, заменяя  $x$  на  $(-x^2)$ , получаем

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots,$$

$$1 - e^{-x^2} = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n!} + \dots$$

и, наконец,

$$\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{n!} + \dots$$

Область сходимости ряда  $(-\infty; +\infty)$ .

б) В разложении  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots$  заменим  $x$  на  $(-x)$ ; получим

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Теперь

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \\ &= \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) - \left( -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right) = \quad (14.21) \\ &= 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right). \end{aligned}$$

Область сходимости ряда  $(-1; 1)$ . ►

### 14.3. Формула Тейлора

Ряд Тейлора тесно связан с одной из важнейших формул математического анализа, имеющей широкое применение.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$   $(n+1)$  раз дифференцируема в окрестности точки  $x_0$ , то для любого значения  $x$  из этой окрестности справедлива **формула Тейлора**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (14.22)$$

где  $R_n(x)$  — остаточный член формулы Тейлора:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (14.23)$$

( $\xi \in (x_0, x)$  или  $\xi \in (x, x_0)$ ), записанный в форме Лагранжа.

□ Пусть остаточный член  $R_n(x)$  определяется равенством (14.22). Покажем, что он действительно имеет вид, описываемый (14.23). С этой целью зафиксируем значения  $x_0$  и  $x$ , введем новую переменную  $y$  и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & f(y) + (x-y)f'(y) + (x-y)^2 \frac{f''(y)}{2!} + \dots + \\ & + (x-y)^n \frac{f^{(n)}(y)}{n!} + (x-y)^{n+1} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Функция  $\varphi(y)$  на отрезке  $[x_0, x]$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля (см. параграф 8.1): она непрерывна и дифференцируема на данном отрезке и на его концах имеет равные значения, т.е.  $\varphi(x_0) = \varphi(x)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) = & f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots + \\ & + (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + (x-x_0)^{n+1} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

т.е.  $\varphi(x_0) = \varphi(x)$ ;

$$\varphi(x) = f(x) + 0 + 0 + \dots + 0 = f(x).$$

Из теоремы Ролля следует, что существует такая точка  $\xi \in (x_0, x)$ , в которой  $\varphi'(\xi) = 0$ .

Найдем производную

$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= f'(y) - f'(y) + (x-y)f''(y) - (x-y)f''(y) + \\ &+ (x-y)^2 \frac{f''(y)}{2!} - \dots - (x-y)^{n-1} \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} + (x-y)^n \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} - \\ &- (n+1)(x-y)^n \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}.\end{aligned}$$

После преобразований при  $y = \xi$

$$\varphi'(\xi) = (x-\xi)^n \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1)(x-\xi)^n \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0,$$

откуда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

(здесь учтено, что  $(n+1)! = n!(n+1)$ ). ■

Очевидно, что при выполнении условия (14.11) остаток  $r_n(x)$  ряда Тейлора (14.12) равен остаточному члену  $R_n(x)$  формулы Тейлора (14.22).

Формула Тейлора является обобщением формулы Лагранжа (8.2) (см. гл. 8), получаемой из (14.22) при  $n = 0$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0). \quad (14.24)$$

При  $n = 1$  формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2. \quad (14.25)$$

Отбросив остаточный член, получим приближенное значение функции, основанное на применении дифференциала (параграф 7.8):

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \quad (14.26)$$

При этом функция  $f(x)$  заменяется (аппроксимируется) линейной функцией в окрестности точки  $x_0$ .

## ПРАКТИКУМ

## 14.4. Область сходимости степенного ряда

14.6. Найти области сходимости степенных рядов:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n \cdot n!}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{1}{n} (x-2)^n; \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{n} x^{n^2}; \text{ д) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}. \end{aligned}$$

*Решение.*

а) По формуле (14.5) найдем радиус сходимости ряда

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} : \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 (2n)! (2n+1)(2n+2)}{(2n)! (n!)^2 (n+1)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2} = 4 \end{aligned}$$

(здесь учтено, что  $(n+1)! = n!(n+1)$ ;  $(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2)$ ), т.е. интервал сходимости ряда  $(-4; 4)$ .

Теперь выясним поведение ряда на концах интервала сходимости. При  $x = 4$  степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}.$$

Установить непосредственно выполнение необходимого признака сходимости, вычисляя предел (13.10), либо применить соответствующий достаточный признак сходимости затруднительно. Вместе с тем можно заметить, что после преобразований, аналогичных приведенным выше, отношение

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{((n+1)!)^2 4^{n+1}}{(2(n+1))!} : \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 (n+1)^2 4^n \cdot 4(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2 4^n} = \\ &= \frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1, \end{aligned}$$

т.е. члены ряда с увеличением  $n$  возрастают, а следовательно, необходимый признак сходимости (13.10) не выполняется, и при  $x = 4$  степенной ряд расходится. По этой же причине он расходится при  $x = -4$ . Итак, область сходимости данного ряда  $(-4; 4)$ .

б) По формуле (14.5) найдем радиус сходимости

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} : \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \right| = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \end{aligned}$$

т.е. область сходимости ряда  $(-\infty; +\infty)$ .

в) По формуле (14.5) найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \sin^2 \frac{1}{n}}{(-1)^{n+1} \sin^2 \frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\sin^2 \frac{1}{n+1}}.$$

Для нахождения предела заменим бесконечно малые величины  $\sin \frac{1}{n}$  и  $\sin \frac{1}{n+1}$  при  $n \rightarrow \infty$  им эквивалентными  $\frac{1}{n}$  и  $\frac{1}{n+1}$  (параграф 6.9), получим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Интервал сходимости данного ряда находится из условия  $|x-2| < 1$  или  $-1 < x-2 < 1$ , т. е.  $2-1 < x < 2+1$  или  $(1; 3)$ .

Теперь выясним поведение ряда на концах интервала сходимости. На левом конце при  $x = 1$  данный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{1}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} \quad (\text{ибо } (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1 \text{ при любом натуральном } n).$$



Так как при любом  $n \geq 1$   $\sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ ,  $\sin^2 \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  есть сходящийся обобщенный гармонический ряд (13.12) при  $\alpha = 2 > 1$ , то по признаку сравнения (см. параграф 13.2) данный ряд сходится.

На правом конце при  $x = 3$  степенной ряд принимает вид  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{1}{n}$ , т.е. является знакочередующимся и по достаточному признаку сходимости знакопеременного (а значит, и знакочередующегося) ряда сходится, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ . Итак, область сходимости данного ряда  $[1; 3]$ .

г) Выпишем несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{n} x^{n^2} = x + \frac{3^3}{2} x^4 + \frac{3^8}{3} x^9 + \dots$$

Очевидно, что найти радиус сходимости по формуле (14.5) в данном случае не представляется возможным, так как коэффициенты ряда (14.1)  $c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8, c_{10}$  и т.д. равны нулю. Поэтому применим непосредственно признак Даламбера. Данный ряд будет абсолютно сходиться, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1, \text{ и расходиться, если } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1.$$

Поэтому найдем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{(n+1)^2-1}}{n+1} x^{(n+1)^2-1} : \frac{3^{n^2-1}}{n} x^{n^2-1} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} 3^{2n+1} x^{2n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (3x)^{2n+1} = \begin{cases} \infty, & \text{если } |3x| > 1, \\ 0, & \text{если } |3x| < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{ибо } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при  $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$  или на интервале  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

Исследуем сходимость на концах интервала сходимости.

При  $x = -\frac{1}{3}$  ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{n} \frac{(-1)^{n^2}}{3^{n^2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n} = -\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right).$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница (см. параграф 13.3).

При  $x = \frac{1}{3}$  ряд принимает вид  $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , где  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  — расходящийся гармонический ряд. Итак, область сходимости ряда  $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

д) Так как члены ряда, стоящие на нечетных местах, отсутствуют, т.е. коэффициенты ряда  $c_1 = 0, c_3 = 0, c_5 = 0$  и т.д., то формулу (14.5) для нахождения радиуса сходимости использовать нельзя. Можно применить непосредственно признак Даламбера, как это делалось в примере в п. «в». Но в данном случае удобнее сделать замену

$x^2 = t$ . Тогда ряд примет вид  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3}^n}$ . Область сходимости этого ряда получена в примере 14.2:

$$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \text{ т.е. } -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Возвращаясь к переменной  $x$ , получим  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , откуда  $|x| \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$ , т.е. область сходимости ряда  $\left[-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}; \frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right]$ . ►

## 14.7. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n. \quad (14.27)$$

*Решение.* Радиус сходимости ряда (14.27), заданного по степеням  $(x-x_0)=(x-(-1))$ , находится по той же формуле (14.5):

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} : \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^n + (-2)^n}{3 \cdot 3^n - 2(-2)^n} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1+0}{3-2 \cdot 0} \cdot 1 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

т.е.  $R = \frac{1}{3}$ . Напомним (см. параграф 14.1), что интервал сходимости ряда общего вида (14.6) определяется из условия  $x_0 - R < x < x_0 + R$ . В данном примере интервал сходимости ряда есть  $-1 - \frac{1}{3} < x < -1 + \frac{1}{3}$  или  $\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

Исследуем сходимость ряда (14.27) на концах этого интервала. При  $x = -\frac{4}{3}$  ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

т.е. представляет сумму двух рядов. Первый, знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится (условно) (см. параграф 13.4),

а второй ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  исследуем на сходимость с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} : \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

т.е. ряд сходится, а следовательно, сходится и ряд (14.27) при  $x = -\frac{4}{3}$ .

При  $x = -\frac{2}{3}$  ряд (14.27) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Первый из полученных рядов — гармонический  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, а второй ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$  сходится на основа-

нии признака сходимости знакопеременного ряда, так как выше было показано, что ряд из абсолютных величин его членов сходится. Следовательно, ряд (14.27) при  $x = -\frac{2}{3}$  расходится. (Установить расходимость этого ряда с положительными членами  $\frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{1}{3^n} > 0$  при любом  $n \in N$  можно было и с помощью признака сравнения, так как его члены при  $n > 1$  превосходят члены расходящегося гармонического ряда, умноженные на  $\frac{1}{3}$ :

$$\frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} > \frac{1}{3n}.)$$

Итак, область сходимости степенного ряда (14.27)  $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ . ►

Найти область сходимости степенных рядов:

$$14.8. x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$14.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n x^{2n}.$$

$$14.10. 1 + 2!x + 3!x^2 + 4!x^3 + \dots$$

$$14.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}.$$

$$14.12. \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$14.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}.$$

$$14.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$14.15. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n.$$

$$14.16. \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{8^2 \cdot 5} + \frac{x^9}{8^3 \cdot 9} + \frac{x^{12}}{8^4 \cdot 13} + \dots$$

$$14.17. \sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n.$$

$$14.18. \frac{x}{2+3} + \frac{x^2}{2^2+3^2} + \frac{x^3}{2^3+3^3} \dots$$

$$14.19. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$14.20. 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^4 x^4}{4!} + \dots$$

$$14.21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

$$14.22. \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n(n+2)} + \dots$$

$$14.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n (n+1)}.$$

$$14.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{5^n \sqrt{n+1}}.$$

$$14.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

$$14.26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

$$14.27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1} n \sqrt{n}}.$$

$$14.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^{n^2}} (x-1)^n.$$

$$14.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+2}}.$$

$$14.30. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} (x-1)^n.$$

$$14.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$14.32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-4)^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$14.33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

### 14.5. Ряды Маклорена и Тейлора

Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов (свойства (14.7), (14.8)) могут быть использованы при нахождении суммы степенного ряда.

**14.34.** Найти сумму ряда при  $x \in (-1; 1)$ :

а)  $-2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 - \dots (-1)^n (2n)x^{2n-1} + \dots$ ;

б)  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

*Решение.*

а) Можно заметить, что почленное интегрирование данного ряда (на отрезке  $[0; x]$ , где  $x \in (-1; 1)$ ) приведет к геометрическому ряду (14.28)

$$-x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad (14.28)$$

сумма которого известна.

Полагая  $a = -x^2$ ,  $q = -x^2$ , найдем сумму ряда (14.28) по формуле (13.5'):

$$S = \frac{a}{1-q} \quad \text{или} \quad S(x) = \frac{-x^2}{1-(-x^2)} = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Возвращаясь к исходному ряду, находим его сумму дифференцированием  $S(x)$ . Итак, сумма данного в условии ряда

$$S'(x) = \left( -\frac{x^2}{1+x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

б) Данный ряд может быть приведен почленным дифференцированием в интервале сходимости к геометрическому ряду  $S'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ , сумма которого

$S'(x) = \frac{1}{1-x}$  ( $a=1$ ,  $q=x$ ). Сумму исходного ряда находим интегрированием на отрезке  $[0; x]$ , где  $x \in (-1; 1)$ :

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| \Big|_0^x = -\ln(1-x). \quad \blacktriangleright$$

Существует несколько способов разложения функций в степенной ряд. Проиллюстрируем их на конкретных примерах.

**Непосредственное разложение**

**14.35.** Разложить в ряд по степеням  $x$  функцию  $y = (3 + e^{-x})^2$ .

*Решение.* Найдем производные функции и ее значения в точке  $x = 0$ :

$$f(x) = (3 + e^{-x})^2; \quad f(0) = 16;$$

$$f'(x) = -2(3 + e^{-x})e^{-x} = -2(3e^{-x} + e^{-2x}); \quad f'(0) = -8;$$

$$f''(x) = 2(3e^{-x} + 2e^{-2x}); \quad f''(0) = 10;$$

$$f'''(x) = -2(3e^{-x} + 2^2 e^{-2x}); \quad f'''(0) = -14;$$

$$f^{(4)}(x) = 2(3e^{-x} + 2^3 e^{-2x}); \quad f^{(4)}(0) = 22;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2(3e^{-x} + 2^{n-1} e^{-2x}); \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot 2(3 + 2^{n-1}).$$

Теперь по формуле (14.9)

$$(3 + e^{-x})^2 = 16 - 8x + \frac{10}{2!}x^2 - \frac{14}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 2(3 + 2^{n-1})}{n!}x^n + \dots$$

Область сходимости ряда (параграф 14.1) есть  $(-\infty; +\infty)$ . ►

**Применение готовых разложений**

**14.36.** Разложить в ряд по степеням  $x$  функции:

а)  $y = x \ln(1 + x^2)$ ; б)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

*Решение.*

а) Воспользуемся готовым разложением (14.18) функции  $y = \ln(1 + x)$ . Заменяя в нем  $x$  на  $x^2$ , получаем

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} + \dots,$$

следовательно,

$$x \ln(1 + x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{n} + \dots$$

Область сходимости ряда  $[-1; 1]$  находим из условия  $-1 < x^2 \leq 1$ .

б) Воспользуемся биномиальным рядом (14.16), представляющим разложение в ряд функции  $y = (1+x)^m$ . Заменив в нем  $x$  на  $(-x^2)$ , получим при  $m = -\frac{1}{2}$  разложение функции  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2 + \dots + \\ &+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n + \dots \end{aligned}$$

Умножая обе части разложения на  $x^2$ , получаем

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n+2} + \dots$$

Из условия  $-1 < -x^2 < 1$  находим область сходимости ряда  $(-1; 1)$ . ►

**14.37.** Разложить в ряд по степеням  $(x-1)$  функцию  $y = e^{3x}$ .

*Решение.* Представим функцию  $y = e^{3x}$  в следующем виде:  $y = e^3 \cdot e^{3(x-1)}$ . Это позволяет использовать готовое разложение (14.13) функции  $y = e^x$ , в котором  $x$  заменяем на  $3(x-1)$ :

$$e^{3(x-1)} = 1 + 3(x-1) + \frac{3^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{3^3}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{3^n(x-1)^n}{n!} + \dots,$$

откуда  $e^{3x} = e^3 \cdot e^{3(x-1)} = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-1)^n}{n!}$  (ряд записан в сокращенном виде).

Из условия  $-\infty < 3(x-1) < \infty$  находим область сходимости ряда  $(-\infty; +\infty)$ . ►



**Применение правила умножения рядов**

Если в некоторой окрестности точки  $x = 0$  имеют место разложения

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots;$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots,$$

то произведение функций разлагается в той же окрестности в степенной ряд

$$\begin{aligned} f(x)\varphi(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + \\ &+ (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)x^n + \dots \end{aligned} \quad (14.29)$$

В частности, при  $f(x) = \varphi(x)$  получаем следующее *правило возведения в квадрат степенного ряда*:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + \\ &+ (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \dots \end{aligned} \quad (14.30)$$

**14.38.** Разложить в ряд по степеням  $x$  функцию  $e = e^x \ln(1+x)$ .

*Решение.* В интервале  $(-1; 1)$  имеют место разложения (14.13) и (14.18). По правилу умножения рядов (14.29) получим

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= 1 \cdot x + \left( 1 \cdot \left( -\frac{x^2}{2} \right) + x \cdot x \right) + \\ &+ \left( 1 \cdot \frac{x^3}{3} + x \cdot \left( -\frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^2}{2!}x \right) + \dots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Область сходимости ряда  $(-1; 1)$ . ►

**Применение почленного интегрирования**

**14.39.** Разложить в ряд по степеням  $x$  функцию  $y = \arcsin x$ .

*Решение.* Готовых разложений (14.13)–(14.20) ряда для данной функции нет. В то же время производная этой функции  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  может быть разложена в сте-

пенной ряд с помощью биномиального ряда (14.16) (см. пример 14.36, б):

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \dots$$

Учитывая, что  $\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , искомым ряд найдем почленным интегрированием данного ряда на отрезке  $[0; x]$ , принадлежащем интервалу сходимости ряда  $(-1; 1)$ :

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x dx + \frac{1}{2} \int_0^x x^2 dx + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \int_0^x x^4 dx + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \int_0^x x^{2n} dx + \dots, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} x^5 + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (14.31)$$

Область сходимости ряда  $[-1; 1]$ . ►

**14.40.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $y = \sin^2 x$ .

*Решение. Первый способ.* Применим метод непосредственного разложения по формуле (14.9). Вначале найдем производные до  $n$ -го порядка и вычислим их значения при  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x; \quad f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x; \quad f''(x) = 2 \cos 2x; \\ f'''(x) &= -2^2 \sin 2x; \quad f^{(4)}(x) = -2^3 \cos 2x; \quad f^{(5)}(x) = 2^4 \sin 2x \end{aligned}$$

и т.д.

При  $x = 0$  значения функции  $f(x)$  и ее производных следующие:  $f(0) = 0$ ;  $f'(0) = 0$ ;  $f''(0) = 2$ ;  $f'''(0) = 0$ ;  $f^{(4)}(0) = -2^3$ ;  $f^{(5)}(0) = 0$  и т.д.

Теперь по формуле (14.9) запишем ряд

$$\sin^2 x = 0 + 0 + \frac{2}{2!} x^2 + 0 - \frac{2^3}{4!} x^4 + 0 + \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots$$

или

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \dots \quad (14.32)$$

*Второй способ.* Учитывая, что  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ , используем готовое разложение (14.15) для функции  $\cos x$  (в котором вместо  $x$  берем  $2x$ ), умножаем обе части полученного равенства на  $\left(-\frac{1}{2}\right)$ , а затем прибавляем к ним  $\frac{1}{2}$ . Получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\cos 2x &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots\right); \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} + \dots + \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{или } \sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

т.е. получаем то же разложение (14.32).

*Третий способ.* Разложение функции  $y = \sin^2 x$  может быть осуществлено с помощью правила возведения в квадрат степенного ряда (14.30).

Для функции  $f(x) = \sin x$ , имеющей разложение в ряд (14.14), т.е.

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5}x^5 + 0 - \frac{1}{7}x^7 + \dots,$$

находим по формуле (14.30)

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1x + (2 \cdot 0 \cdot 0 + 1^2)x^2 + (2 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) + 2 \cdot 1 \cdot 0)x^3 + \\ &+ (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) + 0^2)x^4 + \dots = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \end{aligned}$$

т.е. получаем то же разложение (14.32).

*Четвертый способ.* Относительно легко можно разложить в ряд производную функции  $f(x) = \sin^2 x$ , т.е.  $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$  (в ряде (14.14) вместо  $x$  берем  $2x$ ):

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots$$

Для получения искомого разложения почленно интегрируем полученный ряд на отрезке  $[0; x]$ , принадлежащем интервалу сходимости  $(-\infty; +\infty)$ , учитывая, что

$$\int_0^x \sin 2x \, dx = \sin^2 x \Big|_0^x = \sin^2 x - \sin^2 0 = \sin^2 x.$$

Итак, при любом  $x$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \int_0^x \sin 2x \, dx = 2 \int_0^x x \, dx - \frac{2^3}{3!} \int_0^x x^3 \, dx + \frac{2^5}{5!} \int_0^x x^5 \, dx - \dots = \\ &= x^2 - \frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{45} x^6 - \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Область сходимости ряда, как нетрудно убедиться, есть  $(-\infty; +\infty)$ . ►

Разложить в степенной ряд по степеням  $x$  функции:

**14.41.**  $y = e^{-2x}$ .

**14.42.**  $y = \sin \frac{x}{2}$ .

**14.43.**  $y = x^3 \cos x$ .

**14.44.**  $y = \ln(1+5x)$ .

**14.45.**  $y = \ln(5+2x)$ .

**14.46.**  $y = \sqrt{1+x^2}$ .

**14.47.**  $y = \frac{1}{1+x^4}$ .

**14.48.**  $y = \frac{3}{4-x}$ .

**14.49.**  $y = x^2 e^{-2x}$ .

**14.50.**  $y = x \arctg x$ .

**14.51.**  $y = (1+x) \ln(1+x)$ .

**14.52.**  $y = \frac{e^x - 1}{x}$ .

**14.53.**  $y = \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$ .

**14.54.**  $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ .

**14.55.**  $y = e^x \ln(1-x)$ .

**14.56.**  $y = e^{-x} \sin x$ .

**14.57.**  $y = x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2}$ .

**14.58.**  $y = (\arctg x)^2$ .

$$14.59. y = \ln(6+x-x^2). \quad 14.60. y = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}.$$

$$14.61. y = \cos^2 x.$$

Применяя разложение подынтегральной функции в ряд по степеням  $x$  и его почленное интегрирование, найти разложения в ряд функций:

$$14.62. \int \frac{e^x}{x} dx. \quad 14.63. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \quad 14.64. \int \frac{1-\cos x}{x} dx.$$

Разложить в степенной ряд функции:

$$14.65. y = x^4 + x^2 \text{ по степеням } (x-1).$$

$$14.66. y = e^x \text{ по степеням } (x-2).$$

$$14.67. y = \ln x \text{ по степеням } (x-1).$$

$$14.68. y = \frac{1}{x-4} \text{ по степеням } (x+2).$$

Применяя почленное интегрирование или дифференцирование рядов, найти их суммы:

$$14.69. 1+2x+3x^2+4x^3+\dots (x \in (-1; 1)).$$

$$14.70. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (x \in [-1; 1]).$$

$$14.71. 1-3x^2+5x^4-7x^6+\dots (x \in (-1; 1)).$$

## 14.6. Применение рядов в приближенных вычислениях

Степенные ряды могут быть использованы для приближенного вычисления значений различных функций, определенных интегралов (в том числе «неберущихся»), решения дифференциальных уравнений, нахождения пределов и т.п.

14.72. Вычислить приближенно с точностью до 0,0001:

а)  $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$ ; б)  $\ln 0,6$ ; в)  $\ln 5$ ; г)  $\sqrt[6]{68}$ ; д)  $\cos 10^\circ$ .

*Решение.*

а) Для вычисления  $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} = e^{-\frac{3}{4}}$  запишем ряд (14.6) при  $x = -\frac{3}{4}$ , принадлежащем области сходимости  $(-\infty; +\infty)$ :

$$e^{-\frac{3}{4}} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2 \cdot 2!} - \frac{3^3}{4^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{4^n \cdot n!} + \dots =$$

$$= 1 - 0,75 + 0,28125 - 0,070312 + 0,013184 - 0,001978 + \\ + 0,000247 - 0,000026 + \dots$$

Взяв первые семь членов разложения, на основании следствия из теоремы Лейбница (см. параграф 13.4) для сходящегося знакопередающегося ряда мы допустим погрешность  $|r_n|$ , не превышающую первого отброшенного члена (по абсолютной величине), т.е.

$$|r_n| \leq 0,000026 < 0,0001.$$

Итак, складывая первые семь членов, получаем

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} \approx 0,472391 \approx 0,4724.$$

Более точно оценить погрешность вычисления  $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$  можно, используя формулу Тейлора (14.22). Взяв в качестве величины  $e^x$  первые  $(n+1)$  членов ряда (вместе с нулевым), мы допустим погрешность, определяемую остаточным членом  $R_n$  (см. формулу (14.23)) при  $x_0 = 0$ ,  $0 < \xi < x$  или  $x < \xi < 0$ :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Для функции  $f(x) = e^x$   $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n+1)}(x) = e^x$ , т.е.  $f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$ . Следовательно, при  $x = -\frac{3}{4}$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} e^\xi 3^{n+1}}{(n+1)! 4^{n+1}}, \text{ где } -\frac{3}{4} < \xi < 0.$$

При  $n = 6$ , т.е. просуммировав вместе с нулевым семь членов ряда, получим  $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} = e^{-\frac{3}{4}} \approx 0,472391$ ; при этом оста-

точный член  $R_n = -\frac{e^\xi \cdot 3^7}{7! \cdot 4^7}$  заключен в границах от минимального  $R_n(0) = -\frac{3^7}{7! \cdot 4^7}$  до максимального  $R_n\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{0,472391 \cdot 3^7}{7! \cdot 4^7}$ , т.е.  $-0,000026 < R_n < -0,000013$ . Следова-

тельно, точное значение  $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$  находится в пределах  $0,472365 < \frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} < 0,472378$ . Неизменны четыре десятичных знака, следовательно, с точностью до  $\delta = 0,0001$   $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} \approx 0,4724$ .

(Легко показать, что суммирование менее семи членов ряда ( $n < 6$ ) не обеспечивает заданной в условии точности ответа.)

б) Для вычисления  $\ln 0,6$  запишем ряд (14.18) при  $x = -0,4$ , входящем в область сходимости ряда  $(-1; 1]$ :

$$\begin{aligned}\ln 0,6 &= \ln(1 + (-0,4)) = -0,4 - \frac{0,4^2}{2} - \frac{0,4^3}{3} - \dots - \frac{0,4^n}{n} - \dots = \\ &= -(0,4 + 0,08 + 0,021333 + 0,0064 + 0,002048 + 0,000683 + \\ &\quad + 0,000234 + 0,000082 + \dots).\end{aligned}$$

Если в качестве  $\ln 0,6$  взять первые восемь членов, будет допущена погрешность

$$\begin{aligned}|r_n| &= \frac{0,4^9}{9} + \frac{0,4^{10}}{10} + \dots + \frac{0,4^n}{n} + \dots < \frac{0,4^9}{9} + \frac{0,4^{10}}{9} + \dots + \frac{0,4^n}{9} + \dots = \\ &= \frac{0,4^9}{9} (1 + 0,4 + \dots + 0,4^{n-9} + \dots) = \frac{0,4^9}{9} \cdot \frac{1}{1-0,4} = 0,000048 < 0,0001\end{aligned}$$

(здесь учтено, что сумма сходящегося геометрического ряда в скобках равна  $\frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-0,4}$ ).

Итак, складывая первые восемь членов, получаем

$$\ln 0,6 \approx -0,510780 \approx -0,5108.$$

Заметим, что при суммировании только семи членов погрешность  $|r_n| = \frac{0,4^8}{8} \cdot \frac{1}{1-0,4} = 0,000136 > 0,0001$ , т.е. не удовлетворяет заданной в условии точности ответа.

**Замечание.** Оценка погрешности вычисления  $\ln 0,6$  с помощью остаточного члена формулы Тейлора оказывается в данном случае менее эффективной. Действитель-

но (см. пример 7.10), для функции  $f(x) = \ln(1+x)$   
 $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ , тогда по формуле (14.23) остаточ-  
 ный член

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1} (n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \left( \frac{x}{1+\xi} \right)^{n+1},$$

где  $0 < \xi < x$  или  $x < \xi < 0$ .

При  $n=8$ ,  $x=-0,4$   $R_n = -\frac{0,4^9}{9(1+\xi)^9}$ . Следовательно,  
 $R_n(-0,4) < R_n < R_n(0)$  или  $-0,002890 < R_n < -0,000029$ , а зна-  
 чит,  $-0,510780 - 0,002890 < \ln 0,6 < -0,510780 - 0,000029$ , т.е.  
 $-0,513670 < \ln 0,6 < -0,510809$ , что гарантирует точность  
 вычисления лишь до 0,01 (а точнее, до 0,003).

в) Вычислить  $\ln 3 = \ln(1+2)$  с помощью ряда (14.18) для  
 функции  $y = \ln(1+x)$  не представляется возможным, так  
 как  $x=2$  не входит в область сходимости ряда  $(-1; 1]$ .

Воспользуемся рядом (14.21):

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right).$$

Этот ряд позволяет вычислять логарифмы любых чи-  
 сел, так как при изменении  $x$  в интервале сходимости ряда  
 $(-1; 1)$  дробь  $\frac{1+x}{1-x}$  меняется в интервале  $(0; +\infty)$ .

Пусть  $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln 3$ , тогда  $x = \frac{1}{2}$  и

$$\begin{aligned} \ln 3 &= 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1} \cdot (2n-1)} + \dots \right) = \\ &= 1 + 0,083333 + 0,0125 + 0,002232 + 0,000434 + 0,000089 + \\ &\quad + 0,000018 + \dots \approx 1,098606 \approx 1,0986 \end{aligned}$$

(суммируем семь членов ряда — обоснование аналогично  
 п. «б» данного примера).

Ряд (14.21) по сравнению с рядом (14.18) сходится быст-  
 рее, поэтому он удобнее для вычисления логарифмов. Так,  
 если для вычисления  $\ln 0,6$  с точностью до 0,0001 потребо-



валось суммировать восемь членов ряда (14.18) (см. п. «б»), то с помощью ряда (14.21) та же точность достигается при сложении лишь трех членов (рекомендуем убедиться в этом самому читателю).

г) Представим  $\sqrt[6]{68}$  в виде  $\sqrt[6]{68} = \sqrt[6]{64+4} = 2\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{6}}$ . Так как после проведенного преобразования  $x = \frac{1}{16}$  входит в область сходимости  $(-1; 1)$  биномиального ряда (14.16), то при  $x = \frac{1}{16}$ ,  $m = \frac{1}{6}$  получим, учитывая (14.16):

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{68} &= 2 \left[ 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{6} \left( \frac{1}{6} - 1 \right)}{2!} \cdot \frac{1}{16^2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{6} \left( \frac{1}{6} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{6} - n + 1 \right)}{n!} \cdot \frac{1}{16^n} + \dots \right] = \\ &= 2 + 0,020833 - 0,000543 + 0,000021 - \dots \end{aligned}$$

(Для обеспечения заданной в условии точности расчета достаточно взять три члена, так как по следствию из признака Лейбница для сходящегося знакопередающегося ряда погрешность  $|r_n| \leq 0,000021 < 0,0001$ .)

Итак,  $\sqrt[6]{68} = 2,020290 \approx 2,0203$ .

д) Для вычисления  $\cos 10^\circ = \cos \frac{\pi}{18}$  запишем ряд (14.15) при  $x = \frac{\pi}{18}$ , принадлежащем области сходимости  $(-\infty; +\infty)$ :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{18} &= 1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!} + \dots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{18^{2n} (2n)!} + \dots = \\ &= 1 - 0,015231 + 0,000039 + \dots \end{aligned}$$

(необходимо взять два члена, так как при этом погрешность  $|r_n| < 0,000039 < 0,0001$ ).

Итак,  $\cos 10^\circ \approx 1 - 0,015231 = 0,984769 \approx 0,9848$ .

**14.73.** Вычислить с точностью до 0,0001:

а)  $\int_0^x \sqrt{x} e^{-x} dx$ ; б)  $\int_0^x \sqrt{x} e^x dx$ .

*Решение.*

а) «Точное» интегрирование здесь невозможно, так как интеграл «неберущийся». Заменяв  $x$  на  $(-x)$  в разложении

(14.13), получим  $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots$ . Умножая полученный ряд на  $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x} e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{n!} + \dots$$

и почленно интегрируя в интервале  $(0; 1)$ , принадлежащем интервалу сходимости ряда  $(-\infty; +\infty)$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx + \dots + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{n!} dx + \dots = \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 + \dots + \frac{1}{\left(n + \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{n!} \Big|_0^1 + \dots = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n+3)n!} + \dots = 0,66667 - 0,40000 + 0,14286 - 0,03704 + \\ &+ 0,00758 - 0,00128 + 0,00018 - \dots \approx 0,37897 \approx 0,3790. \end{aligned}$$

Оценка погрешности вычисления производится так же, как и в примерах 14.72 а, г, д.

б) Выражение данного интеграла в виде числового ряда находится аналогично примеру, приведенному в п. «а»:

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^x dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7 \cdot 2!} + \frac{2}{9 \cdot 3!} + \dots + \frac{2}{(2n+3)n!} + \dots \quad (14.33)$$

Но в отличие от примера п. «а» вычисление интеграла свелось не к нахождению суммы сходящегося знакочередующегося ряда, при вычислении которой погрешность оценивается с помощью следствия из теоремы Лейбница, а

к определению суммы ряда с положительными членами с неизвестной оценкой погрешности.

Поступим следующим образом. Предположим, что для оценки суммы ряда взято  $n$  членов (вместе с первым при  $n = 0$ ). Тогда погрешность вычисления суммы ряда будет определяться остатком ряда (14.33)

$$r_n = \frac{2}{(2n+3)n!} + \frac{2}{(2n+5)(n+1)!} + \frac{2}{(2n+7)(n+2)!} + \dots$$

Так как  $2n+5 > 2n+3$ ,  $2n+7 > 2n+3$ , ... и

$$(n+1)! = n!(n+1) > n!n, \quad (n+2)! = n!(n+1)(n+2) > n!n^2, \dots,$$

то

$$\begin{aligned} r_n &< \frac{2}{(2n+3)n!} + \frac{2}{(2n+3)n!n} + \frac{2}{(2n+3)n!n^2} + \dots = \frac{2}{(2n+3)n!} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \right) = \frac{2}{(2n+3)n!} \cdot \frac{1}{\left( 1 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{2}{(2n+3)(n-1)!(n-1)}, \end{aligned}$$

ибо выражение в круглых скобках представляет сумму сходящегося геометрического ряда (13.4) при  $a=1$ ,  $q=\frac{1}{n}$ .

При  $n = 7$

$$r_n < \frac{2}{17(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot 6} \approx 0,00003 < 0,0001.$$

(Легко вычислить, что при любых  $n < 7$   $r_n > 0,0001$ .)

Итак, для обеспечения заданной в условии точности вычисления интеграла необходимо взять первые семь членов:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} e^x dx &\approx 0,66667 + 0,40000 + 0,14286 + 0,03704 + \\ &+ 0,00758 + 0,00128 + 0,00018 = 1,25561 \approx 1,2556. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**14.74.** Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения  $y' = x^3 + y^2$ , удовлетворяющего начальному условию  $y(0) = \frac{1}{2}$ .

*Решение.* Ищем решение данного уравнения в виде степенного ряда

$$y = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + c_nx^n + \dots; \quad y(0) = c_0 = \frac{1}{2}.$$

Дифференцируя обе части уравнения, находим

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots$$

Подставляя выражение для  $y = y(x)$  в данное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots = x^3 + \\ + \underbrace{c_0^2 + 2c_0c_1x + (2c_0c_2 + c_1^2)x^2 + (2c_0c_3 + 2c_1c_2)x^3 + \dots}_{y^2}, \end{aligned}$$

где  $y^2$  получено по формуле (14.30) возведения в квадрат степенного ряда.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях и учитывая начальное условие, получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}, & c_0 &= \frac{1}{2}; \\ c_1 &= c_0^2, & c_1 &= \frac{1}{4}; \\ 2c_2 &= 2c_0c_1, & c_2 &= \frac{1}{8}; \\ 2c_3 &= 2c_0c_2 + c_1^2, & c_3 &= \frac{1}{16}; \\ 4c_4 &= 1 + 2c_0c_3 + 2c_1c_2, & c_4 &= \frac{9}{32}. \end{aligned}$$

.....

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \dots \blacktriangleright$$

**14.75.** Найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

*Решение.* Нахождение указанных пределов требует не-однократного применения правила Лопиталья (с учетом первого замечательного предела либо использования эквивалентных бесконечно малых). Вместе с тем эти пределы относительно легко могут быть вычислены, если использовать разложение входящих в них функций в степенные ряды.

а) Заменим  $e^x$  и  $\sin x$  их разложениями (14.13) и (14.14) в степенные ряды. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = 2. \end{aligned}$$

б) Заменяя  $\sin x$  и  $\operatorname{arctg} x$  их разложениями (14.14), (14.20) в степенные ряды, находим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) - \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3!} \right) - \left( \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{5!} \right) + \dots}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{5!} \right) x^2 + \dots \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Вычислить приближенно с точностью  $\delta$ :

$$14.76. \frac{1}{\sqrt[3]{e}}; \delta = 0,0001. \quad 14.77. \ln 1,4; \delta = 0,001.$$

$$14.78. \sin 18^\circ; \delta = 0,0001. \quad 14.79. \sqrt[3]{500}; \delta = 0,001.$$

$$14.80. \ln 5; \delta = 0,001. \quad 14.81. \sqrt[10]{1027}; \delta = 0,0001.$$

$$14.82. \operatorname{arctg} 0,2; \delta = 0,0001.$$

$$14.83. \cos 0,22; \delta = 0,0001.$$

$$14.84. \int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2} dx; \delta = 0,0001.$$

$$14.85. \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx; \delta = 0,0001.$$

$$14.86. \int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx; \delta = 0,001.$$

$$14.87. \int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx; \delta = 0,001. \quad 14.88. \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}; \delta = 0,001.$$

$$14.89. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx; \delta = 0,001. \quad 14.90. \int_0^{0,5} \cos \frac{x^2}{4} dx; \delta = 0,001.$$

$$14.91. \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx; \delta = 0,001.$$

$$14.92. \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx; \delta = 0,001.$$

Вычислить приближенное значение интегралов, взяв  $n$  членов разложения подынтегральной функции в ряд; указать погрешность:

$$14.93. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x} dx \quad (n=3). \quad 14.94. \int_0^{1/4} e^{-x^2} dx \quad (n=3).$$

$$14.95. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad (n=2).$$

Найти в виде степенных рядов решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих данным начальным условиям. (В скобках указано число первых  $n$  членов ряда, которые требуется вычислить):

$$14.96. y' = x + x^2 + y^2; y(0) = 1; (n=4).$$

$$14.97. y' - y^2 = x(x+1); y(0) = 1; (n=3).$$

$$14.98. y' + y^2 = e^x; y(0) = 0; (n=3).$$

$$14.99. y' + xy^2 = 2\cos x; y(0) = 1; (n=4).$$

$$14.100. y'' = xy; y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

$$14.101. y'' - y\cos x = x; y(0) = 1; y'(0) = 0; (n=4).$$

$$14.102. (1+x^2)y'' + xy' - y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 1; (n=6).$$

Найти пределы:

$$14.103. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}.$$

$$14.104. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$14.105. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right).$$

$$14.106. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4} \right).$$

**14.107.** Прибыль от реализации продукции промышленного предприятия увеличивается в зависимости от роста удельного веса  $p$  высококачественных изделий в общем объеме выпуска продукции по формуле  $S(p) = \ln \left( 1 + \frac{p}{a} \right)^b$ , где  $a > 1$ ,  $0 \leq p \leq 0,2$ . Аппроксимировать функцию  $S(p)$  линейной и оценить получаемую при этом погрешность.

*Указание.* Воспользоваться разложением функции  $\ln(1+x)$  в ряд Маклорена. При оценке погрешности считать  $p$  максимально возможным.

## Контрольные задания по главе 14

## «Степенные ряды»

№	Вариант 14.1	Вариант 14.2	Вариант 14.3
1	Найти область сходимости степенных рядов:		
	$1 - \frac{x^2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} - \frac{x^6}{3^3 \cdot 4\sqrt{4}} + \dots$	$1 - \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{x^3}{5^2\sqrt{3}} - \frac{x^5}{5^3\sqrt{4}} + \dots$	$1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-2)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-4)^{2n-1}}{2n-1}$
3	Разложить в ряды по степеням $x$ функции (с указанием области сходимости рядов):		
	$y = \ln \sqrt[5]{\frac{1+3x}{1-3x}}$	$y = \frac{x-3}{(x+1)^2}$	$y = \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{2x^3}$
4	$y = e^x \cos x$	$y = (1+e^x)^2$	$y = e^x \sin x$
5	Вычислить приближенное значение выражения, взяв два первых члена разложения функции $f(x)$ степенного ряда; указать погрешность:		
	$\cos 12^\circ;$	$\ln 0,9;$	$\sqrt[3]{30};$
6	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \ln(1+x)$	$f(x) = (1+x)^m$
7	Вычислить приближенно с точностью до 0,001 определенный интеграл:		
	$\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$	$\int_0^1 \sin x^2 dx$	$\int_0^{0,2} \frac{e^{-2x} - 1}{x} dx$

## Тест 14

1. Найти длину интервала сходимости ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$



2. Найти наименьшее значение  $x$  из области сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)}.$$

3. Определить середину интервала сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x-5)^n}{2n-1}.$$

4. Найти радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-9)^n x^{2n}.$$

5. Выяснить, какие из приведенных рядов сходятся при любых значениях  $x$ :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^n+2} x^n;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}.$$

6. Разложить функцию  $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$  в ряд по степеням  $x$ . В ответе дать коэффициент этого ряда при  $x^4$ .

7. Разложить функцию  $\frac{1}{x}$  по степеням  $(x+2)$ . В ответе дать коэффициент этого ряда при  $(x+2)^2$ .

8. При вычислении  $\sqrt[10]{1,14}$  было взято два члена биномиального ряда для функции  $y = (1+x)^m$  при  $x=0,14$ ,  $m=\frac{1}{10}$ . Выяснить, какая при этом была допущена погрешность:

$$1) \approx 0,1; 2) \approx 0,01; 3) \approx 0,001; 4) \approx 0,0001.$$

9. Вычислить с точностью до 0,01

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x} dx.$$

10. Найти максимальное значение  $x$ , при котором приближенная формула  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$  (представляющая первые два члена разложения в ряд Маклорена функции  $y = \cos x$ ) дает ошибку, не превышающую 0,01. (Округлить полученное значение  $x$  до десятых.)

Раздел VII

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ



# Глава 15

## КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

Комплексные числа применяются для решения квадратных уравнений. Так, оставаясь в области множества действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексные числа необходимы в различных приложениях математики. В частности, теория функций комплексной переменной является действенным инструментом при использовании математических методов в различных областях науки.

#### 15.1. Арифметические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость

*Комплексным числом* называется выражение вида  $z = x + iy$ , где  $x$  и  $y$  — действительные числа,  $i$  — мнимая единица.

Число  $x$  называется *действительной частью* числа  $z$  и обозначается  $\operatorname{Re}(z)$  (от франц. *réelle* — действительный), а число  $y$  — *мнимой частью* числа  $z$  и обозначается  $\operatorname{Im}(z)$  (от франц. *imaginaire* — мнимый), т.е.  $x = \operatorname{Re}(z)$ ,  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

Действительное число  $x$  является частным случаем комплексного  $z = x + iy$  при  $y = 0$ . Комплексные числа вида  $z = x + iy$ , не являющиеся действительными, т.е. при  $y \neq 0$ , называются *мнимыми*, а при  $x = 0$   $y \neq 0$ , т.е. числа вида  $z = iy$  — *чисто мнимыми*.

Числа  $z = x + iy$  и  $z = x - iy$  называются *сопряженными*. Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е.  $z_1 = z_2$ , если  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ ,  $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$ . В частности  $z = 0$ , если  $\operatorname{Re}(z) = 0$  и  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом.

1. *Сложение (вычитание)* комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2). \quad (15.1)$$

2. *Умножение* комплексных чисел

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (15.2)$$

В частности,

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1,$$

т.е. *мнимая единица есть число, квадрат которого равен  $-1$* .

3. *Деление* двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \quad (15.3)$$

Нетрудно убедиться в том, что все арифметические операции (15.1)–(15.3) над комплексными числами определяются естественным образом из правил сложения и умножения многочленов  $x_1 + iy_1$  и  $x_2 + iy_2$ , если считать  $i^2 = -1$ . Например, произведение комплексных чисел (15.2) есть

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

**Пример 15.1.** Даны комплексные числа  $z_1 = 12 + 5i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$ . Найти  $z_1 \pm z_2$ ,  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ .

*Решение.*

$$z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 15 + i;$$

$$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 9 + 9i;$$

$$z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 + 15i - 48i - 20i^2 = 56 - 33i$$

(здесь учтено, что  $i^2 = -1$ ).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i}. \text{ Умножая числитель и знаменатель на со-}$$

пряженное делителю комплексное число  $3 + 4i$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{36 + 15i + 48i + 20i^2}{9 - 16i^2} = \\ &= \frac{16 + 63i}{25} = 0,64 + 2,52i. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для представления комплексных чисел служат *точки координатной плоскости  $Oxy$* .

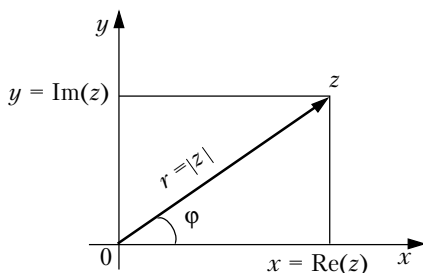


Рис. 15.1

Плоскость называется *комплексной*, если каждому комплексному числу  $z = x + iy$  ставится в соответствие точка плоскости  $z(x, y)$ , причем это соответствие взаимно однозначное (рис. 15.1).

Оси  $Ox$  и  $Oy$ , на которых расположены действительные числа  $z = x + 0i = x$  и чисто мнимые числа  $z = 0 + iy = iy$ , называются соответственно *действительной* и *мнимой осями*.

## 15.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

С каждой точкой  $z(x, y)$  комплексной плоскости связан *радиус-вектор* этой точки  $\overline{Oz}$ , длина которого  $r$  называется *модулем комплексного числа  $z$*  и обозначается  $|z|$  (см. рис. 15.1):

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (15.4)$$

Угол  $\varphi$ , образованный радиусом-вектором  $\overrightarrow{Oz}$  с осью  $Ox$ , называется *аргументом комплексного числа  $z$*  и обозначается  $\text{Arg} z$ . Из значений  $\varphi = \text{Arg} z$  выделяется *главное* значение  $\arg z$ , удовлетворяющее условию  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , например,  $\arg 5 = 0$ ,  $\arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ .

Очевидно (см. рис. 15.1), что

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi. \quad (15.5)$$

Следовательно, комплексное число  $z = x + iy$  можно представить как

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (15.6)$$

Представление комплексного числа в виде (15.6), где  $r = |z| \geq 0$ ,  $\varphi = \text{Arg} z$ , называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Сформулируем некоторые *свойства* арифметических операций над комплексными числами.

**1. При сложении (вычитании) комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.**

На рис. 15.2 показаны радиусы-векторы комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , их суммы  $z_1 + z_2$  и разности  $z_1 - z_2$ .

**2. Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей этих чисел, а его аргумент – сумме (разности) аргументов этих чисел, т.е.**

если  $z = z_1 z_2$ , то  $|z| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$ ,

$$\text{Arg} z = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2; \quad (15.7)$$

если  $z = \frac{z_1}{z_2}$  ( $z_2 \neq 0$ ), то  $|z| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  ( $r_2 = |z_2| \neq 0$ ),

$$\text{Arg} z = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2. \quad (15.8)$$

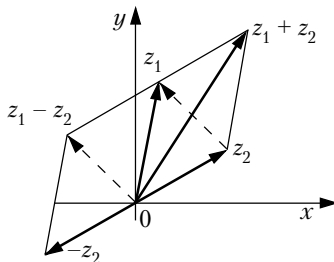


Рис. 15.2

Геометрически умножение числа  $z_1$  на  $z_2$  означает изменение длины радиуса-вектора  $r_1$  (или  $r_2$ ) в  $r_2$  (или  $r_1$ ) раз и его поворот вокруг точки  $O$  против часовой стрелки на угол  $\varphi_2$  (или  $\varphi_1$ ).

**Пример 15.2.** Комплексные числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  представить в тригонометрической форме и найти  $z_1 z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$ .

*Решение.* По формуле (15.4) найдем модуль комплексного числа  $z_1$ :  $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , а из соотношений (15.5)  $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  получим аргумент числа  $z_1$  (берем его главное значение):  $\varphi_1 = \arg z_1 = \frac{3\pi}{4}$ , т.е.  $z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ .

Аналогично  $r_2 = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ ,  $\cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \varphi_2 = \frac{1}{2}$ , т.е.  $\varphi_2 = \arg z_2 = \frac{\pi}{6}$  и  $z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ .

Теперь по формулам (15.7) и (15.8) находим

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt{2} \cdot 2 \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\ &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right); \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).$$

Так как в соответствии с формулами (15.7) и (15.8) при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, то легко получить *формулу*



возведения комплексного числа в натуральную степень  $n$ , известную как *формула Муавра*<sup>1</sup>:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (15.9)$$

**Пример 15.3.** Найти  $(-1+i)^{20}$ .

*Решение.* В примере 15.2 было получено, что  $-1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ . Поэтому по формуле Муавра (15.9) находим

$$\begin{aligned} (-1+i)^{20} &= \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} = \\ &= (\sqrt{2})^{20} \left[ \cos \left( 20 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( 20 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) \right] = \\ &= 1024 (\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = 1024(-1+0i) = -1024. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Обратимся к *извлечению корня* из комплексного числа. Пусть

$$\sqrt[n]{z} = \rho (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Тогда, используя определение корня и формулу Муавра (15.9), получаем

$$z = [\rho (\cos \psi + i \sin \psi)]^n = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi)$$

или

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi).$$

Отсюда следует, что

$$\rho^n = r \text{ и } n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Итак,  $\rho = \sqrt[n]{r}$  и  $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , т.е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{z} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (15.10)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

<sup>1</sup> Муавр Абрахам де (1667–1754) — английский математик.

При  $k = n, n + 1, \dots$  значения корня уже будут повторяться.

Таким образом, *корень  $n$ -й степени из комплексного числа (не равного нулю) имеет  $n$  различных значений.*

**Пример 15.4.** Найти  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

*Решение.* В примере 15.2 было получено, что  $z_1 = -1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ . По формуле (15.10) имеем

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

откуда получаем три значения корня

$$z_1 = \left( \sqrt[3]{-1+i} \right)_1 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$z_2 = \left( \sqrt[3]{-1+i} \right)_2 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$z_3 = \left( \sqrt[3]{-1+i} \right)_3 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

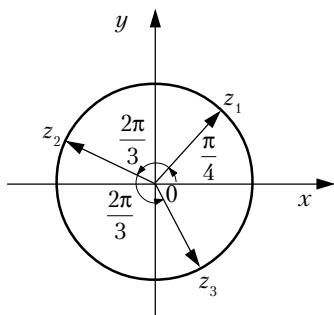


Рис. 15.3

На комплексной плоскости найденные значения корня представляют равноотстоящие друг от друга точки  $z_1, z_2, z_3$ , расположенные на окружности радиуса  $\sqrt[6]{2}$  (рис. 15.3). ►

Связь между тригонометрическими и показательными функциями выражается *формулой Эйлера*<sup>1</sup>.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (15.11)$$

<sup>1</sup> В приводимом здесь частном случае формулы Эйлера  $\varphi$  — действительное число.

Отсюда следует *показательная форма комплексного числа*

$$z = re^{i\varphi}, \quad (15.12)$$

где  $r = |z|$ ;  $\varphi = \operatorname{Arg} z$ .

В заключение отметим, что в показательной форме, так же как и в тригонометрической, легко проводить операции умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня из комплексных чисел.

**Пример 15.5.** Комплексные числа  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  представить в показательной форме.

*Решение.* В примере 15.2 было получено, что

$$z_1 = -1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right);$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Следовательно, по формуле (15.12)

$$z_1 = -1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}; z_2 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}. \blacktriangleright$$

## ПРАКТИКУМ

### 15.3. Действия над комплексными числами

**15.6.** Решить уравнение:

а)  $x^2 + 9 = 0$ ; б)  $x^2 - x + 1 = 0$ ; в)  $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$ ;

г)  $x^6 - 1 = 0$ .

*Решение.*

а) Перепишем уравнение в виде  $x^2 = -9$ , откуда

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i.$$

б) По формуле корней квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

в) Полагая  $x^2 = y$ , получаем уравнение

$$y^2 - 6y + 25 = 0, \text{ откуда } y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-16} = 3 \pm 4i.$$

Теперь  $x^2 = 3 + 4i$  и  $x^2 = 3 - 4i$ .

*Первый способ.* Решим первое уравнение. Приведем комплексное число  $3 + 4i$  к тригонометрическому виду. Получим (аналогично примеру 15.2)

$$3 + 4i = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ где } \cos \varphi = \frac{3}{5}, \sin \varphi = \frac{4}{5}.$$

Тогда  $x^2 = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  и по формуле (15.10)

$$x_{1,2} = \sqrt{5} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{2} \right), \quad k = 0, 1.$$

При  $k = 0$ ,  $x_1 = \sqrt{5} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{5} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} i \right) = 2 + i$ ; здесь учтено, что

$$\cos \frac{\varphi}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\begin{aligned} \text{При } k = 1 \quad x_2 &= \sqrt{5} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{2} \right) = \\ &= \sqrt{5} \left( -\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -2 - i. \end{aligned}$$

Аналогично решениями уравнения  $x^2 = 3 - 4i$  будут  $x_3 = 2 - i$  и  $x_4 = -2 + i$ .

*Второй способ.* Решим уравнение  $x^2 = 3 + 4i$ . Пусть комплексное число  $x = u + iv$ , где  $u$  и  $v$  — действительные числа. Тогда  $(u + iv)^2 = 3 + 4i$  или  $(u^2 - v^2) + 2uvi = 3 + 4i$ .

Из условия равенства комплексных чисел получим систему

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 3, \\ 2uv = 4, \end{cases}$$

решая которую методом подстановки, найдем  $\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 1, \end{cases}$  или  $\begin{cases} u_2 = -2, \\ v_2 = -1, \end{cases}$  откуда  $x_1 = 2 + i$ ,  $x_2 = -2 - i$ .

Аналогично решениями уравнения  $x^2 = 3 - 4i$  будут числа  $x_3 = 2 - i$  и  $x_4 = -2 + i$ .

г) Перепишем уравнение в виде  $x^6 = 1$  и по формуле (15.10) найдем шесть корней уравнения (при  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ):

$$x_1 = 1; x_{2,3} = \pm \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; x_4 = -1; x_{5,6} = \pm \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**15.7.** Даны комплексные числа  $z_1 = 15 + 8i$ ,  $z_2 = 4 - 3i$ .

Найти: а)  $z_1 \pm z_2$ ; б)  $z_1 z_2$ ; в)  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**15.8.** Комплексные числа  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = -\sqrt{3} + i$  представить в тригонометрической форме и найти:

а)  $z_1 z_2$ ; б)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; в)  $z_1^{28}$ ; г)  $\sqrt[3]{z_2}$ .

**15.9.** Комплексные числа  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = -\sqrt{3} + i$  представить в показательной форме.

**15.10.** Даны комплексные числа  $z_1 = 5 - 12i$ ,  $z_2 = -6 + 8i$ . Найти:

а)  $z_1 + z_2$ ; б)  $z_1 - z_2$ ; в)  $z_1 z_2$ ; г)  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**15.11.** Комплексные числа  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = -\sqrt{3} - i$  представить в тригонометрической форме и найти  $z_1 z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**15.12.** Найти все значения  $\sqrt[4]{-1}$ .

**15.13.** Построить множества точек  $z$  по условиям:

а)  $|z| < 3$ ; б)  $|z| < 2$  и  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ ;  
в)  $2 < |z| < 4$  и  $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ .

Вычислить:

**15.14.**  $\frac{4 - 3i}{4 + 3i}$ .

**15.15.**  $(a + bi)^3 - (a - bi)^3$ .

15.16.  $(1-i)^6$ .

15.17.  $(2+i\sqrt{12})^5$ .

15.18.  $\frac{(1+i)^{100}}{(\sqrt{3}-i)^{50}}$ .

15.19.  $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^{50}}{(1-i)^{100}}$ .

15.20.  $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$ .

15.21.  $\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{9}}$ .

Решить уравнения:

15.22.  $x^2+16=0$ .

15.23.  $x^2+x+4=0$ .

15.24.  $x^4+3x^2+4=0$ .

15.25.  $x^6-64=0$ .

15.26.  $x^8-17x^4+16=0$ .

## Контрольные задания по главе 15

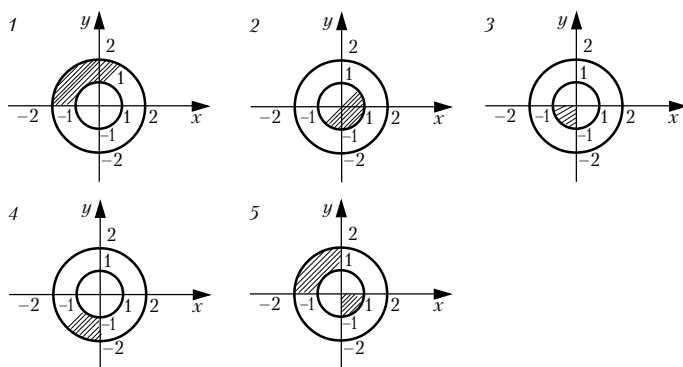
## «Комплексные числа»

№	Вариант 15.1	Вариант 15.2	Вариант 15.3
1	Даны комплексные числа $z_1$ и $z_2$ . Найти: а) $z_1 + z_2$ ; б) $z_1 - z_2$ ; в) $z_1 z_2$ ; г) $\frac{z_1}{z_2}$ ;		
	$z_1 = 8+3i$ , $z_2 = 8+6i$	$z_1 = 2-5i$ , $z_2 = 6-8i$	$z_1 = 3+7i$ , $z_2 = -8+6i$
2	Комплексные числа $z_1$ и $z_2$ представить в тригонометрической форме. Найти: а) $z_1 z_2$ ; б) $\frac{z_1}{z_2}$ ; в) $z_1^{10}$ ; г) $\sqrt[3]{z_1^2}$ ;		
	$z_1 = -\sqrt{3}+i$ , $z_2 = 1-i$	$z_1 = 1+i$ , $z_2 = \sqrt{3}-i$	$z_1 = \sqrt{3}+i$ , $z_2 = -1+i$
3	Найти $z$ :		
	$z = \frac{(1-i)^{100}}{(\sqrt{3}+i)^{50}}$	$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{50}}{(1+i)^{100}}$	$z = \frac{(-1+i)^{50}}{(-\sqrt{3}+i)^{25}}$
4	Решить уравнения:		
	а) $3x^2+8=0$ ; б) $x^2-2x+2=0$ ; в) $x^4-10x^2+169=0$ ; г) $x^4+64=0$	а) $4x^2+5=0$ ; б) $x^2-6x+16=0$ ; в) $x^4-30x^2+289=0$ ; г) $x^4+4=0$	а) $2x^2+7=0$ ; б) $x^2+10x+28=0$ ; в) $x^4+6x^2+25=0$ ; г) $x^4+1=0$

№	Вариант 15.1	Вариант 15.2	Вариант 15.3
5	Построить на комплексной плоскости множество точек:		
	а) $ z =3$ ;	а) $ z =7$ ;	а) $ z =1$ ;
	б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ;	б) $\arg z = \frac{\pi}{4}$ ;	б) $\arg z = \frac{\pi}{6}$ ;
	в) $ z  \leq 4$ ;	в) $ z  \leq 5$ ;	в) $ z  > 3$ ;
	г) $ z-3  < 5$	г) $ z+4  \geq 6$	г) $ z+1  \leq 2$

### Тест 15

1. Найти  $|z|$ , если  $z = -\sqrt{3} + i$ .
2. Найти (в градусах)  $\varphi = \arg z$ , если  $z = -\sqrt{3} + i$ ,  $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ .
3. Найти  $|z|$ , если  $z = z_1 - z_2$ ,  $z_1 = 13 - 5i$ ,  $z_2 = 1 - 21i$ .
4. Найти действительную часть  $\operatorname{Re}(z)$ , если  $z = z_1 + z_2$ ,  $z_1 = 2(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$ ,  $z_2 = 3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ .
5. Найти  $|z|$ , если  $z = z_1 z_2$ ,  $z_1 = 8 - 15i$ ,  $z_2 = -6 + 8i$ .
6. Найти (в градусах)  $\varphi = \arg z$ , если  $z = \frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = 1 - i$ .
7. Найти  $|z|$ , если  $z = (-8 + 6i)^6$ .
8. Найти (в градусах)  $\varphi = \arg z$ , если  $z = (1 - i\sqrt{3})^{20}$ ,  $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ .
9. Из всех десяти значений  $\sqrt[10]{-1}$  взято комплексное число, имеющее наибольший  $\arg z = \varphi$  ( $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ ). Найти это  $\varphi$ .
10. На рис. 16.1 выделены множества точек  $z = x + iy$  комплексной плоскости.



Для каких множеств точек одновременно выполняются условия  $1 \leq |z| \leq 2$ ,  $-\pi < \arg z \leq -\frac{\pi}{2}$ ?



# **КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ТЕСТЫ**

**по дисциплине «Математический  
анализ», часть 2 (разделам IV—VII)**

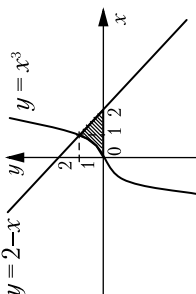
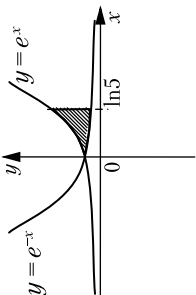
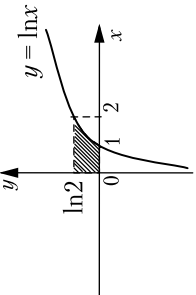
Учебно-тренировочные тесты  
Итоговые контрольные задания  
Итоговый тест

**Учебно-тренировочные тесты по дисциплине «Математический анализ»,  
часть 2 (разделам IV–VII)**

№	Тест МА – 2.1	Тест МА – 2.2	Тест МА – 2.3
1	<p>Найти значение параметра <math>a</math> при котором функция <math>F(x) = \arcsin(ax)</math>, является первообразной для функции</p> $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$	<p>Указать функцию <math>f(x)</math>, для которой первообразной является функция</p> $F(x) = (x^2 + 1)e^{x+5}.$ <p><i>Ответы:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>f(x) = 2xe^{x+5},</math></li> <li>2) <math>f(x) = (x+1)^2 e^{x+5},</math></li> <li>3) <math>f(x) = 2(x^2 + 5x)e^{x+4},</math></li> <li>4) <math>f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^{x+5}</math></li> </ol>	<p>Указать функцию <math>F(x)</math>, которая является первообразной для функции</p> $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$ <p><i>Ответы:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>F(x) = (x^2 + 1) + \ln(x^2 + 1);</math></li> <li>2) <math>F(x) = \frac{1}{x+1},</math></li> <li>3) <math>F(x) = \ln(x^2 + 1);</math></li> <li>4) <math>F(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1)</math></li> </ol>
2	<p>Найти <math>F(2) - F(1)</math>, если <math>F(x)</math> – первообразная для функции</p> $f(x) = 2^{x-1} \cdot \ln 2$	<p>Найти приращение первообразной <math>F(x)</math> для функции <math>f(x) = \sin \frac{x}{2}</math> на отрезке <math>[0; \pi]</math></p>	<p>Найти ординату точки пересечения прямой <math>x = 1</math> с той первообразной для функции <math>f(x) = \frac{3}{x}</math>, которая проходит через точку <math>(e^2; 7)</math></p>

## Продолжение учебно-тренировочных тестов

№	Тест МА – 2.1	Тест МА – 2.2	Тест МА – 2.3
3	<p>Указать замену переменной, которую необходимо выполнить в интеграле <math>\int x^5 e^{x^3} dx</math> для его упрощения или сведения к табличному.</p> <p><b>Ответы:</b></p> <p>1) <math>t = x^5</math>;                      2) <math>t = x^2 e^{x^3}</math>;  3) <math>t = x^3</math>;                      4) <math>t = e^{x^3}</math></p>	<p>Указать вид, который примет интеграл <math>\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx</math> после замены переменной <math>t = \ln(x+1)</math>.</p> <p><b>Ответы:</b></p> <p>1) <math>\int \frac{\ln t}{t} dt</math>;                      2) <math>\int t dt</math>;  3) <math>\int \frac{dt}{t}</math>;                      4) <math>\int \ln t dt</math></p>	<p>Указать представление интеграла <math>\int x^2 \sin x dx</math> в виде <math>\int u dv</math>, которое при интегрировании по частям приведет к табличному интегралу.</p> <p><b>Ответы:</b></p> <p>1) <math>u = \sin x, dv = x^2 dx</math>;  2) <math>u = x \sin x, dv = x dx</math>;  3) <math>u = x^2, dv = \sin x dx</math>;  4) <math>u = x, dv = x \sin x dx</math></p>
4	<p>Найти значение параметра <math>a</math>, при котором верно равенство:</p>		
	$\int \frac{12 dx}{4x^2 - 1} = a \ln \left  \frac{x - 0,5}{x + 0,5} \right  + C$	$\int 8 x e^{x^2+1} dx = a e^{x^2+1} + C$	$\int \frac{dx}{6\sqrt{4x^2+1}} =$ $= \frac{1}{a} \ln \left  2x + \sqrt{4x^2+1} \right  + C$

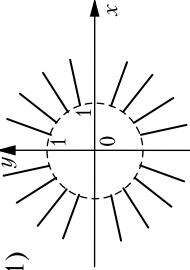
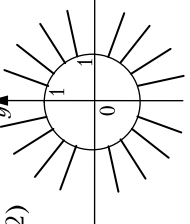
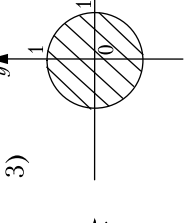
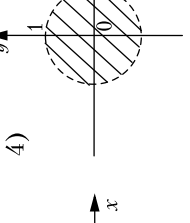
№	Тест МА – 2.1	Тест МА – 2.2	Тест МА – 2.3
5	Вычислить определенный интеграл:		
	$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos x^2 dx$	$\int_0^{\sqrt{e-1}} x \ln(x^2 + 1) dx$	$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$
6	Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке:		
			
7	Найти значение параметра $a$ , при котором:		
	<p>объем тела, образованного вращением вокруг оси <math>Ox</math> заштрихованной фигуры (см. задачу 6), равен</p> $V_x = \frac{a\pi}{21}$	<p>площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси <math>Ox</math> кривой <math>y = \sqrt{x}</math> при <math>x \in [0; 12]</math>, равна</p> $S_x = a\pi$	<p>объем тела, образованного вращением вокруг оси <math>Oy</math> заштрихованной фигуры (см. задачу 6), равен</p> $V_y = a\pi$

№	Тест МА – 2.1	Тест МА – 2.2	Тест МА – 2.3
8	Найти значения параметра $a$ , при которых сходится интеграл:		
	$\int_1^{\infty} e^{ax} dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{x^{a+1}}$	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a+1}}$
	<b>Ответы:</b> 1) при всех $a > 0$ ; 2) при всех $a < 0$ ; 3) при всех $a$ ; 4) ни при каких $a$		
9	Указать дифференциальные уравнения первого порядка:		
	линейные	однородные	с разделяющимися переменными
	<b>Ответы:</b> 1) $y' = \frac{2y + x^2}{3x + 7}$ ; 2) $e^{x+y} y' = \frac{x}{y}$ ; 3) $y' = \frac{xy}{2x^2 + 3y^2}$ ; 4) $y' = \frac{y}{x + 5}$		
10	Найти значение параметра $a$ , при котором функция:		
	$y = ae^{2x}$ является решением уравнения $y'' - y' = e^{2x}$	$y = a \cos(x + 5)$ является решением уравнения $y' = 2 \sin(x + 5)$	$y = ax \ln x + ax$ является решением уравнения $y'' = \frac{1}{2x}$
11	Найти ординату точки пересечения прямой $x = 2$ с интегральной кривой уравнения $y' - 2x = 0$ , проходящей через точку $(1; 3)$	Найти $f(3)$ , если $y = f(x)$ – частное решение уравнения $y'' - 2x = 0$ , удовлетворяющее условиям $f(1) = 1, f(0) = 0$	Найти $f(1)$ , если $y = f(x)$ – решение уравнения $2xy' = 0$ , удовлетворяющее условию $f(e) = 1$

№	Тест МА – 2.1	Тест МА – 2.2	Тест МА – 2.3
12	Исследовать на сходимость ряды:		
	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+5}}$ ; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+5}}$	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$ ; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2+2}$	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$ ; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^5+3}}$
	<b>Ответы:</b> 1) оба ряда сходятся; 3) оба ряда расходятся;		
13	Указать вид сходимости рядов:		
	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+3}$ ; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n^3+3}$	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^5+1}}$ ; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^5+1}}$	1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2n^2+3}$ ; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)}$
	<b>Ответы:</b> 1) оба ряда сходятся абсолютно; 2) ряд (1) сходится абсолютно, ряд (2) — условно; 3) оба ряда сходятся условно; 4) ряд (1) сходится условно, ряд (2) — абсолютно		

## Продолжение учебно-тренировочных тестов

№	Тест МА – 2.1	Тест МА – 2.2	Тест МА – 2.3
14	Указать ряды, для которых не выполнено необходимое условие сходимости	Указать ряды, исследование которых по признаку Даламбера приводит к ответу	Указать ряды, исследование которых по предельному признаку сравнения с помощью гармонического ряда приводит к ответу
	$\infty \sum_{n=1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ;    2) $\sum_{n=1} \frac{n+1}{n+3}$ ; <i>Ответы:</i> 1) $\sum_{n=1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ;    3) $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ ;    4) $\sum_{n=1} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ;    5) $\sum_{n=1} \frac{n^2}{n^3+3}$		
15	Найти длину интервала сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$	Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2^n} (x-3)^n$	Найти длину интервала сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot x^{2n}$
16	Найти наибольшее целое значение $x$ из области сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+2}$
17	Вычислить третий член разложения функции:		
	$f(x) = (1+x)^3$ в ряд Маклорена в точке $x = 0,5$	$f(x) = e^x$ в ряд Маклорена в точке $x = 0,5$	$f(x) = \ln x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ в точке $x = 0,7$

№	Тест МА – 2.1	Тест МА – 2.2	Тест МА – 2.3
18	Указать рисунок, на котором изображена область определения функции:		
	$z = \sqrt[4]{x^2 + y^2 - 1}$	$z = \ln(1 - x^2 - y^2)$	$z = \arcsin(x^2 + y^2)$
	<p>1) </p> <p>2) </p> <p>3) </p> <p>4) </p>	<p>Найти точки условного экстремума функции <math>z = 2x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 6y</math> при <math>x + y = 0</math></p>	
19	<p>Найти критические точки функции <math>z = 5x^3 + 4 - 2y^3 + 6y</math></p>	<p>Найти точки экстремума функции <math>z = x^3 - 3x - 3y^2 + 6y</math></p>	<p>Найти точки условного экстремума функции <math>z = 2x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 6y</math> при <math>x + y = 0</math></p>
	<p>Ответы: 1) (0;0); 2) (0;1); 3) (0;-1); 4) (1;1); 5) (-1;1); 6) (1;-1); 7) (1;0); 8) (-1;0)</p>		
20	<p>Найти значение второй частной производной <math>z''_{xx}</math> функции <math>z = xe^{xy}</math> в точке (0;2)</p>	<p>Найти значение частной производной <math>z'_y</math> функции <math>z = y^{x^2}</math> в точке (1;2)</p>	<p>Найти значение функции <math>z = 4y^2 + 4 - x^2 + 3</math> в критической точке</p>



**Итоговые контрольные задания по дисциплине «Математический анализ»,  
часть 2 (разделам IV–VII)**

№	Вариант МА.2.1	Вариант МА.2.2	Вариант МА.2.3	Вариант МА.2.4	Вариант МА.2.5
1	Найти неопределенный интеграл:				
	$\int (x+3)e^{-2x} dx$	$\int \frac{dx}{x(\ln x + 3)}$	$\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3} dx$	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}} dx$	$\int \frac{e^x}{e^{2x}+9} dx$
2	Вычислить определенный интеграл:				
	$\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{1+x^2} dx$	$\int_0^1 (2-x)e^{-x} dx$	$\int_6^9 \frac{dx}{x^2-7x+10}$	$\int_0^3 (3x^2+1)\ln(x^2+1) dx$	$\int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$
3	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:		Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:		
	кривой $y = \ln x$ , касательной к ней в точке $x = e$ и осью $Ox$	$y = x^2 + 1$ , $y = x$ , $y = 2$ , $x = 0$	$y = (x-4)^2$ , $y = x^2$ , $y = 1$	$y = xe^x$ , $x = 1$ , $y = 0$ вокруг оси $Ox$	$xy = 6$ , $y = 1$ , $y = 6$ вокруг оси $Oy$

## Окончание итоговых контрольных заданий

№	Вариант МА.2.1	Вариант МА.2.2	Вариант МА.2.3	Вариант МА.2.4	Вариант МА.2.5
Решить дифференциальные уравнения:					
4	$dy - (2x - y + 3)dx = 0$	$y' = \frac{xy + y^2}{x^2}$	$2yy' - x^3\sqrt{5 - x^4} = 3y'$	$y' + 2y = xe^{-x}$	$(x + 3)dy - (x^2 - 5)e^{-2y}dx = 0$
5	$y'' + 2y' - 8y = 1$	$y'' - 2y' = 2 + 3e^x$	$y'' + 5y' + 6y = x$	$y'' + y' = \cos x$	$y'' - 2y' = e^x$
Исследовать сходимость ряда:					
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^2}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{n+1}{n+3} \right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n^3 + 4}}{n^2 + 3n + 1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(4n)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n^2 + 5}$
7	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 + 7}{n^2 - 1} x^n$	Найти область сходимости степенного ряда:	Вычислить с точностью $\delta$ :		
			$\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx;$ $\delta = 0,01$	$\sqrt[3]{8,5}, \delta = 0,0001$	
Найти экстремумы функций двух переменных:					
8	$z = 2x^2 + \frac{y^2}{x} - x$	$z = \sqrt{x} \sqrt[3]{y} - 2x - 4y$	$z = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$	$z = 8x^3 - y^3 - 6xy$	$z = e^x (2x + y^2)$

## Итоговый тест МА.2

1. Пусть  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x) = 2x - 5$ , удовлетворяющая условию  $F(0) = 0$ . Найдите  $F(5)$ .

2. Пусть  $f(x)$  – такая функция, что  $F(x) = x^3 - 5x + 1$  является ее первообразной. Найдите  $f(2)$ .

3. Найдите все первообразные для функции  $f(x) = 12e^{3x+2} + 24x^3$ .

Ответ:  $F(x) = ae^{3x+2} + bx^4 + dx + C$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$ ,  $d = \dots$  ( $a, b, d$  – целые числа).

4. Найдите неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$ .

Ответ:  $(ax+b)^{-1} + C$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  – целые числа).

5. Найдите неопределенный интеграл

$$\int (2-x)e^{-2x} dx.$$

Ответ:  $e^{-2x} \frac{ax-3}{b} + C$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  – целые числа).

6. Вычислить определенный интеграл

$$\sqrt[5]{\int_2^6 6x\sqrt{5-x^2} dx}.$$

7. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx.$$

Ответ:  $\frac{ae^2+4}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  – целые числа).

8. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^0 \frac{dx}{x^2 + 6x + 5}.$$

Ответ:  $\frac{1}{a} \ln \frac{b}{7}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  – целые числа).

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = -x^2 + 4x - 3$ ,  $y = 2x - 3$ .

Ответ:  $\frac{a}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  — целые числа, а дробь  $\frac{a}{b}$  несократима).

10. Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат и линиями  $y = x^2 + 1$ ,  $x + y - 3 = 0$ .

Ответ:  $\frac{a}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  — целые числа, а дробь  $\frac{a}{b}$  несократима).

11. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями  $y = \ln x$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ .

Ответ:  $0,5\pi(e^a + b)$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  — целые числа).

12. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями  $y = x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 2$ .

Ответ:  $\frac{a\pi}{b}$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  — целые числа, а дробь  $\frac{a}{b}$  несократима).

13. Пусть  $y = y(x)$  — интегральная кривая дифференциального уравнения  $(x+1)y'^2 = 1$ , проходящая через точку  $(0; 0)$ . Найти  $y(e^9 - 1)$ .

14. Пусть  $y = y(x)$  — решение дифференциального уравнения  $e^{2x+y}dy + (3 - x^2e^{2x})dx = 0$ , удовлетворяющее условию  $y(0) = \ln 1,5$ . Найти  $y(1)$ .

Ответ:  $\ln\left(\frac{a}{2}e^{-2} + \frac{b}{3}\right)$ , где  $a = \dots$ ,  $b = \dots$  ( $a, b$  — целые числа).

15. Найти целое значение параметра  $a$ , при котором интегральная кривая уравнения  $y' + y = e^{5x}$ , проходящая через точку  $(0; \frac{7}{6})$ , проходит через точку  $(\ln 2, \frac{a}{6})$ .

16. Найти  $y(\ln 2)$ , где  $y = y(x)$  — решение дифференциального уравнения  $y'' = e^{2x}$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 0,25; y'(0) = 0,5$ .

17. Из данных рядов выбрать сходящиеся:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n;$

5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

18. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2 + 3}$  с помощью признака Даламбера. В ответе указать полученное значение  $l$  и вывод: в случае сходимости ряда — 1; в случае расходимости ряда — 2.

Ответ:  $l = \dots$  Вывод: ...

19. Из данных рядов выбрать расходящиеся, условно сходящиеся, абсолютно сходящиеся:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 3}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+7}};$

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^2 + 1}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 3}.$

Ответ: расходящиеся ...; условно сходящиеся ...; абсолютно сходящиеся ...

20. Перечислить ряды в порядке возрастания их радиусов сходимости:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n + 4}; 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 4};$

4)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4}.$

21. Дан ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3n^3 + 1} x^n$ . Выбрать верные высказывания:

- 1) ряд сходится при  $x = 0,5$ , при  $x = 1$ , при  $x = -0,5$ , при  $x = -1$  и расходится при  $x = 1,5$ ;  
2) ряд сходится при  $x = 1$  и расходится при  $x = -0,5, x = 0,5$ .

- 3) ряд сходится при  $x = 0,5$ ,  $x = -0,5$ ,  $x = -1$  и расходится при  $x = 1$ ,  $x = 1,5$ ;  
4) ряд сходится при  $x = 0,5$ ,  $x = -1$ ,  $x = -1,5$  и расходится при  $x = 1,5$ ,  $x = -2$ .

**22.** Вычислить  $3 \int_0^5 \ln(1+2x)dx$ , взяв два первых члена разложения в ряд подынтегральной функции.

**23.** Найти наибольшее значение функции  $z = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$  на круге единичного радиуса с центром в начале координат.

**24.** Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $z = x^2 + 4y^2 - 2x$  в треугольнике, ограниченном осью ординат и прямыми  $y = 2 - x$  и  $y = -1$ .

## Приложение

### Об использовании математических пакетов при изучении курса высшей математики

При решении конкретных математических задач в настоящее время широко используются возможности, предоставляемые компьютерными технологиями.

Сравнительно давно (если такой термин вообще применим по отношению к интеллектуальным технологиям (IT)) появились программы, позволяющие реализовать математические операции, результатом которых является *число* (или набор чисел). Такие программы существовали в среде DOS и даже в более ранних операционных системах. В среде Windows численные результаты позволяет получить стандартное приложение Excel, входящее в пакет Microsoft Office. В Excel доступны операции линейной алгебры – перемножение матриц, вычисление определителя, нахождение обратной матрицы. Встроенная база основных функций позволяет с заданной точностью находить значения экспоненты, логарифма, степени с любым числовым показателем, тригонометрических, обратных тригонометрических и многих других функций. Возможно приближенное вычисление определенного интеграла с заданной точностью.

В настоящее время появились специализированные программы и математические приложения – Mathcad, Maple, Matlab, Mathematica и др. Их отличие, например от Excel, заключается в том, что они позволяют получить результат в *аналитическом* виде.

Наиболее распространенной среди указанных выше является программа Mathcad, позволяющая осуществлять на компьютере выполнение разнообразных математических и технических расчетов, предоставляющая пользователю инструменты для работы с формулами, числами, графиками и

текстами, снабженная простым в освоении графическим интерфейсом.

В программе Mathcad доступны более сотни операторов и логических функций, предназначенных для численного и символического решения технических проблем различной сложности. Mathcad содержит обширную библиотеку встроенных математических функций; инструменты построения графиков различных типов; средства создания текстовых комментариев и оформления отчетов; конструкции для написания программ решения задач, которые невозможно (или сложно) решать с помощью стандартных инструментов программы; удобно организованную интерактивную систему получения справки и оперативной подсказки.

Программные средства такого типа в отечественной литературе называют *универсальными пакетами, системами или средами*.

Основное отличие пакета Mathcad от других программных средств этого класса состоит в том, что математические выражения на экране компьютера представляются в общепринятой математической нотации, т.е. точно в таком виде, как в книге, тетради, на доске. Записав в привычной форме математическое выражение, можно выполнить с ним самые разнообразные символьные или численные математические операции: вычислить значение, выполнить алгебраические преобразования, решить уравнение, продифференцировать функцию, построить график, найти интеграл и т.п. Можно снабдить вычисления текстовыми комментариями, иллюстрациями, построенными в других приложениях, и получить полный отчет о проделанных вычислениях.

Приведем в качестве примера<sup>1</sup> фрагмент рабочего документа Mathcad по исследованию и построению графика

функции  $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$  (из которого удалены громоздкие выражения для первой и второй производной, а приведены их упрощенные выражения).

---

<sup>1</sup> Здесь и далее примеры фрагментов рабочих документов Mathcad приводятся по пособию [18].

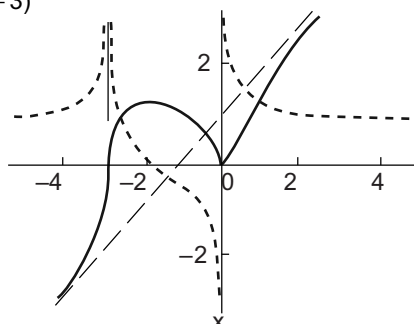


$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \cdot (x+3)}$$

$f(x)$

$\frac{d}{dx} f(x)$

$x+1$



$$k := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 1 \quad b := \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) \rightarrow 1$$

$$k = 1 \quad b = 1$$

Наклонная асимптота  $y = x + 1$

$$\sqrt[3]{x^2 \cdot (x+3)} \quad \frac{1}{\left[ 3 \cdot (x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)} \right]} \cdot (2 \cdot x \cdot (x+3) + x^2)$$

Упрощенное выражение  $f'(x)$        $f'(x) = 0$       Точка максимума

$$x \cdot \frac{(x+2)}{(x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \quad -2 \quad (-2, 1.587)$$

$$f(-2) = 1.587$$

$f'(x)$

Упрощенное выражение  $f''(x)$

$$x \cdot \frac{(x+2)}{(x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \quad \frac{-2}{\left[ (x+3) \cdot (x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)} \right]}$$

Знаменатель  $f''(x)$        $f''(x) = 0$  не существуют      Точка перегиба

$$(x+3) \cdot (x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad f(-3) = 0 \quad (-3, 0)$$

Отметим некоторые возможности пакета Mathcad. Mathcad позволяет проводить операции с матрицами, заданными параметрически. Ответ также может быть приведен в аналитическом виде. Например, если с помощью встроенного редактора записать матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и задать команду нахождения обратной матрицы, то ответ будет приведен в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}-a} \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Имеется возможность находить пределы, причем результат может быть как чисто числовым, так и зависящим от параметра. Если вычислять предел вида  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ , программа выдаст ответ  $\exp(a)$ .

Для вычисления производных следует записать функцию и, отметив в ней переменную, задать команду «Дифференцирование». При этом, если имеется несколько переменных аргументов функции, будет вычислена соответствующая частная производная. Ее аналитический вид уже будет включать необходимые сокращения. Например,

если задать функцию  $\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$  и указать на переменную  $x$ , то получится ответ  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

Mathcad позволяет также находить интегралы в функциональном виде. Например, фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением неопределенного интеграла

$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$  методом замены переменной выглядит так:

$$f(x) := x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x} \quad t(x) := \sqrt[3]{1-x}$$

$$\sqrt[3]{1-x} - t \quad 1 - t^3 \quad -3 \cdot t^2$$

$$x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x} \quad (1-t^3)^2 \cdot (t^3)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\int (1-t^3) \cdot (t^3)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot (-3 \cdot t^2) dt \rightarrow \frac{-3}{10} \cdot t^{10} + \frac{6}{7} t^7 - \frac{3}{4} \cdot t^4$$

$$\frac{-3}{10} \cdot t^{10} + \frac{6}{7} \cdot t^7 - \frac{3}{4} \cdot t^4 \quad \frac{-3}{10} \cdot (1-x)^{\left(\frac{10}{3}\right)} + \frac{6}{7} \cdot (1-x)^{\left(\frac{7}{3}\right)} - \frac{3}{4} \cdot (1-x)^{\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\frac{-3}{140} \cdot (1-x)^{\left(\frac{4}{3}\right)} \cdot (14 \cdot (1-x)^2 - 5 + 40 \cdot x)$$

Проверка

$$\frac{1}{35} \cdot (1-x)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot (14 \cdot (1-x)^2 - 5 + 40 \cdot x) - \frac{3}{140} \cdot (1-x)^{\left(\frac{4}{3}\right)} \cdot (12 + 28 \cdot x)$$

Ответ  $F(x) := \frac{-3}{140} \cdot (1-x)^{\left(\frac{4}{3}\right)} \cdot (14 \cdot (1-x)^2 - 5 + 40 \cdot x)$

Если попытаться найти «неберущийся» интеграл, то об этом последует сообщение. Например, при попытке взять интеграл  $\int e^{\sqrt{x^2+1}} dx$  выйдет сообщение «не найден символьный результат».

Однако следует отметить, что встроенная база Mathcad содержит значительное число неэлементарных функций, представляющих собой первообразные часто встречающихся, имеющих значение для практических приложений

функций, таких как  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $\frac{e^x}{x}$ ,  $\frac{\sin x}{x}$  и др. Эти первообразные называются *специальными функциями*.

Mathcad позволяет также решать дифференциальные уравнения. При этом можно находить аналитические решения (если таковые существуют). Например, фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи Коши по нахождению частного решения дифференциального уравнения

$$y' = \frac{e^x}{y(1+e^x)}, \text{ удовлетворяющего начальному условию } y(0) = 1, \text{ имеет вид}$$

вию  $y(0) = 1$ , имеет вид

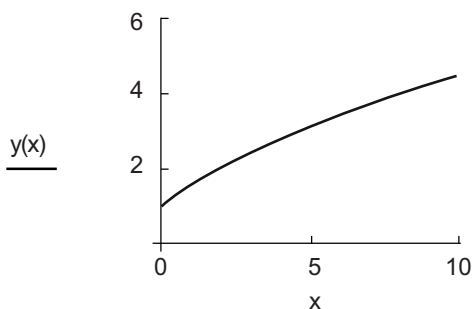
$$X(x) := \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)} \quad Y(y) := y$$

$$\int_0^x X(t)dt \rightarrow \ln(1 + \exp(x)) - \ln(2) \quad \int_1^y Y(t)dt \rightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 - \frac{1}{2}$$

$$\ln(1 + \exp(x)) - \ln(2) = \left( \frac{1}{2} \cdot y^2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\left[ \frac{-\sqrt{2 \cdot \ln(1 + \exp(x)) - 2 \cdot \ln(2) + 1}}{\sqrt{2 \cdot \ln(1 + \exp(x)) - 2 \cdot \ln(2) + 1}} \right]$$

$$y(x) := \sqrt{2 \cdot \ln(1 + \exp(x)) - 2 \cdot \ln(2) + 1}$$



Здесь показаны лишь немногие из возможностей Mathcad и других аналогичных математических пакетов. Специализированные математические программы регулярно обновляются, их возможности постоянно увеличиваются.

Это позволяет использовать их в процессе изучения курса математики в экономическом вузе. Выполняя рутинные и несущественные (в контексте изучаемой темы) операции, математический пакет позволяет студенту самостоятельно выполнять громоздкие вычисления, решать содержательные задачи, овладеть навыками решения прикладных задач, исследовать на основе собственных наблюдений новые объекты, выявлять их свойства и закономерности.

Рассматривая проблему использования ПЭВМ в вузовском учебном процессе по математическим дисциплинам,

следует отметить, что в настоящее время преобладают две крайние тенденции – персональные компьютеры полностью игнорируются или, наоборот, на них перекладывают всю прикладную часть курса, избавляя при этом студента от необходимости понимания реализованных в компьютерных программах математических идей и методов. Таким образом, вместо освоения математических методов, составляющего одну из основных задач вузовского курса математики как фундаментальной дисциплины, происходит освоение интерфейса программных продуктов. При изучении математики нужно научиться пользоваться ее определениями и методами, применяя персональный компьютер для выполнения трудоемкой и рутинной работы. Но заменять, например, изучение дифференциальных уравнений и методов их решений использованием готовых программ недопустимо. Последнее возможно лишь после глубокого усвоения студентом учебного материала, либо для получения конкретного результата уже сформировавшимся специалистом, но никак не при первоначальном изучении математического курса.

Освоение компьютерных программ никоим образом *не может заменить само изучение предмета*. Такие программы способны помочь получить решение конкретной задачи, однако для умения ставить задачу, интерпретировать результаты, находить связь с другими проблемами и областями (в том числе экономики) необходимо освоение содержательной части курса.

## Литература

1. Высшая математика. Общий курс / под ред. А. И. Яблонского. — Минск : Высшая школа, 1993.
2. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006.
3. Головина, Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. — М. : Наука, 1985.
4. Замков, О. О. Математические методы анализа экономики / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. М. Черемных. — М. : ДИС, 1997.
5. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. — М. : Наука, 1978.
6. Ильин, В. А. Основы математического анализа. В 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. — М. : Наука, 1971. Ч. 1, 1993. Ч. 2.
7. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор; пер. с англ. М. : Прогресс, 1975.
8. Исследование операций в экономике / под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : Банки и биржи; ЮНИТИ, 1997.
9. Карасев, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов / А. И. Карасев, З. М. Аксютин, Т. И. Савельева. — М. : Высшая школа, 1982. Ч. 1 и 2.
10. Карасев, А. И. Матричная алгебра / А. И. Карасев, И. Л. Калихман, Н. Ш. Кремер. — М. : ВЗФЭИ, 1987.
11. Карасев, А. И. Математические методы и модели в планировании / А. И. Карасев, Н. Ш. Кремер, Т. И. Савельева. — М. : Экономика, 1987.
12. Колесников, А. Н. Краткий курс математики для экономистов / А. Н. Колесников. — М. : Инфра-М, 1997.
13. Кремер, Н. Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин; под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : Высшее образование, 2007.
14. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1985.

15. *Лопатников, Л. И.* Краткий экономико-математический словарь / Л. И. Лопатников. — М. : Наука, 1987.
16. *Мантуров, О. В.* Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / О. В. Мантуров, Н. М. Матвеев. — М. : Высшая школа, 1986.
17. *Мордкович, А. Г.* Математический анализ / А. Г. Мордкович, А. С. Солодовников. — М. : Высшая школа, 1990.
18. *Плис, А. И.* MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров / А. И. Плис, И. А. Сливина. — М. : Финансы и статистика, 1999.
19. Практикум по высшей математике для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
20. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / под ред. А. И. Карасева, Н. Ш. Кремера. — М. : Экономическое образование, 1989.
21. *Самуэльсон, П.* Экономика / П. Самуэльсон; пер. с англ. — М. : НПО Антон; ВНИИСИ, 1992.
22. *Солодовников, А. С.* Математика в экономике / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. — М. : Финансы и статистика, 1998. Ч. 1.
23. *Шарп, У.* Инвестиции / У. Шарп, Дж. А. Гордон, Д. Бейли; пер. с англ. — М. : Инфра-М. 1997.

## Ответы

### Раздел I. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии

#### Глава 1

$$\mathbf{1.16.} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -13 & -17 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.17.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -18 \\ -21 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.18.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & -5 \\ 0 & -10 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.19.} \quad \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.20.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.21.} \quad \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.22.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.23.} \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.24.} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.25.} \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.26.} \quad AB = \begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.27.} \quad \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.28.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1.29.} \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.30.} \quad \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}; -9, \quad \mathbf{1.31.} \quad \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 36.$$

$$\mathbf{1.32.} \quad \begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}; 242, \quad \mathbf{1.33.} \quad \operatorname{tr} C = 16, \quad \mathbf{1.34.} \quad \operatorname{tr} C = \operatorname{tr} D = 16.$$



$$1.35. \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}, 1.36. \begin{pmatrix} -12 & -12 & 8 \\ -4 & -4 & 2 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

1.40. 11. 1.41. 13. 1.42.  $\sin(\alpha - \beta)$  1.43. 0. 1.44. 1. 1.45. 8.  
1.46. 40. 1.49.  $x_1 = 0; x_2 = 0$ . 1.50.  $x_1 = 2; x_2 = 3$ . 1.51.  $8a + 15b +$   
 $+ 12c - 19d$ . 1.52.  $-8a - 2b + 4c + 14d$ . 1.53. 8. 1.54.  $-180$ . 1.55. 160.  
1.56.  $-10$ . 1.57. 2. 1.58. 0.  
1.60.  $\lambda_1 = -8; \lambda_2 = 1$ .

$$1.61. B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -6 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, 1.62. A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.63. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1.64. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.65. A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 1/3 \\ 7/3 & -4/3 & -1/3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, 1.66. A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1/4 & -9/4 & 3/2 \\ 1/4 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$1.67. A^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -23/2 & -1 & 2 & 7/2 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 1.71. 3 \quad 1.72. 3. \quad 1.73. 2.$$

1.74. 3. 1.75. 2. 1.76. 2. 1.77. 3. 1.78. 4. 1.79. 3. 1.80. 3.  
1.81. 2. 1.82. 2. 1.83. 2. 1.84. Независимы. 1.85. Зависимы.  
1.86. 3. 1.87. 2.

$$1.93. \text{ а) } \begin{pmatrix} 5 & 12 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 4 \\ 13 & 13 & 12 & 9 \end{pmatrix}; \text{ б) } B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.94.  $C = (250; 180; 150)$ ; первый регион. 1.95.  $(680; 2040; 540;$   
 $1020)$ . 1.96. 2800. 1.97. 1)  $S = (700; 1000; 900)$ ; 2)  $C = 63\,000$ .

$$1.98. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ -200 & 0 & 200 & 200 & 200 & 200 \\ -300 & -100 & 100 & 300 & 300 & 300 \\ -400 & -200 & 0 & 200 & 400 & 400 \\ -500 & -300 & -100 & 100 & 300 & 500 \end{pmatrix}.$$

**1.99.** Через один год: 17% — малый ремонт; 56% — средний; 27% — сложный. Через два года: 29,1% — малый ремонт; 49,0% — средний; 21,9% — сложный. Через три года: 25,85% — малый ремонт; 50,72% — средний; 23,43% — сложный.

**Контрольные задания. Вариант 1.1.** 1.  $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.  $C^{-1} = \frac{1}{345} \begin{pmatrix} 141 & -15 & -27 \\ -10 & 50 & -25 \\ -46 & -115 & 92 \end{pmatrix}.$  3. 0. 4. 2. 5. 1)  $\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix};$  2) 410.

6. 0,68; 0,32). **Вариант 1.2.** 1.  $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 11 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

2.  $\tilde{N}^{-1} = \frac{1}{135} \begin{pmatrix} 34 & -11 & -3 \\ -22 & 23 & -6 \\ -3 & -3 & 36 \end{pmatrix}.$  3. 0. 4. 3. 5. 1)  $\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix};$  2) 320.

6. (0,65; 0,35). **Вариант 1.3.** 1.  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.  $\tilde{N}^{-1} = \frac{1}{324} \begin{pmatrix} 78 & -7 & -13 \\ -12 & 26 & 2 \\ -96 & -62 & 70 \end{pmatrix}.$  3. 0. 4. 2. 5. 1)  $\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix};$  2) 260.

6. (0,62; 0,38). **Тест 1.** 1. 4; 6; 9. 2. 10. 3.  $a = 1; b = 0; c = 0; d = 32.$  4. 81. 5. 3. 6. 9. 7. 9. 8. 2; 1; 3; 4. 9. 2. 10. 41.

Глава 2

**2.14.** (2; -3). **2.15.** ( $2\sqrt{5}$ ; 2). **2.16.** (1; 2; 3). **2.17.** (1; -2; 0). **2.18.** (-2; 1; -1). **2.19.** (3; 0; -2). **2.20.** (-4; 1; 2). **2.21.** Несовместна. **2.22.** (1; 1; 1). **2.23.** (2; 3; 5). **2.24.** (1; -1; 2; 0). **2.25.** Несовместна. **2.26.** (0; 1; 2; -3). **2.27.** (1; 2; 3; 4). **2.28.** Несовместна. **2.29.** (-2; 3; 5; 2).

**2.30.** При  $a \neq 0, a \neq -3$  система имеет единственное решение  $\left( x_1 = \frac{2-a^2}{a(a+3)}; x_2 = \frac{2a-1}{a(a+3)}; x_3 = \frac{a^3+2a^2-a-1}{a(a+3)} \right)$ ; при  $a = 0$

и  $a = 3$  система несовместна. **2.31.** При  $a \neq -3, a \neq 1$  система имеет единственное решение  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/(a+1)$ ; при  $a = 1$  — бесконечное множество решений ( $x_1 = 1 - c_1 - c_2 - c_3; x_2 = c_1; x_3 = c_2; x_4 = c_3$ ); при  $a = -3$  система несовместна. **2.32.** (9; 0; 8). **2.33.** (5; -2; 4). **2.34.** (2; -3; 1). **2.35.** (0; -3; 6).

**2.36.**  $X = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ 15 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ . **2.37.**  $X = \begin{pmatrix} -6 & 26 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ . **2.38.**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**2.39.**  $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ . **2.40.**  $X = \begin{pmatrix} -40 & -50 & 43 \\ 29 & 36 & -31 \end{pmatrix}$ . **2.41.**  $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**2.42.**  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . **2.43.** 25%; 20%; 15%. **2.46.** (1; 1; 1). **2.47.** ( $-3c; c;$

$5c + 1$ ), где  $c$  — любое число. **2.48.** ( $14c; 21c; c; c$ ), где  $c$  — любое число. **2.49.** ( $-c_1 + \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}; c_1 - 2c_2 + 2; c_1; c_2$ ), где  $c_1, c_2$  — любые числа. **2.50.** ( $-9 - c_1 - c_2; c_1; c_2; -7 + 2c_2; 3 + 2c_2$ ),

где  $c_1, c_2$  — любые числа. **2.51.** ( $1 + 2c_1 + c_2 - 2c_3; c_1; 1; c_2; c_3$ ), где  $c_1, c_2, c_3$  — любые числа. **2.52.** ( $-3/5; 14/5; 0$ ), (19; 0; 14), (0;  $19/7; 3/7$ ). **2.53.** ( $-5/2; 7/2; 0; 0$ ), ( $-5/2; 0; -7/2; 0$ ), ( $-3/4; 0; 0; 7/8$ ), (0;  $-3/2; 0; 5/4$ ), (0; 0;  $3/2; 5/4$ ). **2.54.** (1; -1; 2; 0), (1; 0; 2; -1). **2.55.** (4; -4; 1; 0), (4; 0; 1; 2). **2.56.** ( $c/5 + 2; 4c/5 + 2; c$ ), где  $c$  — любое число; (2; 2; 0), (1,5; 0; -2,5), (0; -6; -10). **2.57.** ( $-c_1/4 - 9c_2/4 + 2; -5c_1/4 - c_2/4; c_1; c_2$ ), где  $c_1, c_2$  — любые числа; (2; 0; 0; 0), (0; 0;  $-2/11; 10/11$ ), (0;  $-2/9; 0; 8/9$ ), (0; -10; 8; 0). **2.58.** ( $5c_1 - c_2 + 1; -3c_1/2 - 2c_2 + 1; c_1; c_2$ ), где  $c_1, c_2$  — любые числа; (1; 1; 0; 0), (0; -1; 0; 1),

(0,5; 0; 0; 0,5), (13/3; 0; 2/3; 0), (0; 1,3; -0,2; 0), (0; 0; -2/23; 13/23). **2.59.**  $(3c_1/2 - c_2/12 - 7/12; c_1; -5c_2/6 + 1/6; c_2)$ , где  $c_1, c_2$  — любые числа;  $(-7/12; 0; 1/6; 0)$ ,  $(-0,6; 0; 0; 0,2)$ ,  $(0; 7/18; 1/6; 0)$ ,  $(0; 0,4; 0; 0,2)$ ,  $(0; 0; 6; -7)$ . **2.60.**  $(8; -6; 1; 0)$ ,  $(-7; 5; 0; 1)$ . **2.61.**  $(-9; -3; 11; 0; 0)$ ,  $(3; 1; 0; 11; 0)$ ,  $(-10; 4; 0; 0; 11)$ . **2.62.**  $(-7; 5; 1; 0)$ ,  $(7; -5; 0; 2)$ . **2.63.**  $(-9; 3; 4; 0; 0)$ ,  $(-3; 1; 0; 2; 0)$ ,  $(-2; 1; 0; 0; 1)$ . **2.64.** Система имеет только нулевое решение. **2.65.**  $(0; 1; 3; 0; 0)$ ,  $(0; -2; 0; 0; 3)$ . **2.66.** а) да; б) нет. **2.67.**  $X = (945,6; 691,2)$ . **2.68.**  $X = (102,2; 41,0; 26,4)$ ;  $x_{11} = 30,7$ ;  $x_{12} = 10,3$ ;  $x_{13} = 5,3$ ;  $x_{21} = 15,3$ ;  $x_{22} = 4,9$ ;  $x_{23} = 0,8$ ;  $x_{31} = 10,2$ ;  $x_{32} = 2,1$ ;  $x_{33} = 2,1$ ; чистая продукция отраслей: (1) — 46,0; (2) — 23,7; (3) — 18,2. **2.69.**  $x = (1000; 1000)'$ ,  $\Delta x = (184; 132)'$ . **2.70.**  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}$ .

$$\mathbf{2.71.} \quad A = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,4 \\ 0,14 & 0,1 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 1,29 & 0,57 \\ 0,2 & 1,2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 622,5 \\ 430 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.72.} \quad \Delta x = (23; 56; 27)'; \Delta x = (3; \sigma; -11,6; 18,6)'.$$

**Контрольные задания. Вариант 2.1. 1.**  $(-1; 3; 4)$ .

$$\mathbf{2.} \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{3.} \quad (1; 5; 3; 2). \quad \mathbf{4.} \quad x_1 = 2c - 3, x_2 = 6c - 7,$$

$x_1 = 2c - 3, x_2 = 6c - 7, x_3 = 5c - 7, x_4 = c$ ; четыре базисных решения: или  $(-3; -7; -7; 0)$ , или  $(-0,2; 1,4; 0; 1,4)$ , или  $(-2/3; 0; -7/6; 7/6)$ , или  $(0; 2; 0,5; 1,5)$ . **5.**  $(4; 1; -2; 0)$ ,  $(-4; 0; 0; 1)$ .

$$\mathbf{6.} \quad \Delta Y = (120; 10)', \Delta X = (130; 180)'. \quad \text{Вариант 2.2. 1.} \quad (-2; -1; 2).$$

$$\mathbf{2.} \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{3.} \quad (1; -3; 2; 1). \quad \mathbf{4.} \quad x_1 = 6c - 11, x_2 = -c - 1,$$

$x_3 = c, x_4 = -3c + 7$ ; четыре базисных решения: или  $(0; -17/6; 11/6; 3/2)$ , или  $(-17; 0; -1; 10)$ , или  $(-11; -1; 0; 7)$ , или  $(3; -10/3; 7/3; 0)$ . **5.**  $(-3; -5; 1; 0)$ ,  $(-2; 1; 0; 1)$ .

$$\mathbf{6.} \quad \Delta Y = (86; 10)', \Delta X = (160; 230)'. \quad \text{Вариант 2.3. 1.} \quad (1; 2; -1).$$

$$\mathbf{2.} \quad X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{3.} \quad (-1; 2; 0; 4). \quad \mathbf{4.} \quad x_1 = 0,75c - 1, x_2 = -0,25c + 2,$$

$x_3 = c, x_4 = 4 - 2c$ ; четыре базисных решения: или  $(-1; 2; 0; 4)$ , или  $(0,5; 1,5; 2; 0)$ , или  $(5; 0; 8; -12)$ , или  $(0; 5/3; 4/3; 4/3)$ .

$$\mathbf{5.} \quad (11; 7; 1; 0), (0; -2; 0; 1). \quad \mathbf{6.} \quad \Delta y = (44; 36)', \Delta X = (250; 360)'.$$

**Тест 2. 1.**  $x_1 = 1, x_2 = -1, \Delta_3 = 7$ . **2.**  $x_1 = 5, x_3 = -2, a_{12} = 10$ . **3.**  $(-1; 0; 1)$ . **4.** 3. **5.** 3; 5. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 1; 4. **9.**  $y_1 = 270, y_2 = 470$ .

$$\mathbf{10.} \quad x_1 = 100, x_2 = 100.$$

Глава 3

- 3.18.**  $120^\circ$ . **3.19.**  $\sqrt{17}$ . **3.20.**  $90^\circ$ . **3.21.**  $\sqrt{74}/2$ ;  $\sqrt{2}/2$ . **3.22.** 20.  
**3.23.** а)  $\alpha = 4$ ,  $\beta = -1$ ; б)  $\alpha = c$ ,  $\beta = c + 9$ , где  $c$  — любое действительное число. **3.25.**  $\vec{c} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$ . **3.26.**  $\vec{p} = (4; 1)$ ;  $\vec{p} = -3\vec{a} + 5\vec{b}$ . **3.27.**  $\vec{a} = (3\vec{b} - \vec{c} + \vec{d})/2$ .  
**3.28.**  $|\vec{a}| = 7$ ;  $\cos \alpha = 2/7$ ,  $\cos \beta = 3/7$ ,  $\cos \gamma = -6/7$ . **3.29.**  $45^\circ$  или  $135^\circ$ . **3.30.**  $|M_1 M_2| = 9$ ;  $\cos \alpha = -1/3$ ,  $\cos \beta = 2/3$ ,  $\cos \gamma = -2/3$ .  
**3.31.**  $45^\circ$ . **3.32.**  $m = -6$ . **3.33.**  $4\sqrt{2}/3$ . **3.34.**  $5/\sqrt{89}$ .  
**3.35.**  $\vec{d} = -(3/2)\vec{i} + (3/4)\vec{j} + (3/2)\vec{k}$ . **3.43.** а) да; б) нет; в) нет.  
**3.44.** а) да; б) да; в) нет; г) да. **3.45.** Да. **3.46.**  $a = 0$ . **3.50.** Да.  
**3.51.** При любом  $m$ . **3.52.**  $m = 5/3$ . **3.53.** Линейно зависимы.  
**3.54.** Линейно независимы. **3.55.** б)  $\vec{a}_3 = (8/5; -1/5)$ .  
**3.56.** Нет. **3.57.** Да. **3.58.**  $x = (-4; -8; 8)$ . **3.59.**  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .  
**3.60.**  $e_1 = (5/13; -3/13)$ ,  $e_2 = (1/13; 2/13)$ . **3.61.**  $e_1 = (1; 1/3; 0)$ ,  
 $e_2 = (-1/2; -1/3; 1/2)$ ,  $e_3 = (0; 1/3; 0)$ . **3.62.**  $e_2^* = (2; 1; 0)$ .  
**3.63.**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . **3.64.** 3450 ден. ед.; 80 ден. ед.  
**3.65.**  $(x, y) = -90$ ;  $|x| = 2\sqrt{26}$ ;  $|y| = \sqrt{105}$ . **3.66.**  $\arccos \sqrt{5/42} \approx 70^\circ$ .  
**3.71.** Да. **3.72.** Нет. **3.73.** Нет. **3.74.** Да. **3.76.** Да. **3.77.**  $y =$   
 $= (2; 3)$ . **3.78.**  $y = (1; 3; 4)$ . **3.79.**  $y = (-3; 3)$ . **3.80.**  $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .  
**3.81.**  $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 14 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{pmatrix}$ . **3.82.**  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . **3.83.**  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -24 \\ 1 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ .  
**3.87.**  $(4c_1; -c_1)$ ,  $(c_2; -c_2)$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ . **3.88.**  $(-2c_1; c_1)$ ,  $(c_2; c_2)$ ,  
 $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ . **3.89.**  $(-2c_1; c_1; c_1)$ ,  $(0; c_2; c_2)$ ,  $(6c_3; -7c_3; 5c_3)$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  
 $c_2 \neq 0$ ,  $c_3 \neq 0$ . **3.90.**  $(-2c_1; 0; c_1)$ ,  $(0; c_2; 0)$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ .  
**3.91.**  $(3c_1; -5c_1; c_1)$ ,  $(4c_2; 0; c_2)$ ,  $(2c_3; 0; -c_3)$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ ,  $c_3 \neq 0$ .  
**3.92.**  $(0; c_1; 0)$ ,  $(3c_2; 5c_2; -c_2)$ ,  $(2c_3; 0; c_3)$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ ,  $c_3 \neq 0$ .  
**3.93.**  $(-c_1; 0; c_1; 0)$ ,  $(c_2; 0; 0; 0)$ ,  $(0; c_3; 0; 0)$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ ,  $c_3 \neq 0$ .

**3.94.**  $(40c_1; -c_1; -8c_1; 9c_1), (0; c_2; -2(c_2 + c_3); c_3), (0; 2c_4; c_4; 2c_4),$   
 $c_1 \neq 0, c_2^2 + c_3^2 \neq 0, c_4 \neq 0.$  **3.95.**  $(-c_1; c_1), (c_2; 2c_2), c_1 \neq 0, c_2 \neq 0.$

**3.96.**  $(c_1; -2c_1), (c_2; c_2), c_1 \neq 0, c_2 \neq 0.$

**3.97.**  $(c_1; 2c_1; 2c_1), (2c_2; c_2; -2c_2), (2c_3; -2c_3; c_3), c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_3 \neq 0.$

**3.98.**  $A^* = \text{diag}(1; 5).$  **3.99.** Не приводится.

**3.100.**  $A^* = \text{diag}(-6; 2; 3).$  **3.101.** Не приводится. **3.102.**  $2 : 4 : 3.$

**3.103.**  $140 : 146 : 220 : 121.$  **3.104.**  $134; 201; 67$  ден. ед.

**3.105.**  $198; 114; 90$  ден. ед. **3.106.**  $90; 114; 198$  ден. ед.

**3.107.**  $134; 67; 201$  ден. ед. **3.111.**  $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$

**3.112.**  $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$  **3.113.**  $(x_1, x_2, x_3)$

$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 3 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$  **3.114.** 2. **3.115.** 2. **3.116.** 2.

**3.117.**  $L_1 = 19y_1^2 - 2y_2^2 - 10y_1y_2.$  **3.118.**  $L_1 = 22y_1^2 + 12y_2^2 + 3y_3^2 +$

$+11y_1y_2 + 17y_1y_3 + 8y_2y_3.$  **3.119.**  $L_1 = 5y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_1y_2 +$

$+5y_1y_3 - 7y_2y_3.$  **3.120.**  $L = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_3^2,$  если  $y_1 = x_1 - x_2 + x_3,$

$y_2 = x_2 + x_3, \quad y_3 = x_3.$  **3.121.**  $L = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$  если

$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_2 - x_3, \quad y_3 = x_3.$  **3.122.**  $L = y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2,$

если  $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = -2x_2 + x_3.$  **3.123.**  $L = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2,$

если  $y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad y_2 = x_2 + x_3, \quad y_3 = x_3.$  **3.124.** Положи-

тельно определенная. **3.125.** Отрицательно определенная.

**3.126.** Не является знакоопределенной. **3.127.** Не является

знакоопределенной. **3.128.** Ни при каком  $m$  не является

отрицательно определенной; при  $m > 4$  положительно опре-

деленная. **3.129.** Ни при каком  $m$  не является знакоопреде-

ленной. **3.130.** Ни при каком  $m$  не является знакоопределен-

ной. **3.131.**  $m > 1.$  **3.132.**  $m > 0,5.$  **3.133.**  $m > 1.$  **3.134.** Таких

значений  $m$  нет. **3.135.** Таких значений  $m$  нет. **3.136.**  $m < -2.$

**3.137.** Таких значений  $m$  нет. **3.138.**  $m < -2,5.$

**Контрольные задания. Вариант 3.1.** 1. а)  $\arccos \sqrt{12/37} \approx 55^\circ$ ; б)  $\sqrt{7}$ . 2. Линейно зависимы. 3.  $b = -a_1 + 4a_2 + 3a_3$ . 4.  $(c_2; c_2; c_1), (c_3; -c_3; c_3), c_1^2 + c_2^2 \neq 0, c_3 \neq 0; A^* = \text{diag}(1; 1; 3)$ . 5.  $L = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ , если  $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3, y_2 = 2x_2 + x_3, y_3 = x_3; r(L) = 3$ ; не является знакоопределенной. 6. 15 : 11 : 9. **Вариант 3.2.** 1. а)  $\arccos(6/\sqrt{39}) \approx 16^\circ$ ; б)  $-19/2\sqrt{7}$ . 2. Линейно независимы. 3.  $b = a_1 + 2a_2 + 5a_3$ . 4.  $(-c_1; -c_1; c_1), (c_3; c_2; c_2), c_1 \neq 0, c_2^2 + c_3^2 \neq 0; A^* = \text{diag}(1; 3; 3)\square$ . 5.  $L = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ , если  $y_1 = 2x_1 + x_2 + 2x_3, y_2 = 2x_2 + x_3, y_3 = x_3; r(L) = 3$ ; не является знакоопределенной. 6. 45 : 29 : 23. **Вариант 3.3.** 1. а)  $\arccos(2/\sqrt{7}) \approx 41^\circ$ ; б)  $-9/2\sqrt{13}$ . 2. Линейно зависимы. 3.  $b = 2a_1 - 2a_2 + a_3$ . 4.  $(-c_1; -c_1; c_1), (c_3; -c_2; c_2), c_1 \neq 0, c_2^2 + c_3^2 \neq 0; c_1 \neq 0, c_2^2 + c_3^2 \neq 0; A^* = \text{diag}(3; 5; 5)$ . 5.  $L = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ , если  $y_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3, y_2 = x_2 + 2x_3, y_3 = x_3; r(L) = 3$ ; не является знакоопределенной. 6. 23 : 11 : 9. **Тест 3.** 1. 1 - б, 2 - а, 3 - з, 4 - в. 2. 12. 3. -1,5. 4. 4,7. 5. 3; 5. 6.  $\alpha = 2; \beta = -3$ . 7. 2; 4. 8.  $a = 0,4; b = -0,2$ . 9.  $a = 1,5; b = -0,5$ . 10. 0,44. 11.  $y = (2; 3)$ . 12.  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3; a = 2, b = 1$ . 13.  $a = 2; b = 3$ . 14. 1. 15. 47.

#### Глава 4

4.20.  $(-6; 0)$  и  $(10; 0)$ . 4.21.  $(8; 0)$  и  $(0; 8)$ . 4.22.  $(2; -1)$  и  $(3; 1)$ . 4.23.  $D(-3; 1)$ . 4.24.  $(0; -3), (-4; 5)$  и  $(8; 1)$ . 4.25. 26/3. 4.26.  $(2; 1)$ . 4.27. 16/3. 4.28.  $3x + y - 1 = 0$ . 4.29.  $x^2/5 + y^2 = 1$ . 4.30.  $y = x^2/4 - x + 2$ . 4.31.  $y^2 = 8(x - 2)$ . 4.32.  $x^2 + y^2 = 4$ . 4.33. 400 км. 4.34.  $y = 60x + 5; 1205$ . 4.35. Лежат. 4.36.  $y = x - 6$ . 4.37.  $y - 1 = 0; x + 4 = 0$ . 4.38.  $3x + 7y - 2 = 0$ . 4.39.  $90^\circ$ . 4.40.  $3x + 7y - 27 = 0; 7x - 3y - 5 = 0$ . 4.41. а)  $2x + 5y - 13 = 0$ ; б)  $5x - 2y + 11 = 0$ . 4.42.  $3x + 4y - 16 = 0; 5x + 3y - 1 = 0$ ;  $2x - y - 7 = 0$ . 4.43.  $3x - y + 5 = 0$ . 4.44. 49 кв. ед. 4.45.  $x/4 + y/10 = 1$  или  $5x - 2y - 20 = 0$ . 4.46.  $4x + 9y - 22 = 0; x + 5y = 0; 3x + 4y = 0$ . 4.47.  $x + 3y - 2 = 0$ . 4.48.  $11x + 22y - 74 = 0$ . 4.49.  $4x - 8y + 1 = 0$ . 4.50. а)  $AB: 5x + 4y - 7 = 0; BC: 5x - 2y - 19 = 0; AC: y - 3 = 0$ ; б)  $5x + y - 13 = 0$ ; в)  $4x - 5y - 5 = 0$ . 4.51.  $x + y - 5 = 0$  и  $x - 4y - 20 = 0$ . 4.52.  $3x - 4y + 10 = 0; 4x + 3y + 5 = 0$ . 4.53.  $5x + y - 9 = 0; x - 5y - 7 = 0$ . 4.54.  $x - y + 2 = 0; x + 2y - 4 = 0; 2x + y - 8 = 0$ . 4.55.  $AB: x + y + 1 = 0; BC: 7x - 2y - 29 = 0; AC: 2x + 3y + 1 = 0$ . 4.56.  $x - 7y + 6 = 0$

- и  $7x + y + 4 = 0$ . **4.57.**  $6x + 7y + 25 = 0$ . **4.58.**  $A(4/3; 2/3)$ ,  $B(6; 0)$ ,  $C(2; -4)$ . **4.68.**  $(1; -4/3)$ ;  $R = 5/3$ . **4.69.**  $(2; 1)$ ;  $R = 5$ . **4.70.**  $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 100$  и  $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 100$ .  
**4.71.**  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ . **4.72.**  $(x-3)^2 + y^2 = 9$ .  
**4.73.**  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$ . **4.74.**  $x + y + 8 = 0$ .  
**4.75.**  $x^2 + (y-4)^2 = 16$ . **4.76.**  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{3}$ ;  $F_1(-1; 0)$ ,  $F_2(1; 0)$ ;  $\varepsilon = 0,5$ .  
**4.77.**  $\varepsilon = 2\sqrt{2}/3$ . **4.78.**  $x^2/144 + y^2/108 = 1$ ;  $2c = 12$ .  
**4.79.**  $x^2/16 + y^2/4 = 1$ ;  $\varepsilon = \sqrt{3}/2$ ;  $z_1 = 4 - \sqrt{3}$ ,  $z_2 = 4 + \sqrt{3}$ .  
**4.80.**  $(-15/4; \pm\sqrt{63}/4)$ . **4.81.**  $\varepsilon = \sqrt{0,4}$ . **4.82.**  $x^2/36 + y^2/4 = 1$ .  
**4.83.**  $x^2/16 - y^2/9 = 1$ ;  $F_1(-5; 0)$ ,  $F_2(5; 0)$ ;  $A_1(-4; 0)$ ,  $A_2(4; 0)$ ,  $B_1(0; -3)$ ,  $B_2(0; 3)$ ;  $\varepsilon = 5/4$ ; асимптоты  $y = \pm 3x/4$ .  
**4.84.**  $x^2/2 - y^2/1 = 1$ . **4.85.**  $x^2/12 - y^2/4 = 1$ ;  $r_1 = 6\sqrt{3}$ ,  $r_2 = 2\sqrt{3}$ .  
**4.86.**  $d = b$ ;  $\varphi = 2\arctg(b/a)$ . **4.87.**  $x^2/16 - y^2/9 = 1$ .  
**4.88.**  $y + 2 = \pm\sqrt{2}x/2$ . **4.89.**  $y = 8/x$  или  $y = -8/x$ . **4.90.**  $x = 3$ ,  $y = 2$ ;  $(6; 5)$ ,  $(0; -1)$ . **4.91.**  $x - y - 4 = 0$  и  $x + y + 2 = 0$ .  
**4.92.**  $y^2 = -9x/2$ ;  $F(-9/8; 0)$ ;  $x = 9/8$ . **4.93.** а)  $y^2 = 9x$ ; б)  $x^2 = -y$ .  
**4.94.**  $y = x^2/2 - 2x + 2$ . **4.95.**  $4\sqrt{17}$ . **4.96.**  $8x + 10y - 46 = 0$ .  
**4.97.**  $(x-p/2)^2 + y^2 = p^2$ ;  $(p/2; \pm p)$ . **4.98.**  $y = -x^2/2$ ;  $y = 0,5$ .  
**4.99.**  $y^2 = px$ . **4.103.** а)  $\rho = b \sin a / \sin \varphi$ ; б)  $\rho = 2a \cos \varphi$ .  
**4.104.** а)  $\rho = a \cos \varphi$ ; б)  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ . **4.105.** а)  $x^2 + y^2 = 2ay$ ; б)  $xy = a^2$ ; в)  $x + y = 2a$ . **4.106.** а)  $x^2/25 + y^2/9 = 1$ ; б)  $x^2/16 - y^2/9 = 1$ ; в)  $y^2 = 6x$ . **4.107.**  $\rho = 1/(2 - \sqrt{3} \cos \varphi)$ .  
**4.114.** а)  $3y + z = 0$ ; б)  $x + 2z = 0$ . **4.115.**  $y + 4 = 0$ .  
**4.116.**  $x/1 + y/(-1) + z/2 = 1$  или  $2x - 2y + z - 2 = 0$ .  
**4.117.**  $3x + 2y - z - 5 = 0$ . **4.118.**  $x + 3y = 0$  и  $3x - y = 0$ .  
**4.119.**  $x - 4y + 5z + 15 = 0$ . **4.120.**  $x + y - z + 2 = 0$ .  
**4.121.**  $9x - y + 7z - 40 = 0$ . **4.122.**  $3x - 4y - 3z + 4 = 0$ .  
**4.123.**  $3x + 3y + z - 8 = 0$ . **4.124.**  $(x+1)/1 = (y-1)/(-3) = (z+3)/4$ .  
**4.125.**  $(x-2)/1 = (y+1)/4 = (z+1)/0$ .  
**4.126.**  $(x-1)/\sqrt{2} = (y+5)/1 = (z-3)/(-1)$ .  
**4.127.**  $(x-1)/(-2) = (y+3)/4 = (z-5)/5$ .  
**4.128.**  $(x-3)/5 = (y+2)/3 = (z-4)/(-7)$ . **4.129.**  $(5; -1; 0)$ .  
**4.130.**  $(-1/2; -1/2; 2)$ .

**Контрольные задания. Вариант 4.1. 1.** Парабола

$$y^2 = -4(x-3). \quad 2. \text{ а) } m_a: y-1=0; h_a: 4x+24y-58=0;$$

$$\text{б) } 13x-9y+70=0. \quad 3. (x^2+7/2)^2 + (y-7/2)^2 = 25/2.$$

$$4. 7x-5y+6z-31=0. \quad 5. (x-5)/5 = (y-2)/(-9) = (z-2)/6.$$



*Вариант 4.2.* **1.** Прямая  $14x + 4y + 3 = 0$ . **2.** а)  $m_a : 22x + 104y - 11 = 0$ ;  $h_a : 4x + 3y - 49 = 0$ ; б)  $11x + 2y - 26 = 0$ . **3. 3.4.**  $2x - 19y + 10z + 45 = 0$ . **5.**  $(x + 6)/1 = (y - 1)/(-1) = (z - 3)/0$ .

*Вариант 4.3.* **1.** Окружность  $3x^2 + 3y^2 + 32x + 4y + 60 = 0$  или  $(x + 16/3)^2 + (y + 2/3)^2 = 80/9$ . **2.** а)  $m_a : y - 3 = 0$ ;  $h_a : 7x + 24y - 58 = 0$ ; б)  $13x - 9y + 153 = 0$ . **3.**  $x^2/4 + y^2/8 = 1$ . **4.**  $11x - 2y + 12z - 13 = 0$ . **5.**  $(x - 6)/4 = (9 - 1)/(-4) = (x - 2)/5$ .

**Тест 4.** **1. 2. 2.**  $x_0 = 2$ ;  $y_0 = 1$ . **3.**  $45^\circ$ . **4.** 1; 3; 5. **5.**  $B = -7$ ,  $C = 37$ . **6. 7, 2. 7.**  $x_0 = 5$ ,  $y_0 = 4$ ;  $R = 3$ . **8.**  $d_1 = 8$ ;  $d_2 = 20$ . **9. 5. 10.**  $1 - b$ ,  $2 - a$ ,  $3 - v$ ,  $4 - z$ . **11.**  $B = -2$ ;  $C = 5$ ;  $D = 3$ . **12.**  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = -2$ ;  $z_0 = 3$ .

### Учебно-тренировочные тесты по разделу I

*Тест ЛА — 1.* **1. 2.** 5. **2. 24. 3.** 1. **4. 2. 5.**  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = x_3 = 2$ . **6.** 1; 4. **7. 1. 8. 5. 9. 2. 10.**  $-2$ . **11. 1. 12. 2. 13. 3. 14. 3. 15.**  $-6$ . **16. 5. 17. 3. 18. 3. 19. 3. 20.** 0,7. *Тест ЛА — 2.* **1. 3. 2. 6. 3. 6. 4. 1. 5.**  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 0$ . **6. 2. 7.**  $-1$ . **8. 6. 9. 3. 10.**  $-1$ . **11.**  $-2$ . **12. 3. 13. 2. 14.**  $-2$ . **15.**  $-2$ . **16. 5. 17. 4. 18. 4. 19. 1. 20. 4.** *Тест ЛА — 3.* **1. 1. 2. 2. 3. 3. 4.**  $-3$ . **5.**  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -1$ ;  $x_3 = 0$ . **6. 1; 3. 7.**  $-3$ . **8. 3; 4. 9. 2. 10. 6. 11.**  $-1$ . **12. 1. 13. 1. 14.**  $-8$ . **15.** 0,75. **16. 3. 17. 1. 18. 1. 19. 2. 20. 12.**

## Раздел II. Введение в анализ

### Глава 5

**5.16.**  $X = (1/2; 6]$ . **5.17.**  $X = (-1; 0) \cup (0; 1]$ . **5.18.**  $X = (-5; 2)$ . **5.19.**  $X = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ . **5.20.**  $X = [\pi/3 + 2\pi n; 4\pi/3 + 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **5.21.**  $X = (-\infty; +\infty)$ . **5.22.**  $Y = [-2; 2]$ . **5.23.**  $Y = [-0,5; 0,5]$ . **5.24.**  $Y = [0; 3/2]$ . **5.25.**  $y = (-\infty; \log_3 4)$ . **5.26.** Четная. **5.27.** Нечетная. **5.28.** Нечетная. **5.29.** Общего вида. **5.30.** Четная. **5.31.** Нечетная. **5.32.**  $T = \pi$ . **5.33.**  $T = 2\pi$ . **5.34.**  $T = \pi/2$ . **5.35.**  $T = 2\pi$ . **5.36.** Непериодическая. **5.37.** Непериодическая. **5.42.**  $3/(x - 1)$ . **5.43.**  $1/x$ . **5.44.**  $5(x - 1)/(x + 1)$ . **5.45.**  $-0,5 \log_3 x$ . **5.46.** 89,25 тыс. руб. **5.47.** 1,8. **5.48.** а)  $\approx 11,576$  руб.; б)  $\approx 8227$  руб.

**Контрольные задания.** *Вариант 5.1.* **1.**  $x \in (-5; 5)$ . **2.**  $x \in \{1\}$ . **3.** Четная. **4.** Общего вида. **5.**  $y \in [-2; 1]$ . **6.**  $\pi/4$ . *Вариант 5.2.* **1.**  $x \in [0; 2) \cup (2; 3)$ . **2.**  $x \in \emptyset$ . **3.** Нечетная. **4.** Общего вида. **5.**  $y \in [-10; 10]$ . **6.**  $4\pi$ . *Вариант 5.3.* **1.**  $x \in [-2; 4)$ .

2.  $x \in [-1; -\pi/5) \cup (-\pi/5; 0) \cup (0; \pi/5) \cup (\pi/5; 1)$ . 3. Общего вида. 4. Нечетная. 5.  $y \in (0; 2]$ . 6.  $\pi$ . Тест 5. 1. 1; 4. 2. 2; 3. 3. 1; 4. 4. 2; 3; 4. 5. 1; 3. 6. 1; 2; 6; 7. 7. 4. 8. 20. 9.  $72^\circ$ . 10. 2. 11. 2. 12. 10.

### Глава 6

6.15.  $\infty$ . 6.16. 0. 6.17. 1,5. 6.18. 4. 6.19.  $-1/3$ . 6.20.  $-2,5$ . 6.21.  $\infty$ . 6.22. 0,375. 6.23. 4. 6.24.  $-4,5$ . 6.25.  $28\sqrt{7}$ . 6.26. 0. 6.27. 1,5. 6.28. 0,5. 6.29.  $-6$ . 6.30.  $3\sqrt{2}/2$ . 6.31. 0. 6.32. 0. 6.33.  $-1/3$ . 6.34. 0. 6.35.  $-1$ . 6.36.  $\infty$ . 6.37. 4. 6.38. 0. 6.39.  $-3,5$ . 6.40. 0. 6.41.  $\infty$ . 6.42. 0,5. 6.43.  $-1$  при  $x \rightarrow +\infty$ ; 5 при  $x \rightarrow -\infty$ . 6.44.  $-1$ . 6.45. 320. 6.46.  $-1$ . 6.47.  $-1$ . 6.48.  $1/3$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;  $-2$  при  $x \rightarrow -\infty$ . 6.49. 3. 6.50.  $1/3$ . 6.51. 1,875. 6.52. 0,2. 6.53.  $\infty$ . 6.54. 0 при  $x \rightarrow +\infty$ ;  $+\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$ . 6.55.  $-0,5$ . 6.56.  $-0,25$ . 6.57.  $\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;  $-1,5$  при  $x \rightarrow -\infty$ . 6.58. 1. 6.59. 1. 6.60. 2. 6.61. 3. 6.62. 0,5. 6.63.  $1/6$ . 6.64. 0. 6.65. 0,5. 6.66.  $-9$ . 6.67.  $\infty$ . 6.68. 4. 6.69. 0. 6.70. 1. 6.71.  $-5$ . 6.72. 0,5. 6.73. 0. 6.74. 0. 6.75. 0. 6.76. 1,75. 6.77. 0,25. 6.78.  $2,5$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;  $\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$ . 6.79. 0,25. 6.83. 2. 6.84.  $4/3$ . 6.85. 6,4. 6.86.  $\infty$ . 6.87. 0. 6.88. 1,5. 6.89. 0,75. 6.90.  $8/7$ . 6.91.  $4/9$ . 6.92. 0,125. 6.93.  $-1/6$ . 6.94. 0,3. 6.95.  $4/9$ . 6.96. 1. 6.97.  $8/27$ . 6.98. 1,25. 6.99.  $-0,4$ . 6.100. 3,5. 6.101. 0. 6.102.  $-1$  (замена  $y = x - \pi/2$ ). 6.103. 0,5 (замена  $y = \pi - x$ ). 6.104. 8. 6.105. 1. 6.106. 2. 6.107. 8. 6.108.  $-2$ . 6.109.  $e^2$ . 6.110.  $e^4$ . 6.111.  $e^{-14}$ . 6.112. 1. 6.113.  $\infty$ . 6.114.  $e^{3,75}$ . 6.115. 1. 6.116.  $e^{-6}$ . 6.117.  $e^{3,6}$ . 6.118.  $e^{7,5}$ . 6.119.  $e^{10/7}$ . 6.120.  $e^{10}$ . 6.121. 1. 6.122.  $e^{-3}$ . 6.123.  $1/e$ . 6.124.  $-1/15$ . 6.125. 0,05. 6.126. 0,125. 6.127.  $-0,1$ . 6.128. 0. 6.129.  $\infty$ . 6.130. 0. 6.131.  $\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ ; 0 при  $x \rightarrow -\infty$ . 6.132.  $1/\sqrt{e}$ . 6.133.  $\sqrt{e}$ . 6.134.  $-1,5$ . 6.135. 0,6. 6.136.  $\infty$ . 6.137. 30. 6.138.  $\ln 5$ . 6.139. 6. 6.140.  $5/7$ . 6.141. 4,5. 6.142. 5. 6.143. 64. 6.144. 0,5. 6.145. 0,25. 6.146.  $-6$ . 6.147. 9. 6.148. 2. 6.149.  $\pm 4$ . 6.150. 2. 6.151. 8. 6.152. 0,125. 6.153. 1. 6.154. а) 9,663 млн руб.; б) 9,832 млн руб.; в) 9,892 млн руб. 6.156.  $x = 1$  — точка устранимого разрыва первого рода. 6.157. Непрерывна. 6.158.  $x = 1$  — точка разрыва первого рода. 6.159.  $x = 1$  — точка разрыва второго рода. 6.160.  $x = 1$  — точка разрыва первого рода. 6.161.  $x = 1$  — точка разрыва второго рода. 6.162.  $x = 0$  — точка устранимого разрыва первого рода. 6.163.  $x = -\pi$  — точка разрыва первого рода; в точке  $x = \pi/2$  функция непрерывна. 6.164.  $x = -2$  — точка разры-

ва первого рода. **6.165.**  $x = -2$  — точка разрыва первого рода;  $x = 2$  — точка устранимого разрыва первого рода.

**Контрольные задания.** *Вариант 6.1.* **1.** — 0,4. **2.** 1, 2. **3.** 0,5. **4.**  $e^{8/7}$ . **5.**  $1/3$ . **6.** 0,5. **7.** а) функция непрерывна; б)  $x = -1$  — разрыв первого рода неустранимый. *Вариант 6.2.* **1.** 2. **2.** —12. **3.** 0. **4.**  $e^3$ . **5.**  $1/24$ . **6.** 0,5. **7.** а) функция непрерывна; б)  $x = 1$  — разрыв первого рода неустранимый. *Вариант 6.3.* **1.** 0,5. **2.** 0. **3.**  $\infty$ . **4.**  $e$ . **5.** 8. **6.** 1. **7.** а) функция непрерывна; б)  $x = 2$  — разрыв первого рода неустранимый. **Тест 6.** **1.** 3. **2.** 2; **3.** 3. **1;** 3; **4.** 3. **5.** 2; 4; **5.** 6. 100. **7.** 1, 5. **8.** 2. **9.** 2. **10.** 0. **11.** 10. **12.** 16.

### Раздел III. Дифференциальное исчисление

#### Глава 7

$$7.26. 5. 7.27. -6x/(x^2 + 1). 7.28. 4e^{4x}. 7.29. 1/\sqrt{1+2x}.$$

$$7.30. \frac{16x(x^2 - 1)^3}{(x^2 + 1)^5}. 7.31. 32x^3 \ln^2 x. 7.32. \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$7.33. x^2 \left( 3 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right). 7.34. \frac{2e^{3x}(3x - 1)}{(x - e^{3x})^2}.$$

$$7.35. x^2 [3 \sin(\cos x) - x \sin x \cos(\cos x)]. 7.36. -\frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$7.37. \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4x}}. 7.38. \frac{e^{3x}(9x + 1) - 5}{3\sqrt[3]{x^2}}. 7.39. \frac{e^{4x}}{\sqrt[4]{(1 + e^{4x})^3}}.$$

$$7.40. \frac{4}{9x^2 - 1}. 7.41. \frac{2x^4 - 3x^2 - 1}{x(x^4 - 1)}. 7.42. 3 \left( \ln(1 - x^2) - \frac{2x^2}{1 - x^2} \right).$$

$$7.43. x^2 \ln x(3 \ln x + 2). 7.44. \frac{-4}{3\sqrt[3]{(1 - e^{4x})^2} e^{4x}}.$$

$$7.45. 5e^{2x}(xe^{2x} + 3)^4(2x + 1). 7.46. x \ln \frac{1 - x}{1 + x} + 1.$$

$$7.47. (2x + 2^x \ln 2) \cos(x^2 + 2^x). 7.48. -2e^{\sqrt{\ln x}}.$$

- 7.49.  $\frac{\sin x (\ln \cos x - 1)}{\cos^2 x}$ . 7.50.  $\frac{1 - \sin x \cdot \sin 2x}{\sin x}$ . 7.51.  $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ .  
 7.52.  $e^x (\operatorname{ctg} x + \ln \sin x)$ . 7.53.  $\frac{1}{\sin^3 x}$ . 7.54.  $\frac{8 - 3 \cos^4 x}{\cos^5 x}$ .  
 7.55.  $-\frac{1+x \operatorname{arccotg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ . 7.56.  $-\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x\right)$ . 7.57.  $\frac{x-a}{x^2+a^2}$ .  
 7.58.  $\frac{1-x}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$ . 7.59.  $\operatorname{tg}^3 x$ . 7.60.  $\frac{2e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1}$ . 7.61.  $2 \cos \ln x$ .  
 7.62.  $2e^x \sqrt{1-e^{2x}}$ . 7.63.  $\sqrt{\frac{4}{x}-1}$ . 7.64.  $\frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln^2 x}}; 0$ .  
 7.65.  $\frac{1}{\sqrt{x^2+12}}; 0, 25$ . 7.66.  $e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x); -1$ .  
 7.67.  $\frac{1}{2 \cos 2x}; 0, 5$ . 7.68.  $x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$ . 7.69.  $\frac{3}{2} x^{\sqrt{\ln x}-1} \cdot \sqrt{\ln x}$ .  
 7.70.  $-x^{-x} e^{-2x} (\ln x + 3)$ . 7.71.  $(\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right)$ .  
 7.72.  $\frac{1}{1 + \sin x}$ . 7.73.  $\frac{1}{3x^2 + 2}$ . 7.74.  $\frac{1}{2(x + 3 \sin 2x)}$ .  
 7.75.  $\frac{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{2^x(2 \ln 2 \cdot \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) \ln(1-\sqrt{x}) - 1)}$ . 7.76.  $-2$ .  
 7.77.  $-\frac{y}{x} \cdot \frac{x \ln y + y}{x + \ln x}$ . 7.78.  $\frac{\cos y - y \cos x}{\sin x + x \sin y}$ . 7.79.  $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ .  
 7.80.  $\frac{y}{x} \cdot \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$ . 7.81.  $(x+y)^2$ . 7.82.  $\frac{y}{x-y}$ . 7.83.  $\frac{y-x}{y+x}$ .  
 7.84.  $\frac{y}{x} \cdot \frac{x \ln y - y}{y \ln x - x}$ . 7.85.  $-\frac{e^x - ye^{xy}}{e^y - xe^{xy}}$ . 7.86.  $\frac{3t^2}{2}$ . 7.87.  $-1$ .  
 7.88.  $-\operatorname{tg} 3t$ . 7.89.  $-1$ . 7.90.  $6x - 8$ . 7.91.  $\frac{6x^4 - 9x^2 + 2}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ .

$$7.92. \frac{x+2}{(x+1)^2}. 7.93. 18 \cos 6x. 7.94. -\frac{4}{(2x+3)^3}.$$

$$7.95. -4\sqrt{t-t^2}. 7.96. e^x(x+n). 7.97. \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

$$7.98. (5^x + (-1)^n 5^{-x}) \ln^n 5. 7.99. \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right). 7.100. \frac{(-1)^n n! 3^n}{(3x+5)^{n+1}}.$$

$$7.101. \frac{(-1)^n}{t}. 7.107. \text{ а) } \pi/4; x-y-1=0;$$

$$\text{б) } 3\pi/4; x+y=0. 7.108. \text{ а) } x+2y-4=0; 2x-y-3=0;$$

$$\text{б) } y-2=0; x=0. 7.109. y-3x-1=0. 7.110. y-5x-3=0; y-5x+1=0. 7.111. y-x+2=0. 7.112. \text{ а) } y-4x+14=0; y-4x+6=0; \text{ б) } y-x+3=0; y-x-1=0.$$

$$7.113. \text{ а) } y+1=0; 6x+y+4=0; \text{ б) } 12x+4y+1=0; 12x-36y-49=0; \text{ в) } 4x-y-9=0; 4x+y+1=0.$$

$$7.114. \text{ а) } y+x-1=0; \text{ б) } e^{-2}y+x+1=0. 7.115. 5y-x-4=0.$$

$$7.116. 4x-y-4=0; 12x+9y+4=0. 7.117. 0,13 \text{ м/с}; 0,026 \text{ м/с}^2.$$

$$7.118. \text{ а) } 3,8; \text{ б) } 0,05; -0,01. 7.119. v_0=9; a_0=-4, h_{\max}=10,125.$$

$$7.122. \Delta y = \Delta x \left[ 3(x^2 + (x-1)\Delta x - (2x-1)) + \Delta x^2 \right]; dy = 3(x-1)^2 \Delta x$$

$$\text{при } x=2, \Delta x=0,01 \Delta y=0,030301, dy=0,03.$$

$$7.123. \Delta y = \sqrt{1+(x+\Delta x)^2} - \sqrt{1+x^2}; dy = x \Delta x / \sqrt{1+x^2}$$

$$\text{при } x=0, \Delta x=-0,01 \Delta y=0,00005, dy=0.$$

$$7.124. (49-x)dx/2\sqrt{49-x^2}. 7.125. dx/(x^2-36).$$

$$7.126. 2xdx/\sqrt{1-x^4}. 7.127. (3x^2-6x+3)dx. 7.128. (4x^3-6x)dx.$$

$$7.129. 3\sin 2x \sin 4x dx.$$

$$7.130. (80x^3-14)dx^2. 7.131. -4\cos 2x dx^2.$$

$$7.132. 4^{-x^2} \cdot 2\ln 4(2x^2 \ln 4 - 1)dx^2. 7.133. (2\cos x - x\sin x)dx^2.$$

$$7.134. 2,02. 7.135. 3,03. 7.136. 1,03e \approx 2,8. 7.137. 1+0,272/e \approx 1,1.$$

$$7.138. 0,1. 7.139. \pi/4 - 0,005 \approx 0,78. 7.140. 5\%. 7.141. 15,5\%.$$

$$7.148. \text{ а) } z(0)=6 \text{ (ед/мес.)}, z'(0)=-7 \text{ (ед/мес.}^2\text{)}, T_z(0)=$$

$$=-1,167 \text{ ед/мес.}; \text{ б) } z'(12)=66 \text{ (ед/мес.}^2\text{)}, z'(12)=17 \text{ (ед/мес.}^2\text{)}, T_z(12)=0,258 \text{ (ед/мес.)}. 7.149. 9; 7 \text{ ден. ед. } 7.150. x=4;$$

$$E_1=1, E_2=0. 7.151. -0,31. 7.152. \text{ а) } -1,5; \text{ б) } -0,75; \text{ в) } -0,5; -6.$$

**7.153.** а) (3; 6); б) (100; 225); в)  $(60\sqrt{3/5}; 60)$ . **7.154.** а) 95; 90; б) 70; 40. **7.155.**  $y'(20) = -0,1$ . **7.156.** 2,06. **7.157.**  $-0,23$ . **7.158.** 0,75. **7.159.** 1,2. **7.160.** а) 3 ден. ед.; б)  $E_p(q) = -0,75$ ;  $E_p(s) = 0,75$ ; в)  $+1,25\%$ . **7.161.** а) 5; б)  $\approx -0,7$ ; 0,8; в)  $\approx -3,5\%$ . **7.163.** а) 0,398; б) 0,602. **7.164.** а) 0,62; б) 1,62.

**Контрольные задания. Вариант 7.1.** **1.** а)  $3\ln(\sqrt{1+4x^2} + 2x) + \frac{2(3x-1)}{\sqrt{1+4x^2}}$ ; б)  $\frac{2}{1+x^2}$ . **3.**  $e^{4t}$ . **4.**  $\frac{(-1)^n \cdot n! 2^n}{(2x-3)^{n+1}}$ . **5.**  $\Delta y = 0,007001$ ;  $dy = 0,007$ . **6.** а) 2,02; б) 1,015. **7.** 1,5%. **8.**  $y - x - 1 = 0$ ;  $y - x - 5 = 0$ . **9.** (10; 20). **Вариант 7.2.** **1.** а)  $5\ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) - \frac{3(5x-4)}{\sqrt{1+9x^2}}$ ; б)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . **3.**  $-e^{-4t}$ . **4.**  $\frac{n! 3^n}{(1-3x)^{n+1}}$ . **5.**  $\Delta y = 0,018004$ ;  $dy = 0,018$ . **6.** а) 2,99; б)  $-0,01$ . **7.** 2,25%. **8.**  $y - 2x - 13 = 0$ ,  $y - 2x - 5 = 0$ . **9.** (5; 10). **Вариант 7.3.** **1.** а)  $-\ln(\sqrt{1+25x^2} + 5x) + \frac{5(2-x)}{\sqrt{1+25x^2}}$ ; б)  $-\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ . **3.**  $-e^{-6t}$ . **4.**  $\frac{(-1)^n n! 5^n}{(5x+2)^{n+1}}$ . **5.**  $\Delta y = 0,0015009$ ;  $dy = 0,015$ . **6.** а) 2,001; б)  $-0,01$ . **7.** 0,75%. **8.**  $y + 3x - 4 = 0$ . **9.** (10; 20). **Тест 7.** **1.** 2; 3. **2.** 1, 3, 5. **3.** 0. **4.** 1 - б, 2 - в, 3 - а. **5.** 2. **6.** 0. **7.** 0,3. **8.** 1,25. **9.**  $-0,05$ . **10.** 0,05. **11.**  $-2$ ; 9. **12.** 1. **13.** 2. **14.** 90;  $-100$ . **15.** 5625.

## Глава 8

**8.20.** Не противоречит, так как  $y(0)$  не существует. **8.21.** На промежутке  $(0; 1)$  можно. **8.22.** Теорема Лагранжа может быть применена. **8.23.**  $a = 2$ . **8.24.** Не может. **8.31.** 0. **8.32.** 1. **8.33.** 3.2. **8.34.** 1. **8.35.** 0. **8.36.** 2,5. **8.37.**  $-\infty$ . **8.38.**  $\infty$ . **8.39.**  $\sqrt{2}$ . **8.40.** 1. **8.41.**  $-\sqrt{3}/2(3\ln 3 - 1)$ . **8.42.** 2. **8.43.** 1. **8.44.** 1. **8.45.** 1. **8.46.**  $\infty$ . **8.47.** 1. **8.48.**  $-1/\pi$ . **8.49.** 1. **8.50.**  $\infty$ . **8.57.**  $y_{\min}(-2) = -8/3$ ;  $y_{\min}(1) = -13/12$ ;  $y_{\max}(0) = 0$ ; функция возрастает на  $(-2; 0)$  и  $(1; +\infty)$ , убывает на  $(-\infty; -2)$  и  $(0; 1)$ . **8.58.**  $y_{\min}(e) = e$ ; функция возрастает на  $(e; +\infty)$ , убывает на  $(0; 1)$  и  $(1; e)$ . **8.59.**  $y_{\max}(3/2) = 4e^{-3/4}$ ; функция возрастает на

- $(-\infty; 3/2)$ , убывает на  $(3/2; +\infty)$ . **8.60.**  $y_{\min}(-3/2) = -27/20$ ; функция возрастает на  $(-3/2; 1)$  и  $(-1; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; -3/2)$ .
- 8.61.**  $y_{\min}(3/4) = -27/256$ ; функция возрастает на  $(3/4; +\infty)$ , убывает на  $(-\infty; 3/4)$ . **8.62.** Функция возрастает на всей числовой оси; экстремумов нет. **8.63.**  $y_{\min}(-1/2) = 2/e$ ; функция возрастает на  $(-1/2; +\infty)$ , убывает на  $(-\infty; -1)$  и  $(-1; -1/2)$ . **8.64.**  $y_{\min}(1/2) = -1,25e^{-2/5}$ ,  $y_{\max}(2) = 5e^{-8/5}$ ; функция возрастает на  $(1/2; 2)$ , убывает на  $(-\infty; 1/2)$  и  $(2; +\infty)$ .
- 8.65.**  $y_{\min}(-1) = -e^{-3/2}$ ;  $y_{\max}(1) = e^{3/2}$ ; функция возрастает на  $(-1; 1)$ , убывает на  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$ .
- 8.66.**  $y_{\min}(-1/3) = \sqrt{1-1/(3e)}$ ; функция возрастает на  $(-1/3; +\infty)$ , убывает на  $(-\infty; -1/3)$ . **8.67.** Экстремумов нет; функция убывает на  $(-\infty; 0)$  и возрастает на  $(4; +\infty)$ . **8.68.**  $y_{\min}(e^2) = -e^2$ ; функция возрастает на  $(e^2; +\infty)$ , убывает на  $(0; e^2)$ .
- 8.69.**  $y_{\max}(2\pi n) = \ln 3$ ; функция возрастает на  $(-2\pi/3 + 2\pi n; 2\pi n)$ , убывает на  $(2\pi n; 2\pi/3 + 2\pi n)$ . **8.70.**  $y_{\max}(e) = \arctg(1/e)$ ; функция возрастает на  $(0; e)$ , убывает на  $(e; +\infty)$ .
- 8.71.**  $y_{\min}(1/\sqrt{e}) = -1/e$ ; функция возрастает на  $((1/\sqrt{e}); +\infty)$ , убывает на  $(0; 1/\sqrt{e})$ . **8.72.**  $y_{\min}(\sqrt{e}) = 2e$ ; функция возрастает на  $(e; +\infty)$ , убывает на  $(0; e)$ . **8.73.**  $y_{\max}(1) = 1/2$ ; функция возрастает на  $(0; 1)$ , убывает на  $(1; +\infty)$ .
- 8.74.**  $y_{\min}(e^{2\pi n}) = -1$ ;  $y_{\max}(e^{2\pi n+\pi}) = 1$ ; функция возрастает на  $(e^{2\pi n}; e^{2\pi n+\pi})$ , убывает на  $(e^{2\pi n-\pi}; e^{2\pi n})$ .
- 8.75.**  $y_{\max}(e^2) = 1/4$ ; функция возрастает на  $(1; e^2)$ , убывает на  $(0; 1)$  и  $(e^2; +\infty)$ . **8.76.**  $y_{\min}(2\pi n) = 2$ ; функция возрастает на  $(-\pi/6 + \pi n; \pi n)$ , убывает на  $(\pi n; \pi/6 + \pi n)$ .
- 8.77.**  $f_{\text{наим}}(-1) = f_{\text{наим}}(2) = 4$ ;  $f_{\text{наиб}}(4) = 16$ .
- 8.78.**  $f_{\text{наим}}(1/e) = -1/e$ ;  $f_{\text{наиб}}(1) = 0$ .
- 8.79.**  $f_{\text{наим}}(0) = 0$ ;  $f_{\text{наиб}}(1) = 1/3$ .
- 8.80.**  $f_{\text{наим}}(\pi/4) = 3/\sqrt{2}$ ;  $f_{\text{наиб}}(\pi/12) = 3\sin(\pi/12) + 4\cos^2(\pi/12)$ .
- 8.81.**  $f_{\text{наим}}(-1) = 0$ ;  $f_{\text{наиб}}(0) = 1$ .
- 8.82.**  $f_{\text{наим}}(-1) = -1$ ;  $f_{\text{наиб}}(0) = -1/2$ .
- 8.83.**  $f_{\text{наим}}(\pi/4) = 2$ ;  $f_{\text{наиб}}(0, 5\arctg(2/3)) = \sqrt{13}$ .
- 8.84.**  $f_{\text{наим}}(-\sqrt[4]{1/3}) = -\sqrt[4]{27}/2$ ;  $f_{\text{наиб}}(1/2) = 16/17$ .

- 8.85.**  $f_{\text{наим}}(0) = 0$ ;  $f_{\text{наиб}}(1) = f_{\text{наиб}}(-1) = 3$ .
- 8.86.**  $f_{\text{наим}}$  не существует;  $f_{\text{наиб}}(1) = 1, 2$ . **8.87.**  $f_{\text{наим}}(0) = 2$ ;  $f_{\text{наиб}}$  не существует. **8.88.**  $f_{\text{наим}}(0) = 0$ ;  $f_{\text{наиб}}$  не существует.
- 8.89.**  $f_{\text{наим}}(1/2) = 3/5$ ;  $f_{\text{наиб}}$  не существует. **8.90.** Не существует ни наибольшего, ни наименьшего значений.
- 8.91.**  $(2; 2; 1)$ ;  $V = 4$ . **8.92.**  $(\sqrt{2}\sqrt[4]{V}, \sqrt{2}\sqrt[4]{V}, \sqrt{V}/2)$ .
- 8.93.**  $R = \frac{\sqrt{3}(2+\pi)}{18\pi + \sqrt{3}(2+\pi)^2} p$ ;  $a = \frac{6\pi}{18\pi + \sqrt{3}(2+\pi)^2} p$ .
- 8.94.**  $S = ah/4$ . **8.98.**  $(0; 0)$  и  $(\pm\sqrt{3}/2; \pm 7\sqrt{3}/8\sqrt{2})$  — точки перегиба; функция выпукла вверх на  $(-\infty; \sqrt{3}/2)$  и  $(0; \sqrt{3}/2)$ , выпукла вниз на  $(-\sqrt{6}; 0)$  и  $(\sqrt{6}; +\infty)$ . **8.99.**  $(0; 0)$  — точка перегиба; функция выпукла вверх на  $(0; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; 0)$ . **8.100.**  $(0; 0)$  и  $(2; 0)$  — точки перегиба; функция выпукла вверх на  $(-\infty; 0)$  и  $(2; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(0; 2)$ . **8.101.**  $(1; 0)$  и  $(0; 1)$  — точки перегиба; функция выпукла вверх на  $(-1; 0)$  и  $(1; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$ . **8.102.**  $(1; \pi/2)$  — точка перегиба; функция выпукла вверх на  $(1; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; 1)$ . **8.103.**  $(0; 0)$ ;  $(\pm 1; \pm 1/\sqrt{e})$ ;  $(\pm\sqrt{6}; \pm 6\sqrt{6}e^{-3})$  — точки перегиба, функция выпукла вверх на  $(-\infty; \sqrt{6})$ ;  $(-1; 0)$ ;  $(1; \sqrt{6})$ , выпукла вниз на  $(-\sqrt{6}; -1)$ ;  $(0; 1)$ ;  $(\sqrt{6}; +\infty)$ . **8.104.**  $(e^{5/6}; 5/(6e^{5/3}))$  — точка перегиба; функция выпукла вверх на  $(0; e^{5/6})$ , выпукла вниз на  $(e^{5/6}; +\infty)$ . **8.105.** Точек перегиба нет; функция выпукла вверх на  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ . **8.106.**  $(e^{-5/6}; -5/6e^{-5/2} + 1)$  — точка перегиба; функция выпукла вверх на  $(0; e^{-5/6})$  выпукла вниз на  $(e^{-5/6}; +\infty)$ . **8.107.**  $(-\sqrt{2}; 2/\sqrt{3})$  и  $(\sqrt{2}; 2/\sqrt{3})$  — точки перегиба; функция выпукла вверх на  $(-\infty; -\sqrt{2})$  и  $(\sqrt{2}; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ . **8.108.**  $(1; 49/36)$  и  $(1; 44/9 - (8/3)\ln 2)$  — точки перегиба; функция выпукла вверх на  $(1; 2)$ , выпукла вниз на  $(0; 1)$  и  $(2; +\infty)$ . **8.109.**  $(-3; 1)$  — точка перегиба; функция выпукла вверх на  $(-\infty; -3)$ , выпукла вниз на  $(-3; -2)$  и  $(-2; +\infty)$ . **8.116.**  $x = 2$ ,  $y = 1/3$ . **8.117.**  $y = x$  — правосторонняя,  $y = 2/3$  — левосторонняя асимптоты.



**8.118.**  $x = 0$  — вертикальная,  $y = 0$  — правосторонняя горизонтальная асимптоты. **8.119.**  $y = 0$  — двусторонняя асимптота. **8.120.**  $x = \pm\sqrt{\pi}/2$ . **8.121.** Асимптоты отсутствуют. **8.122.**  $x = 0$  — вертикальная,  $y = 0$  — правосторонняя горизонтальная асимптоты. **8.123.**  $y = 0$  — двусторонняя асимптота. **8.124.** Функция нечетная,  $y = 0$  — двусторонняя горизонтальная асимптота;  $y_{\max}(1) = 1$ ,  $y_{\min}(-1) = -1$ . Функция возрастает на  $(-1; 1)$ , убывает на  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$ ;  $(0; 0)$ ,  $(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3}/2)$  — точки перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-\infty; -\sqrt{3})$  и  $(0; \sqrt{3})$ , выпукла вниз на  $(-\sqrt{3}; 0)$  и  $(\sqrt{3}; +\infty)$ ;  $(0; 0)$  — точка пересечения графика с осями координат. **8.125.** Асимптот нет.  $y_{\max}(2) = 16$ ,  $y_{\min}(0) = 0$ ,  $y_{\min}(4) = 0$ . Функция возрастает на  $(0; 2)$  и  $(4; +\infty)$ , убывает на  $(-\infty; 0)$  и  $(2; 4)$ ;  $(2 \pm 2\sqrt{3}/3; 64/9)$  — точки перегиба. Функция выпукла вверх на  $(2 - 2\sqrt{3}/3; 2 + 2\sqrt{3}/3)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; -2\sqrt{3}/3)$  и  $(2 + 2\sqrt{3}/3; +\infty)$ ;  $(0; 0)$  и  $(4; 0)$  — точки пересечения графика с осями координат. **8.126.**  $x = -\sqrt[3]{2}$  — вертикальная асимптота;  $y = 0$  — двусторонняя горизонтальная асимптота;  $y_{\max}(1) = 2/3$ . Функция возрастает на  $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$  и  $(-\sqrt[3]{2}; 1)$ , убывает на  $(1; +\infty)$ ;  $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}/3)$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$ , выпукла вниз на  $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$  и  $(\sqrt[3]{4}; +\infty)$ ;  $(0; 0)$  — точка пересечения графика с осями координат. **8.127.**  $y = 0$  — правосторонняя горизонтальная асимптота;  $y_{\max}(0) = 1$ . Функция возрастает на  $(-\infty; 0)$ , убывает на  $(0; +\infty)$ ;  $(1; 2e)$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-\infty; 1)$ , выпукла вниз на  $(1; +\infty)$ ;  $(-1; 0)$  и  $(0; 1)$  — точки пересечения графика с осями координат. **8.128.** Функция нечетная;  $y = 0$  — двусторонняя горизонтальная асимптота;  $y_{\max}(1) = 1/\sqrt{e}$ ;  $y_{\min}(-1) = -1/\sqrt{e}$ . Функция возрастает на  $(-1; 1)$ , убывает на  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$ ;  $(0; 0)$ ,  $(\pm\sqrt{3}; \pm 3y^{-3/2})$  — точки перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-\infty; -\sqrt{3})$  и  $(0; \sqrt{3})$ , выпукла вниз на  $(-\sqrt{3}; 0)$  и  $(\sqrt{3}; +\infty)$ ;  $(0; 0)$  — точка пересечения графика с осями координат. **8.129.** Функция определена на  $(0; +\infty)$ ;  $y = 0$  — правосторонняя горизонтальная асимптота;  $y_{\max}(e) = 1/e$ .

Функция возрастает на  $(0; e)$ , убывает на  $(e; +\infty)$ ;  $(e^{3/2}; (3/2)e^{-3/2})$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-\infty; -3)$  и  $(0; 3)$ , выпукла вниз на  $(-3; 0)$  и  $(3; +\infty)$ ;  $(0; 0)$  — точка пересечения графика с осями координат.

**8.130.** Функция нечетная;  $y = 1$  — правосторонняя горизонтальная асимптота;  $y = -1$  — левосторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет, функция возрастает на всей числовой оси;  $(0; 0)$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(0; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; 0)$ ;  $(0; 0)$  — точка пересечения графика с осями координат.

**8.131.** Функция определена на  $(0; +\infty)$ ;  $x = 0$  — правосторонняя вертикальная асимптота. Экстремумов нет, функция убывает на  $(0; +\infty)$ ;  $(\sqrt[3]{e}; \sqrt[3]{2/3})$  и  $(e; 0)$  — точки перегиба. Функция выпукла вверх на  $(\sqrt[3]{e}; e)$ , выпукла вниз на  $(0; \sqrt[3]{e})$  и  $(e; +\infty)$ ;  $(e; 0)$  — точка пересечения графика с осью абсцисс. **8.132.**  $x = 0$  — правосторонняя вертикальная асимптота;  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ ;  $y = 1$  — двусторон-

няя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция убывает на  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ ;  $(-1/2; e^2)$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-\infty; -1/2)$ , выпукла вниз на  $(-1/2; 0)$  и  $(0; +\infty)$ . **8.133.**  $x = 0$  — правосторонняя вертикальная асимптота;  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ ;  $y = x$  — двусторонняя асимптота;  $y_{\min}(1) = e$ .

Функция возрастает на  $(-\infty; 0)$  и  $(1; +\infty)$ , убывает на  $(0; 1)$ . Функция выпукла вверх на  $(-\infty; 0)$ , выпукла вниз на  $(0; +\infty)$ .

**8.134.**  $x = 0$  — вертикальная асимптота;  $y = 1$  — левосторонняя,  $y = 0$  — правосторонняя горизонтальная асимптоты. Экстремумов нет. Функция возрастает на  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ .

Точек перегиба нет. Функция выпукла вверх на  $(0; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; 0)$ . **8.135.**  $y_{\max}(\pi/6 + 2\pi n) = y_{\max}(5\pi/6 + 2\pi n) = 5/4$ ;  $y_{\min}(-\pi/2 + 2\pi n) = -1$ ;  $y_{\min}(\pi/2 + 2\pi n) = 1$ . Функция возрастает на  $(-\pi/2 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n)$  и  $(\pi/2 + 2\pi n; 5\pi/6 + 2\pi n)$ ; убывает на  $(\pi/6 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n)$ ;  $X = \pi n + (-1)^n \arcsin((1 + \sqrt{33})/8)$  — точки перегиба.

**8.136.** Функция возрастает на всей числовой оси.  $(0; 0)$  — точка перегиба. **8.137.** Функция возрастает на всей числовой оси;  $(0; 0)$  — точка перегиба. **8.138.**  $y_{\max}(5\pi/4 + 2\pi n) = -2$ ;

$y_{\min}(\pi/4 + 2\pi n) = 1/2$ . Функция возрастает на  $(\pi/4 + 2\pi n; 3\pi/4 + 2\pi n)$  и  $(3\pi/4 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n)$ ; убывает на  $(-3\pi/4 + 2\pi n; -\pi/4 + 2\pi n)$  и  $(-3\pi/4 + 2\pi n; \pi/4 + 2\pi n)$ . Функция выпукла вверх на  $(-3\pi/4 + 2\pi n; \pi/4 + 2\pi n)$  и  $(-\pi/4 + 2\pi n; \pi/4 + 2\pi n)$ ,

выпукла вниз на  $(\pi/4 + 2\pi n; 3\pi/4 + 2\pi n)$  и  $(3\pi/4 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n)$ . **8.139.** Функция четная;  $y = 0$  — двусторонняя горизонтальная асимптота;  $y_{\max}(0) = 2$ . Функция возрастает на  $(-\infty; 0)$ , убывает на  $(0; +\infty)$ ;  $(\pm 1; \sqrt{2})$  — точки перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-1; 1)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$ ;  $(0; 2)$  — точка пересечения графика с осью ординат. **8.140.** Функция нечетная;  $x = \pm 1$  — вертикальные асимптоты;  $y = 0$  — двусторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция убывает на  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 1)$  и  $(1; +\infty)$ ;  $(0; 0)$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$ , выпукла вниз на  $(-1; 0)$  и  $(1; +\infty)$ ;  $(0; 0)$  — точка пересечения графика с осями координат. **8.144.** 30. **8.145.** 2. **8.146.** 196. **8.147.**  $\ln 216$ . **8.148.** 90. **8.149.** 0. **8.150.**  $76(\ln 1520 - 1)$ . **8.151.** 4. **8.152.** 4. **8.153.** 4. **8.154.** 5. **8.155.**  $p = 1$ . **8.156.**  $p = 1 - p_0$ . **8.157.** На 5 ед. Средние издержки увеличатся на  $125/14$ . **8.158.** 1000. **8.159.**  $[2; +\infty)$ . **8.160.** 1 млн руб. **8.161.**  $p_0/2$ . **8.162.** 400. **8.163.** 245. **8.164.** 625. **8.165.**  $33^{1/3}$ . **8.166.**  $p > 1/4$ .

**Контрольные задания. Вариант 8.1. 1.**  $4/(1 + 8 \ln 6, 75)$ . **2. 1. 3.** Функция четная;  $x = 0$  — вертикальная асимптота,  $y = 0$  — двусторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция возрастает на  $(-\infty; 0)$  и убывает на  $(0; +\infty)$ . Точек перегиба нет; функция выпукла вниз на  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ . **4.**  $y = \sqrt[3]{2}(x-1)$  — двусторонняя асимптота;  $y_{\max}(0) = 0$ ;  $y_{\min}(-1) = -2$ . Функция возрастает на  $(-\infty; 0)$  и  $(2; +\infty)$ ;  $(3; 0)$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(3; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; 3)$ ;  $(3; 0)$  и  $(0; 0)$  — точки пересечения графика с осями координат. **5. 37. Вариант 8.2. 1. -6. 2. e. 3.** Функция нечетная,  $x = 0$  — вертикальная асимптота,  $y = 0$  — двусторонняя горизонтальная асимптота. Экстремумов нет. Функция убывает на  $(-\infty; 0)$  и на  $(0; +\infty)$ . Точек перегиба нет, функция выпукла вверх на  $(-\infty; 0)$ , выпукла вниз на  $(0; +\infty)$ . **4.**  $y = x - 1$  — двусторонняя асимптота;  $y_{\max}(-2) = \sqrt[3]{4}$ ;  $y_{\min}(0) = 0$ . Функция возрастает на  $(-3; -2)$  и  $(0; +\infty)$ ;  $(-3; 0)$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-\infty; 0)$ , выпукла вниз на  $(-3; +\infty)$ .  $(-3; 0)$  и  $(0; 0)$  — точки пересечения графика с осями координат. **5. 28. Вариант 8.3. 1. 0. 2. e. 3.**  $x = 0$  — правосторонняя вертикальная асимптота,  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ ;  $y = 0$  — двусторонняя горизонтальная асимптота.

тота;  $y_{\max}(-1/2) = 4/e^2$ . Функция возрастает на  $(-\infty; -1/2)$  и убывает на  $(-1/2; 0)$  и  $(0; +\infty)$ ;  $x = -1/2 \pm \sqrt{3}/6$  — точки перегиба. Функция выпукла вверх на  $(-1/2 - \sqrt{3}/6; -1/2 + \sqrt{3}/6)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; -1/2 - \sqrt{3}/6)$ ,  $(-1/2 + \sqrt{3}/6)$  и  $(0; +\infty)$ .  
**4.**  $y = 2x - 1$  — двусторонняя асимптота;  $y_{\max}(0) = 0$ ,  $y_{\min}(1) = -\sqrt[3]{4}$ . Функция возрастает на  $(-\infty; 0)$  и  $(1; +\infty)$ ;  $(3/2; 0)$  — точка перегиба. Функция выпукла вверх на  $(3/2; +\infty)$ , выпукла вниз на  $(-\infty; 3/2)$ ;  $(3/2; 0)$  и  $(0; 0)$  — точки пересечения графика с осями координат. **5.** 156. **Тест 8.** **1.** 3. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 2. **8.** 3. **9.** 3. **10.** 2. **11.** 2. **12.**  $f_{\text{наиб}}(2) = 12$ ;  $f_{\text{наим}}(1) = f_{\text{наим}}(0) = 0$ . **13.**  $a = 20$ ;  $b = 30$ . **14.** 1. **15.**  $p = 2,7$ .

### Учебно-тренировочные тесты по разделам II, III

*Тест МА-1.1.* **1.** 5. **2.** -3. **3.** 2. **4.** 1; 3. **5.**  $b$ . **6.** 1; 2; 6. **7.** 2; 3. **8.** 1; 4. **9.** 1. **10.** 2; 3. **11.** 1,75. **12.** -0,2. **13.** 3. **14.** 1. **15.**  $x_{\text{наим}} = 2$ ;  $y_{\text{наим}} = -1$ ;  $x_{\text{наиб}} = y_{\text{наиб}} = 0$ . **16.** 2. **17.** 0,6. **18.**  $a$ .  
**19.** 4. **20.** 3. *Тест МА-1.2.* **1.** 8. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 4; 6. **5.**  $f$ . **6.** 1; 4; 6. **7.** 2; 3; 4. **8.** 1. **9.** 4. **10.** 1; 3. **11.** 2. **12.** 45. **13.** 0. **14.** -3. **15.**  $x_{\text{наим}} = 1$ ;  $y_{\text{наим}} = 0$ ;  $x_{\text{наиб}}$  и  $y_{\text{наиб}}$  не существуют. **16.** 1; 3.  
**17.** 3. **18.**  $f$ . **19.** 3. **20.** 2. *Тест МА-1.3.* **1.** 2. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 2; 5. **5.**  $f$ . **6.** 1; 3; 4. **6.7.** 2; 4. **8.** 2; 4. **9.** 5. **10.** 1; 4. **11.** 1. **12.** 1,5. **13.** 0,2. **14.** 0. **15.**  $x_{\text{наим}} = 3$ ;  $y_{\text{наим}} = 0$ ;  $x_{\text{наиб}} = 1$ ;  $y_{\text{наиб}} = 4$ . **16.** 3.  
**17.** 1. **18.**  $h$ . **19.** 1. **20.** 4.

### Раздел IV. Функции нескольких переменных

#### Глава 9

**9.19.** Вся плоскость, кроме  $(0; 0)$ . **9.20.**  $y \neq -x^{2/3}$ .  
**9.21.**  $y \geq x^2 - 1$ . **9.22.**  $R^2$ . **9.23.** Полуплоскость над биссектрисой 2-го и 4-го координатного углов, не включая прямую.  
**9.24.** Вся плоскость, кроме  $(0; 0)$ . **9.25.** Квадрат с вершинами  $(1; 1)$ ,  $(1; -1)$ ,  $(-1; -1)$ ,  $(-1; 1)$ . **9.26.** Квадрат с вершинами  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(0; -1)$ , не включая сторону между вершинами  $(0; -1)$  и  $(1; 0)$ . **9.27.**  $y = \sqrt[3]{C/x}$ .  
**9.28.**  $y = e^{C/x} - x^2$ . **9.29.**  $y = \ln C - x (C > 0)$ . **9.30.**  $y = x^2 + C^2$ .  
**9.31.**  $y = 1/(2C) - x/2$ . **9.32.**  $y = (C+1)x^2$ . **9.33.**  $y = \arctg C + \pi n - x$ . **9.34.** 0. **9.35.** Не существует. **9.36.** 1. **9.37.** 0.  
**9.38.** Не существует. **9.39.** Не существует.

- 9.44.  $z'_x = e^{x-y}(2x+1)$ ;  $z'_y = e^{x-y}(1-2x)$ .  
 9.45.  $z'_x = \cos(x + \sqrt{y})$ ;  $z'_y = 1/(2\sqrt{y}) \cdot \cos(x + \sqrt{y})$ .  
 9.46.  $z'_x = e^y + x^y y / x$ ;  $z'_y = x e^y + x^y \ln x$ .  
 9.47.  $z'_x = 1/[2(x^2 + y^2)]$ ;  $z'_y = y/(x + y^2)$ .  
 9.48.  $z'_x = 1/[2(x + \sqrt{y})]$ ;  $z'_y = 1/[2(\sqrt{xy} + y)]$ .  
 9.49.  $z'_x = x^{\sqrt{y}} \sqrt{y} / x$ ;  $z'_y = x^{\sqrt{y}} \ln y / (4\sqrt{y})$ .  
 9.50.  $z'_x = -y/(2x^2 + 2xy + y^2)$ ;  $z'_y = x/(2x^2 + 2xy + y^2)$ .  
 9.51.  $z'_x = y(1 + xy)e^{xy}$ ;  $z'_y = x(1 + xy)e^{xy}$ .  
 9.52.  $z'_x = -(\cos y^2)/x^2$ ;  $z'_y = -(2y \sin y^2)/x$ .  
 9.53.  $z'_x = -2y/\sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $z'_y = -x/(x^2 + y^2)$ .  
 9.54.  $dz = e^{xy}[(xy + y^2 + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy]$ .  
 9.55.  $dz = (e^x dx + 2y dy)/(1 + e^x + y^2)$ .  
 9.56.  $dz = [(y + 2\sqrt{xy} - x)dx + (y - 2\sqrt{xy} - x)dy]/(x + y)^2$ .  
 9.57.  $dz = y^{-2} \cos(x/y)(y dx - x dy)$ .  
 9.58.  $dz = (\arcsin y)/y \cdot dx + x/y^2(y/\sqrt{1-y^2} - \arcsin y)dy$ .  
 9.59.  $dz = (x^y y/x + y^x \ln y)dx + (y^x x/y + x^y \ln x)dy$ .  
 9.60.  $z'_l = 6x^3 - y/2 - x\sqrt{3}/2 + 3\sqrt{3}y^2/2$ . 9.61.  $z'_l = (1 + 2y)/\sqrt{2}$ . 9.62. 125. 9.63.  $-3/\sqrt{5}$ . 9.64.  $\nabla z = (-2; 4)$ ;  $|\nabla z| = 2\sqrt{5}$ .  
 9.65.  $\nabla z = (-6; 6)$ ;  $|\nabla z| = 6\sqrt{2}$ . 9.66.  $\nabla z = (-1; 0)$ ;  $|\nabla z| = 1$ .  
 9.67.  $\nabla z = (-1; 1)$ ;  $|\nabla z| = \sqrt{2}$ . 9.68.  $\nabla z = (-1; -\sqrt{2}\pi)$ ;  $|\nabla z| = 2\pi + 1$ .  
 9.75.  $z_{\min}(1; 2) = -7$ . 9.76.  $z_{\max}(1/3; 1/3) = 1/27$ .  
 9.77.  $z_{\max}(1; 2/3) = 4/27$ . 9.78.  $z_{\min}(1/\sqrt[3]{3}; 1/\sqrt[3]{3}) = 3\sqrt[3]{3}$ .  
 9.79.  $z_{\max}(\pi/3; \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$ . 9.80.  $z_{\min}(0; 0) = 0$ . 9.81. Экстремумов нет. 9.82.  $z_{\min}(0; -2) = -2/e$ . 9.83.  $z_{\min}(1; 3) = 10 - 18\ln 3$ . 9.84.  $z_{\max}(0; 0) = 2$ . 9.85.  $z_{\min}(0; 0) = 0$ ;  $z_{\max}(1; 0) = 2/e$ ;  $z_{\max}(0; 1) = 1/e$ . 9.86.  $z_{\max}(x = y \neq 0) = 1/2$ ;  $z_{\min}(x = -y \neq 0) = -1/2$ . 9.87. Экстремумов нет. 9.88.  $z_{\max}(1/64; 1/256) = 1/128$ . 9.89.  $z_{\text{наим}}(0; 1) = 4$ ;  $z_{\text{наиб}}(1; 0) = 6$ .  
 9.90.  $z_{\text{наим}}(-1; 0) = -1$ ;  $z_{\text{наиб}}(1; 0) = z_{\text{наиб}}(0; 1) = 1$ .  
 9.91.  $z_{\text{наим}}(2 - 1/\sqrt{2}; 2 - 1/\sqrt{2}) = \ln(4 - \sqrt{2})$ ;  $z_{\text{наиб}}(2 + 1/\sqrt{2}; 2 +$

- $+1/\sqrt{2}) = \ln(4 + \sqrt{2})$ . **9.92.** Куб с длиной ребра  $a/12$ .
- 9.93.**  $z_{\min}(1;1) = 2$ . **9.94.**  $z_{\min}(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ ;  $z_{\max}(1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ . **9.95.**  $z_{\min}(4;0) = 0$ ;  $z_{\max}(4/3; 4/3) = 64/27$ .
- 9.96.**  $z_{\min}(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}) = -1 - 2\sqrt{2}$ ;  $z_{\max}(1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$ . **9.97.**  $z_{\min}$  не существует;  $z_{\max}(150/197; 3880/197) = \sqrt[4]{150/195} \sqrt[3]{3880/197}$ . **9.98.**  $h = 2$ ;  $R = 1$ . **9.99.**  $(2R/\sqrt{3}; 2R/\sqrt{3}; R/\sqrt{3})$ . **9.100.**  $x = y = z = \sqrt[4]{V} + 2d$ . **9.104.**  $y = -31x + 285$ . **9.105.**  $y = -4,7x + 25,2$ . **9.106.**  $y = 0,18x + 12,6$ .
- 9.107.**  $y = 2,62 - 1,04$ ;  $S_{\text{лин}} = 0,027$ ;  $S_{\text{альт}} = 0,1$ .
- 9.108.**  $y = 0,3x + 0,76$ ;  $S_{\text{лин}} = 0,012$ ;  $S_{\text{альт}} = 0,0025$ .
- 9.109.**  $y = -0,17x + 0,622$ ;  $S_{\text{лин}} = 0,007$ ;  $S_{\text{альт}} = 0,0029$ .
- 9.110.**  $y = 0,0967x + 0,01x^2$ . **9.111.**  $a = 0,8856$ ;  $b = -0,87186$ .
- 9.112.**  $a = 0,08$ ;  $b = 0,00596$ . **9.116.**  $x = 225 \cdot 450^2$ ;  $y = 18^3 \cdot 10^6$ .
- 9.117.**  $5^{12}$ ;  $8 \cdot 5^{12}$ . **9.118.**  $(18/5; 12/5)$ . **9.119.**  $(2/27; 1)$ . **9.120.**  $(1997, 6; 2000, 12)$ .
- 9.121.**  $((2991\sqrt[3]{3} + 3)/(6\sqrt[3]{3} + 3)); (499 + 3\sqrt[3]{3})/(3\sqrt[3]{3} + 3/2)$ .
- 9.122.**  $h = \sqrt{1 + p_0^2}$ ;  $x = \sqrt[4]{1 + p_0^2} / \left[ 1 + (\sqrt{1 + p_0^2} - p_0)^2 \right] - 2$ .
- 9.123.**  $p = 4$ ;  $x = 1$ . **9.124.**  $E_x(z) = x/[(x-1)\ln(x-1)]$ ;  $E_y(z) = y/[(y-2)\ln(y-2)]$ . **9.125.**  $x = 25$ ;  $y = 50/3$ .
- Контрольные задания. Вариант 9.1.** **1.** а)  $(0; 0)$ ; б)  $(1; 1/e)$ . **2.**  $z_{\max}(1/256; 1/256) = 1/256$ . **3.** **1.** **4.**  $1,05$ . **5.**  $y = 0,5x + 0,9$ .
- Вариант 9.2.** **1.** а)  $(1; 0)$ ; б)  $(1; -1,8)$ . **2.**  $z_{\max}(6^{-6}; 6^{-9}) = 862 \cdot 6^{-9}$ . **3.** **0.** **4.**  $-1$ . **5.**  $y = -1,4x + 5,5$ . **Вариант 9.3.** **1.** а)  $(1; 0)$ ; б)  $(1/4; 1/4)$ . **2.**  $z_{\max}(1/256; 1/256) = 1/256$ . **3.**  $1/8$ . **4.**  $-7/4$ . **5.**  $y = 0,32x + 2,7$ . **Тест 9.** **1.**  $3,14$ . **2.**  $0,5$ . **3.** **2.** **4.** **2.** **5.**  $15$ . **6.**  $0,5$ . **7.**  $a = 3$ ;  $b = 2$ . **8.**  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = -1$ . **9.**  $4$ . **10.**  $a = 69$ ;  $b = 16$ . **11.**  $3$ . **12.**  $a = 1,4$ ;  $b = 2,5$ . **13.**  $a = 2468$ ;  $b = 625$ . **14.**  $x = 4,5$ ;  $y = 4,5$ .

## Раздел V. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения

### Глава 10

- 10.20.**  $4x^{3/4}/3 + C$ . **10.21.**  $(2/9)x^9 + 2^x e^x (1 + \ln 2)^{-1} + C$ . **10.22.**  $(1/3)\arctg 3x + C$ . **10.23.**  $\tg x - x + C$ .

- 10.24.**  $(1/2)\arcsin 2x + C$ . **10.25.**  $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x^{17/12} + \frac{4}{3}x^{3/4} + C$ . **10.26.**  $-3x^{-1/3}(1+1,5x-0,6x^2+0,125x^3) + C$ .
- 10.27.**  $0,5e^{2x} - e^x + x + C$ . **10.28.**  $x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ .
- 10.29.**  $x^4/2 - x^3 + 4^{2x+1}/\ln 16 + C$ . **10.30.**  $4x^3/3 + x^6 + 2x + 3x^4/4 + C$ . **10.31.**  $2x^{1,5}/3 - 8x^{1,25}/5 + 4x + C$ . **10.32.**  $8x + 24x^{0,5} + 6\ln|x| - 2x^{-0,5} + C$ . **10.33.**  $-0,5\cos x + C$ .
- 10.34.**  $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$ . **10.35.**  $0,25x^4 - \operatorname{arctg} x + C$ .
- 10.36.**  $0,5x^2 + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ . **10.37.**  $\arcsin x - \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$ .
- 10.38.**  $-0,5\ln|\cos x| + C$ . **10.39.**  $0,25(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) + C$ . **10.40.**  $3x - x^{-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ . **10.43.**  $e^{-1/x} + C$ . **10.44.**  $2x^{1,5}/3 - x + 4x^{0,5} - 4\ln|1+\sqrt{x}| + C$ . **10.45.**  $-3\ln|\cos x/3| + C$ .
- 10.46.**  $-\ln(1+e^{-x}) + C$ . **10.47.**  $\ln|x/(1+\sqrt{x^2+1})| + C$ .
- 10.48.**  $-0,5x\sqrt{1-x^2} + 0,5\arcsin x + C$ .
- 10.49.**  $\sqrt{x^2+1} - \ln\left|(1+\sqrt{x^2+1})/x\right| + C$ . **10.50.**  $-0,5e^{1-2x} + C$ .
- 10.51.**  $5(3x+2)^{6/5}/18 + C$ . **10.52.**  $-(4x+3)^{-4}/16 + C$ .
- 10.53.**  $(1/3)\ln|3x+1| + C$ . **10.54.**  $-2\sqrt{2-x} + C$ .
- 10.55.**  $\sqrt{x^2+2} + C$ . **10.56.**  $(1/6)\ln|2x^3+5| + C$ .
- 10.57.**  $-0,25\cos(2x^2+x) + C$ . **10.58.**  $-0,25(2+\cos 3x)^{4/3} + C$ .
- 10.59.**  $-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} + C$ . **10.60.**  $2(2+5e^x)^{3/2}/15 + C$ .
- 10.61.**  $2,5\sin(0,4x+0,2) + C$ . **10.62.**  $-\cos \ln x + C$ .
- 10.63.**  $0,25(\operatorname{arctg} x/3)^{4/3} + C$ . **10.64.**  $(\sqrt{2}/2)\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}) + C$ .
- 10.65.**  $(\sqrt{2}/2)\ln\left|x\sqrt{2} + \sqrt{3+2x^2}\right| + C$ . **10.66.**  $0,5\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$ .
- 10.67.**  $0,5x^2 - x + 2\ln|x+1| + C$ . **10.68.**  $-(x^3/3 + x^2/2 + x + \ln|x-1|) + C$ . **10.69.**  $x - \ln|2x+1| + C$ .

- 10.70.**  $(1/2\sqrt{15})\ln|(x\sqrt{3}-\sqrt{5})/(x\sqrt{3}+\sqrt{5})|+C.$   
**10.71.**  $0,5\arcsin(x^2/4)+C.$  **10.72.**  $(1/3)\ln|x^3+\sqrt{x^6+1}|+C.$   
**10.73.**  $(1/3)\ln(3x^2+2)+(1/\sqrt{6})\operatorname{arctg}(\sqrt{1,5}x)+C.$   
**10.74.**  $2\sqrt{x^2+1}+\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C.$  **10.75.**  $2\sqrt{x}+(1/3)\ln^3x+$   
 $+C.$  **10.76.**  $x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}(x/\sqrt{3})+C.$  **10.77.**  $x+\ln(x^2+1)+C.$   
**10.78.**  $\left((1/9)3^{4,5x}+3^{-x/2}\right)2\ln 3+C.$  **10.79.**  $0,5(\arcsin x)^2-$   
 $-\sqrt{1-x^2}+C.$  **10.80.**  $2(x^2+9)^{3/2}/3-17(x^2+9)^{1/2}+C.$   
**10.81.**  $0,5\ln|x^2-2|+C.$  **10.82.**  $0,5\ln|x/(x+2)|+C.$   
**10.83.**  $\arcsin\frac{x-3}{2}+C.$   
**10.84.**  $2\sqrt{x^2+4x+5}-7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}|+C.$   
**10.85.**  $0,25\ln|(x-1)/(x+3)|+C.$  **10.86.**  $0,25\operatorname{arctg}(x+1,5)+C.$   
**10.87.**  $-2\arcsin(0,5x+1)-\sqrt{-x^2-4x}+C.$   
**10.88.**  $-2\sqrt{2+\cos^2x}+C.$  **10.89.**  $3x/8-0,5\sin x+(\sin 2x)/16+C.$   
**10.90.**  $0,5\ln|\operatorname{tg} x|+C.$  **10.91.**  $\ln|\sin(0,5x+1,5)|+C.$   
**10.92.**  $(4/3)\sin^3x-0,8\sin^5x+C.$   
**10.93.**  $(-2/3)(1+\cos^2x)^{3/2}+C.$  **10.94.**  $(-2/3)(\operatorname{ctg} x)^{3/2}+C.$   
**10.97.**  $0,04e^{5x}(5x-1)+C.$   
**10.98.**  $-2e^{-x/2}(x^2+4x+8)+C.$   
**10.99.**  $(1/8)(4x^3-6x^2+6x-3)e^{2x}+C.$   
**10.100.**  $(x-1)\ln(1-x)-x+C.$   
**10.101.**  $(x^3/3-3x^2/2)\ln x-x^3/9+3x^2/4+C.$   
**10.102.**  $(\ln^2x-(2/3)\ln x+2/9)x^3/3+C.$   
**10.103.**  $2\sqrt{x}\ln(1-x)-4\sqrt{x}-2\ln|(\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}+1)|+C.$   
**10.104.**  $(-1/3)x\cos 3x+(1/9)\sin 3x+C.$   
**10.105.**  $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C.$   
**10.106.**  $0,5x\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+C.$



- 10.107.  $0,5x\sqrt{2-x^2} + \arcsin(x/\sqrt{2}) + C.$
- 10.108.  $0,25x^2 + 0,25x \sin 2x + (1/8)\cos 2x + C.$
- 10.109.  $x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \sqrt{7x-1}/7 + C.$
- 10.110.  $2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$
- 10.111.  $(x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + C.$
- 10.112.  $0,4e^x(2 \sin 0,5x - \cos 0,5x) + C.$
- 10.113.  $0,5x(\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$  10.114.  $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C.$
- 10.115.  $x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - 0,5x + 0,5 \arcsin x + C.$
- 10.116.  $-x/\sin x + \ln|\operatorname{tg} x/2| + C.$
- 10.117.  $0,5x \operatorname{tg} 2x + 0,25 \ln|\cos 2x| - 0,5x^2 + C.$
- 10.118.  $0,5(x^2 - 1)\ln|(1-x)/(1+x)| - x + C.$
- 10.119.  $0,5x + 0,1x \cos(2 \ln x) + 0,2x \sin(2 \ln x) + C.$
- 10.120.  $(x^3/3)\operatorname{arctg} 3x - x^2/18 + (1/162)\ln(9x^2 + 1) + C.$
- 10.121.  $-x^{-1} \arcsin x + \ln\left|x/\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\right| + C.$
- 10.122.  $(x \arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$
- 10.123.  $3^x(\sin x + \cos x \ln 3)/(1 + \ln^2 3).$
- 10.124.  $e^{3x}(3 \sin 2x - 2 \cos 2x)/13 + C.$
- 10.125.  $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.$
- 10.126.  $(x \ln x)/(x+1) - \ln(x+1) + C.$
- 10.130.  $(1/3)\ln|(x-2)/(x+1)| + C.$
- 10.131.  $0,5(1-x)^{-2} + 2(x-1)^{-1} - \ln|1-x| + C.$
- 10.132.  $x^{-1} + \ln|(x-1)/x| + C.$  10.133.  $\ln\left(|x|/\sqrt{x^2+1}\right) + C.$
- 10.134.  $(1/3)\ln(1+x) - (1/6)\ln(x^2-x+1) + (1/\sqrt{3})\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$
- 10.135.  $(1/3)\ln\left(|x-1|/\sqrt{x^2+x+1}\right) + (1/\sqrt{3}) \cdot \operatorname{arctg}((2x+1)/\sqrt{3}) + C.$  10.136.  $(1+x)^{-1} + \ln|x/(x+1)| + C.$
- 10.137.  $(1/6)\ln|x-1| - (1/2)\ln|x+1| + (1/3)\ln|x+2| + C.$
- 10.138.  $1,5(x+1)^{-1} + 0,25 \ln|(x+1)(x-1)^3| + C.$
- 10.139.  $0,2 \ln|x-1| + 0,8 \ln|x+4| + C.$
- 10.140.  $x + 2,5 \ln|x^2 - 6x + 10| + 5 \operatorname{arctg}(x-3) + C.$
- 10.141.  $x + (1/6)\ln|x| - 4,5 \ln|x-2| + (28/3)\ln|x-3| + C.$

- 10.142.**  $2\ln|x| + \ln|x+2| + 10(x+2)^{-1} + C.$   
**10.143.**  $x^3/3 + x^2 - x + (4/\sqrt{3})\arctg((2x+1)/\sqrt{3}) + C.$   
**10.144.**  $-x^{-1} - \arctg x + C.$   
**10.145.**  $2^{-2.5} \ln((x^2 + x\sqrt{2} + 1)/(x^2 - x\sqrt{2} + 1)) +$   
 $+ 2^{-1.5} \arctg(x\sqrt{2}(1 - x^2)^{-1})) + C.$   
**10.146.**  $0,5(2x-1)(x^2 + 2x + 2)^{-1} + \arctg(x+1) + C.$   
**10.147.**  $0,25\ln((x^2 + x + 1)/(x^2 - x + 1)) +$   
 $+ 0,5 \cdot 3^{-1/2} \arctg(x\sqrt{3}/(1 - x^2)) + C.$  **10.148.**  $x(4 + x^2)^{-1}/8 +$   
 $+ 16^{-1} \arctg(x/2) + C.$  **10.149.**  $0,5\ln(x^2 + 5) + 0,1(25 - 3x)(x^2 +$   
 $+ 5)^{-1} - (3/(10\sqrt{5}))\arctg(x/\sqrt{5}) + C.$   
**10.150.**  $0,25\ln|(x-1)/(x+1)| - 0,5\arctg x + C.$   
**10.151.**  $(x-1)^{-1} + \ln|(x-2)/(x-1)| + C.$   
**10.152.**  $-6,5(x-4)^{-2} + 3(x-4)^{-1} + 2\ln|(x-4)/(x-2)| + C.$   
**10.153.**  $-0,2x^{-5} + x^{-3}/3 - x^{-1} - \arctg x + C.$   
**10.156.**  $2\sqrt{x-1}((x-1)^3/7 + 3(x-1)^2/5 + x) + C.$   
**10.157.**  $0,5x - 3\sqrt{x}/2 + 2,25\ln|2\sqrt{x} + 3| + C.$   
**10.158.**  $6(x^{7/6}/7 - x^{5/6}/5 + x^{1/2}/3 - x^{1/2}/3 - x^{1/6} +$   
 $+ \arctg x^{1/6}) + C.$  **10.159.**  $0,075((2x+1)^{5/3} - 5(2x+1)^{2/3}) + C.$   
**10.160.**  $6\sqrt[6]{x} - 6\arctg\sqrt[6]{x} + C.$  **10.161.**  $2(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3})/3 + C.$   
**10.162.**  $(0,25x^{-4} + 3x^{-2}/8)\sqrt{x^2 - 1} - (3/8)\arcsin x^{-1} + C.$   
**10.163.**  $0,5\sqrt{x^2 - 1}(x-2) + 0,5\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.$   
**10.164.**  $-2\sqrt{(x-2)/x} - \ln\left(|x|(1 - \sqrt{(x-2)/x})^2\right) + C.$   
**10.165.**  $\ln|(\sqrt{x+1}-1)^2/(x+2+\sqrt{x+1})| -$   
 $-(2/\sqrt{3})\arctg((2\sqrt{x+1}+1)/\sqrt{3}) + C.$  **10.166.**  $2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} -$   
 $- 2\arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$  **10.167.**  $0,5x^2 - 0,5x\sqrt{x^2 - 1} +$   
 $+ 0,5\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.$  **10.171.**  $-\cos x + (\cos^3 x)/3 + C.$   
**10.172.**  $\sin x - \sin^3 x + 0,6\sin^5 x - (\sin^7 x)/7 + C.$   
**10.173.**  $0,2\cos^5 x - (\cos^3 x)/3 + C.$  **10.174.**  $-2(1 + \tg x/2)^{-1} + C.$

$$10.175. 2^{-1/2} \ln |(\operatorname{tg} x / 2 + 1 - \sqrt{2}) / (\operatorname{tg} x / 2 + 1 + \sqrt{2})| + C.$$

$$10.176. 0,25 \ln |\operatorname{tg} x / 2| + 0,125 \operatorname{tg}^2 x / 2 + C.$$

$$10.177. 15^{-1/2} \operatorname{arctg}(\sqrt{0,6} \operatorname{tg} x) + C. \quad 10.178. x - \operatorname{tg} 0,5x + C.$$

$$10.179. -0,5(1 - \cos x)^{-2} + C. \quad 10.180. \ln |(\operatorname{tg} 0,5x - 5) / (\operatorname{tg} 0,5x - 3)| + C. \quad 10.181. -\ln |\cos x - \sin x| + C.$$

$$10.182. 2 \cdot 3^{-1/2} \operatorname{arctg}(3^{-1/2} \operatorname{tg} 0,5x) - 2^{-1/2} \operatorname{arctg}(2^{-1/2} \operatorname{tg} 0,5x) + C.$$

$$10.183. \operatorname{tg}^2(x/2 + \pi/4) + 2 \ln |\cos(x/2 + \pi/4)| + C.$$

$$10.184. 0,6 \sin(5x/6) + 3 \sin(x/6) + C.$$

$$10.185. 0,0625 \sin 8x - 0,05 \sin 10x + C.$$

$$10.186. (\cos 6x) / 24 - (\cos 4x) / 16 - (\cos 2x) / 8 + C.$$

$$10.187. 2^{-1/2} (\ln |\operatorname{tg} 0,5x| + \ln |\operatorname{tg}(0,5x + \pi/4)|) + C.$$

$$10.188. -3(\cos x)^{4/3} / 4 + 3(\cos x)^{10/3} / 5 - 3(\cos x)^{16/3} / 16 + C.$$

**Контрольные задания. Вариант 10.1. 1.**  $\sqrt{x} - 0,6\sqrt{(2x)^5} + C.$

**2.**  $4\sqrt{\sqrt{x} + x} + C.$  **3.**  $e^{2x}(x+1) + C.$

**4.**  $-0,5x + (1/3) \ln |e^x - 1| + (1/6) \ln(e^x + 2) + C.$

**5.**  $26 \arcsin(0,5 - 1,5) - 5\sqrt{6x - x^2 - 5} + C.$  **6.**  $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$

**7.**  $0,25x^4 \arcsin x^{-1} + (x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 1} / 12 + C.$

*Вариант 10.2. 1.*  $3x^4 \sqrt[3]{x} / 13 - 3x^2 \sqrt[3]{x} / 7 - 6\sqrt[3]{x} + C.$

**2.**  $(88 - 30x)\sqrt{1 - 3x} / 27 + C.$  **3.**  $(x^3 / 3 + 1,5x^2 + 2x) \ln x - x^3 / 9 -$

$-3x^2 / 4 - 2x + C.$  **4.**  $2\sqrt{e^x + 1} + \ln((\sqrt{e^x + 1} - 1) / (\sqrt{e^x + 1} + 1)) + C.$

**5.**  $x + 3 \ln(x^2 - 6x + 10) + 8 \operatorname{arctg}(x - 3) + C.$  **6.**  $\operatorname{tg} x - (\operatorname{tg}^3 x) / 3 + C.$

**7.**  $-0,5x(\sin x)^{-2} - 0,5 \operatorname{ctg} x + C.$  *Вариант 10.3. 1.*  $\ln |x + \sqrt{1 + x^2}| -$   
 $- x^3 / 3 + C.$  **2.**  $2(2 \ln x + x)^{3/2} / 3 + C.$

**3.**  $x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C.$  **4.**  $0,5 \ln |x^2 - 2x - 15| +$   
 $+ 0,25 \ln |(x - 5) / (x + 3)| + C.$  **5.**  $\frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - 0,5x + C.$

6.  $e^x - 0,5 \ln(e^{2x} + e^x + 1) + \sqrt{3} \arctg((2e^x + 1)/\sqrt{3}) + C$ .  
 7.  $0,2(-x^2 + 3x + 0,08) \cos 5x + 0,04(2x - 3) \sin 5x + C$ .

**Тест 10.** 1.  $a = 4, b = 3$ . 2.  $a = 6, b = 3, c = 1$ . 3.  $a = -6, b = -3, c = 2$ . 4.  $a = 1, b = 8, d = 4$ . 5.  $a = -8, b = -2, d = 4$ . 6.  $a = 2, b = 13, d = 8$ . 7.  $a = 1, b = 2, d = -3$ . 8.  $a = -16, b = 4, d = 4$ . 9.  $a = 4, b = -3, d = 1$ . 10.  $a = 1, b = 1, d = 2$ .

### Глава 11

- 11.24.  $100/3$ . 11.25.  $7/4$ . 11.26.  $6 - 3\pi/2 + 6 \arctg 2$ . 11.27.  $\ln(9/8)$ . 11.28. 9. 11.29.  $100/27$ . 11.30.  $2 + 2 \ln 3$ . 11.31.  $7 + 2 \ln 2$ . 11.32. 4. 11.33. 2. 11.34. 6. 11.35. 2. 11.36.  $\ln 4 - 1$ . 11.37.  $(e^2 + 1)/4$ . 11.38.  $e - 2$ . 11.39.  $\pi/\sqrt{3} - \ln 2$ . 11.40.  $(e^2 - 5)/e$ . 11.41.  $0,5(e^\pi + 1)$ . 11.42. 4. 11.43.  $-\pi/2$ . 11.44. 0,25. 11.45. 0. 11.46.  $2/3$ . 11.47.  $2 - \pi/2$ . 11.48.  $\arctg 3 - \arctg 2$ . 11.49.  $\pi/\sqrt{5}$ . 11.50.  $\ln((7 + 2\sqrt{7})/9)$ . 11.51.  $\pi/6 + 1 - \sqrt{3}/2$ . 11.52.  $0,5 \ln 1,5$ . 11.53.  $1,5(\ln 4 - 1)$ . 11.54.  $0,5 - 0,5 \ln 2$ . 11.55.  $81\pi/8$ . 11.62.  $e^2 + 1$ . 11.63.  $16\sqrt{2}/15$ . 11.64. 4,5. 11.65.  $4 \ln 2 - 2/3$ . 11.66.  $7/12$ . 11.67.  $7/6$ . 11.68. 0,5. 11.69.  $44/15$ . 11.70.  $1/3 + \ln 3$ . 11.71.  $7/6$ . 11.72.  $3/2 - \ln 2$ . 11.73.  $9/2$ . 11.74.  $8/3$ . 11.75.  $(15 - 16 \ln 2)/4$ . 11.76.  $5/3$ . 11.77.  $(6e - 5)/3$ . 11.78.  $3/2$ . 11.79.  $8/9$ . 11.80. 1. 11.81.  $3/\ln 2 - 4/3$ . 11.82. 0,5. 11.83.  $19/3$ . 11.84.  $1/3$ . 11.85. 3. 11.86.  $17/12$ . 11.87. 9. 11.88.  $2\pi$ . 11.89.  $3\pi/8$ . 11.90.  $1024\pi/21$ ;  $256\pi/15$ . 11.91.  $\pi^2/2$ ;  $2\pi^2$ . 11.92.  $12\pi$ ;  $24\pi$ . 11.93.  $128\pi/15$ ;  $64\pi/3$ . 11.94.  $112\pi/5$ ;  $40\pi$ . 11.95.  $544\pi/15$ ;  $8\pi$ . 11.96.  $\pi(e - 2)$ ;  $\pi(e^2 + 1)/2$ . 11.97.  $32\sqrt{2}\pi/3$ ;  $4\pi$ . 11.98.  $52\pi/3$ ;  $(128/3 - 112\sqrt{3}/5)\pi$ . 11.99.  $397\pi/30$ ;  $148\pi/15$ . 11.100.  $256\pi/15$ ;  $8\pi$ . 11.101.  $\pi(e^2 - 1)/2$ ;  $2\pi$ . 11.102.  $178\pi/15$ ;  $21\pi/2$ . 11.103.  $6\pi/7$ ;  $3\pi/5$ . 11.104.  $16\pi/3$ ;  $8\pi/5$ . 11.105.  $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ . 11.106.  $1 + 0,5 \ln 1,5$ . 11.107.  $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$ . 11.108. 8. 11.109.  $7\pi/27$ . 11.110.  $3\pi$ . 11.111.  $18\pi$ . 11.112.  $6\pi/5$ . 11.115.  $1/2$ . 11.116.  $1/\ln 2$ . 11.117.  $1/2$ . 11.118.  $3/2$ . 11.119. Расходится. 11.120.  $6\sqrt[3]{2}$ . 11.121.  $1/24$ . 11.122. Расходится. 11.123.  $1/4$ . 11.124.  $\pi/\sqrt{5}$ . 11.125. 0,5. 11.126. Расходится. 11.127. Расходится. 11.128. 1. 11.129.  $\pi/2$ . 11.130. 4. 11.131. Расходится. 11.132. 1. 11.133. 1,5. 11.134.  $0,5 \ln 3$ . 11.135.  $6\pi\sqrt[3]{2}$ . 11.136.  $2\pi$ . 11.138. 0,6956. 11.139. 21,44; 0,1064. 11.140. 37, 8183; 0,1817.

**11.141.** 13. **11.146.**  $\approx 4,53$ . **11.147.** 23,98. **11.148.** 40. **11.149.** 42381. **11.150.** 11,392 т. **11.151.**  $2,529 \cdot 10^6$ . **11.152.** а) 0,0235; 0,283; б) 0,0073; 0,114; в) 0,0037; 0,45. **11.153.** 341,3. **11.154.** 112,8. **11.155.** а)  $C = 2250$ ;  $P = 37,5$ ; б)  $C = 667$ ;  $P = 767$ . **11.159.**  $406/81$ . **11.160.**  $8/3$ . **11.161.**  $(e-1)\ln 1,5$ . **11.162.**  $48\sqrt{2}/7 + 56/3$ . **11.163.**  $-\pi$ .

**Контрольные задания. Вариант 11.1.** 1.  $\ln(1+\sqrt{2})$ . 2.  $\sqrt{3}/2 + \ln(2-\sqrt{3})$ . 3.  $-135e^{-1} + 54$ . 4.  $1,5\ln 1/3 - \ln 3/4$ . 5.  $14/3$ . 6.  $16\pi$ . 7. 2. 8. 20/21. **Вариант 11.2.** 1.  $e - \sqrt{e}$ . 2.  $4\pi$ . 3.  $-468/7$ . 4.  $\frac{1}{3}\ln 8/5$ . 5.  $e^2 - 2\ln 2$ . 6.  $30\pi$ . 7.  $1/20\sqrt{3}$ . 8.  $16/15$ . **Вариант 11.3.** 1.  $\frac{141}{20}\sqrt[3]{7^5}$ . 2.  $(5e^3 - 2)/27$ . 3.  $0,5\ln 1,5$ . 4.  $\frac{1}{3}\ln 14$ . 5. 1,5. 6.  $5,5\pi$ . 7. 6. 8. 0. **Тест 11.** 1.  $a=15$ ;  $b=32$ . 2.  $a=1$ ;  $b=1$ . 3.  $a=1$ ;  $b=1$ . 4.  $a=-7$ ;  $b=16$ . 5.  $a=3$ ;  $b=16$ . 6.  $a=14$ ;  $b=3$ . 7.  $a=112$ . 8. 74. 9. 5. 10.  $-0,5$ .

# Глава 12

**12.37.**  $-1$ . **12.38.**  $1/6$ . **12.39.**  $y' = y$ . **12.40.**  $x^2 y' - xy = yy'$ . **12.41.**  $y' = \cos\left(x\sqrt{1-(y')^2}/y\right)$ . **12.42.**  $(y')^2 + 2yy'' = 0$ . **12.45.**  $e^{1/y} = C\sqrt[3]{3x-1}$ . **12.46.**  $y = Ce^{\sqrt{4-x^3}}$ . **12.47.**  $x^2 y = Ce^{2y}$ . **12.48.**  $y^3/3 - y = 0,5e^{2x-1} + C$ . **12.49.**  $y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C$ . **12.50.**  $e^x - e^{-y}(y+1) = C$ . **12.51.**  $\arctg(x+y) = x + C$ . **12.52.**  $x + 2y + 3\ln|2x+3y-7| = C$ . **12.53.**  $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + C$ . **12.54.**  $y = e^x(x-2) + C$ . **12.55.**  $x^{-2} + y^{-2} = 2(1+\ln|x/y|)$ . **12.56.**  $2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = 0$ . **12.57.**  $xy^2 = x^2 - 1$ . **12.58.**  $y = -2\cos x$ . **12.61.**  $y = Ce^{y/x}$ . **12.62.**  $y^3 = 3x^3 \ln|Cx|$ . **12.63.**  $y = xe^{Cx+1}$ . **12.64.**  $0,5\ln(x^2 + y^2) + \arctg(y/x) = C$ . **12.65.**  $y = Cx^2/2 - \frac{1}{2C}$ ;  $x = 0$ .

$$12.66. (x^2 + y^2)^3 (x + y)^2 = C. \quad 12.67. 3x + y + 2 \ln|x + y - 1| = C.$$

$$12.68. (y + 2)^2 + C(x + y - 1); \quad y = 1 - x.$$

$$12.69. \ln \frac{y+x}{x+3} = 1 + \frac{C}{x+y}. \quad 12.70. \sin \frac{y-2x}{x+1} = C(x+1).$$

$$12.71. y = C(x^2 + y^2). \quad 12.72. x^2 + y^2 = Cx.$$

$$12.76. y = Ce^{2x} + xe^{2x}. \quad 12.77. y = (x - 4 + 8/x)e^{x/2} + C/x.$$

$$12.78. 60y^4(x+1)^2 = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + C.$$

$$12.79. x = Ce^y - 2y^2 - 4y - 4. \quad 12.80. x = Ce^{y^2} - 0,5(1 + y^2).$$

$$12.81. y = x^4(0,5 \ln|x| + C)^2. \quad 12.82. y^2 = x \ln(C/x).$$

$$12.83. y^3(3 + Ce^{\cos x}) = x. \quad 12.84. y^{-2} = x^4(2e^x + C);$$

$$y = 0. \quad 12.85. xy(C - \ln^2 y) = 1. \quad 12.86. y^2 + x + ay = 0.$$

$$12.87. x^2 + y^2 - Cy + 1 = 0. \quad 12.90. y = \pm 0,5(x\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_1^2 \arcsin \frac{x}{C_1}) + C_2. \quad 12.91. y = C_1 + C_2 \ln|x|.$$

$$12.92. y = (C_1 x - C_1^2) e^{x/C_1+1} + C_2; \quad y = ex^2/2 + C.$$

$$12.93. y = C_1 e^{C_2 x} + 1/C_2. \quad 12.94. y = C_1 e^{C_2 x}. \quad 12.95. y = C_1 x(x - C_1) + C_2; \quad y = x^3/3 + C. \quad 12.96. y = C_3 - x(x + C_1) \ln C_2(x + C_1);$$

$$y = C_1 x + C_2. \quad 12.97. 2y = C_1 \cos 2x + (1 + 2C_1)x^2 + C_2 x + C_3.$$

$$12.98. 225(y-1)^2 = 8(x-1)^3(3x+2)^2. \quad 12.99. y^3 - e = 3x.$$

$$12.106. y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}. \quad 12.107. y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

$$12.108. y = e^x(C_1 + C_2 x + x^2).$$

$$12.109. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x(0,1x - 0,04)e^{2x}. \quad 12.110. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 0,5x \sin x. \quad 12.111. y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x +$$

$$+ 0,05(2 \cos 2x - \sin 2x). \quad 12.112. y = C_1 + C_2 e^{3x} - 0,1(\cos x + 3 \sin x) - x^2/6 - x/9. \quad 12.113. y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) +$$

$$+ C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}. \quad 12.114. y = e^{-2x} - e^x. \quad 12.115. y = \sin x - 2x \cos x. \quad 12.116. y = e^{-x}(x - \sin x). \quad 12.117. y = xe^x + xe^x \ln|x|.$$

$$12.122. 29,8. \quad 12.123. y = \ln(3,32e^{1,2t} - 0,6). \quad 12.124. 29,91.$$

$$12.125. 863. \quad 12.126. \text{ а) } py^2 = 20; \text{ б) } p\sqrt[3]{y} = 6. \quad 12.127. \text{ а) } p = 100 - y; \text{ б) } p = 20 - 2y. \quad 12.128. \text{ а) } p = 15e^{4t} - 5; \text{ б) } \text{ не является. } \quad 12.129. \text{ а) } p = 5 + 2e^{-0,4t}; \text{ б) } \text{ является. } \quad 12.130. \text{ Оставшееся}$$

$$\text{количество вещества } x(t) = x(0)e^{-t/20}; \quad x(t) = 0,01x(0) \text{ при } t = 60 / \lg 2 \approx 200 \text{ дней. } \quad 12.131. y = 3e^{1,2t} / (1 + 2e^{1/2t});$$

$$y(2) \approx 1,43. \quad \mathbf{12.134.} \quad x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

$$\mathbf{12.135.} \quad x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \quad y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}.$$

$$\mathbf{12.136.} \quad x = (C_1 + C_2 t) e^{3t}, \quad y = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{3t}.$$

$$\mathbf{12.137.} \quad x = (C_1 + C_2 t) e^t, \quad y = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t) e^t.$$

$$\mathbf{12.138.} \quad x = C_2 e^{C_1 t}, \quad y = t + \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 t}; \quad x = 0; \quad y = t + C.$$

$$\mathbf{12.139.} \quad t^2 - x^2 = C_1, \quad t + x = C_2 y. \quad \mathbf{12.140.} \quad xy' - 2y = 0. \quad \mathbf{12.141.}$$

$$y - 2xy' = 0. \quad \mathbf{12.142.} \quad 3y^2 - x^2 = 2xyy'. \quad \mathbf{12.143.} \quad y'' - y' - 2y = 0.$$

$$\mathbf{12.144.} \quad \sqrt{x/y} + \ln|y| = C, \quad y = 0. \quad \mathbf{12.145.} \quad x = \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}. \quad \mathbf{12.146.}$$

$$y = x \ln C / x. \quad \mathbf{12.147.} \quad y = (x + C) e^x.$$

$$\mathbf{12.148.} \quad x = (y - x) \ln C(y - x), \quad y = x. \quad \mathbf{12.149.} \quad y = C(x + 1) e^{-x}.$$

$$\mathbf{12.150.} \quad x^2 + y^2 = \ln(Cx^2). \quad \mathbf{12.151.} \quad e^{-y/x} + \ln Cx. \quad \mathbf{12.152.} \quad x =$$

$$= Cy^2 - 1/y. \quad \mathbf{12.153.} \quad (x - C)^2 - y^2 = C^2. \quad \mathbf{12.154.} \quad y^2 + x^2 - 2x = C.$$

$$\mathbf{12.155.} \quad 5x + 10y + C = 3 \ln|10x - 5y + 6|. \quad \mathbf{12.156.} \quad y^2 - 2 = Ce^{1/x}.$$

$$\mathbf{12.157.} \quad y = -\lg(C - 10^x). \quad \mathbf{12.158.} \quad \ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}, \quad x = 0.$$

$$\mathbf{12.159.} \quad y = \frac{1}{6} x^4 + C/x^2. \quad \mathbf{12.160.} \quad y = 1 + \frac{Cx}{1+x}. \quad \mathbf{12.161.} \quad 2x + y -$$

$$- 1 = Ce^x. \quad \mathbf{12.162.} \quad x = Ce^{x/y}; \quad y = 0. \quad \mathbf{12.163.} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

$$\mathbf{12.164.} \quad y = Cx + x^2. \quad \mathbf{12.165.} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{7x} + 2.$$

$$\mathbf{12.166.} \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{1}{8} (2x^2 + 4x + 3). \quad \mathbf{12.167.} \quad y = (C_1 +$$

$$+ C_2 x) e^{-x}. \quad \mathbf{12.168.} \quad y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad \mathbf{12.169.} \quad y =$$

$$= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x. \quad \mathbf{12.170.} \quad y = e^{x/6} (C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6} x +$$

$$+ C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{6} x). \quad \mathbf{12.171.} \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x}. \quad \mathbf{12.172.}$$

$$y = C_1 \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2. \quad \mathbf{12.173.} \quad y = e^{2x} / 8 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

$$\mathbf{12.174.} \quad y - \frac{1}{2} \ln|y| = x + 1. \quad \mathbf{12.175.} \quad y^3 - y = 3x. \quad \mathbf{12.176.} \quad y =$$

$$= (7 - 3x) e^{x-2}. \quad \mathbf{12.177.} \quad y = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x. \quad \mathbf{12.178.} \quad y =$$

$$= e^{2x-1} - 2e^x + e - 1. \quad \mathbf{12.179.} \quad y = e^{-x} (x - \sin x).$$

**Контрольные задания. Вариант 12.1. 1.**  $(Cx + 1)y = Cx - 1;$   
 $y = 1.$  **2.**  $y \ln Cx = -x; \quad y = 0.$  **3.**  $0,5y^2 + y + \ln|y - 1| = -x^{-1} + C.$

4.  $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$ . 5.  $x = Ce^y + y^2 + 2y + 2$ .  
 6.  $\sqrt{y-x} - \sqrt{x} = 1$ . 7.  $y = -1 + e^{2x} + 0,25(x-x^2) - x^3/6$ .  
*Вариант 12.2.* 1.  $y = x \operatorname{tg} \ln Cx$ ;  $x = 0$ . 2.  $y^2 = C(x^2 - 1)$ ;  $x = \pm 1$ .  
 3.  $y = Cx + x^3$ ;  $x = 0$ . 4.  $x + y = \operatorname{tg}(y - C)$ . 5.  $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$ .  
 6.  $-\cos 2x + \sin 2x$ . 7.  $y = e^x - (x+1)y = x^2 + x \ln|x|$ .  
*Вариант 12.3.* 1.  $y = Cx^2 e^{-3/x}$ . 2.  $y^2 = C(xy - 1)$ ;  $xy = 1$ .  
 3.  $C_1 x + C_2 y = \ln|C_1 x + 1| + C_2$ ;  $2y = x^2 + C$ ,  $y = C$ .  
 4.  $y(x + C) = x + 1$ ;  $y = 0$ . 5.  $\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}(y/x) = C$ .  
 6.  $x = y^2(1 - 2\ln|y|)$ . 7.  $y = 3\sin 2x - 7\cos 3x - 2\sin 3x$ .  
**Тест 12.1.** 1 - в, 2 - а, 3 - б. 2.  $a = 4$ ;  $b = 1$ . 3.  $a = -1$ ;  $b = 1$ ;  $d = -3$ .  
 4. 10. 5. 0. 6. 10. 7.  $a = -1$ ;  $b = 3$ . 8. 1,4. 9. -0,75. 10. 21.

## Раздел VI. Ряды

### Глава 13

- 13.17.  $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ . 13.18.  $u_n = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 1}$ .  
 13.19.  $S_n = 3(1 - (0,5)^n)$ ,  $S = 3$ . 13.20.  $S_n = 1/3 - 1/(n+3)$ ,  $S = 1/3$ . 13.21.  $S_n = (3n+4)/(4n+2)$ ,  $S = 0,75$ . 13.22.  $S_n = n/(3n+1)$ ,  $S = 1/3$ . 13.23.  $S_n = 1/12 - 1/(3(3n+2)^2)$ ,  $S = 1/12$ .  
 13.24.  $S_n = \ln(2/(5n+2))$ ; расходится. 13.25. Расходится.  
 13.26. Расходится. 13.27. Расходится. 13.28. Расходится.  
 13.29. Необходимый признак выполняется. 13.30. Расходится.  
 13.37. Расходится. 13.38. Сходится. 13.39. Сходится.  
 13.40. Расходится. 13.41. Расходится. 13.42. Сходится.  
 13.43. Расходится. 13.44. Сходится. 13.45. Сходится. 13.46. Расходится.  
 13.47. Расходится. 13.48. Сходится. 13.49. Сходится.  
 13.50. Расходится. 13.51. Сходится. 13.52. Сходится.  
 13.53.  $\alpha = 3$ ; сходится. 13.54.  $\alpha = 1$ ; расходится. 13.55.  $\alpha = 1$ ; расходится.  
 13.56.  $\alpha = 1$ ; расходится. 13.57.  $\alpha = 3$ ; сходится.  
 13.58.  $\alpha = 1/2$ ; расходится. 13.59.  $\alpha = 2$ ; сходится. 13.60.  $\alpha = 4/3$ ; сходится.  
 13.61. Сходится. 13.62. Сходится. 13.63. Сходится.  
 13.64. Сходится. 13.65. Сходится. 13.66. Расходится.  
 13.67. Необходимо дополнительное исследование.  
 13.68. Сходится. 13.69. Расходится. 13.70. Сходится. 13.71. Расходится.  
 13.72. Необходимо дополнительное исследование. 13.73. Расходится.  
 13.74. Расходится. 13.75. Сходится. 13.76. Сходится.  
 13.77. Сходится. 13.78. Сходится. 13.79. Сходится.  
 13.80. Сходится. 13.81. Сходится. 13.82. Расхо-



дится. **13.83.** Сходится. **13.84.** Расходится. **13.85.** Расходится. **13.86.** Сходится. **13.87.** Расходится. **13.88.** Сходится. **13.89.** Сходится. **13.90.** Расходится. **13.91.** Расходится. **13.92.** Расходится. **13.93.** Сходится. **13.94.** Сходится. **13.95.** Сходится. **13.96.** Сходится. **13.97.** Сходится. **13.98.** Расходится. **13.99.** Сходится. **13.100.** Расходится. **13.101.** Расходится. **13.102.** Расходится. **13.106.** Сходится условно. **13.107.** Сходится абсолютно. **13.108.** Расходится. **13.109.** Сходится абсолютно. **13.110.** Сходится условно. **13.111.** Сходится абсолютно. **13.112.** Сходится абсолютно. **13.113.** Расходится. **13.114.** Сходится абсолютно. **13.115.** Расходится. **13.116.** Сходится абсолютно. **13.117.** Сходится условно. **13.118.** Сходится условно. **13.119.** Сходится абсолютно. **13.120.** Сходится абсолютно. **13.121.** Сходится абсолютно. **13.122.** Сходится абсолютно. **13.123.** Расходится. **13.124.** Сходится условно. **13.125.** Сходится абсолютно. **13.126.** 99. **13.127.** 9998. **13.128.** 1 000 000. **13.129.** 7. **13.130.** 4. **13.131.**  $n = 4; 0,18127$ . **13.132.**  $n = 3; 0,23976$ .

**13.133.** а)  $(1/2)\ln 2$ ; б)  $(3/2)\ln 2$ . Указание. Представить тройку членов ряда в виде:  $\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} = \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) + \left( \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right)$  и при  $n = 1, 2, 3, \dots$  найти сумму каждого ряда.

**Контрольные задания. Вариант 13.1.** **1.**  $1/5$ . **2.** Расходится. **3.** Расходится. **4.** Сходится. **5.** Расходится. **6.** Сходится условно. **7.** **7.** *Вариант 13.2.* **1.**  $1/4$ . **2.** Расходится. **3.** Расходится. **4.** Сходится. **5.** Сходится абсолютно. **6.** Расходится. **7.** **6.** *Вариант 13.3.* **1.**  $1/3$ . **2.** Сходится. **3.** Расходится. **4.** Сходится. **5.** Расходится. **6.** Сходится условно. **7.** **6.** **Тест 13.** **1.** **3.** **2.** **2.** **3.** **1,3.** **4.**  $a-2$ ,  $b-3$ ,  $v-1$ ,  $z-3$ . **5.** а)  $\alpha=1,2$ ; б)  $\alpha=2;1$ . **6.**  $l=5/2$ ; **2.** **7.** **2,3,4.** **8.** **2.** **9.** **3.** **10.** **3.**

## Глава 14

**14.8.**  $[-1; 1)$ . **14.9.**  $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ . **14.10.**  $\{0\}$ . **14.11.**  $(-\sqrt{2}/3; \sqrt{2}/3)$ . **14.12.**  $[-1; 1]$ . **14.13.**  $(-2; 2)$ . **14.14.**  $[-1; 1)$ . **14.15.**  $\{0\}$ . **14.16.**  $[-2; 2)$ . **14.17.**  $(-0,1; 0,1)$ . **14.18.**  $(-3; 3)$ . **14.19.**  $[-1; 1)$ . **14.20.**  $(-\infty; +\infty)$ . **14.21.**  $(-1; 1]$ . **14.22.**  $[-1; 1]$ . **14.23.**  $[-3; 3)$ .

- 14.24.  $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ . 14.25.  $[-1; 1]$ . 14.26.  $(-1/e; 1/e)$ .
- 14.27.  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ . 14.28.  $(-\infty; +\infty)$ . 14.29.  $[3; 7]$ . 14.30.  $[0; 2]$ .
- 14.31.  $[-1; 1]$ . 14.32.  $[3; 5]$ . 14.33.  $(-4; 4)$ .
- 14.41.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!}; (-\infty; +\infty)$ . 14.42.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n+1)!};$   
 $(-\infty; +\infty)$ . 14.43.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n)!}; (-\infty; +\infty)$ .
- 14.44.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n x^n}{n}; (-1/5; 1/5]$ .
- 14.45.  $\ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{0,4^n x^n}{n}; (-2,5; 2,5]$ . 14.46.  $1 + \frac{x^2}{2} +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} x^{2n}; [-1; 1]$ .
- 14.47.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}; (-1; 1)$ .
- 14.48.  $3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n+1}}; (-4; 4)$ . 14.49.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^{n+2}}{n!}; (-\infty; +\infty)$ .
- 14.50.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}; [-1; 1]$ .
- 14.51.  $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}; (-1; 1]$ . 14.52.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}; [-1; 1]$ .
- 14.53.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}; (-1; 1)$ . 14.54.  $x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 -$   
 $- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots; (-1; 1)$ . 14.55.  $-\left(x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \dots\right); (-1; 1)$ .
- 14.56.  $x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \dots; (-\infty; +\infty)$ .
- 14.57.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n+1)}; [-1; 1]$ . 14.58.  $x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 - \dots;$   
 $(-1; 1)$ . 14.59.  $\ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \frac{x^n}{n}; [-2; 2]$ .

$$14.60. \frac{2}{3} + (-1)^n \left( 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n; (-1; 1). 14.61. (-\infty; +\infty).$$

$$14.62. \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n} + C; (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

$$14.63. x + \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \frac{3x^9}{8 \cdot 9} + \dots + C; (-1; 1). 14.64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!2n} + C;$$

$$(-\infty; +\infty). 14.65. (-\infty; +\infty).$$

$$14.66. e^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} \right]; (-\infty; +\infty).$$

$$14.67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n}; (0; 2).$$

$$14.68. -\frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{6^n}; (-8; 4). 14.69. \frac{1}{(1-x)^2}. 14.70. \operatorname{arctg} x.$$

$$14.71. \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}. 14.76. 0,7165. 14.77. 0,336. 14.78. 0,3090.$$

$$14.79. 7,937. 14.80. 1,609. 14.81. 2,0006. 14.82. 0,1974. 14.83. 0,9759. 14.84. 0,2009. 14.85. 0,7635. 14.86. 0,072. 14.87. 32,831. 14.88. 0,494. 14.89. 0,946. 14.90. 0,500. 14.91. 0,098. 14.92. 0,487. 14.93. 0,3230;  $\delta = 0,0001$ . 14.94. 0,24489;$$

$$\delta = 0,00001. 14.95. 0,5031. 14.96. y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3!}x^3 + \dots$$

$$14.97. y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \dots. 14.98. y = 1 + x + \frac{x^2}{2} \dots. 14.99. y =$$

$$= 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \dots. 14.100. y = \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 + \dots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3n)!} x^{2n} + \dots. 14.101. y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots.$$

$$14.102. y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 + \dots.$$

$$14.103. 1. 14.104. 1/3. 14.105. 1/3. 14.106. 1/60. 14.107. S(p) \approx bp/a.$$

$$\text{Контрольные задания. Вариант 14.1. 1. } [-\sqrt{3}; \sqrt{3}].$$

$$2. (-\infty; +\infty). 3. \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} \cdot 2^{n+1}}{2n+1}; (-1/3; 1/3).$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} \cos \pi n / 4}{n!} x^n; (-\infty; +\infty). \quad 5. 0,9781; \delta = 0,00008. \quad 6. 0,333.$$

*Вариант 14.2.* **1.**  $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ . **2.**  $(2 - e; 2 + e)$ . **3.**  $-3 + 7x - 11x^2 + \dots + (-1)^{n-1}(1 - 4n)x^{n-1} + \dots; (-1; 1)$  **4.**  $4 + \sum_{n=1}^{\infty} (2 + 2^n) \frac{x^n}{n!}; (-\infty; +\infty)$ .

**5.**  $-0,105; \delta = 0,0003$ . **6.**  $0,310$ .

*Вариант 14.3.* **1.**  $[-\sqrt{5}/2; \sqrt{5}/2]$ . **2.**  $[3; 5]$ . **3.**  $1 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + \dots + \frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!} + \dots; (-\infty; +\infty)$ . **4.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}}{n!} x^n; (-\infty; +\infty)$ .

**5.**  $3/11; \delta = 0,004$ . **6.**  $-0,364$ . **Тест 14.** **1.** 2. **2.**  $-3$ . **3.**  $2,5$ . **4.** 3. **5.** 2; 3. **6.**  $-1,25$ . **7.**  $-0,125$ . **8.** 3. **9.**  $0,49$ . **10.**  $0,7$ .

## Раздел VII. Элементы высшей алгебры

### Глава 15

**15.7.** а)  $19 + 5i; 11 + 11i$ ; б)  $84 - 13i$ ; в)  $1,44 + 3,08i$ .

**15.8.**  $z_1 = \sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)]; z_2 = 2[\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6)];$  а)  $2\sqrt{2}[\cos(7\pi/12) + i \sin(7\pi/12)];$  б)  $(\sqrt{2}/4)(\sqrt{3} - i);$  в)  $-16384;$  г)  $\sqrt[3]{2}[\cos(5\pi/18) + i \sin(5\pi/18)], \sqrt[3]{2}[\cos(17\pi/18) + i \sin(17\pi/18)], [\cos(29\pi/18) + i \sin(29\pi/18)].$

**15.9.**  $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}, z_2 = 2e^{i5\pi/6}$ . **15.10.** а)  $-1 - 4i$ ; б)  $11 - 20i$ ;

в)  $66 + 112i$ ; г)  $-1,26 + 0,32i$ . **15.11.**  $2\sqrt{2}(\cos(11\pi/12) + i \sin(11\pi/12)); (1/\sqrt{2})(\cos(7\pi/12) + i \sin(7\pi/12)).$  **15.12.**  $(1/\sqrt{2})(1 + i); (1/\sqrt{2})(-1 + i); (1/\sqrt{2})(-1 - i); (1/\sqrt{2})(1 - i).$

**15.14.**  $(7 - 24i)/25$ . **15.15.**  $2b(3a^2 - b^2)i$ . **15.16.**  $8i$ . **15.17.**  $512(1 - i\sqrt{3}).$  **15.18.**  $-1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ . **15.19.**  $1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ .

**15.20.**  $-27$ . **15.21.**  $-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ . **15.22.**  $\pm 4i$ . **15.23.**  $(-1 \pm i\sqrt{5})/2$ .

**15.24.**  $(1 \pm i\sqrt{7})/2, (-1 \pm i\sqrt{7})/2$ . **15.25.**  $\pm 2, 1 \pm i\sqrt{3}, -1 \pm i\sqrt{3}$ .

**15.26.**  $\pm 1, \pm i, \pm 2, \pm 2i$ .

**Контрольные задания. Вариант 15.1.** **1.** а)  $16 + 9i$ ; б)  $-3i$ ;

- в)  $46+72i$ ; г)  $0,82-0,24i$ . **2.** а)  $2\sqrt{2}[\cos(7\pi/12)+i\sin(7\pi/12)]$ ;  
 б)  $\sqrt{2}[\cos(11\pi/12)-i\sin(11\pi/12)]$ ;  
 в)  $1024[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]=512(1+i\sqrt{3})$ ; г)  $\sqrt[3]{4}[\cos(\pi/9)-i\sin(\pi/9)]$ ,  $\sqrt[3]{4}[\cos(5\pi/9)+i\sin(5\pi/9)]$ ,  $\sqrt[3]{4}[\cos(11\pi/9)+i\sin(11\pi/9)]$ . **3.**  $-1/2+i\sqrt{3}/2$ . **4.** а)  $\pm 2i\sqrt{6}/3$ ; б)  $1\pm i$ ;  
 в)  $3\pm 2i$ ;  $-3\pm 2i$ ; г)  $2\pm 2i$ ;  $-2\pm 2i$ . *Вариант 15.2.* **1.** а)  $8-13i$ ;  
 б)  $-4+3i$ ; в)  $-28-46i$ ; г)  $0,52-0,14i$ .  
**2.** а)  $2\sqrt{2}[\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)]$ ;  
 б)  $(\sqrt{2}/2)[\cos(5\pi/12)+i\sin(5\pi/12)]$ ;  
 в)  $32[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)]=32i$ ; г)  $\sqrt[3]{2}[\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)]=$   
 $(\sqrt[3]{2}/2)(\sqrt{3}+i)$ ,  $\sqrt[3]{2}[\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6)]=$   
 $(\sqrt[3]{2}/2)(-\sqrt{3}+i)$ ,  $\sqrt[3]{2}[\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)]=-\sqrt[3]{2}i$ .  
**3.**  $-1/2+i\sqrt{3}/2$ . **4.** а)  $\pm i\sqrt{5}/2$ ; б)  $3\pm i\sqrt{7}$ ; в)  $4\pm i$ ;  $-4\pm i$ ;  
 г)  $1\pm i$ ;  $-1\pm i$ . *Вариант 15.3.* **1.** а)  $-5+13i$ ; б)  $11+i$ ; в)  $-66-38i$ ; г)  $0,18-0,74i$ . **2.**  $2\sqrt{2}[\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)]$ ;  
 б)  $\sqrt{2}[\cos(7\pi/12)-i\sin(7\pi/12)]$ ; в)  $1024[\cos(\pi/3)-i\sin(\pi/3)]=$   
 $512(1-i\sqrt{3})$ ; г)  $\sqrt[3]{4}[\cos(\pi/9)+i\sin(\pi/9)]$ ,  
 $\sqrt[3]{4}[\cos(7\pi/9)+i\sin(7\pi/9)]$ ,  $\sqrt[3]{4}[\cos(5\pi/9)-i\sin(5\pi/9)]$ .  
**3.**  $-1/2-i\sqrt{3}/2$ . **4.** а)  $\pm i\sqrt{14}/2$ ; б)  $-5\pm i\sqrt{3}$ ; в)  $1\pm 2i$ ;  $-1\pm 2i$ ;  
 г)  $\sqrt{2}/2\pm i\sqrt{2}/2$ ;  $-\sqrt{2}/2\pm i\sqrt{2}/2$ . **Тест 15.** **1.** **2.** **2.**  $150^\circ$ .  
**3.** 20. **4.**  $-0,5$ . **5.** 170. **6.**  $165^\circ$ . **7.** 1 000 000. **8.**  $-120^\circ$ . **9.**  $162^\circ$ .  
**10.** 4.

### Учебно-тренировочные тесты по разделам IV–VII

- Тест МА – 2.1.* **1.** **2.** **2.** **1.** **3.** **3.** **4.** **3.** **5.**  $-0,25$ . **6.**  $0,75$ . **7.** 10. **8.** **2.**  
**9.** 1; **4.** 10.  $0,5$ . **11.** **6.** **12.** **3.** **13.** **2.** **14.** **2**; **3.** **15.** 0. **16.**  $-2$ . **17.**  $0,75$ .  
**18.** **2.** **19.** **2**; **3.** **20.** **4.** *Тест МА – 2.2.* **1.** **2.** **2.** **2.** **3.** **2.** **4.** **4.** **5.**  $0,5$ .  
**6.**  $3,2$ . **7.** 57. **8.** **2.** **9.** **3.** **10.**  $-2$ . **11.** 11. **12.** **4.** **13.** **1.** **14.** **1**; **4.** **15.** **2.**  
**16.** **1.** **17.**  $0,125$ . **18.** **1.** **19.** **5.** **20.** **1.** *Тест МА – 2.3.* **1.** **3.** **2.** **1.** **3.** **3.**  
**4.** **12.** **5.** **2.** **6.** **1.** **7.**  $1,5$ . **8.** **1.** **9.** **2**; **4.** **10.**  $0,5$ . **11.**  $-0,5$ . **12.** **1.** **13.** **3.**  
**14.** **3**; **5.** **15.** **1.** **16.** **1.** **17.**  $-0,009$ . **18.** **3.** **19.** **5**; **6.** **20.** **7.**

## Предметный указатель

- Абсолютная величина** 264  
**Аксиома** 21  
**Аксиоматический метод** 21  
**Алгебраическое дополнение** 41  
**Аннулирующий многочлен** 33  
**Антъе** 321  
**Аргумент** 266, 474  
— комплексного числа 823  
**Асимптота** 419—422  
— вертикальная 420  
— горизонтальная 420  
— наклонная 421, 422  
**Асимптоты гиперболы** 204  
**Ассоциативный закон умножения матриц** 35  
**Базис** 135  
— ортогональный 140  
— ортонормированный 140  
**Базисное решение** 92—94  
**Базисные строки** 56  
**Базисный минор** 56, 92  
**Балансовый анализ** 99—104  
— —, вектор валового выпуска 101  
— —, конечного продукта 101  
— —, коэффициенты прямых затрат 100  
— —, матрица полных затрат 101  
— —, — прямых затрат 101  
— —, основная задача 101  
— —, продуктивная модель 102  
— —, соотношения баланса 100  
— —, стоимостный межотраслевой баланс 100  
**Бесконечно большая величина** 304  
— — — при  $x \rightarrow x_0$ ,  $x \rightarrow \infty$  306  
**Бесконечно большие величины, свойства** 306  
— — —, связь с бесконечно малыми 306, 307  
**Бесконечно малая величина** 300, 301  
— — — более высокого порядка 304  
— — — — низкого порядка 304  
— — — одного порядка 304  
— — — при  $x \rightarrow x_0$ ,  $x \rightarrow \infty$  304  
**Бесконечно малые величины, свойства** 302, 303  
— — —, связь с бесконечно большими 306, 307  
— — — эквивалентные 304  
**Беспорядок** 39  
**Бином Ньютона** 312, 786  
**Биномиальный ряд** 786  
**Вариационное исчисление** 497  
**Вектор** 124  
— единичный 126

- нулевой 124, 131, 133
- $n$ -мерный 130
- противоположный 125
- , проекция на ось 129
- , разложение по векторам 127
- , — — базису 137
- столбец 27
- строка 27
- , условие ортогональности (перпендикулярности) 129
- , — коллинеарности (параллельности) 129
- Векторное пространство 132
- Векторы коллинеарные 124
- компланарные 125
- Величина постоянная 265
- переменная 265
- Верхняя грань множества 265
- Вершина параболы 208
- Вершины гиперболы 203
- эллипса 202
- Вклад ученых в развитие математики 24
- Вогнутая функция 416
- Возведение в степень комплексного числа 825
- ряда в квадрат 801
- — матрицы 32
- Возрастание функций, достаточное условие 406, 407
- —, необходимое условие 407, 408
- Возрастающая функция 267
- Вторая производная 363
- Второй дифференциал 370
- Второй замечательный предел 313, 314
- Выпуклая функция 416—419, 496
- вверх функция 416—419, 496
- вниз функция 416, 496
- —, необходимое и достаточное условие экстремума 496
- —, — — глобального экстремума 496
- Выпуклое множество 495
- Выпуклость функции, достаточное условие 418
- —, необходимое условие 418
- —, схема исследования 419
- Геометрия Евклида 20
- Лобачевского 21
- Гессиан 493
- Гипербола 203—206
- , каноническое уравнение 203
- равносторонняя 206
- сопряженная 204
- , характеристическое свойство 204
- Гиперповерхность 477
- Глобальный максимум 314, 494, 496
- минимум 314, 494, 496
- Градиент 486, 487, 489, 491
- График функции двух переменных 477, 478
- — одной переменной 273
- Двойной интеграл 627, 628
- — в полярных координатах 629, 630
- —, геометрический смысл 628
- Дедукция 23
- Деление двух комплексных чисел 821
- отрезка в данном отношении 187, 188
- Диагональ матрицы главная 28, 39
- — побочная 39
- Директриса параболы 208

- Дисконтирование 625  
 Дифференциал 365—367  
   — второго порядка 370, 371  
   —, геометрический смысл 366  
   —, инвариантность формы 367  
   — независимой переменной 365  
   —  $n$ -го порядка 370, 371  
   —, оценка погрешности 369, 370  
   —, применение в приближенных вычислениях 368, 369  
   —, свойства 366, 367  
   — функции двух (нескольких) переменных 483, 484  
   — — — —, геометрический смысл 484  
 Дифференциальное исчисление 344—427  
 Дифференциальное уравнение 661  
   — — автономное 668  
   — — второго порядка 678—689  
   — — — —, допускающее понижение порядка 678, 679  
   — — — — — линейное 679—689  
   — — — — — неоднородное 683—689  
   — — — — — однородное 680—683  
   — — в частных производных 661  
   — — неполное 671, 672  
   — —, общее решение 663  
   — — обыкновенное 661  
   — — первого порядка 674—678  
   — — — —, геометрический смысл 666, 667  
   — — — — — линейное 676—678  
   — — — — — однородное 674—676  
   — — — — — с разделяющимися переменными 671—674  
   — —, разрешенное относительно старшей производной 662  
   — —, решение 662  
   — —, частное решение 663  
 Дифференцирование 347  
   —, основные правила 351, 352  
   —, таблица производных 361, 362  
   — сложной функции двух переменных 487—489  
 Дифференцируемая функция 347—349, 483  
   — —, достаточное условие 484, 485  
 Длина вектора 124, 127, 140  
   — —, свойства 140  
 Дополнение множества 263  
 Достаточное условие 23  
 Евклидово пространство 139  
 $\varepsilon$ -окрестность точки 265  
 Зависимость между координатами вектора в разных базисах 137, 138  
   — — непрерывностью и дифференцируемостью функции 348, 349  
 Задача интегрирования дифференциального уравнения 662  
   — Коши 667  
   — о касательной 344, 345  
   — — непрерывном начислении процентов 310, 311  
   — — площади криволинейной трапеции 587, 588  
   — — — — — производительности труда 346



- — скорости движения 345, 346
- об изменении численности населения 664
- — оптимальном распределении ресурсов 506
- — — потреблении 506
- потребительского выбора 506
- сглаживания экспериментальных зависимостей 503
- Значащая цифра 283
- Извлечение корня из комплексного числа** 825, 826
- Изокванта 505
- Инверсия 43
- Индукция 23
- Интеграл (см. соотв. названия)
- Интегральная кривая 662
- Интегральная сумма 588, 589
- —, геометрический смысл 588, 589
- — функции двух переменных 627
- Интегрирование 536
- методом разложения 541—543
- — введения переменных под знак дифференциала 544, 545
- — замены переменной 543, 545, 546, 603, 604
- некоторых видов иррациональностей 544—557
- по частям 546—549, 604, 605
- простейших рациональных дробей 549—554
- тригонометрических функций 557, 558
- Интегрируемая функция на отрезке 589
- — в области 627
- Интегрируемость функции, достаточное условие 592
- Интервал 264
- бесконечный 264
- сходимости 779
- Интерполирование 281
- квадратичное 282
- линейное 281
- обратное 281
- Интерполяционная формула 281, 282
- Интерполяционные поправки 281
- Исследование операций 497
- функций и построение графиков, схема 422, 423
- Касательная** 345
- Квадратичная форма 150—155
- —, канонический вид 152
- —, матричный вид 150
- — отрицательно определенная 154
- — —, необходимое и достаточное условие 154
- — положительно определенная 154
- — —, необходимое и достаточное условие 154
- Квадратный трехчлен 209
- Квантор общности 295
- существования 295
- Коллинеарные векторы 124
- Комплексная плоскость 822
- —, действительная ось 822
- —, мнимая ось 822
- Комплексные числа 820
- —, алгебраическая форма 820
- —, показательная форма 827

- —, свойства арифметических операций 823, 824
- — сопряженные 821
- —, тригонометрическая форма 823
- Композиция функций 274
- Компоненты вектора 127, 130
- Координатная плоскость 186
- Координаты вектора 126
  - текущие 189
  - точки 186
- Коэффициент Джини 624
- Коэффициенты степенного ряда 777
- Кривая второго порядка, поллярное уравнение 212
  - Гаусса 618
  - Лоренца 624
- Кривые безразличия 280, 506
  - второго порядка 198
- Критерий продуктивности матрицы 102
  - Сильвестра 154
- Критическая точка 410, 491
- Линейная комбинация векторов 132
  - — строк матрицы 55
  - — функций 680
- Линейная модель обмена (международной торговли) 155–158
- Линейно зависимые векторы 132
  - — строки 55
  - — функции 680
- Линейно независимые векторы 132
  - — строки 56
  - — функции 680
- Линейное отображение 141
  - преобразование 141
  - пространство 131
- Линейный оператор 141
- Линия бюджетного ограничения 280
  - уровня 478, 506
- Логистическая кривая 692
- Логические рассуждения 22
- Локальный экстремум 408, 490
- Максимальное число базисных решений 93
- Максимум функции 408, 490
- Маржинальная величина 373
- Математика 20
  - , периоды развития 20, 21
- Математическая индукция 23
  - интуиция 22
  - модель 22
- Математическая модель демографического процесса 664
- Математические доказательства 22
- Матрица 26
  - взаимная 48
  - Гессе 493
  - диагональная 28
  - единичная 28
  - квадратичной формы 150
  - квадратная 28
  - невырожденная (неособенная) 48
  - нулевая 28
  - обратная 47
  - —, алгоритм вычисления 49
  - —, необходимое и достаточное условие существования 48
  - оператора 143
  - перехода к новому базису 137
  - симметрическая 150

- системы 80
- — расширенная 88
- скалярная 28
- , след 35
- согласованная 29
- союзная 48
- столбец 27
- — переменных 80
- — свободных членов 80
- строка 27
- ступенчатая 53
- транспонированная 34
- треугольная 42
- присоединенная 48
- продуктивная 102
- Матрицы подобные 144
- Матричная алгебра 26
- Метод
  - вариации произвольных постоянных 683, 684
  - Гаусса 86—91, 93
  - —, условие несовместимости системы 87
  - —, преимущества 93
  - Жордана — Гаусса 112, 113
  - — —, правило прямоугольника 112
  - координат Декарта 21
  - математики 22
  - множителей Лагранжа 498, 499
  - наименьших квадратов 501—503
  - обратной матрицы 83—85
- Минимум функции 408, 410
- Минор элемента матрицы 40, 41
- $k$ -го порядка 51
- Мнимая единица 821
- Мнимые числа 820
- Многочлен 275
- Множества эквивалентные 263
- Множество 262
  - бесконечное 263
  - действительных чисел 264
  - замкнутое 494
  - иррациональных чисел 264
  - конечное 263
  - натуральных чисел 264
  - ограниченное сверху (снизу) 263
  - открытое 666
  - пустое 262
  - целых чисел 264
  - числовое 263
- Множитель Лагранжа 498
- Модель
  - естественного роста 690
  - Леонтьева 99—104
  - обмена (международной торговли) 155—157
  - —, структурная матрица торговли 156
  - —, уравнение сбалансированной торговли 157
  - роста в условиях конкурентного рынка 691
  - экономической динамики 690—694
- Модуль вектора 124
  - комплексного числа 822
  - числа 264
- Монотонная функция 268
- Мощность множества 263
- Наименьшее значение 414, 415
- Наибольшее значение 414, 415
- Наибольшее и наименьшее значения 414, 415
  - — — на интервале 415
  - — — — отрезке 414

- 
- — — функции двух переменных 494
  - — — —, схема нахождения 415
  - Направленный отрезок 124
  - Направляющие косинусы 129, 485
  - Направляющий вектор прямой 215
  - Натуральные логарифмы 314
  - Невозрастающая функция 268
  - Невязка 501
  - $n$ -я частичная сумма ряда 737
  - Независимость характеристического многочлена оператора от выбора базиса 146
  - Необходимое условие 23
    - и достаточное условие 23
  - Неограниченная функция 270, 306, 618
  - Неопределенный интеграл 536
    - —, «неберущиеся» интегралы 559
    - —, свойства 536—538
    - —, таблица основных интегралов 538, 539
  - См. также* Интегрирование
  - Неперово число 314
  - Непрерывность в точке функции двух переменных 480
    - функции в точке 316—319
    - —, свойства 319, 320
    - — — — слева 318
    - — — — справа 318
    - — на отрезке 321, 322
    - — на промежутке 320
  - Неравенство Коши — Буняковского 140
  - треугольника 140
  - Несобственный интеграл 615
    - —, геометрический смысл 616
    - — от неограниченной функции 618, 619
    - — с бесконечными пределами 615—617
    - — сходящийся 615
    - — расходящийся 615
  - Неубывающая функция 268
  - $n$ -мерное линейное пространство 131
  - $n$ -мерный вектор 130
    - —, компоненты 130
  - Нечетная функция 267
  - Неэлементарная функция 275
  - $n$ -й остаток ряда 740
    - член ряда 736
  - Нижняя грань множества 263
  - Норма вектора 124, 140
  - Нормальный вектор плоскости 213
  - $n$ -й член последовательности 294
  - Область значений функции 266
    - определения функции 266
  - Образ вектора 141
  - Обратная пропорциональная зависимость 205
    - функция 273
  - Общее решение системы линейных однородных уравнений 97
    - уравнение прямой 194
    - — —, исследование 194
  - Общий член последовательности 294
  - Общий член ряда 736
  - Объединение множеств 262
  - Ограниченная функция 268

- Однородная функция 674  
 Окрестность точки 265, 476  
 Окружность, нормальное уравнение 199  
 Оператор 141  
   — линейный 141  
   — нулевой 144  
   — тождественный 144  
 Определенный интеграл 589  
   — —, верхний предел 589  
   — —, вычисление длины дуги кривой 613, 614  
   — —, — площадей плоских фигур 605—611  
   — —, — площадей поверхности вращения 614  
   — —, объемов тел вращения 611, 613  
   — — в экономике 623—626  
   — — — —, вычисление дисконтируемой суммы 625, 626  
   — —, вычисление коэффициента Джини 624  
   — — — объема продукции 623, 624  
   — — — среднего времени 626  
   — —, геометрический смысл 590, 591  
   — —, достаточное условие существования 592  
   — — как функция верхнего предела 597  
   — —, нижний предел 589  
   — — приближенное вычисление по формуле трапеций 620—623  
   — —, приближенное вычисление с помощью рядов 810  
   — —, свойства 593—596  
   — —, экономический смысл 591, 592  
 Определитель матрицы 37—47  
   — —, геометрическая интерпретация 38, 39  
   — — второго порядка 37  
   — — диагональной 43  
   — —  $n$ -го порядка 40  
   — —, свойства 43—46  
   — — первого порядка 37  
   — — третьего порядка 37  
   — — треугольной 43  
   — произведения двух квадратных матриц 46  
   — системы 82  
 Орт 126  
 Ортогональные векторы 140  
 Ортогональный базис 140  
 Ортонормированный базис 140  
 Ось абсцисс 186  
   — аппликата 187  
   — ординат 186  
 Относительная скорость изменения функции 359  
 Отрезок 264  
 Парабола, каноническое уравнение 208  
   —, характеристическое свойство 208, 209  
 Параболоид 477  
 Параметр 265, 273  
   — параболы 224  
 Паутинообразная модель 279  
 Первообразная 534, 535  
 Первый замечательный предел 310, 311  
 Переменная зависимая 266  
   — независимая 266  
 Переменные базисные 92  
   — неосновные 92  
   — основные 92

- свободные 92
- Пересечение множеств 263
- Перестановка 39
- Переход к новому базису 137
- Период 268
  - математики переменных величин 21
  - современной математики 21
  - элементарной математики 20
- Периодическая функция 268
- Повторный интеграл 628
- Погрешность абсолютная 282
  - относительная 282
- Подматрица 51
- Подмножество 262
- Подобные матрицы 144
- Подынтегральная функция 536
- Подынтегральное выражение 536
- Показательный закон роста 315
- Поле направлений 666
- Полином 275
- Полуинтервал 264
  - бесконечный 264
- Полуось гиперболы действительная 203
  - — мнимая 203
  - эллипса 201
- Полярная ось 210
- Полярные координаты 210—212
- Полярный радиус 210
  - угол 211
- Правила приближенных вычислений 282—284
- Правило Лопиталя 402—406
  - запасной цифры 283
  - многоугольника 125
  - округления 283
  - параллелепипеда 125
  - параллелограмма 125
  - Сарруса 38
  - треугольника 125
  - треугольников 38
  - четных знаков 283
- Предел
  - функции в бесконечности 296, 297
  - — —, геометрический смысл 297
  - функции двух переменных 479
  - — при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$  298
  - — в точке 298
  - — —, геометрический смысл 298, 299
  - — односторонний слева при  $x \rightarrow x_0$  300
  - — — справа при  $x \rightarrow x_0 + 0$  300
  - числовой последовательности 295
  - — —, геометрический смысл 296
- Пределы, раскрытие неопределенностей 323—331
- Предельная величина 373
  - выручка 372
  - норма замещения ресурса 509
  - полезность 372, 507
  - производительность 372
  - склонность к потреблению (сбережению) 377

- Предельные издержки 372, 377, 428  
— —, оптимальный выпуск продукции 372, 373  
Предельный анализ 373  
— доход 372—374  
— продукт 372  
Преобразование 141  
— графиков 275—277  
Признак сходимости 740  
— — сравнения 742, 743  
— — — предельный 745  
— — Даламбера 746, 747  
— — знакопеременного ряда 755  
— — интегральный 748—751  
— — —, геометрический смысл 750  
— — Коши 747, 748  
— — Лейбница 752, 753  
— — —, оценка остатка знако-  
чередующегося ряда 754  
— — необходимый 740, 741  
— — — и достаточный 740  
Признаки существования  
предела 309, 310  
Проекция вектора на ось 129  
Произведение вектора на  
число 124, 127  
— линейного оператора на  
число 143  
— линейных операторов 143  
— матриц 29  
— матрицы на число 29  
Произведение комплексных  
чисел 821, 823  
Производная 346  
— второго порядка 363  
— — —, механический смысл  
363  
— в экономике 371—378, 428,  
429  
— — —, закон убывающей до-  
ходности 429  
— — —, — — полезности 429  
— — —, условие оптимально-  
сти выпуска продукции  
428  
— — —, — наиболее эконо-  
мичного производства 428  
—, геометрический смысл  
347  
— левая 348  
— логарифмическая 359  
— логарифмической функ-  
ции 357, 358  
—, механический смысл 347  
— неявной функции 362, 363  
— обратной функции 356,  
357  
— по направлению 485, 486,  
491  
— показательной функции  
358  
— правая 348  
— сложной функции 353—  
355  
— степенной функции 350,  
358  
— степенно-показательной  
функции 359  
— схема вычисления 349 350  
— третьего и  $n$ -го порядка  
363  
— тригонометрических фун-  
кций 360, 361  
— функции, заданной пара-  
метрически 363, 364  
—, экономический смысл  
347, 371—378  
*См. также* Дифференциро-  
вание  
Производственная функция  
278, 475

- Промежуток 264  
 Прообраз вектора 141  
 Проценты простые 314  
   — сложные 315  
 Равенство векторов 130  
   — матриц 27  
   — множеств 262  
   — столбцов (строк) 55  
 Равновесная цена 279  
 Равносильные системы уравнений 80  
 Радиус-вектор комплексного числа 822  
 Разложение в ряд Маклорена функций 785—788  
 Разложение вектора по базису 135, 136  
 Размер матрицы 26  
 Размерность пространства 134  
 Разность векторов 126  
   — множеств 263  
 Разность комплексных чисел 821  
 Разрешающая строка 112  
 Разрешающий столбец 112  
   — элемент 112  
 Ранг матрицы 51—56  
   — квадратичной формы 153  
   — оператора 143  
 Расстояние между двумя точками плоскости 187, 479  
   — от точки до прямой 197  
   — — — — плоскости 217  
 Ряд Маклорена 784, 785  
   — —, необходимое и достаточное условие разложения функции 785  
   — — для функции  $e^x$  785  
   — — — —  $\sin x$  785, 786  
   — — — —  $\cos x$  786  
   — — — —  $\ln(1+x)$  787  
   — Тейлора 785, 790  
 Ряды (см. соотв. названия)  
 Свойства векторов линейного пространства 133  
   — линейных операций над матрицами 30  
   — — — — векторами 131  
 Сегмент 264  
 Седловая точка 491  
 Символ равносильности 23, 295  
 Система двух линейных уравнений 82  
   — — — —, исследование 82, 83  
   — — — — координат полярная 210  
   — — — — прямоугольная 286  
   — — — — линейных уравнений 79  
   — — — — в векторной форме 81  
   — — — — в матричной форме 80  
   — — — —, запись с помощью знаков суммирования 80  
   — — — —, исследование 91, 92  
   — — — —, коэффициенты при переменных 79  
   — — — — неопределенная 80  
   — — — — несовместная 80  
   — — — — определенная 80  
   — — — —, решение 80  
   — — — —, свободные члены 79  
   — — — — совместная 80  
   — — — —, структура общего решения 98  
 Система дифференциальных уравнений 694—700  
   — — — автономная 696  
   — — — — в векторной форме 696  
   — — — — линейная 696  
   — — — — нормальная 694  
   — — — —, теорема существования и единственности решения 695



- нормальных уравнений 503—505
- Система линейных однородных уравнений 96—99
  - — — —, исследование 99
  - — — —, общее решение 97
  - — — —, свойства решений 96
- Скалярное произведение векторов 127, 139
  - — —, свойства 139
  - — —, экономический смысл 139
- Скалярный квадрат вектора 128
- След матрицы 35, 36
- Сложение векторов 125, 130
  - матриц 29
- Сложная функция 274
- Собственное значение линейного оператора (матрицы) 145
  - — — —, свойства 147, 148
- Собственный вектор линейного оператора (матрицы) 145
- Сочетания, число сочетаний из  $n$  по  $r$  92
- Способы задания функции 266, 267
- Средние издержки 377, 428
- Средний доход 373
- Стационарная точка 410, 506, 669
- Степенной ряд 777
  - — биномиальный 786
  - —, интервал сходимости 779
  - —, область сходимости 777, 780, 781
  - —, применение в приближенных вычислениях 805—812
  - — —, к решению дифференциальных уравнений 811—813
  - —, радиус сходимости 779, 780
  - —, свойства 782, 783
- Строго монотонная функция 268
- Сумма векторов 125, 127
  - линейных операторов 143
  - матриц 29
- Сумма комплексных чисел 821, 823
  - ряда 737
- Суперпозиция функций 274
- Сходимость ряда 737
  - —, свойства 741
- Темп изменения функции 359
- Теорема Абеля 777—779
  - Больцано — Коши 322
  - Вейерштрасса вторая 321
  - — первая 321
  - Коши 402
  - Крамера 83
  - Кронекера — Капелли 91
  - Лагранжа 400—402
  - Лапласа 42
  - Ньютона — Лейбница 600
  - о единственности представления вектора линейного пространства 135
  - — зависимости между матрицами оператора в разных базисах 144
  - — законе инерции квадратичных форм 153
  - — матрице оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов 149
  - — множестве первообразных 535

- — неизменности ранга матрицы при элементарных преобразованиях 52
- — перпендикулярности градиента линии уровня 486, 487
- — погружении дискретного аргумента  $n$ ; в непрерывный 758
- — приведении квадратичной формы к каноническому виду 152
- — — производной интеграла по верхнему пределу 598—600
- — производной обратной функции 356
- — размерности и базисе пространства 136
- — ранге матрицы 56
- — связи бесконечно малых с пределами функций 301—303
- — — сложной функции 353, 354
- — среднем 596
- — существовании в  $n$ -мерном пространстве ортонормированного базиса 141
- — числе решений любой фундаментальной системы решений 97
- об общем решении системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными 98
- Римана 756
- Ролля 399, 400
- существования и единственности 665, 666
- Ферма 398, 399
- — , экономический смысл 428
- Теоремы о пределах 307—309
- Теоремы об общем решении дифференциального уравнения второго порядка 681, 682, 685
- Точка граничная 494
- Точка максимума 408
  - минимума 408
  - множества 264
  - перегиба 418
  - — , достаточное условие 418, 419
  - — , необходимое условие 418
  - пересечения прямых 197
  - разрыва 319
  - — второго рода 319
  - — первого рода 319
  - устранимого разрыва 319
- Транспонирование матриц 34
- Убывание функций, достаточное условие 407
  - — , необходимое условие 407, 408
- Убывающая функция 267
- Угловой коэффициент 190
- Угол между векторами 129, 140
  - — двумя прямыми 195
  - — плоскостями 214
  - — прямой и плоскостью 216
- Умножение матриц 29, 30
  - — , его особенности 30, 31
  - матрицы на число 29
- Уравнение касательной 344, 345, 347
  - линии 188
  - нормали 347
  - плоскости общее 213
  - — в отрезках 214
  - — , проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору 213

- прямой в отрезках 193
- —, проходящей через данную точку в данном направлении 191
- —, — — две данные точки 192
- — с угловым коэффициентом 190
- пучка прямых 192
- Уравнение связи** 497
- Уравнения прямой в пространстве** 215, 216
  - — — — канонические 215
  - — — — параметрические 215
  - — — —, проходящей через две данные точки 216
- Уровень** 478
- Условие параллельности плоскостей** 215
  - — прямой и плоскости 217
  - — прямых 195, 216
  - перпендикулярности прямых 196, 216
- Условный максимум** 497, 499
  - минимум 497
  - экстремум 497
- Фазовая кривая** 699
  - прямая 668
  - траектория 670
- Фазовое пространство** 699
- Фазовый портрет** 670
- Фокус параболы** 208
- Фокусы гиперболы** 203
  - эллипса 202
- Формула Муавра** 825
  - Ньютона — Лейбница 600
  - Тейлора 789, 790
  - —, остаточный член в форме Лагранжа 789
  - трапеций 621
  - Эйлера 826
- Формула сложных процентов** 315
- Формулы Крамера** 83
- Фундаментальная система решений** 97
- Функции гиперболические** 272
  - обратные тригонометрические 272
  - Торнквиста 279
  - тригонометрические 270, 271
- Функция** 266
  - аддитивная 278
  - алгебраическая 275
  - , аналитический способ задания 266
  - выпуска 278
  - гладкая 349
  - , графический способ задания 267
  - двух переменных 474, 476, 480
    - — —, полное приращение 481
    - — —, частное приращение 481
  - Дирихле 267
  - дробно-рациональная 275
  - заданная параметрически 273
  - издержек 278, 280
  - иррациональная 275
  - кусочно-гладкая 349
  - Кобба — Дугласа 476, 507, 623
  - Лагранжа 498
  - логарифмическая 270
  - мультипликативная 278
  - нескольких переменных 278, 474
    - — — квадратическая 475

- 
- — — линейная 475
  - — — логарифмическая 475
  - — — постоянной эластичности 475, 508
  - — — с постоянной эластичностью замещения 476
  - нечетная, четная 267
  - неявная 273
  - обратная 273
  - показательная 270
  - полезности 278, 475, 506
  - полных затрат 280
  - потребления 278
  - предложения 278
  - предпочтений 278
  - производственная 278, 475
  - рациональная 275
  - сепарабельная 278
  - , словесный способ задания 267
  - спроса 278
  - степенная 269
  - , табличный способ задания 266
  - трансцендентная 275
  - целая рациональная 275
  - явная 273
  - Характеристический вектор** 145
    - многочлен линейного оператора (матрицы) 146
  - Характеристическое значение оператора (матрицы)** 145
    - уравнение оператора (матрицы) 146
  - Характеристическое уравнение дифференциального уравнения второго порядка** 681, 682
  - Целая часть числа** 321
  - Частная производная** 481
    - — второго порядка 491
    - —, геометрический смысл 481, 482
  - Четная функция** 269
  - Численный метод вычисления определенного интеграла** 620
  - Число  $e$**  313, 314
    - Эйлера 313
  - Числовая ось (прямая)** 186, 264
    - последовательность 295
    - — расходящаяся 295
    - — сходящаяся 295
  - Числовой ряд** 736
    - — абсолютно сходящийся 755
    - — гармонический 741, 742, 744
    - — геометрический 737, 738, 744
    - — знакопеременный 755
    - — знакочередующийся 752
    - — обобщенный гармонический 744, 751
    - — расходящийся 738
    - —, свойства сходящихся рядов 739
    - — с положительными членами 742—752
    - — сходящийся 737
    - — условно сходящийся 755, 756
  - Чистая продукция** 105
  - Чисто мнимые числа** 820
  - Эквивалентные системы уравнений** 80
  - Экономическая область** 505, 506
  - Экспонента** 358
  - Экспоненциальный закон роста** 315

- Экстремум функции 408—414  
— —, второе достаточное условие 413  
— —, необходимое условие 409, 410  
— —, первое достаточное условие 411  
— —, схема исследования 412, 492  
— — двух переменных 490—494  
— — — —, достаточное условие 492  
— — — —, необходимое условие 490, 491  
— —  $n$  переменных, достаточное условие 493, 494  
— — условный 497—500
- Эксцентриситет гиперболы 203  
— эллипса 202  
Эластичности коэффициент замещения 508—510  
— — перекрестный 508  
Эластичность функции 375, 376  
— —, свойства 375, 376  
— — частная 508  
Элементарная область 628  
Элементарная функция 274  
Эллипс 201, 202  
— каноническое уравнение 201  
— характеристическое свойство 202  
Эмпирическая формула 500

**Покупайте наши книги:**

**В офисе издательства «ЮРАЙТ»:**

111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4,  
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, www.urait.ru

**В логистическом центре «ЮРАЙТ»:**

140053, Московская область, г. Котельники, мкр. Ковровый, д. 37,  
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, www.urait.ru

**В интернет-магазине «ЮРАЙТ»:** www.urait-book.ru,

e-mail: order@urait-book.ru, тел.: (495) 742-72-12

**Для закупок у Единого поставщика** в соответствии  
с Федеральным законом от 21.07.2005 № 94-ФЗ обращайтесь  
по тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, vuz@urait.ru

*Учебное издание*

## **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА**

Учебник и практикум

Под редакцией *Н. Ш. Кремера*

Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Гарнитура «PetersburgC». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 56,81. Доп. тираж 2500 экз. Заказ №

**ООО «ИД Юрайт»**

111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4.

Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru





## Кремер Наум Шевелевич

профессор, заведующий кафедрой высшей математики  
Всероссийского заочного финансово-экономического инсти-  
тута, член-корреспондент Академии экономических наук.

## Высшая математика для экономического бакалавриата

В серию «Бакалавр» входят учебники самых известных авторов рекомендуемые Министерством образования и науки РФ, Учебно-методическими объединениями и преподавателями российских вузов. Издания соответствуют **новым образовательным стандартам третьего поколения** для направлений подготовки бакалавров.

В содержании учебников отражены компетенции: **знать, уметь, владеть**; представлен учебно-методический комплекс.

Учебники серии – крепкий фундамент вашей будущей карьеры.

Цель данного издания – научить будущих специалистов на основе фундаментального математического аппарата решать прикладные задачи современной экономики.

Особенность учебника заключается в том, что он содержит не только основы классической теории по различным разделам высшей математики, но и практикумы к ним с решениями типовых и более сложных примеров и задач, в том числе экономической направленности.

Для лучшего закрепления материала в учебнике приводятся задачи для самостоятельного решения, итоговые контрольные и тестовые задания как по каждому разделу, так и по курсу в целом.