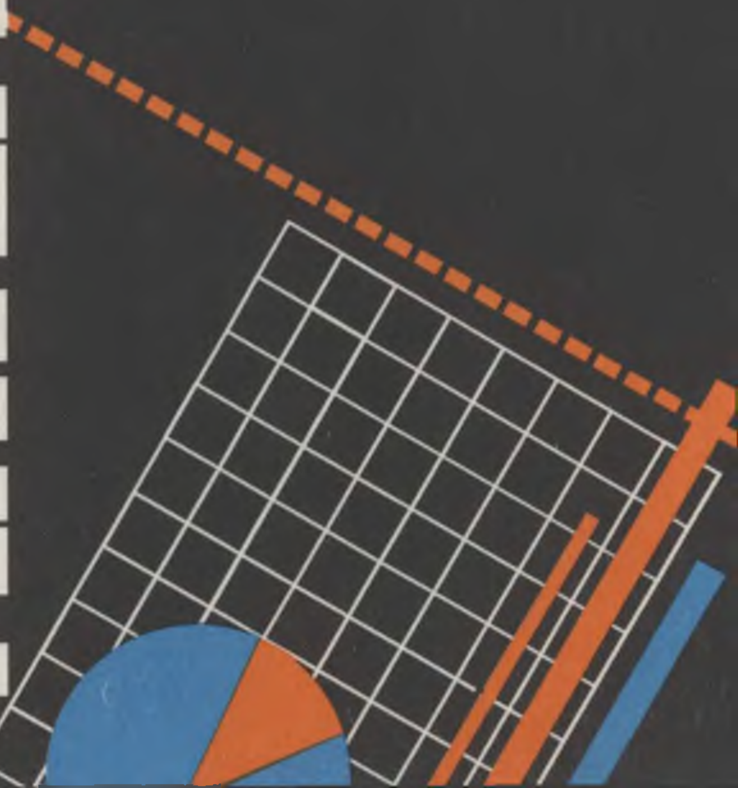
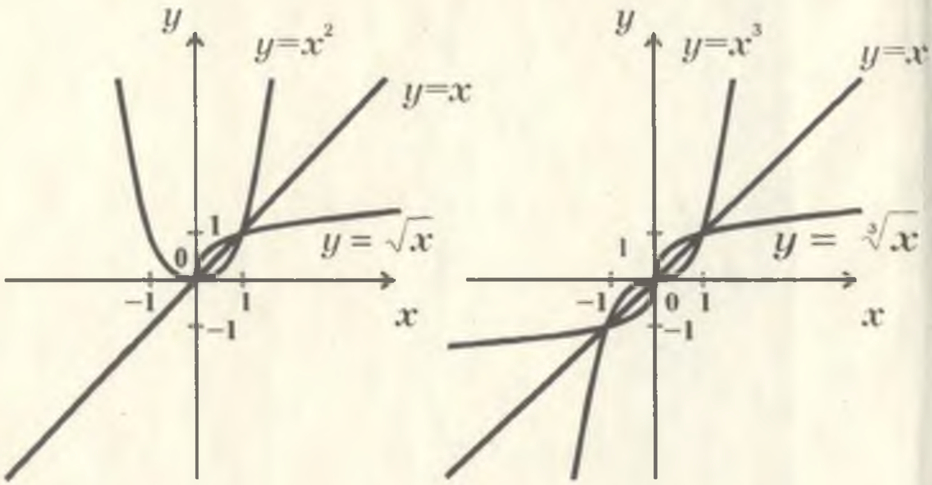
МАТЕМАТИКА

для поступающих в экономические вузы



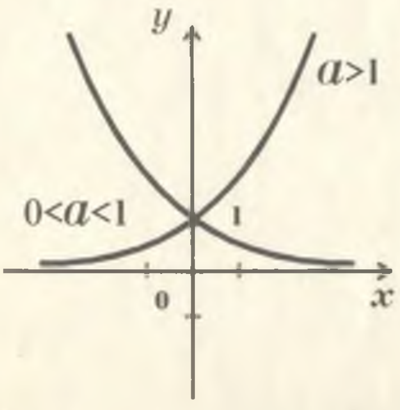
ГРАФИКИ ОСНОВНЫХ ЭЛ

а) степенная функция $y=x^n$



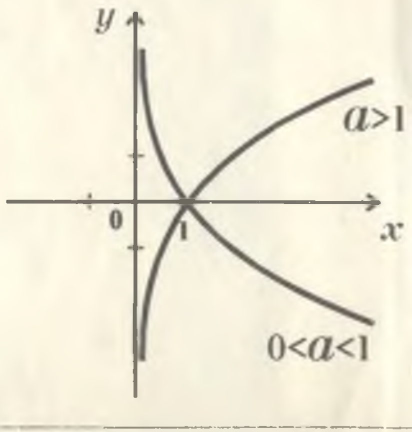
б) показательная функция

$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$



в) логарифмическая функция $y=\log_a x$

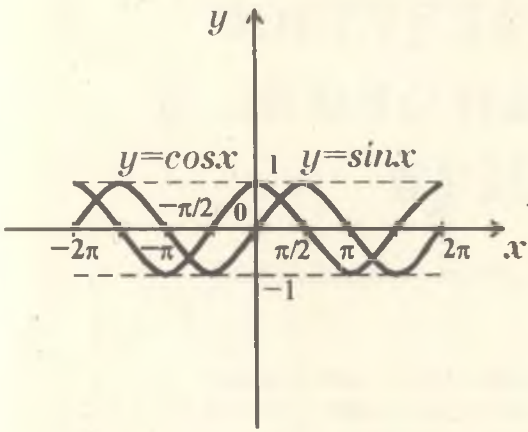
$(a>0,\ a\neq 1)$

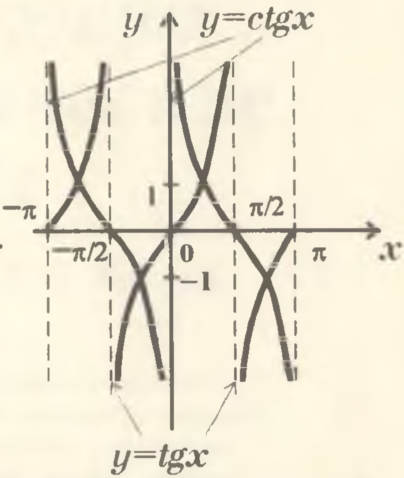


ЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

г) тригонометрические функции

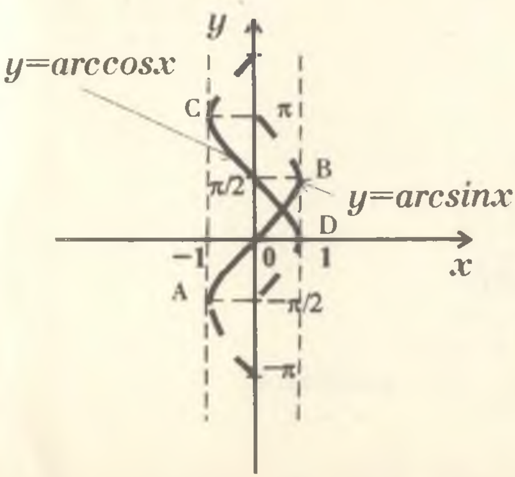
y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx

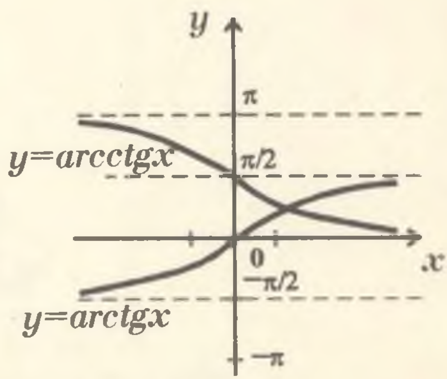




д) обратные тригонометрические функции

y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx





МАТЕМАТИКА
для поступающих в экономические вузы

Под редакцией проф. Н.Ш. Кремера

Рекомендовано Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных отделений высших учебных заведений экономического профиля

Москва
"Банки и биржи"
Издательское объединение "ЮНИТИ"
1996

ББК 22.1я72
М34

Председатель Редакционного совета акад. *А.Н. Романов*

Коллектив авторов:
Н.Ш.Кремер (гл. 1, 4, 6, 7, 10-13), О.Г.Константинова (гл. 5),
А.С.Протасова (гл. 3, 8), М.Н.Фридман (гл. 2, 9)

Рецензенты:
кафедра прикладной математики-1 МИИТа
и канд. техн. наук *И.К. Мокеева*

Главный редактор издательства *Н.Д. Эриашвили*

Математика для поступающих в экономические вузы:
М34 Учебн. пособие/Н.Ш.Кремер, О.Г.Константинова, А.С.Протасова и др.; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1996. – 350 с.: ил.
ISBN 5-85173-056-0.

Цель пособия – оказать помощь абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам по математике в экономические вузы, подготовить их к решению конкурсных задач.

Каждая глава содержит справочный материал и методические рекомендации, задачи с решениями и для самостоятельной работы. Приведено более 100 вариантов заданий различной сложности для поступающих во ВЗФЭИ, МГУ, РЭА, ФА, РГГУ, МКУ, МГИМО, МЭСИ за 1992-1995 гг., в том числе ориентированных на вступительные экзамены с помощью ЭВМ. В приложении дана программа по математике для поступающих в вузы РФ. Большое число задач (более 2000) и структура учебного пособия позволяют использовать его не только для контроля знаний, но и для обучения навыкам решения конкурсных задач.

Для абитуриентов, слушателей подготовительных отделений и курсов.

М $\frac{1602010000-023}{Т10(03) - 96}$ без объявл. ББК 22.1я72

ISBN 5-85173-056-0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для абитуриентов, слушателей подготовительных отделений и курсов, готовящихся к поступлению в экономические вузы, в первую очередь, для поступающих на заочное, вечернее и дневное отделения учебного комплекса Всероссийского заочного финансово-экономического института (ВЗФЭИ) в г.Москве и его филиалов.

На сегодняшний день издано немало учебных пособий по математике для поступающих в вузы. Однако большинство из них рассчитано на достаточно высокий уровень математической подготовки абитуриентов. В связи с этим они оказываются недоступными для многих абитуриентов, особенно для тех, кто имеет значительный перерыв после окончания среднего учебного заведения.

В данном пособии авторы предлагают абитуриентам пройти путь от решения простейших школьных задач к решению достаточно сложных конкурсных. Большое внимание уделяется выполнению "стандартных" преобразований и операций, "технике" решения типовых задач. Наряду с традиционным материалом в пособии рассмотрены наиболее трудные для абитуриентов разделы и темы, часто встречающиеся в практике вступительных экзаменов в экономические вузы, но недостаточно полно рассматриваемые в школе (задачи с параметрами, примеры с абсолютными величинами, обратные тригонометрические функции, текстовые задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значения и т.п.).

В связи с тем, что многие экономические вузы используют при проверке экзаменационных работ абитуриентов электронные устройства, в пособие включен материал, отражающий специфику вступительных экзаменов по математике с применением ЭВМ.

При подготовке пособия были использованы школьные учебники, различные сборники задач для поступающих в вузы. Часть задач составлена авторами специально для пособия. Каждая глава книги содержит справочный материал, методические рекомендации и задачи с решениями и для самостоятельной работы. В конце пособия приведены примеры заданий различной сложности для поступающих во Всероссийский заочный финансово-экономический институт и другие экономические вузы: Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (экономический факультет), Российскую экономическую академию им. Г.В.Плеханова, Финансовую академию при Правительстве Российской Федерации, Государственную академию управления им. Серго Орджоникидзе, Российский государственный гуманитарный университет (экономический факультет), Московский коммерческий университет, Московский государственный институт международных отношений, Московский экономико-статистический институт за 1992—1995 гг. Часть приведенных заданий ориентирована на вступительные экзамены с помощью ЭВМ. В приложении дана программа по математике для поступающих в высшие учебные заведения Российской федерации.

Такая структура учебного пособия в сочетании с большим количеством задач (их в пособии более 2000) и вариантов заданий (более 100) для поступающих позволяет использовать пособие не только для контроля знаний, но и для обучения навыкам решения конкурсных задач.

1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

Действия со степенями:

$(abc)^n = a^n b^n c^n$. **(1.1)**

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$. **(1.2)**

$a^m a^n = a^{m+n}$. **(1.3)**

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. **(1.4)**

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ **(1.5)**

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$. **(1.6)**

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ **(1.7)**

Действия с корнями и дробными степенями:

$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$. **(1.8)**

$\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$. **(1.9)**

$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$. **(1.10)**

$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$. **(1.11)**

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. **(1.12)**

$a^{-m/n} = \dfrac{1}{a^{m/n}}$. **(1.13)**

Формулы сокращенного умножения:

$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$. **(1.14)**

$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$. **(1.15)**

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. **(1.16)**

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. **(1.17)**

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. **(1.18)**

Разложение квадратного трёхчлена на множители:

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, **(1.19)** где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \tag{1.20}$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Абсолютная величина действительного числа:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0. \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases} \tag{1.21}$$

1.1. Арифметические вычисления

1.1. Вычислить $\dfrac{\left(152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}$.

Решение. Следует напомнить порядок действий: первыми осуществляются операции умножения и деления, затем — сложения и вычитания. Если нужно изменить порядок, то ставятся скобки. Таким образом, в нашем примере первой осуществляется операция вычитания, стоящая в скобках, а затем — действия в указанном порядке, т. е. сначала умножение, затем деление.

1) $152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}=4\frac{3}{8}$.

2) $4\frac{3}{8}\cdot 0{,}3=\frac{35}{8}\cdot 0{,}3=$ $=4{,}375\cdot 0{,}3=1{,}3125$.

3) $1{,}3125:0{,}2=6{,}5625$.

Ответ: 6,5625.

1.2. Вычислить

$$\frac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot 0{,}66\ldots}{\left(3,(3)\cdot 0{,}3+0,(2)+\frac{4}{9}\right)\Big/\, 2\frac{2}{3}} + \frac{0{,}4166\ldots\cdot 0{,}72\,:\,0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1{,}6}.$$

Решение. Преобразуем имеющиеся в примере периодические десятичные дроби в обыкновенные. Напомним: чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо в числителе записать разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом. Поэтому:

$0,66\ldots = 0,(6) = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $3,(3) = \frac{33-3}{9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$;

$0,(2) = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9}$; $0,4166\ldots = 0,41(6) = \frac{416-41}{900} = \frac{5}{12}$.

Выполним теперь указанные в примере действия:

1) $4,5 \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{45}{6} = 7,5$. 2) $7,5 - 6,75 = 0,75$.

3) $0,75 \cdot 0,66\ldots = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 0,5$. 4) $3,(3) \cdot 0,3 = \frac{10}{3} \cdot 0,3 = 1$.

5) $1 + 0,(2) = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$. 6) $\frac{11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.

7) $\frac{5}{3} : 2\frac{2}{3} = \frac{5}{3} : \frac{8}{3} = \frac{5}{8}$. 8) $0,5 : \frac{5}{8} = \frac{5}{10} \cdot \frac{8}{5} = 0,8$.

9) $\frac{5}{12} \cdot 0,72 = \frac{5}{12} \cdot \frac{72}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$. 10) $0,3 : 0,3 = 1$.

11) $1 - 0,96 = 0,04$. 12) $0,2 - \frac{3}{40} = \frac{2}{10} - \frac{3}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$.

13) $\frac{1}{8} \cdot 1,6 = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{10} = 0,2$. 14) $0,04 : 0,2 = 0,2$.

15) $0,8 + 0,2 = 1$.

Ответ: 1.

Вычислить:

1.3. $\dfrac{172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}}{0,8 \cdot 0,25}$. **1.4.** $\dfrac{245\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{0,0001 : 0,005}$.

1.5. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30} - 93\frac{5}{18}\right) \cdot 2\frac{1}{4} + 0,373}{0,2}$. **1.6.** $\dfrac{\left(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}\right) \cdot 2\frac{1}{3} + 0,6}{0,2}$.

1.7. $$\frac{\left(0{,}666\ldots+\frac{1}{3}\right):0{,}25}{0{,}12333\ldots:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64.$$

1.8. $$\frac{\left[(7-6{,}35):6{,}5+9{,}8999\ldots\right]\cdot\frac{1}{12{,}8}}{\left[(1{,}2:36)+\left(1\frac{1}{5}:0{,}25\right)-1{,}8(3)\right]\cdot 1\frac{1}{4}}:0{,}125.$$

1.9. $$\frac{\left[\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right]:1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$$

1.2. Преобразование рациональных выражений

При решении задач этого параграфа необходимо обратить внимание на правила действий со степенями (см. формулы **(1.1) — (1.5)**). Следует помнить, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями их показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении в степень — перемножаются.

Приведем несколько простых примеров с решениями, полученными с помощью формул **(1.1) — (1.18)**.

1.10. $\left(\dfrac{2a^3b^2c^{-1}}{d^2}\right)^6=\dfrac{64a^{18}b^{12}c^{-6}}{d^{12}}$.

1.11. $(3a^{-2}b^2c^{-3})(0{,}8ab^{-3}c^4)=2{,}4a^{-1}b^{-1}c$.

1.12. $\left(x^{-1}y^3z^2\right):(5x^2y^{-2}z^{-5})=\dfrac{1}{5}x^{-3}y^5z^7$.

1.13. $(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3})=a^{-4}-b^{-6}$.

1.14. $(x^{-2}-y^{-1})^2=x^{-4}-2x^{-2}y^{-1}+y^{-2}$.

1.15. $(x^{-3}-2y^2)^3=x^{-9}-6x^{-6}y^2+12x^{-3}y^4-8y^6$.

1.16. $(x^{-3}+8y^6)=(x^{-1}+2y^2)(x^{-2}-2x^{-1}y^2+4y^4)$.

1.17. Разложить на множители

$$90x^{2n-3} - 225x^{2n-1}.$$

Р е ш е н и е. Выносим общий множитель: чисел 90 и 225 — число 45 и выражений x^{2n-3} и x^{2n-1} — выражение x^{2n-3} (с наименьшим показателем степени).

Получим: $90x^{2n-3} - 225x^{2n-1} = 45x^{2n-3}(2 - 5x^2)$.

Ответ: $45x^{2n-3}(2-5x^2)$.

1.18. Разложить на множители:

$$18a^2 - 27ab + 14ac - 21bc.$$

Р е ш е н и е. Используем способ группировки:

$$18a^2 - 27ab + 14ac - 21bc = (18a^2 - 27ab) + (14ac - 21bc) =$$
$$= 9a(2a - 3b) + 7c(2a - 3b) = (2a - 3b)(9a + 7c).$$

Ответ: $(2a-3b)(9a+7c)$.

1.19. Разложить на множители $a^6 - b^6$.

Р е ш е н и е.

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) =$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Ответ: $(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

1.20. Разложить на множители $c^2 - a^2 + 8ab^2 - 16b^4$.

Р е ш е н и е. Группируя отдельно первый член и три последних члена, получим:

$$c^2 - a^2 + 8ab^2 - 16b^4 = c^2 - (a^2 - 8ab^2 + 16b^4) =$$
$$= c^2 - (a - 4b^2)^2 = [c - (a - 4b^2)][c + (a - 4b^2)].$$

Ответ: $(c - a + 4b^2)(c + a - 4b^2)$.

1.21. Разложить на множители $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$.

Р е ш е н и е. Раскладываем выражение на множители как разность квадратов и после группировки членов в каждой скобке вновь применяем формулу разности квадратов:

$$4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = [2ac - (a^2 + c^2 - b^2)] \times$$
$$\times [2ac + (a^2 + c^2 - b^2)] = [b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2] =$$
$$= [b - (a - c)][b + (a - c)][(a + c) - b][(a + c) + b].$$

Ответ: $(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)$.

1.22. Разложить на множители $-3x^2 + 10x - 3$.

Р е ш е н и е. I способ. Корни квадратного трехчлена находим из уравнения $-3x^2 + 10x - 3 = 0$ по формулам **(2.12.)** и **(2.13.)**:

$$x_1 = \frac{1}{3} \text{ и } x_2 = 3.$$

По формуле **(1.20.)** : $-3x^2 + 10x - 3 = -3(x - \frac{1}{3})(x - 3)$.

II способ. Если представить второе слагаемое квадратного трехчлена в виде $10x = 9x + x$, то разложение на множители легко провести способом группировки:

$$-3x^2 + 10x - 3 = -3x^2 + 9x + x - 3 = -3x(x-3) + (x-3) =$$
$$= (x-3)(1-3x).$$

Ответ: $-3(x - \frac{1}{3})(x-3)$.

Разложить на множители:

1.23. $24a^{3n-2}b^{-2} + 108a^{3n+1}b$.

1.24. $10a^2 + 21xy - 14ax - 15ay$.

1.25. $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$.

1.26. $x^4 - x^2 + 2x - 1$.

1.27. $-5x^2 + 26x - 5$.

1.28. $2a^2 + ab - 15b^2$.

1.29. $x^3 + 2x^4 + 4x^2 + x + 2$.

1.30. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

1.31. Упростить выражение

$$\left(\frac{m+2}{1-m} - \frac{8m^2-8}{m^3-1} : \frac{4m+4}{m^2+m+1}\right) : m + \frac{2+m}{m-1}.$$

Р е ш е н и е. Обращаясь к формулам сокращенного умножения, можем представить $8m^2 - 8 = 8(m^2-1)$, где $m^2 - 1$ — разность квадратов, т.е. $8(m^2-1) = 8(m-1)(m+1)$. Далее, $m^3 - 1$ представляет собой разность кубов. Тогда $m^3 - 1 = (m-1)(m^2+m+1)$. Выполняя далее действия в указанном порядке и учитывая сказанное выше, получим :

1) $\dfrac{8(m^2-1)}{m^3-1} : \dfrac{4(m+1)}{m^2+m+1} = \dfrac{8(m-1)(m+1)(m^2+m+1)}{(m-1)(m^2+m+1)\,4(m+1)} = 2$.

2) $\dfrac{m+2}{1-m} - 2 = \dfrac{m+2-2+2m}{1-m} = \dfrac{3m}{1-m}$.

Мы привели к общему знаменателю и сделали приведение подобных членов в числителе.

3) $\dfrac{3m}{1-m}:m=\dfrac{3m}{m(1-m)}=\dfrac{3}{1-m}$.

4) $\dfrac{3}{1-m}+\dfrac{2+m}{m-1}=-\dfrac{3}{m-1}+\dfrac{2+m}{m-1}=\dfrac{-3+2+m}{m-1}=\dfrac{m-1}{m-1}=1$.

Ответ: 1.

Упростить выражения:

1.32. $\left(\dfrac{2}{9+3a}-\dfrac{4}{9-a^2}+\dfrac{1}{9-3a}\right)\cdot(9-6a+a^2)$.

1.33. $\left(\dfrac{3a}{a-4}+\dfrac{10a}{a^2-8a+16}\right):\dfrac{3a-2}{a^2-16}-\dfrac{4(a+4)}{a-4}$.

1.34. $\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{10}{x^2-3x-4}+\dfrac{3x}{x-4}\right):\dfrac{3x+2}{3}-\dfrac{x-13}{3(4-x)}$.

1.35. $\left(\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{4}{x^2-5x+6}+\dfrac{2x}{x-2}\right):\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x-12}{3(3-x)}$.

1.36. $\left(\dfrac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right):(a^2-b^2)+\dfrac{2b}{a+b}$.

1.37. $\left(\dfrac{a-1}{a+1}+\dfrac{a^3+1}{a^2-2a+1}:\dfrac{a^2-a+1}{1-a}\right)\cdot(1+a)+\dfrac{3a+1}{a-1}$.

1.38. $\dfrac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}\cdot\dfrac{x+x^2}{1-x}$.

1.39. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

1.40. $\dfrac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3}:\dfrac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4}$.

В примерах с отрицательными и нулевыми показателями степеней необходимо правильно пользоваться их определениями (см. формулы **(1.6)**, **(1.7)**). Нужно четко представлять, что, например, $2a^{-1}=\dfrac{2}{a}$, а не $\dfrac{1}{2a}$, что $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^{-1}=$ $=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$, а не $(a+b)$ и т.п.

1.41. Упростить выражение:

$$\left[\frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}\right] : \left(2a^n b+3a^{n+1}-\frac{6a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}.$$

Решение. Обозначим выражение в квадратных скобках через A, в круглых через B:

$$A : B^{-1} = A : \frac{1}{B} = A \cdot B.$$

Далее обратимся к A:

$$A = \frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}.$$

1) $\dfrac{2+ba^{-1}}{a+2b}=\dfrac{2+\dfrac{b}{a}}{a+2b}=\dfrac{2a+b}{a(a+2b)}.$

2) $6b(4b^2-a^2)^{-1}=\dfrac{6b}{4b^2-a^2}=\dfrac{6b}{(2b-a)(2b+a)}.$

Здесь мы раскладывали $4b^2-a^2$ как разность квадратов.

3) $\dfrac{2a+b}{a(a+2b)}-\dfrac{6b}{(2b-a)(2b+a)}.$

Приводя к общему знаменателю и умножая первую дробь на $(2b - a)$, а вторую — на a, получим

$$\frac{4ab-2a^2+2b^2-ab-6ab}{a(4b^2-a^2)}=\frac{2b^2-3ab-2a^2}{a(4b^2-a^2)}=$$

$$=\frac{(b-2a)(2b+a)}{a(a+2b)(2b-a)}=\frac{b-2a}{a(2b-a)}.$$

Итак, $A=\dfrac{b-2a}{a(2b-a)}.$

Теперь преобразуем B.

$$B=2a^n b+3a^{n+1}-\frac{6a^{n+2}}{2a-b}=a^n\left(2b+3a-\frac{6a^2}{2a-b}\right)=$$

$$=a^n\frac{4ab-2b^2+6a^2-3ab-6a^2}{2a-b}=a^n\frac{b(a-2b)}{2a-b}.$$

Окончательно получаем

$$A\cdot B=\frac{b-2a}{a(2b-a)}\cdot\frac{a^n b(a-2b)}{2a-b}=a^{n-1}b.$$

Ответ: $a^{n-1}b$.

Упростить выражения:

1.42. $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$.

Результат вычислить при $x=\dfrac{1}{a-1}$.

1.43. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^{-1}}{b}+\dfrac{b^{-1}}{2a}\right)^{-1}$.

1.44. $\left(\left(\dfrac{x}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

1.45. $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\dfrac{x^2}{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$.

1.3. Действия над радикалами

Рассмотрим и дадим решения нескольких простых примеров, в которых с помощью формул **(1.8)** — **(1.11)** необходимо привести радикалы к простейшему виду.

1.46. $\sqrt[3]{\dfrac{64p^{-12}q^{-6}}{m^9}}=\dfrac{4p^{-4}q^{-2}}{m^3}$.

1.47. $\dfrac{2ab^2}{x}\sqrt[3]{\dfrac{3x}{4ab}}=\dfrac{b}{x}\sqrt[3]{\dfrac{(2ab)^3\cdot 3x}{4ab}}=\dfrac{b}{x}\sqrt[3]{6a^2b^2x}.$

1.48. $\dfrac{3}{2a+1}\sqrt{8a^3+12a^2+6a+1}=\dfrac{3}{2a+1}\sqrt{(2a+1)^3}=$

$$=\frac{3(2a+1)\sqrt{2a+1}}{2a+1}=3\sqrt{2a+1}.$$

1.49. $\sqrt{\sqrt[3]{256a^4b^{28}}}=\sqrt[6]{2^8a^4b^{28}}=\sqrt[3]{2^4a^2b^{14}}=2b^4\sqrt[3]{2a^2b^2}$.

При сложении и вычитании корней (если это возможно) все они приводятся к простейшему виду, а затем корень выносится за скобки.

1.50. Разложить на множители

$$\sqrt[4]{81a^5b}-\sqrt[8]{256a^2b^{10}}=3a\sqrt[4]{ab}-2b\sqrt[4]{ab}=$$

$$=\sqrt[4]{ab}(3a-2b),\ (a\ge 0;\ b\ge 0).$$

Следует отметить, что рассмотренные выше правила действий над корнями (1.8) — (1.11) безоговорочно верны только для их арифметических (неотрицательных) значений. Например, для произведения $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}$ применение формул (1.8), (1.11) приводит к неверному результату: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{(-3)^2}=\sqrt[6]{72}$; правильное решение имеет вид: так как $\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{3}$, то $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}=-(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3})=-\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}=-\sqrt[6]{72}$.

Необходимо помнить, что под корнем четной степени из неотрицательного числа понимается только его арифметическое (неотрицательное) значение. Так, например, $\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$; $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5)$, т.е. $\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & \text{если } x\ge 0;\\ -x, & \text{если } x<0\end{cases}$ или $\sqrt{x^2}=|x|$, и вообще корень четной степени $\sqrt[2k]{x^{2k}}=|x|$. Действия над абсолютными величинами рассмотрены в 1.4.

Привести радикалы к простейшему виду :

1.51. $\dfrac{3ab^2}{2}\sqrt[3]{\dfrac{8}{ab}}$. **1.52.** $\sqrt{x^3-y^3+x^2y-xy^2}$; $(x\ge y\ge 0)$.

1.53. $\dfrac{m}{n}\sqrt{n^3-mn^2}$; $(n>0)$. **1.54.** $\sqrt[3]{8x^6y^3-24x^9y^6}$.

1.55. $\dfrac{a+b}{2}\sqrt[3]{\dfrac{a^5b^6-a^6b^5}{b^2+2ab+a^2}}$. **1.56.** $\sqrt{\dfrac{1}{x^3+x^2-x-1}}$.

1.57. $5a^n\sqrt[3]{\dfrac{bc^4}{25a^{3n+2}}}$.

1.58. $\dfrac{x-y}{x+y}\sqrt[m+n]{\dfrac{(x+y)^{m+n}}{a^m(x-y)^{2m+2n}}}$; $(a>0,\ x>0,\ y>0)$.

Приведем простые примеры (с решениями), в которых необходимо освободиться от иррациональности в знаменателе.

1.59. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}-1$.

1.60. $\dfrac{1}{(2-\sqrt{2})^3}=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^3(\sqrt{2}-1)^3}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^3}{(\sqrt{2})^4\left[(\sqrt{2})^2-1^2\right]^3}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^3}{4}$.

1.61. $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{2^2+2\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}{2^3-(\sqrt[3]{3})^3}=\dfrac{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{5}.$

Освободиться от иррациональности в знаменателе:

1.62. $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}.$ **1.63.** $\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}.$

1.64. $\dfrac{81}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^4}.$ **1.65.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}.$ **1.66.** $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}}.$

При преобразовании более сложных иррациональных выражений успех решения часто зависит от умения «увидеть» ту или иную формулу сокращенного умножения, записанную в обозначениях радикалов. Например, при решении одной задачи целесообразно заметить, что $a-b$ представляет разность квадратов: $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, где $a\ge 0$, $b\ge 0$; при решении другой — разность кубов: $a-b=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$; а при решении третьей задачи следует использовать определение радикала $a-b=\sqrt{(a-b)^2}$ (при $a\ge b$), или $a-b=\sqrt[3]{(a-b)^3}$, или вообще $a-b=\sqrt[n]{(a-b)^n}$, и т.д.

1.67. Упростить

$$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$$

Решение. Рассмотрим сначала числитель уменьшаемого. Обращаемся к формулам сокращенного умножения. Учитывая, что $a+x=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{x})^3$, т.е. представляет собой сумму кубов, имеем $a+x=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2})$. Аналогично представим $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}$ как разность квадратов, т.е. $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2})=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})$ и $\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2$.

Тогда имеем

$$\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})}=\frac{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})};$$

$$\frac{(\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x})}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{ax}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2}=\frac{-\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}.$$

Окончательно числитель уменьшаемого запишем

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}.$$

Рассмотрим всё уменьшаемое, учитывая, что

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{x^2}=(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x}).$$

Итак, $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}=\dfrac{(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x})}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x}.$

Окончательно имеем $\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{a}.$

Ответ: $\sqrt[6]{a}.$

1.68. Упростить выражение

$$\left[\left(\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):(a+\sqrt[6]{a^3b^2})-\sqrt[3]{b}\right]^2.$$

Решение. Обозначим делимое буквой A, а делитель — B. Вынесем в делимом $\sqrt{a}$. Получим:

$$A=\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}\left(\frac{a\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\right).$$

Выражение $(a\sqrt{a}-b)$ можно рассматривать как разность кубов:

$$\left(a\sqrt{a}-b\right)=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)$$

Сокращая на $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})$ числитель и знаменатель дроби, получим

$$A=\sqrt{a}(a+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt{a}\sqrt[3]{b})=\sqrt{a}(a+2\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}).$$

Можно заметить, что выражение в скобках есть полный квадрат, т.е. $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})^2$. Вынесем в делителе $\sqrt{a}$; получим

$$B=(a+\sqrt[6]{a^3b^2})=\sqrt{a^2}+\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}).$$

Теперь искомое выражение имеет вид:

$$\left(\frac{A}{B}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})^2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})}-\sqrt[3]{b}\right]^2=(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b})^2=(\sqrt{a})^2=a.$$

Ответ: a.

Упростить выражения:

1.69. $\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}}+\dfrac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}.$

1.70. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right)+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}.$

1.71. $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$

1.72. $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$

1.73. $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3.$

1.74. $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right);\quad a>0.$

1.75. $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)^2\right].$

1.76. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^2:\left(\dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}\right)^{-1}.$

1.77. $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right).$

1.4. Действия над абсолютными величинами

При преобразовании выражений, содержащих абсолютную величину, необходимо рассматривать несколько случаев, при этом следует четко усвоить определение абсолютной величины по формуле (1.21).

1.78. Упростить $\left|x-|x|\right|$.

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $x \geq 0$, тогда $|x| = x$ и $\left|x-|x|\right| = |x-x| = 0$;

2) $x < 0$, тогда $|x| = -x$ и $\left|x-|x|\right| = |x-(-x)| = |2x| = -2x$.

Ответ: 0 при $x \geq 0$; $-2x$ при $x < 0$.

1.79. Упростить $A = |x-5| + 2|x-3|$.

Решение. Возможны три случая (см. чертеж):

1) $x < 3$. Тогда $x-3 < 0$, $x-5 < 0$, следовательно, $|x-3| =$ $= -(x-3)$, $|x-5| = -(x-5)$ и $A = -(x-5) + 2[-(x-3)] = -3x+11$

2) $3 \leq x < 5$. Теперь $x-3 \geq 0$ и $|x-3| = x-3$. С другой стороны, по-прежнему $x-5 < 0$ и $|x-5| = -(x-5)$. Поэтому:

$$A = -(x-5) + 2(x-3) = x-1.$$

3) $x \geq 5$. Имеем $x-3 \geq 0$, $x-5 \geq 0$ и $|x-3| = x-3$, $|x-5| = x-5$.

Отсюда $A = (x-5) + 2(x-3) = 3x-11$.

Ответ: $-3x+11$ при $x < 3$; $x-1$ при $3 \leq x < 5$; $3x-11$ при $x \geq 5$.

1.80. Упростить выражение

$$\sqrt{x^2-10x+25} + 2\sqrt{x^2-6x+9}.$$

Решение. $\sqrt{x^2-10x+25} = \sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$, $\sqrt{x^2-6x+9} =$ $= \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$. (Напомним, что мы рассматриваем арифметическое значение корня четной степени — см. 1.3). Следовательно, искомое выражение есть $|x-5| + |x-3|$ и преобразуется так же, как в 1.79.

1.81. Упростить выражение

$$A = \frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x} \cdot |2x^2-x-1|}.$$

Решение. Освободимся от отрицательного показателя степени (-1), а в знаменателе разложим на множители квадратный трехчлен, предварительно найдя его корни: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$. Получим

$$A = \frac{\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{x}}}{\sqrt{x}\cdot\left|2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\right|} = \frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{\sqrt{x}\sqrt{x}|2x+1|\cdot|x-1|},$$

ибо абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин.

$A = \frac{|2x+1|}{x|2x+1|\cdot|x-1|} = \frac{1}{x|x-1|}$, где $x > 0$ (так как по условию имели x под знаком радикала в знаменателе). Теперь необходимо рассмотреть два случая (см. чертеж):

1) $0 < x < 1$. Тогда $x-1 < 0$ и $|x-1| = -(x-1)$. Поэтому $A = -\frac{1}{x(x-1)}$.

2) $x > 1$. Тогда $x-1 > 0$, $|x-1| = x-1$ и $A = \frac{1}{x(x-1)}$. (Заметим, что $x \neq 1$, так как при этом знаменатель обращается в нуль).

Ответ: $-\frac{1}{x(x-1)}$ при $0 < x < 1$; $\frac{1}{x(x-1)}$ при $x > 1$.

Упростить выражения:

1.82. $\left|6x - 2|x|\right|$.

1.83. $|2x-4| - 2|3-x|$.

1.84. $\frac{x\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-x-6}$.

1.85. $\frac{|a-1|\cdot|a|}{a^2-a+1-|a|}$.

1.86. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ при $x = \frac{2}{a+a^{-1}}$.

1.87. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $ab > 0$.

1.5. Действия с дробными степенями

Приведем несколько простых примеров (с решениями), в которых необходимо выполнить указанные действия.

1.88. $\left(ab(ab)^{1/2}\right)^{1/3}=\left(a^{3/2}b^{3/2}\right)^{1/3}=a^{1/2}b^{1/2}.$

1.89. $\left[\left(a^{-6}\right)^{-2/3}\left(ab^{-2}\right)^{-1/2}a^{-3/2}\right]^{2}=\left(a^{4}a^{-1/2}ba^{-3/2}\right)^{2}=(a^{2}\cdot b)^{2}=a^{4}b^{2}.$

1.90. $$\left[2^{1/2}\cdot\left(3a^{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{1/2}\right)^{1/3}\right]^{-3}=\left[2^{1/2}\cdot\left(3a^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\right)^{1/3}\right]^{-3}=$$

$$=\left[2^{1/2}\cdot 3^{1/3}\cdot a^{2/3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\right]^{-3}=\frac{1}{3a^{2}}.$$

1.91. Упростить выражение

$$\frac{x-1}{x+x^{0,5}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}.$$

Решение. Учитывая, что $x-1$ можно рассматривать как разность квадратов, т.е. $x-1=\left(x^{0,5}-1\right)\left(x^{0,5}+1\right)$, аналогично $x^{1,5}-1$ можно разложить как разность кубов, т.е. $x^{1,5}-1=\left(x^{0,5}-1\right)\left(x+x^{0,5}+1\right)$.

Отсюда получаем

1) $$\frac{x-1}{x+x^{0,5}+1}\cdot\frac{x^{1,5}-1}{x^{0,5}+1}=\frac{\left(x^{0,5}-1\right)\left(x^{0,5}+1\right)\cdot\left(x^{0,5}-1\right)\left(x+x^{0,5}+1\right)}{\left(x+x^{0,5}+1\right)\left(x^{0,5}+1\right)}=$$

$=(x^{0,5}-1)^{2}$;

2) $\left(x^{0,5}-1\right)^{2}+\frac{2}{x^{-0,5}}=\left(x^{0,5}-1\right)^{2}+2x^{0,5}=x-2x^{0,5}+1+2x^{0,5}=x+1.$

Ответ: $x+1$

1.92. Упростить выражение:

$$\left[\frac{(a^{3/4}-b^{3/4})(a^{3/4}+b^{3/4})}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\sqrt{ab}\right]\cdot 2(a+b)^{-1}.$$

Решение.

1) $(a^{3/4}-b^{3/4})(a^{3/4}+b^{3/4})=a^{3/2}-b^{3/2}$;

2) $a^{3/2}-b^{3/2}$ может быть рассмотрено как разность кубов, т. е. $a^{3/2}-b^{3/2}=(a^{1/2}-b^{1/2})(a+a^{1/2}b^{1/2}+b)$.

Тогда имеем

$$\frac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\sqrt{ab}=a+a^{1/2}b^{1/2}+b-\sqrt{ab}=a+b;$$

3) $(a+b)\cdot 2(a+b)^{-1}=2(a+b)^{1-1}=2(a+b)^{0}=2$.

Ответ: 2.

1.93. **Упростить выражение**

$$\left(\frac{3x^{-1/3}}{x^{2/3}-2x^{-1/3}}-\frac{x^{1/3}}{x^{4/3}-x^{1/3}}\right)^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}.$$

Решение.

1) $$\frac{3x^{-1/3}}{x^{2/3}-2x^{-1/3}}=\frac{3x^{-1/3}}{x^{-1/3}(x-2)}=\frac{3}{x-2};$$

2) $$\frac{x^{1/3}}{x^{4/3}-x^{1/3}}=\frac{x^{1/3}}{x^{1/3}(x-1)}=\frac{1}{x-1};$$

3) $$\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x-3-x+2}{(x-2)(x-1)}=\frac{2x-1}{(x-2)(x-1)};$$

4) $$\left[\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right]^{-1}=\left(\frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}\right)^{-1}=\frac{(x-2)(x-1)}{2x-1};$$

5) $$\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}=\frac{3x-2}{1-2x};$$

6) $$\frac{(x-2)(x-1)}{2x-1}-\frac{3x-2}{1-2x}=\frac{x^2-3x+2}{2x-1}+\frac{3x-2}{2x-1}=$$
$$=\frac{x^2-3x+2+3x-2}{2x-1}=\frac{x^2}{2x-1}.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2x-1}$.

Упростить выражения:

1.94. $\left(\frac{x^{1,5}-1}{x^{0,5}-1}+x^{0,5}\right):\frac{x-1}{x^{0,5}-1}$.

1.95. $\left(\frac{1+x^{1,5}}{1-x^{0,5}+x}-x^{0,5}\right)\cdot\frac{1-x}{1-x^{0,5}}$.

1.96. $\left(\dfrac{x-x^{1/3}}{x^{2/3}-1}-2x^{1/3}+1\right)\cdot\dfrac{1+x^{1/3}}{1-x^{2/3}}.$

1.97. $\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{(a^2-ab)^{2/3}}:\dfrac{a^{-2/3}(a^2+ab+b^2)\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}.$

1.98. $\left[\left(\dfrac{1-a^{3/2}}{1-a^{1/2}}+a^{1/2}\right)\cdot\left(\dfrac{1+a^{3/2}}{1+a^{1/2}}-a^{1/2}\right)\right]:(1-a^2).$

1.99. $\left[a(1-a)^{-5/3}+(1-a)^{-2/3}\right]:\left\{\left[(1-a)^2\right]^{-1}\cdot(1-a)^{1/3}\right\}.$

1.6. Задачи для самостоятельного решения

Упростить выражения:

1.100. $\left(\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a-b}-\dfrac{a}{a^{1/2}+b^{1/2}}-\dfrac{b}{a^{1/2}-b^{1/2}}\right)\cdot\left[a^{1/2}b^{1/2}(a^{1/2}+b^{1/2})^{-1}\right].$

1.101. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}.$

1.102. $\left(\dfrac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\dfrac{a^0+a(a-2)}{\dfrac{1}{a^{-2}}-a+1}:\sqrt{\dfrac{1}{(a+1)^{-2}}};\ a>-1.$

1.103. $(1-a^2):\left[\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right].$

1.104. $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}\cdot\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}:\dfrac{1}{a^2+b^2}.$

1.105. $\dfrac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2(ab^{-1}+1)^2}\cdot\left(1+\dfrac{1-a^{-1}b}{1+a^{-1}b}\right)^{-1}.$

1.106. $\left(\dfrac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{m+\sqrt{mn}}-\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right):\sqrt[2]{mn^{-1}}.$

1.107. $\dfrac{1-\dfrac{1}{a^2}}{1+\dfrac{1}{a^3}}\cdot\left(1-\dfrac{a^2-a^4-1}{2(a-1)}\right).$

1.108. $\dfrac{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}.$

1.109. $(1-m^2)^{-1/2}-\dfrac{1}{1+m^2(1-m^2)^{-1}}\cdot\dfrac{(1-m^2)^{1/2}+m^2(1-m^2)^{-1/2}}{1-m^2}.$

1.110. $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}.$

1.111. $\left(\dfrac{m^{1/2}-n^{1/2}}{m^{3/2}-n^{3/2}}\right)^{-1}-\dfrac{1}{(m^{1/2}+n^{1/2})^{-2}}+m^{1/2}\cdot n^{1/2}.$

1.112. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2).$

1.113. $\left[\left(\dfrac{1+x}{\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(x^{-\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{x}\right)^{-1}\right]:\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\right).$

1.114. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right).$

1.115. $\dfrac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left[a^0+\left(\dfrac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^{-1}\right].$

1.116. $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}.$

1.117. $\left[\dfrac{b^{1/2}}{a+(ab)^{1/2}}+\dfrac{b^{1/2}}{a-(ab)^{1/2}}\right] : \left[\dfrac{a-b}{2(ab)^{1/2}}\right]^{-1}$.

1.118. $\dfrac{1}{\sqrt{1-m^2}}-\dfrac{1}{1+\dfrac{m^2}{1-m^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1-m^2}+\dfrac{m^2}{\sqrt{1-m^2}}}{1-m^2}$.

1.119. $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

1.120. $\left(\dfrac{a-b}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\dfrac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-b}\right)\cdot(ab)^{-1/2}$.

1.121. $\sqrt{x^2-1}:\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

1.122. $\left(2-\dfrac{1}{4a^{-1}}-\dfrac{4}{a}\right)\left((a-4)\cdot\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\dfrac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}}\right)$; $a>4$.

1.123. $\left((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}\right):\ \dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$.

1.124. $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$.

1.125. $\dfrac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}$.

1.126. $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

1.127. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}$.

1.128. $\dfrac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$; $a>0$.

1.129. $\dfrac{(x^{2/m}-9x^{2/n})\cdot(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{\frac{m+n}{mn}}}$; $x>0$.

1.130. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}\right)^2\cdot\sqrt{\dfrac{m^2}{4}}$.

1.131. $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}$.

1.132. $\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}$

1.133. $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$.

1.134. $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b\,|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$.

1.135. $\left[\dfrac{(x^2+a^2)^{-1/2}+(x^2-a^2)^{-1/2}}{(x^2+a^2)^{-1/2}-(x^2-a^2)^{-1/2}}\right]^{-2}$ при $x=a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$,

$m>0,\ n>0$.

1.136. $\left[(x+a)^{1/3}(x-a)^{-1/3}+(x+a)^{-1/3}(x-a)^{1/3}-2\right]^{-1/2}$ при

$x=a\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}$, $m>0,\ n>0$.

1.137. x^3+12x при $x=\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$.

1.138. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-8x^{-1}+16x^{-2}}}$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

Простейшее линейное уравнение: $ax + b = 0$. **(2.1)**

Его решение:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}, \text{ если } a \neq 0; & (2.2) \\ x \in (-\infty;\ \infty), \text{ если } a = 0,\ b = 0; & (2.3) \\ \text{нет решения, если } a = 0,\ b \neq 0. & (2.3) \end{cases}$$

Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + px + q = 0$. **(2.5)**

Его дискриминант: $D = p^2 - 4q$. **(2.6)**

Решение приведенного квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \text{ если } D > 0; & (2.7) \\ x_1 = x_2 = -\dfrac{p}{2}, \text{ если } D = 0; & (2.8) \\ \text{нет действительных корней, если } D < 0. & (2.9) \end{cases}$$

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_2 \cdot x_2 = q. \end{cases}$ **(2.10)**

Полное квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$. **(2.11)**

Его дискриминант: $D = b^2 - 4ac$. **(2.12)**

Решение полного квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ если } D > 0; & (2.13) \\ x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}, \text{ если } D = 0; & (2.14) \\ \text{нет действительных корней, если } D < 0. & (2.15) \end{cases}$$

Если $b = 2k$ — четное, то корни уравнения **(2.11)**:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2.16)$$

2.1. Линейные уравнения

2.1. Решить уравнение: $2x - 7 = 0$.

Решение. $x = \frac{7}{2}$ — см. формулу **(2.2)**.

Ответ: $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

2.2. Решить уравнение: $5x = 0$.

Решение. $x = \frac{0}{5} = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

2.3. Решить уравнение: $\frac{x}{2} - 4 + \frac{x}{3} = 7 + \frac{5x}{6}$.

Решение. Приведя к общему знаменателю и перенеся все члены уравнения в левую часть, получаем: $3x - 24 + 2x - 42 - 5x = 0$, откуда $0 \cdot x - 66 = 0$; $0 = 66$ (ложно).

Ответ: нет решения.

2.4. Решить уравнение: $4x + 11 - 8\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 19$.

Решение. $4x + 11 - 4x + 8 - 19 = 0$; $x + 0$; $0 \equiv 0$

Ответ: $(-\infty; \infty)$.

Если уравнение содержит неизвестный параметр, то решение уравнения зависит от значений параметра.

2.5. Решить уравнение: $2x - 3 = m\left(\frac{x}{3} + 4\right) + 1$.

Решение: $2x - \frac{mx}{3} - 3 - 4m + 1 = 0$; $\left(2 - \frac{m}{3}\right)x + (-2 - 4m) = 0$.

Если $2 - \frac{m}{3} \neq 0$, т.е. $m \neq 6$, то $x = \dfrac{2 + 4m}{2 - \frac{m}{3}} = \dfrac{6\,(1 + 2m)}{6 - m}$, (см. **2.2**).

Если $2 - \frac{m}{3} = 0$, т.е. $m = 6$, то уравнение примет вид:

$0 \cdot x - 26 = 0$; $0 = 26$ (ложно); нет решения (см. **2.4**).

Ответ: $\dfrac{6\,(1 + 2m)}{6 - m}$, если $m \neq 6$; нет решения, если $m = 6$.

2.6. Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{d}{c}$, чтобы эта дробь стала равной числу m?

Решение: Обозначив искомое число через x, получим уравнение: $\frac{d+x}{c+x}=m$, откуда $d+x=cm+mx$, т. е. $(1-m)x+d-mc=0$.

Если $m\neq 1$, то $x=\frac{d-mc}{m-1}$.

Если $m=1$, то уравнение примет вид: $0\cdot x+d-c=0$.

Если при этом $d=c$, то $0\equiv 0$, решение: $x\in(-\infty,\infty)$.

Если $d\neq c$, то нет решения.

Ответ: $\frac{d-mc}{m-1}$, если $m\neq 1$; $(-\infty,\infty)$, если $m=1$, $d=c$; нет решения при $m=1$, $d\neq c$.

2.7. Решить уравнение: $(a^2-1)\,x=a-1$.

Решение: Если $a^2-1\neq 0$, т. е. $a\neq\pm 1$, то решение уравнения: $x=\frac{a-1}{a^2-1}=\frac{1}{a+1}$ (сокращение на $a-1\neq 0$).

Если $a=1$, то уравнение принимает вид: $0\cdot x=0$, откуда $x\in(-\infty;\infty)$.
Если $a=-1$, то уравнение принимает вид: $0\cdot x=-2$, нет решения.

Ответ: $\frac{1}{a+1}$, если $a\neq 1$, $a\neq -1$; $(-\infty,\infty)$, если $a=1$; нет решения, если $a=-1$.

Решить уравнения:

2.8. $3x-1=m(-x+1)+2$.

2.9. $a^2-4=(a+2)\,x$.

2.10. $\frac{x}{m+1}-3x=4$.

2.11. $(a^3-16a)\,x=a-4$.

2.2. Квадратные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

2.12. Решить уравнение; $-5x^2+20=0$.

Решение. Неполное квадратное уравнение удобнее решать непосредственно, не обращаясь к формулам **(2.5)** — **(2.16)**:

$5x^2=20$, $x^2=4$, $x_1=-2$, $x_2=2$.

Ответ: $\{-2;\ 2\}$.

2.13. Решить уравнение: $7x^2 + 4 = 0$.

Решение. $7x^2 = -4$, $x^2 = -\frac{4}{7}$, нет решения, так как $x^2 \geq 0$.

Ответ: нет решения.

2.14. Решить уравнение: $\frac{x^2}{4} - 5x = 0$.

Решение. $x\left(\frac{x}{4} - 5\right) = 0$, $x(x - 20) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 20$.

Ответ: $\{0; 20\}$.

2.15. Решить уравнение: $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Решение. Это приведенное квадратное уравнение, $D = 49 - 24 = 25 > 0$, поэтому имеет два различных корня: $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$ — см. формулы **(2.6)**, **(2.7)**. $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

Ответ $\{1; 6\}$.

2.16. Решить уравнение: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Решение. Учитывая, что $b = 6$ — число четное, воспользуемся формулой **(2.16)**, где $a = 1$:

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 7} = -3 \pm 4; \; x_1 = -7, \; x_2 = 1.$$

Ответ: $\{-7; 1\}$.

2.17. Решить уравнение: $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Решение. Так как $D = 16 - 16 = 0$, то уравнение имеет одинаковые корни $x_1 = x_2 = 2$ — см. формулу **(2.8)**.

Ответ: $\{2\}$.

2.18. Решить уравнение: $7x^2 - 5x + 8 = 0$.

Решение. Найдем $D = 15^2 - 4 \cdot 7 \cdot 8 = 225 - 224 = 1 > 0$. Используя формулу **(2.13)**, получаем: $x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{1}}{14}$; $x_1 = \frac{8}{7}$; $x_2 = 1$.

Ответ: $\left\{1; \frac{8}{7}\right\}$.

2.19. Решить уравнение: $3x^2 - 7x + 100 = 0$.

Решение. Так как $D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 100 = 49 - 1200 = -1151 < 0$, то действительных корней нет — см. формулу **(2.15)**.

Ответ: нет решения.

2.20. Решить биквадратное уравнение: $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Решение. Биквадратное уравнение с помощью замены переменной $x^2 = t \geq 0$ сводится к квадратному уравнению для t:

$t^2-5t+6=0$. Легко видеть, что его корни $t_1=2,\ t_2=3$. Оба корня положительны. Исходное уравнение разбивается на два: $x^2=2$, откуда $x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2};\ x^2=3$, откуда $x_3=\sqrt{3},\ x_4=-\sqrt{3}$.

Ответ: $\left\{\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3}\right\}$.

2.21. Решить биквадратное уравнение: $2x^4+5x^2-7=0$

Решение. Полагая $x^2=t\geq 0$, получаем $2t^2+5t-7=0$. Так как $D=5^2+4\cdot 2\cdot 7=81>0$, то находим корни последнего уравнения: $t_1=\dfrac{-5-\sqrt{81}}{4}=-\dfrac{7}{2}<0$, не подходит; $t_2=\dfrac{-5+\sqrt{81}}{4}=1>0$. Находим x: $x^2=1,\ x_1=-1,\ x_2=1$.

Ответ: $\{-1;\ 1\}$.

Некоторые уравнения более высоких степеней, чем квадратные, можно решить, используя следующее утверждение: если многочлен с целыми коэффициентами имеет целый корень, то он является делителем свободного члена. Поэтому решение уравнения начинаем с подбора первого корня x_1, перебирая все делители свободного члена, а затем понижаем степень многочлена, разделив его на $(x-x_1)$, и раскладываем исходный многочлен на множители.

2.22. Решить уравнение: $4x^3-3x^2+5x-6=0$.

Решение. Среди делителей свободного члена: 1; —1; 2;—2; 3;—3; 6;—6 корнем является значение $x_1=1$ (проверяем подстановкой в уравнение). Разделим правую часть уравнения на $(x-1)$ «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
4x^3-3x^2+5x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^3-4x^2} & 4x^2+x+6 \\
x^2+5x & \\
\underline{x^2-x} & \\
6x-6 & \\
\underline{6x-6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Раскладывая исходный многочлен на множители, получаем: $4x^2-3x^2+5x-6=(x-1)\left(4x^2+x-6\right)=0$, откуда находим остальные корни: $4x^2+x-6=0$; $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{97}}{8}$.

Ответ: $\left\{1;\ \dfrac{-1\pm\sqrt{97}}{8}\right\}$.

Решить уравнения:

2.23. $5x^2+100=0$.

2.24. $\frac{x^2}{2}-4x=0$.

2.25. $\frac{x^2}{3}-3=0$.

2.26. $x^2-7x+6=0$.

2.27. $x^2+8x-9=0$.

2.28. $x^2+2x+1=0$.

2.29. $x^2+x+1=0$.

2.30. $2x^2-7x+5=0$.

2.31. $x^3-5x^2+9x-5=0$.

2.32. $3x^3+4x^2-2x+4=0$.

2.33. $7x^4+x^2-8=0$.

2.34. $x^2+8x-9=0$.

2.35. $x^4+7x^2+6=0$.

В некоторых случаях уравнение можно привести к квадратному несложной заменой переменных.

2.36. Решить уравнение: $x^2+x+\frac{18}{x^2+x+1}=10$.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби $x^2+x+1\neq 0$, так как $D=1-4=-3<0$. Приведение обеих частей уравнения к общему знаменателю дает уравнение четвертой степени, решение которого если и возможно, то весьма затруднительно. Положим $x^2+x+1=t\neq 0$, тогда $x^2+x=t-1$, уравнение принимает вид: $t-1+\frac{18}{t}=10$, откуда $t^2-11t+18=0$. Корни этого уравнения $t_1=2$, $t_2=9$. Исходное уравнение разбивается на два:

$x^2+x+1=2$, т.е

$x^2+x-1=0$. Так как $D=5>0$, то

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$x^2+x+1=9$, т.е.

$x^2+x-8=0$. Так как $D=33>0$, то

$$x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2.37. Решить уравнение: $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

Р е ш е н и е. Область допустимых значений (ОДЗ): $\begin{cases} x\neq 0, \\ x^2+x-5\neq 0. \end{cases}$

Полагая $\frac{x^2+x-5}{x}=t\neq 0$, получаем уравнение для t: $t+\frac{3}{t}+4=0$, т.е. $t^2+4t+3=0$, откуда $t_1=-3$, $t_2=-1$. Находим x:

$$\frac{x^2+x-3}{x}=-3,$$
$x^2+4x-5=0;\ x_1=-5,\ x_2=1.$

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-1,$$
$x^2+2x-5=0;\ x_3=1-\sqrt{6},$
$x_4=1+\sqrt{6},$

Все четыре корня входят в ОДЗ.

Ответ: $\{-5;\ 1\pm\sqrt{6};\ 1\}$.

2.38. Решить уравнение: $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$. Группируем члены в левой части: $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=4$ и полагаем $x+\frac{1}{x}=t$, тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Получаем уравнение: $t+t^2-2=4$, т. е. $t^2+t-6=0$. Его корни: $t_1=-3$, $t_2=2$. Находим x:

$$x+\frac{1}{x}=-3,$$
$x^2+3x+1=0,$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$x+\frac{1}{x}=2,$$
$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0,$
$x_3=x_4=1.$

Ответ: $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};\ 1\right\}$.

2.39. Решить уравнение: $x(x+2)(x+4)(x+6)=-7$.

Решение. Непосредственное перемножение приводит к уравнению 4-й степени. Замена переменной позволяет получить биквадратное уравнение. В качестве t возьмем «среднее арифметическое» сомножителей:

$$t=\frac{x+x+2+x+4+x+6}{4}=x+3.$$

Тогда уравнение примет вид: $(t-3)(t-1)(t+1)(t+3)=-7$. Используя формулу разности квадратов, получаем: $(t^2-9)(t^2-1)=-7$. Полагая в этом биквадратном уравнении $t^2=y\geq 0$, получаем квадратное уравнение $y^2-10y+16=0$, его корни $y_1=2$, $y_2=8$. Находим t:

$t^2=8,\ t_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}.$

$t^2=2,\ t_{3,4}=\pm\sqrt{2}.$

Находим $x = t - 3$:

$$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2} - 3; \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{2} - 3;$$

Ответ: $\left\{\pm 2\sqrt{2} - 3;\ \pm\sqrt{2} - 3\right\}$.

Решить уравнения:

2.40. $\dfrac{x^2-3}{x} + \dfrac{6x}{x^2-3} - 5 = 0.$ **2.41.** $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = 2.$

2.42. $\dfrac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6.$

2.43. $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}.$

2.44. $4x^2 + 12x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 47.$

2.45. $\dfrac{10}{x^2-4x+8} - x^2 + 4x = 5.$

2.46. $(x-7)(x-5)(x-3)(x-1) = -15.$

В квадратном уравнении может присутствовать неизвестный параметр.

2.47. Решить уравнение: $\dfrac{2x}{x+b} - \dfrac{x}{b-x} = \dfrac{b^2}{4(x^2-b^2)}.$

Решение. ОДЗ: $x \neq \pm b$. Приводя к общему знаменателю, получаем: $8x(x-b) + 4x(x+b) = b^2$, откуда $12x^2 - 4bx - b^2 = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 16b^2 + 4 \cdot 12b^2 = 64b^2 \geq 0$, поэтому $x_{1,2} = \dfrac{4b \pm 8b}{24}$; $x_1 = \dfrac{b}{2}$, $x_2 = \dfrac{-b}{6}$. Оба корня входят в ОДЗ, если $b \neq 0$. При $b = 0$ уравнение принимает вид: $\dfrac{2x}{x} + \dfrac{x}{x} = \dfrac{0}{4x^2}$ — не имеет решения.

Ответ: $\left\{\dfrac{-b}{6};\ \dfrac{b}{2}\right\}$, если $b \neq 0$; нет решения, если $b = 0$.

2.48. Решить уравнение: $ax^2 + 2x - 4 = 0$ $(a \neq 0)$.

Решение. Вычислим дискриминант: $D = 4 + 16a = 4(1 + 4a)$. $D > 0$, если $a > -\dfrac{1}{4}$. Тогда корни уравнения различны:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{a}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{a}.$$

$D = 0$, если $a = -\frac{1}{4}$; тогда $x_1 = x_2 = -\frac{1}{a} = 4.$

$D < 0$, если $a < -\frac{1}{4}$; тогда уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{a}\right\}$, если $a > -\frac{1}{4}$; $\{4\}$, если $a = -\frac{1}{4}$; нет решения, если $a < -\frac{1}{4}$.

В некоторых случаях при решении уравнений используются формулы (2.10).

2.49. **Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ таковы, что $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$. Определить величину a.**

Решение. Из формул **(2.10)** следует, что $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3a, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2. \end{cases}$ Возводя первое уравнение в квадрат и вычитая из него удвоенное второе уравнение, получаем $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 9a^2 - 2a^2$, откуда $x_1^2 + x_2^2 = 7a^2$. Используя условие задачи, получаем: $1{,}75 = 7a^2$, откуда $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.5$.

Ответ: $\{\pm 0{,}5\}$.

2.50. **Дано квадратное уравнение: $x^2 + 7x + 6 = 0$. Составить новое квадратное уравнение, корни которого вдвое больше корней данного.**

Решение. Пусть новое квадратное уравнение имеет вид: $y^2 + py + q = 0$. Тогда, если y_1 и y_2 — его корни, то $\begin{cases} y_1 + y_2 = -p \\ y_1 \cdot y_2 = q \end{cases}$, причём $y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

Тогда $\begin{cases} 2(x_1 + x_2) = -p, \\ 2x_1 \cdot 2x_2 = q, \end{cases}$ однако $\begin{cases} x_1 + x_2 = -7, \\ x_1 \cdot x_2 = 6, \end{cases}$

поэтому получаем: $\begin{cases} 2\,(-7) = -p, \\ 4 \cdot 6 = q, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} p = 14, \\ q = 24. \end{cases}$

Новое уравнение имеет вид: $y^2 + 14y + 24 = 0$.

Ответ: $y^2 + 14y + 24 = 0$.

Решить уравнения:

2.51. $2x^2 - ax + 3 = 0$.

2.52. $ax^2 + 2x + 4 = 0$, $a \neq 0$.

2.53. **В уравнении $x^2 - kx + 1 = 0$ определить k таким образом, чтобы разность корней уравнения равнялась 1.**

2.54. Определить коэффициенты квадратного уравнения x^2+px+ $+ q = 0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

2.55. Дано квадратное уравнение: $x^2 + 4x - 8 = 0$. Составить новое квадратное уравнение, корни котрого вдвое меньше корней данного.

2.3. Иррациональные уравнения

Если иррациональные уравнения содержат радикалы четной степени, то область допустимых значений (ОДЗ) уравнения определяется условием неотрицательности подкоренного выражения.

Обычно иррациональные уравнения решаются методом «возведения в квадрат». При этом могут возникнуть посторонние корни как за счет расширения ОДЗ, так и за счет неэквивалентных преобразований. Поэтому обычно обязательным элементом решения иррационального уравнения является проверка, которая осуществляется подстановкой найденных корней в первоначальное уравнение.

2.56. Решить уравнение: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=2$.

Р е ш е н и е. ОДЗ: $\begin{cases} x-3 \ge 0, \\ 5-x \ge 0, \end{cases}$ откуда $3 \le x \le 5$. Возводим в квадрат обе части уравнения: $x-3+2\sqrt{x-3}\,\sqrt{5-x}+5-x=4$. После преобразований получаем: $\sqrt{(x-3)(5-x)}=1$. Вновь осуществим возведение в квадрат: $(x - 3)(5 - x) = 1$, откуда $x^2 - 8x + 16 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = x_2 = 4$ входят в ОДЗ.

П р о в е р к а. Подставляя $x = 4$ в уравнение, получаем: $\sqrt{4-3}+$ $+\sqrt{5-4}=2$, т. е. $1 + 1 = 2$; $2 \equiv 2$.

О т в е т: $\{4\}$.

2.57. Решить уравнение: $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$.

Р е ш е н и е. ОДЗ: $\begin{cases} 3-x > 0, \\ 9-5x \ge 0, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x < 3, \\ x \le \dfrac{9}{5}, \end{cases}$ откуда $x \le \dfrac{9}{5}$.

Преобразуем уравнение: $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{3-x}+6=\sqrt{9-5x}\cdot\sqrt{3-x}$, или $\sqrt{(3-x)^2}+6=\sqrt{(9-5x)(3-x)}$. Заметим, что $\sqrt{(3-x)^2}=3-x$, так как $3-x>0$. Осуществив преобразование $\sqrt{9-5x}\cdot\sqrt{3-x}=\sqrt{(9-5x)(3-x)}$, можем получить посторонние корни за счет расширения ОДЗ, так как левая часть выражения существует, если оба подкоренных выражения неотрицательны, а правая — если их произведение неотрицательно, т. е. оба сомножителя имеют одинаковый знак (плюс или минус).

После преобразования получим: $9-x=\sqrt{(9-5x)(3-x)}$. Еще раз возведем в квадрат: $(9-x)^2=(9-5x)(3-x)$. Получаем квадратное уравнение: $2x^2-3x-27=0$, его корни $x_1=-3$, $x_2=4{,}5$. Корень $x_2=4{,}5$ не входит в ОДЗ. Этот корень можно исключить также с помощью проверки, так как подкоренное выражение $(3-x)$ принимает отрицательное значение: $3-4{,}5=-1{,}5$. Проверим корень $x_1=-3$. Подставляя в уравнение, получаем: $\sqrt{3-(-3)}+\dfrac{6}{\sqrt{3-(-3)}}=\sqrt{9-5(-3)}$;

$\sqrt{6}+\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{24}$; $2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ (истинно).

Ответ: $\{-3\}$.

2.58. Решить уравнение: $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}2x-6\ge 0,\\ x+4\ge 0,\end{cases}$ т. е. $\begin{cases}x\ge 3,\\ x\ge -4,\end{cases}$ откуда $x\ge 3$. После возведения обеих частей в квадрат и приведения подобных членов получаем, «уединяя» радикал: $2\sqrt{(2x-6)(x+4)}=27-3x$. Вновь возведем в квадрат обе части уравнения. Это преобразование может привести к появлению посторонних корней, если левая и правая части уравнения имеют разные знаки (например, $-2\ne 2$, но $(-2)^2=2^2$). Получаем уравнение: $4(2x-6)(x+4)=(27-3x)^2$. После преобразований приходим к квадратному уравнению: $x^2-170x+825=0$. Его корни: $x_1=5$, $x_2=165$. Оба корня входят в ОДЗ. Однако проверка корня $x_2=165$ показывает, что это посторонний корень: $\sqrt{2\cdot 165-6}+$ $+\sqrt{165+4}=5$; $\sqrt{324}+\sqrt{169}=5$; $18+13=5$; $31=5$ (ложно). Посторонний корень получен при возведении в квадрат обеих частей равенства: $2\sqrt{(2\cdot 165-6)(165+4)}=27-3\cdot 165=-468<0$ (левая часть положительна, а правая — отрицательна). Проверка показывает, что корень $x_1 = 5$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $\{5\}$.

2.59. Решить уравнение: $\sqrt{1 - y\sqrt{y^2 + 24}} - 1 = y$.

Решение: $\sqrt{1 - y\sqrt{y^2 + 24}} = y + 1$. Возводя в квадрат, получаем $-y\sqrt{y^2 + 24} = y(y + 2)$. Если сократить обе части уравнения на y, то можно потерять корень уравнения $y = 0$. Поэтому преобразуем последнее выражение и вынесем y за скобки: $y\left(y + 2 + \sqrt{y^2 + 24}\right) = 0$, откуда $y_1 = 0$ или $y + 2 + \sqrt{y^2 + 24} = 0$. Решая последнее уравнение методом возведения в квадрат, получаем: $\sqrt{y^2 + 24} = -(y + 2)$, откуда $y^2 + 24 = (y+2)^2$. Получаем: $y^2 + 24 = y^2 + 4y + 4$, откуда $y_2 = 5$. Проверим оба корня. Проверка показывает, что корень $y_1 = 0$ удовлетворяет уравнению, а корень $y_2 = 5$ приводит к отрицательному подкоренному выражению: $1 - 5\sqrt{25 + 24} = 1 - 35 = -34 < 0$, т. е. $y_2 = 5$ — посторонний корень.

Ответ: $\{0\}$.

2.60. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 3}$.

Решение. Если решать это уравнение методом возведения в квадрат, то придем к уравнению 4-й степени. Решение облегчается, если определить корни всех выражений, стоящих под радикалами, и разложить их на множители, убедившись, что имеется общий корень $x = 1$: $\sqrt{(x - 1)(x - 2)} + \sqrt{(x - 1)(x + 1)} = \sqrt{2(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)}$. Можно вынести за скобки общий множитель $\sqrt{x - 1}$: $\sqrt{x - 1}(\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 1}) = \sqrt{x - 1} \times$ $\times\sqrt{2x + 3}$. С помощью проверки убеждаемся, что $x_1 = 1$ является корнем исходного уравнения. Найдем остальные корни: $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{2x + 3}$. Решая уравнение методом возведения в квадрат, находим корни $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Проверка показывает, что $x_2 = -2$ является посторонним корнем, $x_3 = 3$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $\{1; 3\}$.

Решить уравнения:

2.61. $\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 = 0$. **2.62.** $\sqrt{x - 7} - \dfrac{6}{\sqrt{x - 7}} = 1$.

2.63. $\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$. **2.64.** $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$.

2.65. $\sqrt{(x+1)(9-x)}=11-x$. **2.66.** $\sqrt{4-x\sqrt{x^2-16}}-2=x$.

2.67. $\sqrt{9+x\sqrt{x^2+12}}=x-3$.

2.68. $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{4x^2+9x-13}=\sqrt{3x^2+9x-12}$.

Некоторые иррациональные уравнения могут быть сведены к квадратным уравнениям с помощью замены переменной.

2.69. Решить уравнение: $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{2x^2-8x+12}=t\geq 0$. Тогда $2x^2-8x+12=t^2$. Заметим, что слева в уравнении стоит выражение, равное $\frac{t^2}{2}-12$. Получили квадратное уравнение: $\frac{t^2}{2}-12=t$, откуда $t^2-2t-24=0$. Корни этого уравнения: $t_1=-4<0$ — не подходит, $t_2=6>0$. Найдем x: $\sqrt{2x^2-8x+12}=6$. Возводя в квадрат и приводя подобные члены, получаем: $x^2-4x-12=0$. Корни уравнения — $x_1=-2$, $x_2=6$. Осуществляя проверку, убеждаемся, что оба корня удовлетворяют уравнению.

Ответ: $\{-2; 6\}$.

2.70. Решить уравнение: $\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x$.

Решение. ОДЗ: $2x+15>0$, т. е. $x>\frac{-15}{2}$. Легко проверить, что $x=0$ не является корнем уравнения, поэтому уравнение можно разделить на x: $\frac{x}{\sqrt{2x+15}}+\frac{\sqrt{2x+15}}{x}=2$. Введем обозначение $\frac{x}{\sqrt{2x+15}}=t$, получим уравнение для t: $t+\frac{1}{t}=2$, или $t^2-2t+1=0$, откуда $t_1=t_2=1$. Определим x: $\frac{x}{\sqrt{2x+15}}=1$, или $x=\sqrt{2x+15}$. Получаем после возведения в квадрат: $x^2-2x-15=0$, корни уравнения $x_1=-3$, $x_2=5$. Проверка показывает, что $x_1=-3$ — посторонний корень, $x_2=5$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $\{5\}$.

2.71. Решить уравнение: $\sqrt{x^2+2x+6}+\sqrt{x^2+2x+13}=7$.

Решение. Если сразу возводить в квадрат, то придем к уравнению 4-й степени. В данном случае удобно положить: $x^2+2x+6=t\geq$ ≥ 0, тогда $x^2+2x+13=t+7$. Получим уравнение: $\sqrt{t}+\sqrt{t+7}=7$. Решая его методом возведения в квадрат, получаем $t=9$; находим x: $x^2+2x+6=9$, $x^2+2x-3=0$, корни уравнения: $x_1=-3$, $x_2=1$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют уравнению.

Ответ: $\{-3;\ 1\}$.

2.72. Решить уравнение: $\dfrac{\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}}{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}}=\dfrac{27}{x}$.

Решение. Освободимся вначале от иррациональности в знаменателе, умножив на «сопряженное» выражение $\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}$ числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{\left(\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}\right)^2}{\left(\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}\right)\left(\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}\right)}=\frac{27}{x}.$$

В знаменателе — разность квадратов, поэтому

$$\frac{27+x+2\sqrt{27+x}\sqrt{27-x}+27-x}{(27+x)-(27-x)}=\frac{27}{x}.$$

Получаем: $\dfrac{27+\sqrt{27^2-x^2}}{x}=\dfrac{27}{x}$, или $27+\sqrt{27^2-x^2}=27$, т. е. $\sqrt{27^2-x^2}=0$, откуда $x_1=-27$, $x_2=27$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют уравнению.

Ответ: $\{-27;\ 27\}$.

Решить уравнения:

2.73. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

2.74. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$.

2.75. $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}=\dfrac{11-3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-9}$.

2.76. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+8}}+\sqrt{x+8}=\dfrac{10x}{3}$.

2.77. $\dfrac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}=\dfrac{8}{x}$.

2.78. $\dfrac{x+3+\sqrt{x^2-9}}{x+3-\sqrt{x^2-9}}=3$.

2.79. $\sqrt{x^2-x+9}+\sqrt{x^2-x}=3$.

Некоторые иррациональные уравнения содержат радикалы только нечетных степеней (например, $\sqrt[3]{f(x)}$ или $\sqrt[5]{f(x)}$ и т.п.).

В этом случае не требуется выполнения условия неотрицательности подкоренного выражения.

Уравнения, содержащие только кубические корни, обычно решаются методом «возведения в куб». Следует отметить, что только за счет возведения обеих частей уравнения в нечетную степень (например, в куб) посторонние корни появиться не могут. В этом случае проверка корней как принципиальный элемент решения не требуется.

2.80. Решить уравнение: $\sqrt[3]{16-x^3}=4-x.$

Р е ш е н и е. Возведем в куб обе части уравнения: $16-x^3=$ $=(4-x)^3$; раскрывая правую часть уравнения по формуле куба разности, получаем $16-x^3=64-48x+12x^2-x^3$, откуда $x^2-4x+4=0$, или $(x-$ $-2)^2=0$; следовательно, $x=2$.

Ответ: $\{2\}$.

2.81. Решить уравнение: $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2.$

Р е ш е н и е. Возведем в куб обе части уравнения:

$$12-x+3\sqrt[3]{(12-x)^2(14+x)}+3\sqrt[3]{(14+x)^2(12-x)}+14+x=8.$$

После преобразований получаем:

$$3\sqrt[3]{(12-x)(14+x)}\left(\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}\right)=-18.$$

Обратим внимание на то, что сумма в квадратных скобках совпадает с левой частью исходного уравнения, поэтому ее можно заменить на равную ей правую часть уравнения: $3\sqrt[3]{(12-x)(14+x)}\cdot 2=-18$, откуда $\sqrt[3]{(12-x)(14+x)}=-3$. После возведения в куб и преобразований получаем: $x^2+2x-195=0$. Корни этого уравнения: $x_1=-15$; $x_2=13$. Делаем проверку.

Ответ: $\{-15;\ 13\}$.

Решить уравнения:

2.82. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

2.83. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1.$

2.84. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$

2.85. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$

2.4 Системы алгебраических уравнений

2.86. Решить систему уравнений: $\begin{cases}2x-y=1,\\3x+5y=8.\end{cases}$

Р е ш е н и е. Это система двух линейных уравнений. Один из методов ее решения — выражение одной переменной через другую. Из первого уравнения выразим $y = 2x - 1$ и подставим во второе уравнение. Получим:

$$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ 3x + 5(2x - 1) = 8, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} y = 2x - 1, \\ 13x = 13, \end{cases} \text{получаем} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1; 1)\}$.

2.87. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - 5y = -3, \\ 2x + 7y = -2. \end{cases}$

Решение. Используем метод алгебраического сложения уравнений. Умножим первое уравнение на 2, а второе — на (—3), тогда коэффициенты при x в уравнениях станут равны по величине и противоположны по знаку. Ко второму уравнению прибавим первое, исключая переменную x:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -3, \\ 2x + 7y = -2, \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\ (2), \\ \cdot\ (-3), \end{array} \right. \text{затем} \begin{cases} 6x - 10y = -6, \\ -6x - 21y = 6. \end{cases} \text{Получаем:} \begin{cases} 6x - 5y = -6, \\ -31y = 0, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x = -1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1; 0)\}$.

2.88. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + xy = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x \neq y$. Эту нелинейную систему можно свести к линейной, сделав замену переменных: $xy = u$, $\dfrac{x+y}{x-y} = v$. Получаем:

$$\begin{cases} u + v = 7, \\ u = 18, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} v = -11, \\ u = 18. \end{cases}$$ Определяем переменные x и y.

$$\begin{cases} xy = 18, \\ \dfrac{x+y}{x-y} = -11, \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} xy = 18, \\ y = 1{,}2\ x, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x^2 = 15, \\ y = 1{,}2\ x. \end{cases}$$

Получаем две системы:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{15}, \\ y_1 = 1{,}2\ \sqrt{15}. \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{15}, \\ y_2 = -1{,}2\ \sqrt{15}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(-\sqrt{15},\ -1{,}2\ \sqrt{15}\right);\ \left(\sqrt{15};\ 1{,}2\ \sqrt{15}\right)\right\}$.

Решить системы уравнений:

2.89. $\begin{cases}-5x+y=6,\\ 2x+7y=5.\end{cases}$

2.90. $\begin{cases}x+y=3,\\ x-y=-1.\end{cases}$

2.91. $\begin{cases}2x-3y=-2,\\ -2x+7y=10.\end{cases}$

2.92. $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+4y=5,\\ 2x-\dfrac{y}{2}=5\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

2.93. $\begin{cases}x^2+y^2+xy=3,\\ (x+y)^2=4.\end{cases}$

2.94. $\begin{cases}-2x+3y=5,\\ 4x-6y=1.\end{cases}$

Если одно из уравнений системы линейное, а другое — нелинейное, то рекомендуется выразить одну переменную через другую, используя при этом линейное уравнение.

2.95. Решить систему уравнений: $\begin{cases}x^2+y^2+6x+2y=0,\\ x+y+8=0.\end{cases}$

Решение. $\begin{cases}x=-8-y,\\ (-8-y)^2+y^2+6(-8-x)+2y=0,\end{cases}$

откуда $\begin{cases}x=-8-y,\\ y^2+6y+8=0.\end{cases}$

Корни квадратного уравнения: $y_1=-2$, $y_2=-4$; из первого уравнения находим: $x_1=-6$, $x_2=-4$.

Ответ: $\{(-6;-2);(-4;-4)\}$.

2.96. Решить систему уравнений: $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9,\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20.\end{cases}$

Решение. ОДЗ: $y\neq 0$. В этой системе нет линейных уравнений, но линейное уравнение можно получить после замены переменных: $x+y=u$, $\dfrac{x}{y}=v$.

Получаем систему: $\begin{cases}u+v=9,\\ u\cdot v=20,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}u=9-v,\\ v^2-9v+20=0.\end{cases}$

Корни квадратного уравнения: $v_1=4$, $v_2=5$; тогда $u_1=5$, $u_2=4$. Для нахождения x и y получим две системы:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ \dfrac{x}{y} = 4, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 1, \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{x}{y} = 5, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_2 = \dfrac{10}{3}, \\ y_2 = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{(4;\ 1);\ \left(\dfrac{10}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)\right\}$.

Решить системы уравнений:

2.97. $\begin{cases} x^2 + 7xy + y^2 = 9, \\ 3x - 2y = 1. \end{cases}$

2.98. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2), \\ x + y = 6. \end{cases}$

2.99. $\begin{cases} x + y^2 = 7, \\ x\,y^2 = 12. \end{cases}$

2.100. $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}xy, \\ x - y = \dfrac{1}{4}xy. \end{cases}$

2.101. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4. \end{cases}$

2.102. $\begin{cases} (3x - y)(3y - x) = 2(y + 3), \\ \dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

2.5. Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

2.103. $\dfrac{6b + 7a}{6b} - \dfrac{3a x^2}{2b^2} = 1 - \dfrac{ax}{b^2 - ab}$.

2.104. $\dfrac{1}{x(x + 2)} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{7}{12}$.

2.105. $\dfrac{ax - b}{a + b} + \dfrac{bx + a}{a - b} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

2.106. $\dfrac{x^2 + 1}{x} - \dfrac{x}{x^2 + 1} = \dfrac{3}{2}$.

2.107. $\dfrac{1}{x(x + 6)} - \dfrac{1}{(x+3)^2} = -\dfrac{9}{20}$.

2.108. $3\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

2.109. $\dfrac{x - 1}{a - 1} + \dfrac{2a^2(1 - x)}{a^4 - 1} = \dfrac{-2x - 1}{1 - a^4} - \dfrac{1 - x}{1 + a}$.

2.110. $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x} - \dfrac{6x}{x^2 + 2x + 3} = 5$.

2.111. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x-1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1.$

2.112. $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{2x}{x-a}=\dfrac{5a^2}{4\left(x^2-a^2\right)}.$

2.113. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=-15.$

2.114. Составить уравнение, корни которого втрое больше корней данного: $x^2+5x-6=0$.

2.115. В уравнении $x^2-px+7=0$ определить p таким образом, чтобы разность корней равнялась двум.

2.116. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого?

2.117. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов корней.

2.118. Не решая уравнения $3x^2-5x-2=0$, найти сумму кубов его корней.

Решить уравнения:

2.119. $(5-x)^3+\dfrac{1}{125-75x+15x^2-x^3}=2.$

2.120. $\sqrt{12x-5}=3-2\sqrt{2x}.$

2.121. $\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x}=6.$

2.122. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{12-2x}.$

2.123. $\sqrt{x+15}-\sqrt{x+10}=\sqrt{2x+13}.$

2.124. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{10x+5}=2.$

2.125. $\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x}.$

2.126. $x+\sqrt{3x-5}=11.$

2.127. $\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+5}=2.$

2.128. $\dfrac{3x-1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+13}.$

2.129. $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\dfrac{3}{\sqrt{x+2}}.$

2.130. $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{2x}.$

2.131. $2\sqrt{x+3}-2=\sqrt{3x+1}$.

2.132. $\sqrt{4-x}-\sqrt{5+x}=3$.

2.133. $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$.

2.134. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}=3$.

2.135. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-3}=10$.

2.136. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{17-x}=2$.

2.137. $\dfrac{7}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+3}=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}$.

2.138. $\sqrt{4x-3}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$.

2.139. $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}=\sqrt{5x-10}$.

2.140. $\sqrt{9-x\sqrt{x^2-72}}=x+3$.

2.141. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-4}}=x+1$.

2.142. $2\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{1-x+\sqrt{x(1+x)}}$.

2.143. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}=\dfrac{1}{4}$.

2.144. $\dfrac{\sqrt{1+4x^2}-2x}{\sqrt{1+4x^2}+2x}=\dfrac{1}{9}$.

2.145. $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x-2-\sqrt{x^2-4}}=-\dfrac{x+2}{2}$.

2.146. $2\sqrt{x-1}+\sqrt{-1-x}=\sqrt{-1-x+\sqrt{x(-1-x)}}$.

2.147. $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{2x^2-3x-2}$.

2.148. $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-3x+5}=5$.

2.149. $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$.

2.150. $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}$.

2.151. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

2.152. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$.

2.153. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0.$

2.154. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0.$

2.155. $|x-2|+4=3x.$

2.156. $x^2-3|x-1|-1=0.$

2.157. $|2x-1|+|x+2|=3.$

2.158. $|x^2-x-6|=|6-x|.$

Решить системы уравнений:

2.159. $\begin{cases}-x+y=5,\\ x+2y=16.\end{cases}$

2.160. $\begin{cases}7x+y=8,\\ -5x+5y=0.\end{cases}$

2.161. $\begin{cases}\dfrac{x}{4}+4y=1,\\ 2x-7y=8.\end{cases}$

2.162. $\begin{cases}x-3y=-2,\\ x^2-2xy=7.\end{cases}$

2.163. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6},\\ x+y=5.\end{cases}$

2.164. $\begin{cases}x^2+xy-y^2=11,\\ x-2y=1.\end{cases}$

2.165. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\ x-y=1.\end{cases}$

2.166. $\begin{cases}x^2+xy-3y=9,\\ 3x+2y=-1.\end{cases}$

2.167. $\begin{cases}4x^2-9y^2=15,\\ 2x+3y=5.\end{cases}$

2.168. $\begin{cases}x^2+4y^2+3=0,\\ x+10y=17.\end{cases}$

2.169. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2,\\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7.\end{cases}$

2.170. $\begin{cases}(4x-5)(y-x)=\dfrac{5}{2}y,\\ \dfrac{x-y}{5}-\dfrac{3x-y}{3}=0.\end{cases}$

2.171. $\begin{cases}(x+1)(y-3)=5,\\ \dfrac{y-3}{x+1}=5.\end{cases}$

2.172. $\begin{cases}x+y^2=7,\\ xy^2=12.\end{cases}$

2.173. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12},\\ x^2-y^2=7.\end{cases}$

2.174. $\begin{cases}x^2+y^2=100,\\ x(y+6)=0.\end{cases}$

2.175. $\begin{cases}x^2+y^2=20,\\ xy=-8.\end{cases}$

2.176. $\begin{cases}x^2+y^2-xy=19,\\ xy=15.\end{cases}$

2.177. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2},\\ x+y=5.\end{cases}$

2.178. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2},\\ x+y+xy=9.\end{cases}$

2.179. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27.\end{cases}$

2.180. $\begin{cases}x+y=9,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3.\end{cases}$

2.181. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ x+y=28.\end{cases}$

2.182. $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6,\\ x^2y+y^2x=20.\end{cases}$

2.183. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$

2.184. $\begin{cases}\sqrt[3]{(y+1)/x}-2\sqrt[3]{x/(y+1)}=1,\\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5.\end{cases}$

3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

3.1. Задачи на пропорциональное деление

В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ a и d — крайние члены, b и c — средние.

Основное свойство пропорции: $ad=bc$.

3.1. Если на заводе будут ежедневно сжигать 3,6 т топлива, то расходы на топливо за полгода составят 3 млн.руб. Сколько рублей будет израсходовано на заводе на топливо за тот же период, если ежедневно будут сжигать 3 т этого топлива?

Р е ш е н и е. При сжигании 1 т топлива расходы на него составят $\frac{3}{3,6}$ млн.руб., а при сжигании 3 т — соответственно $\frac{3}{3,6}\cdot 3=2,5$ млн.руб.

О т в е т: 2,5 млн.руб.

3.2. Два трикотажных цеха выпустили продукции на 6 млн.руб. причем производительности первого и второго цехов относятся как 2 : 3. На сколько рублей произвел продукции каждый цех в отдельности?

Р е ш е н и е. Продукция первого цеха составляет 2 части из общего числа 2 + 3 = 5 частей, т.е. $\frac{2}{5}$ всей продукции, а ее стоимость равна 6 млн $\frac{2}{5}$ = 2,4 млн. руб. Аналогично стоимость продукции второго цеха равна $6\cdot\frac{3}{5}=3,6$ млн. руб.

О т в е т: 2,4 и 3,6 млн. руб.

3.3. Объемы трех помещений равны: 2410 м^3, 1790 м^3 и 1050 м^3. Распределить 2625 тыс.руб., затраченных на отопление этих помещений, пропорционально их кубатуре.

3.4. 8 рабочих выполнили работу за 6 дней. За сколько дней выполнили бы ту же работу 12 рабочих при той же производительности труда?

3.5. Для перевозки груза нужно 10 трехтонных машин. Сколько двухтонных машин смогут перевезти тот же груз?

3.6. На пошив 6 палаток нужно 120 м брезента шириной 1,2 м. Сколько метров брезента шириной в 1,5 м надо на пошив 4 таких палаток?

3.7. За перевозку трех грузов было уплачено 940 тыс.руб. Первый груз весом в 14 т был перевезен на 30 км, второй — в 15 т на 40 км и третий — в 16 т на 35 км. Сколько стоит перевозка каждого груза?

3.8. На заводе имеются станки: токарные, фрезерные и шлифовальные, количество которых соотносится, как $\frac{11}{12} : 0{,}5 : 0{,}25$. Сколько всего станков на заводе, если фрезерных и шлифовальных станков вместе на 92 меньше, чем токарных станков?

3.2. Задачи на проценты

Процентом называется сотая часть числа. При решении задач на проценты могут встретиться три случая.

а). Нахождение процентов от данного числа:

3.9. В цехе работают 60 человек, из них 30% женщин. Определить, сколько женщин работает в цехе.

Р е ш е н и е. Требуется найти 30% от числа 60, т.е. $\frac{30}{100} \cdot 60 = 18$ (женщин).

Ответ: 18 женщин.

б). Нахождение числа по его процентам:

3.10. Найти размер вклада, 25% которого составляют 150 тыс. руб.

Р е ш е н и е. 1% вклада составляет $\frac{150}{25}$ тыс. руб., а весь вклад, принятый за 100%, равен $\frac{150}{25} \cdot 100 = 600$ тыс. руб.

Ответ: 600 тыс. руб.

в). Нахождение процентного отношения двух чисел:

3.11. Каково процентное содержание меди в руде, если на 225 кг руды приходится 34,2 кг меди?

Р е ш е н и е: Содержание меди в руде составляет $\frac{34,2}{225}$ частей, или $\frac{34,2}{225} \cdot 100 = 15,2\%$.

О т в е т: 15,2%.

3.12. Цена товара понизилась на 40%, затем еще на 25%. На сколько процентов понизилась цена товара по сравнению с первоначальной?

Р е ш е н и е. Первоначальную цену принимаем за 100%. После первого снижения цена товара равна: 100% — 40% = 60%. Второе снижение происходит от новой цены, т.е. $60 \cdot \frac{25}{100} = 15\%$. Общее снижение цены товара равно 40 + 15 = 55%.

О т в е т: 55%.

3.13. Прибыль составляет $11\frac{1}{4}\%$ продажной стоимости товара. Сколько это составит процентов от себестоимости товара?

Р е ш е н и е. Процент прибыли берется по отношению к себестоимости (принимаемой за 100%).

Обозначим прибыль за $x\%$. Тогда продажная цена товара равна $(100+x)\%$. По условию задачи имеем $x = (100 + x) \cdot 11\frac{1}{4}\%$ или

$x = \frac{(110 + x) \cdot 45}{100 \cdot 4}$, откуда $x = 12,676\% \approx 12,7\%$.

О т в е т: $\approx 12,7\%$.

3.14. Вклад, положенный в сбербанк два года назад, достиг суммы, равной 1312,5 тыс.руб. Каков был первоначальный вклад при 25% годовых?

Р е ш е н и е. Пусть x (тыс.руб.) — первоначальный размер вклада. В конце первого года вклад составит $x + \frac{25}{100}x = 1,25x$ (тыс.руб.), а в конце второго года $1{,}25x\,(1+0{,}25)=1{,}25^2x$ (тыс.руб.), т.е. $1{,}25^2\,x =$ $= 1312{,}5$ тыс.руб., откуда $x = 840$ тыс.руб.

Ответ: 840 тыс.руб.

3.15. Смешали два сорта бензина стоимостью по 30 тыс. и 50 тыс.руб. за бочку. Всей смеси получено 1200 бочек, которые были проданы по 44 тыс.руб. за бочку, причем получили 10% прибыли. Сколько бочек каждого сорта взято для составления смеси?

3.16. Мясо теряет при варке около 35% своего веса. Сколько нужно сырого мяса, чтобы получить 520 г вареного?

3.17. Из молока получается 21% сливок, а из сливок — 24% масла. Сколько нужно взять молока, чтобы получить 630 кг масла?

3.18. При продаже товара за 1386 тыс.руб. получено 10% прибыли. Определить себестоимость товара.

3.19. Вкладчик взял из сбербанка 25% своих денег, потом 4/9 оставшихся и еще 64 тыс.руб. После этого у него осталось на сберкнижке 15% всех его денег. Как велик вклад?

3.20. Сумма двух чисел равна 120. Найти эти числа, если 40% одного равны 60% другого.

3.21. Один из рабочих выполнил пятилетний план за 3 года 4 мес. На сколько процентов он перевыполнил тот план, который был намечен на 3 года 4 мес.?

3.22. При продажной стоимости товара 2,2 тыс.руб. за 1 кг продовольственный магазин получает 10% прибыли. Если продать этот товар по 1,8 тыс.руб. за 1 кг, то магазин понесет убыток в сумме 43 тыс.руб. Сколько килограммов этого товара было в магазине?

3.23. Вследствие реконструкции оборудования производительность труда рабочего повысилась дважды в течение года на один и тот же процент. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда рабочего, если он сначала вырабатывал изделий на 25 тыс.руб., а после реконструкции — на 28,09 тыс.руб.

3.24. В иностранном отделе библиотеки имеются книги на английском, французском и немецком языках. Английские книги составляют 36% всех книг, французские — 75% английских, а остальные 185 книг немецкие. Сколько всего иностранных книг в библиотеке?

3.25. Рабочий день уменьшился с 8 ч до 7. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата выросла на 5%?

3.26. Ученик читал книгу 4 дня. Число страниц, прочитанных им в первые три дня, относится как 1/5 : 1/3 : 1/20. В четвертый день он прочитал 15% от числа страниц, прочитанных во второй день. Найти число страниц, прочитанных им в каждый день, если известно, что число страниц, прочитанных во второй день, больше числа всех страниц, прочитанных в другие дни, на 8 страниц.

3.27. Две шкурки ценного меха стоимостью в 225 тыс.руб. были проданы на международном аукционе с прибылью в 40%. Какова стоимость каждой шкурки отдельно, если от первой было получено прибыли 25%, а от второй — 50%?

3.28. Стоимость 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 270 тыс.руб. В действительности за все книги уплачено только 237 тыс.руб., так как проведена скидка на первый том в размере 15%, на второй — 10%. Найти первоначальную цену этих книг.

3.29. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того, как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй — на 25%, вместе за смену они стали изготовлять 86 деталей. Сколько деталей изготовляет каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

3.3. Задачи на сплавы и смеси

3.30. Один раствор содержит 30% по объему азотной кислоты, а второй — 55%. Сколько нужно взять первого и второго растворов, чтобы получить 100 л 50%-ного раствора азотной кислоты?

Решение. Пусть первого раствора нужно взять x л, тогда второго — $(100 - x)$ л. В x л содержится $0{,}3$ л азотной кислоты, а в $(100 - x)$ л содержится $0{,}55(100 - x)$ л азотной кислоты.

Составим уравнение: $0{,}3x + 0{,}55(100 - x) = 100 \cdot 0{,}5$, откуда $x = 20$ л.

Ответ: 20 л.

3.31. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и долили сосуд водой, затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор соляной кислоты?

Р е ш е н и е. Пусть первый раз отлили x л 100%-ной соляной кислоты, тогда в растворе ее осталось $(12 - x)$ л. Второй раз было отлито x л жидкости, в которой содержалось $\frac{12-x}{12}x$ л кислоты.

В результате в сосуде осталось $(12 - x - \frac{12-x}{12}x)$ л кислоты, что составило $\frac{25}{100} \cdot 12 = 3$ л. Поэтому $12 - x - \frac{12-x}{12}x = 3$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = 18$.

Второй корень не подходит, так как из сосуда, вмещающего 12 л, нельзя отлить 18 л.

Ответ: 6 л.

3.32. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 3:4. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 15:22?

Р е ш е н и е. Пусть третий сплав содержит x частей первого и y частей второго сплава, т.е. на x кг первого сплава приходится y кг второго сплава. Тогда в $(x + y)$ кг третьего сплава содержится $(1/3)x + (3/7)y$ кг первого металла и $(2/3)x + (4/7)y$ кг второго металла.

По условию $\frac{(1/3)\,x + (3/7)\,y}{(2/3)\,x + (4/7)\,y} = \frac{15}{22}$. Разделив числитель и знаменатель на y, получим: $\frac{(1/3)\,(x/y) + (3/7)}{(2/3)\,(x/y) + (4/7)} = \frac{15}{22}$, откуда после преобразований получим $\frac{x}{y} = \frac{9}{28}$.

Ответ: на 9 частей первого сплава надо взять 28 частей второго.

3.33. На складе было 100 кг ягод. Анализ показал, что в ягодах 99% воды. Через некоторое время содержание воды в ягодах упало до 98%. Сколько теперь весят ягоды?

3.34. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар содержит 70% воды, а полученный из него мед — 16% воды. Сколько кг нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда?

3.35. Сколько кг воды надо выпарить из 100 кг массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу, содержащую 80% воды?

3.36. Морская вода содержит 5% по весу соли. Сколько кг пресной воды нужно прибавить к 80 кг морской, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

3.37. Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый содержит 40% меди, второй — 32% меди. Какого веса должны быть эти слитки, чтобы после их совместной переплавки получить 8 кг сплава, содержащего 35% меди?

3.38. Смесь, состоящая из двух веществ, весит 18 кг. После того, как из нее выделили 40% первого вещества и 25% второго, в ней первого вещества стало столько же, сколько второго. Сколько каждого вещества было в смеси?

3.39. Имеется 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды. Сколько килограммов воды надо выпарить, чтобы оставшаяся масса содержала 25% целлюлозы?

3.40. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

3.41. Сплав меди и олова, содержащий на 12 кг больше меди, чем олова, сплавили с 4 кг чистой меди. В результате содержание олова в сплаве понизилось на 2,5%. Сколько олова содержится в сплаве?

3.4. Задачи на числа

3.42. Сумма цифр двузначного числа равна 8. Если цифры этого числа переставить, то полученное число будет на 18 меньше искомого. Как велико искомое число?

Р е ш е н и е. Цифру единиц в искомом числе обозначим через x; тогда цифра десятков будет $(8 - x)$. Искомое число можно представить как $(8 - x) \cdot 10 + x$. После перестановки цифр число примет вид $10x +$

$+ (8 - x)$. Уравнение задачи: $10x + (8 - x) + 18 = (8 - x) \cdot 10 + x$, откуда $x = 3$.

Ответ: 53.

3.43. Среднее пропорциональное двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из них. Найти эти числа.

3.44. Найти три числа, из которых второе больше первого настолько, насколько третье больше второго, если известно, что произведение двух меньших чисел равно 85, а произведение двух больших равно 115.

3.45. Найти двузначное число, зная, что число его единиц на два больше числа десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

3.46. Ученику надо было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц, но по ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего и получил произведение на 2808 меньше истинного. Чему равно истинное произведение?

3.47. Найти 2 числа, если известно, что сумма удвоенного первого и утроенного второго равна 23, а учетверенное второе больше утроенного первого на 8.

3.5. Задачи на движение

При решении задач на движение необходимо помнить, что пройденный путь s связан со скоростью v и временем t движения соотношением $s = vt$.

3.48. Грузовой автомобиль задержался на 12 мин на заправочной станции, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти первоначальную скорость автомобиля.

Решение. Обозначим первоначальную скорость автомобиля через x км/ч. Тогда расстояние 60 км он проехал бы за $60/x$ ч. Фактически он, двигаясь со скоростью $(x + 15)$ км/ч, затратил на этот путь $60/(x + 15)$ ч. Время задержки составляет 12 мин, или $1/5$ ч. Поэтому $60/x - 60/(x + 15) = 1/5$, откуда $x_1 = 60$, $x_2 = -75$ (не подходит по условию задачи).

Ответ: 60 км/ч.

3.49. Катер проходит 96 км вниз по течению реки от A до B и обратно за 14 ч. Одновременно с катером из A отправился плот. На пути обратно катер встретил плот на расстоянии 24 км от A. Определить скорость катера в стоячей воде и скорость течения.

Решение. Пусть x — скорость катера в стоячей воде, а y — скорость течения реки (в км/ч). Тогда $(x+y)$ — скорость катера по течению реки, а $(x-y)$ — скорость катера против течения (в км/ч). Расстояние 96 км вниз по течению реки катер проходит за $96/(x+y)$ ч, а обратный путь — за $96/(x-y)$ ч. Поэтому $96/(x+y) + 96/(x-y) = 14$. (1) Расстояние 24 км плот проходит за $24/y$ ч. Это же время потребовалось катеру, чтобы пройти вниз по течению реки на 96 км и обратный путь 72 км, т.е. $24/y = 96/(x+y) + 72/(x-y)$. (2) Итак, задача свелась к решению системы уравнений (1) и (2). Преобразуем уравнение (2), освободившись в нем от общего знаменателя. Получим $24(x+y)(x-y) = 96y(x-y) + 72y(x+y)$, $x^2 - y^2 = y\times(4x + 4y + 3x + 3y)$, откуда (после приведения подобных членов) $x^2 = 7xy$. Так как $x \neq 0$, то $x = 7y$. Подставляя это выражение в уравнение (1), найдем $y = 2$ км/ч. Тогда $x = 14$ км/ч.

Ответ: 14 км/ч.

3.50. Легковая машина выехала из города на 2 мин позднее грузовой и догнала грузовую через 10 км. Определить скорость машин, если легковая проезжает в час на 15 км больше грузовой.

3.51. Расстояние между двумя станциями железной дороги 120 км. Первый поезд проходит это расстояние на 50 мин скорее, чем второй. Скорость первого поезда больше скорости второго на 12 км/ч. Определить скорости обоих поездов.

3.52. Турист проплыл по реке 90 км, прошел пешком 10 км, при этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист плыл по реке столько же времени, сколько он шел пешком, а шел пешком — сколько плыл по реке, то эти расстояния были бы равны. Сколько времени он шел пешком и сколько плыл по реке?

3.53. Из города A в город B отправился пешеход. Расстояние от A до B 10 км. Через 30 мин после него из города A в город B отправился велосипедист, скорость которого на 6 км больше скорости пешехода. Велосипедист, обогнав пешехода и доехав до города B, возвращается в город A и приезжает туда в тот момент, когда пешеход приходит в город B. Определить скорость пешехода.

3.54. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч, а через полчаса после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние от пристани до города, если пароход пришел туда на 1,5 ч раньше лодки?

3.55. Моторная лодка проходит расстояние AB, равное 28 км, в оба конца за 5 ч 50 мин. Однажды выйдя из B в пункт A, находящийся выше по течению реки, лодка через два часа встретила плот, отправившийся из A за 4 часа до выхода лодки из B. Найти скорость течения реки и собственную скорость моторной лодки.

3.6. Задачи на работу

При решении этих задач нужно четко знать, что *производительность труда есть работа в единицу времени.*

3.56. На уборке урожая работали два комбайна 10 дней вместе и сверх того первый комбайн работал еще два дня. Сколько времени потребуется каждому комбайну в отдельности для выполнения всей работы, если второй комбайн может выполнить ее на 4 дня скорее, чем первый?

Решение. Всю работу принимаем за 1. Пусть одному второму комбайну для выполнения всей работы потребуется x дней, тогда первому комбайну потребуется $(x+4)$ дней. Производительность первого комбайна равна $1/(x+4)$, а второго $-1/x$. За 10 дней второй комбайн выполнит $10/x$ часть работы, а первый комбайн за 12 дней $12/(x+4)$ часть. По условию $10/x + 12/(x+4) = 1$, откуда $x_1 = 20$, $x_2 = -2$ (не подходит по условию).

Ответ: 24 дн., 20 дн.

3.57. Два подъемных крана, работая вместе, разгрузили баржу за 6 ч. За какое время может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно, если один из них может ее разгрузить на 5 ч скорее, чем другой?

3.58. Один из заводов может выполнить заказ на 4 дня скорее, чем другой. За какое время мог бы каждый из них в отдельности выполнить этот заказ, если известно, что при совместной работе они выполнили за 24 дня заказ в 5 раз больший?

3.59. Двум трактористам было поручено вспахать поле. После того как первый пропахал 7 ч, а второй 4 ч, оказалось, что они вспахали 5/9 всего поля. Проработав вместе 4 ч, они установили, что им осталось вспахать 1/18 часть поля. За сколько часов каждый из трактористов, работая в отдельности, мог бы вспахать все поле?

3.60. Первый контролер тратит на проверку партии изделий на 30 мин больше, чем второй. Если бы они работали вместе, то проверили бы партию за 6/7 ч. За сколько времени проверит партию каждый контролер в отдельности?

3.61. Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 16 ч. Если первый из них выполнит 5/6 всей работы, а затем второй оставшуюся часть, то на выполнение этой работы они потратят 28 ч. Сколько времени потребуется каждому рабочему на выполнение всей работы в отдельности.

3.62. Чан наполняется двумя кранами A и B. Наполнение чана только через кран A длится на 22 мин дольше, чем через кран B. Если же открыть оба крана, то чан наполнится за один час. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?

3.63. На посадке деревьев работали две бригады. Первая бригада ежедневно высаживала на 40 деревьев больше, чем вторая, и посадила 270 деревьев. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой и посадила 250 деревьев. Сколько дней работала каждая бригада?

3.7. Задачи на плановое и фактическое выполнение задания

3.64. На вагоноремонтном заводе в определенный срок должно быть отремонтировано 330 вагонов. Перевыполняя план ремонта в среднем на 3 вагона в неделю, на заводе уже за две недели до срока отремонтировали 297 вагонов. Сколько вагонов в неделю ремонтировали на заводе?

Р е ш е н и е. Пусть по плану должно быть отремонтировано в среднем x вагонов в неделю; тогда на ремонт всех вагонов потребовалось бы $330/x$ недель. Фактически в неделю ремонтировалось $(x+3)$ вагона, что позволило осуществить ремонт 297 вагонов за $297/(x+3)$ недель. По условию $330/x - 297/(x+3) = 2$, откуда $x_1 = 30$; $x_2 = -33/2$ (не подходит по условию задачи).

О т в е т: фактически ремонтировали 33 вагона в неделю.

3.65. По плану кооператив должен засевать по 40 га в день. Однако кооператоры засевали каждый день на 30% больше плана, а поэтому засеяли на 2 дня раньше срока, причем засеяли на 4 га больше, чем предусмотрено планом. Сколько га засеял кооператив?

3.66. Заводу было поручено изготовить 8000 деталей к определенному сроку. Работая точно по графику, завод изготовил 25% заказа, а затем стал изготовлять ежедневно по 100 деталей сверх дневного задания и выполнил заказ за 2 дня до срока. Сколько дней понадобилось заводу для выполнения заказа?

3.67. Бригада рабочих должна была сделать за смену 7200 деталей, причем каждый рабочий должен сделать одинаковое количество деталей. Однако в бригаде заболело трое рабочих и поэтому для выполнения нормы каждому рабочему пришлось сделать на 400 деталей больше.

Сколько рабочих было в бригаде?

3.68. При постройке здания требовалось вынуть 8000 м^3 земли в определенный срок. Работа была закончена раньше срока на 8 дней вследствие того, что бригада землекопов ежедневно перевыполняла план на 50 м^3. Определить, в какой срок должна была быть окончена работа и найти ежедневный процент перевыполнения.

3.69. Два ученика должны были обработать по 120 болтов за определенное время. Один из них выполнил задание на 5 часов раньше срока, так как обрабатывал в час на 2 болта больше другого. Сколько болтов в час обрабатывал каждый ученик?

3.8. Разные задачи

3.70. Для ремонта спортивного зала куплено краски двух сортов: первого сорта — на 360 тыс.руб., второго — на 240 тыс. руб., причем краски второго сорта куплено на 6 кг больше, чем первого, и 1 кг краски второго сорта на 10 тыс.руб. дешевле 1 кг краски первого сорта. Сколько куплено краски первого сорта?

3.71. На обработку одной детали один рабочий затрачивает на 1 мин меньше, чем другой. Сколько деталей обработает каждый из них за 4 ч, если первый обрабатывает за это время на 8 деталей больше, чем второй?

3.72. Площадь первого картофельного поля на 2 га больше площади второго. С первого поля получили 748 т картофеля, а со второго — 720. Сколько тонн картофеля собрали с 1 га каждого поля, если с 1 га второго поля собирали на 4 т картофеля больше, чем с 1 га первого поля?

3.73. Первая машинистка напечатала 270 страниц, печатая в день на 2 страницы больше, чем вторая. Печатала она на 1 день меньше, чем вторая. Сколько страниц в день печатала вторая машинистка, если всего она напечатала 280 страниц?

3.74. В одном кооперативе собрали 1500 ц пшеницы, а в другом с площади на 20 га меньше — 1600 ц. Сколько пшеницы собирали с 1 га в первом кооперативе, если во втором собирали с 1 га на 5 ц больше?

3.75. Две машины, работающие с двух сторон тоннеля, должны закончить проходку за 60 дней. Если первая машина выполнит 30% своей работы, а вторая $26\frac{2}{3}$% своей, то обе они пройдут 84 м тоннеля. Определить, сколько метров в день проходит каждая машина, если вторая проходит в день на 1 м больше первой.

3.76. Двое рабочих получили различную плату за проработанный день. Первый заработал 240 тыс.руб., а второй, работая на 6 дней меньше первого, получил 135 тыс.руб. Если бы второй рабочий работал столько дней, сколько первый, а первый столько, сколько второй, то оба получили бы одинаковую сумму. Сколько дней работал каждый рабочий?

3.9. Задачи для самостоятельного решения

3.77. Токарь и его ученик должны по плану изготовить за смену 65 деталей. Благодаря тому, что токарь перевыполнил свой план на 10%, а ученик — на 20%, они изготовили за смену 74 детали. Сколько деталей по плану должны были изготовить в отдельности за смену токарь и его ученик?

3.78. Три кооператива затратили на выполнение работы 7,4 млн. руб. Этот расход они распределили так, что каждый внес сумму денег, обратно пропорциональную расстоянию его от места объекта работы. Первый кооператив расположен в 4 км, второй — в 5 км и третий — в 6 км от объекта. Сколько рублей должен уплатить за работу каждый кооператив?

3.79. Первая труба наполняет бассейн на 3 ч быстрее, чем вторая, а вторая — на 2 ч дольше, чем третья. При одновременной работе первой и второй труб бассейн наполняется за 2 ч. За какое время будет наполнен бассейн, если открыть сразу три трубы?

3.80. Мастер дает сеанс одновременной игры в шахматы. Сначала он проиграл 10% всех партий, а 8 партий выиграл. До конца сеанса мастер проиграл еще 10% партий оставшимся противникам, закончил вничью одну партию, а остальные 8 партий выиграл. На скольких досках мастер давал сеанс?

3.81. Две машинистки получили за работу всего 250 тыс. руб., причем одна переписывала текст, а другая таблицы. Страниц текста было в 2,5 раза больше, чем страниц таблиц, но страница таблиц оплачена на $66\frac{2}{3}$ % дороже страницы текста. Сколько денег получила каждая?

3.82. Смесь, состоящая из двух веществ, весит 18 кг. После того, как из нее выделили 40% первого вещества и 25% второго, в ней осталось их поровну. Сколько каждого вещества было в смеси?

3.83. Один рабочий выполнил норму за 6 ч, второй — за 5 ч, а третий — за 4 ч. Работая вместе некоторое время, они изготовили 740 деталей. Сколько деталей изготовил каждый?

3.84. Бригада ремонтных рабочих получила задание отремонтировать в течение трех дней участок шоссе определенной длины. В первый день она отремонтировала 26% длины всего участка, во второй — 75% остатка, а в третий — 33 метра. Какова длина участка?

3.85. В штате гаража числится 54 шофера. Сколько свободных дней может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомашин из имеющихся 60 остаются в гараже для профилактического ремонта?

3.86. Цена 1 м ткани стоимостью 16 тыс. руб. была снижена на несколько процентов. Спустя некоторое время цена 1 м ткани была вновь снижена на столько же процентов и стала равной 9 тыс. руб. На сколько процентов снижалась цена на ткань каждый раз?

3.87. Один килограмм груш стоит на 20% меньше 1 кг персиков, а 1 кг яблок — на 10% меньше 1 кг груш; 1 кг слив стоит на 15% меньше 1 кг яблок. На сколько процентов 1 кг слив стоит меньше 1 кг персиков?

3.88. Теплоход должен был пройти 72 км с определенной скоростью. Фактически первую половину пути он шел со скоростью на 3 км/ч меньшей и вторую половину пути на 3 км/ч большей, чем ему полагалось. На весь путь теплоход затратил 5 ч. На сколько минут опоздал теплоход?

3.89. Скорости двух поездов соотносятся как 2:3. Расстояние в 36 км второй поезд проходит на 30 мин быстрее первого. Найти скорость обоих поездов.

3.90. Однозначное число увеличили на 10 единиц. Если полученное число увеличить на столько же процентов, как в первый раз, то получится 72. Найти первоначальное число.

3.91. В зале клуба столько рядов, сколько мест в каждом ряду. Если увеличить в два раза число рядов и уменьшить на 10 количество мест в каждом ряду, то число мест в зале увеличится на 300. Сколько рядов в зале?

3.92. Производительность самоходной косилки в 5 раз выше производительности бригады косцов. Сколько дней потребуется бригаде косцов, чтобы скосить луг, если известно, что самоходная косилка и бригада косцов, работая совместно, могут закончить сенокос за три дня?

3.93. По плану лесоруб должен был заготовлять ежедневно по 3 куб.м древесины и выполнить задание в определенный срок. Лесоруб ежедневно выполнял 160% плана и, проработав на 12 дней меньше срока, перевыполнил план на 113,4 куб.м. Сколько куб.м. древесины заготовил лесоруб?

3.94. Сколько килограммов воды испарится при сушке 5 кг свежих грибов, содержащих по массе 85% воды, если полученные сухие грибы содержат 9% воды?

3.95. Три бригады, работая совместно, закончили посадку деревьев на участке за 4 ч. Первая бригада может выполнить эту работу в 1,5 раза быстрее, чем вторая, и на 2 ч быстрее третьей. За какое время может провести посадку деревьев каждая бригада в отдельности?

3.96. Два экскаватора, работая одновременно, выкапывают котлован за 12 ч. За сколько времени мог бы выкопать этот котлован каждый из экскаваторов в отдельности, если скорости выполнения работы экскаваторов относятся как 3:2?

3.97. Автомобиль, пройдя (AB)=300 км, повернул назад и через 1ч 12 мин после выхода из B увеличил скорость на 16 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше. Найти первоначальную скорость автомобиля.

3.98. Поле вспахивали в течение 3 дней. В первый день вспахали 56% всей площади, во второй — 75% остатка, а в третий день — 330 га. Какова площадь поля?

3.99. Некий сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

3.100. Имеется 5 л 70%-ного раствора серной кислоты. Сколько литров 80%-ного раствора серной кислоты нужно долить в этот раствор, чтобы получить 72%-ный раствор серной кислоты?

3.101. Первая бригада грузчиков может разгрузить товарный состав на один час быстрее, чем вторая бригада. Если 7/8 состава будут разгружать обе бригады вместе, а оставшаяся часть будет разгружена только второй бригадой, то на выполнение всей работы по разгрузке состава потребуется 2 ч. За какое время может разгрузить состав каждая бригада, работая отдельно?

3.102. Велосипедист проехал 40 км из города в деревню. На обратном пути он поехал с той же скоростью, но через 2 ч езды сделал остановку на 20 мин. После остановки он увеличил скорость на 4 км/ч и поэтому потратил на весь обратный путь из деревни в город столько же времени, сколько на путь из города в деревню. Найти первоначальную скорость велосипедиста.

3.103. Каменщику было поручено выполнить работу за 20 дней. В первую декаду он выполнил 40% всего задания. На сколько процентов ему нужно повысить производительность труда во второй декаде (по сравнению с первой декадой), чтобы выполнить всю работу в срок?

3.104. Смешали 20 л 70%-ного спирта, 30 л 50%-ного спирта и 22,5 л воды. Каково процентное содержание спирта в получившейся смеси?

3.105. На заводе 20% всех станков были переведены на повышенную скорость, благодаря чему производительность станка повысилась на 80%. На сколько процентов повысился выпуск продукции?

3.106. Двое рабочих, работая вместе, могли выполнить некоторую работу за 8 ч. Случилось так, что первый рабочий работал 5 ч, а второй — 8 ч, а в результате они выполнили 11/14 всей работы. За сколько часов мог бы выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности?

3.107. После встречи двух пароходов один из них пошел на юг, а другой — на запад. Через два часа после встречи расстояние между ними было 60 км. Найти скорость каждого парохода, если известно, что скорость одного из них была на 6 км/ч больше скорости второго?

3.108. После двух последовательных одинаковых процентных повышений зарплата суммой в 100 тыс. руб. обратилась в 125,44 тыс. руб. Определите, на сколько процентов повышалась зарплата.

3.109. Склад отпустил 40% имевшейся в запасе муки хлебозаводу, а остальную муку распределил между тремя магазинами в отношении 0,3 : 2,5 : 0,8. Сколько муки было на складе в запасе, если известно, что первый магазин получил на 40 т меньше, чем третий?

3.110. Два автомобиля выехали одновременно из одного пункта в одном и том же направлении. Один автомобиль идет со скоростью 50 км/ч, другой — 40 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехал третий автомобиль, который обогнал первый автомобиль на 1,5 ч позже, чем второй. Найти скорость третьего автомобиля.

3.111. Из пункта A в пункт B против течения реки выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, и пока его 20 мин чинили, лодку сносило вниз по реке. Определить, насколько позднее прибыла лодка из-за поломки мотора, если известно, что обычно путь из A в B лодка проходит в 1,5 раза дольше, чем путь из B в A.

3.112. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Первая и третья бригады вместе вспахали бы это поле за 6 дней, а первая и вторая вместе — за 8 дней. Во сколько раз третья бригада вспахивает за день больше, чем вторая?

3.113. Два сосуда A и B содержат одинаковое количество воды. В сосуд A вливается литр спирта, после чего литр смеси выливается в сосуд B; затем из сосуда B выливается литр смеси, после чего в сосуде B остается 0,16 л спирта. Определить, сколько воды было в сосуде A вначале.

3.114. Имеются три смеси, составленные из трех элементов: A, B и C. В первую смесь входят только элементы A и B в весовом отношении 3 : 5, во вторую смесь входят только элементы B и C в весовом отношении 1 : 2, в третью смесь входят только элементы A и C в весовом отношении 2 : 3. В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы A, B и C содержались в весовом отношении 3 : 5 : 2?

3.115. В куске сплава массой 6 кг содержится медь. В куске другого сплава массой 8 кг содержится медь в ином процентном отношении, чем в куске первого сплава. От первого куска отделили некоторую часть и от второго куска отделили часть, вдвое большую по массе, чем от первого куска. Каждую из отделенных частей сплавили с остатком другого куска, после чего получили два новых сплава с одинаковым процентным содержанием меди. Какова масса каждой из частей, отделенных от кусков первоначальных сплавов?

4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

4.1 Показательные уравнения

При решении показательных уравнений нужно четко знать правила действий со степенями (см. гл. 1), свойства показательной функции, обратив внимание на то, что областью ее определения является множество всех действительных чисел, а областью значений — множество положительных чисел. Так, если $a^x = b$, то x может быть любым действительным числом, а $b = a^x$ — только положительным числом (при этом мы полагаем, что $a > 0$ и $a \neq 1$).

При решении многих показательных уравнений нет необходимости делать проверку корней[1], однако, если в процессе решения расширяется область допустимых значений (ОДЗ) уравнения или, например, используется метод возведения обеих частей уравнения в квадрат, то проверка корней (или исследование равносильности сделанных при решении преобразований) необходима (см., например, **4.5**).

4.1. Решить уравнение $2^x = 16\sqrt[3]{2}$.

Решение. Преобразуя правую часть, получим $2^x = 2^4 \cdot 2^{1/3}$, или $2^x = 2^{4+1/3}$. Из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство их показателей, т. е. $x = 13/3$.

Ответ: $\{13/3\}$.

4.2. Решить уравнение $2^x = 3^{x/2}$.

Решение. Представим уравнение в виде $2^x = \left(\sqrt{3}\right)^x$. Разделив обе части уравнения на $\left(\sqrt{3}\right)^x \neq 0$, получим $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^x = 1$ или $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^x = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0$, откуда $x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

---

[1] Речь идёт о проверке корней, принципиально необходимой для решения задачи. Разумеется, что проверку, проводимую с целью контроля вычислений, можно делать в любом случае.

4.3. Решить уравнение $2^x = 5$.

Решение. На основании определения логарифма $x = \log_2 5$. Ответ можно получить и в другой форме, например, логарифмируя обе части уравнения по основанию 10: $x \lg 2 = \lg 5$, откуда $x = \frac{\lg 5}{\lg 2}$.

Ответ: $\{\log_2 5\}$.

4.4. Решить уравнение $2^x = -20$.

Решение. Так как значения показательной функции всегда положительны, то данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

4.5. Решить уравнение

$$2^{\sqrt{x+1}} = 16\sqrt{0{,}25^{5-x/4}}.$$

Решение. Левая часть представляет степень с основанием 2. Можно заметить, что и правую часть уравнения можно привести к тому же основанию. Действительно,

$$2^{\sqrt{x+1}} = 2^4 \cdot \sqrt{(1/4)^{5-x/4}}, \text{ или } 2^{\sqrt{x+1}} = 2^4\left[\left(2^{-2}\right)^{5-x/4}\right]^{1/2}.$$

Так как при возведении в степень показатели степеней перемножаются, а при умножении степеней с одинаковым основанием — складываются, получим

$$2^{\sqrt{x+1}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{x}{4}-5}, \text{ или } 2^{\sqrt{x+1}} = 2^{\frac{x}{4}-1}, \text{ откуда } \sqrt{x+1} = \frac{x-4}{4}.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $x+1 = \frac{(x-4)^2}{16}$, или после преобразований $x^2 - 24x = 0$, откуда $x_1 = 0,\ x_2 = 24$.

В данном уравнении необходимо сделать проверку, так как в процессе решения расширилась ОДЗ уравнения (ОДЗ исходного уравнения $[-1, \infty)$, а полученного в конце решения $(-\infty, \infty)$), и мы возводили обе части уравнения в квадрат. Проверка показывает, что $x = 24$ — корень уравнения, а $x = 0$ — посторонний корень.

Ответ: $\{24\}$.

4.6. Решить уравнение $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{1/x} = \frac{9}{16}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую и правую части уравнения к степени с основанием 3/4: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{1/x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$, или $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-1/x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$,

откуда $x-1-1/x=2$, $x^2-3x-1=0$ и $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

О т в е т: $\left\{\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

4.7. Решить уравнение $6^{2x+4}=2^{x+8}\cdot 3^{3x}$.

Р е ш е н и е. Представим уравнение в виде $(2\cdot 3)^{2x+4}=2^{x+8}\cdot 3^{3x}$, или $2^{2x+4}\cdot 3^{2x+4}=2^{x+8}\cdot 3^{3x}$.

Приведем левую часть, например, к степени с основанием 2, а правую — с основанием 3. Так как $2^{x+8}\neq 0$ и $3^{2x+4}\neq 0$, получим $\dfrac{2^{2x+4}}{2^{x+8}}=\dfrac{3^{3x}}{3^{2x+4}}$, или (после вычитания соответствующих показателей степеней) $2^{x-4}=3^{x-4}$.

Полученное уравнение представим в виде $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}=1$, откуда $x-4=$ $=0$ и $x=4$.

О т в е т: {4}.

Решить уравнения:

4.8. $\sqrt{2^x}=4^{-\sqrt{x}}$.

4.9. $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$.

4.10. $9^{2\sqrt{x}}=3^{2x+6}$.

4.11. $5^{\frac{x-2}{3}}=\sqrt{2^{x-2}}$.

4.12. $5^{3x}=17^{-6x}$.

4.13. $125^{3x-1}=5\cdot 0{,}04^{0{,}5x+3}$.

4.14. $\dfrac{10^{2x}}{3^{2x}}=7^{-4x}$.

4.15. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\left(\frac{9}{8}\right)^{x}=\dfrac{27}{64}$.

4.16. $\left(\frac{4}{5}\right)^{x/3}=\sqrt[3]{\left(\frac{5}{4}\right)^{x}}$.

4.17. $\sqrt[x]{27^{2x-1}}=9^{2x-1}$.

4.18. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{3-7x}$.

4.19. $\sqrt[x-7]{8^{\frac{x+3}{3}}}=\sqrt[x-3]{2^{x+8}}$.

4.20. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=\dfrac{256}{2^{x+3}}$.

4.21. $5^{\sqrt{\frac{x}{4}-6}}\cdot\sqrt{5^{\sqrt{6}}}=25^{\sqrt{\frac{x}{4}-6}}$.

4.22. $2^{\sqrt{\frac{x}{4}-2}}\cdot\sqrt{2^{\sqrt{29}}}=4^{\sqrt{\frac{x}{4}-2}}$. **4.23.** $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

4.24. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$. **4.25.** $\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}=1$.

4.26. $(x-4)^{3-x^2}=(x-4)^{2x}$.

4.27. Решить уравнение $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}$.

Решение. Преобразуем уравнение, вынося в каждой части уравнения степень с наименьшим показателем : $3^{x-2}\left(3^3+3+1\right)=5^{x-2}\times$ $\times\left(5^2+5+1\right)$, откуда $3^{x-2}\cdot31=5^{x-2}\cdot31$ или $3^{x-2}=5^{x-2}$, т.е. $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}=1$. Итак, $x-2=0$ и $x=2$.

Ответ: $\{2\}$.

4.28. Решить уравнение $4^x-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+0,5}+$ $+3^{x-0,5}$.

Вынося в каждой части уравнения степень с наименьшим показателем, получим $2^{2x-1}(2+1)=3^{x-0,5}(3+1)$, или $2^{2x-1}\cdot3=3^{x-0,5}\cdot4$, откуда $\frac{2^{2x-1}}{4}=\frac{3^{x-0,5}}{3}$, т.е. $2^{2x-3}=3^{x-1,5}$.

Последнее уравнение представим в виде $2^{2x-3}=\left(\sqrt{3}\right)^{2x-3}$, или $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3}=1$, откуда $2x-3=0$ и $x=1{,}5$.

Ответ: $\{1{,}5\}$.

Решить уравнения:

4.29. $2^{x+3}-2^x=112$. **4.30.** $5^x-5^{x-2}=24$.

4.31. $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$. **4.32.** $3^{2x-3}-3^{2x-2}+3^{2x}=675$.

4.33. $7^{x-3}+7^{x-1}=350$. **4.34.** $7\cdot3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.

4.35. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$. **4.36.** $3^{x+1}-2\cdot5^{x-2}=5^x-2\cdot3^x$.

4.37. $4\cdot3^{x+2}+5\cdot3^x-7\cdot3^{x+1}=180$.

4.38. $5\cdot3^{2x-1}-9^{x-0,5}+3^{2x}+4\cdot9^{x-1}=225$.

4.39. Решить уравнение $3^{2x-2}-6\cdot 3^x-243=0$.

Решение. Представим уравнение в виде $\frac{3^{2x}}{3^2}-6\cdot 3^x-243=0$.

Положив $3^x=y>0$, придём к квадратному уравнению y^2-54y- $-2187=0$, откуда $y_1=81, y_2=-27$ (является посторонним, так как $y>0$)

Итак, $3^x=81$, или $3^x=3^4$, откуда $x=4$.

Ответ: $\{4\}$.

4.40. Решить уравнение $4^{\sqrt{x-2}}+32=5\cdot 2^{1+\sqrt{x-2}}$.

Решение. Представим уравнение в виде $2^{2\sqrt{x-2}}+32=5\cdot 2\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

Положив $2^{\sqrt{x-2}}=y>0$, сведём данное уравнение к квадратному $y^2-10y+32=0$. Так как дискриминант этого уравнения $D=10^2-4\times$ $\times 32=-28$ отрицателен, то оно, а следовательно, и данное уравнение не имеют решений.

Ответ: решений нет.

4.41. Решить уравнение $4^x+6^x=2\cdot 9^x$.

Решение. В каждый член уравнения входит либо квадрат выражения 2^x или 3^x, либо их произведение, т.е. имеем однородное уравнение второй степени. Для его решения разделим обе части уравнения, например, на $9^x\neq 0$ (или на $4^x\neq 0$, или на $6^x\neq 0$, не принципиально). Получим $\left(\frac{4}{9}\right)^x+\left(\frac{6}{9}\right)^x=2$, или $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x=2$.

Полагая $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y>0$, получим $y^2+y-2=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=-2$ (посторонний корень, так как $y>0$). Теперь $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$, откуда $x=0$.

Ответ: $\{0\}$.

Решить уравнения:

4.42. $2^{2x}-2^x-2=0$.

4.43. $5^{2x}-23\cdot 5^x=50$.

4.44. $9^x-8\cdot 3^x-9=0$.

4.45. $2\cdot 7^{3x}-5\cdot 49^{3x}+3=0$.

4.46. $12\cdot 8^x-8^{2x}=32$.

4.47. $2^x-3\cdot 2^{0,5x-1,5}=26$.

4.48. $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot 3^{2\sqrt{x}}+3=0$.

4.49. $3\cdot\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}=-3$.

4.50. $4{,}5^x-1{,}5\left(\sqrt{2}/3\right)^{-x}+0{,}5=0$.

4.51. $4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0$.

4.52. $5^{1+x^3}-5^{1-x^3}=24$.

4.53. $(7^x-1)(9^x-6)=21^x-3^x$. **4.54.** $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$.

4.55. $27^x+12^x=2\cdot 8^x$. **4.56.** $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$.

4.57. $2\cdot 4^{-1/x}+6^{-1/x}=9^{-1/x}$. **4.58.** $\dfrac{10^x-2^x}{5^x-1}+2^{5-x}=18$.

4.59. $125\cdot 25^x-70\cdot 10^x+8\cdot 4^x=0$.

4.60. Решить систему уравнений $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=12,\\ 2^y\cdot 3^x=18.\end{cases}$

Решение. Перемножив сответственно обе части уранений, получим $6^x\cdot 6^y=216$, или $6^{x+y}=6^3$, откуда $x+y=3$.

Разделив обе части первого уравнения на соответствующие части второго, получим $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y}=\dfrac{12}{18}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^1$, откуда $x-y=1$. Итак, имеем систему $\begin{cases}x+y=3,\\ x-y=1,\end{cases}$ из которой $x=2$, $y=1$.

Ответ: $\{(2;1)\}$.

Замечание. Поскольку $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=12=2^2\cdot 3^1,\\ 2^y\cdot 3^x=18=2^1\cdot 3^2,\end{cases}$ можно было подобрать решение системы $x=2$, $y=1$, но в этом случае следовало доказать, что других решений система не имеет; при отсутствии доказательства такое "решение" является в принципе ошибочным.

Решить системы уравнений:

4.61. $\begin{cases}3^{2x}-2y=725,\\ 3^x-2^{0,5y}=25.\end{cases}$ **4.62.** $\begin{cases}4^x\cdot 5^y=400,\\ 2\cdot 3^x=18.\end{cases}$

4.63. $\begin{cases}3\cdot 2^x+2\cdot 3^y=2{,}75,\\ 2^x-3^y=-0{,}75.\end{cases}$ **4.64.** $\begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1},\\ 5\cdot 5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}.\end{cases}$

4.65. $\begin{cases}2^x\cdot 9^y=648,\\ 3^x\cdot 4^y=432.\end{cases}$ **4.66.** $\begin{cases}64^{2x}+64^{2y}=12,\\ 64^{x+y}=4\sqrt{2}.\end{cases}$

4.2 Логарифмы

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

Запись $c = \log_a b$ (4.1)

равнозначна записи $a^c = b$. (4.2)

Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$. (4.3)

Формулы логарифмирования:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y. \quad (4.4)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y. \quad (4.5)$$

$$\log_a x^n = n \log_a x. \quad (4.6)$$

Формулы перехода от одного основания к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad (4.7)$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad (4.8)$$

$$\log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b; \quad (4.9)$$

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b; \quad (4.10)$$

$$\log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b. \quad (4.11)$$

Прежде чем приступить к решению логарифмических уравнений, следует хорошо уяснить свойства логарифмической функции. В отличие от показательной областью определения логарифмической функции является множество положительных чисел, а областью значений — множество всех действительных чисел. Так, если $\log_a x = b$, то x может быть только положительным числом, а $b = \log_a x$ — любым действительным числом. (При этом основание логарифма $a > 0$ и $a \neq 1$).

Необходимо четко знать определение логарифма и, в частности, основное логарифмическое тождество, формулы логарифмирования и перехода от одного основания логарифмов к другому.

4.67. Вычислить $A = 25^{1-\frac{1}{4}\log_5 49}$.

Решение.

$$A = 25^{1-\frac{1}{4}\log_5 49} = \left(5^2\right)^{1-\frac{1}{4}\log_5 49} = \frac{5^2}{5^{\frac{2}{4}\log_5 49}} = \frac{5^2}{\left(5^{\log_5 49}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

откуда в силу основного логарифмического тождества **(4.3)**

$$A = \frac{25}{49^{1/2}} = \frac{25}{7}.$$

Ответ: $\frac{25}{7}$.

4.68. Вычислить $A = \log_{1/7} \log_7 \sqrt[14]{49}$.

Решение. $A = \log_{1/7} \log_7 7^{\frac{2}{14}} = \log_{1/7} \frac{2}{14} = 1.$

Ответ: 1.

Вычислить:

4.69. $36^{1-\log_6 5}$.

4.70. $\log_2 \log_2 \sqrt[8]{2}$.

4.71. $9^{2+0,5\log_3 10}$.

4.72. $16^{0,5\log_4 10+1}$.

4.73. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{1/3} 10-\log_{1/9} 5}$.

4.74. $125^{\log_5 \sqrt[3]{15+\sqrt{3}}} + 8^{\log_2 \sqrt[3]{14-\sqrt{3}}}$.

4.75. Полагая, что $\log_2 208 \approx 7{,}7$, найти $\log_2 13$.

Решение. $\log_2 208 = \log_2(13\cdot 16) = \log_2\left(13\cdot 2^4\right)$.

Логарифмируя, получим: $\log_2 208 = \log_2 13 + 4\log_2 2 = \log_2 13 + 4$, так как логарифм самого основания равен 1. Поэтому:

$\log_2 13 = \log_2 208 - 4 \approx 7{,}7 - 4 = 3{,}7.$

Ответ: $\approx 3{,}7$.

4.76. Дано $x = \dfrac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4\left(a^2+b^3\right)}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Найти $\lg x$.

Решение. Логарифмируя, получим $\lg x = \lg 3 + \lg a^2 + \lg b^{3/5} - \lg c^4 - \lg(a^2 + b^3) = \lg 3 + 2\lg a + \frac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg(a^2 + b^3)$.

Обращаем внимание на то, что логарифм суммы (в данном случае $\lg(a^2 + b^3)$) упростить нельзя.

Ответ: $\lg 3 + 2\lg a + \frac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg\left(a^2 + b^3\right)$.

4.77. Дано $\lg x = 2\lg a - 5\lg b + \frac{3}{7}\lg c + 2d$. Найти x.

Решение. Неизвестное x найдём, потенцируя данное выражение. При этом слагаемое $2d$ удобно представить как $2d\lg 10$ (ибо $\lg 10 = 1$). Теперь:

$$\lg x = \lg a^2 - \lg b^5 + \lg c^{3/7} + \lg 10^{2d} = \lg\frac{a^2\sqrt[7]{c^3}\cdot 10^{2d}}{b^5},$$

откуда $x = \dfrac{a^2\sqrt[7]{c^3}\cdot 10^{2d}}{b^5}$.

Ответ. $\dfrac{a^2\sqrt[7]{c^3}\cdot 10^{2d}}{b^5}$.

Вычислить

4.78. $\log_3 52{,}2$, если $\log_3 5{,}8 \approx 1{,}6$.

4.79. $\log_2 192$, если $\log_2 12 \approx 3{,}6$.

4.80. $\log_5 265$, если $\log_5 53 \approx 2{,}5$.

4.81. $\log_6 528$, если $\log_6 88 \approx 2{,}5$.

Прологарифмировать выражения, полагая, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

4.82. $x = \left(\sqrt[5]{\dfrac{a}{2b}}\right)^3$. **4.83.** $x = \sqrt[4]{\dfrac{1}{a^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{b^2}}$.

4.84. $x = \dfrac{17a^4b^3c^2}{\left(a^2+b^2\right)^4}$. **4.85.** $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{21\sqrt[3]{6}}}$.

Найти x по данному его логарифму:

4.86. $\log_2 x = \log_2(a+b) - \dfrac{2}{3}\left(2\log_2 a + \dfrac{3}{4}\log_2 b\right)$.

4.87. $\log_2 x = \log_2 b - \dfrac{1}{n}\log_2(b-c) - n\log_2(b+c) + 3b$.

4.88. $\log_5 x = \dfrac{2\log_5 3}{5} - \dfrac{\log_5 7}{25} + 5$.

4.89. $\lg x = \dfrac{3\lg 5}{5} - \dfrac{2\lg 25}{25} + 4$.

4.90. Полагая, что $\log_2 7 \approx 2{,}8$, вычислить $\log_4 112$.

Решение. По формуле (4.7) перейдем к новому основанию логарифма 2. Получим:

$$\log_4 112 = \frac{\log_2 112}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2^4 \cdot 7)}{\log_2 2^2} = \frac{4\log_2 2 + \log_2 7}{2} = \frac{4 + \log_2 7}{2} \approx$$

$$\approx \frac{4 + 2{,}8}{2} = 3{,}4.$$

Ответ: $\approx 3{,}4$.

4.91. **Вычислить $A = \log_2 1000$, полагая, что $\lg 2 \approx 0{,}3$.**

Решение. $\log_2 1000 = \log_2 10^3 = 3 \log_2 10$. Поменяв местами основание логарифма и логарифмируемое число по формуле (4.8), получим

$$A = \frac{3}{\log_{10} 2} = \frac{3}{\lg 2} \approx \frac{3}{0{,}3} = 10.$$

Ответ: ≈ 10.

4.92. **Вычислить $A = \log_2 5 \cdot \log_{25} 8$.**

Решение. $A = \log_2 5 \cdot \log_{5^2} 2^3$. На основании формулы (4.9)

$A = \log_2 5\left(\frac{3}{2}\log_5 2\right) = \frac{3}{2}\log_2 5 \cdot \log_5 2$, откуда, учитывая (4.8), $A = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

4.93. **Вычислить $10^{4-\log_{\sqrt[3]{10}} 5}$.**

Решение. На основании формулы (4.11) основание логарифма и логарифмируемое число можно возвести в одну и ту же степень. Поэтому

$$\log_{\sqrt[3]{10}} 5 = \log_{(\sqrt[3]{10})^3} 5^3 = \log_{10} 125.$$

Теперь $10^{4-\log_{(\sqrt[3]{10})^3} 5} = 10^{4-\log_{10} 125} = \dfrac{10^4}{10^{\log_{10} 125}} = \dfrac{10^4}{125} = 80.$

Ответ: 80.

Вычислить:

4.94. $\log_4 676$, если $\log_2 26 \approx 4{,}7$.

4.95. $\log_2 \sqrt[5]{a}$, если $\log_a 32 = 5$.

4.96. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, если $\log_a 27 = 10$.

4.97. $\log_{0,25} 26$, если $\log_2 26 \approx 4{,}7$.

4.98. $\lg 96$, если $\lg 2400 \approx 3{,}4$; $\lg 2 \approx 0{,}7$.

4.99. $\log_{32}80$, если $\lg 5 \approx 0{,}7$; $\lg 3{,}2 \approx 0.5$. **4.100.** $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{\log_5 3}}$.

4.3. Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений, например, при потенцировании, могут расшириться область допустимых значений (ОДЗ) уравнения и появиться посторонние корни. Чтобы отсеять возможные посторонние корни, в конце решения рекомендуется сделать проверку. Если единственной причиной появления посторонних корней является расширение ОДЗ, то вместо проверки полученных корней можно найти ОДЗ уравнения и выяснить, входят ли в нее эти корни.

Во многих случаях бывает удобнее все же сделать проверку корней. Напомним, что при проверке полученные корни подставляются в исходное уравнение или ему равносильное.

При использовании формул логарифмирования **(4.4)** — **(4.6)** следует помнить, что они справедливы лишь для $x > 0$, $y > 0$. Так, если $x < 0$, $y < 0$, то левые части формул **(4.4)** и **(4.5)** имеют смысл (ибо в этом случае $xy > 0$ или $\frac{x}{y} > 0$), а правые части — нет.

Поэтому для случая, когда x и y — одного знака ($x > 0$, $y > 0$ или $x < 0$, $y < 0$), формулы **(4.4)** и **(4.5)** должны быть записаны в виде:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, \qquad \textbf{(4.4*)}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|. \qquad \textbf{(4.5*)}$$

Аналогично, если n — четное число, то в формуле **(4.6)** левая часть имеет смысл при $x < 0$ (ибо $x^n > 0$ в этом случае), а правая — нет. Поэтому, если n — четное число, то формула **(4.6)** должна быть записана в виде:

$$\log_a x^n = n \log_a |x|. \qquad \textbf{(4.6*)}$$

Неучет этого обстоятельства, т.е. использование при логарифмировании формул **(4.4)** — **(4.6)** вместо формул **(4.4*)** — **(4.6*)**, в ряде случаев может привести к сужению ОДЗ уравнения и потере его корней.

Например, уравнение $\lg x^2 = 2$ (ОДЗ которого $x \neq 0$) имеет два корня: $x_1 = 10$ и $x_2 = -10$. Если его решать, логарифмируя обе части по формуле **(4.6)**, то получим $2 \lg x = 2$ (ОДЗ этого уравнения $x > 0$, т.е. сузилась по сравнению с первоначальным), откуда $\lg x = 1$ и $x = 10$. В результате корень уравнения $x = -10$ оказался потерянным.

Чтобы в процессе решения уравнений не потерять его корни, рекомендуется отказываться от таких преобразований, которые могут сузить ОДЗ уравнения.

В данном случае следовало применить формулу (4.6*) вместо (4.6), т. е. $2\lg|x| = 2$, откуда $\lg|x| = 1$, $|x| = 10$ и $x_{1,2} = \pm 10$; или использовать определение логарифма, т. е. $x^2 = 10^2 = 100$ и $x_{1,2} = \pm 10$.

4.101. Решить уравнение $\log_{5-x}(2x^2 - 5x + 31) = 2$.

Решение. Из определения логарифма следует, что $2x^2 - 5x + 31 = (5 - x)^2$, откуда $x^2 + 5x + 6 = 0$ и $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Делаем проверку:

при $x = -2$ $\log_{5+2}\left[2(-2)^2 - 5(-2) + 31\right] = \log_7 49 = 2$;

при $x = -3$ $\log_{5+3}\left[2(-3)^2 - 5(-3) + 31\right] = \log_8 64 = 2$.

Вместо проверки (которая в данном случае проще), можно было в начале решения найти ОДЗуравнения, решив систему

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 31 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ 5 - x \neq 1. \end{cases}$$

и убедиться в том, что $x_1 = -2$, $x_2 = -3$ удовлетворяет решению этой системы.

Ответ: $\{-2; -3\}$.

4.102. Решить уравнение $\log_\pi \log_2 \log_7 x^2 = 0$.

Решение. Данную запись следует понимать так: $\log_\pi\left[\log_2(\log_7 x^2)\right] = 0$. Поэтому, используя определение логарифма, последовательно находим: $\log_2\left(\log_7 x^2\right) = \pi^0 = 1$; $\log_7 x^2 = 2^1 = 2$, $x^2 = 7^2 = 49$, $x_{1,2} = \pm 7$.

Ответ: $\{-7; 7\}$.

4.103. Решить уравнение $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 50$.

Решение. Перейдем к основанию степени 2 и представим уравнение в виде $2^{2\log_{2^6}(x-3)} \cdot 2^{\log_2 5} = 50$. ОДЗ уравнения $x - 3 > 0$ или $x > 3$.

Так как по формуле **(4.10)** $\log_{2^6}(x-3)=\frac{1}{6}\log_2(x-3)$, то уравнение примет вид $\left[2^{\log_2(x-3)}\right]^{\frac{2}{6}}\cdot\left(2^{\log_2 5}\right)^2=50.$

Используя основное тригонометрическое тождество **(4.3)**, получим $(x-3)^{1/3}\cdot 25=50$ или $\sqrt[3]{x-3}=2$. Возводя в куб обе части уравнения, найдем $x-3=8$, откуда $x=11$.

Ответ: $\{11\}$.

Решить уравнения:

4.104. $\log_x(2x^2-2x)=1.$

4.105. $\log_{x+2}(3x^2+4x-14)=2.$

4.106. $\log_{x-1}(x^2-x)=2.$

4.107. $\lg\lg\lg x=0.$

4.108. $\log_\pi\log_3\log_2 x=0.$

4.109. $\log_{\sqrt{2}}\log_2\log_4(x-15)=0.$

4.110. $\lg\left[\log_2\log_3\sqrt{x}+1\right]=0.$

4.111. $\log_7\log_5\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)=0.$

4.112. $x^{3\log_x 5}=5x.$

4.113. $x^{\log_x(x-2)^2}=9.$

4.114. Решить уравнение $\frac{\lg\left(35-x^3\right)}{\lg(5-x)}=3.$

Решение. Приведем уравнение к виду $\lg(35-x^3)=3\lg(5-x)$. Потенцируя, получим $35-x^3=(5-x)^3$ или $x^2-5x+6=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=3$. Делаем проверку.

Ответ: $\{2; 3\}$.

4.115. Решить уравнение: $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+2=\lg 300.$

Решение. Удобно представить число $2=2\lg 10$. Тогда, потенцируя, получим $\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{2x-3}\cdot 10^2=300$, или $\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{2x-3}=3$. После возведения в квадрат придем к уравнению $2x^2-13x+6=0$, откуда $x_1=0{,}5$, $x_2=6$.

Проверка показывает, что $x_1=0{,}5$ — посторонний корень, а $x_2=6$ — корень данного уравнения.

Ответ: $\{6\}$.

Решить уравнения:

4.116. $3\lg\sqrt[3]{x}=\lg(3x-4).$

4.117. $\lg(x+6)-2=\frac{1}{2}\lg(2x-3)-\lg 25.$

4.118. $\frac{\lg(2x-5)}{\lg\left(x^2-8\right)}=0{,}5.$

4.119. $\frac{1}{2}\lg\sqrt{x^2+x-5}=\lg x+\lg\frac{1}{x}.$

4.120. $\lg\sqrt{5x-4}-\lg\sqrt{x-1}=2+\lg 0{,}08.$

4.121. $\lg\sqrt{1-x^2}-3\lg\sqrt{1-x}=\dfrac{1}{2}\lg\ (1+x)+2.$

4.122. $\log_{1/6}(x-1)+\log_{1/6}(5x+3)=-2.$

4.123. $\log_2(2x-1)+\log_2(x+5)=\log_2 52-2.$

4.124. $\dfrac{\lg(3-2x)-\lg 3}{\lg(1-x)}=0{,}5.$

4.125. $\log_4(2x+3)+\log_4(x-1)=2-\log_4\left(5\dfrac{1}{3}\right).$

4.126. Решить уравнение: $\lg^2 x+\lg x^2+\lg x^3=6.$

Решение. Используя формулу (4.6), преобразуем $\lg x^2=2\lg x$, $\lg x^3=3\lg x$. Тогда уравнение примет вид $\lg^2 x+2\lg x+3\lg x=6$, или $\lg^2 x+5\lg x-6=0$. Полагая $\lg x=y$, получим $y^2+5y-6=0$, откуда: *а*) $y_1=-6$; $(\lg x)_1=-6$; $x_1=10^{-6}=0{,}000001$; б) $y_2=1$; $(\lg x)_2=1$; $x_2=10$.

Ответ: $\{0{,}000001;\ 10\}$.

4.127. Решить уравнение $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)-2{,}25=\log_x^2\sqrt{5}.$

Решение. Используя формулы логарифмирования **(4.4)** и **(4.6)**, преобразуем выражения:

$$\log_x\sqrt{5}=\frac{1}{2}\log_x 5 \text{ и } \log_x(5x)=\log_x 5+\log_x x=\log_x 5+1.$$

Теперь, полагая $\log_x 5=y$, получим уравнение $\dfrac{1}{2}y+(1+y)-2{,}25=$ $=\left(\dfrac{1}{2}y\right)^2$, или после преобразований $y^2-6y+5=0$, откуда:

а) $y_1=1$; $\log_x 5=1$; $x=5$; б) $y_2=5$; $\log_x 5=5$; $x=\sqrt[5]{5}$.

Ответ: $\left\{\sqrt[5]{5};\ 5\right\}$.

4.128. Решить уравнение $\lg\lg x+\lg(\lg x^2-1)=1.$

Решение. Потенцируя и учитывая, что $1=\lg 10$, получим:
$\lg[\lg x(\lg x^2-1)]=\lg 10$, или $\lg x\,(2\lg x-1)=10$.

Полагая $\lg x=y$, получим $y\,(2y-1)=10$, откуда $y_1=2{,}5$ и $y_2=$ $=-2$. Пришли, таким образом, к двум уравнениям: $\lg x=2{,}5$, откуда $x=10^{2,5}$, и $\lg x=-2$, откуда $x=0{,}01$.

Проверка показывает, что $x=10^{2,5}$ — корень данного уравнения, а $x=0{,}01$ — посторонний корень.

Ответ: $\{10^{2,5}\}$.

Решить уравнения:

4.129. $\log_2^2 x + 3 = 2\log_2 x^2$. **4.130.** $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$.

4.131. $\frac{3\lg x + 2}{1 - \lg^2 x} = \frac{1}{1 - \lg x}$. **4.132.** $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$.

4.133. $0{,}25\lg^4 x + 8 = 3\lg^2 x$.

4.134. $\lg^4(x-1) - 1{,}25\lg^2(x-1)^2 + 4 = 0$.

4.135. $\left(4\lg^2 x - 1\right)\left(\lg^2 x^2 + 1\right) = 15$.

4.136. $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) + \lg x = 14$.

4.137. $\log_2 x + \log_x 2 = 2$.

4.138. $\log_2(4x) + \log_{\sqrt{2}} x + \log_x 2 = 8{,}5$.

4.139. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$.

4.140. Решить уравнение $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x - 1} = 5$.

Решение. Логарифмируя по основанию 5, получим $\left(\log_5 x - 1\right)\times$ $\times\log_5 \sqrt{x} = \log_5 5$, или $\left(\log_5 x - 1\right)\frac{1}{2}\log_5 x = 1$.

Полагая $\log_5 x = y$, получим $(y-1)\frac{1}{2}y = 1$, или $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Таким образом, приходим к совокупности двух уравнений $\log_5 x = 2$; $\log_5 x = -1$. Из первого находим $x_1 = 25$, из второго $x_2 = 0{,}2$.

Ответ: $\{0{,}2; 25\}$.

4.141. Решить уравнение $\sqrt[\lg x]{x} = 10^{x^4}$.

Решение. Логарифмируя по основанию 10, получим $\frac{1}{\lg x}\cdot\lg x = x^4\lg 10$, или $x^4 = 1$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Проверка показывает, что оба корня — посторонние.

Ответ: решений нет.

4.142. Решить уравнение $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.

Решение. Преобразуем первый член $6^{\log_6^2 x} = \left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x} = x^{\log_6 x}$. (Здесь использовали основное логарифмическое тождество (4.3)). Теперь уравнение примет вид $2x^{\log_6 x} = 12$, или $x^{\log_6 x} = 6$. Логарифмируя по основанию 6, получим $\log_6 x \cdot \log_6 x = 1$, или $\log_6^2 x = 1$, откуда $\log_6 x = -1$ и $\log_6 x = 1$. Решая первое уравнение, найдем $x = 6^{-1} = \frac{1}{6}$; решая второе — $x = 6^1 = 6$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{6}; 6\right\}$.

Решить уравнения:

4.143. $x^{\log_2 x+4} = 32$.

4.144. $x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}$.

4.145. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$.

4.146. $x^{2\lg^3 x-1,5\lg x} = \sqrt{10}$.

4.147. $x^{\log_4 x-2} = 2^{3\log_4 x-3}$.

4.148. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.

4.149. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6$.

4.150. $2^{\log_2^2 x} + 5x^{\log_2 x} = 12$.

4.151. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\log_{y^2} x - \log_{1/x} y = 2, \\ 7^{\lg(x+y)-\lg 12} = 1. \end{cases}$$

Решение. Приведем первое уравнение системы к основанию x. Так как $\log_{y^2} x = \frac{1}{\log_x y^2} = \frac{1}{2\log_x y}$ (использованы формулы **(4.8)** и **(4.6)**, $\log_{1/x} y = \log_{x^{-1}} y = -\log_x y$ (использована формула **(4.10)**), то первое уравнение примет вид $\frac{2}{2\log_x y} + \log_x y = 2$. Обозначив $\log_x y = t$, получим $\frac{1}{t} + t = 2$. Преобразуя уравнение при $t \neq 0$, получим $1 + t^2 = 2t$, или $(t-1)^2 = 0$, т. е. $t = 1$ и $\log_x y = 1$, $y = x$.

Из второго уравнения следует, что показатель степени $\lg(x+y) - \lg 12 = 0$, откуда $\lg(x+y) = \lg 12$ и $x + y = 12$. Итак, пришли к системе:

$$\begin{cases} y = x, \\ x + y = 12, \end{cases}$$

откуда $x = y = 6$.

Ответ: $\{(6; 6)\}$.

Решить системы уравнений:

4.152. $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

4.153. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - \left(\sqrt[4]{2}\right)^{x-y} = 12, \\ 3^{\lg(2y-x)} = 1. \end{cases}$

4.154. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = 3\lg 2. \end{cases}$

4.155. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

4.156. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{cases}$

4.157. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt[3]{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

4.4. Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

4.158. $2^{\frac{1}{\log_2 x}} = 4.$

4.159. $9 \cdot 3^{x-1} - 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 3^x.$

4.160. $\log_2(2x + 3) + \log_2(x - 1) = 4 - \log_2\frac{16}{3}.$

4.161. $2^{x^2-6x-2{,}5} = 16\sqrt{2}.$

4.162. $\log_2 \log_3 \log_4(x - 1) = 0.$

4.163. $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0.$

4.164. $\left(\frac{1}{9} \cdot 9^x\right)^x = 3^{2x+6}.$

4.165. $3\lg(x - 3) - 0{,}5\lg(1 - x^2) = 2.$

4.166. $4^{x-1} - 0{,}5^{3-x} = 62.$

4.167. $\log_2 x + \log_3 x = 1.$

4.168. $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \sqrt[3]{1{,}5^x}.$

4.169. $\log_x(6x + 5x^2) = 3.$

4.170. $5\log_2 x = \frac{2}{\log_x^2 2} + 2.$

4.171. $9^{x-1} + 3^{x+2} - 90 = 0.$

4.172. $x^{\lg x} = \frac{100}{x}.$

4.173. $4^{2x} = \frac{5^{-6\log_5 2}}{2^{-2x}}.$

4.174. $\frac{\lg(x^2 - 20)}{\lg(x + 10)} = 1.$

4.175. $x^{\lg\sqrt{x}} = 100.$

4.176. $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x.$

4.177. $3^{x-1} \cdot 2^{3x-7} = 12^{9-x}.$

4.178. $\frac{2\lg x+2}{1-\lg^2 x}-\frac{1}{\lg x-1}=1.$ **4.179.** $(x+2)+\log_2\left(1-2^x\right)=0.$

4.180. $\lg\left(8\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}}\right)=0.$ **4.181.** $\log_2\frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1}=2.$

4.182. $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}.$

4.183. $2^{\log_8\left(x^2-6x+9\right)}=9^{\log_x\sqrt{x}-\frac{1}{2}}.$ **4.184.** $\log_3\left(28-3^x\right)=3-x.$

4.185. $\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}}=5^{\sqrt{x}-4}.$ **4.186.** $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right).$

4.187. $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}.$ **4.188.** $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2.$

4.189. $2\log_x 3\cdot\log_{3x}3=\log_{9\sqrt{x}}3.$ **4.190.** $x\lg\sqrt[5]{5^{2x-8}}-\lg 25=0.$

4.191. $\frac{7}{3}3^{x+2}-\frac{1}{5}5^{x+3}=3^{x+4}-5^{x+3}.$

4.192. $\log_4(x+12)\,\log_x 2=1.$ **4.193.** $5^x\cdot\sqrt[(x+1)]{8^x}=100.$

4.194. $\left(10^{\lg x}\right)^{\lg x}+x^{\lg x}=20.$ **4.195.** $2^x-4\cdot 2^{\frac{x-3}{2}}=0.$

4.196. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11.$ **4.197.** $2x^{\lg x}+3x^{-\lg x}=5.$

4.198. $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\lg 4}{\lg 8}.$ **4.199.** $\lg\left(2^x+1\right)-\lg 6=x(\lg 5-1).$

4.200. $\lg\left(2^x+x-4\right)=x(1-\lg 5).$ **4.201.** $\left(2^x-28\right)^{\lg x}=x^2.$

4.202. $0{,}6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3.$ **4.203.** $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}.$

4.204. $\lg^2 2x+\lg^2 3x=\lg^2 2+\lg^2 3.$ **4.205.** $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1.$

4.206. $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1.$ **4.207.** $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x.$

4.208. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

4.209. $x^{\log_2 x} - 2^{\log_2^3 x} = 0$.

4.210. $\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \cdot \log_5 x +$
$+ \log_3 x \cdot \log_5 x$.

4.211. $\sqrt{1 + 4\log_4 x + 4\log_4^2 x} + 1 + \log_4 x = \sqrt{\log_4^2 x}$.

4.212. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_9(x+1)} \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{\log_{\frac{1}{27}}(x-1)} = \frac{\log_5 27}{\log_5 243}$.

4.213. $\log_6\left(2^{\sqrt{x}+1} - 3\right) = \log_6 \log_{\sqrt[3]{3}} 9^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\log_6 4$.

Решить системы уравнений:

4.214. $\begin{cases} 2^{2+\log_2(x+y)} = 16, \\ \lg 2 + \lg\left(\log_{16} x + \log_{16} y\right) = 0. \end{cases}$

4.215. $\begin{cases} \log_x y - \log_y x = 1{,}5, \\ \frac{y}{x} = 2. \end{cases}$

4.216. $\begin{cases} x^y = \frac{1}{\sqrt{1000}}, \\ \frac{\lg x}{y} = -6. \end{cases}$

4.217. $\begin{cases} \log_2 \log_5\left(x^2 - 2xy + 2y^2\right) = 1, \\ 10^{3-\lg(x-y)} = 250. \end{cases}$

5. НЕРАВЕНСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ

При изучении этой темы следует хорошо знать свойства неравенств, обратив особое внимание на умножение обеих частей неравенства на одно и то же число: если это число положительное, то знак неравенства не меняется, если отрицательное, то знак неравенства меняется на противоположный, т. е. если $a > b$ и $m >$ > 0, то $am > bm$; если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

Поэтому в отличие от уравнений, при преобразовании неравенств в принципе нельзя отбрасывать общий знаменатель, содержащий неизвестное x, который может принимать в зависимости от x как положительные, так и отрицательные значения (напомним, что аналогичная операция для уравнений может привести лишь к приобретению посторонних корней, устраняемых, например, проверкой).

5.1. Линейные неравенства

5.1. Решить неравенство $ax + b > 0$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $ax > -b$. Возможны три случая:

1. Если $a > 0$, то, разделив обе части неравенства на положительное число a, получим $x > -\frac{b}{a}$.

2. Если $a < 0$, то, разделив обе части неравенства на отрицательное число a, надо изменить знак неравенства, т. е. $x < -\frac{b}{a}$.

3. Если $a = 0$, то неравенство примет вид $0 \cdot x > -b$, при этом, если $b > 0$, то правая часть $(-b)$ — число отрицательное, и неравенство выполняется при любом действительном значении x; если $b < 0$, то $(-b)$ — число положительное, и неравенство не выполняется ни при каком значении x.

Ответ: $x > -\frac{b}{a}$ при $a > 0$; $x < -\frac{b}{a}$ при $a < 0$; x — любое действительное число при $a = 0$, $b > 0$; решений нет при $a = 0$, $b < 0$.

Решить неравенства:

5.2. $7x > 3$.

5.3. $-4x > 5$.

5.4. $5x + 6 \le 3x - 8$.

5.5. $ax \le 1$.

5.6. $ax > 1$.

5.7. $a(x-1) > x - 2$.

5.2. Системы линейных неравенств

5.8. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x > 1, \\ -x < 3. \end{cases}$$

Решение. Для первого неравенства решениями будут все числа, бо́льшие $\frac{1}{3}$, для второго неравенства — бо́льшие (-3) (рис. 5.1).

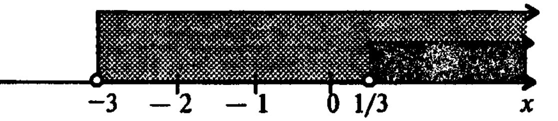


Рис. 5.1

Следовательно, числа $x > \frac{1}{3}$ удовлетворяют обоим неравенствам.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \infty\right)$.

5.9. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{13-12x}{5} + 6x > \frac{x}{2} + 4, \\ \frac{3x+4}{9} > \frac{1}{4}(x-3) + \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему неравенств, равносильную данной:

$$\begin{cases} \frac{26-24x}{10} + \frac{60x}{10} > \frac{5x+40}{10}, \\ \frac{12x+16}{36} > \frac{9x-27+18x}{36}, \end{cases}$$

или $\begin{cases} 31x > 14, \\ -15x > -43, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x > \frac{14}{31}, \\ x < \frac{43}{15}. \end{cases}$

Изобразим на числовой оси решения обоих неравенств (рис. 5.2):

Рис. 5.2

Очевидно, решения, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам, заключены в интервале $\left(\frac{14}{31};\ \frac{43}{15}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{14}{31};\ \frac{43}{15}\right)$.

Решить системы неравенств:

5.9. $\begin{cases} 2x < \pi, \\ -x > -1{,}6. \end{cases}$ **5.10.** $\begin{cases} x > -1, \\ 2x + 1 \le 5. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2} > \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6}, \\ \dfrac{2x+7}{3} < \dfrac{3x+5}{7} + 8 + \dfrac{10-3x}{5}. \end{cases}$

5.12. Найти наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5}{2} > \dfrac{2-x}{2} + 1, \\ \dfrac{3x-2}{5} + 3 > \dfrac{4x}{3} - \dfrac{x-1}{2}. \end{cases}$$

5.13. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{2x+3}{3} + \dfrac{x}{6} < 2 - \dfrac{x+5}{2}, \\ 1 - \dfrac{x+5}{8} + \dfrac{4-x}{2} < 3x - \dfrac{x+1}{4}. \end{cases}$$

5.14. Решить двойное неравенство $5 < 3x + 4 < 7$.

Решение. Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x + 4 > 5, \\ 3x + 4 < 7, \end{cases} \text{ откуда } \frac{1}{3} < x < 1.$$

Рассмотрим другой способ решения: вычтем из всех частей исходного неравенства 4, придем к равносильному двойному неравенству 1 <

$< 3x < 3$. Разделив все части неравенства на коэффициент 3 при x, получим $\frac{1}{3} < x < 1$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$.

Решить двойные неравенства:

5.15. $-3 < 2x - 9 \le 2$. **5.16.** $\frac{2}{21} < \frac{x+4}{14} < \frac{5}{6}$.

5.17. $-3 \le 2 + 1{,}5x \le -2{,}5$.

5.3. Дробно-рациональные неравенства

При решении этих неравенств удобно пользоваться методом интервалов, который основан на важном свойстве непрерывных функций: ***если функция не обращается в нуль на некотором интервале, то она на этом интервале сохраняет знак.***

5.18. Решить неравенство: $\frac{x-4}{x-2} \le \frac{2}{x+1}$.

Решение. Перенесем все члены неравенства в левую часть и приведем полученное выражение к общему знаменателю. Получим $\frac{x^2-5x}{(x-2)(x+1)} \le 0$. Найдем, при каком значении x обращается в нуль числитель ($x = 0$, $x = 5$) и знаменатель ($x = -1$, $x = 2$). Отметим эти значения на числовой оси. Точки, в которых обращается в нуль знаменатель дроби, исключаются, так как левая часть неравенства не имеет смысла (на числовой оси изображаем эти точки незакрашенными кружками). На каждом из интервалов $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ -2)$, $(2;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$ функция непрерывна и обращается в нуль, т. е. сохраняет знак. Найдем эти знаки, определив значение функции в произвольных точках, взятых на каждом интервале, и построим кривую знаков (рис. 5.3).

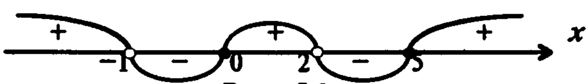


Рис. 5.3

Выражение, стоящее в левой части неравенства, отрицательно в интервалах $(-1;\ 0)$, $(2;\ 5)$. Точки, в которых числитель обращается в нуль, входят в решение, так как неравенство нестрогое (на числовой оси изображаем эти точки закрашенными кружками). При записи ответа используем знак $\cup$ объединения множеств.

Ответ: $(-1;\ 0] \cup (2;\ 5]$.

Если числитель и знаменатель не содержат много множителей, решение неравенства можно свести к решению системы линейных неравенств.

5.19. Решить неравенство $\dfrac{5+2x}{x-6} > 0$.

Решение. Дробь положительна, если числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, т. е.

$$1)\ \begin{cases} 5+2x > 0, \\ x-6 > 0, \end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases} 5+2x < 0, \\ x-6 < 0. \end{cases}$$

Решаем системы неравенств, отмечая решения на действительной оси (рис. 5.4).

$$1)\ \begin{cases} 2x > -5, \\ x > 6, \end{cases} \text{ откуда находим } x > 6;$$

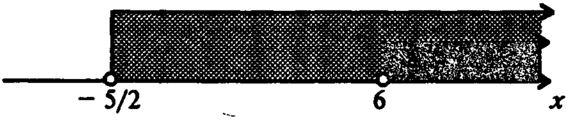


Рис. 5.4

$$2)\ \begin{cases} 2x < -5, \\ x < 6, \end{cases} \text{ откуда находим } x < -\frac{5}{2} \text{ (рис. 5.5).}$$

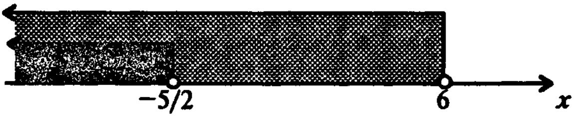


Рис. 5.5.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{5}{2}\right) \cup (6;\ +\infty)$.

Иногда в дробно-рациональных выражениях знаменатель (или числитель) принимает при всех x положительное значение, в этих случаях знак дроби определяется только числителем (знаменателем).

5.20. Решить неравенство $\dfrac{x(x-1)}{x^2+4} \ge 0$.

Решение. Так как $x^2 \ge 0$ при всех x, то $x^2 + 4 \ge 4$, т. е. знаменатель — величина положительная, и дробь $\dfrac{x(x-1)}{x^2+4}$ неотрицательна тогда и только тогда, когда неотрицателен числитель этой дроби. Исходное неравенство, таким образом, равносильно неравенству $x\,(x - 1) \ge 0$.

Произведение неотрицательно, когда оба сомножителя имеют одинаковые знаки:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x-1 \ge 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \le 0, \\ x-1 \le 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является $x \ge 1$, второй $x \le 0$.

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$.

Решить неравенства:

5.21. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+1} < 0.$

5.22. $\dfrac{x^2-5x+4}{3x^2+1} < 0.$

5.23. $\dfrac{x^2-x-6}{81+x^2} < 0.$

5.24. $\dfrac{2x^2-3x+7}{x^2+1} > 3.$

5.25. $\dfrac{2x+1}{1-x} < -3.$

5.26. $\dfrac{5x-1}{4+x} < -2$.

5.27. $\dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{4} > \dfrac{10}{x} - \dfrac{1}{3}.$

5.28. $\dfrac{x}{1-x} > 1.$

5.29. $\dfrac{2}{2x+3} \ge \dfrac{1}{x-5}.$

5.30. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} > 0.$

5.31. $(x+2)(x-1)(x-3)>0.$

5.32. $(x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8 \le 0.$

5.33. $(x+3)^4(x-2) < 0.$

5.34. $x^3+2x^2-x-2>0.$

5.35. $\dfrac{(x-1)\left(x^2+4x+3\right)}{x^2+2} \ge 0.$

5.36. $\dfrac{(2x+3)\left(x^2-x+1\right)}{x^2+1} < 0.$

5.37. $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3) < 0.$

5.4. Квадратные неравенства

Частный случай дробно-рациональных неравенств — квадратные неравенства.

Рассмотрим квадратное неравенство $ax^2+bx+c>0$ (или ax^2+ $+bx+c<0$), $a \ne 0$.

Будем считать, что $a>0$. Если $a<0$,то умножением обеих частей неравенства на -1 и соответствующим изменением его знака всегда можно получить $a>0$.

График квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, представляет собой параболу с направленными вверх ветвями. Возможны три различных случая (рис. 5.6):

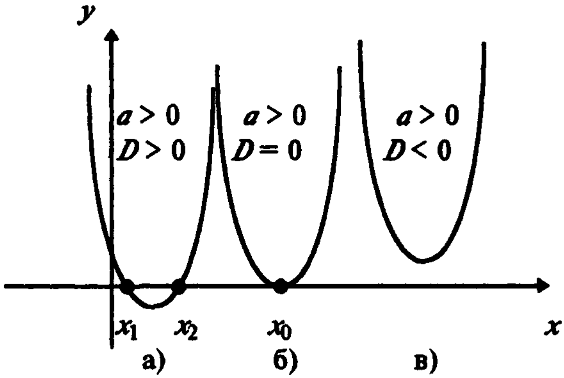


Рис. 5.6

а) Дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$. В этом случае квадратный трехчлен имеет два различных корня x_1 и x_2 (рис. 5.6*а*). При этом левая часть неравенства положительна на множестве $(-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$ и отрицательна в интервале $(x_1,\ x_2)$ (полагаем $x_1 < x_2$). Поэтому решением неравенства $ax^2 + bx + c >$ > 0 будут $x < x_1$ и $x > x_2$, т. е. значения x, меньшие меньшего корня и большие большего корня, а решением неравенства $ax^2 +$ $+ bx + c < 0$ — соответственно $x_1 < x < x_2$, т. е. значения x в промежутке между корнями.

5.38. Решить неравенства: а) $-2x^2 + x + 1 > 0$;

б) $-2x^2 + x + 1 < 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на -1, изменив при этом знак неравенства. Получим а) $2x^2 - x - 1 < 0$; б) $2x^2 - x - 1 >$ > 0. Дискриминант квадратного трехчлена $D = 1^2 - 4 \cdot 2\,(-1) = 9 > 0$, его корни $x_1 = -1$, $x_2 = 0.5$. Интервалы знакопостоянства показаны на чертеже (рис. 5.7).

Рис. 5.7

Ответ: а) $(-1;\ 0{,}5)$; б) $(-\infty;\ -1) \cup (0{,}5;\ \infty)$.

б) Дискриминант $D = b^2 - 4ac = 0$. В этом случае квадратный трехчлен имеет два одинаковых корня $x_1 = x_2 = x_0$ (рис. 5.6 б). График касается оси OX в одной точке x_0, поэтому решением неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ будет множество всех значений x, кроме x_0, а неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ решений не имеет.

5.39. Решить неравенства:

$$\text{а) } 4x^2 - 12x + 9 < 0;\ \text{б) } 4x^2 - 12x + 9 > 0.$$

Решение: Дискриминант квадратного трехчлена $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, его корни

$x_1 = x_2 = 1{,}5$ т. е. $4x^2 - 12x + 9 = 4(x - 1{,}5)^2$.

Ответ: а) решений нет; б) $x \neq 1{,}5$.

в) Дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$. В этом случае квадратный трехчлен не имеет действительных корней: его график расположен над осью OX (рис. 5.6 в), поэтому $ax^2 + bx + c > 0$ при всех x, а неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ не имеет решений.

5.40. Решить неравенства:

$$\text{а) } x^2 + 3x + 5 > 0;\ \text{б) } x^2 + 3x + 5 < 0.$$

Решение. $D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 < 0$, поэтому неравенство а) справедливо при любых значениях x, а неравенство б) решений не имеет.

Ответ: а) $(-\infty; \infty)$; б) нет решений.

Найти решение квадратного неравенства можно и методом интервалов: определив корни квадратного трехчлена, отмечаем их на действительной оси и находим знаки квадратного трехчлена на каждом из полученных интервалов. Например, для решения неравенства $-2x^2 + x + 1 > 0$ (см. пример 5.38 а) умножаем обе части его на -1 и приходим к равносильному неравенству $2x^2 - x - 1 < 0$. Далее из уравнения $2x^2 - x - 1 = 0$ находим корни $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ и, раскладывая квадратный трехчлен на множители по формуле (1.20), приходим к неравенству $2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0$. На каждом из полученных интервалов определяем знаки функции, строим кривую знаков (рис. 5.7) и выписываем ответ.

5.41. $x^2 - 8x + 15 \geq 0$.

5.42. $2x^2 - 7x - 49 > 0$.

5.43. $7 - 6x - x^2 \leq 0$.

5.44. $-4x^2 + 4x - 1 < 0$.

5.45. $x^2 + 5x + 10 < 0$.

5.5. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины

5.46. Решить неравенство $|x| < a$.

Решение. Если $a \le 0$, то неравенство не имеет решения, так как $|x|$ — неотрицательная величина при всех x. Если $a > 0$, то, используя определение абсолютной величины **(1.21)**, приходим к двум системам неравенств:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x < a \end{cases} (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < 0, \\ -x < a. \end{cases} (2)$$

Решением первой системы является промежуток $0 \le x < a$, а второй $-a < x < 0$ (соответственно рис. 5.8 и 5.9).

Рис. 5.8

Рис. 5.9

Объединяем полученные решения.

Ответ: $(-a; a)$.

5.47. Решить неравенство $|x-1| > 2$.

Решение. Используя определение абсолютной величины, получим две системы неравенств:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x-1 > 2 \end{cases} (1) \text{ и } \begin{cases} x-1 < 0, \\ -x+1 > 2. \end{cases} (2)$$

Решением системы (1) будет $x > 3$, системы (2) $-x < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.

5.48. Решить неравенство $|x+2| + |x-3| > 5$.

Решение. В точках -2 и 3 одно из выражений, стоящих под знаком абсолютной величины, обращается в 0.

Рассмотрим три случая (рис. 5.10).

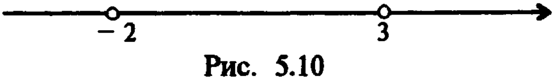


Рис. 5.10

1) $x < -2$. Оба выражения, стоящие под знаком абсолютной величины, отрицательны, поэтому $|x+2| = -(x+2)$, $|x-3| = -(x-3)$, и исходное неравенство примет вид $-x-2-x+3 > 5$, или $-2x > 4$, т.е. $x < -2$ — решения неравенства.

2) при $2 \le x < 3$ выражение $(x + 2)$ неотрицательно, а $(x - 3)$ отрицательно, т.е. $|x + 2| = x + 2$ и $|x - 3| = -(x - 3)$, поэтому неравенство примет вид $x + 2 - x + 3 > 5$, или $5 > 5$. Так как полученное неравенство неверно, то решений исходного неравенства в этом полуинтервале нет.

3) $x \ge 3$. Теперь оба выражения $(x + 2)$ и $(x - 3)$ неотрицательны, т.е. $|x + 2| = x + 2$ и $|x - 3| = x - 3$, и неравенство примет вид $x + 2 + x - 3 > 5$, или $2x > 6$, т.е. $x > 3$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$.

Решить неравенства:

5.49. $|x - 1| > -1$.

5.50. $|2x + 1| > x$.

5.51. $|2x + 3| \le 4x$.

5.52. $|1 - 3x| - |x + 2| \le 2$.

5.53. $|x| < \dfrac{1}{x-1}$.

5.54. $(1 + x)^2 < |1 - x^2|$.

5.6. Показательные и логарифмические неравенства

При решении показательных и логарифмических неравентв следует помнить, что показательная $y = a^x$ и логарифмическая $y = \log_a x$ функции являются возрастающими при $a > 1$ и убывающими при $0 < a < 1$. Поэтому из неравенств $a^x > a^y$ или $\log_a x > \log_a y$ следует, что $x > y$, если $a > 1$, и $x < y$, если $0 < a < 1$. При потенцировании или логарифмировании обеих частей неравенства по основанию a знак неравенства сохраняется прежним, если $a > 1$, и изменяется на противоположный, если $0 < a < 1$. Если значение основания a неизвестно, то необходимо рассматривать два случая.

5.55. Решить неравенство $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \dfrac{27}{64}$.

Решение. Учитывая, что $\dfrac{27}{64} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$, перепишем неравенство в виде $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

Так как основание показательной функции $a = \frac{3}{4} < 1$, равносильным данному неравенству будет следующее неравенство с противоположным знаком: $6x + 10 - x^2 > 3$, или $x^2 - 6x - 7 < 0$, решением которого будет $-1 < x < 7$.

Ответ: $(-1; 7)$.

5.56. Решить неравенство $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x < 0$.

Решение. Так как $10^x > 0$, то , разделив исходное уравнение на 10^x, получим равносильное неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1 < 0$.

Обозначим $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y > 0$, имеем $y - 2 \cdot \frac{1}{y} - 1 < 0$, или $y^2 - y - 2 < 0$. Разложим левую часть неравенства на множители $(y - 2)(y + 1) < 0$. Так как $y > 0$, $y + 1 > 0$, то $y - 2 < 0$, т.е. $y < 2$. Следовательно, $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 2$. Логарифмируя по основанию $a = \frac{2}{5} < 1$, придем к неравенству с противоположым знаком: $x > \log_{2/5} 2$.

Ответ: $(\log_{2/5} 2;\ \infty)$.

5.57. Решить неравенство $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 2$.

Решение. Заметив, что $2 = \log_5 25$, перепишем неравенство в виде: $\log_5(x^2 - 11x + 43) < \log_5 25$. Неравенство имеет смысл при $x^2 - 11x + 43 > 0$.

Потенцируя обе части по основанию $a = 5 > 1$, придем к системе, равносильной данному неравенству

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 43 > 0, \\ x^2 - 11x + 43 < 25. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств справедливо для любых значений x, так как дискриминант квадратного трехчлена $D = 121 - 4 \cdot 43 < 0$. Следовательно, система равносильна неравенству $x^2 - 11x + 43 < 25$, или $x^2 - 11x + 18 < 0$, решениями которого являются значения $2 < x < 9$.

Ответ: $(2; 9)$.

5.58. Решить неравенство $\log_x \frac{2x + 1}{5(1 - x)} > 0$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $0 < x < 1$ $\quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \dfrac{2x+1}{5(1-x)} < 1. \end{cases}$ (1)

Находим решение второго неравенства. Оно эквивалентно системе:

$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5(1-x)} > 0 \\ \dfrac{2x+1}{5(1-x)} < 1, \end{cases}$ (2), решая которую, получаем $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x < 1, \\ x < \dfrac{4}{7};\ x > 1. \end{cases}$ (2′)

Решением системы (2) будет $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{4}{7}$. Решение системы (1) показано на рис. 5.11:

x, или $0 < x < \dfrac{4}{7}$.

Рис. 5.11

2) $x > 1$. В этом случае логарифмическая функция — возрастающая, тогда исходное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{2x+1}{5(1-x)} > 1. \end{cases}$$

Эта система несовместна, так как решения второго неравенства $\dfrac{4}{7} < x < 1$ не имеют общих точек с $x > 1$ (рис. 5.12).

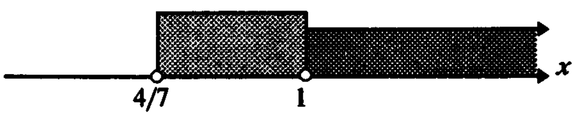


Рис. 5.12

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{4}{7}\right)$.

5.59. Решить неравенство

$$\log_7 x - \log_7(2x-5) \le \log_7 2 - \log_7(x-3).$$

Решение. Неравенство имеет смысл при $x > 3$, так как только при $x > 3$ все логарифмы, входящие в неравенство, существуют. Перепишем неравенство, используя свойства логарифмов

$$\log_7 \frac{x}{2x-5} \le \log_7 \frac{2}{x-3}.$$

Основание логарифма 7 больше 1, поэтому неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{x}{2x-5} \le \dfrac{2}{x-3}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 4x + 10}{(2x-5)(x-3)} \le 0. \end{cases}$$

При $x > 3$ знаменатель положителен, поэтому система неравенств равносильна системе:

$$\begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 7x + 10 \le 0. \end{cases}$$

Корни квадратного трехчлена второго неравенства $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, решения второго неравенства $2 \le x \le 5$; учитывая первое неравенство, имеем (рис. 5.13):

Рис. 5.13

Ответ: (3; 5].

Решить неравенства

5.60. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$.

5.61. $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \ge 0$.

5.62. $2^x + 2^{-x} < 3$.

5.63. $\log_{3-x} x \le -1$.

5.64. $\log_{1/2}\left(\frac{3}{2} - x\right) + \log_{1/2}(1-x) \ge 1$.

5.65. $\log_x (\log_5 x) > 0$.

5.66. $5^{\log_3\left(\frac{2}{x+2}\right)} < 1$.

5.67. $\frac{1}{3^x+5} \le \frac{1}{3^{x+1}-1}$.

5.68. $\log_2\left(4^x - 5 \cdot 2^x + 2\right) > 2$.

5.69. $3^{x-2} > \frac{2}{5^{2x-1}}$.

5.7. Иррациональные неравенства

5.70. Решить неравенство $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$.

Решение. Неравенство имеет смысл, когда под корнем стоит неотрицательная величина, при этом $\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$, а значения $x = -1$ и $x = 2$ обращают левую часть в 0, потому включаются в область решений неравенства. Так как $\sqrt{x^2+x-2} \ge 0$, то левая часть неравенства неотрицательна при $(x-1) \ge 0$. Запишем эти условия системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2-x-2 \ge 0, & \text{(а)} \\ x-1 \ge 0. & \text{(б)} \end{cases}$$

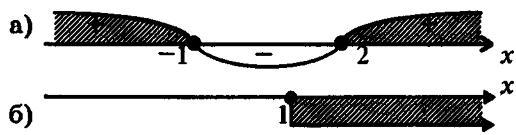


Рис. 5.14

Объединяя решения неравенств (рис. 5.14 а и б), получаем решение исходного неравенства.

Ответ: $\{-1\} \cup [2, +\infty)$.

5.71. Решить неравенство $\sqrt{x^2+x-12} < x$.

Решение. Так как $\sqrt{x^2+x-12} \ge 0$, то для $x \le 0$ неравенство неверно, поэтому рассматриваем только $x > 0$. Левая часть неравенства существует только при $x^2+x-12 \ge 0$, а так как $x > 0$, обе части неравенства можно возвести в квадрат. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, & \text{(а)} \\ x^2+x-12 \ge 0, & \text{(б)} \\ x^2+x-12 < x^2. & \text{(в)} \end{cases}$$

Общая часть решений этих неравенств даст решение системы (рис. 5.15).

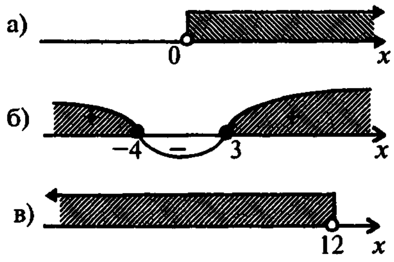


Рис. 5.15

Ответ: [3, 12).

5.72. **Решить неравенство** $\sqrt{13+3x^2} \geq 1-2x$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $1-2x \leq 0$. Учитывая, что $\sqrt{13+3x^2} \geq 0$, имеем:

$$\begin{cases} 13+3x^2 \geq 0, \\ 1-2x \leq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется для всех x, второе — для $x \geq \frac{1}{2}$,

т.е. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ входит в решение неравенства.

2) $1-2x > 0$. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат. Получим систему:

$$\begin{cases} 1-2x > 0, \\ 13+3x^2 \geq 0, \\ 13+3x^2 \geq 1-4x+4x^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{2}, & \text{(а)} \\ x^2-4x-12 \leq 0, & \text{(б)} \end{cases}$$

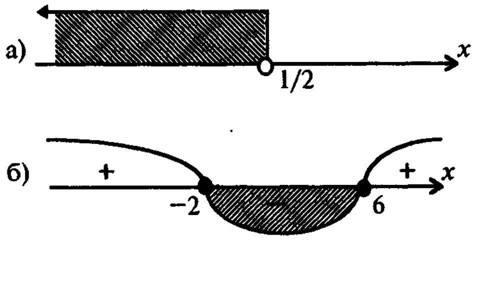


Рис. 5.16

откуда получим решение $[-2,\ 1/2)$ (рис. 5.16). Объединяя с полученным выше $\left[\frac{1}{2};\infty\right)$, находим решение исходного неравенства.

Ответ: $[-2,\ \infty)$.

5.73. Решить неравенство $\sqrt{x^2-4x-5}\le 1-x$.

Решение.

1) $1-x<0$. Неравенство неверно, так как $\sqrt{x^2-4x-5}\ge 0$ всюду, где существует.

2) $1-x\ge 0$. Обе части неравенства неотрицательны, возводим их в квадрат и записываем систему неравенств:

$$\begin{cases} 1-x\ge 0, & \text{(а)}\\ x^2-4x-5\ge 0, & \text{(б)}\\ x^2-4x-5\le 1-2x+x^2. & \text{(в)}\end{cases}$$

Решаем систему (рис. 5.17).

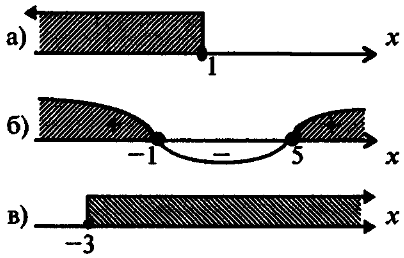


Рис 5.17

Ответ: $[-3,\ -1]$.

5.74. Решить неравенство $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2$.

Решение. Умножив обе части неравенства на положительное выражение $\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}$, получим $x+2-5x>(4x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}\right)$ или, перенеся все члены в одну часть, имеем $(4x-2)\left(1+\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}\right)<0$.

Так как выражение во второй скобке положительно, неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+2\ge 0,\\ 5x\ge 0,\\ 4x-2<0,\end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x\ge 0,\\ x<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ответ: $\left[0, \frac{1}{2}\right)$.

5.75. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(x^2-25)(x-1)}}{4x-32} \le 0$.

Решение. Так как числитель неотрицателен там, где существует, знаменатель должен быть отрицательным. Неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases}(x^2-25)(x-1) \ge 0, & \text{(а)}\\ 4x-32<0. & \text{(б)}\end{cases}$$

Первое неравенство решим методом интервалов (рис. 5.18 а), второе верно при $x < 8$ (рис. 5.18 б).

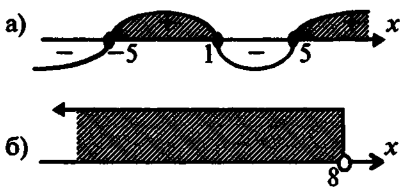


Рис. 5.18

Общая часть этих множеств будет решением системы.

Ответ: $[-5;\ 1] \cup [5;\ 8)$.

Решить неравенства:

5.76. $\sqrt{x^2+x} > 1-2x$.

5.77. $4-x < \sqrt{x^2-2x}$.

5.78. $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$.

5.79. $\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} > -\dfrac{1}{3}$.

5.80. $\sqrt{x+1}+1 < 4x^2+\sqrt{3x}$.

5.81. $\dfrac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1$.

5.8. Применение неравенств к исследованию уравнений и систем

5.82. При каких значениях a уравнение $x^2 + ax + 7 = 0$ имеет положительные корни?

Решение. Необходимым условием существования корней является $D \ge 0$, т. е. $a^2 - 4 \cdot 7 \ge 0$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 7 > 0$, поэтому корни имеют одинаковые знаки $x_1 + x_2 = -a$, т. е. чтобы корни существовали и были положительными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} a^2 - 4 \cdot 7 \geq 0, \\ -a > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a^2 > 28, \\ a < 0, \end{cases}$$

откуда находим $a < -2\sqrt{7}$.

Ответ: $\left(-\infty; -2\sqrt{7}\right)$.

5.83. При каких значениях a уравнение $a^2(x-1) = x + a - 2$ имеет решение $x > 2$?

Решение. Находим решение этого линейного относительно x уравнения: $a^2x - x = a^2 + a - 2$. Заметим, что при $a = 1$ уравнение обращается в тождество. Разделив обе части уравнения на $a - 1$, получим $(a + 1)x = a + 2$, откуда $x = \dfrac{a+2}{a+1}$. Определим, при каком a выполняется $\dfrac{a+2}{a+1} > 2$, т.е. $\dfrac{a+2-2a-2}{a+1} > 0$, или $\dfrac{-a}{a+1} > 0$.

Решая методом интервалов, получим (рис. 5.19).

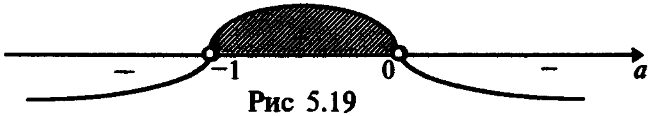


Рис 5.19

Ответ: $(-1; 0)$.

5.84. При каких значениях a решения системы уравнений

$$\begin{cases} x - 7y = 1, \\ 5x + 3y = a \end{cases}$$

удовлетворяют условию: $x > 0$, $y < 0$?

Решение. Находим решение системы $y = \dfrac{a-5}{38}$, $x = \dfrac{7a+3}{38}$.

Находим a, при котором $\dfrac{7a+3}{38} > 0$ и $\dfrac{a-5}{38} > 0$, решая систему

$$\begin{cases} 7a + 3 > 0, \\ a - 5 < 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > -\dfrac{3}{7}, \\ a < 5. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{7};\ 5\right)$.

5.85. При каких значениях k неравенство $kx^2+12x-5<0$ удовлетворяется при любых x?

Решение. Очевидно, ветви параболы, являющейся графиком трехчлена, стоящего в левой части неравенства, должны быть направлены вниз, т. е. $k<0$. Кроме того, трехчлен не должен иметь корней, т. е. требуется, чтобы $D<0$. Имеем, таким образом, систему

$$\begin{cases}144+20k<0,\\ k<0,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}k<-7{,}2,\\ k<0.\end{cases}$$

Ответ: $k<-7{,}2$.

5.86. При каких значениях m оба корня уравнения $x^2-4mx+4m^2-9=0$ заключены между 1 и 15 ?

Решение. Запишем это уравнение в виде $(x-2m)^2=9$, откуда находим $x_1=2m+3$, $x_2=2m-3$. Из условия задачи должны выполняться неравенства:

$1<2m+3<15$ и $1<2m-3<15$, откуда находим $-1<m<6$ и $2<m<9$, следовательно, $2<m<6$.

Ответ: (2; 6).

Решить задачи:

5.87. При каких значениях m система

$$\begin{cases}5x+4y=6,\\ mx+6y=10\end{cases}$$

имеет решение $x>0$, $y<1$.

5.88. Для каких значений a неравенство $\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$ выполняется при любых x?

5.89. При каких значениях m оба корня уравнения x^2-2mx+ $+m^2-1=0$ заключены между -2 и 4?

5.90. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ имеет два различных корня.

5.91. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$ имеет не более одного корня.

5.9. Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

5.92. $\dfrac{x^2+x-12}{2+x^2}<0.$

5.93. $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+1}\le 0.$

5.94. $\dfrac{3}{x}<\dfrac{5}{x^2}.$

5.95. $\dfrac{5x-4}{5-4x}\ge 0.$

5.96. $\dfrac{4}{x+2}>3-x.$

5.97. $\dfrac{x}{2}+1\le\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}.$

5.98. $|x-1|>1.$

5.99. $|x|>a.$

5.100. При каких значениях x дробь $\dfrac{5x-1}{x-2}$ больше 2?

5.101. При каких целых отрицательных x выполняется неравенство $\dfrac{3x-2}{x+3}<1$?

5.102. Найти все целые положительные значения x, удовлетворяющие неравенству $5x-7<2x+8$.

5.103. Найти наибольшее целое решение неравенства:

$$\frac{2x^2-4x+1}{x^2+6}<1.$$

5.104. Найти целые решения неравенства $10-3x-x^2>0$.

5.105. Найти целые положительные значения x, удовлетворяющие неравенству:

$$\frac{5x+1}{x-1}>2x+2.$$

Решить системы неравенств:

5.106. $\begin{cases}\dfrac{x-7}{x+2}<0,\\[2mm] \dfrac{-3}{x+2}<0.\end{cases}$

5.107. $\begin{cases}3x+2\ge 0,\\ x+\sqrt{5}<0.\end{cases}$

5.108. $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x+1}<1,\\[2mm] \dfrac{2}{x+1}>0.\end{cases}$

5.109. $\begin{cases}\dfrac{2x-3}{3x+5}>0,\\[2mm] \dfrac{-2}{3x+5}>0.\end{cases}$

5.110. Найти наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{4x-1}{2x+3}-3>\frac{5}{2x+3}.$$

5.111. Для каких значений a решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+2y=a, \\ 2x+3y=8 \end{cases}$$

удовлетворяют условию $x>0,\ y<0$.

5.112. При каких значениях n система уравнений

$$\begin{cases} 3x+ny=3, \\ 2x-4y=1 \end{cases}$$

имеет решения $x>0,\ y>0$?

5.113. При каких значениях n уравнение $\dfrac{nx+1}{2}-\dfrac{2x-1}{n}=1$ имеет положительный корень?

5.114. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(2a+1)x^2-ax+a-2=0$ имеет 2 различных корня.

5.115. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2-ax+(a-3)=0$ имеет не более одного корня.

5.116. Найти целые положительные решения системы неравенств

$$\begin{cases} x+3<4+2x, \\ 5x-3<4x-1\ . \end{cases}$$

Решить неравенства:

5.117. $\dfrac{x^2-2}{x^2-9}<1$.

5.118. $\dfrac{1}{3x+5}<\dfrac{x}{3x+5}$.

5.119. $\dfrac{2x}{3x-4}<1$.

5.120. $2-\dfrac{x-3}{x-2}<\dfrac{x}{x-1}$.

5.121. $\dfrac{2x}{1-3x}>3$.

5.122. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x+1}{x-2}<\dfrac{3}{2-x}$.

5.123. $\dfrac{1}{x-5}>\dfrac{1}{1+x}$.

5.124. $x^{-1}<x^{-2}-2$.

5.125. $x^2-3\,|\,x\,|+2>0$.

5.126. $|\,x\,|>\dfrac{1}{x}$.

5.127. $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.128. $5^{x+1} < \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.129. $x^2 - x + 1 < 0$.

5.130. $x^2 - |x| < 0$.

5.131. $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$.

5.132. $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

5.133. $\log_{1/3}(\log_5 x) > 0$.

5.134. $\log_{0,5}(2^{\frac{1}{x+1}}) > 0$.

5.135. $\frac{x+2}{x^2 - x - 2} < -1$.

5.136. $(2x^2 - x - 1)(6 - 5x - x^2) > 0$.

5.137. $x + 4 < \sqrt{x + 46}$.

5.138. $x^2 - |x| - 12 < 0$.

5.139. $\frac{(3x^2 + x - 2)(x^2 - x)}{(3x-2)(x^2 - x + 1)} \leq 0$.

5.140. $\log_x \sqrt{20 - x} > 1$.

5.141. $\log_{1/5} \log_2 \frac{3x}{x^2 - 1} < 0$.

5.142. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} < 9$.

5.143. $\frac{(4x^2 - 4x + 1)(2 - x - x^2)}{(x^2 - 4)(x + 3)} \geq 0$.

5.144. $\frac{1}{2^x + 3} > \frac{1}{2^{x+2} - 1}$.

5.145. $(x-1)\sqrt{-x^2 + x + 6} \geq 0$.

5.146. $x|x| - 4x + 3 < 0$.

5.147. $5^{\log 3\left(\frac{2}{x+2}\right)} < 1$.

5.148. $3^{4-3x} - 35 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$.

5.149. $\log_{0,1}(x^2 + 1) < \log_{0,1}(2x - 5)$.

5.150. $\log_{x^2}(2 + x) < 1$.

5.151. $\log_{1/3}\left(\frac{1}{x}\right) + \log_x 3 \geq 2$.

5.152. Найти все значения параметра b, при каждом из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = b, \\ x + 2y = 2b + 1, \end{cases}$$

удовлетворяют неравенству x > 3y.

5.153. Найти все значения параметра a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 2a, \\ 3x + 5y = 4, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x + y > 0$.

5.154. При каких x функция $y = \dfrac{1-2x}{x-2}$ неотрицательна?

5.155. Найти все значения параметра c, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + 5y = 2c, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $y > x + 1$.

Решить неравенства:

5.156. $\log_x \dfrac{2x+5}{4(x-1)} < 0.$

5.157. $\log_x \dfrac{3x+2}{4(1-x)} > 0.$

5.158. $\log_{\frac{1}{x-1}} 0{,}4 > 0.$

5.159. $\log_x \dfrac{4x+1}{6(x-1)} < 0.$

5.160. $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \geq 0.$

5.161. $x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \leq 0.$

5.162. $3x^4 - 10x^2 + 3 > 0.$

5.163. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1.$

5.164. $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x-a}.$

5.165. $(1-a)\sqrt{2x+1} < 1.$

5.166. $\sqrt{x+1} > \sqrt{3-x}.$

5.167. $x > \sqrt{1-x}.$

5.168. $x > \sqrt{24-5x}.$

5.169. $\sqrt{24-10x} > 3-4x.$

5.170. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0.$

5.171. $\dfrac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < -1.$

5.172. $2\left(x + \sqrt{x^2+4x+3}\right) < 3\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} - 2\right).$

5.173. $\log_{1,5} \dfrac{2x-8}{x-2} < 0.$

5.174. $\log_{0,25} \dfrac{35-x^2}{x} \geq -\dfrac{1}{2}.$

5.175. $\log_5(2x-4) < \log_5(x+3).$

5.176. $\lg\sqrt{x^2-3x+4} - \lg\sqrt{x+1} > 0.$

5.177. $\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2.$

5.178. $\lg(x-1) + \lg(x-2) < \lg(x+2).$

5.179. $\log_2 x^2 + \log_2(x-1)^2 > 2.$

5.180. $\lg^2 x + 3\lg x - 4 \geq 0.$

5.181. $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}.$

5.182. $\sqrt{\log_2 \dfrac{3-2x}{1-x}} < 1.$

Найти область определения функций

5.183. $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{1-3x}}$.

5.184. $y=\sqrt{\dfrac{1-2x}{x+3}}$.

5.185. $y=\sqrt{2x-5}+\sqrt{11-3x}$.

5.186. $y=\sqrt{x-\dfrac{x^2}{x-2}-5}$.

5.187. $y=\sqrt{x^2-8x+15}$.

5.188. $y=\sqrt{\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x}}$.

5.189. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-7x-49}}$.

5.190. $y=\dfrac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

5.191. $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+x+42}}{x-1}$.

5.192. $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2-22x+105}}$.

5.193. $y=\lg(2-x)-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

5.194. $y=\log_3\left(\dfrac{x+3}{x-1}-2\right)$.

5.195. $y=\lg\left(\dfrac{x}{x-1}+1\right)$.

5.196. $y=\lg(3x^2-28x+9)$.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

I. Знаки тригонометрических функций по квадрантам

Перед результатом ставится знак "+" или "–" по таблице.

Таблица 6.1

Функция	1-я четверть (0 – 90°)	2-я четверть (90 – 180°)	3-я четверть (180 – 270°)	4-я четверть (270 – 360°)
Синус	+	+	–	–
Косинус	+	–	–	+
Тангенс	+	–	+	–
Котангенс	+	–	+	–

II. Формулы приведения

Таблица 6.2

Функция	$-\alpha$	$90°\pm\alpha$	$180°\pm\alpha$	$270°\pm\alpha$	$360°\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$

III. Тригонометрические функции основных углов

Таблица 6.3

Функция	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

IV. Соотношения между тригонометрическими функциями

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad (6.1) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad (6.2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad (6.3) \qquad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1; \quad (6.4)$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \quad (6.5) \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \quad (6.6)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad (6.7)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (6.8)$$

V. Формулы тригонометрических функций суммы и разности углов

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta; \quad (6.9)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta; \quad (6.10)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta; \quad (6.11)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta; \quad (6.12)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}; \quad (6.13)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \quad (6.14)$$

VI. Тригонометрические функции двойного и тройного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha; \qquad (6.15)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad (6.16)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad (6.17) \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad (6.18)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \qquad (6.19)$$

VII. Тригонометрические функции половинного угла

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad (6.20) \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \quad (6.21)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad (6.22) \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \quad (6.23)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad (6.24) \qquad \sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad (6.25)$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (6.26)$$

VIII. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (6.27)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (6.28)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (6.29)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (6.30)$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \quad (6.31) \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \quad (6.32)$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (6.33) \qquad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \quad (6.34)$$

IX. Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right];\qquad (6.35)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];\qquad (6.36)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].\qquad (6.37)$$

6.1. Основные соотношения между тригонометрическими функциями

6.1. Упростить выражение

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha+1).$$

Решение: Записывая $\operatorname{tg}^2\alpha$ в виде $\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, имеем:
$\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha+1)=\dfrac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Далее $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha+1)=\dfrac{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$. Так как $1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$ и $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=$ $=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$, то получим:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha+1)=\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha.$$

Ответ: $\cos^2\alpha$.

6.2. Упростить выражение

$$\left(1-\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)\left(1-\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^{-1}$$

Решение. Используя формулу разности кубов, найдём:
$\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=$
$=1+\sin\alpha\cos\alpha$, ибо $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. В результате первый сомно-

житель равен: $1-(1+\sin\alpha\cos\alpha)=-\sin\alpha\cos\alpha$. Аналогично преобразуя выражение во второй скобке, получим $\sin\alpha\cos\alpha$.

Теперь $(-\sin\alpha\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\alpha)^{-1}=-1$.

Ответ: -1.

6.3. Упростить выражение $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение. Так как $1+\sin\alpha>0$, $1-\sin\alpha>0$, то перепишем выражение в виде:

$\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{1-\sin\alpha}}-\dfrac{\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}}=\dfrac{1+\sin\alpha-(1-\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}}$. Знаменатель $\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha$, так как для $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ $\cos\alpha<0$.

Ответ: $-2\operatorname{tg}\alpha$.

6.4. Вычислить $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{12}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение. По формуле **(6.4)** $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{-12/5}=-\dfrac{5}{12}$. По формуле **(6.7)** $\cos\alpha=\dfrac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1+(-12/5)^2}}=-\dfrac{5}{13}$ (берем радикал со знаком "−", так как во 2-й четверти $\cos\alpha<0$). Теперь по формуле **(6.2)** $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\left(-\dfrac{12}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{12}{13}$.

Ответ: $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{5}{12}$.

6.5. Вычислить $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=10$.

Решение. Искомое выражение дополним до полного квадрата:

$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=(\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=$

$=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-2=10^2-2=98$

(учли, что $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$).

Ответ: 98.

6.6. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg}x)-\cos x$.

6.7. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$.

6.8. $\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha-1}{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha}$.

6.9. $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

6.10. $1-\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha\sin\alpha+\cos\alpha}$.

6.11. $\dfrac{1-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}$.

6.12. $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

6.13. $\dfrac{2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^{-1}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}-\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

6.14. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, если $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ вычислить при $\cos\alpha=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

6.2. Формулы приведения

Формулы приведения представлены в табл. 6.2.

6.15. Упростить : а) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\sin(\pi-\alpha)$.

Решение. По табл. 6.2 ответ получается сразу, но запоминать табл. 6.2 вовсе необязательно, если воспользоваться правилом приведения. Согласно этому правилу при преобразовании выражений, содержащих тригонометрические функции углов $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi-\alpha$, вначале определяется наименование функции: если угол α откладывается от значений $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, то наименование функции меняется на сходное; если от значений π, 2π – наименование функции не меняется. Поэтому в примере а) наименование "косинус" меняется на "синус", а в примере б) наименование "синус" не меняется. Знак, с которым берется полученная функция, определяется по знаку приводимой функции (расположенной в левой части формулы), если считать угол α острым. Итак:

а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$, так как в 3-й четверти $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$;

б) $\sin(\pi-\alpha)=+\sin\alpha$, так как во 2-й четверти $\sin(\pi-\alpha)>0$.

Ответ: а) $-\sin\alpha$; б) $\sin\alpha$.

6.16. Упростить: а) $\cos\left(\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{tg}^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\sin^4(\alpha-\pi)$; г) $\sin(-960°)$.

Решение. а) В силу четности косинуса ($\cos(-x)=\cos x$) получим $\cos\left(\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)$. Учитывая, что период функции $\cos x$ равен 2π, а вычитание (или добавление) целого числа периодов не изменяет значения функции,

$$\cos\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(2\cdot2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

б) В силу нечётности тангенса ($\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$) можно записать

$$\operatorname{tg}^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\left[-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right]^3=(-\operatorname{ctg}\alpha)^3=-\operatorname{ctg}^3\alpha.$$

в) Так как при возведении в чётную степень в любом случае получается неотрицательное выражение, то, используя правило приведения, достаточно определить только наименование функции: $\sin^4(\alpha-\pi)=\sin^4\alpha$.

г) $\sin(-960°)=-\sin960°=-\sin(3\cdot360°-120°)=$

$$=-\sin(-120°)=\sin120°=\sin(90°+30°)=+\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: а) $\sin\alpha$; б) $-\operatorname{ctg}^3\alpha$; в) $\sin^4\alpha$; г) $\sqrt{3}/2$.

6.17. Упростить выражение:

$$\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}.$$

Решение. Учитывая, что $\sin^2(\alpha-\pi)=\sin^2\alpha$, $\sin^2(\alpha+\pi)=$ $=\sin^2\alpha$, $\cos^3(\alpha-4\pi)=\cos^3\alpha$, исходное выражение запишем в виде $\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}$.

Далее $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\dfrac{1+4\sin\alpha}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}$. Сокращая во 2-й дроби на $(4\sin\alpha+1)$, имеем $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\dfrac{2}{\cos^3\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{2}{\cos^3\alpha}$.

Упростить выражения :

6.18. $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$.

6.19. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2(\alpha+\frac{\pi}{2})\cdot\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-\frac{\pi}{2})-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{2})}$.

6.20. $\dfrac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1}+\dfrac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-90^\circ)-1}$.

6.21. $\dfrac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}$.

6.22. $\dfrac{\cos(1{,}5\pi+\alpha)+\sin(\alpha-\pi)-\operatorname{tg}(\alpha-0{,}5\pi)}{\operatorname{tg}(1{,}5\pi-\alpha)}$.

6.23. $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\cdot\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$.

Вычислить :

6.24. $\operatorname{ctg}13^\circ\cdot\operatorname{ctg}17^\circ\cdot\operatorname{ctg}21^\circ\ldots\operatorname{ctg}77^\circ$.

6.25. $\cos20^\circ+\cos40^\circ+\cos60^\circ+\ldots+\cos180^\circ$.

6.3. Формулы сложения и кратных углов

При решении задач этого параграфа следует обращаться к формулам **(6.9) – (6.26)**, **(6.33)**, **(6.34)**.

6.26. Упростить выражение $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

Решение. Используя формулы **(6.10)** и **(6.12)**, получим:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Ответ: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

6.27. Вычислить без таблиц $\cos 15^\circ+\sin 15^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$

Решение. Представим выражение в виде

$$\cos 15^\circ+\sin 15^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ=\frac{\sin 30^\circ\cos 15^\circ+\sin 15^\circ\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}.$$

Заметив, что в числителе записана формула синуса суммы двух углов **(6.9)**, получим, что искомое выражение равно:

$$\frac{\sin(30^\circ+15^\circ)}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{2}/2}{1/2}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Упростить выражения :

6.28. $\dfrac{\cos\alpha-\sqrt{2}\cdot(\cos(45^\circ+\alpha))}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}$. **6.29.** $\dfrac{\cos\alpha-2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(\alpha-30^\circ)-\sqrt{3}\sin\alpha}$.

6.30. $\cos\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})$. **6.31.** $\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}(x+y)}{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(x+y)}$.

6.32. $\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=5$.

Вычислить:

6.33. $\sin 75^\circ+\cos 75^\circ\cdot\operatorname{tg} 60^\circ$. **6.34.** $\sin(\alpha-\beta)$,

если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{12}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

6.35. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-3$, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=96$.

6.36. $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}4$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{7}$, α,β – острые углы.

6.37. $(\cos 70^\circ+\cos 50^\circ)(\cos 310^\circ+\cos 290^\circ)+$
$+(\cos 40^\circ+\cos 160^\circ)(\cos 320^\circ-\cos 380^\circ)$.

Среди множества формул, связывающих тригонометрические функции двойного и половинного углов, наиболее важными для решения задач являются формулы **(6.15) – (6.17), (6.33), (6.34).**

6.38. Упростить выражение $\dfrac{(1+\cos 4\alpha)\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Решение. Учитывая, что $1+\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha$, преобразуем выражение к виду $\dfrac{2\cos^2 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\dfrac{2\cos^3 2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$.

Заметив, что в числителе $2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$, а в знаменателе $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=$ $=-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\cos 2\alpha$, получим:

$$\frac{\cos^3 2\alpha\cdot\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{-\cos 2\alpha}=-\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha\cdot\sin^2 2\alpha=-\frac{1}{8}(2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha)^2=$$
$$=-\frac{1}{8}\sin^2 4\alpha.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{8}\sin^2 4\alpha$.

6.39. Упростить выражение $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ-\frac{\alpha}{2})(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$.

Решение. В соответствии с **(6.14)**,

$$\operatorname{tg}(45^\circ-\frac{\alpha}{2})=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\sin\frac{\alpha}{2})\big/\cos\frac{\alpha}{2}}{1+(\sin\frac{\alpha}{2})\big/\cos\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Учитывая, что

$$(1+\sin\alpha)=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})^2,$$

а $\cos\alpha=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, получим:

$$\frac{\operatorname{tg}(45^\circ-\frac{\alpha}{2})(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})}=1.$$

Ответ: 1.

6.40. Упростить выражение $\dfrac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1.$

Решение. Раскрывая скобки, приведём выражение к виду:

$$\frac{1+2\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}^2 2\alpha-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}+\frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-$$

$-\sin 4\alpha-1.$

Преобразуем полученное выражение с учётом формул (6.25) и (6.26):

$\sin 4\alpha+\cos 4\alpha-\sin 4\alpha-1=-(1-\cos 4\alpha)=-2\sin^2 2\alpha.$

Ответ: $-2\sin^2 2\alpha.$

Упростить выражения :

6.41. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$

6.42. $\sin 4\alpha-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot 4\sin\alpha\cos\alpha.$

6.43. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos 2\alpha}.$

6.44. $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-\cos\alpha.$

6.45. $\dfrac{4\sin^4\alpha+\sin^2 2\alpha}{\sin\alpha}.$

6.46. $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$

6.47. $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}.$

6.48. $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin 2\alpha.$

6.49. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+\operatorname{tg}\alpha}.$

6.50. $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

6.51. $\dfrac{4\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}+\cos^2 2\alpha.$

6.52. $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha.$

6.53. $\dfrac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)^2-(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+\sin 2\alpha}{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)}.$

6.54. $\left(\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}-\cos^2\alpha\right)\cdot 4\cos^2\alpha.$

6.55. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)}.$ **6.56.** $\dfrac{4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}4\alpha.$

6.57. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\frac{5\pi}{4})}+\cos^2\alpha.$

6.58. $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}.$ **6.59.** $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha-\frac{\pi}{2})}{1+\cos(4\alpha+3\pi)+\cos(4\alpha+\frac{3\pi}{2})}.$

6.60. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}.$

В некоторых примерах упрощение может быть достигнуто выделением тригонометрической единицы $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^k$.

6.61. Упростить выражение $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)$.

Решение. Вначале упростим выражение в первых скобках, дополнив его до полного квадрата:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Выражение во вторых скобках дополним до куба суммы :

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^6\alpha+3\sin^4\alpha\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha\cos^4\alpha+\cos^6\alpha)-$$

$$-3(\sin^4\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^4\alpha)=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-$$

$$-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$

$$=1-\frac{3}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$$

Теперь данное выражение примет вид:

$$3(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)-2(1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha)=1.$$

Ответ: 1.

Упростить выражения :

6.62. $3\cos 2\alpha - 8\sin^6\frac{\alpha}{2} - 8\cos^6\frac{\alpha}{2}$.

6.63. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - \frac{3}{4}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2$.

6.64. $\sin^4(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \sin^4(3\pi + \alpha) - 2\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^6(5\pi - \alpha)\right]$.

6.65. Вычислить: а) $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$,

если $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

б) $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

г) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = -\frac{3}{2}$.

Решение. а) Вначале найдём

$$\cos\alpha = +\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - (-\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Теперь $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$;

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

б) Вычислим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$. Затем по формулам **(6.25)**, **(6.26)**

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot(4/3)}{1 + (4/3)^2} = \frac{24}{25};$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - (4/3)^2}{1 + (4/3)^2} = -\frac{7}{25}.$$

в) Найдём $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = -\frac{8}{17}$.

Теперь $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ можно вычислить по любой из формул **(6.22)** или **(6.24)**:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{15/17}{1-8/17} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

г) Найдём тангенс двойного угла $(90°+2\alpha)$ по отношению к заданному в условии $(45°+\alpha)$. Получим:

$$\operatorname{tg}(90°+2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}(45°+\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(45°+\alpha)} = \frac{2(-3/2)}{1-(-3/2)^2} = \frac{12}{5} \quad \text{или} \quad -\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{12}{5},$$

откуда $\operatorname{ctg}2\alpha = -\frac{12}{5}$ и $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}2\alpha} = -\frac{5}{12}$.

Ответ: а) $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$, $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$; б) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$; в) $\frac{5}{3}$; г) $-\frac{5}{12}$;

Вычислить:

6.65а. $\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$.

6.66. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{7}{8}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

6.67. $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

6.68. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

6.69. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3}$.

6.70. $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}5$.

6.71. $32(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}5$.

6.72. $16(\sin^3\alpha - \cos^3\alpha)$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}5$.

6.73. $6(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha)$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$.

6.74. $125(\cos^8\alpha - \sin^8\alpha)$, если $\cos 2\alpha = 0{,}8$.

6.4. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и обратное преобразование

Решение задач этого параграфа основано в первую очередь на знании формул (6.27) – (6.37).

6.75. Упростить выражение $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

Решение. Проведем в числителе группировку членов и с помощью формул (6.29), (6.33) преобразуем его в произведение. Получим:

$$(1+\cos 2\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)=2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha=$$

$$=2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)=4\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}.$$

Преобразуем знаменатель:

$$\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=\cos\alpha+\cos 2\alpha=2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

После сокращения дроби получим $2\cos\alpha$.

Ответ: $2\cos\alpha$.

6.76. Преобразовать в произведение $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\dfrac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}$, (см. (6.31)), а $\operatorname{tg}3x=\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}$, получим:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\frac{\sin 3x(\cos 3x-\cos x\cos 2x)}{\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}.$$

Здесь можно было вначале преобразовать в сумму $\cos x\cos 2x$, а после приведения подобных членов полученное в скобках выражение преобразовать обратно в произведение. Однако результат получится быстрее, если представить $\cos 3x$ как косинус суммы двух углов, т.е.

$$\cos 3x=\cos(x+2x)=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x.$$

Тогда после замены $\cos 3x$ выражение в скобках примет вид $-\sin x\sin 2x$, а вся дробь $-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x$.

Ответ: $-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x$.

6.77. Преобразовать в произведение:

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha-\sin^2 3\alpha-\sin^2 4\alpha.$$

Решение. Используем формулу понижения степени (6.34)

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 4\alpha}{2}-\frac{1-\cos 6\alpha}{2}-\frac{1-\cos 8\alpha}{2}=$$
$$=(\cos 6\alpha+\cos 8\alpha)-(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha).$$

Теперь каждую скобку преобразуем в произведение по формулам **(6.29)**, **(6.30)**. Получим:

$$2\cos 7\alpha\cos\alpha-2\cos 3\alpha\cos\alpha=2\cos\alpha(\cos 7\alpha-\cos 3\alpha)=$$
$$=-4\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 5\alpha.$$

Ответ: $-4\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 5\alpha$.

Упростить выражения, преобразовав их в произведение :

6.78. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}$. **6.79.** $1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha$.

6.80. $\dfrac{\sin\alpha-2\cos 3\alpha-\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}$.

6.81. $\sin^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2 2\beta$.

Рассмотрим несколько примеров с введением вспомогательного угла. В общем случае для преобразования выражения $a\sin x+b\cos x$ следует вынести за скобку $\sqrt{a^2+b^2}$, после чего $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ принимается за $\cos\alpha$, а $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ — за $\sin\alpha$.

6.82. Упростить выражение $\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

Решение. $a^2+b^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4$, таким образом, следует вынести за скобку $\sqrt{4}=2$, т.е. $2(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$.

Так как $\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$, а $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$, получим:

$2(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$ (см. формулу **(6.9)**).

Ответ: $2\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

6.83. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{x}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{x}{4}\right)}$.

Решение. Используя формулы **(6.15)** и **(6.28)**, получаем:

$$\frac{\sqrt{2}\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{2}\left(\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}=4\sqrt{2}\,\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}.$$

Сокращая здесь на $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$ и учитывая нечётность $\sin x$, окончательно имеем $-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$.

Ответ: $-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$.

Упростить выражения :

6.84. $\sin x+\cos x$. **6.85.** $\dfrac{2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12})}{\sqrt{3}-2\cos x}$.

6.86. $1-2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha$. **6.87.** $2-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha$.

6.88. $6\sin^2 2\alpha-1-\cos 4\alpha$. **6.89.** $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x+3$.

6.90. Преобразовать в произведение $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Решение. По формуле **(6.27)**:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Учитывая, что $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, получим:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta).$$

Представим теперь $\sin(\alpha+\beta)$ как $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

откуда, применив к сумме косинусов формулу **(6.29)**, приходим к

5*

результату: $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, где $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, т.е. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\pi-\gamma}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$; окончательно получаем:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ответ: $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

6.91. Преобразовать в произведение $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta$, если $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$.

6.92. Доказать, что если α, β, γ – углы треугольника, то имеет место равенство $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$.

6.93. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, то $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$, где k – целое число.

6.5. Вычисление без помощи таблиц

6.94. Вычислить без помощи таблиц $\sin 54°-\sin 18°$.

Решение. По формулам **(6.28)**, **(6.15)** и формулам табл.6.2. имеем

$$\sin 54°-\sin 18°=2\sin\frac{54°-18°}{2}\cos\frac{54°+18°}{2}=2\sin 18°\cdot\cos 36°=$$

$$=\frac{2\sin 18°\cos 18°\cos 36°}{\cos 18°}=\frac{\sin 36°\cos 36°}{\cos 18°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 72°}{\cos 18°}=\frac{\sin(90°-18°)}{2\cos 18°}=$$

$$=\frac{\cos 18°}{2\cos 18°}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

6.95. Вычислить без помощи таблиц $\operatorname{tg}20°\operatorname{tg}40°\operatorname{tg}60°\operatorname{tg}80°$.

Решение. $\operatorname{tg}20°\operatorname{tg}40°\operatorname{tg}60°\operatorname{tg}80°=\sqrt{3}\,\frac{(\sin 20°\sin 40°)\sin 80°}{(\cos 20°\cos 40°)\cos 80°}$.

Преобразуя выражения в скобках в суммы, получим:

$$\sqrt{3}\,\frac{(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ}{(\cos 20^\circ+\cos 60^\circ)\cos 80^\circ}=\sqrt{3}\,\frac{\cos 20^\circ \sin 80^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ}{\cos 20^\circ\cos 80^\circ+\frac{1}{2}\cos 80^\circ}.$$

Теперь вновь произведения $\cos 20^\circ \sin 80^\circ$, $\cos 20^\circ \cos 80^\circ$ преобразуем в суммы и найдём

$$\sqrt{3}\,\frac{\frac{1}{2}\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\sin 100^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ}{\frac{1}{2}\cos 60^\circ+\frac{1}{2}\cos 100^\circ+\frac{1}{2}\cos 80^\circ}=\sqrt{3}\,\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,60^\circ=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3.$$

(Учли, что $\sin 100^\circ=\sin(180^\circ-80^\circ)=\sin 80^\circ$
и $\cos 100^\circ=\cos(180^\circ-80^\circ)=-\cos 80^\circ$).

Ответ: 3.

Вычислить без помощи таблиц :

6.96. $\sin 15^\circ$. **6.97.** $\cos 22{,}5^\circ$. **6.98.** $\dfrac{\mathrm{ctg}\,15^\circ+1}{2\,\mathrm{ctg}\,15^\circ}$.

6.99. $\dfrac{\mathrm{tg}\,20^\circ+\mathrm{tg}\,25^\circ}{1-\mathrm{ctg}\,65^\circ\,\mathrm{ctg}\,70^\circ}$. **6.100.** $\sin 15^\circ(\sqrt{3}+\mathrm{ctg}\,15^\circ)$.

6.101. $32\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$. **6.102.** $\sin 54^\circ\cos 72^\circ$.

6.103. $\dfrac{96\sin 80^\circ\sin 65^\circ\sin 35^\circ}{\sin 20^\circ+\sin 50^\circ+\sin 110^\circ}$.

6.104. $128\sin^2 20^\circ\sin^2 40^\circ\sin^2 60^\circ\sin^2 80^\circ$.

6.105. $4(\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ)$.

6.106. $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$.

6.107. $\mathrm{tg}\,9^\circ-\mathrm{tg}\,63^\circ+\mathrm{tg}\,81^\circ-\mathrm{tg}\,27^\circ$.

6.108. $\cos^2 3^\circ+\cos^2 123^\circ+\cos^2 117^\circ$.

6.6. Задачи для самостоятельного решения

Упростить выражения:

6.109. $\dfrac{\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\,\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\,\mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)\,\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)}$.

6.110. $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha}$.

6.111. $3\cos^2 x - 4\sin x\cos x - \sin^2 x - 1$.

6.112. $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$. **6.113.** $4\cos^4\alpha - 2\cos 2\alpha - \dfrac{1}{2}\cos 4\alpha$.

6.114. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha} - \dfrac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha}$.

6.115. $4\cos^2(2\alpha - \dfrac{3\pi}{2}) + \cos(2\alpha - \pi) + \sin(\dfrac{5\pi}{2} - 6\alpha)$.

6.116. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

6.117. $\cos 0 + \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

6.118. $\dfrac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha)}{4\sin(5\pi - 3\alpha)\cos(\alpha - 2\pi)}$.

6.119. $\dfrac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

6.120. $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{4\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha)\sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$. **6.121.** $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

6.122. $\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha$. **6.123.** $\operatorname{tg}(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4})\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$.

6.124. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)}$.

6.125. $\sin^2\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right)\left(1 - \dfrac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right)$.

6.126. $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin 6\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha}$.

6.127. $\dfrac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x}$.

6.128. $1 - \cos(2x - \pi) - \cos(4x + \pi) + \cos(6x - 2\pi)$.

6.129. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}$.

6.130. $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$.

6.131. $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} + \cos(\pi-\alpha)$.

6.132. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

6.133. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

6.134. $\dfrac{\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{2})\cos(\frac{3\pi}{2}+x) - \sin^3(\frac{7\pi}{2}-x)}{\cos(x-\frac{\pi}{2})\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+x)}$.

6.135. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

6.136. $\sin^2(\frac{\pi}{8}+\alpha) - \sin^2(\frac{\pi}{8}-\alpha)$.

6.137. $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{2\operatorname{tg}(\alpha-\frac{\pi}{4})\sin^2(\alpha-\frac{3\pi}{4})}$.

6.138. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha}{2\sin\alpha + \cos(90^\circ+3\alpha) + \sin 5\alpha}$.

6.139. $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)+1$.

6.140. $3-4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$.

6.141. $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}$.

6.142. $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}{1-8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha}$.

6.143. $\dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}$, $(\pi < \alpha < 2\pi)$.

6.144. $1-\sin 4\alpha + \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4}-2\alpha)\cos 4\alpha$.

6.145. $\dfrac{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{\cos 2\alpha}$.

6.146. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$.

6.147. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)} - 2\cos(135^\circ+\alpha)\cos(315^\circ-\alpha)$.

6.148. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} - \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

6.149. $\dfrac{\cos^6\alpha-\sin^6\alpha}{\cos 2\alpha}+\dfrac{\sin^2 2\alpha}{4}$. **6.150.** $4\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)$.

6.151. $\sin^4\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^4\alpha\cos^2\alpha-3\cos^4\alpha+\cos^6\alpha$.

6.152. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha$.

6.153. $\dfrac{4(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha)}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}$. **6.154.** $\operatorname{ctg}^2 2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha-8\cos 4\alpha\cdot\operatorname{ctg}4\alpha$.

Доказать тождества:

6.155. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}=\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1$.

6.156. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

6.157. $\dfrac{\cos^2\beta(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta)}{\cos^{-2}\alpha}=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

6.158. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

6.159. $(1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}2\beta)\sin 2\beta=\operatorname{tg}2\beta$.

6.160. $\dfrac{\sin^2 4\alpha}{2\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=2\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

6.161. $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

6.162. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$.

6.163. $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}=\cos 2\alpha$.

6.164. $\frac{1}{2}(\cos t+\sqrt{3}\sin t)=\cos(\frac{\pi}{3}-t)$.

6.165. $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha$.

6.166. $\dfrac{\sqrt{2}-\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8})$.

6.167. $\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\frac{1}{4}\cos 2\alpha(3+\cos^2 2\alpha)$.

6.168. $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}$.

6.169. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\dfrac{\sin(4\alpha+30^\circ)}{\sin(4\alpha-30^\circ)}$.

Вычислить :

6.170. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{12}{13}$, $\sin\gamma=\frac{7}{25}$, $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\gamma\le\frac{\pi}{2}$.

6.171. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, если $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{5}$.

6.172. $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha+\sin\beta=1$, $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$.

6.173. $56\operatorname{tg}(\frac{\beta}{2}-2\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{3}$, $\sin\beta=-\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

6.174. $6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$, $\alpha+\beta\ne\pi n$, $n\in Z$.

6.175. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Вычислить без таблиц :

6.176. $\sin 18°$. **6.177.** $\operatorname{ctg}70°+4\cos 70°$.

6.178. $64\sin 25°\sin 35°\sin 85°$.

7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

Определения обратных тригонометрических функций:

$\alpha = \arcsin m,$ если $\begin{cases} -1 \le m \le 1, \\ \sin\alpha = m, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ **(7.1)**

$\alpha = \arccos m,$ если $\begin{cases} -1 \le m \le 1, \\ \cos\alpha = m, \\ 0 \le \alpha \le \pi; \end{cases}$ **(7.2)**

$\alpha = \operatorname{arctg} m,$ если $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = m, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ **(7.3)**

$\alpha = \operatorname{arcctg} m,$ если $\begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha = m, \\ 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$ **(7.4)**

Формулы решения простейших тригонометрических уравнений*

$$\sin x = m\ (|m| \le 1);\ x = (-1)^k \arcsin m + \pi k,\ k \in Z; \quad \textbf{(7.5)}$$

$$\text{или} \left.\begin{array}{l} x = \arcsin m + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin m + 2\pi n \end{array}\right\}\ n \in Z; \quad \textbf{(7.5')}$$

$$\cos x = m\ (|m| \le 1);\ x = \pm \arccos m + 2\pi n,\ n \in Z; \quad \textbf{(7.6)}$$

$$\operatorname{tg} x = m;\ x = \operatorname{arctg} m + \pi n,\ n \in Z; \quad \textbf{(7.7)}$$

$$\operatorname{ctg} x = m;\ x = \operatorname{arcctg} m + \pi n,\ n \in Z. \quad \textbf{(7.8)}$$

В частных случаях при $m = 0$, $m = 1$, $m = -1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x = 0;\ x = \pi n,\ n \in Z; \quad \textbf{(7.9)}$$

$$\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \quad \textbf{(7.10)}$$

---

* Знак $n \in Z$ означает, что число n принадлежит множеству целых чисел.

$$\sin x = -1;\; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\; n \in Z; \qquad (7.11)$$

$$\cos x = 0;\; x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in Z; \qquad (7.12)$$

$$\cos x = 1;\; x = 2\pi n,\; n \in Z; \qquad (7.13)$$

$$\cos x = -1;\; x = \pi + 2\pi n,\; n \in Z; \qquad (7.14)$$

$$\operatorname{tg} x = 0;\; x = \pi n,\; n \in Z; \qquad (7.15)$$

$$\operatorname{ctg} x = 0;\; x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in Z. \qquad (7.16)$$

7.1 Обратные тригонометрические функции

При решении задач, связанных с обратными тригонометрическими функциями, надо четко знать их определения **(7.1) — (7.4)**, в соответствии с которыми эти задачи переводятся на язык обычных тригонометрических функций. Так, например, если по условию задачи надо найти $\cos(2\operatorname{arctg}(-5))$, то следует понимать, как вычислить $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -5$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Обратите внимание на число m, которое в выражениях $\arcsin m$ и $\arccos m$ должно удовлетворять условию $|m| \le 1$, а в выражениях $\operatorname{arctg} m$ и $\operatorname{arcctg} m$ может быть любым числом. Если, например, выражение $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ определяет некоторый острый угол, то запись $\arcsin\sqrt{2}$ не имеет смысла.

7.1. Найти область определения функции $y = \arcsin\frac{x}{2}$.

Решение. Согласно определению арксинуса (7.1) $\sin y = \frac{x}{2}$, т.е. $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$, откуда $-2 \le x \le 2$.

Ответ: $-2 \le x \le 2$.

Найти область определения функций:

7.2. $y = \operatorname{arctg} 2x$.

7.3. $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x-4}$.

7.4. $y = \arccos\frac{1}{x+2}$.

7.5. $y = \arcsin\frac{2x}{x-1}$.

7.6. Вычислить $A = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. $A = -\frac{\pi}{3} + 2\cdot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{4\pi}{3}$.

Вычислить:

7.7. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.8.** $\arccos 1 + 2\arcsin\frac{1}{2}$.

7.9. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\arcsin(-1)$. **7.10.** $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

7.11. Вычислить $\sin\left[2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$.

Решение. Обозначим $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \alpha$. Согласно определению арккотангенса (7.4) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $0 < \alpha < \pi$, а учитывая, что $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Этим условиям удовлетворяет угол $\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (ибо $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$).

Итак, $\sin\left[2\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \sin 2\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{3} =$

$$= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вычислить:

7.12. $\cos\left[2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$. **7.13.** $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)$.

7.14. $\operatorname{ctg}\left[3\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

7.15. $\sin(3\operatorname{arcctg}(-1))$.

7.16. Вычислить $\arccos\left[\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]$.

Решение. Обозначим $\arccos\left[\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]=\alpha$. По определению арккосинуса (7.2) $\cos\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ и $0\le\alpha\le\pi$. Единственный угол, удовлетворяющий двум последним условиям, есть $\alpha=\pi-\frac{\pi}{10}=\frac{9\pi}{10}$. (Заметим, что наиболее «естественным» решением казался угол $\alpha=-\frac{\pi}{10}$, удовлетворяющий равенству $\cos\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$, но он не удовлетворяет неравенству $0\le\alpha\le\pi$).

Ответ: $\frac{9\pi}{10}$.

7.17. $\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right)$.

7.18. $\arccos\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$.

7.19. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{12\pi}{5}\right)$.

7.20. $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-400^\circ\right)\right]$.

7.21. Вычислить $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

Решение. Обозначим $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$. Согласно определению арксинуса (7.1), $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ (а точнее, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ибо $\sin\alpha>0$). Таким образом, задача свелась к вычислению $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Согласно (6.16),

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}.$$

Ответ: $-0{,}28$.

7.22. Вычислить $\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

Решение. Обозначим $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)=\alpha$. Согласно определению арккосинуса (7.2), $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ и $0\le\alpha\le\pi$ (а точнее, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, ибо $\cos\alpha<0$). Теперь по (6.17) $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. Из формулы (6.7) следует, что $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}$ (перед радикалом берем знак минус, ибо $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, где $\operatorname{tg}\alpha<0$).

Учитывая, что $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, последовательно найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{\frac{1}{(-2/3)^2}-1}=-\frac{\sqrt{5}}{2}\ \text{ и }\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\left(-\sqrt{5}/2\right)}{1-\left(-\sqrt{5}/2\right)^2}=4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Вычислить:

7.23. $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$.

7.24. $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right)$.

7.25. $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

7.26. $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-2{,}4)\right)$.

7.2. Простейшие тригонометрические уравнения

Для усвоения темы прежде всего необходимо овладеть техникой решения простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x=m$, $\cos x=m$, $\operatorname{tg}x=m$, $\operatorname{ctg}x=m$ (см. формулы (7.5) — (7.8)) и их частные случаи (7.9) — (7.16), а также тесно связанные с ними уравнения вида $\sin(ax+b)=m$, $\cos(ax+b)=m$, $\operatorname{tg}(ax+b)=m$, $\operatorname{ctg}(ax+b)=m$, $\sin^2 x=m$, $\cos^2 x=m$, $\operatorname{tg}^2 x=m$, $\operatorname{ctg}^2 x=m$.

7.27. Решить уравнение $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Решение. Согласно (7.11),

$$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n \text{ или } x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

7.28. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Решение. Согласно (7.15), $2x+\frac{\pi}{3}=\pi n$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

7.29. Решить уравнение $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

Решение. Согласно (7.6), $2x+\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$ или $2x+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. (Обратите внимание на то, что $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=$ $=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$, а не $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, так как по определению (7.2) значения арккосинуса заключены на отрезке $[0,\pi]$). Теперь $2x=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ или $x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. Записываем два решения (когда слагаемое $\frac{\pi}{3}$ берется с плюсом и минусом).

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

7.30. Решить уравнение $\sin 4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Согласно (7.5),

$4x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$, откуда $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}k$.

Иногда удобнее бывает иметь ответ в развернутой, а не краткой форме записи. Поэтому для решения данного уравнения можно было воспользоваться развернутой формой записи его решений (7.5'). Тогда получили бы

$$x = \frac{1}{4}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$$

и $x = \frac{1}{4}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n\right) = \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n.$

Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}k,\ k \in Z$, или $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$ и $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z.$

Решить уравнения:

7.31. $2\sin 2x = -1.$

7.32. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

7.33. $2\cos 2x = -\sqrt{3}.$

7.34. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$

7.35. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1.$

7.36. $\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + 1 = 0.$

7.37. $2\sin 10x - \sqrt{3} = 0.$

7.38. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 3.$

7.39. $\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1.$

7.40. $\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$

7.41. $3\,\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}.$

7.42. Решить уравнение $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.

Р е ш е н и е. Уравнение распадается на два: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение первого уравнения $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, а второго — $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k$. Объединяя эти решения, получим $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

З а м е ч а н и е. Аналогично решению задачи (7.42) можно показать, что решение каждого из уравнений $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 x = a$, $\operatorname{ctg}^2 x = a$ имеет вид:

$$x = \pm \operatorname{arc}\ldots\sqrt{a} + \pi k,\ k \in Z, \tag{7.17}$$

где многоточие означает один из символов sin, cos, tg или ctg. Поэтому, например, решением уравнения $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ будет

$$x = \pm \arccos\sqrt{\frac{1}{2}} + \pi k,\ k \in Z.$$

Решить уравнения:

7.43. $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$.

7.44. $4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 3$.

7.45. $\sqrt{3}\ \operatorname{ctg}^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

7.46. $\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 1$.

7.3. Тригонометрические уравнения

При решении более сложных тригонометрических уравнений следует учесть, что не существует единого метода их решения (как, например, для квадратных уравнений). Такие уравнения решают с помощью тождественных преобразований, сводя их к одному или нескольким простейшим, рассмотренным в 7.2. При этом по возможности нужно избегать тех преобразований, которые нарушают равносильность (например, возведение обеих частей уравнения в квадрат, освобождение от знаменателя, содержащего неизвестное, и т. п.). В случае неизбежности таких преобразований необходимо уметь отбросить лишние решения.

Одна из важнейших идей решения тригонометрического уравнения состоит в преобразовании его к одной тригонометрической функции.

7.47. Решить уравнение $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

Решение. Уравнение легко приводится к квадратному уравнению относительно $\sin x$: $2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$, или $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$. Решая полученное уравнение, найдем:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.

2) $\sin x = 2$. Решений нет. (Запись «решений» этого уравнения в виде $x = (-1)^k \arcsin 2 + \pi k$ является грубой ошибкой, ибо $|\sin x| \le 1$, а $\arcsin 2$ вообще не имеет смысла).

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Решить уравнения:

7.48. $2\cos^2 x = 3\sin x$.

7.49. $\mathrm{tg}^2 2x - 7\,\mathrm{tg}\,2x + 10 = 0$.

7.50. $3\,\mathrm{tg}^2 x + \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\ x = 0$.

7.51. $\mathrm{tg}\,2x + \mathrm{ctg}\,2x = 2$.

7.52. $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin x$.

7.53. $(\mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x)^2 = 1 + \mathrm{ctg}^2 x$.

Уравнения вида $a\cos x + b\sin x = 0$, $a\cos^2 x + b\cos x\sin x + c\sin^2 x = 0$ и т.д., называемые однородными относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ (соответственно первого, второго и т.д. порядков), рекомендуется решать делением обеих частей уравнения соответственно на $\cos x \ne 0$, $\cos^2 x \ne 0$ и т.д.

7.54. Решить уравнение $\sqrt{3}\ \sin\ x + \cos\ x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos x \ne 0$ (если предположить, что $\cos x = 0$, тогда из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, что невозможно для одного и того же угла). Получим $\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\ x + 1 = 0$, откуда $\mathrm{tg}\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

7.55. Решить уравнение $\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 0$.

Решение. Данное уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$ второй степени. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \ne 0$ (если предположить, что $\cos x = 0$, тогда из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, что невозможно). Получим $\mathrm{tg}^2 x - 8\,\mathrm{tg}\,x + 7 = 0$. Решая квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получим: $(\operatorname{tg} x)_1 = 1$ и $(\operatorname{tg} x)_2 = 7$, откуда соответственно $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n$, $n \in Z$.

7.56. Решить уравнение $3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 9\cos^2 x = 2$.

Решение. Это уравнение сводится к однородному (второй степени), если правую часть представить как $2 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$; $3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 9\cos^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$ или $\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 0$. А далее решение такое же, как в **7.55**.

Решить уравнения:

7.57. $\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 0$.

7.58. $\sqrt{2}\sin 2x + \cos 2x = 0$.

7.59. $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$.

7.60. $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$.

7.61. $\sin^2 x - 30\sin x\cos x + 25\cos^2 x = 25$.

7.62. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2$.

Один из способов решения тригонометрических уравнений заключается в разложении одной из его частей на множители, если другая часть равна нулю. Это дает возможность приравнять нулю каждый сомножитель и свести решение данного уравнения к совокупности более простых.

7.63. Решить уравнение $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$.

Решение. Преобразуем обе части уравнения в произведение:

$$2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Обращаем внимание на то, что просто сокращение обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное (в данном случае на $\cos\frac{x}{2}$) может привести к потере корней. Поэтому перенесем члены уравнения в одну часть и вынесем множитель $2\cos\frac{x}{2}$ за скобки. Получим $2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) = 0$, откуда:

1) $\cos\frac{x}{2} = 0$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = \pi + 2\pi n$;

2) $\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}=0$. Деля обе части уравнения на $\cos\frac{3x}{2}\neq 0$, получим $1-\operatorname{tg}\frac{3x}{2}=0$ или $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}=1$. Решение последнего уравнения даст $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$ и $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$.

Ответ: $x=\pi+\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$, $n\in Z$.

7.64. Решить уравнение: $\cos 10x-\cos 8x-\cos 6x+1=0$.

Решение. Запишем уравнение так: $(\cos 10x-\cos 6x)+(1-\cos 8x)=0$. Преобразуя выражение в скобках в произведение, получим $-2\sin 8x\sin x+2\sin^2 4x=0$. Заметив, что $\sin 8x=2\sin 4x\cos 4x$, $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$, найдем:

$$-4\sin 4x\cos 4x\sin 2x+4\sin 4x\sin 2x\cos 2x=0$$

или $-4\sin 4x\sin 2x(\cos 4x-\cos 2x)=0$.

Вновь преобразуем в произведение выражение в скобках; получим $8\sin 4x\sin 2x\sin 3x\sin x=0$, откуда:

1) $\sin 4x=0$; $4x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}n$; 2) $\sin 2x=0$; $2x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}n$;

3) $\sin 3x=0$; $3x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}n$; 4) $\sin x=0$; $x=\pi n$.

Легко видеть, что решения первого уравнения $x=\frac{\pi}{4}n$ совпадают с решениями второго при $n=2k$ $\left(x=\frac{\pi}{2}k\right)$ и с решениями четвертого при $n=4l\,(x=\pi l)$.

Замечание. Нетрудно заметить, что некоторые решения входят как в первую, так и в третью формулу и можно было продолжать «изъятие» повторяющихся решений. Однако это уже не столь важно, и можно эти «изъятия» не проводить.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}n$, $x=\frac{\pi}{3}n$, $n\in Z$.

Решить уравнения:

7.65. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

7.66. $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

7.67. $\cos 3x=\sin 2x+\cos x$.

7.68. $4\sin^2 x(1+\cos 2x)=1-\cos 2x$.

7.69. $\cos 2x=2\cos x\cos 5x-1$.

7.70. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.

7.71. $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$.

7.72. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

В ряде уравнений целесообразно вначале преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму, а затем после упрощения уравнения вновь преобразовать сумму в произведение.

7.73. Решить уравнение $\sin 7x \cdot \sin 6x = \sin 5x \cdot \sin 8x$.

Решение. Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, получим:

$$\frac{1}{2}(\cos x - \cos 13x) = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 13x) \text{ или } \cos x = \cos 3x.$$

Перенося $\cos 3x$ в левую часть и преобразуя разность косинусов двух углов в произведение, найдем:

$\cos x - \cos 3x = 0$ или $2 \sin x \cdot \sin 2x = 0$,

откуда:

1) $\sin 2x = 0$; $2x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} n$; 2) $\sin x = 0$; $x = \pi n$.

Решения второго уравнения содержатся среди решений первого (при $n = 2k$), поэтому их не выписываем.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} n$, $n \in Z$.

Решить уравнения:

7.74. $\sin 3x \cdot \sin x - \cos 7x \cdot \cos 5x = 0$.

7.75. $\cos 3x \cdot \sin x = \cos 5x \cdot \sin 3x$.

7.76. $\cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 6x$.

7.77. $\sin 5x \cdot \cos 6x + \sin x = \sin 7x \cdot \cos 4x$.

При решении некоторых уравнений полезно вначале понизить степень входящих в них членов, а затем преобразовать сумму тригонометрических функций в произведение.

7.78. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

Решение. Используя формулы понижения степени **(6.34)**, получим

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2}$$

или $\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$. Преобразуем обе части уравнения в произведение: $2 \cos 3x \cos x = 2 \cos 7x \cos x$. Перенося все члены уравнения в одну часть, получим $2\cos x(\cos 3x - \cos 7x) = 0$ или $4\cos x \sin 5x \sin 2x = 0$, откуда:

1) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; 2) $\sin 5x = 0$; $x = \frac{\pi}{5}n$; 3) $\sin 2x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}n$.

Легко видеть, что все решения первого уравнения содержатся среди решений третьего (при $n = 2k+1$, $\frac{\pi}{2}n = \frac{\pi}{2}(2k+1) = \frac{\pi}{2} + \pi k$), поэтому их не выписываем.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n$, $x = \frac{\pi}{5}n$, $n \in Z$.

Решить уравнения:

7.79. $\cos^2 x + \cos^2 3x = 1$. **7.80.** $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

7.81. $\sin^2 2x + \sin^2 3x = \sin^2 4x + \sin^2 5x$.

7.82. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

Иногда при решении тригонометрических уравнений бывает удобным введение вспомогательного угла.

7.83. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Решение. Вынесем в левой части уравнения корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$, получим $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 1$. Заменяя $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ (т. е. вводя вспомогательный угол $\frac{\pi}{3}$), получим $\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2}$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ и по развернутой формуле (7.5') получим:

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Решить уравнения:

7.84. $\sin x + \cos x = 1$. **7.85.** $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

7.86. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos 3x$. **7.87.** $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$.

Одним из способов решения тригонометрических уравнений является метод рационализации, заключающийся в том, что в уравнении $\sin x$ и $\cos x$ заменяют выражениями через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (формулы (6.25), (6.26)):

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

В результате рациональное* уравнение относительно всех входящих в него тригонометрических функций аргумента x сводится к рациональному уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, т. е. уравнению с одним неизвестным. К недостаткам метода рационализации относится возможность получения уравнений высоких степеней относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

7.88. Решить уравнение $3\sin x - 2\cos x = 2$.

Р е ш е н и е. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$3\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-2\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=2,$$ после преобразований это уравнение приводится к виду: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{2}{3}$, откуда $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$ и $x=2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi n$.

При решении уравнения методом рационализации необходимо помнить, что формулы (6.25) и (6.26) справедливы, когда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ имеет смысл, т. е. при $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ или при $x\neq\pi+2\pi n$. Поэтому для того, чтобы не потерять возможные корни уравнения, нужно проверить, являются ли числа $x=\pi+2\pi n$ корнями данного уравнения. Подставляя их в левую часть исходного уравнения $3\sin(\pi+2\pi n)-2\cos(\pi+2\pi n)=-2\cos\pi=2$, убеждаемся, что они также ему удовлетворяют.

---

* Это означает, что тригонометрические функции аргумента x, входящие в уравнение, связаны операциями сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Ответ: $x = 2\ \operatorname{arctg}\ \frac{2}{3} + 2\pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

Решить уравнения:

7.89. $\sin x - \cos x = 1.$

7.90. $\sin x + 7\cos x = 5.$

7.91. $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3.$

7.92. $8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 1 + \frac{1}{\cos x}.$

Достаточно часто приходится сталкиваться с уравнениями, рациональными относительно выражений $\sin x + \cos x$ (или $\sin x - \cos x$) и $\sin x \cdot \cos x$. Такие уравнения рекомендуется решать заменой $\sin x + \cos x = y$ (или $\sin x - \cos x = y$), из которой возведением обеих частей равенства в квадрат находится выражение $\sin x \cdot \cos x$ через y.

7.93. Решить уравнение: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 5.$

Решение. Приводя обе части уравнения к общему знаменателю и при условии $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ освободившись от него, получим $\sin x + \cos x - 5\sin x \cdot \cos x + 1 = 0$. Обозначим $\sin x + \cos x = y$. Возведя в квадрат обе части этого равенства, получим $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = y^2$, или $1 + 2\sin x\cos x = y^2$, откуда $\sin x \times \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$ и уравнение примет вид: $y - 5\frac{y^2-1}{2} + 1 = 0$ или $5y^2 - 2y - 7 = 0$, корни которого равны -1 и $\frac{7}{5}$.

Итак, данное уравнение свелось к совокупности двух уравнений:

1) $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$, решая которое (например, методом введения вспомогательного угла аналогично (7.83) или методом рационализации аналогично (7.88)), получим* $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\ \frac{7}{5\sqrt{2}} + 2\pi n;$

2) $\sin x + \cos x = -1$, решениями которого (любым из указанных способов) будут $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \pi + 2\pi n$. Но эти решения являются посторонними, ибо для первого из них $\cos x = 0$, а для второго $\sin x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\ \frac{7}{5\sqrt{2}} + 2\pi n,\ n \in Z.$

---

* В зависимости от способа решения запись ответа возможна и в другом виде.

З а м е ч а н и е. При решении уравнений указанного типа путем замены $\sin x + \cos x = y$ при найденных значениях y, казалось бы, удобнее находить корни исходного уравнения из уравнения $\sin x \cos x = \dfrac{y^2 - 1}{2}$ или $\sin 2x = y^2 - 1$, но при этом необходимо учитывать, что среди последних возможны посторонние корни, так как уравнению $\sin 2x = y^2 - 1$ удовлетворяют как все корни уравнения $\sin x + \cos x = y$, так и все корни «постороннего» уравнения $\sin x + \cos x = -y$.

Решить уравнения:

7.94. $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

7.95. $5 \sin 2x + \sin x + \cos x = 1$.

7.96. $12 - 12 (\sin x + \cos x) + 5 \sin 2x = 0$.

7.97. $5 (1 - \sin 2x) - 16 (\sin x - \cos x) + 3 = 0$.

При решении ряда тригонометрических уравнений можно выделить тригонометрическую единицу $\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^k$.

7.98. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}$.

Р е ш е н и е. Дополним левую часть уравнения до полного квадрата, т. е. прибавим и вычтем $2 \sin^2 x \cos^2 x$. Тогда:

$$\left[\left(\sin^2 x\right)^2 + \left(\cos^2 x\right)^2 + 2\sin^2 x \cos^2 x\right] - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8} \quad \text{или}$$

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8}.$$

Таким образом, $1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{5}{8}$ и $2\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{3}{8}$. Учитывая, что $\sin^2 2x = \left(2\sin x \cos x\right)^2 = 4\sin^2 x \cos^2 x$, найдем

$$\frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{8} \text{ и } \sin^2 2x = \frac{3}{4}.$$

Это уравнение распадается на два:

1) $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $2x = (-1)^k \dfrac{\pi}{3} + \pi k$ и $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k$;

2) $\sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $2x = (-1)^k \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \pi k$ и $x = (-1)^k \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{\pi}{2}k$.

Объединяя оба решения, получим $x = \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$. (Заметим, что при решении можно было использовать готовую формулу **(7.17)**).

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k,\ k \in Z.$

7.99. Решить уравнение $16(\sin^6 x + \cos^6 x) = 13$.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть уравнения, представив выражение в скобках как сумму кубов:

$$16\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)=13.$$

Выражение в первых скобках равно 1, а во вторых выделим полный квадрат:

$$16\left[\left(\sin^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x\right)-3\sin^2 x\cos^2 x\right]=13.$$

Учитывая, что $\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x$, представим уравнение в виде:

$$16\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-\frac{3}{4}\left(4\sin^2 x\cos^2 x\right)\right]=13$$

или $16\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)=13$, откуда $\sin^2 2x=\frac{1}{4}$, которое решаем аналогично **7.42** или по формуле **(7.17)**.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n \in Z.$

Решить уравнения:

7.100. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x\cos x$.

7.101. $\cos^4 x + \sin^4 x = \cos 4x$.

7.102. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \sin^2 2x = 0$.

7.103. $\cos^6 x + \sin^6 x = 1/4\sin^2 2x$

При решении тригонометрических уравнений часто возникают существенные трудности, связанные с отсевом посторонних корней, появившихся в процессе преобразования уравнений (напомним, что по возможности следует избегать таких преобразований, о чем уже говорилось в начале §7.3).

7.104. Решить уравнение $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}=0$.

Р е ш е н и е. Числитель дроби обращается в нуль при $x = \pi n$. Но необходимо проверить, не обращается ли и знаменатель в нуль при этих значениях неизвестного. Очевидно, что $\sin 3x = \sin(3\pi n) = 0$, т. е. уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

7.105. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

Решение. Преобразуем в произведение сумму тангенсов двух углов: $\frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$. Перенося все члены уравнения в левую часть, найдем

$$\frac{\sin 3x\,(\cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x)}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0.$$

Наиболее простой способ преобразования в произведение выражения в скобках — это представить $\cos 3x$ в следующем виде: $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin x \sin 2x$ (см. задачу 6.76). Замена $\cos 3x$ полученным выражением дает $-\frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0$. Приравнивая каждый сомножитель числителя к нулю, получим:

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$; 2) $\sin 2x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}n$; 3) $\sin 3x = 0$; $x = \frac{\pi}{3}n$.

Из полученных решений надо исключить те, которые обращают в нуль $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ (т.е. при которых не имеют смысла $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{tg} 3x$). Таких посторонних корней нет среди решений первого уравнения ($\cos \pi n \neq 0$, $\cos 2\pi n \neq 0$, $\cos 3\pi n \neq 0$) и третьего ($\cos\frac{\pi n}{3} \neq 0$, $\cos\frac{2\pi n}{3} \neq 0$, $\cos\frac{3\pi n}{3} = \cos \pi n \neq 0$). Для решений второго уравнения $\cos 2x = \cos\frac{2\pi n}{2} = \cos \pi n \neq 0$, а $\cos x \neq 0$ и $\cos 3x \neq 0$ только при четном $n = 2k$ $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2k\right) = \cos \pi k \neq 0,\quad \cos 3\pi k \neq 0\right)$ и $\cos x = 0$, $\cos 3x = 0$ при нечетном $n = 2k + 1$ $\left(\cos\left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right] = \right.$ $\left. = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right) = 0\right)$.

Таким образом, из решений второго уравнения надо отбросить посторонние корни, полученные при нечетном n и оставить корни при четном n, т.е. $x = \pi k$. Но числа $x = \pi k$ совпадают с решениями первого уравнения и, как нетрудно заметить, могут быть получены из решений третьего уравнения при $n = 3k$ ($x = \pi k$). Поэтому их не выписываем.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{3}$.

7.106. Решить уравнение $\sin x+\cos x=\sqrt{1-2\sin^2 x}$.

Решение. Возведя в квадрат обе части уравнения, получим $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1-2\sin^2 x$ или, учитывая, что $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sin x(\sin x+\cos x)=0$, откуда:

1) $\sin x=0$; $x=\pi n$; 2) $\sin x+\cos x=0$; $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$.

При возведении обеих частей уравнения в квадрат, могут появиться посторонние решения, поэтому полученные корни надо проверить подстановкой в исходное уравнение. При $x=\pi n$ правая часть уравнения $\sqrt{1-2\sin^2\pi n}=\sqrt{1-2\cdot 0}=1$, а левая часть $\sin\pi n+\cos\pi n=1$, если n — четное, и -1, если n — нечетное.

Таким образом, равенство обеих частей уравнения при $x=\pi n$ достигается только для четных $n=2k$ или для $x=2\pi k$. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что корни $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$ удовлетворяют уравнению.

Ответ: $x=2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

7.107. Решить уравнение $\cos x\cos 2x\cos 4x=0{,}125$.

Решение. Наиболее быстрый способ решения — умножение обеих частей уравнения на $8\sin x$, хотя при этом следует учесть, что могут появиться посторонние корни, при которых $\sin x=0$.

После умножения на $8\sin x$ уравнение примет вид

$$8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=\sin x.$$

Последовательно трижды применив формулу синуса двойного угла (6.15), получим сначала $4\sin 2x\cos 2x\cos 4x=\sin x$, затем $2\sin 4x\cos 4x=\sin x$ и далее $\sin 8x=\sin x$ или $\sin 8x-\sin x=0$. Преобразуя разность синусов по формуле (6.28), получим $\sin\dfrac{7x}{2}\cdot\cos\dfrac{9x}{2}=0$, откуда:

а) $\sin\dfrac{7x}{2}=0$, $\dfrac{7x}{2}=\pi n$, $x=\dfrac{2}{7}\pi n$;

б) $\cos\dfrac{9x}{2}=0$, $\dfrac{9x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2}{9}\pi n$.

Изобразим полученные решения $x=\dfrac{2}{7}\pi n$ и $x=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2}{9}\pi n$ на тригонометрическом круге (см. соответственно рис. 7.1 и 7.2):

Из этих решений, полученных соответственно при $n=7k$, $7k+1$, $7k+2$, ..., $7k+6$ и $n=9k$, $9k+1$, $9k+2$, ..., $9k+8$, необходимо исключить такие, при которых $\sin x = 0$, т. е. значения x, лежащие на горизонтальном диаметре: $x = \frac{2}{7}\pi n$ при $n = 7k$ и $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9}\pi n$ при $n = 9k + 4$ (см. рис. 7.1 и 7.2).

Ответ: $\frac{2}{7}\pi n,\ n \neq 7k;\ \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9}\pi n,\ n \neq 9k + 4;\ n, k \in Z.$

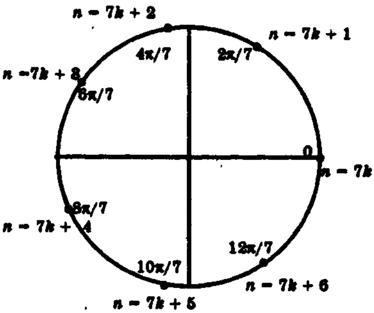


Рис. 7.1

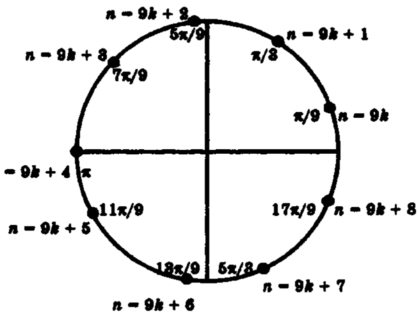


Рис. 7.2

В некоторых уравнениях к успеху могут привести нестандартные методы решения.

7.108. Решить уравнение $\sin\frac{x}{2} \cdot \cos 2x = 1.$

Решение. Поскольку $\left|\sin\frac{x}{2}\right| \leq 1$, $|\cos 2x| \leq 1$, произведение $\sin\frac{x}{2} \cdot \cos 2x$ может равняться единице лишь при выполнении одной из двух систем уравнений:

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} = 1, \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin\frac{x}{2} = -1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$$

Решая первую систему, найдем из первого уравнения $x = \pi + 4\pi n$ и из второго уравнения $x = \pi n$. Очевидно, решения первого уравнения входят в решение второго при $n = 4k + 1$, т. е. являются решениями системы. Решая вторую систему, убедимся в том, что она несовместна: решения первого уравнения $x = -\pi + 4\pi n$ и второго $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ не имеют общих корней.

Ответ: $x = \pi + 4\pi n,\ n \in Z.$

Решить уравнения:

7.109. $\frac{2\cos x}{1+\cos 2x}=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$. **7.110.** $\frac{\sin 3x\cos x}{\cos 3x}=0$.

7.111. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x$.

7.112. $1+\operatorname{tg} x=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$. **7.113.** $\sin^9 x+\cos^9 x=1$.

7.114. $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1}-(\sin x)^{-1}=(\sin 2x)^{-1}$.

7.4. Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

7.115. $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2(x+40^\circ)=\operatorname{ctg}(50^\circ-x)$. **7.116.** $2\sin^2 x=2+5\cos x$.

7.117. $\sin x+\cos 2x=2$. **7.118.** $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x=3$.

7.119. $\sqrt{3}\sin^2 x-4\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$.

7.120. $\sin x+\cos x=1+2\sin x\cos x$.

7.121. $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$.

7.122. $\cos x-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}=1$.

7.123. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{1}{2}$.

7.124. $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$.

7.125. $2\cos 2x=\sqrt{6}(\cos x-\sin x)$.

7.126. $\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x=1+\cos 2x+\cos 4x$.

7.127. $2-\operatorname{tg} 2x=\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$. **7.128.** $\cos x-\sin x=1-\sin 2x$.

7.129. $1-\sin x=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. **7.130.** $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=8\sin 2x$.

7.131. $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x$. **7.132.** $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\cos x+\sin x$.

7.133. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2x=2$. **7.134.** $\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}=0$.

7.135. $\operatorname{tg}(\pi+2x)-\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)=2\operatorname{tg}2x$. **7.136.** $\operatorname{tg}2x=\sin 4x$.

7.137. $3-3\sin^4 x-5\cos^4 x=0$.

7.138. $4\sin 2x\sin 4x\sin 6x=\sin 4x$.

7.139. $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\frac{x}{2}$.

7.140. $2\cos 3x\cos 4x+2\sin 2x\sin 5x=\cos 2x+\cos 4x$.

7.141. $9\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=7-\frac{2}{\cos x}$. **7.142.** $\cos^2 2x-\cos^2 3x=1$.

7.143. $\cos x+\cos\frac{x}{2}=2\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

7.144. $\sin 11x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x+\frac{1}{2}\cos 7x=0$.

7.145. $1+\cos x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. **7.146.** $\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}$.

7.147. $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x$. **7.148.** $\sin x+\cos x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

7.149. $\sin^2 2x+\sin^2 x=\frac{3}{2}$. **7.150.** $\sin 2x+\cos 2x=\sin x+\cos x$.

7.151. $\sin x+\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}-\cos x$.

7.152. $8\sin^6 x+3\cos 2x+2\cos 4x+1=0$.

7.153. $\operatorname{tg}5x\cdot\operatorname{tg}3x=1$. **7.154.** $4\cos^2 2x+8\cos^2 x=7$.

7.155. $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}=16\operatorname{ctg}x$.

7.156. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+6\sin 2x=7$.

7.157. $\sin x-\cos x+\sin 2x=-1$. **7.158.** $\sin 2x=4\sin^2\frac{x}{2}-2\sin x$.

7.159. $\operatorname{ctg}^2 x\sin^2 3x-\cos^2 3x=4\cos^2 x$.

7.160. $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9}{8}$.

7.161. $\dfrac{\sin x+\sin 4x+\sin 7x}{\cos x+\cos 4x+\cos 7x}=\operatorname{tg}\,2x$.

7.162. $4\left(\sin^3 x-\cos^3 x\right)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}$.

7.163. $\sin 3x\cos^3 x+\cos 3x\sin^3 x=\dfrac{3}{4}$.

7.164. $8\sin x\cos 3x\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=1$.

7.165. $\operatorname{tg}\,7x+\operatorname{tg}\,3x=0$. **7.166.** $(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5$.

7.167. $\left(\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x\right)\sin 3x=2$.

7.168. $2\operatorname{tg}^2 x+\cos 2x+5\left(\cos x+\cos^{-1}x\right)+4=0$.

7.5. Тригонометрические неравенства

Для овладения навыками решения тригонометрических неравенств прежде всего надо научиться решать простейшие неравенства вида $a_1<\sin x<a_2$, $b_1<\cos x<b_2$, $c_1<\operatorname{tg}\,x<c_2$, $d_1<$ $<\operatorname{ctg}\,x<d_2$, где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 — заданные числа. Для решения этих неравенств удобно использовать тригонометрический круг.

7.169. Решить неравенство: *а*) $\sin x>\dfrac{1}{2}$; б) $\sin x<\dfrac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Так как в тригонометрическом круге $\sin\alpha$ есть ордината конца подвижного радиуса, отложим на оси ординат отрезок, равный $\dfrac{1}{2}$, и проведем через точку K отрезок $MN\parallel OX$ (рис.7.3).

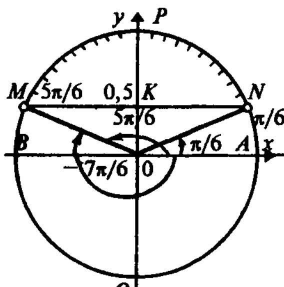


Рис. 7.3

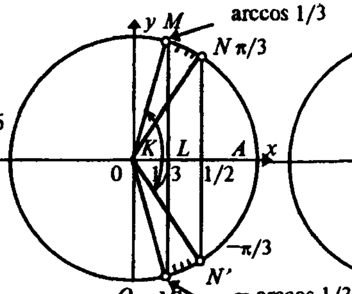


Рис. 7.4

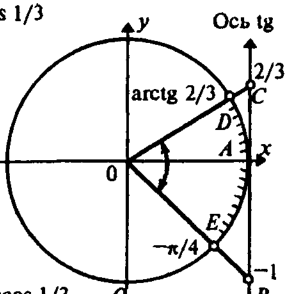


Рис. 7.5

Получим, что $\angle NOA = \frac{\pi}{6}$, а $\angle MOA = \frac{5\pi}{6}$, ибо их синусы равны $\frac{1}{2}$. Очевидно, что неравенству $\sin x > \frac{1}{2}$ соответствуют все точки дуги $\overset{\frown}{MPN}$ (отмечены на рис. 7.3 штриховкой), т.е. заключены от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$. С учетом периода функции sin x, равного 2π, ответ запишется в виде интервала $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Решениями неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$ будут все точки дуги $\overset{\frown}{MQN}$. Если полагать, что угол с конечной стороной OM равен $\frac{5\pi}{6}$, то точки дуги $\overset{\frown}{MQN}$ будут описаны интервалом $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{13\pi}{6}+2\pi n\right)$, так как, если двигаться по дуге $\overset{\frown}{MQN}$ в положительном направлении (против часовой стрелки), то угол с конечной стороной ON будет равен $2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$. Запись ответа несколько упростится, если считать угол с конечной стороной OM равным $-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$. Тогда "охвату" точек дуги $\overset{\frown}{MQN}$ будет соответствовать интервал $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Ответ: а) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$; б) $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in Z$

7.170. Решить неравенство $\frac{1}{3} < \cos x < \frac{1}{2}$.

Решение. Так как в тригонометрическом круге $\cos\alpha$ есть абсцисса конца подвижного радиуса, отложим на оси OX отрезки, равные $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$, и проведем через точки K и L $MM' \parallel OX$, $NN' \parallel OX$ (см. рис. 7.4).

Получим, что $\angle MOA = \arccos\frac{1}{3}$, $\angle M'OA = -\arccos\frac{1}{3}$, $\angle NOA = \frac{\pi}{6}$, $\angle N'OA = -\frac{\pi}{6}$. Очевидно, решениями неравенства будут все точки дуг MN и $M'N'$, т. е. (с учетом периода функции $\cos x$, равного 2π) интервалы соответственно

$$\left(-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) \text{ и } \left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right).$$

Ответ:

$$\left(-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right),\ n \in Z.$$

7.171. Решить неравенство $-1 < \operatorname{tg} x < \frac{2}{3}$.

Решение. Так как в тригонометрическом круге $\operatorname{tg}\alpha$ есть ордината точки пересечения продолжения подвижного радиуса с осью тангенсов, то отложим на оси тангенсов отрезки, равные -1 и $\frac{2}{3}$, и полученные точки B и C соединим с центром круга (см. рис. 7.5). Получим, что $\angle AOB = -\frac{\pi}{4}$, $\angle COA = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, ибо их тангенсы соответственно равны -1 и $\frac{2}{3}$. Очевидно, решениями данного неравенства будут все точки дуги $\overset{\frown}{DAE}$. С учетом периода функции $\operatorname{tg} x$, равного π, решения неравенства примут вид интервала $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n\right),\ n \in Z$.

Неравенства, не являющиеся простейшими, с помощью тождественных преобразований нужно свести к одному или системе простейших неравенств.

7.172. Решить неравенство $\cos^3 x\sin 3x + \sin^3 x\cos 3x < \frac{3}{8}$.

Р е ш е н и е. Упрощая левую часть неравенства (рекомендуем это сделать самостоятельно), получим равносильное неравенство $\sin 4x < \frac{1}{2}$, которое решаем аналогично **7.169.**

Ответ: $\left(-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

Решить неравенства:

7.173. $\cos 3x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; **7.174.** $-\frac{1}{4} < \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

7.175. $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < 2$; **7.176.** $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x$;

7.177. $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + 1 > 0$; **7.178.** $\operatorname{tg} x > \cos x$.

8. ПРОГРЕССИИ. СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

8.1. Задачи на арифметическую прогрессию

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad (8.1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n, \qquad (8.2)$$

$$S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}, \qquad (8.3)$$

где a_1, a_n — соответственно 1-й и n-й члены арифметической прогрессии;
d - разность арифметической прогрессии;
S_n - сумма n членов арифметической прогрессии.

8.1. Найти сумму всех трехзначных чисел, кратных пяти.

Решение. Трехзначные числа 100, 105, 110, ..., 990, 995 образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 100$, $d = = 5$, $a_n = 995$. Используя формулу общего члена (8.1) $995 = 100 + 5(n-1)$, найдем $n = = 180$. Теперь по формуле суммы n членов прогрессии (8.2) найдем:

$$S_{180} = \frac{100 + 995}{2} \cdot 180 = 98550.$$

Ответ: 98550

8.2. В амфитеатре расположены 10 рядов, причем в каждом следующем ряду на 20 мест больше, чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько человек вмещает амфитеатр?

8.3. Велосипедист выехал из пункта А в пункт В. В первый час он проехал 8 км, а в каждый следующий час на 1 км больше, чем в предыдущий. Сколько часов он был в пути, если расстояние АВ равно 38 км?

8.4. Третий член арифметической прогрессии равен 10, а восьмой 30. Сколько нужно взять членов, чтобы их сумма равнялась 242?

8.5. Найти сумму 75 членов последовательности с общим членом $a_n = 3n - 19$.

8.6. Общий член последовательности определяется формулой $a_n = 13 - 1{,}5n$. Доказать, что это арифметическая прогрессия, и определить сумму первых ее 10 членов.

8.7. Определить глубину колодца, если за его рытье уплачено 238 тыс. руб., причем за каждый метр глубины платили на 2 тыс. рублей больше, чем за предыдущий, а за работу на последнем метре заплатили 30 тыс. руб.

8.2. Задачи на геометрическую прогрессию и бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad (8.4) \qquad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \qquad (8.5)$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \qquad (8.6) \qquad S = \frac{b_1}{1 - q} \; (|q| < 1), \qquad (8.7)$$

где b_1, b_n — соответственно 1-й и n-й члены геометрической прогрессии;

q — знаменатель геометрической прогрессии;

S_n — сумма n членов прогрессии;

S — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

8.8. Сумма второго и четвертого членов возрастающей геометрической прогрессии равна 30, а их произведение 114. Найти сумму девяти членов этой прогрессии.

Решение. По условию имеем систему уравнений $\begin{cases} b_2 + b_4 = 30, \\ b_2 \cdot b_4 = 144, \end{cases}$ решая которую, получим $b_2 = 6$, $b_4 = 24$ (второе решение $b_2 = 24$, $b_4 = 6$ не годится, так как по условию прогрессия возрастающая: $q > 1$). По формуле общего члена **(8.4)** $b_2 = b_1 q$ и $b_4 = b_1 q^3$, т.е. $b_4/b_2 = 24/6 = 4$, откуда $q = 2$ (второй корень $q = -2$ не подходит, так как $q > 1$). Тогда $b_1 = \dfrac{6}{2} = 3$ и по формуле суммы членов геометрической прогрессии **(8.6)** $S_9 = \dfrac{3(2-1)}{2-1} = 1533$.

Ответ: 1533.

8.9. Разность между вторым и первым членами геометрической прогрессии равна 18, а разность между четвертым и третьим 162. Составить прогрессию.

8.10. Между числами 243 и 1 поместить четыре числа, которые вместе с данными числами образовали бы геометрическую прогрессию.

8.11. Геометрическая прогрессия состоит из 6 членов. Найти ее знаменатель, зная, что сумма трех первых членов в 8 раз меньше суммы трех последних членов.

8.12. Найти четыре числа, составляющие убывающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма ее крайних членов равна $11\dfrac{2}{3}$, а сумма средних 10.

8.13. Определить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что сумма ее первого и четвертого членов равна 54, а сумма второго и третьего 36.

8.14. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов членов той же прогрессии 40,5. Найти прогрессию.

8.15. Расстояние между автомобилем и пешеходом 1 км. Скорость автомобиля в 10 раз больше скорости пешехода. Какой путь должен пройти автомобиль, чтобы догнать пешехода, если они движутся равномерно?

8.16. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов ее членов.

8.3. Смешанные задачи на прогрессии

8.17. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найти неизвестное число.

8.18. Арифметическая и возрастающая геометрическая прогрессии имеют первые члены, равные 2, и равные третьи члены. Второй член арифметической прогрессии на 4 больше второго члена геометрической прогрессии. Найти эти прогрессии.

8.19. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 2; 3; 9, то новые числа образуют геометрическую прогрессию. Найти данные числа.

8.20. В геометрической прогрессии второй член равен 8, а пятый 512. Составить арифметическую прогрессию, у которой разность в два раза меньше знаменателя геометрической прогрессии, а суммы трех первых членов в одной и другой прогрессиях были бы равны.

8.21. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 42; те же числа составляют первый, второй и шестой члены возрастающей арифметической прогрессии. Найти эти числа.

8.22. Найти натуральное число n из уравнения:

$$2^2\cdot 2^5\cdot 2^8\ldots 2^{3n-1}=32^8.$$

Решение. Используя свойства степеней и учитывая, что $32=2^5$, получаем:

$$2^{2+5+8+\ldots+3n-1}=2^{40}.$$

Слева в показателе — сумма n членов арифметической прогрессии, ее первый член $a_1=2$, разность $d=3$. Используя формулу суммы n членов арифметической прогрессии (8.2) и приравнивая показатели, получаем: $\frac{2+(3n-1)}{2}n=40$, откуда получаем квадратное уравнение для n: $3n^2+n-80=0$. Корни этого уравнения: $n_1=-\frac{32}{6}<0$ (не подходит по условию); $n_2=5$.

Ответ: $\{5\}$.

8.23. Решить уравнение: $\frac{1}{x}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2}$, где $|x|<1$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$. Приведем уравнение к общему знаменателю: $1+x^2+x^3+\ldots+x^{n+1}+\ldots=\frac{7}{2}x$. Если к обеим частям уравнения прибавить x, то слева получим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=x$, где $|x|<1$:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2}x+x.$$

Используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии (8.7) преобразуем левую часть уравнения: $\frac{1}{1-x}=\frac{9}{2}x$. Преобразования приводят к квадратному уравнению $9x^2-9x+2=0$. Корни этого уравнения: $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$. Оба корня входят в ОДЗ и удовлетворяют условию: $|x|<1$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right\}$.

Решить уравнения:

8.24. $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{7}{4}$, где $|x|<1$.

8.25. $3^2\cdot 3^5\ldots 3^{3n-1}=\sqrt[3]{27^2}$, где n — натуральное число.

8.26. $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\ldots 5^{2x}=0{,}04^{-28}$, где x — натуральное число.

8.4. Соединения

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

Размещения из n элементов по m — комбинации из n различных элементов по m, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком. Число размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Перестановки из n элементов — комбинации из n различных элементов, отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Число перестановок

$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3\ldots(n-2)(n-1)n$. Из определения следует, что $P_n = A_n^n = n!$.

Сочетания из n элементов по m — комбинации из n различных элементов по m, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Число их $C_n^m = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}$, или

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Свойство числа сочетаний: $C_n^m = C_n^{n-m}$. По определению $C_n^0 = 1$.

8.27. Сколькими способами можно выбрать четыре человека на четыре различные должности из девяти кандидатов на эти должности?

Решение. В задаче следует вычислить число размещений из 9 по 4, так как должности различны, т.е. $A_9^4 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$.

Ответ: 3024.

8.28. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различны и нечетны?

Решение. Нечетных цифр всего пять: 1, 3, 5, 7, 9. Двузначные числа, составленные из них, могут отличаться как порядком, так и составом образующих их цифр. Следовательно, надо вычислить число размещений из 5 по 2, т.е. $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

8.29. Сколько различных трехзначных чисел можно записать при помощи цифр 3 и 5?

Решение. Каждую из трех цифр трехзначного числа можно записать двумя способами (цифрой 3 или 5), общее число способов определится произведением $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Ответ: 8.

8.30. Сколько всего семизначных номеров можно составить из 10 различных цифр, в каждом из которых ни одна из цифр не повторяется?

8.31. Номер автомобиля состоит из двух букв, за которыми следует трехзначное число. Сколько существует различных автомобильных номеров, в которых цифры и буквы не повторяются?

8.32. Буквы азбуки Морзе состоят из символов: точка и тире. Сколько букв получим, если потребуем, чтобы каждая буква состояла из пяти символов?

8.33. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, если никакая цифра не повторяется в числе более одного раза?

8.34. В распоряжении корабля имеются четыре различных сигнальных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий из двух различных флагов. Сколько сигналов можно поднять на флагштоке?

8.35. При приготовлении пиццы (пицца — национальное итальянское блюдо) к сыру добавляют различные компоненты, обеспечивающие тот или иной вкус пиццы. В распоряжении повара имеются: перец, лук, сосиски, грибы и анчоусы, причем все это можно добавлять к сыру при приготовлении пиццы. Сколько типов пиццы можно приготовить из этих продуктов (компонент), если они не повторяются?

8.36. Каждый телефонный номер состоит из семи цифр. Сколько всего различных телефонных номеров можно составить из цифр 2, 3, 5, 7?

8.37. Сколько различных шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 6, 7, 9, если в каждом таком числе ни одна цифра не повторяется?

Решение. Необходимым и достаточным условием четности натурального числа является делимость на 2 цифры единиц этого числа. Поэтому цифрой единиц искомых чисел может быть только 6. Остальные пять цифр могут стоять в любом порядке на оставшихся пяти местах. Следовательно, задача сводится к нахождению числа перестановок из пяти различных чисел, т.е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120.

8.38. Сколько различных узоров елочных гирлянд можно составить из двух зеленых и четырех красных лампочек?

Решение. Если бы все лампочки были разного цвета, то решение задачи сводилось бы к вычислению числа перестановок из 6 элементов (лампочек), т.е. $P_6 = 6!$ Однако фактическое число разных гирлянд уменьшится из-за того, что перестановки одинаковых зеленых ламп (это можно сделать 2! способами) и красных ламп (4! способами) не дадут нового узора, т.е. общее число узоров уменьшится в 2!·4! раз или будет равно $\frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$.

Задачу можно обобщить на случай числа комбинаций из n элементов, отличающихся только порядком элементов, среди которых n_1 элементов первого вида, n_2 — второго, ..., n_k — элементов k-го вида.

Число этих комбинаций $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

В данной задаче $n_1 = 2$, $n_2 = 4$.

Ответ: 15.

8.39. Скольким разными способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

8.40. Сколькими способами можно разложить 8 различных писем по 8 различным конвертам, если в каждый конверт кладется одно письмо?

8.41. Сколько различных слов можно образовать из букв слова "гипербола", если все такие слова должны состоять из 9 букв и ни одна буква не должна повторяться? (Напомним, что словом называется любой набор букв, причем смысловое содержание слова в данной задаче значения не имеет).

8.42. Число перестановок из n букв относится к числу перестановок из $(n + 2)$ букв, как 0,1 : 3. Найти n.

8.43. Сколькими способами можно упаковать 9 различных книг в трех бандеролях соответственно по две, три, четыре книги в каждой бандероли так, чтобы литературное содержание бандероли для каждого способа упаковки различалось?

8.44. Сколькими различными способами можно распределить 7 молодых специалистов одной специальности по трем цехам, которым соответственно нужны 1, 2 и 4 специалиста (личность специалиста во внимание не принимается)?

8.45. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 16 команд, причем любые две команды по положению играют между собой один матч. Сколько календарных игр в таком турнире?

Решение. Решению удовлетворяют все такие комбинации из 16 по 2, которые различаются между собой хотя бы одним элементом, т.е. в задаче надо найти число сочетаний из 16 по 2:

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = 120.$$

Ответ: 120.

8.46. Из двух математиков и десяти экономистов необходимо составить комиссию в составе 8 человек. Сколькими различными способами может быть составлена комиссия, если в нее должен входить один математик?

Решение. Выбор одного математика из двух возможен $C_2^1 = 2$ способами, а семи экономистов из десяти $C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$ способами. Поэтому комиссия может быть составлена $C_2^1 \cdot C_{10}^3 = 2 \cdot 120 = 240$ способами.

Ответ: 240.

8.47. Сколькими способами читатель может выбрать 4 книги из шести книг разных авторов?

8.48. В городки играют 12 человек. Сколькими способами можно набрать команду из 4 человек (личность играющего во внимание не принимается)?

8.49. У студентки есть 7 разных книг по физике, а у ее друга — 9 разных книг по математике. Студентка отдает любые 5 книг по физике и берет любые 5 книг по математике. Сколькими разными способами они могут обменяться книгами между собой?

8.50. Сколько существует делителей числа 210?

8.51. Подрядчику нужна бригада из 4 плотников, а к нему обратилось с предложением своих услуг 10 плотников. Сколькими способами может подрядчик составить такую бригаду?

8.52. В кондитерской имеются 5 разных сортов пирожных. Сколько разных наборов можно составить из 4 пирожных разных сортов?

8.53. Сколькими способами можно составить комиссию в составе 3 человек, выбирая их из четырех супружеских пар, если в комиссию не могут входить члены одной семьи?

8.5. Бином Ньютона

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

Формула бинома Ньютона

$(x+a)^n = C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + \ldots + C_n^m a^m x^{n-m} + \ldots + C_n^n a^n x^0$,

или $(x+a)^n = x^n + n x^{n-1} a + \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2} a^2 + \ldots + n a^{n-1} x + a^n$,

где n — натуральное число.

Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, т.е.

$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m + \ldots + C_n^n = 2^n$;

$T_{m+1} = C_n^m a^m x^{n-m}$ — $(m+1)$-й член разложения бинома Ньютона.

8.54. Вычислить сумму:

$$C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5.$$

Решение. Согласно формуле бинома Ньютона при $x = 1$ и $n = 5$ имеем:

$$(1+2)^5 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5 = 3^5 = 243.$$

Ответ: 243.

8.55. Найти 13-й член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\right)^{15}$.

Решение. Согласно формуле общего члена разложения бинома имеем:

$$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^{12} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3\cdot 2^6 = 87360.$$

Ответ: 87360.

8.56. Найти номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x.

Решение. Для общего члена разложения данного бинома имеем

$T_{m+1} = C_{16}^m\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-m}\left(\dfrac{1}{x}\right)^m = C_{16}^m x^{\frac{16-4m}{3}}$, причем по условию задачи $\dfrac{16-4m}{3} = 0$, так как член разложения бинома не содержит x. Решая последнее уравнение, находим, что $m = 4$.

Ответ: 5-й член.

8.57. Найти 5-й член разложения бинома $\left(\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$, если отношение биномиального коэффициента 4-го члена к биномиальному коэффициенту 3-го члена равно $\dfrac{10}{3}$.

Решение. Согласно формуле общего члена разложения бинома

$$T_4 = T_{3+1} = C_n^3\left(\sqrt{a}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^3,$$

$$T_3 = T_{2+1} = C_n^2\left(\sqrt{a}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^2,$$

причем по условию задачи $\dfrac{C_n^3}{C_n^2} = \dfrac{10}{3}$. Подставляя в это уравнение выражения для C_n^3 и C_n^2 (см. 3.4), найдем искомое n, т.е.

$$3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3} = 10\frac{n(n-1)}{1\cdot2},\ n-2 = 10 \text{ или } n = 12.$$

Ответ: $n = 12$.

8.58. Коэффициенты 5-го, 6-го и 7-го членов разложения $(1 + x)^n$ составляют арифметическую прогрессию. Найти n.

8.59. Найти биномиальный коэффициент 7-го члена разложения бинома, если биномиальный коэффициент 3-го члена этого бинома равен 36.

8.60. Сколько членов разложения бинома $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7}\right)^{36}$ являются целыми числами?

8.61. Сколько слагаемых входит в выражение для $(a + x)^{100}$? Выпишите три первых члена этого разложения.

8.62. В выражении для $(a + x)^{100}$ выпишите 60-й член разложения, 15-й член разложения. Какой член разложения содержит x^{80}?

8.63. Используя формулу бинома Ньютона (ограничившись двумя первыми членами разложения), вычислите приближенно: а) $1{,}002^{10}$; б) $0{,}997^5$.

8.6. Задачи для самостоятельного решения

8.64. Диаметры 5 шкивов, насаженных на общий вал, образуют арифметическую прогрессию, крайние члены которой равны 110 и 206 мм. Найти диаметры промежуточных шкивов.

8.65. Лестница, ведущая на веранду, имеет 8 ступенек. Первая ступень — бетонная плита высотой 10 см; высота каждой из остальных ступенек 15 см. Найти высоту 2-й, 3-й и 4-й ступенек над землей. На какой высоте над землей находится пол веранды?

8.66. Первый член геометрической прогрессии, все члены которой положительные числа, равен 1, а последний ее член 16. Определить число членов этой прогрессии, если ее сумма на 29 больше знаменателя прогрессии.

8.67. Сумма первых 3 членов геометрической прогрессии, все члены которой — положительные числа, равна 21. Третий член прогрессии больше первого на 9. Сколько членов этой прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 189?

8.68. Для поливки 20 деревьев, расположенных по прямой линии на расстоянии 2 м друг от друга, садовник приносит воду для каждого отдельного дерева из колодца, находящегося на той же прямой линии в 10 м от первого дерева. Сколько всего метров пройдет садовник, чтобы полить все деревья и возвратиться к колодцу?

8.69. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а в каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 метров?

8.70. Стоимости четырех марок, наклеенных на четыре бандероли, составляют арифметическую прогрессию, причем самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой. Определить эти стоимости, если в сумме они составляют 2800 тыс. руб.

8.71. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по единице, а к третьему члену прибавить единицу, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

8.72. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то получим снова геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

8.73. Из 10 различных красок нужно составить рисунок, чтобы в него входило не менее 2 цветов. Сколько таких рисунков можно составить?

8.74. Сколькими способами можно выбрать 3 подарка из 8 различных предметов?

8.75. В предвыборной борьбе за две одинаковые должности выступают 4 кандидата. Каждый избиратель может занести в свой бюллетень двух кандидатов. Сколькими способами избиратель может заполнить свой бюллетень?

8.76. Сколькими способами из 6 супружеских пар можно отобрать 5 человек, если: а) в число отобранных должны входить трое мужчин и две женщины; б) члены одной семьи не должны входить в это число?

8.77. Сколькими разными способами можно отобрать 4 книги из 5 одинаковых учебников по физике и 4 одинаковых по химии?

8.78. Решить уравнения: а) $2 + 5 + 8 + \dots + x = 155$;

б) $1 - 5 - 11 - \dots - x = -207$;

в) $x - 1 + x - 3 + x - 5 + \dots + x - 27 = 70$.

8.79. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию:

а) $C_n^{n-2} + 2n = 9$; б) $3\,C_{n+1}^2 - 2\,A_n^2 = n$.

8.80. Найти 51-й член последовательности:

2, 4, 9, 17, 28, 42, 59, 79, 102, ...

8.81. Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, содержащихся между целыми числами 5 и 100.

8.82. В соревнованиях по стрельбе за каждый промах из 50 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — два штрафных очка, а за каждый последующий — на одно очко больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 35 штрафных очков?

8.83. Из заданных четырех чисел первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию, причем сумма крайних членов равна 42, а сумма средних членов равна 36. Найти эти числа.

8.84. Найти трехзначное число, если его цифры составляют геометрическую прогрессию. Если из неизвестного числа вычесть 297, то получится число, написанное теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке. Если к цифрам данного числа прибавить соответственно 8, 5 и 1, то полученные числа составят арифметическую прогрессию.

9. ПЛАНИМЕТРИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Треугольник

Рассматривается треугольник ABC, стороны которого $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ лежат против соответствующих углов: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

2. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану на части в отношении 2 : 1, считая от вершины.

3. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

4. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.

5. Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис треугольника.

6. Центр описанной окружности лежит в точке пересечения перпендикуляров к серединам сторон треугольника.

7. (**Теорема синусов**). Для произвольного треугольника справедливы соотношения: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R,$ **(9.1)**

где R — радиус описанной окружности.

8. (**Теорема косинусов**). $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ **(9.2)**

(аналогичные соотношения справедливы для b^2 и c^2).

9. **Площадь треугольника**: $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c,$ **(9.3)**

где h_a — высота, опущенная на сторону a, h_b — высота на сторону b, h_c — высота на сторону c;

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \qquad \textbf{(9.4)}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (9.5)$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр;

$$S=pr, \text{ где } r \text{ — радиус вписанной окружности}; \qquad (9.6)$$

$$S=\frac{abc}{4R}, \text{ где } R \text{ — радиус описанной окружности}. \qquad (9.7)$$

10. Признаки равенства треугольников. Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

1) две стороны и угол между ними;

2) сторона и два прилежащих к ней угла;

3) три стороны.

11. Признаки подобия треугольников. Два треугольника подобны, если:

1) два угла одного треугольника равны двум углам другого;

2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы между сторонами равны;

3) три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого.

12. Прямоугольный треугольник ABC, a, b — катеты, c — гипотенуза, $\angle C=90^\circ$.

1. $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$ **(9.8)**; $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$ **(9.9)**; $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b}$ **(9.10)**;

$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{b}{a}$ **(9.11)**.

2. **Теорема Пифагора**: $a^2+b^2=c^2$.

13. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы, $R=\dfrac{1}{2}c$. **(9.12)**.

14. (Свойство высоты, опущенной из прямого угла на гипотенузу). Пусть h_c — высота, опущенная на гипотенузу c из вершины прямого угла, c_1 и c_2 — отрезки, на которые она делит гипотенузу (c_1 прилегает к катету a, c_2 — к катету b). Тогда:

$$h_c^2=c_1c_2 \qquad (9.13),$$

$$a^2=c_1c \qquad (9.14),$$

$$b^2=c_2c \qquad (9.15).$$

Окружность и круг

15. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

16. Длины отрезков касательных из одной точки к данной окружности равны.

17. Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.

18. Если через точку M, взятую внутри круга, проведены две хорды AB и CD, то произведения отрезков хорд равны:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD. \qquad (9.16)$$

Эта же формула справедлива, если CD — диаметр.

19. Если из точки M, взятой вне круга, проведены касательная MA (A — точка касания) и секущая MBC (MB — внешняя часть, BC — внутренняя часть), то

$$MA^2 = MC \cdot MB. \qquad (9.17)$$

20. Центральный угол, образованный двумя радиусами, измеряется дугой, на которую он опирается.

21. Вписанный угол (образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности) измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

22. Угол, образованный двумя касательными, исходящими из одной точки, измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между точками касания.

23. Угол между двумя хордами измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, а другая — между их продолжениями.

24. Угол между двумя секущими измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами.

25. Угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключенной внутри него.

26. Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между сторонами угла.

27. Длина окружности:

$$C = 2\pi R = \pi D, \qquad (9.18)$$

где D — диаметр.

28. Площадь круга:

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}. \qquad (9.19)$$

Четырехугольники

29. Квадрат со стороной a.

1) диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, делятся в точке пересечения пополам и являются биссектрисами его углов;

2) площадь квадрата $S = a^2$; **(9.20)**

$$S = \frac{1}{2}d^2, \text{ где } d \text{ — длина диагонали.} \quad \textbf{(9.21)}$$

30. Ромб со стороной a.

1) диагонали в ромбе взаимно перпендикулярны, делятся в точке пересечения пополам и являются биссектрисами его углов;

2) площадь ромба $S = ah$, **(9.22)**

где h — высота ромба,

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2, \text{ где } d_1,\ d_2 \text{ — длины диагоналей.} \quad \textbf{(9.23)}$$

31. Прямоугольник со сторонами a и b.

1) диагонали прямоугольника равны и делятся в точке пересечения пополам;

2) длощадь прямоугольника $S = ab$, **(9.24)**

$$S = \frac{1}{2}d^2 \sin\gamma, \text{ где } \gamma \text{ — угол между диагоналями.} \quad \textbf{(9.25)}$$

32. Параллелограмм со сторонами a и b и острым углом α:

1) диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам;

2) площадь параллелограмма $S = ah_a = bh_b$, **(9.26)**

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma, \quad \textbf{(9.27)}$$

где d_1, d_2 — диагонали, γ — угол между ними;

$$S = ab\sin\alpha; \quad \textbf{(9.28)}$$

3) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме кваратов его сторон, т.е.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right). \quad \textbf{(9.28')}$$

33. Трапеция с основаниями a и b:

1) средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме:

$$l = \frac{1}{2}(a + b). \qquad (9.29)$$

2) площадь трапеции $S = \frac{1}{2}(a + b)h$, (9.30)

$$S = lh \qquad (9.31)$$

34. В описанном около окружности четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

35. Во вписанном в окружность четырехугольнике суммы противоположных углов равны по 180°.

9.1. Треугольники

9.1. Сторона равностороннего (правильного) треугольника равна a. Найти: 1) высоту, 2) r — радиус вписанного круга, 3) R — радиус описанного круга, 4) S — площадь треугольника.

Решение. В равностороннем треугольнике (рис. 9.1) все стороны равны a, все углы равны 60°, высота совпадает с медианой и биссектрисой.

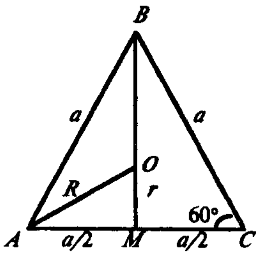


Рис. 9.1

1) Из вершины B опустим перпендикуляр на AC, обозначим M — точку пересечения высоты с основанием. Тогда $AM = MC = \frac{a}{2}$.

Треугольник AMB — прямоугольный, $AB = a$. Из теоремы Пифагора находим катет BM:

$BM = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Итак, высота $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Очевидно, что и медиана, и биссектриса тоже равны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2) Центр вписанной окружности O лежит в точке пересечения биссектрис, т. е. в данном случае и в точке пересечения высот, и в точке пересечения медиан (в равностороннем треугольнике они совпадают). OM — радиус вписанной окружности, по свойству медиан **(2)** $OM = \frac{BM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Итак, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

3) Центр описанной около равностороннего треугольника окружности лежит в точке пересечения перпендикуляров к серединам сторон; но

в равностороннем треугольнике высоты совпадают с медианами и, значит, являются перпендикулярами к серединам сторон. Поэтому центр описанной окружности совпадает с центром вписанной окружности O, BO — радиус описанной окружности, по свойству медиан (2) $BO = \frac{2BM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Итак, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

4) Площадь треугольника найдем, используя все формулы (9.3) — (9.7);

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2} - a\right)^3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ \text{где}\ p = \frac{3a}{2};$$

$$S = p\cdot r = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S = \frac{abc}{4R} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

9.2. Площадь равностороннего треугольника равна $\sqrt{3}$. Найти его сторону, высоту, радиус вписанной и описанной окружностей.

9.3. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $2\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника.

9.4. Радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности равен $\sqrt{3}/2$ Найти высоту треугольника.

9.5. В правильный треугольник со стороной a вписана окружность, в которую вписан другой правильный треугольник. Найти площадь меньшего треугольника.

Решение. (Рис. 9.2). Радиус окружности, вписанной в больший треугольник, равен $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (см. задачу 9.1). Он же является радиусом окружности, описанной около меньшего треугольника, сторону которого обозначили через x; тогда $R = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ (см. задачу 9.1), т. е. $\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$; $x = a/2$; $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (см. задачу 9.1), поэтому

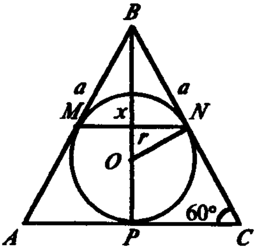


Рис. 9.2

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

9.6. Около правильного треугольника со стороной, равной 2, описана окружность, около которой описан другой правильный треугольник. Найти его сторону и высоту.

9.7. Площадь правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см^2. Найти длину вписанной окружности.

Решение. Из задачи **9.1** следует, что $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, откуда

$$a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4\cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = 4;\ \ C = 2\pi r = 4\pi\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $4\pi\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ см.

9.8. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 24 см, его площадь $S = 216$ см^2. Найти гипотенузу.

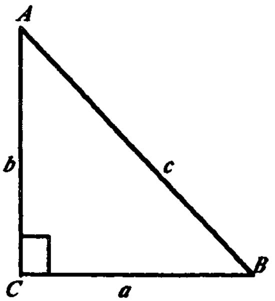


Рис. 9.3

Решение. (Рис. 9.3). Для прямоугольного треугольника площадь равна половине произведения его катетов (следует из (**9.3**) или (**9.4**), т.е. $S = \dfrac{ab}{2}$. Полагая $a = 24$, получим $24\dfrac{b}{2} = 216$, откуда $b = 18$.

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$ (см).

Ответ: 30 см.

9.9. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, проекция другого на гипотенузу — 16 см. Найти второй катет.

9.10. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5 см. Определить площадь треугольника.

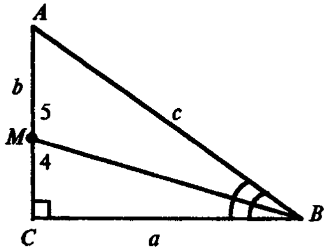


Рис. 9.4

Р е ш е н и е. (Рис. 9.4). По свойству биссектрисы (3) отношение прилежащего катета к гипотенузе $\frac{a}{c}$ равно отношению отрезков противолежащего катета $\frac{4}{5}$, т. е. $\frac{a}{c}=\frac{4}{5}$, откуда $c=\frac{5}{4}$; по теореме Пифагора (см. **12**) $c^2 = a^2+b^2$, поэтому

$$b=\sqrt{\left(\frac{5a}{4}\right)^2-a^2}=\frac{3a}{4}.$$

Однако из условия следует, что $b = 4 + 5 = 9$ (см), поэтому $\frac{3a}{4}=9$, $a=12$ (см); $S=\frac{ab}{2}=\frac{9\cdot 12}{2}=54$ (см^2).

Ответ: 54 см^2.

9.11. Из точки вне прямой проведены к этой прямой две наклонные и перпендикуляр. Сумма длин наклонных равна 56 дм, а их проекции — соответственно 8 и 36 дм. Чему равна длина перпендикуляра?

9.12. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A=\alpha$, катет $BC = d$. Из вершины прямого угла C опущена высота CD. Найти AD, DB и CD.

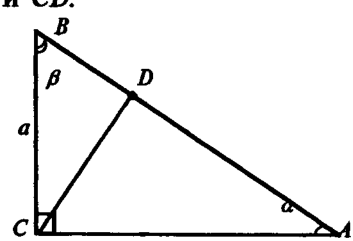


Рис. 9.5

Р е ш е н и е. (Рис. 9.5). $\angle B=\beta=90^\circ-\alpha$. В прямоугольном треугольнике CDB ($\angle D = 90°$) BC — гипотенуза, CD и DB — катеты. Используя **(9.8)** и **(9.9)**, получим:

$CD = BC\sin\beta = a\sin(90° - \alpha) = a\cos\alpha$,

$DB = BC\cos\beta = a\sin\alpha$.

Из прямоугольного треугольника ADC (AC — гипотенуза, AD и CD — катеты) находим катет AD, прилежащий к $\angle A = \alpha$ (см. **(9.11)**):

$$AD = CD \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

AD можно найти и другим способом. Вначале найдем гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC, используя угол α и противолежащий катет CB. $AB = \frac{a}{\sin \alpha}$. Тогда $AD = AB - DB = \frac{a}{\sin \alpha} - a \sin \alpha = \frac{a \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$.

Ответ: $AD = \frac{a \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$, $DB = a \sin \alpha$, $CD = a \cos \alpha$.

9.13. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 4 см, другой 3 см. Из вершины прямого угла опущен перпендикуляр на гипотенузу. Найти его длину.

9.14. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 60°, прилежащий катет 2 см. Найти второй катет и гипотенузу.

9.15. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 30°, гипотенуза 5 см. Найти оба катета.

9.16. Катет прямоугольного треугольника равен 4 см, а гипотенуза 8 см. Найти углы треугольника и второй катет.

9.17. Биссектриса прямого угла CD разделила гипотенузу на отрезки, равные 30 и 40 см. Найти площадь треугольника.

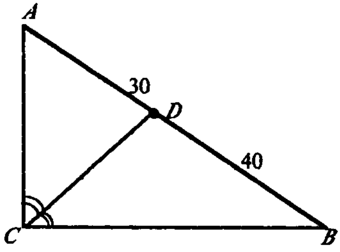


Рис. 9.6

Решение. (Рис. 9.6). Пусть $AD = 30$, $BD = 40$. По свойству биссектрисы (см. **3**): $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$, откуда:

$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$. Гипотенуза $AB = AD + BD = 70$ (см). Полагая $AC = 3x$, $BC = 4x$ и используя теорему Пифагора (см. **12**), получаем: $70^2 = (3x)^2 + (4x)^2$, откуда $x = 14$ см. $AC = 42$ см, $BC = 56$ см. $S = \frac{AC \cdot BC}{2} = 1176$ (см^2).

Ответ: 1176 см^2.

9.18. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 30°, прилежащий к нему катет $5\sqrt{3}$ см. Найти радиус описанной окружности.

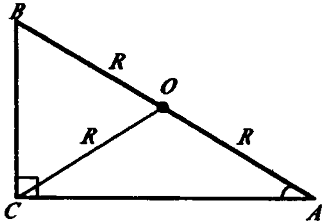


Рис. 9.7

Решение. (Рис. 9.7). Из **(9.12)** следует, что искомый радиус равен половине гипотенузы. Определяя гипотенузу $c = \frac{5\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 10$, находим $R = \frac{10}{2} = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

9.19. Площадь прямоугольного треугольника, вписанного в круг, $S = 24$ см^2, а один из катетов на 2 см больше другого. Найти площадь круга.

Решение. (Рис. 9.8). Пусть a, b — катеты, тогда справедлива система уравнений:

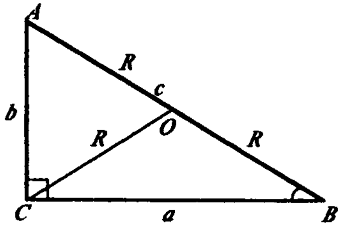


Рис. 9.8

$$\begin{cases} a - b = 2; \\ S = \frac{ab}{2} = 24, \end{cases}$$

решение которой $a = 8$ (см), $b = 6$ (см). Гипотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ (см), $R = \frac{c}{2} = \sqrt{7}$, площадь круга (по формуле **(9.19)**) равна $S = \pi R^2 = 7\pi$ (см^2).

Ответ: 7π (см^2).

9.20. В прямоугольном треугольнике точка касания P вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника и радиус окружности.

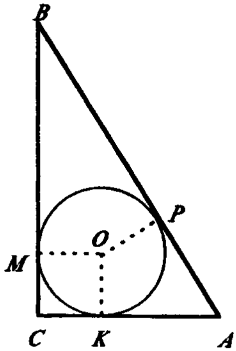


Рис. 9.9

Решение. (Рис. 9.9). Пусть O — центр окружности, K, M, P — точки касания окружности с катетами AC, BC и гипотенузой AB соответственно. По условию $AP = 5$, $BP = 12$. Так как AP и AK — отрезки касательных из вершины A, то (см. **16**) $AP = AK = 5$. Аналогично равны отрезки касательных из вершины B: $BP = BM = 12$. Радиусы OK и OC, проведенные в точки касания, перпендикулярны катетам, поэтому четырехугольник $OMCK$ — квадрат со стороной, равной r — радиусу. Катеты $BC = CM + BM = r + 12$; $AC = CK + AK = r + 5$. Гипотенуза $AB = AP + BP = 5 + 12 = 17$.

Тогда по теореме Пифагора: $(r+12)^2+(r+5)^2=17^2$. Откуда $r=3$, $BC=15$, $AC=8$.

Ответ: $r=3$ см, катеты 8 и 15 см.

9.21. **Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 30 см, а радиус вписанной окружности 6 см. Найти катеты.**

9.22. **В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC=6$ см и $BC=8$ см вершина C прямого угла соединена с серединой гипотенузы AB точкой D. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.**

9.23. **В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, высота 20 см. Определить высоту, опущенную на боковую сторону.**

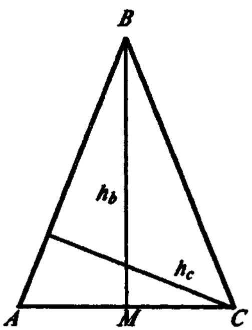


Рис. 9.10

Решение. (Рис. 9.10). $AB=BC$ — боковые стороны, $AC=30$ см — основание, BM — высота, h_b — 20 см, h_c — высота, опущенная на боковую сторону AB из вершины C. Боковую сторону AB можно найти из прямоугольного треугольника ABM, учитывая, что $AM=MC=\dfrac{AC}{2}=15$ (см) (в равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, является и медианой).

$$AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25\,(\text{см}).$$

Выражая двумя способами площадь треугольника ABC (через основание AB и боковую сторону AC), получаем:

$$S=\frac{AB\cdot h_c}{2}=\frac{AC\cdot h_b}{2},\ \text{откуда}\ h_c=\frac{AC\cdot h_b}{AB}=24\ (\text{см}).$$

Ответ: 24 см.

Замечание: Метод, используемый в этой задаче для нахождения высоты, называют методом площадей. Суть его состоит в применении двух (или более) формул для расчета площади одной фигуры, при этом появляется возможность вычислить неизвестную величину, входящую в одну из этих формул.

9.24. **В $\Delta\, ABC$ известны длины сторон $BC=a$, $AC=b$ и величина угла между ними: $\angle\, C=\gamma$. Найти высоту h_c, опущенную на неизвестную сторону AB.**

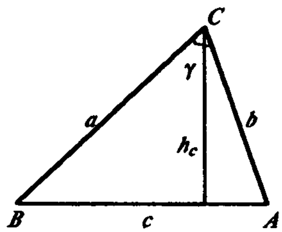


Рис. 9.11

Решение. (Рис. 9.11). Сторону AB можно найти по теореме косинусов (**9.2**):

$AB = c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$. Тогда в формулах (**9.3**) и (**9.4**) для площади треугольника имеется лишь одна неизвестная величина, которую находим, приравнивая выражения:

$$S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ch_c}{2}, \text{ откуда}$$

$$h_c = \frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}}.$$

Ответ: $\dfrac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}}$.

9.25. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны $a = b = 2$ см, а угол при вершине 60°. Найти длину высоты, опущенной на боковую сторону.

9.26. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AD, проведенная к боковой стороне, равна 4, а угол при основании равен 30°. Найти боковую сторону.

Многие задачи решаются с использованием подобия треугольников (см. **11**).

9.27. Около круга описан равнобедренный треугольник со стороной 10 см и основанием 12 см. Определить радиус круга.

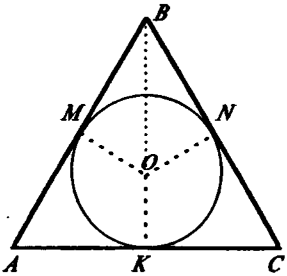


Рис. 9.12

Решение. (Рис.9.12). Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC ($AB = BC$ — боковые стороны, AC — основание). Он лежит на биссектрисе BK Так как треугольник ABC — равнобедренный, то BK является и медианой ($AK = KC = 6$), и высотой ($BK \perp AC$). Пусть K, M, N — точки касания окружности с основанием и боковыми сторонами, OK, OM, ON — радиусы окружности и, следовательно, перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника (см. **15**). Прямоугольные треугольники BKC и BMO подобны (по двум углам), тогда сходственные стороны (лежащие против разных углов) пропорциональны, откуда $\dfrac{OM}{KC} = \dfrac{BO}{BC}$. Из прямоугольного треугольника BKC, по теореме Пифагора $BK = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Полагая $OK = r$,

получаем $BO = 8 - r$. Тогда из соотношения $\frac{r}{6} = \frac{(8-r)}{10}$ получаем $r =$
$= 3$ (см).

Ответ: $r = 3$ см.

9.28. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

9.29. Из точки окружности радиуса 34 см проведен к радиусу перпендикуляр, который делит его в отношении 8:9, считая от центра. Найти длину перпендикуляра.

9.30. Из вершины прямого угла C треугольника ABC как из центра проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Длина окружности 8π см, гипотенузы AB — 10 см. Найти катеты этого треугольника.

9.31. В равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = 16$ и $AB = BC = 10$ вписан прямоугольник так, что одна его сторона, равная 6, лежит на основании треугольника. Найти периметр прямоугольника.

9.32. Найти отношение площади треугольника ABC и площади треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC.

9.33. Сторона треугольника равна 2 см, а прилежащие к ней углы равны 30° и 105°. Найти меньшую сторону треугольника.

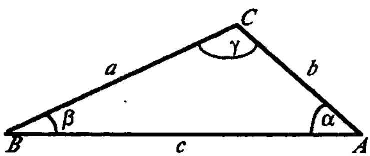


Рис. 9.13

Решение. (Рис. 9.13). Третий угол в треугольнике равен 180° — — (105° + 30°) = 45°. Применяя теорему синусов, по формуле **(9.1)** получаем $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 105^\circ}$, где $a =$ $= 2$, откуда:

$$b = \frac{a \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}; \quad c = \frac{a \sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{4 \sin 105^\circ}{\sqrt{2}}.$$

Найдем $\sin 105° = \sin(90° + 15°) = \cos 15° = \cos\frac{30°}{2} =$

$= \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Тогда $c = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\times$

$\times\sqrt{2+\sqrt{3}} > \sqrt{2}$, так как второй множитель больше 1. Значит $c > b$.

Ответ: $b = \sqrt{2}$ см.

9.34. Заданы два угла треугольника $\alpha = 45°$ и $\beta = 30°$; радиус описанной окружности равен $5\sqrt{2}$. Найти стороны треугольника a и b.

Решение. (Рис. 9.13). $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (30° + 45°) = 105°$. Применяя метод площадей (по аналогии с задачей **9.23**), получаем:

$S = \frac{1}{2}ac\sin 30° = \frac{1}{4}ac$ — см. **(9.4)**; $S = \frac{abc}{4R}$ — см. **(9.7)**; откуда $\frac{abc}{4R} = \frac{ac}{4}$ или $b = R = 5\sqrt{2}$. Из **(9.1)** найдем a: $\frac{b}{\sin 30°} = \frac{a}{\sin 45°}$,

$a = \frac{b\sin 45°}{\sin 30°} = 10$.

Ответ: $5\sqrt{2}$; 10.

9.2. Окружность и круг

9.35. Найти радиус окружности, если ее длина равна 6π см.

Решение. $C = 2\pi R = 6\pi$ (см), $R = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

9.36. Найти площадь круга, если длина соответствующей ему окружности равна 18π см.

Решение. $C = 2\pi R = 18\pi$; $R = 9$, $S = \pi R^2 = 81\pi$ (см^2).

Ответ: 81π см^2.

9.37. Найти площадь круга, если длина соответствующей ему окружности равна 24π.

9.38. Найти длину окружности, если площадь круга, ограниченного ею, равна 9π.

9.39. Центр окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC в вершине B и проходящей через вершину A, лежит на стороне AC. Найти длину окружности, если $BC = 8$ см, $AC = 9$ см.

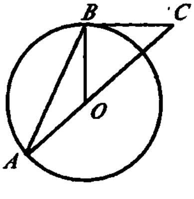


Рис. 9.14

Решение. (Рис. 9.14). Так как радиус OB перпендикулярен BC (см. 15), то треугольник OBC — прямоугольный, его катеты: $BC = 8$, $BO = r$, а гипотенуза $OC = 9 - r$ (так как $AC = AO + OC = 9$, $AO = r$). По теореме Пифагора $BC^2 + BO^2 = OC^2$, т. е. $64 + r^2 = (9 - r)^2$, откуда $r = \frac{17}{18}$ (см). Тогда $c = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{17}{18} = \frac{17}{9}\pi$.

Ответ: $\frac{17}{9}\pi$ см.

9.40. Радиус окружности равен 2. Найти длину дуги, содержащую: а) 60°, б) 100°, в) $\frac{\pi}{4}$ радиан.

Решение. а) Длина всей окружности, содержащей 360°, равна $2\pi R$. Длина дуги, содержащей 60°, составляет $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ часть от длины окружности, т. е. $\frac{2\pi R}{6} = \frac{\pi R}{3} = \frac{2\pi}{3}$; б) и в) решение аналогично.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{10\pi}{9}$; в) $\frac{\pi}{2}$.

9.41. Окружность разделена в отношении 7 : 11 : 6, и точки деления соединены между собой. Найти меньший угол полученного треугольника ABC.

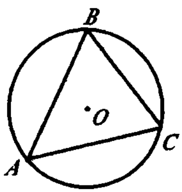


Рис. 9.15

Решение. (Рис. 9.15). Углы треугольника ABC являются вписанными в окружность, поэтому (см. **21**) измеряются половинами дуг, на которые опираются, и, следовательно, их отношение тоже равно 7 : 11 : 6. Вычисляя соответствующие дуги, получаем $7x + 11x + 6x = 360^\circ$, $x = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$, меньшая дуга равна $6 \cdot 15 = 90^\circ$, значит меньший угол в треугольнике ABC равен $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Ответ: 45°.

9.42. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна 4 см. Вычислить площадь одного из отсекаемых сегментов.

9.43. Три одинаковых круга, радиусы которых равны $2\sqrt[4]{3}$ см, попарно касаются друг друга. Найти площадь треугольника, стороны которого соединяют центры кругов.

9.44. Две касательные к окружности пересекаются под углом в 60°. Найти расстояние от точки их пересечения M до центра круга O, если его радиус равен 2 см.

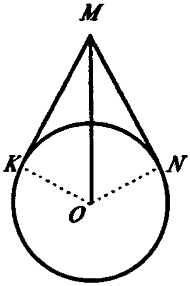


Рис. 9.16

Решение. (Рис. 9.16). Пусть MK и MN — касательные из точки M; K и N — точки касания. Треугольники OMN и OMK — прямоугольные, так как ON и OK — радиусы, проведенные в точки касания (см. **15**). Поскольку $MK = MN$ (см. **16**), $ON = OK$ (как радиусы), то треугольники OMN и OMK равны, поэтому $\angle OMN = \angle OMK = 30°$. Тогда $MO = \dfrac{r}{\sin 30^\circ} = 2r$, т. е. $MO = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

9.45. В окружности радиуса 5 см хорда AB перпендикулярна к радиусу OC и в точке пересечения M делит его пополам. Найти длину хорды.

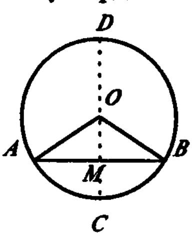


Рис. 9.17

Решение. (Рис. 9.17). Проведем диаметр CD. Из (**9.16**) следует, что $CM \cdot MD = AM \cdot MB$. По условию $CM = MO = \dfrac{R}{2}$, тогда $MD = \dfrac{3R}{2}$. Очевидно, что $AM = MB = x$ (в равнобедренном треугольнике OAB высота OM является и медианой). Тогда $\dfrac{R}{2} \cdot \dfrac{3R}{2} = x^2$; $x = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $AB = 2x = R\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

9.46. В окружности радиуса 2 см хорда AB перпендикулярна к радиусу OC и в точке пересечения M делит его на части 1 : 2, считая от центра. Найти длину хорды.

9.47. Две хорды пересекаются в точке K, причем хорда AB делится точкой пересечения в отношении 4 : 5, а хорда MN — на части 15 и 12 см. Найти AB.

Решение. (Рис. 9.18). Используя формулу (**9.16**) и полагая $AK = 4x$, $KB = 5x$, получаем:

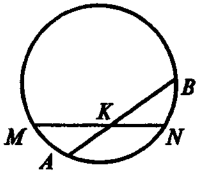


Рис. 9.18

$4x \cdot 5x = 15 \cdot 12$, $20x^2 = 180$; $x^2 = 9$, $x = 3$; $AB = 4x + 5x = 9x = 27$.

Ответ: 27 см.

9.48. Точка пересечения K хорды AB и диаметра CD делит хорду на части 6 и 8 см, а диаметр — в отношениии 3 : 1. Найти длину хорды.

9.49. Из точки M, взятой вне круга, проведены касательная AM длиной 3 см и секущая MB. Отношение внешней части секущей к внутренней равно 4 : 5. Определить длину секущей.

Указание. Воспользоваться свойством **19**.

9.50. Вычислить вписанный и центральный углы, опирающиеся на дугу, равную $\frac{1}{9}$ части окружности.

Решение. $\frac{1}{9}$ часть окружности составляет дугу в $\frac{2\pi}{9}$ радиан. Используя свойства **20** и **21**, получаем, что вписанный угол измеряется половиной этой дуги, т. е. равен $\pi/9$ радиан, а центральный угол равен $2\pi/9$ радиан.

Ответ: $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$.

9.51. Хорда делит окружность в отношении 1 : 11. Определить величины вписанных углов, опирающихся на хорду.

9.3. Четырехугольники

В следующих задачах рассматриваются различные виды четырехугольников.

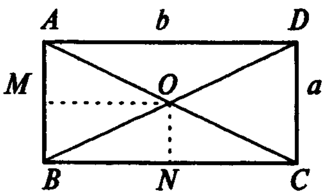


Рис. 9.19

9.52. В прямоугольнике $ABCD$ точка пересечения диагоналей O отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр этого прямоугольника равен 58 см. Определить его стороны a и b.

Решение. (Рис. 9.19). Из точки O опустим перпендикуляры на меньшую (a) и большую (b) стороны прямоугольника: соответственно MO и NO; так как диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам, то $BM = AM$ и $BN = NC$, т. е. расстояние от точки O до меньшей стороны MO равно половине большей стороны: $MO = \frac{b}{2}$, расстояние от точки O до большей стороны NO равно половине меньшей стороны: $NO = \frac{a}{2}$. Из условия: $MO - NO = 4$, т. е. $\frac{(b-a)}{2} = 4$. Кроме того, периметр прямоугольника $P = 2a + 2b = 58$ см. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{(b-a)}{2} = 4, \\ 2a + 2b = 58, \end{cases} \quad \text{откуда } a = 10{,}5 \text{ (см)}, \ b = 18{,}5 \text{ (см)}.$$

Ответ: $a = 10{,}5$ см, $b = 18{,}5$ см.

9.53. Периметр P ромба равен $4\sqrt{10}$ см, а сумма его диагоналей равна 8 см. Найти площадь ромба.

Решение. (Рис. 9.20). Пусть a — сторона ромба $ABCD$, d_1 и d_2 — его диагонали, $a = \frac{P}{4} = 10$; O — точка пересечения диагоналей. Треугольник ABO — прямоугольный, его катеты равны $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_2}{2}$ (см. 30), гипотенуза равна a. По теореме Пифагора $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, по условию $d_1 + d_2 = 8$. Решая совместно эти уравнения, получаем, что $d_1 = 6$, $d_2 = 2$, тогда по формуле (9.23)

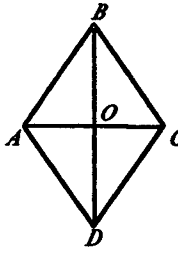


Рис. 9.20

$S = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$ (см^2).

Ответ: 6 см^2.

9.54. Диагонали ромба относятся как 3 : 4, периметр ромба равен 40 см. Найти площадь ромба.

9.55. Диагональ ромба, равная 6 м, лежит против угла в 60°. Найти площадь ромба.

9.56. В ромбе диагонали равны 10 и 24 см. Найти радиус окружности, вписанной в этот ромб.

9.57. Периметр параллелограмма равен 28 см, а его острый угол — 60°. Определить высоты параллелограмма, если его площадь равна $24\sqrt{3}$ см².

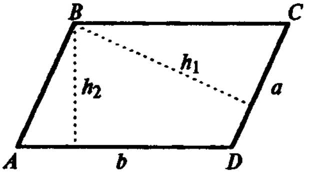


Рис. 9.21

Решение. (Рис. 9.21). $S = ab\sin\alpha = ab\sin 60^\circ = ab\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ (см. (9.28)), откуда $ab = 48$. Так как периметр $P = 2a + 2b = 28$, то, решая систему $\begin{cases} ab = 48, \\ a + b = 14, \end{cases}$ получаем $a = 6$, $b = 8$ — стороны параллелограмма. Используя формулу (9.26) для a и b, получаем: $S = ah_1 = 6h_1 = 24\sqrt{3}$, откуда $h_1 = 4\sqrt{3}$; $S = bh_2 = 8h_2 = 24\sqrt{3}$, откуда $h_2 = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см, $3\sqrt{3}$ см

9.58. Острый угол параллелограмма равен 60°, а тупой угол делится диагональю в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 см.

9.59. Длины параллельных сторон трапеции $a = 4$ см и $b = 25$ см, а длины непараллельных сторон $c = 20$ см и $d = 13$ см. Найти h — высоту трапеции.

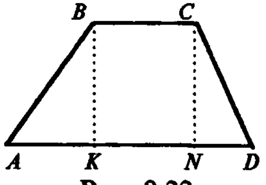


Рис. 9.22

Решение. (Рис. 9.22). В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = a$ и $AD = b$ проведем две равные высоты из вершин B и C, пересекающие основание AD в точках K и N. Получим прямоугольник $BCNK$ и два прямоугольных треугольника: AKB и CND. Полагая $AK = x$, $ND = y$, получаем, что $x + y = b - a = 25 - 4 = 21$. Применяя теорему Пифагора и учитывая, что гипотенузы в треугольниках AKB и CND равны 20 и 13 см, получаем второе и третье уравнения: $20^2 = h^2 + x^2$; $13^2 = h^2 + y^2$. Решая совместно эти уравнения, получаем $h = 12$.

Ответ: 12 см.

9.60. Найти площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 и 44 см, а непараллельные — 17 и 25 см.

9.61. Определить длину диагоналей равнобочной трапеции, если основания ее равны 4 и 6 см, а боковая сторона — 5 см.

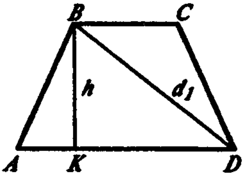


Рис. 9.23

Решение. (Рис. 9.23). Опустив высоту из вершины трапеции на большее основание, получим прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна боковой стороне трапеции (5 см), один из катетов равен полуразности оснований (6 — 4)/2 = 1 (см), а второй катет $h = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (см). Проведем диагональ d_1 в трапеции и получим второй прямоугольный треугольник, в котором диагональ является гипотенузой, один из катетов $h = 2\sqrt{6}$, а второй равен 6 — 1 = 5. Тогда $d_1^2 = 24 + 25 = 49$, $d_1 = 7$. Поскольку в равнобочной трапеции диагонали равны, то $d_1 = d_2 = 7$.

Ответ: 7 см.

9.62. Около равнобедренной трапеции, основания которой 6 и 8 см, а высота 7 см, описана окружность. Найти площадь круга.

9.63. В равнобочной трапеции, описанной около круга, основания равны 36 см и 1 м. Определить площадь круга.

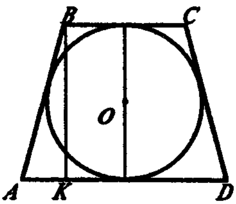


Рис. 9.24

Решение. (Рис. 9.24). В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны (по условию). Используя свойство описанного четырехугольника (34), получаем: $AB + CD = BC + AD$. Полагая $AB = CD = x$, находим боковую сторону трапеции: $2x = 36 + 100$, $x = 68$ (см). В равнобочной трапеции диаметр вписанного круга равен высоте трапеции. Опуская перпендикуляр из вершины B на основание, получаем прямоугольный треугольник ABK, в котором катет

$AK = \dfrac{(AD - BC)}{2} = \dfrac{(100 - 36)}{2} = 32$ (см), гипотенуза $AB = 68$ (см); тогда $BK = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60$ (см). Получаем $d = 60$ см, площадь круга $S = \pi d^2/4 = 900\pi$ (см²).

Ответ: 900π см².

9.64. В равнобочную трапецию с боковой стороной 17 см вписана окружность диаметром 15 см. Вычислить основания и площадь трапеции.

9.65. В равнобочной трапеции угол при основании равен 60°, основания относятся как 2 : 5, средняя линия равна 14 см. Найти площадь трапеции.

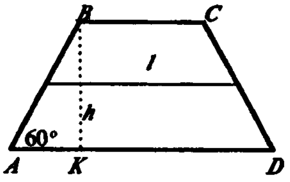


Рис. 9.25

Решение. (Рис. 9.25). В трапеции $ABCD$ полагаем верхнее основание $BC = 2x$, нижнее $AD = 5x$. Средняя линия $l = \frac{BC + AD}{2} = 14$, откуда $x = 4$, $BC = 8$, $AD = 20$. Опуская из вершины B высоту BK, получаем, что $AK = \frac{AD - BC}{2} = 6$. В прямоугольном треугольнике ABK определяем катет BK, лежащий против угла в 60°: $BK = AK \cdot \operatorname{tg} 60° = 6\sqrt{3}$. Следовательно, площадь трапеции $S = lh = 14 \cdot 6\sqrt{3} = 84\sqrt{3}$ (см²).

Ответ: $84\sqrt{3}$ (см²).

9.66. Площадь равнобочной трапеции равна 160 см², длина ее средней линии 40 см, а боковой стороны — 5 см. Найти длину оснований трапеции.

9.4. Задачи для самостоятельного решения

9.67. Радиус круга, вписанного в равносторонний треугольник, равен 4 см. Найти площадь треугольника.

9.68. В прямоугольный треугольник вписан круг. Точка касания делит гипотенузу на части, равные 4 и 6 см. Найти радиус круга.

9.69. В треугольник ABC вписан квадрат так, что одна из сторон квадрата лежит на основании BC. Найти сторону квадрата, если $BC = 10$ см, а высота $AD = 15$ см.

9.70. Стороны треугольника ABC равны 12, 8 и 6. Меньшая сторона треугольника DKE, подобного треугольнику ABC, равна 9. Найти периметр треугольника DKE.

9.71. В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 50, с основанием, равным 30, вписана окружность. Найти расстояние между точками касания на боковых сторонах.

9.72. В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности делит высоту в отношении 12 : 5, а боковая сторона равна 60. Определить длину основания треугольника.

9.73. В круге, радиус которого равен 4 см, проведена хорда AB так, что сумма длины хорды и расстояния точки B до касательной, проходящей через точку A, равна 6 см. Найти длину хорды.

9.74. Периметр ромба равен 20 см, сумма длин диагоналей — 14 см. Найти площадь ромба.

9.75. Высота ромба равна 12 см, а одна из его диагоналей — 15 см. Найти площадь ромба.

9.76. Высота, проведенная в ромбе из вершины тупого угла, образует со стороной ромба угол в 30°. Вычислить периметр ромба, зная, что меньшая его диагональ равна 5,2 см.

9.77. В трапеции, площадь которой равна 594 см^2, высота 22 см, а разность параллельных сторон равна 6 см, найти длину каждой из параллельных сторон.

9.78. Около круга радиуса 5 см описана равнобочная трапеция с острым углом при основании $\pi/6$. Определить площадь трапеции.

9.79. Около окружности описана равнобочная трапеция. Периметр трапеции равен 76 см, а разность ее оснований — 20 см. Найти стороны трапеции.

9.80. Вычислить площадь равнобочной трапеции, если острый угол при основании равен 30°, меньшее основание — 3 см и боковая сторона — $6\sqrt{3}$ см.

9.81. Радиусы кругов равны 27 и 13, а расстояние между их центрами равно 50. Найти длину их общей внешней касательной.

9.82. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

9.83. Две стороны остроугольного треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, а площадь этого треугольника равна 3. Найти третью сторону.

9.84. В прямоугольной трапеции меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне и равна 15; меньшая боковая сторона равна 12. Найти основания трапеции.

9.85. Найти площадь сектора, образованного углом в 60°, если радиус окружности равен 3.

9.86. Хорда, стягивающая дугу в 60°, равна 5 см. Найти: а) длину окружности; б) длину хорды, стягивающей дугу в 120°; в) площадь круга.

9.87. В круге с радиусом, равным 5 см, проведены две параллельные хорды по разные стороны от центра длиною 6 и 8 см. Найти расстояние между ними.

9.88. Три окружности попарно касаются друг друга. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник.

Найти радиус меньшей окружности, если радиусы двух других равны 6 и 4.

9.89. В окружность радиуса $6/\pi$ вписан угол ABC, равный 60°. Найти длину дуги ABC.

9.90. Касательная, проведенная из точки A к окружности с центром в точке O, касается окружности в точке B. Найти длину окружности, если $AB = 8$, $\angle AOB = 60°$.

9.91. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна 8. Найти расстояние между центрами окружностей, если их радиусы равны 5 и 7.

9.92. Сторона правильного треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найти: а) его площадь, б) длину его высоты, в) радиусы вписанной и описанной окружностей.

9.93. Площадь треугольника равна 100 см^2, а две его стороны равны 40 и 10 см. Найти угол между этими сторонами.

9.94. В правильный треугольник со стороной a вписана окружность, в которую вписан другой правильный треугольник. Найти площадь меньшего треугольника.

9.95. Стороны треугольника равны 7, 24, 25. Найти его высоты.

9.96. Найти площадь круга, вписанного в треугольник, из задачи **9.95.**

9.97. Найти длину окружности, описанной около треугольника, из задачи **9.95.**

9.98. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти длину вписанной окружности.

9.99. Катет прямоугольного треугольника равен $3\sqrt[4]{3}$, а противолежащий ему угол — 30°. Найти площадь треугольника.

9.100. Площадь прямоугольного треугольника равна $8\sqrt{2}$, а острый угол 22,5°. Найти гипотенузу.

9.101. В равнобедренном треугольнике высота равна 20, а основание относится к боковой стороне, как 4 : 3. Найти радиус вписанной окружности.

9.102. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, боковая сторона равна 5, а острый угол при основании — 30°. Найти площадь трапеции.

9.103. В треугольник ABC со сторонами $AB = 11$, $BC = 7$, $AC = 13$ вписан параллелограмм $ADKE$; точки D, K, E лежат соответственно на сторонах AB, BC, AC. Известно, что $AE = 6$. Найти периметр параллелограмма.

9.104. Основания трапеции $ABCD$ $AD = 20$, $BC = 14$. На сколько нужно продолжить сторону AB до пересечения с продолжением стороны DC, если $AB = 6$?

9.105. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 10$, $AD = 16$ и прямым углом A вписан прямоугольник $ANKE$ со сторонами $NK = 12$, $KE = 5$. Найти площадь трапеции.

Указание. Провести высоту трапеции CM и найти ее из подобия треугольников CDM и KED.

9.106. Найти длину высоты прямоугольного треугольника, опущенной из прямого угла, если она делит гипотенузу на отрезки, равные 3 и 27 см.

9.107. Найти длину катета прямоугольного треугольника, если его проекция на гипотенузу равна 2,5, а гипотенуза — 10.

9.108. Заданы стороны треугольника ABC : $AB = 28$, $BC = 26$, $AC = 30$. Через точку, которая делит высоту BK в отношении 2:3, считая от вершины B, проведена линия DF, параллельная стороне AC. Найти площадь трапеции $ADFC$.

9.109. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найти площадь прямоугольного треугольника, у которого катетом и гипотенузой служат соответственно высота и медиана, проведенные к гипотенузе данного треугольника.

9.110. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 2 и 3. Найти радиус этой окружности.

9.111. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 15, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 20. Найти основание этого треугольника.

9.112. Найти третью сторону треугольника, если две стороны равны 20 и 15; известно, что медианы, соответствующие этим сторонам, пересекаются под прямым углом.

9.113. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

9.114. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 и высотой 8, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

9.115. В треугольник со сторонами a и b вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол, заключенный между этими сторонами. Найти сторону ромба.

9.116. В трапеции большее основание равно 5, одна из боковых сторон равна 3. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданными боковой стороной и основанием пополам. Найти площадь трапеции.

9.117. Вокруг равнобедренного треугольника ABC (AC — основание) проведены две концентрические окружности. Одна — радиуса 3 — вписана в треугольник, а другая — радиуса 5 — проходит через вершину B. Найти площадь треугольника ABC.

9.118. Найти углы ромба, если площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

9.119. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\pi/6$.

9.120. Определить угол ромба, зная его площадь Q и площадь вписанного в него круга S.

9.121. К кругу радиуса R проведены из одной точки две касательные, составляющие между собой угол $2\alpha°$. Определить площадь фигуры, заключенной между этими касательными и дугой круга.

9.122. Определить радиусы двух внешне касающихся кругов, если расстояние между их центрами равно d, а угол между общими внешними касательными равен φ.

9.123. Окружность с центром на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC проходит через вершину A и касается катета BC. Найти радиус этой окружности, если $AC = 3$ см и $BC = 4$ см.

9.124. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, делится центром вписанной окружности на отрезки 5 и 3 см, считая от вершины. Найти стороны треугольника.

9.125. Найти сторону BC в треугольнике ABC, где $AC = 11$ см, медиана $AD = 10$ см, площадь треугольника $S = 66$ см^2.

9.126. Боковая сторона и меньшее основание равнобочной трапеции равны радиусу описанной окружности. Найти высоту трапеции, если ее средняя линия равна $6\sqrt{3}$ см.

9.127. Вершины квадрата служат центрами окружностей, радиусы которых равны половине стороны квадрата. Найти радиус большей из окружностей, касающейся всех четырех окружностей, если сторона квадрата равна $22\left(\sqrt{2}-1\right)$ см.

9.128. Площадь правильного шестиугольника равна 64 см^2. Найти площадь шестиугольника, полученного при соединении середин сторон данного.

9.129. Сторона треугольника разделена на три равные части; через точки деления проведены прямые, параллельные одной из двух других сторон. Найти площадь трапеции, заключенной между этими прямыми, если площдь треугольника равна 87 см^2.

9.130. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин острых углов равны $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см. Найти гипотенузу.

9.131. Катеты прямоугольного треугольника $a = 6$ см, $b = 8$ см. Найти разность диаметров описанной и вписанной окружностей.

9.132. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: правильный со стороной $a = 8$ см и прямоугольный. Найти длину средней линии трапеции.

9.133. В прямоугольном треугольнике $ABCD$ $AB = 60$ см, $BC =$ $= 45$ см. Сторона DC разделена точками E и F на три равные части. Отрезки прямых, соединяющие вершины A и B с точками E и F соответственно, продолжены до пересечения в точке M, лежащей вне прямоугольника. Найти площадь треугольника EFM.

9.134. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах B и C прямые, а угол $BAD = \operatorname{arctg} 2/3$. Найти длину диагонали BD, если известно, что длина CD вдвое меньше длины AB и на 21 м больше длины BC.

9.135. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны 24 см и 4 см соответственно; высота трапеции — 5 см. Точка N делит боковую сторону на отрезки AN и NB, отношение длин которых 3 : 1. Найти площадь треугольника NCD.

9.136. В прямоугольной трапеции отношение длин оснований равно 4, а отношение длин диагоналей равно 2. Найти величину острого угла трапеции.

9.137. В трапеции углы при одном из оснований имют величины 20° и 70°, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2 см. Найти длины оснований трапециии, если длина ее средней линии равна 4 см.

9.138. В параллелограмме острый угол равен 60°. Найти отношение длин сторон параллелограмма, если отношение квадратов длин диагоналей равно 1/3.

9.139. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения, и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найти длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны 3 и 15.

9.140. В треугольнике ABC стороны $AB = 14$ см, $AC = 18$ см, угол A вдвое больше угла B. Найти третью сторону треугольника.

9.141. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и боковой стороны AD. Диагональ AC равна 6 см, боковая сторона BC равна 4 см. Найти площадь трапеции.

9.142. Точки M, N, P, Q являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Найти отношение площади ромба $ABCD$ к площади фигуры, являющейся пересечением четырехугольников $ANCQ$ и $BPDM$.

9.143. Длины сторон треугольника относятся как 2 : 3 : 2. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершины которого находятся в точках пересечения биссектрис данного треугольника с его сторонами.

9.144. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны 4 см^2 и 25 см^2. Найти площадь данной трапеции.

9.145. В треугольнике ABC длины сторон CB, CA и AB соответственно равны 4 см, 3 см и 2 см. Найти отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B.

9.146. В треугольнике ABC с периметром 8 см величина острого угла BAC равна 60°. Окружность с центром в точке O касается стороны BC и продолжения сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Найти площадь треугольника AOL.

9.147. В треугольнике ABC, в котором угол C — тупой, проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Найти длину стороны AC, если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части, а длина стороны AB равна 4 см.

9.148. Длины основания BC, диагонали BD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$ равны по 5 см. Длина боковой стороны CD равна 2 см. Найти длину диагонали AC

9.149. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и E соответственно. Найти угол CBD, если площади треугольников DCE и ABC относятся как 1 : 4.

10. СТЕРЕОМЕТРИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Формулы объемов и площадей боковых поверхностей различных геометрических тел:

Произвольная призма $S_{бок} = P_{сеч}l$, (10.1) $V = SH$ (10.2)

Прямая призма $S_{бок} = Pl$ (10.3)

Прямоугольный параллелепипед $S_{бок} = PH$, (10.4) $V = abc$ (10.5)

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (10.6)

Куб $V = a^3$, (10.7) $d = a\sqrt{3}$ (10.8)

Произвольная пирамида $V = \frac{1}{3}SH$ (10.9)

Правильная пирамида $S_{бок} = \frac{1}{2}Pl$, (10.10) $V = \frac{1}{3}SH$ (10.11)

Произвольная усеченная пирамида (или конус) $V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$ (10.12)

Правильная усеченная пирамида (или конус) $S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l$ (10.13)

Цилиндр $S_{бок} = 2\pi RH$, (10.14) $V = \pi R^2H$ (10.15)

Конус $S_{бок} = PRl$, (10.16) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ (10.17)

Шар, сфера $S = 4\pi R^2$ (10.18) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (10.19)

Шаровой сегмент $S = 2\pi Rh$ (10.20) $V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$ (10.21)

Шаровой сектор $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ (10.22)

Обозначения: P — периметр основания; S — площадь основания, или площадь сферической поверхности; H — высота; $P_{сеч}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем; a, b, c — измерения, d — диагональ прямоугольного параллелепипеда; a — ребро куба; l — боковое ребро призмы, или апофема пирамиды, или образующая конуса; S_1, S_2 — площади оснований, P_1, P_2 — периметры оснований усеченной пирамиды или конуса; R — радиус основания цилиндра, конуса или радиус шара; h — высота шарового сегмента или сектора.

Прямая и плоскость

1. Прямая, параллельная какой-либо прямой, лежащей в плоскости, параллельна этой плоскости (*признак параллельности прямой и плоскости*).

2. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна этой прямой.

3. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (*признак параллельности двух плоскостей*).

4. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.

5. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*).

6. Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (*признак перпендикулярности плоскостей*).

7. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.

8. Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

9. Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость (*теорема о трех перпендикулярах*).

Многогранники

10. Если все боковые ребра пирамиды образуют с основанием равные углы (или все боковые ребра равны), то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

11. Если все боковые грани пирамиды образуют с основанием один и тот же угол α (или апофемы всех боковых граней равны), то высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание, и

$$S = S_{бок} \cos \alpha. \qquad (10.23)$$

12. Если в наклонной призме боковое ребро составляет равные углы со сторонами основания, то его проекцией на плоскость основания является биссектриса угла, образованного этими сторонами.

13. Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны.

Комбинации различных тел

14. Около призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность. Центром шара является середина отрезка, соединяющего центры описанных около оснований окружностей.

15. Около пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность. Центр шара, описанного около пирамиды, лежит в точке пересечения прямой, перпендикулярной к основанию пирамиды и проходящей через центр окружности, описанной около этого основания, и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру и проведенной через середину этого ребра.

16. Если боковые ребра пирамиды равны между собой (или равнонаклонены к плоскости основания), то центр описанного шара лежит в точке пересечения высоты (или ее продолжения) с осью симметрии бокового ребра, лежащей в плоскости бокового ребра и высоты.

17. В прямую призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в основание призмы можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте призмы. Центром шара является середина отрезка, соединяющего центры вписанных в основания окружностей.

18. Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то в такую пирамиду можно вписать шар. Центр шара лежит в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла любого двугранного угла при основании пирамиды, одной из сторон которого служит апофема боковой грани.

При решении задач по стереометрии необходимо обратить внимание на выполнение чертежа. Изображения на чертеже даются в параллельной проекции. При этом изображениями параллельных прямых служат параллельные прямые (но изображения перпендикулярных прямых, как правило, не перпендикулярны). Равные отрезки, отложенные на одной прямой или на параллельных прямых, остаются равными и на изображении (но длина их, как правило, меняется). Равные отрезки, отложенные на непараллельных прямых, могут изображаться неравными отрезками.

Если точка тела делит отрезок в некотором отношении, то проекция точки будет делить проекцию отрезка в том же отношении. Следует помнить, что треугольник проектируется в треугольник (при этом углы и отношение длин непараллельных сторон, вообще говоря, не сохраняются), квадрат и ромб проектируются в произвольный параллелограмм, а окружность — в эллипс, большая ось которого имеет длину, равную диаметру окружности.

Роль чертежа не сводится при решении задачи только к иллюстрации рассуждений. Удачно выполненный чертеж может натолкнуть на мысль использовать ту или иную теорему курса или сделать дополнительное построение, позволяет часто отыскать (и даже подсказать) идею решения. Поэтому чертежи следует выполнять тщательно и аккуратно.

Обычно стереометрическая задача приводится к задаче планиметрии, поэтому полезно делать отдельные рисунки плоских фигур, сохраняя при этом обозначения исходного чертежа.

Вместе с тем необходимо помнить, что никакой чертеж, даже красиво, наглядно и аккуратно выполненный, не может заменить собой логического доказательства геометрического факта.

10.1. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей

Двугранные и многогранные углы

10.1. Отрезок AB длиной 8 см параллелен плоскости P. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные отрезку AB и образующие с плоскостью P углы 45° и 30° соответственно. Расстояние между точками пересечения плоскости P с проведенными прямыми равно 10 см. Найти расстояние от концов отрезка до плоскости P.

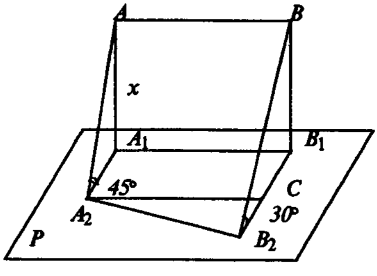


Рис. 10.1

Решение. Опустим из точек A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость P (Рис. 10.1).

Обозначим неизвестное расстояние $AA_1 = BB_1 = x$. Проведем $A_2C \parallel A_1B_1$. По условию $AB \perp BB_2$, следовательно, A_2C перпендикулярна наклонной BB_2 и по теореме о трех перпендикулярах (см. 9) A_2C перпендикулярна проекции наклонной B_1B_2.

Из прямоугольного треугольника A_2CB_2 найдем $B_2C =$
$= \sqrt{A_2B_2^{\,2} - A_2C^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ см.

С другой стороны, $A_1A_2 = x$ (так как прямоугольный треугольник AA_1A_2 равнобедренный), $B_1B_2 = x \operatorname{ctg} 30° = x\sqrt{3}$, следовательно, $B_2C =$ $= B_1B_2 - A_1A_2 = x\sqrt{3} - x = x\left(\sqrt{3}-1\right)$. В результате получим $x\left(\sqrt{3}-1\right) = 6$,

откуда $x = \dfrac{6}{\sqrt{3}-1} = 3\left(\sqrt{3}+1\right)$ см.

Ответ: $3\left(\sqrt{3}+1\right)$ см.

10.2. Параллелограмм и плоскость P расположены так, что одна из меньших сторон параллелограмма находится в плоскости P, а противоположная ей сторона удалена от плоскости на расстояние, равное расстоянию между бо́льшими сторонами параллелограмма. Определить угол между плоскостью P и плоскостью параллелограмма, если стороны его относятся как 1 : 2.

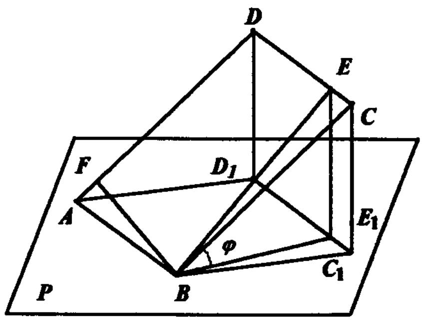


Рис. 10.2

Решение. Пусть меньшая сторона AB лежит в плоскости P (Рис. 10.2). Проведем к прямой AB перпендикуляр BE в плоскости параллелограмма и опустим перпендикуляр EE_1 из точки E на плоскость P. В силу теоремы о трех перпендикулярах $BE_1 \perp AB$. Следовательно, $\varphi = \angle EBE_1$ — линейный угол искомого двугранного угла между плоскоетью P и плоскостью параллелограмма. Из треугольника BEE_1 $\sin\varphi = \frac{EE_1}{BE}$. По условию $EE_1 = BF$, поэтому $\sin\varphi = \frac{BF}{BE}$. Из подобия прямоугольных треугольников AFB и BEC (их острые углы равны как противоположные углы параллелограмма) $\frac{BF}{BE} = \frac{AB}{BC}$, следовательно, $\sin\varphi = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, т. е. $\varphi = 30°$.

Ответ: 30°.

10.3. На плоскости дан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 12 см. В пространстве дана точка, удаленная от каждой вершины треугольника на расстояние 10 см. Вычислить расстояние точки от плоскости.

10.4. Диагонали ромба равны 12 и 16 см. Точка M, расположенная вне плоскости ромба, удалена от всех сторон ромба на 8 см. Вычислить расстояние от точки M до плоскости ромба.

10.5. Из центра круга, описанного около прямоугольного треугольника с острым углом в 30°, восстановлен к его плоскости перпендикуляр, длина которого 6 см. Конец перпендикуляра, лежащий вне плоскости треугольника, удален от большего катета на 10 см. Найти гипотенузу треугольника.

10.6. Из точки, взятой вне плоскости, проведены к плоскости две наклонные каждая под углом 30° к плоскости. Проекции этих наклонных образуют между собой угол в 120°. Найти расстояние точки до плоскости, если расстояние между основаниями наклонных равно 60 см.

10.7. Внутри прямого двугранного угла взята точка M на расстоянии 12 и 16 см от его граней. Найти расстояние этой точки от ребра двугранного угла.

10.8. В трехгранном угле два плоских угла по 45°, третий плоский угол 60°. Найти двугранный угол, противолежащий третьему плоскому углу.

10.9. Сторона BC треугольника ABC равна 5 см и лежит в плоскости P, а вершина A удалена от плоскости P на 6 см. Найти площадь треугольника ABC, если его плоскость наклонена к плоскости P под углом 60°.

10.10. Два равнобедренных треугольника ABC и ACD имеют общее основание AC, двугранный угол AC равен 60°, а угол, образованный стороной BC с плоскостью ADC, равен 45°. Найти площадь треугольника ABC, если $BC = 6$ см.

10.11. В трехгранном угле два плоских угла содержат по 60°. На их общем ребре от вершины отложен отрезок, равный 2 см. Найти проекцию этого отрезка на плоскость третьего угла, равного 90°.

10.12. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости P, а плоскость треугольника ABC образует с плоскостью P угол в 30°. Найти расстояние от вершины C до плоскости P, если $AC = 6$ см, $BC = 8$ см.

10.2. Многогранники

10.13. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B_1 и середину ребер AD и CD.

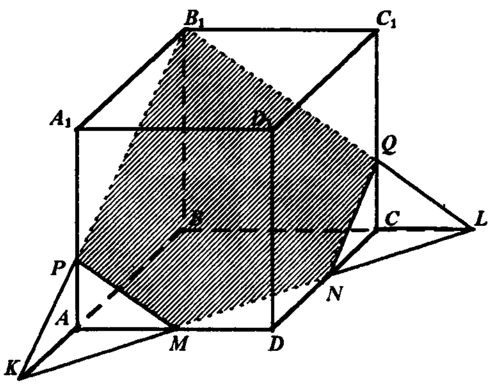


Рис. 10.3

Решение. По условию секущая поверхность проходит через середины ребер M и N (рис. 10.3), т. е. она пересекает плоскость основания по прямой MN. Построим точку L пересечения прямых BC и MN. Точки B_1 и L лежат в секущей плоскости (точка B_1 — по условию, а точка L — в силу того, что она лежит на прямой MN), следовательно, B_1L — линия пересечения секущей плоскости и плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$.

Аналогично найдем, что плоскость грани AA_1B_1B пересекается секущей плоскостью по прямой B_1K (рис. 10.3). При пересечении прямых B_1K и B_1L с ребрами AA_1 и CC_1 найдем точки пересечения P и Q. Образуется пятиугольник PB_1QNM — искомое сечение куба заданной плоскостью.

10.14. Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной 8 см, и острым углом 60°. Двугранные углы при основании пирамиды содержат по 45°. Вычислить объем и площадь боковой поверхности пирамиды.

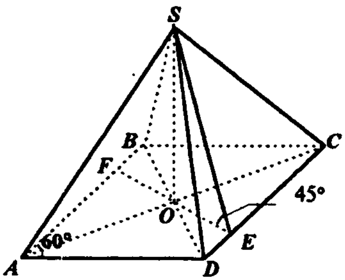


Рис. 10.4

Решение. Объем пирамиды по формуле (10.9) равен $V=\frac{1}{3}SH$. Площадь основания ромба $ABCD$ равна $S=a^2\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, где a — сторона ромба. Для нахождения высоты H проведем в основании пирамиды через точку O $FE\perp CD$ (рис. 10.4). Тогда по теореме о трех перпендикулярах (см. 9) наклонная SE $\perp CD$, т. е. $\angle OES$ — линейный угол двугранного угла при основании и $\angle OES=45^\circ$, а прямоугольный треугольник SOE равнобедренный: $SO=OE$. Так как OE равна половине высоты ромба EE, то $SO=\frac{1}{2}a\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Итак, объем пирамиды равен $V=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\times$ $\times\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1}{8}a^3$.

Так как все двугранные углы при основании пирамиды равны (по 45°), то на основании формулы (10.23)

$S_{бок}=\frac{S}{\cos 45^\circ}=\frac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. При $a=8$ $V=64$, $S_{бок}=32\sqrt{6}$.

Ответ: $V=64$ см^3; $S_{бок}=32\sqrt{6}$ см^2.

10.15. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что его четыре вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре — в плоскости ее основания. Определить ребро куба, если высота пирамиды равна 16 см, а боковое ребро равно 20 см.

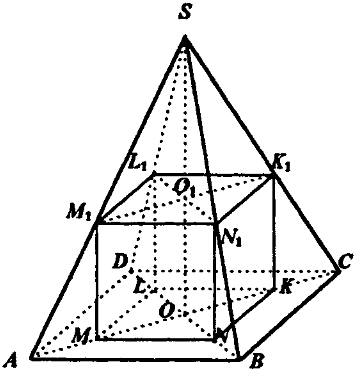


Рис. 10.5

Решение. Обозначим сторону куба через x. Из подобия треугольников SO_1K_1 и SOC (рис. 10.5), очевидного в силу того, что $O_1K_1\parallel OC$, следует: $\frac{SO_1}{SO}=\frac{O_1K_1}{OC}$.

Здесь $SO_1=SO-OO_1=H-x$, $SO=H$, $O_1K_1=\frac{x}{\sqrt{2}}$ (половине диагонали квадрата $M_1L_1K_1N_1$), $OC = \sqrt{l^2 - H^2}$, где l — боковое ребро, H — высота пирамиды. Следовательно, $\frac{H-x}{H} = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 - H^2}}$. Решая уравнение, найдем $x = \frac{H\sqrt{2(l^2 - H^2)}}{H + \sqrt{2(l^2 - H^2)}}$ и при $l = 20$ см, $H = 16$ см вычислим $x = 48\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

Ответ: $48\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ см.

10.16. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ построить сечение, проходящее через сторону основания DC и точку M, принадлежащую боковому ребру SB. Определить вид сечения.

10.17. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, M и N, лежащие соответственно на ребрах AD, A_1A и B_1B, если $AK : KD = 1 : 2$, $A_1M : MA = 2 : 1$, $B_1N : NB = 1 : 2$.

10.18. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ построить сечение, проходящее через диагональ AC параллельно боковому ребру SD.

10.19. В правильной треугольной призме $ABC\,A_1B_1C_1$ построить сечение плоскостью, проходящей через точки K, L и M, лежащие соответственно на ребрах AA_1, AC и BB_1, если $A_1K = KA$, $AL : LC = 1 : 2$; $B_1M = MB$.

10.20. В кубе $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ построить сечение, проходящее через ребро DC и точку пересечения диагоналей граней AA_1B_1B.

10.21. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 80 см, сторона основания — 120 см. Вычислить площадь сечения, проходящего через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.

10.22. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 10 см. Найти кратчайшее расстояние от бокового ребра до непересекающей его диагонали призмы.

10.23. Высота правильной треугольной пирамиды равна 40 см, сторона основания — 10 см. Вычислить площадь сечения, проведенного через одну из сторон основания перпендикулярно к противолежащему ребру.

10.24. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 8 см, а стороны оснований — 5 и 6 см. Вычислить площадь сечения, проведенного через меньшую сторону нижнего основания и противоположную ей сторону верхнего основания.

10.25. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом 30°. Вычислить угол наклона ее к основанию.

10.26. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 20 см, двугранные углы при боковых ребрах — по 120°. Найти боковую поверхность пирамиды.

10.27. Основанием пирамиды служит ромб, одна из диагоналей которого равна стороне. Высота пирамиды проходит через вершину тупого угла ромба и равна H. Две грани образуют с плоскостью основания углы в 45°. Найти боковую поверхность пирамиды.

10.28. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Две соседние боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к основанию под углом 60°. Найти полную поверхность пирамиды.

10.29. В основании прямой призмы лежит параллелограмм. Через сторону нижнего основания, равную a, и противолежащую ей сторону верхнего основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол 60°. Площадь сечения S. Найти объем призмы.

10.30. В наклонной треугольной призме одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и представляет собой ромб, диагонали которого равны 3 и 4 см; основанием призмы служит равносторонний треугольник. Найти объем призмы.

10.31. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранные углы при боковых ребрах составляют 120°. Найти объем пирамиды.

10.32. Основанием пирамиды служит ромб со стороной 14 см и острым углом 60°. Двугранные углы при основании пирамиды содержат по 45°. Вычислить объем пирамиды.

10.33. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, двугранные углы при боковых ребрах содержат по 120°. Найти объем пирамиды.

10.34. Основанием пирамиды служит прямоугольник; одна боковая грань перпендикулярна к основанию, а остальные боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Высота пирамиды равна 30 см. Вычислить объем пирамиды.

10.35. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 10 и 14 см. Каждое из боковых ребер пирамиды наклонено к основанию под углом 45°. Вычислить объем пирамиды.

10.3. Круглые тела

10.36. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна a. Вычислить объем тела, полученного от вращения этого многоугольника вокруг оси, перпендикулярной большей диагонали AD многоугольника и проходящей через вершину A.

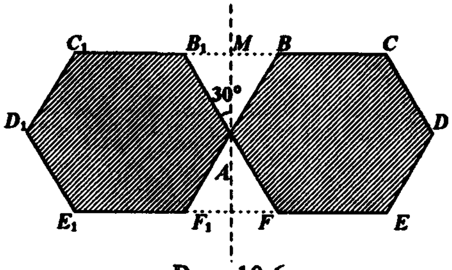


Рис. 10.6

Решение. Объем искомого тела вращения (сечение его изображено на рис. 10.6) равен удвоенной разности между объемами V_2 усеченного конуса, полученного за счет вращения трапеции $AMBCD$ и V_1 конуса, полученного от вращения треугольника AMB. По формуле **(10.12)**

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(MC^2 + AD^2 + MC \cdot AD\right) \cdot AM =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + 4a^2 + \frac{3a}{2} \cdot 2a\right)\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{37\pi a^3\sqrt{3}}{24},$$

ибо $MC = MB + BC = a\sin 30° + a = \dfrac{3a}{2}$ $(\angle MAB = 30°)$, $AD = 2a$.

По формуле **(10.17)**

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi MB^2 \cdot OM = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Итак, $V = 2\left(V_2 - V_1\right) = 3\pi\sqrt{3}a^3$.

Ответ: $3\pi\sqrt{3}a^3$.

10.37. В шаровой сектор радиуса R вписан шар. Найти длину окружности, по которой касаются поверхности шара и шарового сектора, если центральный угол в осевом сечении шарового сектора равен 60°.

Решение. Поверхности шара и шарового сектора касаются по окружности радиуса CE (см. сечение рассматриваемых тел на рис. 10.7).

По условию $\angle COD = 60°$, следовательно, $\angle COO_1 = 30°$, $\angle DCO_1 = \angle COO_1 = 30°$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Из треугольника O_1EC $CE = r\cos 30° = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, где r — радиус шара. Из треугольника COO_1 $O_1C = OO_1 \sin 30° = \frac{R-r}{2}$ (где R — радиус шарового сектора), или $r = \frac{R-r}{2}$, откуда $r = \frac{R}{3}$ и $CE = \frac{R}{3}\cos 30° = \frac{R\sqrt{3}}{6}$. Длина искомой окружности равна $2\pi CE = \frac{\pi R\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi R\sqrt{3}}{3}$.

10.38. Полукруг свернут в коническую поверхность. Сколько градусов содержит угол между образующей и высотой конуса?

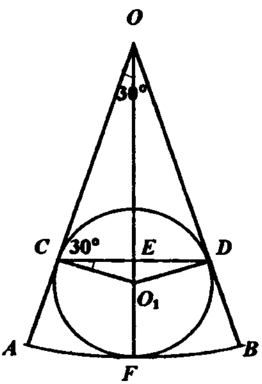


Рис. 10.7

10.39. Радиус основания конуса равен 12 см, образующая — 40 см. Найти угол развертки конуса.

10.40. В конусе проведено сечение через его вершину под углом 30° к высоте конуса. Вычислить площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания равен 5 см.

10.41. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны; высота равна H. Найти площадь сечения усеченного конуса, проведенного через середину высоты параллельно основаниям.

10.42. Прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $2a$, и острым углом 30° вращается вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найти объем полученного тела.

10.43. Равнобедренная трапеция с острым углом 60° и боковой стороной, равной a, вращается вокруг меньшего основания, тоже равного a. Найти поверхность полученного тела.

10.44. Ромб со стороной a и острым углом 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно к стороне. Найти поверхность полученного тела.

10.45. Радиус шара 60 см. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 30° к нему. Вычислить площадь полученного сечения.

10.46. Радиусы двух шаров 16 и 20 см, расстояние между их центрами — 25 см. Найти длину окружности, по которой пересекаются их поверхности.

10.47. В шар радиуса R вписан конус. Найти объем этого конуса, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°.

10.48. В правильной треугольной пирамиде каждое из боковых ребер равно b и наклонено к основанию под углом 30°. Найти поверхность описанного шара.

10.49. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти объем вписанного шара.

10.50. В шар радиуса R вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к основанию под углом 30°. Найти объем цилиндра.

10.51. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании — 60°. Найти поверхность вписанного шара.

10.52. В конус вписан шар радиуса R. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти объем конуса.

10.4. Задачи с применением тригонометрии

10.53. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной к основанию и делящей две стороны основания пополам. Определить объем отсеченной пирамиды, если даны сторона a основания первоначальной пирамиды и двугранный угол α при основании.

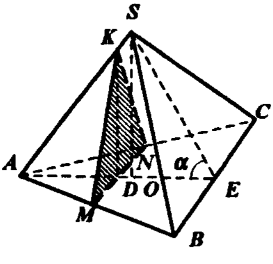


Рис. 10.8

Решение. (Рис. 10.8) Для построения искомого сечения через середины сторон AB и AC проведем среднюю линию MN. Из точки D, где MN пересекает высоту основания AE, проведем DK параллельно высоте OS, т.е. DK перпендикулярна плоскости основания. Искомое сечение есть MKN, так как плоскость MKN проходит через перпендикуляр KD к плоскости основания ABC и перпендикулярна последней на основании признака перпендикулярности плоскостей (см. 6). Двугранный угол при основании измеряется линейным углом AES ($OE \perp BC$, $SE \perp BC$ на основании теоремы о трех перпендикулярах — см. 9), т. е. $\angle AES = \alpha$.

Площадь основания отсеченной пирамиды — равностороннего треугольника AMN равна $S = \dfrac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$. Для нахождения высоты KD воспользуемся отношением, вытекающим из подобия треугольников AKD и ASO — $KD : OS = AD : AO$. Так как $AD = \frac{1}{2}AE$, $AO = \frac{2}{3}AE$ (центр равностороннего треугольника — точка пересечения медиан делит их в отношении 2 : 1), то $KD : OS = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$, т. е. $KD = \frac{3}{4}OS$. Отрезок OS находим из треугольника OSE, в котором $OE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, а $\angle SEO = \alpha$, т. е. $OS = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. Итак, объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}S \cdot OS = \dfrac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{128}$.

Ответ: $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{128}$.

10.54. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a углы между ребрами при ее вершине равны между собой и каждый равен α ($\alpha \le 90°$). Определить углы между боковыми гранями пирамиды и площадь сечения, проведенного через сторону основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру.

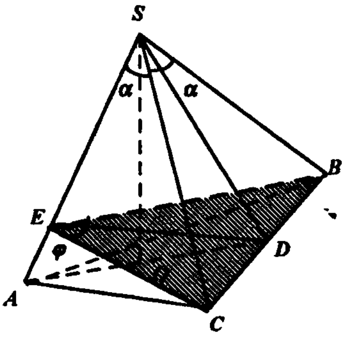


Рис. 10.9

Решение. Проведем $CE \perp AS$ (рис. 10.9). Тогда в силу равенства треугольников AEB и AEC (AE — общая сторона, $AB = AC$, $\angle EAC = \angle EAB$) $BE \perp AS$, т. е. $\angle CEB = \varphi$ есть линейный угол двугранного угла между боковыми гранями пирамиды.

Ребро AS перпендикулярно двум прямым EB и EC, лежащим в плоскости сечения, следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (см. 5) AS перпендикулярно плоскости BEC и треугольник BEC — искомое сечение. Так как $ED \perp BC$ (устанавливается с помощью теоремы о трех перпендикулярах), то

$S_{сеч} = \frac{1}{2} a \cdot ED$ (*). Для нахождения ED последовательно находим из треугольника CSD (в котором $CD = \frac{a}{2}$, $\angle CSD = \frac{\alpha}{2}$):

$$SC = \frac{CD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$ из треугольника CES:

$$EC = SC\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{2\sin\alpha/2} = a\cos(\alpha/2)$$ и, наконец, из треугольника CED:

$$ED = \sqrt{EC^2 - CD^2} = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$$

и после преобразований (рекомендуем их провести читателю) $ED = a\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$. Теперь по формуле (*) находим $S_{сеч}$, а угол φ — с помощью функции $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{CD}{EC} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\varphi = 2\arcsin\left(0{,}5\cos^{-1}\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$S_{сеч} = \frac{a^2}{2}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

10.55. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

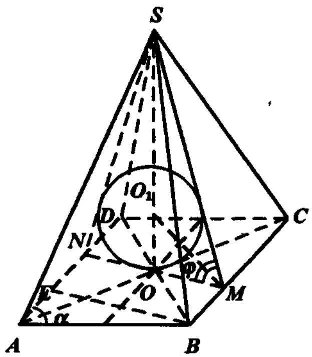


Рис. 10.10

Решение. Проведем $MN \perp BC$ (рис. 10.10), тогда в силу теоремы о трех перпендикулярах $SM \perp BC$ и угол OMS — линейный угол двугранного угла при основании, т. е. $\angle OMS = \varphi$. В силу того, что все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, высота пирамиды проходит через центр вписанной в ее основание $ABCD$ окружности (см. **11**), а центр вписанного в пирамиду шара лежит в точке пересечения высоты OS с биссектрисой O_1M линейного угла двугранного угла при основании (см. **18**).

Из треугольника MOO_1 $OM = OO_1 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, а из треугольника OSM высота пирамиды $H = OS = OM\operatorname{tg}\varphi = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi$. Теперь из треугольника BEA (где $BE \parallel MN$) найдем:

$$AB = a = \frac{BE}{\sin\alpha} = \frac{2\cdot OM}{\sin\alpha} = \frac{2R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, площадь основания $S = a^2\sin\alpha = \dfrac{4R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}$, и объем пирамиды $V = \frac{1}{3}SH$.

Ответ: $V = \dfrac{4R^3\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{3\sin\alpha}$.

10.56. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b и острый угол α. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найти объем параллелепипеда.

10.57. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды l, а высота пирамиды h. Определить двугранный угол при основании.

10.58. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, зная угол α ее бокового ребра с плоскостью основания и площадь S ее диагонального сечения. Найти также угол, образуемый боковой гранью с плоскостью основания.

10.59. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными a, и углом между ними, равным α. Все боковые ребра наклонены к основанию под углом β. Определить объем пирамиды.

10.60. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит прямоугольник, вписанный в круг радиуса R, причем меньшая сторона этого прямоугольника стягивает дугу окружности, содержащую $(2\alpha)^\circ$. Найти объем этого параллелепипеда, зная его боковую поверхность S.

10.61. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Определить объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.

10.62. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Расстояние от центра круга, вписанного в основание пирамиды, до середины высоты боковой грани равно d. Определить полную поверхность пирамиды.

10.63. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b ($a > b$). Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Определить объем усеченной пирамиды и величину двугранных углов при сторонах оснований.

10.64. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведена плоскость. Определить площадь сечения и объемы частей данной пирамиды, на которые она разделена сечением, зная сторону a ее основания и угол α, образованный сечением с основанием.

10.65. Тетраэдр, ребро которого равно a, пересечен плоскостью, содержащей одно из ребер тетраэдра и делящей противоположное ребро в отношении 2 : 1. Определить площадь сечения и углы этого сечения.

10.66. От правильной четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида с полной поверхностью S. Найти полную поверхность призмы, если угол при вершине треугольника, получившегося в сечении, равен α.

10.67. В параллелепипеде все его грани — равные ромбы со сторонами a и острыми углами α. Определить объем параллелепипеда.

10.68. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α. Ребро AA_1 равно b и образует с ребрами AB и AD угол φ. Определить объем параллелепипеда.

10.69. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что вершины его лежат на апофемах пирамиды. Найти отношение объема пирамиды к объему куба, зная, что угол между высотой пирамиды и ее боковой гранью равен α.

10.70. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна d и составляет угол α с основанием. Определить объем цилиндра.

10.71. Образующая усеченного конуса l составляет с плоскостью нижнего основания угол α и перпендикулярна к прямой, соединяющей верхний конец ее с нижним концом противоположной образующей. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

10.72. Определить объем и полную поверхность шарового сектора, вырезанного из шара радиуса R и имеющего в осевом сечении угол α.

10.73. В треугольнике даны сторона a, угол B и угол C. Определить объем тела, полученного от вращения треугольника около данной стороны.

10.74. Ромб с большей диагональю d и острым углом α вращается вокруг оси, проходящей вне его через вершину ромба и перпендикулярной к большей диагонали его. Определить объем тела вращения.

10.75. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне. Боковая сторона равна b и составляет с бо́льшим основанием угол α. Определить поверхность тела, образованного вращением трапеции вокруг большего основания.

10.76. В конус вписан шар. Найти объем шара, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

10.77. В шар радиуса R вписана прямая треугольная призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α, а наибольшая ее боковая грань есть квадрат. Найти объем призмы.

10.78. В усеченный конус вписан шар радиуса r. Образующая конуса наклонена к основанию под углом α. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

10.79. Боковые грани правильной четырехугольной пирамиды наклонены к основанию под углом α. Апофема пирамиды равна m. Найти полную поверхность конуса, вписанного в пирамиду, а также угол наклона бокового ребра к основанию.

10.80. На высоте конуса, равной H, как на диаметре, описан шар. Определить объем части шара, лежащей вне конуса, если угол между образующей и высотой равен α.

11. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

$c' = 0,$ (11.1) $x' = 1$ (11.2)

$(u + v - w)' = u' + v' - w',$ (11.3) $(cu)' = c\,u',$ (11.4)

$(uv)' = u'v + uv',$ (11.5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2},$ (11.6)

$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c}{v^2},$ (11.7) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1},$ (11.8)

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},$ (11.9) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2},$ (11.10)

$\left(e^x\right)' = e^x,$ (11.11) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a,$ (11.12)

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x},$ (11.13) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a},$ (11.14)

$(\sin x)' = \cos x,$ (11.15) $(\cos x)' = -\sin x,$ (11.16)

$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$ (11.17) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$ (11.18)

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то $y' = f(u) \cdot u'$ (11.19)

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (11.20)$$

11.1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл

11.1. Найти производные функций:

а) $y = 4x^5 + 12x\sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x} - 3\sqrt{x}$; б) $y = (3x - x^2)\sin x$;

в) $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$; г) $y = (x^2 + 5x + 1)^8$; д) $y = \dfrac{15}{x^2 + 3x + 10}$;

е) $y = e^{-x^2}$; ж) $y = \ln(3x^2 + 5x + 1)$; з) $y = \log_2 \dfrac{(x-2)^5}{(x+3)^3}$;

и) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$; к) $y = 5^{x^3} \cdot \ln^2 x$.

Решение. а) Для дифференцирования выражение $x\sqrt[3]{x}$ удобно представить в виде $x^{4/3}$. Вынося постоянный множитель за знак производной по правилу **(11.4)** и используя формулы **(11.8)** — **(11.10)**, получим:

$$y' = 4\left(5x^4\right) + 12\left(\frac{4}{3}x^{1/3}\right) + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Ответ: $y' = 20x^4 + 16\sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

б) По правилу дифференцирования произведения двух функций **(11.5)** получим $y' = \left(3x - x^2\right)' \sin x + \left(3x - x^2\right)(\sin x)'$. Далее используем **(11.8)** и **(11.15)**:

$$y' = (3 - 2x)\sin x + \left(3x - x^2\right)\cos x.$$

Ответ: $y' = (3 - 2x)\sin x + \left(3x - x^2\right)\cos x$.

в) По правилу дифференцирования частного двух функций **(11.6)** с учетом **(11.8)** и **(11.16)** получим:

$$y' = \frac{(x^3)'\cos x - x^3(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{3x^2\cos x + x^3\sin x}{\cos^2 x}.$$

Ответ: $\dfrac{3x^2\cos x + x^3\sin x}{\cos^2 x}$.

г) По правилу дифференцирования сложной функции **(11.19)** с учетом **(11.8)** и **(11.1)** получим:

$$y' = 8(x^2 + 5x + 1)^7 \cdot (x^2 + 5x + 1)' = 8(x^2 + 5x + 1)^7(2x + 5).$$

Ответ: $y' = 8(x^2 + 5x + 1)^7(2x + 5)$.

д) Вынося постоянный множитель 15 за знак производной и учитывая **(11.7)** и правило дифференцирования сложной функции **(11.19)**, получим:

$$y' = 15\left(\frac{1}{x^2 + 3x + 10}\right) = 15\left(-\frac{1}{(x^2 + 3x + 10)^2}\right)\left(x^2 + 3x + 10\right)' =$$

$$= \frac{-15(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 10)^2}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{-15(2x+3)}{(x^2+3x+10)^2}$.

е) По правилу дифференцирования сложной функции **(11.19)** с учетом **(11.11)** и **(11.8)** получим $y' = e^{-x^2}\left(-x^2\right)' = -2x\,e^{-x^2}$.

Ответ: $y' = -2x\,e^{-x^2}$.

ж) По правилу дифференцирования сложной функции **(11.19)** с учетом **(11.13)** и **(11.8)** получим:

$$y' = \frac{1}{3x^2+5x+1}\left(3x^2+5x+1\right)' = \frac{6x+5}{3x^2+5x+1}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{6x+5}{3x^2+5x+1}$.

з) Прежде чем дифференцировать функцию, целесообразно упростить ее выражение, применяя формулы логарифмирования: $y = 5\log_2(x-2) - 3\log_2(x+3)$. Теперь по формулам **(11.4)**, **(11.14)** и **(11.19)** получим:

$$y' = 5(\log_2(x-2))' - 3(\log_2(x+3))' = 5\left(\frac{1}{x-2}(x-2)'\right) - 3\left(\frac{1}{x+3}(x+3)'\right) =$$

$$= \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+3} = \frac{2x+21}{(x-2)(x+3)}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{2x+21}{(x-2)(x+3)}$.

и) При дифференцировании по формулам **(11.9)** и **(11.13)** следует учесть, что первое слагаемое представляет степенную функцию ($y = \sqrt{u}$), ее аргумент — логарифмическую функцию ($u = \ln x$), а второе слагаемое — логарифмическую функцию ($y = \ln u_1$, где $u_1 = \sqrt{x}+1$):

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}(\ln x+1)' + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\left(\sqrt{x}+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x(\ln x+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$.

к) При дифференцировании необходимо учесть, что данная функция представляет произведение двух функций 5^{x^3} и $\ln^2 x$, каждая из которых является сложной функцией ($y = 5^u$, где $u = x^3$; $y = u_1^2$, где $u_1 = \ln x$). Применяя формулы **(11.5)**, **(11.12)**, **(11.8)** и **(11.13)**, получим:

$$y' = \left(5^{x^3}\right)' \cdot \ln^2 x + 5^{x^3}\left(\ln^2 x\right)' = \left[5^{x^3} \ln 5 \left(x^3\right)'\right]\ln^2 x + 5^{x^3}\left[2\ln x(\ln x)'\right] =$$

$$= 5^{x^3} \ln 5 \cdot 3x^2 \ln^2 x + 5^{x^3} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 5^{x^3} \ln x\left(3\ln 5 \cdot x^2 \ln x + \frac{2}{x}\right).$$

Ответ: $y' = 5^{x^3} \ln x\left(3\ln 5 \cdot x^2 \ln x + \frac{2}{x}\right)$.

Найти производные функций:

11.2. $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$.

11.3. $y = x^4(8\ln^2 x - 4\ln x + 1)$.

11.4. $y = \sqrt[3]{x}\,\left(e^{3x} - 5\right)$.

11.5. $y = \sqrt[4]{1+e^{4x}} + \sqrt{5}$.

11.6. $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{1-3x}{1+3x}\right)^2}$.

11.7. $y = \ln\frac{x^3-9}{x^3-1}$.

11.8. $y = 3\ln(2x^3 - 4x)^2$.

11.9. $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

11.10. $y = \ln\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$.

11.11. $y = \frac{x^8}{(1-x^2)^4}$.

11.12. $y = 3x\ln(1-x^2)$.

11.13. $y = x^3\ln^2 x$.

11.14. $y = \sqrt[3]{\frac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$.

11.15. $y = (\ln x + 3)^3 - \ln(x+3)$.

11.16. $y = (x\,e^{2x} + 3)^5$.

11.17. $y = e^{3x}\sqrt{2x^2-1}$.

11.18. $y = \sqrt{\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}$.

11.19. $y = (x^2-1)\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

11.20. $y = x\ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4+1}\right)$.

11.21. $y = \ln\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$.

11.22. $y = (x^3-3)e^{-3x}$.

11.23. $y = \sqrt{\frac{1+e^{-4x}}{1-e^{-4x}}}$.

11.24. $y = \sin(x^2 + 2^x)$.

11.25. $y = 4e^{\sqrt{\ln x}}\left(1 - \sqrt{\ln x}\right)$.

11.26. $y = \frac{\ln\cos x}{\cos x}$.

11.27. $y = \cos^2 x + \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

11.28. $y = \ln\,(x \sin x)$.

11.29. $y = \ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$.

11.30. $y = e^x \ln \sin x$.

11.31. $y = \left(\cos^2 x + \frac{2}{3}\right)\sin^3 x$.

11.32. $y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

11.33. $y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$.

11.34. Вычислить значение производной функции $y = f(x)$ при $x = x_0$:

а) $y = \ln\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $y = \ln^4 \sin x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

а) Вначале найдем производную функции, предварительно заметив, что $y = \frac{1}{2}\ln\,(1+\operatorname{ctg}^2 x)$. Теперь

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\cdot 2\operatorname{ctg}\,x\,(\operatorname{ctg}\,x)' =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\operatorname{ctg}\,x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg}\,x.$$

Находим значение производной при $x = \frac{\pi}{4}$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Ответ: -1.

б) Производная функции

$$y' = 4(\ln\sin x)^3\cdot(\ln\sin x)' = 4\ln^3\sin x\,\frac{1}{\sin x}(\sin x)' = 4\ln^3\sin x\cdot\cos x/\sin x.$$

Значение производной при $x = \frac{\pi}{2}$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\ln^3\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Ответ: 0.

Найти производные функций и вычислить их значения при $x = x_0$:

11.35. $y = x^3 + x\sqrt{e^x}$; $x_0 = 1$. **11.36.** $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$; $x_0 = 1$.

11.37. $y = 30\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^4 - 1}}$; $x_0 = 2$. **11.38.** $y = 6\ln\dfrac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$; $x_0 = 5$.

11.39. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$; $x_0 = 1$.

11.40. $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\, x - \mathrm{tg}\, x + x$; $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

11.41. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 12}\right)$; $x_0 = 2$.

11.42. $y = (1 + \mathrm{tg}^2\, 3x)^4$; $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$.

11.43. $y = \cos^2 x - \ln\cos x$; $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

11.44. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

11.45. $y = (1 + \sin^2 x)^4$; $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **11.46.** $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1 + \mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}\, x}}$; $x_0 = 0$.

11.47. Найти уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0:

а) $y = 5x^3 + 2x^2 - x + 3$; $x_0 = 2$; б) $y = x \cdot \ln(x + e)$; $x_0 = 0$.

Решение. а) При $x = 2$ функция $y = f(x)$ принимает значение $f(2) = 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 3 = 49$. В соответствии с **(11.20)** уравнение искомой касательной примет вид $y - 49 = k(x - 2)$, где угловой коэффициент $k = f'(x_0) = f'(2)$. Найдем производную функции $f'(x) = 15x^2 + 4x - 1$ и ее значение при $x = 2$: $f'(2) = 15 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 67$. Теперь уравнение касательной примет вид $y - 49 = 67(x - 2)$ или $y = 67x - 85$.

Ответ: $y = 67x - 85$.

б) Производная функции

$$y' = x'\ln(x + e) + x(\ln(x + e))' = \ln(x + e) + \frac{x}{x + e},$$

так как производная постоянной $e' = 0$. При $x = 0$ функция $f(x)$ и ее производная принимают соответственно значения $f(0) = 0 \cdot \ln(0 + e) =$

$= 0$ и $f'(0) = \ln(0+e) + \frac{0}{0+e} = 1$. Поэтому на основании **(11.20)** уравнение касательной в точке $x = 0$ $y - 0 = 1(x - 0)$ или $y = x$.

Ответ: $y = x$.

Составить уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0:

11.48. $y = 2x^3 + x^2 - 5$; $x_0 = 2$.

11.49. $y = \frac{x}{x+2}$, $x_0 = 0$.

11.50. $y = \ln(2e - x)$, $x_0 = e$.

11.51. $y = x^2e^{-x}$, $x_0 = 1$.

11.52. В каких точках касательная к графику функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4$$

образует с осью OX угол 45°?

Решение. Производная функции $f'(x) = x^2 - 5x + 7$ определяет в фиксированной точке x угловой коэффициент касательной, равный по условию $\operatorname{tg} 45° = 1$, т. е. $x^2 - 5x + 7 = 1$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Ординаты точек $f(2) = 8/3$ и $f(3) = 7/2$.

Ответ: (2; 8/3), (3; 7/2).

11.53. Под каким углом к оси OX наклонена касательная, проведенная к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $x = 2$?

11.54. Составить уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проходящих через точки пересечения этих кривых.

11.55. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ равен 3?

11.56. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{4t+3}{t+4}$, где s измеряется в метрах, а t — в секундах. Найти скорость тела в момент $t = 9$.

Решение. Скорость тела изменяется по закону $v(t) = s'(t) = \left(\frac{4t+3}{t+4}\right)' = \frac{13}{(t+4)^2}$. В момент $t = 9$ скорость $v(9) = \frac{13}{(9+4)^2} = 1/13$.

Ответ: 1/13 м/с.

11.57. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $h(t) = 4 + 8t - 5t^2$ (м). Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей.

Решение. Скорость тела в момент t $v(t) = h'(t) = 8 - 10t$. В момент соприкосновения с землей $h(t) = 0$, т. е. $4 + 8t - 5t^2 = 0$, откуда $t_1 = 2$; $t_2 = -0,4$ (не подходит по смыслу, ибо $t > 0$). Скорость тела в момент $t = 2$ $v(2) = 8 - 10 \cdot 2 = -12$.

Ответ: -12 м/с.

11.58. Закон прямолинейного движения точки имеет вид $S(t) = 2t^3 - 3t + 4$ (м). Найти скорость точки в момент $t = 3$ (с).

11.59. Движения двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями $S_1 = 4t^2 + 2$, $S_2 = 3t^2 + 4t - 1$ (S_1, S_2 — в метрах, t — в секундах). Найти скорости движения точек в те моменты, когда пройденные ими расстояния равны.

11.2. Применение производной

При определении интервалов монотонности и экстремумов дифференцируемой функции $y = f(x)$ рекомендуется руководствоваться следующей схемой:

а) найти производную функции;

б) найти критические точки функции, в которых производная равна нулю;

в) критические точки (а также точки, в которых функция y не существует) отметить на числовой оси и определить знак производной y' в каждом из полученных интервалов. Функция возрастает в интервалах, в которых $y' > 0$, и убывает, если $y' < 0$. В критических точках, при переходе через которые слева направо y' меняет свой знак с "+" на "—", функция имеет максимум, а в точках, в которых y' меняет знак с "—" на "+", функция имеет минимум;

г) найти значения (экстремумы) функции в точках максимума и минимума.

11.60. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции и построить ее график:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$; б) $y = (x - 3)^2 (x - 2)^2$.

Решение. а) Производная функции $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Найдем критические точки функции, в которых производная $f'(x) = 0$, т. е. $3x^2 - 12x + 9 = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Производную $f' = (x)$ представим в виде $f'(x) = (x - 1)(x - 3)$. Критические точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty; 1)$; $(1; 3)$; $(3; \infty)$ (рис. 11.1).

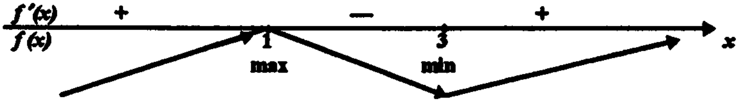


Рис. 11.1

При $x \in (-\infty; 1)$ оба сомножителя $(x - 1)$ и $(x - 3)$ отрицательны, при $x \in (3; \infty)$ — положительны, следовательно, их произведение имеет положительный знак, т. е. $f'(x) > 0$. При $x \in (1; 3)$ те же сомножители имеют разные знаки и $f'(x) < 0$. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; 1)$ и при $x \in (3; \infty)$, так как в этих интервалах $f'(x) > 0$, и убывает при $x \in (1; 3)$, где $f'(x) < 0$.

Так как при переходе через точку $x = -1$ слева направо производная $f'(x)$ меняет свой знак с "+" на "—", то $x = 1$ есть точка макси-

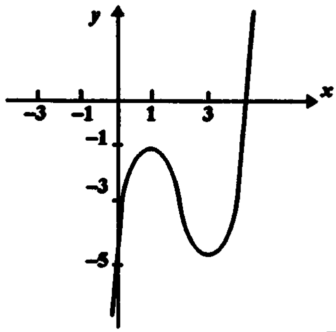


Рис.11.2

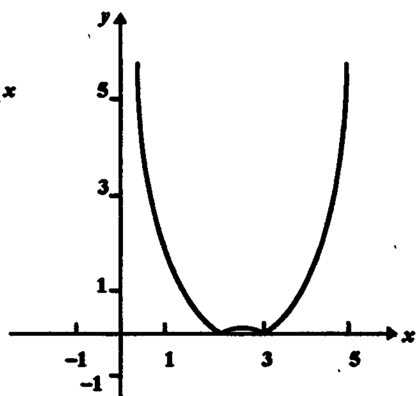


Рис. 11.3

мума функции $f(x)$; аналогично вследствие того, что при переходе через точку $x = 3$ производная меняет свой знак с "—" на "+", то $x = 3$ есть точка минимума $f(x)$. Находим соответственно максимум и минимум функции: $f_{max} = f(1) = -1$, $f_{min} = f(3) = -5$. Строим график функции, задав уточняющие график точки $f(0) = -5$, $f(4) = -1$ (рис. 11.2).

б) Производная функции $y' = 2(x - 3)(x - 2)^2 + (x - 3)^2 \cdot 2(x - 2) =$ $= (x - 2)(x - 3)(2x - 4 + 2x - 6) = 2(x - 2)(x - 3)(x - 2{,}5)$.

Найдем критические точки из условия $f'(x) = 0$, т. е. $x_1 = 2$, $x_2 =$ $= 2{,}5$, $x_3 = 3$. Эти точки разбивают область определения функции на четыре интервала $(-\infty; 2)$, $(2; 2{,}5)$, $(2{,}5; 3)$ и $(3; \infty)$ (рис. 11.4).

Рис. 11.4

При $x \in (-\infty; 2)$ все сомножители в выражении $f'(x)$ отрицательны, т. е. $x - 2 < 0$, $x - 3 < 0$, $x - 2{,}5 < 0$ и их произведение отрицательно, т. е. $f'(x) < 0$. Аналогично устанавливаются знаки производной $f'(x)$ в других интервалах (рис. 11.4). Таким образом, функция $f(x)$ убывает в интервале $(-\infty; 2)$ и $(2{,}5; 3)$, так как в каждом из этих интервалов $f'(x) < 0$. Функция $f(x)$ возрастает в интервале $(2; 2{,}5)$ и $(3; \infty)$, так как здесь $f'(x) > 0$.

При переходе через точки $x = 2$ и $x = 3$ слева направо производная $f'(x)$ меняет свой знак с "—" на "+", следовательно, функция $f(x)$ достигает в этих точках минимума соответственно $f(2) = 0$ и $f(3) = 0$. А при переходе через точку $x = 2{,}5$ производная $f'(x)$ меняет свой знак с "+" на "—", т. е. в этой точке функция достигает максимума $f(2{,}5) = 1/16$. Строим график, задав уточняющие его точки, например $f(1) = 4$, $f(4) = 4$ (рис. 11.3).

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций и построить их графики:

11.61. $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

11.62. $y = 0{,}5x^4 - 4x^2$.

11.63. $y = x^4 - 10x^2 + 9$.

11.64. $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$.

11.65. $y = (1 + x)^3(4 - x)$.

11.66. $y = 27(x - 1)^2(3 - x)$.

11.67. $y = (3x - 1)^2(1 + 2x)^2$.

11.68. $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - \dfrac{9}{4}$.

11.69. $y = \dfrac{1}{5}x^5 - 4x^2$.

11.70. $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$.

При определении наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ **на отрезке** $[a; b]$ рекомендуется пользоваться следующей схемой: а) найти производную функции; б) найти критические точки функции; в) найти значения функции $y = f(x)$ в критических точках и на концах отрезка и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

З а м е ч а н и е. Если функция непрерывна на **интервале**, то она может не принимать на нем наибольшее и наименьшее значение. В частном случае, если дифференцируемая функция на интервале $(a; b)$

имеет лишь одну точку максимума (или одну точку минимума), то наибольшее (или наименьшее) значение функции совпадает с максимумом (или минимумом) этой функции.

11.71. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

а) $y = x^3 - 6x^2 - 9x - 5$, $[0; 5]$; б) $y = x + \cos^2 x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Производная $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Критические точки функции, при которых $f'(x) = 0$, т. е. $3x^2 - 12x + 9 = 0$, есть $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ (см. задачу **11.60**). Значения функции в критических точках $f(1) = -1$ и $f(3) = -5$ и на концах отрезка $f(0) = -5$, $f(5) = 15$.

Так как непрерывная на некотором отрезке функция всегда имеет на нем наибольшее и наименьшее значения, достигаемые либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка, то из четырех полученных значений $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ выбираем наибольшее $f_{\text{наиб.}} = f(5) = 15$ и наименьшее $f_{\text{наим.}} = f(0) = f(3) = -5$.

Ответ: $f_{\text{наиб.}} = 15$, $f_{\text{наим.}} = -5$.

б) Производная $f'(x) = 1 + 2\cos x(\cos x)' = 1 - 2\cos x \cdot \sin x = 1 - \sin 2x$. Найдем критические точки функции из условия $f'(x) = 1 - \sin 2x = 0$, откуда $\sin 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеем одну критическую точку $x = \frac{\pi}{4}$.

Найдем значения функции в критической точке и на концах отрезка: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, из которых выбираем наибольшее $f_{\text{наиб}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ и наименьшее $f_{\text{наим.}} = f(0) = 1$.

Ответ: $f_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{2}$; $f_{\text{наим.}} = 1$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданных отрезках:

11.72. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $[-2; 2]$.

11.73. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $[-2; 1]$.

11.74. $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $[1; 6]$. **11.75.** $y = \frac{\sin 2x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

11.76. $y = x + \dfrac{8}{x^4}$, $[-2; -1]$. **11.77.** $y = 2x^2 - \ln x$, $[1; e]$.

11.78. $y = \cos^2 x + \sin x$, $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$. **11.79.** $y = x + \cos^2 x$, $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

При решении текстовых и геометрических задач, в которых требуется найти наименьшее или наибольшее значение какой-то величины, следует: а) выбрать независимую переменную (аргумент) и установить область ее допустимых значений; б) записать функцию, выражающую зависимую переменную через аргумент; в) решить задачу на отыскание наибольшего и наименьшего значения в найденной области.

11.80. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^2 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Решение. Обозначим сторону основания бассейна x (м). Тогда площадь квадратного дна составит $S_{\text{осн}} = x^2$, а высота бассейна определится из условия $h = \dfrac{V}{S_{\text{осн}}} = \dfrac{32}{x^2}$.

Площадь облицовочной поверхности S состоит из суммы площадей основания и четырех боковых стен бассейна, т. е.

$$S = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Таким образом, задача свелась к отысканию такого значения $x \in (0; \infty)$, при котором функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную функции $S'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2}$ и, приравняв ее нулю, найдем единственную критическую точку функции $x = 4$. Слева от критической точки при $x < 4 f'(x) < 0$, а справа при $x > 4 f'(x) > 0$, следовательно, в точке $x = 4$ функция $f(x)$ достигает минимума.

Так как непрерывная на интервале функция имеет только один экстремум — в данном случае минимум, то этот минимум и будет наименьшим значением функции в этом интервале (см. замечание на с. 232). Итак, размеры бассейна $x = 4$, $h = 32/4^2 = 2$.

Ответ: размеры бассейна 4 × 4 × 2 (м).

11.81. Экспериментально установлено, что расход бензина y (л) на 100 км пути автомобиля ГАЗ-69 в зависимости от скорости x (км/ч) описывается функцией $y = 18 - 0{,}3x + 0{,}003x^2$, где $30 \leq$ $\leq x \leq 100$. Определить наиболее экономичную скорость автомобиля, при которой расход бензина будет наименьшим. Найти это наименьшее количество бензина.

Решение. Скорость расходования топлива в зависимости от скорости движения определяется производной $y' = -0{,}3 + 0{,}006x$, равной нулю при $x = 50$. Для отыскания наименьшего значения функции $f(x)$ сравниваем значение функции в критической точке $f(50) = 10{,}5$ и значения на концах отрезка $f(30) = 11{,}7$ и $f(100) = 18$ и выбираем наименьшее.

Ответ. При скорости 50 км/ч расход бензина наименьший, равный 10,5 л на 100 км пути.

11.82. Из пункта A по направлению к пункту B со скоростью 50 км/ч движется автомобиль и одновременно из пункта B по направлению к пункту C идет поезд со скоростью 80 км/ч. Через какое время расстояние между автомобилем и поездом будет наименьшим, если $AB = 200$ км, а $\angle ABC = 60°$?

Рис. 11.5

Решение. В момент времени t от начала движения автомобиль будет находиться в точке D, а поезд в точке E (рис. 11.5), причем пройденные ими расстояния будут соответственно $AD = 50t$ и $EB = 80t$. Расстояние DE между автомобилем и поездом в момент t найдем по теореме косинусов из $\Delta\, ABE$, в котором $BD = AB - AD = 200 - 50t$:

$$DE^2 = (200 - 50t)^2 + (80t)^2 - 2(200 - 50t)(80t)\cos 60° = 10(129t^2 - 360t + 400).$$

Итак, задача свелась к нахождению значения $t \in (0; \infty)$, при котором функция $S(t) = 10(129t^2 - 360t + 400)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную $S'(t) = 60(43t - 60)$; приравняв ее к нулю, получим единственную критическую точку $t = \frac{60}{43}$. Так как $S'(t) < 0$ для $t < \frac{60}{43}$ и $S'(t) > 0$ для $t > \frac{60}{43}$, то при $t = \frac{60}{43}$ функция $S(t)$ имеет минимум, и этот единственный минимум (в соответствии с замечанием на с. 233) является наименьшим значением функции $S(t)$ на интервале $(0; \infty)$.

Ответ: $t = 1\frac{17}{43}$ ч.

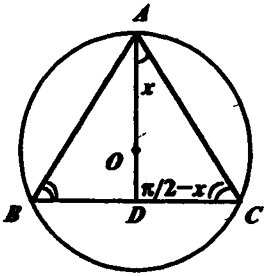


Рис. 11.6

11.83. В круг радиуса $R = 8$ см вписан равнобедренный треугольник наибольшего периметра. Найти периметр этого треугольника.

Решение. Выберем в качестве независимой переменной x половину величины угла A равнобедренного треугольника (рис. 11.6). Учитывая, что сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла, найдем стороны и периметр $P(x)$ треугольника:

$$BC = 2R\sin A = 2R\sin 2x,\ AC = AB = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2R\cos x,$$

$$P(x) = BC + 2AC = 2R(\sin 2x + 2\cos x).$$

Таким образом, задача свелась к отысканию наибольшего значения функции $P(x)$ в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Найдем производную функции $P'(x) = 4R(\cos 2x - \sin x)$. Критические точки функции находим из уравнения $P'(x) = 0$, откуда $\cos 2x - \sin x = 0$. Решая уравнение, получим:

$$(1 - 2\sin^2 x) - \sin x = 0 \text{ или } 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$$

откуда $(\sin x)_1 = \frac{1}{2}$ и $(\sin x)_2 = -1$.

С учетом того, что $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, получим лишь одну критическую точку $x = \frac{\pi}{6}$. Слева от критической точки при $0 < x < \frac{\pi}{6}$ производная $P'(x) > 0$ и справа при $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ $P'(x) < 0$ (в этом можно убедиться, задав, например, в полученных интервалах значения $x = \frac{\pi}{12}$ и $x = \frac{\pi}{3}$. Действительно, при $x = \frac{\pi}{12}$

$$P'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4R\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{12}\right) = 4R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{\pi}{12}\right) > 4R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) > 0,$$

ибо в силу возрастания $\sin x$ в 1-й четверти $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} > \sin\frac{\pi}{12}$, а при $x = \frac{\pi}{3}$ $P'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4R\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = -2R\left(1+\sqrt{3}\right) < 0$. Следовательно, при $x = \frac{\pi}{6}$ функция $P(x)$ достигает максимума, который (в силу замечания на с. 232) является наибольшим значением функции $P(x)$ на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, равным $P\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3R\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ см. (Очевидно, что треугольник с наибольшим периметром есть равносторонний — длина его стороны $R\sqrt{3}$, а периметр $3R\sqrt{3}$).

При решении задачи в качестве независимой переменной x можно было взять высоту AD вписанного треугольника. В этом случае, как нетрудно убедиться, $P(x) = 2\left(\sqrt{2Rx} + \sqrt{x(2R-x)}\right)$; где $0 < x < 2R$ и решение задачи усложняется (предлагаем убедиться в этом самому читателю).

Ответ: $P_{\text{наиб}} = 24\sqrt{3}$ см.

11.84. Найти наибольшее значение объема правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой составляет 12 см.

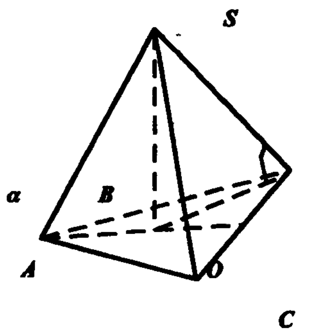


Рис. 11.7

Решение. Обозначим ребро пирамиды l (l = 12 см), а угол его наклона к основанию α. Тогда объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$. Из прямоугольного треугольника $\Delta\, SOB$ высота $H = OS = l \sin\alpha$, радиус описанной около основания окружности $R = OB = l\cos\alpha$ (рис. 11.7).

Сторона правильного треугольника выражается через радиус описанной окружности по формуле $a = R\sqrt{3} = l\sqrt{3}\cos\alpha$, а площадь основания

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(l\sqrt{3}\cos\alpha\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\alpha}{4}.$$

Теперь объем пирамиды $V = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\alpha}{4}\right) l \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} l^3 \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$.

Итак, задача свелась к отысканию наибольшего значения функции $V(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^3 \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$ в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ и ее можно было решить дальше аналогично задаче **11.83.** Но решение существенно упрощается, если обозначить $\sin\alpha = y$. В этом случае, учитывая, что $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - y^2$, $V(y)$ представляет достаточно простую функцию $V(y) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^3 \left(1 - y^2\right) y$, а значениям $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ соответствуют значения $y \in (0;\ 1)$. Теперь задача сводится к отысканию наибольшего значения функции $V(y) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^3 \left(y - y^3\right)$ на интервале $(0;\ 1)$. Найдем производную функции $V'(y) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^3 \left(1 - 3y^2\right)$. Критические точки получим из уравнения $V'(y) = 0$, откуда $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. С учетом того, что $y \in (0;\ 1)$, получим одну критическую точку $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Слева от критической точки при $0 < y < \frac{\sqrt{3}}{3}$ производная $V'(y) > 0$, а справа при $\frac{\sqrt{3}}{3} < y < 1$ $V'(y) < 0$ (в этом легко убедиться, задав, например, в полученных интервалах значения $y = 0$, $y = \frac{2}{3}$ и вычислив соответственно $V'(0) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^3 > 0$, $V'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{12} l^3 < 0$. Следовательно, при $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ функция $V(y)$ достигает максимума $V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{6} l^3$, который и является наибольшим значением функции на данном интервале. При $l = 12$ см $V_{наиб} = 288$ см^3.

Ответ: $V_{наиб} = 288$ см^3.

11.85. Найти число, которое, будучи сложено со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

11.86. Какое положительное число, будучи сложено с обратным числом, дает наименьшую сумму?

11.87. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 см. Каким должно быть ее большее основание, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

11.88. Из имеющихся досок можно построить забор длиной 200 м. Определить размеры двора прямоугольной формы, который можно огородить этими досками, используя для одной стороны двора стену близлежащего здания.

11.89. Консервная банка данного объема имеет форму цилиндра. Каково должно быть соотношение ее размеров (высоты и диаметра), чтобы на изготовление пошло наименьшее количество жести?

11.90. Каково должно быть отношение высоты к радиусу основания конического шатра данной вместимости, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материи?

11.91. При каком угле при основании равнобедренного треугольника отношение длин радиусов вписанной и описанной окружностей является наибольшим? Чему равно наибольшее значение этого отношения?

11.92. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны и имеют длину 10 см. Определить большее основание трапеции, имеющей наибольшую площадь. Вычислить эту площадь.

11.93. Две вершины прямоугольника лежат на диаметре полуокружности, а две другие — на полуокружности. Вычислить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полуокружность с радиусом 2 м.

11.94. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды имеет постоянную заданную площадь и наклонена к плоскости основания под углом α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

11.95. В правильной треугольной пирамиде боковая грань имеет заданную постоянную площадь и составляет с основанием угол α. При каком значении α расстояние от центра основания пирамиды до ее боковой грани является наибольшим?

11.96. В конус с заданным постоянным объемом вписана пирамида, в ее основании лежит равнобедренный треугольник, у которого величина угла при вершине равна α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

11.97. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в конус высотой $H = 18$ см и радиусом основания $R = 6$ см.

11.98. Около шара описан прямой конус. Найти величину угла наклона образующей к плоскости основания конуса, для которого отношение площади его боковой поверхности к площади поверхности шара будет наименьшим.

11.99. Буровая машина расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный на шоссе в 15 км от упомянутой точки на шоссе (считаем шоссе прямой линией). Если курьер на велосипеде проезжал по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч, то к какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

11.100. Картина в 1,4 м высотой повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (т. е. чтобы угол зрения был наибольшим)?

11.101. По двум улицам к перекрестку движутся две машины с постоянными скоростями 60 км/ч и 80км/ч. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент машины находятся от перекрестка на расстоянии 100 и 200 км, определить наименьшее расстояние между ними.

12. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Задачи с параметрами достаточно часто встречаются на вступительных экзаменах по математике в экономических вузах. Наиболее простые из них уже рассмотрены в гл. 2 и 5. Однако важность таких задач для успешного преодоления конкурсного отбора заставляет вновь вернуться к ним и рассмотреть в отдельной главе.

12.1. Решение уравнений, систем уравнений и неравенств с параметрами

Сложность параметрических задач состоит в том, что с изменением параметров не только меняются коэффициенты, но и происходят качественные изменения уравнения или неравенства, например, меняются его степень, область допустимых значений (ОДЗ), свойства входящих в него функций и т. п.

Решить уравнение (систему уравнений, неравенств) с параметром значит для любого допустимого значения параметра найти множество решений этого уравнения (системы, неравенства).

12.1. Решить уравнение

$$(a-1)\,x^2+2(2a+1)x+4a+3=0. \qquad \textbf{(12.1)}$$

Решение. Если $a=1$, то уравнение **(12.1)** линейное, принимающее вид $6x+7=0$, откуда $x=-\frac{7}{6}$.

Если $a\neq 1$, то уравнение **(12.1)** квадратное и имеет корни, когда дискриминант $D=[2\,(2a+1)]^2-4(a-1)(4a+3)=4(5a+4)\geq 0$, откуда $a\geq -\frac{4}{5}$. В этом случае $x_{1,2}=\frac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Ответ: если $a<-\frac{4}{5}$, то корней нет; если $a=1$, то $x=-\frac{7}{6}$; если $-\frac{4}{5}\leq a<1$ и $a>1$, то $x_{1,2}=\frac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

12.2. Решить уравнение

$$1-\frac{3}{x+a-1}=\frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}. \qquad \textbf{(12.2)}$$

Решение. Приведя обе части уравнения к общему знаменателю и освободившись от него, получим после преобразований

$$x^2+(a-3)x-4a-4=0.$$

Дискриминант этого уравнения $D=(a-3)^2+4(4a+4)=a^2+10a+25=(a+5)^2\geq 0$, а корни $x_1=4$, $x_2=-a-1$. Так как в процессе решения ОДЗ уравнения расширилась, необходимо убедиться в том, что знаменатели дробей, входящих в уравнение, т. е. $(x+a-1)$ и $x+1$ не равны нулю, т. е. $x_1\neq 1-a$, $x_2\neq -1$, $x_1\neq -1$, $x_2\neq 1-a$. Выполнение двух последних требований очевидно. Если $x_1=1-a$, т. е. $4=1-a$, то $a=-3$ и, следовательно, при $a=-3$ корень $x_1=4$ не является корнем уравнения **(12.2)** (в то время как $x_2=-a-1=2$ является его корнем). Если $x_2=-1$, т. е. $-a-1=-1$, то $a=0$ и значит, x_2 — посторонний корень, а $x_1=4$ — корень уравнения **(12.2)**. (Заметим, что ошибочно предполагать, что при $a=0$ и $a=-3$ уравнение вообще не имеет корней — в этих случаях посторонним является лишь один из двух корней уравнения).

Ответ: если $a=-3$, то $x=2$; если $a=0$, то $x=4$; если $a\neq 0$, $a\neq -3$, то $x_1=4$ и $x_2=-a-1$.

12.3. Решить уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)}$. **(12.3)**

Решение. При $a<0$ левая часть уравнения не определена, и корней нет; следовательно, $a\geq 0$. Возводя в этом случае обе части уравнения в квадрат, получим после преобразований

$$2\sqrt{ax}=1-2x-2a. \qquad \textbf{(12.4)}$$

Возводим обе части уравнения **(12.4)** в квадрат и после преобразований придем к квадратному уравнению

$$4x^2+4(a-1)x+4a^2-4a+1=0, \qquad \textbf{(12.5)}$$

дискриминант которого $D=16(2a-3a^2)$. Таким образом, уравнение **(12.5)** будет иметь корни в случае, если $\begin{cases}a\geq 0,\\ D\geq 0,\end{cases}$ или $\begin{cases}a\geq 0,\\ 16\left(2a-3a^2\right)\geq 0,\end{cases}$

что приводит к системе $\begin{cases}a\geq 0,\\ 2-3a\geq 0,\end{cases}$ откуда $0\leq a\leq\frac{2}{3}$. При этих значениях a уравнение **(12.5)** имеет корни

$$x_1=\frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2};\ x_2=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Так как в процессе решения уравнения расширилась ОДЗ, и мы использовали метод возведения обеих частей в квадрат, необходима проверка. Проверка значений x_1, x_2 в уравнении **(12.3)** достаточно сложна. Поэтому поступим иначе.

Во-первых, выясним, при каких a корни x_1, x_2 удовлетворяют ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x \ge 0, \\ 1-(x+a) \ge 0. \end{cases}$

Во-вторых, учтем, что перед каждым возведением обеих частей уравнения в квадрат обе части его должны иметь одинаковые знаки — только в этом случае можно гарантировать отсутствие посторонних корней.

Так как в уравнении **(12.3)** обе части уравнения неотрицательны, то за счет первого возведения в квадрат посторонних корней появиться не может. Перед вторым возведением в квадрат мы получили уравнение **(12.4)**, левая часть которого $2\sqrt{ax} \ge 0$. Поэтому корни x_1, x_2 не будут посторонними, если и правая часть уравнения **(12.4)** будет неотрицательна, т. е. $1 - 2x - 2a \ge 0$. Итак, мы пришли к системе

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ 1-(x+a) \ge 0, \\ 1-2x-2a \ge 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \ge 0, \\ x+a \le 1, \\ x+a \le \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x \ge 0, \\ x+a \le \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad \textbf{(12.6)}$$

Проверим, удовлетворяют ли системе **(12.6)** значения x_1 (п. а) и x_2 (п. б). После подстановки значений x_1 и x_2 в эту систему получим:

$$\text{а)} \begin{cases} \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2} \ge 0, \\ \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2} + a \le \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{2a-3a^2} \ge a-1, \\ \sqrt{2a-3a^2} \le -a. \end{cases}$$

Так как $\sqrt{2a-3a^2} \ge 0$, то второе неравенство системы выполнимо лишь при $a \le 0$, которое в рассматриваемом случае для $0 \le a \le \dfrac{2}{3}$ имеет единственное решение $a = 0$. При этом $a = 0$ удовлетворяет и первому неравенству системы. Таким образом, если $a = 0$, то $x_1 = \dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения **(12.3)**.

$$\text{б)} \begin{cases} \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2} \ge 0, \\ \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2} + a \le \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{2a-3a^2} \le 1-a, \\ \sqrt{2a-3a^2} \ge a. \end{cases}$$

При $0 \le a \le \frac{2}{3}$ обе части двух неравенств неотрицательны и, возводя их в квадрат, получим равносильную систему

$\begin{cases} 2a - 3a^2 \le (1-a)^2, \\ 2a - 3a^2 \ge a^2, \end{cases}$ или после преобразований $\begin{cases} (2a-1)^2 \ge 0, \\ 4a\left(a - \frac{1}{2}\right) \ge 0, \end{cases}$ откуда $0 \le a \le \frac{1}{2}$. Так как все значения $0 \le a \le \frac{1}{2}$ удовлетворяют и условию $0 \le a \le \frac{2}{3}$, то x_2 является корнем уравнения **(12.3)**.

Ответ: если $a < 0$, $a > \frac{1}{2}$, то корней нет; если $0 \le a \le \frac{1}{2}$, то

$$x = \frac{1 - a - \sqrt{2a - 3a^2}}{2}.$$

12.4. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$.

Решение. Учитывая, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x =$$

$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3 + \cos 4x}{4}$, приведем уравнение к виду $\cos 4x = 4a - 3$. $|\cos 4x| \le 1$, поэтому, если $4a - 3 < -1$, т.е. $a < \frac{1}{2}$ или если $4a - 3 > 1$, т.е. $a > 1$, то уравнение решений не имеет.

Если $-1 \le 4a - 3 \le 1$, т. е. если $\frac{1}{2} \le a \le 1$, то

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

Ответ: если $a < \frac{1}{2}$, $a > 1$, то корней нет; если $\frac{1}{2} \le a \le 1$, то

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

12.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x + y) = \lg x + \lg y, \\ \lg(x + ay) = \lg x + 2\lg y. \end{cases}$$

Решение. Потенцируя обе части уравнений, получим систему

$$\begin{cases} x + y = xy, \\ x + ay = xy^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x(y - 1) = y, \\ x(y^2 - 1) = ay. \end{cases} \qquad \textbf{(12.7)}$$

Система (12.7) должна удовлетворяться такими парами чисел (x, y), при которых система вообще имеет смысл, т.е. при

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x + ay > 0. \end{cases} \qquad (12.8).$$

Если $y \neq 1$, то из первого уравнения системы (12.7) $x = \dfrac{y}{y-1}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, найдем $y + 1 = a$, откуда $y = a - 1$.

Итак, если $y \neq 1$ или если $a \neq 2$, то система (12.7) имеет решения

$$\left(x = \frac{a-1}{a-2};\ y = a-1\right).$$

Но из этих решений надо выбрать только те, которые удовлетворяют системе неравенств (12.8). Подставляя выражения неизвестных x и y через параметр a в систему (12.8), нетрудно получить ее решение: $a > 2$.

Ответ: если $a \leq 2$, решений нет; если $a > 2$, решения системы $\left(x = \dfrac{a-1}{a-2};\ y = a-1\right)$.

12.6. Решить неравенство $ax^2 - 2x + 4 > 0$.

Решение. При $a = 0$ неравенство является линейным: $-2x + 4 > 0$, откуда $x < 2$. При $a \neq 0$ неравенство квадратное; его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot a \cdot 4 = 4(1 - 4a)$, причем при $a > \dfrac{1}{4}$ $D < 0$, а при $a \leq \dfrac{1}{4}$ $D \geq 0$. Здесь возможны три случая:

1) $a > \dfrac{1}{4}$; 2) $0 < a \leq \dfrac{1}{4}$; 3) $a < 0$.

1) Если $a > \dfrac{1}{4}$, то дискриминант $D < 0$, а старший коэффициент трехчлена положителен, т.е. трехчлен положителен при любых x, и множеством решения неравенства является множество всех действительных чисел.

2) Если $0 < a \leq \dfrac{1}{4}$, то дискриминант $D \geq 0$, корни трехчлена $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$, причем $x_1 > x_2$. Поэтому решением неравенства будут значения $x < x_2$ и $x > x_1$.

3) Если $a < 0$, т. е. старший коэффициент трехчлена отрицателен, то теперь $x_1 < x_2$, а решение неравенства образует интервал $x_1 < x < x_2$.

Ответ: если $a > \frac{1}{4}$, то $-\infty < x < \infty$; если $0 < a \le \frac{1}{4}$, то $x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$, $x > \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$; если $a = 0$, то $x < 2$; если $a < 0$, то $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

12.7. Решить неравенство

$$-\frac{3}{5} \le a\lg x + (a\lg x)^2 + \ldots + (a\lg x)^n + \ldots < 1.$$

Решение. Если $a = 0$, то неравенство выполняется при любом x из ОДЗ уравнения, т. е. при $x > 0$, ибо в этом случае $-\frac{3}{5} < 0 < 1$.

Если $a \ne 0$, $x > 0$, $x \ne 1$, сумма $a \lg x + (a \lg x)^2 + \ldots + (a \lg x)^n + \ldots$ представляет сумму S бесконечно убывающей прогрессии со знаменателем q, где $|q| = |a \lg x| < 1$. Согласно (8.7) $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{a\lg x}{1-a\lg x}$.

Итак, при $a \ne 0$, $x > 0$, $x \ne 1$ приходим к системе

$$\begin{cases} -\frac{3}{5} < \frac{a\lg x}{1-a\lg x} < 1, \\ -1 < a\lg x < 1, \end{cases}$$ или, обозначив $t = a \lg x$, получим

$$\begin{cases} -\frac{3}{5} < \frac{t}{1-t} < 1, \\ -1 < t < 1. \end{cases}$$

Решив последнюю систему (предлагаем это сделать самостоятельно), получим $-1 < t < \frac{1}{2}$ или $-1 < a\lg x < \frac{1}{2}$.

Если $a > 0$, то $-\frac{1}{a} < \lg x < \frac{1}{2a}$ и $10^{-\frac{1}{a}} < x < 10^{\frac{1}{2a}}$.

Если $a < 0$, то после деления на a знаки неравенств меняются на противоположные, т. е. $\frac{1}{2a} < \lg x < -\frac{1}{a}$ и $10^{\frac{1}{2a}} < x < 10^{-\frac{1}{a}}$.

Ответ: если $a < 0$, то $10^{\frac{1}{2a}} < x < 10^{-\frac{1}{a}}$; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $10^{-\frac{1}{a}} < x < 10^{\frac{1}{2a}}$.

Решить уравнения с параметром a:

12.8. $(a^2-2a+1)x = a^2+2a-3.$ **12.9.** $\dfrac{3x-2}{a^2-2a}+\dfrac{x-1}{a-2}+\dfrac{2}{a}=0.$

12.10. $ax^2-(1-2a)x+a-2=0.$

12.11. $\dfrac{2x-1}{x-a}+\dfrac{2x}{a}=\dfrac{ax-2}{a^2-ax}.$

12.12. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}.$ **12.13.** $x+\sqrt{x^2-x}=a.$

12.14. $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0.$ **12.15.** $1+\log_a(1-x)\log_x a=\dfrac{2}{\log_a x}.$

12.16. $\sin^6 x+\cos^6 x=a.$ **12.17.** $\dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}=(a-1)\operatorname{tg} x.$

Решить системы уравнений с параметром a:

12.18. $\begin{cases}(3+a)x+2y=3,\\ ax-y=3.\end{cases}$ **12.19.** $\begin{cases}y\sqrt{x^2+y^2}-2ay-3=0,\\ x\sqrt{x^2+y^2}=2ax.\end{cases}$

12.20. $\begin{cases}\left(2^x+1\right)2^{y+1}=a,\\ \sqrt{x^2+y^2}=x+y.\end{cases}$

Решить неравенства с параметром a:

12.21. $a^2+ax<1-x.$ **12.22.** $\sqrt{2ax-x^2}\geq a-x.$

12.23. $\log_a(x-1)+\log_a x>2.$ **12.24.** $\log_a\sqrt{3{,}5x-1{,}5}\,\log_x a<1.$

12.2. Задачи с условиями

Одними из наиболее трудных на вступительных экзаменах являются задачи, в которых требуется найти все значения параметров, при которых выполнено некоторое условие (например, уравнение имеет единственное решение или, наоборот, удовлетворяется всеми допустимыми значениями x, или всякое решение одной системы (или неравенства) является решением другой системы (или неравенства) и т.п.).

12.25. При каких значениях a уравнение $x^3-x=a(x^3+x)$ имеет три корня?

Решение. Уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x=0$ и $x^2-1=a(x^2+1)$ **(12.9)**. Так как корень $x=0$ не зависит от параметра, то чтобы удовлетворить условию, следует найти значения a, при которых уравнение (12.9) будет иметь два корня. Перепишем уравнение (12.9) в виде $x^2(a-1) = -a-1$.

При $a = 1$ это уравнение решений не имеет. При $a \neq 1$ получим уравнение $x^2 = \frac{-a-1}{a-1}$, которое будет иметь два корня, если $\frac{-a-1}{a-1} > 0$, откуда $-1 < a < 1$.

Ответ: $-1 < a < 1$.

12.26. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x+a} = x$ **(12.10)** имеет два корня?

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $x + a = x^2$, или $x^2 - x - a = 0$ **(12.11)**, которое имеет два различных корня $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$, если его дискриминант $D = 1 + 4a > 0$, откуда $a > -\frac{1}{4}$.

Чтобы корни уравнения **(12.11)** были корнями уравнения **(12.10)**, они должны еще удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} x + a \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(только в этом случае можно гарантировать, что найденные корни не посторонние).

Первое неравенство $x + a \geq 0$ выполнено, ибо мы исходили ранее из равенства $x + a = x^2 \geq 0$. Для выполнения второго неравенства $x \geq 0$ достаточно, чтобы ему удовлетворял меньший корень.

Итак, $\begin{cases} a > -\frac{1}{4}, \\ \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a > -\frac{1}{4}, \\ \sqrt{1+4a} \leq 1, \end{cases}$ откуда $-\frac{1}{4} < a \leq 0$.

Ответ: $-\frac{1}{4} < a \leq 0$.

12.27. Найти все значения a, при которых корни квадратного уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ различны и лежат на отрезке $[0; 2]$.

Решение. Так как корни квадратного уравнения различны, то его дискриминант $D = a^2 - 4$ должен быть больше нуля. Чтобы корни уравнения располагались на отрезке $[0; 2]$ необходимо, чтобы значения квадратного трехчлена $y = x^2 + ax + 1$ на концах отрезка были неотрицательны (рис. 12.1), т. е. $f(0) \geq 0$ и $f(2) \geq 0$. Но этого еще недостаточно: на рис. 12.1 пунктиром изображен график трехчлена, у которого $f(0) > 0$ и $f(2) > 0$, но корни лежат вне отрезка $[0; 2]$. Очевидно, надо еще потребовать, чтобы абсцисса вершины параболы $x_в$ располагалась внутри отрезка [0; 2].

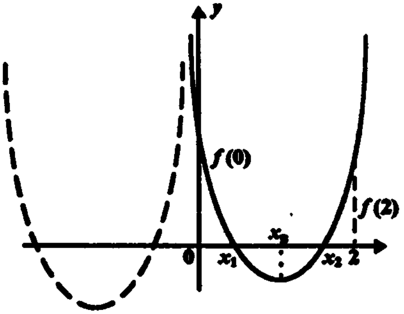


Рис. 12.1

Итак, для выполнения условий задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} D > 0, \\ 0 < x_в < 2, \\ f(0) \ge 0, \\ f(2) \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 - 4 > 0, \\ 0 < -\dfrac{a}{2} < 2, \\ 1 \ge 0, \\ 4 + 2a + 1 \ge 0. \end{cases}$$

Решив систему (предлагаем это сделать самостоятельно), получим $-\frac{5}{2} \le a < -2$.

Ответ: $-\frac{5}{2} \le a < -2$.

12.28. Найти все значения a, при которых уравнение

$$x^2 + 4x - 2\,|x - a| + 2 - a = 0 \qquad \textbf{(12.12)}$$

имеет четыре корня.

Решение. Данное уравнение распадается на две системы:

$$\begin{cases} x - a \ge 0, \\ x^2 + 4x - 2(x - a) + 2 - a = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - a \ge 0, \\ x^2 + 2x + a + 2 = 0; \end{cases} \qquad \textbf{(12.13)}$$

$$\begin{cases} x - a < 0, \\ x^2 + 4x + 2(x - a) + 2 - a = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - a < 0, \\ x^2 + 6x + 2 - 3a = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(12.14)}$$

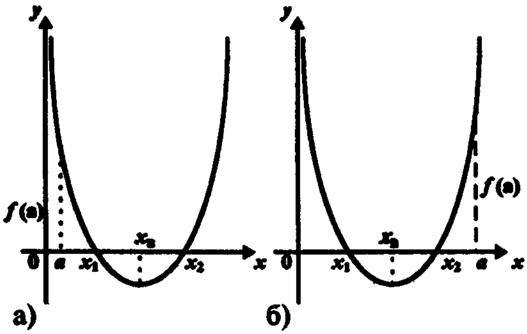


Рис. 12.2

Уравнение **(12.12)** будет иметь четыре решения, если каждая из систем **(12.13)** и **(12.14)** будет иметь по два разных решения.

Рассмотрим систему **(12.13)**. Дискриминант квадратного уравнения $\frac{D}{4} = 1 - (a + 2) = -a - 1$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-a-1}$. Но эти корни будут корнями данного уравнения **(12.12)** в случае выполнения неравенства системы **(12.13)** для каждого из них, т. е. при $x_1 \ge a$, $x_2 \ge a$.

График квадратного трехчлена (в левой части уравнения системы **(12.13)**) в этом случае должен иметь вершину правее числа a (рис. 12.2а), т. е. $x_в \ge a$ и $f(a) \ge 0$. Итак, должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_в \ge a, \\ f(a) \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -a-1 > 0, \\ -\dfrac{2}{2} \ge a, \\ a^2 + 2a + a + 2 \ge 0, \end{cases}$$

откуда $a \le -2$.

Рассмотрим систему **(12.14)**. Уравнение этой системы будет иметь два различных корня $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{7+3a}$, если его дискриминант $\dfrac{D}{4} = 3^2 - (2-3a) = 7 + 3a > 0$. Эти два корня будут решениями уравнения **(12.12)**, если они удовлетворяют еще неравенству системы **(12.14)**, т. е. $x_1 < a$, $x_2 < a$. Соответствующий график квадратного трехчлена (в левой части уравнения системы **(12.14)**) показан на рис. 12.2б. Очевидно, что на параметр a должны накладываться следующие требования

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_в < a, \\ f(a) \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 7 + 3a > 0, \\ -\dfrac{6}{2} < a, \\ a^2 + 6a + 2 - 3a \ge 0, \end{cases} \qquad \text{откуда } -\frac{7}{3} < a \le -2,\ a \ge -1.$$

Итак, первая система **(12.13)** имеет два решения, если $a \le -2$, а вторая система **(12.14)** — если $-\dfrac{7}{3} < a \le -2$, $a \ge -1$. В результате уравнение **(12.12)** имеет четыре решения при $-\dfrac{7}{3} < a < -2$. (Заметим, что при $a = -2$ по одному из двух решений каждой системы совпадают, и уравнение **(12.12)** имеет три решения).

Ответ: $-\dfrac{7}{3} < a < -2$.

12.29. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2} > a - x$ имеет решение?

Решение. Рассмотрим графическое решение задачи, которое, хотя и менее строгое, чем аналитическое, но в данном случае значительно быстрее.

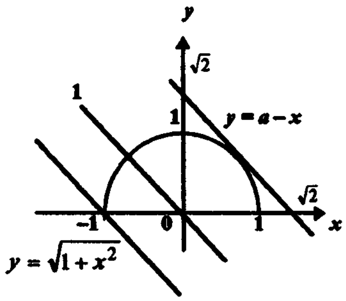


Рис. 12.3

График функции $y=\sqrt{1-x^2}$ или $x^2+y^2=1$ $(y \geq 0)$ есть полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 12.3). Функция $y = a - x$ для каждого значения a задает прямую, которая с изменением a перемещается параллельно самой себе. Так, при $a = 0$ прямая занимает положение 1 (см. рис. 12.3), а с ростом a перемещается вверх. Очевидно, исходное неравенство будет выполняться до тех пор, пока точки окружности будут выше точек прямой, т. е. пока прямая не станет касательной к окружности. Легко видеть, что это произойдет при $a=\sqrt{2}$. (Значение $a=\sqrt{2}$ можно найти и аналитически, если решить уравнение $\sqrt{1-x^2}=a-x$, и после возведения в квадрат потребовать, чтобы дискриминант полученного квадратного уравнения был равен нулю).

Ответ: $a<\sqrt{2}$.

12.30. При каких значениях a имеет единственный корень уравнение

$$2\lg(x+3) = \lg ax. \qquad \textbf{(12.15)}$$

Решение. Потенцируя обе части уравнения, получим $(x+3)^2 = ax$ или

$$x^2-(a-6)x+9=0. \qquad \textbf{(12.16)}$$

Уравнение **(12.15)** имеет единственное решение в случаях:

1) уравнение **(12.16)** имеет единственный корень и этот корень удовлетворяет уравнению **(12.15)**;

2) уравнение **(12.16)** имеет два корня, но из них только один корень удовлетворяет уравнению **(12.15)**.

Рассмотрим первый случай. Уравнение **(12.16)** имеет единственный корень, если его дискриминант D равен нулю, т. е. $D=(a-6)^2-36=a^2-12a=0$, откуда $a=0$ или $a=12$. Случай $a=0$ отпадает, так как при $a=0$ правая часть уравнения **(12.15)** не определена. Если $a=12$, из **(12.16)** находим $x=3$ — единственный корень уравнения **(12.16)**, который, как показывает проверка, удовлетворяет уравнению **(12.15)**.

Рассмотрим второй случай, когда дискриминант $D>0$, т.е. $D=a^2-12a>0$, откуда $a<0$, $a>12$ и корни уравнения **(12.16)** различные. Чтобы быть корнями исходного уравнения **(12.15)**, эти корни должны еще удовлетворять системе неравенств $\begin{cases} x+3>0, \\ ax>0. \end{cases}$ Так как второе неравенство выполняется для обоих корней (напомним, в процессе решения мы исходили из равенства $(x+3)^2 = ax$), если $x \neq -3$, то необходимо выполнение неравенства $x + 3 > 0$ или $x > -3$.

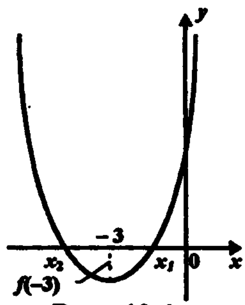


Рис. 12.4

Таким образом, чтобы удовлетворить условию, один корень уравнения (12.16) должен быть меньше −3, а другой больше −3, т.е. $x_1 < -3$, $x_2 > -3$.

Очевидно (рис. 12.4), что в этом случае значение квадратного трехчлена $f(-3)$ должно быть отрицательным, т. е. $f(-3) = 9 - (a-6)(-3) + 9 < 0$, откуда $a < 0$.

Ответ: $a = 12$, $a < 0$.

12.31. Определить количество корней уравнения $\cos x \operatorname{ctg} x - \sin x = a \cos 2x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

Решение. Преобразуя левую часть, получим $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x} = a\cos x$ или $\dfrac{\cos 2x}{\sin x} = a\cos 2x$, корни которого найдем из уравнений $\cos 2x = 0$ и $\dfrac{1}{\sin x} = a$.

Первое уравнение имеет решение $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, причем на отрезке $[0; 2\pi]$ четыре корня $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$ независимо от значений параметра.

Второе уравнение при $|a| < 1$ корней не имеет, так как $|\sin x| \le 1$. Если $|a| > 1$, то перейдя к уравнению $\sin x = \dfrac{1}{a}$, получаем, что на отрезке $[0; 2\pi]$ оно имеет два корня $x_1 = \arcsin\dfrac{1}{a}$ и $x_2 = \pi - \arcsin\dfrac{1}{a}$.

Если $|a| = 1$, то уравнение имеет один корень $x = \dfrac{\pi}{2}$, где $0 \le x \le 2\pi$.

При записи ответа необходимо учесть, что при $a = \pm\sqrt{2}$ получаются четыре корня первого уравнения.

Ответ: Если $|a| < 1$ или $a = \pm\sqrt{2}$, то уравнение имеет 4 корня; если $|a| = 1$, то корней пять; если $|a| > 1$ и $a \neq \pm\sqrt{2}$, то корней нет.

12.32. При каких значениях a уравнения $\sin 2x (\sin 2x - 1) = 0$ и $(a+3)\sin^2 2x - \sin 2x \cos 4x - (a+4)\sin 2x = 0$ равносильны?

Решение. Первое уравнение имеет решения, если $\sin 2x = 0$ или $\sin 2x = 1$. Второе уравнение после преобразования его к виду

$$\sin 2x(\sin 2x - 1)\left(\sin 2x + \frac{a+5}{2}\right) = 0$$

имеет решения, если $\sin 2x = 0$, или $\sin 2x = 1$, или $\sin 2x = -\frac{a+5}{2}$. Очевидно, чтобы заданные в условии уравнения были равносильны, требуется, чтобы "лишнее" уравнение $\sin 2x = -\frac{a+5}{2}$ или не имело решений вообще, или не давало новых корней. Это уравнение не имеет корней при $\left|-\frac{a+5}{2}\right| > 1$, т. е. при $a < -7$, $a > -3$, и будет иметь те же корни, что и уравнения $\sin 2x = 0$, $\sin 2x = 1$, если $-\frac{a+5}{2} = 0$ и $-\frac{a+5}{2} = 1$, что дает $a = -5$ и $a = -7$.

Ответ: $a \le -7$; $a = -5$; $a > -3$.

12.33. При каких значениях a уравнение $x(x^2 - 3) + 4 - a = 0$ имеет ровно 2 решения?

12.34. При каких значениях a уравнение $6\sqrt{x-2} = ax + 7$ имеет единственное решение?

12.35. При каких значениях a множество решений неравенства $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ содержит промежуток $[0,25; 1]$?

10.36. При каких значениях a хотя бы одно число, большее 1, удовлетворяет неравенству $x^2 - ax + 2a \le 0$?

12.37. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3?

12.38. При каких значениях a уравнение $x|x + 2a| + 1 - a = 0$ имеет только один корень?

12.39. При каких значениях a неравенство $x^2 - ax + a^2 - 6a \ge 0$ выполняется при всех x, удовлетворяющих условию $-1 \le x \le 1$?

12.40. Найти все значения a, при которых уравнения $x^2 + x + 4a = 0$ и $a^2x^2 + ax + 4a = 0$ имеют общий корень?

12.41. При каких значениях a уравнение $4^x - (a + 3)2^x + 4a - 4 = 0$ имеет единственный корень?

12.42. При каких значениях a уравнение $\lg(x^2 + ax) - \lg(8x - 6a - 3) = 0$ имеет только одно решение?

12.43. При каких значениях a уравнения $\sin^2 x = 1$ и $a\cos x = \sin 2x$ равносильны?

12.44. При каких значениях a уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$ имеет решение?

12.45. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} a^2 x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2 y = 2 + 4b \end{cases}$$ имеет бесконечное множество решений?

12.46. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2 + (2 - 3a)\,x + 2a^2 - 2a < 0, \\ ax = 1 \end{cases}$$ имеет хотя бы одно решение?

13. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ И СОБЕСЕДОВАНИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

13.1. Выполнение письменных экзаменационных работ на вступительных экзаменах по математике

При выполнении письменных экзаменационных работ решения задач необходимо писать четко, достаточно подробно и аккуратно.

В алгебраических и тригонометрических примерах следует объяснить выкладки (что из чего получается и каким образом), провести проверку решений (если это необходимо), указать все ограничения (возникающие как из условия, так и в ходе преобразований). В текстовых задачах нужно объяснить обозначения, описать, каким образом из условия следуют те или иные соотношения, а затем найти из этих соотнощений нужные величины.

В геометрических задачах чертежи надо выполнять аккуратно (можно чернилами и от руки), обозначения на чертеже должны быть объяснены, а обозначения в тексте решения должны с ними совпадать. Если в процессе рассуждений применяется какая-либо теорема или формула, то ее нужно назвать. Необходимо строго доказывать используемые геометрические утверждения (скажем, подобие треугольников, перпендикулярность прямых, плоскостей и т.п.).

Полезно тщательно контролировать проводимые выкладки. Следует помнить, что при наличии даже арифметической ошибки задача не может считаться решенной безукоризненно. Во многих вузах требуется ответы давать в рамках.

Необходимо обратить внимание и на записи в черновике, которые рекомендуется вести достаточно аккуратно, не разбрасывая решение по разным листам, ибо в противном случае при переписывании на чистовик легко допустить ошибку или перепутать обозначения.

Выполнение абитуриентами экзаменационной работы по математике не предполагает использование справочников, таблиц, калькуляторов и т.п.

Начинать решение варианта целесообразно с задачи, которая кажется более простой, довести ее решение до конца, переписать его начисто, а уже после этого приниматься за решение следующей задачи. Не нужно решать одну задачу несколько часов подряд, если она не получается, в результате может не хватить времени на остальные задачи. Лучше отложить эту задачу и заняться другими, а потом, решив их, вернуться к ней снова. Это позволит наиболее рационально использовать предоставляемое для экзамена время.

Ниже в качестве примера приводятся решения задач двух вариантов письменных работ различной сложности, позволяющие получить представление об оформлении чистовика экзаменационной работы.

Вариант А

1. На опытной агростанции с двух земельных участков собрали 14 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожайность на первом участке повысилась на 80%, а на втором — на 25%, благодаря чему с этих же земельных участков было собрано 20,8 ц зерна. Сколько зерна собрали с каждого участка до применения новых методов агротехники?

2. Решить уравнение

$$\frac{9}{5-4\lg x}+\frac{2}{2+\lg x}=3.$$

3. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{2-\frac{21}{x}+\frac{40}{x^2}}.$$

4. Упростить выражение

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a^{3/2}+b^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}}+\frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

5. В равнобокой трапеции боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом $\alpha = 60°$. Найти площадь трапеции, если известно, что ее высота равна $h = 10$ см.

Решение.

1. Обозначим x — количество центнеров зерна, собранного первоначально с первого земельного участка. Тогда со второго участка первоначально было собрано $(14 - x)$ ц. После повышения урожайности соответственно на 80 и 25% с первого участка собрали $1{,}8\,x$ и со второго $1{,}25\,(14 - x)$ ц. Согласно условию, $1{,}8x + 1{,}25\,(14 - x) = 20{,}8$, откуда $0{,}55x = 3{,}3$ и $x = 6$, т.е. с первого участка было собрано 6 ц, а со второго $14 - 6 = 8$ ц.

Ответ: 6 ц, 8 ц.

2. Обозначим $\lg x = y$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{9}{5-4y} + \frac{2}{2+y} = 3.$$

Приводя обе части уравнения к общему знаменателю и освобождаясь от него, получим $9\,(2 + y) + 2(5 - 4y) = 3\,(5 - 4y)(2 + y)$, или после преобразований: $6y^2 + 5y - 1 = 0$, откуда $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{6}$. Таким образом, приходим к совокупности двух уравнений: $\lg x = -1$; $\lg x = \frac{1}{6}$. Из первого уравнения находим $x = 10^{-1} = 0{,}1$, из второго $x = 10^{1/6} = \sqrt[6]{10}$.

Проверка показывает, что оба полученных корня являются корнями данного уравнения.

Ответ*: $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = \sqrt[6]{10}$ или $\{0{,}1;\ \sqrt[6]{10}\}$.

3. Область определения функции находится из условия:

$$2 - \frac{21}{x} + \frac{40}{x^2} \ge 0 \text{ или } \frac{2x^2 - 21x + 40}{x^2} \ge 0.$$

Так как знаменатель при любых значениях x не отрицателен, то при условии $x \ne 0$ его можно отбросить, т. е. $2x^2 - 21x + 40 \ge 0$. Корни квадратного трехчлена равны $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 8$. Поэтому неравенство примет вид $2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 8) \ge 0$. На числовой оси отмечаем точки $x_1 = \frac{5}{2}$ и $x_2 = 8$ и расставляем знаки квадратного трехчлена в каждой

---

* Ответ дается в любой из двух приведенных форм записи.

из трех полученных областей: плюс, когда оба сомножителя $\left(x-\frac{5}{2}\right)$ и $(x-8)$ имеют одинаковые знаки, и минус, когда разные. Строим кривую знаков (рис. 13.1).

Рис. 13.1

Последнему неравенству удовлетворяют значения $x \le \frac{5}{2}$, $x \ge 8$. Из полученных решений необходимо исключить значение $x = 0$.

*Ответ**: $x < 0$, $0 < x \le \frac{5}{2}$, $x \ge 8$ или

$x \in (-\infty,\ 0) \cup \left(0,\ \frac{5}{2}\right] \cup [8,\ \infty)$.

4. Преобразуем первую дробь:

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a^{3/2}+b^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}}=\frac{\sqrt{a^3}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{a}b-\sqrt{b^3}+2\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}=$$

$$=\frac{3\sqrt{a^3}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{a}b}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}.$$

Вынося в числителе $3\sqrt{a}$ и раскладывая знаменатель на множители как сумму кубов, получим

$$\frac{3\sqrt{a}\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}=\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Теперь к полученному результату прибавим вторую дробь:

$$\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=3.$$

Ответ: 3.

* Ответ дается в любой из двух приведенных форм записи.

9*

5. По условию центральный угол $\angle AOB = \alpha$ (рис. 13.2). Проведя BD, получим, что $\angle BDA = \frac{\alpha}{2}$, так как в круге вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу $\left(\breve{AB}\right)$.

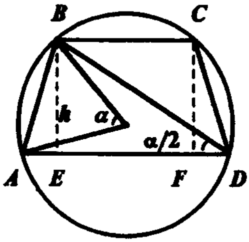


Рис. 13.2

Проведем высоты трапеции BE и CF. Из прямоугольного треугольника BED $ED = BE \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Нетрудно заметить, что сторона ED равна средней линии трапеции m. Действительно, средняя линия равна полусумме оснований трапеции, т. е. $m = \frac{BC + AD}{2} = \frac{BC + (AE + EF + FD)}{2}$, но $BC = EF$ ($EBCF$ — прямоугольник) и $AE = FD$ (следует из равенства треугольников ABE и FCD, ибо в равнобокой трапеции $AB = CD$, $\angle BAD = \angle BDA$), поэтому

$$m = \frac{2EF + 2FD}{2} = EF + FD = ED.$$

Теперь площадь трапеции $S = mh = \left(h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)h = h^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. При $h = 10$ см, $\alpha = 60°$ получим $S = 10^2 \operatorname{ctg} 30° = 100\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: $100\sqrt{3}$ см^2.

Вариант Б

1. Два автомобиля едут навстречу друг другу: один из пункта A, другой из пункта B. Первый выходит из пункта A на три часа позже, чем второй из пункта B, и при встрече оказывается, что он прошел на 90 км меньше второго. Продолжая после встречи путь с той же скоростью, первый приходит в B через 4 часа, а второй в A через 4,5 часа. Определить расстояние AB.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,5} \frac{x^2 - 4x + 6}{x} \leq 0.$$

4. Упростить выражение

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

5. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B. Сторона $AC = 12$ см, $AB = 15$ см. Определить сторону BC.

Решение.

1. Обозначим пункт встречи через C. Пусть $AC = x$ км, тогда по условию $CB = (x + 90)$ км. Далее, по условию первый автомобиль прошел CB за 4 часа, значит, его скорость $\frac{x+90}{4}$ км/ч. Так же найдем, что скорость второго автомобиля $\frac{x}{4,5}$ км/ч. Следовательно, путь AC первый автомобиль проделал за x: $\frac{x+90}{4}=\frac{4x}{x+90}$ ч, второй же автомобиль прошел путь BC за $(x + 90)$: $\frac{x}{4,5}=\frac{9(x+90)}{2x}$ ч, а так как второй автомобиль был в пути на 3 часа больше, чем первый, то $\frac{9(x+90)}{2x}-\frac{4x}{x+90}=3.$

При решении этого уравнения можно ввести вспомогательное неизвестное $y=\frac{x+90}{2x}$. Тогда получим $9y-\frac{2}{y}=3$ или $9y^2-3y-2=0$. Из двух корней $\left(y_1=\frac{2}{3},\ y_2=-\frac{1}{3}\right)$ второй не годится, так как обе величины $x = AC$ и $x + 12 = CB$ должны быть положительными. Из уравнения $\frac{x+90}{2x}=\frac{2}{3}$ найдем $x = 270$ км; значит, $AC = 270$ км, $CB = 360$ км и $AB = AC + CB = 270 + 360 = 630$ км.

$\boxed{\textit{Ответ}\text{: 630 км.}}$

2. Запишем уравнение так: $\sqrt{x^2-3x+5}+\left(x^2-3x+5\right)-12=0$. Обозначим $\sqrt{x^2-3x+5}=y\ (y\geq 0)$, получим $y^2+y-12=0$, откуда $y_1 = 3$ ($y_2 = -4$ не годится, так как $y \geq 0$). Далее имеем $\sqrt{x^2-3x+5}=3$; возводя обе части уравнения в квадрат, получим $x^2 - 3x - 4 = 0$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.

Проверка показывает, что оба корня являются корнями заданного уравнения.

*Ответ**: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$ или $\{-1;\ 4\}$.

3. Представим правую часть неравенства в виде $0 = \log_{0,5} 1$.

Получим $\log_{0,5}\dfrac{x^2-4x+6}{x} \le \log_{0,5} 1$.

Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+6}{x} > 0, \\ \dfrac{x^2-4x+6}{x} \ge 1. \end{cases}$

Первое неравенство системы вытекает непосредственно из области определения логарифмической функции, а второе — следует после потенцирования обеих частей неравенства по основанию 0,5, меньшему 1, в связи с чем и получается неравенство противоположного смысла.

В полученной системе достаточно решить лишь второе неравенство, так как его выполнение в данном случае безусловно влечет за собой выполнение первого. Перенося 1 в левую часть второго неравенства, получим $\dfrac{x^2-5x+6}{x} \ge 0$ или после разложения на множители квадратного трехчлена в числителе $\dfrac{(x-3)(x-2)}{x} \ge 0$. Решаем полученное неравенство методом интервалов. На числовой оси отмечаем значения, при которых числитель и знаменатель обращаются в нуль, расставляем знаки дробного выражения в каждой из четырех полученных областей и строим кривую знаков (рис. 13.3).

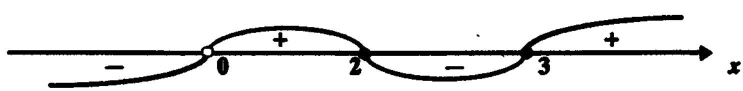


Рис. 13.3

(Например, при $x > 3$ $x - 3 > 0$, $x - 2 > 0$, $x > 0$ дробь положительна, при $2 < x < 3$, $x - 3 < 0$, $x - 2 > 0$, $x > 0$ дробь отрицательна и т. д.). При записи ответа учитываем, что x не может равняться 0, так как при этом знаменатель дроби обращается в нуль.

Ответ *: $0 < x \le 2$, $x \ge 3$ или $x \in (0, 2] \cup [3, \infty)$.

* Ответ дается в любой из двух приведенных форм записи.

4. Заметив, что углы $\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ дают в сумме $\frac{\pi}{2}$, можно записать $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Так как произведение тангенса на косинус некоторого угла есть синус того же угла, то будем иметь

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Учитывая, что $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, а знаменатель дроби представляет собой выражение синуса двойного угла, получим

$$\frac{1+\cos 2\alpha-1}{\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1.$$

Ответ: 1.

5. Обозначим стороны $\Delta\,ABC$: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Проведем биссектрису AD угла A и положим $CD=x$, тогда $BD=a-x$ (рис. 13.4). На основании свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника можно написать $\frac{x}{a-x}=\frac{b}{c}$, откуда найдем $x=\frac{ab}{b+c}$ (1). $\Delta\,ABC$ подобен $\Delta\,ADC$ (так как угол C у них общий и $\angle DAC=\angle ABC$). Отсюда $\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{AC}$ или $\frac{b}{x}=\frac{a}{b}$. Заменяя x из равенства (1), получим $\frac{b}{ab/(b+c)}=\frac{a}{b}$, откуда $a^2=b^2+bc$ или $a=\sqrt{b(b+c)}$. Подставляя числовые данные, найдем $a=\sqrt{12(12+15)}=18$ см.

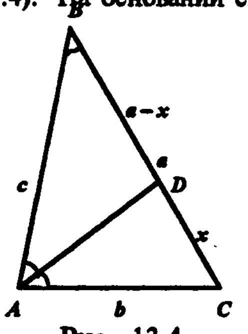


Рис. 13.4

Ответ: 18 см.

13.2. Варианты письменных работ на вступительных экзаменах. *Всероссийский заочный финансово-экономический институт*

Варианты заданий в ВЗФЭИ на вступительных экзаменах по математике можно разделить на три группы. Наиболее простые варианты 1-го и 2-го уровней предлагались абитуриентам заочного отделения. Варианты 2-го уровня — учащимся 11-х классов средних школ учебного комплекса ВЗФЭИ на выпускных экзаменах по математике. Эти экзамены проводились в институте за 10–15 дней до выпускных экзаменов в школе и засчитывались как вступительные экзамены в институт. В случае получения неудовлетворительной оценки на экзамене в институте или при желании учащийся сдавал выпускные экзамены в школе.

Более сложные варианты 3-го уровня предлагались абитуриентам дневного отделения учебного комплекса ВЗФЭИ, поступающим в Московский финансовый колледж. Ниже приводятся некоторые из этих заданий.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ 1-го УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ (1992–1994 гг.)
(для абитуриентов заочного отделения ВЗФЭИ)

Вариант 1 (1992 г.)

1. Велосипедист потратил 30 мин на устранение неисправности педали и, увеличив скорость на 3 км/ч, наверстал потерянное время на расстоянии 30 км. Какова была первоначальная скорость велосипедиста?

2. Решить уравнение $\frac{2}{\sqrt{x-3}} - \sqrt{x-3} = 1$.

3. Решить неравенство $\frac{2x-3}{5x-1} \le \frac{2x-1}{5x+4}$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos^2(\pi+\alpha)}$.

5. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 см. Найти площадь этого треугольника, если длина гипотенузы равна 10 см.

Вариант 2 (1992 г.)

1. Вкладчик взял из сбербанка сначала 1/4 своих денег, потом 4/9 оставшихся и еще 640 руб. После этого у него осталось на сберкнижке 15% всех его денег. Как велик был вклад?

2. Решить уравнение $2\lg(x+1)-\lg(x+21)=0$.

3. Найти область определения функции $y=\sqrt{-5x^2+2x+16}$.

4. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)^{-1}\cdot(1+x)^{1/2}\cdot x^{-1}.$$

5. Основание треугольника равно 6 см, а высота, проведенная к этому основанию, равна 3 см. В данный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах. Найти площадь квадрата.

Вариант 3 (1992 г.)

1. В одной цистерне 32 т бензина, а в другой 36 т. Из первой выкачивают за каждую минуту по 0,2 т, а из второй — по 0,3 т бензина. Через сколько минут в цистернах останутся равные количества бензина?

2. Решить уравнение $3\cdot9^{x-1}+2\cdot3^{x-1}=5$.

3. Решить неравенство $\dfrac{3x-1}{1-x}>1$.

4. Упростить выражение $\dfrac{1+\sin2\alpha-\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha+\cos2\alpha}$.

5. Средняя линия трапеции разбивает ее на две трапеции, площади которых относятся как 2 : 1. Чему равно отношение оснований трапеции?

Вариант 4 (1992 г.)

1. Две бригады, работая совместно, закончили посадку деревьев за 4 дня. Сколько дней потребовалось бы на выполнение этой работы каждой бригаде, если известно, что одна бригада могла бы закончить посадку деревьев на 6 дней раньше другой?

2. Решить уравнение $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1.$

3. Найти область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{2x-5}{3x+7}}.$

4. Упростить выражение $b^{1/2}-\dfrac{b-b^{-2}}{b^{1/2}-b^{-1/2}}+\dfrac{1-b^{-2}}{b^{1/2}+b^{-1/2}}+\dfrac{2}{b^{3/2}}.$

5. Катет AC прямоугольного треугольника ABC равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Вариант 5 (1992 г.)

1. Запас сена таков, что можно ежедневно выдавать на всех лошадей 96 кг. В действительности ежедневную порцию каждой лошади смогли увеличить на 4 кг, так как две лошади были проданы. Сколько лошадей было первоначально?

2. Решить уравнение $\dfrac{1+\sqrt{2x+1}}{x}=1.$

3. Решить неравенство $\dfrac{8-9x}{2x^2+3}\geq 1.$

4. Упростить выражение $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}.$

5. В равнобедренном треугольнике боковая сторона 10 см, а высота 8 см. Найти площадь вписанного в треугольник круга.

Вариант 6 (1993 г.)

1. Масса 34 л керосина равна 27,2 кг. Уместится ли керосин массой 24 кг в бидон емкостью 32 л?

2. Решить уравнение $\dfrac{1}{4-\lg x}+\dfrac{2}{2+\lg x}=1.$

3. Решить неравенство $\dfrac{3-2x}{1-x}>1.$

4. Упростить выражение $\left[\frac{\left(a^{3/4}-b^{3/4}\right)\left(a^{3/4}+b^{3/4}\right)}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\sqrt{ab}\right]\cdot(a+b)^{-1}$.

5. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 30 см и 20 см. Найти длину биссектрисы прямого угла.

Вариант 7 (1993 г.)

1. На покупку двух вещей затрачено 900 тыс. руб., причем одна вещь дешевле другой на 20%. Найти стоимость каждой вещи.

2. Решить уравнение $\log_2^3(x^2-3x)=8$.

3. Найти область определения функции $y=\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{4x^2+49}}$.

4. Упростить выражение $\left(\frac{1}{m-\sqrt{mn}}+\frac{1}{m+\sqrt{mn}}\right)\cdot\frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}$.

5. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Периметр трапеции равен 132 см, а основания относятся как 2 : 5. Определить среднюю линию трапеции.

Вариант 8 (1993 г.)

1. От пристани вниз по реке отошел плот. Спустя 9 ч от этой же пристани в том же направлении отошел катер, который догнал плот в 20 км от пристани. Найти скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде равна 18 км/ч.

2. Решить уравнение $4^{x+2}+2\cdot 4^{x-1}=8{,}25$.

3. Найти область определения функции $y=\lg\frac{x^2+x-6}{x^2+4}$.

4. Упростить выражение $\frac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}-2\operatorname{ctg}\alpha$.

5. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса 6 см в точках M и K. Найти длину отрезка MK, если расстояние от центра окружности до точки A равно 10 см.

Вариант 9 (1993 г.)

1. Первый рабочий может выполнить некоторую работу на 8 ч раньше, чем второй. За какое время может выполнить эту работу

каждый рабочий в отдельности, если известно, что при совместном выполнении всей работы им потребовалось бы 7,5 ч?

2. Решить уравнение $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$.

3. Решить неравенство $\frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 4} < 1$.

4. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

5. В равнобочной трапеции одно основание равно 40 см, а другое 24 см. Диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

Вариант 10 (1993 г.)

1. В магазин для продажи поступили учебники по физике и математике. Когда продали 50% учебников по математике и 20% учебников по физике, что составило в общей сложности 390 книг, то тогда учебников по математике осталось в три раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике и сколько по физике поступило в продажу?

2. Решить уравнение $\lg\left(325 - 5^{\sqrt{x}}\right) = 2 + \lg 3$.

3. Найти область определения функции $y = \sqrt{\frac{1}{3x^2 - 8x + 4}}$.

4. Упростить выражение $\frac{a-1}{a + a^{1/2} + 1} : \frac{a^{1/2} + 1}{a^{3/2} - 1} + \frac{2}{a^{-1/2}}$.

5. Около круга радиуса 2 см описана равнобочная трапеция, площадь которой равна 20 см^2. Найти длины сторон трапеции.

Вариант 11 (1994 г.)

1. В техническом университете в трех потоках сдавали вступительные экзамены 1170 абитуриентов. В первом потоке было на 20% меньше, чем во втором, а в третьем — 30% от числа абитуриентов в первых двух потоках. Сколько человек сдавало экзамены в каждом потоке?

2. Решить уравнение $\frac{2\lg x}{\lg(5x - 6)} = 1$.

3. Найти область определения функции $y=\sqrt{\frac{x^2-5x-6}{x^2+9}}$.

4.Упростить выражение $\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a^{2/3}(a-b)^{2/3}}:\frac{a^{-2/3}(a-b)^{1/3}}{a^{3/2}-b^{3/2}}+\frac{1}{(ab)^{-1}}$.

5. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5 см. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

Вариант 12 (1994 г.)

1. Через один кран ванна наполняется за 36 мин, а через другой — за 72 мин. На сколько времени надо открыть оба крана, чтобы наполнить половину ванны?

2. Решить уравнение $3\sqrt{2x+3}=\frac{6}{\sqrt{2x+3}}+7$.

3. Найти область определения функции $y=\lg\frac{x^2+x-20}{x^2+49}$.

4. Упростить выражение $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}-\frac{3\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$.

5. В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3 : 2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 см больше другого. Найти длину гипотенузы треугольника.

Вариант 13 (1994 г.)

1.Поезд был задержан на 10 мин на середине пути между станциями A и B. Чтобы прийти в B по расписанию, машинист увеличил скорость на 6 км/ч. Найти скорость поезда по расписанию, если расстояние между станциями A и B равно 60 км.

2. Решить уравнение $\log_3^2(x+1)-3\log_3(x+1)+2=0$.

3. Решить неравенство $y=\sqrt{\frac{5x-1}{3x+2}}$.

4. Упростить выражение $\frac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\frac{a}{\left(1-\sqrt{a}\right)^2}-\frac{2\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}$.

5. В трапеции углы при одном из оснований равны 20 и 70°, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2 см.

Найти длину оснований трапеции, если длина средней линии равна 4 см.

Вариант 14 (1994 г.)

1. В экспедиции распределяли собак по упряжкам. Если в каждую упряжку запрячь по 12 собак, то в трех упряжках не хватило бы по одной собаке, а потому в упряжку запрягли 11 собак и оставили 7 собак в резерве. Сколько было упряжек?

2. Решить уравнение $\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$.

3. Решить неравенство $y = \lg\frac{5}{3x^2 - 4x + 1}$.

4. Упростить выражение $(1 + \sin 4\alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)^{-1} - \cos 2\alpha$.

5. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 20 и 30 см. Найти длину биссектрисы прямого угла треугольника.

Вариант 15 (1994 г.)

1. На вступительном экзамене 12,5% поступающих не решили ни одной задачи, 140 человек решили хотя бы одну задачу. Сколько человек сдавало экзамен?

2. Решить уравнение $\log_3 \sqrt{268 - 5^x} = 2{,}5$.

3. Решить неравенство $\frac{3x - 2}{2 - x} > 1$.

4. Упростить выражение $\left[\frac{1}{\left(x^{1/2} + y^{1/2}\right)^{-2}} - \frac{x^{3/2} + y^{3/2}}{x^{1/2} + y^{1/2}}\right] x^{-1/2} \cdot y^{-1/2}$.

5. Найти радиус окружности, описанной около равнобокой трапеции с основаниями, равными 2 и 14 см и высотой 10 см.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ 2-го УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ
(1992 — 1994 гг.)
(для абитуриентов заочного отделения ВЗФЭИ)

Вариант 16 (1992 г.)

1. Себестоимость изделия понизилась за первое полугодие на 10%, а за второе — на 20%. Определить первоначальную себестоимость изделия, если новая себестоимость стала 576 руб.

2. Решить уравнение $\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}=2\sqrt{x}$.

3. Решить неравенство $0{,}6^{\frac{2x-5}{x-3}}<0{,}6^{\frac{6x+1}{3x-1}}$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-1$.

5. Вычислить площадь прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если медиана, проведенная к гипотенузе, равна 10 см.

Вариант 17 (1992 г.)

1. Студент прочел книгу в 480 стр., ежедневно читая одинаковое количество страниц. Если бы он читал каждый день на 16 стр. больше, то прочел бы книгу на 5 дней раньше. Сколько дней студент читал книгу?

2. Решить уравнение $0{,}008^{\frac{x+4}{3x}}=25^{0{,}5-x}$.

3. Найти область определения функции $y=\lg\dfrac{x^2+9}{2x+1-3x^2}$.

4. Упростить выражение $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

5. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна к медиане BK. Найти площадь треугольника ABC, если $AM=6$ см, $BK=5$ см.

Вариант 18 (1992 г.)

1. Моторная лодка спустилась по течению на 28 км и тотчас же вернулась назад; на путь туда и обратно ей потребовалось 7 ч.

Найти скорость движения лодки в стоячей воде, если известно, что вода в реке движется со скоростью 3 км/ч.

2. Решить уравнение $x^{2+\log_3 x} = 3^8$.

3. Решить неравенство $(2x-5)\sqrt{9-x^2} \geq 0$.

4. Упростить выражение $\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-2} : \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60°, а его биссектриса делит сторону BC на отрезки $BE = 4$ см и $EC = 6$ см. Найти площадь параллелограмма.

Вариант 19 (1992 г.)

1. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

2. Решить уравнение $11^{2x-1} - 13^{2x-1} + 11^{2x-2} + 13^{2x-2} = 0$.

3. Найти область определения функции $y = \sqrt{1 - \frac{13}{2x} + \frac{15}{2x^2}}$.

4. Упростить выражение $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha} \cdot \frac{2-\sin 2\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$.

5. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит один из катетов на отрезки длиной 6 и 10 см, считая от вершины прямого угла. Найти площадь треугольника.

Вариант 20 (1992 г.)

1. Две бригады, работая вместе, должны изготовить 50 деталей. Вторая бригада выполнила задание на 90%. Для выполнения общего задания первая бригада изготовила деталей на 15% больше плана. Сколько деталей изготовила первая бригада?

2. Решить уравнение $0{,}8^{\lg\sqrt{x-9}} = 1{,}25^{\lg\sqrt{2x-1}-1}$.

3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2-16}}{5-x} \geq 0$.

4. Упростить выражение $\frac{2a^{-1/3}}{a^{2/3}-3a^{-1/3}} - \frac{a^{2/3}}{a^{5/3}-a^{2/3}} - \frac{a+1}{a^2-4a+3}$.

5. Стороны треугольника равны 13, 15 и 14 см. Определить площадь треугольника, образованного высотой и медианой, проведенными к стороне, равной 14 см.

Вариант 21 (1993 г.)

1. Два насоса, действуя попеременно, наполняют бассейн за 42 ч. Первый насос перекачивает за 1 ч 640 л, второй 480 л. Сколько часов работал первый насос, если известно, что оба насоса накачали одинаковое количество воды?

2. Решить уравнение $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{x+5}=1+\frac{1}{2}\lg 2.$

3. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{64x^2+81}}+\sqrt[3]{3-10x}.$$

4. Упростить выражение

$$\left[\left(\frac{1+x}{\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(x^{-1/3}-\sqrt[3]{x}\right)^{-1}\right]:\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\right).$$

5. В равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 18 см, а основания 12 см, вписана окружность. К окружности проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка касательной, ограниченной точками пересечения касательной с боковыми сторонами.

Вариант 22 (1993 г.)

1. Два мотоцикла отправляются из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 60 км. Один из них выехал в 5 ч 40 мин, а другой в 6 ч 30 мин, но оба приехали в пункт B одновременно.

Найти скорость каждого мотоциклиста, если известно, что второй проезжает в час на 12 км больше первого.

2. Решить уравнение $0{,}25\log_2^2 x^2+2\log_2\sqrt{x}-2=0.$

3. Решить неравенство $\dfrac{2x^2-6x+5}{x^2}>1.$

4. Упростить выражение $\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3-x\sqrt{x}+2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)^2-\dfrac{x-\sqrt{xy}}{x^{1/2}-y^{1/2}}}\right]^{-2}.$

5. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = 6$ см, а гипотенуза $AB = 10$ см. Проведены биссектрисы угла ABC и смежного с ним угла, пересекающего катет AC и его продолжение соответственно в точках D и E. Определить длину DE.

Вариант 23 (1993 г.)

1. Два комбайна убирают хлебное поле. После того как первый проработал на поле 1 ч, второй 5 ч, оказалось, что убрана половина поля. Затем 1,5 ч они работали вместе и убрали еще четверть поля. Оставшуюся часть выполнил только первый комбайн. Определить, сколько ему понадобится для этого времени.

2. Решить уравнение $3 \cdot 2^{2(\sqrt{x}-1)} - 2^{\sqrt{x}} = 8.$

3. Найти область определения функции

$$y = \log_2\left(\frac{1}{3}x^2 - 6x\right) + \sqrt{20 - x}.$$

4. Упростить выражение $\dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)}.$

5. В треугольнике с основанием, равным 10 см, проведен отрезок, параллельный основанию. Площадь полученной трапеции составляет 64% площади треугольника. Найти длину этого отрезка.

Вариант 24 (1993 г.)

1. Два портальных крана разгрузили железнодорожный состав за 40 часов совместной работы. Если бы половину состава разгрузил бы один кран, а затем половину — второй, то на разгрузку состава ушел бы 81 ч. За сколько часов каждый кран, работая отдельно, может разгрузить состав?

2. Решить уравнение $\sqrt{(x-3)(2x+7)} + 3 = x.$

3. Решить неравенство $\dfrac{64 - x^2}{\sqrt{x+1}} \geq 0.$

4. Упростить выражение $\dfrac{1 - \cos 4\alpha}{\cos^{-2} 2\alpha - 1} + \dfrac{1 + \cos 4\alpha}{\sin^{-2} 2\alpha - 1}.$

5. В треугольник, основание и высота которого равны по 6 см, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах. Найти площадь квадрата.

Вариант 25 (1993 г.)

1. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

2. Решить уравнение $\log_3\left(9^x+9\right)=x+\log_3\left(28-2\cdot 3^x\right)$.

3. Найти область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x^2+6x-7}{16x^2+49}}$.

4. Упростить выражение

$$\left(\frac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)^2\right].$$

5. Найти площадь равнобочной трапеции, у которой диагонали взаимно перпендикулярны, а основания равны 12 и 20 см.

Вариант 26 (1994 г.)

1. Забором длиной 24 м требуется огородить с трех сторон прямоугольный палисадник наибольшей площади. Найти размеры палисадника.

2. Решить уравнение $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

3. Решить неравенство $\log_{0,1}\dfrac{2x-4}{x-1}\ge 0$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\left[\cos(\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)\right]^2-2}{4\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

5. Определить площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, равные 25,6 и 14,4 см.

Вариант 27 (1994 г.)

1. Два крана разной мощности могли бы разгрузить баржу за 5 ч. Если же сначала первый разгрузит 1/3 баржи, а затем второй ос-

тавшуюся часть, то на разгрузку уйдет 10 ч. За сколько часов каждый кран в отдельности может разгрузить баржу?

2. Решить уравнение $2\,\mathrm{tg}\,(x + 3\pi) + 3 = \mathrm{tg}\,(1{,}5\pi + x)$.

3. Найти область определения функции $y = \lg\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$.

4. Упростить выражение

$$\left[\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right) - (a-1)\left(\sqrt{a}-1\right)^{-2}\right] \cdot 4\sqrt{a}.$$

5. Хорда данного круга пересекает его диаметр под углом 30° и делится в точке пересечения на отрезки 1 и 5 см. Определить расстояние хорды от центра круга.

Вариант 28 (1994 г.)

1. В первой цистерне на 25% нефти меньше, чем во второй и третьей вместе, а во второй на 10 тонн меньше, чем в третьей, и на 50% меньше, чем в первой. Сколько тонн нефти в каждой цистерне?

2. Решить уравнение $(0{,}4)^{\log_2^2 x + 1} = (6{,}25)^{2 - \log_2 x^3}$.

3. Решить неравенство $(x - 5)\sqrt{36 - x^2} \geq 0$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha(\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha)}$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Высота треугольника $BD = 8$ см. Найти радиус вписанной окружности и площадь треугольника, если косинус угла A равен 0,6.

Вариант 29 (1994 г.)

1. Каждая из двух машинисток перепечатывала рукопись в 72 страницы. Первая машинистка перепечатывала 6 страниц за то же время, за которое вторая перепечатывала 5 страниц. Сколько страниц перепечатывала каждая машинистка в час, если первая закончила работу на 1,5 ч раньше второй.

2. Решить уравнение $5 - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2(\pi - x)$.

3. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{12 + x + x^2}}{\log_2(2x-1)}$.

4. Упростить выражение $\left[\dfrac{1+\sqrt{a^3}}{\left(1-\sqrt{a}+a\right)\left(1+\sqrt{a}\right)} - \dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right] \cdot \dfrac{1-a}{1-\sqrt{a}}$.

5. Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой длины оснований равны 10 и 26 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

Вариант 30 (1994 г.)

1. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью в 294 м^2 и разделить этот участок забором на две равновеликие части. Найти размеры участка, при котором длина забора будет наименьшей.

2. Решить уравнение $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\dfrac{1}{x}$.

3. Решить неравенство $0{,}5^{\frac{2x-3}{5x-1}} \geq 0{,}5^{\frac{2x-1}{5x+4}}$.

4. Упростить выражение

$$\left(\frac{x^{1/2} - y^{1/2}}{xy^{1/2} + x^{1/2}y} + \frac{x^{1/2} + y^{1/2}}{xy^{1/2} - x^{1/2}y}\right)\frac{x^{3/2}y^{1/2}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}.$$

5. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 6 см, длина перпендикуляра, опущенного из середины основания на боковую сторону, равна 2,4 см. Найти длину высоты, опущенной на основание.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ 3-го УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ (1992 — 1994 гг.)

(для абитуриентов дневного отделения учебного комплекса ВЗФЭИ)

Вариант 31 (1992 г.)

1. В сосуде было 10 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и добавили такое же количество воды. Затем снова отлили такое

же количество смеси и долили такое же количество воды, после чего в сосуде оказался 64%-ный раствор соляной кислоты. Определить, сколько литров отливали каждый раз.

2. Решить уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1$.

3. Решить неравенство $\dfrac{8x^2 - 12x + 5}{4x^2} \geq 1$.

4. Упростить выражение $\dfrac{1 - \cos(4\alpha - 3\pi)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$.

5. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведен перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC. Найти угол BCA, если площадь четырехугольника $LMBC$ составляет 68% площади треугольника ABC.

Вариант 32 (1992 г.)

1. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 210 км. После встречи первому приходится быть в пути еще 2 ч, а второму 9/8 ч. Найти скорость каждого автомобиля.

2. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

3. Решить неравенство $\dfrac{18 - x^2}{\sqrt{2x+5}} \geq 0$.

4. Упростить выражение $\dfrac{4\sin^2(\alpha - 5\pi) - \sin^2(2\alpha + \pi)}{\cos^2\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - 4 + 4\sin^2\alpha}$.

5. Около окружности радиуса 6 см описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна 48 см^2. Найти длины сторон параллелограмма.

Вариант 33 (1992 г.)

1. Для переноски товаров с одного места на другое нанято некоторое число рабочих, которые перенесут весь товар за 10 ч. Если бы рабочих было на 10 больше и каждый переносил за час на 5 ящиков больше, то работа была бы закончена за 6 часов, а если бы рабочих было на 20 меньше и каждый переносил за час на 5 ящиков больше, то на работу ушло бы 15 ч. Сколько нанято рабочих и сколько было ящиков?

2. Решить уравнение $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$.

3. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{12 + x - x^2}}{\log_2(x-1)}$.

4. Упростить выражение $\dfrac{x^{4/3} - 8x^{1/3}y}{x^{2/3} + 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{2/3}} \cdot \left(1 - 2\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}\right)^{-1} - \sqrt[3]{x^2}$.

5. В трапеции *ABCD*, вписанной в окружность радиуса 2 см, диагональ *AC* является биссектрисой угла *BAD*, а длина основания *AD* в два раза больше длины основания *BC*. Найти площадь трапеции.

Вариант 34 (1992 г.)

1. Имеются два сплава с разным процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего содержание меди во втором сплаве. Затем оба сплава сплавили вместе, после чего содержание меди составило 36%. Определить процентное содержание меди в первом и втором сплавах, если известно, что в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором 12 кг.

2. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{1/2}\left(x^2 + \frac{7}{16}\right)} + \frac{3}{5x+1}.$$

4. Упростить выражение

$$\frac{2a(a-1)^{-1/2} - (a+1)^{1/2}}{(a+1)^{-1/2} - (a-1)^{-1/2}} : \frac{(a+1)^{1/2}}{(a-1)^{3/2} - (a+1)^{3/2}} - 1.$$

5. В треугольнике *ABC* с периметром 30 см длина стороны *AC* равна 3 см и величина острого угла *ABC* равна 60°. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке *O* касается стороны *BC* в точке *K*. Найти площадь треугольника *BOK*.

Вариант 35 (1992 г.)

1. Автомобиль проходит расстояние от пункта *A* до пункта *B* с постоянной скоростью. Если бы он увеличил скорость на 6 км/ч, то затратил бы на прохождение пути на 4 ч меньше, а со скоростью, меньше начальной на 6 км/ч, он потратил бы на 6 ч больше. Найти расстояние между пунктами *A* и *B*.

2. Решить уравнение $2^{\log_2^2 x} + 5x^{\log_2 x} = 12$.

3. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{5-2x} \geq 0$.

4. Упростить выражение $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{2}} - \dfrac{a^2+4}{a^3-\sqrt{8}}\right) : \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} + 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)^{-1}$.

5. Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. На продолжении *AB* откладываем *BM* = *AB*, на продолжении *BC* *CN* = *BC*, на продолжении *CD* *DP* = *CD*, на продолжении *DA* *AQ* = *DA*. Найти отношение площадей четырехугольников *ABCD* и *MNPQ*.

Вариант 36 (1993 г.)

1. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежеквартально на одно и то же число процентов. На сколько процентов ежеквартально увеличивался объем продукции, если за два квартала он увеличился на 156%.

2. Решить уравнение $9^x - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$.

3. Решить неравенство $\log_{0,3}\dfrac{2x-8}{x-2} > 0$.

4. Упростить выражение $1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)\cos 4\alpha$.

5. В треугольнике *ABC* угол *C* прямой, медиана *AD* и медиана *CE* взаимно перпендикулярны. Определить величину угла *B*.

Вариант 37 (1993 г.)

1. Сплавляя два одинаковых по весу куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержалось 12 кг хрома. Если бы первый кусок был в два раза тяжелее, то в сплаве содержалось бы 16 кг хрома. Известно, что содержание хрома в первом куске на 5% меньше, чем во втором. Найти процентное содержание хрома в каждом куске чугуна.

2. Решить уравнение $4{,}5x^2 + 6x - 26 = \sqrt{3x^2 + 4x - 4}$.

3. Найти область определения функции

$$y = \log_5\left(3x^2 - 18x\right) + \sqrt{20 - x}.$$

4. Упростить выражение $\sin^2\alpha\left(1+\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{\sin\alpha}\right)$.

5. В окружность радиуса 5 см вписана равнобедренная трапеция с углом при основании $\frac{\pi}{3}$ и высотой $3\sqrt{3}$ см. Найти площадь трапеции.

Вариант 38 (1993 г.)

1. При каком угле наклона образующей конуса к основанию объем конуса является наибольшим? Найти наибольший объем конуса с образующей, равной $3\sqrt{3}$ см.

2. Решить уравнение $\sin^3 x\,(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x\,(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x$.

3. Решить неравенство $0{,}2^{\frac{4x-5}{2x-3}}<0{,}2^{\frac{12x+1}{6x-1}}$.

4. Упростить выражение $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-2\sqrt[4]{ab}}+\sqrt{ab}\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1}$.

5. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около этого треугольника, равно 0,32. Найти угол при основании треугольника, если известно, что он больше 45°.

Вариант 39 (1993 г.)

1. В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую последующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую последующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

2. Решить уравнение $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\cdot 6^{x/2}$.

3. Найти область определения функции $y=\lg\frac{4x^2+9}{4x+1-12x^2}$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\left(\cos\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

5. Определить площадь трапеции по двум диагоналям 17 и 21 см и средней линии 5 см.

Вариант 40 (1993 г.)

1. Для разгрузки парохода выделено две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое может самостоятельно разгрузить пароход первая бригада, прибавить время, за которое может самостоятельно разгрузить пароход вторая бригада, то получится 9 ч. Определить эти времена, если их разность составляет 45% времени, за которое обе бригады могут разгрузить пароход совместно.

2. Решить уравнение $\log_{\cos x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x = 2$.

3. Найти область определения функции $y = \sqrt{1 - \dfrac{13}{x} + \dfrac{30}{x^2}}$.

4. Упростить выражение $\left[\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\right)^{-1/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right] \cdot \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}} + 2x$.

5. На отрезке AB длины 8 см как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, как и первая, имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найти радиус третьей окружности.

Вариант 41 (1994 г.)

1. Два тела равномерно движутся по окружности в одном и том же направлении, и одно из них догоняет другое через каждые 23 с. Если же эти тела с теми же скоростями движутся в разных направлениях, то они встречаются через каждые 4 с. Определить скорости движения тел по окружности, зная, что ее радиус равен 92 см.

2. Решить уравнение $\sin^2 x\,(\operatorname{tg} x + 1) = 3\sin x\,(\cos x - \sin x) + 3$.

3. Найти область определения функции $y = \lg\dfrac{21x - 4x^2 - 20}{x^2 + 36}$.

4. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$$

5. Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу AB, равна 4 см, D — основание высоты, M и N — середины отрезков AD и DB. Найти расстояние от вершины C до точки пересечения высот треугольника CMN.

Вариант 42 (1994 г.)

1. Теплоход загружается подъемными кранами. Сначала 2 ч работали четыре крана одинаковой мощности, затем к ним присоединились еще два крана, но меньшей мощности, и через 3 ч после этого разгрузка была закончена. Если бы все краны начали работать одновременно, то погрузка была бы закончена за 4,5 ч. За сколько времени выполнят погрузку один кран большей и один кран меньшей мощности при совместной работе?

2. Решить уравнение $4\sin^2 x+\sin^2 2x=3$.

3. Решить неравенство $\dfrac{4-2x}{2x-5}>\dfrac{1}{1-2x}$.

4. Упростить выражение $\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{\dfrac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt[4]{a^{-1}}+\sqrt[4]{a^2}}{1+\sqrt[4]{a^{-1}}}-\sqrt{a}}\right)^5$.

5. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26 см. Величина угла ABC равна 120°. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, равен $\sqrt{3}$ см. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что длина стороны AD больше длины стороны AB.

Вариант 43 (1994 г.)

1. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр, равный 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислить этот объем.

2. Решить уравнение $\log_2\log_3\left(x^2-16\right)-\log_{0,5}\log_{1/3}\dfrac{1}{x^2-16}=2$.

3. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{1/3}\left(x^2+0{,}84\right)}+\frac{1}{4x-1}.$$

4. Упростить выражение

$$\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2-a^{-1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}-1}-\frac{1}{b-\sqrt{b}}\right)^{-1}-a^{1/2}b^{-1/2}.$$

5. Около окружности радиуса 3 см описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна 1 см. Найти площадь трапеции.

Вариант 44 (1994 г.)

1. На заводе сначала работало два цеха — первый и второй. Затем был пущен третий цех, в результате чего завод увеличил ежемесячный выпуск продукции в 1,6 раза. Во сколько раз больше продукции дает в месяц третий цех по сравнению со вторым цехом, если известно, что за два месяца первый и третий цеха вместе выпускают столько же продукции, сколько второй за полгода?

2. Решить уравнение $2\sqrt{x^2-x+5}-x^2+x+10=0.$

3. Решить неравенство $\dfrac{x^2-6x+10}{x^2}>\dfrac{1}{2}.$

4. Упростить выражение $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{17\pi}{8}-\alpha\right).$

5. В трапеции длина средней линии равна 4 см, а углы при одном из оснований равны 40 и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1 см.

Вариант 45 (1994 г.)

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найти число.

2. Решить уравнение $\log_x\dfrac{5}{x^2}\cdot\log_5^2 x=-1.$

3. Решить неравенство $0{,}3^{\frac{3x-5}{2x+1}}\geq 0{,}3^{\frac{3x-8}{2x-1}}.$

4. Упростить выражение $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}$.

5. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2 см. Из конца отрезка *OA*, пересекающегося с окружностью в точке *M*, проведена касательная *AK* к окружности. Величина угла *OAK* равна 60°. Найти радиус окружности, касающейся отрезков *AK*, *AM* и дуги *MK*.

Вариант 46 (1994 г.)

1. Из сосуда емкостью 9 л, наполненного спиртом, два раза брали по одинаковому количеству содержимого и каждый раз дополняли водой, после чего в сосуде осталось 4 л чистого спирта. По сколько литров отливали каждый раз?

2. Решить уравнение $\left(7^x-1\right)\left(9^x-6\right)=21^x-3^x$.

3. Найти область определения функции $y=\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{\log_5(x-1)}$.

4. Упростить выражение

$$\sin\alpha\left(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\right).$$

5. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длина биссектрис 15 и 13 см.

Вариант 47 (1994 г.)

1. Куплено двух сортов ткани на 1525 тыс. руб. Метр ткани каждого сорта стоит столько рублей, сколько метров куплено ткани этого же сорта. Если бы за метр каждого сорта платили столько рублей, сколько метров ткани было куплено другого сорта, то за всю ткань заплатили бы на 25 тыс. руб. меньше. Сколько метров ткани каждого сорта куплено?

2. Решить уравнение $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$.

3. Найти область определения функции $y=\sqrt{1-\frac{9}{x}+\frac{18}{x^2}}$.

4. Упростить выражение

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\alpha\left(\cos^{-1}\alpha-\sin^{-1}\alpha\right)}\cdot\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}.$$

5. На сторонах квадрата $ABCD$ взяты точки M, N и K, где M — середина AB, N лежит на стороне BC, причем $2BN = NC$, K лежит на стороне DA, причем $2DK = KA$. Найти синус угла между прямыми MC и NK.

Вариант 48 (1994 г.)

1. Велосипедист, выезжающий из A в B, должен приехать в B через 3 ч. Одновременно с ним из пункта C выезжает другой велосипедист, и, чтобы приехать в B вместе с первым велосипедистом, он должен каждый километр проезжать на 1 мин. быстрее, чем первый. Расстояние от C до B на 6 км больше расстояния от A до B. Определить эти расстояния.

2. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

3. Решить неравенство $\frac{10 - x^2}{\sqrt{2x+5}} \ge 0$.

4. Упростить выражение

$$\frac{\left(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}\right)^2 + \left(m^{1/4} - n^{1/4}\right)^2}{2(m-n)} : \frac{1}{m\sqrt{m} - n\sqrt{n}} - 3m^{1/2}n^{1/2}.$$

5. Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

Вариант 49 (1994 г.)

1. Свежие грибы содержат по весу 90% воды, а сухие 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 17,6 кг свежих грибов?

2. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{18 - 9x + x^2} = \sqrt{4x - 12}$.

3. Решить неравенство $\frac{3x^2 - 16x + 21}{\log_{0,3}\left(x^2 + 4\right)} > 0$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)}$.

5. Прямая, параллельная основанию треугольника с площадью 108 см^2, отсекает от него треугольник с площадью 12 см^2. Опре-

делить площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами малого треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

Вариант 50 (1994 г.)

1. Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

2. Решить уравнение $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0.$

3. Найти область определения функции $y=\lg\dfrac{9x^2-8x-1}{4x^2+81}$.

4. Упростить выражение

$$\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

5. В трапеции $ABCD$ основания $AD=8$ см и $BC=4$ см, а боковая сторона $AB=\sqrt{28}$ см и угол $CDA=60°$. Через точку C проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

13.3. Варианты заданий и теоретические вопросы для вступительного собеседования по математике во ВЗФЭИ

Выпускники средних учебных заведений, входящих в учебный комплекс при ВЗФЭИ, рекомендованные к обучению в институте, имеют право в год окончания учебного заведения проходить вступительное собеседование по математике вместо сдачи вступительных экзаменов.

В начале собеседования абитуриенту предлагается задание, которое он выполняет письменно. При успешном выполнении этого задания собеседование продолжается в форме диалога преподавателя с абитуриентом, в процессе которого задаются теоретические вопросы.

В результате собеседования уровень подготовки абитуриентов оценивается как "высокий", "достаточный", "недостаточный". При уровне подготовки "высокий" или "достаточный" абитуриенты зачисляются в институт вне конкурса. Абитуриенты, уровень подготовки которых оценен как "недостаточный", имеют право сдавать вступительные экзамены на общих основаниях.

Ниже приводятся примеры заданий и теоретических вопросов на вступительном собеседовании.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ 2-го УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО СОБЕСЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ВО ВЗФЭИ (1992 — 1994 гг.)

Вариант 51 (1992 г.)

1. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то работа заняла бы у них 4 дня. За сколько времени выполнил бы всю работу один первый рабочий?

2. Решить уравнение $\sqrt{2+x}+\dfrac{4}{\sqrt{2+x}+3}=2.$

3. Упростить выражение $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha.$

Вариант 52 (1992 г.)

1. Основания равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равны 4 и 6 см. Найти длину окружности.

2. Найти область определения функции

$$y=\lg\left(\frac{1}{3}x^2-2x\right)+\sqrt{8-x}.$$

3. Упростить выражение

$$\left[\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\sqrt[4]{16ab}}{a-b}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\left(\frac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^{-1}\right]^{-1}.$$

Вариант 53 (1992 г.)

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от данного треугольника два прямоугольных треугольника. Найти длины сторон этих треугольников.

2. Решить неравенство $\dfrac{3x^2-12x+16}{x^2+16} \le 1.$

3. Упростить выражение

$$\left[\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}\right)^{-1}+(xy)^{1/2}\right]:\left(x^{1/2}+y^{1/2}\right).$$

Вариант 54 (1993 г.)

1. В двух емкостях находится солевой раствор с концентрацией соли соответственно 5 и 10%. Сколько литров солевого раствора необходимо взять из первой и второй емкостей, чтобы получить 6 л раствора с содержанием соли 7%?

2. Решить уравнение $3\cdot 2^{x/2}-7\cdot 2^{x/4}=20.$

3. Упростить выражение $\dfrac{4\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\,(-\alpha)\left(1-\mathrm{tg}^2(\alpha-\pi)\right)}{1+\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}.$

Вариант 55 (1993 г.)

1. В прямоугольной трапеции основания равны 27 и 12 см, а боковые стороны относятся как 5 : 4. Найти площадь трапеции.

2. Решить уравнение $\lg\left(2^{x-3}+\dfrac{1}{2}\right)=\lg\left(4^{x-2}+9\right)-1.$

3. Упростить выражение

$$\frac{bc^{1/2}}{b^{1/2}-c^{1/2}}-\frac{b}{b^{1/2}c^{1/2}+c}:\left(\frac{b^{1/2}+c^{1/2}}{bc^{1/2}-b^{1/2}c}-\frac{4}{b-c}\right).$$

Вариант 56 (1993 г.)

1. В зрительном зале 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале?

2. Решить уравнение $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$.

3. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^{-2}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-1}+\frac{\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos^{-2}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-1}.$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ 3-го УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО СОБЕСЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ВО ВЗФЭИ (1992 — 1994 гг.)

Вариант 57 (1994 г.)

1. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 62,5 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

2. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{9x^2-16}}{2x-9}\le 0$.

3. Упростить выражение $\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)$.

Вариант 58 (1994 г.)

1. Из пункта *A* в одно и то же время в одном направлении отправились два автомобиля: первый со скоростью 70 км/ч, а второй со скоростью 50 км/ч. Через 15 мин из пункта *A* отправился третий автомобиль, который догнал первый автомобиль на 20 мин позже, чем второй автомобиль. Найти скорость третьего автомобиля.

2. Решить уравнение $\log_{0,5}^2 4x + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8.$

3. Упростить выражение

$$\frac{\cos^2\left(2\alpha - 90^\circ\right) + \operatorname{ctg}^2\left(90^\circ + 2\alpha\right) + 1}{\sin^2\left(2\alpha - 270^\circ\right) + \operatorname{tg}^2\left(270^\circ + 2\alpha\right) + 1}.$$

Вариант 59 (1994 г.)

1. Продают три куска ткани. Из первого продали половину, из второго две трети, а третий кусок, в котором одна треть всей материи, продали весь. Сколько процентов ткани продано, если всего ее осталось вдвое меньше, чем было во втором куске?

2. Решить уравнение $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

3. Упростить выражение

$$\left[\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}\right)^{-1} + \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2} : \frac{x - a}{4\sqrt{x} + 4\sqrt{a}} - 1.$$

Вариант 60 (1994 г.)

1. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны 4 и 25 см^2. Найти площадь данной трапеции.

2. Решить уравнение $4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x.$

3. Упростить выражение

$$\left(\frac{1 - a^{-1/2}}{1 + a^{1/2}} - \frac{a^{1/2} + a^{-1/2}}{a - 1}\right) \cdot \frac{a^{1/2} - 1}{\left(a^{1/2} + 1\right)^{-1}}.$$

Вариант 61 (1994 г.)

1. Длины сторон треугольника относятся как 2 : 3 : 2. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершины которого находятся в точках пересечения биссектрис данного треугольника с его сторонами.

2. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{0,5}\left(x^2 + 0,64\right)} + \frac{1}{x}.$$

3. Упростить выражение

$$\left(\frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{b}\right):\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)^{-1}.$$

Доплнительные варианты 62—77 приведены в таблице.

Дополнительные варианты заданий для подготовки к вступительному собеседованию по математике во ВЗФЭИ

2-й уровень сложности				3-й уровень сложности			
№ варианта	Номера задач пособия в варианте задания			№ варианта	Номера задач пособия в варианте задания		
62	**3.17**	**4.182**	**6.131**	70	**3.113**	**4.188**	**6.56**
63	**3.35**	**4.171**	**6.124**	71	**3.112**	**4.50**	**6.47**
64	**3.51**	**2.127**	**6.125**	72	**3.111**	**2.148**	**6.58**
65	**3.58**	**2.141**	**6.121**	73	**3.115**	**2.177**	**6.135**
66	**9.114**	**4.162**	**1.69**	74	**9.149**	**4.193**	**1.77**
67	**9.71**	**4.165**	**1.95**	75	**9.150**	**4.187**	**1.71**
68	**9.83**	**5.124**	**1.120**	76	**9.152**	**5.131**	**1.117**
69	**9.111**	**5.193**	**1.96**	77	**9.153**	**5.173**	**1.110**

ПРИМЕРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ НА ВСТУПИТЕЛЬНОМ СОБЕСЕДОВАНИИ ПО МАТЕМАТИКЕ ВО ВЗФЭИ (1992 — 1994 гг.)

1. Каким равенством связаны между собой делимое a, делитель b, частное c и остаток d?

2. При делении некоторого числа на 12 получился остаток 8. Чему будет равен остаток при делении этого числа на 6?

3. После снижения цен на 15% метр материи стоил 340 руб. Сколько стоил метр материи до снижения?

4. Определить число, 15% которого составляют 60% от числа 50.

5. Что больше: а) 45^2-31^2 или 44^2-30^2; б) $297\cdot 299$ или 298^2?

6. Сократить выражения:

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; в) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

7. Что называется корнем n-й степени из данного числа a? арифметическим корнем? Чему равно:

а) $\sqrt{(a-1)^2}$ при $a<1$; б) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; в) $x+\sqrt{(1-x)^2}$ при $x=2$;

г) $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$.

8. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}$.

9. Какие уравнения называются равносильными? Будут ли равносильны уравнение $f(x)=\varphi(x)$ и уравнения:

а) $\sqrt{f(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$; б) $f^2(x)=\varphi^2(x)$; в) $f^3(x)=\varphi^3(x)$;

г) $\lg f(x)=\lg\varphi(x)$.

10. Решить уравнения:

а) $(x+1)\sqrt{x}=0$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=-1$; в) $\sqrt{x^2}=x$;

г) $\dfrac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}=1$; д) $(x+2)\lg x=0$.

11. Какие преобразования уравнений могут привести к приобретению посторонних корней? к потере корней? Привести примеры.

12. Сформулировать основные свойства числовых неравенств. Если $a>b$, то всегда ли:

а) $a^2>b^2$; б) $ac>bc$, в) $a(x^2+1)>b(x^2+1)$?

13. Построить графики функций:

а) $y=-x$; б) $y=2x-1$; в) $y=2(x-1)$; г) $y=-2$.

14. Сформулировать теорему Виета для корней квадратного уравнения. С помощью теоремы Виета определить знаки корней уравнения:

а) $2x^2+7x+1=0$; б) $2x^2-7x+1=0$; в) $2x^2-7x-1=0$.

15. Написать квадратное уравнение по его корням:

а) $x_1=-7$; $x_2=4$; б) $x_1=\alpha$; $x_2=\beta$; в) $x_1=2-\sqrt{3}$; $x_2=2+\sqrt{3}$.

16. Решить неравенства:

а) $(x^2+4)(x-1)<0$; б) $x^2+6x+9<0$; в) $x^2+x+1>0$;

г) $\dfrac{x-2}{x^2-4}>0$; д) $\dfrac{x-2}{x^2+4}>0$; е) $\dfrac{x-2}{x^2+x+4}<0$.

17. Построить графики функций:

а) $y=2x^2$; б) $y=-2x^2$; в) $y=2x^2-5$; г) $y=-2x^2+5$; д) $y=2(x-5)^2$; е) $y=2x^2-5x$; ж) $y=-2x^2+5x-2$.

18. Построить графики функций:

$$\text{а) } y=2^x;\ \text{б) } y=\left(\frac{1}{2}\right)^x;\ \text{в) } y=\pi^x$$

19. Решить неравенства:

$$\text{а) } 0{,}4^{x+1}>1;\ \text{б) } 0{,}5^{x-3}<2;\ \text{в) } 0{,}3^{2x}>0{,}3^{2-x};\ \text{г) } \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}>81.$$

20. Сформулировать определение логарифма числа по данному основанию. Записать основное тригонометрическое тождество. Вычислить:

а) $10^{\lg 5}$; б) $10^{\lg 2-\lg 3}$; в) $10^{3\lg 5}$.

21. Найти область определения функций:

а) $y=\lg(x-2)$; б) $y=\log_x 2$; в) $y=\log_x(2-x)$;

г) $y=\sqrt{\log_{1/2} x}$; д) $y=\log_{1/2}\log_3 x$.

22. Что можно сказать об основании логарифма a, если:

$$\text{а) } \log_a 3>\log_a 5;\ \text{б) } \log_a 2<0;\ \text{в) } \log_a \frac{1}{3}>0?$$

23. Определить число цифр в числе 2^{100}, если $\lg 2\approx 0{,}301$.

24. Вычислить: а) $\log_{5\sqrt{5}} 125$; б) $81^{\log_3 2}$; в) $2^{3-\log_2 5}$.

25. Решить графически уравнения: а) $4^x=4x$; б) $\log_2 x=x-2$.

26. Вычислить: а) $\log_2 104$, если $\log_2 13=3{,}7$; б) $\log_2 192$, если $\log_2 12=3{,}6$; в) $\log_5 265$, если $\log_5 53\approx 2{,}5$.

27. Решить неравенства:

$$\text{а) } \log_{0,3} x>\log_{0,3}(2-x);\ \text{б) } x\log_2 x<0.$$

28. Как по графику функции $y=f(x)$ построить графики функций $y=|f(x)|$ и $y=f(|x|)$? Построить графики функций:

а) $y=|x|$; б) $y=|2x+3|$; в) $y=2|x|+3$; г) $y=|2x^2+5x|$;

д) $y=2x^2+5|x|$; е) $y=|-2x^2+5x|$; ж) $y=-2x^2+5|x|-2$;

з) $y=|-2x^2+5|x|-2|$; и) $y=-\dfrac{5}{|x|}$; к) $y=\dfrac{-5}{|x+2|}$; л) $y=2^{|x|}$;

м) $y=\log_2|x|$; н) $y=|\log_2 x|$; о) $y=|\log_2|x||$; п) $y=\log_{1/2}|x|$.

29. Вычислить:

а) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

30. Какое из чисел больше: а) $\cos^2\alpha$ или $\cos^3\alpha$ (рассмотреть различные случаи); б) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$ или 1?

31. Что больше: $\sin 2\alpha$ или $2\sin\alpha$. *а*) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?

32. Вычислить:

а) $\cos 2\alpha$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ и $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$; б) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = 0{,}6$; $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$;

г) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{4}$;

д) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; е) $\sin\alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$;

ж) $1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{5}$; з) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; и) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \alpha\right) = -\frac{3}{2}$.

33. Найти на стороне треугольника точку, равноудаленную от двух других сторон.

34. Чему равно отношение периметров и площадей подобных фигур?

35. Через середину высоты треугольника проведена прямая, параллельная основанию. Какую часть составляет площадь полученной трапеции от площади треугольника?

36. Сформулировать свойства средней линии треугольника и трапеции.

37. Основания трапеции равны *а* и *b*. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

38. Чему равна медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе?

39. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей трапеции?

40. Почему в равнобедренной трапеции биссектрисы двух углов, прилежащих к боковой стороне, взаимно перпендикулярны?

41. Где расположен центр вписанной в треугольник окружности? описанной окружности? точка пересечения медиан?

42. Два угла треугольника равны α и β. Под каким углом видна каждая сторона треугольника из центра вписанной окружности?

43. Сформулировать свойства вписанных в окружность и описанных около окружности четырехугольников.

44. Сформулировать теоремы синусов и косинусов.

45. Какие формулы площади треугольника вам известны?

46. Как найти радиусы вписанной и описанной окружностей, если известны стороны и площадь треугольника?

47. Сторона равностороннего треугольника равна a. Найти: а) площадь треугольника; б) высоту; в) среднюю линию; г) радиус вписанной и описанной окружностей; д) сумму расстояний от любой точки внутри треугольника до каждой из сторон.

48. В треугольнике заданы стороны a, b, c. Найти: а) площадь треугольника; б) высоту, проведенную к основанию c; в) среднюю линию; г) радиусы вписанной и описанной окружностей; д) косинус одного из углов; е) медиану, проведенную к основанию.

49. Радиус сектора равен R, а центральный угол α. Найти: а) длину дуги сектора; б) площадь сектора и соответствующего сегмента.

13.4. О проведении вступительных экзаменов по математике с применением ЭВМ

Во многих вузах вступительные экзамены проводятся с применением ЭВМ. Такие экзамены проходят в обычной обстановке, без применения каких-либо обучающих и контролирующих приставок. Место абитуриента в аудитории, как правило, определяется машиной (оно указывается на посадочном талоне, подготовленном заранее ЭВМ). Прямого контакта с машиной абитуриент не имеет. Ему не надо сидеть за пультом, нажимать на клавиши и следить за сигнализацией. Он даже не почувствует, что его знания проверяются с помощью ЭВМ.

Особенность таких экзаменов в том, что наряду с обычно оформленной работой абитуриент должен заполнить специальный отрывной талон с ответами решенных задач. После экзамена талоны с ответами поступают на ЭВМ, которая сравнивает полученные абитуриентом ответы с эталонными и в зависимости от числа (процента) правильно решенных задач выставляет экзаменационные оценки. Сами экзаменационные работы остаются в приемной комиссии, причем часть из них (примерно 5 — 7 %) проверяется преподавателями параллельно с машиной.

Среди достоинств экзамена с применением ЭВМ отметим, в частности, унификацию требований ко всем абитуриентам, повышение объективности оценок. Вместе с тем, следует отметить, что специфика машинного контроля предъявляет повышенные требования к правильности результата решения задачи, так как негрубая вычислительная или даже механическая ошибка абитуриента в процессе в принципе верного решения может привести к неправильному ответу, и машина сочтет задачу нерешенной (правда, указанные недостатки машинного контроля сглаживаются тем, что абитуриент может допустить ошибки в процессе решения задачи при правильном конечном ответе, которые "не заметит" машина).

Специфика машинного контроля предполагает наличие числового ответа в каждой задаче. Поэтому стандартные формулировки некоторых задач могут быть изменены; например, вместо "решить уравнение" предлагается "найти наибольший (наименьший) корень уравнения (или их сумму)", вместо "решить неравенство" – "найти наибольшее (наименьшее) целое значение x, удовлетворяющее неравенству", и т.п. В задачах по тригонометрии обычно предлагается найти корни уравнения из указанного числового промежутка. В некоторых задачах предлагается вычислить ответ с определенной степенью точности.

На экзаменах, использующих машинный контроль, как правило, не разрешается использовать калькуляторы, счетные линейки, таблицы и т.п.

Примеры экзаменационных заданий для вступительных экзаменов с применением ЭВМ приведены в §13.5 (см. варианты 81, 82, 86, 99, 100). Здесь же дадим примеры задач, акцентируя внимание читателя на получении числового ответа, завершающего решение задачи, а нахождение общего решения предлагаем провести читателю самостоятельно.

Пример 1. Дано неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-12x+35}}{\sqrt[4]{10-x}\,\lg^2(x-2)} \geq 0.$

Найти: а) наибольшее целое x, наименьшее целое x, сумму всех целых x, удовлетворяющих неравенству; б) сумму длин промежутков и координату середины наибольшего (по длине) промежутка, на которых справедливо неравенство.

Решив неравенство, получим $x \in (2;\ 3) \cup (3;\ 5] \cup [7;\ 10)$. (*)
а) Очевидно, что наибольшим целым x из решения (*) будет $x = 9$ (а не 10 !), наименьшим целым $x = 4$ (а не 2 !); целыми решениями, удовлетворяющими неравенству или объединению множеств (*), будут 4, 5, 7, 8, 9, их сумма равна 33. б) Длины полученных промежутков в решении (*) равны $3 - 2 = 1$ ед., $5 - 3 = 2$ ед. и $10 - 7 = 3$ ед., т.е. сумма длин промежутков равна 6 ед., а середина наибольшего (по длине) промежутка $[7;\ 10)$ имеет координату, равную 8,5 ед.

Пример 2. Найти целое значение x, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{0,5}(2x-3) > -3, \\ x^2 - 4x > 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x \in (4;\ 5{,}5)$. Единственное целое x, ему удовлетворяющее, есть число $x = 5$.

Пример 3. Дано уравнение $\cos^2 x + \cos^2 3x = 1$. На отрезке $[-90°;\ 90°]$ найти: а) наибольшее и наименьшее x, удовлетворяющее уравнению; б) число всех корней уравнения.

Решив уравнение, найдем $x = 22{,}5° + 45°n$ и $x = 45° + 90°n$.

Рис. 13.5

Отметим эти решения на тригонометрическом круге (рис. 13.5), учитывая, что $x \in (-90°;\ 90°)$. Получим при $n = 0$ $x_1 = 22{,}5°$ и $x_2 = 45°$; при $n = -1$ $x_3 = -22{,}5°$ и $x_4 = -45°$; при $n = 1$ $x_5 = 67{,}5°$ и 135°; при $n = -2$ $x_6 = -67{,}5°$ и $-135°$. Решения $\pm 135°$, а также получаемые при $n = 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$, лежат вне рассматриваемого отрезка. В результате получим: а) наибольшее и наименьшее значения x равны соответственно 67,5° и $-67{,}5°$; б) число всех корней уравнения на отрезке $[-90°;\ 90°]$ равно 6.

Пример 4. Дуга кругового сектора содержит 60°. Во сколько раз периметр сектора больше длины вписанной в сектор окружности? Ответ дать с точностью до 0,1. Решив задачу, получим отношение указанных в условии величин $k = 0{,}5 + \dfrac{3}{\pi}$. Полагая $\pi \approx$

$\approx 3{,}14$, найдем $k \approx 0{,}5 + 0{,}955 = 1{,}455$. Округляя полученный ответ до 0,1, получим $k = 1{,}5$ раза. (Заметим, что в промежуточных приближенных вычислениях рекомендуется давать хотя бы один запасной десятичный знак по сравнению с требуемой в условии точностью ответа).

13.5. Варианты заданий по математике на вступительных экзаменах в различных экономических вузах (1992 — 1994 гг.)

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (экономический факультет)

Вариант 78 (1992 г.)

1. Вычислить $\log_{\frac{18}{7}}\left|\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \log_{\frac{18}{7}}\left|\cos\left(3\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, если известно, что $\cos\gamma + \sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Решить неравенство

$$\left(4^{x-1} + 4^{1-x} - 2\right)^{-1}\left(x^2 - 5x + 4\right)\sqrt{7 - x} \le 0.$$

3. Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей первого типа и 2010 деталей второго типа. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он может изготовить 1 деталь второго типа. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы BAC, BAD и CAD при вершине A равны $\pi/3$, $3\pi/4$ и $\pi/2$ соответственно. Определить угол между гранями BAD и CAD.

5. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD — в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла

AOD. Найти отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $OA = 12$, $OD = 8$, $CD = 2$.

6. Найти все значения параметра q, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства

$$x^2 - 5(x-1) + 3(|x-q| - q) \le 0$$

максимально.

Вариант 79 (1993 г.)

1. Решить неравенство $\log_{7x-6} 25 < 2$.

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)} = 1$.

3. Решить неравенство $3\sqrt{x+2} \le 6 - |x-2|$.

4. Найти периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin\left[(y-1)^2\right] \le \pi(x+2), \\ 2|y-1| - x \ge 0. \end{cases}$$

5. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно: сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}$%, потом $7\frac{1}{7}$% и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определить срок хранения вклада.

6. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника.

Вариант 80 (1994 г.)

1. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \le 5. \end{cases}$$

2. Найти область значений функции $y = -\sqrt{-3x^2 + 12x - 3}$.

3. Решить уравнение $\log_3[(x+10)\cos x] = \log_3\left(\dfrac{x+10}{\cos x}\right)$.

4. Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием $|2y + 3x - 2| + |3x + 6| < 6$.

5. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\dfrac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \dfrac{40500}{n}\right|$ тыс. руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 - \dfrac{3}{10}n$ тыс. руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $CK : KM = 2 : 1$, $CD : DK = 5 : 3$ и $\angle ABD + \angle ACD = 180°$. Найти отношение стороны AB к диагонали AC

Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова *

Вариант 81 (1993 г.)

1. Найти корни уравнения $2 - \cos 2x = 3 \sin x$, принадлежащие отрезку [7; 9]. В ответе указать их количество.

2. Решить уравнение $9^{\sqrt{x}} + 3 = 10 \cdot 3^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}$.

---

* Вступительные экзамены по математике проводились с применением ЭВМ. (В ответах к задачам приводятся только числовые значения без указания единиц измерения).

3. Найти площадь треугольника, образованного осью OX и касательными к кривым $y=\dfrac{x^2}{4}$ и $y=\dfrac{2}{x}$, проведенными в точке их пересечения.

4. Решить неравенство $3x+12\cdot 3^{\sqrt{x}}\ge 4x\cdot 3^{\sqrt{x}}+9.$

В ответе указать количество целых решений.

5. Сумма седьмого и тринадцатого членов арифметической прогрессии равна 42, а разность двадцатого и четвертого членов равна 48. Найти девятый член прогрессии.

6. Найти больший корень уравнения

$$\log_{3x+1}(x+3)-\log_{x+3}\left(3x^2+10x+3\right)+1=0.$$

7. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 12, а большая диагональ делит угол при большем основании пополам и равна 20. Найти меньшее основание трапеции.

8. Тангенс угла наклона образующей к основанию конуса равен 4/3. Найти отношение площади основания конуса к площади поверхности вписанного в него шара.

9. Найти все значения a, при которых сумма квадратов корней уравнения $2x^2-10x+a=0$ равна 17.

10. Найти xy, если $\begin{cases}2^{1+|y-3|}+\sqrt{x+4}=4-a,\\ \sqrt{x+4}-2^{|y-3|}=2a-5.\end{cases}$

Вариант 82 (1993 г.)

1. Трое рабочих первого разряда и пять рабочих второго разряда выполнили работу за 2,5 дня. За один день пять рабочих первого разряда и трое рабочих второго разряда выполняют 34/75 этой работы. За сколько дней выполнят работу 6 рабочих первого разряда и 15 рабочих второго разряда?

2. Вычислить $\left[\dfrac{3\left(\sqrt{13}+2\right)}{\sqrt{19}-4}-\dfrac{4\left(\sqrt{19}-2\right)}{\sqrt{13}-3}-2+\sqrt{19}\right]\left(2-\sqrt{13}\right).$

3. Решить уравнение $\log_{\sqrt{7}}\left(3^{2x-2}-3^{x+1}+7^x\right)=2x.$

4. Решить систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12}\le 1,\\ 1{,}5\le x\le 2{,}5.\end{cases}$

Указать сумму наибольшего и наименьшего решений системы.

5. Решить неравенство $\left|2^{\frac{x}{3}}-\frac{11}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$.

Указать сумму всех целых решений неравенства.

6. Решить уравнение $\sin\ (\pi x)+\sin\ \left(3\pi x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Указать число корней на отрезке $[0;\ 3]$.

7. Найти наименьшее значение выражения $f = 4x + 4y$, если

$$\begin{cases}2x^2-3xy+3y=-16,\\ 2x+y=-5.\end{cases}$$

8. Найти наибольшее значение a, при котором $x = 6$ является точкой экстремума функции $y = (x - a)^3 - 3x + a$.

9. В треугольнике ABC: $AB = 4\sqrt{7}$; $AC = 5\sqrt{7}$; $BC = 6\sqrt{7}$. Найти расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC.

10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$: точка P — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, точка Q — центр грани DD_1CC_1, а L — середина отрезка PQ. Разложить вектор $\mathbf{AL}$ по векторам $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AD}$ и $\mathbf{AA_1}$. Указать сумму коэффициентов разложения.

Финансовая академия при Правительстве РФ

Вариант 83 (1992 г.)

1. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 1300. Найти эти числа.

2. При каждом значении параметра a найти число решений системы:

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\ (1+a),\\ (x+y)^2=14.\end{cases}$$

3. Решить уравнение $\sin 3x+\sin^3 x=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$.

4. Найти наибольшее значение фнкции $y=\sqrt{8-2x}+\sqrt{x-3}$.

5. Около равнобедренного треугольника с боковыми сторонами b и основанием a описана окружность. Найти длину хорды, параллельной основанию, пересекающей боковые стороны треугольника и делящейся точками пересечения на три равные части.

Вариант 84 (1992 г.)

1. Линию Аэрофлота обслуживают самолеты трех типов. Самолет Ан может принять на борт 230 пассажиров и 2700 кг груза, Ту — 110 пассажиров и 1200 кг груза, Як — 40 пассажиров и 500 кг груза. Какое наименьшее число самолетов надо задействовать, чтобы перевезти 760 пассажиров и 8,8 тонн груза?

2. Решить неравенство

$$\sqrt{y^2-7y+10}+9\log_4\frac{y}{8}\geq 2y+\sqrt{14y-20-2y^2}-13.$$

3. Решить уравнение $1+\sin x-\cos x-\sin 2x+\cos 2x=0$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2-|4x-3|$ на отрезке $[-5;\ 3{,}5]$.

5. Найти катет прямоугольного треугольника, зная противолежащий этому катету острый угол α треугольника и биссектрису l данного угла.

Вариант 85 (1993 г.)

1. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 3/5 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 денежным единицам, к концу следующего года 701 ден. ед. Было подсчитано, что если бы первоначально 3/5 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 610 ден. ед. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

2. Решить неравенство $\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x}+1}-4^{\sqrt{3-x}}}+2^{\sqrt{3-x}+1}>5$.

3. Решить уравнение $\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{2}=1$.

4. Найти точки экстремума функции $f(x)=-x^3-3x^2+18x-2$ на интервале $(-4;\ 8/5)$.

5. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в 3 раза больше длины окружности, вписанной в этот треугольник. Найти углы треугольника.

Вариант 86 (1994 г.)

1. Двое рабочих, работая вместе, выполняют работу за 10 дней. Если первый рабочий проработает 2 дня, а второй 7 дней, то они выполнят 2/5 всей работы. За сколько дней, работая отдельно, выполнит всю работу второй рабочий?

2. Вычислить без калькулятора $\left[\frac{1}{3}\left(2\sqrt[4]{75}+\frac{1}{3}\sqrt{15\sqrt{27}}\right)\right]^4$.

3. Решить уравнение, в ответе указать сумму корней:

$$\left(x^2+4x\right)^2+2(x+2)^2=43.$$

4. Найти целое решение неравенства $0{,}2^{(x-8)(x-10)}>1$.

5. Найти целое решение уравнения $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$.

6. $x_1=1$ и $x_2=2$ — корни уравнения $x^3-x^2+(m-2)x+n=0$. Найти m.

7. Вычислить без калькулятора $2\cos 18^\circ \sin 132^\circ \sin 12^\circ-\frac{1}{2}\sin 36^\circ$.

8. Найти принадлежащее промежутку $(180°; 225°)$ решение уравнения $\cos 4x+2\cos^2 2x=0$.

9. С помощью производной найти число действительных корней уравнения $x^3-27x-2=0$.

10. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на гипотенузу, делит ее на части длиной 36 и 64. Найти периметр треугольника.

Государственная академия управления им. Серго Орджоникидзе

Вариант 87 (1992 г.)

1. Решить уравнение $\log_2\left(4\cdot 3^x-6\right)-\log_2(9^x-6)=1$.

2. Решить неравенство $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2-2x}\ge 1$.

3. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна -49, а сумма средних членов 14.

4. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см^2. Найти площадь описанного круга.

5. Два экскаватора начали работать одновременно и до перерыва второй выкопал 8 траншей. После перерыва они работали еще 2 ч, и за это время второй вырыл на 2 траншеи больше того, что выкопал первый за час работы, а первый — на 12 траншей меньше того, что оба вместе вырыли до перерыва. Все траншеи одинаковы. Сколько всего траншей выкопали экскаваторы?

6. Определить все действительные значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos^4 x - (a+2)\cos 2x - 3a - 8 = 0$ имеет решение, и найти все эти решения.

Вариант 88 (1992 г.)

1. Решить уравнение $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$. В ответе записать корни, удовлетворяющие условию $100° < x < 360°$.

2. Решить неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$. В ответе записать наименьшее целое решение неравенства.

3. Шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ см равновелик прямому конусу, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания. Найти высоту конуса.

4. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств:

$$\begin{cases} y \le 1 - 2|x|, \\ y \ge \dfrac{|x|}{2} - \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

5. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2 - mx + m - 1 = 0$ будет наименьшей?

6. Решить уравнение $16 \cdot 3^{x^2} = 4 + 3^{x^2}\sqrt{16 - 8 \cdot 3^{x^2} + 3^{2x^2}}$.

Вариант 89 (1994 г.)

1. Решить уравнение $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Решить уравнение $6 + x - 5\sqrt{x} = 0$.

3. Решить неравенство $1 - 2x < \sqrt{x^2 + x}$.

4. При всех значениях параметра a решить систему неравенств:

$$\begin{cases} (x+6)(x-24) < 0, \\ \left| x + 26 + \dfrac{144}{x} \right| < a. \end{cases}$$

5. За некоторый период времени количество акций у господина Иванова увеличилось на 15%. На сколько процентов увеличилась общая стоимость акций господина Иванова, если цена каждой акции увеличилась на 20%?

6. Даны точка $C(5;\ 7)$ и угол. Уравнения сторон угла имеют вид $y = 0$ и $y = x + 5$. Точки A и B лежат на разных сторонах угла. Найти наименьшее значение периметра треугольника ABC.

Российский государственный гуманитарный университет

(экономический факультет)

Вариант 90 (1992 г.)

1. Упростить: $\sqrt{37 - 12\sqrt{7}} - \sqrt{37 + 12\sqrt{7}}$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x^2 - 4x + 4\right) + \log_{\sqrt{2}}(x + 10) \le 0.$$

3. Решить уравнение:

$$2\cos 4x + 5 = 8\sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Найти такие числа a, b, c, для которых справедливо тождество:

$$\frac{5}{(x+3)\left(x^2 - 4\right)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}.$$

5. Построить график функции:

$$y = |2\sin 2x - 1| + 2\sin 2x.$$

6. Какое наименьшее значение может принимать расстояние от вершины A прямоугольника периметра P до середины стороны BC?

7. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5?

Вариант 91 (1992 г.)

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x|^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$

2. Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 6°. Определить число сторон этого многоугольника при условии, что их меньше семи и наименьший угол равен 81°.

3. Вычислить
$\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + ... + \cos 179°$.

4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} (x+1)^{\frac{2x+1}{x-2}} \geq 1, \\ x+1 > 0. \end{cases}$$

5. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ xy \leq 12. \end{cases}$$

6. Найти многочлен наименьшей степени, возрастающий на интервале $(-4; 1)$ и убывающий справа и слева от этого интервала, если известно, что график многочлена проходит через точку $(-1; -27)$ и точку $(2; 0)$.

7. Доказать, что окружность, проведенная через произвольную точку внутри угла и основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны угла, проходит через вершину угла.

Вариант 92 (1994 г.)

1. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x(a-x)}{x+a} + 8 + x = \frac{8x}{x+a} - 3a$ не имеет решения?

2. Изобразите на координатной плоскости XOY множество точек, заданное условиями $\begin{cases} x = 2t + 2 + |t|, \\ y = |t+4| - 2t + 2, \end{cases}$ где $t \in R$.

3. Найти значение аргумента x, при котором расстояние между значениями функций $y = 3^{2x+1}$ и $y = (6 \ln 3)x - 7$ является наименьшим.

4. Решить неравенство $\cos 2x + \sin 3x \le \cos 4x$.

5. Сколькими способами пять разных подарков можно раздать пяти детям, чтобы каждому досталось по одному подарку?

6. От пристани A вниз по течению отправились катер и плот. Катер доплыл до B, повернул обратно и встретил плот через 7 ч после выхода из A. Сколько времени шел катер от A до B?

Московский коммерческий университет

Вариант 93 (1992 г.)

1. Упростить выражение до числового значения:

$$\left\{\left[\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2-\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2\right]:\frac{8a^3+8ac^2}{a^5+a^2c-ac^2-c^5}+\frac{c}{a+c}\right\}\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right).$$

2. Решить неравенство $\dfrac{|x|^2-3|x|-4}{x^3+8}\ge 0.$

3. Найти решение уравнения

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$$

4. Пассажир едет в поезде, который идет со скоростью 40 км/ч, и видит, что мимо окна в противоположном направлении в течение 3 с проходит встречный поезд длиной 75 м. Какова скорость встречного поезда?

5. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20 см. Найти площадь треугольника и длину вписанной окружности.

6. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Вариант 94 (1992 г.)

1. Упростить выражение до числового значения

$$\sqrt[3]{\frac{4\sqrt{2a}-2\sqrt{3a}}{20\,a}}\cdot\sqrt[6]{\left(4\sqrt{6}+11\right)4\,a}.$$

2. Решить неравенство $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \le 2.$

3. Найти решение уравнения: $1 + \sin x - \cos x = 0$.

4. Торгово-промышленная биржа уплатила производителю за товар некоторую сумму, увеличив цену товара на определенный процент за посреднические услуги. Пятая часть товара была отправлена в качестве гуманитарной помощи пострадавшим от землетрясения, остальное поступило на торговое предприятие, торговая наценка которого выше на 30%, чем наценка биржи. Потребитель получил товар на сумму, превышающую сумму, полученную производителем, на 44%. Сколько процентов берет биржа за свои посреднические услуги?

5. Хорда длиной $7\sqrt{12}$ см стягивает дугу в 120°. Найти радиус окружности.

6. Стержень длиной 12 см требуется согнуть под прямым углом так, чтобы площадь квадрата, сторона которого соединяет концы согнутого стержня, была наименьшей. Определить место сгиба стержня.

Вариант 95 (1993 г.)

1. Упростить выражение до числового значения:

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)ab}.$$

2. Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

3. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$.

4. Арендатор получил кредит в банке. На следующий год банк повысил процент кредита втрое, поэтому арендатор по окончании второго года вернул долг, превысивший первоначальный кредит на 147%. На сколько процентов больше стал процент годовых, который удерживает банк за кредит на втором году?

5. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 9 см. Каждое боковое ребро равно 13 см. Вычислить объем пирамиды.

6. Найти все значения a, при которых один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^2 = 0$ равен квадрату другого корня.

Московский государственный институт международных отношений

Вариант 96 (1993 г.)

1. Решить уравнение $1+2\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin x+\cos 2x=0$.

2. Решить неравенство $\frac{1}{4}\log_2(x-2)-\frac{1}{2}\le\log_{1/4}\sqrt{x-5}$.

3. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{6x^2+11xy-2y^2-11}+\sin^2\frac{\pi x}{2}-\left(1+\left|\sin\frac{\pi y}{2}\right|\right)\sin\frac{\pi x}{2}+1=0.$$

4. Для производства полимерной смолы предприятие использует два взаимозаменяемых вида синтетического сырья — анол и бенол, причем произведение использованных количеств (в тоннах) составляет 160% от массы (в тоннах) произведенной смолы. Предприятие имеет на складе 0,8 тонны анола и 1 тонну бенола, а также располагает суммой в 17 млн. руб. для дополнительной закупки сырья. Цена бенола на рынке составляет 3 млн. руб. за тонну, а цена анола 5 млн. руб. за тонну, но при покупке не менее 4 тонн анола снижается до 3,3 млн. руб. за тонну. Какое максимальное количество полимерной смолы может произвести предприятие?

5. Найти все значения b, при которых решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+4x-5b\le 0, \\ x^2-2x-4+b\le 0 \end{cases}$$

образуют на числовой оси отрезок длины 2.

Вариант 97 (1994 г.)

1. Найти область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-7x-2}}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. Решить уравнение $\log_{x^2-1}11+\log_{48(x+1)}\frac{1}{11}=0$.

3. Решить неравенство

$$x\cdot 3^x+9\sqrt{x^2+0{,}5x-1{,}5}>9x+3^x\sqrt{x^2+0{,}5x-1{,}5}.$$

4. В первой коробке находятся только красные шары, а во второй — только синие, причем число красных шаров составляет 15/19 от числа синих шаров. Если из первой коробки удалить 3/7 красных шаров, а из второй коробки 2/5 синих, то в первой коробке останется менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров находится в каждой коробке?

5. Найти все значения параметра c, при которых уравнение $2\log_4(x+2c)=\log_4(cx+c)$ имеет единственное решение.

Вариант 98 (1994 г.)

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-13x+40}}$.

2. Решить уравнение $7\cdot 6^x=36\left(4^x-9^{x-1}\right)$.

3. Решить неравенство

$$x\log_2 x+3\sqrt{x^2-2{,}5x+1}<\sqrt{x^2-2{,}5x+1}\cdot\log_2 x+3x.$$

4. Число научно-технических книг в библиотеке равно 11/13 от числа художественных книг. При переезде библиотеки в другой город книги погрузили в два вагона. В первый вагон погрузили 1/15 часть научно-технических книг и 18/19 частей художественных книг. Во второй вагон погрузили 1/19 часть художественных книг и 14/15 частей научно-технических книг. Сколько книг каждого вида было в библиотеке, если в первом вагоне оказалось более 10000 книг, а во втором — менее 10000 книг?

5. Найти все значения параметра d, при которых уравнение $\log_2(x+3)=\log_4(dx)$ имеет единственное решение.

Московский экономико-статистический институт *

Вариант 99 (типовой)

1. Найти наибольшее двузначное число, которое в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат.

---

* Вступительные экзамены по математике проводились с применением ЭВМ. (В ответах к задачам приводятся только числовые значения без указания единиц измерения).

2. Упростить $\dfrac{a^6 - b^6}{(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)} - (a^2 - b^2)$.

3. На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель уменьшить на 70%, а знаменатель увеличить на 50%?

4. В геометрической прогрессии дано: $u_1 + u_5 = 51, u_2 + u_6 = 102$. При каком значении n сумма $S_n = 3069$?

5. Найти наибольшее целое решение неравенства $x + 7 < -\dfrac{16}{x-1}$.

6. Найти наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + 2$ на отрезке $[-2; 3]$.

7. Найти наименьшее значение b, при котором корни уравнения $x^2 + bx + 2 = 0$ связаны соотношением $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

8. Найти целое решение неравенства $\sqrt{x^2 - 2x + 4} < x - 3$.

9. При каком значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (a-2)x - 2y = 3, \\ 2x - (a+1)y = 3 + a \end{cases}$$

не имеет решений?

10. Расстояние между A и B по железной дороге 66 км, а по водному пути 80,5 км. Из A поезд выходит на 4 ч позже парохода и прибывает в B на 15 мин раньше. Определить (в км/ч) скорость поезда, если она на 30 км/ч больше скорости парохода.

11. Периметр пола прямоугольной комнаты равен 30 м. Найти площадь пола, если известно, что объем комнаты равен 60 м^3, а площадь пола в 4,5 раза меньше площади стен.

12. В трех ящиках имеется 64,2 кг яблок. Во втором ящике находится 4/5 того, что есть в первом ящике, в третьем – 42,5% того, что есть во втором. Сколько кг яблок в первом ящике?

13. Найти наибольший корень уравнения

$$2 \cdot 4^{2\sqrt{x^2-3}} - 5 \cdot 4^{\sqrt{x^2-3}} = 12.$$

14. Вычислить $\log_2 225 - \dfrac{2}{\log_5 2} - \log_2 9 + 5^{\frac{1}{\log_9 25}}$.

15. Решить уравнение $\lg^3 x = \lg^2 x$. В ответе записать произведение его корней.

16. Упростить $2\left(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha\right) - 3\left(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha\right)$.

17. Найти (в градусах) $(\alpha + \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 7$, $0 < \alpha <$ $< 90°$, $0 < \beta < 90°$.

18. Найти (в градусах) решение уравнения $\cos x \sin x = 0{,}5$, удовлетворяющее условию $0 < x < 180°$.

19. На основании BC трапеции $ABCD$, как на диаметре, построена окружность, которая проходит через середины диагоналей трапеции и касается основания AD. Найти больший угол трапеции.

20. Объем конуса равен 27. Высота его разделена на 3 равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основанию. Найти объем средней части.

Вариант 100 (более сложный)

1. Вычислить $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}} - \dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

2. Вычислить, после сокращения, при $a = 54$, $b = 6$:

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)}{2a+3\sqrt{ab}}.$$

3. В колбе — раствор поваренной соли. В пробирку отливают 1/5 раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание не повысится вдвое, после чего раствор из пробирки выливают в колбу. В результате процентное содержание соли повышается на 1. Определить первоначальное процентное содержание соли.

4. Из A и B одновременно начали двигаться два тела навстречу друг другу. Первое за минуту прошло 1 м, а в каждую следующую на 1/2 м больше, чем в предыдущую. Второе тело проходило 6 м каждую минуту. Расстояние $AB = 117$ м. Через сколько минут тела встретятся?

5. Найти наибольшее k, при котором корни уравнения $(k-3)\times$ $\times x^2 - 2kx + 6k = 0$ положительны.

6. Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x+2\left(1+\sqrt{x+1}\right)} + \sqrt{x+2\left(1-\sqrt{x+1}\right)}.$$

7. Найти наименьшее целое a, при котором корни уравнения $x^2 + (a + 2)x + 3a + 1 = 0$ действительны, и сумма их кубов меньше $5a - 2$.

8. Найти наименьший корень уравнения

$$\sqrt{5x^2 + 10x + 1} + x^2 + 2x = 7.$$

9. При каких положительных a система $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \le 1, \\ x - y + a = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

10. Пункты A и B расположены на автомагистрали на расстоянии 9 км. Из A в B выходит автомобиль с постоянной скоростью 40 км/ч. Одновременно из B в том же направлении с ускорением 32 км/ч^2 выходит мотоцикл. Найти наибольшее расстояние между ними в течение первых двух часов.

11. В бассейн проведены четыре трубы. Через первые две трубы вода втекает в бассейн, через две другие вытекает. Если работают все четыре трубы, то бассейн заполняется за 2,5 ч, если работает первая, вторая и третья — бассейн заполняется за 1,5 ч, если работают первая, третья и четвертая, то бассейн заполняется за 15 ч. За сколько часов заполнится бассейн, если будут работать только первая и третья трубы?

12. Имелись два разных сплава меди. Процент содержания меди в первом сплаве был на 40 меньше, чем во втором. После того как их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Определить процентное содержание меди в первом сплаве, если известно, что меди в первом сплаве 6 кг, а во втором 12 кг.

13. Решить уравнение

$$\lg\left(5^{\sqrt{2x}} + \lg 10\right) = \lg\left(5^{1-\sqrt{2x}} + 2{,}5\lg 100\right) - 2(\lg 2 - 1).$$

14. Найти наибольшее решение уравнения

$$-\log_{1/7} x + \log_{1/7} 7^{-1/2} = \log_{1/7}^2 \frac{1}{x} + \log_x^2 7 - \frac{7}{4}.$$

15. Найти целое решение неравенства

$$\log_2\left(2^x - 1\right)\log_{1/2}\left(2^{x+1} - 2\right) > -2.$$

16. Найти значение выражения $\dfrac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha - 2\sin^2 4\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0{,}75$.

17. Вычислить $\sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16}$.

18. Найти (в градусах) наибольшее решение уравнения $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$, удовлетворяющее условию $0 < x < 30°$.

19. В окружность вписаны равнобедренный треугольник (с острым углом при вершине) и трапеция. Одним из оснований трапеции является диаметр, боковые стороны трапеции параллельны боковым сторонам треугольника. Найти отношение площади трапеции к площади треугольника.

20. Из куска металла, имеющего форму треугольной пирамиды, выточить круговой конус максимального объема с той же вершиной. Найти объем сточенного металла, если стороны основания пирамиды 13, 14 и 15, а высота равна 24 (считать $\pi \approx 3{,}14$).

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В 1995 Г.

Всероссийский заочный финансово-экономический институт

Вариант 101 (1995 г.)

1-й уровень сложности

1. Заболевшую машинистку заменили две ученицы-практикантки, причем одной из них нужно на перепечатку в 3 раза больше времени, чем заболевшей машинистке, а второй — в 2 раза. За сколько времени каждая из трех машинисток может перепечатать рукопись, если ученицы, работая вдвоем, выполнят работу за 6 ч?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+6} - \frac{3}{\sqrt{x+6}} = 2.$$

3. Найти область определения функции

$$y = \lg\frac{6x-5}{4x+1}.$$

4. Упростить выражение

$$\frac{(1+\sin 2\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos 2\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

5. Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки в 30 см и 40 см. найти длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

Вариант 102 (1995 г.)

(2-й уровень сложности)

1. Глиссер прошел по течению реки 55 км, а против течения — 27 км, затратив на весь путь время, нужное для прохождения 80 км по озеру. Найти собственную скорость глиссера, если скорость течения реки 2 км/ч.

2. Решить уравнение $8\sin^2 x + 4\sin^2 2x - 5 = 0$.

3. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \ge 1.$$

4. Упростить выражение

$$\left[\frac{\left(\sqrt[4]{a} + b^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \sqrt[4]{16ab}}{a-b} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \left(\frac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^{-1}\right]^{-1}.$$

5. Найти радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 12 см, вписан квадрат со стороной 4 см.

Вариант 103 (1995 г.)

(3-й уровень сложности)

1. Имеются два сплава из меди, цинка и олова. Известно, что первый сплав содержит 25% цинка, а второй — 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в два раза больше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого сплава и 300 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 28% цинка. Определить, сколько килограммов меди содержится в новом сплаве?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{4x - 8}.$$

3. Найти область определения функции

$$y = \log_5 \frac{2 + 3x - 2x^2}{9x^2 + 16} + \frac{1}{x}.$$

4. Упростить выражение $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - 2\cos^2 \alpha + \sin 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$.

5. В окружность радиуса 16 см вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в 2 раза больше основания. В этот треугольник вписана окружность. Найти ее радиус.

Вариант 104 (1995 г.)
(3-й уровень сложности)

1. Если дважды последовательно повысить цену товара А на одно и то же число p процентов, то новая цена товара А будет на 28% выше цены товара В. Если же дважды последовательно понизить цену товара В на одно и то же число p процентов, то новая цена товара В будет на 68% ниже цены товара А. Найти число p и отношение первоначальных цен товаров А и В.
2. Решить уравнение
$$\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1.$$
3. Найти область определения функции
$$y = \sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2}.$$
4. Упростить выражение
$$\left[\frac{x\sqrt{x} - x}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} - \sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} + 1}{\sqrt[4]{x} + 1} - \sqrt{x}\right)}\right]^3.$$
5. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит ее на части 4 см и 9 см. Из вершины большего угла треугольника проведена прямая, проходящая через середину высоты. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного внутри данного прямоугольного треугольника.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Вариант 105 (1995 г.)

1. Решить неравенство
$$2x - 5 < 2\sqrt{x^2 - x - 6}.$$

2. Решить уравнение

$$2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0.$$

3. В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos(\angle KLM) = -1/3$. Найти диагональ LN.

4. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

5. Найти все $x \in [-3;\ 1]$, для которых неравенство

$$x\left(\pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}\left(3m^2 + 12m + 11\right)\right) > 0$$

выполняется при любых целых m.

6. Найти наименьшее значение выражения $a^2 + (b-1)^2$ на множестве таких чисел a и b, для которых уравнение

$$\big|\,|x-4| - 2\,\big| - ax + 4a - b = 0$$

имеет ровно три различных корня. Указать, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

Вариант 106 (1995 г.)

1. Решить неравенство

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} > 2x - 3.$$

2. Решить уравнение

$$2|\cos x| + \log_{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{|\sin x|}{\cos x}\right) = 0.$$

3. В трапеции $ABCD$ известны боковые стороны $AB = 49$, $CD = 50$, верхнее основание $BC = 9$ и $\cos(\angle ADC) = 1/5$. Найти диагональ AC.

4. В банк помещен вклад в размере 2100 тыс. руб. под 100% годовых. В конце каждого из первых шести лет хранения после начисления процентов вкладчик снимал со счета одну и ту же фиксированную сумму. К концу седьмого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада уменьшился по сравнению с первоначальным на 20%. Какую сумму вкладчик ежегодно снимал со счета?

5. Найти все $x \in [-1;\ 4]$, для которых неравенство

$$x\left(\pi(x-1)+4\operatorname{arctg}\left(5n^2+10n+4\right)\right)>0$$

выполняется при любых целых n.

6. Найти наименьшее значение $p^2+(q-2)^2$ на множестве таких чисел p и q, для которых уравнение

$$\left|\,|x-3|-3\,\right|-px+3p-q=0$$

имеет ровно три различных корня. Указать, при каких p и q достигается это наименьшее значение.

Финансовая академия при Правительстве РФ

Вариант 107 (1995 г.)

1. Найти сумму корней уравнения

$$\log_9(5x-6)\log_x 3=1.$$

2. Решить неравенство

$$2^x+2^{4-x}<10.$$

В ответе указать целое решение.

3. Решить уравнение

$$\left|\sqrt{x-7}-1\right|+\left|\sqrt{x+7}-4\right|=3.$$

В ответе указать сумму наибольшего и наименьшего корней.

4. Вычислить без помощи калькулятора

$$4\log_3\sqrt{3}\cdot\log_6 9\cdot\log_3 6-\log_3\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\log_3\left(\sqrt{2}-1\right).$$

5. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+mx+2m-4=0$$

будет наименьшей?

6. Решить уравнение

$$\cos x-\cos 3x=\sin 2x$$

и найти корни, расположенные в промежутке (0°; 40°). Ответ дать в градусах.

7. В возрастающей геометрической прогрессии сумма третьего, пятого и седьмого ее членов равна 42, а сумма третьего, четвертого и пятого членов равна 32. Найти знаменатель прогрессии.

8. Найти наименьший корень уравнения

$$f(x) \cdot f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

где $f(x) = \sin 2\left(x - 14^\circ\right)$, $x \in \left(0^\circ;\ 90^\circ\right)$. Ответ выразить в градусах.

9. При каком целом значении a каждое решение неравенства

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

содержится среди решений неравенства $(x-a)(x-2a+9) < 0$?

10. Площадь треугольника ABC равна 45. На сторонах AB, BC и CA даны точки M, N, P соответственно так, что $AM = 2MB$, $BN = 2NC$, $CP = 2PA$. Найти площадь треугольника MNP.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

На экзамене по математике поступающий в высшее учебное заведение должен показать: а) четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение доказывать эти теоремы; б) умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении, использовать соответствующую символику; в) уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач.

Настоящая программа состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия и факты, которыми должен владеть поступающий как на письменном, так и на устном экзамене.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части устного экзамена. При подготовке к письменному экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений из этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на письменном и устном экзаменах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающим, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общий наибольший делитель. Общее наименьшее кратное.

2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

3. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.

4. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей.

5. Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.

7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.

8. Логарифмы, их свойства.

9. Одночлен и многочлен.

10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.

11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции. Функция, обратная данной.

12. График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность.

13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие

экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

14. Определение и основные свойства функций: линейной, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = ax^n$ ($n \in N$), $y = k/x$, показательной $y = a^x$, a > 0, логарифмической, тригонометрических функций ($y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$), арифметического корня $y = \sqrt{x}$.

15. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.

16. Неравенства. Решения неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.

17. Система уравнений и неравенств. Решения системы.

18. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).

20. Преобразование в произведение сумм $\sin\alpha \pm \sin\beta$; $\cos\alpha \pm$ $\pm \cos\beta$.

21. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.

22. Производные функций $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = x^n$ ($n \in Z$); $y = a^x$.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

2. Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.

3. Векторы. Операции над векторами.

4. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольника. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.

8. Центральные и вписанные углы.

9. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

10. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

11. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

13. Параллельность прямой и плоскости.

14. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

15. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы, пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды и их виды.

17. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

18. Формула объема параллелепипеда.

19. Формулы площади поверхности и объема призмы.

20. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

21. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

22. Формулы площади поверхности и объема конуса.

23. Формула объема шара.

24. Формула площади сферы.

II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y = ax + b$ и ее график.
2. Свойства функции $y = k/x$ и ее график.
3. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график.

4. Формула корней квадратного уравнения.

5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

6. Свойства числовых неравенств.

7. Логарифм произведения, степени, частного.

8. Определение и свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и их графики.

9. Определение и свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график.

10. Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

11. Формулы приведения.

12. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

13. Тригонометрические функции двойного аргумента.

14. Производная суммы двух функций.

15. Уравнение касательной к графику функции.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.

2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

3. Признаки параллельности прямых.

4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

5. Признаки параллелограмма.

6. Окружность, описанная около треугольника.

7. Окружность, вписанная в треугольник.

8. Касательная к окружности и ее свойство.

9. Измерение угла, вписанного в окружность.

10. Признаки подобия треугольника.

11. Теорема Пифагора.

12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.

13. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.

14. Признак параллельности прямой и плоскости.

15. Признак параллельности плоскостей.

16. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

17. Перпендикулярность двух плоскостей.

18. Теоремы о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

III. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ И НАВЫКИ

Экзаменующийся должен уметь:

1. Производить арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений; пользоваться калькуляторами или таблицами для производства вычислений.

2. Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

3. Строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрической функций.

4. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

5. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.

6. Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.

7. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии — при решении геометрических задач.

8. Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.

9. Пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы и при построении графиков функции.

ОТВЕТЫ

1. Арифметические вычисления. Преобразование алгебраических выражений.

1.3. $29\frac{7}{12}$. **1.4.** $365\frac{5}{8}$. **1.5.** 23,865. **1.6.** $36\frac{25}{72}$. **1.7.** 11. **1.8.** $\frac{5}{3}$.

1.9. $\frac{17}{27}$. **1.23.** $12a^{3n-2}b^{-2}\left(2+9a^3b^3\right)$. **1.24.** $(5a-7x)(2a-3y)$.

1.25. $(x+y)(x-y)^2$. **1.26.** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

1.27. $-5\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-5)$. **1.28.** $(a+3b)(2a-5b)$. **1.29.** $(x^2+1)\times$

$\times(2x^2+x+2)$. **1.30.** $3(a+b)(b+c)(a+c)$. **1.32.** $\frac{a-3}{3}$.

1.33. $a+4$. **1.34.** $\frac{1}{3}$. **1.35.** $\frac{1}{3}$. **1.36.** 1. **1.37.** -1. **1.38.** $\frac{x}{(1-x)^2}$.

1.39. 1. **1.40.** $\frac{b}{a}$. **1.42.** $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$, при $x=\frac{1}{a-1}$ получаем

$\frac{a^3}{2(a-1)}$. **1.43.** $\frac{2ab}{3}$. **1.44.** $\frac{x-y}{x+y}$. **1.45.** $1+2x$. **1.51.** $3b\sqrt[3]{a^2b^2}$.

1.52. $(x+y)\sqrt{x-y}$. **1.53.** $m\sqrt{n-m}$. **1.54.** $2x^2y\sqrt{1-3x^3y^3}$.

1.55. $\frac{ab}{2}\sqrt[3]{\left(b^2-a^2\right)a^2b^2}$. **1.56.** $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}}$. **1.57.** $\frac{c}{a}\sqrt[3]{5abc}$.

1.58. $\frac{1}{a(x-y)}\sqrt[m+n]{a^n}$. **1.62.** $\frac{35-12\sqrt{6}}{19}$. **1.63.** $\frac{\sqrt{x^2-9}-x}{3}$.

1.64. $\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)^4=9\left(12\sqrt{2}+17\right)$. **1.65.** $-\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+2\right)$.

1.66. $\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{6}$. **1.69.** a. **1.70.** $\sqrt{x^2+a}$. **1.71.** $a\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)$.

1.72. 3. **1.73.** $-x^3$. **1.74.** -1. **1.75.** $4(a-x)$. **1.76.** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

1.77. $2\sqrt[4]{ax}$. **1.82.** $4x$ при $x \geq 0$; $-8x$ при $x < 0$. **1.83.** -2 при $x < 2$; $4x - 10$ при $2 \leq x < 3$; 2 при $x \geq 3$. **1.84.** $\frac{x}{x+2}$ при $x > 3$; $-\frac{x}{x+2}$ при $x < -2$, $-2 < x < 3$. **1.85.** $\frac{a^2 - a}{a^2 + 1}$ при $x < 0$; $\frac{a}{a-1}$ при $0 \leq a < 1$; $\frac{a}{a-1}$ при $a > 1$. **1.86.** a при $a < -1$, $a \geq 1$; $\frac{1}{a}$ при $-1 \leq a < 0$, $0 < a < 1$. **1.87.** $\frac{a}{b}$ при $|a| > |b|$; $\frac{b}{a}$ при $|a| < |b|$. **1.94.** $x^{0,5} + 1$. **1.95.** $1 + x^{0,5}$ **1.96.** 1. **1.97.** 1.

1.98. $\frac{1-a}{1+a}$. **1.99.** 1. **1.100.** 1. **1.101.** 0. **1.102.** $a - 1$.

1.103. $\frac{1+a}{1-a}$. **1.104.** $a^2 + b^2$. **1.105.** $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. **1.106.** $\sqrt{n}$.

1.107. $\frac{a\left(a^2 + a - 1\right)}{2}$. **1.108.** $\frac{1}{ab}$. **1.109.** 0. **1.110.** $\left(\sqrt{m} - \sqrt{n}\right)^2$.

1.111. 0. **1.112.** $\sqrt{a^2 - 1}$. **1.113.** 1. **1.114.** $4a$. **1.115.** $\frac{(b+c+a)^2}{2bc}$.

1.116. $\frac{x+y}{2}$. **1.117.** $a^{-1/2}$. **1.118.** 0. **1.119.** $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$.

1.120. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. **1.121.** $2\sqrt{x^2 - 1}$. **1.122.** $\frac{4(a-4)}{a+4}$.

1.123. $\frac{2\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)^2}{p - q}$. **1.124.** $\sqrt{x}$. **1.125.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

1.126. $\frac{16x\sqrt{x}}{\left(1 - x^2\right)(x - 1)}$. **1.127.** $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}$. **1.128.** $\frac{1}{a\left(\sqrt[6]{a} - \sqrt[3]{a}\right)}$.

1.129. $\frac{x^{1/m} + 3x^{1/n}}{x}$. **1.130.** $\sqrt{2}(m+3)$. **1.131.** $a - b$.

1.132. $\frac{1}{x^2 - 1}$. **1.133.** $-2a$ при $a < -\sqrt{3}$ и $0 < a < \sqrt{3}$; $2a$ при $-\sqrt{3} < a < 0$ и $a > \sqrt{3}$. **1.134.** $\frac{b^2 - 1}{\sqrt{b}}$ при $0 < b < 1$; $\frac{b^2 + 3}{\sqrt{b}}$ при

$b > 1$. **1.135.** $\frac{n^2}{m^2}$ при $m \geq n$; $\frac{m^2}{n^2}$ при $m < n$. **1.136.** $\frac{\sqrt{mn}}{m-n}$ при $m > n$; $\frac{\sqrt{mn}}{n-m}$ при $m < n$. **1.137.** 8. **1.138.** $\frac{4x}{x-4}$ при $4 < x < 8$; $\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$ при $x \geq 8$.

2. Алгебраические уравнения и системы уравнений

2.8. $\{1\}$, если $m \neq -3$; $(-\infty, \infty)$, если $m = -3$. **2.9.** $\{a-2\}$, если $a \neq -2$; $(-\infty, \infty)$, если $a = -2$. **2.10.** $\left\{\frac{-4(m+1)}{3m+2}\right\}$, если $m \neq -\frac{2}{3}$; нет решения, если $m = -\frac{2}{3}$. **2.11.** $\left\{\frac{1}{a(a+4)}\right\}$, если $a \neq 0$, $a \neq \pm 4$; $(-\infty, \infty)$, если $a = 4$; нет решения, если $a = 0$, $a = -4$. **2.23.** Нет решения. **2.24.** $\{0; 8\}$. **2.25.** $\{-3; 3\}$. **2.26.** $\{1; 6\}$. **2.27.** $\{-9; 1\}$. **2.28.** $\{-1\}$. **2.29.** Нет решения. **2.30.** $\left\{\frac{5}{2}; 1\right\}$. **2.31.** $\{1\}$. **2.32.** $\{-2\}$. **2.33.** $\{-1; 1\}$. **2.34.** $\{\pm\sqrt{6}; \pm 1\}$. **2.35.** Нет решения. **2.40.** $\left\{-1; \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}; 3\right\}$. **2.41.** Нет решения. **2.42.** $\{1; 3\}$. **2.43.** $\{-3; 1\}$. **2.44.** $\left\{\frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}; \frac{1}{2}; 2\right\}$. **2.45.** $\{1; 3\}$. **2.46.** $\{4+\sqrt{6}; 4-\sqrt{6}; 2; 6\}$. **2.51.** $\left\{\frac{a-\sqrt{a^2-24}}{4}; \frac{a+\sqrt{a^2-24}}{4}\right\}$, если $a^2 > 24$; $\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$, если $a = \sqrt{24}$; $\left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$, если $a = -\sqrt{24}$; нет решения, если $a^2 < 24$. **2.52.** $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{a}\right\}$, если $a < \frac{1}{4}$, $a \neq 0$; $\{-4\}$, если $a = \frac{1}{4}$; нет решения, если $a > \frac{1}{4}$. **2.53.** $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$. **2.54.** $\{(0; 0); (1; -2)\}$. **2.55.** $x^2 + 2x - 2 = 0$. **2.61.** $\{1\}$. **2.62.** $\{16\}$. **2.63.** Нет решения. **2.64.** $\{6; 9\}$. **2.65.** $\{7; 8\}$. **2.66.** Нет решения.

2.67. Нет решения. **2.68.** {1}. **2.73.** {–1; 4}. **2.74.** {0; 2}. **2.75.** {4}. **2.76.** {1}. **2.77.** {– 4; 4}. **2.78.** {5}. **2.79.** {0; 1}. **2.82.** {0}. **2.83.** {9}. **2.84.** {–61; 30}. **2.85.** $\left\{8;\ 8 \pm 12\sqrt{21}/7\right\}$. **2.89.** {(–1; 1)}. **2.90.** {(1; 2)}. **2.91.** {(2; 2)}. **2.92.** {(3; 1)}. **2.93.** {(1; 1); (–1; –1)}. **2.94.** Нет решения. **2.97.** {(1; 1); (–7/11; –16/11)}. **2.98.** {(4; 2); (2; 4)}. **2.99.** $\left\{\left(4;\ \sqrt{3}\right);\ \left(4;\ -\sqrt{3}\right);\ (3;\ 2);\ (3;\ -2)\right\}$.

2.100. {(0; 0); (4; 2); (–2; –4)}. **2.101.** {(3; 1); (1; 3)}. **2.102.** {(7/2; 3/2); (–7/3; –1)}. **2.103.** (–∞; ∞), если $a = 0$; нет решения, если $b = 3a$, $a \neq 0$; $7b\,(b - a)/3(b - 3a)$, если $b \neq 3a$; $a \neq 0$. **2.104.** {–3; 1}. **2.105.** {0}. **2.106.** {1}. **2.107.** $\left\{-5;\ -3 \pm \sqrt{5};\ -1\right\}$. **2.108.** {–1; 1/3; 3}. **2.109.** {3/4}. **2.110.** {1; 3}. **2.111.** {0; 1}. **2.112.** $\{a/2;\ -5a/6\}$, если $a \neq 0$; нет решения, если $a = 0$. **2.113.** $\left\{-4 \pm \sqrt{6};\ -2;\ -6\right\}$. **2.114.** $y^2 + 15y - 54 = 0$.

2.115. $\left\{\pm 4\sqrt{2}\right\}$. **2.116.** {2}. **2.117.** {1/2; 1}. **2.118.** {215/27}. **2.119.** {4}. **2.120.** {1/2}. **2.121.** {1}. **2.122.** {–2}. **2.123.** {–6}. **2.124.** {–1/2}. **2.125.** {25}. **2.126.** {7}. **2.127.** {–4}. **2.128.** {3}. **2.129.** {1/4}. **2.130.** {2}. **2.131.** {1; 33}. **2.132.** {–5}. **2.133.** {17/16}. **2.134.** {6}. **2.135.** {13}. **2.136.** {8}. **2.137.** {5}. **2.138.** {7}. **2.139.** {2}. **2.140.** Нет решения. **2.141.** Нет решения. **2.142.** {–1}. **2.143.** {3/4}. **2.144.** {2/3}. **2.145.** {–2}. **2.146.** Нет решения. **2.147.** {2}. **2.148.** {–1; 4}. **2.149.** $\left\{\pm 2\sqrt{2}\right\}$.

2.150. $\left\{\pm 2\sqrt{2}\right\}$. **2.151.** {0}. **2.152.** {2}. **2.153.** {1; 3/2; 2}. **2.154.** {1}. **2.155.** {3/2}. **2.156.** {–4; 1; 2}. **2.157.** {0; 2/3}. **2.158.** $\left\{\mp 2\sqrt{3}\right\}$. **2.159.** {(2; 7)}. **2.160.** {(1; 1)}. **2.161.** {(4; 0)}. **2.162.** {(7; 3); (–3; –1/3)}. **2.163.** {(2; 3); (3; 2)}. **2.164.** {(–3; –2); (3; 1)}. **2.165.** {(3; 2); (–2; –3)}. **2.166.** {(5; –8); (3; –5)}. **2.167.** {(2; 1/3)}. **2.168.** Нет решения. **2.169.** {(1; 0)}. **2.170.** {(0; 0); (2; 12)}. **2.171.** {(0; 8); (–2; –2)}. **2.172.** $\left\{\left(4;\ \sqrt{3}\right);\ \left(4;\ -\sqrt{3}\right);\ (3;\ 2);\ (3;\ -2)\right\}$. **2.173.** {(4; 3); (–4; –3)}. **2.174.** {(0; –10); (0; 10); (8; –6); (–8; –6)}. **2.175.** {(–2; 4); (2; –4); (–4; 2); (4; –2)}. **2.176.** {(5; 3); (–5; –3); (3; 5);(–3; –5)}. **2.177.** {(1; 4); (4; 1)}. **2.178.** {(–9; –9/4); (4; 1)}.

2.179. {(−1; −27); (27; 1)}. **2.180.** {(1; 8); (8; 1)}. **2.181.** {(1; 81); (81; 1)}. **2.182.** {(1; 4); (4; 1)}. **2.183.** {(1; 8); (8; 1)}. **2.184.** {(1; 7); (49/64; 41/8)}.

3. Задачи на составление уравнений

3.3. 1205 тыс. руб., 895 тыс. руб., 525 тыс. руб., **3.4.** 4 дня. **3.5.** 15 машин. **3.6.** 64 м. **3.7.** 252 тыс. руб., 360 тыс. руб., 336 тыс. руб. **3.8.** 920 станков. **3.15.** 600 бочек. **3.16.** 800 г. **3.17.** 12500 кг. **3.18.** 1260 тыс. руб **3.19.** 240 тыс. руб. **3.20.** 72 и 48. **3.21.** 50%. **3.22.** 215 кг. **3.23.** 6%. **3.24.** 500 кн. **3.25.** 20%. **3.26.** 48 стр., 80 стр., 12 стр., 12 стр. **3.27.** 135 тыс. руб., 90 тыс. руб. **3.28.** 2000 руб., 2000 руб. **3.29.** 46 дет., 40 дет. **3.33.** 50 кг. **3.34.** 2,8 кг. **3.35.** 50 кг. **3.36.** 120 кг. **3.37.** 3 кг., 5 кг. **3.38.** 8 кг., 10 кг. **3.39.** 200 кг. **3.40.** 150 г. 30%-ного р-ра, 450 г 10%-ного р-ра. **3.41.** 24 кг. **3.43.** 6,54. **3.44.** 8,5., 10, 11,5. **3.45.** 24. **3.46.** 4836. **3.47.** 4,5. **3.50.** 60 км/ч, 75 км/ч. **3.51.** 48 км/ч, 36 км/ч. **3.52.** 2 ч шел пешком, 6 ч плыл. **3.53.** 4 км/ч. **3.54.** 60 км/ч. **3.55.** 2 км/ч, 10 км/ч. **3.57.** 10 ч, 15 ч. **3.58.** 12 дн., 8 дн. **3.59.** 18 ч, 24 ч. **3.60.** 2 ч., 1,5 ч. **3.61.** 24 ч, 48 ч, 22,4 ч, 56 ч. **3.62.** 132 ч, 110 ч. **3.63.** 3 дн., 5 дн. **3.65.** 364 га. **3.66.** 14 дн. **3.67.** 9 чел. **3.68.** 40 дн., 25%. **3.69.** 6 болт., 8 болт. **3.70.** 18 кг. **3.71.** 48 дет., 40 дет. **3.72.** 44 т, 48 т. **3.73.** 28 стр. **3.74.** 15 ц с га. **3.75.** 2 л, 3 л. **3.76.** 24 дн., 18 дн. **3.77.** 40 дет. и 25 дет. **3.78.** 3 млн. руб., 2,4 млн. руб. **3.79.** 1 ч 20 мин. **3.80.** На 20 досках. **3.81.** 15 тыс. руб., 10 тыс. руб. **3.82.**10 кг и 8 кг. **3.83.** 200 дет., 240 дет., 300 дет. **3.84.** 300 м. **3.85.** 5 дней. **3.86.** 25%. **3.87.** 38,8% **3.88.** 12 мин. **3.89.** 20 км/ч, 36 км/ч. **3.90.** 2. **3.91.** 30 рядов. **3.92.** 18 дней. **3.93.** 398,4 куб. м. **3.94.** 4,175 кг. **3.95.** 10 ч, 15 ч. **3.96.** 20 ч, 30 ч. **3.97.** 60 км/ч. **3.98.** 3000 га. **3.99.** 9 и 35. **3.100.** 1,25 л. **3.101.** 3 ч и 4 ч. **3.102.** 12 км/ч. **3.103.** 50%. **3.104.** 40%. **3.105.** 16%. **3.106.** 14 ч. и $18\frac{2}{3}$ ч. **3.107.** 18 км/ч, 24 км/ч. **3.108.** На 12%. **3.109.** 480 кг. **3.110.** 60 км/ч. **3.111.** 25 мин. **3.112.** 1,5 раза. **3.113.** 4 л или 0,25 л. **3.114.** В отношении 20 : 6 : 3. **3.115.** 2,4 кг и 4,8 кг.

4. Показательные и логарифмические уравнения

4.8. {0}. **4.9.** {−2/7; 1}. **4.10.** Решений нет. **4.11.** {2}. **4.12.** {0}. **4.13.** {−0,2}. **4.14.** {0}. **4.15.** {3}. **4.16.** {0}. **4.17.** {0,5; 1,5}.

4.18. {−1}. **4.19.** {47}. **4.20.** {3}. **4.21.** {30}. **4.22.** {37}. **4.23.** {10}. **4.24.** {9}. **4.25.** {−1; 1; 2}. **4.26.** {−3; 1; 5}. **4.29.** {4}. **4.30.** {2}. **4.31.** {9}. **4.32.** {3}. **4.33.** {4}. **4.34.** {−1}. **4.35.** {1}. **4.36.** {3}. **4.37.** {2}. **4.38.** {2}. **4.42.** {1}. **4.43.** {2}. **4.44.** {2}. **4.45.** {0}. **4.46.** {2/3; 1}. **4.47.** {5}. **4.48.** {0; 1/4}. **4.49.** {−2; 2}. **4.50.** {0; −lg 4/lg 4,5}. **4.51.** {3; 2,25}. **4.52.** {1}. **4.53.** {0; 1}. **4.54.** $\left\{-1;\ 1;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$. **4.55.** {0}. **4.56.** {−2}. **4.57.** $\left\{1-\log_2 3\right\}$. **4.58.** {1; 4}. **4.59.** {−2; −1}. **4.61.** {(3; 2)}. **4.62.** {(2; 2)}. **4.63.** {(−2; 0)}. **4.64.** {(3/14; 1/14)}. **4.65.** {(3; 2)}. **4.66.** {(1/4; 1/6), (1/6; 1/4)}. **4.69.** 1,44. **4.70.** −3. **4.71.** 810. **4.72.** 160. **4.73.** 20. **4.74.** 29. **4.78.** ≈3,6. **4.79.** ≈7,6. **4.80.** ≈3,5. **4.81.** ≈3,5. **4.94.** ≈4,7. **4.95.** 0,2. **4.96.** 0,1. **4.97.** ≈−2,35. **4.98.** ≈2. **4.99.** ≈0,67. **4.100.** 25. **4.104.** {1,5}. **4.105.** {3}. **4.106.** Решений нет. **4.107.** $\{10^{10}\}$. **4.108.** {8}. **4.109.** {31}. **4.110.** {9}. **4.111.** {4}. **4.112.** {25}. **4.113.** {5}. **4.116.** {2}. **4.117.** {6; 14}. **4.118.** {11/3}. **4.119.** {2}. **4.120.** {60/59}. **4.121.** {0,99}. **4.122.** {3]. **4.123.** {1,5}. **4.124.** {0,75}. **4.125.** {1,5} **4.129.** {2; 8}. **4.130.** {0,0001; 10}. **4.131.** $\left\{1/\sqrt{10}\right\}$. **4.132.** {4; 8}. **4.133.** $\left\{0{,}01;\ 100;\ 100^{-\sqrt{2}};\ 100^{\sqrt{2}}\right\}$. **4.134.** {1,1; 11; 1,01; 101}. **4.135.** {0,1; 10}. **4.136.** $\left\{10;\ 10^{-4,5}\right\}$. **4.137.** {2}. **4.138.** $\left\{4;\ \sqrt[6]{2}\right\}$. **4.139.** {16}. **4.143.** {1/32; 2}. **4.144.** {0,0001; 10}. **4.145.** {0,01; 100}. **4.146.** {0,1; 10}. **4.147.** {2; 64}. **4.148.** {5}. **4.149.** {1/3; 3}. **4.150.** {0,5; 2}. **4.152.** {(32; 2), (2; 32)}. **4.153.** {(17; 9)}. **4.154.** {(9; 7)}. **4.155.** {(1; 1), (4; 2)}. **4.156.** {(2; 6)}. **4.157.** {(25; 36)}. **4.158.** $\left\{\sqrt{2}\right\}$. **4.159.** {3}. **4.160.** {1,5}. **4.161.** {−1; 7}. **4.162.** {65}. **4.163.** $\left\{0;\ \log_7 5\right\}$. **4.164.** {−1; 3}. **4.165.** Решений нет. **4.166.** {4}. **4.167.** $\left\{2^{\log_6 3}\right\}$. **4.168.** {0}. **4.169.** {6}. **4.170.** $\left\{\sqrt{2};\ 4\right\}$. **4.171.** {2}. **4.172.** {0,01; 10}. **4.173.** {−3}. **4.174.** {−5; 6}. **4.175.** {0,01; 100}. **4.176.** {0; 3}. **4.177.** {5}. **4.178.** {0.01}. **4.179.** {−1}. **4.180.** {12; 2,5}. **4.181.** [1; 2}. **4.182.** {100}. **4.183.** {2; 4}. **4.184.** {0; 3}. **4.185.** {25}. **4.186.** {2}. **4.187.** {0}. **4.188.** {10; 10000}. **4.189.** {1/9; 9}. **4.190.** {−1; 5}. **4.191.** {−1}. **4.192.** {4}. **4.193.** $\left\{2;\ -1-\log_5 2\right\}$. **4.194.** {0,1; 10}.

4.195. {1}. **4.196.** {64}. **4.197.** $\left\{0{,}1;\ 10;\ 10^{\sqrt{\lg 1{,}5}};\ 10^{-\sqrt{\lg 1{,}5}}\right\}$. **4.198.** {2}.
4.199. {1}. **4.200.** {4}. **4.201.** {1; 7}. **4.202.** {−2,5; 3}. **4.203.** {1;4}. **4.204.** {1/6; 1}. **4.205.** {1/9; 1; 3}. **4.206.** {1/9}. **4.207.** {1; 4}. **4.208.** {100}. **4.209.** {1; 2}. **4.210.** {1; 30}. **4.211.** (0; 0,5]. **4.212.** {2}. **4.213.** {1}. **4.214.** {(2; 2)}. **4.215.** $\left\{(2;\ 4);\ \left(\sqrt[3]{2}/2;\ \sqrt[3]{2}\right)\right\}$.
4.216. {(0,001; 0,5); (1000; −0,5)}. **4.217.** {(1; −3); (7; 3)}.

5. Неравенства алгебраические

5.2. (3/7; ∞). **5.3.** (−∞; −5/4). **5.4.** (−∞; −7]. **5.5.** При $a > 0$ $(-\infty;\ 1/a]$, при $a < 0$ $[1/a;\ \infty)$, при $a = 0$ все действительные числа. **5.6.** При $a > 0$ $(1/a;\ \infty)$, при $a < 0$ $(-\infty;\ 1/a)$, при $a = 0$ нет решений. **5.7.** При $a > 1$ $((a-2)/(a-1))$, при $a < 1$ $(-\infty;\ (a-2)/(a-1))$, при $a = 1$ все действительные x. **5.9.** $(-\infty;\ \pi/2)$. **5.10.** (−1; 2]. **5.11.** (2; 10). **5.12.** {8}. **5.13.** {1}. **5.15.** (3; 5]. **5.16.** (−8/3; 23/3). **5.17.** [−10/3; −3]. **5.21.** (−5; 3). **5.22.** (1; 4). **5.23.** (−2; 3). **5.24.** (−4; 1). **5.25.** (1; 4). **5.26.** (−4; −1). **5.27.** (−72/5; 0). **5.28.** (1/2; 1). **5.29.** (−1; 5). **5.30.** $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$. **5.31.** $(-2;\ 1)\cup(3;\ \infty)$. **5.32.** $[-4;\ -2]\cup\{1\}$. **5.33.** $(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ 2)$. **5.34.** $(-2;\ -1)\cup(1;\ \infty)$. **5.35.** $[-3;\ -1]\cup[1;\ \infty)$. **5.36.** $(-\infty;\ -3/2)$. **5.37.** $(-2;\ -1)\cup(1;3)$. **5.41.** $(-\infty;\ 3]\cup[5;\ \infty)$. **5.42.** $(-\infty;\ -3{,}5)\cup(7;\ \infty)$. **5.43.** $(-\infty;\ -7]\cup[1;\ \infty)$. **5.44.** $(-\infty;\ 1/2)\cup(1/2;\ \infty)$. **5.45.** Решений нет. **5.49.** (−∞; ∞) **5.50.** (−∞; ∞). **5.51.** (3/2; ∞). **5.52.** [−3/4; 5/2]. **5.53.** $\left(1;\ \left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$. **5.54.** $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0)$.

5.60. $(-\infty;\ -8)\cup(-4;\ \infty)$. **5.61.** $\left(\log_2\left(\sqrt{3}/2\right);\ \infty\right)$.

5.62. $\left(\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)/2;\ \log_2\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right)$. **5.63.** $\left(0;\ \left(3-\sqrt{5}\right)/2\right]$.

5.64. [1/2; 1]. **5.65.** (5; ∞). **5.66.** (0; ∞). **5.67.** (−1; 1].

5.68. $\left(\log_2\left(5+\sqrt{33}\right)-1;\ \infty\right)$. **5.69.** $(\log_{75}90;\ \infty)$.

5.76. $\left(\left(5-\sqrt{13}\right)/6;\ \infty\right)$. **5.77.** (8/3; ∞). **5.78.** $[3/2;\ 2)\cup(2;\ 26)$.

5.79. $(-2;\ 1)\cup(1;\ \infty)$. **5.80.** (1/2; ∞). **5.81.** $[-4;\ 0)\cup(4;\ 6]$. **5.87.** (7,5; 10). **5.88.** (−6; 2). **5.89.** (−1; 3).

5.90. $\left(\left(9-\sqrt{17}\right)/16;\ 1/3\right)\cup\left(1/3;\ \left(9+\sqrt{17}\right)/16\right)$. **5.91.** $(-\infty;\ (16-2\sqrt{19})/15)\cup\{1/2\}\cup\left(\left(16+2\sqrt{19}\right)/15;\ \infty\right)$. **5.92.** $(-3;\ 4)$. **5.93.** $[-5;\ 2]$. **5.94.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 5/3)$. **5.95.** $[4/5;\ 5/4)$. **5.96.** $(-2;\ -1)\cup(2;\ \infty)$. **5.97.** $\left[\sqrt{3}/\left(2-\sqrt{3}\right);\ \infty\right)$. **5.98.** $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$. **5.99.** При $a<0$ все действительные значения x, при $a\ge 0$ $(-\infty;\ -a)\cup(a;\ \infty)$. **5.100.** $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ \infty)$. **5.101.** $\{-2;\ -1\}$. **5.102.** $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. **5.103.** $\{4\}$. **5.104.** $\{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1\}$. **5.105.** $\{2\}$. **5.106.** $(-2;\ 7)$. **5.107.** Нет решений. **5.108.** $(-1;\ 2)$. **5.109.** $(-\infty;\ -5/3)$. **5.110.** $\{-7\}$. **5.111.** $(-\infty;\ 4)$. **5.112.** $(-\infty;\ -12)$. **5.113.** $(-2;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ \infty)$. **5.114.** $\left(\left(6-2\sqrt{23}\right)/7;\ -1/2\right)\cup\left(1/2;\ \left(6+2\sqrt{23}\right)/7\right)$.
5.115. $\left(-\infty;\ \left(4-2\sqrt{13}\right)/3\right)\cup\{-1\}\cup\left(\left(4+2\sqrt{13}\right)/3;\ \infty\right)$. **5.116.** $\{1\}$.
5.117. $(-3;\ 3)$. **5.118.** $(-\infty;\ -5/3)\cup(1;\ \infty)$. **5.119.** $(4/3;\ 4)$. **5.120.** $(1;\ 2)$. **5.121.** $(3/11;\ 1/3)$. **5.122.** $(-2;\ 2)$. **5.123.** $(-\infty;\ -1)\cup(5;\ \infty)$. **5.124.** $(-1/2;\ 0)\cup(0;\ 1)$. **5.125.** $(-\infty;\ -2)\cup(-1,\ 1)\cup(2;\ \infty)$. **5.126.** $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ \infty)$. **5.127.** $(0;\ \infty)$. **5.128.** $(-\infty;\ 0)$. **5.129.** Решений нет. **5.130.** $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$.
5.131. $(-\infty;\ -2]\cup(2;\ \infty)$. **5.132.** $[2;\ \infty)\cup\{-1\}$. **5.133.** $(1;\ 5)$. **5.134.** $(-\infty;\ -1)$. **5.135.** $(-1;\ 0)\cup(0;\ 2)$. **5.136.** $(-6;\ -1/2)$. **5.137.** $(-46;\ 3)$. **5.138.** $(-4;\ 4)$. **5.139.** $(-\infty;\ -1)\cup[0;\ 2/3)\cup(2/3;\ 1]$. **5.140.** $(1;\ 4)$. **5.141.** $(-1;\ -1/2)\cup(1;2)$. **5.142.** $(-\infty;\ 5)$. **5.143.** $(-\infty;\ -3)\cup\{1/2\}\cup[1;\ 2)$. **5.144.** $(-\infty;\ -2)\cup(2-\log_2 3;\ \infty)$. **5.145.** $[1;\ 2]$. **5.146.** $(-\infty;\ -2-\sqrt{7})\cup(1;\ 3)$. **5.147.** $(0;\ \infty)$. **5.148.** $(-\infty;\ 1-\left(\log_3 5\right)/3)$. **5.149.** $(5/2;\ \infty)$. **5.150.** $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(2;\ \infty)$. **5.151.** $(1;\ \infty)$. **5.152.** $(-\infty;\ -2/3)$. **5.153.** $(-3;\ \infty)$. **5.154.** $[1/2;\ 2)$. **5.155.** $(23/2;\ \infty)$. **5.156.** $(4{,}5;\ \infty)$. **5.157.** $(0;\ 2/7)$. **5.158.** $(2;\ \infty)$. **5.159.** $(7/2;\ \infty)$.

5.160. $(-\infty;\ -1]\cup\{1\}\cup[2;\ \infty)$. **5.161.** $[-5;\ -1]$.

5.162. $\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{1/3};\ \sqrt{1/3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\ \infty\right)$. **5.163.** $(1/2;\ 2]$. **5.164.** $[a;\ \infty)$ при $a\ge -2$. **5.165.** При $a<1$ $[-1/2;\ a(2-a)/2(1-$

$-a$), при $a \geq 1$ $[-1/2; \infty)$. **5.166.** $(1; 3]$. **5.167.** $\left(\left(\sqrt{5}-1\right)/2; 1\right]$.
5.168. $(3; 4{,}8]$. **5.169.** $(-5/8; 2{,}4]$. **5.170.** $\left(\left(\sqrt{13}-5\right)/2; 1\right]$.
5.171. $(-3; 0)$. **5.172.** $[-1; -3/4)$. **5.173.** $(4; 6)$.
5.174. $\left(-7; -\sqrt{35}\right)\cup\left(5; \sqrt{35}\right)$. **5.175.** $(2; 7)$. **5.176.** $(-1; 1)\cup(3; \infty)$.
5.177. $(2; 7)\cup(22; 27)$. **5.178.** $(2; 4)$. **5.179.** $(-\infty; -1)\cup(2; \infty)$.
5.180. $(0; 10]\cup[10; \infty)$. **5.181.** $(0; 1/2)\cup(32; \infty)$. **5.182.** $[2; \infty)$.
5.183. $(1/3; 2]$. **5.184.** $(-3; 1/2]$. **5.185.** $[2{,}5; 11/3]$.
5.186. $[10/7; 2)$. **5.187.** $(-\infty; 3]\cup[5; \infty)$. **5.188.** $[-5; 0)\cup(0; \infty)$.
5.189. $(-\infty; -3{,}5)\cup(7; \infty)$. **5.190.** $(-7; 1)$. **5.191.** $[-6; 1)\cup(1;7]$.
5.192. $(-\infty; 7)\cup(15; \infty)$. **5.193.** $(-3; 2)$. **5.194.** $(1; 5)$.
5.195. $(-\infty; 1/2)\cup(1; \infty)$. **5.196.** $(-\infty; 1/3)\cup(9;\infty)$.

6. Преобразование тригонометрических выражений

6.6. $\sin x$. **6.7.** 0. **6.8.** 1. **6.9.** $\mathrm{tg}^4\,\alpha$. **6.10.** $\mathrm{tg}\,\alpha$. **6.11.** 1. **6.12.** -1.
6.13. $2/\sqrt{5}$. **6.14.** $2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **6.18.** 1. **6.19.** 1. **6.20.** 1. **6.21.** $\mathrm{tg}^2\,2\alpha$.
6.22. 1. **6.23.** 1. **6.24.** 1. **6.25.** -1. **6.28.** $\mathrm{tg}\,\alpha$. **6.29.** $-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.
6.30. 1. **6.31.** $-\mathrm{tg}\,y$. **6.32.** $-2/3$. **6.33.** $\sqrt{2}$. **6.34.** $-16/65$.
6.35. 33. **6.36.** $\pi/4$. **6.37.** 1. **6.41.** $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **6.42.** 0.
6.43. $-4/\sin^2 2\alpha$. **6.44.** 0. **6.45.** $4\sin\alpha$. **6.46.** $0{,}25\sin 2\alpha$.
6.47. $0{,}5\sin 4\alpha$. **6.48.** $2\sin 2\alpha$. **6.49.** $0{,}5\,\mathrm{tg}\,2\alpha$. **6.50.** $0{,}5\sin 2\alpha$.
6.51. 1. **6.52.** $4\cos\alpha$. **6.53.** $\mathrm{tg}\,4\alpha$. **6.54.** $\sin^2 2\alpha$. **6.55.** 0,25.
6.56. -1. **6.57.** $-\sin^2\alpha$. **6.58.** 2. **6.59.** $\mathrm{ctg}\,2\alpha$. **6.60.** 2. **6.62.** -5.
6.63. 0,25. **6.64.** $-\cos^2 2\alpha$. **6.65.** $\sqrt{3}/32$. **6.66.** $\sin\alpha =$
$=\sqrt{15}/4$; $\cos\alpha = -1/4$; $\mathrm{tg}\alpha = -\sqrt{15}$. **6.67.** $\sin 2\alpha = 120/169$;
$\cos 2\alpha = 119/169$; $\mathrm{tg}\,2\alpha = 120/119$. **6.68.** $\sin\alpha/2 = 5/\sqrt{34}$;
$\cos(\alpha/2) = 3/\sqrt{34}$; $\mathrm{tg}\,(\alpha/2) = 5/3$. **6.69.** $\sin\alpha = 0{,}96$;
$\cos\alpha = 0{,}28$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 24/7$. **6.70.** $\sin 4\alpha = -0{,}96$; $\cos 4\alpha = -0{,}28$.
6.71. 23. **6.72.** 11. **6.73.** 2. **6.74.** 82. **6.78.** $\mathrm{tg}\,4\alpha$.
6.79. $2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\,(\pi/4+2\alpha)/\cos 2\alpha$. **6.80.** $\mathrm{ctg}^2\,(\pi/4-\alpha)$.
6.81. $-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta)$. **6.84.** $\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$.

6.85. $0{,}5/\sin(x/2+\pi/12)$. **6.86.** $2\sin(4\alpha-\pi/3)$. **6.87.** $-4\times$ $\times\sin^2(\pi/4-4\alpha)/\sin 8\alpha$. **6.88.** $-8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$.
6.89. $4\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)/\cos^3 x$.
6.91. $4\sin((\alpha+\beta)/2)\sin((\beta+\gamma)/2)\sin((\alpha+\gamma)/2)$.
6.96. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4$. **6.97.** $\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$. **6.98.** $\left(3-\sqrt{3}\right)/2$. **6.99.** 1.
6.100. $\sqrt{2}$. **6.101.** 6. **6.102.** 0,25. **6.103.** 24. **6.104.** 4,5. **6.105.** 2.
6.106. 2. **6.107.** 4. **6.108.** 1,5. **6.109.** -1. **6.110.** $1/\sin\alpha$.
6.111. $2\sqrt{2}\cos\left(2x+\pi/4\right)$. **6.112.** $\operatorname{tg} 5\alpha$. **6.113.** 1,5. **6.114.** 0.
6.115. $32\sin^4\alpha\cos^2\alpha$. **6.116.** $\operatorname{tg}\alpha$. **6.117.** 1. **6.118.** $\cos 2\alpha$.
6.119. $\operatorname{tg} 2\alpha$. **6.120.** 0,5. **6.121.** $0{,}5\sin 4\alpha$. **6.122.** $\sin^2\alpha$. **6.123.** 1.
6.124. 0,25. **6.125.** $\sin 2\alpha$. **6.126.** $2\sin 2\alpha$. **6.127.** $\operatorname{tg} 3x$.
6.128. $4\cos x\cos 2x\cos 3x$. **6.129.** $\sin 2x$. **6.130.** $\cos^2(\alpha/2)$.
6.131. 1. **6.132.** $0{,}25\sin^2\alpha$. **6.133.** $\operatorname{tg}^2(\pi/4-\alpha)$. **6.134.** $\sin^2 x$.
6.135. 1. **6.136.** $\left(1/\sqrt{2}\right)\sin 2\alpha$. **6.137.** 1. **6.138.** $0{,}25\operatorname{ctg}\alpha/\cos^2 2\alpha$.
6.139. $1/\cos^2(\pi/4+\alpha)$. **6.140.** $8\sin^4\alpha$. **6.141.** $\operatorname{tg}^4\alpha$.
6.142. $0{,}5\operatorname{ctg}^4\alpha$. **6.143.** $\operatorname{tg}(\pi/4-\alpha/2)$. **6.144.** 0. **6.145.** $\operatorname{tg}(\pi/4-$ $-\alpha)$. **6.146.** $\operatorname{tg}^4\alpha$. **6.147.** $2\cos 2\alpha$. **6.148.** $\sin\alpha$. **6.149.** 1.
6.150. $\sin 3\alpha$. **6.151.** 1. **6.152.** $8\operatorname{ctg} 8\alpha$. **6.153.** $\operatorname{tg} 4\alpha$.
6.154. $8\cos 4\alpha\sin^2(4\alpha-\pi/4)/\sin^2 4\alpha$. **6.170.** $-33/65$.
6.171. $-0{,}25$. **6.172.** 0,5. **6.173.** 33/56. **6.174.** 2.
6.175. 2. **6.176.** $\left(\sqrt{5}-1\right)/4$. **6.177.** $\sqrt{3}$. **6.178.** $4\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

7. Тригонометрические уравнения и неравенства

7.2. $-\infty<x<\infty$. **7.3.** $x\geq 4$. **7.4.** $x\leq -3$, $x\geq -1$. **7.5.** $-1\leq x\leq 1/3$.
7.7. $\pi/2$. **7.8.** $\pi/3$. **7.9.** $-\pi/4$. **7.10.** $\pi/3$. **7.12.** 0. **7.13.** $\sqrt{3}/3$
7.14. 1. **7.15.** $\sqrt{2}/2$. **7.17.** $-\pi/3$. **7.18.** $\pi/5$. **7.19.** $2\pi/5$.
7.20. 140°. **7.23.** 0,96. **7.24.** 41/49. **7.25.** $-119/120$. **7.26.** $3/\sqrt{13}$.
7.31. $(-1)^{n+1}\pi/12+\pi n/2$, $n\in Z$. **7.32.** $5\pi/18+\pi n/3$, $n\in Z$.
7.33. $\pm 5\pi/12+\pi n$, $n\in Z$. **7.34.** $-\pi/6+2\pi n$, $n\in Z$. **7.35.** $-\pi/8+$ $+\pi n$, $n\in Z$. **7.36.** $\pm 3\pi/2+4\pi n$, $n\in Z$. **7.37.** $(-1)^n\pi/30+\pi n/10$, $n\in Z$. **7.38.** $\pi/18+\pi n/3$, $n\in Z$. **7.39.** $\pi/2+\pi n$, $n\in Z$.
7.40. $\pi/12+\pi n/2$, $n\in Z$. **7.41.** $7\pi/24+\pi n$, $n\in Z$. **7.43.** $\pi/6+$ $+\pi n/2$, $\pi n/2$, $n\in Z$. **7.44.** $-\pi/3+\pi n$, πn, $n\in Z$. **7.45.** $2\pi/9+$ $+\pi n/3$, $\pi n/3$, $n\in Z$. **7.46.** $\pi+\pi n$, $-\pi/2+\pi n$, $n\in Z$.

7.48. $(-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **7.49.** 0,5 arctg 2 + $\pi n/2$, 0,5 arctg 5 + + $\pi n/2$, $n \in Z$. **7.50.** πn, $-\pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **7.51.** $\pi/8 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.52.** $(-1)^n \pi/6 + \pi n$, $-\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.53.** $\pm\pi/3 + \pi n$, $n \in Z$. **7.57.** $\pi/9 + \pi n/3$, $n \in Z$. **7.58.** $-0{,}5\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right) + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.59.** arctg 3 + πn, arctg 7 + πn, $n \in Z$. **7.60.** $\pi/4 + \pi n$, arctg 2 + πn, $n \in Z$. **7.61.** πn, –arctg (5/4) + πn, $n \in Z$.

7.62. arctg 2 + πn, –arctg (3/4) + πn, $n \in Z$. **7.65.** $2\pi n/3$, $-\pi/2$ + + $2\pi n$, $\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$. **7.66.** $\pi n/2$, $\pm\pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$.

7.67. $\pi n/2$, $(-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **7.68.** πn, $\pm\pi/3 + \pi n$, $n \in Z$. **7.69.** $\pi n/2$, $\pi n/3$, $n \in Z$. **7.70.** $\pi/6 + \pi n/3$, $\pm\pi/3 + \pi n$, $n \in Z$. **7.71.** $\pi/2 + \pi n$, $2\pi n$, $\pi/5 + 2\pi n/5$, $n \in Z$. **7.72.** $\pi/2 + \pi n$, $\pm 2\pi/3$ + + $2\pi n$, $(-1)^n \pi/6$ + + πn, $n \in Z$. **7.74.** $\pi/8 + \pi n/4$, $\pi/16 + \pi n/8$, $n \in Z$. **7.75.** $\pi n/2$, $\pi/12 + \pi n/6$, $n \in Z$. **7.76.** $\pi n/8$, $\pi n/3$, $n \in Z$. **7.77.** πn, $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.79.** $\pi/8 + \pi n/4$, $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.80.** $\pi n/2$, $\pi/6 + \pi n/3$, $n \in Z$. **7.81.** $\pi n/2$, $\pi n/7$, $n \in Z$.

7.82. $\pi/2 + \pi n$, $\pi/4$ + + $\pi n/2$, $\pi/10 + \pi n/5$, $n \in Z$. **7.84.** $2\pi n$, $\pi/2$ + $2\pi n$, $n \in Z$. **7.85.** $\pi/6 + 2\pi n$, $\pi/2 + 2\pi n$; $n \in Z$. **7.86.** $3\pi/16$ + + $\pi n/2$, $5\pi/8 + \pi n$, $n \in Z$. **7.87.** $\pi/8 + \pi n/3$, $\pi/16 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.89.** $\pi + 2\pi n$, $\pi/2$ + + $2\pi n$, $n \in Z$. **7.90.** 2 arctg (1/2) + $2\pi n$, –2 arctg (1/3) + $2\pi n$, $n \in Z$. **7.91.** $\pi/4 + \pi n$, arctg (1/5) + πn, $n \in Z$.

7.92. $\pm 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right) + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.94.** $2\pi n$, $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

7.95. $2\pi n$, $\pi/2 + 2\pi n$, $-\pi/4 + (-1)^{k+1} \arcsin\left(3\sqrt{2}/5\right) + \pi n$, $n \in Z$.

7.96. πn, $\pi/2 + 2\pi n$, $\pi/4 \pm \arccos\left(7/5\sqrt{2}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$.

7.97. $\pi/4 + (-1)^n \arcsin\left(\sqrt{2}/10\right) + \pi n$, $n \in Z$.

7.100. $\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$. **7.101.** $\pi n/2$, $n \in Z$.

7.102. $(-1)^n (1/2) \arcsin\left(2 - \sqrt{2}\right) + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.103.** $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.109.** Нет решений. **7.110.** $\pi n/3$, $n \in Z$.

7.111. $-\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$. **7.112.** $\pi n/2$, $n \in Z$. **7.113.** $2\pi n$, $\pi/2$ + + $2\pi n$, $n \in Z$. **7.114.** $2\pi/7 + 4\pi n/7$, $n \neq 7k + 3$, $k \in Z$, $n \in Z$.

7.115. –40 + 180 n, –10 + 180 n, $n \in Z$. **7.116.** $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.117.** Нет решений. **7.118.** $-\pi/4 + \pi n$, $\pm\pi/3 + \pi n$, $n \in Z$. **7.119.** $\pi/3 + \pi n$, $\pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **7.120.** $-\pi/4 + \pi n$, $2\pi n$, $\pi/2$ + + $2\pi n$, $n \in Z$. **7.121.** $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, $\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$. **7.122.** $2\pi n$, $(-1)^{n+1} \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.123.** $(-1)^n \pi/8 + \pi n/2$, $n \in Z$.

7.124. $\pi + 2\pi n$, $(-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **7.125.** $\pi/4 + \pi n$, $5\pi/12 + 2\pi n$, $\pi/12 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.126.** $\pm\pi/3 + \pi n$, $\pi/4 + \pi n/2$, $(-1)^n\pi/12 + + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.127.** $\pm\pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **7.128.** $\pi/4 + \pi n$, $2\pi n$, $-\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.129.** $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.
7.130. $\pm\pi/12 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.131.** $\pi/2 + \pi n$, $\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$.
7.132. $-\pi/4 + \pi n$, $2\pi n$, $-\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.133.** $5\pi/12 + \pi n$, $\pi/12 + \pi n$, $n \in Z$. **7.134.** $-\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$. **7.135.** πn, $n \in Z$.
7.136. $\pi n/2$, $\pi/8 + \pi n/4$, $n \in Z$. **7.137.** $\pi/2 + \pi n$, $\pm \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **7.138.** $\pi n/2$, $\pi/20 + \pi n/10$, $n \in Z$. **7.139.** $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.140.** $2\pi n/5$, $\pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. **7.141.** $\pm\pi/3 + 2\pi n$, $\pm\arccos(-1/4) + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.142.** $\pi/10 + \pi n/5$, $n \in Z$.
7.143. $4\pi n/3$, $n \in Z$. **7.144.** $-\pi/108 + + \pi n/9$, $7\pi/24 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.145.** $\pi/2 + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.146.** $-\pi/8 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.147.** $-\pi/4 + \pi n$, πn, $n \in Z$. **7.148.** $\pi/6 + 2\pi n$, $\pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.149.** $\pi/4 + \pi n/2$, $\pm\pi/3 + \pi n$, $n \in Z$. **7.150.** $2\pi n$, $\pi/6 + 2\pi n/3$, $n \in Z$. **7.151.** πn, $n \in Z$. **7.152.** $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$.
7.153. $\pi/16 + \pi n/8$, $n \in Z$. **7.154.** $\pm\pi/6 + \pi n$, $n \in Z$.
7.155. $(-1)^n \pi/12 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.156.** $(-1)^n \pi/2 + \pi n/2$, $(-1)^n (1/2)\arcsin(2/3) + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.157.** $2\pi n$, $-\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.
7.158. $2\pi n$, $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.159.** $\pi/2 + \pi n$, $\pm\pi/6 + \pi n$, $n \in Z$.
7.160. $\pm 0{,}5 \arccos\left[\left(\sqrt{6} - 2\right)/2\right] + \pi n$, $n \in Z$. **7.161.** $\pi n/2$, $n \in Z$.

7.162. $\pm\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$. **7.163.** $\pi/8 + \pi n/2$, $n \in Z$. **7.164.** $\pi/12 + \pi n/3$, $n \in Z$. **7.165.** πn, $\pm\pi/10 + \pi n$, $\pm\pi/5 + \pi n$, $\pm 3\pi/10 + \pi n$, $\pm 2\pi/5 + \pi n$, $n \in Z$. **7.166.** $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.167.** $\pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$. **7.168.** $\pm\arccos\left(\left(\sqrt{5} - 3\right)/2\right) + 2\pi n, n \in Z$. **7.173.** $(-\pi/12 + 2\pi n/3; \pi/12 + 2\pi n/3)$ $n \in Z$. **7.174.** $(-\pi/4 - \arcsin(1/4) + 2\pi n; 2\pi n) \cup (\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/4 + \arcsin(1/4) + 2\pi n)$, $n \in Z$. **7.175.** $(-\pi/3 + \pi n; \operatorname{arctg} 2 + \pi n)$ $n \in Z$. **7.176.** $(\pi/6 + \pi n, 5\pi/6 + + \pi n)$ $n \in Z$.
7.177. $(\pi/12 + 2\pi n; 17\pi/12 + 2\pi n)$. $n \in Z$.
7.178. $(\arcsin\left(\sqrt{5} - 1\right)/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n) \cup (\pi - \arcsin\left(\sqrt{5} - 1\right)/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n)$. $n \in Z$.

8. Прогрессии. Соединения и бином Ньютона.

8.3. 4 ч. **8.4.** 11. **8.5.** 7125. **8.6.** $d = -1{,}5$; $S_{10} = 47{,}5$. **8.7.** 14 м.
8.9. $b_1 = 9$, $q = 3$. **8.10.** $q = 1/3$. **8.11.** $q = 2$. **8.12.** 9; 6; 4; 8/3.
8.13. $x_1 = 4$, $x_2 = 4/3$. **8.14.** $b_1 = 6$, $q = 1/3$. **8.15.** $1111\frac{1}{9}$ м.

8.16. $b_1 = 12$, $q = 0{,}5$. **8.17.** 27. **8.18.** $a_1 = 2$, $d = 8$; $b_1 = 2$, $q = 3$. **8.19.** 3, 7, 11 или 18, 7, −4. **8.20.** $a_1 = 12$, $d = 2$. **8.21.** 2, 8, 32. **8.24.** {−3/4, 1/3}. **8.25.** {1}. **8.26.** 7. **8.30.** 604800. **8.31.** 381024. **8.32.** 32. **8.33.** 120. **8.34.** 12. **8.35.** 32. **8.36.** $4^7 = 16384$. **8.39.** 5040. **8.40.** 40320. **8.41.** 362880. **8.42.** $n = 4$. **8.43.** 1260. **8.44.** 105. **8.47.** 15. **8.48.** 495. **8.49.** 2646. **8.50.** 16. **8.51.** 126. **8.52.** 70. **8.53.** 120. **8.58.** $n_1 = 14$, $n_2 = 7$. **8.59.** $T_7 = 84a^{3,5}$. **8.60.** T_7, T_{23}, T_{37}. **8.61.** 101, $T_1 = a^{100}$, $T_2 = 100a^{99}x$, $T_3 = 4950a^{98}x^2$. **8.62.** 21−й член. **8.63.** а) 1,02; б) 0,985. **8.64.** 134 мм, 158 мм, 182 мм. **8.65.** 25 см, 40 см, 55 см, 115 см. **8.66.** $n = 5$. **8.67.** $n = 6$. **8.68.** 1160 м. **8.69.** 8 ч. **8.70.** 400 руб., 600 руб., 800 руб., 1000 руб. **8.71.** $S_{10} = 190$. **8.72.** 1; 3; 9. **8.73.** 1013. **8.74.** 56. **8.75.** 6. **8.76.** а) 25; б) 6. **8.77.** 126. **8.78.** а) 29; б) 47; в) 19. **8.79.** а) 3; б) 6. **8.80.** 3777. **8.81.** 9975. **8.82.** 43. **8.83.** 6; 12; 24; 36. **8.84.** 421.

9. Планиметрия

9.2. 2; $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}/3$; $2\sqrt{3}/3$. **9.3.** $9\sqrt{3}$. **9.4.** $3\sqrt{3}/2$. **9.6.** 4; $2\sqrt{3}$. **9.9.** 20 см. **9.11.** 15 дм. **9.13.** 2,4 см. **9.14.** $2\sqrt{3}$ и 4 см. **9.15.** $5\sqrt{3}/2$ и 2,5 см. **9.16.** 30°; 60°; $4\sqrt{3}$ см. **9.21.** 18 и 24 см. **9.22.** $5\sqrt{13}/6$ см. **9.25.** $\sqrt{3}$ см. **9.26.** $8\sqrt{7}/7$. **9.28.** 3 см. **9.29.** $12\sqrt{2}$ см. **9.30.** $2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$ см. **9.31.** 19,5. **9.32.** 4. **9.37.** 144π. **9.38.** 6π. **9.42.** $2(\pi - 2)$ см^2. **9.43.** 12 см^2. **9.46.** $8\sqrt{2}/3$. **9.48.** 16 см. **9.49.** 4,5. **9.51.** 15°; 165°. **9.54.** 96 см^2. **9.55.** $72\sqrt{3}$ м^2. **9.56.** 60/13 см. **9.58.** 10 и 20 см. **9.60.** 450 см^2. **9.62.** 25π см^2. **9.64.** 9 и 25 см; 255 см^2. **9.66.** 37 и 43 см. **9.67.** $48\sqrt{3}$ см^2. **9.68.** 2 см. **9.69.** 6 см. **9.70.** 39. **9.71.** 21. **9.72.** 50. **9.73.** 4 см. **9.74.** 24 см^2. **9.75.** 150см^2. **9.76.** 20,8 см. **9.77.** 24 и 30 см. **9.78.** 200 см^2. **9.79.** 9, 29, 19 и 19 см. **9.80.** $36\sqrt{3}$ см^2. **9.81.** 48. **9.82.** $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)/2\left(1+\sqrt{3}\right)$. **9.83.** $\sqrt{5}$. **9.84.** 9; 25. **9.85.** $3\pi/2$. **9.86.** а) 10π см; б) $5\sqrt{3}$ см; в) 25π см^2. **9.87.** 7. **9.88.** 2. **9.89.** 8. **9.90.** $16\pi\sqrt{3}/3$. **9.91.** $3+\sqrt{33}$. **9.92.** а) $27\sqrt{3}/4$; б) 4,5; в) 1,5; 3. **9.93.** 30°. **9.94.** $a^2\sqrt{3}/16$. **9.95.** 24; 7; 6,72. **9.96.** 9π. **9.97.** 25π. **9.98.** 4π. **9.99.** 13,5. **9.100.** 8. **9.101.** 8. **9.102.** 12,5. **9.103.** 310/13.

9.104. 14. **9.105.** 97,5. **9.106.** 9 см. **9.107.** 5. **9.108.** 282,24. **9.109.** 0,84. **9.110.** 1. **9.111.** $120/\sqrt{55}$. **9.112.** $5\sqrt{5}$. **9.113.** $\sqrt{5}/2$. **9.114.** 3. **9.115.** $ab/(a+b)$. **9.116.** 9,6. **9.117.** 48. **9.118.** $\arcsin 2/\pi$, $\pi - \arcsin 2/\pi$. **9.119.** $\sqrt{2S}$. **9.120.** $\arcsin(4S/\pi Q)$.
9.121. $R^2(\operatorname{ctg}\alpha - \pi/2 + \pi\alpha/180)$. **9.122.** $d(1-\sin(\varphi/2))/2$, $d(1+\sin(\varphi/2))/2$. **9.123.** 15/8 см. **9.124.** 12, 10 и 10 см.
9.125. $6\sqrt{5}$ см. **9.126.** 6 см. **9.127.** 11 см. **9.128.** 48 см^2.
9.129. 29 см^2. **9.130.** 5 см. **9.131.** 6 см. **9.132.** 6 см.
9.133. 225 см^2. **9.134.** $21\sqrt{13}$ м. **9.135.** 45/2 см^2. **9.136.** $\operatorname{arctg} 2/3$.
9.137. 2 и 6 см. **9.138.** 1. **9.139.** 15/2. **9.140.** 24 см.
9.141. 18 см^2. **9.142.** 5. **9.143.** 25/6. **9.144.** 49 см. **9.145.** 1 : 2.
9.146. $32\sqrt{3}/3$ см^2. **9.147.** $\sqrt{13}$ см. **9.148.** $4\sqrt{6}$ см. **9.149.** 30°.

10. Стереометрия

10.3. 8 см. **10.4.** 6,4 см. **10.5.** 32 см. **10.6.** 20 см. **10.7.** 20 см. **10.8.** 90°. **10.9.** $10\sqrt{3}$ см^2. **10.10.** $12\sqrt{2}$ см^2. **10.11.** $\sqrt{2}$ см. **10.12.** 2,4 см. **10.21.** 4500 см^2. **10.22.** $5\sqrt{2}$ см. **10.23.** ≈43 см^2. **10.24.** 50 см^2. **10.25.** 45°. **10.26.** $400\sqrt{2}$ см^2. **10.27.** $(2/3)\sqrt{3}\times$ $\times\left(\sqrt{2}+1\right)H^2$. **10.28.** $a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$. **10.29.** $(1/4a)S^2\sqrt{3}$. **10.30.** $15\sqrt{3}/4$ см^3. **10.31.** $(1/6)a^3$. **10.32.** 343 см^3. **10.33.** $\left(\sqrt{2}/48\right)a^3$. **10.34.** 6000 см^3. **10.35.** 70 см^3. **10.38.** 30°. **10.39.** 108°. **10.40.** 24 см^2. **10.41.** $0{,}25\pi H^2$. **10.42.** πa^3. **10.43.** $3\sqrt{3}\pi a^2$. **10.44.** $6\pi a^2$. **10.45.** 2700π см^2. **10.46.** 24π см. **10.47.** $0{,}375\pi R^3$. **10.48.** $4\pi b^2$. **10.49.** $\left(4\sqrt{3}/27\right)\pi R^3$. **10.50.** $0{,}75\pi R^3$.

10.51. $(1/3)\pi a^2$. **10.52.** $3\pi R^3$. **10.56.** $2\sin\alpha\sqrt{(ab)^3\cos\alpha}$.
10.57. $\operatorname{arctg}\left(2h\sqrt{l^2-h^2}\right)$. **10.58.** $(2/3)S\sqrt{S}\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **10.59.** $(1/6)d^3\sin(\alpha/2)\operatorname{tg}\beta$.

10.60. $\left(1/\sqrt{8}\right)SR\sin 2\alpha/\cos(45^\circ-\alpha)$. **10.61.** $(4/3)\ r^3\operatorname{tg}\beta/\sin\alpha$.

10.62. $8d^2\cos\varphi\cos^2(\varphi/2)\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)\operatorname{tg}\alpha$.

10.63. $\left(1/3\sqrt{2}\right)\left(a^3-b^3\right)\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

10.64. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$; $U_1=\dfrac{a^3}{192}\operatorname{tg}\alpha$; $U_2=\dfrac{a^3}{64}\operatorname{tg}\alpha$.

10.65. $S=\dfrac{a^2\sqrt{19}}{12}$; $\alpha=\arccos\left(3/2\sqrt{7}\right)$; $\beta=\pi-2\arccos\left(3/2\sqrt{7}\right)$.

10.66. $4S\left(\sin(\alpha/2)+\sqrt{2\cos\alpha}\right)/\left(\sin(\alpha/2)+\cos(\alpha/2)+\sqrt{2}\cos\alpha\right)$.

10.67. $2a^3\sin(\alpha/2)\sqrt{\sin(3\alpha/2)\sin(\alpha/2)}$. **10.68.** $2a^2b\sin(\alpha/2)\times$ $\times\sqrt{\sin(\varphi-\alpha/2)\sin(\varphi+\alpha/2)}$. **10.69.** $(1/6)\left(\sqrt{2}+2\operatorname{tg}\alpha\right)^3\operatorname{ctg}\alpha$.

10.70. $(1/4\pi)d^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **10.71.** $\pi l^2\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$. **10.72.** $(4\pi/3)\times$ $\times R^3\sin^2(\alpha/4)$, $\pi l^2\sin(\alpha/2)(2\operatorname{tg}(\alpha/4)+1)$.
10.73. $(\pi/3)a^3\sin^2 B\cdot\sin^2 C/\sin^2(B+C)$.

10.74. $(\pi/2)d^3\operatorname{tg}(\alpha/2)$. **10.75.** $4\pi b^2\operatorname{tg}\alpha\sin(\alpha/2)\sin(3\alpha/2)$.

10.76. $(4\pi/3)l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3(\alpha/2)$ **10.77.** $\left(1/\sqrt{2}\right)R^3\times$ $\times\sin 2\alpha$.

10.78. $4\pi r^2/\sin^2\alpha$. **10.79.** $2\pi m^2\cos\alpha\cos^2(\alpha/2)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha/\sqrt{2}\right)$.
10.80. $(1/6)\pi H^3\cos^4\alpha$.

11. Производная и ее применение

11.2. $\dfrac{16x\left(x^2-1\right)^3}{5\left(x^2+1\right)^5}$. **11.3.** $32x^3\ln^2 x$. **11.4.** $\dfrac{e^{3x}(9x+1)-5}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

11.5. $\dfrac{e^{4x}}{\sqrt[4]{\left(1+e^{4x}\right)^3}}$. **11.6.** $\dfrac{4}{9x^2-1}$. **11.7.** $\dfrac{24x^2}{\left(x^3-9\right)\left(x^3-1\right)}$.

11.8. $\dfrac{6\left(3x^2-2\right)}{x^3-2x}$. **11.9.** $\dfrac{2x}{3\left(1+x^2\right)}$. **11.10.** $\dfrac{2x^4-3x^2-1}{x\left(x^4-1\right)}$.

11.11. $\dfrac{8x^7}{\left(1-x^2\right)^5}$. **11.12.** $3\left(\ln\left(1-x^2\right)-\dfrac{2x^2}{1-x^2}\right)$. **11.13.** $x^2\ln x\,(3\times$

$\times$ ln x + 2). **11.14.** $\dfrac{-4}{3\sqrt[3]{\left(1-e^{4x}\right)^2 e^{4x}}}$. **11.15.** $\dfrac{(\ln x+3)^2}{x}-\dfrac{1}{x+3}$.

11.16. $5e^{2x}\left(e^{2x}+3\right)^4(2x+1)$. **11.17.** $\dfrac{e^{3x}\left(6x^2+2x-3\right)}{\sqrt{2x^2-1}}$.

11.18. $\dfrac{2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)\sqrt[4]{e^{4x}-1}}$. **11.19.** $x\ln\dfrac{1-x}{1+x}+1$. **11.20.** $\dfrac{6x^2}{\sqrt{9x^4+1}}+$

$+\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$. **11.21.** $\dfrac{x^3}{\left(x^3-2\right)\left(3-x^2\right)}$. **11.22.** $-3(x^3-x^2-$

$-3)e^{-3x}$. **11.23.** $-\dfrac{4e^{4x}}{\left(e^{4x}-1\right)\sqrt{e^{8x}-1}}$. **11.24.** $(2x+2^x\ln 2)\cos(x^2+$

$+2^x)$. **11.25.** $\dfrac{-2e^{\sqrt{\ln x}}}{x}$. **11.26.** $\dfrac{\sin x(\ln\cos x-1)}{\cos^2 x}$.

11.27. $\dfrac{1-\sin x\cdot\sin 2x}{\sin x}$. **11.28.** $\dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg} x$. **11.29.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

11.30. $e^x(\operatorname{ctg} x+\ln\sin x)$. **11.31.** $5\sin^2 x\cdot\cos^3 x$. **11.32.** $\dfrac{1}{\sin^3 x}$.

11.33. $\dfrac{8-3\cos^4 x}{\cos^5 x}$. **11.35.** $3x^2+\dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}(2+x)$; $3+\dfrac{3}{2}\sqrt{e}$.

11.36. x^2e^x; e. **11.37.** $\dfrac{-30\left(x^4+1\right)}{x\left(x^4-1\right)}$; -17. **11.38.** $\dfrac{6(2x+11)}{x^2-x-2}$; 7.

11.39. $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$; 0. **11.40.** $\operatorname{tg}^4 x$; 9. **11.41.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+12}}$; 0,25.

11.42. $\dfrac{24\operatorname{tg}3x\left(1+\operatorname{tg}^2 3x\right)}{\cos^2(3x)}$; 96. **11.43.** $-\sin 2x+\operatorname{tg} x$; 0.

11.44. $e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$; -1. **11.45.** $4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x$; 13,5.

11.46. $\dfrac{1}{2\cos 2x}$; 0,5. **11.48.** $y=28x-41$. **11.49.** $x-2y=0$.

11.50. $y=-\dfrac{1}{e}x+2$. **11.51.** $y=\dfrac{1}{e}x$. **11.53.** $\pi/4$. **11.54.** В точке

(−5; 45): $y = -20x - 55$ и $y = -13x - 20$; в точке (2; 3): $y = 8x - 13$ и $y = x + 1$. **11.55.** (1; 0); (−1/3; −44/27). **11.58.** 51 м/с. **11.59.** $v_1 = 8$ м/с; $v_2 = 10$ м/с и $v_1 = 24$ м/с; $v_2 = 22$ м/с. **11.61.** $x = -1$ — точка максимума , $x = 0$ — точка минимума: возрастает на (−∞; −1) и (0; ∞), убывает на (−1; 0). **11.62.** $x = \pm 2$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; возрастает на (−2; 0) и на (2; ∞), убывает на (−∞; −2) и на (0; 2). **11.63.** $x = \pm\sqrt{5}$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; возрастает на $(-\sqrt{5}; 0)$ и на $(\sqrt{5}; \infty)$, убывает на $(-\infty; -\sqrt{5})$ и на $(0; \sqrt{5})$. **11.64.** $x = -1$ — точка максимума , $x = 2$ — точка минимума; возрастает на (−∞; −1) и на (2; ∞), убывает на (−1; 2). **11.65.** $x = 11/4$ — точка максимума; возрастает на (−∞; 11/4), убывает на (11/4; ∞). **11.66.** $x = 1$ — точка минимума, $x = 7/3$ — точка максимума; убывает на (−∞; −1) и на (7/3; ∞), возрастает на (−1; 7/3). **11.67.** $x = -1/2$ и $x = 1/3$ — точки минимума, $x = -1/12$ — точка максимума; убывает на (−∞; −1/2) и на (−1/12; 1/3), возрастает на (−1/2; −1/12) и на (1/3; ∞).

11.68. $x = \pm 2$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; убывает на (−∞; −2) и на (0; 2), возрастает на (−2; 0) и на (2; ∞). **11.69.** $x = 0$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; возрастает на (−∞; 0) и на (2; ∞), убывает на (0; 2).

11.70. $x = 0$ — точка максимума; возрастает на (−∞; 0), убывает на (0; ∞). **11.72.** $y_{наим} = -24$, $y_{наиб} = 4$. **11.73.** $y_{наиб} = 17$, $y_{наим} = 1$. **11.74.** $y_{наим} = 1$; $y_{наиб} = 2.125$. **11.75.** $y_{наиб} = 1$, $y_{наим} = 0$. **11.76.** $y_{наиб} = 7$, $y_{наим} = -3/2$. **11.77.** $y_{наиб} = 2e^2 - 1$; $y_{наим} = 0,5 + \ln 2$. **11.78.** $y_{наим} = 1$; $y_{наиб} = 1,25$. **11.79.** $y_{наим} = 1$; $y_{наиб} = \pi/2$. **11.85.** −0,5. **11.86.** 2. **11.87.** 20 см. **11.88.** 50 × 100 (м). **11.89.** 1:1. **11.90.** $\sqrt{2} : 1$. **11.91.** $\pi/3$; наибольшее отношение равно 0,5. **11.92.** 20 см, $75\sqrt{3}$ см². **11.93.** 4 м². **11.94.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **11.95.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **11.96.** $\pi/3$. **11.97.** 96π см³.

11.98. $\arccos\left(\sqrt{3} - 1\right)$. **11.99.** В точку, удаленную на 3 км от населенного пункта и на 12 км от ближайшей к буровой вышке точки шоссе. **11.100.** 2,4 м. **11.101.** 40 км.

12. Задачи с параметрами

12.8. (−∞; ∞) при $a = 1$; $(a + 3)/(a - 1)$ при $a \neq 1$. **12.9.** Нет решений при $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$; $(6 - a)/(a + 3)$ при $a \neq -3$, $a \neq 0$,

$a \neq -2$. **12.10.** -2 при $a = 0$; нет решений при $a < -1/4$; -3 при $a = -1/4$; $\left(1-2a\pm\sqrt{4a+1}\right)/2a$ при $-1/4 < a < 0$, $a > 0$. **12.11.** Нет решений при $a = 0$; $-1{,}5$ при $a = 1$; 1 при $a = -2/3$; 1 и $-(a + 2)/2$ при $a \neq -2/3$, $a \neq 0$. **12.12.** Нет решений при $a < 0$, $0 < a < 1$; 0 при $a = 0$; $(a - 1)^2/4$ при $a \geq 1$. **12.13.** Нет решений при $a < 0$; $1/2 \leq a < 1$; $a^2/(2a-1)$ при $0 \leq a < 1/2$, $a \geq 1$. **12.14.** $\log_{12}\left(1+\sqrt{1-a}\right)$ и $-\log_{12}\left(1+\sqrt{1-a}\right)$ при $a \leq 1$; нет решений при $a > 1$. **12.15.** $1/2\pm\sqrt{1/4-a^2}$ при $0 < a \leq 1/2$; решений нет при $1/2 < a < 1$; $a > 1$. **12.16.** Нет решений при $a < 1/4$, $a > 1$; $\pm\ 0{,}25 \arccos[(5a - 8)/3] + \pi n/2$, $n \in Z$, при $1/4 \leq a \leq 1$. **12.17.** $\operatorname{arctg}\,(a+\sqrt{a^2+4a-4}\,/\,2(1-a)+\pi n$, $n \in Z$, при $a \leq -2-2\sqrt{2}$, $-2+2\sqrt{2} \leq a < 1$, $a > 1$; решений нет при $-2-2\sqrt{2} < a < -2+2\sqrt{2}$. **12.18.** Нет решений при $a = -1$; $(3/(a + 1), -3/(a + 1))$ при $a \neq -1$. **12.19.** $\left(0; a+\sqrt{a^2+3}\right)$ при $a < \sqrt{3}$; $\left(0; a+\sqrt{a^2+3}\right), \left(0;\ -a\pm\sqrt{a^2-3}\right)$ при $a \geq \sqrt{3}$. **12.20.** $(0; \log_2 a - 2)$, $(\log_2[(a - 2)/2]; 0)$ при $a > 4$; нет решений при $a \leq 4$. **12.21.** Нет решений при $a = -1$; $(-\infty; 1 - a)$ при $a > -1$; $(1 - a; \infty)$ при $a < -1$. **12.22.** $\left[a\left(1+\sqrt{2}/2\right); 0\right]$ при $a < 0$; $\left[a\left(1-\sqrt{2}\right)/2;\ 2a\right]$ при $a \geq 0$. **12.23.** $\left(1;\ \left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2\right)$ при $0 < a < 1$; $\left(\left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2;\ \infty\right)$ при $a > 1$. **12.24.** $(1/2; 1)$, $(3; \infty)$ при $0 < a < 1$, $a > 1$. **12.33.** $a = 2$, $a = 6$. **12.34.** $-7/2 \leq a \leq 0$, $a = 1$. **12.35.** $a < -1$. **12.36.** $a < -1$, $a \geq 8$. **12.37.** $a > 11/9$. **12.38.** $a < \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$, $a > 1$. **12.39.** $a \leq 0$, $a \geq \left(7+\sqrt{45}\right)/2$. **12.40.** $a = 0$, $a = -1/2$, $a = -3/2$. **12.41.** $a \leq 1$, $a = 5$. **12.42.** $-1/2 < a < -3/22$, $a = 1$. **12.43.** $a \leq -2$, $a \geq 2$. **12.44.** $-3/2 \leq a \leq 1/2$. **12.45.** $a = 1$, $b = 1$; $a = 1$, $b = 2$; $a = -1$, $b = 1$; $a = -1$, $b = 2$. **12.46.** $-1 < a < \left(1-\sqrt{3}\right)/2$, $1 < a < \left(1+\sqrt{3}\right)/2$.

13. Варианты заданий на вступительных экзаменах и собеседовании по математике

Вариант 1. **1.** 12 км/ч. **2.** $x = 4$. **3.** $(-\infty;\ -4/5)\cup(1/5;\ \infty)$. **4.** 2. **5.** 24 см^2. *Вариант 2.* **1.** 2400 р. **2.** $x = 4$. **3.** $[-8/5;\ 2]$. **4.** 1. **5.** 4 см^2. *Вариант 3.* **1.** 40 мин. **2.** $x = 1$. **3.** $(1/2;\ 1)$. **4.** $\operatorname{tg}\alpha$. **5.** 5. *Вариант 4.* **1.** 6 дн., 12 дн. **2.** $x = 4$. **3.** $(-\infty;-7/3)\cup[5/2;\infty)$. **4.** 0. **5.** 5. *Вариант 5.* **1.** 8 лошадей. **2.** $x = 4$. **3.** $[-5;\ 1/2]$. **4.** $2\operatorname{ctg}\alpha$. **5.** 9π см^2. *Вариант 6.* **1.** Уместится. **2.** $x_1 = 10$, $x_2 = 100$. **3.** $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$. **4.** 1. **5.** $12\sqrt{2}$ см. *Вариант 7.* **1.** 400 р. , 500 р. **2.** $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. **3.** $(-\infty;\ 1]\cup[3;\infty)$. **4.** 2. **5.** 42 см. *Вариант 8.* **1.** 2 км/ч. **2.** $x = -1/2$. **3.** $(-\infty;-3)\cup(2;\infty)$. **4.** 1. **5.** 9,6 см. *Вариант 9.* **1.** 12 ч, 20 ч. **2.** $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. **3.** $(-1/2;\ 3)$. **4.** $\sin\alpha + \cos\alpha$. **5.** 1024 см^2. *Вариант 10.* **1.** 720 км, 150 км. **2.** $x = 4$. **3.** $(-\infty;\ 2/3)\cup(2;\infty)$. **4.** $a + 1$. **5.** 2 см, 8 см, 5 см, 5 см. *Вариант 11.* **1.** 500 чел., 400 чел., 270 чел. **2.** $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. **3.** $(-\infty;\ -1]\cup(6;\infty)$. **4.** $(a + b)^2$. **5.** 7,5 см. *Вариант 12.* **1.** 12 мин. **2.** $x = 3$. **3.** $(-\infty;\ -5)\cup(4;\infty)$. **4.** 1. **5.** 5,2 см. *Вариант 13.* **1.** 30 км/ч. **2.** $x_1 = 2$, $x_2 = 8$. **3.** $(-\infty;\ -2/3)\cup(1/5;\infty)$. **4.** 0. **5.** 2 см, 6 см. *Вариант 14.* **1.** 10 упряжек. **2.** 1. **3.** $(-\infty;\ 1/3)\cup(1;\infty)$. **4.** $\sin 2\alpha$. **5.** $12\sqrt{2}$ см. *Вариант 15.* **1.** 160 чел. **2.** 2. **3.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. **4.** 3. **5.** 2,6 см. *Вариант 16.* **1.** 800 р. **2.** $x = 1$. **3.** $(-\infty;1/3)\cup(3;\infty)$. **4.** $0{,}5\sin 2\alpha$. **5.** 50 см^2. *Вариант 17.* **1.** 15 дн. **2.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **3.** $(-1/3;\ 1)$. **4.** $\sin\alpha$. **5.** 20 см^2. *Вариант 18.* **1.** 9 км/ч. **2.** $x_1 = 1/81$, $x_2 = 9$. **3.** $[5/2;3]$. **4.** $1/a$. **5.** $20\sqrt{3}$ см^2. *Вариант 19.* **1.** 40 т, 100 т. **2.** $x = 1$. **3.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;3/2]\cup[5;\infty)$. **4.** $2\sin\alpha$. **5.** 240 см^2. *Вариант 20.* **1.** 23 дет. **2.** $x = 13$. **3.** $(-\infty;-4]\cup[4;\ 5)$. **4.** 0. **5.** 12 см^2. *Вариант 21.* **1.** 18 ч. **2.** $x = 15$. **3.** $(-\infty;2]\cup[3;\infty)$. **4.** 1. **5.** 6 см. *Вариант 22.* **1.** 24 км/ч, 36 км/ч. **2.** $x_1 = 1/4$, $x_2 = 2$. **3.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(5;\infty)$. **4.** 1/9. **5.** 15 см. *Вариант 23.* **1.** 3 ч. **2.** $x = 4$. **3.** $(-\infty;\ 0)\cup(18;\ 20]$. **4.** 1. **5.** 6 см. *Вариант 24.* **1.** 90 ч, 72 ч. **2.** $x = 3$. **3.** $(-1;\ 8]$. **4.** 2. **5.** 9 см^2. *Вариант 25.* **1.** 48. **2.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **3.** $(-\infty;-7]\cup[1;\infty)$. **4.** $4(a - x)$. **5.** 256 см^2. *Вариант 26.* **1.** 6×12 (м). **2.** $x = 7$. **3.** $(2;\ 3]$. **4.** $\operatorname{ctg} 2\alpha$. **5.** 64π см^2. *Вариант 27.* **1.** 15 ч, 7,5 ч. **2.** $x_1 = -\pi/4 + \pi n$, $x_2 = -\operatorname{arctg}(1/2) + \pi n$, $n \in Z$. **3.** $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(3;\infty)$. **4.** $a - 1$. **5.** $2\sqrt{3}/3$ см. *Вари-*

ант 28. **1.** 30 т, 15 т, 25 т. **2.** $x_1 = 2$; $x_2 = 32$. **3.** $[5; 6]$. **4.** 0,25. **5.** 3 см; 48 см^2. *Вариант 29.* **1.** 9,6 стр.; 8 стр. **2.** $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **3.** $(1/2;1)\cup(1;\infty)$. **4.** 1. **5.** 216 см^2. *Вариант 30.* **1.** 14 × 21 (м). **2.** $x_1 = 10^{-4,5}$, $x_2 = 10$. **3.** $(-\infty;-4/5)\cup(1/5;\infty)$. **4.** 2. **5.** 4 см. *Вариант 31.* **1.** 2 л. **2.** $x = 1/9$. **3.** $(-\infty;0)\cup(0;1/2]\cup[5/2;\infty)$.

4. $-0{,}5 \sin 4\alpha$. **5.** arccos 0,8. *Вариант 32.* **1.** 80 км/ч, 60 км/ч. **2.** $x_1 = -11/2$, $x_2 = -5$, $x_3 = -6$. **3.** $\left(-5/2;3\sqrt{2}\right]$. **4.** $-\operatorname{tg}^4 \alpha$. **5.** Все стороны равны по 18 см. *Вариант 33.* **1.** 40 раб.; 6000 ящиков.

2. $x = 16$. **3.** $(1; 2)\cup(2; 4]$. **4.** 0. **5.** $3\sqrt{3}$ см^2. *Вариант 34.* **1.** 20%, 60%. **2.** $x_1 = \pi n/2$, $x_2 = \pi n/5$, $n \in Z$. **3.** $[-3/4;-1/5)\cup(-1/5;3/4]$.

4. $3a^2$. **5.** $24\sqrt{3}$ см^2. *Вариант 35.* **1.** 720 км. **2.** $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$. **3.** $(-\infty; -2]\cup[2;5/2)$. **4.** $1/a$. **5.** 1/5. *Вариант 36.* **1.** 60%. **2.** $x = 3/2$. **3.** $(4; 6)$. **4.** 0. **5.** $\arccos\sqrt{2/3}$. *Вариант 37.* **1.** 5%, 10%. **2.** $x_1 = -10/3$, $x_2 = 2$. **3.** $(-\infty;0)\cup(6;20]$. **4.** $\sin 2\alpha$. **5.** 36 см^2. *Вариант 38.* **1.** $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right)$; 18π см^3. **2.** $x_1 = -\pi/4 + \pi n$, $x_2 = -\pi/2 + 2\pi n$, $x_3 = 2\pi n$, $n \in Z$. **3.** $(-\infty;1/6)\cup(3/2;\infty)$. **4.** ab. **5.** arccos 0,2. *Вариант 39.* **1.** 20 м. **2.** $x = 4$. **3.** $(-1/6; 1/2)$. **4.** $\operatorname{ctg}(\alpha/4)$. **5.** 84 см^2. *Вариант 40.* **1.** 5 ч; 4 ч. **2.** $x = \pi/4 + 2\pi n$, $n \in Z$. **3.** $(-\infty; 0)\cup(0; 3]\cup[10; \infty)$. **4.** –2. **5.** $\sqrt{3}$ см.

Вариант 41. **1.** 19π см/с, 27π см/с. **2.** $-\pi/4 + \pi n$, $\pm\pi/3 + \pi n$, $n \in Z$. **3.** $x_1 = 1{,}25$; $x_2 = 4$. **4.** $\sqrt{a-1}$. **5.** 3 см. *Вариант 42.* **1.** 14,4 ч. **2.** $\pi/4 + \pi n/2$. **3.** $(0{,}5; 1{,}5)\cup(1{,}5; 2{,}5)$. **4.** 1. **5.** 5 см, 8 см. *Вариант 43.* **1.** 4 см^3. **2.** $x_1 = -5$; $x_2 = 5$. **3.** $[-0{,}4; 0{,}25)\cup(0{,}25; 0{,}4]$. **4.** 2. **5.** 36 см^2. *Вариант 44.* **1.** 1,5. **2.** $x_1 = -4$; $x_2 = 5$. **3.** $(-\infty; 0)\cup(0; 2)\cup(10;\infty)$. **4.** $\left(1/\sqrt{2}\right)\sin 2\alpha$. **5.** 3 см, 5 см.

Вариант 45. **1.** 23. **2.** $x_1 = 1/\sqrt{5}$; $x_2 = 5$. **3.** $(-0{,}5; 0{,}5)$. **4.** $-1/a\sqrt{2}$. **5.** $2-4\sqrt{2}/3$ см. *Вариант 46.* **1.** 3 л. **2.** $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. **3.** $(1; 2)\cup(2; 3]$. **4.** $2\cos\alpha$. **5.** 14 см, 29,4 см, 16,9 см, 12,5 см. *Вариант 47.* **1.** 30 м, 25 м. **2.** $x_1 = 1/6$; $x_2 = 6$. **3.** $(-\infty; 0)\cup(0; 3]\cup[6; \infty)$. **4.** $\sin\alpha$. **5.** $7/\sqrt{50}$. *Вариант 48.* **1.** 30 км, 36 км. **2.** $\pm\pi/6 + \pi n/2$. **3.** $\left(-2{,}5;\sqrt{10}\right]$. **4.** $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2$.

5. 2/3. *Вариант 49.* **1.** 2 кг. **2.** $x_1 = 3$; $x_2 = 7$. **3.** (7/3; 3). **4.** $-0{,}25 \sin 8\alpha$. **5.** 36 см^2. *Вариант 50.* **1.** 42,3%. **2.** $x = 2{,}5$. **3.** $(-\infty; -1/9) \cup (1; \infty)$. **4.** 2. **5.** 6 см. *Вариант 51.* **1.** 10 ч. **2.** $x = -1$. **3.** 0. *Вариант 52.* **1.** $2\pi\sqrt{6}$ см. **2.** $(-\infty; 0) \cup (6; 8]$. **3.** $(\sqrt{a} + \sqrt{b})/2$. *Вариант 53.* **1.** 3 см, 4 см, 5 см. **2.** [0; 6]. **3.** $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. *Вариант 54.* **1.** 3,6 л; 2,4 л. **2.** $x = 8$. **3.** $\sin 4\alpha$. *Вариант 55.* **1.** 390 см^2. **2.** $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. **3.** $-b$. *Вариант 56.* **1.** 21 ряд; 5 рядов. **2.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. **3.** 2. *Вариант 57.* **1.** 5 × 5 × 2,5 (м).
2. $(-\infty; -4/3] \cup (4/3; 4{,}5)$. **3.** 1. *Вариант 58.* **1.** 100 км/ч. **2.** $x_1 = 1/128$; $x_2 = 2$. **3.** $\operatorname{tg}^2 2\alpha$. *Вариант 59.* **1.** 75%. **2.** $-\pi/4 + \pi n$, πn, $n \in Z$. **3.** $-\sqrt{a} / \sqrt{x}$. *Вариант 60.* **1.** 49 см^2. **2.** 0. **3.** −2. *Вариант 61.* **1.** 25/6. **2.** $[-0{,}6; 0) \cup (0; 0{,}6]$. **3.** $a\sqrt{b}$. *Вариант 78.* **1.** −1. **2.** $\{7\} \cup (1; 4]$. **3.** 39; 153. **4.** $\pi/4$. **5.** 2. **6.** $q \in [13/14; 7/2] \cup \{5\}$. *Вариант 79.* **1.** $(\log_7 6; 1) \cup (\log_7 11; \infty)$. **2.** $\pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **3.** $[-2; -1] \cup \{2\}$. **4.** $10 + 2\sqrt{5}$. **5.** 12 месяцев. **6.** 195. *Вариант 80.* **1.** $\{(-3; -5), (0; 0), (3; 5)\}$. **2.** $y \in [-3; 0]$. **3.** $2\pi n$, $n \in Z$, $n \geq -1$; $\pi + 2\pi m$, $m \in Z$, $m \leq -3$. **4.** $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$. **5.** 300 или 600 телевизоров. **6.** 5 : 9. *Вариант 81.* **1.** 2. **2.** 2,25. **3.** 1,5. **4.** 4. **5.** 18. **6.** 1. **7.** 12,5. **8.** 1. **9.** 8. **10.** −12. *Вариант 82.* **1.** 1. **2.** −54. **3.** 3. **4.** 3,5. **5.** 35. **6.** 9. **7.** −19,5. **8.** 7. **9.** 9. **10.** 2. *Вариант 83.* **1.** 25; 52. **2.** Нет решений при $a < 5/2$; 2 решения при $a = 5/2$; 4 решения при $a > 5/2$. **3.** πn; $\pi/2 + \pi n$; $\pm\pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** $3ab^2/(2a^2 + b^2)$. *Вариант 84.* **1.** 4 самолета (4 самолета Ан, либо 3 самолета Ан и один самолет Ту). **2.** $y = 2$. **3.** $\pi/4 + \pi n$; $\pm\pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$. **4.** $y_{наиб} = y(-5) = 2$; $y_{наим} = y(-2) = -7$. **5.** $l \cos(\alpha/2) \operatorname{tg} \alpha$. *Вариант 85.* **1.** 749 ден. ед.
2. $[3 - \log_2^2(5/2); 3) \cup (-1; 3 - \log_2^2(5/2))$. **3.** $4\pi n$; $(-1)^k 2\pi/3 + 4\pi k$; $n \in Z$, $k \in Z$. **4.** $x = -1 - \sqrt{7}$ — точка минимума.
5. $\arccos((3 + \sqrt{3})/2)$, $\arccos((3 + \sqrt{3})/2)$,
$180° - 2\arccos((3 + \sqrt{3})/2)$, если треугольник тупоугольный;
$\arccos((3 - \sqrt{3})/2)$, $\arccos((3 - \sqrt{3})/2)$,

$180° - 2\arccos\left(\left(3-\sqrt{3}\right)/2\right)$, если треугольник остроугольный. *Вариант 86.* **1.** 25 дней. **2.** 75. **3.** −4. **4.** 9. **5.** 3. **6.** −2. **7.** 0. **8.** 210°. **9.** 3. **10.** 240. *Вариант 87.* **1.** 1. **2.** (0; 2]. **3.** 7; −14; 28; −56. **4.** 2π см^2. **5.** 24 траншеи.

6. $a \in [-3;-2]$; $x = \pm\arccos\sqrt{a+3} + \pi n$, $n \in Z$. *Вариант 88.* **1.** 315°. **2.** $x = 1$. **3.** 4 см. **4.** 2,5 ед^2. **5.** $m = 1$.

6. $x_{1,2} = \pm\sqrt{\log_3\left(10+4\sqrt{6}\right)}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{\log_3\left(2\sqrt{10}-6\right)}$. *Вариант 89.*

1. $\pi/3 + \pi n$, $n \in Z$. **2.** $x_1 = 4$; $x_2 = 9$. **3.** $\left(\left(5-\sqrt{13}/2\right);\ \infty\right)$. **4.** Нет решений при $a \le -2$; $-14 \le a \le 50$, $a \ge 56$;

$$\left(-a-26-\sqrt{a^2+52a+100}\right)/2 < x < \left(-a-26+\sqrt{a^2+52a+100}\right)/2$$

при $-2 < a < -14$;

$$\left(a-26-\sqrt{a^2-52a+100}\right)/2 < x < \left(a-26+\sqrt{a^2-52a+100}\right)/2$$

при $0 < x < 24$. **5.** 38%. **6.** $5\sqrt{10}$. *Вариант 90.* **1.** −6. **2.** $(-10;\ -1]\cup[6;\ \infty)$. **3.** $\pm\ \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$. **4.** $a = 1$; $b = 1/4$; $c = -5/4$. **6.** $p\sqrt{5}/10$. **7.** 534. *Вариант 91.* **1.** $x = 1$, $y = 1$; $x = -1$, $y = 1$; $x = 1/\sqrt[3]{3}$, $y = \sqrt[3]{9}$. **2.** 4. **3.** 0. **4.** $[-1/2;\ 0)\cup(2;\ \infty)\cup\{0\}$. **6.** $y = -2x^3 - 9x^2 + 24x + 4$. *Вариант 92.* **1.** $a = -4$. **3.** $x = 0$. **4.** $(\pi/3 + 2\pi n,\ 2\pi/3 + 2\pi n)\cup(\pi + 2\pi n,\ 7\pi/6 + 2\pi n)\cup(4\pi/3 + 2\pi n,\ 5\pi/3 + 2\pi n)\cup(11\pi/6 + 2\pi n,\ 2\pi + 2\pi n)$, $n \in Z$. **5.**120. **6.** 3,5 ч. *Вариант 93.* **1.** 2. **2.** $[-4;\ -2)\cup(4;\ \infty)$. **3.** $\pi/4 + \pi n/6$, $\pi/6 + \pi n/3$, $n \in Z$. **4.** 50 км/ч. **5.** 294 см^2. **6.**12π см. *Вариант 94.* **1.** 1. **2.** [0,5; 1). **3.** $2\pi n$, $-\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **4.** 20%. **5.** 14 см. **6.** 6 см. *Вариант 95.* **1.** 1. **2.** $x = 64$. **3.** $\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$. **4.** 20%. **5.** 108 ед^2. **6.** $\pm 3\sqrt{6}/8$. *Вариант 96.* **1.** $\pi/4 + 2\pi n$, $3\pi/4 + 2\pi n$, $n \in Z$. **2.** (5; 6]. **3.** (1; 5). **4.** 6,8 т. **5.** $b = 1$, $b = 4$. *Вариант 97.* **1.** $(-\infty;\ -1)\cup[2;\ \infty)$. **2.** 49. **3.** (2; 3). **4.** 1995 синих, 1575 красных шаров.

5. $c \in (0;\ 1/2)\cup\{4/7\}$. *Вариант 98.* **1.** $(-\infty;\ -3)\cup(5;\ 7]\cup(8;\ \infty)$. **2.** $x = 2$. **3.** $(-\infty;\ -3/2]\cup[2;\ 8)$. **4.** 11115 художественных, 9405 научно-технических книг. **5.** $d \in (-\infty;\ -0/2)\cup\{12\}$. *Варант 99.* **1.** 92. **2.** 0. **3.** 80. **4.** 10. **5.** 0. **6.** −0,25. **7.** −3 **8.** Нет решений. **9.** −2

10. 44. **11.** 20. **12.** 30. **13.** 2. **14.** 3. **15.** 10. **16.** −1. **17.** 135. **18.** 45. **19.** 150. **20.** 7. *Вариант 100.* **1.** 4. **2.** 1. **3.** 9. **4.** 12. **5.** 3,6. **6.** 2. **7.** 9 **8.** −3. **9.** 3 **10.** 16. **11.** 3. **12.** 20. **13.** 4,5. **14.** 49. **15.** 1. **16.** 1,5. **17.** 1,5. **18.** 15. **19.** 1. **20.** 270,08. *Вариант 101.* **1.** 5 ч; 10 ч; 15 ч. **2.** {3}. **3.** $(-\infty;\ -1/4)\cup(5/6;\ \infty)$. **4.** 1. **5.** 12π см. *Вариант 102.* **1.** 8км/ч. **2.** $\pm\pi/6+\pi n,\ n\in Z$. **3.** $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 0]$. **4.** $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)/2$.

5. $2\sqrt{10}$ см. *Вариант 103.* **1.** 220 кг. **2.** {2; 5}. **3.** $(-1/2;\ 0)\cup(0;\ 2)$. **4.** 0. **5.** 6 см. *Вариант 104.* **1.** p = 60 %, отношение цен товаров А и В равно 1 : 2. **2.** {1/5; 1/625}. **3.** $[-0{,}5;\ 0)\cup(0;\ 2]$. **4.** $-x^3$.

5. 130/17 см. *Вариант 105.* **1.** $(-\infty;\ -2]\cup(49/16;\ \infty)$.

2. $7\pi/16+2\pi n,\ n\in Z$. **3.** 36 или $8\sqrt{19}$. **4.** 210 тыс. руб.

5. $[-3;\ -2)\cup\{1\}$. **6.** $y_{наим}$ = 1/5 при a = ± 2/5, b = 4/5.

Вариант 106. **1.** $(-\infty;\ -1)\cup(17/8;\ \infty)$. **2.** $4\pi/3+2\pi n,\ n\in Z$. **3.** 50 или $4\sqrt{154}$. **4.** 2120 тыс. руб. **5.** $\{-1\}\cup(2;\ 4]$. **6.** $y_{наим}$ = 2/5 при $p=\pm3\sqrt{5},\ q=9/5$. *Вариант 107.* **1.** 5. **2.** {2}. **3.** 5. **4.** 4. **5.** 2. **6.** 30. **7.** 1,25. **8.** 74. **9.** 4. **10.** 15.

Учебное пособие

Наум Шевелевич Кремер,
Ольга Григорьевна Константинова,
Алла Сергеевна Протасова и др.

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ВУЗЫ

Редактор *Л.Н. Вылегжанина*
Корректор *К.В. Федорова*
Оформление художника *А.В. Лебедева*

Компьютерный набор и оригинал-макет выполнены АО "ВИОЛАНТА"

Лицензия № 061068 от 17.04.92
Подписано в печать 26.12.95. Формат 60х88 1/16
Усл. печ. л. 22,0. Тираж 15 000 экз. Заказ 88

Издательство "Банки и биржи"
Генеральный директор *В.Н. Закаидзе*

109072, Москва, ул. Серафимовича, 2 (к/т "Ударник")
Тел.: (095) 231-72-18. Тел./Факс: (095) 231-30-33

Отпечатано в типографии издательства "Дом печати"
432601, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

26.000 ~

ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ

$$a^n = b$$

определение степени

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n\ раз},\ n\in N$$
$$a^0 = 1\ (a\neq 0)$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},\ m\in Z$$

свойства степеней

$$(ab)^n = a^n\cdot b^n$$
$$(a/b)^n = a^n/b^n$$
$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

определение корня

$$a = \sqrt[n]{b}$$
или
$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$$

свойства корней

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$(a\geq 0,\ b\geq 0)$$

формулы сокращенного умножения для корней

$$a-b = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$
$$a\pm b = \left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$$
$$a\sqrt{a}\pm b\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\times$$
$$\times\left(a\mp\sqrt{ab}+b\right)$$

формулы сокращенного умножения

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3 = a^3\pm 3a^2b+$$
$$+3ab^2\pm b^3$$
$$a^3\pm b^3 = (a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

бином Ньютона

$$(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m}a^{n-m}b^m+$$
$$+\ldots+b^n,\ n\in N$$

определение логарифма

$$n = \log_a b$$
или
$$a^{\log_a b} = b$$
$$(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$$

формулы логарифмирования

$$\log_a(xy) = \log_a x+\log_a y$$
$$\log_a\frac{x}{y} = \log_a x-\log_a y$$
$$\log_a x^n = n\log_a x$$
$$(x>0,\ y>0)$$

формулы перехода к другому основанию

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$
$$\log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta}\log_a b$$