

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ

ВОСЕМЬ КНИГЪ,

А ИМЕННО МАТЕМАТИЧЕСКОГО
КОЛЛЕДЖА НМУ

Первыя шесть, одиннадцатая и двѣ-
надцатая,

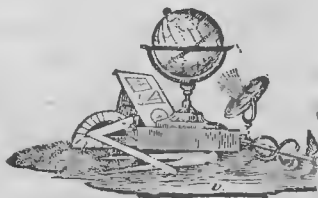
Содержація въ себѣ

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ.

Переводъ съ Греческаго

О. ПЕТРУШЕВСКАГО,

съ прибавленіями и примѣчан



САНКТПЕТЕРБУ

ТИПОГРАФІЯ ДЕПАРТАМЕНТА
ПРОСВѢЩЕНІЯ.

1819.

из библиотечки
М. М. Пастухова

7478

М.
2

Jamais livre de science n'a eu un succès comparable à celui des Éléments d'Euclide. Ils ont été enseignés exclusivement pendant plusieurs siècles dans toutes les écoles de mathématiques, traduits et commentés dans toutes les langues; preuve certaine de leur excellence.

BOSSUT.

Ч И Т А Т Ъ П О З В О Л Я Е Т С Я

чтобы по напечатаніи, до выпуска изъ предсданы были : одинъ экземпляръ Цензурнаго Комитета, другой для Департамента Просвѣщенія; два экземпляра Московской Публичной Библіотеки, и одинъ для Императорской Академіи Наукъ. Санктпетербурга 13 дня 1818 года.

т. Сов. и Кав. Г. Яценковъ.

Ночу

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Эвклидъ жилъ въ Александріи, почти за 270 лѣтъ до Рождества Христова, куда онъ переселился изъ Греціи по приглашенію царствовавшего тогда въ Египтѣ Птоломея Лага, и былъ ему совѣшникомъ и со-трудникомъ въ заведеніи славной Александрійской Школы. По описанію Паппа Эвклидъ, сколь великъ умомъ, стольже оплеченъ былъ и качествами сердца. Онъ, подобно великому Невпону, съ тихостію нравовъ соединялъ смиренное чувство собственнаго достоинства, былъ совершенно чуждъ гордости и предубѣжденія къ своимъ познаніямъ, съ неопровержною готовностію отдавалъ справедливостъ достоинствамъ другихъ, и всегда оказывалъ особенное вниманіе и даже пособіе всѣмъ тѣмъ, кои какимъ либо образомъ способствовали къ распространенію Математическихъ наукъ.

Изъ всѣхъ твореній Эвклида дошедшихъ до насъ славнѣйшее есть, такъ называемыя Начала (*Στοιχεῖα*). Оно названо прости.

Началами, попому что содержитъ въ себѣ основанія, какъ Геометріи, такъ и Арифметики, а именно изъ принадлежащихъ главъ или книгъ, на кои онѣ раздѣляются, восемь (издаваемыхъ теперь) содержитъ основанія Геометріи, а остальные, частію Арифметику, частію приложение оной къ Геометріи. Ни одна изъ классическихъ книгъ, не была столько уважаема просвѣщенными мужами, какъ Начала, или по крайней мѣрѣ восемь оныхъ книгъ. Онѣ были около девятнадцати вѣковъ почти единственнымъ руководствомъ къ изученію Геометріи, и переведены не только на всѣ Европейскіе языки, но и на многіе Азіатскіе, какъ то: на Еврейской, Арабской, Китайской и проч. Но и ни одна можетъ быть книга не поперѣбла столько, какъ Начала отъ издателей и переводчиковъ, которые по видимому старались наперерывъ одинъ передъ другимъ опустошать отъ подлинника, перемѣнять самыя лучшія мѣста, которые не могутъ быть иначе помѣщены и выражены, дополнять оныя предмѣтами ни мало не относящимися къ Началамъ, и находить ошибки, дѣйствительно существующія только въ собственныхъ ихъ понятіяхъ. Дабы въ семъ увѣрились, довольно будетъ разсмотрѣть при

перевода, кои мы уже имѣемъ. (*) Каждый изъ нихъ, а особливо послѣдній, можетъ назваться хорошею Геометрическою книгою; но ни одинъ не можно назвать Эвклидовыми Началами; ибо въ нихъ сдѣлано столько перемѣнъ, прибавленій, и проч., что едва оставлена нѣтъ подлинника.

Настоящее изданіе есть переводъ съ подлинника напечатаннаго въ Оксфордѣ (**), кромѣ весьма не многихъ прибавленій и поправокъ очевидныхъ онаго погрѣшностей. Все прочее оставлено неприкосновеннымъ, чѣмъ бы любителямъ Математическихъ наукъ доставить удовольствіе имѣть Эвклида въ собственной такъ сказать одеждѣ, особливо же поному, что Начала сіи и донынѣ превосходятъ все, что въ семъ родѣ ни писано было, какъ по краткости, ясности и точности, такъ по содержанію предмѣтовъ и удивительному порядку. » Тщешно спарались,

(*) 1. Сапарова, съ Лавинскаго, 1739.

2. Курганова, съ Французскаго, 1769.

3. Суворова и Никипина, съ Греческаго, 1784.

(**) Euclidis, quæ supersunt omnia, Oxoniæ, 1703.

говорить Монпукла, разные Геометры, коимъ не правилось Эвклидово расположе-
 ніе, перемѣнили оное, не ослабивъ си-
 лы доказательствъ. Безсильныя ихъ по-
 кушенія доказали, сколь трудно замѣнить
 порядокъ симъ древнимъ Геометромъ изоб-
 рѣшенный другимъ порядкомъ столько же
 точнымъ. Таково было мнѣніе славнаго Лейб-
 ница, коего знаменитость въ семь дѣлъ
 должна имѣть полный вѣсъ; и Г. Вольфъ,
 объявляющій намъ сіе, признается, что
 онъ напрасно усиливался привести Геоме-
 трическія истины въ совершеннѣйшій
 порядокъ, и что сего сдѣлать не возможно
 не предполагая того что не было еще
 доказано, или не ослабивъ твердости до-
 казательствъ. Англійскіе Геометры, которые
 кажется болѣе другихъ соблюли вкусъ къ
 Геометрической точности, были всегда
 такого мнѣнія, и Эвклидъ имѣетъ между
 ими ревностныхъ защитниковъ въ разныхъ
 искусныхъ Геометрахъ. Въ Англіи менѣе
 расплодилось сего рода сочиненій, которыя
 облегчаютъ путь къ сей наукѣ токмо
 ослабляя оную. Тамъ руководствующая по-
 чти однимъ Эвклидомъ; и однакожь тамъ
 всегда довольно Геометровъ.

« Упрекъ дѣлаемый Эвклиду въ несоблюденіи порядка заспавляетъ меня вошши въ нѣкоторыя разсужденія о томъ порядкѣ, къ коему новыя Авыторы Геометріи столько приспраспны, и о неудобствахъ опъ него произходящихъ. Можно ли называть истиннымъ порядкомъ томъ, который заспавляетъ нарушать естественнѣйшую принадлежностъ Геометріи, я разумѣю сію спрогоснъ доказательствва, копорая одна токмо можнъ заспавитъ разумъ убѣдннсь опвлеченными истиннами. Между нѣмъ нѣтъ ничего обыкновеннѣе у помянутыхъ Авторовъ, какъ нарушеніе Геометрической точности. Имъ непрѣмѣнно пужно было опспунитъ до того, чпобы не пачинаитъ о какомъ либо родѣ проптяженностей, пока не изложено будетъ о другомъ проснѣйшимъ, и они любили лучше доказать въ половину, то естъ вовсе не доказать, нежели нарушитъ мнимыя порядокъ коимъ они ослѣвлены. Мнѣ же кажется нѣкоторымъ родомъ ребячества па привычка, чпобы не говорить, па примѣръ, прежде о треугольникахъ, пока не будетъ все сказано о линіяхъ и объ углахъ..... Я даже не боюсь сказать еще, чпо сей любимый

порядокъ спѣсняетъ разумъ, и приучаетъ къ ходу пропивному тому, чрезъ копорый открываются истинны » (*).

Сіе мнѣніе знамениаго Историка можетъ служить опевѣпомъ на всѣ возраженія пропивъ порядка Эвклидомъ наблюдаемаго, и доказательствомъ, что предметъ Геометріи не пребусъ споль по видимому еспеспвеннаго раздѣленія на Геометрію линий, Геометрію поверхностей и Геометрію тѣлъ, ибо раздѣленіе сіе несомѣстно съ Геометрическимъ порядкомъ, коего сущность состоитъ въ томъ, чтобы предлагаемое ученіе выводитъ изъ несомнительныхъ основаній и посредствомъ умозаключеній убѣждающихъ разумъ.

Сверхъ возраженій пропивъ порядка Началъ вообще, еспь еще нѣкопорыя пропивъ особенныхъ часпей оныхъ. Важнѣйшія изъ нихъ суть слѣдующія :

Первое. Одинадцатая аксіома, говорятъ, не еспь аксіома, а теорема, и слѣдовательно должна бытъ помѣщена между предложеніями, и доказана. Нельзя не согласиться, что аксіома сія тамъ, гдѣ она

(*) Histoire des Mathématiques, par J. F. Montucla, an VII, tom. I, pag. 205.

помѣщена, не столь ясна, или лучше сказанъ не столь убѣдительно, какъ прочія аксіомы. Но еслили замѣтимъ, что она въ первый разъ употреблена Эвклидомъ въ доказательствѣ предложенія 29, и что она послѣ 28 дѣлается почти очевидною: то сіе возраженіе переспааетъ быть важнымъ; пѣтъ паче, что сей теоремы еще никто не доказалъ совершенно удовлетворительно.

Второе. Эвклидъ, говорящъ, нѣкоторымъ предложеніямъ положилъ доказательства не на всѣ случаи, каковы Кн. I, предл. 7, 24, 25, и другія. Болѣе нежели вѣроятно, что Эвклидъ зналъ всѣ случаи, но помѣстилъ оныхъ не хотѣлъ. Ибо для чего бы, на примѣръ, ему помѣщать вторую часть предложенія 5, гдѣ сказано: » а по продолженіи равныхъ прямыхъ и углы подъ основаніемъ взаимно равны, » еслили бы онъ не зналъ, что безъ того не можно доказать вѣселаго случая предложенія 7? Разсмапривая съ нѣкоторымъ вниманіемъ всѣ таковыя предложенія, легко видѣтъ, что Эвклидъ излагалъ и доказывалъ только общіе случаи, и что прочіе могутъ быть доказаны, или на основаніи оныхъ, или посредствомъ предъидущихъ предложеній; и слѣдовательно Эвклидъ

думалъ, что въ Началахъ, доказавъ общіе случаи, нѣтъ нужды доказывать частные. Впрочемъ, что бы сдѣлать въ семь отношеніи настоящее изданіе полнымъ, мы помѣстили сіи случаи въ прибавленіяхъ, оспавляя на волю каждаго счищать оныя или нужными или токмо полезными.

Третье. Теорію величинъ пропорціональных Эвклидомъ предлагаемую находятъ слишкомъ отвлеченною и трудною; и въ семь заключается одна изъ важнѣйшихъ причинъ, почему Начала не имѣютъ столь обширнаго употребленія, какъ по изящности оныхъ ожидать бы должно. Изъ примѣчаній на главныя опредѣленія сей теоріи (*) легко видѣть, что въ ней нѣтъ ничего слишкомъ отвлеченнаго, кромѣ, можетъ быть, опредѣленія 3, которое впрочемъ, какъ самыя строгіе критики признаются, никакого вліянія не имѣетъ на самую теорію, ибо оное (опредѣленіе) даже вовсе оставить можно. Что касается до трудности, то она не раздѣльна съ самымъ предметомъ: предметъ же сія трудность не такъ велика, чтобы начинающимъ преодо-

(*) Смол. стран. 433 — 438.

лѣтъ оную было невозможно. Какъ бы то ни было, но повѣише сочинили Геометрическихъ книгъ почти всѣ оспавили Эвклидову теорію, и замѣнили оную Арифметическою, иѣкоторые частною, то есть однихъ токмо цѣлыхъ чиселъ, а иѣкоторые немногіе общею, въ коей подразумѣваются дроби и такъ называемыя несоизмѣримыя числа. Они принимаютъ, что поелику пропорженности въ общихъ правилахъ сей теоріи имѣютъ съ числами одинакія свойства, (что однакожъ извѣстно изъ Эвклидовой же теоріи); и поелику оныя можно изобразить или предположить изображенными въ числахъ; то и поступаютъ съ ними какъ съ настоящими числами, то есть умножаютъ, дѣлятъ, возвышаютъ, и проч. Безъ сомнѣнія пропорженности и числа какъ величины вообще необходимо имѣютъ одинакія свойства; но поелику Арифметическая теорія пропорцій изслѣдываетъ свойства чиселъ, какъ чиселъ токмо, а не какъ величины, то заключаешь опъ чиселъ ко всѣмъ вообще величинамъ не значить ли заключаешь опъ частнаго къ общему, и слѣдовательно поступать противно здравой логикѣ? припомъ можно ли поступать съ пропорженностями какъ съ числами, не

показавъ, какъ ихъ изображаютъ числами? наконецъ, кѣмъ доказаль, что всякая пропорціонность непременно изобразится какимъ либо числомъ? Изъ сего явствуетъ, что обыкновенная то есть Арифметическая теорія пропорцій совершенно недоспапочна, ибо она нарушаетъ главнѣйшее и необходимое качество Математики, точность. Сему возраженію не подлежитъ теорія Гурьева; но и она успѣваетъ Эвклидовой тѣмъ, что въ сей послѣдней нѣтъ раздѣленія величинъ на соизмѣримыя и несоизмѣримыя, которое влечетъ за собою длинноты и трудноты. Не говоря уже о томъ, что сіе раздѣленіе собственно принадлежитъ къ Арифметикѣ, въ коей Геометрія, какъ говоритъ и самъ Гурьевъ, не имѣетъ никакой нужды (*).

Четвертое. Упрекаютъ также Эвклида въ томъ, что доказательство его на нѣкоторыхъ предложеніяхъ Кн. XI и XII трудны. Правда, что оныя не такъ удобны, какъ на примѣръ, продолженія Кн. I; но сія трудность, какъ и въ теоріи пропорцій, зависитъ отъ сущности предмета, а не отъ порядка или вида доказательства. Въ семъ

(*) Опытъ о усовершенствованіи Елементовъ Геометріи, стр. 175.

легко увѣришься, сравнивъ Эвклидовы доказательства съ обыкновенными. Первые ясны, точны и вообще не подлежатъ никакому возраженію; напропивъ того послѣднѣя утверждаютъ на основаніяхъ, или темныхъ или вовсе несправедливыхъ. Ибо нельзя не называть таковыми пѣ, въ коихъ допускается: что линіи состоятъ изъ точекъ, поверхности изъ линій, а пѣла изъ поверхностей; что около круга описанный многоугольникъ, имѣющій безконечно многія и безконечно малыя стороны, равенъ кругу; что параллельныя линіи въ безконечномъ разстояніи вспрѣчаются, и проч. И если справедливо утверждаютъ Даламбертъ и Гурьевъ, что чѣмъ выводъ спроче, тѣмъ онъ къ уразумѣнію удобнѣе; то должно также согласиться и въ томъ, что не Эвклидовы доказательства труднѣе обыкновенныхъ, но обыкновенныя Эвклидовыхъ.

Прочія возраженія, имѣющія какое либо основаніе, разсмотрѣны въ Прибавленіяхъ; и поному на семь останавливаться болѣе не будемъ.

О примѣчаніяхъ и прибавленіяхъ замѣтити должно, что часть оныхъ помѣщена для пополненія и поясненія Началь, часть для соображенія нѣкопыхъ мнѣній извѣстныхъ Геометровъ и полководцевъ

Эвклида, а часть для удобнѣйшаго уразумѣнїя прочихъ древнихъ Геометровъ, а особливо Архимеда и Аполлонїя; и вообще большая оныхъ часть помѣщены какъ полезныя, а не какъ нужныя. Въ числѣ ихъ не находящіяся нѣкопорыя предложенїя относящїяся къ кругу, цилиндру, конусу и шару, потому что предполагается издать въ слѣдъ за симъ три книги Архимеда, а именно: двѣ о Шарѣ и Цилиндрѣ (*πρὸς Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου*) и одну о Измѣренїи круга (*Κύκλου Μέτρησις*).

Наконецъ въ разсужденїи самаго перевода издатель считалъ за нужное предваришь читателей — Геометровъ, что онъ старался сколько приближаться къ подлиннику, сколько свойство Россійскаго языка позволяло, и что по сему точность выраженїя и порядокъ мыслей предпочитаемы были красотѣ и плавности слога.



ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ.

КНИГА ПЕРВАЯ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Точка есть то, что не имѣетъ никакой части.

2. Линія есть длина безъ ширины.

3. Концы же линіи суть точки. (1).

4. Прямая линія есть та, которая лежитъ равно своими точками. (*Εὐθεὶα γραμμή ἐστὶν ἥτις ἐξ ἰσῶν τοῖς ἐφ' ἐαυτῇ σημείοις κεῖται.*) (2).

5. Поверхность есть то, что только длину и ширину имѣетъ.

6. Концы же или края поверхности суть линіи. (1).

7. Плоская поверхность или плоскость есть та, которая лежитъ равно своими прямыми линіями. (3).

8. Плоскій уголъ есть взаимное наклоненіе двухъ линій, на плоскости встрѣчающихся и не впрямъ лежащихъ.

9. Когда же линіи, содержащія уголъ суть прямыя, то уголъ называется прямолинейнымъ.

10. Когда прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные: то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ; а поставленная прямая называется перпендикулярною или отвѣсною къ той, на которую поставлена.

11. Тупой уголъ есть тотъ, который больше прямого.

12. А острый, который меньше прямого.

13. Предѣлъ есть край или конецъ чего ни есть.

14. Фигура есть то, что содержиися нѣкоторымъ или нѣкоторыми предѣлами.

15. Кругъ есть плоская фигура, содержащая одною линіею называемой окружностію, къ которой всѣ прямыя исходящія отъ одной изъ точекъ, внутрь сей фигуры лежащихъ, взаимно равны.

16. II сѣя точка называется центромъ или средоточіемъ круга. (4).

17. Поперечникъ же круга есть всякая прямая чрезъ центръ проведенная, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностію круга; и таковая прямая дѣлитъ кругъ пополамъ. (5).

18. Полукружіе есть плоская фигура, содержащая поперечникомъ и частию окружности, оппимаемой симъ поперечникомъ.

19. Отрѣзокъ круга есть плоская фигура, содержащая прямою линією и частию окружности.

20. Прямолинейныя фигуры суть тѣ, кои содержатся прямыми линіями.

21. Изъ нихъ, преутольники суть тѣ, кои содержатся тремя.

22. Четыреутольники же, кои четырьмя.

23. А многоутольники, кои содержатся больше нежели четырьмя прямыми линіями.

24. Изъ преутольниковъ, равноспоронный есть тотъ, который имѣетъ всѣ три стороны равныя.

25. А равнобедренный, который имѣетъ двѣ только стороны равныя.

26. Разноспоронный же, который имѣетъ всѣ три стороны неравныя.

27. Сверхъ того изъ прямоугольниковъ же, прямоугольный есть тотъ, который имѣетъ прямой уголъ.

28. А тупоугольный, который имѣетъ тупой уголъ.

29. Остроугольный же, который имѣетъ всѣ при угла острые.

30. Изъ четырехугольниковъ, квадратъ есть тотъ, который и равносторонный и прямоугольный.

31. Продолговатый же прямоугольникъ или просто прямоугольникъ, тотъ, который есть прямоугольный, но не равносторонный.

32. А ромбъ, который есть равносторонный, но не прямоугольный.

33. И ромбоидъ, который, имѣя взаимно равными противоположащія и стороны и углы, не есть ни равносторонный, ни прямоугольный.

34. Прочія же четырехсторонныя фигуры назовемъ шестцѣями.

35. Параллельныя прямая суть тѣ, кои будучи на однойже плоскости, и продолженныя на обѣ стороны безпредѣльно, нигдѣ взаимно не встрѣчаются.

« 36. Параллелограммъ есть четырехуголь-

никъ, коего проптивудлежащія стороны взаимно параллельны. » (6)

ТРЕБОВАНІЯ.

1. Требуется чпобы можно, отъ всякой точки до всякой другой проводить прямую линію.

2. Опредѣленную прямую продолжать впрямъ непрерывно.

3. Изъ всякаго центра, всякимъ разстояніемъ, нисать кругъ. (7)

АКСІОМЫ ИЛИ ОБЩІЯ ПОНЯТІЯ.

1. Равныя тому же, суть и взаимно равны.

2. Еслии къ равнымъ приложены равныя, то и цѣлыя равны.

3. Еслии отъ равныхъ отняты равныя, то и остатки равны.

4. Еслии къ неравнымъ приложены равныя, то и цѣлыя неравны.

5. Еслии отъ неравныхъ отняты равныя, то и остатки неравны.

6. Двукратныя того же, суть взаимно равны.

7. Половины того же, суть взаимно равны.

8. Совмѣщающіяся взаимно, суть взаимно равны.

9. Цѣлое больше своей части.

10. Всѣ прямые углы взаимно равны. (8)

11. Если на двѣ прямая падаетъ прѣпья прямая, и дѣлаетъ углы внутренние и по ту же сторону меньше двухъ прямыхъ; то оныя двѣ прямая линіи, продолженныя безпредѣльно, взаимно встрѣтятся по ту сторону, по которую углы меньше двухъ прямыхъ.

12. Двѣ прямая не заключаютьъ пространства.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

На данной опредѣленной прямой, составишь равносѣторный треугольникъ.

Пусть будетъ АВ данная опредѣленная прямая. Надлежитъ на опредѣленной прямой АВ составить равносѣторный треугольникъ.

Изъ центра А, разстояніемъ АВ, напиши *пр.3. кругъ ВСД*; и еще изъ центра В, разстояніемъ ВА, напиши кругъ АСЕ; и отъ точки С, въ которой круги взаимно пересѣкаются, къ точкамъ А, В пропни прямыя СА, СВ*.

Послику точка А есть центръ круга *опр.18. ВСД, то АС равна АВ*; еще же, послику

точка В есть центръ круга АСЕ, то ВС равна ВА. А доказано, что и СА равна АВ, посему каждая изъ прямыхъ СА, СВ равна АВ. Но равныя помуже, суть и взаимно равны*; по сему и СА равна СВ. Чего ради *акс.г. при СА, АВ, ВС взаимно равны.

Ипакъ треугольникъ АВС есть равно-
сторонный*, и составленъ на данной опре- *опр.24.
дѣленной прямой АВ. Что и сдѣлать над-
лежало.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Приданной точкѣ положитъ прямую рав-
ную данной прямой.

Пусть будетъ А данная точка, и ВС
данная прямая. Надлежитъ при точкѣ А
положитъ прямую равную прямой ВС.

Пропяни отъ точки А до точки В прямую
АВ*, и составь на ней равносторонный *пр.1.
треугольникъ DAB*; и впрямъ съ DA, DB *пр.1.
продолжи прямые AE, BF*; изъ центра В, *пр.2.
разстояніемъ ВС, напиши кругъ CGH*; и *пр.3.
еще изъ центра D, разстояніемъ DG, на-
пиши кругъ GKL.

Поелику точка В есть центръ круга CGH,
то ВС равна BG*. Еще же, поелику точка *опр.15.

Д есть центръ круга GKL , по DL равна DG : но въ нихъ DA равна DB ; посему
 акс.3. оспальная AL равна оспальной BG^ . А до-
 казано, что и BC равна BG ; посему каждая
 изъ прямыхъ AL , BC равна BG . Но равныя
 акс.1. пому же, суть и взаимно равны; посему
 AL равна BC .

Итакъ при данной точкѣ A положена
 прямая AL равная данной прямой BC .
 ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Изъ двухъ данныхъ прямыхъ неравныхъ,
 опъ большей опнять прямую равную
 меньшей.

Пусть будутъ AB , C двѣ данныя прямыя
 неравныя, изъ коихъ AB пусть будетъ боль-
 шая. Надлежитъ опъ большой AB опнять
 прямую равную меньшей C .

При точкѣ A положи прямую AD равную
 пр.2. C^ ; и изъ центра A , разстояціемъ AD , на-
 пр.3. пиши кругъ DEF^ .

Поселику точка A есть центръ круга
 опр.15. DEF , по AE равна AD^ ; но и C равна AD :
 чего ради каждая изъ прямыхъ AE , C равна
 AD ; слѣдственно и AE равна C .

Итакъ, изъ двухъ данныхъ прямыхъ неравныхъ АВ, С, отъ большей АВ опишя прямая АЕ равная меньшей С. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели два прѣугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; и одинъ уголъ равный одному углу, а именно, кои содержащяся сими равными прямыми: то и основаніе будупъ имѣть равное основанію; и прѣугольникъ будепъ равенъ прѣугольнику; и прочіе углы будупъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропівулежащъ равнымъ сторонамъ.

Пуспъ будупъ АВС, DEF два прѣугольника, имѣющіе двѣ стороны АВ, АС равныя двумъ сторонамъ DE, DF, каждую каждой, а именно, АВ равную DE, а АС равную DF; и уголъ ВАС равный углу EDF. Говорю, что и основаніе ВС равно основанію EF; и прѣугольникъ АВС будепъ равенъ прѣугольнику DEF; и прочіе углы будупъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропівулежащъ равнымъ сторонамъ, а именно, уголъ АВС углу DEF, а уголъ АСВ углу DFE.

Ибо, еспли помѣспипъ прѣугольникъ

ABC на преутольникъ DEF; и положить почку A на почку D, а прямую AB на прямую DE: по и почка B совмѣстится съ почкою E, поелику AB равна DE. Когда же AB совмѣстилась съ DE, по и прямая AC совмѣстится съ прямою DF, поелику уголъ BAC равенъ углу EDF: слѣдственно и почка C совмѣстится съ почкою F, поелику еще AC равна DF. Но и B совмѣстилась съ E; слѣдственно основаніе BC совмѣстится съ основаніемъ EF. А буде, по совмѣщеніи B съ E а C съ F, основаніе BC не совмѣстится съ основаніемъ EF: по двѣ прямыя за-

акс.12. ключають проспрансво, чпо не возможно.

Чего ради основаніе BC совмѣстится съ

акс.8. основаніемъ EF, и будетъ равно ему; слѣдственно и цѣлый преутольникъ ABC совмѣстится съ цѣлымъ преутольникомъ DEF и будетъ ему равенъ; и прочіе углы совмѣстятся съ прочими углами и будутъ равны имъ, а именно, уголъ ABC углу DEF, и уголъ ACB углу DFE.

Итакъ, ежели два преутольника имѣють двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; и одинъ уголъ равный одному углу, а именно, кои содержащя сими равными прямыми: по и основаніе будутъ имѣнь

равное основанію; и преугольникъ будетъ равенъ преугольнику; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои прониwулежатъ равнымъ сторонамъ. Чшо и доказанъ надлежало.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е V.

Равнобедренныхъ преугольниковъ углы при основаніи взаимно равны; и еспѣли продолжитъ равныя прямыя, то и углы подъ основаніемъ взаимно равны.

Пусть будетъ ABC равнобедренный преугольникъ, имѣющій сторону AB равную сторонѣ AC ; и пусть впрямъ съ AB , AC будутъ продолжены прямыя BD , CE^* . Говорю, *пр.2. чшо уголъ ABC равенъ углу ACB , а уголъ CBD углу BCE .

Возьми на BD какую ниесъ точку F ; и отъ большей AE отними прямую AG равную меньшей AF^* ; и прошиши прямыя FC , GB . *3.

Послику AF равна AG , а AC равна AB ; то двѣ прямыя FA , AC равны двумъ прямымъ GA , AB , каждая каждой, и содержатъ онѣ уголъ FAG общій: посему* основаніе FC *4. равно основанію GB ; и преугольникъ AFC будетъ равенъ преугольнику AGB ; и прочіе

углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои проптивулежатъ равнымъ сторонамъ, а именно, уголъ ACF углу ABG , а уголъ AFC углу AGB . II. поелику цѣлая AF равна цѣлой AG ; и въ нихъ AB равна AC : посему оспальная BF равна оспальной

акс.3. CG^ . А доказано, что и FC равна GB ; посему двѣ прямыя BF , FC равны двумъ прямымъ CG , GB , каждая каждой; и уголъ BFC равенъ углу GBG ; а основаніе ихъ общее BC : чего ради и треугольникъ BFC будетъ равенъ треугольнику GBG ; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои проптивулежатъ равнымъ сторонамъ; посему уголъ FBC равенъ углу BCB , а уголъ BCF углу CBG . Поелику же цѣлый уголъ ACF , по доказанному равенъ углу ABG ; и въ нихъ уголъ BCF равенъ углу CBG : посему оспальной

акс.3. уголъ ACB равенъ оспальному ABC^ ; и они при основаніи треугольника ABC . А доказано, что и уголъ FBC равенъ углу BCB ; и они сущь подъ основаніемъ:

Итакъ равнобедренныхъ треугольниковъ, и проч. ч. и д. н. (9).

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е VI

Ежели треугольника два угла взаимно равны; то и равнымъ угламъ проптиву-

лежащія спороны будутъ взаимно равны.

Пусть будетъ ABC треугольникъ, имѣющій уголъ BCA равный углу CBA . Говорю, что и спорона AC равна споронѣ AB .

Ибо, буде AB не равна AC ; то одна изъ нихъ большая. Пусть будетъ AB большая. Опъ большей AB опиши BD равную меньшей AC ; и пропни DC . *3.

Поелику DB равна AC , а BC общая; то двѣ прямыя DB , BC равны двумъ прямымъ AC , CB , каждая каждой; и уголъ DBC равенъ углу ACB : посему* основаніе DC равно основанію AB ; и треугольникъ ABC будетъ равенъ треугольнику DCB , меньшему большій, что нелѣпо. Чего ради AB не будетъ неравна AC ; слѣдственно равна. *4.

Итакъ, ежели треугольника, и проч. ч. и д. н. (10).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

На тойже прямой, опъ двухъ различныхъ по ту же спорону лежащихъ точекъ, не могутъ быть соспавлены двумъ прямымъ другія двѣ прямыя равныя, каждая каждой, и окончивающіяся вмѣстѣ съ первыми прямыми.

Ибо, буде возможно, пусть на тойже прямой АВ, отъ двухъ различныхъ по ту же сторону лежащихъ точекъ С и D, будутъ составлены двумъ прямымъ АС, СВ другія двѣ прямыя AD, DB равныя, каждая каждой, и оканчивающіяся въ А, В вмѣстѣ съ первыми прямыми: такъ чпо СА будетъ равна DA, оканчиваясь вмѣстѣ съ нею въ точкѣ А, а СВ равна DB оканчиваясь вмѣстѣ съ нею въ точкѣ В; и просяни CD.

Поелику АС равна AD; по уголь ACD *5. равенъ углу ADC*: посему уголь ADC больше *акс.3. угла DCB*; а посему уголь CDB гораздо больше угла DCB. Еще же, поелику СВ равна DB; по уголь CDB равенъ углу DCB: а по доказанному гораздо больше; чпо невозможно. (11)

Итакъ на тойже прямой, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е VIII.

Ежели два преугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой, и основаніе равное основанію: по и уголь будутъ имѣть равный углу, а именпо, кои содержатся тѣми равными прямыми.

Пусть будутъ ABC, DEF два преугольника, имѣющіе двѣ стороны АВ, АС равныя

двумъ сторонамъ DE , DF , каждую каждой, а именно, AB равную DE , а AC равную DF ; и основаніе BC равное основанію EF . Говорю, что и уголъ BAC равенъ углу EDF .

Ибо, еслии повѣспитиъ преугольникъ ABC на преугольникъ DEF ; и положишиъ почку B на почку E , а прямую BC на прямую EF : то почка C совмѣспитися съ почкою F , поелику BC равна EF . Когда же BC совмѣспилась съ EF ; то и прямая BA , AC совмѣспитися съ прямыми ED , DF . А буде, по совмѣщеніи основанія BC съ основаніемъ EF , спороны BA , AC не совмѣспитися съ споронами ED , DF , но примутъ другое положеніе, какъ EG , GF : то будутъ соспавлены на тойже прямой, опъ двухъ различныхъ по ту же сторону лежащихъ почекъ, двумъ прямымъ другія двѣ прямая равныя, каждая каждой, и оканчивающіяся вмѣспѣ съ первыми прямыми. Но онѣ не могутъ быть соспавлены*: посему, когда *7. основаніе BC совмѣспилось съ основаніемъ EF , не могутъ не совмѣспитися спороны BA , AC съ споронами ED , DF : слѣдственно совмѣспитися. Чего ради и уголъ BAC совмѣспитися съ угломъ EDF и будетъ равенъ ему*.

Итакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Данный прямолинейный уголъ раздѣлить по поламъ.

Исупь будетъ ВАС данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ сей уголъ раздѣлить по поламъ.

Возьми на АВ какую нисетъ почку D; и *3. опъ АС опиши прямую АЕ равную АД*; и пропхни DE; и соспавъ на DE равносторон- *1. ныи треутольникъ DEF*; и пропхни AF. Говорю, что уголъ ВАС раздѣленъ по поламъ прямою AF.

Поелику AD равна АЕ, а AF общая; по двѣ прямыя DA, AF равны двумъ прямымъ EA, AF, каждая каждой; и основаніе DF равно основанію EF: посему уголъ DAF равенъ углу EAF*.

Итакъ данный прямолинейный уголъ ВАС раздѣленъ по поламъ прямою AF. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Данную опредѣленную прямую раздѣлить по поламъ.

Пусть будетъ АВ данная опредѣленная прямая. Надлежитъ прямую АВ раздѣлить по поламъ.

Соспавъ на ней равноспоронный преутольникъ АВС*; и раздѣли уголъ АСВ по *1. поламъ прямою СD*. Говорю, что прямая *9. АВ раздѣлена по поламъ въ почкѣ D.

Поелику АС равна СВ, а СD общая; то двѣ прямыя АС, СD равны двумъ прямымъ ВС, СD, каждая каждой; и уголъ АСD равенъ углу ВСD: посему основаніе AD равно основанію BD*.

*4.

Итакъ данная опредѣленная прямая АВ раздѣлена по поламъ въ почкѣ D. ч. и с. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е Х I.

Къ данной прямой, опъ данной на ней почки, проведши подъ прямыми углами прямую линію.

Пусть будетъ АВ данная прямая, а С данная на ней почка. Надлежитъ опъ почки С прямой АВ, проведши подъ прямыми къ ней углами, прямую линію.

Возьми на АС какую ниесъ почку D; и положи прямую СЕ равную СD*; и соспавъ *3. на DE равноспоронный преутольникъ FDE*; *1. и процяни FC. Говорю, что къ данной

прямой АВ, опъ данной на ней точки С, проведена подъ прямыми углами прямая линія СF.

Поелику CD равна CE, а CF общая; по двѣ прямыя DC, CF равны двумъ прямымъ ЕС, CF, каждая каждой; и основаніе DF равно основанію EF: по сему уголъ DCF равенъ *8. углу ECF*; и они суть смѣжные. Когда же прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаесть смѣжные углы взаимно равные; по каждый изъ равныхъ угловъ называется *опр. 10. прямымъ*: посему каждый изъ угловъ DCF, ECF есть прямой.

Итакъ, къ данной прямой АВ, опъ данной на ней точки С, проведена подъ прямыми углами прямая линія FC. ч. и с. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XIII.

Къ данной неопредѣленной прямой, опъ данной виѣ ея точки, провести перпендикулярную прямую линію.

Пусть будетъ АВ данная неопредѣленная прямая, а С данная виѣ ея точка. Надлежитъ къ данной неопредѣленной прямой АВ, опъ данной виѣ ея точки С, провести перпендикулярную прямую линію.

Возьми, по другую сторону прямой AB , какую ни есть точку D ; и изъ центра C , разстояніемъ CD , напиши кругъ EFG^* ; и *пр.3. раздѣли прямую EG по поламъ въ точкѣ H ; и пропяти CG , CH , CE . Говорю, что *10. къ данной неопредѣленной прямой AB , опъ данной внѣ ея точки C , проведена перпендикулярная CH .

Послику GH равна HE , а HC общая; по двѣ прямыя GH , HC равны двумъ прямымъ HE , HC , каждая каждой; и основаніе CG равно основанію CE : посему уголъ CHG равенъ углу $ЕНС^*$; и они суть смѣжные.*8. Когда же прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равныя; то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ, а поставленная прямая называется перпендикулярною къ той на которую поставлена*:

*опр.10.

Итакъ на данную неопредѣленную прямую AB , опъ данной внѣ ея точки C , проведена перпендикулярная CH . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Какъ бы прямая, на прямую поставленная, углы ни дѣлала; она сдѣлаетъ или два прямые, или равные двумъ прямымъ.

* *

Пусть прямая АВ, на прямую СD опущенная, образует углы СВА, АВD. Говорю, что углы СВА, АВD или суть два прямые; или равны двумъ прямымъ.

Ибо, еслили уголъ СВА равенъ углу
опр. 10. АВD; то они суть прямые. Если же
нѣтъ; то проводи отъ точки В, подъ

11. прямыми углами къ СD, прямую ВЕ. Посему
углы СВЕ, ЕВД суть два прямые. И поелику
уголъ СВЕ равенъ двумъ угламъ СВА, АВЕ;
придай обще уголъ ЕВД: посему углы СВЕ,

акс. 2. ЕВД равны тремъ СВА, АВЕ, ЕВД. Еще
же, поелику уголъ АВD равенъ двумъ угламъ
АВЕ, ЕВД; придай обще уголъ АВС: посему
углы СВА, АВD равны тремъ СВА, АВЕ, ЕВД.
А доказано, что и углы СВЕ, ЕВД равны
тѣмъ же тремъ угламъ; а равныя пому же

акс. 1. суть и взаимно равны: посему углы СВА,
АВД равны угламъ СВЕ, ЕВД. Но углы СВЕ,
ЕВД суть два прямые: чего ради углы
СВА, АВD равны двумъ прямымъ.

Итакъ, какъ бы прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Ежели при какой нисетъ прямой, и при
точкѣ на ней, двѣ прямыя, не лежащія по

и ту же сторону, дѣлающъ смѣжные углы равные двумъ прямымъ; по сѣи двѣ прямыя будутъ взаимно впрямъ.

Пусть при какой нисетъ прямой АВ, и при почкѣ на ней В, двѣ прямыя ВС, ВD, не лежащія по ту же сторону, дѣлающъ смѣжные углы АВС, АВD равные двумъ прямымъ. Говорю, что ВD впрямъ съ СВ.

Ибо, буде ВD не впрямъ съ ВС; по пусть ВЕ будетъ впрямъ съ ВС.

Послику прямая АВ послѣдована на прямую СВЕ; по углы СВА, АВЕ равны двумъ прямымъ*. Но и углы СВА, АВD равны *13. двумъ прямымъ; посему углы СВА, АВЕ равны угламъ СВА, АВD. Опними обще уголъ СВА; посему остальной уголъ АВЕ равенъ остальному АВD, меньшій большему; что невозможно. Чего ради ВЕ не впрямъ съ ВС. Подобно докажемъ, что ни другая какая нисетъ прямая, кромѣ ВD: посему ВD есть впрямъ съ ВС.

Итакъ, ежели при какой нисетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели двѣ прямыя взаимно пресѣкутся; то сдѣлають проптивуположныя углы взаимно равныя.

Пусть двѣ прямыя AB , CD взаимно пресѣкутся въ точкѣ E . Говорю, что уголь AEC равенъ углу DEB , а уголь CEB углу AED .

Поелику прямая AE , поставленная на прямую CD , дѣлаетъ углы CEA , AED ; то
 13. углы CEA , AED равны двумъ прямымъ.
 Еще же, поелику прямая DE , поставленная на прямую AB , дѣлаетъ углы AED , DEB ; то углы AED , DEB равны двумъ прямымъ. А доказано, что и углы CEA , AED равны двумъ прямымъ; посему углы CEA , AED равны угламъ AED , DEB *. Отними обще уголь AED ; посему остальной уголь CEA
 *акс. 1. и 10.
 *акс. 2. равенъ остальному DEB *. Подобно докажется, что и уголь AED равенъ углу CEB .

Итакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Откуда явствуется, что еспли сколько ниесъ прямыхъ взаимно пресѣкутся; то сдѣлають около сѣченія углы равные чепыремъ прямыхъ. (12).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Всякаго треугольника, ежели одна изъ споронъ продолжена, ви́шній уголъ больше каждаго изъ внутреннихъ пропивулежащихъ угловъ.

Пусть будетъ ABC треугольникъ; и пусть будетъ продолжена одна его спорона BC къ D . Говорю, что ви́шній уголъ ACD больше каждаго изъ внутреннихъ пропивулежащихъ угловъ BAC , CBA .

Раздѣли AC по поламъ въ E^* ; и про-^{*10}паянувъ BE продолжи оную къ F ; и положи прямую EF равную BE^* ; и пропаяни FC ; и^{*3} продолжи AC къ G .

Поелику AE равна EC , а BE равна EF ; по двѣ прямыя AE , EB равны двумъ прямымъ CE , EF , каждая каждой; и уголъ BEA равенъ углу CEF , ибо сущъ пропивуположные*:^{*15} посему* основаніе AB равно основанію FC ; и^{*4} треугольникъ ABE равенъ треугольнику FEC ; и прочіе углы равны прочимъ угламъ каждый каждому, кои пропивулежатъ равнымъ споронамъ; посему уголъ BAE равенъ углу ECF . Но уголъ ECD больше угла ECF ; посему уголъ ACD больше угла BAE . Подобно же, раздѣливъ BC по поламъ, докажется, что

и уголъ BCG , то есть ACD больше и угла CBA .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Всякаго преугольника два угла, всячески перебранные, меньше двухъ прямыхъ.

Пусть будетъ ABC преугольникъ. Говорю, что преугольника ABC , два угла всячески перебранные, меньше двухъ прямыхъ.

Продолжи BC къ D .

Поелику преугольника ABC уголъ ACD есть внѣшній; то онъ больше внутрен-

*16. наго проптивулежащаго угла ABC *. Придай обще уголъ ACB ; посему углы ACD , ACB

*акс. 4. больше угловъ ABC , BCA *. Но углы ACD ,

13. ACB равны двумъ прямымъ; посему углы ABC , BCA меньше двухъ прямыхъ. Подобно докажемъ, что и углы BAC , ACB меньше двухъ прямыхъ; и также углы CAB , ABC .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Всякаго преугольника большая сторона проптивулежитъ большему углу.

Пусть будетъ ABC преугольникъ, имѣющій сторону AC больше стороны AB .

Говорю, что и угол ABC больше угла BCA .

Поелику AC больше AB ; то положи AD равную AB^* ; и соедини BD . *3.

И поелику треугольника BDC угол ADB есть внешний; то онъ больше внутреннего прилежащаго угла DCB^* . А уголъ *16. ADB равенъ углу ABD^* , ибо сторона AB^* равна стороне AD ; посему и уголъ ABD больше угла ACB : чего ради уголъ ABC гораздо больше угла ACB .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Всякаго треугольника большему углу прилежащихъ большая сторона.

Пусть будетъ ABC треугольникъ, имѣющій уголъ ABC больше угла BCA . Говорю, что и сторона AC больше стороны AB .

Ибо, буде не такъ; то AC или равна AB , или меньше ея. Но AC не равна AB ; ибо уголъ ABC былъ бы равенъ углу BCA^* : а *5. онъ не равенъ; посему AC не равна AB . И AC не меньше AB ; ибо уголъ ABC былъ бы меньше угла BCA^* : а онъ не меньше; посему *18. AC не меньше AB . А доказано, что и ни равна: чего ради AC больше AB .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Всякаго преугольника двѣ спороны, всячески перебранныя, больше остальной.

Пусть будетъ ABC преугольникъ. Говорю, что преугольника ABC двѣ спороны, всячески перебранныя, больше остальной: а именно, BA , AC больше BC ; а AB , BC больше AC ; и BC , CA больше AB .

Продолжи BA къ точкѣ D ; и положи AD равную AC ; и пропями DC .

Поелику DA равна AC ; то уголъ ADC *5. равенъ углу ACD *: но уголъ BCD больше *акс.9. угла ACD *; посему уголъ BCD больше и угла ADC . И поелику BDC есть преугольникъ, имѣющій уголъ BCD большій угла CDB ; а большему углу пропивулежитъ *19. большая спорона*: посему DB больше BC . Но DB равна AB , AC : чего ради BA , AC больше BC . Подобно докажемъ, что и AB , BC больше CA ; а BC , CA больше AB .

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Ежели на одной изъ споронъ преугольника, опъ концовъ ея, будутъ составле-

ты внутри его двѣ прямыя: по составлен-
ныя прямыя будутъ меньше прочихъ двухъ
сторонъ треугольника, по большій уголъ
содержать будутъ.

Треугольника $\triangle ABC$ на одной изъ сторонъ
 BC , пусть опъ концовъ ея B, C , будутъ
составлены внутри его двѣ прямыя BD, DC .
Говорю, что BD, DC суть меньше прочихъ
треугольника двухъ сторонъ BA, AC ; по
содержать уголъ BDC большій угла BAC .

Продолжи BD къ E .

Поелику всякаго треугольника двѣ спо-
роны больше остальной*; по треугольника *20.
 $\triangle BE$ двѣ стороны AB, AE больше BE . Придай
обще EC ; посему BA, AC больше BE, EC *. *акс. 4.
Ещеже, поелику треугольника $\triangle CED$ двѣ спо-
роны CE, ED больше CD ; придай обще
 DB : посему CE, EB больше CD, DB . А
доказано, что BA, AC больше самихъ $BE,$
 EC ; чего ради BA, AC гораздо больше BD, DC .

Ещеже, поелику всякаго треугольника
внѣшній уголъ больше внутренняго пропиви-
лежащаго*; по треугольника $\triangle CDE$ внѣшній *16.
уголъ BDC больше угла CED . Поэтому же
и треугольника $\triangle BE$ внѣшній уголъ CEB
больше угла BAC . А доказано, что уголъ

BDC больше угла CEB : чего ради угол BDC гораздо больше угла BAC .

Итакъ, ежели на одной, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Изъ прехъ прямыхъ, равныхъ тремъ даннымъ прямымъ, составишь треугольникъ. Но надлежитъ двумъ изъ пѣхъ прямыхъ, всячески перебранныхъ, быть больше остальной.

Пусть будутъ A, B, C данныя три прямая, изъ коихъ двѣ, всячески перебранныя, пусть будутъ больше остальной: а именно, A, B больше C ; а A, C больше B ; и еще B, C больше A . Надлежитъ изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ A, B, C , составишь треугольникъ.

Изложи какую ниесъ прямую DE , опредѣленную при D , но неопредѣленную при E ; положи прямую DF равную A , прямую FG равную B , и прямую GH равную C ; изъ центра F , разстояніемъ FD , напиши кругъ DKL ; и еще изъ центра G , разстояніемъ GH , напиши кругъ KLH ; и пропни KF, KG . Говорю, что изъ прехъ прямыхъ, равныхъ прямымъ A, B, C , составленъ треугольникъ KFG .

Поелику почка F есть центръ круга DKL ; по FK равна FD^* : но и A равна FD ; посему *опр.15. FK равна A . Ещеже, поелику почка G есть центръ круга LKH ; по GK равна GH : но и C равна GH ; посему GK равна C . А FG равна B : чего ради три прямыя KF , FG , GK равны тремъ A , B , C .

Итакъ, изъ трехъ прямыхъ KF , FG , GK , равныхъ даннымъ прямымъ A , B , C , составленъ треугольникъ KFG . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

При данной прямой, и при данной на ней точкѣ, составишь прямолинейный уголъ, равный данному прямолинейному углу.

Пусть будутъ AB данная прямая, и A данная на ней почка, и DCE данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ при прямой AB , и при точкѣ на ней A , составишь прямолинейный уголъ, равный данному прямолинейному углу DCE .

Возьми на каждой изъ прямыхъ CD , CE какія нисеть почки D , E ; и пропни DE ; и изъ трехъ прямыхъ, равныхъ тремъ прямымъ CD , DE , CE , составь треугольникъ AFG^* , *22. такъ чпобъ CD была равна AF , а CE равна AG , и DE равна FG .

Послику двѣ прямыя DC , CE равны двумъ прямымъ FA , AG , каждая каждой; и основаніе DE равно основанію FG : по уголь DCE *3. равенъ углу FAG .*.

Итакъ, при данной прямой AB , и при данной на ней точкѣ A , соспавленъ прямолинейный уголь FAG , равный данному прямолинейному углу DCE . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Если два преугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; а уголь одного больше угла другаго, а именно, кои содержаея сими равными прямыми: то и основаніе одного будетъ больше основанія другаго.

Пусть будутъ ABC , DEF два преугольника, имѣющіе двѣ стороны AB , AC равныя двумъ сторонамъ DE , DF , каждую каждой; а именно, AB равную DE , а AC равную DF ; а уголь BAC больше угла EDF . Говорю, что и основаніе BC больше основанія EF .

Послику уголь BAC больше угла EDF : то соспавъ при прямой DE , и при точкѣ на ней D , уголь EDG равный углу BAC *; и положи равную кѣпорой ли естъ изъ прямыхъ *3. AC , DF прямую DG *; и пропхни GE , FG .

Поелику AB равна DE , и AC равна DG ; по двѣ прямыя BA , AC равны двумъ прямымъ ED , DG , каждая каждой; и уголь BAC равенъ углу EDG : посему основаніе BC равно основанію EG^* . Еще же, поелику DF равна 4 . DG ; по уголь DFG равенъ углу DGF^* : по-⁵. сему уголь DFG больше угла EGF ; а уголь EFG и гораздо больше угла EGF . И поелику треугольника EFG уголь EFG больше угла EGF ; а большаго углу прошивулежишь большая сторона^{*}: посему сторона EG больше ¹⁹. стороны EF . Но EG равна BC ; чего ради и BC больше EF .

Итакъ, ежели двѣ стороны, и проч. ч. и д. н. (15).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели два треугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; а основаніе одного больше основанія друга: то и уголь одного будетъ больше угла другаго, а именно, кои содержатся пѣтми равными прямыми.

Пусть будутъ ABC , DEF два треугольника, имѣющіе двѣ стороны AB , AC равныя двумъ сторонамъ DE , DF , каждую каждой; а именно, AB равную DE , а AC равную

DF; а основаніе BC пустьъ будетъ больше основанія EF. Говорю, что и уголъ BAC больше угла EDF.

Ибо, буде не такъ; то онъ или равенъ ему, или меньше. Но уголъ BAC не равенъ углу EDF; ибо основаніе BC было бы равно *4. основанію EF*: а оно не равно; посему уголъ BAC не равенъ углу EDF. И не меньше его; ибо основаніе BC было бы меньше основанія *24. EF*: а оно не меньше; посему уголъ BAC ни меньше угла EDF. Доказано же, что и ни равенъ: чего ради уголъ BAC больше угла EDF.

Итакъ, ежели двѣ спороны, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Ежели два преугольника имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной споронѣ, а именно, кои прилежають равнымъ угламъ, или коимъ противополежають равные углы: то и прочія спороны будутъ имѣть равныя прочимъ споронамъ, каждую каждой; и оспальной уголъ равный оспальному углу.

Пусть будутъ ABC, DEF два преугольника, имѣющіе два угла ABC, BCA равные двумъ угламъ DEF, EFD, каждый каждому;

а именно, уголъ ABC равный углу DEF , а уголъ BCA углу EFD ; и одну сторону пущь имѣющъ равную одной сторонѣ: и во первыхъ, кои прилежащъ равнымъ угламъ, по есть, сторону BC равную EF . Говорю, что и прочія стороны будущъ имѣтъ равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой, а именно, AB равную DE , а AC равную DF , и остальной уголъ BAC равный остальному углу EDF .

Ибо, буде AB не равна DE ; то одна изъ нихъ большая. Пущь будетъ AB большая. Положи прямую BG равную DE ; и пропни*³. ни GC .

Посекику BG равна DE , а BC равна EF ; по двѣ прямыя BG , BC равны двумъ прямымъ DE , EF , каждая каждой; и уголъ GBC равенъ углу DEF : посему* основаніе GC равно основанію DF ; и преугольникъ GBC равенъ преугольнику DEF ; и прочіе углы будущъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивулежащъ равнымъ сторонамъ, а посему уголъ BCG равенъ углу DFE . Но, по положенію, уголъ DFE равенъ углу BCA : посему и уголъ BCG равенъ углу BCA , меньшій большему; что невозможно. Чего ради AB не равна DE ; слѣдственно равна:

Но и BC равна EF ; посему двѣ прямыя AB , BC равны двумъ прямымъ DE , EF , каждая каждой; и уголь ABC равенъ углу DEF : а
 4. посему основаніе AC равно основанію DF ; и
 оспальной уголь BAC равенъ оспальному EDF .

Но еще пусть будутъ спороны, пропивулежащія равнымъ угламъ, равныя; а именно, пусть будетъ AB равна DE . Говорю еще, что и прочія спороны будутъ равны прочимъ споронамъ, каждая каждой, а именно, AC равна DF , а BC равна EF ; и оспальной уголь BAC будетъ равенъ оспальному углу EDF .

Ибо, буде BC не равна EF ; то одна изъ нихъ большая. Пусть, буде возможно, BC будетъ большая. Положи прямую BH равную EF ; и протяни AH .

Поелику BH равна EF , а AB равна DE ; то двѣ прямыя AB , BH равны двумъ прямымъ DE , EF , каждая каждой; и содержатъ равные
 4. углы: посему основаніе AH равно основанію DF ; и треугольникъ ABH равенъ треугольнику DEF ; и прочіе углы равны будутъ прочимъ угламъ, каждый каждому, кои пропивулежатъ равнымъ споронамъ; а посему уголь BHA равенъ углу EFD . Но уголь EFD

равенъ углу BCA : посему и уголъ BHA равенъ углу BCA ; по есть, итреугольника AHC уголъ виѣшній BHA равенъ внутреннему пропиви-лежащему BCA ; что невозможно*. Чего ради *16. BC не неравна EF ; слѣдственно равна: Но и AB равна DE ; посему двѣ прямыя AB , BC равны двумъ прямымъ DE , EF , каждая каждой; и содержащъ равные углы: а посему* *4. основаніе AC равно основанію DF ; и итреугольникъ ABC равенъ итреугольнику DEF ; и оспальной уголъ BAC равенъ оспальнойному EDF .

Итакъ, ежели два угла, и проч. ч. и д: Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Ежели на двѣ прямыя падаетъ третья прямая и дѣлаетъ наось лежащіе углы взаимно равные; то оныя прямыя будутъ параллельны.

Пусть на двѣ прямыя AB , CD падаетъ третья прямая EF , и дѣлаетъ наось лежащіе углы AEF , EFD взаимно равные. Говорю, что прямая AB параллельна къ CD .

Ибо, буде не такъ; то AB , CD продолженные встрѣтятся, или по ту сторону гдѣ BD , или по ту сторону гдѣ AC . Продолжи оныя, и пусть встрѣтятся по ту сторону гдѣ BD , въ точкѣ G .

Треугольника GEF внѣшнѣйшій уголъ AEF
 *16. больше внугреннаго пропивиулежащаго EFG *:

но и равенъ ему; что невозможно. Посему AB , CD , продолженныя, не воспрѣпятся по ту сторону, гдѣ BD . Подобно докажется, что и ни по ту сторону, гдѣ AC . А ни по которую сторону не воспрѣчающіяся прямая

опр.35. сущѣ параллельныя: чего ради AB параллельна къ CD .

Итакъ, ежели на двѣ прямая, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XXVIII.

Ежели на двѣ прямая падаетъ прѣпья прямая и дѣлаетъ внѣшнѣйшій уголъ равный внугреннему пропивиулежащему и по ту же сторону; или дѣлаетъ внугренныя углы и по ту же сторону, равныя двумъ прямымъ: то оныя прямая будутъ взаимно параллельны.

Пустъ на двѣ прямая AB , CD падаетъ прѣпья прямая EF , и дѣлаетъ внѣшнѣйшій уголъ EGB равный внугреннему пропивиулежащему и по ту же сторону углу GHD ; или пустъ дѣлаетъ внугренныя, и по ту же сторону, углы BGH , GHD равныя двумъ прямымъ. Говорю, что AB параллельна къ CD .

Послику уголъ EGB равенъ углу GHD ; по
 *15. уголъ BGE равенъ и углу AGH *: по сему уголъ

$\angle A\Gamma H$ равенъ углу $\angle GHD$; и они суть накосъ лежащiе : чего ради прямая AB параллельна къ CD *. *27.

Еще же, поелику углы $B\Gamma H$, $\angle GHD$ равны двумъ прямымъ; а и углы $A\Gamma H$, $B\Gamma H$ равны двумъ прямымъ*: по сему углы $A\Gamma H$, $B\Gamma H$ *13. равны угламъ $B\Gamma H$, $\angle GHD$. Опними обще уголъ $B\Gamma H$; посему оспальной уголъ $A\Gamma H$ равенъ оспальному $\angle GHD$; и они суть накосъ лежащiе. Чего ради прямая AB параллельна къ CD *. *27.

Ипакъ, ежели на двѣ прямыя, и пр. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н I Е XXIX.

Ежели на параллельныя прямыя падаетъ прямая: то она дѣлаетъ накосъ лежащiе углы взаимно равныя; и вѣшнiй уголъ равный внипренному пропивулежащему и по ту же сторону; и внипренные углы и по ту же сторону равныя двумъ прямымъ.

Пусть на параллельныя прямыя AB , CD падаетъ прямая EF . Говорю, что она дѣлаетъ накосъ лежащiе углы $A\Gamma H$, $\angle GHD$ взаимно равныя; и вѣшнiй уголъ $B\Gamma E$ равный внипренному пропивулежащему, и по ту же сторону, углу $\angle GHD$; и внипренные и по ту же сторону, углы $B\Gamma H$, $\angle GHD$ равныя двумъ прямымъ.

Ибо, буде уголъ AGH не равенъ углу GHD ; то одинъ изъ нихъ большій. Пусть будетъ AGH большій.

И поскольку уголъ AGH больше угла GHD ; придай обще уголъ BGH : посему углы AGH , BGH больше угловъ BGH , GHD . Но углы *13. AGH , BGH равны двумъ прямымъ*; посему углы BGH , GHD меньше двухъ прямыхъ. А прямая, неопредѣленно продолженная со стороны угловъ, кои меньше двухъ прямыхъ, *акс. 11. вѣспрѣчаются*; посему прямая AB , CD , неопредѣленно продолженная вѣспрѣтятся. Но онѣ не вѣспрѣчаются; ибо предполагаются параллельными: чего ради уголъ AGH не равенъ углу GHD ; слѣдственно равенъ.

*15. Но уголъ AGH равенъ углу EGB *; чего ради уголъ EGB равенъ углу GHD .

Придай обще уголъ BGH ; по сему углы EGB , BGH равны угламъ BGH , GHD . Но *13. углы EGB , BGH равны двумъ прямымъ*; чего ради и углы BGH , GHD равны двумъ прямымъ.

Итакъ, ежели на параллельныя, и проч. ч. и д. н. (16).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Прямая, параллельная къ тойже прямой, суть и взаимно параллельны.

Пусть будетъ каждая изъ прямыхъ АВ, СD параллельна къ прямой EF. Говорю, что и АВ параллельна къ СD.

Ибо, пусть на оныя прямыя, падаетъ прямая GK.

Поелику на параллельныя прямыя АВ, EF падаетъ прямая GK; то уголъ AGH равенъ углу GHF*. Еще же, поелику на параллельныя прямыя EF, CD падаетъ прямая GK; то уголъ GHF равенъ углу GKD*. А доказано, *29. что уголъ AGK равенъ углу GHF: посему уголъ AGK равенъ углу GKD; и они суть на-
косъ лежащіе. Чего ради прямая АВ парал-
лельна къ СD*. *27.

Итакъ прямыя параллельныя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Чрезъ данную точку проведи прямую, параллельную къ данной прямой.

Пусть будетъ А данная точка, а ВС дан-
ная прямая. Надлежитъ чрезъ точку А
провести прямую, параллельную къ пря-
мой ВС.

Возьми на ВС какую ни есть точку D, и
протяни AD; и при прямой AD, и при точ-
кѣ на ней А, составь уголъ DAE равный углу
ADC*; и продолжи впрямъ съ EA прямую AF. *23.

Поелику на двѣ прямыя BC , EF , падаетъ перпендикулярная прямая AD , и дѣлаются накосы лежащія углы EAD , ADC взаимно равны; по EF *27. параллельна къ BC .*

Итакъ чрезъ данную точку A проведена прямая EAF , параллельная къ данной прямой BC . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Всякаго преугольника, ежели одна изъ сторонъ продолжена, внѣшній уголъ равенъ двумъ внутреннимъ противоположащимъ. И при угла преугольника внутренние равны двумъ прямымъ.

Пусть будетъ преугольникъ ABC ; и одна его сторона BC пусть будетъ продолжена къ D . Говорю, что внѣшній уголъ ACD равенъ двумъ внутреннимъ противоположащимъ угламъ CAB , ABC ; и преугольника внутренние при угла ABC , BCA , CAB равны двумъ прямымъ.

Чрезъ точку C проводи, параллельную къ *31. AB , прямую CE .*

Поелику AB параллельна къ CE , и на нихъ падаетъ прямая AC ; по накосы лежащія углы *29. BAC , ACE взаимно равны*. Еще же, поелику AB параллельна къ CE , и на нихъ падаетъ прямая BD ; по внѣшній уголъ ECD равенъ

внутреннему противолежащему углу ABC^* . *29.
А доказано, что и угол ACE равен углу BAC ; чего ради цѣлыми выѣшый угол ACD равен двумъ внутреннимъ противолежащимъ угламъ BAC , ABC .

Придай обще уголъ ACB ; посему углы ACD , ACB равны прему угламъ ABC , BCA ; CAB . Но углы ACD , ACB равны двумъ прямымъ*; чего ради и углы ACB , CBA , CAB равны двумъ прямымъ.

Инакъ всякаго, и проч. ч. и д. н. (17).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Прямая, соединяющія концы равныхъ и параллельныхъ прямыхъ съ тойже стороны, суть и сами равны и параллельны.

Пусть будутъ AB , CD равныя и параллельныя прямая; и пусть соединяютъ концы ихъ съ тойже стороны прямая AC , BD . Говорю, что и прямая AC , BD суть равны и параллельны.

Пропяни BC .

Послику AB параллельна къ CD , и на нихъ падаетъ BC ; то накосъ лежащіе углы ABC , BCD взаимно равны*. И послику AB равна *29. CD , а BC общая; то двѣ прямая AB , BC равны двумъ прямымъ CD , BC ; и уголъ ABC равенъ углу BCD : посему* основаніе AC *4.

равно основанію BD ; и преугольникъ ABC равенъ преугольнику BCD ; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои проптивуглежатъ равнымъ сторонамъ; посему уголъ ACB равенъ углу CBD . И поелику на двѣ прямыя AC , BD падаетъ третья прямая BC , и дѣлаетъ накосъ лежащіе углы ACB , CBD взаимно равные; по AC параллельна къ BD *. А доказано что и ей равна: Итакъ, прямыя соединяющія, и пр. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XXXIV.

Параллелограммовъ какъ проптивуглежащія стороны, такъ и проптивуглежащіе углы, суть взаимно равны: и поперечникъ (*διάμετρος*) дѣлитъ сія фигуры по поламъ.

Пусть будетъ $ACDB$ параллелограммъ, а BC его поперечникъ. Говорю, что параллелограмма $ACDB$, какъ проптивуглежащія стороны, такъ и проптивуглежащіе углы, суть взаимно равны; и поперечникъ BC дѣлитъ оный по поламъ.

*опр.36. Поелику AB параллельна къ CD *, и на нихъ падаетъ прямая BC ; по накосъ лежащіе углы

29. ABC , BCD суть взаимно равны. Еще же, поелику AC параллельна къ BD , и на нихъ падаетъ BC ; по накосъ лежащіе углы ACB ,

$\triangle CBD$ суть взаимно равны. Ипакъ два треугольника ABC , BCD имѣютъ два угла ABC , BCA равные двумъ угламъ BCD , CBD , каждый каждому; и одну сторону равную одной сторонѣ, кои прилежають равнымъ угламъ, то естъ, общую имъ сторону BC : посему*²⁶ и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой; и oppositeной уголъ равный oppositeному углу; посему сторона AB равна CD , а AC равна BD , и уголъ BAC равенъ углу BDC . И поелику уголъ ABC равенъ углу BCD , а уголъ CBD углу ACB ; посему и цѣлый уголъ ABD равенъ цѣлому углу ACD . А доказано, что уголъ BAC равенъ углу BDC :

Ипакъ параллелограммовъ какъ противоположащія стороны, такъ и противоположащіе углы, суть взаимно равны.

Говорю же, что поперечникъ дѣлитъ сїи фигуры по поламъ. Поелику AB равна CD , а BC общая; то двѣ прямыя AB , BC равны двумъ прямымъ DC , CB , каждая каждой; и уголъ ABC равенъ углу BCD : посему* и*⁴ основаніе AC равно основанію BD ; и треугольникъ ABC равенъ треугольнику BCD .

Ипакъ поперечникъ BC дѣлитъ параллелограммъ $ACDB$ по поламъ. ч. и д. н. (18).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Параллелограммы, споящіе на томъже основаніи и между шѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ параллелограммы $ABCD$, $EBCF$, споящіе на томъже основаніи BC , и между шѣмиже параллельными AF , BC . Говорю, что параллелограммъ $ABCD$ равенъ параллелограмму $EBCF$.

Поелику $ABCD$ есть параллелограммъ, то
 *34. AD равна BC *; потому же и EF равна BC :
 слѣдовательно AD равна EF . И DE имъ есть
 общая: чего ради и цѣлая AE равна цѣлой
 DF . А поелику и AB равна DC ; то двѣ пря-
 мыя EA , AB равны двумъ прямымъ FD , DC ,
 каждая каждой; и уголъ FDC равенъ углу
 29. EAB , внѣшнѣй внупреннему: поему осно-
 ваніе EB равно основанію FC ; и прѣуголь-
 никъ EAB равенъ прѣугольнику FDC . Опни-
 ми обще прѣугольникъ DGE ; поему оспаль-
 ная прапещія $ABGD$ равна оспальной прапещіи
 $EGCF$. Придай обще прѣугольникъ GBC ;
 поему цѣлой параллелограммъ $ABCD$ ра-
 венъ цѣлому параллелограмму $EBCF$.

Итакъ параллелограммы, споящіе, и проч.
 ч. и д. н. (19).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Параллелограммы, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и между тѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ параллелограммы $ABCD$, $EFGH$, стоящіе на равныхъ основаніяхъ BC , FG , и между тѣмиже параллельными $АН$, $ВG$. Говорю, что параллелограммъ $ABCD$ равенъ параллелограмму $EFGH$.

Протяни BE , CH .

Посему BC равна FG^* , а и EH равна FG ; *34. посему и BC равна EH . Онѣ же и параллельны; и соединяющъ концы ихъ прямыя BE , CH . Но прямыя, соединяющія концы равныхъ и параллельныхъ прямыхъ съ тойже стороны, суть и сами равны и параллельны*; по- *33. сему EB , CH суть равны и параллельны. А посему $BCHE$ есть параллелограммъ*: и онъ равенъ параллелограмму $ABCD^*$; ибо спойми *35. на томъже съ нимъ основаніи BC , и между тѣмиже параллельными BC , $АН$. Поэтому же и параллелограммъ $EFGH$ равенъ оному же параллелограмму $EBCH$. Чего ради параллелограммъ $ABCD$ равенъ параллелограмму $EFGH$.

Итакъ параллелограммы, стоящіе и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Треугольники, стоящіе на томъ же основаніи и между тѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ треугольники ABC , DBC , стоящіе на томъ же основаніи BC , и между тѣмиже параллельными AD , BC . Говорю, что треугольникъ ABC равенъ треугольнику DBC .

Продолжи AD на обѣ стороны къ точкамъ E , F ; и чрезъ B проводи, параллельную къ CA , прямую BE *; а чрезъ C проводи, параллельную къ BD , прямую CF .

Итакъ каждый изъ чепытреугольниковъ *опр.36. $EBCA$, $DBC F$ есть параллелограммъ*: и параллелограммъ $EBCA$ равенъ параллело-

*35. грамму $DBC F$ *; ибо стоятъ на томъ же основаніи BC , и между тѣмиже параллельными BC , EF . При томъ треугольникъ ABC есть

*34. половина параллелограмма $EBCA$ *, ибо поперечникъ AB дѣлитъ оный по поламъ; а треугольникъ DBC есть половина параллелограмма $DBC F$, ибо поперечникъ DC дѣлитъ оный по поламъ. Но половины равныхъ суть взаимно равны: чего ради треугольникъ ABC равенъ треугольнику DBC .

Итакъ треугольники, стоящіе, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVIII.

Треугольники, споящіе на равныхъ основанійхъ и между тѣмиже параллельными, супъ взаимно равны.

Пусть будутъ треугольники ABC , DEF , споящіе на равныхъ основанійхъ BC , EF , и между тѣмиже параллельными BF , AD . Говорю, что треугольникъ ABC равенъ треугольнику DEF .

Продолжи AB на обѣ стороны къ точкамъ G , H ; и чрезъ B проводи, параллельную къ CA , прямую BG^* ; а чрезъ F проводи, параллельную къ DE , прямую FN .

Итакъ каждый изъ чешыреугольниковъ $GBCA$, $DEFN$ есть параллелограммъ*: и на- *опр.36. параллелограммъ $GBCA$ равенъ параллелограмму $DEFN^*$; ибо споянъ на равныхъ основанійхъ *36. BC , EF , и между тѣмиже параллельными BF , GN . Припомъ треугольникъ ABC есть половина параллелограмма $GBCA^*$, ибо попе- *34. речникъ BA дѣлитъ оный по поламъ; а треугольникъ DEF есть половина параллелограмма $DEFN$, ибо поперечникъ DF дѣлитъ оный по поламъ. Но половины равныхъ супъ взаимно равны: чего ради треугольникъ ABC равенъ треугольнику DEF .

Итакъ треугольники, споящіе, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIX.

Равные преугольники, споящіе на томъ же основаніи и по ту же сторону, суть между тѣмиже параллельными.

Пусть будутъ равные преугольники ABC , DBC , споящіе на томъ же основаніи BC , и по ту же сторону. Говорю, что они суть между тѣмиже параллельными.

Ибо пропяти AD . Говорю, что AD параллельна къ BC .

31. Буде же не такъ; то чрезъ точку A проводи, параллельную къ BC , прямую AE^ ; и пропяти EC .

37. И такъ преугольникъ ABC равенъ преугольнику EBC^ ; ибо споятъ на томъ же основаніи BC , и между тѣмиже параллельными BC , AE . Но преугольникъ ABC равенъ преугольнику DBC : посему и преугольникъ DBC равенъ преугольнику EBC , большій меньшему; что невозможно. Посему AE не параллельна къ BC . То же докажемъ и о всякой другой, кромѣ AD : чего ради AD параллельна къ BC .

И такъ равные преугольники, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XL.

Равные треугольники, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и по ту же сторону, суть между собою параллельными.

Пусть будутъ равные треугольники ABC , DCE , стоящіе на равныхъ основаніяхъ BC , CE ; и по ту же сторону. Говорю, что они суть между собою параллельными. Ибо проведены AD . Говорю, что AD параллельна къ BE .

Буде же не такъ; то чрезъ A проводи, параллельную къ BE , прямую AF^* ; и проведи EF .

Итакъ треугольникъ ABC равенъ треугольнику FCE^* ; ибо стоятъ на равныхъ ^{*38.} основаніяхъ BC , CE , и между собою параллельными BE , AF . Но треугольникъ ABC равенъ треугольнику DCE : посему и треугольникъ DCE равенъ треугольнику FCE , большему меньшему; что невозможно. Посему AF не параллельна къ BE . То же докажемъ и о всякой другой, кромѣ AD : чего ради AD параллельна къ BE .

Итакъ равные треугольники, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ХІІ.

Ежели параллелограммъ и треутольникъ споятъ на томъже основаніи и между тѣмиже параллельными; то параллелограммъ будетъ двукратный треутольника.

Пусть будутъ параллелограммъ $ABCD$ и треутольникъ EBC споятъ на томъже основаніи BC , и между тѣмиже параллельными BC , AE . Говорю что параллелограммъ $ABCD$ есть двукратный треутольника EBC .

Пропяни AC .

- Итакъ треутольникъ ABC равенъ треутольнику EBC *; ибо споятъ на томъже основаніи BC , и между тѣмиже параллельными BC , AE . Но параллелограммъ $ABCD$ есть двукратный треутольника ABC *; ибо поперечникъ AC дѣлитъ оный по поламъ. Чего ради параллелограммъ $ABCD$ есть двукратный и треутольника EBC .

Итакъ, ежели параллелограммъ, и проч. ч. и д. н. (20).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ХІІІ.

Составить равный данному треутольнику параллелограммъ, въ углѣ равномъ данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ ABC данный преутольникъ, и D данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ соспавить равный преутольнику ABC параллелограммъ, въ углѣ равномъ прямолинейному углу D .

Раздѣли BC по поламъ въ E^* ; и пропхни AE ; *10. и при прямой EC , и при шпочкѣ на пей E , соспавь уголъ CEF равный углу D ; и чрезъ A проведи, параллельную къ EC , прямую AG ; а чрезъ C проведи, параллельную къ EF , прямую CG .

Итакъ $FECG$ есть параллелограммъ*. *опр.36. И поелику BE равна EC : то преутольникъ ABE равенъ преутольнику AEC^* , ибо спочкѣ на равныхъ основаніяхъ BE , EC , и между шѣмиже параллельными BC , AG . Посему преутольникъ ABC есть двукрапный преутольника AEC . Но и параллелограммъ $FECG$ есть двукрапный преутольника AEC^* ; *41. ибо спочкѣ на томъже основаніи EC , и между шѣмиже параллельными BC , AG : а посему параллелограммъ $FECG$ равенъ преутольнику ABC ; припомъ имѣеть уголъ CEF равный данному углу D .

Итакъ соспавленъ равный данному преутольнику ABC параллелограммъ $FECG$, въ углѣ CEF равномъ углу D . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIII.

Во всякомъ параллелограммѣ дополненія параллелограммовъ, кои около поперечника, супъ взаимно равны.

Пустьъ будетъ $ABCD$ параллелограммъ, и AC его поперечникъ; и около поперечника AC параллелограммы EH , FG ; а такъ называемыя ихъ дополненія BK , KD . Говорю, что дополненіе BK равно дополненію KD .

Поелику $ABCD$ есть параллелограммъ, и AC его поперечникъ; то треугольникъ ABC *34. равенъ треугольнику ADC *. Еще же, поелику $AЕКН$ есть параллелограммъ, и AK его поперечникъ; то треугольникъ AEK равенъ треугольнику $АНК$. Потому же и треугольникъ KFC равенъ треугольнику KGC . И поелику треугольникъ AEK равенъ треугольнику $АНК$, а треугольникъ KFC треугольнику KGC : то треугольникъ AEK вмѣстѣ съ треугольникомъ KGC равенъ треугольнику $АНК$ вмѣстѣ съ треугольникомъ KFC . Но и цѣлый треугольникъ ABC равенъ цѣлому треугольнику ADC : чего ради и оспальное дополненіе BK равно оспальному дополненію KD .

Итакъ во всякомъ параллелограммѣ, и пр.
ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIV.

На данной прямой поставить равный данному преугольнику параллелограммъ, въ углѣ равномъ данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ АВ данная прямая, С а данный преугольникъ, и D данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ на данной прямой АВ поставить равный данному преугольнику С параллелограммъ, въ углѣ равномъ углу D.

Составъ равный преугольнику С параллелограммъ BEFG, въ углѣ EBG равномъ углу D*; и положи BE впрямъ съ BA; и продолжи FG къ H; и чрезъ A проводи, параллельную къ которой на еснѣ изъ прямыхъ BG, EF, прямую AN*; и пропни HB. И поелику на параллельныя AN, EF падаетъ прямая HF; то углы ANF, HFE равны двумъ прямымъ*. Посему углы BHG, GFE меньше двухъ прямыхъ. А прямая, неопредѣленно продолженная со стороны угловъ, кои меньше двухъ прямыхъ, вспрѣпятся*; посему HB, FE продолженная вспрѣпятся. Продолжи оныя, и пусть вспрѣпятся въ K; и чрезъ K проводи, параллельную къ которой ниесъ изъ прямыхъ EA, FH, прямую KL;

и продолжи прямыя HA , GB къ точкамъ L , M .
 опр. 36. Ипакъ $HLKF$ естъ параллелограммъ, и
 NK его поперечникъ; и около поперечника
 NK параллелограммы AG , ME , а такъ назы-
 ваемыя ихъ дополненія LB , BF . Посему LB
 *43. равно BF *. Но BF равно треугольнику C ;
 посему и LB равно треугольнику C . И пое-
 *15. лику уголь GBE равенъ углу ABM *; но уголь
 GBE равенъ и углу D : посему и уголь ABM
 равенъ углу D .

Ипакъ на данной прямой AB поставленъ
 равный данному треугольнику C параллело-
 граммъ BL , въ углѣ ABM равномъ данному уг-
 лу D . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLV.

Соспавишь равный данной прямолинейной
 фигурѣ параллелограммъ, въ данномъ прямо-
 линейномъ углѣ.

Пусть будетъ $ABCD$ данная прямолиней-
 ная фигура, а E данный прямолинейный
 уголь. Надлежитъ соспавишь равный прямо-
 линейной фигурѣ $ABCD$ параллелограммъ, въ
 углѣ равномъ углу E .

Пропяни DB ; и составь равный тре-
 угольнику ABD параллелограммъ FN , въ углѣ
 *43. NKF равномъ углу E *; и на прямой GN поставь

равный треугольнику DBC параллелограммъ GM , въ уголѣ GHM равномъ углу E .* *44.

Послику уголъ E равенъ каждому изъ угловъ NKF , GHM ; то уголъ NKF равенъ углу GHM . Придай обще уголъ KHG ; посему углы FNH , KHG равны угламъ KHG , GHM . Но углы FNH , KHG равны двумъ прямымъ*; *29. посему и углы KHG , GHM равны двумъ прямымъ. А посему при прямой HG и при почкѣ на ней H , двѣ прямыя KN , HM , не лежащія по ту же сторону, дѣлають смѣжные углы равные двумъ прямымъ: чего ради KN есть впрямъ съ HM . И послику на параллельныя прямыя KM , FG падаетъ прямая HG ; то накомъ лежащіе углы MHG , HGF взаимно равны*. Придай обще уголъ HGL ; посему *29. углы MHG , HGL равны угламъ HGF , HGL . Но углы MHG , HGL равны двумъ прямымъ*; *29. посему и углы HGF , HGL равны двумъ прямымъ: чего ради FG есть впрямъ съ GL .* *14. И послику KF равна HG и параллельна къ ней; но и ML равна HG и параллельна къ ней; посему KF равна ML и параллельна къ ней*: и соединяють концы ихъ прямыя KM , *30. FL ; посему и прямыя KM , FL суть равны и параллельны*: чего ради $KFLM$ есть па- *33. раллелограммъ. И послику треугольникъ ABD

равенъ параллелограмму FH ; а треугольникъ DVC параллелограмму GM : посему цѣлая прямолинейная фигура $ABCD$ равна цѣлому параллелограмму $KFLM$.

Итакъ соснавленъ равный данной прямолинейной фигурѣ $ABCD$ параллелограммъ $KFLM$, въ углѣ FKM равномъ данному углу E . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVI.

Изъ данной прямой написать квадратъ.
Пусть будетъ AB данная прямая. Надлежитъ изъ прямой AB написать квадратъ.

Къ прямой AB , опъ почки на ней A , про-

11. ведемъ подъ прямыми углами прямую AC^ ; и

3. положи AD равную AB^ ; и чрезъ почку D про-

31. ведемъ, параллельную къ AB , прямую DE^ ; а чрезъ почку B проведемъ параллельную къ AD , прямую BE .

опр. 36. Итакъ $ADEB$ есть параллелограммъ; а

34. посему AB равна DE , а AD равна BE^ . Но AD равна AB ; посему четыре прямые BA , AD , DE , EB взаимно равны: чего ради параллелограммъ $ADEB$ есть равноспоронный. Говорю еще, что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ на параллельныя AB , DE падаетъ прямая AD ;

29. то углы BAD , ADE равны двумъ прямымъ. Но

уголъ BAD прямой; посему и уголъ ADE есть прямой. А параллелограммовъ какъ пропивиулежащія стороны, такъ и пропивиулежащіе углы взаимно равны*; посему и каждый изъ про- *34. пивиулежащихъ угловъ ABE , BED есть прямой. Чего ради четырехугольникъ $ADEB$ есть прямоугольный; а доказано, что и равноспорными: итакъ онъ есть квадратъ*, и наци- *опр.30. санъ изъ прямой AB . ч. и с. н. (21).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVII.

Въ прямоугольныхъ преугольникахъ, квадратъ изъ стороны, пропивиулежащей прямому углу, равенъ квадратамъ изъ споронъ, содержащихъ прямой уголъ.

Пусть будетъ ABC прямоугольный преугольникъ, имѣющій уголъ BAC прямой. Говорю, что квадратъ изъ BC равенъ двумъ квадратамъ изъ BA , AC .

Напиши изъ BC квадратъ $BDEC$ *; а изъ *46. BA , AC квадраты GB , HC ; и чрезъ A проводи, параллельную къ конойрой ни есть изъ прямыхъ BD , CE , прямую AL *; и пропхни *31. AD , FC .

Поелику каждый изъ угловъ BAC , BAG прямой; то при прямой BA , и при почкѣ на ней A , двѣ прямыя AC , AG , не лежащія по ту же спорону, дѣлають смѣжные углы

равныя двумъ прямыхъ: посему AC есть
впрямъ съ AG . Посему же и AB есть впрямъ
съ AH . И поелику уголъ DVC равенъ углу

*акс. 10. FVA , ибо каждый есть прямой; придай об-
ще уголъ ABC : посему цѣлой уголъ DVA ра-
венъ цѣлому углу FVC . И поелику двѣ пря-
мыя DV , VA равны двумъ прямымъ CV , VF ,
каждая каждой; и уголъ DVA равенъ углу

4. FVC : по основанію AD равно основанію FC ;
и преугольникъ ABD равенъ преугольнику
 FVC . Припомъ параллелограммъ BL есть

*41. двукрапный преугольника ABD *; ибо спояшъ
на томъ же основаніи BD , и между шѣми же
параллельными BD , AL : а квадрапъ BG есть
двукрапный преугольника FVC ; ибо такъ же
спояшъ на томъ же основаніи FB , и между
шѣми же параллельными FB , GC . А двукрап-
ныя равныхъ, взаимно равны; посему парал-
лелограммъ BL равенъ квадрату GB . Подобно,
пропаянувъ AE , BK , докажется, что парал-
лелограммъ CL равенъ квадрату HC . Посему
цѣлой квадрапъ $BDEC$ равенъ квадратамъ
 GB , HC . Квадрапъ же $BDEC$ написанъ изъ
 BC ; а квадрапы GB , HC изъ BA , AC : чего
ради квадрапъ изъ стороны BC равенъ квад-
ратамъ изъ сторонъ BA , AC .

Итакъ въ прямоугольныхъ преугольни-
кахъ, и проч. Ч. и Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVIII.

Ежели преугольника квадрапъ изъ одной спороны равенъ квадрапамъ изъ двухъ прочихъ споронъ; то уголь содержимый двумя прочими споронами преугольника естъ прямой.

Пусть будетъ преугольника ABC квадрапъ изъ одной спороны BC равенъ квадрапамъ изъ споронъ BA, AC. Говорю, что уголь BAC естъ прямой.

Проведи опъ точки A, къ прямой AC подъ прямыми углами, прямую AD*; и положи AD *11. равную BA; и пропхни DC.

Поелику DA равна AB; то и квадрапъ изъ DA равенъ квадрапу изъ AB. Придай обще квадрапъ изъ AC; посему квадрапы изъ DA, AC равны квадрапамъ изъ BA, AC. Но квадрапамъ изъ DA, AC равенъ квадрапъ изъ DC*, ибо уголь DAC прямой; а квадра- *47. тамъ изъ BA, AC равенъ крадрапъ изъ BC, по положенію: посему квадрапъ изъ DC равенъ квадрапу изъ BC; а посему и спорона DC равна споронѣ BC. И поелику AD равна AB, а AC общая; то двѣ прямыя DA, AC равны двумъ прямымъ BA, AC; и основаніе DC равно основанію BC: посему уголь DAC равенъ углу BAC*. Но уголь DAC прямой; по- *8. сему и уголь BAC естъ прямой.

Итакъ, ежели преугольника и пр. ч. и д. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ.

КНИГА II.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. **О** всякомъ прямоугольномъ параллелограммѣ говорится, что онъ содержитъ въ двухъ прямыхъ, содержащихъ прямой уголъ.

2. Во всякомъ параллелограммѣ, одинъ который нанесъ изъ параллелограммовъ около поперечника его, вмѣстѣ съ двумя дополненіями, назовемъ наугольникомъ (*γνώμων*).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели будутъ двѣ прямыя, и одна изъ нихъ разсѣчена на сколько нанесъ отрѣзковъ; то прямоугольникъ содержаемый въ

спхъ двухъ прямыхъ, равенъ всѣмъ прямоугольникамъ содержимымъ въ неразсѣченной и въ каждомъ изъ опрѣзковъ рассѣченной.

Пусть будутъ A, BC двѣ прямая; и пусть BC рассѣчена будетъ какъ ни есть въ почкахъ D, E . Говорю, что прямоугольникъ содержаемый въ A, BC равенъ прямоугольнику содержаемому въ A, BD , и прямоугольнику въ A, DE , и еще прямоугольнику въ A, EC .

Проведи опъ B , подъ прямыми углами къ BC прямую BF^* ; и положи прямую BG рав- *11,1. ную A^* ; и чрезъ G проводи, параллельную *3,1. къ BC , прямую GH^* ; а чрезъ D, E, C про- *31,1. веде, параллельныя къ BG , прямая DK, EL, CH .

Итакъ прямоугольникъ BH равенъ всѣмъ прямоугольникамъ BK, DL, EH . Но прямоугольникъ BH содержица въ A, BC ; ибо содержица въ GB, BC^* , а BG равна A : прямо- *опр,1. угольникъ же BK содержица въ A, BD ; ибо содержица въ BG, BD , а BG равна A : а прямоугольникъ DL содержица въ A, DE , ибо DK , то есть BG , равна A : подобно же и прямоугольникъ EH содержица въ A, EC . Чего ради прямоугольникъ въ A, BC равенъ всѣмъ прямоугольникамъ: въ A, BD , и въ A, DE , и еще въ A, EC .

Итакъ, ежели будутъ двѣ прямая, и проч.
ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ни-
есть; то прямоугольники содержимые въ цѣ-
лой и въ каждомъ изъ ея отрѣзковъ, равны
квадрату изъ цѣлой прямой.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена какъ
ниесъ въ точкѣ С. Говорю, что прямо-
угольникъ въ АВ, ВС, вмѣстѣ съ прямоуголь-
никомъ въ ВА, АС, равенъ квадрату изъ АВ.

46, I. Изъ АВ напиши квадратъ АДЕВ; и чрезъ
С проводи, параллельную къ копорой ни есъ
31, I. изъ прямыхъ АД, ВЕ, прямую СФ.

Итакъ прямоугольникъ АЕ равенъ прямо-
угольникамъ АФ, СЕ. Но АЕ есъ квадратъ
изъ АВ: а АФ есъ прямоугольникъ въ ВА,
спр. I. АС, ибо содержится въ DA, АС, а DA равна
AB; и СЕ есъ прямоугольникъ въ АВ, ВС,
ибо ВЕ равна АВ. Чего ради прямоугольникъ
въ ВА, АС, вмѣстѣ съ прямоугольникомъ въ
AB, BC, равенъ квадрату изъ АВ.

Итакъ, ежели прямая линія, и проч.
ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

Если прямая линия разсѣчена какъ пиеснь; то прямоугольникъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея опрѣзковъ, равенъ прямоугольнику содержимому въ обоихъ опрѣзкахъ, вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ опрѣзка прежде взятаго.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена какъ пиеснь въ точкѣ С. Говорю, что прямоугольникъ въ АВ, ВС равенъ прямоугольнику въ АС, СВ, вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ ВС.

Изъ СВ напиши квадрапъ CDEB*; и про- *46. I. должи ED къ F; и чрезъ точку А проводи, параллельную къ которой пиеснь изъ прямыхъ CD, BE, прямую AF*.

*31. I.

Итакъ прямоугольникъ АЕ равенъ прямоугольникамъ АД, СЕ. Но АЕ есть прямоугольникъ въ АВ, ВС*, ибо содержится въ *опр. I. АВ, BE, а BE равна ВС; АД же есть прямоугольникъ въ АС, СВ, ибо DC равна СВ; а DE есть квадрапъ изъ СВ. Чего ради прямоугольникъ въ АВ, ВС равенъ прямоугольнику въ АС, СВ, вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ СВ.

Итакъ, еслии прямая линия, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ни-
еснѣ; то квадрапѣ изъ цѣлой равенъ квад-
рапамъ изъ отрѣзковъ, и вмѣстѣ дважды
взятому прямоугольнику въ сихъ отрѣзкахъ
содержимому.

Пусть будетъ прямая линія АВ разсѣчена
какъ ниеснѣ въ С. Говорю, что квадрапѣ изъ
АВ равенъ квадрапамъ изъ АС, СВ, и вмѣстѣ
дважды взятому прямоугольнику въ АС, СВ.

46, I. Изъ АВ напизи квадрапѣ АДЕВ; и про-
пизи ВD; и чрезъ С проведи, параллельную
къ копорой ни еснѣ изъ прямыхъ AD, EB,
прямую CGF; а чрезъ G проведи, парал-
лельную къ копорой ниеснѣ изъ прямыхъ
AB, DE, прямую HK.

Поелику CF параллельна къ AD, и на нихъ
падаетъ BD; то внѣшний уголъ CGB равенъ
29, I. внутреннему пропивулежащему углу ADB.

5, I. Но уголъ ADB равенъ углу ABD, ибо BA равна
AD; посему и уголъ CGB равенъ углу GBC;
слѣдственно и сторона BC равна стороне

34, I. CG. Но CB равна GK, а CG равна BK; посему
и GK равна KB. Чего ради чепыреугольникъ
CGKB еснѣ равноспоронный. Говорю еще,
что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ CG па-
раллельна къ BK, и на нихъ падаетъ CB; то

углы KBC , BCG равны двумъ прямымъ*. Но *29,1. уголъ KBC прямой; посему и уголъ BCG есть прямой. Слѣдственно и припавулежащіе имъ углы CGK , GKB суть прямые*; чего ради *34,1. четырехугольникъ $CGKB$ есть прямоугольный. А доказано, что онъ и равнобедренный; посему онъ есть квадратъ*, и написанъ *оп.30,1. изъ CB . Поэтому же и HF есть квадратъ, и написанъ изъ HG , то есть изъ AC . Посему HF , CK суть квадраты изъ AC , CB . И поелику прямоугольникъ AG равенъ GE *, *43,1. и AG содержится въ AC , CB , ибо GC равна CB : посему и GE равенъ прямоугольнику въ AC , CB . Чего ради прямоугольники AG , GE равны дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB . Но HF , CK суть квадраты изъ AC , CB ; посему четыре HF , CK , AG , GE равны квадратамъ изъ AC , CB , и дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB . А четыре HF , CK , AG , GE дѣлаютъ цѣлое $ADEB$, которое есть квадратъ изъ AB ; чего ради квадратъ изъ AB равенъ квадратамъ изъ AC , CB , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Говорю, что квадратъ изъ AB равенъ квадратамъ изъ AC .

СВ, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ АС, СВ.

- Поелику, въ тойже фигурѣ, АВ равна АД,
 5,1. по уголь ABD равенъ углу ADB. И поелику
 всякаго треугольника всѣ три угла равны
 32,1. двумъ прямымъ; посему треугольника ABD
 три угла ABD, ADB, BAD равны двумъ прямымъ. Но уголь BAD есть прямой; посему
 остальные углы ABD, ADB равны одному прямому: они же и взаимно равны; посему каждый
 изъ угловъ ABD, ADB есть половина прямого. Но уголь BCG есть прямой, ибо равенъ внутреннему
 проптивулежащему, что при А; посему
 остальной уголь CGB есть половина прямого; а посему уголь CGB равенъ углу
 CBG; слѣдственно и сторона BC равна стороне
 34,1. CG. Но СВ равна GK, а CG равна BK; посему
 четырехугольникъ СК есть равносторонный. Онъ же имѣетъ и прямой уголь
 СВК; посему СК есть квадратъ, и написанъ изъ СВ. Потому же и HF есть квадратъ, и
 равенъ квадрату изъ АС; а посему СК, HF суть квадраты, и равны квадратамъ изъ АС,
 СВ. И поелику прямоугольникъ АГ равенъ
 43,1. GE, и АГ содержится въ АС, СВ, ибо CG
 равна СВ; посему и EG равенъ прямоугольнику въ АС, СВ: чего ради АГ, GE равны

дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB . Но CK , HF равны квадрапамъ изъ AC , CB ; посему CK , HF , AG , GE равны квадрапамъ изъ AC , CB , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB . Но CK , HF и AG , GE дѣлають цѣлое AE , которое есть квадрапъ изъ AB ; итакъ квадрапъ изъ AB равенъ квадрапамъ изъ AC , CB , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC , CB .
ч. и д. п.

Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что въ квадрапахъ параллелограммы около переречника суть также квадрапы. (22).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели прямая линія разсѣчена на равныя и неравныя; то прямоугольникъ въ неравныхъ отрѣзкахъ содержимый, вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ прямой, копорая между сѣченіями, равенъ квадрапу изъ половины цѣлой прямой.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена на равныя въ C , и на неравныя въ D . Говорю, что прямоугольникъ въ AD , DB , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ CD , равенъ квадрапу изъ CB .

Изъ CB напиши квадрапъ $CEFB^*$; и про- *46.1.
тяни BE ; и чрезъ D проводи, параллельную

* *

къ которой ни естъ изъ прямыхъ CE , BF ,
 а прямую DG ; и чрезъ G проводи, параллель-
 ную къ которой ни естъ изъ прямыхъ AB ,
 EF , прямую KLM ; и еще чрезъ A проводи,
 параллельную къ которой ни естъ изъ пря-
 мыхъ CL , BM , прямую AK .

Поелику дополненіе CH равно дополненію
 *43,1. HF *; придай обще DM : посему цѣлой пря-
 моугольникъ CM равенъ цѣлому DF . Но CM
 *36,1. равенъ AL *, ибо AC равна CB ; посему и AL ра-
 венъ DF . Придай обще CH ; посему цѣлой пря-
 моугольникъ AH равенъ двумъ DF и DL . Но
 AH содержится въ AD , DB , ибо DH равна
 DB ; а два FD , DL дѣлають наугольникъ
 *оп.2. NOP *: посему наугольникъ NOP равенъ пря-
 моуголику въ AD , DB . Придай обще LG ,
 сл.4. который равенъ квадрату изъ CD ; посему
 наугольникъ NOP и LG равны прямоугольни-
 ку въ AD , DB и квадрату изъ CD . Но на-
 угольникъ NOP вмѣстѣ съ LG дѣлають цѣ-
 лое $CEFB$, которое естъ квадратъ изъ CB ;
 чего ради прямоугольникъ въ AD , DB , вмѣ-
 стѣ съ квадратомъ изъ CD , равенъ квадра-
 ту изъ CB .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. п.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели прямая линія разсѣчена по поламъ, и приложена къ ней впрямъ другая какая ни-
 еспь прямая; то прямоугольникъ содержи-
 мый въ цѣлой съ приложеною и въ прило-
 женной, вмѣститъ съ квадрапомъ изъ поло-
 вины цѣлой, равенъ квадрату написанному
 изъ прямой, сложенной изъ оной половины
 и приложенной, какъ изъ одной.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена по по-
 ламъ въ почкѣ С; и пусть приложена бу-
 детъ къ ней впрямъ другая какая ниеспь пря-
 мая ВD. Говорю, что прямоугольникъ въ АД,
 DV, вмѣститъ съ квадрапомъ изъ СВ, равенъ
 квадрату изъ CD.

Изъ CD напиши квадратъ CEFD; и про-
 шяни DE; и чрезъ почку В проводи, парал-
 лельную къ которой ниеспь изъ прямыхъ
 CE, DF, прямую BC; а чрезъ почку H про-
 веде, параллельную къ которой ниеспь изъ
 прямыхъ AD, EF, прямую KM; и еще чрезъ
 A проводи, параллельную къ которой ниеспь
 изъ прямыхъ CL, DM, прямую AK.

Поелику AC равна CB; то и прямоуголь-
 никъ AL равенъ прямоугольнику CH*. По CH *36,1.
 равенъ HF*; посему и LA равенъ HF. При- *43,1.
 дай обще CM; посему цѣлой прямоугольникъ

АМ равенъ наугольнику NOP. Но АМ содер-
 сл:4. жится въ AD, DB, пбо DM равна DB; по-
 сему и наугольникъ NOP равенъ прямоуголь-
 нику въ AD, DB. Придай обще LG, который
 равенъ квадрату изъ СВ; посему прямоуголь-
 никъ въ AD, DB, вмѣститъ съ квадратомъ изъ
 СВ, равенъ наугольнику NOP, вмѣститъ съ
 LG. Но наугольникъ NOP вмѣститъ съ LG дѣ-
 лающъ цѣлое CEFD, которое есть квад-
 ратъ изъ CD; чего ради прямоугольникъ въ
 AD, DB, вмѣститъ съ квадратомъ изъ СВ, ра-
 венъ квадрату изъ CD.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ниеспѣ;
 то квадраты изъ цѣлой и одного изъ ея
 отрѣзковъ, оба вмѣститъ, равны дважды взя-
 нному прямоугольнику содержимому въ цѣ-
 лой и въ сказанномъ отрѣзкѣ, вмѣститъ съ
 квадратомъ изъ остального отрѣзка.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена какъ
 ниеспѣ въ точкѣ С. Говорю, что квадраты
 изъ АВ, ВС равны дважды взятому прямо-
 угольнику въ АВ, ВС, вмѣститъ съ квадра-
 томъ изъ АС.

Изъ АВ напиши квадратъ ADEB, и допи-
 ши фигуру.

Послику прямоугольникъ AG равенъ GE^* ; *43,1. придай обще CF ; посему и цѣлый AF равенъ цѣлому CE . А посему AF , CE суть двукрапные прямоугольника AF . Но AF , CE дѣлають наугольникъ KLM и квадрапъ CF ; посему наугольникъ KLM и квадрапъ CF суть двукрапные прямоугольника AF . Но прямоугольника AF двукрапный также есть и дважды взяпый прямоугольникъ въ AB , BC , ибо BF равна BC^* ; посему наугольникъ KLM , вмѣстѣ *сл: 4. съ квадрапомъ CF , равны дважды взяпому прямоугольнику въ AB , BC . Придай обще HN , который есть квадрапъ изъ AC ; посему наугольникъ KLM , вмѣстѣ съ квадрапами CF , HN , равны дважды взяпому прямоугольнику въ AB , BC , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ AC . Но наугольникъ KLM вмѣстѣ съ квадрапами CF , HN , дѣлають цѣлое $ADEB$ и CF , кои суть квадрапы изъ AB , BC ; чего ради квадрапы изъ AB , BC равны дважды взяпому прямоугольнику въ AB , BC , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ AC .

Ипакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ни-
есть; то чепырежды взяпый прямоуголь-

никъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея опрѣзковъ, вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ оснательнаго опрѣзка, равенъ квадрату написанному изъ цѣлой и прежде сказаннаго опрѣзка, какъ изъ одной прямой.

Пусть будетъ прямая АВ разсѣчена какъ нисеть въ точкѣ С. Говорю, что чепырежды взятый прямоугольникъ въ АВ, ВС, вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ АС, равенъ квадрату написанному изъ АВ, ВС, какъ изъ одной прямой.

Продолжи впрямъ съ АВ прямую ВD; и положи прямую ВD равную СВ*; и изъ АD напиши квадратъ АEFD; и дополни двойную фигуру.

34, I. Поелику ВС равна ВD; и СВ равна GK, а ВD равна KN: посему и GK равна KN. Поному же и QR равна RP. И поелику СВ равна ВD, а GK равна KN; посему прямоугольникъ

36, I. СК равенъ BN, а GR равенъ КР. Но СК ра-

43, I. венъ RN; ибо суть дополненія въ параллелограммѣ СР: посему BN равенъ GR. Чего ради чепыре СК, КD, GR, RN взаимно равны, и суть чепырекрапны прямоугольника СК. Еще же, поелику СВ равна ВD; и ВD

34, I. равна ВК, то есть CG, а СВ равна GK, то есть GQ: посему и CG равна GQ. И

послику CG равна CQ , а QR равна RP ; посему прямоугольник AG равен MQ , а QL равен RF *. Но MQ равен QL ; ибо сущь до- *36,1.
 полненія въ параллелограммѣ ML : посему и AG равен RF . Чего ради чепыре AG, MQ, QL, RF взаимно равны, и сущь чепыре-
 крапны прямоугольника AG . А доказано, что и чепыре CK, KD, GR, RN чепырекрапны
 прямоугольника CK ; посему восемь, кои содержишь наугольникъ STV , сущь чепыре-
 крапны прямоугольника AK . И послику AK содержишя въ AB, BD , ибо KB равна BD *; *сл:4.
 по чепырежды взятый прямоугольникъ въ AB, BD есть чепырекрапный прямоуголь-
 ника AK . А доказано, что прямоугольника AK есть чепырекрапный и наугольникъ STV ;
 посему чепырежды взятый прямоугольникъ въ AB, BD равен наугольнику STV . Придай
 обще OH , который равен квадрату изъ AC *; посему чепырежды взятый прямоуголь- *сл:4.
 никъ въ AB, BD , вмѣститъ съ квадратомъ изъ AC , равен наугольнику STV вмѣститъ съ OH .
 Но наугольникъ STV и OH дѣлають цѣлой квадратъ $AEFD$, который есть изъ AD ; чего
 ради чепырежды взятый прямоугольникъ въ AB, BD , вмѣститъ съ квадратомъ изъ AC , ра-
 венъ квадрату изъ AD , то есть, квадрату

написанному изъ АВ и ВС, какъ изъ одной прямой.

Ипакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е І Х .

Ежели прямая линія разсѣчена на равныя и неравныя; по квадрапы изъ неравныхъ отрѣзковъ прямой суть двукратныя квадрапа изъ половины и квадрапа изъ прямой между сѣченіями.

Пусть будиъ прямая АВ разсѣчена на равныя въ С, и на неравныя въ D. Говорю, что квадрапы изъ AD, DB суть двукратныя квадраповъ изъ AC, CD.

Проведи опъ С, подъ прямыми углами къ АВ, прямую СЕ; и положи ее равную копърой нисси изъ прямыхъ АС, СВ; и пропхни АЕ, ЕВ; и чрезъ D проводи, параллельную къ ЕС, прямую DF; а чрезъ F проводи, параллельную къ АВ, прямую FG; и пропхни АF.

Поелику АС равна СЕ; по уголь ЕАС равенъ углу АЕС*. И поелику уголь при С прямой, по остальные ЕАС, АЕС равны одному прямому*; они же и равны: посему каждый изъ угловъ СЕА, САЕ еси половина прямого. Потому же и каждый изъ угловъ СЕВ, ЕВС еси половина прямого; слѣдственно цѣлой

*5, I.

*32, I.

уголъ AEB есть прямой. И поелику уголъ GEF половина прямого; и уголъ EGF прямой, ибо онъ равенъ внутреннему проптивулежащему ECB : по и остальной EFG есть по-^{*29, I.} половина прямого; посему уголъ GEF равенъ углу EFG ; слѣдственно и спорона EG равна споронѣ GF *. Еще же, поелику уголъ при B ^{*6, I.} половина прямого; и уголъ FDB прямой, ибо также и онъ равенъ внутреннему проптивулежащему ECB : по и остальной DFB есть половина прямого; посему уголъ при B равенъ углу DFB ; слѣдственно и спорона FD равна споронѣ DB .

И поелику AC равна CE : по квадрапъ изъ AC равенъ квадрапу изъ CE ; посему квадрапы изъ AC , CE суть двукрапные квадрапа изъ AC . Но квадрапамъ изъ AC , CE равенъ квадрапъ изъ AE *, ибо уголъ ACE есть пря-^{*47, I.} мой; посему квадрапъ изъ AE есть двукрапный квадрапа изъ AC . Еще же, поелику EG равна GF : по квадрапъ изъ EG равенъ квадрапу изъ GF ; посему квадрапы изъ EG , GF суть двукрапные квадрапа изъ GF . Но квадрапамъ изъ EG , GF равенъ квадрапъ изъ EF *, ^{*47, I.} посему квадрапъ изъ EF есть двукрапный квадрапа изъ GF . И какъ GF равна CD ; посему квадрапъ изъ EF есть двукрапный квадрапа изъ CD . Но и квадрапъ изъ AE есть

двукратный квадрапа изъ AC ; посему квадрапы изъ AE , EF суть двукратные квадратовъ изъ AC , CD . Квадрапамъ же изъ AE , EF равенъ квадрапъ изъ AF , ибо уголъ AEF есть прямой; посему квадрапъ изъ AF есть двукратный квадраповъ изъ AC , CD . А квадрапу изъ AF равны квадрапы изъ AD , DF , ибо уголъ при D есть прямой; посему квадрапы изъ AD , DF суть двукратные квадратовъ изъ AC , CD . Но DF равна DB ; чего ради и квадрапы изъ AD , DB суть двукратные квадратовъ изъ AC , CD .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Ежели прямая линія разсѣчена по поламъ, и приложена къ ней впрямъ другая какая нисеть прямая; то квадрапы изъ цѣлой съ приложенною, и изъ приложенной, оба вмѣстѣ, суть двукратные квадрапа изъ половины, и еще квадрапа вписаннаго изъ прямой, сложенной изъ оной половины и приложенной, какъ изъ одной.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена по поламъ въ C ; и пусть приложена будетъ къ ней впрямъ какая нисеть прямая BD . Говорю, что квадрапы изъ AD , DB суть двукратные квадратовъ изъ AC , CD .

Проведи онъ C , подъ прямыми углами къ AB , прямую CE^* ; и положи ее равную ко- *11, I. рой ниесъ изъ прямыхъ AC , CB ; и пропни EA , EB ; и чрезъ E проводи, параллельную къ AD , прямую EF^* , а чрезъ D еще проводи, *31, I. параллельную къ CE , прямую FD . И поелику на параллельныя прямая EC , FD падаеиъ прямая EF : то углы CEF , EFD равны двумъ прямымъ*; посему углы FEB , EFD меньше *29, I. двухъ прямыхъ. Но прямая продолженныя со стороны угловъ, кои меньше двухъ прямыхъ, воспрѣпяиъ; посему прямая EB , FD , продолженныя воспрѣпяиъ со стороны BD . Продолжи оныя, и нуеиъ воспрѣпяиъ въ G ; и пропни AG .

Поелику AC равна CE ; то уголъ AEC равенъ углу EAC^* . Но уголъ при C прямой; по- *5, I. сему каждый изъ угловъ EAC , AEC есиъ половина прямого*. Поэтому же и каждый изъ *32, I. угловъ CEB , EBC есиъ половина прямого; слѣдсвенно цѣлой уголъ AEB есиъ прямой. И поелику уголъ EBC половина прямого; то и уголъ DBG есиъ половина прямого*. А и *15, I. уголъ BDC прямой, ибо онъ равенъ накомъ лежащему DCE^* : посему оспальной уголъ *29, I. DGB есиъ половина прямого; а посему уголъ DGB равенъ углу DBG ; слѣдсвенно и сторона BD равна стороне DG^* . Еще же, поели- *6, I.

- ку уголь EGF половина прямого; и уголь при F прямой, ибо онъ равенъ проптивулежащему
- *29, I. что при C^* : посему оспальной уголь FEG есть половина прямого; а посему уголь EGF равенъ углу FEG ; слѣдственно и спорона GF равна
- *6, I. споронѣ FE^* . И поелику EC равна CA : то и квадрапѣ изъ EC равенъ квадрапу изъ CA ; посему квадрапы изъ EC , CA суть двукрапные квадрапа изъ CA . Квадрапамъ же изъ
- *47, I. EC , CA равенъ квадрапѣ изъ AE^* ; посему квадрапѣ изъ EA есть двукрапный квадрапа изъ AC . Еще же, поелику FG равна FE : то квадрапѣ изъ FG равенъ квадрапу изъ FE ; посему квадрапы изъ GF , FE суть двукрапные квадрапа изъ EF . Квадрапамъ же изъ
- *47, I. GF , FE равенъ квадрапѣ изъ EG^* ; посему квадрапѣ изъ EG есть двукрапный квадрапа изъ EF . И EF равна CD ; посему квадрапѣ изъ EG есть двукрапный квадрапа изъ CD . А доказано, что и квадрапѣ изъ EA есть двукрапный квадрапа изъ AC ; посему квадрапы изъ AE , EG суть двукрапные квадраповѣ изъ AC , CD . Квадрапамъ же изъ AE ,
- *47, I. EG равенъ квадрапѣ изъ AG^* ; посему квадрапѣ изъ AG есть двукрапный квадраповѣ изъ AC , CD . А квадрапу изъ AG равны квад-
- *47, I. рапы изъ AD , DG^* ; посему квадрапы изъ AD , DG суть двукрапные квадраповѣ изъ

АС, CD. Но DG равна DB; чего ради и квадраты изъ AD, DB суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD.

Ипакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Данную прямую разсѣчь такъ, чпобы прямоугольникъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея опрѣзковъ былъ равенъ квадрату изъ оспальнаго опрѣзка.

Пусть будетъ АВ данная прямая. Надлежитъ АВ разсѣчь такъ, чпобы прямоугольникъ въ цѣлой и въ одномъ изъ ея опрѣзковъ былъ равенъ квадрату изъ оспальнаго опрѣзка.

Изъ АВ напиши квадратъ ABDC*; и раз- *46, I. дѣли AC по поламъ въ точкѣ E*; и пропни *10, I. BE; и продолжи СА къ F; и положи прямую EF равную BE; и изъ AF напиши квадратъ FH; и продолжи GH къ K. Говорю, чпю АВ разсѣчена въ H пакъ, чпю прямоугольникъ въ АВ, BH равенъ квадрату изъ AH.

Поелику прямая AC разсѣчена по поламъ въ E, и приложена къ ней впрямъ AF; по прямоугольникъ въ CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадрату изъ EF*. *6. Но EF равна EB; поему прямоугольникъ въ

CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадрату изъ EB. А квадрату изъ *47, I. EB равны квадраты изъ BA, AE*, ибо уголъ при A есть прямой; посему прямоугольникъ въ CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадратамъ изъ BA, AE. Опними обще квадратъ изъ AE; посему остатальной прямоугольникъ въ CF, FA равенъ квадрату изъ AB. Но прямоугольникъ въ CF, FA есть FK, ибо AF равна FG; а квадратъ изъ AB есть AD: почему FK равенъ AD. Опними обще AK; посему остатальной FH равенъ остатальному HD. И поелику HD есть прямоугольникъ въ AB, BH, ибо AB равна BD; а FH есть квадратъ изъ AH: чего ради прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ HA.

Итакъ данная прямая AB разсѣчена въ H такъ, что прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ HA. ч. II с. II.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Въ тупоугольныхъ треугольникахъ, квадратъ изъ стороны, противоположащей тупому углу, больше квадратовъ изъ сторонъ, содержащихъ тупой уголъ, дважды взятымъ

прямоугольникомъ, содержимымъ въ одной изъ сторонъ около тупаго угла, на которую продолженную падаетъ перпендикуляръ, и въ прямой при тупомъ углѣ перпендикуляромъ въѣ опнимаемой.

Пусть будетъ ABC тупоугольный треугольникъ, имѣющій уголъ BAC тупой; и опъ почки B пусть будетъ¹ проведена, перпендикулярная къ продолженной CA , прямая BD . Говорю, что квадрапъ изъ BC больше квадрапъ изъ BA , AC , дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CA , AD .

Поелику прямая CD разсѣчена какъ ниестъ въ почки A ; то квадрапъ изъ CD равенъ квадрапамъ изъ CA , AD , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CA , AD *. Придай *4. обще квадрапъ изъ DB ; посему квадрапы изъ CD , DB равны квадрапамъ изъ CA , AD , DB , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CA , AD . Но квадрапамъ изъ CD , DB равенъ квадрапъ изъ CB *, ибо уголъ при D *47.1. естъ прямой; а квадрапамъ изъ AD , DB равенъ квадрапъ изъ AB : посему квадрапъ изъ CB равенъ квадрапамъ изъ CA , AB , и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CA , AD . Чего ради квадрапъ изъ CB больше квадрапъ изъ CA , AB , дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CA , AD .

Итакъ въ тупоугольныхъ, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Въ остроугольныхъ треугольникахъ, квадраты изъ спороны, противулежащей острому углу, меньше квадратовъ изъ споронъ, содержащихъ острый уголъ, дважды взятымъ прямоугольникомъ, содержащимъ въ одной изъ споронъ около острого угла, на которую падаетъ перпендикуляръ, и въ прямой при остромъ углу перпендикуляромъ внутрь отнимаемой.

Пусть будетъ ABC остроугольный треугольникъ, имѣющій уголъ при B острый; и отъ точки A пусть будетъ проведена, перпендикулярная къ BC , прямая AD . Говорю, что квадраты изъ AC меньше квадратовъ изъ CB , BA , дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CB , BD .

Поскольку прямая CB разбѣчена какъ есть въ D ; то квадраты изъ CB , BD равны дважды взятому прямоугольнику въ CB , BD ,
 *7. вмѣстѣ съ квадратомъ изъ DC *. Придай общему квадрату изъ DA ; посему квадраты изъ CB ,
 BD , DA равны дважды взятому прямоугольнику въ CB , BD , и вмѣстѣ квадратамъ изъ AD , DC . Но квадратамъ изъ BD , DA равенъ
 *47, I. квадратъ изъ AB , ибо уголъ при D есть прямой; а квадратамъ изъ AD , DC равенъ

квадратъ изъ AC : посему квадраты изъ CB , BA равны квадрату изъ AC и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CB , BD . Чего ради одинъ квадратъ изъ AC меньше квадратовъ изъ CB , BA , дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CB , BD .

Итакъ въ остроугольныхъ, и проч. ч. и д. н. (23).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Составить квадратъ равный данной прямолинейной фигурѣ.

Пусть будетъ A данная прямолинейная фигура. Надлежитъ составить квадратъ равный прямолинейной фигурѣ A .

Составъ прямоугольный параллелограммъ BD , равный прямолинейной фигурѣ A^* . *45, I. И если BE равна ED : то требуемое сдѣлано; ибо составленъ квадратъ BD равный прямолинейной фигурѣ A . Если же нѣтъ, то одна изъ прямыхъ BE , ED есть большая. Пусть будетъ BE большая: продолжи оную къ F ; и положи прямую EF равную ED ; и раздѣли BF по поламъ въ G^* ; и *10, I. изъ центра G , разстояніемъ одной изъ прямыхъ GB , GF , напиши полукружіе BHF ; и продолжи DE къ H ; и пропями GH .

Поселику прямая BF раздѣлена на равныя

* *

въ G , и на перавныя въ E ; по прямоугольникъ въ BE , EF , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ GE ,
 *5. равенъ квадрапу изъ GF *. Но GF равна GH ; посему прямоугольникъ въ BE , EF , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ GE , равенъ квадрапу изъ GH . Квадрапу же изъ GH равны квадрапы
 *47, I. изъ HE , EG *; посему прямоугольникъ въ BE , EF , вмѣстѣ съ квадрапомъ изъ GE , равенъ квадрапамъ изъ HE , EG . Отними обще квадрапъ изъ GE , посему остальной прямоугольникъ въ BE , EF равенъ квадрапу изъ EH . Но прямоугольникъ въ BE , EF есть BD , ибо EF равна ED ; посему параллелограммъ BD равенъ квадрапу изъ HE . А BD равенъ прямолинейной фигурѣ A ; чего ради прямолинейная фигура A равна квадрапу изъ EH .
 Ипакъ, составленъ равный данной прямолинейной фигурѣ A квадрапъ, по есѣ, написанный изъ EH . ч. и с. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ,

КНИГА III.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Равные круги суть тѣ, коихъ поперечники равны; или въ коихъ прямыя изъ центровъ равны. (24).

2. Прямая называется касательною къ кругу, копорая прикасается къ кругу, и будучи продолжена не пресѣкаетъ его.

3. Круги называются взаимно касательными, кои взаимно прикасаясь, не пресѣкаютъ одинъ другаго.

4. Въ кругѣ прямыя называются равноотстоящими отъ центра, когда отъ центра проведенныя перпендикулярныя къ нимъ суть равны.

5. Больше же оппстоящею называется та, на которую большая перпендикулярная падаетъ.

«5а. Дуга круга естъ часть его окружности.»

6. Опрѣзокъ круга естъ фигура, содержащая прямую и дугою круга.

7. Уголь опрѣзка естъ тотъ, который содержится прямою и окружностію круга.

8. Когда на дугѣ опрѣзка возмется какая нисенъ точка, и опъ оной къ концамъ прямой, копорая естъ основаніе опрѣзка, пропнупся прямая; то содержащій пропнупшими прямыми уголь, называется угломъ въ опрѣзкѣ.

9. Когда прямая, содержащія уголь, опнимаютъ какую нисенъ дугу; то говорится, что уголь опоптъ на ней.

10. Когда при центрѣ круга опоптъ уголь; то фигура содержащая прямыми содержащими сей уголь, и дугою, копорую прямая опнимаютъ, называется вырѣзкомъ круга.

11. Подобные опрѣзки круга суть тѣ, кои вмѣщаютъ равные углы; или въ коихъ углы взаимно равны. (25).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ ПЕРВОЕ.

Даннаго круга найми центръ.

Пусть будетъ ABC данный кругъ. Надлежащъ круга ABC найми центръ.

Проведи въ немъ какую ниспъ прямую AB; и раздѣли оную по поламъ въ точкѣ D*; и отъ D проводи, подъ прямыми углами *10, I. къ AB, прямую CD*; и продолжи оную до *11, I. E; и раздѣли CE по поламъ въ F. Говорю, что F естъ центръ круга ABC.

Ибо, еспли нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ G. Пропяни GA, GD, GB.

Послику AD равна DB, а DG общая; то двѣ прямыя AD, DG равны двумъ прямымъ BD, DG, каждая каждой; и основаніе GA равно основанію GB, ибо сущъ изъ центра G: посему уголъ ADG равенъ углу GDB*. Когда *8, I. же прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные; то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ: посему уголъ GDB естъ прямой. Но и уголъ FDB прямой: посему уголъ FDB равенъ углу GDB, большій меньшему; что невозможно. А посему точка G не естъ центръ круга ABC. Подобно же докажемъ, что и ни другая какая ниспъ, кромѣ F. Инакъ точка F естъ центръ круга ABC.

Ч. и с. н.

Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что есть-ли въ кругѣ какая нисеть прямая другую прямую разсѣкаетъ по поламъ и подъ прямыми углами; то на сѣкущей есть центръ круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели на окружности круга взяты какія нисеть двѣ точки; то прямая пропаянутая черезъ сїи точки, упадетъ внутри круга.

Пусть будетъ ABC кругъ; и на окружности его пусть будутъ взяты какія нисеть двѣ точки A, B . Говорю, что прямая отъ A къ B пропаянутая, упадетъ внутри круга.

Ибо, еслили нѣтъ; то пусть, буде возможно, падаетъ внѣ, какъ AEB . Возьми *1. центръ круга ABC *, и пусть будетъ оный D ; и пропаяни DA, DB ; и проводи DF до E .

Поелику DA равна DB ; то уголъ DAE *5,1. равенъ углу DBE *. И поелику шреугольника DAE одна сторона AEB продолжена; то *16,1. уголъ DEB больше угла DAE *. Но уголъ DAE равенъ углу DBE , поему уголъ DEB больше угла DBE . А большему углу пропавуде- *19,1. жипъ большая сторона*; поему DB больше DE . Но DB равна DF ; поему DF больше DE , меньшая большей; что невозможно. А

посему прямая, пропаянуная опъ А къ В, не упадепъ вибъ круга. Подобно же докажемъ, что и ни на окружности; чего ради упадепъ внупри круга.

Итакъ, ежели на окружности, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш.

Ежели въ кругѣ прямая какая ни еспъ, проходящая чрезъ центръ, прямую какую ни еспъ, не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами: и ежели разсѣкаетъ подъ прямыми углами; то разсѣчетъ оную и по поламъ.

Пусть будетъ АВС кругъ; и въ немъ пусть прямая какая ни еспъ CD, проходящая чрезъ центръ, прямую какую ни еспъ АВ, не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ въ точкѣ F. Говорю, что разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами.

Возьми центръ круга АВС*, и пусть *1. будетъ оный E; и пропаяни EA, EB.

Поелику AF равна FB, а FE общая; по двѣ прямая равны двумъ прямымъ; и основаніе EA равно основанію EB: посему уголь AFE равенъ углу EFB*. Когдаже прямая, *8, I. поставленная на другую прямую, дѣлаетъ

сѣбѣжные углы взаимно равные; по каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ: посему каждый изъ угловъ $\angle AFE$, $\angle BFE$ есть прямой. Чего ради прямая CD проходящая чрезъ центръ, и разсѣкающая по поламъ прямую AB , непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ оную и подѣляетъ прямыми углами.

Но пусть же прямая CD прямую AB разсѣкаетъ подѣляя прямыми углами. Говорю, что разсѣчетъ оную и по поламъ, то есть, что AF равна FB .

Ибо, сдѣлавъ поже спроеіе, поелику EA *5,1. равна EB ; по уголъ $\angle EAF$ равенъ углу $\angle EBF$ *. Но и прямой уголъ $\angle AFE$ равенъ прямому $\angle BFE$; посему два треугольника EAF , EBF имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, и одну сторону равную одной сторонѣ, то есть, имѣющую общую EF , противоположащую одному изъ равныхъ угловъ: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ *26,1. сторонамъ *. Чего ради AF равна FB .

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. п д. п.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя взаимно пресѣкаются, и не проходятъ обѣ чрезъ центръ; по обѣ не пресѣкнутся взаимно по поламъ

Пусть будетъ $ABCD$ кругъ; и пусть въ немъ двѣ прямыя AC , BD взаимно пресѣкутся въ точкѣ E , и не проходятъ обѣ чрезъ центръ. Говорю, что обѣ не пресѣкутся взаимно по поламъ.

Ибо, буде возможно, пусть обѣ пресѣкутся по поламъ, такъ что AE равна EC , и BE равна ED . Возьми центръ круга $ABCD^*$, и пусть будетъ оный F ; и про-^{*1.}пяти FE .

Поелику прямая FE , проходящая чрезъ центръ, прямую AC , непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами*: по-^{*3.}сему уголъ FEA есть прямой. Еще же, поелѣку прямая FE , «проходящая чрезъ центръ», прямую BD , не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами: посему уголъ FEB есть прямой. А доказано, что и уголъ FEA прямой: посему уголъ FEA равенъ углу FEB , меньшій большему; что невозможно. Чего ради AC , BD не пресѣкаются взаимно по поламъ.

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.

Ежели два круга взаимно пресѣкаются; то ихъ центръ не будетъ попо́лже.

Пусть два круга ABC , CDG взаимно пресѣкутся въ точкахъ B , C . Говорю, что ихъ центръ не попо́лже.

Ибо, буде возможно, пусть будетъ оный E : пропями EC ; и проводи какъ ниесъ прямую EFG .

Послику точка E естъ центръ круга ABC ; то EC равна EF . Еще же, поелику точка E естъ центръ круга CDG ; то CE равна EG . А доказано, что EC равна и EF : посему FE равна EG , меньшая большей; что невозможно. Чего ради точка E не естъ центръ круговъ ABC , CDG .

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VI.

Ежели два круга взаимно касаются внутри; то ихъ центръ не будетъ попо́лже.

Пусть два круга ABC , CDE взаимно касаются въ точкѣ C . Говорю, что ихъ центръ не попо́лже.

Ибо, буде возможно, пусть будетъ оный F : пропями FC ; и проводи какъ ниесъ прямую FEB .

Поелику точка F есть центръ круга ABC ; то FC равна BF . Еще же, поелику точка F есть центръ круга CDE ; то FC равна FE . А доказано, что FC равна и FB : посему FE равна FB , меньшая большей; что невозможно. Чего ради точка F не есть центръ круговъ ABC , CDE .

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели на поперечникѣ круга взята будетъ какая нисеть точка, которая не есть центръ его, и опъ сей точки упадутъ въ кругъ какія нисеть прямая: то наибольшая будетъ та, на коей центръ, а наименьшая остальная; изъ другихъ же, ближайшая къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше дальнейшей; и токмо двѣ равныя прямая опъ тойже точки могутъ упасть въ кругъ, по обѣимъ сторонамъ наименьшей.

Пусть будетъ $ABCD$ кругъ, и AD поперечникъ его; и на AD пусть будетъ взята какая нисеть точка F , которая не есть центръ круга; центръ же круга пусть будетъ E ; и опъ F пусть упадутъ въ кругъ $ABCD$ какія нисеть прямая FB , FC , FG . Говорю, что наибольшая есть FA , а най-

меньшая FD ; изъ другихъ же FB больше FC , а FC больше FG .

Пропяни BE , CE , GE .

Поелику всякаго шреугольника двѣ споро-
 20, I. ны больше оспальной, то EB , EF больше
 BF . Но AE равна BE ; посему BE , EF равна
 AF : а посему AF больше BF . Еще же, по-
 елику BE равна CE , а FE общая; то двѣ
 прямыя BE , EF равны двумъ прямымъ CE ,
 EF ; но уголь BEF больше угла CEF : чего
 *24, I. ради основаніе BF больше основанія CF *. По
 тому же и CF больше GF .

*20, I. Еще же, поелику GF , FE больше EG *, а
 EG равна ED ; посему GF , FE больше ED .
 Опними обще EF ; посему оспальная GF
 больше оспальной FD . Ипакъ наибольшая
 есть FA , а наименьшая FD ; и FB больше
 FC , а FC больше FG .

Говорю такожь, что опъ точки F покло
 двѣ равныя прямыя могуць упасиць въ кругъ
 $ABCD$, по обѣимъ споронамъ наименьшей
 FD . При прямой EF , и при почкѣ на ней
 *23, I. E , составъ уголь FEN равный углу GEF *; и
 пропяни FN . Поелику GE равна EN , а EF
 общая; то двѣ прямыя GE , EF равны двумъ
 прямымъ NE , EF ; и уголь GEF равенъ углу
 NEF : посему основаніе FG равно основа-
 *4, I. нію FN *.

Говорю еще, что прямой FG другая равная прямая не можетъ упасть въ кругъ опъ почки F . Ибо, буде возможно, пусть падаетъ таковая FK . Послику же FK равна FG , а и FN равна FG ; посему и FK равна FN , ближайшая къ проходящей чрезъ центръ равна дальнѣйшей; что невозможно.

Или и такъ. Пропяни EK . Поелику GE равна EK , а EF общая, и основаніе FG равно основанію FK ; то уголь GEF равенъ углу KEF *. Но уголь GEF равенъ углу FEN ; по- *8,1. сему и уголь FEN равенъ углу KEF , меньшій большему; что невозможно. А посему опъ почки F не можетъ упасть въ кругъ другая прямая равная GF , слѣдсвенно можетъ токмо одна.

Итакъ, ежели на поперечникъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели внѣ круга взята будетъ какая ниспъ почка, и опъ сей почки проведены будутъ къ кругу прямая, одна изъ нихъ чрезъ центръ, а прочія какъ ниспъ: то изъ прямыхъ падающихъ на вогнутую окружность, наибольшая есть проходящая чрезъ центръ; изъ другихъ же ближайшая къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше

дальнѣйшей: А изъ прямыхъ падающихъ на выпуклую окружность, наименьшая есть та, которая между точкою и поперечникомъ; изъ другихъ же ближайшая къ наименьшей, всегда меньше дальнѣйшей: и поемко двѣ равныя падаютъ отъ точки къ кругу, по обѣимъ сторонамъ наименьшей.

Пусть будетъ ABC кругъ; и въ ABC пусть будетъ взята какая нисетъ точка D ; и отъ оной пусть будутъ проведены какія нисетъ прямыя DA, DE, DF, DC , и изъ нихъ прямая DA чрезъ центръ. Говорю, что изъ сихъ прямыхъ, падающихъ на вогнутую окружность $AECF$, наибольшая есть DA , проходящая чрезъ центръ; ближайшая же къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше дальнѣйшей, то есть, DE больше DF , а DF больше DC : а изъ сихъ прямыхъ, падающихъ на выпуклую окружность $HLKG$, наименьшая есть DG , которая между точкою D и поперечникомъ AG ; ближайшая же къ наименьшей DG , всегда меньше дальнѣйшей, то есть, DK меньше DL , а DL меньше DH .

*1. Возьми центръ круга ABC *, и пусть будетъ оный M ; и пропни ME, MF, MC, MK, ML, MH .

Поелику AM равна EM , придай обще MD ; поему AD равна EM, MD . Но EM, MD

больше ED ; чего ради и AD больше ED . Еще же, поелику EM равна FM , а MD общая; по EM , MD равны FM , MD ; а уголь EMD больше угла FMD : посему основание ED больше основанія FD^* . Подобно докажемъ, что и FD больше CD . Ипакъ наибольшая есть DA , а DE больше DF , и DF больше DC .

И поелику MK , KD больше MD , и MG равна MK ; по и оспальная KD больше оспальной GD ; а посему и DG меньше DK : слѣдственно она есть наименьшая. Поелику же треугольника MLD , на одной изъ споронъ его MD , составлены внутри двѣ прямыя MK , KD ; по MK , KD меньше ML , LD^* ; а MK равна ML , посему оспальная DK меньше оспальной DL . Подобно докажемъ, что и DL меньше DH . Ипакъ наименьшая, есть DG , а DK меньше DL , и DL меньше DH .

Говорю такожь, что опъ точки D двѣ покло равныя прямыя могутъ упасть къ кругу, по обѣимъ споронамъ наименьшей DG . При прямой MD , и при точкѣ на ней M , составъ уголь DMB равный углу KMD^* ; и пропяти DB . Поелику MK равна MB , а MD общая; по двѣ прямыя KM , MD равны двумъ прямымъ BM , MD , каждая каждой; и уголь KMD равенъ

углу BMD : посему основаніе DK равно основанію DB .

Говорю еще, что прямой DK равная другая прямая не можетъ упасть къ кругу отъ точки D . Ибо, буде возможно, пусть упадетъ, и пусть будетъ таковая DN . Поелику же DK равна DN , а DK равна и DB ; посему и DB равна DN , ближайшая къ наименьшей DG равна дальнѣйшей; что, по доказанному, невозможно.

Или иначе. Пропяни MN . Поелику KM равна MN , а MD общая, и основаніе DK равно основанію DN ; посему уголъ KMD равенъ углу NMD . Но уголъ KMD равенъ углу BMD ; посему и уголъ BMD равенъ углу NMD , меньшій большему; что невозможно. А посему отъ точки D , не больше какъ токмо двѣ равныя прямыя могутъ упасть къ кругу ABC , по обѣимъ сторонамъ наименьшей DG .

Итакъ, ежели вѣ круга, и проч. ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели внутри круга взята будетъ какая нисетъ точка; и отъ сей точки въ кругѣ упадутъ больше нежели двѣ равныя прямыя: то взятая точка есть центръ круга.

Пусть будетъ ABC кругъ, и внутри его

точка D; и пусть опть D въ кругѣ ABC упадутъ больше нежели двѣ равныя прямыя, какъ DA, DB, DC, Говорю, что точка D естъ центръ круга ABC.

Пропяни AB, BC; и раздѣли оныя по поламъ въ точкахъ E, F*; и пропянувъ ED, *10, I. FD, продолжи оныя къ точкамъ K, G, L, H.

Ижелику AE равна EB, а ED общая; то двѣ прямыя AE, ED равны двумъ прямымъ BE, ED; и основаніе DA равно основанію DB: посему уголъ AED равенъ углу BED. Чего ради каждый изъ угловъ AED, BED естъ прямой; посему прямая HK разсѣкающая прямую AB по поламъ, разсѣкаетъ ее и подъ прямыми углами. Но естли въ кругѣ какая нисеть прямая другую прямую разсѣкаетъ по поламъ и подъ прямыми углами; то на сѣкущей естъ центръ круга*: посему на *слд: I. GK естъ центръ круга ABC. Потому же и на HL естъ центръ круга ABC. Прямые же GK, HL никакой другой общей точки не имѣютъ, кромѣ точки D; чего ради точка D естъ центръ круга ABC.

Итакъ, ежели внутри круга, и проч. ч. и д. н.

ИНАЧЕ. Внутри круга ABC пусть будетъ взята какая нисеть точка D; и пусть опть D, въ кругѣ ABC упадутъ больше нежели

двѣ равныя прямыя, какъ DA , DB , DC . Говорю, что взятая точка D есть центръ круга ABC .

Ибо, если бы нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ E ; и пропаянувъ DE , продолжи оную къ точкамъ F , G : посему FG есть поперечникъ круга ABC . Поелику круга ABC на поперечникѣ FG взята нѣкая точка D , которая не есть центръ круга; то наибольшая будетъ DG , а DC больше DB , и *7. DB больше DA *: но и равна ей, что невозможно; чего ради E не есть центръ круга ABC . Подобно докажемъ, что и ни другая какая ни есть, кромѣ D . Инакъ точка D есть центръ круга ABC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Кругъ не пресѣкаетъ другаго круга въ точкахъ больше двухъ.

Ибо, буде возможно, пусть кругъ ABC пресѣкаетъ другой кругъ DEF , въ точкахъ больше двухъ, какъ B , G , F , H . Пропаянувъ BH , BG , раздѣли оныя по поламъ въ точкахъ *10. I , K , L *; и оныя K , L , проведя подѣ прямыми *11. I , углами къ BH , BG , прямыя KS , LM *, продолжи оныя къ точкамъ A , E .

Поелику въ кругѣ ABC нѣкая прямая AC

другую прямую VH разсѣкаетъ по поламъ, и подѣ прямыми углами; то на AC есть центръ круга ABC^* . Еще же, поелику въ *сл. 1. помя же кругъ ABC , иѣкая прямая NO другую прямую BG разсѣкаетъ по поламъ, и подѣ прямыми углами; то на NO есть центръ круга ABC . А доказано, что и на AC ; прямая же AC , NO ни въ какой точкѣ взаимно не встрѣчаются, кромѣ P : посему точка P есть центръ круга ABC . Подобно докажемъ, что и круга DEF есть центръ P . Чего ради двухъ круговъ ABC , DEF , взаимно пресѣкающихся, будетъ центръ помя же P ; что невозможно*.

*5.

Итакъ кругъ не пресѣкаетъ, и пр. ч. и д. н.

ИНАЧЕ. Пусть опять кругъ ABC пресѣкаетъ другой кругъ DEF , въ точкахъ больше двухъ, какъ B , G , F . Во ѣми круга ABC центръ K ; и пропями KB , KG , KF .

Поелику вшупри круга DEF взята точка K , и отъ K въ кругъ DEF падають больше нежели двѣ равныя прямая, какъ KB , KF , KG ; то точка K есть центръ круга DEF^* . Но и *9. круга ABC есть центръ K : чего ради двухъ круговъ, взаимно пресѣкающихся, будетъ центръ помя же K ; что невозможно*.

*5.

Итакъ кругъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Ежели два круга взаимно касаются внутри; и взяты будутъ ихъ центры: то прямая пропаянная чрезъ ихъ центры, будучи продолжена, упадетъ на прикосновеніе круговъ.

Пусть два круга ABC , ADE взаимно касаются внутри, въ точкѣ A ; и пусть взяты будутъ, круга ABC центръ F , а круга ADE центръ G . Говорю, что прямая пропаянная отъ G къ F , будучи продолжена, упадетъ въ точку A .

Ибо, естли нѣтъ; то пусть, буде возможно, упадетъ какъ FGH . Прояни AF , AG .

20, I. Поелику AG , GF больше FA^ , то есть FN ; опничи обще FG : посему оспальная AG больше оспальной GN . Но AG равна DG : посему и GD больше GN , меньшая большей; что невозможно. А посему прямая пропаянная отъ F къ G , не упадетъ внѣ прикосновенія A : слѣдственно упадетъ на оное.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ИНАЧЕ. Но еще пусть упадетъ какъ GFC : продолжи впрямъ съ GFC прямую къ точкѣ N ; и прояни AG , AF .

Поелику AG , GF больше AF , а FA равна FC , то есть FN ; опними обще FG : посему оспальная AG больше оспальной GN , то есть GD больше GN , меньшая большеи; что невозможно. Подобно докажемъ, что сѣе неѣпо, еспѣли центръ круга большаго будепъ внѣ круга меньшаго.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Ежели два круга взаимно касаются внѣ; то прямая пропѣянутая чрезъ ихъ центры, пройдетъ чрезъ прикосновеніе.

Пуспъ два круга ABC , ADE взаимно касающіеся внѣ, въ почкѣ A ; и пуспъ будепъ круга ABC центръ F , а круга ADE центръ G . Говорю, что прямая пропѣянутая опъ F къ G , пройдетъ чрезъ прикосновеніе A .

Ибо, еспѣли нѣпъ; то пуспъ, буде возможно, пройдетъ какъ $FCDG$. Пропѣни FA , AG .

Поелику почка F еспъ центръ круга ABC ; то FA равна FC . Еще же, поелику почка G еспъ центръ круга ADE ; то AG равна GD . А доказано, что FA равна FC ; посему FA , AG равны FC , DG : а посему цѣлая FG больше FA , AG : но и меньше ея*; *20, I.

что невозможно. А посему прямая пропяннутая отъ F къ G , не пройдетъ не чрезъ прикоснове-
нїе A : слѣдственно пройдетъ чрезъ оное.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Кругъ не касается къ другому кругу въ
точкахъ больше одной, хопя каснется
внутри, хопя внѣ его.

Ибо, буде возможно, пусть кругъ $ABDC$
каснется къ другому кругу $EBFD$, впер-
выхъ внутри, въ точкахъ больше одной,
какъ B , D .

Возьми круга $ABDC$ центръ G , а круга
•1. $EBFD$ центръ H .

Итакъ прямая, пропяннутая отъ G къ H ,
•11. упадетъ въ точки B , D . Пусть упадетъ
какъ $BGHD$. И поелику точка G есть
центръ круга $ABDC$, то BG равна GD : по-
сему BG больше HD ; а посему BH гораздо
больше HD . Еще же, поелику точка H есть
центръ круга $EBFD$; то BH равна HD . А
доказано, что она гораздо больше; что
невозможно. Чего ради кругъ не касается
къ другому кругу, внутри его, въ точкахъ
больше одной.

Говорю еще, что и не касается внѣ. Ибо
буде возможно, пусть кругъ ACK каснется къ

другому кругу $ABCD$ внѣ, въ точкахъ больше одной, какъ A, C . Пропяни AC .

Поелику на окружностяхъ обоихъ круговъ $ABDC, AСК$, взяты нѣкія двѣ точки A, C ; то прямая проптянутая чрезъ сіи точки, упадетъ внутри каждого*. Но она падаетъ *2. внутри круга $ABDC$, а внѣ круга $АСК$ *; что *опр. 3. нелѣпо. Чего ради кругъ не касается къ другому кругу внѣ его, въ точкахъ больше одной, A доказано, что и ни внутри:

Итакъ кругъ не касается, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Въ кругѣ равныя прямыя равно отстоятъ отъ центра: и которыя прямыя равно отстоятъ отъ центра, суть взаимно равныя.

Пусть будетъ $ABDC$ кругъ, и пусть будутъ въ немъ равныя прямыя AB, CD . Говорю, что онѣ равно отстоятъ отъ центра.

Возьми центръ круга $ABDC$ *, и пусть *1. будетъ оный E ; и отъ E проводи перпендикулярныя къ AB, CD , прямыя EF, EG *; и *1, 2, 1. пропяни AE, CE .

Поелику прямая EF , проходящая чрезъ центръ, прямую AB , непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ подъ прямыми углами; то разсѣчетъ оную и по поламъ*: *3.

посему AF равна BF ; а посему AB есть двукратная прямой AF . Пошому же и CD есть двукратная прямой CG . Инакъ AB равна CD : посему и AF равна CG . И поелику AE равна EC ; то квадрапъ изъ AE равенъ квадрапу изъ EC . Но квадрапу изъ AE *47, I. равны квадрапы изъ AF , FE^* , ибо уголь при F есть прямой; квадрапу же изъ EC равны квадрапы изъ EG , GC , ибо уголь при G есть прямой: посему квадрапы изъ AF , FE равны квадрапамъ изъ CG , GE . Но въ нихъ квадрапъ изъ AF равенъ квадрапу изъ CG , ибо AF равна CG : посему оспальной квадрапъ изъ FE равенъ оспальному изъ EG ; а посему FE равна EG . Въ кругъ же прямыя называются равно оспстоящими отъ центра; когда отъ центра проведенныя *опр. 4. перпендикулярныя къ нимъ равны*: чего ради AB , CD равно оспстоятъ отъ центра.

Но пусть прямыя AB , CD равно оспстоятъ отъ центра, то есть, пусть будетъ EF равна EG . Говорю, что и AB равна CD .

Сдѣлавъ то же строеніе, подобно докажемъ, что AB есть двукратная прямой AF , а CD двукратная прямой CG . И поелику AE равна CE ; то квадрапъ изъ AE равенъ квадрапу изъ CE . Но квадрапу изъ AE равны квадрапы изъ EF , FA ; квадрапу же изъ CE равны

квадраты изъ EG , GC : посему квадраты изъ EF , FA равны квадратамъ изъ EG , GC . Но въ нихъ квадратъ изъ EF равенъ квадрату изъ EG , ибо EF равна EG : посему остальной квадратъ изъ AF равенъ остальному изъ CG ; а посему AF равна CG . Но прямой AF двукратная есть AB , а прямой CG двукратная CD ; чего ради AB равна CD .

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Въ кругѣ наибольшая прямая есть поперечникъ; изъ другихъ же, ближайшая къ центру всегда больше дальнѣйшей.

Пусть будетъ $ABCD$ кругъ; и пусть будетъ поперечникъ его AD , а центръ E ; ближайшая же къ центру пусть будетъ BC , а дальнѣйшая FG . Говорю, что наибольшая есть AD , а BC больше FG .

Отъ центра E проводи, перпендикулярныя къ BC , FG , прямыя EH , EK^* . Поелику ближайшая къ центру есть BC , а дальнѣйшая FG ; то EK больше EH^* . Положи прямую EL *опр.5. равную EH ; и чрезъ L проведя подъ прямыми углами къ EK , прямую LM , продолжи оную къ N ; и просяни EM , EN , EF , EG .

Поелику EH равна EL ; то и BC равна MN^* . Еще же, поелику AE равна EM , и ED *14.

равна EN ; то AD равна ME , EN . Но ME , EN больше MN ; посему и AD больше MN . А MN равна BC ; посему AD больше и BC . И поелику двѣ прямыя ME , EN равны двумъ прямымъ FE , EG ; а уголъ MEH больше угла FEH : *24, I. посему основаніе MN больше основанія FG . Но MN , по доказанному, равна BC , посему и BC больше FG . Чего ради, наибольшая есть поперечникъ AD , а BC больше FG .

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Прямая, проведенная опъ конца поперечника круга подъ прямыми къ оному угламъ, падаетъ внѣ круга: Въ пространствѣ же между прямою и окружностію не можеть упасть другая прямая: И уголъ полукружія есть больше всякаго прямолинейнаго оспраго угла; а оспальной меньше.

Пусть будетъ ABC кругъ около центра D и поперечника AB . Говорю, что прямая, проведенная опъ A подъ прямыми углами къ AB , падаетъ внѣ круга.

Ибо, есѣли нѣтъ; то пусть, буде возможно, упадетъ внутри, какъ AC ; и продолжи DC .

Поелику DA равна DC ; то уголъ DAC равенъ углу ACD^* . Но уголъ DAC прямой; по- *5. сему и уголъ ACD есть прямой: а по сему треугольника ACD , два угла DAC , ACD равны двумъ прямымъ; что невозможно*. По сему *7,1. прямая, проведенная опъ точки A подъ прямыми углами къ BA , не падаетъ внутри круга. Подобно докажемъ, что ни на окружнсти; слѣдственно падаетъ внѣ круга, какъ AE .

Говорю еще, что въ пространствѣ между прямою AE и окружнстію CNA не можетъ упасиь другая прямая.

Ибо, буде возможно, пусть упадетъ, какъ FA . Опъ точки D проводи, перпендикулярную къ FA , прямую DG .

Поелику уголъ AGD прямой, а уголъ DAG меньше прямого; то AD больше DG^* . Но AD *19,1. равна DN : по сему DN больше DG , меньшая большей; что невозможно. Ипакъ въ пространствѣ между прямою и окружнстію не можетъ упасиь другая прямая.

Говорю такожь, что уголъ полукружія, содержимый прямою BA и окружнстію CNA , есть больше всякаго прямолинейнаго остраго угла; а оспальной, содержимый окружнстію CNA и прямою AE , меньше всякаго прямолинейнаго остраго угла.

Ибо, буде есть какой либо прямолинейной

уголъ, копорый больше содержамаго прямою ВА и окружностію СНА, а меньше содержамаго окружностію СНА и прямою АЕ; то въ пространствѣ между окружностію СНА и прямою АЕ упадесть прямая, копорая сдѣлаесть уголъ содержаемый прямыми, больше угла содержамаго прямою ВА и окружностію СНА, а меньше содержамаго окружностію СНА и прямою АЕ. Но таковая не можетъ упасть; слѣдственно не можетъ быть такой острой уголъ содержаемый прямыми копорый больше угла содержамаго прямою ВА и окружностію СНА, ни такой, копорый меньше содержамаго окружностію СНА и прямою АЕ. Что и доказать надлежало.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуетъ, что прямая проведенная отъ конца поперечника круга, подъ прямыми къ оному углами, касается къ кругу; и что прямая касается къ кругу только въ одной точкѣ. Ибо прямая встрѣчающая оный въ двухъ, упа-
2. десть, по доказанному, внутри его. (26).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Отъ данной точки провести прямую линію, касательную къ данному кругу.

Пусть будетъ А данная точка, а ВСД

данный кругъ. Надлежитъ отъ точки А провести прямую линію, касательную къ кругу BCD.

Возьми круга центръ E^* ; и пропни AE; и $*_1$. изъ центра E, разстояніемъ EA напиши кругъ AFG; и отъ D проводи, подъ прямыми углами къ EA, прямую DF; и пропни EF, AB. Говорю, что отъ точки А проведена, касательная къ кругу BCD, прямая AB.

Поскольку E есть центръ круговъ BCD, AFG: то EA равна EF и ED равна EB. Итакъ двѣ прямыя AE, EB равны двумъ прямымъ FE, ED; и содержатъ уголъ общій при E: посему* основаніе DF равно основанію $*_4, 1$. AB; и треугольникъ EDF равенъ треугольнику EBA; и прочіе углы прочимъ угламъ, посему уголъ EDF равенъ углу EBA. Но уголъ EDF прямой; посему и уголъ EBA есть прямой: но EB есть прямая отъ центра; прямая же, проведенная отъ конца поперечника круга, подъ прямыми къ оному углами, касается къ кругу*: чего ради прямая AB есть касательная къ кругу. *сл: 16.

Итакъ отъ данной точки А проведена, касательная къ данному кругу BCD, прямая линія AB. ч. и с. н. (27).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели прямая касается къ кругу; и опъ центра къ прикосновенію пропянута будетъ прямая: то пропянутая прямая будетъ перпендикулярна къ касательной.

Пусть касается къ кругу ABC прямая DE въ точкѣ C ; и пусть будетъ взятъ круга ABC центръ F ; и опъ F къ C пусть будетъ пропянута прямая FC . Говорю что FC перпендикулярна къ DE .

Ибо, буде иѣтъ; то опъ F проведи, перпендикулярную къ DE , прямую FG .

Поелику уголъ FGC прямой; то уголъ FCG *17, I. есть острый*: а большому углу противу-
19, I. лежитъ большая сторона; посему FC больше FG . Но FC равна FB : посему и FB больше FG , меньшая большей; что невозможно. А посему FG не перпендикулярна къ DE . Подобно докажемъ, что и ни другая какая нисетъ, кромѣ FC ; чего ради FC перпендикулярна къ DE .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели прямая касается къ кругу; и опъ прикосновенія проведена будетъ прямая, подъ прямыми углами къ касательной: то на проведенной прямой будетъ центръ круга.

Пусть касается къ кругу ABC прямая DE въ точкѣ C ; и пусть будетъ опъ C проведена, подъ прямыми углами къ DE , прямая CA . Говорю, что на AC есть центръ круга.

Ибо, еслии нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ оный F . Пропяни CF .

Поелику прямая DE касается къ кругу ABC , и опъ центра къ прикосновенію пропянута прямая FC ; то FC перпендикулярна къ DE : *18. поему уголъ FCE есть прямой. А и уголъ ACE прямой: поему уголъ FCE равенъ углу ACE , меньшій большему; что невозможно. Чего ради F не есть центръ круга ABC . Подобно докажемъ, что и ни другая какая либо точка, развѣ копорая на AC .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н. (28).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Въ кругѣ, уголъ при центрѣ есть двукрапный угла при окружности, когда они ту же дугу имѣютъ основаніемъ.

Пусть будетъ ABC кругъ; и при центрѣ его пусть будетъ уголъ BEC , а при окружности уголъ BAC , кои пусть имѣютъ ту же дугу BC основаніемъ. Говорю, что уголъ BEC есть двукрапный угла BAC .

Пропянувъ AE , продолжи оную къ F .

Поелику EA равна EB ; то уголъ EAB равенъ углу EBA : посему углы EAB , EBA суть двукрапны угла EAB . Но уголъ BEF *32,1. равенъ угламъ EAB , EBA *; посему и уголъ BEF есть двукрапный угла EAB . Поному же и уголъ FEC есть двукрапный угла EAC . Чего ради цѣлой уголъ BEC есть двукрапный цѣлаго угла BAC .

Наклони уголъ BAC , и пусть будетъ другой уголъ BDC . Пропянувъ DE , продолжи оную къ G : то подобно же докажемъ, что уголъ GEC есть двукрапный угла GDC . Но въ нихъ уголъ GEB есть двукрапный угла GDB ; чего ради оспальной уголъ BEC есть двукрапный оспального BDC .

Инакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XXI.

Въ кругѣ, въ томъ же отрѣзкѣ углы взаимно равны.

Пусть будетъ $ABCD$ кругъ; и въ его отрѣзкѣ $BAED$ пусть будутъ углы BAD , BED . Говорю, что углы BAD , BED взаимно равны.

1. Возьми круга $ABCD$ центръ, и пусть будетъ оный F ; и пропями BF , FD .

Поелику уголъ BFD есть при центрѣ, а уголъ BAD при окружности, и имѣють ту

же дугу BCD основаніемъ; то уголъ BFD естъ двукрапный угла BAD^* . Поному же *20. уголъ BFD естъ двукрапный и угла BED . Чего ради уголъ BAD равенъ углу BED .

Ипакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Въ кругахъ, чепыреугольниковъ пропивулежащіе углы равны двумъ прямымъ.

Пуспъ будепъ $ABCD$ кругъ; и въ немъ пуспъ будепъ чепыреугольникъ $ABCD$. Говорю, чпо его пропивулежащіе углы равны двумъ прямымъ.

Проппани AC , BD .

Поелику всякаго преугольника при угла равны двумъ прямымъ*; по преугольни- *32,1. ка ABC при угла CAB , ABC , BCA равны двумъ прямымъ. По углу BAC равенъ уголъ CDB^* , ибо они въ помъже опрѣзкѣ $BADC$; *21. а углу ADB , равенъ уголъ ACB , ибо они въ помъже опрѣзкѣ $ADCB$: посему цѣлой уголъ ADC равенъ угламъ BAC , ACB . Придай обще уголъ ABC ; посему углы ABC , BAC , ACB равны угламъ ABC , ADC . Но углы ABC , BAC , ACB равны двумъ прямымъ; чего ради и углы ABC , ADC равны двумъ прямымъ. Подобно докажемъ, чпо и углы BAD , DCB равны двумъ прямымъ.

Ипакъ въ кругахъ, и проч. ч. и д. н. (29).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

На тойже прямой и по ту же ея сторону, не могутъ бытъ составлены два опрѣзка круговъ подобные и неравные.

Ибо, буде возможно, пусть на той же прямой AB и по ту же ея сторону, будучь составлены два опрѣзка круговъ подобные и неравные ACB , ADB .

Проведи ACD ; и пропни CB , DB .

Поскольку опрѣзокъ ACB подобенъ опрѣзку ADB ; подобные же опрѣзки круговъ суть *опр. II. $\angle B$, кои вмѣщаютъ равные углы*: то уголъ ACB равенъ углу ADB , внѣшнѣй внупрен-
16, I. нему; что невозможно.

Итакъ на тойже прямой, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

На равныхъ прямыхъ, подобные опрѣзки круговъ взаимно равны.

Пусть будучь на равныхъ прямыхъ AB , CD подобные круговъ опрѣзки AEB , CFD . Говорю, что опрѣзокъ AEB равенъ опрѣзку CFD .

Ибо, еслии помѣстимъ опрѣзокъ AEB на опрѣзокъ CFD , и положимъ точку A на точку C , а прямую AB на прямую CD : то точка B совмѣстится съ точкою D , послѣ-

ку АВ равна CD. Когда же АВ совмѣстилась съ CD, то и опрѣзокъ АЕВ совмѣстился съ опрѣзкомъ CFD. Ибо, если бы по совмѣщеніи прямой АВ съ прямою CD, опрѣзокъ АЕВ не совмѣстился съ опрѣзкомъ CFD: то пусть перемѣнитъ положеніе, какъ CHGD. Но кругъ не пресѣкаетъ другаго круга въ точкахъ больше двухъ*; а *10. кругъ CHGD пресѣчетъ кругъ CFD больше нежели въ двухъ точкахъ, въ C, G, D: что невозможно. Посему, когда прямая АВ совмѣстилась съ прямою CD, не можетъ несовмѣститься опрѣзокъ АЕВ съ опрѣзкомъ CFD; слѣдственно совмѣстится, и будетъ равенъ ему.

Итакъ на равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Дописать кругъ, коего опрѣзокъ данъ.

Пусть будетъ ABC данный опрѣзокъ круга. Надлежитъ дописать кругъ, коего ABC есть опрѣзокъ.

Раздѣли AC пополамъ въ D*; и опиши точки *10, 1. D проводи, подъ прямыми углами къ AC, прямую DV*; и пропни АВ. Иначе уголъ *11, 1. ABD или больше угла BAD, или равенъ ему, или меньше его.

Пусть будетъ, во первыхъ, больше. При прямой BA , и при точкѣ на ней A , составь *23, I. уголъ BAE равный углу ABD^* ; и продолжи DB къ E ; и пропни EC . Поелику же уголъ ABE равенъ углу BAE ; то и прямая BE *6, I. равна прямой EA^* . II поелику AD равна DC , а DE общая; то двѣ прямыя AD , DE равны двумъ прямымъ CD , DE , каждая каждой; и уголъ ADE равенъ углу CDE , ибо каждый изъ нихъ прямой: посему основаніе AE равно основанію CE . Но AE , по доказанному, равна EB ; посему и BE равна CE ; слѣдственно при AE , EB , EC взаимно равны: а посему кругъ, изъ центра E и разстояніемъ которой нисеть изъ прямыхъ AE , EB , EC написанный, пройдетъ чрезъ прочія точки*; и такъ кругъ, коего опрѣзокъ данъ, будетъ дописанъ. Припомъ явно, что опрѣзокъ ABC будетъ меньше полукружія; поелику центръ E падаетъ внѣ опрѣзка.

Подобно, есѣли уголъ ABD равенъ углу BAD , то сдѣлана прямая AD , равная каждой изъ прямыхъ BD , DC : посему при DA , DB , DC будутъ взаимно равны, и D будетъ центръ дополненнаго круга; припомъ же ABC будетъ полукружіе.

Есѣли же уголъ ABD меньше угла BAD ; и есѣли при прямой BA , и при точкѣ на

ней A , составимъ уголъ равный углу ABD : по центръ упадемъ внутри опрѣзка ABC , на прямой DB ; и припомъ опрѣзокъ ABC будетъ больше полукружїя.

Итакъ дописанъ кругъ, коего опрѣзокъ данъ. Ч. и С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Въ равныхъ кругахъ, равные углы стоятъ на равныхъ дугахъ, хотя будутъ стоять при центрахъ, хотя при окружностяхъ.

Пусть будутъ ABC , DEF равные круги; и въ нихъ пусть будутъ при центрахъ равные углы BGC , EHF , а при окружностяхъ углы BAC , EDF . Говорю, что дуга BKC равна дугѣ ELF .

Пропяни BC , EF .

Поелику круги ABC , DEF равны, то и прямая изъ центровъ ихъ равна*; и такъ *опр. I. двѣ прямыя BG , GC равны двумъ прямымъ EH , HF ; и уголъ при G равенъ углу при H : посему основаніе BC равно основанію EF . И поелику уголъ при A равенъ углу при D ; то опрѣзокъ BAC подобенъ опрѣзку EDF *, и *опр. II. суть на равныхъ прямыхъ BC , EF . На равныхъ же прямыхъ, подобные опрѣзки круговъ, взаимно равны~; посему опрѣзокъ *24.

ВАС равенъ опрѣзку EDF. А и цѣлый кругъ ABC равенъ цѣлому кругу DEF; посему оспальной опрѣзокъ ВКС равенъ оспальному опрѣзку ELF: чего ради дуга ВКС равна дугѣ ELF.

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Въ равныхъ кругахъ, на равныхъ дугахъ стоящіе углы взаимно равны, хопя budú споятъ при центрахъ, хопя при окружностяхъ.

Пусть въ равныхъ кругахъ ABC, DEF, и на равныхъ дугахъ BC, EF, budú споятъ при центрахъ G, H, углы BGC, EHF, а при окружностяхъ углы BAC, EDF. Говорю, что уголъ BGC равенъ углу EHF; а уголъ BAC углу EDF.

Ибо, есѣли уголъ BGC равенъ углу EHF;
20. то явно, что и уголъ BAC равенъ углу EDF.

Есѣли же нѣтъ; то одинъ изъ нихъ большій: пусть будетъ уголъ BGC большій. При прямой BG, и при точкѣ на ней G, составь уголъ BGK равный углу EHF. И поелику равные углы споятъ на равныхъ дугахъ, когда они при центрахъ;
*26. то дуга BK равна дугѣ EF. Но EF равна

BC: посему и BK равна BC, меньшая большей; что невозможно. А посему угол BGC не равенъ углу ENF; слѣдственно равенъ. Но угла BGC естъ половина уголъ при A, а угла ENF естъ половина уголъ при D; чего ради и уголъ при A равенъ углу при D.

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н. (30).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Въ равныхъ кругахъ, равныя прямая оппимающъ равныя дуги, большую дугу равную большей, а меньшую меньшей.

Пусть будутъ ABC, DEF равныя круги; и въ нихъ пусть будутъ AB, DE равныя прямая, кои оппимающъ дуги ACB, DFE большія, а AGB, DNE меньшія. Говорю, что большая дуга ACB равна большей дугѣ DFE, а меньшая дуга AGB равна меньшей DNE.

Возьми круговъ центры K, L*; и пропяхи *1. АК, KB, DL, LE.

Поелику круги равны, то и прямая изъ центровъ ихъ равны. Итакъ двѣ прямая АК, KB равны двумъ прямымъ DL, LE; и основаніе AB равно основанію DE: посему уголъ АКВ равенъ углу DLE. Равны же углы споятъ на равныхъ дугахъ, когда

- *26. они при центрах*; посему дуга AGB равна дугѣ DIE . А и цѣлый кругъ ABC равенъ цѣлому кругу DEF : чего ради и оспальная дуга ACB равна оспальной дугѣ DFE .
Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Въ равныхъ кругахъ, равныя дуги стягиваются равными прямыми.

Пусть будутъ ABC , DEF равные круги; и въ нихъ пусть будутъ взяты равныя дуги BGC , EHF , и пропятины прямая BC , EF . Говорю, что прямая BC равна прямой EF .

- *1. Возьми круговъ центры*, и пусть будутъ оныя K, L ; и пропятины BK, KC, EL, LF .

- Поелику дуга BGC равна дугѣ EHF ; то и *27. уголъ BKC равенъ углу ELF *. И поелику круги ABC , DEF равны; то и прямая изъ центровъ ихъ равны. Итакъ двѣ прямыя BK, KC равны двумъ прямымъ EL, LF , и содержатъ равныя углы; посему основаніе BC равно основанію EF .

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Данную дугу раздѣлить по поламъ.

Пусть будетъ ADB данная дуга. Надлежитъ дугу ADB раздѣлить по поламъ.

Пропяни AB ; и раздѣли оную по поламъ въ C^* ; и опъ почки C проводи, подъ пря- *10, I. мыми углами къ AB , прямую CB^* ; и про- *11, I. пяни AD , DB .

Поелику AC равна CB , а CD общая; то двѣ прямыя AC , CD равны двумъ прямымъ BC , CD ; и уголъ ACD равенъ углу BCD , ибо каждый изъ нихъ прямой: посему основаніе AD равно основанію DB . Равныя же прямыя опнимающъ равныя дуги, большую дугу равную большей, а меньшую меньшей*; и каждая изъ *28. дугъ AD , DB еспъ меньше полукружія: чего ради дуга AD равна дугѣ DB .

Итакъ данная дуга раздѣлена по поламъ. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Въ кругѣ, уголъ въ полукружіи еспъ прямой, въ опрѣзкѣ же большемъ полукружія уголъ меньше прямого; а въ опрѣзкѣ меньшемъ уголъ больше прямого. И еще, уголъ большаго опрѣзка еспъ больше прямого; а уголъ меньшаго опрѣзка меньше прямого.

Пуспъ будепъ $ABCD$ кругъ; и пуспъ будепъ BC его поперечникъ, а E ценпръ; и пропяни BA , AC , AD , DC . Говорю, что въ

полукружїи ВАС уголъ ВАС есїь прямой ; въ опрѣзкѣ же АВС большемъ полукружїи уголъ АВС меньше прямого ; а въ опрѣзкѣ ADC меньшемъ полукружїи уголъ ADC больше прямого.

Пропяни АЕ ; и продолжи ВА къ F.

Поелику ВЕ равна ЕА ; то уголъ АВЕ равенъ углу ВАЕ. Еще же , поелику СЕ равна ЕА ; то уголъ АСЕ равенъ углу САЕ. Посему цѣлый уголъ ВАС равенъ двумъ угламъ АВС , АСВ. Но и уголъ FAC , какъ внѣшній преутольника АВС , равенъ двумъ *32,1. угламъ АВС , АСВ* ; посему уголъ ВАС равенъ углу FAC ; а посему каждый изъ нихъ есїь прямой. Чего ради въ полукружїи ВАС уголъ ВАС есїь прямой.

И поелику преутольника АВС два угла АВС , *17,1. ВАС меньше двухъ прямыхъ* ; и уголъ ВАС есїь прямой : то уголъ АВС меньше прямого ; и онъ въ опрѣзкѣ АВС большемъ полукружїи.

И поелику ABCD есїь чепыреутольникъ къ кругѣ ; а въ кругахъ , чепыреутольниковъ *22. прошивулежащіе углы равны двумъ прямымъ* : посему углы АВС , ADC равны двумъ прямымъ. Но уголъ АВС меньше прямого : чего ради оспальной уголъ ADC есїь больше прямого ; и онъ въ опрѣзкѣ ADC меньшемъ полукружїи.

Говорю еще, что уголъ большаго опрѣзка, содержимый дугою ABC и прямою AC , есть больше прямого; а уголъ меньшаго опрѣзка, содержимый дугою ADC и прямою AC , есть меньше прямого. Сіе очевидно: Ибо, какъ уголъ содержимый прямыми BA , AC есть прямой; то содержимый дугою ABC и прямою AC есть больше прямого. Еще же, поелику уголъ содержимый прямыми AC , AF есть прямой; то содержимый прямою CA и дугою ACD меньше прямого.

Ипакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ИНАЧЕ. Доказывается, что уголъ BAC прямой. Поелику уголъ AEC есть двукрапный угла BAE , ибо равенъ двумъ внупрѣннымъ прошивулежащимъ; а и уголъ AEB есть двукрапный угла EAC : посему углы AEB , AEC суть двукрапные угла BAC . Но углы AEB , AEC равны двумъ прямымъ*; чего *13.1. ради уголъ BAC есть прямой. ч. и д. н.

Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что если ли въ преугольникѣ одинъ уголъ равенъ двумъ прочимъ; то оный уголъ будетъ прямой, ибо и его смѣжный равенъ тѣмъ же угламъ. А когда смѣжные углы равны, то они суть прямые.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Ежели прямая касается къ кругу, и опъ прикосновенія проведена будеть въ кругъ какая нисеть прямая сѣкущая сей кругъ: то углы, копорые она дѣлаеть при касательной, будупъ равны угламъ въ накосълежащихъ опрѣзкахъ круга.

Пусъ къ кругу ABCD касается прямая EF въ почкѣ В; и опъ точки В пусъ проведена будеть въ кругъ ABCD прямая BD, сѣкущая оный. Говорю, что углы, копорые BD дѣлаеть съ касательною EF, равны угламъ въ накосълежащихъ опрѣзкахъ круга, то еснъ, что уголь FBD равенъ углу въ опрѣзкѣ BAD составленному, а уголь DBE равенъ углу въ опрѣзкѣ DCB.

Проведи опъ В, подъ прямыми углами къ EF, прямую ВА; и возьми на дугѣ BD какую нисеть почку С; и пропни AD, DC, CB.

Поелику къ кругу ABCD касается прямая EF въ почкѣ В, и опъ прикосновенія В проведена, подъ прямыми углами къ касательной, прямая ВА: то на ВА естъ деистръ *19. круга ABCD*; почему ВА естъ поперечникъ круга ABCD. Слѣдственно уголь ADB, въ *31. полукружіи составленный, естъ прямой*; поему остальные углы BAD, ABD «пре-

углы ABD » равны одному прямому. И угол ABF прямой же; посему угол ABF равен углам BAD , ABD . Определим вообще угол ABD ; посему остальной угол DBF равен углу BAD въ наклоняющемся опрѣзкѣ круга. И поелику $ABCD$ есть чепыреугольникъ въ кругѣ; по противуположающіе его углы равны двумъ прямымъ*. А и углы DBF , *22. DBE равны двумъ прямымъ; посему углы DBF , DBE равны угламъ BAD , BCD . Но въ нихъ уголъ BAD равенъ, по доказанному, углу DBF ; чего ради остальной уголъ DBE равенъ углу DCB въ наклоняющемся опрѣзкѣ DCB круга.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

На данной прямой написать опрѣзокъ круга, вмѣщающій уголъ равный данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ AB данная прямая, а C данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ на данной прямой AB написать опрѣзокъ круга, вмѣщающій уголъ равный углу C . Уголъ же C есть или острый, или прямой, или тупой.

Пусть будетъ, во первыхъ, острый, какъ въ первой фигурѣ. При прямой AB , и при

- *23. I. почкѣ А, соспавъ уголъ BAD равный углу C .
 по нему и уголъ BAD естъ оспрой. Проведи
 ошъ почки А, подъ прямыми углами къ AD ,
 *11. I. прямую AE ; и раздѣли AB по поламъ въ
 F ; и проводи ошъ почки F , подъ прямыми
 углами къ AB , прямую FG ; и пропхни GB .
 Поелику AF равна FB , а FG общая; по
 двѣ прямыя AF , FG равны двумъ прямымъ
 FB , FG ; и уголъ AFG равенъ углу BFG : по
 сему основаніе AG равно основанію GB . Слѣд-
 ственно кругъ, изъ центра G и разстояніемъ
 GA написанный, пройдетъ и чрезъ B . Напиши
 сей кругъ; и пусть онъ будетъ ABE ; и
 пропхни BE . Поелику ошъ конца A по-
 перечника AE проведена, подъ прямыми угла-
 ми къ AE , прямая AD ; по AD касательна къ
 16. кругу. И поелику къ кругу ABE касается пря-
 мая AD ; и ошъ прикосновенія A проведена въ
 кругъ ABE прямая AB : по уголъ DAB равенъ уг-
 32. лу AEB , въ наклоняющемъ опрѣзкѣ круга.
 Но уголъ DAB равенъ углу C ; по сему и уголъ C
 равенъ углу AEB . Ипакъ на данной прямой AB
 написать опрѣзокъ круга AEB , вмѣщающій
 уголъ AEB равный данному углу C .

Но пусть будетъ уголъ C прямой; и
 пусть надлежитъ еще на AB написать оп-
 рѣзокъ круга, вмѣщающій уголъ равный
 прямому C . Соспавъ еще уголъ BAD равный

прямому углу C , какъ значился на второй фигурѣ; и раздѣли AB по поламъ въ F ; и изъ центра F , разстояніемъ копорой внесишь изъ прямыхъ FA , FB , напиши кругъ AEB . Ипакъ прямая AD касательна къ кругу AEB^* , по причинѣ, что уголъ $\angle BAD$ при A есть прямой: и уголъ $\angle BAD$ равенъ углу въ опрѣзкѣ AEB ; поелику и сей уголъ есть прямой*, ибо находится въ полукружїи. Но $\angle BAD$ равенъ углу C ; посему и уголъ въ опрѣзкѣ AEB равенъ углу C . Ипакъ на AB еще написать опрѣзокъ круга AEB , вмѣщающій уголъ равный углу C .

Но еще пусть будетъ уголъ C тупой. Соспавъ при прямой AB и при точкѣ A , сему углу равный, уголъ $\angle BAD$, какъ значился на третьей фигурѣ; и проводи, подъ прямыми углами къ AD , прямую AE ; и раздѣли опять AB по поламъ въ F ; и проводи, подъ прямыми углами къ AB , прямую FG ; и соедини GB . Поелику опять AF равна FB , а FG общая; подѣвъ прямые AF , FG равны двумъ прямымъ BF , FG ; и уголъ $\angle AFG$ равенъ углу $\angle BFG$: посему основаніе AG равно основанію BG . Слѣдственно кругъ, изъ центра G и разстояніемъ GA написанный, пройдетъ и чрезъ B . Пусть проходитъ какъ AEB . Поелику же къ поперечнику AE , отъ конца его, проведена

- подъ прямыми углами, прямая AD ; то AD
 *16. касательна къ кругу AEB . и опъ прикоснове-
 нія, что въ A , проведена прямая AB ; посему
 уголъ BAD равенъ углу составленному въ па-
 *32. косълежащемъ круга опрѣзкѣ $АНВ$ *. Но уголъ
 BAD равенъ углу C ; посему и уголъ въ
 опрѣзкѣ $АНВ$ равенъ углу C .
 Ипакъ на данной прямой AB написать
 опрѣзокъ круга $АНВ$, вмѣщающій уголъ
 равный углу C . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Опъ даннаго круга опиятъ опрѣзокъ,
 вмѣщающій уголъ равный данному прямо-
 линейному углу.

Пуспь будетъ ABC данный кругъ, а D
 данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ
 опъ круга ABC опиятъ опрѣзокъ, вмѣща-
 ющій уголъ равный углу D .

Проведи къ кругу ABC касательную EF
 *17. въ точкѣ B *; и составь при прямой EF , и
 при данномъ на ней точкѣ B , уголъ FBC рав-
 ный углу D .

Повелику къ кругу ABC касается прямая
 EF , и опъ прикосновенія B проведена прямая
 BC ; то уголъ FBC равенъ углу составлен-
 32. ному въ BAC , въ накосълежащемъ опрѣзкѣ.

Но уголъ FBC равенъ углу D ; посему и уголъ въ опрѣзкѣ BAC равенъ углу D .

Итакъ опъ даннаго круга ABC опныпъ опрѣзокъ BAC , вмѣщающій уголъ равный данному прямолинейному углу D . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя взаимно пресѣкуся; то прямоугольникъ содержимый въ опрѣзкахъ одной равенъ прямоугольнику содержимому въ опрѣзкахъ другой.

Пусть въ кругѣ $ABCD$, двѣ прямыя AC , BD , взаимно пресѣкуся въ точкѣ E . Говорю, что прямоугольникъ въ AE , EC равенъ прямоугольнику въ DE , EB .

Ежели прямыя AC , BD проходяпъ чрезъ центръ, такъ что E будетъ центръ круга $ABCD$; то явно, что по равенству прямыхъ AE , EC , DE , EB , и прямоугольникъ въ AE , EC равенъ прямоугольнику въ DE , EB .

Но пусть прямыя AC , DB не проходятъ чрезъ центръ. Возьми центръ круга $ABCD^*$, и ^{*1.} пусть будетъ оный F ; и опъ F проведи, перпендикулярныя къ AC , DB , прямыя FG , FH ; и пропни FB , FC , FE .

Поелику прямая FG , проходящая чрезъ центръ, прямую AC , непроходящую чрезъ

центрѣ, разсѣкаетъ подѣ прямыми углами;

3. по разсѣченію оную и по поламъ: посему AG равна GC . И поселику прѣмая AC разсѣчена на равныя въ G , и на неравныя въ E ; по прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣститъ съ квадратамъ

*5, II. изъ GE , равенъ квадрату изъ GC *. Придай обще квадраты изъ GF ; посему прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣститъ съ квадратами изъ FG , GE , равенъ квадратамъ изъ CG , GF . Но квадратамъ изъ EG , GF равенъ квадратъ

*47, I. изъ FE *; квадратамъ же изъ CG , GF равенъ квадратъ изъ FC : посему прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣститъ съ квадратомъ изъ FE , равенъ квадрату изъ FC . Но FC равна FB ; посему прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣститъ съ квадратомъ изъ EF , равенъ квадрату изъ FB . Поэтому же и прямоугольникъ въ DE , EB , вмѣститъ съ квадратомъ изъ FE , равенъ квадрату изъ FB . А доказано, что и прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣститъ съ квадратомъ изъ FE , равенъ квадрату изъ FB : посему прямоугольникъ въ AE , EC , вмѣститъ съ квадратомъ изъ FE , равенъ прямоугольнику въ DE , EB , вмѣститъ съ квадратомъ изъ FE . Оными обще квадратъ изъ FE ; посему оспальной прямоугольникъ въ AE , EC равенъ прямоугольнику въ DE , EB .

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. и д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Ежели вѣтъ круга взята будетъ какая нисенъ шочка; и опѣ неа на кругъ упадунѣ двѣ прямая, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему касаешся: то прямоутольникъ, содержимый въ цѣлой и въ прямой, кошорая вѣтъ круга между шочкою и вынуклою окружностию, равенъ квадрану изъ касапельной.

Вѣтъ круга ABC пусть будетъ взята какая нисенъ шочка D; и опѣ D на кругъ ABC пусть упадунѣ двѣ прямая DCA, DB; и пусть прямая DCA пресѣкаетъ кругъ ABC, а DB къ нему касаешся. Говорю, что прямоутольникъ въ AD, EC равенъ квадрану изъ DB. Прямая DCA или проходитъ черезъ центръ, или нѣтъ.

Пусть, во первыхъ, проходитъ черезъ центръ, и пусть будетъ F центръ круга ABC; и пропяти FB. Инакъ уголъ FBD есенъ прямой*. И поелику прямая AC разсѣчена по *18. поламъ въ F, и приложена къ ней прямая CD; то прямоутольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадраномъ изъ FC, равенъ квадрану изъ FD*. Но FC равна FB; посему *6, II. прямоутольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадраномъ изъ FB, равенъ квадрану изъ FD.

Квадратъ же изъ FD равенъ квадратамъ
 *47, I. изъ FB , BD *, ибо уголъ FBD есть прямой;
 посему прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣ-
 стѣ съ квадратомъ изъ FB , равенъ квадратамъ
 изъ FB , BD . Опшнимъ обще квадратъ изъ
 FB ; чего ради оспальной прямоугольникъ
 въ AD , DC равенъ квадрату изъ касатель-
 ной DB .

Но пусть прямая DSA и не проходить
 чрезъ центръ круга ABC . Возьми его центръ
 *1. E *; и опъ E проведи, перпендикулярную къ
 AC , прямую EF ; и соедини EB , EC , ED .
 Ипакъ уголъ EFD есть прямой. И поели-
 ку прямая EF , проходящая чрезъ центръ,
 прямую AC , непроходящую чрезъ центръ,
 разсѣкаетъ подъ прямыми углами; то раз-
 3. сѣчетъ оную и по поламъ: посему AF
 равна FC . И поелику прямая AC разсѣчена
 по поламъ въ F ; и приложена къ ней пря-
 мая CD : то прямоугольникъ въ AD , DC ,
 вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FC , равенъ ква-
 *6, II. драпу изъ FD *. Придай обще квадратъ изъ
 FE ; посему прямоугольникъ въ AD , DC ,
 вмѣстѣ съ квадратами изъ CF , FE , ра-
 венъ квадратамъ изъ DF , FE . Но квадра-
 тамъ изъ DF , FE равенъ квадратъ изъ DE ,
 ибо уголъ EFD есть прямой; а квадратамъ
 изъ CF , FE равенъ квадратъ изъ CE : по-

сему прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ EC , равенъ квадрату изъ ED . Но EC равна EB ; посему прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ EB , равенъ квадрату изъ ED . Квадрату же изъ ED равны квадраты изъ EB , BD , ибо уголъ EBD есть прямой; посему прямоугольникъ въ AD , DC , вмѣстѣ съ квадратомъ изъ EB , равенъ квадратамъ изъ EB , BD . Опними обще квадратъ изъ EB ; чего ради остальной прямоугольникъ въ AD , DC равенъ квадрату изъ BD .

Итакъ, ежели вѣ круга, и пр. ч. и д. н. (31).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Ежели вѣ круга взята будетъ какая нисетъ точка; и опъ нее на кругъ упадутъ двѣ прямая, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему падаетъ; и будетъ прямоугольникъ въ цѣлой сѣкущей и въ прямой, кошорая вѣ круга между точкою и выпуклою окружностію, равенъ квадрату изъ падающей: то падающая будетъ касаться къ кругу.

Вѣ круга ABC пусть будетъ взята какая нисетъ точка D ; и опъ D на кругъ ABC пусть упадутъ двѣ прямая DSA , DB ;

и пусть прямая $ДСА$ пресѣкаетъ кругъ, а DB къ нему падаетъ; и пусть прямоугольникъ въ AD , DC равенъ квадрату изъ DB . Говорю, что DB касается къ кругу ABC .

17. Проведи къ кругу ABC касательную DE^ ;

1. и возьми круга ABC^ ; центръ F и протяни FE , FB , FD .

18. Ипакъ уголъ FED есть прямой. И поелику DE касается къ кругу ABC , и $ДСА$ пресѣкаетъ оный; то прямоугольникъ въ

36. AD , DC равенъ квадрату изъ DE^ . Предполагается же, что прямоугольникъ въ AD , DC равенъ квадрату изъ DB ; посему квадратъ изъ DE равенъ квадрату изъ DB ; а посему DE равна DB : А и FE равна FB ; ипакъ двѣ прямыя DE , EF равны двумъ прямымъ DB , BF ; и основаніе FD имъ общее: посему уголъ DEF равенъ углу DBF . Но уголъ DEF прямой; посему и уголъ DBF есть прямой. Прямая же BF , продолженная есть поперечникъ; а прямая, проведенная опъ конца поперечника, подъ прямыми къ нему угла-

16. ми, касается къ кругу; посему DB касается къ кругу ABC . Подобно же докажемъ, еслии центръ будетъ и на AC .

Ипакъ, ежели въ круга, и проч. ч. и д. Н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА IV.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Прямолинейная фигура называется вписанною въ другой прямолинейной фигурѣ, когда каждый изъ угловъ вписываемой фигуры прикасается къ каждой сторонѣ той, въ которой вписывается.

2. Подобно, фигура называется описанною около другой фигуры, когда каждая сторона описываемой фигуры прикасается къ каждому углу той, около которой описывается.

3. Прямолинейная фигура называется вписанною въ кругъ, когда каждый уголъ вписываемой фигуры прикасается къ окружности круга.

4. А прямолинейная фигура называется описанною около круга, когда каждая сторона описываемой фигуры касается къ окружности круга.

5. Подобно, кругъ въ прямолинейной фигурѣ называется вписаннымъ, когда окружность круга касается къ каждой сторонѣ фигуры, въ которой вписывается.

6. Кругъ же называется описаннымъ около прямолинейной фигуры, когда окружность круга прикасается къ каждому углу фигуры, около которой описывается.

7. Прямая называется помѣщенной въ кругъ, когда концы ея суть на окружности круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Въ данномъ кругѣ помѣстить прямую равную данной прямой, которая не больше поперечника онаго круга.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а D данная прямая, которая не больше поперечника онаго круга. Надлежитъ въ кругѣ ABC помѣстить прямую равную прямой D .

*1, III. Круга ABC проводи поперечникъ BC *. И ежели BC равна D ; то предложенное сдѣ-

опр. 7. лано, ибо въ кругѣ ABC помѣщена прямая

BC равная D. Если же BC больше D: то положи прямую CE равную D*; и изъ центра *3, I. C, разспояи́емъ CE, наиши кругъ AEF; и пропями SA.

Послику точка C есть центръ круга AEF, то SA равна CE. Но D равна CE; чего ради D равна и SA.

Итакъ въ данномъ кругѣ ABC помѣщена прямая SA равная данной прямой D, которая не больше поперечника онаго круга. Ч. II С. II.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Въ данномъ кругѣ вписать преугольникъ равноугольный данному преугольнику.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а DEF данный преугольникъ. Надлежитъ въ кругѣ ABC вписать преугольникъ равноугольный преугольнику DEF.

Проведи прямую GH, касательную къ кругу ABC въ точкѣ A*; и составь при *17, III. прямой AH, и при точкѣ на ней A, уголъ HAC равный углу DEF*; и еще при прямой *23, I. GA, и при точкѣ на ней A, уголъ GAB равный углу FDE; и пропями BC.

Послику прямая GA касается къ кругу ABC; и опъ прикосновенія проведена въ кругѣ прямая AC: то уголъ GAC равенъ углу въ

накосылежащемъ опрѣзкѣ круга, то есть углу
 *32, III. $\angle ABC$. Но уголъ $\angle GAC$, равенъ и углу $\angle DEF$; по-
 му и уголъ $\angle ABC$ равенъ углу $\angle DEF$. Потому же и
 уголъ $\angle ACB$ равенъ углу $\angle FDE$: слѣдственно
 и оснальной уголъ $\angle BAC$ равенъ оснальному
 *32, I. $\angle EFD$. Чего ради преутольникъ ABC есть
 равноугольный преутольнику DEF , и впи-
 *опр. 3. санъ въ кругъ ABC .

Итакъ въ данномъ кругѣ вписать пре-
 угольникъ равноугольный данному преутоль-
 нику ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Около даннаго круга описать преутоль-
 никъ равноугольный данному преутольнику.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а DEF
 данный преутольникъ. Надлежитъ около кру-
 га ABC описать преутольникъ равноуголь-
 ный преутольнику DEF .

Продолжи EF на обѣ стороны къ поч-
 *1, III. камъ G , H ; возьми круга ABC центръ K ;
 и проводи какъ пишешь прямую KB ; при
 прямой KB , и при точкѣ на ней K , составь
 *23, I. уголъ $\angle BKA$ равный углу $\angle DEG$, а уголъ $\angle BKC$
 равный углу $\angle DFH$; и чрезъ точки A , B , C
 проводи, касательныя къ кругу ABC , пря-
 *17, III. мыя LAM , MBN , NCL .

Поелику къ кругу ABC касаются прямыя LM , MN , NL въ точкахъ A , B , C ; и опъ центра K къ точкамъ A , B , C пропянуты прямыя KA , KB , KC : то углы при точкахъ A , B , C суть прямые*. И по- *18,III. елику чепыреугольника $AMBK$ всѣ чепыре угла равны чепыремъ прямымъ*, ибо $AMBK$ *32,I. можешь раздѣлиться на два преугольника; и углы MAK , KBM супъ прямые: посему остальные углы AKB , AMB равны двумъ прямымъ. А и углы DEG , DEF равны двумъ прямымъ*; посему углы AKB , AMB равны *13,I. угламъ DEG , DEF . Но въ нихъ уголь AKB равенъ углу DEG ; посему оспальной AMB равенъ оспальному DEF Подобно же докажется, чпо и уголь LMN равенъ углу DFE ; посему и оспальной уголь MLN равенъ оспальному EDF . Слѣдспвенно преугольникъ LMN есть равноугольный преугольнику DEF , и описанъ около круга ABC *. *опр.4.

Итакъ около даднаго круга описанъ преугольникъ равноугольный данному преугольнику. ч. и. с н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Въ данномъ преугольникѣ вписашъ кругъ. Пуспъ будетъ ABC данный преугольникъ. Надлежшъ въ преугольникѣ ABC вписашъ кругъ.

Раздѣли углы ABC , ACB по поламъ при-
 9, I. мыми BD , CD^ , кои и вспрѣпяпся пусть
 въ точкѣ D ; и проводи опъ D , перпендику-
 *12, I. лярныя къ AB , BC , CA , прямая DE , DF , DG .

Поелику уголъ ABD равенъ углу CBD ,
 ибо уголъ ABC раздѣленъ по поламъ; такъ
 и прямой уголъ BED равенъ прямому BFD ,
 по два треугольника EBD , FBD имѣютъ
 два угла равные двумъ угламъ, и одну спо-
 рону равную одной споронѣ; кои проопъ
 лежатъ равнымъ угламъ, по естъ, общу-
 имъ спорону BD : посему и прочія споро-
 ны будутъ имѣть равныя прочимъ споро-

26, I. намъ; а посему DE равна DF . Поэтому же
 и DG равна DF : « чего ради при прямая DE ,
 DF , DG супъ взаимно равны ». И поэтому
 кругъ, изъ центра D и разстоянѣемъ одной
 изъ прямыхъ DE , DF , DG написанный, прой-
 денъ и чрезъ прочія точки; и будетъ ка-
 саться къ прямымъ AB , BC , CA , ибо углы
 при точкахъ E , F , G супъ прямые. А бу-
 де бы пресѣкалъ оныя, по прямая, прове-
 денная опъ конца поперечника подъ прямы-
 ми къ нему углами, упала бы въ кругъ, что,
 16, III. по доказанному, нелѣпо. А посему и кругъ,
 изъ центра D и разстоянѣемъ одной изъ
 прямыхъ DE , DF , DG написанный, не пре-
 сѣчетъ прямыхъ AB , BC , CA ; слѣдствие-

по къ нимъ каснешся, и будетъ кругъ вписанный въ треугольникъ ABC^* . « Впиши ^{*опр.5.} оный, какъ $FLG.$ »

Итакъ въ данномъ треугольникъ ABC впиши кругъ $FLG.$ ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Около данного треугольника описать кругъ.

Пусть будетъ ABC данный треугольникъ. Надлежитъ около данного треугольника ABC описать кругъ.

Раздѣли прямыя AB , AC по поламъ въ почкахъ D , E^* ; и опъ почекъ D , E про-^{*10, I.}веди, подъ прямыми углами къ AB , AC , прямыя DF , EF^* . Онѣ встрѣятся или ^{*11, I.}внутри треугольника ABC , или на прямой BC , или внѣ BC .

Пусть, во первыхъ, встрѣятся внутри треугольника въ F . Проведи FB , FC , FA . Поскольку AD равна BD , а DF есть общая, и подъ прямыми къ нимъ углами; посему основаніе AF равно основанію FB^* . Подобно ^{*4, I.}докажемъ, что и CF равна AF ; слѣдственно и FB равна FC : чего ради три прямыя FA , FB , FC суть взаимно равны. И потому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ прямыхъ FA , FB , FC написанный, прой-

депъ и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ
опр.6. описанный около преугольника ABC. Опи-
ши оный, какъ ABC.

Но пусть DF, EF встрѣятся и на пря-
мой BC въ F, какъ значится на второй фи-
гурѣ. Пропяни AF: То подобно же докажемъ,
что точка F есть центръ круга описанна-
го около преугольника ABC.

Но пусть DF, EF встрѣятся и въ пре-
угольника ABC опять въ F, какъ значится
на третьей фигурѣ. Пропяни AF, BF, CF.
Поскольку опять AD равна DB, а DF есть
общая, и подъ прямыми къ нимъ углами;
поэтому и основаніе AF равно основанію FB.
Подобно докажемъ, что и FC равна FA:
слѣдственно и FB равна FC. И поному опять
кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной
изъ прямыхъ FA, FB, FC написанный, прой-
детъ и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ
опр.6. описанный около преугольника ABC. Напи-
ши оный, какъ ABC.

Итакъ около даннаго преугольника опи-
санъ кругъ. Ч. и с. и.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуется, что ко-
гда центръ круга падаетъ внутри преуголь-
ника, то уголъ BAC будетъ въ окрѣзкѣ
большемъ полукружія, а поному меньше пря-

маго*; когда же на BC , то будетъ въ полу- *31, III.
 кружїи, и попоному прямой*; а когда центръ *31, III.
 упадетъ внѣ прямой BC , то уголъ BAC
 будетъ въ отрѣзкѣ меньшемъ полукружїа,
 и попоному больше прямого*. Слѣдовательно *31, III.
 и обратно, когда данный уголъ меньше пря-
 маго, то прямая DF , EF въспрѣпятся вну-
 при треугольника; когда же прямой, то
 на BC ; а когда больше прямого, то внѣ BC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Въ данномъ кругѣ вписать квадрапъ.

Пусть будетъ $ABCD$ данный кругъ. Над-
 лежишь въ кругѣ $ABCD$ вписать квадрапъ.

Проведи въ кругѣ $ABCD$ два поперечника
 AC , BD , подъ прямыми углами одинъ къ
 другому; и простиани AB , BC , CD , DA .

Поелику BE равна ED , ибо E есть центръ,
 а EA есть общая, и подъ прямыми къ нимъ
 углами; посему основаніе AB равно осно-
 ванію AD . Попоному же и каждая изъ прямыхъ
 BC , CD равна каждой изъ прямыхъ BA , AD :
 чего ради чепыреугольникъ $ABCD$ есть равно-
 споронный. Говорю же, что онъ и прямо-
 угольный. Ибо, какъ прямая BD есть попе-
 речникъ круга $ABCD$; то BAD есть по-
 лукружіе; посему уголъ BAD прямой*. По- *31, III.

тому же и каждый изъ угловъ ABC, BCD, CDA есть прямой: чего ради четырёхугольникъ $ABCD$ есть равноугольный. А доказано, что онъ и равносторонный; слѣдственно онъ оп.30, I. есть квадратъ*: И вписанъ въ данное опр.3. кругъ $ABCD$ *.

Итакъ въ данномъ кругѣ $ABCD$ вписать квадратъ $ABCD$. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Около даннаго круга описать квадратъ.

Пусть будетъ $ABCD$ данный кругъ. Надлежаще около круга $ABCD$ описать квадратъ.

Проведи въ кругъ $ABCD$ два поперечника AC, BD , подъ прямыми углами одинъ къ другому; и чрезъ точки A, B, C, D проводи касательныя къ кругу $ABCD$ прямая FG, GH, HK, KF .

Поелику FG касается къ кругу $ABCD$, и отъ центра E къ прикосновенію A просяву- *18, III. та прямая EA ; то углы при A суть прямые*.

Потому же и углы при точкахъ B, C, D суть прямые. И поелику уголъ AEB есть прямой, и уголъ EBG прямой же; посему GH парал- *28, I. лельна къ AC *. Потому же и AC параллельна къ FK ; слѣдственно и GH параллельна къ *30, I. FK *. Подобно докажемъ, что и каждая изъ

прямыхъ GF, НК параллельна къ BED. Ипакъ GK, GC, AK, FB, BK супъ параллелограммы; посему GF равна НК*, а GH *34,1. равна FK. И поелику AC равна BD; и AC равна каждой изъ прямыхъ GH, FK, а BD каждой изъ прямыхъ GF, НК: посему каждая изъ прямыхъ GH, FK равна каждой изъ прямыхъ GF, НК. Чего ради четыреугольникъ FGHK естъ равноспоронный. Говорю же, что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ GBEA естъ параллелограммъ; и уголъ AEB прямой: то и уголъ AGB естъ прямой*. Подобно докажемъ, *34 г. что и углы при H, K, F супъ прямые: чего ради четыреугольникъ FGHK естъ прямоугольный. А доказано, что онъ и равноспоронный; слѣдственно онъ естъ квадратъ. И описанъ около круга ABCD*.

*опр. 4.

Ипакъ около даннаго круга описанъ квадратъ. ч. и с. н. (32).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Въ данномъ квадратѣ вписать кругъ.

Пусть будетъ ABCD данный квадратъ.

Надлежитъ въ квадратѣ ABCD вписать кругъ.

Раздѣли каждую изъ прямыхъ AB, AD пополамъ въ точкахъ F, E; и чрезъ E проводи, параллельную къ которой ни естъ изъ прямыхъ AB, CD, прямую EH*; а чрезъ F *31,1.

проведи, параллельную къ которой ниспуть
изъ прямыхъ AD , BC , прямую FK . И такъ
каждый изъ четырехъ угольниковъ AK , KB ,
 $АН$, HD , AG , GC , BG , GD есть паралле-
лограммъ; и противулежащія ихъ стороны
34.1. суть равны. И велику AD равна AB ; и
 AE есть половина AD , а AF половина AB :
по сему и AE равна AF ; слѣдственно и про-
тивулежащія имъ стороны равны, а по сему
и FG равна GE . Подобно докажемъ, что
и каждая изъ прямыхъ GH , GK равна каждой
изъ прямыхъ FG , GE : чего ради четыре
прямыя GE , GF , GH , GK взаимно равны.
И по сему кругъ, изъ центра G и разстоя-
нїемъ одной изъ прямыхъ GE , GF , GH , GK
написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точ-
ки; и будетъ касаться къ прямымъ AB , BC ,
 CD , DA , ибо углы при E , F , H , K суть
прямые. А буде бы кругъ пресѣкалъ прямыя
 AB , BC , CD , DA ; то прямая, проведенная
отъ конца поперечника подъ прямыми къ
нему углами, упала бы въ кругъ, что, по до-
казанному, нелѣно*. А по сему и кругъ, изъ
центра G и разстоянїемъ одной изъ прямыхъ
 GE , GF , GH , GK написанный, не пресѣ-
каетъ прямыхъ AB , BC , CD , DA : слѣд-
ственно къ нимъ касается, и будетъ кругъ
*опр. 5. вписанный въ квадратъ $ABCD$ *. « Впиши
онъ, какъ $EFGK$. »

Итакъ въ данномъ квадрапѣ вписанъ кругъ. Ч. и С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Около даннаго квадрапа описатьъ кругъ.

Пустьъ будетъ ABCD данный квадрапъ. Надлежитъ около квадрапа ABCD описатьъ кругъ.

Пропяни AC, BD, кои пресѣкутся пустьъ въ E.

Поелику DA равна AB, а AC общая; то двѣ прямыя DA, AC равны двумъ прямымъ BA, AC; и основаніе DC равно основанію BC: посему уголъ DAC равенъ углу BAC*; а по- *8, I. сему уголъ DAB раздѣленъ по поламъ прямою AC. Подобно докажемъ, что и каждый изъ угловъ ABC, BCD, CDA раздѣленъ по поламъ одною изъ прямыхъ AC, DB. И поелику уголъ DAB равенъ углу ABC; и уголъ EAB есть половина угла DAB, а уголъ EBA есть половина угла ABC: посему уголъ EAB равенъ углу EBA; слѣдственио и спорона EA равна споронѣ EB*. Подобно докажемъ, *6, I. что и каждая изъ прямыхъ EA, EB равна каждой изъ прямыхъ EC, ED: чего ради чешыре прямыя EA, EB, EC, ED сутьъ взаимно равны. И попому кругъ, изъ центра E и разспояніемъ одной изъ прямыхъ EA, EB,

ЕС, ЕД написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ описанный *спр.6. около квадрата ABCD*. Опиши оный, какъ ABCD.

Итакъ около даннаго квадрата описатьъ кругъ. ч. и с. н. (33).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Составить равнобедренный треугольникъ, имѣющій каждый изъ угловъ при основаніи двукратный остальнаго.

Изложи какую ниесъ прямую АВ; и разсѣки ее въ точкѣ С, такъ чтобы прямоугольникъ въ АВ, ВС былъ равенъ квадрату *11,11. изъ СА*; и изъ центра А, разстояніемъ АВ, напиши кругъ BDE; и въ кругѣ BDE *1. помѣсни прямую BD равную прямой AC*, крѣпоя не больше поперечника круга BDE; и протяни AD, CD; и около треугольника *5. ACD опиши кругъ ACD*.

Поелику прямоугольникъ въ АВ, ВС равенъ квадрату изъ АС, а АС равна BD; посему прямоугольникъ въ АВ, ВС равенъ квадрату изъ BD. Итакъ поелику въ круга ACD взята точка В; и опъ В на кругъ ACD падають двѣ прямыя ВА, ВD, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему падаетъ; и пря-

моугольникъ въ АВ, ВС равенъ квадрату изъ ВD: по ВD касается къ кругу АСD*. И поелику *37, III, ВD касается, и опъ прикосновенія D проведена прямая DC; поему уголъ ВDC равенъ углу въ наклоняющемъ опрѣзкѣ круга, по есть углу DAC*. Поелику же уголъ ВDC равенъ *32, III, углу DAC; придай обще уголъ CDA: поему цѣлый уголъ BDA равенъ двумъ угламъ CDA, DAC. Но угламъ CDA, DAC равенъ вѣншній уголъ BCD*; поему уголъ BDA равенъ и углу *32, I, BCD. Уголъ же BDA равенъ углу CBD*, ибо *5, I, сторона DA равна сторонѣ AB; слѣдственно и уголъ DBA равенъ углу BCD. Ипакъ три угла BDA, DBA, BCD супъ взаимно равны. И поелику уголъ DBC равенъ углу BCD; по и сторона BD равна сторонѣ DC*. Но BD, *6, I, по положенію, равна CD; поему и AC равна CD, слѣдственно и уголъ CDA равенъ углу DAC: а поему углы CDA, DAC супъ двукратны угла DAC. Угламъ же CDA, DAC равенъ уголъ BCD, поему и уголъ BCD есть двукратный угла DAC. Уголъ же BCD равенъ каждому изъ угловъ BDA, DBA; чего ради и каждый изъ угловъ BDA, DBA есть двукратный угла BAD.

Ипакъ составленъ равнобедренный треугольникъ ADB, имѣющій каждый изъ угловъ при основаніи DB двукратнымъ оснального. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Въ данномъ кругѣ вписать равносѣторный и равноугольный пятиугольникъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ $ABCDE$ вписать равносѣторный и равноугольный пятиугольникъ.

Изложи равнобедренный треугольникъ FGH , имѣющій каждый изъ угловъ G, H
 *10. двукратный угла F *; и впиши въ кругъ $ABCDE$ треугольникъ ACD равноугольный
 *2. треугольнику FGH *, такъ чтобы уголъ CAD былъ равенъ углу F , а каждый изъ угловъ ACD, CDA былъ равенъ каждому изъ угловъ G, H : посему каждый изъ угловъ ACD, CDA есть двукратный угла CAD . Раздѣли каждый изъ угловъ ACD, CDA по поламъ прямыми
 *9, I. CE, DB *; и просяни AB, BC, DE, EA .

Послику каждый изъ угловъ ACD, CDA есть двукратный угла CAD ; и раздѣлены они по поламъ прямыми CE, DB : то пять угловъ DAC, ACE, ECD, CDB, BDA взаимно равны. Равные же углы споятъ на ра-
 26, III. вныхъ дугахъ; посему пять дугъ AB, BC, CD, DE, EA взаимно равны. А равныя ду-
 29, III. ги спягиваются равными прямыми; посему пять прямыхъ AB, BC, CD, DE, EA взаимно равны. Чего ради пятиугольникъ $ABCDE$

есть равноспоронный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга AB равна DE ; придай обще дугу BCE : по сему цѣлая дуга $ABCE$ равна цѣлой дугѣ $EDCB$. На дугѣ же $ABCE$ стоишь уголъ AEC , а на дугѣ $EDCB$ уголъ BAE ; по сему уголъ BAE равенъ углу AEC *. Поэтому же и каждый изъ угловъ ABC , BCE , CDE равенъ каждому изъ угловъ BAE , AEC : чего ради пятиугольникъ $ABCDE$ есть равноугольный. А доказано, что онъ и равноспоронный:

Итакъ въ данномъ кругѣ вписанъ равноспоронный и равноугольный пятиугольникъ.
Ч. П. С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Около даннаго круга описать равноспоронный и равноугольный пятиугольникъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ данный кругъ. Надлежитъ около круга $ABCDE$ описать равноспоронный и равноугольный пятиугольникъ.

Возьми точки A, B, C, D, E , при которыхъ суть углы вписаннаго пятиугольника*: итакъ дуги AB, BC, CD, DE, EA *¹¹. взаимно равны*; и чрезъ A, B, C, D, E *^{28, III}. проведи касательныя къ кругу прямыя GH, HK, KL, LM, MG ; и возьми круга $ABCDE$ центръ F ; и пропни FB, FC, FD, FE, FA .

Поселику прямая KL касается къ кругу $ABCDE$ въ C , и опрь центра F къ прикосновенію C пропянута прямая FC ; по FC *18, III. перпендикулярна къ KL *; посему каждый изъ угловъ при C еснъ прямой. Поному же и углы при точкахъ B , D сунъ прямые. И поселику уголь FCK прямой; по квадратъ изъ FK равенъ квадратамъ изъ FC , *47, I. $СК$ *. Поному же и квадратамъ изъ FB , BK равенъ квадратъ изъ FK : слѣдсвенно квадратамъ изъ FC , $СК$ равны квадраты изъ FB , BK . Но въ нихъ квадратъ изъ FC равенъ квадрату изъ FB ; посему и оспальной квадратъ изъ $СК$ равенъ оспальному изъ BK ; а посему C равна BK . Поселику же FB равна FC , а FK общая; по двѣ прямыя BF , FK равны двумъ прямымъ CF , FK ; и основаніе BK равно основанію C : посему уголь BFK равенъ углу KFC , а уголь *8, I. BKF равенъ углу FKC *; а посему уголь BFC еснъ двукрапный угла KFC , а уголь BKS угла FKC . Поному же и уголь CFD еснъ двукрапный угла CFL , а уголь CLD двукрапный угла CLF . И поселику дуга BC равна дугѣ CD ; по уголь BFC равенъ углу *27, III. CFD *. По уголь BFC еснъ двукрапный угла KFC , а уголь DFC двукрапный угла LFC ; посему и уголь KFC равенъ углу LFC .

А и уголъ FCK равенъ углу FCL ; ипакъ два
 треугольника FKC , FLC имѣютъ два угла
 равные двумъ угламъ, каждый каждому, и
 одну сторону равную одной стороне, то
 есть, общую имъ сторону FC : посему и
 прочія стороны будутъ имѣть равныя
 прочимъ сторонамъ, и остальной уголъ
 равный остальному углу; а посему пря-
 мая KC равна CL , и уголъ FKC равенъ
 углу FLC *. Посему же KC равна CL ; по *26, I.
 KL есть двукратная прямой KC . Такъ
 же докажется, что и NK есть двукратная
 BK . И какъ по доказанному, BK равна KC ;
 и LD есть двукратная KC , а NK двукрат-
 ная BK ; посему и NK равна KL . Подобно
 докажется, что и каждая изъ прямыхъ NG ,
 GM , ML равна каждой изъ прямыхъ NK , KL :
 чего ради пятиугольникъ $GNKLM$ есть равно-
 сторонний. Говорю же, что онъ и равно-
 угольный. Ибо, какъ уголъ FKC равенъ углу
 FLC ; по доказанному же угла FKC есть
 двукратный уголъ NKL , а угла FLC дву-
 кратный уголъ KLM : посему уголъ NKL
 равенъ углу KLM . Подобно докажется, что
 и каждый изъ угловъ KNG , HGM , GML ра-
 венъ каждому изъ угловъ NKL , KLM : чего
 ради пять угловъ GNK , NKL , KLM , LMG ,
 MGN взаимно равны. Ипакъ пятиугольникъ

$GHKLM$ есть равноугольный. А доказано, что онъ и равносторонный : И описанъ около круга $ABCDE$. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Въ даномъ равносторонномъ и равноугольномъ пятиугольникѣ вписать кругъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ данный равносторонный и равноугольный пятиугольникъ. Надлежитъ въ пятиугольникѣ $ABCDE$ вписать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ BCD , CDE по поламъ прямыми CF , DF ; и опъ почки F , въ коеи встрѣпяпся взаимно прямыя CF , DF , пропiani прямыя FB , FA , FE . Поелику BC равна CD , а CF общая; то двѣ прямыя BC , CF равны двумъ прямымъ DC , CF ; и уголь BCF равенъ углу DCF : посему основаніе BF равно основанію DF ; и треугольникъ BFC равенъ треугольнику DFC ; и прочіе углы равны прочимъ угламъ, кои пропивулежатъ равнымъ сторонамъ: а посему уголь CBF равенъ углу CDF . И поелику уголь CDE есть двукратный угла CDF ; уголь же CDE равенъ углу ABC , и уголь CDF углу CBF ; посему и уголь CBA есть двукратный угла CBF . Итакъ уголь

ABF равенъ углу FBC ; посему уголъ ABC раздѣленъ по поламъ прямою BF . Подобно докажется, что и каждый изъ угловъ BAE , AED раздѣленъ по поламъ прямыми FA , FE . Опять точки F проводи, перпендикулярныя къ AB , BC , CD , DE , EA , прямыя FG , FH , FK , FL , FM . Поелику уголъ HCF равенъ углу KCF , и прямой уголъ FHC равенъ прямому FKC ; то два треугольника FHC , FKC имѣють два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной сторонѣ, то есть, общую имъ сторону FC , противуположащую одному изъ равныхъ угловъ: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ; а посему перпендикулярная FH равна перпендикулярной FK . Подобно докажется, что и каждая изъ прямыхъ FL , FM , FG равна каждой изъ прямыхъ FH , FK : чего ради пять прямыхъ FG , FH , FK , FL , FM взаимно равны. И попому кругъ, изъ центра F и разстоянiемъ одной изъ прямыхъ FG , FH , FK , FL , FM написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки; и будетъ касаться къ прямымъ AB , BC , CD , DE , EA , ибо углы при точкахъ G , H , K , L , M суть прямые. А буде бы не касался, но пресѣкалъ оныя; то вышло бы, что прямая, проведенная отъ конца попереч-

ника подъ прямыми къ нему углами, упала въ
 •16, III. кругъ, что, по доказанному уже, неслѣпо*. А посе-
 му и кругъ, изъ центра F и разстояніемъ од-
 ной изъ прямыхъ FG, FH, FK, FL, FM написан-
 ный, не пресѣчетъ прямыхъ $AB, BC, CD, DE,$
 EA ; слѣдственно къ нимъ каснется. Напиши
 оный, какъ $GHKLM$.

Итакъ въ данномъ равносѣпоронномъ
 и равноугольномъ пятиугольникѣ вписанъ
 кругъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Около даннаго равносѣпороннаго и равно-
 угольнаго пятиугольника описать кругъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ данный равносѣпо-
 ронный и равноугольный пятиугольникъ.
 Надлежитъ около пятиугольника $ABCDE$
 описать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ B, C, D, E
 по поламъ прямыми CF, FD ; и опъ почки
 F , въ коей воспрѣпящся сѣи прямыя, къ поч-
 камъ B, A, E пропхни прямыя FB, FA, FE .
 Подобно прежнему докажеться, что каждый
 изъ угловъ CBA, BAE, AED раздѣленъ по
 поламъ прямыми FB, AF, FE . И поелику
 уголь B, C, D равенъ углу C, D, E ; и угла B, C, D
 половина естъ уголь F, C, D , а угла C, D, E по-

ловина уголь CDF ; посему и уголь FCD равенъ углу FDC ; следовательно и спорона FC равна споронѣ FD *. Подобно докажется, *6, I. что и каждая изъ прямыхъ FB , FA , FE равна каждой изъ прямыхъ FC , FD : чего ради пять прямыхъ FA , FB , FC , FD , FE взаимно равны. И попому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ прямыхъ FA , FB , FC , FD , FE написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки, и будетъ описанный около равноспороннаго и равноугольнаго пятиугольника $ABCDE$. Опиши сей кругъ, и пусть будетъ онъ $ABCDE$.

Итакъ около даннаго равноспороннаго и равноугольнаго пятиугольника описанъ кругъ.
Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Въ данномъ кругѣ вписать равноспоронный и равноугольный шестигульникъ.

Пусть будетъ $ABCDEF$ данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ $ABCDEF$ вписать равноспоронный и равноугольный шестигульникъ.

Круга $ABCDEF$ проводи поперецникъ AD ; и возьми сего круга центръ G ; и изъ центра D разстояніемъ, DG напиши кругъ

$EGCH$; и пропаянутыя EG , CG продолжи къ почкамъ B , F ; и пропаяни AB , BC , CD , DE , EF , FA . Говорю, что шестипугольникъ $ABCDEF$ есть равноспороный и равноугольный.

Поелику почка G есть центръ круга $ABCDEF$; то GE равна GD . Еще же, поелику почка D есть центръ круга $EGCH$; то DE равна DG . Но GE , по доказанному, равна GD ; посему GE равна и ED : ипакъ преугольникъ EGD есть равноспороный; а посему при его угла EGD , GDE , DEG взаимно равны, ибо равнобедренныхъ преугольниковъ углы при основаніи взаимно равны*. Поелику же преугольника всѣ

32, I. при угла равны двумъ прямымъ: посему уголъ EGD есть претъя часъ двухъ прямыхъ. Подобно докажется, что и уголъ DGC есть претъя часъ двухъ прямыхъ. И поелику прямая CG на прямую EB поставленная дѣлаетъ смѣжные углы EGC ,

13, I. $СGB$ равные двумъ прямымъ; то и оспальной $СGB$ есть претъя часъ двухъ прямыхъ. Ипакъ при угла EGD , DGC , $СGB$ взаимно равны; но углы BGA , AGF , FGE , какъ прошивуположные, равны угламъ EGD ,

*15, I. DGC , $СGB$ *; посему шестъ угловъ EGD , DGC , $СGB$, BGA , AGF , FGE взаимно ра-

вны. Равные же углы споятъ на равныхъ дугахъ*; посему шесць дугъ АВ, ВС, CD, DE, EF, FA взаимно равны. А равныя дуги стягиваются равными прямыми*; посему шесць прямыхъ взаимно равны. Чего ради шеспиугольникъ ABCDEF есть равнос-
торонный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга FA равна дугѣ ED; придай обще дугу ABCD: посему и цѣлая дуга FABCD равна цѣлой дугѣ EDCBA. На дугѣ же FABCD споймъ уголь FED, а на дугѣ EDCBA споймъ уголь AFE; посему уголь AFE равенъ углу FED*. Подобно до-^{27, III.}
кажется, что и прочіе углы шеспиуголь-
ника ABCDEF, одинъ по одному, равны каж-
дому изъ угловъ AFE, FED: чего ради шеспи-
угольникъ ABCDEF есть равноугольный. А
доказано, что онъ и равноссторонный: II
вписанъ въ кругъ ABCDEF.

Итакъ въ данномъ кругѣ вписанъ равно-
сторонный и равноугольный шеспиуголь-
никъ. Ч. II С. II.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда яветвуетъ, что
сторона шеспиугольника равна прямой изъ
центра круга.

И еспли чрезъ точки А, В, С, D, Е, F
проведемъ касательныя къ кругу; то

опишется около круга равноспоронный и равноугольный шеспиугольникъ, въ силу того, что сказано о пятиугольникѣ. Такъ же сходно съ пѣмъ, что сказано о пятиугольникѣ, въ данномъ шеспиугольникѣ впишемъ кругъ, и опишемъ около него. (34).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Въ данномъ кругѣ вписать равноспоронный и равноугольный пятинадцатиугольникъ.
/ Пусть будетъ ABCD данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ ABCD вписать равноспоронный и равноугольный пятинадцатиугольникъ.

Напиши въ кругѣ ABCD равноспороннаго треугольника въ немъ вписаннаго спорону AC, и равноспороннаго пятиугольника спорону AB. Поелику окружность ABCD должна бытъ раздѣлена на пятнадцать равныхъ частей; по дуга ABC, какъ трепья часть окружности, будетъ содержать въ себѣ оныхъ пять, а дуга AB, какъ пятая часть, будетъ содержать три: поему оспальная дуга BC будетъ содержать двѣ. Раздѣли *30, III. BC по поламъ въ E*; поему каждая изъ дугъ BE, EC будетъ пятнадцатая часть окружности круга ABCD. Ипакъ, еспли пропиа-

ить прямыя BE , EC , помѣспимъ въ кругѣ $ABCD$, одну за другою, равныя имъ прямыя; то и получится вписанный въ кругѣ $ABCD$ равноспоронный и равноугольный пѣнадцатипиугольникъ $Ч.$ и $С. Н.$

Сходно же съ тѣмъ, что сказано о пѣпиугольникѣ, еспѣли чрезъ почки дѣленія круга проведемъ касательныя къ нему; то опишется около круга равноспоронный и равноугольный пѣнадцатипиугольникъ. И еще сходно съ тѣмъ, что сказано о пѣпиугольникѣ, въ данномъ пѣнадцатипиугольникѣ впишемъ кругъ, и опишемъ около него: (35).

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ.

КНИГА V.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. МЕНЬШАЯ величина называется часпною (*μέρος*) большей величины, когда меньшая измѣряетъ большую. (36).

2. Большая же называется крапною (*πολλάσιον*) меньшей, когда большая измѣряетъ меньшую. (37).

3. Опношеніе естъ взаимная нѣкая зависимость двухъ однородныхъ величинъ по ихъ количеству. (*Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πληρότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σχέσις*). (38).

4. Величины называются имѣющими опношеніе одна къ другой, кои будучи взяты крапно, могутъ быть больше одна другой. (39).

5. Величины, говорися, суть въ помѣже отношеніи, первая ко второй и третья къ четвертой; когда равнокрапныя первой величины и третьей, и равнокрапныя второй величины и четвертой, взятыя по какому либо крапспованію, суть таковы, что попеременно каждая каждой, или купно равны, или купно больше, или купно меньше. (40).

6. Величины имѣющія поже отношеніе назовемъ пропорціональными.

7. Когда же изъ равнокрапныхъ, крапная первой больше крапная второй, но крапная третьей не больше крапная четвертой; тогда говорися, что первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой. (41).

8. Пропорція есть подобіе или тяжество отношеній. (*Αναλογία δέ ἐστὶν ἡ τῶν ὁμοιότης, а подругимъ: ταυτότης*). (42).

9. Пропорція состоитъ, по меньшей мѣрѣ, изъ трехъ членовъ. (43).

10. Когда три величины пропорціональны; то говорися, что первая къ третьей имѣетъ удвоенное отношеніе первая ко второй.

11. Когда четыре величины пропорціональны (44); то говорися, что первая къ четвертой имѣетъ утроенное отношеніе

первыя ко впорой: и такъ далѣе, пока пропорція продолжится. (45).

12. Сходственными величинами называющіеся предъидущія съ предъидущими, а послѣдующія съ послѣдующими. (46).

13. Премѣненіе отношеній (*Εναλλάξ λόγος*) естъ взятіе предъидущей къ предъидущей, и послѣдующей къ послѣдующей.

14. Преложеніе отношенія (*Ανάπαλιν λόγος*) естъ взятіе послѣдующей какъ предъидущей, къ предъидущей какъ послѣдующей.

15. Совокупленіе отношенія (*Σύνθεσις λόγου*) естъ взятіе предъидущей съ послѣдующею, какъ одной, къ сей послѣдующей.

16. Опдѣленіе отношенія (*Διαιρέσις λόγου*) естъ взятіе избытка предъидущей предъ послѣдующею, къ сей послѣдующей.

17. Обращеніе отношенія (*Αναστροφή λόγου*) естъ взятіе предъидущей, къ избытку предъидущей предъ послѣдующею.

18. Равномѣстіе отношеній (*Διῶσις λόγος*) или равенство ихъ естъ то, когда изъ имѣющихся многихъ величинъ и другихъ имъ равномѣстныхъ и находящихся по парно въ томъ же отношеніи, будетъ какъ изъ первыхъ величинъ первая къ послѣдней, такъ изъ вторыхъ величинъ первая къ послѣдней.

Или иначе: Когда взяты будутъ крайнія, а среднія оставлены. (47).

19. Спройная (*Τεταρμένη*) пропорція или прямая естъ та, когда « изъ имѣющихся таковыхъ же величинъ » будетъ какъ « изъ первыхъ величинъ » предъидущая къ послѣдующей, такъ « изъ вторыхъ величинъ » предъидущая къ послѣдующей; и какъ « изъ первыхъ величинъ » послѣдующая къ другой нѣкоей, такъ « изъ вторыхъ величинъ » послѣдующая къ другой нѣкоей. (48).

20. Неспройная же (*Τεταραμένη*) пропорція или обратная естъ та, когда изъ имѣющихся трехъ величинъ и другихъ имъ равномногихъ, будетъ какъ изъ первыхъ величинъ предъидущая къ послѣдующей, такъ изъ вторыхъ величинъ предъидущая къ послѣдующей; и какъ изъ первыхъ величинъ послѣдующая къ другой нѣкоей, такъ другая нѣкая къ послѣдующей вторыхъ величинъ. (49).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели будетъ сколько нисеть величинъ, кои другихъ равномногихъ величинъ равнокрапны, каждая каждой; то сколько одна изъ величинъ естъ крапная одной, столько и всѣ будутъ крапны всѣхъ.

Пусть будетъ сколько нѣсть величинъ АВ, СD, кои другихъ равномногихъ величинъ Е, F равнокрапны, каждая каждой. Говорю, что сколько крапная естъ АВ величины Е, столько крапныя будутъ и АВ, СD величинъ Е, F.

Поелику равнокрапныя суть, АВ величины Е, и СD величины F; то сколько величинъ въ АВ равныхъ Е, столько же величинъ и въ СD равныхъ F. Раздѣли АВ на величины равныя Е, то естъ, на АG, GB; а СD на величины равныя F, то естъ, на СН, HD. Ипакъ величины СН, HD суть равномногія величинамъ АG, GB. И поелику АG равна Е, а СН равна F; то и АG, СН равны Е, F. Такожъ, поелику GB равна Е, а HD равна F; то и GB, HD равны Е, F. Посему сколько величинъ въ АВ равныхъ Е, столько же величинъ и въ АВ, СD равныхъ Е, F: чего ради сколько крапная естъ АВ величины Е, столько крапныя будутъ и АВ, СD величинъ Е, F.

Ипакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ц.

Ежели первая величина вѣторой, и третья четвертой равнокрапны; и пакже пятая

второй, и шестая четвертой равнокрапны: по и совокупленно, первая съ пятою второй, и третья съ шестю четвертой, будутъ равнокрапныя.

Пусть первая величина АВ второй С, и третья DE четвертой F, будутъ равнокрапныя; и также, пусть пятая BG второй С, и шестая ЕН четвертой F, будутъ равнокрапныя. Говорю, что и совокупленно, первая съ пятою по есть AG, второй С, и третья съ шестю, по есть ДН, четвертой F, будутъ равнокрапныя.

Поелику равнокрапныя суть, АВ величины С, и DE величины F; то сколько величинъ въ АВ равныхъ С, столько же величинъ и въ DE равныхъ F. Потому же сколько величинъ въ BG равныхъ С, столько же величинъ и въ ЕН равныхъ F. Чего ради сколько величинъ въ цѣлой AG равныхъ С, столько же величинъ и въ цѣлой ДН равныхъ F. Ипакъ сколько крапная есть AG величины С, столько крапная будетъ и ДН величины F: чего ради и совокупленно, первая съ пятою по есть AG, второй С, и третья съ шестю по есть ДН, четвертой F, будутъ равнокрапныя.

Ипакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (50):

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш.

Ежели первая величина второй, и претъя четвертой равнократны; и взяты будуть первой и претъей равнократныя: то равнобъспно, сѣи взятыя кратныя будуть равнократныя каждая каждой, одна второй, а другая четвертой.

Пусть первая величина А второй В, и претъя С четвертой D, будуть равнократныя; и пусть будуть взяты первой А и претъей С равнократныя EF, GH. Говорю, что EF, величины В, и GH величины D суть равнократныя.

Послику равнократныя суть, EF величины А, и GH величины С; то сколько величинъ въ EF равныхъ А, столько же величинъ и въ GH равныхъ С. Раздѣли EF на величины равныя А, то есть, на EK, KF; а GH на величины равныя С, то есть, на GL, LH. Ипакъ величины EK, KF суть равномногія величинамъ GL, LH. И послику равнократныя суть, А величины В, и С величины D; и EK равна А, а GL равна С: посему равнократныя суть, EK величины В, и GL величины D. Потому же равнократны, KF величины В, и LH величины D. Послику же первая величина EK

второй В, и претя GL четвертой D, равнократны; и также пятая KF второй В, и шестая LH четвертой D, равнократны: посему и совокупленно, первая съ пятою, то есть EF, второй В, и претя съ шестою, то есть GH, четвертой D суть равнократны*.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. *2.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели первая величина ко второй имѣеть тоже отношеніе, что и претя къ четвертой; то и равнократныя первой величины и претей, къ равнократнымъ второй величины и четвертой, по какому нисеть кратенствованію, будутъ имѣть тоже отношеніе, взятыя попеременно.

Пусть первая величина А ко второй В имѣеть тоже отношеніе, что и претя С къ четвертой D; и пусть будутъ взяты величины А, С равнократныя Е, F, а величины В, D другія какія нисеть равнократныя G, H. Говорю, что какъ Е къ С, такъ F къ H.

Возьми величины Е, F равнократныя K, L; а величины G, H другія какія нисеть равнократныя M, N.

Поелику равнокрапныя супъ, Е величинъ А, и Γ величинъ С; и взяпы величинъ Е, Γ равнокрапныя К, Л: посему равнокрапныя супъ, К величинъ А, и Л величинъ С*. Попоому же равнокрапны супъ, М величинъ В, и N величинъ D. И поелику какъ А къ В, такъ С къ D; и взяпы величинъ А, С равнокрапныя К, Л, а величинъ В, D другія какія ниесъ равнокрапныя М, N: посему есълъ К больше М, то и Л больше N; и есълъ равна, то
 опр.5. равна; и есълъ меньше, то меньше. Но К, Л супъ величинъ Е, Γ равнокрапныя, а М, N супъ величинъ G, H другія какія ниесъ равнокрапныя: чего ради какъ Е къ
 опр.5. G, такъ Γ къ H.

Ипакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (51).

Слѣдствие. Поелику доказано, что есълъ К больше М, то и Л больше N; и есълъ равна, то равна; и есълъ меньше, то меньше: почему явно, что и обратно, есълъ М больше К, то и N больше Л; и есълъ равна, то равна; и есълъ меньше, то меньше: а посему будетъ, и какъ
 *опр.5. G къ Е, такъ H къ Γ *. Отсюда явствуетъ, что есълъ чепыре величины пропорціо-
 опр.14. нальны; то и преложеніемъ будущъ пропорціональны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели цѣлая величина цѣлой, и опнятая опъ оной, опнятой опъ другой супъ равнокрапныя; то и оспальная оспальной, и цѣлая цѣлой будупъ равнокрапныя.

Пуспъ: цѣлая величина АВ цѣлой CD, и опнятая АЕ опнятой CF, будупъ равнокрапныя. Говорю, что и оспальная ЕВ оспальной FD, и цѣлая АВ цѣлой CD будупъ равнокрапныя.

Сколько крапная еспъ АЕ величины CF, пуспъ будепъ сполько крапна и ЕВ величины CG.

Поелику равнокрапныя супъ, АЕ величины CF, и ЕВ величины GC; то равнокрапны супъ, АЕ величины CF, и АВ величины GF*. А по положенію, равнокрапны, *г. АЕ величины CF, и АВ величины CD: ипакъ АВ еспъ равнокрапная каждой изъ величинъ GF, CD; а посему GF равна CD. Опними обще CF; посему оспальная GC равна оспальной DF. И поелику равнокрапныя супъ, АЕ величины CF, и ЕВ величины GC; а GC равна DF: то равнокрапны супъ АЕ величины CF, и ЕВ величины FD. А по положенію, равнокрапны АЕ величины CF, и АВ величины CD; посему равнокрапны супъ

ЕВ величины FD, и АВ величины CD. Чего ради и оспальная ЕВ оспальной FD есть столько крапная, какъ и цѣлая АВ цѣлой CD.

Итакъ, ежели цѣлая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI

Ежели двѣ величины равнокрапны двухъ величинъ; и отнятыя нѣкія будутъ равнокрапны ихъ самыхъ: то остальныя будутъ или равны имъ же, или равнокрапныя ихъ.

Пусть двѣ величины АВ, CD будутъ двухъ величинъ Е, F равнокрапныя; и пусть отнятыя АГ, СП будутъ нѣхъ же Е, F равнокрапныя. Говорю, что оспальныя GB, HD или равны величинамъ Е, F, или равнокрапны ихъ.

Вопервыхъ, пусть будетъ GB равна Е. Говорю, что и HD равна F. Положи величину СК равную F.

Поелику равнокрапныя суть, АГ величины Е, и СН величины F; и GB равна Е, а КС равна F; посему равнокрапныя *2. суть, АВ величины Е, и КН величины F. А по положенію, равнокрапны, АВ величины Е, и CD величины F; посему равнокрапны суть, КН величины F, и CD величины F. И поелику каждая изъ величинъ

БН, CD есѣ величины F равнократна; то БН равна CD. Опними обще СН; посему оспальная КС равна оспальной HD. Но КС равна F; посему и HD равна F. Слѣдовательно еспѣли GB равна E, то HD равна будещъ F.

Подобно докажемъ, что еспѣли величина GB величины E будещъ крайняя; то спольбо крайняя будещъ и величина HD величины F.

Ишакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н. (52).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Равныя величины къ той же имѣютъ тоже отношеніе: И иже величина къ равнымъ « имѣетъ тоже отношеніе. »

Пусть будупъ А, В равныя величины; а С другая иѣкая величина. Говорю, что каждая изъ величинъ А, В къ С имѣетъ тоже отношеніе; и С къ каждой изъ величинъ А, В « имѣетъ тоже отношеніе. »

Возьми величинъ А, В равнократныя D, E; а величины С другую какую ниестъ крайнюю F.

Послику равнократныя сущъ, D величины А, и E величины В; и А равна В: посему и D равна E. Но F еспѣ величины С другая

какая ни есть кратная: посему если D больше F , то и E больше F ; и если равна, то равна; и если меньше, то меньше. Но D, E суть величинъ A, B равнократныя; а F есть величины C другая какая ни есть кратная: чего ради какъ A къ C , такъ B къ C .

Говорю такожь, что и C къ каждой изъ величинъ A, B имѣетъ поже отношеніе.

Ибо, сдѣлавъ поже спроеніе, подобно докажемъ, что D равна E . Но F есть другая иная величина: посему если F больше D , то F больше и E : и если равна, то равна, и если меньше, то меньше. И F есть величины C кратная; а D, E суть величинъ A, B другія какія ни есть равнократныя: чего ради какъ C къ A , такъ

опр.5. C къ B .

Итакъ равныя, и проч. ч. и д. н. (53).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Изъ неравныхъ величинъ большая къ той же имѣетъ большее отношеніе, нежели меньшая: И таже величина къ меньшей имѣетъ большее отношеніе, нежели къ большей.

Пусть будутъ AB, C неравныя величины, и пусть AB будетъ большая; а D

Другая какая нисѣсть величина. Говорю ;
что АВ къ D имѣеть большее отноше-
ніе нежели С къ D ; и D къ С имѣеть
большее отношеніе ; нежели къ АВ.

Поелику АВ больше С ; то положи ВЕ
равную величинѣ С : ипакъ меньшая изъ
величинъ АЕ ; ЕВ взятая кратко , будетъ
наконѣцъ больше D*. Вопервыхъ , пусть *опр. 4.
будетъ АЕ меньше величины ЕВ. Бери
кратко величину АЕ , пока получишся ве-
личина больше D , и пусть будетъ FG тако-
вая кратная , большая величины D ; и сколь-
ко кратная естъ FG величины АЕ ; пусть
будетъ столько кратная и GH вели-
чины ЕВ , а К величины С ; и возьми
величины D двукратную величину L , пре-
кратную M ; и такъ далѣе всегда одною
больше , пока взятая кратная величины D
будетъ первая ; большая величины К. Возь-
ми такую кратную ; и пусть будетъ
N чепырекратная величины D , первая боль-
шая величины К.

И поелику, «изъ кратныхъ величины D,» вели-
чина N естъ первая, коюрой К меньше; то К
не меньше величины M. Поелику же равнократ-
ная сущъ, FG величины АЕ, и GH величины
ЕВ; то равнократны сущъ, FG величины АЕ,
и FH величины АВ*. Но FG величины АЕ, и К *1.

величины C , суть равнокрапныя; посему равнокрапны и FN величины AB , и K величины C : а посему FN , K суть величины AB , C равнокрапныя. Еще же, поелику равнокрапныя суть, GN величины EB , и K величины C ; и EB равна C : посему и K равна GN . Но K и не меньше M ; посему и GN не меньше M : а FG больше D ; посему цѣлая FN больше обѣихъ вмѣстѣ D , M . Но обѣ вмѣстѣ D , M равны величинѣ N ; посему FN больше N . « Ипакъ, поелику FN больше N , » а K не больше N ; и FN , K суть величинъ AB , C равнокрапныя; а N есть величины D другая какая нисестъ крапная: по AB къ D имѣеть

опр.7. большее отношеніе, нежели C къ D .

Говорю же, что и D къ C имѣеть большее отношеніе, нежели D къ AB .

Ибо, сдѣлавъ поже спроеіе, подобно докажемъ, что N больше K , а не больше FN . И N есть величины D крапная; а FN , K суть величинъ AB , C другія какія нисестъ равнокрапныя: чего ради D къ C имѣеть

опр.7. большее отношеніе, нежели D къ AB .

Но пусть AE будетъ больше EB : ипакъ меньшая величина EB взятая крапно, будетъ

опр.4. наконецъ больше D . Возьми таковую, и пусть будетъ GN , крапная величины EB , большая величины D ; и сколько крапная

есть GH величины EB , пусть будетъ столько
крапная и FG величины AE , а K вели-
чины C . Подобно же докажемъ, что FN, K суть
величинъ AB, C равнокрапныя. И такъ же
возьми величины D крапную N , первую
большую величины FG . Слѣдственно еще
будетъ FG не меньше M , а GH больше D :
посему цѣлая FN больше величинъ D, M , то
есть величины N ; а K не больше N , поелику
даже и FG , большая величины GH , то есть
величины K , естъ не больше N . Слѣдующее
за симъ докажется подобно предъидущему.

Итакъ изъ неравныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Величины къ тойже величинѣ имѣющія
тойже отношеніе, взаимно равны: И къ
которымъ таже величина имѣетъ тойже
отношеніе, и тѣ взаимно равны.

Пусть имѣетъ каждая изъ величинъ A, B
къ величинѣ C тойже отношеніе. Говорю, что
 A равна B .

Буде же нѣтъ; то каждая изъ величинъ
 A, B къ C не имѣла бы тойже отношеніе*: но *8:
каждая имѣетъ; посему A равна B .

Пусть имѣетъ еще C къ каждой изъ
величинъ A, B тойже отношеніе. Говорю,
что A равна B .

Буде же нѣтъ; то С къ каждой изъ величинъ А, В не имѣла бы поже отношеніе*; но она имѣеть: посему А равна В.

Итакъ величины, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Х.

Изъ величинъ къ тойже величинѣ имѣющихъ отношеніе, которая имѣеть большее отношеніе, та есть большая: И къ которой величинѣ таже имѣеть большее отношеніе, та есть меньшая.

Пусть имѣеть А къ С большее отношеніе, нежели В къ С. Говорю, что А больше В.

Буде же нѣтъ; то А или равна величинѣ В, или меньше ея. Но А не равна В; ибо каждая изъ величинъ А, В къ С имѣла бы поже отношеніе*: но каждая не имѣеть; посему А не равна В. И А не меньше В; ибо А къ С имѣла бы меньшее *8. отношеніе, нежели В къ С*: но она не имѣеть; посему А не меньше В. А доказано, что и ни равна: слѣдственно А больше В.

Пусть имѣеть еще С къ В большее отношеніе, нежели С къ А. Говорю, что В меньше А.

Буде же нѣтъ; то или равна, или больше. Но В не равна А; ибо С къ каждой

изъ величинъ A, B имѣла бы поже отноше-
 ніе*: но она не имѣетъ; посему A не *7.
 равна B . И B не больше A ; ибо C къ B
 имѣла бы меньшее отношеніе, нежели къ
 A : но она не имѣетъ; посему B не больше *8.
 A, A доказано, что и ни равна: слѣдственно
 B меньше A .

Итакъ изъ величинъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Отношенія, кои суть пѣже съ пѣмъже
 отношеніемъ, суть и взаимно пѣже.

Пусть будутъ, какъ A къ B , такъ C къ
 D ; и какъ C къ D такъ, E къ F . Говорю, что
 какъ A къ B , такъ E къ F .

Возьми величинъ A, C, E равнокрапныя
 G, H, K ; а величинъ B, D, F другія какія ни-
 естъ равнокрапныя L, M, N .

Поелику какъ A къ B , такъ C къ D ; и
 взяты величинъ A, C равнокрапныя G, H , а
 величинъ B, D другія какія ни естъ равно-
 крапныя L, M : посему естъли G больше L , то
 и H больше M ; и естъли равна, то рав-
 на; и естъли меньше, то меньше*. Еще же, *опр.5.
 поелику какъ C къ D , такъ E къ F ; и взяты
 величинъ C, E равнокрапныя H, K , а величинъ
 D, F другія какія ни естъ равнокрапныя M, N :

поэтому есѣли H больше M , то и K больше N ; и есѣли равна, то равна; и есѣли
 опр.5. меньше, то меньше. Но есѣли H больше
 M , то и G больше L ; и есѣли равна, то
 равна; и есѣли меньше, то меньше: слѣд-
 ственно, и есѣли G больше L , то и K
 больше N ; и есѣли равна, то равна; и
 есѣли меньше, то меньше. И G, K вели-
 чинъ A, E суть равнокрапныя; а L, N суть
 величинъ B, F другія какія ниесѣ равно-
 *опр.5. крапныя: чего ради какъ A къ B , такъ E къ F .
 Итакъ отношенія, и проч. ч. и д. н. (54).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Ежели будетъ сколько ниесѣ величинъ
 пропорціональных; то какъ одна предъ-
 идущая къ одной послѣдующей, такъ
 всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ.

Пусть будетъ сколько ниесѣ величинъ
 пропорціональных A, B, C, D, E, F , то
 есѣ, какъ A къ B , такъ C къ D , и такъ
 E къ F . Говорю, что какъ A къ B такъ A ,
 C, E къ B, D, F .

Возьми величинъ A, C, E равнокрапныя
 G, H, K ; а величинъ B, D, F другія ка-
 кія ниесѣ равнокрапныя L, M, N .

Послику какъ А къ В, такъ С къ D, и такъ Е къ F; и взяты величинъ А, С, Е равнокрапныя G, H, K, а величинъ В, D, F другія какія ниесуть равнокрапныя L, M, N: посему, есѣли G больше L, то и H больше M, и K больше N; и есѣли равна, то равна; и есѣли меньше, то меньше*. *опр. 5. Слѣдственно есѣли G больше L, то и G, H, K больше L, M, N; и есѣли равна, то равны; и есѣли меньше, то меньше. И G величины А, а G, H, K величинъ А, С, Е суть равнокрапныя; ибо, ежели будетъ сколько ниесуть величинъ, кои другихъ равномногихъ величинъ равнокрапны, каждая каждой, то сколько одна изъ величинъ есѣ крапная одной, сполько и всѣ будупъ крапны всѣхъ*. Поэтому же L величины В, и L, M, N *г. величинъ В, D, F суть равнокрапныя. Чего ради какъ А къ В, такъ А, С, Е къ В, D, F.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели первая величина ко второй имѣеть тоже отношеніе, что и третья къ четвертой; третья же къ четвертой имѣеть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой;

то и первая ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Пусть первая величина A ко второй B имѣетъ тоже отношеніе, что и третья C къ четвертой D ; и пусть третья C къ четвертой D имѣетъ большее отношеніе, нежели пятая E къ шестой F . Говорю, что и первая A ко второй B будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая E къ шестой F .

Поелику C къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ F : то суть нѣкія величинъ C , E равнокрапныя, и величинъ D , F другія какія ниесуть равнокрапныя; такія, что крапная величины C больше крапныя величины D , а крапная величины D не больше крапныя величины F . Возьми таковыя, и пусть будутъ величинъ C , E равнокрапныя G , H , а величинъ D , F другія какія ниесуть равнокрапныя K , L ; пакъ что G больше K , а H не больше L : и сколько крапная есть G величины C , пусть будетъ столько крапная и M величины A ; а сколько крапная K величины D , пусть будетъ столько крапная и N величины B .

И послику какъ A къ B , такъ C къ D ; и взявши величинъ A , C равнокрапныя M ,

С, а величинъ В, D другія какія ниесуть равнокрашныя N, K: посему есутьли M больше N, то и С больше K; и есутьли равна, то равна; и есутьли меньше, то меньше*. Но *опр. 5. С больше K, посему и M больше N. А N не больше L; и M, N суть величинъ А, Е равнокрашныя, а N, L суть величинъ В, F другія какія ниесуть равнокрашныя: чего ради А къ В имѣеть большее отношеніе, нежели Е къ F*. *опр. 7.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (55).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Ежели первая величина ко второй имѣеть тоже отношеніе, что и третья къ четвертой, и первая больше третьей, то и вторая будетъ больше четвертой; и ежели равна, то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть первая величина А ко второй В имѣеть тоже отношеніе, что и третья С къ четвертой D; и пусть А будетъ больше С. Говорю, что и В больше D.

Поелику А больше С, и В есть другая какая ниесуть величина; то А къ В имѣеть большее отношеніе, нежели С къ В*. Но *8. какъ А къ В, такъ С къ D; посему и С къ D имѣеть большее отношеніе, нежели

13. С къ В. Акъ которой величинѣ также имѣеть

10. большее отношеніе, на еспьменьшая; посему D меньше В; слѣдственно В больше D.

Подобно докажемъ, что еспьли А равна С, то будетъ и В равна D: и еспьли А меньше С, то будетъ и В меньше D.

Ипакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Частныя величины къ своимъ равнокрапнымъ имѣють тоже отношеніе, взятыя попеременно.

Пусть будутъ равнокрапныя, АВ величины С, DE величины F. Говорю, что какъ С къ F, такъ АВ къ DE.

Поелику равнокрапныя суть, АВ величины С, и DE величины F; то сколько величинъ въ АВ равныхъ С, столько же величинъ и въ DE равныхъ F. Раздѣли АВ на величины равныя С, какъ по на AG, GH, HB; а DE на величины равныя F, какъ по на DK, KL, LE. Ипакъ величины AG, GH, HB суть равномногія величинамъ DK, KL, LE. И поелику AG, GH, HB взаимно равны; и DK, KL, LE взаимно равны же: то какъ AG къ DK, такъ GH къ KL, и такъ

7. HB къ LE. Того ради какъ одна предъ-

идущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ*; и по- *12. тому какъ AG къ DK , такъ AB къ DE . Но AG равна C , а DK равна F : чего ради какъ C къ F , такъ AB къ DE *. *11.

Итакъ часныя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели чепыре величины пропорціональны; то и премѣненіемъ будутъ пропорціональныя.

Пусть будутъ чепыре величины A , B , C , D пропорціональныя, то есть, какъ A , къ B , такъ C къ D . Говорю, что онѣ и премѣненіемъ будутъ пропорціональныя, то есть*, какъ A къ C , такъ B къ D . *опр. 13.

Возьми величинъ A , B равнокрапныя E , F ; а величинъ C , D другія какія ниесъ равнокрапныя G , H .

Поелику равнокрапныя сущь, E величины A , и F величины B : а часныя величины къ своимъ равнокрапнымъ имѣють поже отношеніе, взятыя попеременно*: поему *15. какъ A къ B , такъ E къ F . Но какъ A къ B , такъ C къ D ; поему и какъ C къ D , такъ E къ F *. Еще же, поелику G , H величинъ *11. C , D равнокрапны; то какъ C къ

Д, такъ G къ H . Но какъ C къ D , такъ E къ F ; посему и какъ E къ F , такъ G къ

*11. H . А еспльи чепыре величины пропорціо-

14. палны; и первая больше претпъей, то и вторая будетъ больше чепверпной; и еспльи равна, то равна; и еспльи меньше, то меньше*. Посему, еспльи E больше G , то и F больше H ; и еспльи равна, то равна; и еспльи меньше, то меньше. И E, F суть величинъ A, B равнокрапныя; а G, H суть величинъ C, D другія какія ниеспль равнокрапныя: чего ради какъ A къ C , такъ

опр.5. B къ D .

Ипакъ, ежели чепыре, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели совокупленныя всличины пропорціональны; то и отдѣленныя будутъ пропорціональны.

Пуспль совокупленныя величины AB, BE ,
опр.15. CD, DF будутъ пропорціональны, то еспль,
какъ AB къ BE , такъ CD къ DF . Говорю, что
онѣ и отдѣленныя будутъ пропорціональ-
опр.16. ны, то еспль, какъ AE къ EB , такъ CF
къ FD .

Возьми величинъ AE, EB, CF, FD равнокрапныя GH, HK, LM, MN ; а величинъ EB, FD другія какія ниеспль равнокрапныя KP, NQ .

Поскольку равнокрапныя сущь; GH величины AE , и HK величины EB ; то равнокрапны, GH величины AE , и GK величины AB^* . Но *1. GH величины AE , и LM величины CF равнокрапны; посему равнокрапныя сущь; GK величины AB , и LM величины CF . Еще же, поскольку равнокрапныя сущь, LM величины CF , и MN величины FD ; то равнокрапныя сущь, LM величины CF , и LN величины CD . Но уже LM величины CF , и GK величины AB равнокрапны; посему равнокрапныя сущь, GK величины AB , и LN величины CD ; а посему GK , LN величинъ AB , CD сущь равнокрапныя. Еще же, поскольку равнокрапныя сущь, HK величины EB , и MN величины FD ; а также KP величины EB , и NQ величины FD равнокрапныя же: посему и совокупленно, HP величины EB , и MQ величины FD сущь равнокрапныя*. И поскольку какъ AB къ BE , такъ *2. CD къ DF ; и взяты величины AB , CD равнокрапныя GK , LN ; а величинъ EB , FD другія какія несть равнокрапныя HP , MQ : посему естли GK больше HQ , то и LN больше MQ ; и естли равна, то равна; и естли меньше, то меньше*. Пусть будетъ GK *опр. 5. больше HP ; посему, по опиятїи общей HK , и GH больше KP . Но естли GK больше HP , то и LN будетъ больше MQ : посему LN ест

опр.5. больше MQ^ ; а, по оппнпип общей MN , и LM больше NQ . Ипакъ еспъли GH больше KP , то и LM больше NQ . Подобно докажемъ, что и еспъли GH равна KP , то будетъ и LM равна NQ ; и еспъли меньше, то меньше. И GH , LM суть величинъ AE , CF равнокрапныя; а KP , NQ суть величинъ EB , FD другія какія ниесуть равнокрапныя:

*опр.5. чего ради какъ AE къ EB такъ CF къ FD .

Ипакъ, ежели величины, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XVШ.

Ежели величины опдѣленныя пропорціональны; то и совокупленныя будутъ пропорціональны.

Пусть опдѣленныя величины AE , EB , CF , FD будутъ пропорціональны, то
 опр.16. еспъ, какъ AE къ EB , такъ CF къ FD . Говорю, что онѣ и совокупленныя будутъ
 опр.15. пропорціональны, то еспъ, какъ AB къ BE , такъ CD къ FD .

Ибо, еспъли не будетъ какъ AB къ BE , такъ CD къ FD ; то будетъ какъ AB къ BE , такъ CD къ нѣкоей величинѣ, или меньшей нежели DF , или большей.

Вопервыхъ, пусть будетъ къ меньшей DG . Поелику какъ AB къ BE , такъ CD къ

DC , то есть, совокупленные величины пропорциональны; следовательно и отдѣленные будутъ пропорциональны*: посему*17. какъ AE къ EB , такъ CG къ GD . А по положенію, какъ AE къ EB , такъ CF къ FD ; посему и какъ CG къ GD , такъ CF къ FD *.*11. Но первая CG больше третьей CF ; посему и вторая GD больше четвертой FD *.*14. Она же и меньше: что невозможно; посему не будетъ какъ AB къ BE , такъ CD къ величинѣ меньшей нежели FD . Подобно докажемъ, что и ни къ большей: следовательно къ ней самой.

Итакъ, ежели величины, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели будетъ, какъ цѣлая величина къ цѣлой, такъ опиятая къ опиятой; то и оспальная будетъ къ оспальной, какъ цѣлая къ цѣлой.

Пусть будетъ какъ цѣлая величина AB къ цѣлой CD , такъ опиятая AE къ опиятой CF . Говорю, что и оспальная EB будетъ къ оспальной FD , какъ цѣлая AB къ цѣлой CD .

Поелику какъ AB къ CD , такъ AE къ CF ; то премѣненіемъ, какъ BA къ AE такъ

- *16. DC къ CF *. И поелику совокупленныя величины пропорціональны, то и отдѣльныя будутъ пропорціональны*; поему какъ BE къ EA , такъ DF къ FC ; и премѣненіемъ, какъ BE къ DF , такъ EA къ FC *. Но какъ AE къ CF такъ, по положенію, цѣлая AB къ цѣлой CD : чего ради и оспальная EB будетъ къ оспальной DF , *11. какъ цѣлая AB къ цѣлой CD *.

Итакъ, ежели будетъ; и проч. ч. и д. н.

[СЛѢДСТВІЕ. И поелику доказано, что какъ AB къ CD ; такъ EB къ FD ; и премѣненіемъ*, какъ AB къ BE , такъ CD къ DF : поему совокупленныя величины пропорціональны. А доказано; что какъ AB къ AE такъ CD къ CF , что и есть обращеніе. Отсюда явствуетъ, что если совокупленныя величины пропорціональны то отъ и обращеніемъ будутъ пропорціональны. ч. и д. н.] (56).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъ же отношеніи; и ежели, равномѣстно, первая больше третьей, то и четвертая

будетъ больше шестой; и ежели равна, то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ А, В, С три величины, и D, E, F другія имъ равномогїя, взятїя по двѣ въ томъ же отношенїи, то есть: какъ А къ В, такъ D къ E; и какъ В къ С, такъ E къ F: и пусть, равнобѣсно, будетъ А больше С. Говорю, что и D будетъ больше F: И еслили равна, то равна; еслили меньше, то меньше.

Послику А больше С, а В есть другая ибкая величина; большая же величина къ той же имѣетъ большее отношенїе, нежели меньшая*: посему А къ В имѣетъ *8. большее отношенїе, нежели С къ В. Но какъ А къ В, такъ D къ E; а какъ С къ В, предложеньемъ (57), такъ F къ E: посему и D къ E имѣетъ большее отношенїе, нежели F къ E*. А изъ величинъ къ той же величинѣ *11 и 13. имѣющихъ отношенїе, которая имѣетъ большее отношенїе; та есть большая*; по- *10. сему D больше F. Подобно докажемъ, что и еслили А равна С, то и D будетъ равна F; и еслили меньше, то меньше.

Итакъ, ежели будутъ, и проч. ч: и д. н:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ помѣже отношеніи, пропорція же ихъ будетъ обратная; и ежели, равномѣстно, первая больше третьей, то и четвертая будетъ больше шестой; и ежели равна, то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ A, B, C три величины, и D, E, F другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ помѣже отношеніи, пропорцій же ихъ пусть будетъ обратная, то есть: какъ A къ B , такъ E къ F ; и какъ B къ C , такъ D къ E : и пусть, равномѣстно, будетъ A больше C . Говорю, что и D будетъ больше F : И еслили равна, то равна; и еслили меньше, то меньше.

Поелику A больше C , а B есть другая нѣкая величина; то A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ B *. Но какъ A къ B , такъ E къ F ; и какъ C къ B , предложеномъ (77), такъ E къ D : посему и E къ F имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ D *. A къ которой величинѣ иже имѣетъ большее отношеніе, и A есть меньшая*; посему F меньше D ; слѣдовательно D больше F . Подобно докажемъ, что и еслили A равна

С, то и D будетъ равна F; и естли меньше, то меньше.

Итакъ, ежели будутъ, и проч. ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ХХІІ.

Ежели будетъ сколько нисеть величинъ, и другихъ имъ равномогихъ, взятыхъ по двѣ въ помъже отношеніи; то и равнобъспно будутъ въ помъже отношеніи.

Пусть будетъ сколько нисеть величинъ А, В, С, и другихъ имъ равномогихъ D, E, F, взятыхъ по двѣ въ помъже отношеніи; то есь: какъ А къ В, такъ D къ E; и какъ В къ С, такъ E къ F. Говорю, что и равнобъспно будутъ въ помъже отношеніи, то есь*: какъ А къ С, такъ D къ F. *опр. 18.

Возьми величинъ А, D равнокрапныя G, H; а величинъ В, E другія какія нисеть равнокрапныя K, L; и еще величинъ С, F другія какія нисеть равнокрапныя M, N.

Поелику какъ А къ В, такъ D къ E; и взиты величинъ А, D равнокрапныя G, H, а величинъ В, E другія какія нисеть равнокрапныя K, L: то какъ G къ K, такъ H къ L*. Потому же и какъ K къ M, такъ L къ N. И поелику суть при величины G, K, M, и другія имъ равномогія H, L, N взитыя

по двѣ и въ томъ же отношеніи: посему
равномѣрно, еслии G больше M , то и
 H больше N ; и еслии равна, то равна; и
20. еслии меньше, то меньше. Но G, H суть
величинъ A, D равнокрапныя; а M, N ве-
личинъ C, F другія какія ниесуть равнокрап-
*опр.5. ныя: чегоради какъ A къ C , такъ D къ F .
Итакъ, ежели будутъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Ежели будутъ три величины, и другія
имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъ-
же отношеніи, пропорція же ихъ будетъ
обратная; то и равномѣрно будутъ въ
томъ же отношеніи.

Пусть будутъ A, B, C три величины,
и D, E, F другія имъ равномногія, взятыя
по двѣ въ томъ же отношеніи, пропорція
же ихъ пусть будетъ обратная, то
опр.20. есуть: какъ A къ B , такъ E къ F ; и какъ
 B къ C , такъ D къ E . Говорю, что какъ
 A къ C , такъ D къ F .

Возьми величинъ A, B, D равнокрапныя
 G, H, K ; а величинъ C, E, F другія ка-
кія ниесуть равнокрапныя L, M, N .

Поелику равнокрапныя суютъ G, H ве-
личинъ A, B ; частныя же величины къ сво-

имъ равнокрапнымъ имѣютъ поже отноше-
 ніе*: посему какъ А къ В, такъ G къ Н. *15.
 Потому же и какъ Е къ F, такъ М къ N.
 Но какъ А къ В, такъ Е къ F; посему и
 какъ G къ Н, такъ М къ N*. И поелику какъ *11.
 В къ С, такъ D къ E; и взяты величинъ
 В, D равнокрапныя Н, К; а величинъ С,
 Е другія какія ниесуть равнокрапныя L,
 М: посему какъ Н къ L, такъ К къ M*. *4.
 А доказано, что и какъ G къ Н, такъ М
 къ N: Итакъ сущъ три величины G, Н, L,
 и другія имъ равномогѣя К, М, N, взятые
 по двѣ въ томъ же отношеніи, пропорція
 же ихъ обратная: посему равномѣрно,
 естли G больше L, то и К больше N;
 и естли равна, то равна; и естли мень-
 ше, то меньше*. Но G, K равнокрапны *21.
 величинъ А, D; а L, N величинъ С, F:
 чего ради какъ А къ С, такъ D къ F*. *опр.5.
 Итакъ, ежели будущъ, и проч. ч. и д. н.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е XXIV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ
 поже отношеніе, что и третья къ че-
 твертой; и также пятая ко второй имѣетъ
 поже отношеніе, что и шестая къ че-
 твертой: то и совокупленно, первая съ пя-

тою ко второй будуще имѣть тоже отношеніе, что и третья съ шестю ко четвертой.

Пусть первая величина АВ ко второй С имѣетъ тоже отношеніе, что и третья DE ко четвертой F; и также пусть пятая BG ко второй С имѣетъ тоже отношеніе, что и шестая EN ко четвертой F. Говорю, что и совокупленно, первая съ пятою, то есть AG, ко второй С будетъ имѣть тоже отношеніе, что и третья съ шестю, то есть DN, ко четвертой F.

Поскольку какъ BG къ С, такъ EN къ F; то предложемъ, какъ С къ BG, такъ F къ EN*. И поскольку какъ АВ къ С, такъ DE къ F; и какъ С къ BG, такъ F къ EN: то равнобѣстно, какъ АВ къ BG, такъ DE къ EN*. А поскольку ошдѣленные величины пропорціональны, то и совокупленные будутъ пропорціональны*; посему какъ AG къ BG, такъ DN къ NE. Но и какъ BG къ С, такъ EN къ F: чего ради равнобѣстно, какъ AG къ С, такъ DN къ F*.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели четыре величины пропорціональны, то наибольшая съ наименьшею сунъ больше двухъ прочихъ.

Пусть будутъ четыре величины АВ, CD, E, F пропорціональныя, то естъ, какъ АВ къ CD такъ E къ F; и пусть будутъ наибольшая изъ нихъ АВ, а наименьшая F. Говорю, что АВ, F сунъ больше величинъ CD, E.

Положи AG равную E, а CH равную F.

Поелику какъ АВ къ CD, такъ E къ F; и E равна AG, а F равна CH: то какъ АВ къ CD, такъ AG къ CH. И поелику какъ цѣлая АВ къ цѣлой CD, такъ отнятая AG къ отнятой CH; то и оставшая GB будетъ къ оставшей HD, какъ цѣлая АВ къ цѣлой CD*. Но АВ больше CD; *19. посему и GB больше HD. И поелику AG равна E, а CH равна F; то AG, F равны CH, E. А поелику, естъли къ неравнымъ приложены равныя, то и цѣлыя неравны: посему естъли, изъ неравныхъ величинъ GB, HD изъ коихъ GB большая, къ GB приложимъ AG, F, а къ HD приложимъ CH, E; то будутъ АВ, F больше величинъ CD, E.

Итакъ, ежели четыре, и пр. ч. и д. н. (58).

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА VI.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Подобныя прямолинейныя фигуры суть тѣ, копорыя и всѣ углы имѣютъ равные, одинъ по одному, и около равныхъ угловъ стороны пропорціональныя. (59).

2. Обратныя же фигуры суть, когда въ каждой фигурѣ находятся предъидущіе и послѣдующіе члены отношеній. (60).

3. Прямая линія называется разсѣченною въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, когда какъ цѣлая прямая къ большему отрѣзку, такъ большій къ меньшему.

4. Высота всякой фигуры есть прямая проведенная отъ вершины перпендикулярно къ основанію. (61)

5. Отношеніе называется сложнымъ изъ отношеній, когда количества сихъ отношеній въ нихъ кратіисповованныя дѣлають нѣкое количество. (*Λογος ἐκ λόγων συ-
κείμενοι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πλη-
κότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι,
ποιῶσι τινάς*). (62).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Треугольники и параллелограммы, имѣющіе ту же высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пусть будутъ ABC, ACD треугольники, а EC, CF параллелограммы, имѣющіе ту же высоту, перпендикулярную прямую отъ A къ BD проведенную*. Говорю, что какъ *опр. 4. основаніе BC къ основанію CD, такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD, и такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму CF.

Продолжи BD на обѣ стороны къ точкамъ H, L; и положи сколько ниесъ прямыхъ BG, CH равныхъ основанію BC, и сколько ниесъ прямыхъ DK, KL равныхъ основанію CD; и пропями AG, AH, AK, AL.

- Поелику CB , BG , GH взаимно равны, то и треугольники AHG , AGB , ABC взаимно
 38, I. равны: посему сколько крапное естъ основаніе HC основанія BC , столько крапный естъ и треугольникъ AHC треугольника ABC . Попомуже, сколько крапное естъ основаніе CL основанія CD , столько крапный естъ и треугольникъ ALC треугольника ACD . И есмьли основаніе HC равно основанію CL , то и треугольникъ AHC
 *38, I. равенъ треугольнику ALC *; и есмьли основаніе HC больше основанія CL , то и треугольникъ AHC больше треугольника ALC ; и есмьли меньше, то меньше. Ипакъ изъ имѣющихся чепырехъ величинъ, то естъ, двухъ основаній BC , CD , и двухъ треугольниковъ ABC , ACD , взяпы основанія BC и треугольника ABC равнокрапныя, основаніе HC и треугольникъ AHC ; а основанія CD и треугольника ACD другія какія нѣсть равнокрапныя, основаніе CL и треугольникъ ALC : и доказано, что есмьли основаніе HC больше основанія CL , то и треугольникъ AHC больше треугольника ALC ; и есмьли равно, то равенъ; и есмьли меньше, то меньше: а посему какъ основаніе BC къ основанію CD , такъ треугольникъ ABC къ
 оп. 5, V. треугольнику ACD .

И поелику треугольника ABC двукратный есть параллелограммъ EC^* , и треугольника $*41, I.$ ACD двукратный есть параллелограммъ FC ; а частныя величины къ своимъ равнокр. п. нымъ имѣютъ поже отношеніе*: поему $*15, V.$ какъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD , такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC . Поелику же доказано, что какъ основаніе BC къ основанію CD , такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD ; и что какъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD , такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC : поему и какъ основаніе BC къ основанію CD , такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC^* . $*11, V.$

Итакъ треугольники, и пр. ч. и д. н. (63).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ц.

Ежели къ одной изъ сторонъ треугольника проведемъ какая нисетъ параллельная прямая; то она разсѣчетъ прочія стороны треугольника пропорціонально: и ежели стороны треугольника разсѣчены пропорціонально; то прямая пропннутая чрезъ сѣченія будетъ параллельна къ остальной сторонѣ треугольника.

Треугольника ABC къ одной изъ сторонъ

BC пусть проведена будетъ параллельная DE. Говорю, что какъ BD къ DA, такъ CE къ EA.

Протяни BE, CD.

Итакъ преутольникъ BDE равенъ пре-
 37.I. угольнику CDE; ибо стоятъ на томъ же
 основаніи DE, и между нѣмъ же параллель-
 ными DE, BC: И ADE есть другой нѣ-
 кій преутольникъ; а равныя величины къ

7.V. той же имѣютъ тоже отношеніе: посему
 какъ преутольникъ BDE къ преутольнику
 ADE, такъ преутольникъ CDE къ преутоль-
 нику ADE. Но какъ преутольникъ BDE къ
 преутольнику ADE, такъ BD къ DA; ибо
 имѣютъ ту же высоту, перпендикулярную
 прямую отъ E къ AB проведенную, и по-

1. тому взаимно суть какъ ихъ основанія.

Поэтому же какъ преутольникъ CDE къ пре-
 утольнику ADE, такъ CE къ EA: чего ради

11.V. и какъ BD къ DA, такъ CE къ EA.

Но преутольника же ABC пусть сторо-
 ны AB, AC будутъ разсѣчены пропорціо-
 нально въ точкахъ D, E, то есть, какъ
 BD къ DA, такъ CE къ EA; и пусть бу-
 детъ протянута DE. Говорю, что DE па-
 раллельна къ BC.

Ибо, сдѣлавъ тоже строеніе, поемъ
 какъ BD къ DA, такъ CE къ EA: но какъ

BD къ DA , такъ треугольникъ BDE къ
 треугольнику ADE^* ; а какъ CE къ EA , такъ $*1.$
 треугольникъ CDE къ треугольнику ADE :
 посему какъ треугольникъ BDE къ пре-
 угольнику ADE , такъ и треугольникъ CDE
 къ треугольнику ADE^* . Ипакъ каждый изъ $*11, V.$
 треугольниковъ BDE , CDE къ треугольни-
 ку ADE имѣеть тоже отношеніе : посему
 треугольникъ BDE равенъ треугольнику
 CDE^* : И спояпъ они на томъже основаніи $*9, V.$
 DE ; а равные треугольники, споящіе на
 томъже основаніи, супъ между тѣмиже па-
 раллельными* : чего ради DE параллельна $*39, I.$
 къ BC .

Ипакъ, ежели къ одной, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Ежели треугольника уголь раздѣлится
 по поламъ, и прямая разсѣкающая уголь
 разсѣчетъ и основаніе ; то основанія оп-
 рѣзки будутъ имѣть тоже отношеніе, что
 прочія стороны треугольника : И ежели ос-
 нованія опрѣзки имѣютъ тоже отношеніе,
 что прочія стороны треугольника ; то
 прямая отъ вершины къ сѣченію пропяну-
 тая, раздѣлитъ уголь треугольника по
 поламъ.

Пусть будетъ ABC треугольникъ; и пусть уголъ BAC раздѣлится по поламъ прямою AD . Говорю, что какъ BD къ DC , такъ BA къ AC .

Черезъ C проведи, параллельную къ DA ,
 *31, I. прямую CE *; и пусть продолженная BA встрѣтится съ нею въ E .

Поелику на параллельныя прямыя AD , EC падаетъ прямая AC ; то уголъ ACE равенъ
 *29, I. углу CAD *: Но уголъ CAD равенъ, по положенію, углу BAD ; посему и уголъ BAD равенъ углу ACE . Еще же; поелику на параллельныя прямыя AD , EC падаетъ прямая BAE ; то внѣшній уголъ BAD равенъ внутреннему AEC . А доказано, что и уголъ ACE равенъ углу BAD ; посему уголъ ACE равенъ и углу AEC ; слѣдственно и стороны AE
 *6, I. равна сторонамъ AC *. И поелику къ EC ; одной изъ сторонъ треугольника BCE , проведена параллельная AD ; то какъ BD къ DC ,
 *2. такъ BA къ AE *. Но AE равна AC ; посему
 *7, V. какъ BD къ DC , такъ BA къ AC *.

Но пусть будетъ какъ BD къ DC , такъ BA къ AC ; и пусть будетъ пропущена AD . Говорю, что уголъ BAC раздѣленъ по поламъ прямою AD .

Ибо, сдѣлавъ тоже спроеіе, поелику какъ BD къ DC , такъ BA къ AC : то какъ

BD къ DC, такъ и BA къ AE*; ибо къ EC, *2. одной изъ споронъ преугольника BCE, проведена параллельная AD: посему какъ BA къ AC, такъ BA къ AE*. Ипакъ AC равна *11, V. AE; слѣдственно и уголъ AEC равенъ углу ACE*. Но уголъ AEC равенъ внѣшнему *1, I. BAD*; а уголъ ACE равенъ наклоняющему *29, I. CAD: посему уголъ BAD равенъ углу CAD. Чего ради уголъ BAC раздѣленъ по поламъ прямою AD.

Ипакъ, ежели преугольника, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Равноугольныхъ преугольниковъ спороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональны: и равнымъ угламъ противоположащъ сходственныя спороны.

Пусть будутъ ABC, DCE равноугольные преугольники, имѣющіе уголъ ABC равный углу DCE, а уголъ ACB углу DEC, и еще уголъ BAC углу CDE. Говорю, что преугольниковъ ABC, DCE спороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональны; и равнымъ угламъ противоположащъ сходственные спороны.

Положи BC впрямъ съ CE. И поелику углы ABC, ACB меньше двухъ прямыхъ*; а *17, I.

уголъ ACB равенъ углу DEC : по и углы ABC , DEC меньше двухъ прямыхъ; посему
 акс. I. прямыя BA , ED продолженныя встрѣтятся.
 Продолжи оныя, и пусть встрѣтятся
 въ F .

Поелику уголъ DCE равенъ углу ABC ; по
 *28, I. BF параллельна къ CD *. Еще же, поелику
 уголъ ACB равенъ углу DEC ; по AC параллельна къ FE : Итакъ $FACD$ есть параллелограммъ; и потому FA равна DC , а AC
 *34, I. равна FD *. И поелику къ FE , одной изъ
 сторонъ треугольника FBE , проведена параллельная AC ; по какъ BA къ AF , такъ
 *2. BC къ CE *. Но AF равна CD : посему какъ
 *7, V. BA къ CD , такъ BC къ CE *; и премѣненіемъ,
 *16, V. нѣмъ, какъ AB къ BC , такъ DC къ CE *. Еще
 же, поелику CD параллельна къ BF ; по
 какъ BC къ CE , такъ FD къ DE . Но FD
 равна AC : посему какъ BC къ CE , такъ AC
 къ ED ; и премѣненіемъ, какъ BC къ CA ,
 такъ CE къ ED . Поелику же доказано, что
 какъ AB къ BC , такъ DC къ CE ; а какъ
 BC къ CA , такъ CE къ ED : чего ради равно-
 *22, V. мѣстно, какъ BA къ AC , такъ CD къ DE .
 Итакъ равноугольныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.

Ежели два преутольника имѣютъ стороны пропорціональныя : то они будутъ равноугольные ; и будутъ имѣть равные углы пѣ , коимъ пропивиулежатъ сходственныя стороны.

Пусть будутъ ABC , DEF два преутольника , имѣющіе стороны пропорціональныя , а именно : какъ AB къ BC , такъ DE къ EF ; и какъ BC къ CA , такъ EF къ FD ; и еще , какъ BA къ AC , такъ ED къ DF . Говорю , что преутольникъ ABC есть равноугольный преутольнику DEF ; и что они будутъ имѣть равные углы пѣ , коимъ пропивиулежатъ сходственныя стороны , то есть : уголъ ABC углу DEF ; а уголъ BCA углу EFD ; и еще , уголъ BAC углу EDF .

При прямой EF , и при точкахъ на ней E , F , сославъ уголъ FEG равный углу ABC * , *23, I. а уголъ EFG равный углу BCA : посему остальной уголъ BAC равенъ остальному EGF * .

*32, I.

Итакъ преутольникъ ABC есть равноугольный преутольнику GEF . Посему преутольниковъ ABC ; EGF стороны , кой около равныхъ угловъ , суть пропорціональны ; и равнымъ угламъ пропивиулежатъ сход-

- *4. ственныя спороны* : а посему какъ АВ къ ВС, такъ GE къ EF. Но какъ АВ къ ВС, такъ , по положенію , DE къ EF; посему и *11.V. какъ DE къ EF, такъ GE къ EF*. Инакъ каждая изъ прямыхъ DE , GE къ EF имѣеть
- *9.V. поже отношеніе ; посему DE равна GE. Потому же и DF равна GF. И поелику DE равна EG , а EF общая ; то двѣ прямыя DE , EF равны двумъ прямымъ GE , EF ; и основаніе FD равно основанію FG.
- *8.I. посему уголъ DEF равенъ углу GEF : И треугольникъ DEF равенъ треугольнику GEF ; и прочіе углы равны прочимъ угламъ,
- *4.I. кои противоположають равнымъ споронамъ* : посему уголъ DFE равенъ углу GFE ; и уголъ EDF равенъ углу EGF. И поелику уголъ FED равенъ углу FEG ; а уголъ GEF равенъ углу ABC : то уголъ ABC равенъ углу DEF. Потому же и уголъ ACB равенъ углу DFE ; и еще , уголъ при А равенъ углу при D. Чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF.

Инакъ, ежели два треугольника, и пр. ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI

Ежели два треугольника имѣютъ одинъ уголъ равный одному углу, и около ра-

внѣхъ угловъ стороны пропорціональныя :
 то преутольники будутъ равноугольные ;
 и будутъ имѣть равные углы ипѣ, коимъ
 противулежащъ сходственныя стороны.

Пусть будутъ ABC , DEF два преутоль-
 ника, имѣющіе одинъ уголъ BAC равный
 одному углу EDF ; и около равныхъ угловъ
 стороны пропорціональныя, а именно : какъ
 BA къ AC , такъ ED къ DF . Говорю, что
 преутольникъ ABC есть равноугольный пре-
 утольнику DEF ; и будетъ уголъ ABC равенъ
 углу DEF , а уголъ ACB равенъ углу DFE .

При прямой DF , и при точкахъ на ней
 D , F , соствавъ уголъ FDC равный которому
 внеси изъ угловъ BAC , EDF , а уголъ DFC
 равный углу ACB : посему оспальной уголъ
 при B равенъ оспальной углу при G . *32, I.

Итакъ преутольникъ ABC есть равно-
 угольный преутольнику DGF : посему какъ
 BA къ AC , такъ GD къ DF *. А по положе- *4.
 нію, какъ BA къ AC , такъ ED къ DF : посему
 какъ ED къ DF , такъ и GD къ DF *: Чего *11, V.
 ради ED равна DG *; а DF общая: итакъ *9, V.
 двѣ прямыя ED , DF равны двумъ прямымъ
 GD , DF ; и уголъ EDF равенъ углу GDF : по-
 сему основаніе EF равно основанію FG ; и
 преутольникъ DEF равенъ преутольнику
 DGF ; и прочіе углы равны будутъ прочимъ

угламъ, каждый каждому, кои пропавуле-
 4.1. жашъ равнымъ споронамъ: посему уголъ
 DFG равенъ углу DFE ; и уголъ при G равенъ
 углу при E . Но уголъ DFG равенъ углу ACB ;
 посему и уголъ ACB равенъ углу DFE . А по
 положенію, и уголъ BAC равенъ углу EDF ;
 посему и оспальной уголъ при B равенъ
 оспальному углу при E . Чего ради пре-
 угольникъ ABC естъ равноугольный пре-
 угольнику DEF .

Ишакъ, ежели два преугольника, и проч.
 ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели два преугольника имѣють одинъ
 уголъ равный одному углу, и около другихъ
 угловъ спороны пропорціональны; и ежели
 изъ оспальныхъ угловъ каждый меньше, или
 не меньше прямого: то преугольники будутъ
 равноугольные; и будутъ имѣть равные
 углы шѣ, около которыхъ спороны про-
 порціональны.

Пусть будутъ два преугольника ABC .
 DEF , имѣющіе одинъ уголъ равный одному
 углу, а именно, уголъ BAC углу EDF ; и
 около другихъ угловъ ABC , DEF спороны
 пропорціональны, а именно: какъ AB къ

BC, такъ DE къ EF; и пусть изъ остальныхъ угловъ, то есть, кон при C, F, будетъ каждый, во первыхъ, меньше прямого. Говорю, что треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF; и будетъ уголъ ABC равенъ углу DEF, и оспальной уголъ при C равенъ оспальному углу при F.

Ибо, буде уголъ ABC не равенъ углу DEF; то одинъ изъ нихъ большій. Пусть будетъ уголъ ABC большій. При прямой AB!, и при точкѣ на ней B, соснавь уголъ ABG равный углу DEF.

Поелику уголъ A равенъ углу D, а уголъ ABG равенъ углу DEF; то и оспальной уголъ AGB равенъ оспальному углу DFE. Итакъ треугольникъ ABG есть равноугольный треугольнику DEF; посему какъ AB къ BG, такъ DE къ EF.* Но какъ DE къ EF, *4. такъ, по положенію, AB къ BC; посему и какъ AB къ BC, такъ AB къ BG*. Итакъ AB *11. V. къ каждой изъ прямыхъ BC, BG имѣетъ тоже отношеніе; посему BC равна BG*; *9. V. слѣдственно и уголъ BGC равенъ углу BCG*. *5. I. А по положенію, уголъ при C меньше прямого; посему и уголъ BCG меньше прямого; слѣдственно смѣжный ему уголъ AGB есть больше прямого*. Доказано же, что *13. I. онъ равенъ углу при F; посему и уголъ при F

есть больше прямого. А по положенію онъ меньше прямого: что неѣбно; посему уголъ ABC не неравенъ углу DEF ; слѣдственно равенъ. Но уголъ при A равенъ углу при D ; посему и остальной уголъ при C равенъ остальному углу при F : чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF .

Но пусть еще будетъ каждый изъ угловъ, кѣи при C , F , не меньше прямого. Говорю еще, что и тогда треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF .

Ибо, сдѣлавъ поже спроеіе, подобно докажемъ, что BC равна BG ; слѣдственно и уголъ при C равенъ углу BGC . Но уголъ при C не меньше прямого; посему не меньше прямого и уголъ BGC . Итакъ треугольника BGC два угла суть не меньше двухъ пря-

17, I. мыхъ, что невозможно; посему опять не будетъ уголъ ABC неравенъ углу DEF ; слѣдственно равенъ. Но и уголъ при A равенъ углу при D ; посему и остальной уголъ при C равенъ остальному углу при F : чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF .

Итакъ, ежели два треугольника, и проч.
ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Если въ прямоугольномъ треугольникѣ отъ прямого угла къ основанію проведена перпендикулярная; то треугольники, кои при перпендикулярной, подобны сущь и цѣлому треугольнику и взаимно.

Пусть будетъ ABC прямоугольный треугольникъ, имѣющій уголъ BAC прямой; и пусть отъ A проведена будетъ къ BC перпендикулярная AD . Говорю, что каждый изъ треугольниковъ ABD , ADC подобенъ цѣлому треугольнику ABC , и также подобны сущь взаимно.

Поскольку уголъ BAC равенъ углу ADB , ибо каждый изъ нихъ прямой; и общій двумъ треугольникамъ ABC и ABD есть уголъ при B ; посему остальной уголъ ACB равенъ остальному BAD : чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику ABD . Посему какъ BC , проптивулежащая прямому углу треугольника ABC , къ BA , проптивулежащей прямому углу треугольника ABD ; такъ же AB , проптивулежащая углу при C треугольника ABC , къ BD , проптивулежащей углу, коему равенъ уголъ при C , то есть углу BAD треугольника ABD ; и такъ же AC къ AD , проптивулежащей углу

4. при В, общему обоимъ треугольникамъ. Ипакъ треугольникъ ABC и равноугольный есть треугольнику ABD , и около равныхъ угловъ имѣеть стороны пропорціональныя; слѣдственно треугольникъ ABC *опр. 1. подобенъ треугольнику ABD *. Подобно докажемъ, что и треугольникъ ADC подобенъ треугольнику ABC . Чего ради каждый изъ треугольниковъ ABD , ADC подобенъ цѣлому треугольнику ABC .

Говорю еще, что треугольники ABD , ADC подобны и взаимно.

Поелику прямой уголъ BDA равенъ прямому углу ADC ; а и уголъ BAD равенъ углу при C , по доказанному: посему остальной уголъ при B равенъ остальному DAC : чего ради треугольникъ ABD есть равноугольный треугольнику ADC . Посему какъ BD , сторона треугольника ABD , проптивулежащая углу BAD , къ DA , сторонѣ треугольника ADC , проптивулежащей углу при C равному BAD ; такъ та же AD , сторона треугольника ABD , проптивулежащая углу при B , къ DC , сторонѣ треугольника ADC , проптивулежащей углу DAC равному углу при B ; и такъ же BA , проптивулежащая прямому углу ADB , къ AC , проптивулежащей прямому углу ADC . Чего ради треугольникъ

ABD подобенъ треугольнику ADC .

Итакъ, ежели въ прямоугольномъ, и проч., ч. II Д. Н.

Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что есть-ли въ прямоугольномъ треугольникѣ отъ прямого угла къ основанію проведена будетъ перпендикулярная: то проведенная есть средняя пропорціональная отрѣзкамъ основанія; и также сторона при которомъ иесть отрѣзкъ, есть средняя пропорціональная основанію и оному отрѣзку.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Отъ данной прямой отнять назначенную часть.

Пусть будетъ AB данная прямая. Надлежитъ отъ прямой AB отнять назначенную часть.

Пусть назначена будетъ третья. Проведи отъ A прямую AC , содержащую какой иесть уголъ съ прямою AB ; и возьми на AC какую иесть точку D ; и положи прямыя DE , EC равныя прямой AD^* ; и пропни BC ; и чрезъ D проведи, параллельную къ BC , прямую DF^* . *31, I.

*31, I.

Поелику къ BC , одной изъ сторонъ тре-

утольника ABC , проведена параллельная FD :
 *2. по какъ CD къ DA , такъ BF къ FA *. По
 CD есть двукратная прямой DA ; посему
 и BF двукратная прямой FA . Чего ради
 BA есть прекратная прямой AF .

Итакъ опъ данной прямой AB опята
 назначенная претпья часнь, прямая AF .
 ч. и с. н. (64).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Данную неразсѣченную прямую разсѣчь по-
 добно данной разсѣченной прямой.

Пусть будетъ AB данная неразсѣченная
 прямая, а AC разсѣченная. Надлежитъ пе-
 рассѣченную AB разсѣчь подобно разсѣчен-
 ной AC .

Пусть разсѣчена будетъ AC въ точкахъ
 D , E . Положи прямая AB , AC , такъ чшобы
 онѣ содержали какой ниесъ уголь; и про-
 пияни CB ; и чрезъ D , E проведи, парал-
 лельныя къ BC , прямая DF , EG ; и чрезъ D
 же проведи, параллельную къ AB , прямую DNK .

Итакъ каждый изъ чепыреугольниковъ
 FN , NB есть параллелограммъ; посему DN
 *34, I. равна FG , а NK равна GB *. И поелику къ AC ,
 одной изъ сторонъ треугольника DKC ,
 проведена параллельная NE ; по какъ CE къ

ED, такъ КН къ HD*. Но КН равна BG, а *2.
 HD равна GF; посему такъ CE къ ED, такъ
 BG къ GF*. Еще же, поелику къ EG, одной *7 и 1, V.
 изъ сторонъ треугольника AGE, проведена
 параллельная FD; то какъ ED къ DA, такъ
 GF къ FA. А доказано, что какъ CE къ ED,
 такъ BG къ GF: чего ради, какъ CE къ
 ED, такъ BG къ GF; и какъ ED къ DA,
 такъ GF къ FA.

Итакъ данная неразсѣченная прямая АВ
 рассѣчена подобно данной рассѣченной пря-
 мой АС. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ХІ.

Двумъ даннымъ прямымъ найми третью
 пропорціональную.

Пусть будутъ АВ, АС двѣ данныя пря-
 мыя; и пусть положены будутъ такъ,
 чтобы содержали какой нибудь уголъ. На-
 длежитъ найми прямымъ АВ, АС третью
 пропорціональную.

Продолжи АВ, АС къ точкамъ D, E; и
 положи прямую BD равную АС; и пропни
 ВС; и чрезъ D проводи къ ней параллель-
 ную DE.

Поелику къ DE, одной изъ сторонъ тре-
 угольника ADE, проведена параллельная BC;

2. по какъ AB къ BD , такъ AC къ CE . Но BD равна AC : чего ради какъ AB къ AC , такъ AC къ CE .

Итакъ двумъ даннымъ прямымъ AB , AC найдена третья пропорціональная CE .
Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Тремъ даннымъ прямымъ найди четвертую пропорціональную.

Пусть будутъ A, B, C три данныя прямыя. Надлежитъ найти прямымъ A, B, C четвертую пропорціональную.

Проведи двѣ прямыя DE, DF содержащія какой нисетъ уголъ EDF ; и положи прямую DG равную A , и прямую GE равную B , и еще прямую DN равную C ; и продолживъ GN , проводи чрезъ E къ ней параллельную EF .

Поелику къ EF , одной изъ сторонъ прямоугольника DEF , проведена параллельная GN ; *2. по какъ DG къ GE , такъ DN къ NF .* Но DG равна A , а GE равна B , и DN равна C : чего ради какъ A къ B , такъ C къ NF .

Итакъ тремъ даннымъ прямымъ A, B, C найдена четвертая пропорціональная NF .
Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Двумъ даннымъ прямымъ найди среднюю пропорціональную.

Пусть будутъ AB , BC двѣ данныя прямыя. Надлежитъ найти прямую AB , BC среднюю пропорціональную.

Положи ихъ впрямъ; и напиши на AC полукружіе ADC ; и проводи опъ почки B , подъ прямыми углами къ AC , прямую BD ; и пропями AD , DC .

Ибо елику уголъ ADC есть въ полукружїи, то онъ прямой*. И ибо елику въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ преутольшикъ AC , опъ прямого угла къ основанію проведена перпендикулярная BD ; то BD есть средняя пропорціональная основанія отръзкамъ AB , BC *.

*слѣд. 8.

Итакъ двумъ даннымъ прямымъ AB , BC найдена средняя пропорціональная BD .
Ч. и с. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Равныхъ параллелограммовъ и имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональны: И коихъ параллелограммовъ, имѣющихъ одинъ уголъ равный

одному углу, стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональны, тѣ суть равныя.

Пусть будутъ АВ, ВС равныя параллелограммы; имѣющіе углы при В равныя. Положи впрямъ DB, BE; посему и FB, BG *14, I. будутъ впрямъ*. Говорю, что параллелограммовъ АВ, ВС стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя, то есть, что какъ DB къ BE, такъ GB къ BF.

Дополни параллелограммъ FE.

Поселику параллелограммъ АВ равенъ параллелограмму ВС; а FE есть другой нѣкій параллелограммъ: то какъ АВ къ FE, такъ *7, V. ВС къ FE*. Но какъ АВ къ FE, такъ DB къ *1. BE*; а какъ ВС къ FE, такъ GB къ BF*: посему какъ DB къ BE, такъ GB къ BF. Чего ради параллелограммовъ АВ, ВС стороны, кои около равныхъ угловъ; обратно суть пропорціональныя.

Но пусть будутъ стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональныя; то если, пусть будутъ какъ DB къ BE, такъ GB къ BF. Говорю, что параллелограммъ АВ равенъ параллелограмму ВС.

Поселику какъ DB къ BE, такъ GB къ BF; то какъ DB къ BE, такъ параллелограммъ АВ къ параллелограмму FE*; а какъ

СВ къ ВF, такъ параллелограммъ ВС къ параллелограмму FE: посему какъ АВ къ FE, такъ ВС къ FE*. Чего ради параллелограммъ *11, V. АВ равенъ параллелограмму ВС*. *9, V.

Итакъ равныхъ параллелограммовъ, и пр. ч. и д. н. (65).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Равныхъ треугольниковъ и имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональны: И коиорыхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональны, тѣ суть равные.

Пусть будутъ ABC, ADE равные треугольники, имѣющіе одинъ уголъ равный одному углу, а именно, уголъ BAC углу DAE. Говорю, что треугольниковъ ABC, ADE стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя, то есть, что какъ СА къ AD, такъ EA къ AB.

Положи впрямъ СА съ AD, посему будутъ впрямъ и EA съ AB*; и пропями BD. *14.1.

Послику треугольникъ ABC равенъ треугольнику ADE; а ABD есть другой нѣкій треугольникъ: то какъ треугольникъ САВ

къ преугольнику BAD , такъ преугольникъ
 7, V. ADE къ преугольнику BAD^ . Но какъ пре-
 угольникъ CAB къ преугольнику BAD , такъ

1. CA къ AD^ ; а какъ преугольникъ EAD къ
 преугольнику BAD , такъ EA къ AB : посему

11, V. какъ CA къ AD , такъ EA къ AB^ . Чего ради
 преугольниковъ ABC , ADE стороны, кои
 около равныхъ угловъ, обратно суть про-
 порціональныя.

Но пусть будутъ преугольниковъ ABC ,
 ADE стороны обратно пропорціональныя,
 то есць, какъ CA къ AD , такъ EA къ AB .
 Говорю, что преугольникъ ABC равенъ
 преугольнику ADE .

Ибо, пропняувъ оныя BD , поелику какъ
 CA къ AD , такъ EA къ AB ; но какъ CA къ
 AD , такъ преугольникъ ABC къ преуголь-

1. нику BAD^ ; а какъ EA къ AB , такъ пре-
 угольникъ EAD къ преугольнику BAD : по-
 сему какъ преугольникъ ABC къ преуголь-

11, V. угольнику BAD^ . Ипакъ каждый изъ пре-
 угольниковъ ABC , ADE къ преугольнику BAD
 имѣетъ поже отношеніе: чего ради пре-

9, V. угольникъ ABC равенъ преугольнику EAD^ .

Ипакъ равныхъ преугольниковъ, и проч.
 ч. и д. н. (66).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели чѣтыре прямыя пропорціональны; то прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ среднихъ: И ежели прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ среднихъ; то сѣи чѣтыре прямыя будутъ пропорціональны:

Пусть будутъ чѣтыре прямыя AB , CD , E , F пропорціональны, то есть; какъ AB къ CD , такъ E къ F . Говорю; что прямоугольникъ содержимый въ AB , F равенъ прямоугольнику содержимому въ CD , E .

Проведи отъ точекъ A , C , подъ прямыми углами къ AB , CD , прямыя AG , CH ; и положи прямую AG равную F , а прямую CH равную E ; и дополни параллелограммы BG , DH :

Послику какъ AB къ CD , такъ E къ F ; во E равна CH , а F равна AG : то какъ AB къ CD , такъ CH къ AG *; посему параллелограммовъ BG , DH стороны, кои около равныхъ угловъ, обратню сущъ пропорціональны. А коихъ равнотельныхъ параллелограммовъ стороны около равныхъ угловъ обратню пропорціональны, тѣ сущъ равны*; *14. посему параллелограммъ BG равенъ параллелограмму DH . Но BG есть прямоуголь-

никъ въ АВ, F , ибо AG равна F ; а DH есть прямоугольникъ въ CD , E ; ибо CH равна E : чего ради прямоугольникъ содержимый въ АВ, F равенъ прямоугольнику содержимому въ CD , E .

Но пусть прямоугольникъ содержимый въ АВ, F будетъ равенъ прямоугольнику содержимому въ CD , E . Говорю, что сии четыре прямые будутъ пропорціональны; а именно; какъ АВ къ CD , такъ E къ F .

Ибо, сдѣлавъ поже спроеіе, поелику прямоугольникъ въ АВ, F равенъ прямоугольнику въ CD , E : то прямоугольникъ въ АВ, F есть BG , ибо AG равна F ; а прямоугольникъ въ CD , E есть DH ; ибо CH равна E : посему прямоугольникъ BG равенъ прямоугольнику DH . Они же и равноугольные: А равныхъ и равноугольныхъ параллелограммовъ стороны около равныхъ угловъ суть обратно пропорціональны*14. ния*: посему какъ АВ къ CD , такъ CH къ AG .

Но CH равна E ; а AG равна F : чего ради*7 и II, V. какъ АВ къ CD , такъ E къ F .*

Итакъ, ежели четыре, и пр. ч. и д. н. (67).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели три прямые пропорціональны; то прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ

равенъ квадрату изъ средней: И ежели прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ квадрату изъ средней; то сѣи три прямыя будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ три прямыя А, В, С пропорціональныя, то есть, какъ А къ В, такъ В къ С. Говорю, что прямоугольникъ содержимый въ А, С равенъ квадрату изъ В.

Положи прямую D равную В.

Послему какъ А къ В, такъ В къ С; но В равна D: то какъ А къ В, такъ D къ С*. А ^{7 и 11, v.}

если чѣтыре прямыя пропорціональны; то прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ средних*: посему прямоугольникъ въ А, С равенъ ^{*16.}

прямоугольнику въ В, D. Но прямоугольникъ въ В, D равенъ квадрату изъ В, ибо В равна D: чего ради прямоугольникъ содержимый въ А, С равенъ квадрату изъ В.

Но пусть прямоугольникъ въ А, С будетъ равенъ квадрату изъ В. Говорю, что какъ А къ В, такъ В къ С.

Ибо, сдѣлавъ тоже строеніе, поелику прямоугольникъ въ А, С равенъ квадрату изъ В; но квадратъ изъ В равенъ прямоугольнику въ В, D, ибо В равна D: посему прямоугольникъ въ А, С равенъ прямоугольнику въ В, D. А если прямоугольникъ въ крайнихъ

равенъ прямоугольнику въ среднихъ; то
 еѣи чепыре прямыя пропорціональны*: по-
 сему какъ А къ В, такъ D къ С. Но В равна
 D: чего ради какъ А къ В, такъ В къ С.
 Итакъ, ежели при прямыя, и пр. ч. и д. н. (68).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Изъ данной прямой написать прямолиней-
 ную фигуру подобную данной прямолинейной
 фигурѣ и подобно положенную.

Пусть будетъ АВ данная прямая, а СЕ
 данная прямолинейная фигура. Надлежитъ
 изъ прямой АВ написать прямолинейную
 фигуру подобную прямолинейной фигурѣ СЕ
 и подобно положенную.

Пропяши DF; и составь при прямой АВ
 и при точкѣ на ней А, В, уголъ GAB рав-
 ный углу С, а уголъ ABG равный углу CDF:
 поему остальной уголъ CFD равенъ осталь-
 ному AGB. Итакъ треугольникъ FCD есть
 32, I. равноугольный треугольнику GAB; а поему
 какъ FD къ GB; такъ FC къ GA, и такъ
 4. CD къ AB. Еще же, составь при прямой
 BG и при точкѣ на ней В, G, уголъ BGN
 равный углу DFE, а уголъ GBH равный углу
 FDE: поему остальной уголъ при Е равенъ
 остальному углу при Н. Итакъ треуголь-

никъ FDE естъ равноугольный треуголь-
нику GBH; а посему какъ DF къ GB,
такъ FE къ GH, и такъ ED къ HB. А
доказано, что какъ FD къ GB, такъ и FC
къ GA, и такъ CD къ AB; посему и какъ FC
къ AG, такъ и CD къ AB, и такъ FE къ GH,
и еще, такъ ED къ HB*. И поелику уголъ *11, V.
CFD равенъ углу AGB, и уголъ DFE углу BGN;
посему цѣлый уголъ CFE равенъ цѣлому углу
AGH. Потому же и уголъ CDE равенъ углу
ABH. И еще уголъ при С равенъ углу при А,
а уголъ при Е углу при Н: посему фигура
АН равноугольна фигурѣ СЕ, и стороны ихъ,
кои около равныхъ угловъ, суть пропорці-
ональныя; чего ради фигура АН подобна
фигурѣ СЕ*.

*опр. I.

Итакъ, изъ данной прямой АВ написана
прямолинейная фигура АН подобная данной
прямолинейной фигурѣ СЕ и подобно поло-
женная. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Подобные треугольники взаимно суть въ
удвоенномъ отношеніи сходственныхъ сто-
ронъ.

Пусть будутъ треугольники ABC, DEF
подобные, имѣющіе уголъ при В равный

углу при Е; и АВ къ ВС какъ DE къ EF, такъ что сторона ВС естъ сходственная съ EF. Говорю, что треугольникъ ABC къ треугольнику DEF имѣетъ удвоенное отношеніе стороны ВС къ сторонѣ EF.

Возьми прямымъ ВС, EF третью пропорціональную BG, такъ чѣмъ было, какъ *11. ВС къ EF, такъ EF къ BG*; и пропни GA.

Поелику какъ АВ къ ВС, такъ DE къ EF; по премѣненіемъ, какъ АВ къ DE, такъ *16.V. ВС къ EF*. Но какъ ВС къ EF, такъ EF къ BG; посему и какъ АВ къ DE, такъ EF къ

11.V. BG; а посему треугольниковъ ABG, DEF стороны около равныхъ угловъ суть обратно пропорціональныя. А копорыхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны около равныхъ угловъ обрат-

15. но пропорціональны, тѣ суть равны; посему треугольникъ ABG равенъ треугольнику DEF. II поелику какъ ВС къ EF, такъ EF къ BG; а естли три прямыя пропорціональны, то говорится, что первая къ третьей имѣетъ удвоенное отношеніе первая ко *оп. 10.V. второй*: посему ВС къ BG имѣетъ удвоенное отношеніе прямыя ВС къ EF. А какъ ВС къ BG, такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ABG*; посему и треугольникъ ABC къ треугольнику ABG имѣетъ удвоенное

отношеніе прямая BC къ EF . Но треугольникъ ABG равенъ треугольнику DEF ; чего ради и треугольникъ ABC къ треугольнику DEF имѣетъ удвоенное отношеніе прямая BC къ EF .*

*7.V.

Итакъ, подобные, и проч. ч. и д. н.

СЛѢДСТВІЕ. Откуда явствуетъ, что если бы три прямая пропорціональны; то какъ первая къ второй, такъ треугольникъ изъ первой къ треугольнику подобному и подобно написанному изъ второй: поелику доказано, что какъ CB къ BG , такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ABG , то есть къ треугольнику DEF .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Подобные многоугольники раздѣлять можно на подобные треугольники, равно-мнотіе, и сходственные съ цѣлыми много-угольниками: II многоугольникъ къ много-угольнику имѣетъ удвоенное отношеніе сходственныхъ стороны къ сходственной сторонѣ.

Пусть будутъ многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$ подобные; и пусть будетъ сторона AB сходственная съ FG . Говорю, что многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$ раздѣлять

можно на подобные преугольники, равно-
многіе, и сходспвенные съ цѣлыми много-
угольниками; и что многоугольникъ $ABCDE$
къ многоугольнику $FGHKL$ имѣетъ удвоен-
ное отношеніе прямая AB къ FG .

Пропяни BE , EC , GL , LH .

Поселику многоугольникъ $ABCDE$ подобенъ
многоугольнику $FGHKL$: по уголъ BAE
равенъ углу GFL ; и какъ BA къ AE , такъ
*опр. 1. FG къ FL *. И такъ, поселику два преугольника
 ABE , FGL имѣютъ одинъ уголъ равный
одному углу, и стороны около равныхъ
угловъ пропорціональныя: по преугольникъ
*6. ABE есть равноугольный преугольнику FGL ;
4. слѣдспвенно и подобенъ ему; посему уголъ
 ABE равенъ углу FGL . Но и цѣлый уголъ ABC
равенъ цѣлому FGH , по подобію многоуголь-
никовъ; посему остальной уголъ EBC ра-
венъ остальному LGH . И поселику, по по-
добію преугольниковъ ABE , FGL , какъ EB
къ BA , такъ LG къ GF ; а по подобію мно-
гоугольниковъ, какъ AB къ BC , такъ FG
къ GH : по равномѣспно, какъ EB къ BC ,
*22, V. такъ LG къ GH *; по есть, около равныхъ
угловъ EBC , LGH стороны пропорціональны;
посему преугольникъ EBC есть равноуголь-
*6. ный преугольнику LGH *, слѣдспвенно и по-
4. добенъ ему. Потому же и преугольникъ ECD

подобенъ треугольнику LHK. Ипакъ подобные многоугольники ABCDE, FGHLK раздѣлены на подобные треугольники равно-мнogie.

Говорю же, что сии треугольники сходственны съ цѣлыми многоугольниками, по есиль пропорціональны имъ; и что предъидущіе суть ABE, EBC, ECD, а послѣдующіе ихъ FGL, LGH, LHK; и что многоугольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHLK имѣетъ удвоенное отношеніе сходственной стороны къ сходственной пропорціи, по есиль AB къ FG.

Протяни AC, FH.

Послику, по подобію многоугольниковъ, и уголъ ABC равенъ углу FGH, и какъ AB къ BC такъ FG къ GH: по треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику FGH*; по- *6. сему уголъ BAC равенъ углу GFH, а уголъ BCA углу GHF. И поелику уголъ BAM равенъ углу GFH; доказано же, что и уголъ ABM равенъ углу FGN: посему и остальной уголъ AMB равенъ остальному FNG*; и поному пре- *32, 1. угольникъ ABM есть равноугольный треугольнику FGN. Подобно докажемъ, что и треугольникъ BMC есть равноугольный треугольнику GHN. Чего ради, какъ AM къ MB, такъ FN къ NG; и какъ BM къ MC,

- *4. такъ GN къ NH^* : слѣдственно, и равно-
 *22, V. мѣстно, какъ AM къ MC , такъ FN къ NH .
 Но какъ AM къ MC , такъ треугольникъ ABM
 къ треугольнику MBC , и такъ треугольникъ
 AME къ треугольнику EMC , ибо они суть
 взаимно какъ основанія; и какъ одинъ предъ-
 идущій къ одному послѣдующему, такъ всѣ
 12, V. предъидущіе ко всѣмъ послѣдующимъ: по-
 сему какъ треугольникъ AMB къ треуголь-
 нику BMC , такъ треугольникъ ABE къ
 треугольнику CBE . Но какъ треугольникъ
 AMB къ треугольнику BMC , такъ AM къ
 MC ; посему и какъ AM къ MC , такъ тре-
 11, V. угольникъ ABE къ треугольнику EBC^ . По-
 тому же и какъ FN къ NH , такъ треуголь-
 никъ FGL къ треугольнику GLH . Поелику же
 какъ AM къ MC , такъ FN къ NH : посему и
 какъ треугольникъ ABE къ треугольнику BEC ,
 такъ треугольникъ FGL къ треугольнику
 11, V. GHL^ ; и премѣненіемъ, какъ треугольникъ
 ABE къ треугольнику FGL , такъ треуголь-
 16, V. никъ BEC къ треугольнику GLH^ . Подобно
 докажемъ, протянувъ BD , GK , что какъ тре-
 угольникъ BEC къ треугольнику GLH , такъ
 треугольникъ ESD къ треугольнику LHK .
 И поелику какъ треугольникъ ABE къ тре-
 угольнику FGL , такъ EBC къ GLH , и еще
 такъ ESD къ LHK : то и какъ одинъ предъ-

идущій къ одному послѣдующему, такъ всѣ
предыдущіе ко всѣмъ послѣдующимъ*; посе- *12, V.
му какъ треугольникъ ABE къ треугольнику
 FGL , такъ многоугольникъ $ABCDE$ къ много-
угольнику $FGHKL$. Но треугольникъ ABE къ
треугольнику FGL имѣетъ удвоенное оп-
ношеніе сходственной стороны AB къ сход-
ственной сторонѣ FG ; ибо подобные пре-
угольники суть въ удвоенномъ отношеніи
сходственныхъ сторонъ*: чего ради и много- *19.
угольникъ $ABCDE$ къ многоугольнику $FGHKL$
имѣетъ удвоенное отношеніе сходственной
стороны AB къ сходственной сторонѣ FG .

Итакъ подобные, и проч. ч. и д. н.

СЛѢДСТВИЕ I. Такимъ же образомъ до-
кажемся и о подобныхъ чепыреугольникахъ,
что они суть въ удвоенномъ отношеніи
сходственныхъ сторонъ. Доказано же сіе
и о треугольникахъ: слѣдственно вообще
подобныя прямолинейныя фигуры суть вза-
имно въ удвоенномъ отношеніи сходст-
венныхъ сторонъ.

СЛѢДСТВИЕ II. Ежели прямымъ AB , FG
возьмемъ претвую пропорціональную O ; по
 AB къ O имѣетъ удвоенное отношеніе пря-
мая AB къ FG *. А и многоугольникъ къ много- *оп. 10, V.
угольнику и чепыреугольникъ къ чепыре-

угольнику имѣеть удвоенное отношеніе сходственной стороны къ сходственной сторонѣ, то есть АВ къ FG; доказано же *19. сіе и о преугольникахъ*: слѣдственно и вообще явствуетъ, что если три прямыя пропорціональны; то будетъ какъ первая къ третьей, такъ прямолинейная фигура изъ первой къ прямолинейной фигурѣ подобной и подобно нарисанной изъ второй. (69).

ИНАЧЕ. Мы докажемъ иначе и короче, что преугольники суть сходственные.

Изложи еще многоугольники ABCDE, FGHIK; и пропяти BE, EC, GL, LH. Говорю, что какъ преугольникъ ABE къ преугольнику FGL, такъ EBC къ LGH, и такъ CDE къ HKL.

Поскольку преугольникъ ABE подобенъ преугольнику FGL; то преугольникъ ABE къ преугольнику FGL имѣетъ удвоенное отношеніе прямая BE къ GL*. Потому же и преугольникъ EBC къ преугольнику LGH имѣетъ удвоенное отношеніе прямая BE къ GL: чего ради какъ преугольникъ ABE къ преугольнику FGL, такъ EBC къ LGH. Еще же, поскольку преугольникъ EBC подобенъ преугольнику LGH; то преугольникъ EBC къ преугольнику LGH имѣетъ

удвоенное отношеніе прямая CE къ HL .
 Потому же и треугольникъ ECD къ тре-
 угольнику LHK имѣетъ удвоенное от-
 ношеніе прямая CE къ HL : чего ради какъ
 треугольникъ EBC къ треугольнику LGH ,
 такъ ECD къ LHK *. А доказано, что какъ $^{*II, V}$.
 EBC къ LGH , такъ и ABE къ FGL ; слѣд-
 ственно какъ ABE къ FGL , такъ BEC къ
 GLH , и такъ ECD къ LHK . И потому
 какъ одинъ предъидущій къ одному послѣ-
 дующему, такъ всѣ предъидущіе ко всѣмъ
 послѣдующимъ, и прочее какъ въ первомъ
 показано. Ч. и Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Прямолинейныя фигуры, подобныя тойже
 прямолинейной фигурѣ, суть и взаимно
 подобны.

Пусть будетъ каждая изъ прямолинейныхъ
 фигуръ A , B подобна фигурѣ C . Говорю;
 что и A подобна B .

Поелику фигура A подобна фигурѣ C :
 то онѣ равноугольны; и стороны ихъ, кои
 около равныхъ угловъ, суть пропорціо-
 нальны*. Еще же, поелику фигура B подобна $^{*опр. I}$
 фигурѣ C : то онѣ равноугольны; и сторо-
 ны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть

опр. I. пропорціональныя. Посему каждая изъ фигуръ А, В фигурѢ С равноугольна; и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональныя: и слѣдственно фигура А равноугольна фигурѢ В; и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональныя*. Итакъ фигура А подобна фигурѢ В. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Ежели чепыре прямыя суть пропорціональны; то и прямолинейныя фигуры подобныя и подобно изъ нихъ написанныя, будутъ пропорціональны: И ежели прямолинейныя фигуры подобныя и подобно изъ чепырехъ прямыхъ написанныя суть пропорціональны; то и самыя прямыя будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ чепыре прямыя АВ, СD, ЕF, GН пропорціональныя, то есль, какъ АВ къ СD; такъ ЕF къ GН; и пусть будутъ написаны изъ прямыхъ АВ, СD подобныя и подобно положенныя прямолинейныя фигуры КАВ, LCD; а изъ прямыхъ ЕF, GН подобныя и подобно положенныя прямолинейныя фигуры MF, NH. Говорю, что

какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура MF къ фигурѣ NH .

Возьми прямыхъ AB , CD прѣпью пропорціональную O^* ; а прямыхъ EF , GH прѣпью $*11$. пропорціональную P . Поелику какъ AB къ CD , такъ EF къ GH ; а какъ CD къ O , такъ GH къ P : по равнобспно, какъ AB къ O , такъ EF къ P^* . Но какъ AB къ O , $*22, V$. такъ фигура KAB къ фигурѣ LCD^* ; а какъ $*сл. 2, 26$ EF къ P , такъ фигура MF къ фигурѣ NH : чего ради какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура MF къ фигурѣ NH^* . $*11, V$.

Но пусть будетъ какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура MF къ фигурѣ NH . Говорю, что какъ AB къ CD , такъ EF къ GH .

Сдѣлай какъ AB къ CD , такъ EF къ QR^* ; $*12$. и напиши изъ QR прямолинейную фигуру SR^* , подобную каждой изъ фигуръ MF , NH $*18$. и подобно положенную.

Поелику какъ AB къ CD , такъ EF къ QR ; и написаны изъ прямыхъ AB , CD подобныя и подобно положенныя фигуры KAB , LCD ; а изъ прямыхъ EF , QR подобныя и подобно положенныя фигуры MF , SR : по какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура MF къ фигурѣ SR . А по положенію, какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD , такъ фигура

МГ къ фигурѣ НН; посему фигура МГ къ каждой изъ фигурѣ НН, SR имѣеть поже *11, V. отношеніе*; а посему фигура НН равна фигурѣ SR*. Но она ей подобна и подобно по-
 лемма. ложенная; посему ГН равна QR. И поелику какъ АВ къ CD, такъ EF къ QR; а QR равна ГН: посему какъ АВ къ CD, такъ
 7, 11, V. EF къ ГН:

Итакъ, ежели четыре, и пр. ч. и д. н. (70).

ЛЕММА. А что, ежели прямолинейныя фигуры равны и подобны, по сходственнымъ ихъ стороны взаимно равны, мы сѣе такъ докажемъ:

Пусть будутъ фигуры НН, SR равны и подобны; и пусть будутъ какъ НГ къ ГН, такъ RQ къ QS. Говорю, что RQ равна НГ.

Буде же онѣ неравны; по одна изъ нихъ больше. Пусть будетъ RQ больше ГН. Поелику какъ RQ къ QS, такъ НГ къ ГН; по и премѣняемъ, какъ RQ къ НГ, такъ
 16, V. QS къ ГН. Но QR больше НГ; посему и QS больше ГН; слѣдственно RS больше НН. Но и равна ей: что невозможно. Чего ради QR не неравна ГН; слѣдственно равна ей. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Равноугольные параллелограммы взаимно имѣютъ отношеніе сложенное изъ отношеній сторонъ, « кои около равныхъ угловъ ».

Пусть будутъ AC , CF , равноугольные параллелограммы; имѣющіе уголъ BCD равный углу ECG . Говорю, что параллелограммъ AC къ параллелограмму CF имѣетъ отношеніе сложенное изъ « отношеній » сторонъ, кои около равныхъ угловъ, то есть, изъ отношенія какое имѣетъ BC къ CG , и отношенія какое имѣетъ DC къ CE .

Положи въпрямъ BC съ CG , то будетъ въпрямъ и DC съ CE *; и дополни параллелограммъ DG ; и изложи какую ниспять прямую K ; и сдѣлай какъ BC къ CG , такъ K къ L *, а какъ DC къ CE , такъ L къ M *. *12.

Итакъ отношенія K къ L , и L къ M суть тѣже съ отношеніями сторонъ, BC къ CG , и DC къ CE . Но отношеніе K къ M сложено изъ отношенія K къ L , и изъ отношенія L къ M ; слѣдственно и K къ M имѣетъ отношеніе сложенное изъ « отношеній » сторонъ*. И поелику какъ BC къ CG , такъ *опр. 5. параллелограммъ AC къ параллелограмму CH *; *1. то какъ BC къ CG , такъ K къ L : то и какъ K къ L , такъ параллелограммъ AC къ

- *11, V. параллелограмму CH^* . Еще же, поелику какъ DC къ CE , такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF ; но какъ DC къ CE , такъ L къ M : то и какъ L къ M , такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF . И такъ, поелику доказано, что какъ K къ L , такъ параллелограммъ AC къ параллелограмму CH ; и что какъ L къ M , такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF : то равнобесспорно, какъ K къ M , такъ параллелограммъ AC къ параллелограмму CF .
 22, V. къ параллелограмму CF^ . Но K къ M имѣеть отношеніе сложенное изъ «отношеній» споронъ: чего ради и параллелограммъ AC къ параллелограмму CF имѣеть отношеніе сложенное изъ «отношеній» споронъ.

И такъ равноугольные, и проч. ч. и д. н. (71).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Во всякомъ параллелограммѣ, параллелограммы, кои около поперечника, подобны супъ и цѣлому и взаимно.

Пусть будетъ $ABCD$ параллелограммъ, и AC его поперечникъ; и пусть около поперечника AC будутъ параллелограммы EG , HK . Говорю, что каждый изъ параллелограммовъ EG , HK подобенъ цѣлому $ABCD$, и также подобны супъ взаимно.

Поелику къ ВС, одной изъ споронъ пре-
 угольника ABC, проведена параллельная EF;
 то какъ BE къ EA, такъ CF къ FA*. Еще *2.
 же, поелику къ CD, одной изъ споронъ
 преугольника ACD, проведена параллельная
 FG; то какъ CF къ FA, такъ DG къ GA. Но
 какъ CF къ FA, такъ, по доказанному, и
 BE къ EA; посему какъ BE къ EA, такъ
 DG къ GA*; а посему совокупленіемъ, какъ *11, V.
 BA къ AE такъ DA къ AG*; а премѣненіемъ, *18, V.
 какъ BA къ AD, такъ EA къ AG*: И такъ *16, V.
 параллелограммъ ABCD, EG спороны, кои
 около общаго угла BAD, суть пропорціональ-
 ны: И поелику GF параллельна къ DC; то
 уголъ AGF равенъ углу ADC, а уголъ GFA углу
 DCA*; и общій двумъ преугольникамъ ADC, *29, I.
 AGF есть уголъ DAC: посему преуголь-
 никъ ADC есть равноугольный преугольнику
 AGF. Поэтому же и преугольникъ ACB есть
 равноугольный преугольнику AFE: Чего ради
 и цѣлый параллелограммъ ABCD есть равно-
 угольный параллелограмму EG; и будетъ*: *4:
 какъ AD къ DC; такъ AG къ GF; и какъ
 DC къ CA такъ GF къ FA; и какъ AC къ
 CB, такъ AF къ FE; и еще, какъ CB къ
 BA, такъ FE къ EA. И поелику доказано;
 что какъ DC къ CA, такъ GF къ FA; и
 какъ AC къ CB, такъ AF къ FE: то равно-

22, V. мѣстно, какъ DC къ BC ; такъ GF къ FE .

Итакъ параллелограммовъ $ABCD$, EG стороны; кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональныя: II потому параллелограммъ

*опр. 1. $ABCD$ подобенъ параллелограмму EG *. Потому же параллелограммъ $ABCD$ подобенъ и параллелограмму HK . А посему каждый изъ параллелограммовъ EG , HK подобенъ параллелограмму $ABCD$. Но прямолинейныя фигуры, подобныя тойже прямолинейной фигурѣ,

21. гурѣ, суть и взаимно подобны: чего ради и параллелограммъ EG подобенъ параллелограмму HK .

Итакъ во всякомъ, и проч. ч. и д. н. (72).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Составить прямолинейную фигуру, одной данной прямолинейной фигурѣ подобную, и другой данной равную.

Пусть будутъ даны прямолинейныя фигуры: одна, ABC , коей пребудется составить подобную, а другая, D , коей равную. Надлежитъ составить фигуру, одной ABC подобную, и другой D равную.

Поспавъ по прямой BC равный треугольнику ABC параллелограммъ BE *; а по прямой CE равный фигурѣ D параллелограммъ CM .

въ углѣ FCE равномъ углу CBL*: посему *44и45,1
 BC есѣ въпрямъ съ CF, а LE съ EM*. Возьми *29и14,1,
 прямымъ BC, CF среднюю пропорціональ-
 ную GN*; и напиши изъ GN фигуру KGN *13.
 подобную фигурѣ ABC и подобно по-
 ложенную*.

*18.

Поселику какъ BC къ GN, такъ GN къ
 CF; а есѣли три прямыя пропорціональны,
 то какъ первая къ претвѣей, такъ прямо-
 линейная фигура изъ первой къ подобной и
 подобно написанной прямолинейной фигурѣ
 изъ второй*: посему какъ BC къ CF, такъ *с.2,20.
 треугольникъ ABC къ треугольнику KGN.
 Но какъ BC къ CF, такъ и параллелограммъ
 BE къ параллелограмму EF*; посему какъ *1.
 треугольникъ ABC къ треугольнику KGN,
 такъ параллелограммъ BE къ параллелограм-
 му EF*; а посему премѣненіемъ, какъ пре- *11,v.
 угольникъ ABC къ параллелограмму BE, такъ
 треугольникъ KGN къ параллелограмму EF*. *16,v.
 Но треугольникъ ABC равенъ параллело-
 грамму BE; посему и треугольникъ KGN
 равенъ параллелограмму EF. А параллело-
 граммъ EF равенъ фигурѣ D; посему и
 треугольникъ KGN равенъ фигурѣ D. Онъ
 же и подобенъ треугольнику ABC.

Итакъ составлена прямолинейная фигура
 KGN, одной данной прямолинейной фигурѣ.

АВС подобная, а другой данной D равнод.
ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXVI.

Ежели опъ параллелограмма опниметсѣ параллелограммъ, подобный цѣлому и подобно положенный, имѣющій общій съ нимъ уголь; то онъ будетъ около тогоже поперечника что и цѣлый.

Пусть опъ параллелограмма ABCD опниятъ будетъ параллелограммъ AEFG, подобный параллелограмму ABCD и подобно положенный, имѣющій общій съ нимъ уголь DAB. Говорю, что ABCD есть около тогоже поперечника что и AEFG.

Ибо, естли цѣпъ, то пусть, буде возможно, ихъ поперечникъ будетъ АНС; и проводи чрезъ Н, параллельную къ которой ниесъ изъ прямыхъ AD, BC, прямую НК.

Поелику параллелограммы ABCD, KG суть около тогоже поперечника; то параллело-

*24. грамъ ABCD подобенъ параллелограмму KG;

*опр. 1. посему какъ DA къ AB, такъ GA къ AK.

А по подобію параллелограммовъ ABCD, EG, какъ DA къ AB, такъ и GA къ AE; посе-

*11, V. му и какъ GA къ AK, такъ GA къ AE.

Итакъ GA къ каждой изъ прямыхъ AK, AE

имѣеть тоже отношеніе ; и потому АЕ равна АК*, меньшая большей, что невозможно. *9. V.
А поему параллелограммы ABCD, EG не будутъ не около тогоже поперечника : слѣдственно параллелограммъ ABCD есть около тогоже поперечника что и параллелограммъ AEFG.

Итакъ, ежели опъ параллелограмма, и проч. ч, и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Изъ всѣхъ поставляемыхъ по тойже прямой параллелограммовъ, коихъ недоспапки суть параллелограммы подобные написанному изъ половины сей прямой и подобно положенные, параллелограммъ поставленный по половинѣ, подобный своему недоспапке, есть наибольшій.

Пусть будетъ АВ прямая, и пусть она раздѣлена будетъ до пола въ С; и пусть по АВ поставленъ будетъ параллелограммъ AD, коего называемый недоспакою есть параллелограммъ CE подобный и одобно положенный написанному изъ половины прямой АВ, то есть изъ СВ. Говорю, что изъ всѣхъ поставляемыхъ по АВ параллелограммовъ, коихъ недоспапки

суть параллелограммы подобные параллелограмму CE и подобно написанные, наибольшій есть AD . Ибо поставь по прямой AB параллелограммъ AF , коего недостапокъ есть параллелограммъ KH подобный параллелограмму CE и подобно положенный: то говорю, что AD больше AF .

Поелику параллелограммъ CE подобенъ параллелограмму KH : то они суть около *26. тогоже поперечника*. Проведи ихъ поперечникъ DB ; и допиши фигуру.

Поелику параллелограммъ CF равенъ параллелограмму FE *, придай обще KH ; посему и цѣлый параллелограммъ CH равенъ цѣлому KE . Но CH равенъ CG *, ибо AC равна CB ; посему и GC равенъ EK . Придай обще CF ; посему цѣлый параллелограммъ AF равенъ наугольнику LMN ; и слѣдственно *36, I. параллелограммъ CE , то есть AD *, больше параллелограмма AF .

Пусть еще будетъ AB раздѣлена по поламъ въ C ; и поставленъ по ней параллелограммъ AL , коего недостапокъ есть CM . Поставь еще по AB параллелограммъ AE , коего недостапокъ есть параллелограммъ DF подобный и подобно положенный параллелограмму CM написанному изъ половины прямой AB . Говорю, что поставленный

по половинѣ прямой АВ параллелограммъ AL больше параллелограмма AE.

Посему параллелограммъ DF подобенъ параллелограмму CM: то они суть около того же поперечника*. Пусть будетъ ихъ поперечникъ EB; и допиши фигуру.

Посему параллелограммъ LF равенъ параллелограмму LH*, ибо FG равна GH; то LF больше KE. Но LF равенъ DL*; посему и DL больше EK. Придай обще KD: чего ради и цѣлый параллелограммъ AL больше цѣлаго AE.

Итакъ изъ всѣхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

По данной прямой поставитъ равный данной прямолинейной фигурѣ параллелограммъ, имѣющей недостатокъ подобный данному параллелограмму. Но данная прямолинейная фигура, коей равный надлежитъ поставитъ параллелограммъ, должна быть не больше параллелограмма поставленнаго по половинѣ той прямой, когда будутъ недостатки подобные, какъ поставленнаго по половинѣ, такъ и того, коему долженъ быть подобенъ недостатокъ.

Пусть будетъ АВ данная прямая; и С

данная прямолинейная фигура, кoseй равный надлежитъ по АВ поспавить параллелограммъ, не большая поспавленнаго по половинѣ оной, когда ихъ недостапки подобны; а D параллелограммъ, коему долженъ быть подобенъ недостапокъ. Надлежитъ по данной прямой АВ поспавить равный данной прямолинейной фигурѣ С параллелограммъ, имѣющій недостапокъ подобный параллелограмму D.

- Раздѣли АВ по поламъ въ точкѣ Е; и изъ ЕВ напиши параллелограммъ EBFG подобный *18. параллелограмму D и подобно положенный; и дополни параллелограммъ AG. Ипакъ параллелограммъ AG или равенъ фигурѣ С, или больше оной, по ограниченію. Еслии AG равенъ С, то требуемое сдѣлано; ибо по данной прямой АВ поспавленъ равный данной прямолинейной фигурѣ С параллелограммъ AG, имѣющій недостапокъ EF подобный параллелограмму D. Еслии же иѣшь, то HE больше С. Но HE равенъ *36,1. GB*; посему и GB больше С. Ипакъ составь параллелограммъ KLMN равный избытку параллелограмма GB предъ фигурою С, а параллелограмму D подобный и подобно *25. положенный*. Но D подобенъ GB; посему *21. и KM подобенъ GB*. Пущь будетъ сторона

KL сходственна съ GE, а LM съ GF. И поелику параллелограммъ GB равенъ C, KM; то GB больше KM; а посему и спороны GE больше спороны LK, и GF больше LM*. Положи прямую GO равную KL, *20. и прямую GP равную LM; и дополни параллелограммъ OGPQ. Чего ради параллелограммъ GQ равенъ и подобенъ параллелограмму KM*. Но KM подобенъ GB; посему и GQ *24. подобенъ GB*; а посему GQ и GB суть *21. около того же поперечника*. Пусть будетъ *26. ихъ поперечникъ GQB; и допиши фигуру.

Поелику параллелограммъ BG равенъ C, KM; и въ нихъ GQ равенъ KM: то оспальной наугольникъ VXY равенъ оспальной фигурѣ C. И поелику PR равенъ OS*, придай *43.1. обще QB; посему и цѣлый PB равенъ цѣлому OB. Но OB равенъ TE*, ибо и спороны AE *36.1. равны спороны EB; посему и TE равенъ PB. Придай обще OS; посему цѣлый параллелограммъ TS равенъ цѣлому наугольнику VXY. Но наугольникъ VXY равенъ, по доказанному, фигурѣ C: чего ради и параллелограммъ AQ равенъ фигурѣ C.

Итакъ по данной прямой AB поставленъ равный данной прямолинейной фигурѣ C параллелограммъ ST, имѣющій недоспапокъ QB подобный параллелограмму D, ибо QB подобенъ GQ. ч. и с. н. (73).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

По данной прямой поставить равный данной прямолинейной фигурѣ параллелограммъ, имѣющій избытокъ подобный данному параллелограмму.

Пусть будетъ АВ данная прямая, и С данная прямолинейная фигура, коей равный надлежитъ по АВ поставить параллелограммъ; а D параллелограммъ, коему долженъ быть подобенъ избытокъ. Надлежитъ по прямой АВ поставить равный прямолинейной фигурѣ С параллелограммъ, имѣющій избытокъ подобный параллелограмму D.

Раздѣли АВ по поламъ въ Е; и изъ ЕВ напиши параллелограммъ ВF подобный *18. параллелограмму D и подобно положенный*; и составь параллелограммъ GH равный обѣимъ фигурамъ ВF, С, а параллелограмму D *25. подобный и подобно положенный*. Посему и *21. GH подобенъ EL*. Пусть будетъ сторона КН сходственна съ FL, а KG съ FE. И поелику параллелограммъ GH больше FB; то и сторона КН больше стороны FL, и KG больше FE. Продолжи FL, FE; и пусть будетъ FLM равная КН, а FEN равная KG; и дополни параллелограммъ MN. Чего ради параллелограммъ MN равенъ и подобенъ парал-

делограмму GH^* . Но GH подобенъ EL ; по- *24.
 сему и MN подобенъ EL^* ; а посему EL и *21.
 MN суть около тогоже поперечника*. Про- *26.
 веи ихъ поперечникъ FO ; и допиши фигуру.

И поелику параллелограммъ GH равенъ
 EL , C ; но GH равенъ MN : посему и MN
 равенъ EL , C . Опними обще EL ; посему
 оспальной наугольникъ XVZ равенъ фигу-
 рѣ C . И поелику AE равна EB ; то и парал-
 лелограммъ AN равенъ параллелограмму NB^* , *36,1.
 то есть параллелограмму LP^* . Придай *43,1.
 обще EO ; посему цѣлый параллелограммъ
 AO равенъ наугольнику XVZ . Но науголь-
 никъ XVZ равенъ фигурѣ C : чего ради и
 параллелограммъ AO равенъ фигурѣ C .

Итакъ по данной прямой AB поставленъ
 равный данной прямолинейной фигурѣ C
 параллелограммъ AO , имѣющій избытокъ
 QR подобный параллелограмму D , ибо EL
 подобенъ QR . ч. и с. н. (74).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Данную опредѣленную прямую разсѣчь въ
 крайнемъ и среднемъ опношеніи.

Пусть будетъ AB данная опредѣленная
 прямая. Надлежитъ прямую AB разсѣчь въ
 крайнемъ и среднемъ опношеніи.

- *46, i. Напиши изъ АВ квадрапъ ВС*; и поставь по АС равный квадрапу ВС параллелограммъ *29. CD, имѣющій избытокъ AD подобный ВС*.

Поелику ВС естъ квадрапъ; по и AD естъ квадрапъ. И поелику квадрапъ ВС равенъ параллелограмму CD; опними общій СЕ: посему остальной ВF равенъ остальному AD. Сїи же параллелограммы и равноугольны; посему и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, обратно сущь пропорціо-

- *14. нальны*: чего ради какъ FE къ ED, такъ *34, i. AE къ EB. Но FE равна AC*, по естъ AB; а ED равна AE: посему какъ BA къ AE, такъ AE къ EB. Но AB больше AE; посему и AE *14. v. больше EB*.

Итакъ прямая АВ разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ точкѣ Е; и больше *опр. 3. шій ея отрѣзокъ естъ AE*. ч. и с. н.

Иначе. Пустьъ будетъ АВ даѣнная прямая. Надлежитъ прямую АВ разсѣчь въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Разсѣки АВ въ С, такъ чпобы прямоутольникъ въ АВ, ВС былъ равенъ квадрапу *11, ii. изъ AC*.

Поелику прямоутольникъ въ АВ, ВС равенъ квадрапу изъ СА: по какъ АВ къ АС, такъ *17. АС къ СВ*. Итакъ прямая АВ разсѣчена

въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ поч-
кѣ С. ч. и с. н. (75).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Въ прямоугольныхъ преугольникахъ, фигура изъ спороны, противулежащей прямо-
му углу, равна фигурамъ подобнымъ и по-
добно написаннымъ изъ спороны, содержа-
щихъ прямой уголъ.

Пусиъ будетъ ABC прямоугольный пре-
угольникъ, имѣющій уголъ BAC прямой.
Говорю, что фигура изъ BC равна фигу-
рамъ подобнымъ и подобно написаннымъ
изъ BA , AC .

Проведи перпендикулярную AD .

Поелику въ прямоугольномъ преугольникѣ
 ABC , опъ прямого угла при A къ основанію
 BC проведена перпендикулярная AD : то при
перпендикулярной преугольниги ABD , ADC
подобны супъ и цѣлому ABC и взаимно*. И *8.
поелику преугольникъ ABC подобенъ пре-
угольнику ABD : то какъ CB къ BA , такъ
 AB къ BD . Но есѣли при прямыя пропор-
ціональны; то какъ первая къ третьей
такъ фигура изъ первой къ фигурѣ подоб-
вой и подобно написанной изъ второй*: по *с.л. 2, 26
еему какъ CB къ BD , такъ фигура изъ CB

къ фигурѣ подобной и подобно написанной изъ ВА. Потому же, какъ ВС къ CD, такъ фигура изъ ВС къ фигурѣ изъ СА: слѣдственно, и какъ ВС къ BD, DC, такъ фигура изъ ВС къ фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ ВА; AC*. Но прямая ВС равна прямымъ BD, DC; чего ради и фигура изъ ВС равна фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ ВА, AC.

Итакъ въ прямоугольных; и пр. ч. и д. н.

Иначе. Поелику подобныя фигуры суть въ удвоенномъ отношеніи сходственныхъ *20. сторонъ*: по фигура изъ ВС къ фигурѣ изъ ВА имѣетъ удвоенное отношеніе прямая СВ къ ВА. А и квадратъ изъ ВС къ квадрату изъ ВА имѣетъ удвоенное отношеніе *сл. 1, 20. прямая СВ къ ВА*; поему какъ фигура изъ СВ къ фигурѣ изъ ВА, такъ квадратъ изъ СВ къ квадрату изъ ВА*. Потому же, какъ фигура изъ ВС къ фигурѣ изъ СА, такъ квадратъ изъ ВС къ квадрату изъ СА: слѣдственно и какъ фигура изъ ВС къ фигурамъ изъ ВА, AC, такъ квадратъ изъ ВС къ квадратамъ изъ ВА, AC*. Но квадратъ *47, 1. изъ ВС равенъ квадратамъ изъ ВА, AC*: чего ради и фигура изъ ВС равна фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ ВА, AC.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXXII.

Ежели два преугольника, имѣющіе двѣ стороны пропорціональныя двумъ сторонамъ, будущъ приспавлены взаимно на одномъ углѣ пакъ, чпобъ сходственныя ихъ стороны были параллельны; то оспальныя стороны сихъ преугольниковъ будущъ впрямъ.

Пусть будущъ два преугольника ABC, DCE, имѣющіе двѣ стороны BA, AC пропорціональныя двумъ сторонамъ CD, DE, то есть, какъ AB къ AC такъ DC къ DE, и сторону AB параллельную къ DC, а AC параллельную къ DE. Говорю, чпо BC еспъ впрямъ съ CE.

Поелику AB параллельна къ DC, и на нихъ падаесть прямая AC; то наосьлежачіе углы BAC, ACD взаимно равны*. Поному же *29. I. и уголъ CDE равенъ углу ACD: слѣдственно и уголъ BAC равенъ углу CDE. И поелику два преугольника ABC, DCE имѣютъ одинъ уголъ при A равный одному углу при D, и стороны около равныхъ угловъ пропорціональныя, то еспъ, какъ BA къ AC, такъ CD къ DE: то преугольникъ ABC еспъ равноугольный преуголику DCE*; посему уголъ *6. ABC равенъ углу DCE. А доказано, чпо и

уголъ ACD равенъ углу BAC : посему цѣлый
 уголъ ACE равенъ двумъ угламъ ABC , BAC .
 Придай обще уголъ ACB ; посему углы ACE ,
 ACB равны угламъ BAC , ABC , ACB . Но углы
 32.1. BAC , ABC , ACB равны двумъ прямымъ; по-
 сему и углы ACE , ACB равны двумъ пря-
 мымъ. Ипакъ при прямой AC , и при почкѣ
 на ней C , двѣ прямыя BC , CE , нележащія
 по ту же сторону, дѣлающъ смѣжные углы
 ACE , ACB равные двумъ прямымъ: чего ради
 *14.1. BC есть впрямъ съ CE *

Ипакъ, ежели два, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Въ равныхъ кругахъ, углы имѣющъ тоже
 отношеніе чпо и дуги, на коихъ они спо-
 ятъ; при центрахъ ли они будутъ стоятъ,
 или при окружностяхъ: « Также и вырѣзки,
 кои при центрахъ сопавлены. »

Пусть будутъ ABC , DEF равные круги;
 и пусть при центрахъ ихъ G , H будутъ
 углы BGC , EHF , а при окружностяхъ углы
 BAC , EDF . Говорю, чпо какъ дуга BC къ
 дугѣ EF , такъ уголъ BGC къ углу EHF , и
 такъ уголъ BAC къ углу EDF ; « и также
 вырѣзокъ GBC къ вырѣзку HEF . »

Положи по порядку сколько ниесъ дугъ

СК, KL равныхъ дугъ ВС; и сколько внесеть дугъ FM, MN равныхъ дугъ EF; и проияни GK, GL, HM, HN.

Поелику дуги ВС, СК, KL взаимно равны; то и углы BGC, CGK, KGL суть взаимно равны*. Посему сколько крапная есть дуга *27, III. BL дуги ВС, столько крапный есть и уголъ BGL угла BGC. Попомуже, сколько крапная есть дуга EN дуги EF, столько крапный есть и уголъ ENH угла ENF. И еслили дуга BL равна дугъ EN, то и уголъ BGL равенъ углу ENH; и еслили дуга BL больше дуги EN, то и уголъ BGL больше угла ENH; и еслили меньше, то меньшѣ. Ипакъ изъ имѣющихся четырехъ величинъ, то есть, двухъ дугъ ВС, EF, и двухъ угловъ BGC, ENF, взявъ дуги ВС и угла BGC равнокрапныя, дуга BL и уголъ BGL; а дуги EF и угла ENF равнокрапныя, дуга EN и уголъ ENH: и доказано, что еслили дуга BL больше дуги EN, то и уголъ BGL больше угла ENH; и еслили равна, то равенъ; и еслили меньше, то меньше: а посему какъ дуга ВС къ дугъ EF, такъ уголъ BGC къ углу ENF*. *оп 5, V.

Но какъ уголъ BGC къ углу ENF, такъ и уголъ BAC къ углу EDF*, ибо каждый *15, V. каждого есть двукрапный*; посему какъ *20, III. дуга ВС къ дугъ EF, такъ и уголъ BGC

къ углу EHF , и такъ уголь BAC къ
 11, V. углу EDF .

Итакъ въ равныхъ кругахъ, углы имѣютъ
 поже отношеніе что и дуги, на коихъ они
 стоятъ; при центрахъ ли они будутъ
 стоятъ, или при окружностяхяхъ. Ч. и д. н.

«Говорю такожь, что какъ дуга BC къ
 дугѣ EF , такъ вырѣзокъ GBC къ вырѣзку
 HEF .

Пропяни BC , CK ; и взявъ на дугахъ BC ,
 CK точки O , P , пропяни BO , OC , CP , PK .

Поелику двѣ прямыя BG , GC равны двумъ
 прямымъ CG , GK , и содержатъ равные

4, I. углы: по и основаніе BC равно основанію

CK ; и треугольникъ BGC равенъ треуголь-

нику GCK . И поелику дуга BC равна дугѣ

CK : то и оставшая дуга цѣлаго круга ABC

равна оставшей дугѣ сего же круга; слѣд-

*27, III. ственно и уголь BOC равенъ углу CPK :

чего ради и отрѣзокъ BOC подобенъ от-

*опр. 11, III. рѣзку CPK : Они же суть и на равныхъ пря-

мыхъ; а на равныхъ прямыхъ подобныя

24, III. отрѣзки круговъ взаимно равны: посему

отрѣзокъ BOC равенъ отрѣзку CPK . Но и

треугольникъ BGC равенъ треугольнику

GCK : чего ради и цѣлой вырѣзокъ GBC

равенъ цѣлому вырѣзку GCK . Поэтому же

и вырѣзокъ GKL равенъ каждому изъ вы-

рѣзковъ GKS, GCB: чего ради три вырѣзка GBC, GCK, GKL взаимно равны. Поэтому же и вырѣзки HEF, HFM, HMN взаимно равны. Посему сколько крапная есть дуга BL дуги BC, столько крапный есть и вырѣзокъ GBL вырѣзка GBC. Поэтому же сколько крапная есть дуга EN дуги EF, столько крапный есть и вырѣзокъ HEN вырѣзка HEF. И еслили дуга BL равна дугѣ EN, то и вырѣзокъ GBL равенъ вырѣзку HEN; и еслили дуга BL больше дуги EN, то и вырѣзокъ GBL больше вырѣзка HEN; и еслили меньше, то меньше. Ипакъ изъ имѣющихся чепырехъ величинъ, то есть, двухъ дугъ BC, EF, и двухъ вырѣзковъ GBC, HEF, взяты, дуги BC и вырѣзка GBC равнокрапныя, дуга BL и вырѣзокъ GBL; а дуги EF и вырѣзка HEF равнокрапныя, дуга EN и вырѣзокъ HEN: и доказано, что еслили дуга BL больше дуги EN, то и вырѣзокъ GBL больше вырѣзка HEN; и еслили равна, то равенъ; и еслили меньше, то меньше: чего ради какъ дуга BC къ дугѣ EF, такъ вырѣзокъ GBC къ вырѣзку HEF.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуется, что какъ вырѣзокъ къ вырѣзку, такъ и уголъ къ углу. » (76).

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГИ X

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

ИЗЪ двухъ неравныхъ излагаемыхъ величинъ, ежели отъ большей отнято будетъ больше половины, и отъ оставшейся больше половины, и сіе всегда дѣлаемо будетъ; то останется напоследокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше излагаемой меньшей величины.

Пусть будутъ АВ, С (таб. 13, ф. 1) двѣ неравныя величины, изъ коихъ АВ большая. Говорю, что еслили отъ АВ отнято будетъ больше половины, и отъ оставшейся больше половины, и сіе всегда дѣлаемо будетъ; то останется напоследокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше величины С.

Ибо величина C будучи взята кратко, будетъ когда либо больше AB . Пусть будетъ взята, и пусть величины C будетъ кратная DE такая, которая больше AB . Раздѣли DE на величины равныя C , а именно, на DF, FG, GE : и отъ AB отними больше половины, какъ BH ; и отъ оставшейся AH отними больше половины, какъ HK ; и пусть сіе всегда дѣлаемо будетъ, пока раздѣленія въ AB будутъ равномногія раздѣленіямъ въ DE . Пусть раздѣленія AK, KH, HB будутъ равномногія раздѣленіямъ DF, FG, GE .

Послику DE больше AB ; и отъ DE отнята EG меньше половины, а отъ AB отнята BH больше половины: по оставшая GD больше оставшей HA . И посліку GD больше HA ; и отъ GD отнята GF половина, а отъ HA отнята HK больше половины: по оставшая DF больше оставшей AK . Но DF равна C ; посему и C больше AK ; слѣдственно AK меньше C . И такъ отъ величины AB остается величина AK , которая меньше излагаемой меньшей величины C . ч. и д. н.

Подобно сіе докажется, есѣли отнимаемая будетъ и половины.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА XI.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Тѣло есть то, что имѣетъ длину, ширину и вышину.

2. Предѣлы же тѣла суть поверхности.

3. Прямая линія называется перпендикулярною или прямою къ плоскости, когда она со всѣми прямыми линіями съ нею встрѣчающимися, и лежащими на той плоскости, дѣлаетъ углы прямые.

4. Плоскость называется перпендикулярною или прямою къ плоскости, когда прямая линія, проводимая на одной изъ сихъ плоскостей, подъ прямыми углами ко взаимному оныхъ сѣченію, будетъ къ другой плоскости подъ прямыми углами.

5. Наклоненіе или уголъ наклоненія прямой линіи къ плоскости есть оспрой уголъ содержимый сею прямою и другою на шой плоскости пропянутою, опъ сѣченія поставленной прямой и плоскости, до точки въ которую падаетъ перпендикулярная, опъ виѣшняго конца поставленной же прямой къ плоскости проведенная. (77).

6. Наклоненіе или уголъ наклоненія двухъ плоскостей есть оспрой уголъ содержаемый прямыми линіями, проводимыми въ каждой плоскости, подъ прямыми углами ко взаимному плоскостей сѣченію, опъ одной онаго точки. (78).

7. Плоскость къ плоскости называется подобно наклоненною, какъ другая къ другой, когда помянутые углы наклоненій ихъ взаимно равны. (79).

8. Параллельныя плоскости суть пѣ, кои нигдѣ взаимно не встрѣчаются.

9. Подобныя полстыя фигуры суть пѣ, кои содержатся равномногими подобными плоскостями. (80).

10. Равныя же и подобныя полстыя фигуры суть пѣ, кои содержатся равномногими плоскостями подобными и равными. (81).

11. Толстый уголъ есть взаимное наклоненіе, больше нежели двухъ линій, взаимно

вспрѣчающихся, и не находящихся на той же поверхности. ИНАЧЕ. Толстый уголъ есть уголъ, который содержится больше нежели двумя плоскими углами, кои не лежатъ на той же плоскости, и составлены при одной точкѣ. (82).

12. Пирамида есть тѣло, содержимое плоскостями, на одной изъ коихъ и при одной « въ ея » точкѣ всѣ прочія составляются.

13. Призма есть тѣло, содержимое плоскостями, изъ коихъ противоположащія двѣ суть параллельны, равны и подобны, прочія же суть параллелограммы.

14. Шаръ есть тѣло, производимое чрезъ обращеніе полукружія на неподвижномъ его поперечникѣ, пока оное опять возспавится тамъ, откуда началось его обращеніе. (83).

15. Ось же шара есть оная неподвижная прямая, на которой полукружіе обращается.

16. А центръ шара есть уголъ же, что и полукружія.

17. Поперечникъ же шара есть всякая прямая чрезъ центръ проведенная, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ поверхностью шара.

18. Конусъ есть тѣло, производимое чрезъ обращеніе прямоугольнаго треугольника на неподвижной его сторонѣ, одной изъ тѣхъ, кой суть около прямого угла, пока оный

треугольникъ опять возспавиися памъ, откуда началось его обращеніе. И естли неподвижная прямая равна будетъ оспальной споронѣ, которая при прямомъ углѣ обращается; то конусъ будетъ прямоугольный: естли же меньше, то тупоугольный; а естли больше, то оспроугольный.

19. Ось же конуса естл оная неподвижная прямая, на которой треугольникъ обращается.

20. А основаніе конуса естл кругъ, обращающеюся прямою написанный.

20. Цилиндръ естл тѣло, производимое чрезъ обращеніе прямоугольнаго параллелограмма на неподвижной его споронѣ, одной изъ нѣхъ, кои сущь около прямого угла, пока оный параллелограммъ опять возспавиися памъ, откуда началось его обращеніе.

22. Ось же цилиндра естл оная неподвижная прямая, на которой параллелограммъ обращается.

23. А основанія цилиндра сущь круги, двума пропивилежащими споронами написанные.

24. Подобные конусы и цилиндры сущь тѣ, коихъ и оси и поперечники основаній сущь пропорціональны.

25. Кубъ есть тѣло, содержимое шестью равными квадрами.

26. Тетраедръ есть тѣло, содержимое четырьмя треугольниками равными и равносроронными.

27. Октаедръ есть тѣло, содержимое восьмью треугольниками равными и равносроронными.

28. Додекаедръ есть тѣло, содержимое двѣнадцатью пятиугольниками равными, равносроронными и равноугольными.

29. Икосаедръ есть тѣло, содержимое двадцатью треугольниками равными и равносроронными.

« 30. Параллелепипедъ есть тѣло, содержимое шестью плоскостями, изъ коихъ каждая двѣ противулежащія суть параллельны.

31. Надстоящими же называются тѣ стороны его плоскостей, кои суть между основаніемъ и противулежащею плоскостію ». (84).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Прямой линіи одна часть не можетъ быть на подлежащей плоскости, а другая часть на другой плоскости.

Ибо, буде возможно, пусть прямой линіи ABC часпъ AB будетъ на подлежащей плоскости, а часпъ BC на другой плоскости.

Итакъ на подлежащей плоскости еспъ нѣкая прямая линія, лежащая впрямъ съ AB непрерывно. Пусть будетъ она BD . Чего ради двѣ прямыя ABC , ABD имѣютъ общій опрѣзокъ AB , что невозможно: ибо прямая съ прямою встрѣчается не больше какъ въ одной точкѣ; иначе сіи прямыя совмѣстились бы взаимно.

Итакъ прямой линіи, и пр. ч. и д. н. (85).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ П.

Ежели двѣ прямыя взаимно пресѣкутся; то онѣ суть на одной плоскости. И всякій треугольникъ весь на одной плоскости.

Пусть двѣ прямыя AB , CD взаимно пресѣкутся въ точкѣ E . Говорю, что AB , CD суть на одной плоскости; и весь треугольникъ на одной плоскости.

Возьми на EC EB , какія ниспъ точки F , G ; и просяни CB , FG , и проводи FN , GK . Говорю вопервыхъ, что треугольникъ ECB весь на одной плоскости. Ибо еспъли треугольника ECB часпъ FCN , или GBK еспъ на подлежащей плоскости, а оспальная

часть на другой; то будетъ одной изъ прямыхъ ЕС, ЕВ часть на подлежащей плоскости, а другая часть на другой плоскости: и еслибы треугольника ЕСВ часть ЕСВГ будетъ на подлежащей плоскости, а остальная на другой; то будетъ и каждая изъ прямыхъ ЕС, ЕВ нѣкая часть на подлежащей плоскости, а остальная на другой плоскости: что нелѣпо, по доказанному *1. нами*: посему треугольникъ ЕСВ весь на одной плоскости. А на которой весь треугольникъ ЕСВ, на той и каждая изъ прямыхъ ЕС, ЕВ; на которой же каждая изъ *1. ЕС, ЕВ; на той и АВ, CD*. Итакъ прямые АВ, CD на одной сущь плоскости; и весь треугольникъ на одной плоскости. Ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш:

Ежели двѣ плоскости пресѣкаются; то взаимное оныхъ сѣченіе естъ линія прямая.

Пусть двѣ плоскости АВ, ВС взаимно пресѣкаются; и пусть будетъ DB взаимное *оп.6, 1. оныхъ сѣченіе; которое естъ линія*. Говорю, что линія DB естъ прямая.

Ибо; буде нѣтъ, то пропяти оны D до В на плоскости АВ прямую DEB, а на плоскости ВС прямую DFB.

Итакъ двѣ прямыя линіи DEB , DFB имѣютъ тѣже концы, и потому заключающъ пространство; что не^бпо*. Посему ^{*акс. 12} линіи DEB , DFB не суть прямыя. Подобно докажемъ, что ни другая какая линія, изъ проводимыхъ отъ D къ B , есть прямая, кромѣ линіи DB ; взаимнаго сѣченія плоскостей AB , BC .

Итакъ, ежели двѣ плоскости, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели прямая къ двумъ прямымъ, пресѣкающимся взаимно, будетъ поспавлена подъ прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченіи; то сія прямая будетъ подъ прямыми углами и къ плоскости что на нѣхъ прамыхъ.

Пусть пресѣкнутся взаимно двѣ прямыя AB , CD въ точкѣ E ; и пусть при E будетъ поспавлена прямая EF подъ прямыми углами къ каждой изъ прамыхъ AB , CD . Говорю, что EF есть подъ прямыми углами и къ плоскости на AB , CD .

Возьми равныя прямыя AE , EB , CE , ED ; и проведи чрезъ E какъ ниесъ прямую GEN ; и пропани AD , CB ; и отъ какой ниесъ

почки F на прямой EF , проводи прямые FA , FG , FD , FC , FN , FB .

- Поелику двѣ прямыя AE , ED равны двумъ прямымъ CE , EB , и содержатъ углы
 15, I. равные: по и основаніе AD равно основанію CB , и треугольникъ AED будетъ равенъ треугольнику CEB ; слѣдственно и уголъ DAE равенъ углу EBC . Поелику же
 *15, I. и уголъ AEG равенъ углу ENB *; по два треугольника AGE , ENB , имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной стороне, кои при равныхъ углахъ, а именно AE равную EB : посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ*; а посему GE равна EN , а AG равна BN . И поелику AE равна EB , а FE есть общая, и подѣяныя къ нимъ углами; по основаніе FA равно основанію
 *4, I. FB *. Поэтому же и FC равна FD . И поелику AD равна CB , и FA равна FB ; по двѣ прямыя FA , AD , равны двумъ прямымъ FB , BC , каждая каждой; доказано же, что и основаніе FD равно основанію FC :
 *8, I. посему уголъ FAD равенъ углу FBC *. Еще же, поелику доказано, что AG равна BN , а FA равна FB ; по двѣ прямыя FA , AG равны двумъ прямымъ FB , BN ;

доказано же, что и угол $\widehat{FAG}$ равенъ углу $\widehat{FBN}$: посему основаніе FG равно основанію FN *. Еще же, поелику GE , по доказан- *4, I. ному, равна EN , а EF общая; по двѣ прямыя GE , EF равны двумъ прямымъ HE , EF ; но и основаніе FG равно основанію FN : посему уголъ $\widehat{GEF}$ равенъ углу $\widehat{NEF}$ *; а *8, I. посему каждый изъ угловъ $\widehat{GEF}$, $\widehat{NEF}$ есть прямой*. Слѣдственно прямая FE есть подѣ *оп. 10, I. прямыми углами къ прямой GN , какъ и есть чрезъ E проведенной. Подобно докажемъ, что FE подѣ прямыми углами и ко всякой прямой проведенной чрезъ E , и находящейся на подлежащей плоскости. Но прямая называется перпендикулярною къ плоскости, когда она со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на той плоскости, дѣлаетъ углы прямые*: чего ради прямая FE *опр. 3. есть перпендикулярная къ подлежащей плоскости. Но подлежащая плоскость есть на AB , CD ; посему FE есть подѣ прямыми углами къ плоскости на AB , CD .

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V:

Ежели прямая къ тремъ прямымъ, взаимно встрѣчающимся въ одной точкѣ, бу-

депъ поспавлена подъ прямыми углами, при общемъ сѣченіи; то всѣ три оныя прямыя будутъ на одной плоскости.

Пусть прямая АВ къ тремъ прямымъ ВС, ВD, ВЕ, взаимно встрѣчающимся въ точкѣ В, будетъ поспавлена подъ прямыми углами, при общемъ сѣченіи. Говорю, что всѣ три прямыя ВС, ВD, ВЕ суть на одной плоскости.

Еслили же нѣтъ, то пусть, буде возможно, будутъ прямыя ВD, ВЕ на подлежащей плоскости, а ВС на другой; и чрезъ АВ, ВС проведи плоскость: то взаимное сѣченіе сей плоскости съ подлежащею будетъ

3. прямая линія. Пусть она будетъ ВF.

Итакъ три прямыя АВ, ВС, ВF суть на одной плоскости, то есть на плоскости прямыхъ АВ, ВС. И поелику АВ перпендикулярна къ каждой изъ прямыхъ ВD, ВЕ; то АВ есть перпендикулярная и къ

4. плоскости прямыхъ ВD, ВЕ: Но плоскость прямыхъ ВD, ВЕ есть подлежащая; посему АВ перпендикулярна къ подлежащей плоскости; слѣдственно АВ со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на

опр. 3. сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые. Встрѣчается же съ нею прямая ВF, лежащая на плоскости прямыхъ ВD, ВЕ: посему уголъ АВF

есть прямой. А по положенію, и уголъ ABC прямой; посему уголъ ABF равенъ углу ABC^* : *акс. 10. Они же и на одной плоскости: что невозможно*. Посему прямая BC не на другой *акс. 9. плоскости, на которой суть прямые BD , BE . Чего ради всѣ при прямые BC , BD , BE суть на одной плоскости.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели двѣ прямыя суть подъ прямыми углами къ тойже плоскости; то оныя прямыя будутъ взаимно параллельныя.

Пусть двѣ прямыя AB , CD будутъ подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю что AB параллельна къ CD .

Пусть сѣи прямыя встрѣчаютъ подлежащую плоскость въ точкахъ B , D . Пропяни BD ; и на той же подлежащей плоскости проведи, подъ прямыми углами къ BD , прямую DE ; и положи AB ; DE равныя; и пропяни BE , AE ; AD .

Поселику AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то она со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Встрѣчается же съ AB каждая изъ *опр. 3.

- прямыхъ BD , BE , лежащихъ на той плоскости: посему каждый изъ угловъ ABD , ABE есть прямой. Поэтому же и каждый изъ угловъ CDB , CDE есть прямой. И поелику AB равна DE , а BD общая; по двѣ прямыя AB , BD равны двумъ прямымъ ED , DB ; и содержащъ углы прямые: посему основаніе AD равно основанію BE *. И поелику AB равна DE , и AD равна BE ; по двѣ прямыя AB , BE равны двумъ прямымъ ED , DA ; и основаніе AE имъ общее: посему уголъ ABE равенъ углу EDA *. Но уголъ ABE прямой; посему и уголъ EDA есть прямой, и ED перпендикулярна къ DA . Но она перпендикулярна и къ каждой изъ прямыхъ BD , DC : ипакъ ED къ тремъ прямымъ BD , DA , DC ; при общемъ ихъ сѣченіи, поставлена подъ прямыми углами; а посему всѣ при прямыхъ BD , DA , DC суть на одной плоскости*. Но на которой плоскости DB , DA , на той же есть и AB ; ибо всякій треугольникъ весь на одной плоскости*: посему AB , BD , DC суть на одной плоскости. И каждый изъ угловъ ABD , CDB есть прямой: чего ради AB , параллельна къ CD *.

Ипакъ, ежели двѣ прямыя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели двѣ прямыя суть параллельныя; и на каждой изъ нихъ взяты какія нисуть точки: то прямая пропянутая чрезъ сіи точки будетъ на одной плоскости съ параллельными.

Пусть будутъ двѣ прямыя АВ, СD параллельныя; и пусть на каждой изъ нихъ взяты будутъ какія нисуть точки Е, F. Говорю, что прямая пропянутая чрезъ точки Е, F есть на одной плоскости съ параллельными.

Если же нѣтъ, то пусть, буде возможно, будетъ она въ плоскости ихъ, какъ EGF. Проведи чрезъ EGF плоскость; то взаимное сѣченіе сей плоскости съ плоскостію параллельныхъ будетъ прямая линія*. Пусть будетъ она EF: слѣдствен- *3.
но двѣ прямыя EGF, EF заключаютъ пространство, что невозможно*. Посему прямая пропянутая чрезъ Е къ F не есть въ плоскости, а будетъ слѣдственно на одной плоскости съ параллельными АВ, СD. *акс. 12.

Итакъ, ежели двѣ прямыя, и пр. ч. и д. н. (86).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели двѣ прямыя суть параллельныя; и одна изъ нихъ будетъ къ плоскости подѣ

прямыми углами: то и другая будетъ къ той же плоскости подъ прямыми углами.

Пусть будутъ двѣ прямыя AB , CD параллельныя; и пусть одна изъ нихъ, AB , будетъ подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю, что и другая CD къ той же плоскости будетъ подъ прямыми углами.

Пусть прямыя AB , CD встрѣчаютъ подлежащую плоскость въ точкахъ B , D . Протяни BD : итакъ AB , CD , BD суть на одной *7. плоскости*. На подлежащей плоскости проведи прямую DE подъ прямыми углами къ BD ; и положи AB , DE равныя; и протяни BE , AE , AD .

Поелику AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то AB ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ *опр. 3. на сей плоскости, есть перпендикулярная*:

посему каждый изъ угловъ ABD , ABE есть прямой. И поелику на параллельныя прямыя AB , CD падаетъ прямая BD ; то углы

29. I. ABD , CDB равны двумъ прямымъ. Но уголъ ABD прямой; посему и уголъ CDB есть прямой, и CD перпендикулярна къ

*оп. 10, I. BD *. И поелику AB равна DE , а BD общая; то двѣ прямыя AB , BD равны двумъ прямымъ ED , DB ; и уголъ ABD равенъ углу

EDB, ибо каждый изъ нихъ прямой: посему
 основаніе AD равно основанію BE*. Еще же, *4.г.
 поелику AB равна DE, и BE равна AD; по-
 двѣ прямыя AB, BE равны двумъ прямымъ
 ED, DA, каждая каждой; и основаніе AE имъ
 общее: посему уголь ABE равенъ углу EDA*. 8.г.
 Но уголь ABE прямой; посему и уголь
 EDA есть прямой, и ED перпендикулярна
 къ AD*. Но она перпендикулярна и къ*оп.10.г.
 DB: итакъ ED и къ плоскости на BD,
 DA есть перпендикулярная*; а посему ED со *4.
 всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчаю-
 щимися и лежащими на сей плоскости, двѣ-
 лаешь углы прямые. На плоскости же пря-
 мыхъ BA, AD лежитъ прямая DC; ибо пря-
 мыя AB, BD суть на плоскости прямыхъ
 BD, DA*, а DC есть на той же плоскости, чію *2.
 и AB, BD*: посему ED есть подѣ прямыми *7.
 углами къ DC; а посему и CD есть подѣ пря-
 мыми углами къ DE. Но CD подѣ прямыми
 углами и къ BD: итакъ CD къ двумъ
 прямымъ DE, DB встрѣкающимся, при взаим-
 номъ ихъ сѣченіи D, поставлена подѣ пря-
 мыми углами; посему CD и къ плоскости на
 DE, DB есть подѣ прямыми углами*. Но пло- *4.
 скость на DE, DB есть подлежащая: чего
 ради CD есть подѣ прямыми углами къ
 подлежащей плоскости. Ч. и д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Прямая, параллельная къ тойже прямой, хотя и не всѣхъ на одной плоскости, суть и взаимно параллельныя.

Пусть будетъ каждая изъ прямыхъ АВ, СD параллельна къ прямой ЕF; и пусть АВ, СD не будутъ на одной плоскости съ ЕF. Говорю, что АВ параллельна къ СD.

Возьми на ЕF какую нисешь точку G; и отъ сей точки проведи, на плоскости прямыхъ ЕF, АВ, подъ прямыми углами къ *11,1. ЕF, прямую GH*; и еще на плоскости прямыхъ FE, СD, подъ прямыми углами къ ЕF, прямую GK.

Поелику ЕF къ каждой изъ прямыхъ GH, GK есть подъ прямыми углами; то ЕF и къ плоскости на GH, GK есть подъ прямыми углами*. Но ЕF параллельна къ АВ; посему и АВ къ плоскости на H, G, K, *8. есть подъ прямыми углами*. Поэтому же и СD къ плоскости на H, G, K, есть подъ прямыми углами. Ипакъ каждая изъ прямыхъ АВ, СD къ плоскости на H, G, K, есть подъ прямыми углами. Но ежели двѣ прямыя будутъ къ тойже плоскости подъ прямыми углами; то оныя двѣ прямыя суть взаимно *6. параллельныя*: чего ради АВ параллельна къ СD. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Ежели двѣ прямыя, взаимно вспрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ, взаимно вспрѣчающимся, но лежащимъ не на тойже плоскости: то сіи прямыя будутъ содержать углы равные.

Пусть двѣ прямыя АВ, ВС взаимно вспрѣчающіяся, будутъ параллельны къ другимъ двумъ DE, EF взаимно вспрѣчающимся, но лежащимъ не на тойже плоскости. Говорю, что уголъ ABC равенъ углу DEF.

Опними прямыя ВА, ВС, ED, EF взаимно равныя; и пропни AD, CF, BE, AC, DF.

Поелику ВА равна ED, и параллельна къ ней; то и AD равна BE, и параллельна къ ней*. Потому же и CF равна BE, и параллельна *38, I. къ ней. Ипакъ каждая изъ прямыхъ AD, CF равна BE, и параллельна къ ней; а прямыя параллельныя къ тойже прямой, суть и взаимно параллельныя*: посему прямыя AD, CF суть *9. параллельныя; ипакъ же равныя. Соединяющъ же концы ихъ прямыя AC, DF: посему и AC, DF суть равныя и параллельныя. Ипакъ, поелику двѣ прямыя АВ, ВС равны двумъ прямымъ DE, EF; и основаніе AC равно основанію DF: посему уголъ ABC равенъ углу DEF*.

*8, I.

Ипакъ, ежели двѣ прямыя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Къ данной подлежащей плоскости, опи́ данной ви́ ей точки, проведши перпендикулярную прямую линію.

Пустьъ буде́тъ А данная точка ви́ данной подлежащей плоскости. Надлежитъ опи́ точки А проведши перпендикулярную прямую линію къ сей плоскости.

Проведи на подлежащей плоскости какъ ниесъ прямую ВС; и опи́ А проведи, перпендикулярную къ ВС, прямую AD*.

Естьли прямая AD буде́тъ также перпендикулярна и къ подлежащей плоскости; то предложенное сдѣлано. Естьли же и́тъ: то опи́ точки D проведи на подлежащей плоскости, перпендикулярную къ ВС, прямую DE*; и опи́ А проведи, перпендикулярную къ DE, прямую AF*; и чрезъ F проведи, параллельную къ ВС, прямую GH*.

Поелику ВС къ каждой изъ прямыхъ DA, DE подъ прямыми углами; то ВС буде́тъ и къ плоскости на ED, DA подъ прямыми углами*. Она же и параллельна къ GH. Но ежели двѣ прямыя параллельны, и ежели одна изъ нихъ къ нѣкоей плоскости подъ прямыми углами; то и другая къ той же плоскости подъ прямыми углами*: посему

и GH къ плоскости на ED , DA есть подь прямыми углами; и слѣдовашельно ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ на сей плоскости, GH есть перпендикулярная*. Встрѣчается же съ GH *опр.3. прямая AF лежащая на плоскости прямыхъ ED , DA : посему GH перпендикулярна къ FA ; слѣдственно и FA перпендикулярна къ GH . Но AF перпендикулярна къ DE , по строенію; посему AF къ каждой изъ прямыхъ GH , DE перпендикулярна. Но ежели прямая къ двумъ прямымъ, пересѣкающимся взаимно, будетъ поставлена подь прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченіи; то сія прямая будетъ подь прямыми углами и къ плоскости что на нѣхъ прямыхъ*: посему*4. FA есть подь прямыми углами къ плоскости на ED , GH . Но плоскость на ED , GH есть подлежащая: чего ради AF къ подлежащей плоскости есть подь прямыми углами.

Итакъ къ данной плоскости, отъ данной точки A виѣ ея, проведена перпендикулярная прямая линія AF . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Къ данной плоскости, отъ данной на ней точки, возставишь подь прямыми углами прямую линію.

Пусть будетъ дана подлежащая плоскость; и пусть будетъ A данная на ней точка. Надлежитъ опъ точки A возспавитъ, подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости, прямую линію.

Опъ какой ииеситъ точки B , взятой внѣ подлежащей плоскости, проводи перпендикулярную къ ней прямую BC^* ; и чрезъ точку A *31, I. проводи, параллельную къ BC , прямую AD^* .

Поелику двѣ прямыя AD , CB параллельны; и одна изъ нихъ, BC , естъ къ подлежащей плоскости подъ прямыми углами: то и другая AD къ сей же плоскости естъ подъ *8. прямыми углами*.

Ипакъ, къ данной плоскости, опъ данной на ней точки, возспавлена подъ прямыми углами прямая линія. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Опъ тойже точки данной плоскости, не могутъ бытъ возспавлены, по ту же ея спорону, двѣ прямыя подъ прямыми къ ней углами.

Ибо, буде возможно, пусть опъ тойже точки A данной плоскости, будутъ возспавлены, по ту же ея спорону, двѣ прямыя AB , AC подъ прямыми къ ней углами.

Проведи чрезъ $ВД$, $АС$ плоскость: по взаимное сѣченіе сей плоскости съ данною будетъ прямая линія*, проходящая чрезъ $А$. *3. Пусть она будетъ DAE .

Итакъ прямыя AB , AC , DAE суть на одной плоскости. И поелику CA подъ прямыми углами къ данной плоскости; по она со всѣми прямыми линіями, съ нею въспрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Въспрѣчаетъ*отр.3. ся же съ EA прямая DAE , лежащая на данной плоскости: посему уголъ CAE есть прямой. Потому же и уголъ BAE есть прямой. Чего ради уголъ CAE равенъ углу BAE ; и они суть на одной плоскости: что невозможно.

Итакъ опъ пойже, и проч. ч. и д. н. (87).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Плоскости, къ коимъ таже прямая есть перпендикулярная, суть взаимно параллельныя.

Пусть прямая AB будетъ къ каждой изъ плоскостей CD , EF перпендикулярная. Говорю, что сіи плоскости суть взаимно параллельныя.

Ибо, естли нѣтъ; то онѣ, будучи

продолжены взаимно встрѣяться. Пусть встрѣялись; то взаимное ихъ сѣченіе будетъ прямая линія. Пусть оная будетъ GH . Возьми на GH какую ниешь точку K ; и прошии AK , BK .

Посеку AB перпендикулярна къ плоскости EF ; то и къ прямой BK , лежащей на продолженіи плоскости EF , естъ AB перпендикулярна*: посему уголъ ABK естъ прямой. Пошому же и уголъ BAK естъ прямой. Посему треугольника ABK два угла ABK , BAK равны двумъ прямымъ; что невозможнo*. Слѣдственно плоскости CD , EF ; будучи продолжены, не встрѣяются: чего ради плоскости CD , EF суть взаимно параллельныя*.

Итакъ плоскости, къ коимъ, и проч. ч. и д. н:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV:

Ежели двѣ прямыя; взаимно встрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ прямымъ взаимно встрѣчающимся, и лежащимъ не на тойже плоскости; то и плоскости на оныхъ будутъ взаимно параллельны.

Пусть двѣ прямыя AB , CD взаимно встрѣ-

чающіяся, будущъ параллельны къ другимъ двумъ прямымъ DE , EF взаимно въспрѣчающимися, и лежащимъ не на тойже плоскости. Говорю, что плоскости на AB , BC , и на DE , EF , будучи и продолжены не въспрѣчались взаимно.

Проведи отъ точки B , къ плоскости прямыхъ DE , EF перпендикулярную, прямую BG^* ; *11. которая пусть въспрѣчались съ плоскостью въ точкѣ G ; и проводи чрезъ G , параллельную къ ED прямую GH^* , и параллельную къ EF прямую GK . *31, I.

Поелику BG перпендикулярна къ плоскости прямыхъ DE , EF ; то она со всѣми прямыми, съ нею въспрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Въспрѣчается же съ BG каждая изъ *опр. 3. прямыхъ GH , GK , кои лежатъ на плоскости прямыхъ DE , EF : посему каждый изъ угловъ BGH , BGK есть прямой. И поелику BA параллельна къ GH^* ; то углы GBA , BGH *9. равны двумъ прямым*. Но уголъ BGH прямой: посему и уголъ GBA прямой; и BG есть подъ прямыми углами къ BA . Поэтому же BG подъ прямыми углами и къ BC . Ипакъ, поелику прямая BG къ двумъ прямымъ BA , BC , взаимно пресѣкающимся, поставлена подъ прямыми углами; то BG

будетъ и къ плоскости прямыхъ BA, BC
 4. подъ прямыми углами. Поному же BG есть
 и къ плоскости прямыхъ GH, GK подъ
 прямыми углами. Но плоскость прямыхъ
 GH, GK есть та же; что и плоскость пря-
 мыхъ DE, EF : посему BG къ плоскости
 прямыхъ DE, EF есть подъ прямыми угла-
 ми. А доказано, что прямая GB есть подъ
 прямыми углами къ плоскости прямыхъ $AB,$
 BC ; еще же сѣя прямая къ плоскости пря-
 мыхъ DE, EF перпендикулярна: посему BG
 къ каждой изъ плоскостей; что на $AB,$
 BC , и на DE, EF , есть перпендикулярная.
 А плоскости, къ коимъ таже прямая есть
 *14. перпендикулярная; суть взаимно парал-
 лельны*: чего ради плоскость на AB, BC
 параллельна къ плоскости на DE, EF .

Итакъ, ежели двѣ, и пр. ч. и д. н. (83).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели двѣ параллельныя плоскости пере-
 сѣчены какою нисетъ плоскостію; то вза-
 имныя ихъ сѣченія суть параллельны.

Пусть двѣ параллельныя плоскости $AB,$
 CD будутъ пересѣчены какою нисетъ плос-
 костію $EFGH$: и пусть взаимныя ихъ сѣ-
 ченія будутъ EF, GH . Говорю; что EF
 параллельна къ GH .

Ибо, буде не такъ: то прямая EF , GH продолженные встрѣятся, или по ту сторону гдѣ F , H , или по ту сторону гдѣ E , G . Продолжи оныя, и пусть встрѣятся по ту сторону, во первыхъ, гдѣ F , H , въ точкѣ K .

Посему прямая EFK есть на плоскости AB ; то всякая точка на прямой EFK есть на плоскости AB^* : но одна изъ точекъ на EF прямой EFK есть K ; посему точка K есть на плоскости AB . Потому же точка K есть и на плоскости CD . Ипакъ плоскости AB , CD , продолженные взаимно встрѣятся. Но онѣ не встрѣчаются, ибо, по положенію, суть параллельныя: посему и прямая EF , GH продолженные не встрѣятся по ту сторону гдѣ F , H . Подобно докажемъ, что прямая EF , GH не встрѣятся ни по ту сторону гдѣ E , G . А ни по которую сторону не-встрѣчающіяся прямая суть параллельныя*: *оп.35.1.* чето ради EF , параллельна къ GH .

Ипакъ, ежели двѣ параллельныя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели двѣ прямая пересѣчены будутъ параллельными плоскостями; то онѣ разсѣкутся въ томъ же отношеніи.

Пусть двѣ прямыя AB , CD будутъ пересѣчены параллельными плоскостями GH , KL , MN въ точкахъ A , E , B , C , F , D . Говорю, что какъ AE къ EB , такъ CF къ FD .

Протяни AC , BD , AD ; и пусть AD встрѣтится съ плоскостію KL въ точкѣ O ; и протяни EO , OF .

Поелику двѣ параллельныя плоскости KL , MN пересѣчены плоскостію $EBDO$; то взаимныя ихъ сѣченія EO , BD суть параллельныя*. Такъ же, поелику двѣ параллельныя плоскости GH , KL пересѣчены плоскостію $AOFC$; то взаимныя ихъ сѣченія AC , OF суть параллельныя. Ипакъ, поелику къ BA , одной изъ сторонъ треугольника ABD , проведена параллельная EO ; то какъ AE къ EB , такъ AO къ OD *. Еще же, поелику къ AC , одной изъ сторонъ треугольника ADC , проведена параллельная OF ; то какъ AO къ OD , такъ CF къ FD . А доказано, что какъ AO къ OD , такъ AE къ EB : чего ради какъ AE къ EB , такъ CF къ FD *.

Ипакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н. (89).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели прямая будетъ подѣлена прямыми углами къ какой нисетъ плоскости; то всякія

плоскости, проходящія чрезъ сію прямую, будутъ къ той же плоскости подъ прямыми углами.

Пусть прямая АВ будетъ подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю что всякія плоскости, проходящія чрезъ АВ, суть къ той же подлежащей плоскости подъ прямыми углами.

Пусть чрезъ АВ пройдетъ плоскость DE; а пусть будетъ CE взаимное сѣченіе плоскости DE съ подлежащею. На прямой CE возьми какую ниесъ точку F; и опъ точки F проводи на плоскости DE, подъ прямыми углами къ CE, прямую FG*.

*11, I.

Послику АВ перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то АВ ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ на сей плоскости, есть перпендикулярна*: слѣд- *опр. 3. ственно АВ перпендикулярна къ прямой CE; а посему уголъ ABF есть прямой*. Но *оп. 10, I. и уголъ GFB прямой же; посему АВ параллельна къ FG*. Но АВ перпендикулярна *28, I. къ подлежащей плоскости; посему и FG перпендикулярна къ сей плоскости*. Но плос- *8. кость называется перпендикулярною къ плоскости, когда прямая линія, проводимая на одной изъ сихъ плоскостей, подъ прямыми углами ко взаимному оныхъ сѣченію, суть

* *

къ другой плоскости подъ прямыми углами*; доказано же, что прямая FG проведенная на плоскости DE , подъ прямыми углами къ CE , взаимному сѣченію плоскостей, есть подъ прямыми углами и къ подлежащей плоскости: слѣдственно плоскость DE есть перпендикулярная къ подлежащей плоскости. Подобно докажется, что всякія плоскости, проходящія чрезъ прямую AB , перпендикулярны къ подлежащей плоскости.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели двѣ плоскости, взаимно пресѣкающіяся, перпендикулярны къ какой нисетъ плоскости; то и взаимное оныхъ сѣченіе будетъ къ той же плоскости перпендикулярное.

Пусть двѣ плоскости AB , BC , взаимно пресѣкающіяся, будутъ перпендикулярны къ подлежащей плоскости; и пусть взаимное оныхъ сѣченіе будетъ прямая BD . Говорю, что BD есть перпендикулярная къ той же плоскости.

Буде же нѣтъ: то опъ точки D проведемъ на плоскости AB , подъ прямыми углами къ AD , прямую DE *; и опъ точки же

*11,1.

Д проводи на плоскости ВС, подъ прямыми углами къ СD, прямую DF.

Поселику плоскость АВ перпендикулярна къ подлежащей плоскости; и прямая DE проведена на плоскости АВ, подъ прямыми углами къ AD, взаимному сѣченію сихъ плоскостей: то DE естъ перпендикулярная къ подлежащей плоскости*. Подобно докажемъ, *опр. 4. что и DF естъ перпендикулярная къ подлежащей плоскости. Итакъ опъ пойже точки D подлежащей плоскости, возставлены, по ту же ея сторону, двѣ прямыя подъ прямыми къ ней углами; что невозможно*. Посему опъ *13. точки D не могутъ бытъ возставлены, подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости, нныя прямыя, кромѣ прямой DV, взаимнаго сѣченія плоскостей АВ, ВС.

Итакъ, ежели двѣ плоскости, и проч. ч. и д. н. (90).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Ежели полсый уголъ будетъ содержимъ тремя плоскими углами; то два изъ сихъ плоскихъ угловъ, всячески перебранные, суть больше остальнаго.

Пусть полсый уголъ при А будетъ со- держимъ тремя плоскими углами ВАС, САД,

DAВ. Говорю, что изъ угловъ ВАС, САД, DAB, два, всячески перебранные, суть больше остальнаго

Ибо, еслили углы ВАС, САД, DAB все взаимно равны; то явно, что два изъ сихъ угловъ, всячески перебранные, больше остальнаго. Еслили же нѣтъ, то пусть уголъ ВАС будетъ больший. При прямой АВ, и при точкѣ на ней А, сославъ на плоскости ВАС уголъ ВАЕ равный углу DAB; и положи АД, АЕ равныя; и проводи чрезъ Е прямую ВЕС пересѣкающую прямая АВ, АС въ точкахъ В, С; и пропями DV, DC.

Поелику DA равна АЕ, и АВ общая; то двѣ прямая DA, АВ равны двумъ прямымъ АЕ, АВ; и уголъ DAB равенъ углу ВАЕ:

4, I. посему основаніе DV равно основанію VE.

И поелику двѣ прямая DV, DC больше *20, I. прямой ВС*; а DV равна VE: то остальная DC больше остальной ЕС. Ипакъ, поелику DA равна АЕ, а АС общая; основаніе же DC больше основанія ЕС: то уголъ DAC

25, I. больше угла EAC. Но уголъ DAB равенъ углу ВАЕ, по спроенію: чего ради углы DAB, DAC больше угла ВАС. Взявъ другіе какъ внеси два угла, подобно докажемъ, что они больше остальнаго.

Ипакъ, ежели полсмый уголъ, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Плоскіе углы, содержащіе всякій полспый уголь, сунъ меньше чепырехъ угловъ прямыхъ.

Пусть полспый уголь при А будетъ со-
держимъ плоскими углами BAC , CAD , DAV .
Говорю, что углы BAC , CAD , DAV сунъ
меньше чепырехъ прямыхъ.

На каждой изъ прямыхъ AB , AC , AD возъ-
ми какія нисенъ точки B , C , D ; и про-
пхни BC , CD , DB .

Поелику полспый уголь при B со-
держимъ тремя плоскими углами CBA , ABD , CBD ;
то всякіе два изъ нихъ больше оспальнаго*; *20.
посему углы CBA , ABD больше угла CBD .
Попому же и углы BCA , ACD больше
угла BCD ; и углы CDA , ADB больше угла
 CDB . Слѣдспвенно шессть угловъ CBA , ABD ,
 BCA , ACD , CDA , ADB сунъ больше трехъ
угловъ CBD , BCD , CDB . Но при угла CBD ,
 BCD , CDB равны двумъ прямымъ*; посему *32, Г.
шессть угловъ CBA , ABD , BCA , ACD , CDA ,
 ADB больше двухъ прямыхъ. И поелику
каждого изъ треугольниковъ ABC , ACD , ADB
при угла равны двумъ прямымъ; то трехъ
сихъ треугольниковъ девяти угловъ CBA ,
 ACB , BAC , ACD , DAC , CDA , ADB , DAB , BAD

равны шести прямымъ. Но въ нихъ шесть угловъ ABC , BCA , ACD , CDA , ADB , DBA больше двухъ прямыхъ : чего ради остальные при угла BAC , CAD , DAB , содержащiе полный уголъ, сунъ меньше чепырехъ прямыхъ.

Итакъ, плоскiе углы , и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XXII.

Ежели будутъ три плоскiе угла , изъ коихъ два, всячески перебранные, больше остального ; содержащъ же ихъ будутъ прямая всѣ взаимно равныя: то изъ прямыхъ, сопрягающихъ въ нихъ равныя прямая, возможно будетъ составить треугольникъ.

Пусть будутъ три плоскiе угла ABC , DEF , GHK , изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше остального; а именно , углы ABC , DEF больше угла GHK , углы же DEF , GHK больше угла ABC , и еще , углы GHK , ABC больше угла DEF ; и пусть прямая AB , BC , DE , EF , GH , NK будутъ всѣ взаимно равныя ; и пусть протянуты будутъ AC , DF , GK . Говорю, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC , DF , GK , возможно составить треугольникъ ; то есть , что изъ прямыхъ AC , DF , GK , всякiя двѣ сунъ больше остальной.

Еслили углы ABC, DEF, GHI взаимно равны: то, поелику и AC, DF, GI будутъ взаимно равны, явно, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GI , возможно сослѣпить треугольникъ. Еслили же неравны: то при прямой HI , и при точкѣ на ней H , сослѣвъ уголъ KHI равный углу ABC *; и положи $*23, I$. HI равную копюрой нислѣ изъ прямыхъ AB, BC, DE, EF, GH, HI ; и пропни KL, GL .

Поелику двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ KH, HI ; и уголъ при B равенъ углу KHI : посему основаніе AC равно основанію KL *. И поелику углы ABC, GHI $*4, I$. больше угла DEF ; а уголъ ABC равенъ углу KHI ; посему и уголъ GHI больше угла DEF . Ипакъ, поелику двѣ прямыя GH, HI равны двумъ прямымъ DE, EF ; но уголъ GHI больше угла при E : посему и основаніе GL больше основанія DF *. Но GK, KL $*24, I$. больше GL ; посему GK, KL и гораздо больше DF . А KL равна AC ; посему AC, GK больше остальной DF . Подобно докажемъ, что и AC, DF больше GK ; и еще DF, GK больше AC . Ипакъ возможно изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GK , составить треугольникъ*.

$*22, I$.

Иначе. Пусть будутъ даны три плоскіе

угла ABC , DEF , GHK , изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше остального; и пусть содержатъ ихъ равныя прямыя AB , BC , DE , EF , GH , HK ; и пусть пропаянны будутъ AC , DF , GK . Говорю, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC , DF , GK , возможно составить треугольникъ; по еспь, что двѣ изъ сихъ прямыхъ, всячески перебранныя, суть больше остальной.

Еспьли углы при точкахъ B , E , H суть взаимно равныя: то и прямыя AC , DF , GK *4, I. будутъ взаимно равныя*; и двѣ изъ нихъ будутъ больше остальной. Еспьли же нѣтъ, то пусть углы при точкахъ B , E , H будутъ неравны, и пусть уголъ при B будетъ больше каждаго изъ угловъ E , H : посему прямая AC будетъ больше каждой изъ прямыхъ DF , GK *; и явно, что AC съ каждою изъ прямыхъ DF , GK больше остальной. Говорю также, что и DF , GK больше AC . При прямой AB , и при точкѣ на ней B , составь уголъ ABL равный углу GHK ; и положи BL равную которой нисеть изъ прямыхъ AB , BC , DE , EF , GH , HK ; и пропаяни AL , LC .

Поелику двѣ прямыя AB , BL равны двумъ прямымъ GH , HK , каждая каждой; и содержатъ углы равныя: по основаніе AL

равно основанію GK^* . И поелику углы при E, H больше угла ABC ; а угол GHK равенъ углу ABL : посему и оспальной уголъ при E больше угла LBC . Ипакъ, поелику двѣ прямыя LB, BC равны двумъ прямымъ DE, EF , каждая каждой; но уголъ DEF больше угла LBC : посему и основаніе DF больше основанія $LC^*.$ *24, I. Доказано же, что GK равна AL ; посему DF, GK суть больше AL, LC . Но AL, LC больше AC^* : посему DF, GK и *20, I. гораздо больше AC . Чего ради двѣ изъ прямыхъ AC, DF, GK , всячески перебранныя, суть больше оспальной. Ипакъ изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GK , возможно составить треугольникъ*. ч. и д. н. *22, I.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Изъ трехъ плоскихъ угловъ составить плоский уголъ. Но надлежитъ двумъ изъ сихъ данныхъ трехъ угловъ, всячески перебраннымъ, быть больше оспального; и всѣмъ премоу быть меньше четырехъ угловъ прямыхъ.

Пусть будутъ при данные плоскіе углы ABC, DEF, GHK ; изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше оспаль-

наго; и пусть всѣ прибудущіе меньше четырехъ прямыхъ. Надлежитъ изъ угловъ, равныхъ угламъ ABC , DEF , GHK , составить толстый уголъ.

Опиши равныя прямыя AB , BC , DE , EF , GH , HK ; и соедини AC , DF , GK . Почему изъ прямыхъ равныхъ прямымъ AC , DF , GK

- *22. возможно составить треугольник*. Со-
 22, I. ставъ треугольникъ LMN *, такъ чтобы
 была LM равная AC , а MN равная DF ,
 и LN равная GK ; и около треугольника
 *5, IV. LMN опиши кругъ LMN *: и возьми онаго
 1, III. центръ, который будетъ или внутри тре-
 угольника LMN , или на его сторонѣ, или
 внѣ онаго.

- Пусть будетъ во первыхъ внутри, и пусть
 будетъ оный въ O : соедини LO , MO , NO . Гово-
 рю, что AB больше LO . Ибо, буде нѣтъ; то
 AB или равна LO , или меньше ея. Пусть бу-
 детъ, во первыхъ, равна. Поелику AB равна LO , а
 и AB равна BC ; то LO равна BC : но LO равна
 и OM : итакъ двѣ прямыя AB , BC равны
 двумъ прямымъ LO , OM , каждая каждой; и
 основаніе AC равно, по положенію, основанію
 *8, I. LM : посему уголъ ABC равенъ углу LOM .
 Потому же уголъ DEF равенъ углу MON .
 и уголъ GHK углу NOL . Чего ради при
 угла ABC , DEF , GHK равны прѣмъ угламъ

$\angle LOM$, $\angle MON$, $\angle NOL$. Но при угла $\angle LOM$, $\angle MON$, $\angle NOL$ равны чепыремъ прямыхъ: посему и при угла $\angle ABC$, $\angle DEF$, $\angle GHK$ равны чепыремъ прямыхъ; они же по положенію, и меньше чепырехъ прямыхъ: чпо нелѣпо. Слѣдственно AB не равна LO . Говорю еще, что AB и не меньше LO . Ибо, буде возможно, пусть будетъ меньше; и положи OP равную AB , и OQ равную BC ; и пропни PQ . Поселику AB равна BC , то и OP равна OQ ; посему и остальная LP равна остальной QM : а посему LM параллельна къ PQ^* ; и преугольникъ $^*2.VI$. $\angle LMO$ есть равноугольный преугольнику $\angle PQO$. Чего ради какъ OL къ LM , такъ OP къ PQ^* ; $^*4.VI$. и премѣненіемъ, какъ LO къ OP , такъ LM къ PQ^* . Но LO больше OP ; посему LM $^*16.V$. больше PQ : а LM равна AC , по строенію; посему и AC больше PQ . Ипакъ, поселику двѣ прямыя AB , BC равны двумъ прямымъ PO , OQ ; но основаніе AC больше основанія PQ : то и уголъ $\angle ABC$ больше угла $\angle POQ^*$. $^*25.I$. Подобно докажемъ, чпо уголъ $\angle DEF$ больше угла $\angle MON$, и уголъ $\angle GHK$ больше угла $\angle NOL$. Чего ради при угла $\angle ABC$, $\angle DEF$, $\angle GHK$ супъ больше прехъ угловъ $\angle LOM$, $\angle MON$, $\angle NOL$. Но углы $\angle ABC$, $\angle DEF$, $\angle GHK$, по положенію, меньше чепырехъ прямыхъ; посему углы $\angle LOM$, $\angle MON$, $\angle NOL$ и гораздо меньше

четырёхъ прямыхъ; они же равны четырёхъ прямымъ: что неѣпо. Слѣдственно АВ не меньше LO. А доказано, что и ни равна ей: итакъ АВ больше LO.

Опъ точки О возставъ, подъ прямыми

*12. углами къ плоскости круга LMN, прямую OR.

Пусть будетъ избытокъ квадрата изъ АВ предъ квадратомъ изъ LO равенъ квадрату

лемма. изъ OR; и пропяти RL, RM, RN. Поелику прямая OR перпендикулярна къ плоскости круга LMN; то RO перпендикулярна и къ

опр.3. каждой изъ прямыхъ LO, MO, NO. И поелику LO равна OM, а OR есть общая, и подъ прямыми къ нимъ углами: то осно-

4,1. ваніе RL равно основанію RM. Потому же и RN равна каждой изъ прямыхъ RL, RM.

Итакъ три прямая RL, RM, RN суть взаимно равны. И поелику квадратъ изъ OR равенъ, по положенію, избытку квадрата изъ АВ предъ квадратомъ изъ LO; то квадраты изъ АВ равенъ квадратамъ изъ LO, OR. Квадратамъ же изъ LO, OR равенъ и

47,1. квадратъ изъ LR, ибо уголъ LOR есть прямой: поему квадратъ изъ АВ равенъ квадрату изъ RL; слѣдственно АВ равна RL. Но прямой АВ равна каждая изъ прямыхъ ВС, DE, EF, GH, HK; а прямой RL равна каждая изъ прямыхъ RM, RN: поему каждая

изъ прямыхъ AB, BC, DE, EF, GH, HK равна каждой изъ прямыхъ RL, RM, RN . А поселику двѣ прямыя LR, RM равны двумъ прямымъ AB, BC ; и основаніе LM равно, по положенію, основанію AC : посему уголъ LRM равенъ углу ABC^* . Потому же, уголъ MRN равенъ углу DEF , а уголъ LRN углу GHK . Ипакъ изъ трехъ плоскихъ угловъ LRM, MRN, LRN , равныхъ тремъ даннымъ угламъ ABC, DEF, GHK , составленъ уголъ плоскій при R , содержаемый углами LRM, MRN, LRN .

Но пусть центръ круга будетъ на одной изъ сторонъ треугольника, а именно, на MN , и пусть будетъ оный въ O : пропяти OL . Говорю еще, что AB больше LO . Ибо, буде нѣтъ; то AB или равна LO , или меньше ея. Пусть будетъ, во первыхъ, равна. Посему двѣ прямыя AB, BC , то есть DE, EF равны двумъ прямымъ MO, OL , то есть прямой MN . Но MN равна, по положенію, DF : посему DE, EF равны DF ; что невозможно*: слѣдственно AB не равна LO . Подобно докажемъ, что и не меньше ея; ибо выдети еще большая нелѣпость: ипакъ AB больше LO . Еслии же еще составимъ, подъ прямыми углами къ плоскости круга, прямую RO равную прямой, коея

*20, I.

квадратъ равенъ избытку квадрата изъ АВ
 лемма. предъ квадратомъ изъ LO: по задача
 будетъ рѣшена.

Пусть центръ круга будетъ еще въ
 треугольника LMN, и пусть будетъ онъ
 въ O: пропни LO, MO, NO. Говорю еще,
 что АВ больше LO. Ибо, буде нѣтъ; то
 или равна, или меньше. Пусть будетъ,
 во первыхъ, равна. Ипакъ двѣ прямыя АВ, ВС
 равны двумъ прямымъ MO, OL, каждая каж-
 дой; и основаніе AC равно основанію ML:
 8,1. посему уголъ ABC равенъ углу MOL. Попро-
 му же уголъ GHK равенъ углу LON. Чего
 ради цѣлый уголъ MON равенъ двумъ угламъ
 ABC, GHK. Но углы ABC, GHK больше угла
 DEF посему и уголъ MON больше угла DEF.
 И поелику двѣ прямыя DE, EF равны двумъ
 прямымъ MO, ON, и основаніе DF равно
 основанію MN: по уголъ MON равенъ углу
 DEF; доказано же, что онъ больше; что
 нелѣпо: Чего ради АВ не равна LO: по-
 слѣже мы докажемъ, что и не меньше: слѣд-
 ственно больше. Еслии возставимъ оный,
 подъ прямыми углами къ плоскости круга,
 прямую OR; и еслии возьмемъ сію прямую
 равную прямой, коея квадратъ равенъ из-
 бытку квадрата изъ АВ предъ квадратомъ
 лемма. изъ LO: по задача будетъ рѣшена.

Теперь говорю, что AB не меньше LO ,
 Ибо, буде возможно, пусть будетъ мень-
 ше: положи прямую OP равную AB , и пря-
 мую OQ равную BC ; и пропни PQ . Поели-
 ку AB равна BC , то OP равна OQ ; посему и
 остальная PL равна остальной QM : а по-
 сему LM параллельна къ QR *; и треуголь- *2,VI.
 никъ LMO есть равноугольный треуголь-
 нику QOR . Чего ради какъ OL къ LM , такъ
 OR къ QR *; и прѣмѣненіемъ, какъ LO къ *4,VI.
 OR , такъ LM къ QR *. Но LO больше OR , по- *16,V.
 сему LM больше QR : а LM равна AC ; посему
 и AC больше QR . И поелику двѣ прямыя AB ,
 BC равны двумъ прямымъ PO , OQ , каждая
 каждой; но основаніе AC больше основанія
 PQ : то и уголъ ABC больше угла POQ .*25,I.
 Еслии опниемъ прямую OV равную каждой
 изъ прямыхъ OP , OQ ; и пропнемъ PV : то
 подобно докажемъ, что уголъ GHK больше
 угла POV .

При прямой LO , и при точкѣ на ней O ,
 составъ уголъ LOS равный углу ABC , а уголъ
 LOT равный углу GHK ; и положи каждую изъ
 прямыхъ OS , OT равную прямой PO ; и про-
 пни PS , PT , ST .

Поелику двѣ прямыя AB , BC равны двумъ
 прямымъ PO , OS ; и уголъ ABC равенъ углу
 POS : то основаніе AC , то есть прямая LM

равна основанію PS. Потому же и LN равна PT. И поелику двѣ прямыя ML, LN равны двумъ прямымъ SP, PT; а уголъ MLN больше угла SPT: то и основаніе MN больше *24, I. основанія ST*. Но MN равна DF; посему и DF больше ST. Ипакъ, поелику двѣ прямыя DE, EF равны двумъ прямымъ SO, OF; по основаніе DF больше основанія ST: то и *25, I. уголъ DEF больше угла SOT*. Уголъ же SOT равенъ угламъ ABC, GHK; чего ради уголъ DEF естъ больше угловъ ABC, GHK: онъ же и меньше; что невозможно.

ЛЕММА. Мы покажемъ, какъ составивъ квадрапъ изъ OR равный избытку квадрапа изъ АВ предъ квадрапомъ изъ LO.

Пусть будутъ изложены прямыя АВ, LO; и пусть АВ будетъ большая: напиши на ней полукружіе ABC; и помѣсти въ полукружіи ABC прямую AC равную LO; и пропни BC.

Поелику уголъ ACB естъ въ полукружіи *31, III. ABC; то уголъ ACB прямой*. Посему квадрапъ изъ АВ равенъ квадрапамъ изъ AC, *47, I. CB*: и поному квадрапъ изъ АВ больше квадрапа изъ AC квадрапомъ изъ CB. Но AC равна LO; посему квадрапъ изъ АВ больше квадрапа изъ LO квадрапомъ изъ CB. Ипакъ, еснли мы положимъ прямую OR равную BC: то квадрапъ

изъ АВ будетъ избытокъ квадрата изъ ОЛ предъ квадратомъ изъ ОР. Что мы и сдѣлали хопѣли.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Ежели тѣло содержится параллельными плоскостями; то прошивулежащія онаго плоскости суть параллелограммы равные.

Пусть будетъ CDHG тѣло содержаемое параллельными плоскостями АС, GF, АН, DF, BF, АЕ. Говорю, что прошивулежащія онаго плоскости суть параллелограммы равные.

Послику двѣ параллельныя плоскости BG, CE пересѣчены плоскостію АС; то общія ихъ сѣченія суть параллельныя: посему АВ параллельна къ DC*. Еще же, по-¹⁶слику двѣ параллельныя плоскости BF, AE пересѣчены плоскостію АС; то общія ихъ сѣченія суть параллельныя; посему ВС параллельна къ AD. А доказано; что и АВ параллельна къ DC: чего ради плоскость АС есть параллелограммъ*. Подобно дока-^{оп. 36.1.}жемъ, что и каждая изъ плоскостей DF, FG, GB, BF, АЕ есть параллелограммъ.

Прощая АН, DF.

Послику АВ параллельна къ DC, а ВН параллельна къ CF: то двѣ прямыя АВ, ВН,

взаимно встрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ прямымъ DC , CF , взаимно встрѣчающимся и нележащимъ на тойже плоскости; посему сїи прямая будутъ содер-

10. жать углы равные: а посему уголъ ABH равенъ углу DCF . И поелику двѣ прямая

*34, I. AB , BH равны двумъ прямымъ DC , CF ; и уголъ ABH равенъ углу DCF : по основаніе AH равно основанію DF ; и преугольникъ ABH равенъ преугольнику DCF . Но преугольника ABH есть двукратный паралле-

*34, I. лограммъ BG *, а преугольника DCF двукратный параллелограммъ CE : посему параллелограммъ BG равенъ параллелограмму CE . Подобно докажемъ, что параллелограммъ AC равенъ параллелограмму GF ; а параллелограммъ AE параллелограмму BF .

Итакъ, ежели пѣло содержится, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели параллелепипедъ пересѣченъ будетъ плоскостію параллельною къ противоположащимъ плоскостямъ: то оный разсѣчется на два пѣла, параллелепипеды же, кои суть взаимно какъ основанія.

Пусть параллелепипедъ $ABCD$ будетъ

пересѣченъ плоскостію FG параллельною къ проптивулежащимъ плоскостямъ RA , DN . Говорю, что какъ основаніе $AEFV$ къ основанію $EHCF$, такъ шѣло $ABFU$ къ шѣлу $EGCD$. Продолжи $АН$ на обѣ стороны; и положи сколько ниесішь прямыхъ AK , KL равныхъ прямой AE ; положи также сколько ниесішь прямыхъ HM , MN равныхъ прямой EH ; и дополни параллелограммы LP , KV , HX , MS , и параллелепипеды LQ , KR , DM , MT .

Послику прямая LK , KA , AE взаимно равны; то равны и параллелограммы LP , KV , AF взаимно, и параллелограммы KO , KB , AG взаимно*: еще же и параллелограммы LY , KQ , *36, г. AR равны взаимно*, ибо сущъ проптивулежащіе. *24. Потому же равны сущъ, и параллелограммы EC , HX , MS взаимно, и параллелограммы HG , HJ , JN взаимно, еще же и параллелограммы DN , MZ , NT взаимно. Ипакъ при плоскости котораго либо изъ шѣлъ LQ , KR , AU равны тремъ плоскостямъ другаго. Но у каждого шѣла оныя при плоскости равны прочимъ тремъ проптивулежащимъ*: посему при шѣла *24. LQ , KR , AU сущъ взаимно равны*. Поэтому *опр. 10. же и при шѣла ED , DM , MT взаимно равны. Ипакъ сколько крапное есть основаніе LF основанія AF , сиполько крапное есть и шѣло LU шѣла AU . Поэтому же сколько крапное

есть основаніе NF основанія FN , столько
 крапное еспѣ и пѣло NU пѣла HU . И еспѣ-
 ли основаніе LF равно основанію NF , то и
 пѣло LU равно пѣлу NU ; и еспѣли основа-
 ніе LF больше основанія NF , то и пѣло
 LU больше пѣла NU ; и еспѣли меньше, то
 меньше. Ипакъ изъ имѣющихся чептырехъ
 величинъ, то еспѣ, двухъ основаній AF , FN ,
 и двухъ пѣлъ AU , UN , взяты основанія AF
 и пѣла AU равнокрапныя, основаніе LF
 и пѣло LU ; а основанія HF и пѣла HU
 равнокрапныя основаніе NF и пѣло NU : и
 доказано, что еспѣли основаніе LF больше
 основанія NF , то и пѣло LU больше пѣла
 NU ; и еспѣли равно, то равно; и еспѣли
 меньше, то меньше: слѣдспвенно какъ
 основаніе AF къ основанію FN , пакъ пѣло
 топ. 5, V. AU къ пѣлу UN *. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

При данной прямой, и при данной на ней
 почкѣ, соспавитъ полспый уголь, равный
 данному полспому углу.

Пуспѣ будепѣ AB данная прямая, и A
 данная на ней почка: и уголь при D данный
 полспый уголь, содержимый плоскими угла-
 ми EDC , EDF , FDC . Надлежитъ при прямой

AB, и при точкѣ на ней A, составишь плоский уголъ, равный плоскому углу при D.

Возьми на DF какую нисешь точку F; и проводи опъ F, перпендикулярную къ плоскости прямыхъ ED, DC, прямую FG*, и *11. пусть она въспрѣчипъ сѣю плоскостѣ въ G; и пропями DG; и при прямой AB, и при точкѣ на ней A, составь уголъ BAL равный углу EDC, и уголъ BAK равный углу EDG; и положи прямую AK равную DG; и опъ точки K возставь, подъ прямыми углами къ плоскости прямыхъ BA, AL, прямую KN*; *12. и положи KN равную GF; и пропями NA. Говорю, что плоский уголъ при A, содержащій углами BAL, BAN, NAL, равенъ плоскому углу при D, содержащему углами EDC, EDF, FDC.

Опними равныя прямыя AB, DE; и пропями HE, KB, FE, GE. Поелику FG перпендикулярна къ подлежащей плоскости; по она съ сѣбѣи прямыми, съ нею въспрѣчающими-ся и на сей плоскости лежащими, дѣлаеть углы прямые*: посему каждый изъ *опр.3. угловъ FGD, FGE есть прямой. Потому же и каждый изъ угловъ HKA, HKB есть прямой. И поелику двѣ прямыя KA, AB равны двумъ прямымъ GD, DE, каждая каждой;

и содержатъ углы равные: то основаніе BK
 *4,1. равно основанію EG *. Но и KH равна GF ; и
 каждый изъ угловъ HKV , FGE прямой: по-
 *4,1. сему HV равна FE *. Еще же, поелику двѣ
 прямыя AK , KH равны двумъ прямымъ
 DG , GF , и содержатъ углы прямые: то
 основаніе $АН$ равно основанію DF . Но и AB
 равна DE : ипакъ двѣ прямыя HA , AB равны
 двумъ прямымъ FD , DE ; и основаніе HV
 равно основанію FE : посему уголъ $ВАН$
 *8,1. равенъ углу EDF *. Поэтому же уголъ $НАЛ$
 равенъ углу FDC : ибо положивъ AL
 равную DC , и проптянувъ KL , HL , GC , FC ,
 поелику цѣлый уголъ $ВАЛ$ равенъ цѣлому
 EDC ; и въ нихъ уголъ $ВAK$ равенъ углу
 EDG : то оспальной уголъ KAL будешь
 равенъ оспальному GDC . Поелику же двѣ
 прямыя KA , AL равны двумъ прямымъ
 GD , DC , и содержатъ углы равные: то
 основаніе KL равно основанію GC . Но и KH
 равна GF : ипакъ двѣ прямыя LK , KH равны
 двумъ прямымъ CG , GF ; и содержатъ углы
 прямые: посему основаніе HL равно основа-
 нію FC . Еще же, поелику двѣ прямыя
 HA , AL равны двумъ прямымъ FD , DC ; и
 основаніе HL равно основанію FC : то
 уголъ $НАЛ$ равенъ углу FDC . А и уголъ
 $ВАЛ$ равенъ углу EDC :

Итакъ при данной прямой, и при данной на ней точкѣ, составленъ полстный уголъ, равный данному полстному углу. Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Изъ данной прямой написать параллелепипедъ, подобный данному параллелепипеду и подобно положенный.

Пусть будетъ АВ данная прямая, и DC данный параллелепипедъ. Надлежитъ изъ данной прямой АВ написать параллелепипедъ, подобный данному параллелепипеду DC и подобно положенный.

При прямой АВ, и при точкѣ на ней А, составь, равный полстному углу при С, полстный уголъ*, содержимый плоскими углами ВАН, НАК, КАВ, такъ чтобы равенъ былъ уголъ ВАН углу ЕСF, и уголъ ВАК углу ЕСG, и еще уголъ КАН углу GCF; сдѣлай какъ ЕС къ СG, такъ ВА къ АК*; и какъ *12, VI. ГС къ CF, такъ КА къ АН: посему равномѣстно, какъ ЕС къ CF, такъ ВА къ АН. *22, V. Дополни параллелограммъ ВН, и параллелепипедъ АL.

Послику какъ ЕС къ СG, такъ ВА къ АК; и сїи пропорціональныя стороны суть около равныхъ угловъ ЕСG, ВАК: посему

параллелограммъ GE подобенъ параллелограмму KB . Потому же параллелограммъ KN подобенъ параллелограмму GF ; и параллелограммъ FE параллелограмму HB . Ипакъ при параллелограмма параллелепипеда CD подобны премоу параллелограммамъ параллелепипеда AL . Но сѣи при и равны премоу

24. прочимъ пропивиулежащимъ, и подобны
оп. I, VI. имъ. Чего ради и цѣлый параллелепипедъ

опр. 9. CD подобенъ цѣлому параллелепипеду AL .

Ипакъ изъ данной прямой AB написанъ параллелепипедъ AL , подобный данному параллелепипеду CD и подобно положенный.
Ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Ежели параллелепипедъ пересѣченъ будетъ плоскостію чрезъ діагонали пропивиулежащихъ его плоскостей: то оный разсѣченъ будетъ сею плоскостію по поламъ.

Пусть параллелепипедъ AB будетъ пересѣченъ плоскостію $CDEF$ чрезъ діагонали CF , DE двухъ пропивиулежащихъ его плоскостей. Говорю, что параллелепипедъ AB разсѣченъ плоскостію $CDEF$ по поламъ.

Поелику треугольникъ CGF равенъ пре-
*34, I. угольнику CFB *, а треугольникъ ADE

треугольнику $ДЕН$; поелику же и параллелограммъ $СА$ равенъ параллелограмму $ВЕ^*$, ибо *24. они суть проптивулежащія плоскости; по-тому же и параллелограммъ GE равенъ параллелограмму CH : ибо призма, содержащая двумя треугольниками CGF , ADE и тремя параллелограммами GE , AC , CE , равна приз-мѣ, содержащей двумя треугольниками CFB , $ДЕН$ и тремя параллелограммами CH , BE , CE^* , ибо онѣ содержащія равномогими и *опр. 10. равными плоскостями. Итакъ цѣлый па-раллелепипедъ AB разсѣченъ плоскостію $CDEF$ по поламъ. $Ч.$ и $Д.$ $Н.$

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Параллелепипеды, имѣющіе поже основаніе и ту же высоту, и коихъ надстоящія оканчиваются на тѣхъже прямыхъ, суть взаимно равные.

Пусть будутъ параллелепипеды CM , CN , имѣющіе поже основаніе AB , и ту же высоту; и пусть надстоящія ихъ AG , AF , LM , LN , CD , CE , BH , BK будутъ на тѣхъже прямыхъ FN , DK . Говорю, что параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN .

Поелику каждая изъ фигуръ CH , CK есть параллелограммъ*: ибо каждая изъ прямыхъ *24.

- *34.1. DH , EK равна прямой CB^* ; посему и DH равна EK . Опними обще EH : посему остальная DE равна остальной HK ; слѣдственно и треугольникъ DEC равенъ треугольнику
- *8.1. HKV^* , и параллелограммъ DG параллело-
- *36.1. грамму HN^* . Поному же треугольникъ FAG равенъ треугольнику MLN . Еще же, параллелограммъ CF равенъ параллелограмму BM ; и параллелограммъ CG параллелограмму
- *24. BN^* : ибо супъ противоположащїе. Ипакъ призма, содержащая двумя треугольниками AFG , CDE и тремя параллелограммами AD , DG , GC , равна призмѣ, содержащей двумя треугольниками MLN , HKV и тремя параллелограммами BM , HN , NB^* . Придай къ каждой изъ сихъ призмъ шѣло, коего основаніе есть параллелограммъ AB , а противоположащая плоскость $GENM$: посему цѣлый параллелепипедъ CM будетъ равенъ цѣлому параллелепипеду CN .

Ипакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Параллелепипеды, имѣющіе поже основаніе и поже высоту, и коихъ надстоящія оканчиваются не на шѣхъже прямыхъ, супъ взаимно равные.

Пусть будутъ параллелепипеды CM , CN , имѣющіе тоже основаніе AB , и шже высоты; но пусть надстоящія ихъ AF , AG , LM , LN , CD , CE , BH , BK оканчиваются не на шѣхъже прямыхъ. Говорю, что параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN .

Продолжи NK , DH , и GE , FM , и пусть встрѣяются онѣ въ шчкахъ P , R , Q , O ; и пропни AO , LP , CQ , BR .

Итакъ параллелепипедъ CM , имѣющій основаніемъ параллелограммъ $ACBL$ проптивулежащій параллелограмму $FDHM$, равенъ параллелепипеду CP , имѣющему основаніемъ параллелограммъ $ACBL$ проптивулежащій параллелограмму $OQRP$ *; ибо они имѣютъ *29. тоже основаніе $ACBL$, и надстоящія ихъ AF , AO , LM , LP , CD , CQ , BH , BR оканчиваются на шѣхъже прямыхъ FP , DR . Но параллелепипедъ CP , имѣющій основаніемъ параллелограммъ $ACBL$ проптивулежащій параллелограмму $OQRP$, равенъ параллелепипеду CN , имѣющему основаніемъ параллелограммъ $ACBL$ проптивулежащій параллелограмму $GEKN$ *: ибо и они имѣютъ тоже осно- *29. ваніе $ACBL$, и надстоящія ихъ AG , AO , CE , CQ , LN , LP , BK , BR оканчиваются на шѣхъже прямыхъ GQ , NR . Чего ради параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN .

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Параллелепипеды, имѣющіе равныя основанія и шже высоту, сунъ взаимно равные.

Пустьъ будущъ параллелепипеды AE , CF , имѣющіе равныя основанія AB , CD , и шже высоту. Говорю, что параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF .

Пусть, во первыхъ, будущъ надснѣющія HK , BE , AG , LM , PQ , BF , CO , RS подъ прямыми углами къ основаніямъ AB , CD ; и пустьъ уголъ ALB будетъ не равенъ углу CRD .

Проведи въ прямъ съ CR прямую RT ; и при прямой RT , и при точкѣ на ней R , составь уголъ TRU равный углу ALB ; и положи прямую RT равную AL , и прямую RU равную LB ; и чрезъ точку U проведи параллельную къ RT прямую UX ; и дополни основаніе RX , и параллелепипедъ YU . Поскольку двѣ прямыя TR , RU равны двумъ прямымъ AL , LB ; и содержатъ углы равные:

14;VI. то параллелограммъ RX равенъ и подобенъ* параллелограмму HL . Еще же, поскольку RT равна AL , и RS равна LM ; и содержатъ углы прямые: то параллелограммъ RY равенъ и подобенъ параллелограмму AM .

Потому же и параллелограммъ LE равенъ и подобенъ параллелограмму SU . Итакъ при параллелограмма параллелепипеда AE равны прѣмъ параллелограммамъ параллелепипеда YU , и подобны имъ. И поелику у каждого сѣи при равны прочимъ прѣмъ пропиви-лежащимъ* и подобны имъ: то и цѣлый па- *24.
раллелепипедъ AE равенъ цѣлому параллеле- *опр. 10.
пипеду YU *. Продолжи прямыя DR , XU , и пусть онѣ вспрѣпятся въ Z ; и чрезъ T проведи, параллельную къ DZ , прямую Tt ; и продолжи прямыя Tt , и PD , и пусть онѣ вспрѣпятся въ a ; и дополни параллелепипеды ZY , RJ .

Итакъ параллелепипедъ YZ , имѣющій основаніемъ параллелограммъ RY пропиви-лежащій параллелограмму Zr , равенъ параллелепипеду YU , имѣющему основаніемъ параллелограммъ RY пропиви-лежащій па-
раллелограмму UV *; ибо они имѣютъ по- *29.
же основаніе RY , и ту же высоту, и надлежашія имъ RZ , RU , Tt , TX , Ss , SN , Yr , YV оканчиваются на тѣхъ же прямыхъ ZX , sV . Но параллелепипедъ YU равенъ параллелепипеду AE : посему и параллелепипедъ YZ равенъ параллелепипеду AE . И поелику параллелограммъ $RUXT$ равенъ параллелограмму ZT *, ибо они споятъ *35, г.
на томъ же основаніи RT , и между тѣми же

параллельными RT , ZX ; а параллелограммъ $RUXT$ равенъ и параллелограмму CD , ибо равенъ AB : посему параллелограммъ ZT равенъ параллелограмму CD . Но DT есть другой параллелограммъ: посему какъ основаніе CD къ основанію DT , такъ основаніе

*7.v. ZT къ основанію DT *. И поелику параллелепипедъ CJ пересѣченъ плоскостію RF параллельною къ противуположнымъ плоскостямъ; то какъ основаніе CD къ основанію DT ; такъ тѣло CF къ тѣлу RJ *.

Такожь, поелику параллелепипедъ ZJ пересѣченъ плоскостію RY параллельною къ противуположнымъ плоскостямъ; то какъ основаніе ZT къ основанію DT , такъ тѣло ZY къ тѣлу RJ . Но какъ основаніе CD къ основанію DT ; такъ основаніе ZT къ основанію DT : посему какъ тѣло CF къ тѣлу RJ , такъ тѣло ZY къ тѣлу RJ *.

*11.v. Ипакъ каждое изъ тѣлъ CF ; ZY къ тѣлу RJ имѣетъ такое отношеніе: посему тѣло CF равно тѣлу или параллелепипеду ZY *.

*9.v. А доказано, что параллелепипедъ ZY равенъ и параллелепипеду AE : слѣдственно параллелепипедъ AE равенъ тѣлу CF .

Но пусть надстоящія AG , HK , BE , LM , CO , PQ , DF , RS не будутъ подъ прямыми углами къ основаніямъ AB , CD . Говорю еще,

что параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF .

Опъ шочекъ K, E, G, M, Q, F, O, S проведи, перпендикулярныя къ подлежащей плоскости, прямая $KN, ET, GU, MV, QX, FY, OZ, SJ^*$, и пусть онѣ вспрѣшятся съ плоскостію въ шочкахъ N, T, U, V, X, Y, Z, J ; и пропями $NT, UV, NU, TV, XY, XZ, ZJ, YJ$.

Итакъ параллелепипедъ KV равенъ параллелепипеду QJ ; ибо они имѣютъ равныя основанія KM, QS , и шуже высоту, и надспоящія ихъ супъ къ основаніямъ подъ прямыми углами. Но параллелепипедъ KV равенъ параллелепипеду AE , а QJ равенъ CF^* ; ибо ^{30.} они имѣютъ шже основаніе и шже высоту, и надспоящія ихъ оканчивающся не на шѣхъже прямыхъ. Чего ради параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF .

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Параллелепипеды, имѣющіе шже высоту, супъ взаимно какъ основанія.

Пусть будутъ AB, CD параллелепипеды, имѣющіе шже высоту. Говорю, что параллелепипеды AB, CD супъ взаимно какъ основанія; по еспъ, какъ основаніе AE

къ основанію CF , такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD .

По прямой FG поспавъ, равный параллелограмму AE , параллелограммъ FH^* ; и изъ основанія FH , а по высотѣ параллелепипеда CD , дополни параллелепипедъ GK .

Итакъ параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду GK^* ; ибо они имѣютъ равныя основанія AE, FH , и ту же высоту. И поелику параллелепипедъ CK пересѣченъ плоскостію DG параллельною къ противоположащимъ плоскостямъ: то какъ основаніе HF къ основанію CF^* , такъ шѣло HD къ шѣлу DC . Но основаніе FH равно основанію AE , а шѣло GK равно параллелепипеду AB : чего ради и какъ основаніе AE къ основанію CF , такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD^* .

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Подобные параллелепипеды взаимно суть въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ.

Пусть будутъ AB, CD подобные параллелепипеды, и пусть будутъ AE, CF сходственные ихъ стороны. Говорю, что параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣетъ

упроенное отношеніе прямая AE къ CF .

Продолжи впрямъ съ AE , GE , HE прямая EK , EL , EM ; и положи прямую EK равную CF , и EL равную FN , и еще EM равную FR ; и дополни параллелограммъ KL , и параллелепипедъ KP .

Поелику двѣ прямая KE , EL равны двумъ прямымъ CF , FN ; и уголъ KEl равенъ углу CFN , ибо уголъ AEG равенъ углу CFN , по подобію параллелепипедовъ AB , CD : посему параллелограммъ KL равенъ и подобенъ параллелограмму CN . Потому же и параллелограммъ KM равенъ и подобенъ параллелограмму CR , и параллелограммъ EP параллелограмму DF . Ишакъ при параллелограмма параллелепипеда KP равны прѣмъ параллелограммамъ параллелепипеда CD и подобны имъ. Но у каждого сѣи при равны прочимъ прѣмъ противоположащимъ, и подобны имъ; посему цѣлый параллелепипедъ KP равенъ и подобенъ цѣлому параллелепипеду CD *. Дополни *опр. 10 параллелограммъ GK ; и изъ основаній GK , KL , а по высотѣ параллелепипеда AB , дополни параллелепипеды EO , LQ . Поелику, по подобію* параллелепипедовъ AB , CD , какъ AE *опр. 9. къ CF , шакъ EG къ FN , и шакъ EH къ FR ; *оп. 1, в. 1. но FC равна EK , а FN равна EL , и еще FR равна EM : по будетъ какъ AE къ EK ,

- *7 и II, V. такъ GE къ EL, и такъ HE къ EM*. Но какъ AE къ EK, такъ параллелограммъ AG къ параллелограмму GK*; и какъ GE къ EL, такъ параллелограммъ GK къ KL; и еще, какъ HE къ EM, такъ параллелограммъ QE къ KM: посему какъ параллелограммъ AG къ GK, такъ параллелограммъ GK къ KL, и
- *11, V. такъ параллелограммъ QE къ KM*. Но какъ AG къ GK, такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду EO*; и какъ GK къ KL, такъ параллелепипедъ OE къ параллелепипеду QL; и еще, какъ QE къ KM, такъ параллелепипедъ QL къ параллелепипеду KP: посему какъ параллелепипедъ AB къ EO, такъ параллелепипедъ EO къ QL, и такъ параллелепипедъ QL къ KP. Но если четыре величины непрерывно пропорціональны: то первая къ четвертой имѣетъ упрощенное
- *оп. 11, V. отношеніе первая ко второй*: посему параллелепипедъ AB къ KP имѣетъ упрощенное отношеніе параллелепипеда AB къ EO. А какъ AB къ EO, такъ параллелограммъ AG къ GK, и такъ прямая AE къ EK: посему параллелепипедъ AB къ KP имѣетъ упрощенное отношеніе прямая AE къ EK. Но параллелепипедъ KP равенъ параллелепипеду CD, и прямая EK прямой CF. Чего ради параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣетъ

утроенное отношеніе сходственной споронѣ АЕ къ сходственной споронѣ СЕ.

Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что есть-ли чепыре прямыя пропорціональны (44); то какъ первая къ чепвершой, такъ параллелепипедъ изъ первой къ параллелепипеду подобному и подобно написанному изъ второй: ибо и первая къ чепвершой имѣетъ утроенное отношеніе первая ко второй*. *оп. II, V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Равныхъ параллелепипедовъ основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И которыхъ параллелепипедовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные.

Пусть будутъ АВ, СD равные параллелепипеды. Говорю, что параллелепипедовъ АВ, СD основанія суть обратно пропорціональны высотамъ, то есть, какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ высота параллелепипеда СD къ высотѣ параллелепипеда АВ.

Вопервыхъ, пусть надстоящія АG, ЕF, LB, НК, CM, NO, PD, QR будутъ подъ прямыми углами къ основаніямъ. Говорю, что

какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ CM къ AG .

Естьли основаніе EH равно основанію NQ , а и параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD ; то и высота CM равна высотѣ AG . Ибо когда основанія EH , NQ равны, а высоты AG , CM не были бы равны; то и параллелепипедъ AB , не былъ бы равенъ *31. параллелепипеду CD *. Но онъ равенъ, по положенію; посему и высота CM не неравна высотѣ AG , слѣдственно равна. Чего ради какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ CM къ AG : и потому явно, что параллелепипедовъ AB , CD основанія сутьъ обратно пропорціональны высотамъ.

Но пусть основаніе EH не будетъ равно основанію NQ , и пусть EH будетъ большее. (Ф.2). И поелику параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD ; то высота CM больше высоты AG : буде же не такъ, то параллелепипеды *31. AB , CD опять не были бы равны*; а они равны суть, по положенію. Ипакъ положи ST равную AG ; и изъ основанія NQ , а по высотѣ ST , дополни параллелепипедъ VC . Поелику параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD , и CV есть другой нѣкій параллелепипедъ; а равныя величины къ той же имѣють поже отношеніе*; то какъ

параллелепипедъ АВ къ параллелепипеду CV,
 такъ параллелепипедъ CD къ параллелепипеду
 CV. Но какъ параллелепипедъ АВ къ паралле-
 лепипеду CV, такъ основаніе ЕН къ основанію *32.
 NQ*, ибо параллелепипеды АВ, CV суть равно-
 высотные; а какъ параллелепипедъ CD къ па-
 раллелепипеду CV, такъ основаніе MQ къ
 основанію QT*, и такъ MC къ СТ: посему и какъ *25.
 основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ MC къ
 СТ*. Но СТ равна AG: посему какъ основаніе *11, V.
 ЕН къ основанію NQ, такъ MC къ AG*. Чего *7 и 11, V.
 ради основанія параллелепипедовъ АВ, CD
 суть обратно пропорціональны высотамъ.

Еще же, пусть основанія параллелепипедовъ
 АВ, CD будутъ обратно пропорціональны
 высотамъ; то есть, какъ основаніе ЕН
 къ основанію NQ, такъ высота параллеле-
 пипеда CD къ высотѣ параллелепипеда АВ.
 Говорю, что параллелепипедъ АВ равенъ
 параллелепипеду CD.

Пусть еще надстоящія будутъ къ осно-
 ваніямъ подъ прямыми углами.

Еслили основаніе ЕН равно основанію NQ;
 то, поселику какъ основаніе ЕН къ основанію
 NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ
 высотѣ параллелепипеда АВ, и высота па-
 раллелепипеда CD равна будетъ высотѣ
 параллелепипеда АВ. Но параллелепипеды,

имѣющіе равныя основанія и ту же высоту,
 31. сунъ взаимно равны: чего ради параллеленипедъ АВ равенъ параллеленипеду CD.

Но пусть основаніе ЕН не будетъ равно основанію NQ, и пусть ЕН будетъ большее: то и высота параллеленипеда CD будетъ больше высоты параллеленипеда АВ, то есть, СМ будетъ больше АГ. Опять положи СТ равную АГ, и дополни также параллеленипедъ CV. И поелику какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ СМ къ АГ; но АГ равна СТ: то какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ МС къ СТ. Но какъ основаніе ЕН къ основанію NQ, такъ параллеленипедъ АВ къ параллеленипеду CV*,

ибо параллеленипеды АВ, CV сунъ равновысопные; а какъ МС къ СТ, такъ основаніе

1, VI. MQ къ основанію QT, и такъ параллеленипедъ CD къ параллеленипеду CV*: посему какъ параллеленипедъ АВ къ параллеленипеду CV, такъ параллеленипедъ CD къ параллеленипеду CV; а посему каждый изъ параллеленипедовъ АВ, CD къ параллеленипеду CV имѣетъ тоже отношеніе. И такъ параллеленипедъ АВ равенъ параллеленипеду

9, V. ду CD. Что и доказать надлежало.

Но пусть надстоящія FE, BL, GA, KH, ON, DP, MC, RQ (ф. 3). не будутъ къ основаніямъ

параллелепипедовъ подъ прямыми углами. Опъ точекъ F, G, B, K, O, M, D, R проведи къ плоскостямъ основаній EH, NQ , перпендикулярныя прямая, кои пусть съспрѣ-
дѣляють сїи плоскости въ точкахъ S, T, U, V, X, Y, a, Z ; и дополни параллелепипеды FV, OZ . Говорю, что равныхъ параллелепипедовъ AB, CD основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB .

Послику параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD : но параллелепипеду AB равенъ параллелепипедъ BT^* , ибо они *30. имѣють тоже основаніе FK , и ту же высоту, и надстоящія ихъ оканчиваются не на тѣхъ же прямыхъ; а параллелепипедъ CD равенъ параллелепипеду DY , ибо и они имѣють тоже основаніе RO , и ту же высоту, и надстоящія ихъ оканчиваются не на тѣхъ же прямыхъ: то и параллелепипедъ BT равенъ параллелепипеду DY . А равныхъ параллелепипедовъ, концы высоты суть подъ прямыми углами къ основаніямъ, основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: посему какъ основаніе FK къ основанію OR , такъ вы-

сота параллелепипеда DY къ высотѣ параллелепипеда BT . Но основаніе FK равно основанію EH , основаніе же OR основанію

*24. NQ *: посему какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда DY къ высотѣ параллелепипеда BT *. Но высоты параллелепипедовъ DY , BT суть тѣ же, что и параллелепипедовъ DC , BA : посему какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда DC къ высотѣ параллелепипеда AB . Чего ради основанія параллелепипедовъ AB , CD суть обратно пропорціональны высотамъ.

Пусть наконецъ основанія параллелепипедовъ AB , CD будутъ обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB . Говорю, что параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD .

Ибо, сдѣлавъ тоже спроеніе, поелику какъ основаніе EH къ основанію NQ , такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB ; и основаніе EH равно основанію FK , основаніе же NQ основанію OR : то какъ основаніе FK къ основанію OR , такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB . Но высоты

параллелепипедовъ АВ, CD суть пѣже,
 чпо и параллелепипедовъ BT, DY: посему
 какъ основаніе FK къ основанію OR,
 такъ высота параллелепипеда DY къ вы-
 сотѣ параллелепипеда BT; а посему осно-
 ванія параллелепипедовъ BT, DY суть об-
 рапно пропорціональны высотамъ. А ко-
 торыхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ вы-
 соты подъ прямыми углами къ основаніямъ,
 основанія обратпо пропорціональны высо-
 тамъ, пѣ суть взаимно равныя: посему
 параллелепипедъ BT равенъ параллелепипе-
 ду DY. Но параллелепипедъ BT равенъ па-
 раллелепипеду АВ*, ибо они имѣютъ по- *30.
 же основаніе FK, и ту же высоту, и над-
 стоящія ихъ оканчиваются не на пѣхъ же
 прямыхъ; а параллелепипедъ DY равенъ
 параллелепипеду DC, ибо и они имѣютъ
 поже основаніе OR, и ту же высоту, и
 надстоящія ихъ оканчиваются не на пѣхъ-
 же прямыхъ: итакъ параллелепипедъ АВ
 равенъ параллелепипеду CD. ч. и д. н. (91).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Ежели будутъ два плоскіе угла равныя,
 и отъ вершинъ ихъ возстаются въ вы-
 соту прямыя содержащія со сторонами ихъ,

углы равные, каждый каждому; и если на сихъ прямыхъ взяты будутъ какія ниспъ точки, и отъ сихъ точекъ проведутся перпендикулярныя прямыя къ плоскостямъ данныхъ угловъ; и если изъ точекъ, въ коихъ онѣ встрѣяются плоскости, пропаянупы будутъ прямыя къ вершинамъ данныхъ угловъ: то углы, содержимые сими прямыми съ прямыми возставленными отъ вершинъ угловъ въ высоту ихъ плоскостей, будутъ взаимно равные.

Пусть будутъ два плоскіе угла BAC, EDF равные; и пусть отъ вершинъ ихъ A, D будутъ возставлены въ высоту прямыя AG, DM , содержащія со сторонами ихъ углы равные, каждый каждому, а именно, уголъ CAB равный углу MDE ; а уголъ GAC углу MDF ; и пусть на прямыхъ AG, DM взяты будутъ какія ниспъ точки G, M , и отъ точекъ G, M проведутся перпендикулярныя къ плоскостямъ BAC, EDF прямыя GL, MN , кои пусть встрѣяются съ плоскостями въ L, N ; и пусть будутъ пропаянупы прямыя LA, ND . Говорю, что уголъ GAL равенъ углу MDN .

Положи AI равную DM ; и чрезъ I проведи, параллельную къ GL , прямую IK . И поелику GL перпендикулярна къ плоскости

прямыхъ ВА, АС; то и НК перпендикулярна къ плоскости прямыхъ ВА, АС*. Опять точекъ К, *8.
 И проводи, перпендикулярныя къ прямымъ АВ, АС, DF, DE, прямыя КВ, КС, NF, NE; и пропиаши НС, СВ, MF, FE. Поелику квадраты изъ НА равны квадратамъ изъ НК, КА*; квад- *47, I.
 рату же изъ КА равны квадраты изъ КС, СА: то квадраты изъ НА равны квадратамъ изъ НК, КС, СА. А квадратамъ изъ НК, КС равенъ квадратъ изъ НС: посему квадратъ изъ НА равенъ квадратамъ изъ НС, СА; а посему уголъ НСА есть прямой*. Поэтому *48, I.
 же и уголъ DFM прямой. Чего ради уголъ АСН равенъ углу DFM. Поелику же и уголъ НАС равенъ углу MDF; то два треугольника MDF, НАС имѣють два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому; и одну сторону равную одной стороне, кои прилежатъ равнымъ угламъ, а именно, сторону АН равную стороне DM: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой; а посему АС равна DF*. Подобно докажемъ, что и АВ *26, I.
 равна DE. Пропиши НВ, МЕ. И поелику квадратъ изъ АН равенъ квадратамъ изъ АН, КН; квадрату же изъ АК равны квадраты изъ АВ, ВК; то квадраты изъ АВ, ВК, КН равны квадрату изъ АН. Но квадратамъ

- *47, I. изъ ВК, КН равенъ квадрапъ изъ ВН*; ибо уголъ НКВ прямой, потому что НК перпендикулярна къ подлежащей плоскости: посему квадрапъ изъ АН равенъ квадрапамъ изъ АВ, ВН; а посему уголъ АВН есць
- *48, I. прямой*. Потому же и уголъ DEM прямой. Но уголъ ВАН равенъ; по положенію, углу EDM; и АН равна DM: посему и АВ равна DE. Ипакъ, поелику АС равна DF, и АВ равна DE; то двѣ прямыя СА, АВ равны двумъ прямымъ FD, DE; и уголъ САВ равенъ углу FDE: посему и основаніе ВС равно основанію EF, и преутольникъ равенъ преутольнику, и прочіе углы равны прочимъ
- *4, I. угламъ*; а посему уголъ АСВ равенъ углу DFE. Но прямой уголъ АСК равенъ прямому же углу DFN; посему и остальной уголъ ВСК равенъ остальному EFN: Потому же и уголъ СВК равенъ углу FEN. Ипакъ два треугольника СВК, FEN имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому; и одну сторону равную одной сторонѣ, кои прилежатъ равнымъ угламъ, а именно; сторону ВС равную сторонѣ EF: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя про-
- *26, I. чимъ сторонамъ*; а посему СК равна FN. Но и АС равна DF: ипакъ двѣ прямыя АС, СК равны двумъ прямымъ DF, FN; и содержатъ

углы прямые: посему основаніе AK равно основанію DN . И поелику $АН$ равна DM ; по квадратамъ изъ $АН$ равенъ квадрату изъ DM . Но квадрату изъ $АН$ равны квадраты изъ AK , KN , ибо уголъ AKN есть прямой; а квадрату изъ DM , равны квадраты изъ DN , NM , ибо и уголъ DNM есть прямой: посему квадраты изъ AK , KN равны квадратамъ изъ DN , NM . Но квадратамъ изъ AK равенъ квадрату изъ DN : посему и остальной квадратамъ изъ KN равенъ остальному изъ NM ; а посему и $НК$ равна MN . Ипакъ, поелику двѣ прямыя $НА$, AK равны двумъ прямымъ MD , DN , каждая каждой; и, по доказанному, основаніе $НК$ равно основанію NM ; по и уголъ $НАК$ равенъ углу MDN .

« Ипакъ, ежели будущъ, и проч. ч. и д. н. »

Слѣдствіе. Отсюда явствуется, что еслили будущъ два плоскіе угла равные; и отъ вершинъ ихъ возспаваятся въ высоту прямыя взаимно равныя, содержащія со сторонами сихъ угловъ углы равные, каждый каждому: то прямыя, проводимыя отъ концовъ возспавленныхъ прямыхъ, перпендикулярно къ плоскостямъ первыхъ угловъ, суть взаимно равныя.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Ежели три прямыя пропорціональны; то параллелепипедъ изъ всѣхъ трехъ равенъ равноспоронному параллелепипеду изъ средней, и равноугольному съ параллелепипедомъ преждесказаннымъ.

Пусть будутъ три прямыя А, В, С пропорціональны; а именно, какъ А къ В, такъ В къ С. Говорю, что параллелепипедъ изъ всѣхъ трехъ А, В, С равенъ равноспоронному параллелепипеду изъ В, и равноугольному съ параллелепипедомъ преждесказаннымъ.

Изложи какой нибудь толстый уголъ при Е, содержимый тремя плоскими углами DEG, GEF, FED; и положи каждую изъ прямыхъ DE, GE, EF равную В; и дополни параллелепипедъ ЕК. И положи прямую LM равную А; и при прямой LM, и при точкѣ на ней L, соспавъ, равный *26. толстому углу при Е, толстый уголъ*, содержимый плоскими углами NLO, OLM, MLN; и положи прямую LO равную В, и LN равную С.

Поселику какъ А къ В, такъ В къ С; то А равна LM, а В равна каждой изъ прямыхъ LO, EF, EG, ED, и С равна LN: то какъ *7 и II, V. LM къ EF, такъ DE къ LN*; посему

сторонны около равныхъ угловъ MLN , DEF суть обратно пропорціональны : а посему параллелограммъ MN равенъ параллелограмму DF *. И поселику два плоскіе прямолинейные *14, VI. угла DEF , NLM суть равные; и опъ вершинъ ихъ воспавлены въ высоту прямыя LO , EG взаимно равныя; и содержащія, со сторонами сихъ угловъ, углы равные, каждый каждому; по опъ почекъ G , O проведенный перпендикулярныя прямыя къ плоскостямъ NLM , DEF , взаимно равны*: слѣдственно *слѣд. 35. параллелепипеды LN , EK имѣющіе ту же высоту. Но параллелепипеды, имѣющіе равныя основанія и ту же высоту, суть взаимно равны*: посему параллелепипедъ NL равенъ *31. параллелепипеду EK . Но параллелепипедъ NL есть изъ A , B , C ; а параллелепипедъ EK есть изъ B : чего ради параллелепипедъ изъ A , B , C равенъ равноспоронному параллелепипеду изъ B , и равноугольному съ параллелепипедомъ прежде сказаннымъ.

Итакъ, ежели три прямыя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Ежели чепыре прямыя пропорціональны; то параллелепипеды изъ оныхъ, подобные и подобно написанные, будутъ пропорціо-

нальные: И ежели параллелепипеды, подобные и подобно изъ четырехъ прямыхъ написанные, пропорціональны; то и самыя прямыя будутъ пропорціональныя.

Пусть будутъ четыре прямыя AB , CD , EF , GH пропорціональныя; а именно, какъ AB къ CD , такъ EF къ GH ; и пусть будутъ написаны изъ прямыхъ AB , CD , EF , GH подобные и подобно положенные параллелепипеды KA , LC , ME , NG . Говорю, что какъ KA къ LC , такъ ME къ NG .

Поелику параллелепипедъ KA подобенъ параллелепипеду LC : то параллелепипедъ KA къ LC имѣетъ утроенное отношеніе *33. прямыя AB къ CD *. Потому же параллелепипедъ ME къ NG имѣетъ утроенное отношеніе прямыя EF къ GH . Но какъ AB къ CD , такъ EF къ GH : чего ради какъ *II, V. AK къ LC , такъ ME къ NG *.

Но пусть будетъ какъ параллелепипедъ AK къ параллелепипеду LC , такъ параллелепипедъ ME къ параллелепипеду NG . Говорю, что какъ прямая AB къ CD , такъ прямая EF къ GH .

Поелику параллелепипедъ KA къ LC имѣетъ утроенное отношеніе прямыя AB къ CD ; и параллелепипедъ ME къ NG имѣетъ утроенное же отношеніе прямыя EF къ

GH; и поелику какъ KA къ LC, такъ ME къ NG: то какъ AB къ CD, такъ EF къ GH*. *и, V.

Итакъ, ежели чепыре, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVIII.

Ежели плоскость къ плоскости перпендикулярна; и опъ какой ниестъ почки, взятой на одной изъ нихъ, проведена будетъ прямая перпендикулярная къ другой плоскости: то сія проведенная перпендикулярная упадетъ на общее плоскостей сѣченіе.

Пусть плоскость CD будетъ къ плоскости AB перпендикулярная; и общее ихъ сѣченіе пусть будетъ AD; и пусть на плоскости CD взята будетъ какая ниестъ почка E. Говорю, что опъ E проведенная прямая, перпендикулярная къ плоскости AB, упадетъ на прямую DA.

Ибо, есѣли не такъ; то пусть, буде возможно, она упадетъ въ AD, какъ EF, и пусть встрѣнитъ плоскость AB въ почкѣ F. Опъ F проведи на плоскости AB, перпендикулярную къ DA, прямую FG; то она будетъ перпендикулярна и къ плоскости CD*: и пропаяи EG.

*опр. 4.

Поелику FG перпендикулярна къ плоскости CD; встрѣчаетъ же она прямую EG,

которая на плоскости CD : то угол FGE
 опр.3. есть прямой. Но EF перпендикулярна къ
 плоскости AB : посему и угол EFG есть
 прямой. Итакъ треугольника EFG два угла
 17,1. равны двумъ прямымъ; чпо целѣпо: по-
 сему отъ точки E проведенная перпенди-
 кулярная прямая къ плоскости AB не па-
 дается внѣ прямой DA ; слѣдственно упадетъ
 на прямую DA .

Итакъ, ежели плоскость; и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ХХХІХ.

Ежели параллелепипеда стороны двухъ
 какихъ нисуть противулежащихъ плоско-
 стей будутъ разсѣчены по поламъ; и чрезъ
 сѣченія будутъ проведены плоскости: то
 общее сѣченіе сихъ плоскостей и попе-
 речникъ параллелепипеда пересѣкутся по
 поламъ.

Параллелепипеда AF пусть стороны двухъ
 противулежащихъ плоскостей CF , AN бу-
 дутъ разсѣчены по поламъ въ точкахъ
 K , L , M , N , O , Q , P , R ; и чрезъ сѣченія
 пусть будутъ проведены плоскости KN ,
 OR ; и пусть общее сѣченіе сихъ плос-
 костей будетъ VS ; а параллелепипеда
 поперечникъ пусть будетъ DG . Говорю,

что VS , DG взаимно пересѣкаются по по-
ламъ, то есть, что VT равна TS , а DT
равна TG .

Пропяни DV , VE , BS , SG .

Поелику DO параллельна къ PE ; то на-
косълежащіе углы DOV , VPE взаимно равны*. *29, I.
И поелику DO равна PE , и OV равна VP ,
и содержатъ онѣ углы равные: по осно-
ваніе DV равно основанію VE ; и преуголь-
никъ DOV равенъ преугольнику PVE ; и
прочіе углы равны прочимъ угламъ: посему
уголъ OVD равенъ углу PVE ; итакъ ли-
нія DVE есть прямая*. Поможу и линія *31, I.
 BSG есть прямая, и BS равна SG . И по-
елику CA равна DB , и параллельна къ ней*; *24.
а и CA равна EG , и параллельна къ ней:
то и DB равна EG *, и параллельна къ *акс. I.
ней*. Соединяющъ же концы ихъ прямая *9.
 DE , GB ; посему и DE параллельна къ BG *, *33, I.
Взяпы же на каждой изъ оныхъ точки D ,
 V , G , S ; и пропянупы прямая DG , VS :
посему DG , VS суть на одной плоскости*. *7.
Итакъ, поелику DE параллельна къ BG ; то
уголъ EDT равенъ углу BGT , ибо суть
накосълежащіе: но и уголъ DTV равенъ углу* *29, I.
 GTS *. Чего ради два преугольника DTV , GTS *15, I.
имѣють два угла равные двумъ угламъ, и
одну сторону равную одной сторонѣ, кои

противулежащъ равнымъ угламъ, а именно, DV равную GS , ибо онѣ суть половины равныхъ DE , BG : посему и прочія стороны *26, I. будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ*: слѣдственно DT равна TG , и VT равна TS .

Итакъ, ежели параллелепипеда, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XL.

Ежели будутъ двѣ призмы равновысопныя; и основаніе одной параллелограммъ, а другой треутольникъ; и ежели параллелограммъ будетъ двукратный треутольника: то сїи призмы будутъ взаимно равныя.

Пусть будутъ $ABCDEF$, $GHIKLMN$ призмы равновысопныя; и пусть основаніе одной будетъ параллелограммъ AF , а другой треутольникъ GHI ; и пусть будетъ параллелограммъ AF двукратный треутольника GHI . Говорю, что призма $ABCDEF$ равна призмѣ $GHIKLMN$.

Дополни параллелепипеды AO , GP .

Поелику параллелограммъ AF есть двукратный треутольника GHI ; но и параллелограммъ HI есть двукратный треутольника *34, I. ка GHI *; то параллелограммъ AF равенъ параллелограмму HI . А параллелепипеды,

имѣющіе равныя основанія и туже высоту,
суть взаимно равны*: посему параллелепи- *31.
педъ АО равенъ параллелепипеду GP. Но по-
лови́на параллелепипеда АО, есть призма
ABCDEF, а половина параллелепипеда GP
призма GHKLMN: чего ради и призма
ABCDEF равна призмѣ GHKLMN.

Итакъ, ежели будутъ двѣ, и пр. ч. и д. II.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА XII.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

ПОДОБНЫЕ многоугольники въ кругахъ, суть взаимно какъ квадраты изъ поперечниковъ.

Пусть будутъ $ABCDE$, $FGHKL$ круги; и въ нихъ подобные многоугольники $ABCDE$, $FKGHL$; и пусть будутъ BM , GN поперечники круговъ. Говорю, что какъ квадратъ изъ BM къ квадрату изъ GN такъ многоугольникъ $ABCDE$ къ многоугольнику $FGHKL$.

Пропяши BE , AM , GL , FN .

Послику многоугольникъ $ABCDE$ подобенъ *оп. I, VI. многоугольнику $FGHKL$: по* и уголъ BAE равенъ углу GFL ; и какъ BA къ AE , такъ GF къ FL : Чего ради два треугольника BAE , GFL имѣютъ одинъ уголъ равный одному углу, а именно, уголъ BAE углу GFL , и стороны около равныхъ угловъ пропорціо-

нальныя; итакъ треугольникъ $AЕВ$ есть
 равноугольный треугольнику FGL^* ; посему $*6, VI$.
 уголъ $AЕВ$ равенъ углу FLG . Но уголъ $AЕВ$
 равенъ и углу AMB^* , ибо суть на тойже $*21, IV$.
 дугѣ; и такъ же уголъ FLG равенъ углу
 FNG : посему и уголъ AMB равенъ углу FNG .
 А и прямой уголъ $ВAM^*$ равенъ прямому $*31, III$.
 GFN ; посему и оспальной уголъ равенъ
 оспальному: итакъ треугольникъ ABM есть
 равноугольный треугольнику FGN : посему
 какъ BM къ GN , такъ BA къ GF^* . Но квадрапъ $*4, VI$.
 изъ BM къ квадрапу изъ GN имѣеть
 удвоенное опношеніе прямая BM къ GN^* ; а $*20, VI$.
 многоугольникъ $ABCDE$ къ многоугольнику
 $FGHKL$ имѣеть удвоенное опношеніе пря-
 мая BA къ GF : чего ради какъ квадрапъ
 изъ BM къ квадрапу изъ GN^* такъ многоу- $*II, V$.
 гольникъ $ABCDE$ къ многоугольнику $FGHKL$.
 Итакъ подобные, и проч. ч. и д. н. (92).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II

Круги суть взаимно, какъ квадрапы изъ
 поперечниковъ.

Пусть будутъ $ABCD$, $EFGH$ круги; и
 BD , FN ихъ поперечники. Говорю, что какъ
 квадрапъ изъ BD къ квадрапу изъ FN , такъ
 кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$.

Ибо, если не будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FN , такъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$; то будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FN , такъ кругъ $ABCD$ къ нѣкому пространству, или меньшему круга $EFGH$, или большему. Пусть, во-первыхъ, будетъ къ меньшему, пространству S .

*6, IV. Въ кругѣ $EFGH$ впиши квадратъ $EFGH$:

То сей вписанный квадратъ будетъ больше половины круга $EFGH$. Ибо если чрезъ точки E, F, G, H проведемъ касательныя къ кругу; то опишемъ квадратъ, коего половина

*47, I, есть квадратъ $EFGH$ *: но кругъ меньше и 31, III. квадрата описаннаго; посему вписанный квадратъ $EFGH$ больше половины круга $EFGH$.

30, III. Раздѣли дуги EF, FG, GH, HE по поламъ въ точкахъ K, L, M, N ; и пропяни $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$: То каждый изъ треугольниковъ EKF, FLG, GMH, HNE есть больше половины опрѣзка, въ коемъ онъ помѣщается. Ибо, если чрезъ точки K, L, M, N проведемъ касательныя къ кругу, и на параллельныхъ къ нимъ прямыхъ EF, FG, GH, HE , дополнимъ параллелограммы; то каждый изъ треугольниковъ EKF, FLG, GMH, HNE будетъ половина параллелограмма, въ коемъ онъ помѣщается: но опрѣзокъ меньше параллелограмма, въ коемъ онъ

помѣщается; слѣдственно каждый изъ
 треугольниковъ EKF , FLG , GMH , HNE
 больше половины опрѣзка, въ коемъ онъ
 помѣщается. Если же и оставшіяся дуги
 будемъ раздѣлять по поламъ, и пропрѣгивать
 прямые; и сіе всегда будемъ дѣлать; то
 останутся на послѣдокъ нѣкіе опрѣзки
 круга, кои будутъ меньше избытка кру-
 га $EFGH$ предъ пространствомъ S . Ибо
 доказано въ первой теоремѣ десятой книги,
 что изъ двухъ неравныхъ излагаемыхъ ве-
 личинъ, еслии опъ большей опята бу-
 деть больше половины, и опъ оставшейся
 больше половины, и сіе всегда дѣлаемо бу-
 деть: то останется на послѣдокъ нѣкая
 величина, которая будетъ меньше излагае-
 мой меньшей величины. Ипакъ пусть оста-
 нутся; и пусть будутъ опрѣзки стоящіе
 на прямыхъ EK , KF , FL , LG , GM , MH ,
 HN , NE , тѣ самые, кои суть меньше
 избытка круга $EFGH$ предъ пространст-
 вомъ S : посему остальной многоугольникъ
 $EKFLGMHN$ есть больше пространства S .
 Въ кругѣ $ABCD$ впиши многоугольникъ
 $A O B P C Q D R$ подобный многоугольнику
 $EKFLGMHN$. Посему какъ квадратъ изъ BD
 къ квадрату изъ FN , такъ и многоугольникъ
 $A O B P C Q D R$ къ многоугольнику $EKFLGMHN$.*1.

Но какъ квадрапъ изъ BD къ квадрапу изъ FH , такъ кругъ $ABCD$ къ пространству S : посему какъ кругъ $ABCD$ къ пространству S , такъ многоугольникъ $AOBPCQDR$ къ много-
 11, V. угольнику $EKFLGMHN^$; и премѣненіемъ, какъ кругъ $ABCD$ къ многоугольнику что въ немъ, такъ пространство S къ много-
 16, V. угольнику $EKFLGMHN^$. Но кругъ $ABCD$ больше многоугольника что въ немъ; посему и пространство S больше многоугольника $EKFLGMHN$: Оно же и меньше; что невозможно. Посему не будетъ какъ квадрапъ изъ BD къ квадрапу изъ FH , такъ кругъ $ABCD$ къ нѣкому пространству меньшему круга $EFGH$.

Подобно докажемъ, что не будетъ какъ квадрапъ изъ FH къ квадрапу изъ BD , такъ кругъ $EFGH$ къ нѣкому пространству меньшему круга $ABCD$.

Говорю же, что и не будетъ какъ квадрапъ изъ BD къ квадрапу изъ FH , такъ кругъ $ABCD$ къ нѣкому пространству большему круга $EFGH$. Ибо, еслии возможно, пусть будетъ къ большему, пространству S . Посему премѣненіемъ, какъ квадрапъ изъ FH къ квадрапу изъ BD , такъ пространство S къ кругу $ABCD$. Но какъ пространство S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ нѣкому пространству

меньшему круга $ABCD$ *: по сему какъ квадрапъ *лемма изъ FN къ квадрапу изъ BD , такъ кругъ $EFGH$ къ проспранспву меньшему круга $ABCD$; что, по доказанному уже, невозможно: а по сему не будетъ какъ квадрапъ изъ BD къ квадрапу изъ FN , такъ кругъ $ABCD$ къ нѣкому проспранспву большѣму круга $EFGH$. А доказано, что и ни къ меньшему: чего ради какъ квадрапъ изъ BD къ квадрапу изъ FN , такъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$.

Итакъ круги сѹпъ; и проч. ч. и д. н.

ЛЕММА. Еслили проспранспво S больше круга $EFGH$: то говорю, что какъ проспранспво S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ нѣкому проспранспву меньшему круга $ABCD$.

Ибо пустьъ будетъ какъ проспранспво S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ проспранспву T . Говорю, что проспранспво T меньше круга $ABCD$. Поелику какъ проспранспво S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ проспранспву T ; то, премѣненіемъ, какъ проспранспво S къ кругу $EFGH$, такъ кругъ $ABCD$ къ проспранспву T *. *16, v. Но проспранспво S больше круга $EFGH$; по сему и кругъ $ABCD$ больше проспранспва T .

Чего ради какъ пространство S къ кругу $ABCD$, такъ кругъ $EFGH$ къ нѣкоему пространству меньшему круга $ABCD$. (93).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Ш.

Всякую пирамиду, имѣющую треугольное основаніе, можно раздѣлять: на двѣ, треугольныя же основанія имѣющія, пирамиды, кои суть взаимно равны и подобны, и еще подобны цѣлой; и на двѣ призмы равныя: и сїи двѣ призмы суть больше половины цѣлой пирамиды.

Пусть будетъ пирамида, коея основаніе треугольникъ ABC , а вершина почка D . Говорю, что пирамиду $ABCD$ можно раздѣлять: на двѣ, имѣющія треугольныя же основанія, пирамиды, кои суть взаимно равны и подобны, и еще подобны цѣлой; и на двѣ призмы равныя: и что сїи двѣ призмы суть больше половины цѣлой пирамиды. (94).

Раздѣли AB , BC , CA , AD , DB , DC по поламъ въ почкахъ E , F , G , H , K , L ; и протяни EH , EG , GH , HK , KL , LH , EK , KF , FG .

Поелику AE равна EB , и AH равна HD :
 *2, VI. то EH параллельна къ DB *. Поиному же и HK параллельна къ AB . Итакъ $HEBK$ есть

параллелограммъ : посему НК равна ЕВ*. *34, I.
 Но ЕВ равна ЕА: посему и ЕА равна НК.
 Поскольку же и АН равна НД; то двѣ пря-
 мыя ЕА, АН равны двумъ прямымъ КН, НД,
 каждая каждой; и уголъ ЕАН равенъ углу
 КНД*: посему основаніе ЕН равно осно- *29, I.
 ванію КД: а посему и преугольникъ АЕН
 равенъ и подобенъ* преугольнику НКД. *6 и 4, VI.
 Поскольку же и преугольникъ АНГ равенъ и
 подобенъ преугольнику НЛД. И поскольку
 двѣ прямыя ЕН, НГ, взаимно вспомо-
 щаются; параллельны къ двумъ прямымъ
 КД, ДЛ, взаимно вспомовающимся, и ле-
 жачимъ не на тойже плоскости: то содер-
 жащъ онѣ углы равны*: посему уголъ ЕНГ *10, XI.
 равенъ углу, КДЛ. Итакъ, поскольку двѣ пря-
 мыя ЕН, НГ равны двумъ прямымъ КД, ДЛ;
 каждая каждой; и уголъ ЕНГ равенъ углу КДЛ:
 то основаніе ЕГ равно основанію КЛ; посему
 и преугольникъ ЕНГ равенъ и подобенъ;
 преугольнику КДЛ. Поскольку же и пре-
 угольникъ АЕГ равенъ и подобенъ пре-
 угольнику НКЛ. Чего ради пирамида, коея
 основаніе преугольникъ АЕГ а вершина
 точка Н, равна и подобна пирамидѣ, коея
 основаніе преугольникъ НКЛ а вершина
 точка Д*. И поскольку къ АВ, одной изъ *оп. 10, XI.
 сторонъ преугольника АДВ, проведена

параллельная НК: то преугольникъ ADB
 *29. I. есть равноугольный преугольнику DHK;
 4. VI. и стороны ихъ суть пропорціональныя:
 чего ради преугольникъ ADB подобенъ
 преугольнику DHK. Потому же преуголь-
 никъ DBC подобенъ преугольнику DKL,
 и преугольникъ ADC подобенъ преуголь-
 нику DLN. И поелику двѣ прямыя BA, AC,
 взаимно встрѣчающіяся; параллельны къ
 двумъ прямымъ KH, HL; взаимно встрѣчаю-
 щимся; и лежащимъ не на однойже плоско-
 10. XI. сти; то онѣ содержатъ углы равные: по-
 сему уголъ BAC равенъ углу KHL. Но какъ
 BA къ AC, такъ KH къ LN; поему пре-
 угольникъ ABC подобенъ преугольнику
 6. VI. HKL. Ипакъ пирамида, коея основаніе
 преугольникъ ABC а вершина почка D,
 подобна пирамидѣ, коея основаніе пре-
 угольникъ HKL а вершина почка D. До-
 казано же; что пирамида, коея осно-
 ваніе преугольникъ HKL а вершина почка
 D, подобна пирамидѣ, коея основаніе пре-
 угольникъ AEG а вершина почка H: посе-
 му и пирамида; коея основаніе преуголь-
 никъ ABC а вершина почка D, подобна
 пирамидѣ; коея основаніе преугольникъ AEG
 а вершина почка H. Чего ради каждая изъ
 пирамидъ AEGH, HKLD подобна двѣлой

пирамидѢ $ABCD$. И поелику BF равна FC ,
то параллелограммъ $EBFG$ есть двукрап-
ный треугольника GFC *. Но ежели будущъ *41, I.
двѢ призмы равновысопныя, изъ коихъ
основаніе одной параллелограммъ, а дру-
гой треугольникъ, и ежели паралле-
лограммъ есть двукрапный треугольника;
то сїи призмы взаимно равны*: посему *40, XI.
призма, содержащая двумя треугольниками
 BKF, ENG и тремя параллелограммами $EBFG$,
 $EBKH, HKFG$, равна призмѢ, содержащей
двумя треугольниками GFC, HKL и тремя
параллелограммами $KFCL, LCGH, HKFG$.
Явствуетъ же, что каждая изъ сихъ призмъ:
и та, коея основаніе параллелограммъ $EBFG$
противуположащій прямой HK , и та, коея
основаніе треугольникъ GFC противуположа-
щій треугольнику KLH , есть больше каждой
изъ пирамидъ, коихъ основанія суть треу-
гольники AEH, HKL , а вершины почки H, D .
Ибо, ежели пропнемъ прямыя EF, EK ; то
призма, коея основаніе параллелограммъ
 $EBFG$ противуположащій прямой HK , есть
больше пирамиды, коея основаніе треуголь-
никъ EBF а вершина почка K . Но пира-
мида, коея основаніе треугольникъ EBF а
вершина почка K , равна пирамидѢ, коея
основаніе треугольникъ AEH а вершина

оп. 10, XI. почка Н; ибо онѣ содержащіяся плоскостями равными и подобными: посему призма, коея основаніе параллелограммъ $EBFG$ противополужащій прямой НК, естъ больше пирамиды, коея основаніе треугольникъ AEG а вершина почка Н. Но призма, коея основаніе параллелограммъ $EBFG$ противополужащій прямой НК, равна призмѣ, коея основаніе треугольникъ GFC противополужащій треугольнику NKL ; а пирамида, коея основаніе треугольникъ AEG а вершина почка Н, равна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ NKL а вершина почка D: посему двѣ сказанныя призмы сунтъ больше двухъ пирамидъ, коихъ основанія треугольнички AEG , NKL , а вершины почки Н, D. Ипакъ цѣлая пирамида, коея основаніе треугольникъ ABC а вершина почка D, раздѣлена на двѣ пирамиды, кои взаимно равны и подобны, и еще подобны цѣлой пирамидѣ, и на двѣ призмы равныя; и сѣ двѣ призмы сунтъ больше половины цѣлой пирамиды. Ч. и D. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели будущъ двѣ пирамиды, имѣющія ту же высоту и треугольныя основанія:

раздѣлена же будетъ каждая изъ нихъ на двѣ пирамиды равныя взаимно и подобныя цѣлой, и на двѣ призмы равныя; если же и изъ сихъ произшедшихъ пирамидъ каждая будетъ раздѣлена такимъ же образомъ; сѣ же и всегда будетъ дѣлаемо: то будетъ какъ основаніе одной пирамиды къ основанію другой, такъ всѣ призмы въ одной пирамидѣ, ко всѣмъ призмамъ равномногимъ въ другой пирамидѣ.

Пусть будутъ двѣ пирамиды, имѣющія ту же высоту, и преугольные основанія ABC, DEF , а вершины точки G, H ; и пусть каждая изъ нихъ будетъ раздѣлена на двѣ пирамиды взаимно равныя и подобныя цѣлой, и на двѣ равныя призмы*; и вообрази, *3. что каждая изъ сихъ произшедшихъ пирамидъ раздѣлена такимъ же образомъ; сѣ же и всегда пусть будетъ дѣлаемо. Говорю, что какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ всѣ призмы въ пирамидѣ $ABCG$ ко всѣмъ призмамъ равномногимъ въ пирамидѣ $DEFH$.

Поелику BO равна OC , и AL равна LC , то AB параллельна къ OL *: посему пре- *2, VI. угольникъ ABC подобенъ преугольнику LOC *. *4, VI. Потому же и преугольникъ DEF подобенъ преугольнику RVF . И поелику прямая

ВС естъ двукратная прямой СО, и ЕФ
 двукратная прямой FV; по какъ ВС къ
 СО, такъ ЕФ къ FV. Но изъ ВС, СО на-
 писаны подобныя и подобно положенныя
 прямолинейныя фигуры ABC, LOC; а изъ
 EF, FV подобныя и подобно положенныя
 прямолинейныя фигуры DEF, RFV: посему
 какъ шреугольникъ ABC къ шреугольнику
 LOC, такъ шреугольникъ DEF къ шре-
 22,VI. угольнику RVF; и премѣненіемъ, какъ
 шреугольникъ ABC къ шреугольнику DEF,
 такъ шреугольникъ LOC къ шреугольнику
 16,V. RFV. Но какъ шреугольникъ LOC къ шре-
 угольнику RFV, такъ призма, коея осно-
 ваніе шреугольникъ LOC проптивулежащій
 шреугольнику PMN, къ призмѣ, коея осно-
 ваніе шреугольникъ RVF проптивулежащій
 лемма. шреугольнику STU: посему и какъ шре-
 угольникъ ABC къ шреугольнику DEF, такъ
 призма, коея основаніе шреугольникъ LOC
 проптивулежащій шреугольнику PMN, къ
 призмѣ, коея основаніе шреугольникъ RVF
 11,V. проптивулежащій шреугольнику STU. И по-
 елику двѣ призмы въ пирамидѣ ABCG суть
 взаимно равны; а и двѣ призмы въ пи-
 рамидѣ DEFH взаимно равны: по какъ
 призма, коея основаніе параллелограммъ
 KLOB проптивулежащій прямой MP, къ призмѣ,

мѢ, коея основаніе преутольщикъ LOC про-
пивулежащій преутольнику PMN, такъ
призма, коея основаніе параллелограммъ
EQRV пропивулежащій прямой SU, къ приз-
мѢ, коея основаніе преутольщикъ RVF про-
пивулежащій преутольнику STU; и сово-
купленіемъ, какъ призмы KBOLMP, LOCMNP
къ призмѢ LOCMNP, такъ призмы QEVRSU,
RVFSTU къ призмѢ RVFSTU*; и премѣне- *18.v.
ніемъ, какъ призмы KBOLMP, LOCPMN
къ призмамъ QEVRSU, RVFSTU, такъ приз-
ма LOCMNP къ призмѢ RVFSTU*. Но до- *16.v.
казано, что какъ призма LOCMNP къ приз-
мѢ RVFSTU, такъ основаніе LOC къ осно-
ванію RVF, и такъ основаніе ABC къ осно-
ванію DEF: посему какъ основаніе ABC къ ос-
нованію DEF, такъ двѣ призмы въ пирамидѢ
ABCG къ двумъ призмамъ въ пирамидѢ DEFH.
Еспѣли каждую изъ произшедшихъ пирамидъ
PMNG, SUTH раздѣлимъ такимъ же образомъ:
то будетъ, какъ основаніе PMN къ основанію
SUT, такъ двѣ призмы въ пирамидѢ PMNG
къ двумъ призмамъ въ пирамидѢ SUTH. Но
какъ основаніе PMN къ основанію SUT,
такъ основаніе ABC къ основанію DEF:
посему какъ основаніе ABC къ основанію
DEF, такъ двѣ призмы въ пирамидѢ ABCG
къ двумъ призмамъ въ пирамидѢ DEFH,

и такъ двѣ призмы въ пирамидѣ $PMNG$ къ двумъ призмамъ въ пирамидѣ $SUTH$, и такъ всѣ чепыре ко всѣмъ чепыремъ. Сіе же докажется и о призмахъ, кои произойдуть отъ раздѣленія пирамидъ $AKLP$, $DQRS$, и вообще о всѣхъ призмахъ равноногихъ.

ЛЕММА. Мы докажемъ слѣдующимъ образомъ, что какъ преугольникъ LOC къ преугольнику RVF , такъ призма, коея основаніе преугольникъ LOC противулежащій преугольнику PMN , къ призмѣ, коея основаніе преугольникъ RVF противулежащій преугольнику STU .

Вообрази, что въ тѣхъ же фигурахъ отъ точекъ G , H проведены перпендикулярныя прямыя къ плоскостямъ преугольниковъ ABC , DEF : по сіи прямыя будутъ равныя, ибо пирамиды предполагаются равновысокими. Поелику же и прямая GC и перпендикулярная прямая отъ точки G проведенная, разсѣчены параллельными плоскостями ABC , PMN : по онѣ разсѣкаются пропорціонально*. Но прямая GC разсѣчена по поламъ въ N плоскостію PMN : посему и проведенная отъ точки G перпендикулярная прямая къ плоскости ABC , разсѣчена по поламъ плоскостію PMN . Поэтому же и

*17, XI.

проведенная опъ точки H перпендикулярная къ плоскости DEF , разсѣчена по плоскостію STU . Но проведенныя опъ G, H перпендикулярныя къ плоскостямъ ABC, DEF суть взаимно равны; посему и проведенныя опъ прѣугольниковъ PMN, STU перпендикулярныя къ прѣугольникамъ ABC, DEF взаимно равны; а посему и призмы, имѣющія основаніями прѣугольники LOC, RVF противулежащіе прѣугольникамъ PMN, STU , суть равновысопныя: слѣдственно параллелепипеды дописанные изъ сказанныхъ призмъ, будучи равновысопныя, суть взаимно какъ основанія*; чего ради и половины *32, XI. суть какъ половины, по естъ: основанія LOC, RVF суть взаимно какъ сказанныя призмы. Ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Пирамиды, имѣющія прѣугольныя основанія и пуже высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пирамиды, коихъ основанія прѣугольники ABC, DEF , а вершины точки G, H , пусть будутъ имѣть пуже высоту. Говорю, что какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ пирамида $ABCG$ къ пирамидѣ $DEFH$.

Ибо, еслии не будетъ какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ пирамида $ABCG$ къ пирамидѣ $DEFH$; то будетъ какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ пирамида $ABCG$ къ нѣкому тѣлу, или меньшему пирамиды $DEFH$, или большему. Пусть, впервыхъ, будетъ къ меньшему, тѣлу X .

Раздѣли пирамиду $DEFH$ на двѣ пирамиды взаимно равныя и подобныя цѣлой, и на
 3. двѣ равныя призмы: по сіи двѣ призмы
 3. супъ больше половины цѣлой пирамиды.

И еще, пирамиды произшедшія отъ сего раздѣленія, раздѣли такимъ же образомъ; сіе же и всегда пусть будетъ дѣлаемо, пока опнимупся нѣкія пирамиды отъ пирамиды $DEFH$, кои будутъ меньше избытка пи-
 *1, X. рамиды $DEFH$ предъ тѣломъ X *. Пусть опнимупся; и пусть онѣ будутъ, на примѣръ, пирамиды $DQRS$, $STUH$: то оспальныя призмы въ пирамидѣ $DEFH$ супъ больше тѣла X . Раздѣли же и пирамиду $ABCG$ такимъ же образомъ, такъ чпобъ призмы въ оной были равномногія призмамъ въ пирамидѣ $DEFH$.

Посему какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ призмы въ пирамидѣ $ABCG$
 *4. къ призмамъ въ пирамидѣ $DEFH$ *. Но какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ,

по положенію, пирамида $ABCG$ къ пѣлу X :
 посему какъ пирамида $ABCG$ къ пѣлу X ,
 такъ призмы въ пирамидѣ $ABCG$ къ призмамъ
 въ пирамидѣ $DEFH$ *; и премѣненіемъ, какъ пи- *11, V.
 рамида $ABCG$ къ призмамъ, кои въ ней, такъ
 пѣло X къ призмамъ въ пирамидѣ $DEFH$ *. *16, V.
 Но пирамида $ABCG$ больше призмъ, кои въ
 ней; посему и пѣло X больше призмъ, кои
 въ пирамидѣ $DEFH$: Оно же и меньше; чпо
 невозможно. Чего ради не будетъ какъ осно-
 ваніе ABC къ основанію DEF , такъ пира-
 мида $ABCG$ къ нѣкому пѣлу меньшему
 пирамиды $DEFH$.

Подобно докажемъ, чпо не будетъ какъ
 основаніе DEF къ основанію ABC , такъ пира-
 мида $DEFH$ къ нѣкому пѣлу меньшему пи-
 рамиды $ABCG$.

Говорю же, чпо и не будетъ какъ основаніе
 ABC къ основанію DEF , такъ пирамида $ABCH$
 къ нѣкому пѣлу большему пирамиды $DEFH$.
 Ибо, естѣли возможно, пусть будетъ къ
 большему, пѣлу X . Посему, преложеніемъ*, *оп. 14, V.
 какъ основаніе DEF къ основанію ABC , такъ
 пѣло X къ пирамидѣ $ABCG$. Но какъ пѣ-
 ло X къ пирамидѣ $ABCG$, такъ пирамида
 $DEFH$ къ нѣкому пѣлу меньшему пира-
 миды $ABCG$, по доказанному предъ симъ:
 посему какъ основаніе DEF къ основанію

ABC, такъ пирамида DEFG къ нѣкому плъу меньшему пирамиды ABCG; чпо, по доказанному, нелѣпо: посему не будетъ какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ пирамида ABCG къ нѣкому плъу большему пирамиды DEFG. А доказано, чпо и ни къ меньшему: чего ради какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ пирамида ABCG къ пирамидѣ DEFG.

Итакъ пирамиды, имѣющія, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Пирамиды, имѣющія ту же высоту и многоугольныя основанія, сунъ взаимно какъ основанія.

Пирамиды, коихъ основанія многоугольники ABCDE, FGHL, а вершины почки M, N, пусть будутъ имѣть ту же высоту. Говорю, чпо какъ основаніе ABCDE къ основанію FGHL, такъ пирамида ABCDEM къ пирамидѣ FGHLN.

Раздѣли основаніе ABCDE на преугольники, ABC, ACD, ADE; и основаніе FGHL на преугольники FGH, FHL, FKL; и вообрази на каждомъ изъ сихъ преугольниковъ пирамиды равновысотныя цѣлымъ пирамидамъ.

Поелику какъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD , такъ пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $ACDM^*$: по, совокупленіемъ, какъ *5. пирапедія $ABCD$ къ треугольнику ACD , такъ пирамида $ABCDM$ къ пирамидѣ $ACDM^*$. Но *18, V. какъ треугольникъ ACD къ треугольнику ADE , такъ пирамида $ACDM$ къ пирамидѣ $ADEM^*$: посему, равномѣстно, какъ основа- *5. ніе $ABCD$ къ основанію ADE , такъ пирамида $ABCDM$ къ пирамидѣ $ADEM^*$; а посему, сово- *22, V. купленіемъ, какъ основаніе $ABCDE$ къ основанію ADE , такъ пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ $ADEM$. Поэтому же, какъ основаніе $FGHKL$ къ основанію FKL , такъ пирамида $FGHKLN$ къ пирамидѣ $FKLN$. И поелику двѣ пирамиды $ADEM$, $FKLN$ имѣютъ треугольные основанія и шже высоту: по какъ основаніе ADE къ основанію FKL , такъ пирамида $ADEM$ къ пирамидѣ $FKLN^*$. Ипакъ, *5. поелику какъ основаніе $ABCDE$ къ основанію ADE , такъ пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ $ADEM$; и какъ основаніе ADE къ основанію FKL , такъ пирамида $ADEM$ къ пирамидѣ $FKLN$: по, равномѣстно, какъ основаніе $ABCDE$ къ основанію FKL , такъ пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ $FKLN^*$. Но какъ основаніе FKL къ *22, V. основанію $FGHKL$, такъ пирамида $FKLN$ къ пирамидѣ $FGHKLN$: посему, равномѣстно,

какъ основаніе $ABCDE$ къ основанію $FGHKL$,
такъ пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ
 $FGHKLN$.

Итакъ пирамиды, имѣющія, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Всякую призму, имѣющую преугодное
основаніе, раздѣлять можно на три пира-
миды равныя взаимно, имѣющія преугод-
ныя основанія.

Пусть будетъ призма, коея основаніе
преугодникъ ABC пропикулежащій пре-
угоднику DEF . Говорю, что призму
 $ABCDEF$ раздѣлитъ можно на три пира-
миды равныя взаимно, имѣющія преугод-
ныя основанія.

Пропиши BD , EC , CD .

спр. 13, XI. Послику $ABED$ есть параллелограммъ,
а BD его поперечникъ; то преугодникъ

*34, I. ABD равенъ преугоднику EDB *: посему
пирамида, коея основаніе преугодникъ ABD
а вершина точка C , равна пирамидѣ, коея
основаніе преугодникъ EDB и вершина

*5. точка C *. Но пирамида, коея основаніе
преугодникъ EDB а вершина точка C ,
есть также что и пирамида, коея основаніе

*сп. 10, XI. преугодникъ EBC а вершина точка D *; ибо

онѣ содержащіяся пѣмѣже плоскостями: посему и пирамида, коея основаніе треугольникъ ABD а вершина почка C , равна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ EBC а вершина почка D . Еще же, поелику $FCBE$ есть параллелограммъ*, а CE его попереч- *опр. 13, XI. никъ; по треугольникъ ECF равенъ треугольнику CBE : посему пирамида, коея основаніе треугольникъ BEC а вершина почка D , равна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ ECF и вершина почка D *. А до- *5. казано, что пирамида, коея основаніе треугольникъ BCE а вершина почка D , равна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ ABD а вершина почка C : посему и пирамида, коея основаніе треугольникъ CEF а вершина почка D , равна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ ABD а вершина почка C . Ипакъ призма $ABCDEF$ раздѣлена на три пирамиды равныя взаимно, имѣющія треугольныя основанія. И поелику пирамида, коея основаніе треугольникъ ABD а вершина почка C , есть таже что и пирамида, коея основаніе треугольникъ CAB а вершина почка D *, ибо онѣ содержащіяся пѣмѣже плос- *опр. 10, XI. костями; пирамида же, коея основаніе треугольникъ ABD а вершина почка C , если, по доказанному, претъя часть призмы,

коя основаніе треугольникъ ABC противоположащій треугольнику DEF : чего ради и пирамида, коя основаніе треугольникъ ABC а вершина точка D , есть третья часть призмы, имѣющей тоже основаніе, по есть треугольникъ ABC противоположащій треугольнику DEF . ч. и д. н.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуетъ, что всякая пирамида есть третья часть призмы, имѣющей тоже основаніе и одинакую высоту. Ибо, еслили основаніе призмы будетъ и другая какая либо прямолинейная фигура, по и противоположащая основанію будетъ ей *оп. 13, XI. равная и подобная*; и сію призму можно раздѣлить на призмы, имѣющія треугольныя основанія и противоположащія треугольникамъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Подобныя пирамиды, имѣющія треугольныя основанія, суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ.

Пусть будутъ подобныя и подобно положенныя пирамиды, коихъ основанія суть треугольники ABC , DEF , а вершины точки G , H . Говорю; что пирамида $ABCG$ къ пи-

раидѢ DEFH имѣетъ упроенное отноше-
нїе прямыя BC къ EF.

Дополни параллелепеды BGML, EHQR.

Поелику пирамида ABCG подобна пира-
мидѢ DEFH: шо* уголь ABC равенъ углу *оп.9, XI.
DEF, и уголь GBC углу HEF, а уголь ABG
углу DEN; и какъ AB къ DE, такъ BC
къ EF, и такъ BG къ EH. Ипакъ, по-
елику какъ AB къ DE, такъ BC къ EF, и
сїи пропорціональныя стороны сущь око-
ло равныхъ угловъ: шо параллелограммы
BM подобенъ параллелограмму EQ. Потому
же параллелограммы BN подобенъ параллело-
грамму ER, и параллелограммы BK паралле-
лограмму EO. Чего ради при параллело-
граммахъ BM, BK, BN подобны тремъ парал-
лелограммамъ EQ, EO, ER. Но при парал-
лелограммахъ MB, BK, BN равны* и подоб- *24, XI.
ны тремъ прочимъ пропивиулежащимъ; а и
при параллелограммахъ EQ, EO, ER равны и
подобны тремъ прочимъ пропивиулежащимъ:
ипакъ параллелепеды BGML, EHQR со-
держашся плоскостями подобными и равно-
мнотими: а посему параллелепедъ BGML
подобенъ параллелепеду EHQR*. Но по- *оп.9, XI.
добные параллелепеды сущь взаимно въ
упроенномъ отношенїи сходивенныхъ спо-
ронъ*: посему параллелепедъ BGML къ па- *33, XI.

- параллелепипеду $ЕНQR$ имѣеть упроенное отношеніе, сходственной спороны BC къ сходственной споронѣ EF . Но какъ параллелепипедъ $BGML$ къ параллелепипеду $ЕНQR$, такъ пирамида $ABCG$ къ пирамидѣ $DEFH$; ибо пирамида естъ шестая часть параллелепипеда, потому что призма, то естъ половина параллелепипеда, естъ прекрасная
- *7. пирамиды*: посему пирамида $ABCG$ къ пирамидѣ $DEFH$ имѣеть упроенное отношеніе прямыхъ BC къ EF . ч. и д. н.

СЛѢДСТВІЕ. Изъ сего явствуетъ, что подобныя пирамиды, имѣющія многоугольныя основанія, суть взаимно въ упроенномъ отношеніи сходственныхъ споронъ. Ибо сїи пирамиды можно раздѣлить на пирамиды, имѣющія треугольныя основанія; потому что основанія, кои суть

оп. 13, XI. подобные многоугольники, можно раздѣлить на треугольники равномногіе, взаимно подобные; и пропорціональные сичъ

20, VI. многоугольникамъ. Посему какъ одна изъ имѣющихъ треугольное основаніе пирамидъ, кои въ первой пирамидѣ, къ одной изъ имѣющихъ треугольное основаніе пирамидъ, кои во второй пирамидѣ, такъ всѣ имѣющія треугольное основаніе пирамиды, кои въ

первой, ко всѣмъ имѣющимъ преугольное основаніе пирамидамъ, кои во второй*, по *12, V. есть, такъ первая изъ пирамидъ имѣющихъ многоугольное основаніе, ко второй изъ пирамидъ имѣющихъ многоугольное же основаніе. Но тѣ пирамиды, по есть имѣющія преугольные основанія, суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ: чего ради и сіи пирамиды, по есть имѣющія многоугольные основанія, суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*. (95).

*11, V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія преугольные, основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И коихъ пирамидъ, имѣющихъ основанія преугольные, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равныя.

Пусть будутъ равныя пирамиды, имѣющія преугольные основанія ABC, DEF, а вершины точки G, H. Говорю, что пирамидъ ABCG, DEFH основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG.

Дополни параллелепипеды $BGML$, $ЕНQR$.

- Поелику пирамида $ABCG$ равна пирамидѣ $DEFH$; а параллелепипедъ $BGML$ есть шестикрапный пирамиды $ABCG^*$, и параллелепипедъ $ЕНQR$ шестикрапный же пирамиды $DEFH$: то параллелепипедъ $BGML$ равенъ параллелепипеду $ЕНQR$. А равныхъ параллелепипедовъ основанія суть обратно пропорціональны высотамъ*: посему какъ основаніе BM къ основанію EQ , такъ высота параллелепипеда $ЕНQR$ къ высотѣ параллелепипеда $BGML$. Но какъ основаніе BM къ основанію EQ , такъ претугольникъ ABC къ претугольнику DEF^* : посему какъ претугольникъ ABC къ претугольнику DEF , такъ высота параллелепипеда $ЕНQR$ къ высотѣ параллелепипеда $BGML^*$. Но высота параллелепипеда $ЕНQR$ есть также чію и пирамиды $DEFH$, а высота параллелепипеда $BGML$ также чію и пирамиды $ABCG$: посему какъ основаніе ABC къ основанію DEF , такъ высота пирамиды $DEFH$ къ высотѣ пирамиды $ABCG$. И такъ пирамидъ $ABCG$, $DEFH$ основанія суть обратно пропорціональны высотамъ.

Но пусть будутъ пирамидъ $ABCG$, $DEFH$ основанія обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ABC

къ основанію DEF, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG. Говорю, что пирамида ABCG равна пирамидѣ DEFH.

Ибо, сдѣлавъ поже спроеіе, поелику какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG; а какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ параллелограммъ BM къ параллелограмму EQ: то какъ параллелограммъ BM къ параллелограмму EQ, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG. Но высота пирамиды DEFH есть таже что и параллелепипеда ENQR, а высота пирамиды ABCG таже что и параллелепипеда BGML: посему какъ основаніе BM къ основанію EQ, такъ высота параллелепипеда ENQR къ высотѣ параллелепипеда BGML. А копорыхъ параллелепипедовъ, основанія обратно пропорціональны высотамъ, шѣ сущь равныя*: посему параллелепипедъ BGML равенъ параллелепипеду ENQR. Но пирамида ABCG есть шестая часть параллелепипеда BGML, а пирамида DEFH шестая же часть параллелепипеда ENQR: чего ради пирамида ABCG равна пирамидѣ DEFH.

Итакъ равныхъ, и проч. ч. и д. н. (96).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Всякій конусъ есть претѣя часть цилиндра, имѣющаго тоже основаніе и равную высоту.

Пусть имѣютъ конусъ и цилиндръ тоже основаніе, кругъ $ABCD$, и равную высоту. Говорю, что конусъ есть претѣя часть цилиндра; то есть, цилиндръ есть прекрасный конуса.

Ибо, буде цилиндръ не есть прекрасный конуса; то онъ будетъ, или больше или меньше нежели прекрасный конуса. Пусть, во первыхъ, будетъ больше нежели прекрасный.

6, IV. Въ кругѣ $ABCD$ впиши квадрапъ $ABCD$: то квадрапъ $ABCD$ больше половины круга $ABCD$. На квадрапѣ $ABCD$ восставь призму, равновысопную цилиндру: то сѣя призма будетъ больше половины цилиндра. Ибо, еспѣли около круга $ABCD$ опишемъ квадрапъ; то квадрапъ вписанный будетъ половина квадрапа описаннаго: И еспѣли восставимъ на нихъ призмы равновысопныя, то сѣя параллелепеды; а параллелепеды, имѣющіе ту же высоту, суть взаимно какъ основанія: посему призма, восставленная на квадрапѣ $ABCD$, есть половина призмы,

возспавленной на квадрапѣ описанномъ около круга $ABCD$: Но цилиндръ есть меньше призмы, возспавленной на квадрапѣ описанномъ около круга $ABCD$: слѣдсипвенно призма, возспавленная на квадрапѣ $ABCD$ и равновысопная цилиндру, есть больше половины цилиндра. Раздѣли дуги AB , BC , CD , DA по поламъ въ точкахъ E , F , G , H ; и протяни AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA : то каждый изъ преугольниковъ AEB , BFC , CGD , DHA больше половины опрѣзка круговаго, въ коемъ онъ помѣщенъ, какъ доказано выше*. На каждомъ изъ преугольниковъ ^{въ 2.} AEB , BFC , CGD , DHA возспавь призмы равновысопныя цилиндру: то каждая изъ сихъ призмъ больше половины объемающаго оную опрѣзка цилиндра. Ибо, еспли чрезъ точки E , F , G , H проведемъ параллельныя прямыя къ AB , BC , CD , DA , и на AB , BC , CD , DA дополнимъ параллелограммы, и на нихъ возспавимъ параллелепипеды равновысопные цилиндру, то призмы, кои на преугольникахъ AEB , BFC , CGD , DHA , будутъ половины каждаго изъ сихъ параллеленипедовъ: Но опрѣзки цилиндра суть меньше сихъ же параллеленипедовъ: посему призмы, кои на преугольникахъ AEB , BFC , CGD , DHA , суть больше половины

соотвѣствующихъ опрѣзковъ цилиндра. Если же и оставшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и пропягивать прямые, и на произшедшихъ преугольникахъ возсталять призмы равновысопныя цилиндру; и если сие всегда будемъ дѣлать: то останутся наконецъ нѣкіе опрѣзки цилиндра, кои будутъ меньше избытка цилиндра предъ *1, X. прекраснымъ конусомъ*. Пусть таковыя останутся: и пусть сїи опрѣзки цилиндра будутъ « на » $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA$. Посему оставшая призма, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а высота та же что и цилиндра, больше прекраснаго конуса. Но призма, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$, а высота та же что и цилиндра, есть прекрасная пирамида, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$

7. а вершина та же что и конуса; посему и пирамида, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а вершина та же что и конуса, больше конуса имѣющаго основаніемъ кругъ $ABCD$: Она же и меньше, ибо конусомъ объемлется; что невозможно. Чего ради цилиндръ не больше нежели прекрасный конус.

Говорю же, что и ни меньше нежели прекрасный. Ибо, если возможно, пусть

цилиндръ будетъ меньше нежели прекращенный конуса: посему обратно конусъ есть больше нежели прервѣя часть цилиндра.

Въ кругѣ $ABCD$ впиши квадрапъ $ABCD$: по квадрапъ $ABCD$ больше половины круга $ABCD$. На квадрапѣ $ABCD$ возспавь пирамиду, имѣющую ту же вершину что и конусъ: по сѣя пирамида будетъ больше половины конуса. Ибо, по доказанному уже, естли опишемъ около круга $ABCD$ квадрапъ; по квадрапъ $ABCD$ есть половина квадрапа описаннаго около сего круга. И естли на сихъ квадрапахъ возспавимъ параллелепипеды, по есть призмы, равновысопныя конусу; по возспавленная на квадрапѣ $ABCD$ будетъ половина возспавленной на квадрапѣ описанномъ около круга, ибо сѣи параллелепипеды суть взаимно какъ основанія: A и прервѣя ихъ части суть взаимно какъ основанія; чего ради пирамида, коея основаніе квадрапъ $ABCD$, есть половина пирамиды, возспавленной на квадрапѣ описанномъ около круга: По пирамида, возспавленная на квадрапѣ описанномъ около круга, больше конуса, ибо оный объемлеть; слѣдственно и пирамида, коея основаніе квадрапъ $ABCD$ а вершина таже что и конуса, есть больше половины конуса. Раздѣли дуги AB , BC , CD , DA

по поламъ въ точкахъ E, F, G, H ; и пропяни $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA$: по каждый изъ треугольниковъ AEB, BFC, CGD, DHA больше половины опрѣзка, въ коемъ помѣщается. Возставь на каждомъ изъ треугольниковъ AEB, BFC, CGD, DHA пирамиды, имѣющія ту же вершину что и конусъ: по каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины опрѣзка конуса объемлющаго оную. Есѣли же и оставшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и пропягиванъ прямая, и на произшедшихъ треугольникахъ возставлять пирамиды, имѣющія ту же вершину что и конусъ; и есѣли сѣ всегда будемъ дѣлать: по останутся наконецъ нѣкіе опрѣзки конуса, кои будутъ меньше избытка

- *1. конуса предъ прѣпъею частію цилиндра*. Пусть таковыя останутся; и пусть сѣи опрѣзки цилиндра будутъ тѣ, кои на опрѣзкахъ $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA$. Посему есѣальная пирамида, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а вершина таже что и конуса, есѣ больше нежели прѣпъя часть цилиндра. Но пирамида, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а вершина таже что и конуса, есѣ прѣпъя часть призмы, коея основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$, а вершина таже что и цилиндра*: посему призма,

когда основаніе многоугольникъ $AEBFCGDH$ а высота также что и цилиндра, есть больше цилиндра, когото основаніе кругъ $ABCD$: Она же и меньше цилиндра, ибо цилиндромъ объемлется; что невозможно. Чего ради цилиндръ не меньше нежели прекрасный конуса. А доказано, что и ни больше нежели прекрасный: посему цилиндръ есть прекрасный конуса; и следовательно конусъ есть претвѣрствіе части цилиндра.

Итакъ всякій конусъ есть, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Конусы и цилиндры, имѣющіе пуже высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пусть конусы и цилиндры, коихъ основанія суть круги $ABCD$, $EFGH$, а оси KL , MN , и основаній поперечники AC , EG , имѣютъ пуже высоту. Говорю, что какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ конусу EN .

Ибо, еслии не такъ; то будетъ какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ нѣкому шѣлу, или меньшему конуса EN , или большему. Пусть будетъ, во первыхъ, къ меньшему, шѣлу O ; и пусть будетъ

избытокъ конуса EN предъ пѣломъ O равенъ пѣлу Y : посему конусъ EN равенъ пѣламъ O , Y .

6, IV. Въ кругѣ $EFGH$ впиши квадрапъ $EFGH$; по сей квадрапъ больше половины круга. На квадрапѣ $EFGH$ возставъ пирамиду равновысопную конусу: по сѣя пирамида больше половины конуса. Ибо, еспѣли опишемъ около круга $EFGH$ квадрапъ, и еспѣли на семъ квадрапѣ возставимъ пирамиду такожь равновысопную конусу; по пирамида вписаная будепъ половина пирамиды описанной, ибо онѣ сущъ взаимно какъ основанїя.

*6. Но конусъ меньше пирамиды описанной; посему пирамида, коея основанїе квадрапъ $EFGH$ а вершина таже что и конуса, еспѣ больше половины конуса. Раздѣли дуги EF , FG , GH , HE по поламъ въ почкахъ P , Q , R , S ; и пропяни HP , PE , EQ , QF , FR , RG , GS , SH : по каждый изъ треугольниковъ HPE , EQF , FRG , GSH еспѣ больше половины опрѣзка, въ коемъ онѣ помѣщается. Возставъ на каждомъ изъ треугольниковъ HPE , EQF , FRG , GSH пирамиды равновысопныя конусу: по каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины опрѣзка конуса объемлющаго оную. Еспѣли же и оспавшїяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и пропя-

тивать прямые, и на каждомъ изъ произшедшихъ треугольниковъ возсавлять пирамиды равновысопныя конусу; и еспьли сѣ всегда будемъ дѣлать: то оспанутся наконецъ иѣкіе отрѣзки конуса, кои будутъ меньше шѣла Y^* . Пустъ таковыя оспанутся; и пустъ сѣи отрѣзки конуса будутъ шѣ, кои на отрѣзкахъ круга $HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH$. Посему оспальная пирамида, коея основаніе многоугольникъ $HPEQFRGS$ а высота таже чпо и конуса, еспь больше шѣла O . Въ кругѣ $ABCD$ впиши многоугольникъ $DTAUBVCSX$ подобный многоугольнику $HPEQFRGS$ и подобно положенный; и на многоугольникѣ $DTAUBVCSX$ возсавь пирамиду равновысопную конусу AL .

Поелику какъ квадрапъ изъ AC къ квадрапу изъ EG , такъ многоугольникъ $DTAUBVCSX$ къ многоугольнику $HPEQFRGS^*$; *10.VI. и какъ квадрапъ изъ AC къ квадрапу изъ EG , такъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH^*$: по *2. какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ многоугольникъ $DTAUBVCSX$ къ многоугольнику $HPEQFRGS^*$. Но какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ шѣлу O ; а какъ многоугольникъ $DTAUBVCSX$ къ многоугольнику $HPEQFRGS$, такъ пирамида,

коя основаніе многоугольникъ $DTAUBVCSX$ а вершина почка L , къ пирамидѣ, коя основаніе многоугольникъ $HPEQFRGS$ а вершина почка N : посему какъ конусъ AL къ шѣлу O , такъ пирамида, коя основаніе многоугольникъ $DTAUBVCSX$ а вершина почка L , къ пирамидѣ, коя основаніе многоугольникъ $HPEQFRGS$ а вершина почка N : а посему премѣненіемъ, какъ конусъ AL къ пирамидѣ что въ немъ, такъ шѣло O къ пирамидѣ что въ конусѣ EN . Но конусъ AL больше пирамиды что въ немъ; посему шѣло O больше пирамиды что въ конусѣ EN : Оно же и меньше; что нелѣпо. Чего ради не будешь какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ нѣкоему шѣлу меньшему конуса EN .

Подобно докажемъ, что ни какъ кругъ $EFGH$ къ кругу $ABCD$, такъ конусъ EN къ нѣкоему шѣлу меньшему конуса AL .

Говорю же, что и не будетъ какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ нѣкоему шѣлу большему конуса EN . Ибо, еслили возможно, пусть будетъ къ большему, шѣлу O . Посему премѣненіемъ, какъ кругъ $EFGH$ къ кругу $ABCD$, такъ шѣло O къ конусу AL . Но какъ шѣло O къ конусу AL ,

такъ конусъ EN къ нѣкому пѣлу меньшему конуса AL : посему какъ кругъ $EFGH$ къ кругу $ABCD$, такъ конусъ EN къ пѣлу меньшему конуса AL ; что, по доказанному уже, невозможно. Посему не будетъ какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ нѣкому пѣлу большому конуса EN . А доказано, что и ни къ меньшему: Чего ради какъ кругъ $ABCD$ къ кругу $EFGH$, такъ конусъ AL къ конусу EN .

Но какъ конусъ къ конусу, такъ цилиндръ къ цилиндру, ибо каждый каждого есть прекрапный*: посему круги $ABCD$, *10. $EFGH$ суть взаимно какъ цилиндры на нихъ равновысопные конусамъ.

Итакъ конусы и цилиндры, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Подобные конусы и цилиндры суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи поперечниковъ основаній.

Пусть будутъ подобные конусы и цилиндры, коихъ основанія круги $ABCD$, $EFGH$, поперечники же основаній BD , FN , а KL , MN оси конусовъ и цилиндровъ. Говорю, что конусъ, коего основаніе кругъ $ABCD$ а вер-

шина почка L , къ конусу, коего основаніе кругъ $EFGH$ а вершина почка N , имѣеть упроеенное опношеніе прямыя BD къ FN .

Ибо, буде не имѣеть конусъ $ABCDL$ къ конусу $EFGHN$ упроееннаго опношенія прямыя BD къ FN : то будетъ имѣть упроеенное ихъ опношеніе конусъ $ABCDL$ къ нѣкоему тѣлу, или меньшему конуса $EFGHN$, или большему. Пусть, во первыхъ, имѣеть къ меньшему, тѣлу O .

*6,iv. Въ кругъ $EFGH$ впиши квадратъ $EFGH$: то квадратъ $EFGH$ больше половины круга $EFGH$. На квадратъ $EFGH$ возставъ пирамиду, имѣющую ту же вершину что и конусъ: то сія пирамида будетъ больше половины конуса. Раздѣли дуги EF , FG , GH , HE по поламъ въ точкахъ P , Q , R , S ; и протяни EP , PF , FQ , QG , GR , RH , HS , SE : то каждый изъ преугольниковъ EPF , FQG , GRH , HSE будетъ больше половины каждаго изъ опрѣзковъ круга объемлющихъ оныя. На каждомъ изъ преугольниковъ EPF , FQG , GRH , HSE возставъ пирамиды, имѣющія ту же вершину что и конусъ: то каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины опрѣзка конуса объемлющаго оную. Еслили же и оспавшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и протя-

гивать прямые, и на каждомъ изъ произшедшихъ треугольниковъ возсавлять пирамиды, имѣющія ту же вершину что и конусъ; и еспѣли сѣ всегда будемъ дѣлать: то оспанутся наконецъ нѣкіе опрѣзки конуса, кои меньше избытка конуса $EFGHN$ предъ шѣломъ O^* . Пусть таковыя оспанутся; и пусть сѣи опрѣзки конуса, будутъ нѣ, кои на опрѣзкахъ круга EP , PF , FQ , QG , GR , RH , HS , SE . Чего ради оспальная пирамида, коея основаніе многоугольникъ $EPFQGRHS$ а вершина точка N , еспѣ больше шѣла O . Въ кругѣ $ABCD$ впиши многоугольникъ $ATBUCVDX$ подобный многоугольнику $EPFQGRHS$ и подобно положенный; и на многоугольникѣ $ATBUCVDX$ возсавь пирамиду, имѣющую ту же вершину что и конусъ. Пусть будетъ LBT одинъ изъ треугольниковъ содержащихъ пирамиду, коея основаніе многоугольникъ $ATBUCVDX$ а вершина точка L ; и NPF одинъ изъ треугольниковъ содержащихъ пирамиду, коея основаніе многоугольникъ $EPFQGRHS$ а вершина точка N : и пропяти KT , MP . Послику конусъ $ABCDL$ подобенъ конусу $EFGHN$: то какъ BD къ FN , такъ ось KL къ оси MN^* . Но какъ BD къ FN , такъ BK къ FM : посему какъ BK къ FM ,

*I, X.

*спр. 24, XI.

- *11, V. такъ KL къ MN^* ; и премѣненіемъ, какъ BK
- *16, V. къ KL , такъ FM къ MN^* . И послѣду углы BKL , FMN взаимно равны, ибо сущь прямые; и стороны около сихъ равныхъ угловъ сущь пропорціональныя: то треуголь-
- *6, VI. никъ BKL подобенъ треугольнику FMN^* .
Еще же, поелику какъ BK къ KT , такъ FM къ MP ; и сѣи прямые сущь около равныхъ угловъ BKT , FMP , ибо углы BKT , FMP сущь равночасныя чепырехъ прямыхъ угловъ, кои при центрахъ K , M : то, по причинѣ, что стороны около равныхъ угловъ сущь пропорціональныя, треугольникъ BKT
- *6, VI. подобенъ треугольнику FMP^* . Еще же, поелику, по доказанному, какъ BK къ KL , такъ FM къ MN ; но BK равна KT , а FM равна
- *7, VI. PM : то какъ KT къ KL , такъ PM къ MN .
И сѣи пропорціональныя стороны сущь около равныхъ угловъ TKL , PMN , ибо они прямые: итакъ треугольникъ LKT подобенъ треугольнику NMP . И поелику, по подобію треугольниковъ LKB , NMF , какъ LB къ BK , такъ NF къ FM ; а по подобію треугольниковъ BKT , FMP , какъ KB къ BT , такъ MF къ FP : то равнобспно, какъ LB къ BT , такъ
- *22, V. NF къ FP^* . Еще же, поелику, по подобію треугольниковъ LTK , NPM , какъ LT къ TK , такъ NP къ PM ; а по подобію треугольниковъ

$\triangle KBT$, $\triangle PMF$, какъ $\triangle KT$ къ $\triangle TB$, такъ $\triangle MP$ къ $\triangle PF$: по равнобѣспно, какъ $\triangle LT$ къ $\triangle TB$, такъ $\triangle NP$ къ $\triangle PF$. А доказано, что какъ $\triangle TB$ къ $\triangle BL$, такъ $\triangle PF$ къ $\triangle FN$: посему равнобѣспно; какъ $\triangle TL$ къ $\triangle LB$, такъ $\triangle PN$ къ $\triangle NF$. Чего ради спороны преутольниковъ $\triangle LTB$, $\triangle NPF$ суть пропорціональныя: а посему преутольники $\triangle LTB$, $\triangle NPF$ суть равноугольны*, слѣдствен- *5, VI. но и подобны. Ипакъ пирамида, коея основаніе преутольникъ $\triangle BKT$ а вершина почка L , подобна пирамидѣ, коея основаніе преутольникъ $\triangle FMP$ а вершина почка N ; ибо еѣи пирамиды содержатся равномногими подобными плоскостями. Но подобныя пирамиды, имѣющія преутольныя основанія, суть взаимно въ упроенномъ отношеніи сходствен- ныхъ споронъ*: посему пирамида $\triangle BKT$ къ *8. пирамидѣ $\triangle FMPN$ имѣеть упроенное отношеніе прямыхъ BK къ FM . Есѣли же почки A, X, D, V, C, U соединимъ съ почкою K , а почки E, S, H, R, G, Q съ почкою M ; а есѣли на каждомъ изъ произшедшихъ преутольниковъ возспавимъ пирамиды, имѣющія пѣже вершины съ конусами: то подобно докажемъ, что каждая изъ пирамидъ; «кои на многоутольникѣ $\triangle ATBUCVDX$ », къ каждой соотвѣтствующей ей пирамидѣ, «кои на многоутольникѣ $\triangle EPFQGRHS$ », имѣеть

упроенное опношеніе сходспвенной споро-
ны ВК къ сходспвенной FM, по еспъ, прямыя
BD къ FH. Но какъ одинъ предъидущій къ од-
ному послѣдующему, такъ всѣ предъидущіе
12, V. ко всѣмъ послѣдующимъ: посему какъ пи-
рамида BCTL къ пирамидѣ FMPN, такъ
цѣлая пирамида, коея основаніе много-
угольникъ ATBUCVDX а вершина почка L,
къ цѣлой пирамидѣ, коея основаніе много-
угольникъ EPFQGRHS а вершина почка N:
слѣдспвенно и пирамида, коея основаніе
многоугольникъ ATBUCVDX а вершина поч-
ка L, къ пирамидѣ, коея основаніе много-
угольникъ EPFQGRHS а вершина почка N,
имѣетъ упроенное опношеніе прямыя BD къ
11, V. FH. А по положенію, и конусъ, коего осно-
ваніе кругъ ABCD а вершина почка L, къ
плѣлу O имѣетъ упроенное опношеніе пря-
мыя BD къ FH: посему какъ конусъ, коего
основаніе кругъ ABCD а вершина почка L, къ
плѣлу O, такъ пирамида, коея основаніе
многоугольникъ ATBUCVDX а вершина поч-
ка L, къ пирамидѣ, коея основаніе много-
угольникъ EPFQGRHS а вершина почка N:
а посему премѣненіемъ, какъ конусъ, коего
основаніе кругъ ABCD а вершина почка L, къ
пирамидѣ чпо въ немъ, коея основаніе много-
угольникъ ATBUCVDX а вершина почка L,

такъ пѣло O къ пирамидѣ, коея основаніе многоугольникъ $EPFQGRHS$ а вершина почка N . Но сказанный конусъ больше пирамиды чпо въ немъ, ибо оную объемлеть: посему и пѣло O больше пирамиды, коея основаніе многоугольникъ $EPFQGRHS$ а вершина почка N : Оно же и меньше; чпо невозможно. Чего ради конусъ, коего основаніе кругъ $ABCD$ а вершина почка L , къ нѣкому пѣлу, меньшему конуса, коего основаніе кругъ $EFGH$ а вершина почка N , не имѣеть упроеннаго отношенія прямыхъ BD къ FN .

Подобно докажемъ, чпо и конусъ $EFGHN$ къ нѣкому пѣлу меньшему конуса $ABCDL$ не имѣеть упроеннаго отношенія прямыхъ FN къ BD .

Говорю же, чпо конусъ $ABCDL$ къ нѣкому пѣлу и большему конуса $EFGHN$ не имѣеть упроеннаго отношенія прямыхъ BD къ FN . Ибо, буде возможно, пусть имѣеть къ большему, пѣлу O . Ипакъ, предложѣемъ, пѣло O къ конусу $ABCDL$ имѣеть упроенное отношеніе прямыхъ FN къ BD . Но какъ пѣло O къ конусу $ABCDL$, такъ конусъ $EFGHN$ къ нѣкому пѣлу меньшему конуса $ABCDL$: *лем.2. посему конусъ $EFGHN$ къ нѣкому пѣлу, меньшему конуса $ABCDL$, имѣеть упроен-

*11, V. ное отношеніе прямая FN къ BD *; чпо, по доказанному уже, невозможно. Посему конусъ $ABCDL$ къ нѣкому пѣлу, большему конуса $EFGHN$, не имѣеть упрощеннаго отношенія прямая BD къ FN . А доказано, чпо и ни къ меньшему: Чего ради конусъ $ABCDL$ къ самому конусу $EFGHN$ имѣеть упрощенное отношеніе прямая BD къ FN .

Но какъ конусъ къ конусу; такъ цилиндръ къ цилиндру*; ибо цилиндръ, имѣющій тоже основаніе съ конусомъ и высоту равную, есть прекрасный сего конуса, поелику, по доказанному, всякій конусъ есть третья часть цилиндра, имѣющаго тоже основаніе и равную высоту*: чего ради и цилиндръ къ цилиндру имѣеть упрощенное отношеніе прямая BD къ FN .*

Итакъ подобные конусы и цилиндры, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели цилиндръ пересѣченъ плоскостію параллельною къ пропывулежащимъ плоскостямъ: то изъ произшедшихъ цилиндровъ будетъ какъ одинъ къ другому, такъ ось перваго къ оси втораго.

Пусть цилиндръ AD будетъ пересѣченъ параллельною къ пропивилежащимъ плоскостямъ AB , CD плоскостію GH , вспрѣ-чающею его ось EF въ точкѣ K . Говорю, что какъ цилиндръ BG къ цилиндру GD , такъ ось EK къ оси KF .

Продолжи ось EF на обѣ стороны къ точкамъ L , M ; и возьми сколько ниесъ прямыхъ EN , NL равныхъ оси EK ; и сколько ниесъ прямыхъ FO , OM равныхъ оси FK ; и чрезъ точки L , N , O , M проводи плоскости параллельныя къ плоскостямъ AB , CD ; и на плоскостяхъ проходящихъ чрезъ точки L , N , O , M и около центровъ L , N , O , M вообрази круги PQ , RS , TU , VX равные кругамъ AB , CD ; и еще вообрази цилиндры QR , RB , DT , TX .

Поелику оси LN , NE , EK взаимно равны: то цилиндры QR , RB , BG суть взаимно какъ основанія*: по основанія ихъ равны; *и. поему и цилиндры QR , RB , BG взаимно равны. Ипакъ, поелику оси LN , NE , EK взаимно равны; и цилиндры QR , RB , BG взаимно равны; и оси LN , NE , EK суть равнопогѣя цилиндрамъ QR , RB , BG : то сколько кратная естъ ось LK оси EK , столько кратный естъ и цилиндръ QG цилиндра GB . Подобно докажемъ, что сколько кратная естъ ось MK оси KF , столько

крапный есть и цилиндръ XG цилиндра GD . И еслили ось KL равна оси KM , то и цилиндръ QG равенъ цилиндру GX ; и еслили ось KL больше оси KM ; то и цилиндръ QG больше цилиндра GX ; и еслили меньше, то меньше. И такъ изъ имѣющихся чепырехъ величинъ, то есть двухъ осей EK , KF и двухъ цилиндровъ BG , GD , взяты оси EK и цилиндра BG равнокрапныя, ось KL и цилиндръ QG , а оси KF и цилиндра GD равнокрапныя, ось KM и цилиндръ GX ; и доказано, что еслили ось KL больше оси KM , то и цилиндръ QG больше цилиндра GX ; и еслили равна, то равенъ; и еслили меньше, то меньше: чего ради какъ ось EK къ оси KF , такъ цилиндръ BG къ цилиндру GD *. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Конусы и цилиндры, имѣющіе равныя основанія, суть взаимно какъ высоты.

Пусть будутъ цилиндры EB , FD на равныхъ основаніяхъ AB , CD . Говорю, что какъ цилиндръ EB къ цилиндру FD , такъ ось EH къ оси KL .

Продолжи ось KL къ точкѣ N ; и положи прямую LN равную оси GH ; и около оси LN вообрази цилиндръ CM .

Поелику цилиндры EB , CM имѣють ту же высоту; по они суть взаимно какъ основанія*: по основанія взаимно равны; посему *11. и цилиндры EB , CM взаимно равны. И поелику цилиндръ FM пересѣченъ плоскостію CD , параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: по какъ цилиндръ CM къ цилиндру FD , такъ ось LN къ оси KL *. Но *13. цилиндръ CM равенъ цилиндру EB , и ось LN равна оси GH : посему какъ цилиндръ EB къ цилиндру FD , такъ ось GH къ оси KL *. *7 и 11, V.

Но какъ цилиндръ EB къ цилиндру FD , такъ конусъ ABG къ конусу CDK *, ибо *15, V. цилиндры суть прекрасные конусовъ*: чего *10. ради какъ ось GH къ оси KL , такъ конусъ ABG къ конусу CDK , и такъ цилиндръ EB къ цилиндру FD *. ч. и д. н. *11, V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Равныхъ конусовъ и цилиндровъ основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И копорыхъ конусовъ и цилиндровъ, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные.

Пусть будутъ равные конусы и цилиндры, коихъ основанія суть круги $ABCD$, $EFGH$, а ихъ поперечники AC , EG ; и оси

KL , MN , кои суть и высоты конусовъ или цилиндровъ: и дополни цилиндры AO , EP . Говорю, что цилиндры AO , EP основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$, такъ высота MN къ высотѣ KL .

Высота KL , или равна высотѣ MN , или нѣтъ. Пусть будетъ, во первыхъ, равна.

Поскольку цилиндръ AO равенъ цилиндру EP ; а конусы и цилиндры, имѣющіе нуже *и. высоту, суть взаимно какъ основанія*: посему и основаніе $ABCD$ равно основанію $EFGH$. Чего ради основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе $ABCD$ къ основанію $EFGH$, такъ высота MN къ высотѣ KL .

Но пусть не будетъ высота KL равна высотѣ MN ; и пусть MN будетъ большая.

Опиши высоты MN оппими прямую QM равную KL ; и чрезъ точку Q разсѣки цилиндръ EP плоскостію TVS параллельною къ противоположащимъ плоскостямъ круговъ $EFGH$, RP ; и на основаніи $EFGH$ а по высотѣ QM вообрази цилиндръ ES .

Поскольку цилиндръ AO равенъ цилиндру EP , а ES есть другой нѣкій цилиндръ: то* какъ цилиндръ AO къ цилиндру *7.v. ES , такъ цилиндръ EP къ цилиндру ES .

По какъ цилиндръ АО къ цилиндру ES, такъ основаніе ABCD къ основанію EFGH*, ибо цилиндры АО, ES имѣютъ*^и. ту же высоту; а какъ цилиндръ EP къ ES, такъ высота MN къ MQ*, ибо цилиндръ*^и EP пересѣченъ плоскостію TVS параллельною къ противуположащимъ плоскостямъ: посему какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ MQ*. Но*^и, V. высота MQ равна высотѣ KL: посему какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL*. И такъ основа-^{*7} ии, V. нія цилиндровъ АО, EP суть обратно пропорціональны высотамъ.

По пусть основанія цилиндровъ АО, EP будутъ обратно пропорціональны высотамъ; то естъ, какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL. Говорю, что цилиндръ АО равенъ цилиндру EP.

Ибо, сдѣлавъ тоже сиречь, поелику какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL; а высота KL равна высотѣ MQ: то какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ MQ*. Но какъ осно-^{*7} ии, V. ваніе ABCD къ основанію EFGH, такъ цилиндръ АО къ цилиндру ES*, ибо имѣютъ*^и.

пуже высоту; а какъ высота MN къ высотѣ

14. MQ , такъ цилиндръ EP къ цилиндру ES^ :

потому какъ цилиндръ AO къ цилиндру ES ,

11. V . такъ цилиндръ EP къ цилиндру ES^ : а поему

9. V . цилиндръ AO равенъ цилиндру EP^ .

Подобно докажемъ сіе и о конусахъ. Ч. II Д. II.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Въ большемъ изъ двухъ круговъ, находящихся около тогоже центра, вписанъ многоугольникъ, имѣющій равныя стороны и въ чѣтномъ числѣ, не прикасающійся къ меньшему кругу.

Пусть будутъ данныя два круга $ABCD$, $EFGH$ около тогоже центра K . Надлежитъ въ большемъ изъ нихъ, кругъ $ABCD$, вписать многоугольникъ, имѣющій равныя стороны и въ чѣтномъ числѣ, не прикасающійся къ меньшему кругу $EFGH$.

Черезъ центръ K проводи прямую BD ; и отъ точки G проводи, подъ прямыми углами къ BD , прямую GA ; и продолжи оную до C : то
16. III. AC будетъ касательная къ кругу $EFGH^$.
Если полуокружность EAD раздѣлимъ по поламъ, и половину ея по поламъ; и естли сіе всегда будемъ дѣлать: то останется наконецъ нѣкая дуга, меньшая

дуги AD^* . Пусть таковая останется; ^{*1, X.}
и пусть будетъ она LD . Опъ L проводи,
перпендикулярную къ BD , прямую LM ; и
продолжи оную до N ; и пропни LD, DN .

Ипакъ LD равна DN^* . И поелику LN па- ^{*29, III.}
раллельна къ AC ; и AC прикасается ток-
мо къ кругу $EFGH$: то LN не прикасается
къ кругу $EFGH$; а пѣмъ паче прямая
 LD, DN не прикаснётся къ кругу $EFGH$.
Ипакъ, естли въ кругѣ $ABCD$ непрерыв-
но помѣспимъ прямая равная прямой LD :
то вписанъ будетъ многоугольникъ, имѣю-
щій равная спороны и въ чепномъ числѣ,
не прикасающійся къ меньшему кругу $EFGH$,
ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Въ большемъ изъ двухъ шаровъ, нахо-
дящихся около тогоже центра, вписатьъ
многогранникъ, поперхностію своею не
прикасающійся къ меньшему шару.

Вообрази два шара около тогоже центра
 A . Надлежитъ въ большемъ шарѣ впи-
сать многогранникъ, поперхностію своею
не прикасающійся къ меньшему шару.

Пусть шары будутъ пересѣчены чрезъ
центръ какою ниспъ плоскостію: то

- сѣченія будутъ круги. Ибо шаръ произ-
 ходитъ чрезъ обращеніе полукружія на
 п.14, X. неподвижномъ его поперечникѣ; слѣд-
 ственно при всякомъ положеніи сего полу-
 кружія, продолженная его плоскость на-
 сѣчетъ на поверхности шара кругъ.
 Явно, что сей кругъ будетъ наибольшій;
 ибо поперечникъ шара, который есть и
 поперечникъ полукружія, то есть круга,
 есть больше всѣхъ прямыхъ проводимыхъ
 15, III. въ кругѣ или въ шарѣ. Итакъ пусть бу-
 дутъ BCDE кругъ большаго шара, а FGH
 кругъ меньшаго; и проводи круговъ сихъ
 поперечники BD, CE подъ прямыми уг-
 лами одинъ къ другому. И поелику суть
 два круга BCDE, FGH около тогоже центра:
 то въ большемъ изъ нихъ, BCDE, впиши
 многоугольникъ, имѣющій равныя стороны
 и въ четномъ числѣ, не прикасающійся
 16. сторонами къ меньшему кругу FGH; и
 пусть стороны сего многоугольника, кои
 въ четверти BE круга, будутъ BK, KL,
 LM, ME. Протяни KA, и продолжи оную
 до N; отъ точки A возставь, подъ пря-
 мыми углами къ плоскости круга BCDE,
 12, XI. прямую AO, которая пусть встрѣнитъ
 поверхность шара въ точкѣ O. Чрезъ
 AO и каждую изъ прямыхъ BD, KN

проведи плоскости: то общія сѣченія сихъ плоскостей съ поверхноснію шара budouтъ, по доказанію уже, два наибольшіе круга. Пусть budouтъ таковыя; полукружія же, кои на поперечникахъ BD , KN , пусть budouтъ BOD , KON . И поелику OA перпендикулярна къ плоскости круга $BCDE$; то всѣ плоскости, проводимыя чрезъ OA , budouтъ перпендикулярны къ плоскости круга $BCDE$ *: *18, XI. посему полукружія BOD , KON перпендикулярны къ плоскости круга $BCDE$. И поелику полукружія BED , BOD , KON равны, ибо суть на равныхъ поперечникахъ EC , BD , KN : то и чепверши BE , BO , CO взаимно равны. Посему сколько спорошъ помянутого многоугольника помѣщено въ чепверши BE , столько же возможно помѣстити и въ каждой изъ чепвершей BO , CO прямыхъ, равныхъ прямымъ BK , KL , LM ME : помѣсти таковыя, и пусть оныя budouтъ BP , PQ , QR , RO , KS , ST , TU , UO ; и пропши SP , TQ , UR . Опъ точекъ P , S проведи перпендикулярныя прямыя къ плоскости круга $BCDE$ *; то онѣ упадутъ на BD , KN *11, XI. взаимныя сѣченія плоскостей*, ибо плоско- *38, XI. сти полукружій BOD , KON перпендикулярны къ плоскости круга $BCDE$. Пусть упадутъ оныя; и пусть сіи прямыя

будущь PV , SX ; и пропяти VX . Поелику на равныхъ полуокружностяхъ BOD , KON взяты равныя дуги BP , KS , и проведены перпендикулярныя прямыя PV , SX : то PV равна SX , и BV равна KX . (97). Но цѣлая прямая BA равна цѣлой KA ; посему и оспальная VA равна оспальной XA : а посему какъ BV къ VA , такъ KX къ XA : чего ради XV параллельна къ KB . И поелику каждая изъ прямыхъ PV , SX перпендикулярна къ плоскости круга $BCDE$; то PV параллельна къ *8, X¹. SX *: а доказано, что онѣ и равны; чего ради и прямыя VX , SP супъ взаимно равны *33, I. и параллельны*. Ипакъ, поелику XV параллельна къ SP и къ KB , то и SP параллельна къ KB ; но сѣи прямыя соединены прямыми BP , KS : посему четырехугольникъ $KBPS$ естъ на одной плоскости; ибо ежели двѣ прямыя супъ параллельныя, и на каждой изъ нихъ взяты какія нисеть точки, то прямая проптанутая чрезъ сѣи точки естъ на одной плоскости съ параллельными *8, XI. ми*. Потому же и каждый изъ четырехугольниковъ $SPQT$, $TQRU$ естъ на одной плоскости. (98). А и треугольникъ URO естъ на одной *2, XI. плоскости*. Посему, естли вообразимъ прямыя опъ точекъ P , S , Q , T , R , U къ точкѣ A проптанутыя: то соспавленъ

будетъ между дугами BO , KO нѣкій много-
гранникъ, состоящій изъ пирамидъ, коихъ
основанія суть чепыреугольники $KBPS$,
 $SPQT$, $TQRU$ и треугольникъ URO , а общая
вершина почка A . Естьлижъ и на каждой
изъ спорозъ KL , LM , ME сооримъ тоже,
какъ и на KB ; и еспли сѣ же сооримъ
въ прочихъ прехъ чепверсияхъ полушарія, и
еще въ осипальномъ полушаріи: то со-
спавленъ будетъ нѣкій многогранникъ, впи-
санный въ большемъ шарѣ, состоящій
изъ пирамидъ, коихъ основанія суть ска-
занные чепыреугольники и треугольникъ
 URO , и плоскости соотвѣспвующія имъ
въ прочихъ часпияхъ шара; а общая вер-
шина почка A .

Говорю еще, что помянутый многогран-
никъ поверхспію своею не прикасается
къ меньшему шару, на коемъ кругъ FGH .
Опъ почки A проведи, перпендикулярную
къ плоскости чепыреугольника $KBPS$, пря-
мую AU^* , которая нуспъ вспрѣшипъ сѣю *и, XI.
плоскостъ въ почкѣ Y ; и пропiani BY , YK .

Поелику AU перпендикулярна къ плоско-
сти $KBPS$; то AU перпендикулярна ко всѣмъ
прямымъ съ нею вспрѣчающимся и лежа-
щимъ на сей плоскости*: поему AU пер- оп. 3, XI.
пендикулярна къ каждой изъ прямыхъ BY , YK .

47. I. Но поскольку АВ равна АК; по квадратамъ изъ АВ равенъ квадрату изъ АК. Но квадрату изъ АВ равны квадраты изъ АУ, УВ, ибо уголъ при У есть прямой; а квадрату изъ АК равны квадраты изъ АУ, УК. Посему квадраты изъ АУ, УВ равны квадратамъ изъ АУ, УК. Опшими обще квадраты изъ АУ; посему оспальной квадратъ изъ ВУ равенъ оспальному изъ УК; а посему и ВУ равна УК. Подобно докажется, что каждая изъ прямыхъ; пропшннуемыхъ опъ почки У до почекъ Р, S, равна каждой изъ прямыхъ ВУ, УК. Ипакъ кругъ, написанный изъ центра У разспоянѣемъ копорой ниеситъ изъ прямыхъ УВ, УК, пройдетъ и чрезъ почки Р, S; и чепыреугольникъ KBPS будетъ въ кругѣ. И поскольку KB больше XV, а XV равна SP; по KB больше и SP. Но KB равна каждой изъ прямыхъ KS, BP; посему и каждая изъ прямыхъ BP, KS больше SP. И поскольку чепыреугольникъ KBPS вписанъ въ кругѣ, и прямая KB, BP, KS равны, а прямая PS меньше, и ВУ есть прямая опъ центра: по квадраты изъ KB есть больше нежели двукрапный квадратъ изъ ВУ (99). Опъ почки К проводи, перпендикулярную къ BD, прямую KZ. Поскольку BD меньше нежели двукрапная DZ; и какъ DB къ DZ, такъ прямоугольникъ

въ DB , BZ къ прямоугольнику въ DZ , ZB : *1, VI.
 посему, естли изъ BZ написаъ квадрапъ,
 и на ZD дополнитъ параллелограммъ, то
 будетъ прямоугольникъ въ DB , BZ меньше
 двукрапнаго прямоугольника въ DZ , ZB .
 Пропяни еще KD : Ипакъ прямоугольникъ
 въ DB , BZ равенъ квадрапу изъ KB ; и прямо- *слѣ: 8, и
 угольникъ въ DZ , ZB равенъ квадрапу изъ KZ : 17, VI.
 посему квадрапъ изъ KB меньше двукрапнаго
 квадрапа изъ KZ . Но квадрапъ изъ KB боль-
 ше двукрапнаго квадрапа изъ BY ; посему
 и квадрапъ изъ KZ больше квадрапа изъ
 BY . И поелику BA равна KA ; по квадрапъ
 изъ BA равенъ квадрапу изъ KA . Но квадрапу
 изъ BA равны квадрапы изъ BY , YA ; а квад-
 рапу изъ KA равны квадрапы изъ KZ ,
 ZA : посему квадрапы изъ BY , YA равны
 квадрапамъ изъ KZ , ZA : Но въ нихъ квад-
 рапъ изъ KZ больше квадрапа изъ BY ; по-
 сему оспальной квадрапъ изъ AZ меньше
 оспального изъ YA ; а посему AY больше
 AZ : слѣдственно AU гораздо больше AG . Но
 AU естъ перпендикулярная опъ ценпра
 къ одному изъ основаній многогранника
 проведенная, а AG прямая опъ ценпра мень-
 шаго шара до поверхности его: чего ради
 топъ многогранникъ не прикасается къ
 поверхности шара меньшаго.

ИНАЧЕ. Мы еще докажемъ иначе и короче, что AY больше AG .

Отъ точки G проводи, подъ прямыми углами къ AG , прямую GL ; и пропни AL .

Еслили раздѣлимъ дугу EB по поламъ; и половину ея раздѣлимъ по поламъ; и еслили сѣе всегда будемъ дѣлать: то останется наконецъ пѣкая дуга, конюгя будеть меньше дуги круга $BCDE$, спигаемой прямою равною GL *. Пусть таковая останется; и пусть она будеть дуга KB : посему прямая KB будеть меньше прямой GL . Но послику чепыреугольникъ $BKSP$ вписанъ въ кругъ, и прямыя PB , BK , KS равны, а PS меньше: по уголъ BYK естъ шупой (100); посему прямая BK больше BY *: Но GL больше BK ; а посему GL и гораздо больше BY ; слѣдсвенно и квадрапъ изъ GL больше квадрапа изъ BY . И послику AL равна AB ; по квадрапъ изъ AL равенъ квадрапу изъ AB . Но квадрапу изъ AL равны квадрапы изъ AG , GL ; а квадрапу изъ AB равны квадрапы изъ BY , YA : посему квадрапы изъ AG , GL равны квадрапамъ изъ BY , YA . Но квадрапъ изъ BY меньше квадрапа изъ GL ; чего ради квадрапъ

изъ $УА$ больше квадрата изъ $АГ$: а посему и прямая $АУ$ больше прямой $АГ$. (101).

Итакъ въ большемъ изъ двухъ шаровъ, около тогоже центра находящихся, вписанъ многогранникъ, поверхностью своею не касающійся къ меньшему шару.

СЛѢДСТВІЕ. Ежели вписанъ будетъ въ другомъ шарѣ многогранникъ, подобный вписанному въ шарѣ $BCDE$: то многогранникъ, вписанный въ шарѣ $BCDE$, къ многограннику, вписанному въ другомъ шарѣ, будетъ имѣть упроеенное отношеніе поперечника шара $BCDE$ къ поперечнику другаго шара. Ибо, раздѣливъ сіи многогранники на равномногія и равнорасположенныя пирамиды, произойдуть пирамиды подобныя. Но подобныя пирамиды суть взаимно въ упроеенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*: посему пирамида, коея основаніе чепыреугольникъ $KBPS$ а вершина точка A , къ соотвѣтствующей пирамидѣ въ другомъ шарѣ имѣетъ упроеенное отношеніе сходственной стороны къ сходственной сторонѣ, то есть, упроеенное отношеніе прямой линіи AB отъ центра шара, что около точки A , къ прямой отъ центра другаго шара. Подобно и каждая изъ

*слѣд:8.

прочихъ пирамидъ, содержащихся въ шарѣ, коего центръ A , къ каждой изъ пирамидъ, имъ соотвѣствующихъ въ другомъ шарѣ, будетъ имѣть упроенное отношеніе прямая AB къ прямой отъ центра другого шара. Но поелику какъ одинъ предъидущій къ одному послѣдующему, такъ всѣ предъидущіе ко всѣмъ послѣдующимъ: посему цѣлый многогранникъ въ шарѣ, коего центръ A , къ цѣлому многограннику, что въ другомъ шарѣ, имѣетъ упроенное отношеніе прямая AB къ прямой отъ центра другого шара, то есть упроенное отношеніе поперечника BD къ поперечнику другого шара. Ч. и д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Шары суть взаимно въ упроенномъ отношеніи поперечниковъ.

Вообрази шары ABC , DEF , коихъ поперечники BC , EF . Говорю, что шаръ ABC къ шару DEF имѣетъ упроенное отношеніе поперечника BC къ EF .

Ибо, буде шаръ ABC къ шару DEF не имѣетъ упроеннаго отношенія BC къ EF ; то шаръ ABC къ нѣкому шару, или меньшему нежели DEF , или большему, будетъ

имѣеть упроенное отношеніе BC къ EF .

Пусть, вопервыхъ, имѣетъ къ меньшему, шару GHK .

Вообрази, что шары DEF , GHK суть около тогоже центра; и въ большемъ шарѣ DEF впиши многогранникъ, своею поверхностію не прикасающійся къ меньшему шару GHK *; и впиши въ шарѣ ABC многогранникъ подобный многограннику, что въ шарѣ DEF .

Итакъ многогранникъ въ шарѣ ABC къ многограннику въ шарѣ DEF имѣетъ упроенное отношеніе поперечника BC къ EF *. Но и шаръ ABC къ шару GHK имѣетъ упроенное отношеніе BC къ EF : посему какъ шаръ ABC къ шару GHK , такъ многогранникъ въ шарѣ ABC къ многограннику въ шарѣ DEF *; а посему, премѣненіемъ, какъ шаръ ABC къ многограннику что въ немъ, такъ шаръ GHK къ многограннику въ шарѣ DEF . Но шаръ ABC больше многогранника что въ немъ: посему и шаръ GHK больше многогранника что въ шарѣ DEF ; онъ же и меньше многогранника, ибо онымъ объемлется: что невозможно. Чего ради шаръ ABC къ нѣкому шару меньшему, нежели DEF , не имѣетъ упроеннаго отношенія поперечника BC къ EF .

Подобно докажемъ, что и шаръ DEF къ нѣкому шару меньшему, нежели ABC, не имѣетъ упрощеннаго отношенія поперечника EF къ BC.

Говорю же, что шаръ ABC и къ нѣкому шару большому, нежели DEF, не имѣетъ упрощеннаго отношенія поперечника BC къ EF.

Ибо, буде возможно, пусть имѣетъ къ большому, шару LMN. Посему, предложеньемъ, шаръ LMN къ шару ABC имѣетъ упрощенное отношеніе поперечника EF къ BC*. Но какъ шаръ LMN къ шару ABC, такъ шаръ DEF къ нѣкому шару меньшему нежели ABC, по доказанному уже, ибо шаръ LMN больше шара DEF: посему и шаръ DEF къ меньшему шару, нежели ABC, имѣетъ упрощенное отношеніе поперечника EF къ BC*; что, по доказанному уже, невозможно. Посему шаръ ABC къ нѣкому шару большому, нежели DEF, не имѣетъ упрощеннаго отношенія поперечника BC къ EF. А доказано, что и онъ къ меньшему: Ипакъ шаръ ABC имѣетъ къ самому шару DEF упрощенное отношеніе поперечника BC къ EF. ч. и д. н. (102).

К О Н Е Ц Ъ

ВОСЬМИ КНИГАМЪ ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЬ.

ПРИМѢЧАНІЯ
И
ПРИБАВЛЕНІЯ
КЪ ВОСЬМИ КНИГАМЪ
ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ,
содержащимъ въ себѣ
ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ.



ПРИМѢЧАНІЯ И ПРИБАВЛЕНІЯ

КЪ КНИГѢ ПЕРВОЙ.

(1) Сіе опредѣленіе естъ слѣдствіе предъидущаго.

(2) Прямую линію опредѣляютъ различными образами. Платонъ говоритъ : прямая линія естъ та, копорой края заслоняются посредствующими точками. Сіе опредѣленіе въ сущности не разнится отъ Эвклидова. Архимедъ въ книгѣ de Sphaera et Cyliandro принимаетъ за начало, что прямая естъ крапчайшая изъ линій пѣже концы имѣющихъ (*). Новые Геометры обыкновенно употребляютъ сіе начало какъ опредѣленіе. Но Даламбертъ пропиву онаго не безъ основанія возражаетъ : откуда извѣстно, что отъ одной точки до другой естъ токмо одинъ путь крапчайшій ? Для чего не могли бы быть многіе, всѣ различные, всѣ равные и всѣ крапчайшіе ? (**). Въ слѣдствіе сего Гурьевъ отвергаетъ предъидущее опредѣленіе прямой линіи, а принимаетъ слѣдующее : Когда двѣ точки одной линіи лежатъ на двухъ точкахъ другой, дѣлаютъ, что и самыя

(*) Archimedis opera, per J. Barrow. 1675. Сіе изданіе почитается лучшимъ.

(**) Mélanges de littérature, etc. T. V. pag. 205.

линии лежатъ одна на другой; по каждая изъ оныя называется прямою (*). Не входя въ разбирательство обоюдности сего опредѣленія, замѣтимъ только, что неправильно полагаютъ, якобы таково было первоначально и Эвклидово опредѣленіе, но въ послѣдствіи худыми переписчиками и полковапелями перемѣнено. Ибо для чего бы Эвклиду въ предложеніи 4мъ книги I говорить: *А буде, по совмѣстности в сѣ в а с сѣ в ф, основаніе в с не совмѣстится сѣ основаніемъ е ф*. Для чего бы также ему полагать 12ю аксіому? и проч.

(3) Геронъ говоритъ: плоскость есть такая поверхность, что прямая лежащая на какихъ бы то ни было двухъ ея точкахъ, лежитъ и вся на ней. Сіе опредѣленіе принимается почти всѣми новыми Геометрами. Однакожь нельзя не согласиться, что Эвклидово показываетъ гораздо ощутительнѣе нежели Героново, что плоская поверхность есть не между поверхностями, что прямая линия между линиями. Припомъ изъ Геронова опредѣленія непосредственно слѣдуетъ, или лучше сказать, въ немъ предполагается предложеніе 1е книги XI, которое при опредѣленіи Эвклидовомъ должно быть доказано, а сіе одно даетъ уже послѣднему преимущество. Ибо чѣмъ меньшими свойствами что внести опредѣляется (изъ коихъ однакожь могутъ выведены быть всѣ прочія), тѣмъ опредѣленіе лучше. Изъ сего видно, что Роберту Симсону не слѣдовало замѣнять Эвклидова опредѣленія Героновымъ, тѣмъ паче. что

(*) Опытъ о усовершенствованіи Елементовъ Геометріи, стр. 205. Основанія Геометріи: изд. 1811 г. стр. 3.

онъ опредѣленіе прямой линіи оставилъ безъ перемѣны (*).

(4) Здѣсь можно прибавить: а оныя равныя прямыя радіусами или полупоперечниками именуются. Эвклидъ называетъ радіусъ прямою отъ центра.

(5) Последняя часть сего опредѣленія есть слѣдствіе изъ онаго, которое можно доказать такъ:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

Кругъ дѣлится поперечникомъ по поламъ.

Пусть будетъ кругъ ABCD (Фиг. 2.), а E центръ его, и AEC поперечникъ. Говорю, что кругъ ABCD дѣлится поперечникомъ AC по поламъ.

Ибо, еслили помѣстимъ сего круга часть ABC, не перемѣняя AC, на часть ABC, то линия ADC совмѣстится съ линіею ABC. Буде же не такъ; то она упадетъ или внутрь, или вѣ. или часпю внутрь, а часпю вѣ ABC. Пусть упадетъ вѣ, какъ AEC. Пропяни какъ внесиъ прямую EBF.

Поселику AEC есть часть круга, то AE равна EF*, *о. 1. 15. ибо суть прямыя отъ центра. Поэтому же AE равна и EB. Инакъ каждая изъ прямыхъ FE, BE равна AE. А равныя пому же, суть и взаимно равны*; посему EF *акс. 1. равна EB. боъшая меньшей, что невозможно*. Чего *акс. 1. ради ADC не упадетъ вѣ ABC. Подобно докажемъ, что она не упадетъ и внутрь, и ни часпю внутрь а часпю вѣ: слѣдственно ADC совмѣстится съ ABC.

Инакъ кругъ дѣлится поперечникомъ по поламъ. ч. и д. н.

(*) Euclidis Elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, etc. a Roberto Simson. Glasguae. 1756.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

Двѣ прямыя линіи не могутъ имѣть общен части.

Ибо, еслии возможно, пусть будутъ двѣ прямыя АВ, АС, (фиг. 3). имѣющія общую часть АД. Возьми на ней какую ниесъ точку А; и изъ центра С,

пр. 3. разспояніемъ DA напиши кругъ АЕВГ, который прямыя АВ, АС пусть еще пересѣчетъ въ В, С.

опр. 17. Поелику АДВ поперечникъ, то АЕВ есть полу-

опр. 18. кружіе. Еще же; поелику АДС поперечникъ, то

А и АЕС есть полукружіе. Посему АЕВ равно АЕС: что нелѣпо.

Итакъ двѣ прямыя линіи, и проч. ч. и д. н.

(6) Все заключающееся между знаками « » прибавлено, частію для пополненія, а частію для поясненія.

(7) Кеспнеръ объясняетъ предмѣтъ всѣхъ сихъ требованій слѣдующимъ образомъ (*): « Точка есть « предѣлъ линіи, а посему и безъ всякаго пропяхенія; слѣдственно не имѣетъ она ни частей, ни « пропяхенія, и множество одна подлѣ другой « положенныхъ точекъ не составляютъ линіи. Но « поелику линію вездѣ можно кончить по произ- « воленію; то вездѣ въ цѣломъ ея пропяхеніи можно « имѣть точки. И какъ здѣсь дѣло идетъ о воз- « можности; то все равно сказать, что линія « вездѣ можетъ имѣть точки, или что она вездѣ ихъ « имѣетъ. Итакъ можно вездѣ на линіи приписывать

(*) Начальныя основанія Математики А. Г. Кеспнера ч. II стран. 3 и 4.

«почки. Но нѣтъ разности въ томъ, вездѣ ли на
«линіи принимаютъ почки, или представляешь себѣ
«одну только почку, которая мало по малу пере-
«ходила въ разныя мѣста линіи, ибо одна почка
«ни чѣмъ не разсписуется опъ другой почки. Чего
«ради и говорятъ, что линія происходитъ опъ
«движенія почки. Сіе не значитъ однакожь, будто
«линія состояла изъ почекъ лежащихъ одна подлѣ
«другой; ибо не можно представить себѣ движенія,
«не полагая мѣста занимаемаго почкою теперь, и
«мѣста занимаемаго послѣ, въ нѣкоторомъ раз-
«стояніи. Сіе разстояніе есть уже линія; и боль-
«шая линія состоитъ изъ меньшихъ, а не изъ
«почекъ».

Что сказано о линіи въ отношеніи почки, то
самое можно сказать о поверхности въ отноше-
ніи линіи.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

(8) Всѣ прямые углы равны взаимно.

Пусть будутъ углы ABC , DEF (фиг. 3) прямые.
Говорю, что уголъ ABC равенъ углу DEF .

Ибо, еслили углы ABC , DEF не равны; то одинъ
изъ нихъ больший: пусть ABC будетъ больший.

Помѣсти уголъ DEF на ABC , и положи почку

Е на B , и прямую ED на BA ; то, поскольку уголъ

ABC больше угла DEF , прямая EF упадетъ вну-

три угла ABC . Пусть упадетъ, какъ BG ; посему

уголъ ABG равенъ углу DEF . Продолжи впрямъ съ

BC прямую BN^* , и впрямъ съ BG прямую BK^* . *пр.2.

Поскольку уголъ ABG прямой, то онъ равенъ углу

414 ПРИМѢЧАНІЯ И ПРИБАВЛЕНІЯ

опр.10. $\Delta BК$. Потому же и уголъ ΔBC равенъ углу $\Delta BИ$. Но уголъ ΔBC , то есть $\Delta BИ$ больше угла ΔBC ; следовательно онъ больше и угла ΔBK , меньшій большаго; что нелѣпо. Чего ради углы ΔBC , ΔEF не неравны; следовательно равны.

Итакъ всѣ прямые углы, и проч. ч. и д. н.

(9) Слѣдствіе. Отсюда явствуется, что если бы треугольника всѣ три стороны взаимно равны; то и всѣ три угла взаимно равны.

(10) Слѣдствіе. Отсюда явствуется, что если бы треугольника всѣ три угла взаимно равны; то и всѣ три стороны взаимно равны.

(11) Евклидъ доказываетъ сіе предложеніе поемно въ томъ случаѣ, когда одна изъ точекъ, отъ коихъ проводятся прямые, будетъ внѣ угла составляемаго проведенными прямыми отъ другой точки. Если же будетъ внутри, то Клавій (*), Р. Симсонъ и другіе полководатели доказываютъ такъ:

Но пусть будетъ вершина одного, угла ΔDB .
пр.1. внутри другаго ΔCB . Протяни CD^ ; и продолжи
пр.2. AC , AD къ точкамъ E , F^ .

Поскольку AC равна AD , и онѣ продолжены къ E , F ;
5. то уголъ ΔECD равенъ углу ΔFDC^ ; посему уголъ ΔFDC больше угла ΔBCD ; а тѣмъ паче уголъ ΔDCB больше угла ΔDCB . Еще же, поскольку CB равна BD ;

(*) Euclidis elementorum libri XV, auctore Cristophoro Clavio S.J. 1654.

то уголъ $\angle CDB$ равенъ углу $\angle DCB^*$; а по доказан-^{*5.}
ному гораздо больше: что невозможно.

Если же точка D будетъ на BC ; то предло-
женіе само собою явствуетъ*.

^{*а. 9.}

Пейрардъ думаетъ (*), что вышепредложен-
наго случая нѣтъ нужды доказывать, потому что
онъ доказанъ самимъ Евклидомъ въ пред: 21мъ. Но
сего принявъ нельзя: ибо 21е предложеніе чрезъ
посредство 11го и нѣкоторыхъ другихъ, само осно-
вывается на 8мъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ D.

(12) Если при какой нисетъ прямой и при точкѣ
на ней, двѣ прямыя, нележащія по ту же сторону,
дѣлаютъ противоположные углы взаимно равные;
то сіи двѣ прямыя будутъ взаимно впрямъ.

Пусть при какой нисетъ прямой AB (фиг. пр. 15),
и при точкѣ на ней E , двѣ прямыя EC , ED , не-
лежащія по ту же сторону, дѣлаютъ пропиви-
положные углы $\angle AEC$, $\angle DEB$ взаимно равные. Говорю,
что CE будетъ впрямъ съ ED .

Поскольку прямая CE пересѣчена на прямую AEB ;
то углы $\angle AEC$, $\angle CEB$ равны двумъ прямымъ*. Но ^{*13.}
уголъ $\angle AEC$ равенъ, по положенію, углу $\angle BED$; по-
тому и углы $\angle CEB$, $\angle BED$ равны двумъ прямымъ: и
они суть смѣжные. Но если при какой нисетъ
прямой и при точкѣ на ней, двѣ прямыя, не-
лежащія по ту же сторону, дѣлаютъ смѣжные

(*) Les Elémens de Géométrie d'Euclide, par F. Peyrard. 1804.
Fig. 560, 561.

углы , равные двумъ прямымъ ; по сіи двѣ прямыя
 14. супъ взаимно въпрямъ: посему CE есть въпрямъ
 съ ED .

Итакъ , ежели при какой ни есть , и проч. ч. и д. н.

(13) Слѣдствіе. Отсюда явствуется , что отъ
 почки взятой по которую ни есть сторону прямой
 линіи , не можно провести болѣе одной къ ней
 перпендикулярной ; ибо въ противномъ случаѣ былъ
 бы треугольника внѣшній уголъ равенъ внупрен-
 нему противуположному ; что невозможно.

(14) Слѣдствіе. Отсюда явствуется , что еслии
 треугольникъ имѣетъ одинъ уголъ прямой , или
 одинъ тупой ; то прочіе супъ острые.

(15) Здѣсь могутъ быти при случая : то есть ,
 прямая EG или упадетъ надъ прямою EF , какъ у
 Эвклида , или по самой EF , или подъ оною. Чтобы
 всѣ случаи заключить въ одномъ , Р. Симсонъ
 прежде словъ : *Поелику уголъ ABC и проч. по-
 мѣщаетъ сіи: Изъ прямыхъ DE, DF пусть будетъ
 DE не больше прямой DF .*

(16) По принятому порядку всѣми почти из-
 дателями Эвклида , здѣсь слѣдовало бы доказать
 12ю аксіому (допусшивъ , что она пребудетъ до-
 казательства) : но поелику все , что доселѣ ни
 предложено Геометрами о семъ предмѣтѣ , есть
 болѣе или менѣе несовершенно , то здѣсь довольно
 будетъ сказать , что аксіома 12я еще не доказана.
 Впрочемъ , желающіе имѣти понятіе , сколько дѣла
 сдѣлано усилій , и сколько оныя успѣшны были .
 могутъ читать о семъ : въ *Mémoires de l'Académie*

de Berlin, на 1788 и 1789 годы, также въ сочиненіяхъ Лежандра (*), Бертранда (**) и Гурьева. Доказательство Россійскаго Геометра есть лучшее.

(17) Слѣдствие. 1. Посему всѣ при угла всякаго треугольника равны всѣмъ премо угламъ другаго треугольника. Ипакъ, еспли два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго, или вмѣстѣ, или каждый каждому; то и оспальной равенъ оспальному.

Слѣдствие 2. Равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ каждый изъ оспрыхъ угловъ есть половина прямого.

Слѣдствие 3. Равноспоронныхъ треугольниковъ каждый уголъ есть премо двухъ угловъ прямыхъ, или двѣ премо прямого.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ. Б.

Прямой уголъ раздѣлишь на три равныя части. Пусть будетъ прямой уголъ ABC (фиг. 6). Надлежитъ уголъ ABC раздѣлишь на три равныя части.

Возьми на BC какую нисъ точку C; и на опредѣленной прямой BC соспавь равноспоронный треугольникъ BDC*; и раздѣли уголъ DBC по поламъ*1. прямою BE*. Говорю, что прямыми BD, BE уголъ*10. прямой ABC раздѣленъ на три равныя части.

Поелику уголъ DBC есть двѣ премо прямого*; *сл 3, (17)

(*) *Elémens de Géométrie, avec des notes; par A. M. Legendre.*
И еще: *Nouvelle théorie des Parallèles, avec un Appendice.*

(**) *Nouveau développement de la partie élémentaire des Mathématiques, par Bertrand, T. II.*

и уголъ DVC раздѣленъ по поламъ: по каждый изъ угловъ CVE , EVD есть прѣсть прямого, по есть угла ABC ; слѣдственно и остальной уголъ BEA есть прѣсть прямого.

Итакъ прямой уголъ ABC раздѣленъ на три равныя угла прямыми BE , BD . ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ F.

Всѣ углы внутри всякой прямолинейной фигуры, вмѣстѣ съ чепырьмя прямыми, равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько въ фигурѣ споронъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ (фиг. 7) прямолинейная фигура. Говорю, что всѣ углы внутри фигуры $ABCDE$, вмѣстѣ съ чепырьмя прямыми, равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько въ $ABCDE$ споронъ.

Внутри фигуры $ABCDE$ возьми какую нисешь точку F ; и пропши FA , FB , FC , FD , FE .

Итакъ фигура $ABCDE$ раздѣлена на столько преугольниковъ, сколько въ ней споронъ. И поелику всякаго преугольника всѣ три угла равны двумъ *32. прямымъ*: по каждого изъ преугольниковъ ABF , FBC , CFD , DFE , EFA всѣ три угла равны двумъ прямымъ; а посему всѣ углы сихъ преугольниковъ равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько всѣхъ преугольниковъ. Треугольниковъ же столько, сколько споронъ фигуры; посему всѣ углы сихъ преугольниковъ равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько споронъ въ фигурѣ $ABCDE$. Но сіи углы преугольниковъ равны угламъ внутри фигуры, вмѣстѣ съ углами около точки F ,

которая есть общая вершина сихъ преугольниковъ; углы же около почки F равны чепыремъ прямымъ*; *слѣд. 15. чего ради всѣ углы внутри фигуры $ABCDE$, вмѣстѣ съ чепырями прямыми, равны сполько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько сторонъ въ фигурѣ $ABCDE$. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

(18) Всякій чепыреугольникъ, имѣющій пропивилежащія стороны взаимно равныя, есть параллелограммъ.

Пусть будетъ чепыреугольникъ AD (ф. пр. 33), имѣющій пропивилежащія стороны взаимно равныя, то есть AC равную DB , а AB равную DC . Говорю, что AD есть параллелограммъ, то есть, что AC параллельна къ DB , а AB параллельна къ DC .

Пропизи BC .

Поелику AC равна DB , а BC общая, то двѣ прямыя AC , CB равны двумъ прямымъ DB , BC ; и основаніе AB равно основанію DC : посему уголъ ACB равенъ углу CBD *; они же суть и накосълежащіе: чего ради AC параллельна къ DB *. Подобно *27. докажемъ, что и AB параллельна къ CD . Слѣдственно $ABDC$ есть параллелограммъ*. *опр. 35.

Ипакъ всякій чепыреугольникъ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что квадраты, прямоугольники, ромбы и ромбоиды суть параллелограммы.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Н.

Всякій чепыреугольникъ, имѣющій пропивилежащіе углы взаимно равные, есть параллелограммъ.

* *

Пусть будетъ четырехугольникъ $ABCD$ (ф. 8), имѣющій противоположащія углы взаимно равные, то есть уголъ A равный углу C , а уголъ B углу D . Говорю, что четырехугольникъ $ABCD$ есть параллелограммъ, то есть, что AB параллельна къ DC , а AD параллельна къ BC .

Поскольку уголъ A равенъ углу C , а уголъ D равенъ углу B ; то два угла A, D , равны двумъ угламъ B, C . Но всѣ четыре угла A, D, B, C равны четыремъ угламъ прямымъ: посему два угла A, D равны двумъ угламъ прямымъ; слѣдственно AB *28 параллельна къ DC *. Подобно докажемъ, что и AD параллельна къ BC . Слѣдственно $ABCD$ есть

опр. 36. параллелограммъ.

Итакъ всякій четырехугольникъ, и проч. ч. и д. и.

Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что четырехугольникъ, имѣющій всѣ четыре угла прямые, есть параллелограммъ.

(19) Клавій, Р. Симсонъ и другіе прибавляютъ къ доказанному Евклидомъ случаю еще слѣдующіе два:

Пусть параллелограммовъ противоположащія основанія стороны имѣютъ общую точку D , (ф. 9); то сходно съ первымъ случаемъ докажемъ, что треугольникъ ABD равенъ треугольнику DCE . Придай обще треугольникъ DBC : посему параллелограммъ AC равенъ параллелограмму BE .

Пусть еще параллелограммовъ противоположащія основанія стороны имѣютъ общую часть ED (ф. 10); то сходно съ первымъ же случаемъ докажемъ, что AD равна EF . Опними обще ED : посему оспальная AE равна оспальной DF ; и треугольникъ ABE *8. равенъ треугольнику DCF *. Придай обще тра-

пецію BCDE; посему параллелограммъ AC равенъ параллелограмму BF.

(20) Слѣдствіе. Такъ же докажется, что если параллелограммъ и треугольникъ сплота на равныхъ основаніяхъ и между тѣмиже параллельными; то параллелограммъ есть двукратный треугольника.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ К.

(21) Изъ равныхъ прямыхъ квадраты суть равные: И равные квадраты суть изъ равныхъ прямыхъ.

Пусть будутъ равныя прямая АВ, CD (ф. 11). Говорю, что квадраты изъ АВ, CD суть равные.

Изъ АВ, CD напизи квадраты АЕ, СГ*; и про- *46. шани FB, HD.

Поелику АВ равна АЕ*, и CD равна СГ*; но АВ *опр.30. равна CD: посему и АЕ равна СГ. Ипакъ, поелику дѣи прямая АВ, АЕ равны двумъ прямымъ CD, СГ; и уголъ А равенъ углу С*: посему и основаніе ра- *акс.10. вно основанію; и треугольникъ ABF равенъ треугольнику CDH*. Но треугольника ABF есть дву- *4. кратный квадратъ АЕ*, а треугольника CDH *34. двукратный квадратъ СГ: посему квадратъ АЕ равенъ квадрату СГ*. *акс.6.

Но пусть будетъ квадратъ АЕ, (ф. 12) то есть изъ прямой АВ, равенъ квадрату AC, то есть изъ прямой AD. Говорю, что и АВ равна AD.

Помѣсти квадраты АЕ и AC при углѣ А, пакъ чтобы FA была впрямъ съ AD; то и АВ будетъ впрямъ съ AG*. Пропяни поперечники FB, GD и *D. прямая FG, BD.

Поелику квадратъ AE равенъ квадрату AD ; то и половина равна половинѣ, то есть треугольникъ ABE треугольнику ACD . Придай обще треугольникъ BAD ; посему цѣлый треугольникъ FBD равенъ цѣлому треугольнику GBD : и они суть на томъ же основаніи BD . А равные треугольники, стоящие на томъ же основаніи, суть между сѣбѣ параллельныи^{*}; посему DB параллельна къ GF . Поелику же прямоугольный треугольникъ AFB есть равнобедренный; то уголъ AFB есть половина прямого^{*}. Поэтому же и уголъ ADG есть половина прямого. Чего ради уголъ DFB равенъ углу FDC ; они же суть и наклоняющіе:
^{*39.} посему FB параллельна къ GD ^{*}. А доказано, что и GF параллельна къ DB ; посему четырехугольникъ ^{*опр.36} $FBDG$ есть параллелограммъ^{*}; а посему FB равна ^{*34.} GD ^{*}. И поелику уголъ AFB равенъ углу ADG , по доказанному; и прямой уголъ FAB равенъ прямому ^{*акс.10.} DAG ^{*}; то треугольники FAB , ACD имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому; они же имѣютъ и одну сторону равную одной сторонѣ, кои противулежатъ равнымъ угламъ, то есть FB равную GD : посему и прочія двѣ стороны равны прочимъ двумъ сторонамъ, каждая каж-
^{*26.} дой^{*}: а посему AB равна AD .

Итакъ изъ равныхъ прямыхъ, и проч. ч. и д. н.

КЪ КНИГѢ ВТОРОЙ.

(22) Слѣдствіе. Ошпуда же явствуетъ, что еслили прямая линия разсѣчена по поламъ; то квадратъ изъ цѣлой равенъ четырежды взятому квадрату изъ половины.

(2) Сіе предложеніе естъ одинъ случай слѣдующаго :

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

Во всякомъ преугольникѣ квадрапъ изъ стороны, пропиwулежащей оспрому углу, меньше квадраповъ изъ прочихъ двухъ споронъ, содержащихъ оспрый уголь, двукрапнымъ прямоугольникомъ, содержаемымъ въ одной изъ споронъ около оспраго угла, на которую, продолженную буде нужно, падаетъ проведенная опъ вершины пропиwулежащаго угла перпендикулярная, и въ прямой при оспромъ углѣ, которую перпендикулярная опънимаешъ.

Пусть будетъ ABC (ф. 13, 14 и 15) преугольникъ, имѣющій уголь при B оспрый; и опъ почти A пусть будетъ проведена перпендикулярная къ BC, продолженной буде нужно, прямая AD. Говорю, что квадрапъ изъ AC меньше квадраповъ изъ CB, BA двукрапнымъ прямоугольникомъ въ CB, BD.

Поелику при прямой BC, на которую падаетъ перпендикулярная, уголь при B естъ оспрый, то уголь при C будетъ или оспрый, или тупой, или прямой.

Пусть будетъ уголь при C оспрый (ф. 13). Поелику же и уголь при B оспрый, то перпендикулярная опъ A къ BC проведенная упадетъ внутри преугольника. Пусть она упадетъ какъ AD.

И поелику прямая BC разсѣчена какъ ниешъ въ точкѣ D; то прямоугольничъ, итакъ далѣе, какъ доказано у Эвклида.

Но пусть будетъ уголъ при C тупой (ф. 14):
 поему перпендикулярная, опъ A къ BC проведенная,
 упадетъ въ уголъ ACB на продолженіе BC . Продолжи
 BC къ D , и пусть перпендикулярная упадетъ
 какъ AD .

И поелику прямая BD разсѣчена какъ ниестъ
 въ шокѣ C ; то квадраты изъ CB , BD равны
 двукратному прямоугольнику въ CB , BD вмѣстѣ
 *7. съ квадратомъ изъ BC *. Разсуждая попомъ какъ
 и въ первомъ случаѣ, докажемъ, что квадратъ
 изъ AC меньше квадратовъ изъ CB , BA двукрат-
 нымъ прямоугольникомъ въ CB , BD .

Пусть же уголъ при C будетъ прямой (ф. 15):
 поему перпендикулярная опъ A къ BC проведенная
 будетъ самая AC ; и прямая, копорую опниваетъ
 перпендикулярная при оспромъ углѣ, будетъ са-
 мая BC .

И поелику квадраты изъ AC , CB равны квадрату
 *47.1 изъ AB *, ибо уголъ при C прямой; придай обще
 квадратъ изъ BC : поему квадратъ изъ AC вмѣстѣ съ
 двукратнымъ квадратомъ изъ CB , равенъ квадратамъ
 изъ AB , BC . Итакъ квадратъ изъ AC меньше квадра-
 товъ изъ AB , BC двукратнымъ изъ CB , то есть
 двукратнымъ прямоугольникомъ въ (B, BD) .

Итакъ во всякомъ преугольникѣ, и проч ч. и д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

Ежели въ преугольникѣ квадратъ изъ одной
 спороны больше квадратовъ изъ прочихъ двухъ
 споронъ; то уголъ содержимый сими споронами
 будетъ тупой: А если меньше, то острый.

Пустъ будетъ треугольникъ ABC (ф. 15), въ коемъ квадрапъ изъ AB пустъ, во первыхъ, будетъ больше квадраповъ изъ AC , CB . Говорю, что уголъ ACB тупой.

Буде же не такъ; по уголъ ACB или прямой, или острый. Но уголъ ACB не будетъ прямой; ибо квадрапъ изъ AB былъ бы равенъ квадрапамъ изъ AC , CB^* : а онъ не равенъ; посему уголъ ACB ^{*47.1.} не прямой. И уголъ ACB не острый; ибо квадрапъ изъ AB былъ бы меньше квадраповъ изъ AC , CB^* : ^{*А.} а онъ не меньше; посему уголъ ACB не острый. А доказано, что и ни прямой: слѣдственно уголъ ACB есть тупой.

Но пустъ квадрапъ изъ AB будетъ меньше квадраповъ изъ AC , CB ; по подобно докажемъ, что уголъ ACB не прямой, и ни тупой; слѣдственно острый.

Итакъ, ежели въ треугольникѣ, и проч. ч. и д. н.

КЪ КНИГѢ ТРЕТЬЕЙ.

(24) Опредѣленіе. А неравные круги супъ тѣ, конхъ поперечники неравны.

Эвклидово опредѣленіе, равно и сіе легко доказать чрезъ наложеніе, какъ по всякому видѣнъ можно.

(25) Опредѣленіе. Подобныя дуги супъ тѣ, на копорыхъ споящіе углы при центрахъ или при окружностяхъ взаимно равны.

(26) Слѣдствіе. Чрезъ точку, взятую на окружности круга, можетъ проведена быть одна только касательная къ нему прямая.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

(27) Опъ почки взяпой внѣ круга могутъ преведены бытъ къ нему двѣ касательныя, одна по одну сторону поперечника проходящаго чрезъ оную почку, а другая по другую; и сіи двѣ касательныя прямыя суть взаимно равны. Болѣе же двухъ касательныхъ опъ той почки провести не можно.

Пусть будетъ взята почка А (ф. 16) внѣ круга ВСD. Говорю, что предлагаемое справедливо.

Отъ почки А проводи касательную АВ къ кругу ВСD, сдѣлавъ тоже спроеііе, какъ въ предыдущемъ предложеніи; и продолжи еще FD къ H; и пропями ЕKH, АК: то подобно докажемъ, что и АК есть касательная. И поелику квадраты изъ АВ, ВЕ равны

47, I. квадрату изъ АЕ, ибо уголъ АВЕ есть прямой; и квадрату изъ АЕ равны квадраты изъ АК, КЕ, по той же причинѣ: посему квадраты изъ АВ, ВЕ равны квадратамъ изъ АК, КЕ. Но квадраты изъ ЕВ равны ква-

K, I. дратамъ изъ ЕH, ибо $\angle B = \angle K$; посему и оспальной квадраты изъ АВ равны оспальному изъ АК;

K, I. слѣдспвенно и АВ равна АК.

Говорю еще, что опъ той же почки А болѣе двухъ касательныхъ къ кругу провести не можно.

Ибо пусть, буде возможно, проведена будетъ претпья АС; пропями ЕС: посему уголъ АСЕ есть прямой. Но и уголъ АKE есть прямой: а посему уголъ

21, I. АСF равенъ углу АKE, что невозможно. Чего ради АС не есть касательная къ кругу. Тоже докажется и о всякой другой, кромѣ двухъ прямыхъ АВ, АК.

Итакъ опъ почки взяпой, и проч. ч. и д. н.

(28) Слѣдствие. Отсюда явствуетъ, что если прямая касается къ кругу, и проведена будетъ опъ центра круга перпендикулярная къ касательной; то сія перпендикулярная упадетъ на прикосновеніе.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

(29) Четыреугольника въ кругѣ ежели одна сторона продолжился, то внѣшній уголъ равенъ внутреннему противоположному.

Пусть будетъ кругъ ABCD (ф. 17), и въ немъ четырехугольникъ ABCD; и пусть одна его сторона BC, продолжена будетъ къ E. Говорю, что внѣшній уголъ DCE равенъ внутреннему противоположному DAB.

Поскольку два угла DCE, DCB равны двумъ угламъ прямымъ*; а и два угла DAB, DCB равны двумъ *13,1. прямымъ*: то два угла DCE, DCB равны двумъ *22. угламъ DAB, DCB. Отними обще уголъ DCB: посему остальной уголъ DCE равенъ остальному DAB.

Итакъ четырехугольника, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

(30) Ежели чрезъ средину дуги круга, стягиваемой прямою, проведена будетъ касательная къ кругу; то она параллельна къ стягивающей прямой: И если проведена будетъ параллельная къ ней, то она касательна къ кругу.

Въ кругѣ ABC (ф. 18) пусть будетъ прямая BC, стягивающая дугу BAC; и чрезъ средину A дуги

ВАС пусть проведена будетъ касательная къ кругу прямая DAE. Говорю , что DAE параллельна къ ВС.

Возьми круга ABC центръ F, и пропхни FGA;

18. то FGA перпендикулярна къ DE. И поелику дуга BA равна дугѣ AC, то и уголъ BFA равенъ углу

27. AFC. Ипакъ , поелику FB равна FC , а FG общая; то двѣ прямыя BF, FG равны двумъ прямымъ

4. CF, FG; и уголъ BFG равенъ углу CFG: посему

и основаніе равно основанію , и преугольникъ равенъ будетъ преугольнику , и прочіе углы равны

прочимъ угламъ , каждый каждому , кои пропивулежащъ равнымъ сторонамъ ; а посему уголъ BGF

равенъ углу CGF. Чего ради каждый изъ угловъ ,

отр.10,1. при G есть прямой. Но и каждый изъ угловъ при A есть прямой : посему уголъ BGF равенъ углу

28,1. DAF: слѣдсвенно ВС параллельна къ DE.

Но пусть будетъ DAE параллельна къ ВС. Говорю , что DAE касательна къ кругу.

Ибо , сдѣлавъ тоже строеніе , такъ же докажемъ , что углы при G суть прямые. И поелику DE параллельна къ ВС, и на нихъ падаетъ AF; то внѣшнй

уголъ BGF равенъ внутреннему пропивулежащему

29,1. DAF: но уголъ BGF прямой; посему и уголъ DAF прямой ; а посему DA перпендикулярна къ FA; слѣ-

слѣд:16. довапельно и касательна къ нему.

Ипакъ , ежели чрезъ средину , и проч. ч. и д. н.

(31) Слѣдствие. Естли внѣ круга взята будетъ какая нисеть почка , и опъ нея на кругъ упадутъ сколько нисеть прямыхъ , пересекающихъ оный : то прямоугольникъ , содержимый въ одной цѣлой прямой и въ ея внѣшнемъ опрѣзкѣ , равенъ прямоугольнику ,

содержимому въ другой цѣлой прямой и во внѣшнемъ ея опрѣзкѣ. Ибо, проведя еще опъ той же самой почки прямую касательную, будетъ каждый изъ помянутыхъ прямоугольниковъ равенъ квадрату изъ касательной.

КЪ КНИГѢ ЧЕТВЕРТОЙ.

(32) Слѣдствие. Изъ сего явствуетъ, что сторона квадрата описаннаго около круга, равна поперечнику сего круга.

(33) Слѣдствие. Если въ кругѣ вписанъ квадратъ, и около того же круга описанъ другой; то описанный есть половина вписаннаго.

(34) Слѣдствие. Если прозянуть прямая АЕ, ЕС, СА, то въ кругѣ будетъ вписанъ преугольникъ равноспоронный и равноугольный; какъ по всякому легко доказать можно.

(35) Опредѣленіе. Многоугольники правильными называются шѣ, кои суть равноспоронные и равноугольные.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

Если въ кругѣ вписанъ правильный многоугольникъ; то вписать въ томъ же другой правильный многоугольникъ, вдвое больше сторонъ имѣющій.

Въ кругѣ ABCDE (ф. пред. 10, кн. XII) пусть будетъ вписанъ правильный многоугольникъ ABCD. Надлежитъ въ томъ же кругѣ ABCD вписать другой правильный многоугольникъ, вдвое больше сторонъ имѣющій.

Дуги АВ, ВС, СД, ДА, стягиваемыя сторонами вписаннаго многоугольника, раздѣли пополамъ въ
 30, III. точкахъ Е, F, G, H; и пропяти АЕ, ЕВ, ВF, FС, СG, GД, ДН, НА. Говорю, что многоугольникъ АЕВFСGДН есть правильный.

Поелику дуга АЕ равна дугѣ ЕВ, то дуга АВ есть двукратная дуги АЕ. Подобно докажемъ, что и дуга АД есть двукратная дуги АН. Но дуга АВ равна
 28, III. дугѣ АД, ибо прямая АВ равна прямой АД; по чему и дуга АЕ равна АН; а посему и прямая АЕ равна

29, III. прямой АН. Подобно докажемъ, что и каждая изъ прочихъ прямыхъ ЕВ, ВF, FС, СG, GД, ДН равна прямой АЕ или АН. Чего ради многоугольникъ АЕВFСGДН есть равноспоронный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга АН равна дугѣ ЕВ, придай обще дугу ВСН; посему дуга ВСА равна дугѣ ЕВН. Но на дугѣ ВСА стоить уголъ АСВ, а на дугѣ ЕВН уголъ НАЕ: посему уголъ НАС равенъ
 27, III. углу ВЕА. Подобно докажемъ, что и каждый изъ угловъ, кои при В, F, С, G, Д, Н, равенъ углу при А или Е. Чего ради многоугольникъ АЕВFСGДН есть равноспоронный. А доказано, что и равноугольный; слѣдственно онъ правильный. Припомъ имѣеть число сторонъ вдвое больше, нежели многоугольникъ АВСО. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Поелику въ кругѣ можно вписать правильный чепыреугольникъ, то есть квадратъ, также пяти, шести и пятнадцати угольникъ; то можно вписать, начиная отъ чепыреугольника: восьми, шестнадцати, тридцати двухъ, и проч. угольникъ; начиная отъ пятиугольника: десяти, двадцати, и проч. угольникъ; начиная отъ шести-

угольника : двѣнадцати, двадцати чепырехъ , и проч.
угольникъ; и наконецъ, начиная опть пятнадцатипи-
угольника : придцати , и проч. угольникъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

Есѣли въ кругъ вписанъ правильный многоуголь-
никъ ; то описать около сего круга другой ,
сполько же споронъ имѣющій , правильный много-
угольникъ.

Въ кругъ ABCDE (ф. пр. 12) пусть будетъ вписанъ
правильный многоугольникъ; и пусть точки A, B, C, D, E
будутъ вершины угловъ вписаннаго многоугольника:
ипакъ дуги AB, BC, CD, DE, EA взаимно равны*. *28, III.
Чрезъ A, B, C, D, E проводи касательныя къ кру-
гу прямыя GH, HK, KL, LM, MG; и возьми кру-
га ABCDE центръ F; и просяни FB, FK, FC, FL,
FD. Разсуждая попомъ, ипакъ какъ предложено о пяти-
угольникъ*, докажемъ , что многоугольникъ GPKLM *28, III.
есть равноспоронный и равноугольный , то естъ
правильный ч. и с. н.

Слѣдствіе. Опсюда явстеуетъ , что упомянутые
въ слѣдствіи предыдущаго предложенія многоуголь-
ники можно описывать около круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

Въ данномъ правильномъ многоугольникъ вписать
кругъ.

Пусть будетъ ABCDE (ф. пр. 13) данный правиль-
ный многоугольникъ. Надлежитъ въ многоуголь-
никъ AECDE вписать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ BCD , CDE по по-
 *9. ламъ прямыми CF , DF *, кои пусть встрѣятся
 въ F ; и пропяти FB , FA , FE ; и опъ F проводи, пер-
 пендикулярныя къ AB , BC , CD , DE , EA , прямыя
 *12. FG , FH , FK , FL , FM *: то, рассуждая такъ какъ
 въ 13. и при пятиугольникѣ, докажемъ, что каждый
 изъ остальныхъ угловъ ABC , BAF , AED раздѣленъ
 по поламъ прямыми BF , FA , FE ; и что прямыя
 FG , FH , FK , FL , FM всѣ взаимно равны. И по-
 тому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной
 изъ тѣхъ прямыхъ написанный, будетъ касатель-
 ный ко всѣмъ сторонамъ многоугольника, и бу-
 детъ кругъ вписанный. Напиши оный, какъ $GHIKL$.
 Ипакъ въ данномъ правильномъ многоугольникѣ впи-
 санъ кругъ. ч. и с. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что прямыя; про-
 водимыя опъ центра круга въ правильномъ мно-
 гоугольникѣ вписаннаго, къ вершинамъ онаго, раздѣ-
 ляютъ углы его по поламъ.

П Р Е Д Л О Ж Е Н І Е D.

Около даннаго правильнаго многоугольника опи-
 сать кругъ.

Пусть будетъ $ABCDE$ (фиг. пр. 14) данный
 правильный многоугольникъ. Надлежитъ около
 многоугольника $ABCDE$ описать кругъ.

Раздѣли опять каждый изъ угловъ BCD , CDE по
 поламъ прямыми CF , DF , кои пусть встрѣятся
 въ F ; и пропяти FB , FA , FE : то по причинѣ, что
 и каждый изъ остальныхъ угловъ CBA , BAF , AED
 раздѣленъ по поламъ прямыми FB , FA , FE , докажемъ

такъ же какъ и при пѣппиугольникѣ*, что прямыя *въ 14. FA, FB, FC, FD, FE всѣ взаимно равны. И пошому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ сихъ прямыхъ написанный, пройдетъ чрезъ вершины всѣхъ угловъ многоугольника, и будетъ кругъ описанный. Напиши оный, какъ ABCDF.

Итакъ около даннаго правильнаго многоугольника описанъ кругъ. ч. и с. н.

Слѣдствіе 1. Отсюда явствуетъ, что прямыя, проводимыя отъ центра круга описаннаго около правильнаго многоугольника, къ вершинамъ угловъ его, раздѣляютъ сіи углы по поламъ.

Слѣдствіе 2. И поелику сіе доказано и о кругѣ вписанномъ: то явлено, что круговъ описаннаго около правильнаго многоугольника и вписаннаго въ немъ, центры есть поплѣже.

КЪ КНИГЪ ПЯТОЙ.

(36) Когда говорится, что величина измѣряетъ другую или измѣряется другою; то всегда разумѣть должно, что измѣряетъ или, измѣряется *безъ остатка*.

(37) Опредѣленіе. Когда двѣ большія величины равно измѣряются двумя меньшими, каждая каждою; то есть, одну большую одна меньшая измѣряетъ сколько разъ, сколько другую большую другая меньшая: то большія называются равнократными меньшихъ, а меньшія равночаспными большихъ. Тоже разумѣется о прехъ и болѣ величинахъ, измѣряемыхъ равномногими меньшими.

(38) Подъ именемъ зависимости величинъ по ихъ количеству разумѣть, кажется, должно всякое ихъ сравненіе. Напримѣръ, когда изслѣдывается, чѣмъ или во сколько одна другой больше, или меньше; равна ли одна величина другой или неравна, и проч. Клавій, Валлисъ (*) и нѣкоторые другіе Геометры изъясняютъ опредѣленіе отношенія иначе.

(39) Опредѣленіе. Величины, имѣющія отношеніе, называются членами онаго; первая предъидущимъ, а вторая послѣдующимъ.

(40) Пусть будутъ четыре величины A, B, C, D ; и пусть величинъ A, C будутъ *какія нѣсть* равнократныя E, F , и величинъ B, C *какія нѣсть* равнократныя G, H ; и пусть величины E, G, F, H будутъ таковы, что если E больше G , то и F больше H ; и если E равна G , то и F равна H ; и если E меньше G , то и F меньше H : или иначе: пусть будутъ два неопредѣленные цѣлыя числа m, n ; и пусть величины A, B, C, D будутъ таковы, что если mA (то есть m разъ взятая величина A) больше nB , то и mC больше nD ; и если mA равна nB , то и mC равна nD ; и если меньше, то меньше: въ такомъ случаѣ говорится, что отношеніе A къ B есть тоже съ отношеніемъ C къ D , или что какъ A къ B , такъ C къ D .

(41) Если изъ величинъ A, B, C, D будетъ mA больше nB , а mC не больше nD : то

(*) J. Wallis opera Mathematica. Vol. I, Cap. 25, 29 et 30, et Vol. II, Cap. 19.

говорится, что A къ B имѣеть большее отношеніе, нежели C къ D ; или C къ D имѣеть меньшее отношеніе, нежели A къ B . При чѣмъ замѣтимъ, что m , и могутъ быть нѣкія, по еспѣ опредѣленные числа. Напримѣръ, еспѣли $2A$ больше $3B$, а $2C$ не больше $3D$, то A къ B имѣеть большее отношеніе, нежели C къ D , хотя бы при другихъ кратсповѣніяхъ сего и не было.

ОБЩЕЕ ПРИМѢЧАНІЕ КЪ ОПРЕДѢЛЕНІЯМЪ
3, 4, 5, и 7.

Поелику на сихъ опредѣленіяхъ основывается вся теорія величинъ пропорціональных, то нужно еще войти въ подробнѣйшее оныхъ объясненіе. Пусть будутъ двѣ однородныя величины A , B . Еспѣли сіи величины равны; то онѣ всегда имѣютъ отношеніе, ибо одна изъ нихъ взятая кратно будетъ больше другой. Еспѣли же величины A , B не равны; то меньшая взятая кратно или сдѣлается когда либо большею большею, или нѣтъ. Еспѣли сдѣлается или, что все равно, еспѣли можетъ сдѣлаться; то величины A , B имѣютъ отношеніе: еспѣли же нѣтъ, то не имѣютъ. Слѣдственно уголъ, содержащій касательною къ кругу и окружностию его, къ прямолинейному углу не имѣеть отношенія. (Равнымъ образомъ точка къ линіи, линія къ поверхности, нуль къ нулю, нуль и конечная величина къ безконечной не имѣютъ отношенія). Напротивъ того окружій уголъ (по еспѣ, содержащій дугами равныхъ круговъ обращенными въ одну сторону) къ прямолинейному углу имѣеть отношеніе: ибо первой можетъ быть равенъ или прямому, или тупому.

или оспрому, какъ доказалъ Проклъ (*). Равнымъ образомъ поперечникъ круга къ его окружности, квадрапъ изъ поперечника къ кругу, имѣющъ отношеніе: ибо три поперечника меньше окружности, а четыре больше оной, какъ доказалъ Архимедъ; квадрапъ изъ полупоперечника меньше круга, а квадрапъ изъ поперечника больше круга, какъ то легко доказать изъ предлож. 6 и 7 кн. IV. Пустъ еще будутъ двѣ величины C , D , имѣющія взаимное отношеніе. Еслили сравнимъ отношеніе A къ B съ отношеніемъ C къ D : то оныя будутъ или тѣже, или нѣтъ. Когда равнокрапныя, взятыя по опредѣленію 5му, имѣющъ свойство въ немъ изъясненное; то отношенія сущъ тѣже или равныя, а въ проптивномъ случаѣ сущъ неравныя.

Изъ сего слѣдуетъ, что еслили величины A , B , C , D предполагаются пропорціональными или доказываются таковыми: то ни въ какомъ случаѣ не

(*) И дѣйствительно, пустъ будетъ уголъ ABC (ф. 19) прямой, и пустъ взяты будутъ прямыя BA , BC равныя, и на нихъ написаны полукружія ADB , BEC , одно въ угла, а другое внутри оного.

Поблику полукружіе ADB равно полукружію BEC , ибо AB равна BC ; то и уголъ DBA равенъ углу EBC . Придай обще смѣщенный уголъ ABE ; посему и цѣлый уголъ DBE равенъ цѣлому ABC ; то есть окружный уголъ DBE равенъ прямому.

Но пустъ уголъ ABC будетъ тупой. Сдѣлавъ шакое же строеніе, подобно докажемъ, что уголъ DBE равенъ тупому углу ABC .

Пустъ, наконецъ, уголъ ABC будетъ острый. Сдѣлавъ шакое строеніе, подобно же докажемъ, что уголъ DBA равенъ углу EBC . Опними обще уголъ EBA ; посему и оспальной уголъ DBE равенъ оспальному ABC . ч. и д. н.

можеть быти, когда изъ ихъ крапныхъ первая больше впорой, чптобы претъя была не больше чспверпой; а когда равна, чптобы была не равна; а когда меньше, чптобы была не меньше; ибо сіе пропивно опредѣленію 5. Но еспъли А, В, С, D предполагаются или доказываются неимѣющими поже опношенія, то сіе уже означаесть, чпто сушь *нѣкія* крапныя, кои имѣють свойство показанное въ опредѣленіи 7мъ; слѣдственно не можно будесть ни сказасть, ни доказасть о величинахъ А, В, С, D, чпто по взятіи ихъ раьнокрапныхъ, по *какому нистъ* крапствованію, сіи крапныя *всегда* будусть или купно въ избыткѣ, или купно въ равенствѣ, или купно въ недостапкѣ. Изъ сего явствуесть, чпто величины удовлетворяющія опредѣленію 5му не могутъ уже удовлетворяпъ 7му, а удовлетворяющія 7му не могутъ удовлетворяпъ 5му.

Сообразивъ все выше сказанное, нельзя кажесть не согласиься, чпто напрасно говоряпъ, будпо ученіе Эвклидово о пропорціяхъ принужденно и не прямо, и будпо нѣпъ достапочныхъ признаковъ, по копорымъ бы можно опличипъ величины, имѣющія поже опношеніе, опъ величинъ, имѣющихъ большее или меньшее; по еспъ величины опредѣленія 5го опъ величинъ опредѣленія 7го; будпо Эвклидъ величины послѣдняго опъискиваетъ на удачу, и ироч.

(42) Изъ предъидущаго примѣчанія видно, чпто слова: *тоже, большее или меньшее* (опношеніе), имѣють совѣмъ различный смыслъ опъ того, въ коемъ онѣ приемлются обыкновенно, ибо пупъ онѣ не болѣе значапъ, какъ простое наименованіе

свойствъ , излагаемыхъ въ опредѣленіяхъ 5мъ и 7мъ. Слѣдственно подобіе или пожество отношеній, есть не что иное , какъ когда величины оныхъ имѣютъ свойство означенное въ опредѣленіи 5мъ. И поелику таковыя величины , по есть , имѣющія взаимно поже отношеніе , называются для краткости пропорціональными , то для краткости же названо пожество отношеній пропорціею.

(43) Опредѣленіе а. Двѣ величины называются обратно пропорціональными другимъ двумъ величинамъ , когда одна изъ первыхъ къ одной изъ вторыхъ имѣетъ поже отношеніе , что другая изъ вторыхъ къ другой изъ первыхъ.

Опредѣленіе б. Величины называются непрерывно пропорціональными , когда первая ко второй имѣетъ поже отношеніе , что вторая къ третьей , а вторая къ третьей поже , что третья къ четвертой , и такъ далѣе.

Изъ опредѣленій того и того явно , что отношеніе удвоенное , упроененное и проч. не означаетъ поже , что двукратное , прекратное , и проч.

(44) Разумѣется : непрерывно.

(45) Опредѣленіе. Ежели будетъ одинъ рядъ величинъ , имѣющихъ взаимное отношеніе , а другой рядъ отношеній тѣхъ же съ отношеніями величинъ перваго ряда ; то говорится , что первая величина къ послѣдней перваго ряда имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній втораго ряда.

На примѣръ : пусть будетъ рядъ величинъ А, В, С, D, и рядъ отношеній : М къ N ; Р къ Q ; R къ S ; и пусть будетъ отношеніе А къ В поже съ отношеніемъ М къ N , и отношеніе В къ С поже съ отношеніемъ Р

къ Q, и еще отношеніе С къ D поже съ отношеніемъ R къ S; то говорится, что A къ D имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній M къ N; P къ Q, и R къ S. Эвклидъ сіе опредѣленіе выражаеиъ иначе. (См. опр. 5, кни. VI).

(46) Называются такожь и сходственными членами.

(47) Пусть будутъ многія величины A, B, C, и имъ равномногія D, E, F, кои по двѣ въ каждомъ ряду супъ въ помѣже отношеніи, то отношенія, A къ C, и D къ E называются равномѣстными; (48) пропорція же: какъ A къ B такъ D къ E, и какъ B къ C такъ E къ F, именуется порядочною.

(49) Но еспли будутъ три величины A, B, C и другія равномногія D, E, F, имѣющія слѣдующія отношенія: какъ A къ B такъ E къ F; какъ B къ C такъ D къ E: то сія пропорція именуется обратною или смѣшленною.

По мнѣнію нѣкопрыхъ полковапелей, послѣ опредѣленій можно еще помѣстипъ въ сей книгъ слѣдующія аксіомы:

а. Какое отношеніе имѣетъ одна величина къ другой своего рода, такое отношеніе имѣетъ всякая данная величина къ нѣкоей величинѣ своего же рода. Иначе: ежели будутъ три величины, изъ коихъ двѣ первыя имѣютъ отношеніе; то всегда еспъ четвертая величина, къ коей претъя имѣетъ поже отношеніе, что и первая ко второй.

б. Равнокрапныя или равночаспныя тогоже или равныхъ, супъ и взаимно равны.

с. Равнокрапныя или равночаспныя неравныхъ, супъ и взаимно неравны.

(50) Слѣдствіе. Ежели первая величина вѣторой, и претѣя четвѣртой будутъ равнокрапныя; пятая же будетъ равная вѣторой, и шестая равная четвѣртой: то подобно докажетъся, что совокупленно, первая съ пятою вѣторой, и претѣя съ шестою четвѣртой будутъ равнокрапныя. Сіе же докажетъся еще, ежели первая равна вѣторой, а претѣя четвѣртой; пятая же вѣторой и шестая четвѣртой равнокрапны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

(51) Ежели первая величина ко вѣторой имѣеть тоже отношеніе, что и претѣя къ четвѣртой: то и равнокрапныя первой и претѣей будутъ ко вѣторой и четвѣртой имѣть тоже отношеніе. И также величины первая и претѣя будутъ къ равнокрапнымъ вѣторой и четвѣртой имѣть тоже отношеніе.

Пусть первая величина А (фиг. пр. 4) ко вѣторой В имѣеть тоже отношеніе, что и претѣя С къ четвѣртой D; и пусть, во первыхъ, будутъ первой и претѣей А, С равнокрапныя Е, F. Говорю, что какъ Е къ В, такъ F къ D.

Возьми величинъ Е, F равнокрапныя К, L; а величинъ В, D равнокрапныя G, H. Здѣсь доказатьъ *въ 4 можно какъ и въ предложеніи*, что К, L суть равнокрапныя величинъ А, С. И поелику какъ А къ В, такъ С къ D; и суть величинъ А, С равнокрапныя К, L, а величинъ В, D равнокрапныя G, H; посему естли К больше G, то и L больше H; и естли равна, то равна; и естли меньше, *опр. 5. то меньше*. Итакъ, поелику величинъ Е, F равнокрапныя суть К, L, а величинъ В, D равно-

кратныя G , H ; и доказано, что если K больше G , то и L больше H ; и если равна, то равна; и если меньше, то меньше: следовательно какъ E къ B , такъ F къ D *. *опр.5.

Если будутъ величинъ впорой и четвертой B , D равнократныя G , H , то подобно докажемъ, что какъ A къ G , такъ C къ H .

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

(52) Р. Симсонъ послѣ сего предложенія помѣщаетъ еще между прочимъ слѣдующія:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

Ежели первая величина ко впорой имѣетъ такое отношеніе; что и претя къ четвертой; будетъ же первая больше впорой: то и претя больше четвертой; а если равна, то равна; и если меньше, то меньше.

Пусть будетъ какъ A къ B , такъ C къ D . Говорю, что ежели A больше B , то и C больше D ; а если равна, то равна; и если меньше, то меньше.

Возьми величинъ A, B, C, D равнократныя E, F, G, H .

И во первыхъ пусть будетъ A больше B . Поелику A больше B , и величинъ A, B равнократныя суть E, F ; то и E больше F *. И поелику полагается, *акс.с. какъ A къ B , такъ C къ D ; и величинъ A, C равнократныя суть E, G , а величинъ C, D равнократныя суть F, H ; и доказано, что E больше F : посему и G больше H *. Но G, H *опр.5. суть величинъ C, D равнократныя: посему и C больше D *. Следовательно если A больше B , *акс.с. то и C больше D . Подобно докажемъ, что если A

равна В, то и С равна D; и есѣли меньше, то меньше.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

Ежели будутъ чепыре величины, изъ коихъ первая и претѣя равнокрапны, или равночаспны, впо-рой и чепверпой, каждая каждой; то какъ первая ко впорой, такъ претѣя къ чепверпой.

Пусть будутъ чепыре величины А, В, С, D, (ф. 20) изъ коихъ первая А и претѣя С пусть, во-первыхъ, будутъ равнокрапны впорой В и чепверпой D, каждая каждой. Говорю, что какъ А къ В, такъ С къ D.

Величинъ А, С возьми равнокрапныя Е, F; а величинъ В, D равнокрапныя G, H. И пусть, во-первыхъ, будетъ Е больше G.

Поелику первая величина А впорой В и претѣя С чепверпой D суть равнокрапныя, и взяты первой величины и претѣей равнокрапныя же Е, F: посему *3. Е, F суть равнокрапныя величинъ В, D*. Но и G, H суть равнокрапныя величинъ В, D: Итакъ, ежели Е есѣ бѣлая крапная величины В, нежели G тойже В; то и F есѣ бѣлая крапная величины D, нежели H тойже D; а есѣли меньшая, то меньшая; ежели же равная, то равная. Но поелику Е, по положенію, больше G, то Е есѣ бѣлая крапная величины В, нежели G тойже В; посему и F есѣ бѣлая крапная величины D, *жс.с. нежели H тойже D; а посему F больше H*. Слѣдственно есѣли Е больше G, то и F больше H.

Подобно докажемъ: что есѣли E равна G , то и F равна H ; и есѣли меньше, то меньше. Ипакъ, поелику величинъ A, C равнокрапныя суть E, F , а величинъ B, D равнокрапныя G, H ; и доказано, что есѣли E больше G , то и F больше H ; и есѣли равна, то равна; и есѣли меньше, то меньше: слѣдственно какъ A къ B , такъ C къ D *.

*опр.5.

Но пусть первая A и претѣя C будутъ равночаспныя вѣторой B и чепвертой D , каждая каждой. Говорю, что какъ A къ B , такъ C къ D .

Поелику A, C суть равночаспныя величинъ B, D ; то B, D суть величинъ A, C равнокрапныя; слѣдственно, по доказанному уже, будетъ, какъ B къ A , такъ D къ C : и поному предложению, какъ A къ B , такъ C къ D *.

*слѣд: 4.

Ипакъ, ежели будутъ чепыре, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Ежели изъ чепырехъ величинъ, первая равна вѣторой, и претѣя равна чепвертой; то такъ же докажется, какъ въ первомъ случаѣ предложенія, что какъ первая ко вѣторой, такъ претѣя къ чепвертой.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ D.

Ежели изъ чепырехъ величинъ пропорціональныхъ, первая есѣ крапная, или часпная, вѣторой; то и претѣя будетъ равнокрапная, или равночаспная, чепвертой.

Пусть будутъ чепыре величины A, B, C, D (ф. 21) пропорціональныя, то есѣ, какъ A къ B , такъ C

къ D; и пусть, впервыхъ, будетъ A крапная величины B. Говорю, что и C есть равнокрапная величины D.

Возьми E равную A; и сколько крапна A, то есть E величины B, возьми столько крапную F величины D.

Поелику какъ A къ B, такъ C къ D; и величинъ B, D, второй и четвертой взяты равнокрапныя *A. E, F; то какъ A къ E, такъ C къ F*. Но A равна *B. E, поему и C равна F*. И поелику сколько E, то есть A есть крапная величины B, столько F есть крапная величины D; и F равна C: поему сколько A есть крапная величины B, столько и C есть крапная величины D.

Но пусть будетъ A частная величины B. Говорю, что и C есть равночастная величины D.

Поелику A есть частная величины B, то B есть крапная величины A. И поелику какъ A къ B, такъ C къ D; то предложениемъ, какъ B къ A, такъ D *слѣд. 4. къ C*. Но B есть крапная величины A; чего ради, по доказанному, и D есть равнокрапная величины C; а поему A, C суть равночастныя величинъ B, D.

Итакъ, ежели изъ чепырехъ, и проч. ч. и д. н.

(53) Слѣдствіе. Подобно докажемъ, что равныя величины къ равнымъ имѣютъ поже отношеніе, взятыя попеременно.

(54) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что естьли отношенія величинъ суть пѣже или пожеспвенны съ какими нисуть пѣмиже отношеніями; то оныя суть пѣже и взаимно.

(55) Слѣдствіе. 1. Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели претѣя къ четвертой, а претѣя къ четвертой имѣетъ поже отношеніе, чѣмъ пятая къ шестой; то подобно докажемъ, чѣмъ первая ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Слѣдствіе. 2. Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели претѣя къ четвертой, а претѣя къ четвертой большее, нежели пятая къ шестой; то первая ко второй и пѣтъ паче будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

(56) Слѣдствіе сіе весьма темно и, какъ кажется, неудовлетворительно доказано. Грегори оное доказываетъ такъ (*):

Есѣли будетъ какъ АВ къ ВЕ, такъ СD къ DF; то опредѣленіемъ, какъ АЕ къ ВЕ, такъ CF къ DF*: *17. а предложеніемъ, какъ ВЕ къ АЕ, такъ DF къ CF*: *слѣд. 4. и совокупленіемъ, какъ АВ къ АЕ, такъ СD къ CF, чѣмъ и есѣ обращеніе отношеній пропорціи: какъ АВ къ ВЕ, такъ СD къ DF. Отсюда явствуетъ, и проч.

(57) То есѣ, сдѣлавъ предложеніе отношеній предположенной пропорціи: какъ В къ С, такъ Е къ F.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Е.

(58) Отношенія сложенные изъ пѣхъже отношеній, сущь взаимно пѣже.

Пусть будетъ какъ А къ В, такъ С къ D; и какъ Е къ F, такъ G къ H; и еще какъ K къ L,

(*) Euclidis quæ supersunt omnia. Oxoniæ. 1703.

такъ М къ N. Говорю, А. В. Е. F. K. L.
 что отношеніе сложенное C. D. G. H. M. N
 изъ отношенія А къ В, О. Р. Q. R.
 и отношенія Е къ F, и S. T. V. X.
 еще отношенія К къ L, еспѣ тоже съ отношеніемъ
 сложеннымъ изъ отношенія С къ D, и отношенія
 G къ H, и еще отношенія М къ N.

Возьми какую ниспѣ величину О: и пусть бу-
 акс.а. деть какъ А къ В, такъ О къ Р; и какъ Е къ F, такъ
 Р къ Q; и еще какъ К къ L, такъ Q къ R. Возьми
 еще какую ниспѣ величину S; и пусть будетъ какъ
 С къ D, такъ S къ T; и какъ G къ H, такъ T
 къ V; и еще какъ M къ N, такъ V къ X.

Поелику какъ А къ В, такъ С къ D: но какъ
 А къ В, такъ О къ Р; а какъ С къ D, такъ S
 11.V. къ T: посему какъ О къ Р, такъ S къ T. Пото-
 му же какъ Р къ Q, такъ T къ V; и какъ Q къ R,
 такъ V къ X. И такъ чепыре суть величины О,
 Р, Q, R, и другія имъ равномогія S, T, V, X,
 взятыя по двѣ въ помѣже съ ними отношенія:
 посему, равноѣспно, какъ О къ R, такъ S къ

22.V. X. Но отношеніе О къ R называется сложнымъ
 (45). изъ отношеній А къ В, и Е къ F, и К къ L;
 а отношеніе S къ X называется сложнымъ изъ
 отношеній С къ D; и G къ H, и M къ N: чего
 ради отношеніе сложенное изъ отношеній А къ В,
 и Е къ F, и К къ L еспѣ тоже съ отношеніемъ сло-
 женнымъ изъ отношеній С къ D, и G къ H, и M къ N.

И такъ отношенія сложенныя, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что отношенія
 удвоенныя тѣхъже отношеній, или упрощенныя,
 суть и взаимно тѣже.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ F.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то предложениемъ, вторая къ первой имѣетъ меньшее отношеніе, нежели четвертая къ третьей: И ежели меньшее, то большее.

Пусть первая величина А (ф. 22) ко второй В имѣетъ большее отношеніе, нежели третья С къ четвертой D. Говорю, что предложениемъ, В къ А имѣетъ меньшее отношеніе, нежели D къ С.

Вообрази величину Е, которая къ В имѣетъ такое же отношеніе, что и С къ D*. *акс.а.

Итакъ А къ В имѣетъ большее отношеніе*, нежели $\frac{1}{3}$. Екъ В: посему А больше E^* ; а посему Е меньше А. $\frac{1}{10}$. Поскольку же Е меньше А, и В есть другая нѣкая величина; а также величина къ меньшей имѣетъ большее отношеніе, нежели къ большей*: посему $\frac{1}{8}$. Екъ В имѣетъ большее отношеніе, нежели В къ А. И поскольку Е къ В имѣетъ такое же отношеніе, что С къ D; то предложениемъ, В къ Е имѣетъ такое же отношеніе, что и D къ С*. Доказано же, что $\frac{1}{4}$. В къ Е имѣетъ большее отношеніе, нежели В къ А; то есть В къ А имѣетъ меньшее отношеніе, нежели В къ Е: чего ради В къ А имѣетъ меньшее отношеніе, нежели и D къ С*. *13

Подобно докажемъ, что если первая ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой: то предложениемъ, вторая къ первой имѣетъ большее отношеніе, нежели четвертая къ третьей.

Итакъ, ежели первая величина и проч. ч. и. д. и.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Г.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели претѣя къ четвертой; то и претѣніемъ имѣетъ большее.

Пусть А (ф. 22) къ В имѣетъ большее отношеніе, нежели С къ D. Говорю, что и претѣніемъ, А къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели В къ D.

Вообрази величину Е, которая къ В имѣетъ поже *акс.а. отношеніе, что и С къ D*.

Итакъ А къ В имѣетъ большее отношеніе, нежели Е къ В*₁ и потому А больше Е. Поелику же

А больше Е, а С есть другая нѣкая величина; то А

8. къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели Е къ С.

И поелику Е къ В имѣетъ поже отношеніе, что и С къ D: то и претѣніемъ, Е къ С имѣетъ по-

слѣд.4. же отношеніе, что и В къ D. Доказано же, что

А къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели Е къ

С: чего ради А къ С имѣетъ большее отношеніе,

13. нежели и В къ D.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Н.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели претѣя къ четвертой; то и совокупленно, первая со второю ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели претѣя съ четвертою къ четвертой.

Пусть АВ (ф. 23) къ ВС имѣетъ большее отношеніе, нежели DE къ EF. Говорю, что и совокуплено, AC къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели DF къ EF.

Вообрази величину GB , которая къ BC имѣетъ
тоже отношеніе, что и DE къ EF *. *акс. 2.

Итакъ AB къ BC имѣетъ большее отношеніе,
нежели GB къ BC *; а посему AB больше GB . При- *13.
дай обще BC ; посему цѣлая AC больше цѣлой GC .
Но BC есть другая нѣкая величина: посему AC
къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели GC къ BC *. *8.
И поелику, по положенію, GB къ BC имѣетъ тоже
отношеніе, что DE къ EF ; по, совокупленіемъ, GC
къ BC имѣетъ тоже отношеніе, что и DF къ EF *. *18.
Дказано же, что AC къ BC имѣетъ большее отноше-
ніе, нежели GC къ BC : чего ради AC къ BC имѣетъ
большее отношеніе, нежели и DF къ EF *. *13:

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ К.

Ежели первая величина со второю ко второй
имѣетъ большее отношеніе, нежели претъя
съ четвертою къ четвертой; по и отдѣленно,
первая ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели
претъя къ четвертой.

Пусть AC (фиг. 23) къ BC имѣетъ большее
отношеніе, нежели DF къ EF . Говорю, что и
отдѣленно, AB къ BC имѣетъ большее отноше-
ніе, нежели DE къ EF .

Вообрази величину GC , которая къ BC имѣетъ
тоже отношеніе, что и DF къ EF .

Итакъ AC къ BC имѣетъ большее отношеніе, не-
жели GC къ BC : посему AC больше GC *. Отними обще *10.
 BC ; посему остатъная AB больше остатъной GB . Но BC
*сть другая нѣкая величина: посему AB къ BC имѣетъ

- *8. большее отношеніе, нежели CB къ BC^* . И поелику, по положенію, GC къ BC имѣеть поже отношеніе, чѣмъ и DF къ EF : по, опдѣленіемъ, CB къ BC имѣеть
- *17 поже отношеніе, чѣмъ и DE къ EF^* . Доказано же, чѣмъ AB къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели CB къ BC : чего ради AB къ BC имѣеть большее
- *13. отношеніе, нежели и DE къ EF^* .

Итакъ, ежели совокупленіемъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ L.

Ежели первая величина со второю ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели претѣя съ четвертою къ четвертой; по, обращеніемъ, первая со второю къ первой имѣеть меньшее отношеніе, нежели претѣя съ четвертою къ претѣей.

Пусть AB (фиг. 24) къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели DE къ EF . Говорю, чѣмъ, обращеніемъ, AB къ AC имѣеть меньшее отношеніе, нежели DE къ DF .

- Поелику AB къ BC имѣеть большее отношеніе, нежели DE къ EF : по, опдѣленіемъ, AC къ CB
- *к. имѣеть большее отношеніе, нежели DF къ FE^* . Посему предложеніемъ, BC къ CA имѣеть меньшее отношеніе,
- *Г. нежели EF къ FD^* : чего ради совокупленіемъ, AB
- *Д. къ AC имѣеть меньшее отношеніе, нежели DE къ DF^* .

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ M.

Ежели будетъ сколько нѣсть величинъ, и другихъ имъ раенomногихъ, взятыхъ по двѣ по порядку, въ

большемъ отношеніи: то и равномѣрно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будетъ сколько ниспъ величинъ А, В, С (ф. 25), и другихъ имъ равномогихъ D, E, F, взятыхъ по двѣ въ большемъ отношеніи; а именно, А къ В имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E, а В къ С большее нежели E къ F. Говорю, что и равномѣрно, А къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ F.

Вообрази величину G, копорая къ С имѣетъ тоже отношеніе, что E къ F. Ипакъ В къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели G къ С*: посему ^{*13.} В больше G*. И поелику В больше G, а А ^{*10.} есть другая нѣкая величина: то А къ В имѣетъ меньшее отношеніе, нежели А къ G, то есть А къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели А къ В. Полагается же, что А къ В имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E: чего ради нѣмъ паче А къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E*.

^{*сл 2, (55).}

Вообрази еще величину H, копорая къ G имѣетъ тоже отношеніе, что и D къ E. Ипакъ А къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ G; посему А больше H. Но С есть другая нѣкая величина: посему А къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ С. И поелику D къ E имѣетъ тоже отношеніе, что и H къ G, а E къ F тоже что G къ С: то равномѣрно, D къ F имѣетъ тоже отношеніе, что H къ С*. Доказано же, что А ^{*22.} къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ С: чего ради А къ С имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ F*.

^{*13.}

Ипакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

• •

Слѣдствіе. Ежели A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E ; и будетъ G меньше B ; то доказано, что тѣмъ паче A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E . Изъ сего явствуетъ: что изъ пяти величинъ, есѣли первая ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, и будетъ пятая меньше второй; то тѣмъ паче первая къ пятой имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ N.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ обратно, въ большемъ отношеніи: то и равномѣрно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будутъ три величины A, B, C (ф. 25), и другія равномногія имъ D, E, F , съ коими тѣ взятыя по двѣ обратно сунъ въ большемъ отношеніи, а именно: A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ F , а B къ C большее нежели D къ E . Говорю, что и равномѣрно, A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ F .

Вообрази величину G , копорая къ C имѣетъ по-
 *акс. 2. же отношеніе, что и D къ E *. Ипакъ B къ C
 *13. имѣетъ большее отношеніе, нежели G къ C *: по-
 *10. сему B больше G *; а посему G меньше B . Но A есѣ
 другая иѣкая величина: посему A къ G имѣетъ
 *8. большее отношеніе, нежели A къ B *. Но A къ B
 имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ F : чего
 ради тѣмъ паче A къ G имѣетъ большее отноше-
 *сл. 2, (55). ніе, нежели E къ F *.

Вообрази еще величину Н, которая къ С имѣеть
 тоже отношеніе, что и Е къ Г. Ипакъ А къ Г
 имѣеть большее отношеніе, нежели Н къ С*: по-^{*13.}
 сему А больше Н*. Но С есть другая нѣкая ве-^{*10.}
 личина: посему А къ С имѣеть большее отноше-
 ніе, нежели Н къ С*. Поелику же какъ Д къ Е,^{*8.}
 такъ Г къ С; а какъ Е къ Г, такъ Н къ С: то
 равномѣрно, какъ Д къ Г, такъ Н къ С*. Доказано^{*23.}
 же, что А къ С имѣеть большее отношеніе, не-
 жели Н къ С: чего ради А къ С имѣеть боль-^{*13.}
 шее отношеніе, нежели и Д къ Г*.

Ипакъ, ежели будущъ при, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ О.

Ежели цѣлая величина къ цѣлой имѣеть большее
 отношеніе, нежели опнятая опъ первой къ опня-
 той опъ другой; то и оспальная къ оспальной
 будетъ имѣть большее, нежели цѣлая къ цѣлой.

Пусть цѣлая АВ (ф. пр. 19) къ цѣлой СД имѣеть
 большее отношеніе, нежели опнятая АЕ къ опня-
 той СГ. Говорю, что и оспальная ЕВ къ оспальной
 ГД будетъ имѣть большее отношеніе, нежели цѣлая
 АВ къ цѣлой СД.

Поелику АВ къ СД имѣеть большее отношеніе,
 нежели АЕ къ СГ: то и премѣненіемъ, ВА къ АЕ
 имѣеть большее отношеніе, нежели ДС къ СГ*.^{*6.}
 Но естли величины имѣють большее отношеніе,
 то обращеніемъ будущъ имѣть меньшее*: посему АВ^{*L.}
 къ ЕВ имѣеть меньшее отношеніе, нежели СД
 къ ГД; и премѣненіемъ, АВ къ СД имѣеть меньшее
 отношеніе, нежели ЕВ къ ГД; то есть, оспальная

ЕВ къ оспальной FD имѣеть большее отношеніе, нежели цѣлая АВ къ цѣлой CD.

Итакъ, ежели цѣлая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Р.

Ежели будетъ сколько ниесъ величинъ, и другихъ имъ равномогихъ; и перваго ряда величины къ величинамъ впораго будутъ имѣть непрерывно большее отношеніе: то всѣ величины перваго ряда, ко всѣмъ величинамъ впораго ряда, будутъ имѣть меньшее отношеніе, нежели первая къ первой, а большее, нежели послѣдняя къ послѣдней: такожь большее, нежели всѣ перваго ряда кромѣ первой, ко всѣмъ впораго ряда кромѣ первой же.

Пусть будутъ величины А, В, С (ф. пр. 20), и другія имъ равномогія D, E, F; и пусть А къ D имѣеть большее отношеніе, нежели В къ E, а В къ E большее нежели С къ F. Говорю, вопервыхъ, что всѣ А, В, С ко всѣмъ D, E, F имѣють большее отношеніе, нежели В, С къ E, F.

Поелику А къ D имѣеть большее отношеніе, нежели В къ E: то и премѣненіемъ, А къ В большее, нежели D къ E*, и совокупленіемъ, А, В къ В *Н. большее нежели D, E къ E*: и еще премѣненіемъ, А, В къ D, E большее нежели В къ E. Итакъ, поелику цѣлая А, В къ цѣлой D, E имѣеть большее отношеніе, нежели опнятая В къ опнятой E: то и оспальная А къ оспальной D имѣеть большее отношеніе, нежели цѣлая А, В къ цѣлой *О. D, E*. Подобно докажется, что В къ E имѣеть большее отношеніе, нежели В, С къ E, F. Но, по

положенію, А къ Д имѣетъ большее опношеніе, нежели В къ Е: посему и тѣмъ паче А къ Д имѣетъ большее опношеніе, нежели В, С къ Е, F*: а посему премѣненіемъ А*сл:2,(55). къ В, С большее нежели Д къ Е, F; и совокупленіемъ А, В, С къ В, С большее нежели Д, Е, F къ Е, F: и еще премѣненіемъ А, В, С къ Д, Е, F большее нежели В, С къ Е, F.

Говорю же, что А, В, С къ Д, Е, F имѣетъ меньшее опношеніе, нежели А къ Д.

Поелику, по доказанному, цѣлая А, В, С къ цѣлой Д, Е, F имѣетъ большее опношеніе, нежели опняпая В, С къ опняпой Е, F: по оспальной А къ оспальной Д имѣетъ большее опношеніе, нежели цѣлая А, В, С къ цѣлой Д, Е, F*, то есть, *о. А, В, С къ Д, Е, F имѣетъ меньшее опношеніе, нежели А къ Д.

Говорю еще, что А, В, С къ Д, Е, F имѣетъ большее опношеніе, нежели С къ F.

Поелику В къ Е имѣетъ большее опношеніе, нежели С къ F: то премѣненіемъ, В къ С имѣетъ большее, нежели Е къ F; и совокупленіемъ В, С къ С большее, нежели Е, F къ F: и еще премѣненіемъ, В, С къ Е, F большее, нежели С къ F. Но, по доказанному, А, В, С къ Д, Е, F имѣетъ большее опношеніе, нежели В, С къ Е, F: чего ради тѣмъ паче А, В, С къ Д, Е, F имѣетъ большее опношеніе, нежели С къ F.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Q.

Опнoшенія сложенныя изъ большихъ опнoшеній, сунъ больше сложенныхъ изъ меньшихъ.

Пусъ имѣетъ А къ В А: В. Е: F. К: L
 большее опнoшеніе, нежели С С: D. G: H. M: N
 къ D, а Е къ F большее О. Р. Q. R.
 нежели G къ H, и К къ L S. T. V. X.
 большее нежели M къ N. Говорю, что опнoшеніе сложенное изъ опнoшенія А къ В, и опнoшенія Е къ F, и еще опнoшенія К къ L, естъ больше опнoшенія сложенного изъ опнoшенія С къ D, и опнoшенія G къ H, и еще опнoшенія M къ N.

Возьми какую нисетъ величину О: и пусъ бу-
 акс.а. деть какъ А къ В, такъ О къ Р; и какъ Е къ
 F, такъ Р къ Q; и еще какъ К къ L, такъ Q
 къ R. Возьми еще какую нисетъ величину S:
 акс.а. и пусъ будетъ какъ С къ D, такъ S къ T;
 и какъ G къ H, такъ T къ V; и еще какъ M къ
 N, такъ V къ X.

Посляку А къ В имѣетъ большее опнoшеніе,
 нежели С къ D; но какъ А къ В, такъ О къ Р,
 а какъ С къ D, такъ S къ T: посему О къ Р
 и и з. имѣетъ большее опнoшеніе, S къ T. Потому же и Р
 къ Q имѣетъ большее опнoшеніе, нежели T къ V;
 и Q къ R имѣетъ большее опнoшеніе, нежели V
 къ X. Ипакъ четыре сунъ величины О, Р, Q, R,
 и другія имъ равномогія S, T, V, X, взятыя по
 двѣ въ большемъ опнoшеніи: посему и равномѣстпо
 м. будутъ нъ большемъ; а посему О къ R имѣетъ большее
 опнoшеніе, нежели S къ X. Но О къ R естъ

въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній А къ В, и Е къ F, и К къ L*; а S къ X есть въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній С къ D, и G къ H, и M къ N: поему и отношеніе, сложенное изъ отношеній А къ В, и Е къ F, и К къ L, есть больше отношенія сложеннаго изъ отношеній С къ D, и G къ H, и M къ N.

Итакъ отношенія сложенные, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отношенія удвоенныя, или упроедныя, большихъ, суть большія.

КЪ КНИГЪ ШЕСТОЙ.

(59) Подобныя прямолинейныя фигуры называются подобно положенными, или подобно написанными изъ тѣхъ ихъ споронъ, кои суть сходственныя.

(60) Или такъ: обрапныя фигуры суть тѣ, кои имѣють спороны около своихъ угловъ обрапно пропорціональныя.

(61) Или: высота треугольника есть прямая, отъ вершины перпендикулярно къ основанію проведенная.

(62) Сіе опредѣленіе изъясняютъ различнымъ образомъ. Здѣсь довольно замѣтить, что Эвклидъ и всѣ древніе Геометры употребляютъ оное въ такомъ смыслѣ какъ предложено выше*. *(45).

Къ Эвклидовымъ опредѣленіямъ можно еще присовокупить слѣдующія:

а. Прямые линии подобно разсѣченныя суть тѣ, коихъ отрѣзки суть пропорціональныя.

б. Параллелограммъ по нѣкоей прямой линіи помѣщенный называется имѣющимъ недоспапокъ, когда не занимаетъ цѣлой линіи, а имѣющимъ избытокъ, когда занимаетъ прямую большую той, по которой помѣщается: и если на цѣлой дополнить параллелограммъ, то въ первомъ случаѣ прибавится параллелограммъ, называемый избытокъ, а во второмъ отнимется, называемый недоспапокъ.

(63) Слѣдствіе. Треугольники и параллелограммы равныхъ высотъ, суть взаимно какъ ихъ основанія.

(64) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, какъ данную прямую раздѣлять на сколько ниесъ равныхъ частей.

(65) Слѣдствіе. Равныхъ параллелограммовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ. И которыхъ параллелограммовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные.

(66) Тоже сказать можно и о треугольникахъ.

(67) Что сказано о прямоугольникахъ, можно сказать и о параллелограммахъ, имѣющихъ вмѣсто угловъ прямыхъ равные.

(68) И здѣсь вмѣсто прямоугольныхъ параллелограммовъ могутъ быть всякіе равноугольные.

(69) Новые Геометры вмѣсто удвоеннаго отношенія двухъ сходственныхъ сторонъ, подобныхъ фигуръ, употребляютъ отношеніе квадратовъ изъ оныхъ линій: но сіе употребленіе, какъ замѣчаетъ Гурьевъ, произошло болѣе отъ приложе-

нія Числительной науки къ Геометріи, нежели опытъ сущности предмета; ибо квадраты сами суть подобныя фигуры, и находясь какъ и прочія въ удвоенномъ отношеніи сторонъ своихъ; и поному принаравливать квадраты къ другимъ фигурамъ спольже прилично, какъ и сіи другія фигуры къ квадратамъ.

(70) Предложеніе сіе имѣетъ свою силу, когда будетъ вмѣсто четырехъ три прямыхъ.

(71) Слѣдствіе. 1. Треугольники, въ коихъ одинъ уголъ равенъ одному углу, суть взаимно въ сложенномъ отношеніи изъ отношеній сторонъ, кои около сихъ равныхъ угловъ.

Слѣдствіе 2. Треугольники и параллелограммы, имѣющіе по одному углу равному, суть взаимно какъ прямоугольники содержимые въ сторонахъ, кои около равныхъ угловъ.

Слѣдствіе 3. Треугольники и параллелограммы суть взаимно въ отношеніи сложенномъ, изъ отношенія основанія къ основанію и отношенія высоты къ высотѣ.

(72) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что параллелограммы, имѣющіе по одному углу равному и стороны около равныхъ угловъ пропорціональныя, суть подобны.

(73) Вмѣсто: *Но данная прямолинейная фигура, коей . . . недостатокъ*, можно сказать: но данная прямолинейная фигура не должна быть больше параллелограмма, поставленнаго по половинѣ шой

прямой, и котораго недоспапокъ подобенъ тому же данному параллелограмму.

(74) Оба предъидущія предложенія, то есть 29е и 30е упопреляются весьма часто древними Геометрами.

(75) Слѣдствіе. Ежели къ прямой, которая разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ опношеніи, приложенъ будетъ впрямъ большій опрѣзокъ; то цѣлая прямая, въ точкѣ гдѣ приложенъ опрѣзокъ, будетъ опять разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ опношеніи.

Ибо пусть АВ (ф. 26) будетъ разсѣчена въ С въ крайнемъ и среднемъ опношеніи, такъ что АС будетъ большій опрѣзокъ; и пусть впрямъ съ АВ приложена будетъ ВD равная АС. И поелику какъ АВ къ АС, такъ АС къ СВ; то предложениемъ, какъ АС къ АВ, такъ СВ къ АС; и совокупленіемъ, какъ АС съ АВ къ АВ такъ АС съ СВ къ АС; но АС равна ВD: посему какъ АВ съ ВD къ АВ такъ АС съ СВ къ ВD; то есть, какъ АД къ АВ, такъ АВ къ ВD.

(76) Часть сего предложенія, заключенная въ знакахъ « », помѣщена извѣстнымъ древнимъ издашелемъ и полковникомъ Эвклида Теономъ, коему Р. Симсонъ и другіе новые издатели обыкновенно приписываютъ погрѣшности (большею частию мнимыя), находимыя ими въ Началахъ.

Слѣдствіе. 1. Какъ уголъ при центрѣ круга есть къ чепыремъ угламъ прямымъ, такъ дуга, на коей онъ спойтъ, къ окружности того круга.

Ибо, ежели провеситъ въ кругѣ два поперечника, одинъ къ другому подъ прямыми углами, то сіи углы будутъ спояты на равныхъ дугахъ, кои суть

четверти окружности; посему какъ уголъ при центръ къ чепыремъ прямымъ, такъ дуга, на коей онъ спойтъ, къ четверти окружности. Но какъ прямой уголъ къ чепыремъ прямымъ, такъ четверть къ цѣлой окружности: чего ради равномѣрно, какъ уголъ при центръ, и проч.

Точно также докажется, что какъ вырѣзокъ къ четверти круга, такъ основаніе вырѣзка къ четверти окружности.

Слѣдствіе 2. Подобныя дуги круговъ суть взаимно какъ окружности.

Ибо каждая изъ нихъ есть къ своей окружности, какъ углы при центръ на нихъ стоящіе, кои взаимно равны, къ чепыремъ угламъ прямымъ. Ипакъ, поелику послѣднія отношенія суть тѣже, то и отношенія подобныхъ дугъ, къ своимъ окружностямъ суть тѣже. Слѣдственно подобныя дуги, и проч.

КЪ КНИГЪ ОДИННАДЦАТОЙ.

(77) Прямая же оная называется наклоняющеюся, или наклонною.

(78) Новые Геометры въ семъ опредѣленіи пропускаятъ слово: *острой*.

(79) Такъ же опредѣляются и подобныя наклоненія прямыхъ линій къ плоскостямъ.

Опредѣленіе. Прямая есть параллельная къ плоскости, когда, будучи неопредѣленно продолжена на обѣ стороны, нигдѣ съ плоскостію не встрѣчается.

(80) Сіе опредѣленіе объяснено въ слѣдующемъ примѣчаніи.

(81) Сіе опредѣленіе есть болѣе аксіома, или какъ многимъ полковашелямъ кажется, есть теорема, но есть предложеніе, которое должно быть доказано. Р. Симсонъ въ примѣчаніи своемъ на оное, говоритъ: « поелику смыслъ слова, *равно*, » извѣстенъ и установленъ прежде сего опредѣленія; но предложеніе, которое въ немъ заключается, есть теорема, коея справедливость или несправедливость должна быть доказана, а не принята; и потому Теонъ или иной какой издатель, обративъ теорему, которая должна быть доказана, въ сіе опредѣленіе, поступилъ неуместно. Ибо, что фигуры подобны, доказательство сему должно быть выведено изъ опредѣленія подобнымъ фигурамъ; а что онѣ равны, то доказательство сему должно быть выведено изъ аксіомы: *совпадающія взаимно, суть и взаимно равны*; или изъ предложеній В или Гого или 14го пятой книги. »

Р. Симсонъ потомъ утверждаетъ, что сіе опредѣленіе даже не можетъ быть и теоремою, ибо оно въ нѣкоторыхъ случаяхъ, говоритъ онъ, ложно; что и доказываетъ слѣдующимъ примѣромъ: Вообразимъ, что къ какому нибудь многограннику приспаена пирамида, имѣющая основаніемъ плоскость многогранника; вообразимъ еще, что, вмѣсто того, чтобы приложить пирамиду, она будетъ опята, сдѣлавъ въ многогранникѣ вогнутость пирамиды равную: то получимъ два тѣла, коихъ плоскости равны, каждая каждой; но совѣтъ тѣмъ сіи два тѣла будутъ не равны. Основываясь на семъ Р. Симсонъ уничтожаетъ

вовсе опредѣленіе тѣламъ равнымъ, а опредѣленіе подобнымъ тѣламъ замѣняесть другимъ.

Лежандръ, разбирая Эвклидовы 9е и 10е опредѣленія и замѣчанія Р. Симсона, говоритъ : « фигуры, « коихъ равенство или подобіе доказываетъ Эвклидъ, « основываясь на 9мъ и 10мъ опредѣленіяхъ, суть « таковы, что углы ихъ полстые содержимы не- « больше какъ тремя плоскостями : но если два « угла полстые составлены изъ трехъ плоскихъ, « кои равны каждый каждому ; то довольно ясно « доказано во многихъ мѣстахъ Эвклида, что сіи « углы равны. Съ другой стороны, если два « многогранника имѣютъ плоскости равныя или « подобныя, каждую каждой ; то сходственные углы « полстые будутъ составлены изъ равноугольных « угловъ плоскихъ, кои равны каждый каждому. « Если же сходственные плоскости равны и сход- « ственные полстые углы равны ; то нѣтъ со- « мнѣнія, что тѣла равны, ибо оныя могутъ чрезъ « наложеніе совмѣститься, или по крайней мѣрѣ « будутъ взаимно симметрическія (*). Изъ сего « явствуетъ, что опредѣленія 9е и 10е справедливы « и могутъ быть допущены, по крайней мѣрѣ, когда « углы полстые будутъ прегранные, который « случай одинъ токмо и встрѣчается у Эвклида. « Слѣдственно упрекъ въ неосновательности,

(*) О симметріи и неудобствахъ оной смот. въ Опытѣ Оусов. Елец. Геом. Гурьева, стр. 82 Здѣсь нельзя не замѣтить, что симметрия предполагаетъ опредѣленіе 10е; слѣдственно Лежандръ, доказывая чрезъ симметрію предложенія изъ сего опредѣленія непосредственно слѣдующія, доказываетъ *idem per idem*.

« дѣлаемый Эвклиду или его полкователямъ , пере-
 « спаетъ быть важнымъ , и опносятся покломъ къ
 « нѣкоторымъ ограниченіямъ или объясненіямъ , имъ
 « пропущеннымъ ». Послѣ сего Лежандръ , при
 изслѣдованіи случая , когда въ тѣлахъ полстые
 углы суть многогранные , приведя вышепомѣщенное
 нами возраженіе или примѣръ Р. Симсона о шѣлахъ
 съ приложенною и опнятою пирамидами , говоритъ ,
 что « одно изъ сихъ тѣлъ имѣетъ входящій уголъ ;
 « а болѣе нежели вѣроятно , что Эвклидъ дѣлаетъ
 « исключеніе тѣламъ неправильнымъ имѣющимъ
 « вогнулости или углы входящіе , и что онъ ограни-
 « чилъ себя многогранниками выпуклыми. По при-
 « нятіи же сего исключенія , безъ котораго впро-
 « чемъ другія предложенія были бы несправедливы ,
 « приводимый Р. Симсономъ примѣръ противъ того
 « опредѣленія или теоремы Эвклидовой ничего не
 « доказываетъ ; напротивъ того послѣ многократ-
 « ныхъ о семъ размышленій я думаю , что сія
 « теорема совершенно справедлива , но повидимому
 « не легко оную доказать ».

И дѣйствительно равенство таковыхъ тѣлъ за-
 виситъ наипаче отъ того , что сопровождающія
 ихъ одинакія обстоятельства (равенство и подо-
 біе плоскостей) дѣлаютъ каждую съ своей сто-
 роны фигуру непремѣнною ; и что нѣтъ никакой
 причины , чтобы одна фигура была неравна другой.
 Словомъ , опредѣленіе относительно равенства тѣлъ
 есть такое предложеніе , котораго справедливость
 почти очевидна , и которае , по сей можетъ быть
 самой причинѣ , легче понимать , нежели доказывать.
 Въ заключеніе скажемъ съ Лежандромъ : *сomme se*

théorème est intéressant par lui-même, il serait à désirer qu'on en trouvât une démonstration générale.

Что касается до подобія многоугольниковъ значущагося въ опредѣленіи ϕ мъ и частію ι омъ, то Р Симсонъ замѣняетъ оныя слѣдующимъ: «Подобныя «прямолинейныя тѣла суть тѣ, кои содержимы «равномногими подобными плоскостями и имѣютъ всѣ «толстые углы равные каждый каждому.» Но Лежандръ справедливо замѣчаетъ, что сіе опредѣленіе не можетъ быть принято, ибо заключаетъ въ себѣ лишнія условія: отбросивъ же условіе, заключающее равенство толстыхъ угловъ, сіе опредѣленіе превратится въ Евклидово, которое находить онъ недостаточнымъ, потому что предполагается въ немъ равенство тѣлъ. На семъ основываясь Лежандръ отвергаетъ опредѣленіе Симсоново и замѣняетъ оное слѣдующими двумя: «1. Двѣ прехсторонныя пирамиды суть подобныя, когда имѣютъ «двѣ стороны подобныя, подобнорасположенныя «и равно между собою наклоненныя. 2. Два многогранника суть подобные, когда имѣютъ основанія подобныя, и сходственныхъ угловъ вершины, «которыя суть вѣ сихъ основаній, опредѣлены «вершинами подобныхъ прехсторонныхъ пирамидъ.» Но сіе опредѣленіе, какъ замѣчаетъ Гурьевъ, сверхъ неудобства, что раздѣлено на двѣ части, имѣетъ еще то, что весьма принужденно, и что впоря часть его сомнительна; при чемъ въ самомъ употребленіи пребуетъ многихъ теоремъ, какъ по видѣтъ можно изъ предложенныхъ на сей конецъ Лежандромъ. Впрочемъ, поелику подобіе многогранниковъ есть токмо простое наименованіе свойства

подъ симъ именемъ означенныхъ; по и нѣтъ ни какой причины отвергать Эвклидова опредѣленія, тѣмъ болѣе, что подобіе тѣла съ подобіемъ плоскихъ фигуръ имѣетъ весьма близкое сходство. И дѣйствительно, если дана плоская прямолинейная фигура, и еще прямая линія; то изъ сей прямой извѣстнымъ спроеніемъ опредѣляясь всѣ стороны и всѣ углы многоугольника, то есть всѣ величины предполагаемыя въ опредѣленіи подобныхъ плоскихъ фигуръ. Равнымъ образомъ, если данъ многогранникъ, и еще прямая сходственная съ его стороною; то опредѣляясь всѣ плоскости подобныхъ плоскостямъ даннаго многогранника, то есть всѣ величины предполагаемыя въ опредѣленіи подобныхъ многогранниковъ.

(82) Опредѣленіе. Подобныя прямолинейныя тѣла называющіяся подобно положенными, или подобно написанными изъ тѣхъ ихъ споронъ, кои суть сходственные спороны подобныхъ ихъ плоскостей.

(83) Слѣдствіе. Изъ сего явствуетъ, что прямая, исходящая отъ центра шара до поверхности онаго, суть взаимно равныя; и также всѣ поперечники шара равны взаимно.

(84) Опредѣленіе. Высота тѣла, находящагося между плоскостію и прямою къ ней параллельною, или между двумя плоскостями параллельными, есть прямая, перпендикулярно къ основанію проведенная, отъ какой нисетъ точки взятой на прямой или на плоскости противоположащей основанію. Высота же пирамиды и конуса есть прямая, отъ вершины перпендикулярно къ основанію проведенная.

(85) Слѣдствие. Отсюда явствуетъ , что прямая линія пересѣкаетъ плоскость въ одной точкѣ.

(86) По мнѣнію нѣкоторыхъ полковашелей сіе предложеніе непосредственно слѣдуетъ изъ опр. 35 и 7 кн. 1.

(87) И опть тойже почки внѣ плоскости не могутъ быть проведены двѣ прямыя перпендикулярныя къ оной. Ибо , естли возможно , пусть проведены будутъ ; то онѣ будутъ параллельны*, что *6. вѣрно.

(88) Въ семъ предложеніи должно , или по крайней мѣрѣ можно , пропустить слѣдующее : попому же въ естѣ и къ плоскости . . . прямыхъ АВ, ВС.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

(89) Прямая , перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей , перпендикулярна и къ другой.

Пусть будутъ параллельныя плоскости АВ, СD (ф. 27) ; и пусть прямая ЕF будетъ перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ плоскостей , АВ. Говорю , что ЕF перпендикулярна и къ плоскости СD.

Пусть чрезъ ЕF проведены будутъ двѣ плоскости ; и одна изъ нихъ пусть пересѣкаетъ параллельныя плоскости въ прямыхъ ЕА, FC , а другая въ прямыхъ ЕВ, FD.

Итакъ ЕА параллельна къ FC , а ЕВ къ FD*. *16. И поелику ЕF перпендикулярна къ плоскости АВ; то ЕF со всѣми прямыми линіями , съ нею

встрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, *отр.3. дѣлаеть углы прямые*. Встрѣчается же съ EF каждая изъ прямыхъ EA , EB , лежащихъ на той плоскости: посему каждый изъ угловъ FEA , FEB есть прямой. И поелику FC параллельна къ AF , и на нихъ падаетъ EF : то два угла FEA , EFC равны *29. I. двумъ прямымъ*; но уголъ FEA прямой, посему и уголъ EFC прямой. Потому же и уголъ efd прямой. Чего ради EF къ каждой изъ прямыхъ FC , FD есть подъ прямыми углами. Но ежели прямая, къ двумъ прямымъ встрѣчающимся взаимно, будетъ поспавлена подъ прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченіи; то сія прямая будетъ подъ прямыми *4. углами и къ плоскости тѣхъ прямыхъ*: посему EF подъ прямыми углами къ плоскости прямыхъ FC , FD . Но сія плоскость есть плоскость CD : посему EF перпендикулярна къ плоскости CD .

Итакъ прямая перпендикулярная, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

(90) Плоскость, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой.

Пусть будутъ параллельныя плоскости AB , CD (ф. 28); и пусть плоскость EF будетъ перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, AB . Говорю, что EF перпендикулярна и къ плоскости CD .

Пусть взаимныя сѣченія плоскостей AB , CD съ плоскостію EF будутъ прямыя GF , FI ; возьми на GF какую внесъ точку G ; и опъ точки G

проведи на плоскости EF , подъ прямыми углами къ GF , прямую GE^* . *11, I.

Поселику плоскость EF перпендикулярна къ плоскости AB , и прямая GE проведена на плоскости EF , подъ прямыми углами къ GF взаимному сѣченію сихъ плоскостей; то прямая GE перпендикулярна къ плоскости AB^* . Но плоскость AB ^{*опр. 4.} параллельна къ плоскости CD ; а прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой*: посему GE ^{*А.} перпендикулярна и къ плоскости CD . Но ежели прямая будетъ подъ прямыми углами къ какой нпестъ плоскости; то всякія плоскости, проходящія чрезъ сію прямую, будутъ къ тойже плоскости подъ прямыми углами*: слѣдственно и плоскость EF перпендикулярна къ плоскости CD . *18.

Итакъ плоскость, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

(91) Параллелепипеды, содержимые равноугольными плоскостями, суть взаимно въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній споронъ, кои около ихъ толстыхъ угловъ.

Пусть будутъ параллелепипеды AB, CD (ф. 29), содержимые равноугольными плоскостями; а именно: пусть будетъ равноугольна плоскость AC плоскости CN , плоскость AN плоскости CR , и плоскость HC плоскости RN : посему и прочія три плоскости параллелепипеда AB равноугольны прочимъ тремъ параллелепипеда CD . Говорю, что AB къ CD имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ CF , и EG къ FN , и EH къ FR .

Продолжи AE , GE , HE впрямъ; и положи EK равную CF , и EL равную FN , и еще EM равную FR ; и дополни параллелограммъ LK , который бу-
 въ33. деть, какъ уже доказано было, равенъ параллелограмму CN . Изъ основанія LK дополни параллелепипеды LQ и KP ; и возьми какую ни есть пря-
 акс.а, V. мую S ; и сдѣлай какъ AE къ EK , такъ S къ T^ , и какъ GE къ EL , такъ T къ V , и какъ HE къ EM , такъ V къ X .

Поелику параллелепипеды AB , LQ имѣють ту же высоту; то какъ AB къ LQ , такъ основаніе
 32. AG къ основанію KL^ . Но AG къ KL имѣеть отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ EK ,
 23, VI. и GE къ EL^ , которое есть отношеніе прямыхъ S
 (45). къ V^ : посему какъ S къ V , такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду LQ . И поелику параллелепипедъ QR пересѣченъ плоскостію LK , параллельною къ пропивулежащимъ плоскостямъ: то какъ основаніе NK къ основанію KM , такъ параллелепипедъ QL
 25. къ параллелепипеду KP^ . Но какъ основаніе NK
 I, VI. къ основанію KM , такъ HE къ EM^ , и такъ V къ X , по строенію: посему какъ V къ X , такъ
 II, V. QL къ KP^ . И такъ, поелику доказано, что какъ S къ V , такъ параллелепипедъ AB къ LQ ; и какъ V къ X , такъ параллелепипедъ QL къ KP : то равномѣстно, какъ S къ X , такъ параллелепипедъ
 22, V. AB къ параллелепипеду KP^ . Но KP равенъ CD :
 7 и II, V. посему какъ S къ X , такъ AB къ CD^ . И поелику есть одинъ рядъ величинъ S , T , V , X имѣющихъ взаимное отношеніе; а другой рядъ отношеній: AE къ EK ; GE къ EL ; HE къ EM , которыя суть тѣ же съ отношеніями величинъ

перваго ряда ; что S къ X имѣеть отношеніе сложенное изъ опношеній AE къ EK, и GE къ EL, и HE къ EM*: посему параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣеть опношеніе сложенное изъ опношеній AE къ EK, и GE къ EL, и HE къ EM. Но опношеніе сложенное изъ сихъ есть поже съ опношеніемъ сложеннымъ изъ опношеній AE къ CF, и GE къ NF, и EH къ FR*; ибо EK равна CF, а EL равна FN, *7^иE, V. и EM равна FR: чего ради параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣеть опношеніе сложенное изъ опношеній AE къ CF, и GE къ NF, и EH къ FR*.

*11, V.

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

КЪ КНИГЪ ДВѢНАДЦАТОЙ.

(92) Слѣдствіе. Очерпанія подобныхъ многоугольниковъ въ кругахъ, суть взаимно какъ поперечники круговъ.

Ибо премѣненіемъ, какъ AB къ FG, такъ BC къ GH, и такъ CD къ HK, и такъ DE къ KL, и еще такъ EA къ LF. Но какъ одна предъидущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ*: посему какъ AB къ FG, такъ *12, V. AB, BC, CD, DE, EA къ FG, GH, HK, KL, LF; то есть, такъ очерпаніе многоугольника ABCDE къ очерпанію многоугольника FGHKL. Доказано же, что какъ AB къ FG, такъ поперечникъ BM къ поперечнику GN: слѣдственно какъ очерпаніе многоугольника ABCDE къ очерпанію многоугольника FGHKL, такъ поперечникъ BM къ поперечнику GN*. *11, V.

(93) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что подобные многоугольники въ кругахъ, суть взаимно какъ круги. Ибо и многоугольники и круги суть взаимно въ удвоенномъ отношеніи поперечниковъ.

(94) Предложенную нами фигуру можно замѣнить фигурою 3о.

(95) Сіе слѣдствіе можно еще доказать такъ:

Пусть будутъ подобныя пирамиды, коихъ основанія многоугольники $ABCDE$, $FGHKL$, а вершины точки M , N ; сходственные же споропы пусть будутъ AB , FG ; и пусть основанія $ABCDE$, $FGHKL$ раздѣлены будутъ на подобные преугольники ABC , ACD , ADE , FGH , FHK , FKL .*

Поелику преугольникъ ABM подобенъ преугольнику FGN , и преугольникъ ABC преугольнику FGH : то какъ AM къ AB , такъ FN къ FG ; и какъ AB къ AC , такъ FG къ FH : посему, равноѣспно, какъ AM къ AC , такъ FN къ FH *. Потому же и какъ AC къ CM , такъ FH къ HN . Чего ради еще равноѣспно, какъ AM къ MC , такъ FN къ NH . Ипакъ споропы преугольниковъ ACM , FHN суть пропорціональныя: и потому преугольникъ ACM есть

равноугольный преугольнику FHN *; слѣдственно и подобенъ ему. Чего ради пирамида $ABCM$ подобна пира-

мидѣ $FGHN$ *, ибо онѣ содержатся равномногими подобными плоскостями. Потому же и пирамида $ACDM$ подобна пирамидѣ $FHKN$, а пирамида $ADEM$ пирамидѣ $FKLN$. И поелику подобныя пирамиды, имѣющія преугольныя основанія, суть взаимно въ упрошен-

номъ отношеніи сходственныхъ споропъ*: то пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $FGHN$ имѣетъ упрощенное

опношеніе прямыхъ AC къ FN . Поэтому же и пирамида $ACDM$ къ пирамидѣ $FNKN$ имѣетъ упроенное опношеніе AC къ FN . Чего ради какъ пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $FGHN$, такъ пирамида $ACDM$ къ пирамидѣ $FNKN$ *. Подобно же докажемъ, *сл.Е,У. что какъ пирамида $ACDM$ къ пирамидѣ $FNKN$, такъ пирамида $ADEM$ къ пирамидѣ $FKLN$. И поелику какъ одна предыдущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предыдущія ко всѣмъ послѣдующимъ*; посему какъ пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $FGHN$, такъ цѣлая пирамида, $ABCDEM$ къ цѣлой $FGHKLN$. Но пирамида $ABCM$ къ пирамидѣ $FGHN$ имѣетъ упроенное опношеніе прямыхъ AB къ FG : посему и пирамида $ABCDEM$ къ пирамидѣ $FGHKLN$ имѣетъ упроенное опношеніе прямыхъ AB къ FG . *12,У.

Слѣдствіе. Всякія подобныя прямолинейныя тѣла суть взаимно въ упроенномъ опношеніи сходственныхъ сторонъ. Ибо опъ нѣкихъ почекъ внутри ихъ или опъ вершинъ полспыхъ ихъ угловъ, можно раздѣлить сіи тѣла на пирамиды, коихъ вершины будутъ при тѣхъ почкахъ, а основанія плоскости, коими ограничиваются тѣла. Сіи пирамиды будутъ взаимно подобны и пропорціональны цѣлымъ тѣламъ, что докажется какъ и предыдущее слѣдствіе. Но поелику сіи пирамиды суть взаимно въ упроенномъ опношеніи сходственныхъ сторонъ; то и оныя цѣлыя тѣла будутъ взаимно въ упроенномъ опношеніи тѣхъ же сходственныхъ сторонъ.

(96) Слѣдствіе. 1. Подобно докажемъ, что равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основаніями параллелограммы,

основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И копорыхъ пирамидъ, имѣющихъ основаніями параллелограммы, основанія обратно пропорціональны высотамъ, шѣ суть равныя.

Слѣдствіе 2. Равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія многоугольныя, основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И копорыхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія многоугольныя, основанія обратно пропорціональны высотамъ, шѣ суть равныя. Ибо, есѣли составлены будутъ параллелограммы равныя основаніямъ пирамидъ; и на сихъ параллелограммахъ воспавлены будутъ пирамиды равновысопныя первымъ пирамидамъ: то пирамиды на параллелограммахъ будутъ равны пирамидамъ на многоугольникахъ. И попому предлагаемое справедливо.

(97) Ибо, прошинувъ AS , AP (ф. 31), поелику AK равна AB , и KS равна BP ; то двѣ прямыя AK , KS равны двумъ прямымъ AB , BP , каждая каждой; и основаніе AS равно основанію AP : посему уголъ AKS *8,1. равенъ углу ABP *. А и прямой уголъ SXK равенъ прямому углу BVP : итакъ два преугольника KSX , BPV имѣють два угла равные двумъ угламъ, они же имѣють и одну сторону равную одной споронѣ, кои прошивулежають равнымъ угламъ, то есть SK равную PB : посему и прочія спороны *26,1. будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ*; а посему SX равна PV , и KX равна BV .

(98) Ибо вообрази, что опъ почекъ Q , T (ф. 31) проведены перпендикулярныя прямыя къ плоскости круга $BCDE$, то и онѣ упадутъ на BD , KN ; и чрезъ почки, въ коихъ встрѣпятъ сіи прямыя, прошини

прямую; и еще пропяти BQ , KT : то подобно докажется, что KB параллельна къ TQ . Доказано же, что KB параллельна и къ SP : посему SP параллельна къ TQ *: слѣдственно чепыреугольникъ *9, XI. $SPQT$ есть на одной плоскости. Потому же и чепыреугольникъ $TQRU$ есть на одной плоскости.

(99) И дѣйствительно, поелику KB , BP , KS (ф. 31) равны, а PS меньше; то и углы KYB , BYP , KYS взаимно равны, а уголъ PYS меньше. Но чепыре угла KYB , BYP , PYS , SYK равны чепыремъ прямымъ; посему уголъ KYB тупой, и треугольникъ KBY есть тупоугольный. Въ тупоугольныхъ же треугольникахъ квадрапъ изъ стороны, пропивулежащей тупому углу, больше квадраповъ изъ сторонъ, содержащихъ тупой уголъ: посему квадрапъ изъ BK больше квадраповъ изъ KY , BY . Но квадрапъ изъ KY равенъ квадрапу изъ BY , ибо KY равна BY : посему квадрапъ изъ BK больше нежели двукрапный квадрапъ изъ BY .

Далѣе попомъ, вмѣсто «Отъ точки K проводи перпендикулярную къ BD прямую KZ » лучше сказать: «Пропяти KV : то подобно какъ и прежде докажемъ, что уголъ KVV равенъ углу PBV . И поелику KB равна BP , а BV общая; то двѣ прямыя KB , BV равны двумъ прямымъ PB , BV ; и содержатъ углы равные: посему и уголъ KVB равенъ углу BVP . Но уголъ BVP прямой; посему и уголъ BVK прямой; слѣдственно KV перпендикулярна къ AB ».

Итакъ явно, что линію KZ должно счипать за одну и ту же съ KV .

(100) Какъ доказано въ началѣ (99).

(101) Говорю же, что и прочія плоскости вписаннаго многогранника, кои между дугами ВО, КО (ф. 31), не прикасаются къ меньшему шару.

Опъ А проведи, перпендикулярную къ плоскости четырехугольника SPQT, прямую Ау; и пропями Ру, уѢ: по подобно тому какъ доказано о четырехугольникѣ KBPS и точкѣ У, докажемъ, что точка у есть центръ, а Ру прямая опъ центра круга описаннаго около SPQT; и что SP больше TQ. И поелику четырехугольники KBPS, SPQT суть вписываемые въ кругахъ, и двѣ противоположнія стороны SK, PB четырехугольника KBPS равны двумъ противоположащимъ сторонамъ TS, QR четырехугольника SPQT, каждая каждой; а прочія двѣ стороны KB, SP больше двухъ прочихъ сторонъ SP, TQ, каждая каждая: посему и прямая *лемма. КУ больше прямой Су*. Поелику же АК равна AS; то и квадратъ изъ АК равенъ квадрату изъ AS. Квадрату же изъ АК равны квадраты изъ КУ, УА; а квадрату изъ AS равны квадраты изъ Су, уА: посему квадраты изъ КУ, УА равны квадратамъ изъ Су, уА. Но въ нихъ квадратъ изъ КУ больше квадрата изъ Су, ибо КУ больше Су: посему остальной квадратъ изъ АУ меньше остального изъ уА; а посему Ау больше АУ. Но АУ больше АС или Ag; ипакъ тѣмъ паче Ау больше Ag. Сіе же подобно докажется и о четырехугольникѣ TQRU и о треугольникѣ URO. Такъ же докажемъ и о всѣхъ прочихъ плоскостяхъ помянутаго многогранника, что онѣ не прикасаются къ меньшему шару.

ЛЕММА. Ежели будущъ два четырехугольника ABCD, EFGH (ф. 32) вписанные въ кругахъ, коихъ центры

внутри сихъ чепыреугольниковъ ; и есѣли двѣ проптивулежація спороны DA , CB одного будутъ равны двумъ проптивулежащимъ споронамъ HE , GF другаго , каждая каждой , а прочія двѣ спороны AB , CD будутъ больше прочихъ двухъ EF , GH , каждая каждая : то и прямая опъ центра круга $ABCD$ будетъ больше прямой опъ центра круга $EFGH$, то естѣ AK больше LE .

Ибо, буде не такъ ; то AK или равна LE , или меньше ея. Пустѣ, вопервыхъ, будетъ равна. Пропяни KB , KC , KD , LF , LG , LN . И поелику двѣ прямыя AK , KD равны двумъ прямымъ EL , LN , и основаніе AD равно основанію HE ; посему и уголъ DKA равенъ углу HLE . Попому же и уголъ BKC , равенъ углу GLF . Еще же , поелику двѣ прямыя AK , KB равны двумъ прямымъ EL , LF ; но основаніе AB больше основанія EF : посему и уголъ AKB больше угла ELF . Попому же и уголъ DKC больше угла HLG . Чего ради чепыре угла около почки K сущъ больше чепырехъ угловъ около почки L . Но чепыре угла около K равны чепыремъ прямымъ : посему чепыре угла около L меньше чепырехъ прямыхъ : что невозможно : слѣдственнo AK не равна EL .

Говорю еще , что и не меньше. Ибо , буде возможно, пустѣ будетъ меньше. Возьми каждую изъ прямыхъ LM , LN равную AK ; и пропяни MN . Ипакъ двѣ прямыя AK , KD равны двумъ прямымъ ML , LN , и содержатъ углы равные : посему основаніе AD равно основанію MN . И поелику EN параллельна къ MN : то треугольникъ ENL естѣ равноугольный треугольнику NLM , слѣдственнo и

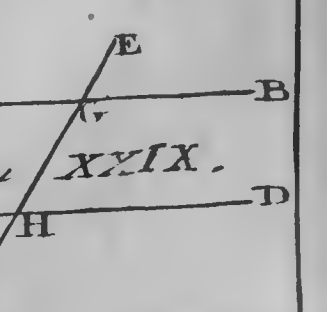
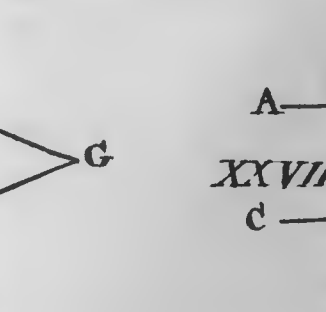
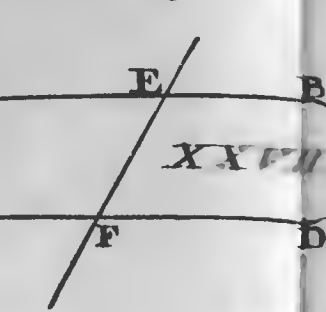
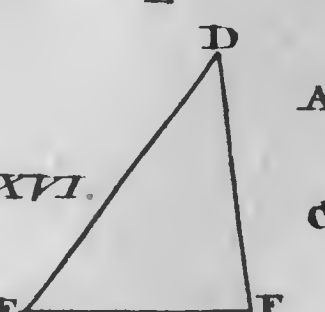
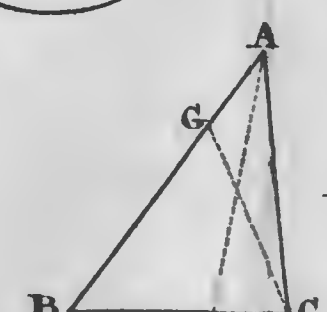
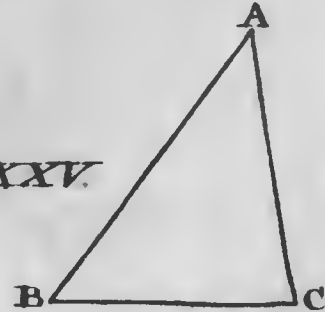
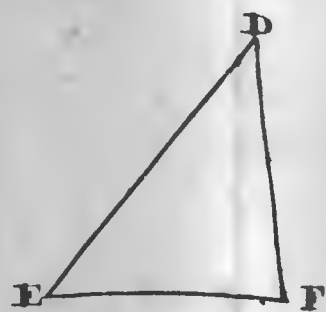
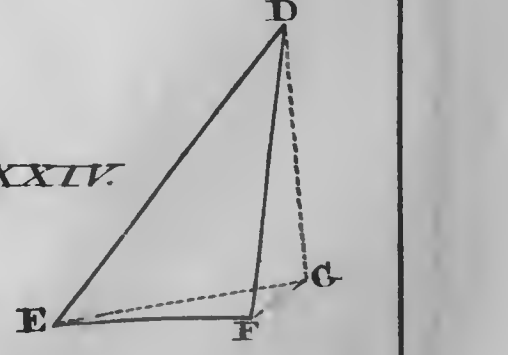
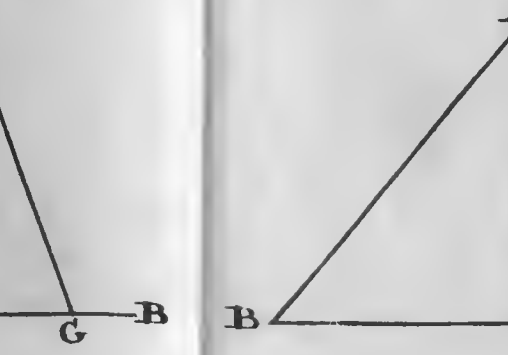
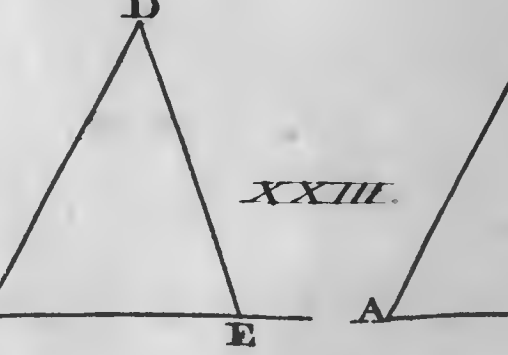
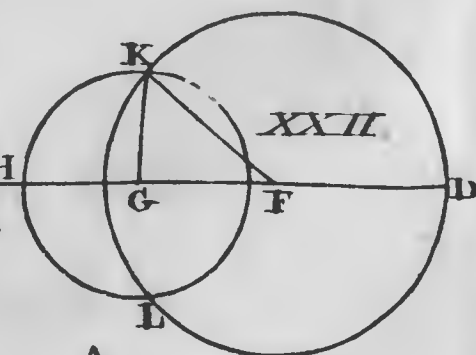
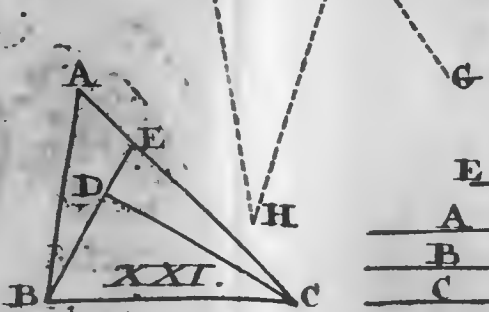
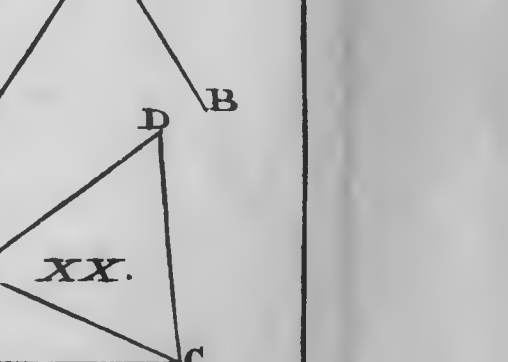
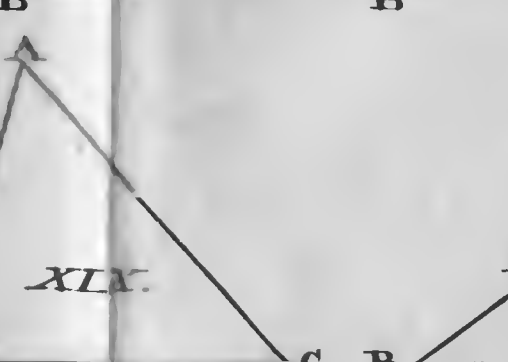
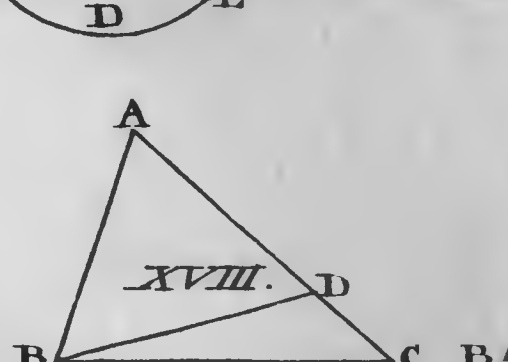
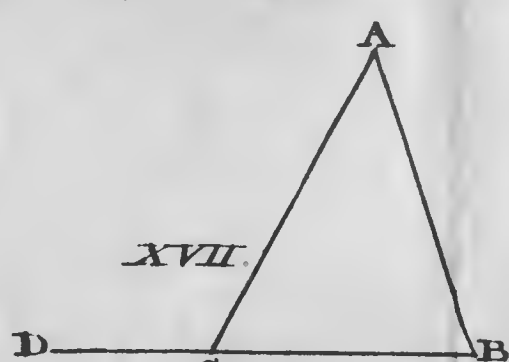
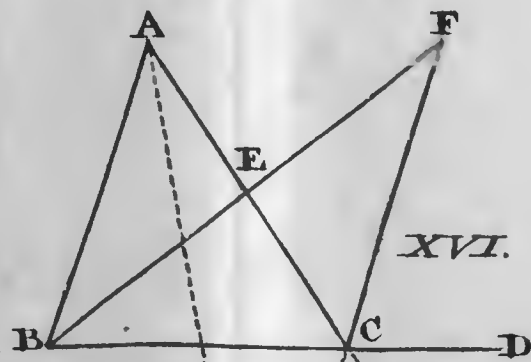
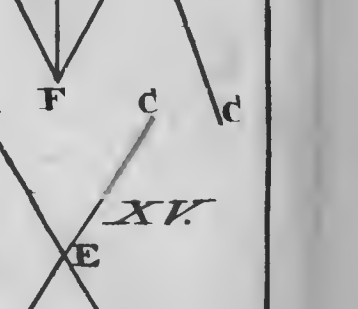
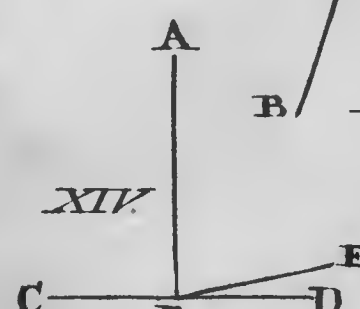
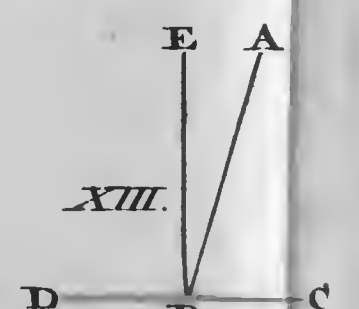
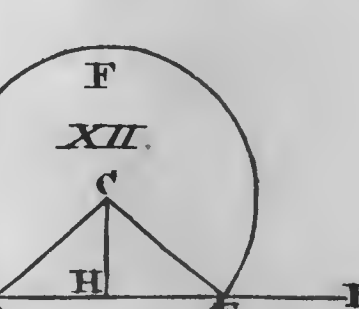
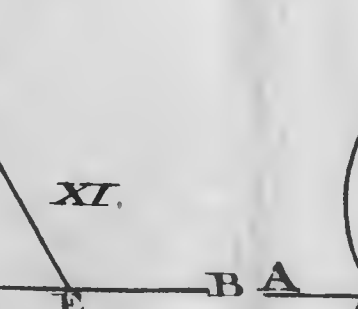
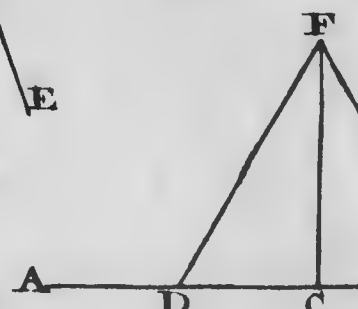
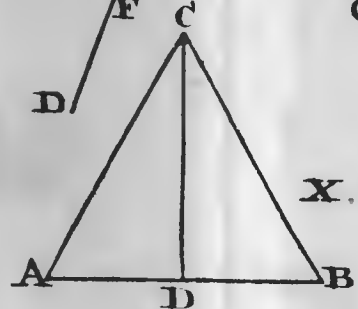
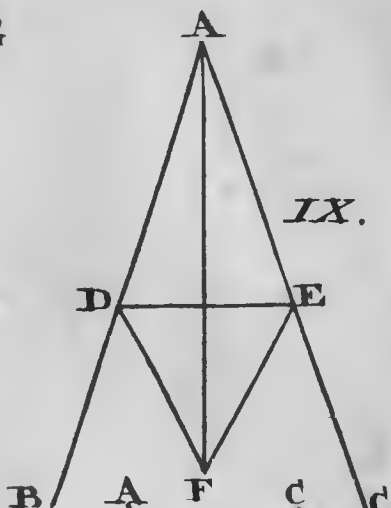
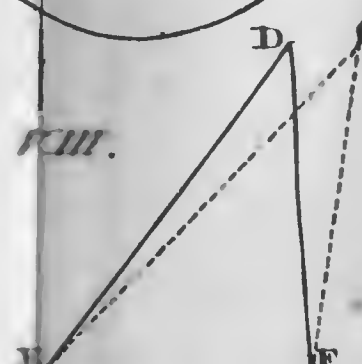
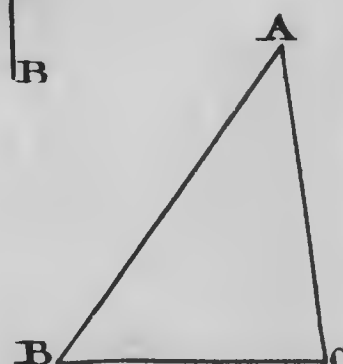
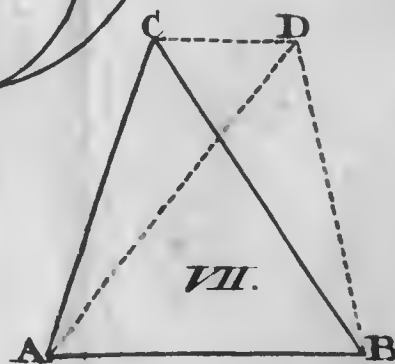
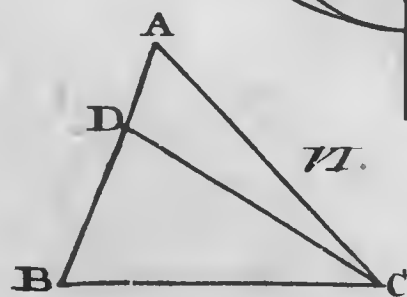
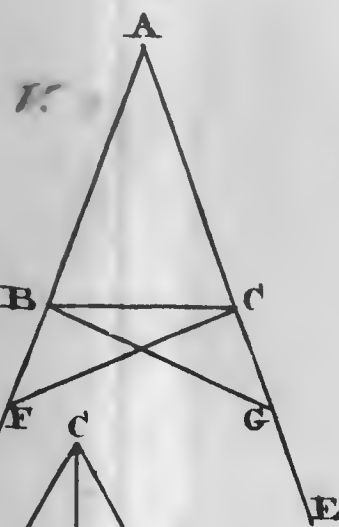
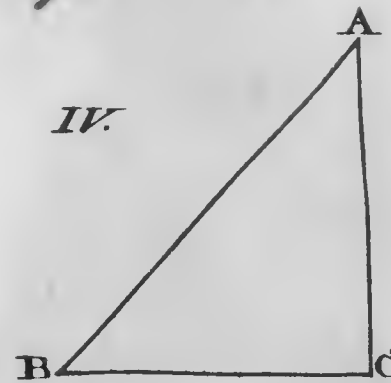
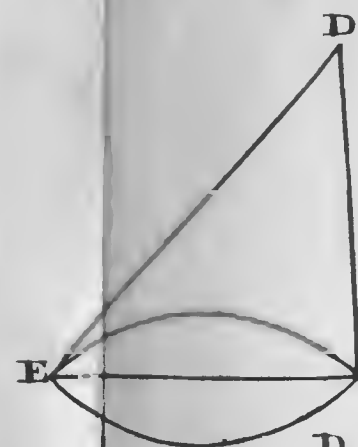
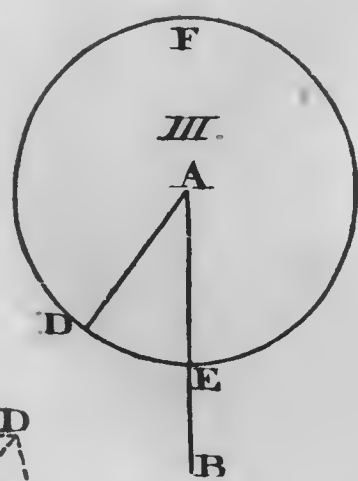
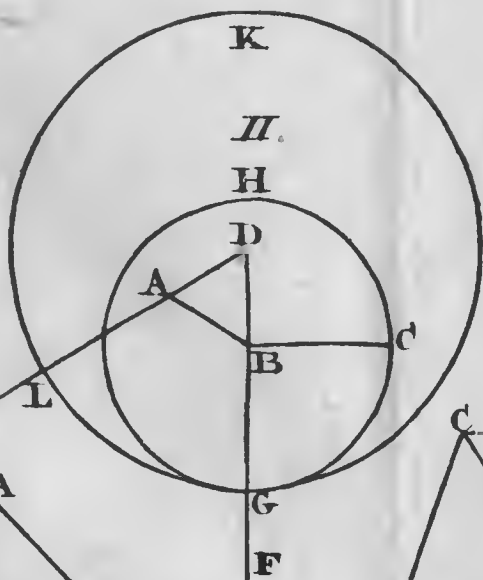
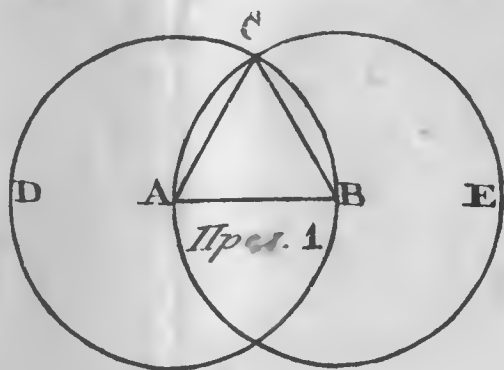
подобенъ ему. Посему какъ LE къ LM , такъ EN къ MN : но LE больше LM ; посему EN больше MN . По положенію же EN равна AD , посему и AD больше MN ; но и равна ей, по доказанному; что невозможно: чего ради AK не меньше EL . Доказано же, что и ни равна; слѣдственно AK больше LF . ч. и д. н.

Еслили будетъ остроугольный треугольникъ OPQ , коего двѣ стороны OP , OQ равны двумъ пропывулежащимъ чепыреугольника $ABCD$ сторонамъ DA , CB , каждая каждой; а основаніе его PQ будетъ меньше котороя ниестъ изъ остальныхъ споронъ AB , CD : то подобно докажемъ, что AK будетъ больше прямыя опъ центра круга описаннаго около треугольника OPQ .

(102) Слѣдствіе. Отсюда явспвуется, что подобныя прямолінейныя тѣла, вписанныя въ шарахъ, суть взаимно какъ сіи шары.

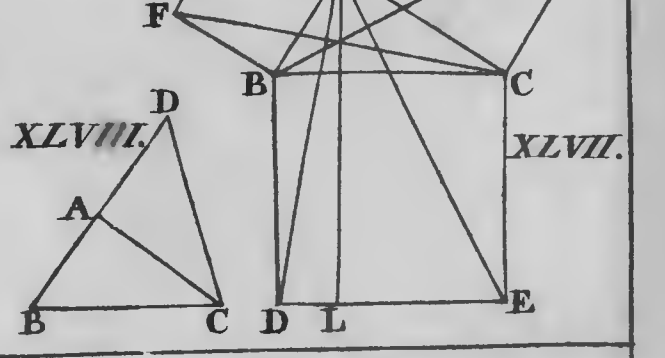
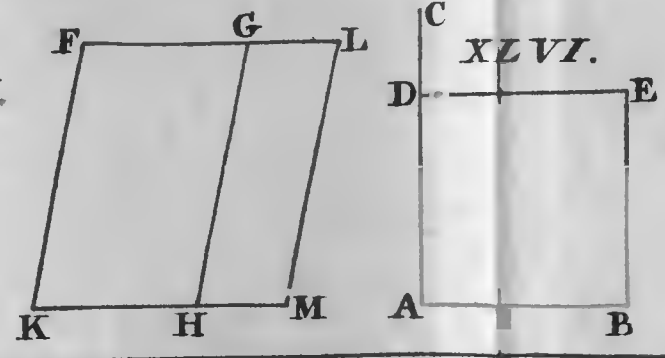
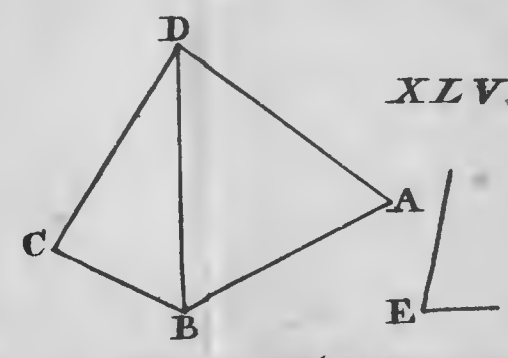
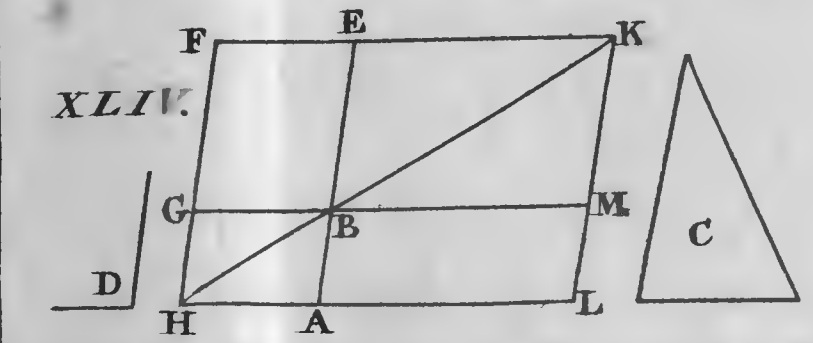
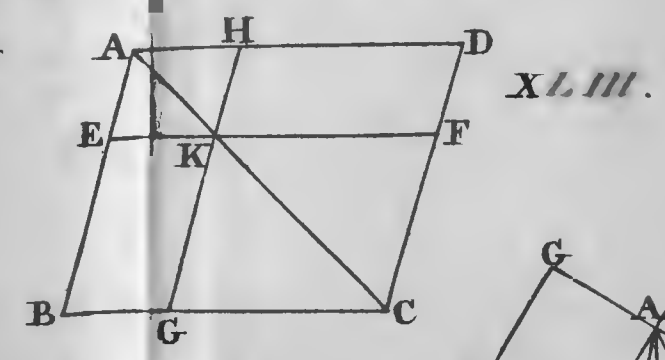
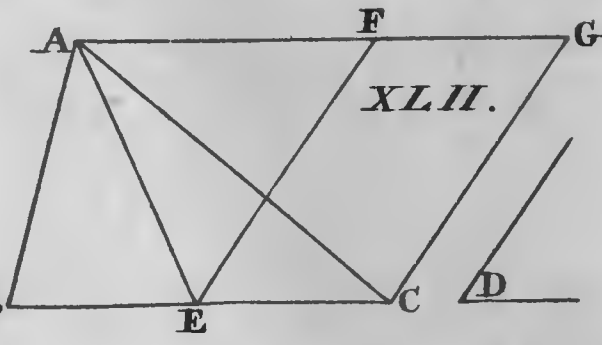
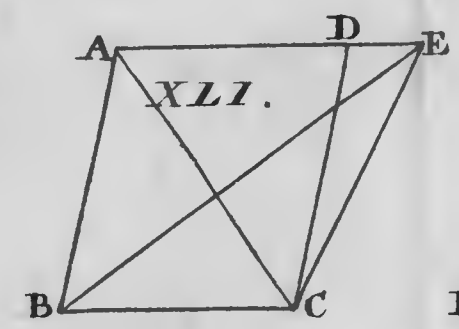
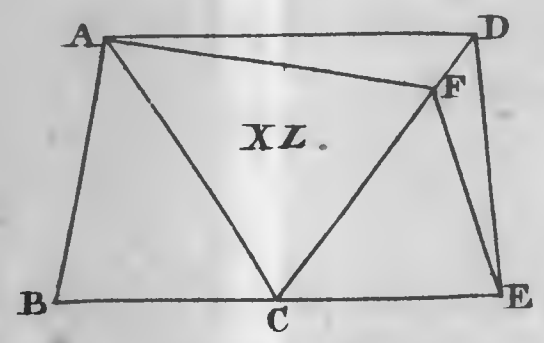
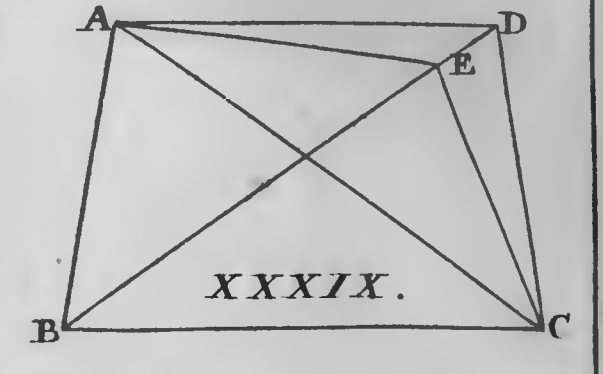
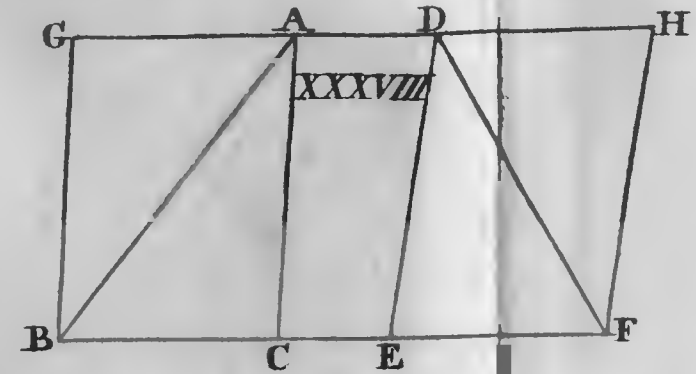
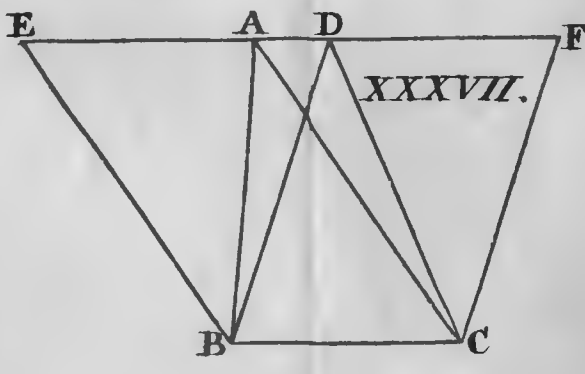
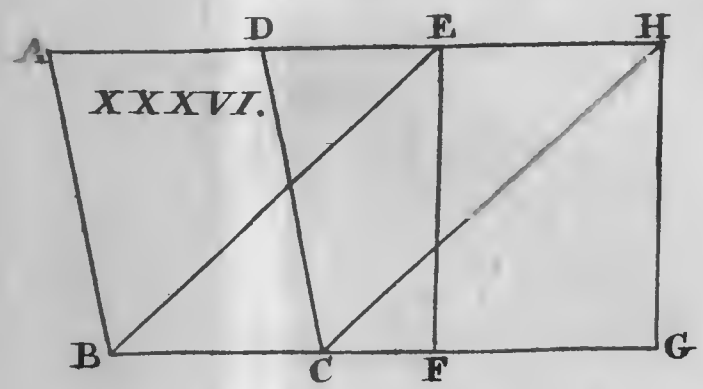
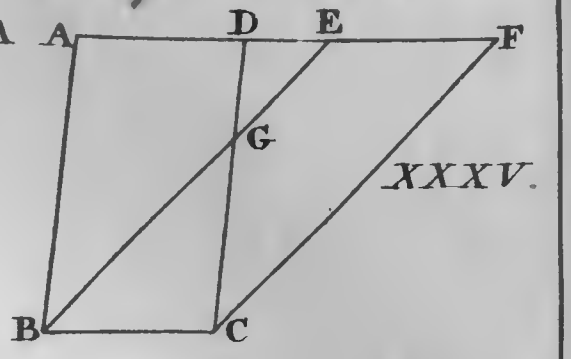
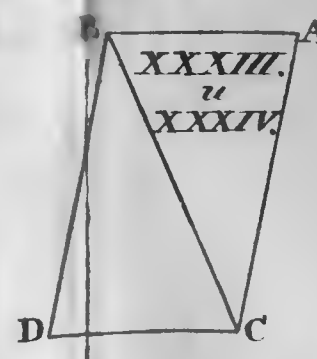
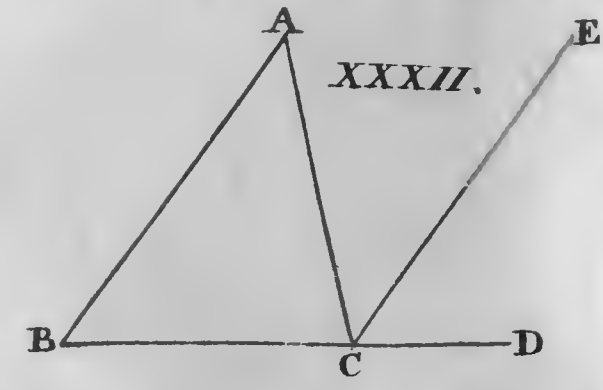
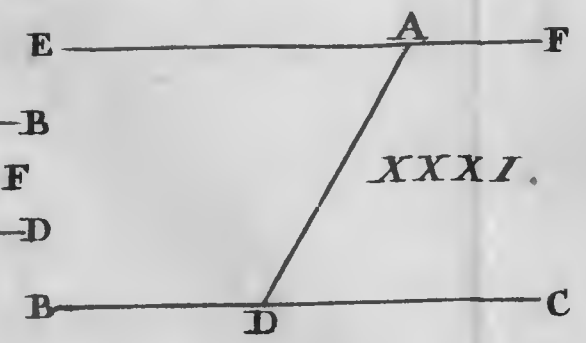
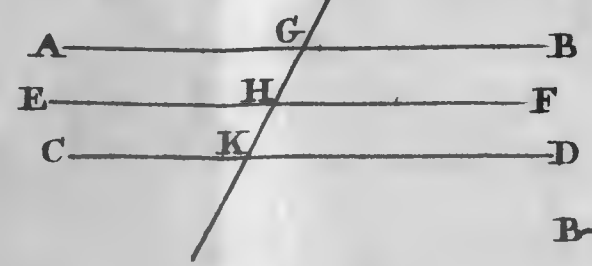
К О Н Е Ц Ъ

Звездовых Начал Третья первая.

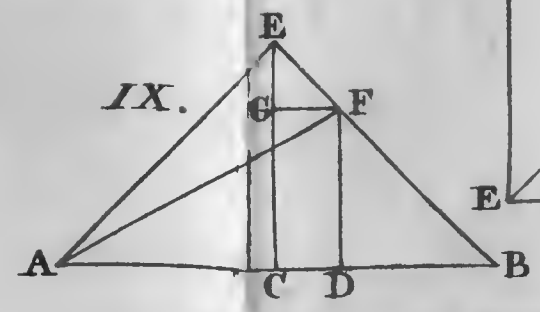
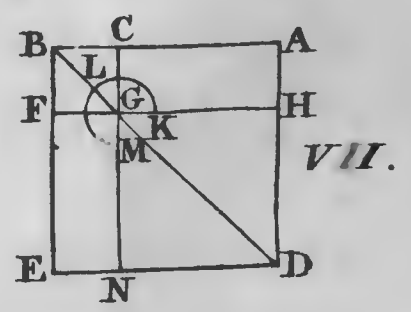
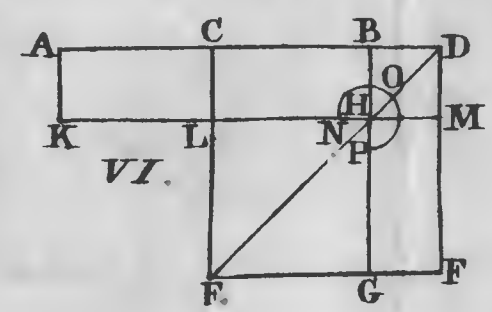
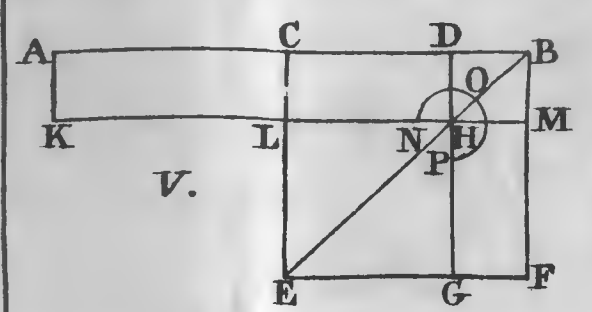
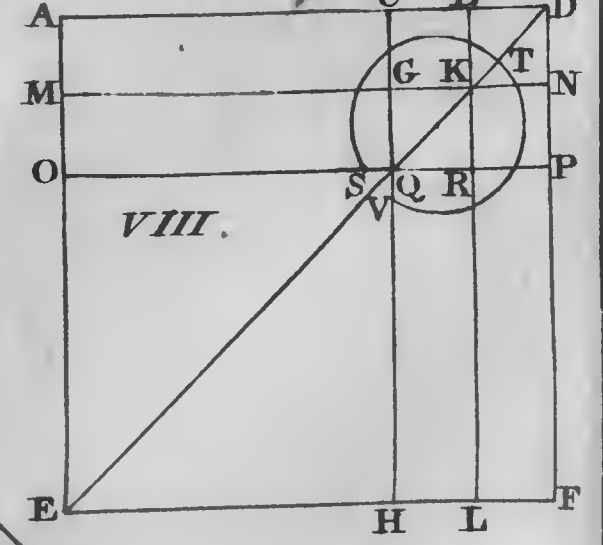
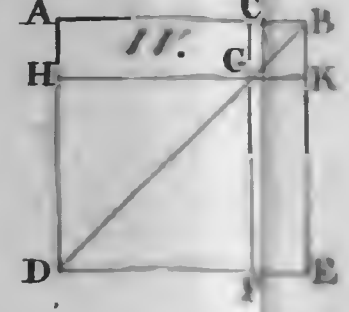
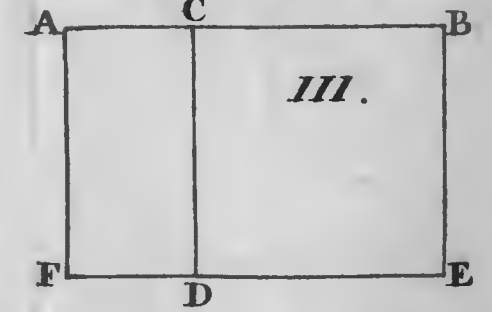
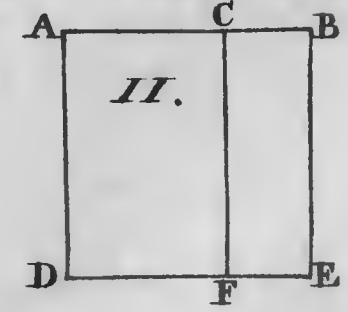
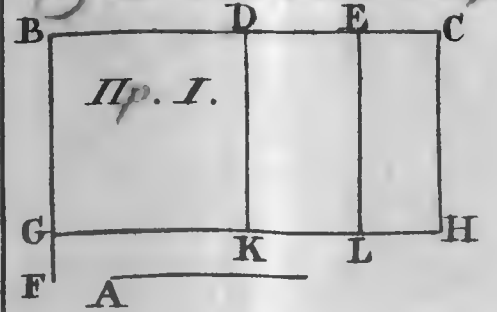


Декидовских Началъ Книга первая.

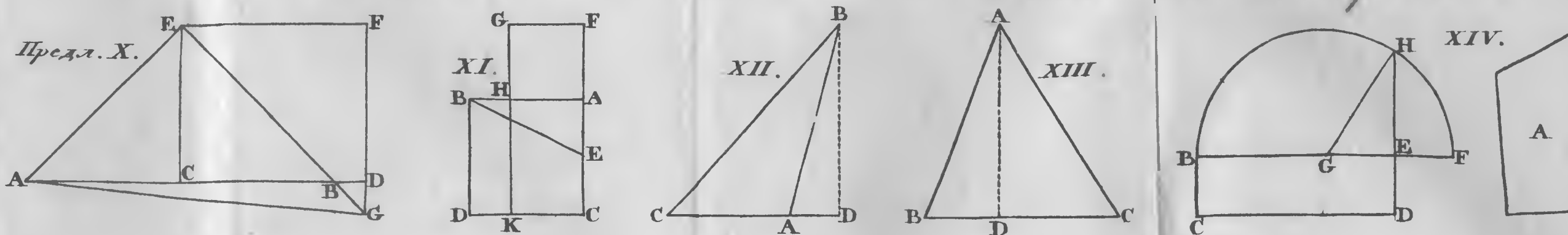
Предл. XXX.



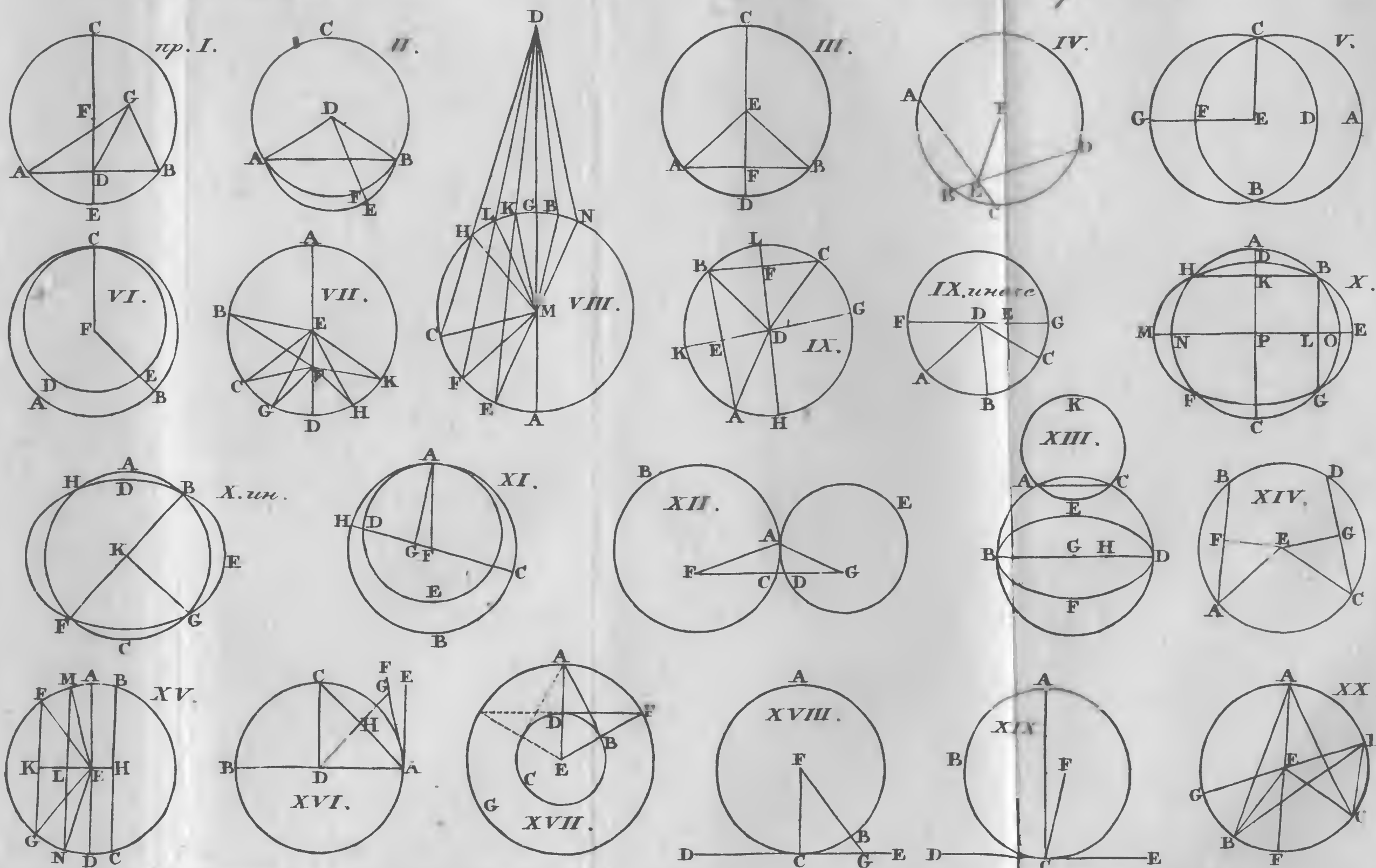
Декидовских Началъ Книга вторая.



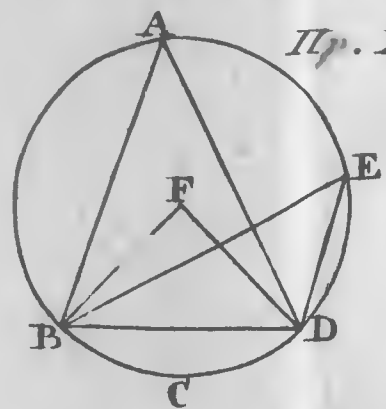
Эвклидовых Началъ Книга вторая.



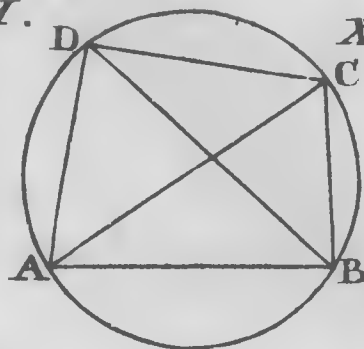
Эвклидовых Началъ Книга третья.



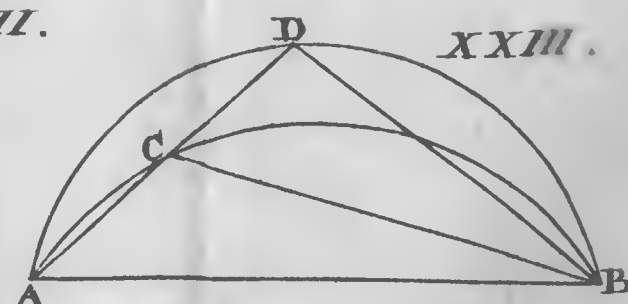
Эвклидовых Началъ Книга третья.



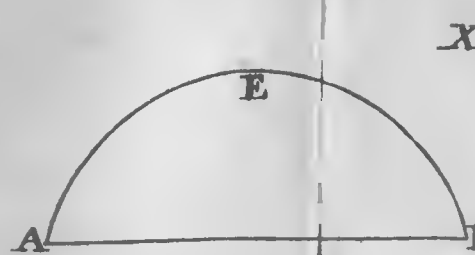
Пр. XXI.



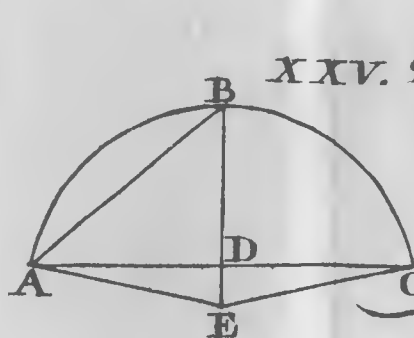
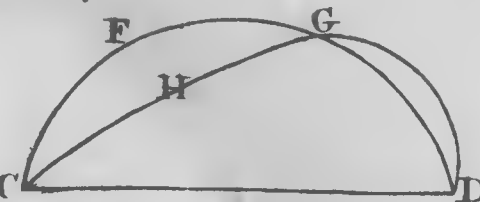
XXII.



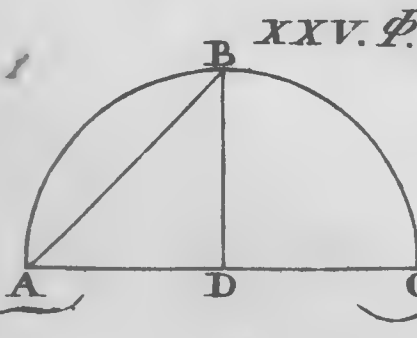
XXIII.



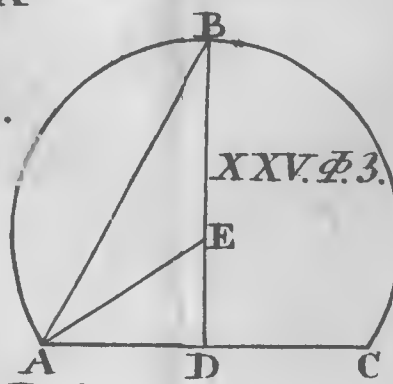
XXIV.



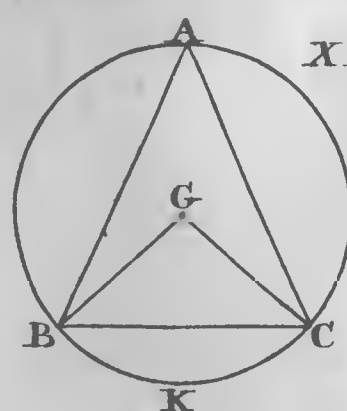
XXV. Ф. 1



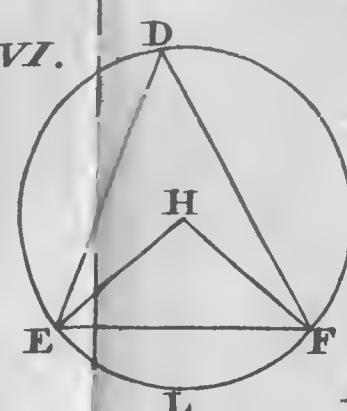
XXV. Ф. 2.



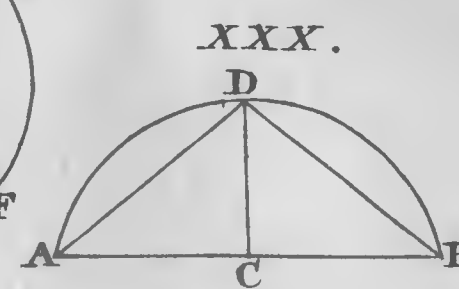
XXV. Ф. 3.



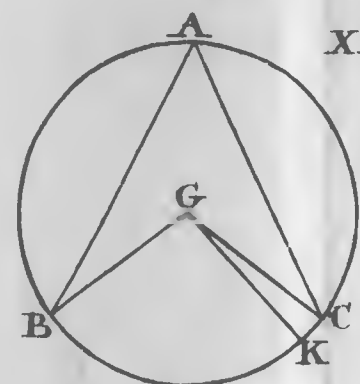
XXVI.



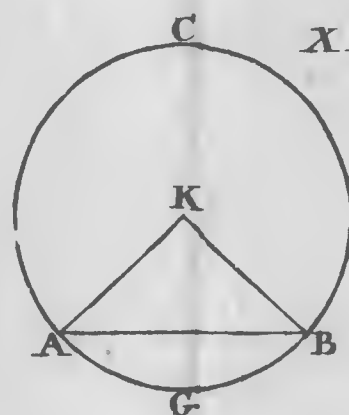
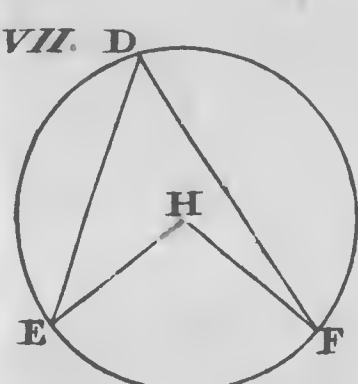
XXVII.



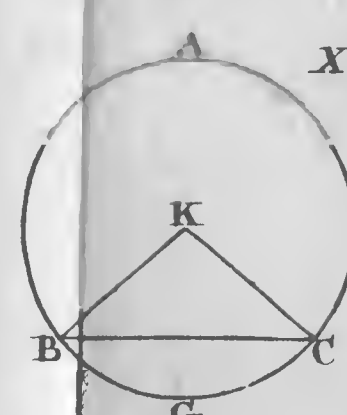
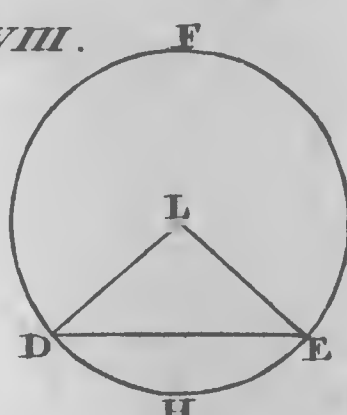
XXIX.



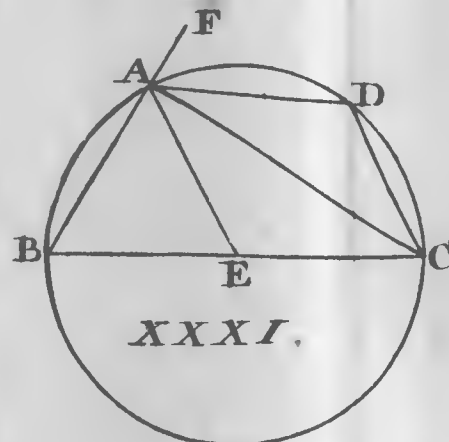
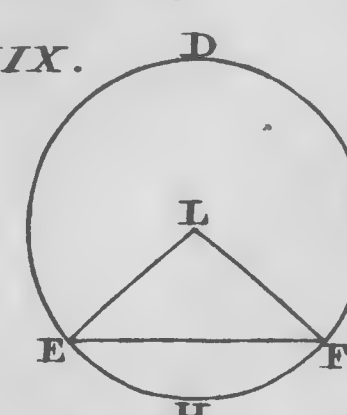
XXVIII.



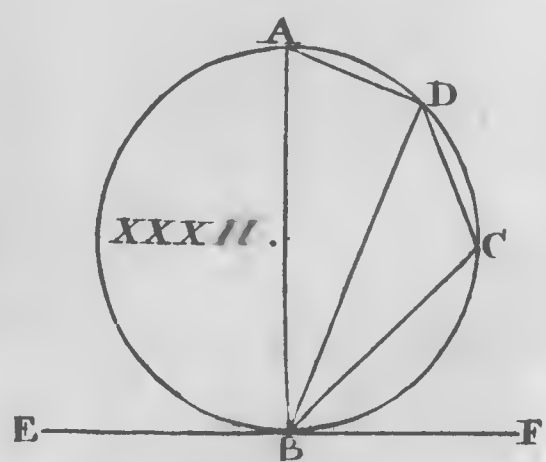
XXVIII.



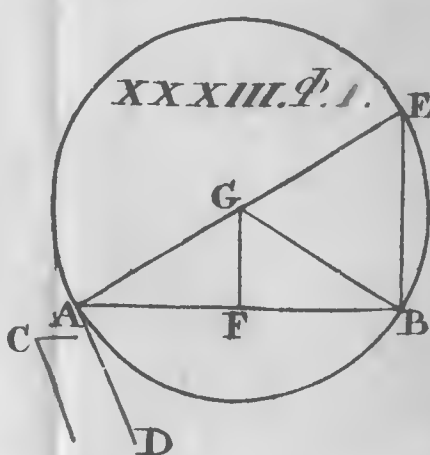
XXIX.



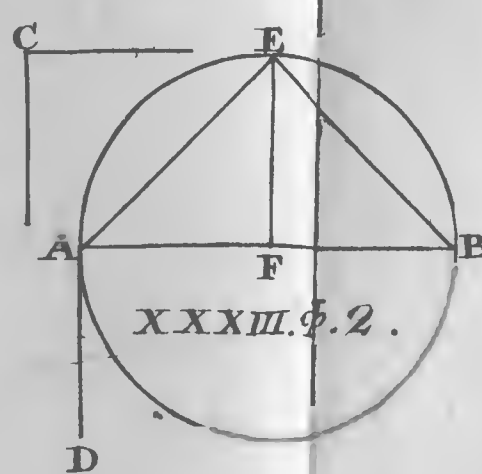
XXXI.



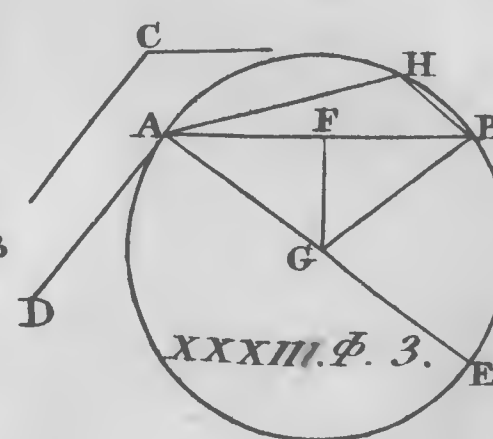
XXXII.



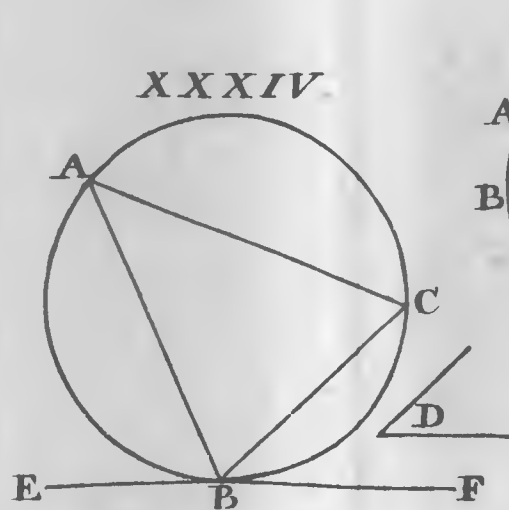
XXXIII. Ф. 1.



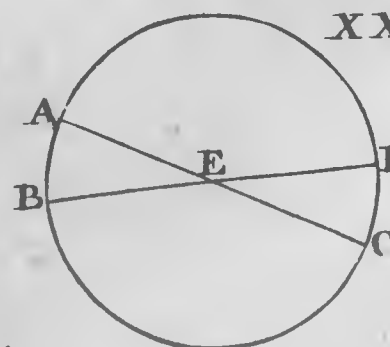
XXXIII. Ф. 2.



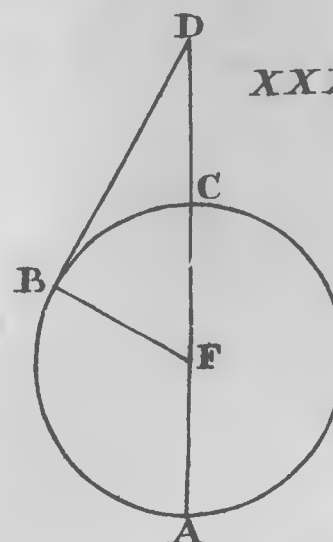
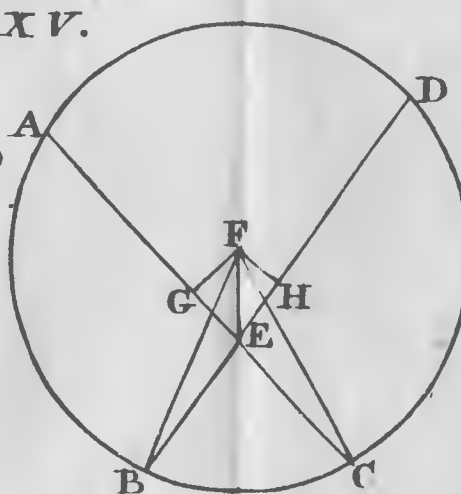
XXXIII. Ф. 3.



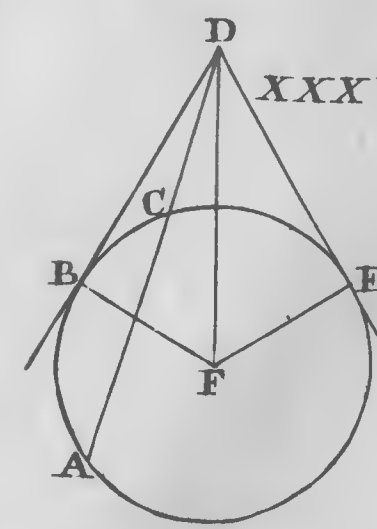
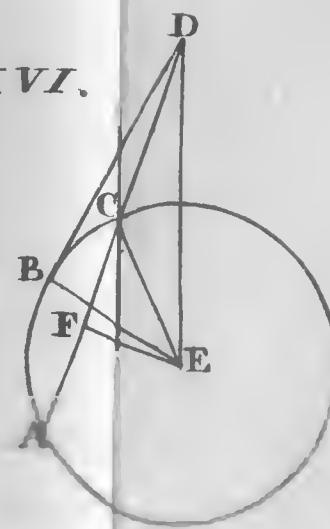
XXXIV.



XXXV.

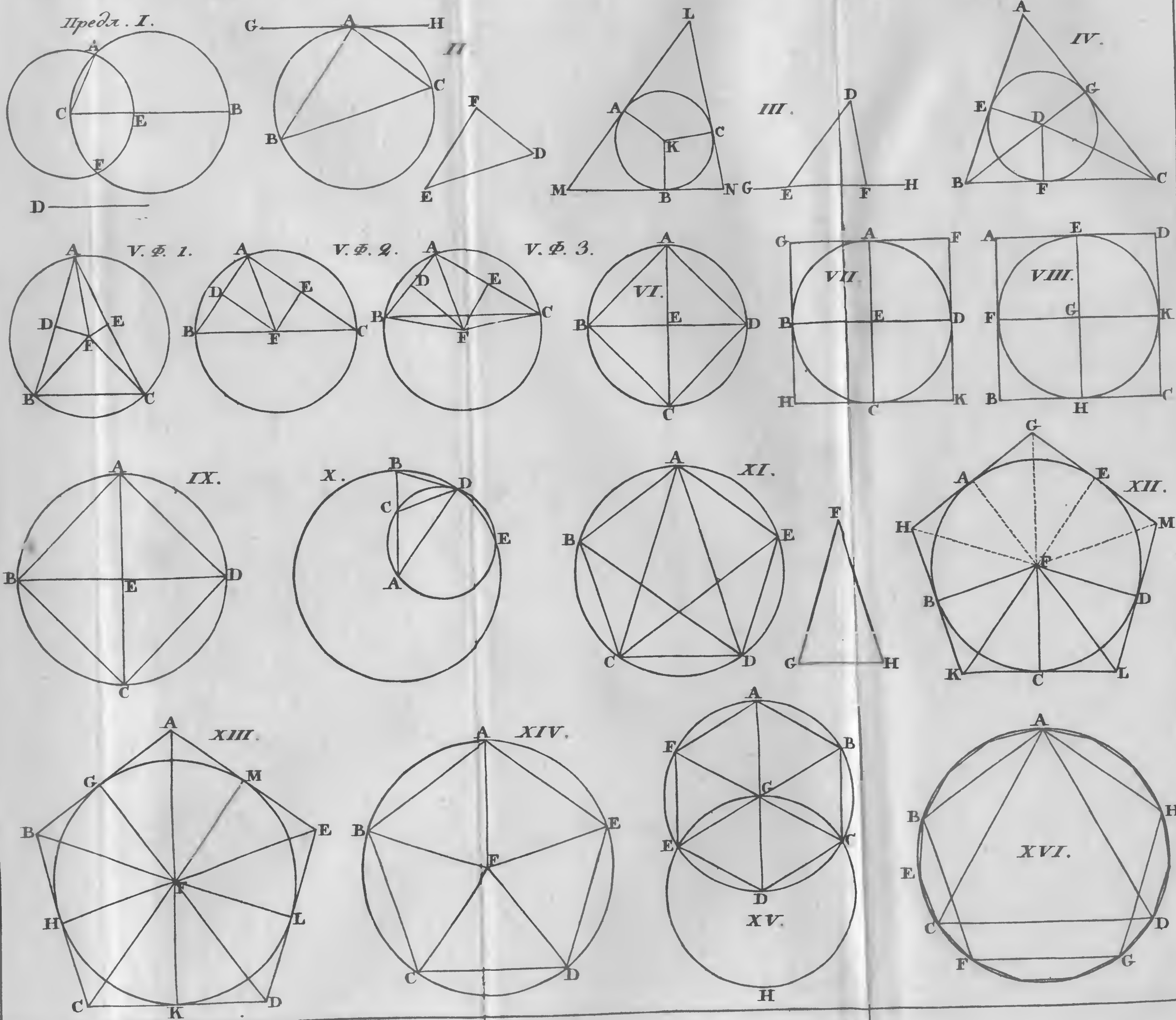


XXXVI.

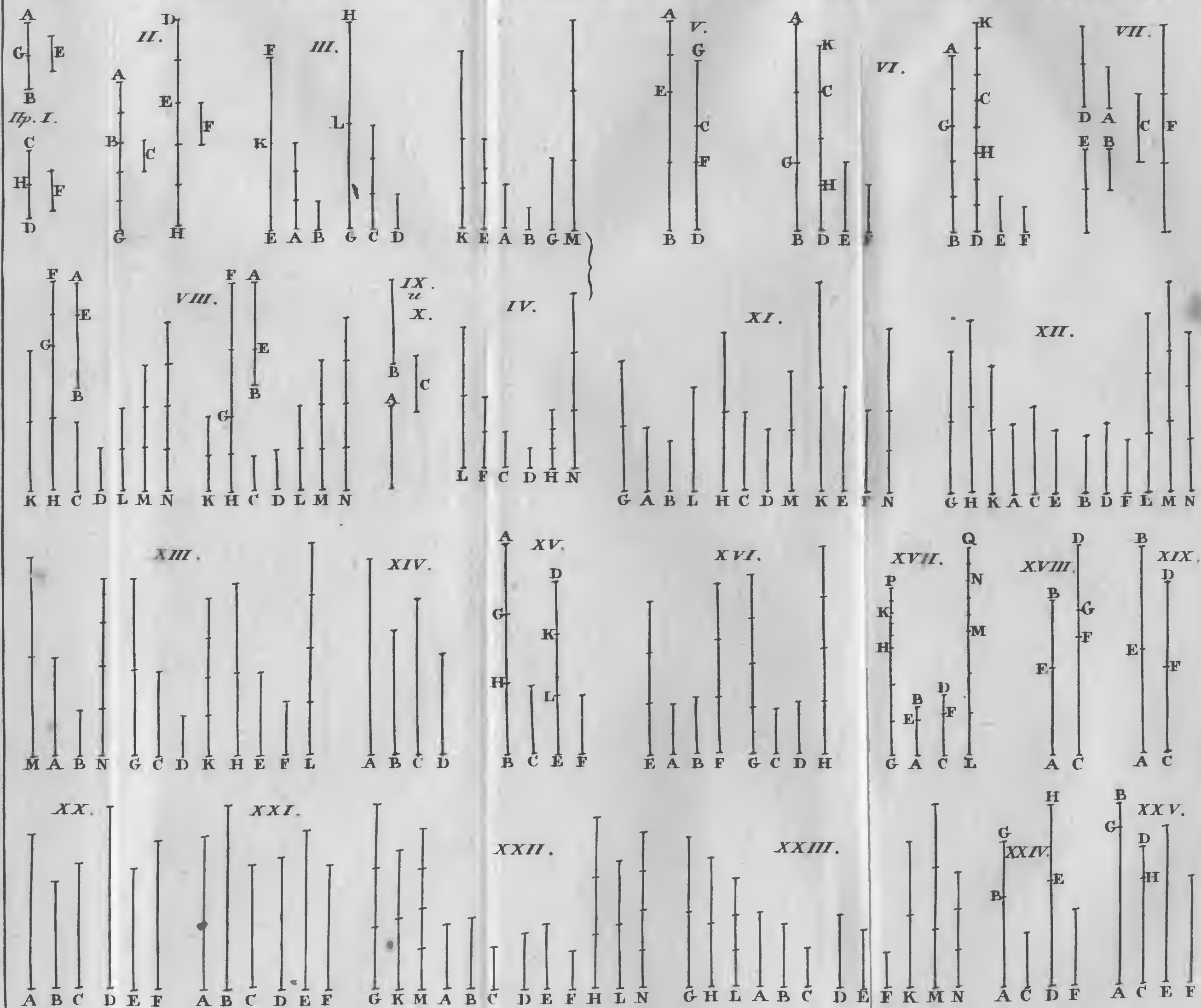


XXXVII.

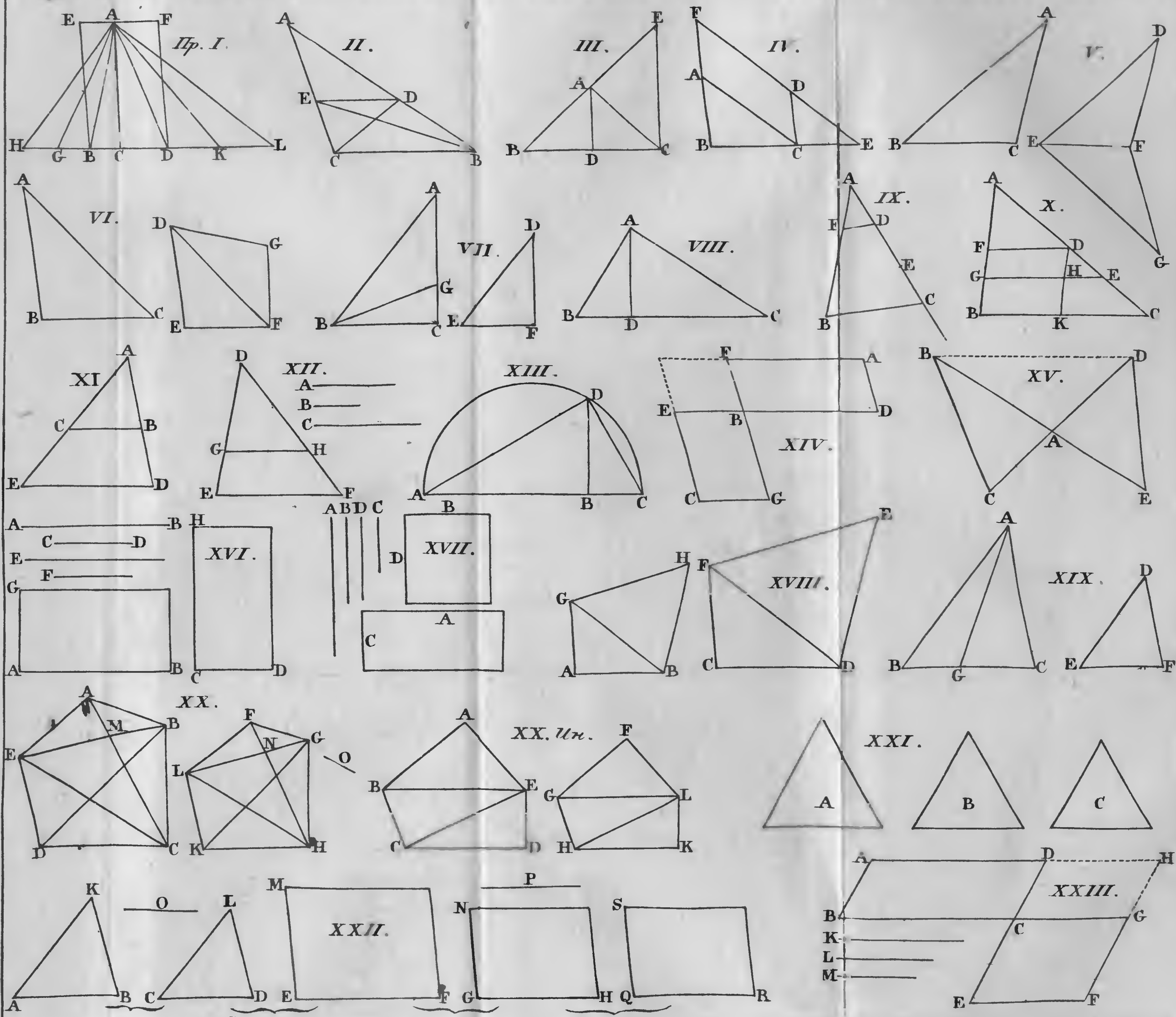
Эвклидовых Началъ Книга четвертая.



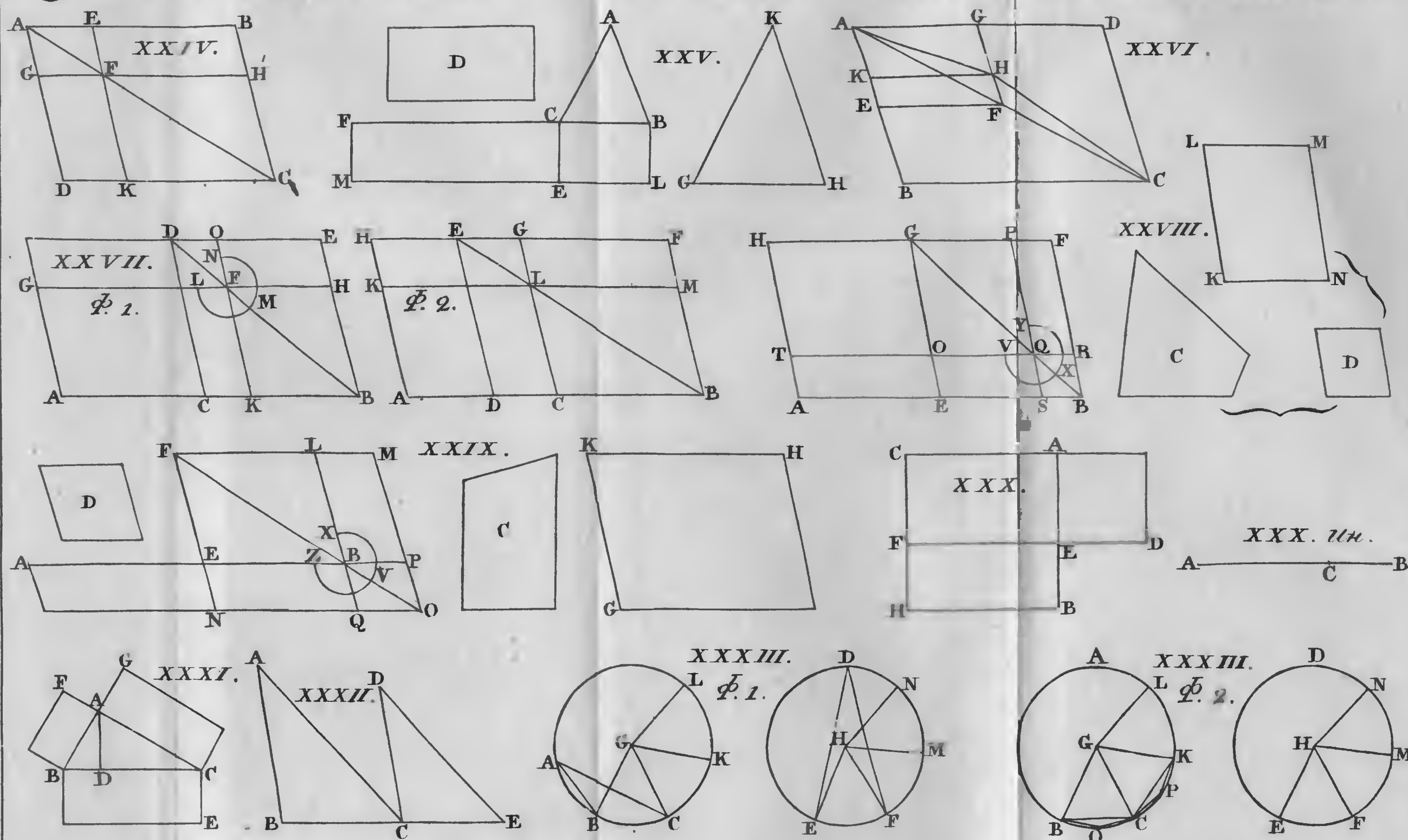
Эвклидовых Началь Книга пятая.



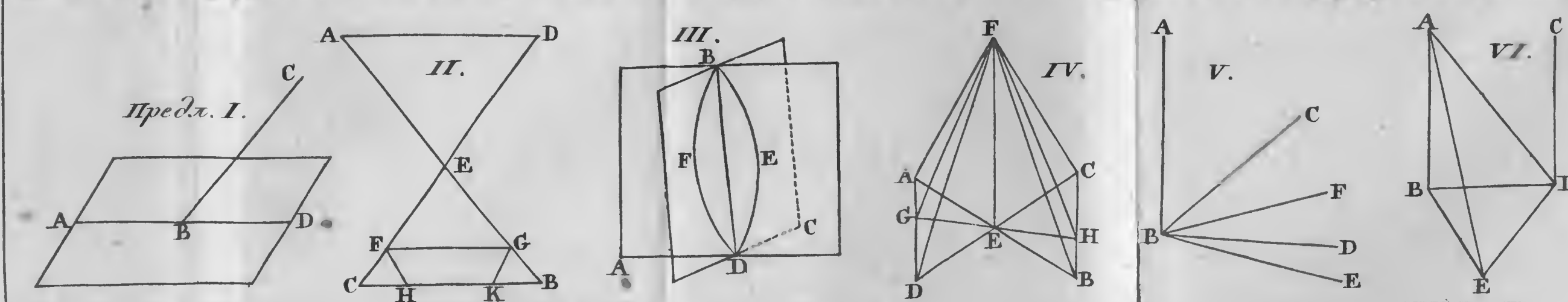
Евклидовых Начал Книга шестая.



Эвклидовых Началъ Книга шестая.

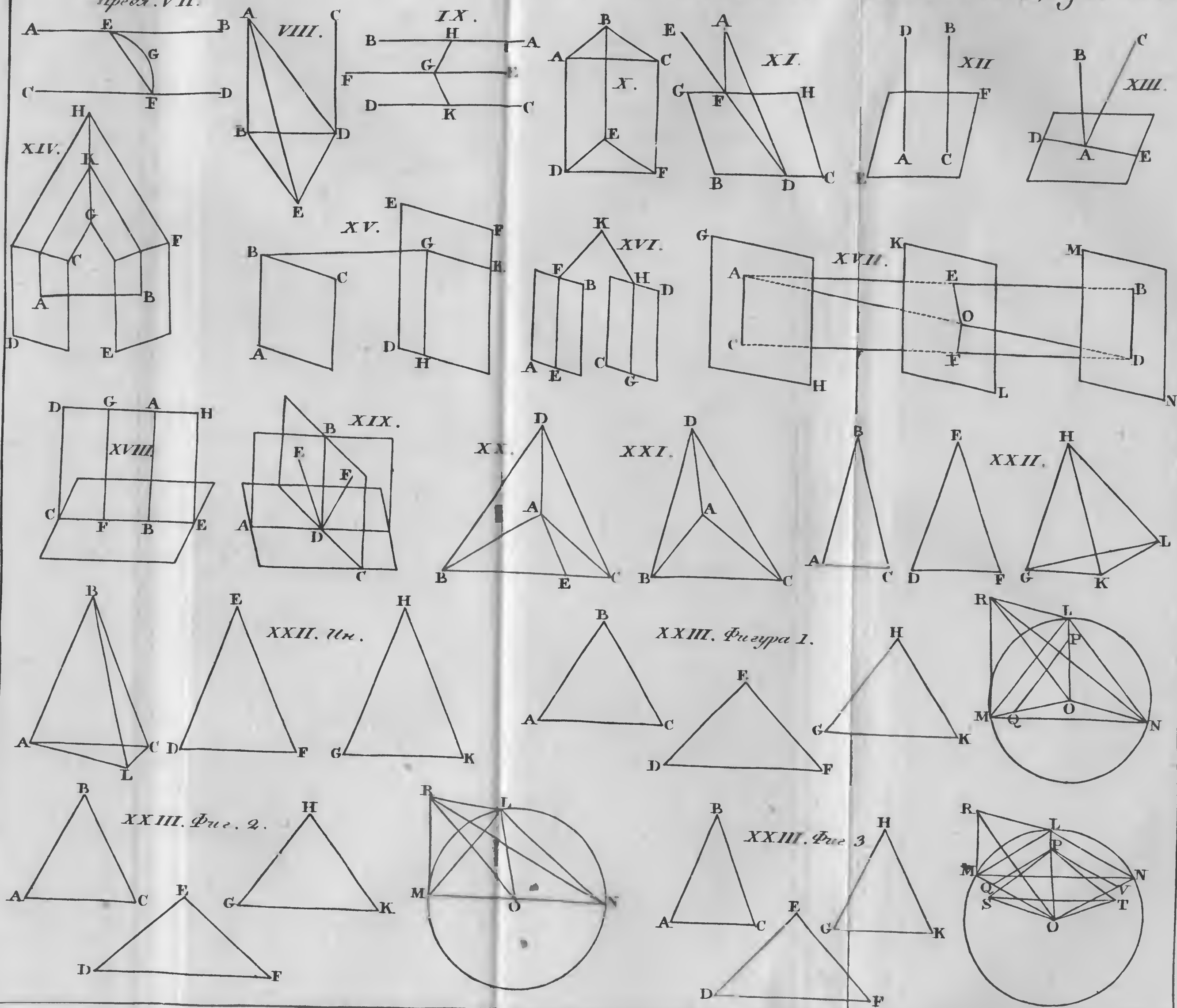


Эвклидовых Началъ Книга одиннадцатая.



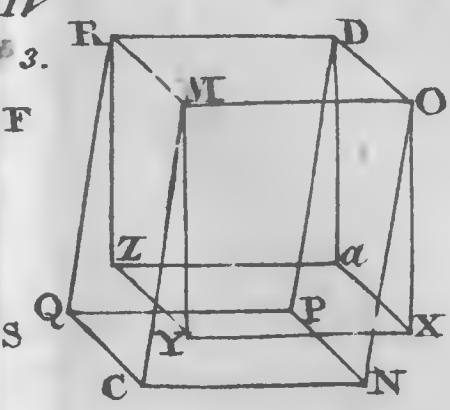
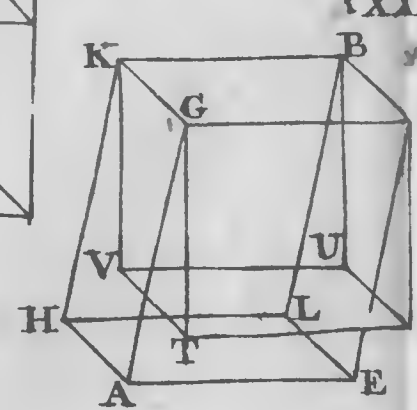
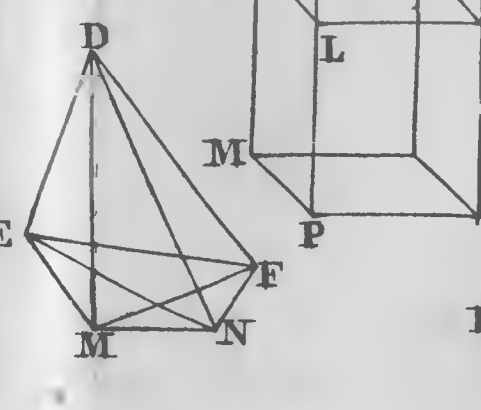
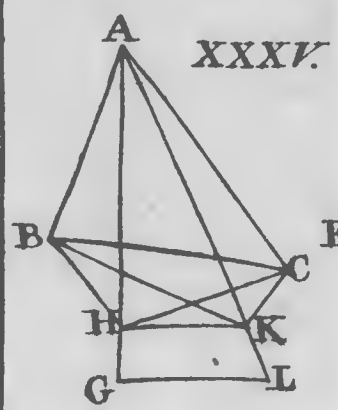
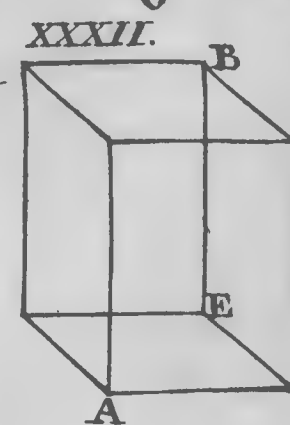
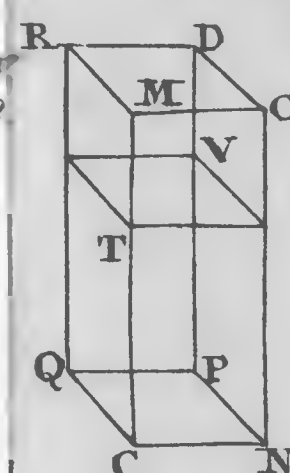
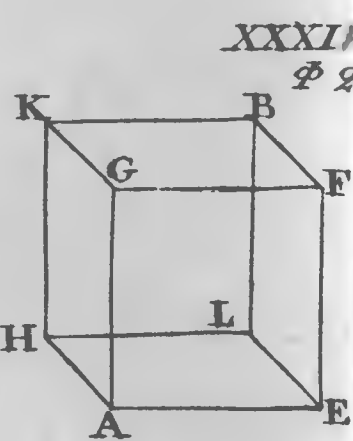
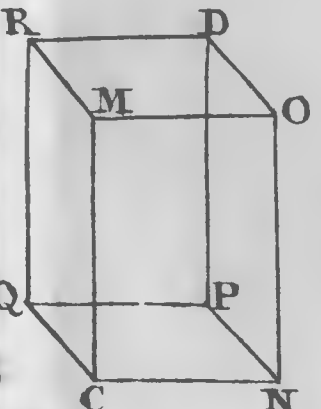
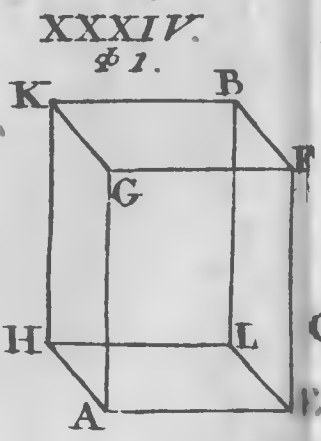
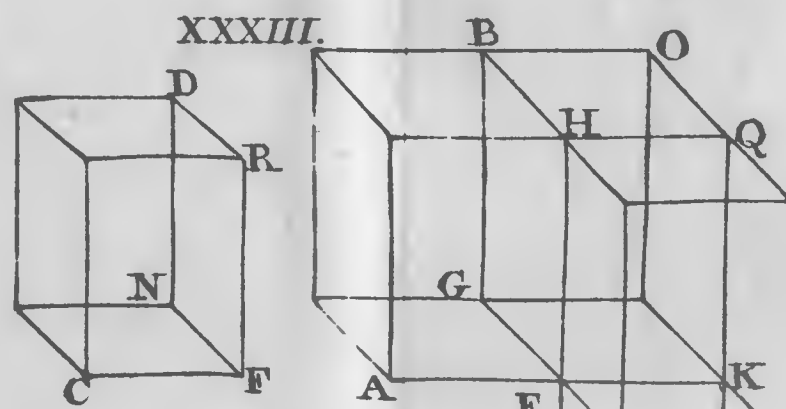
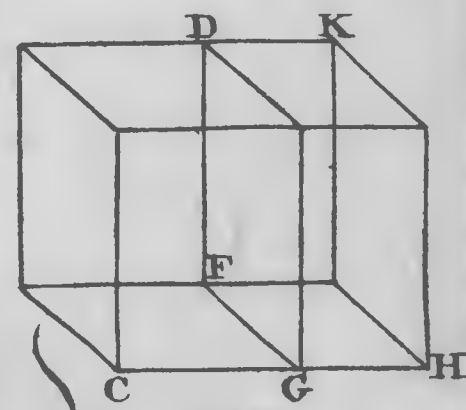
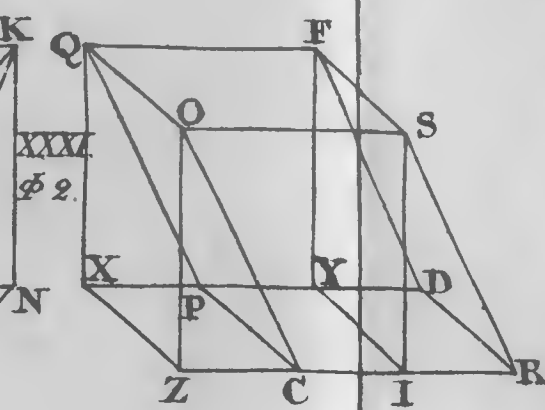
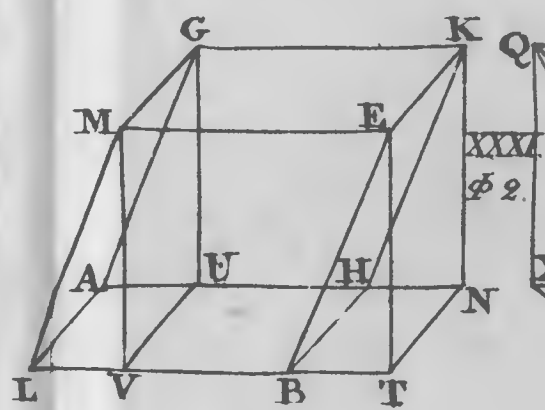
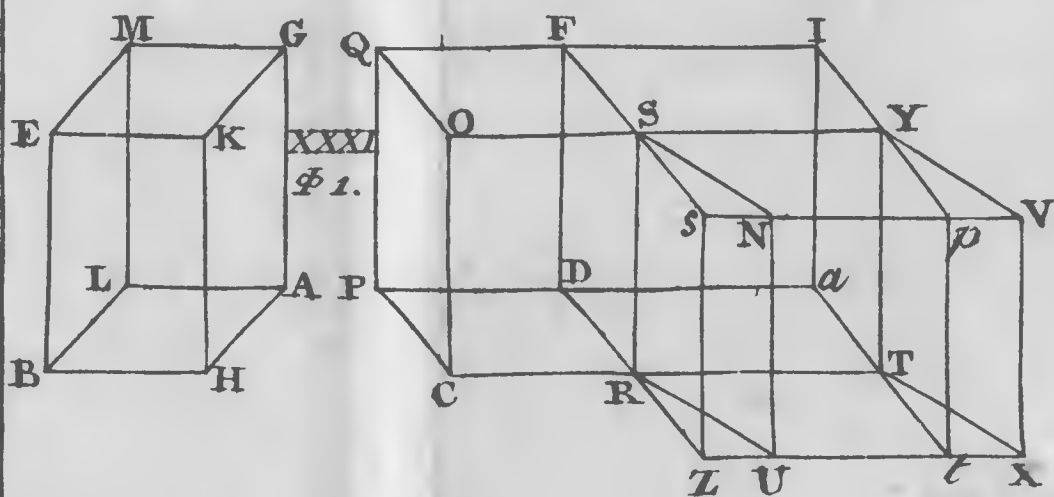
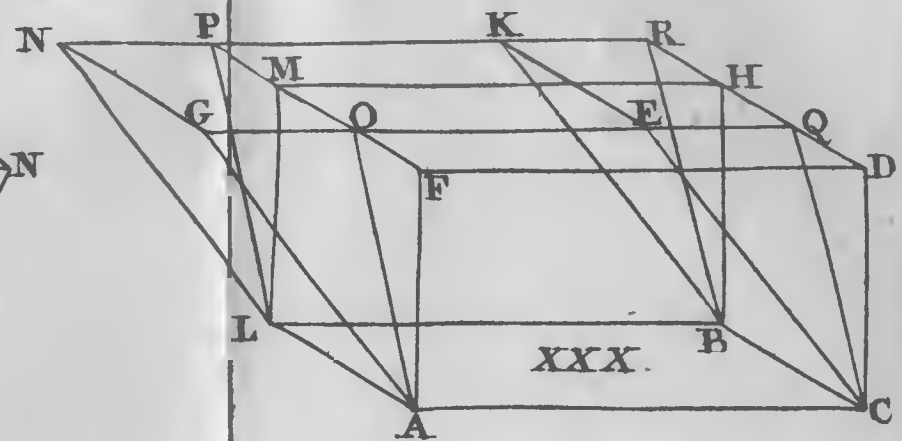
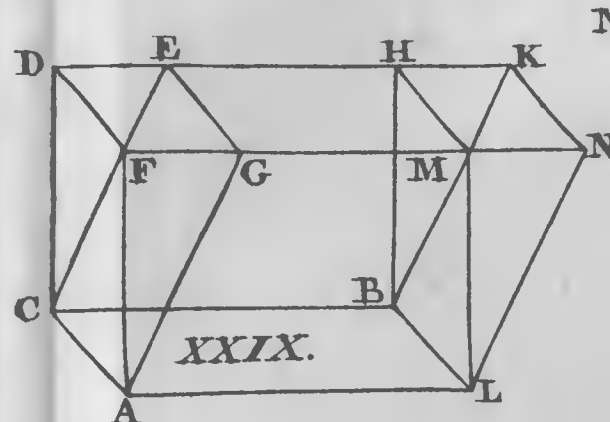
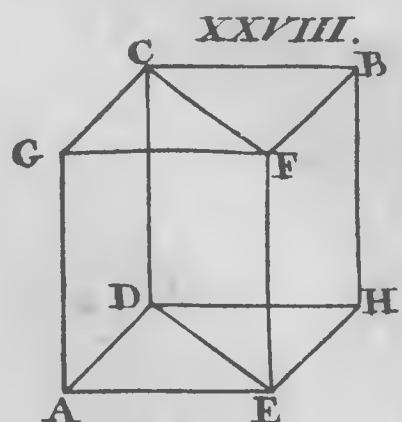
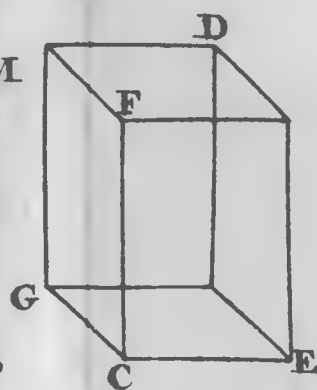
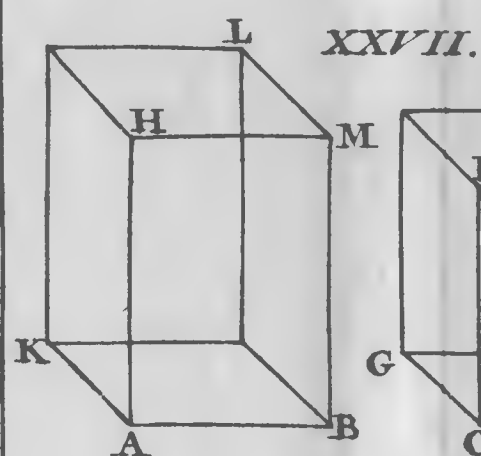
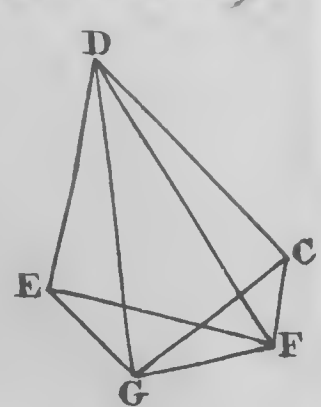
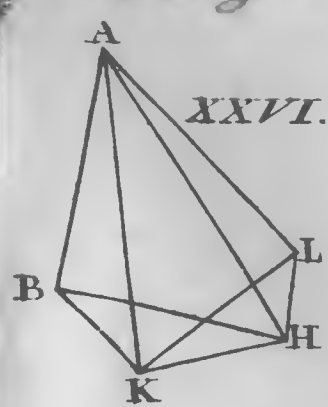
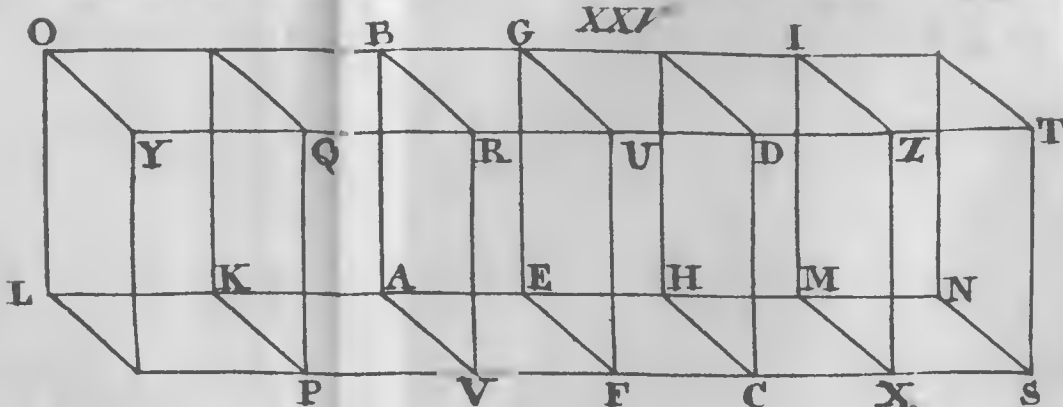
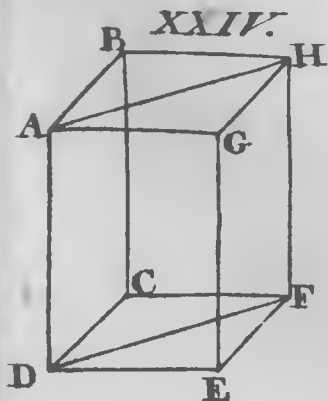
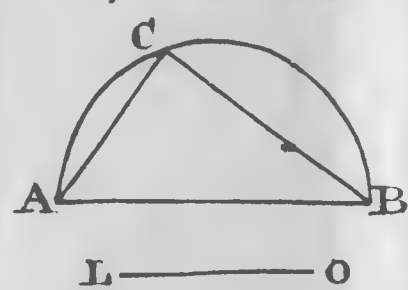
Введение в Книгу о геометрии

Предл. VII.

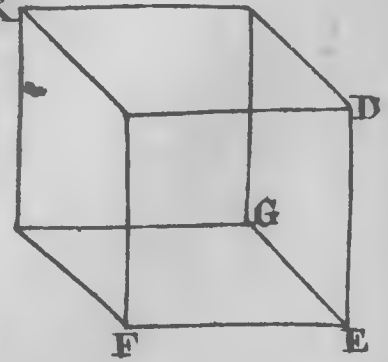
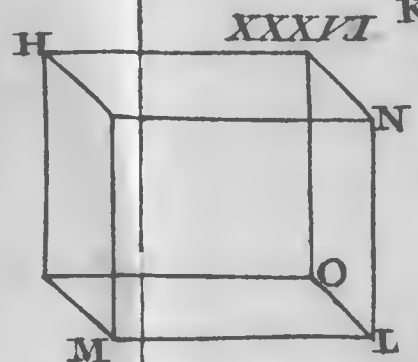


Земельных Началъ Книга описанная.

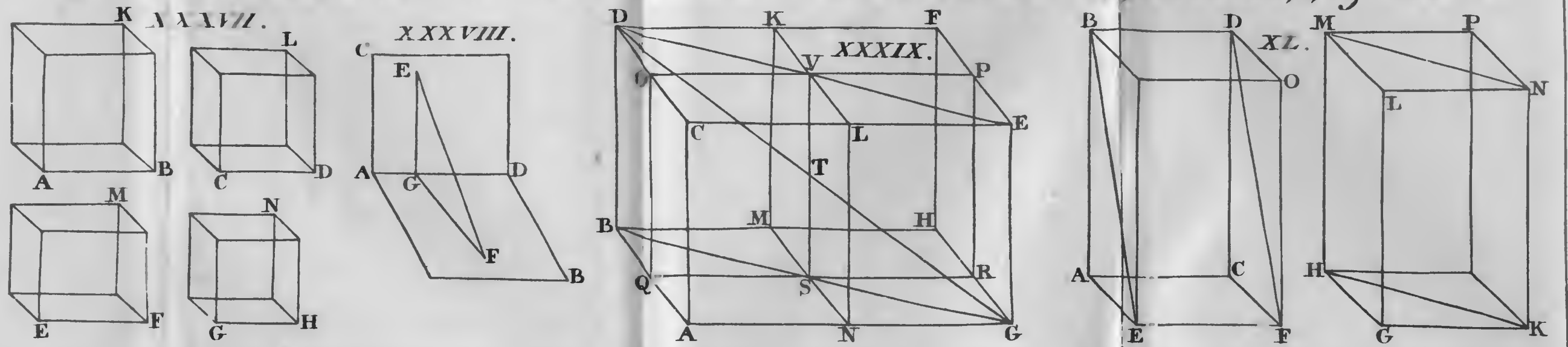
Пр. XXIII. Зем.



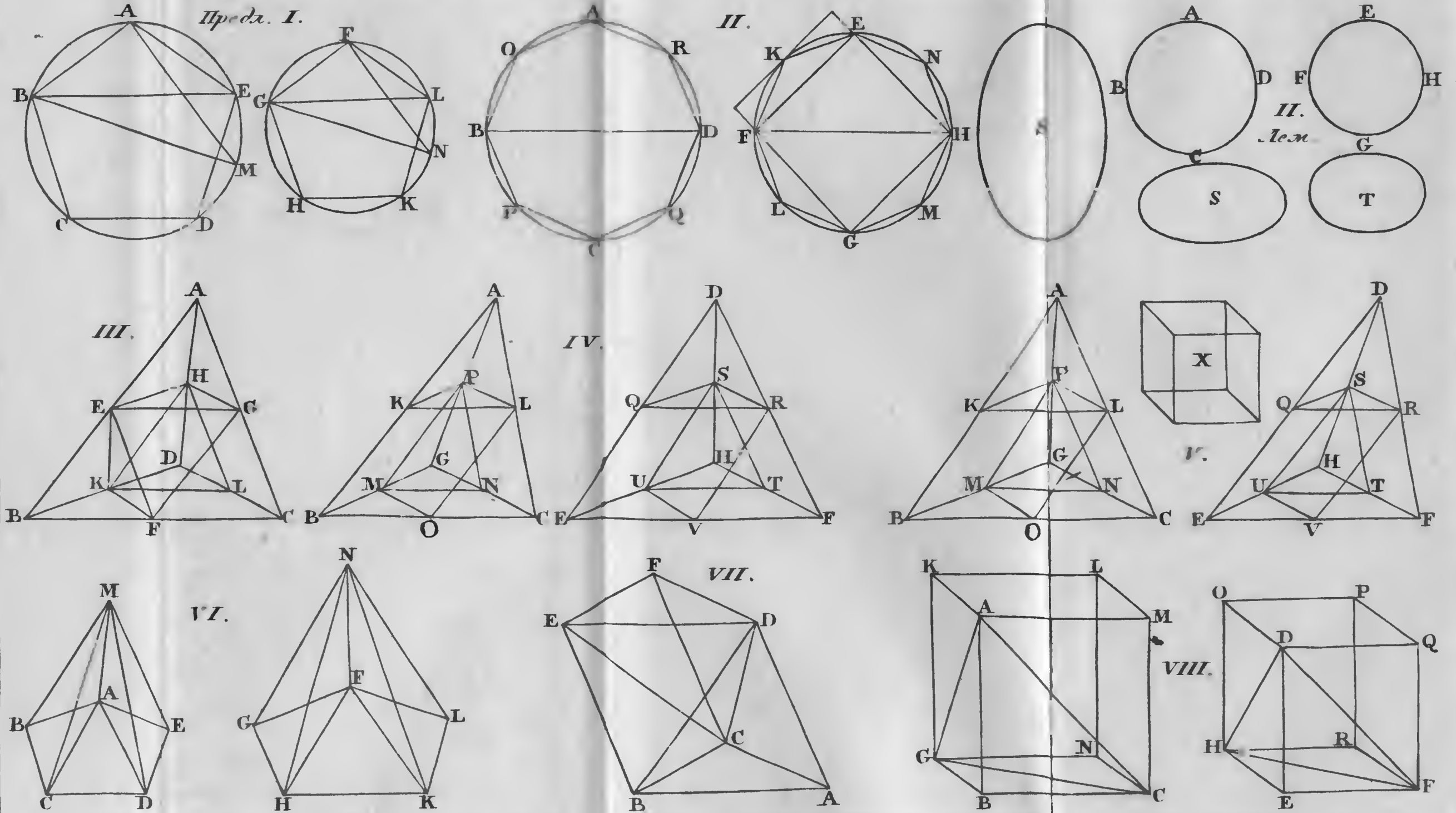
A B C



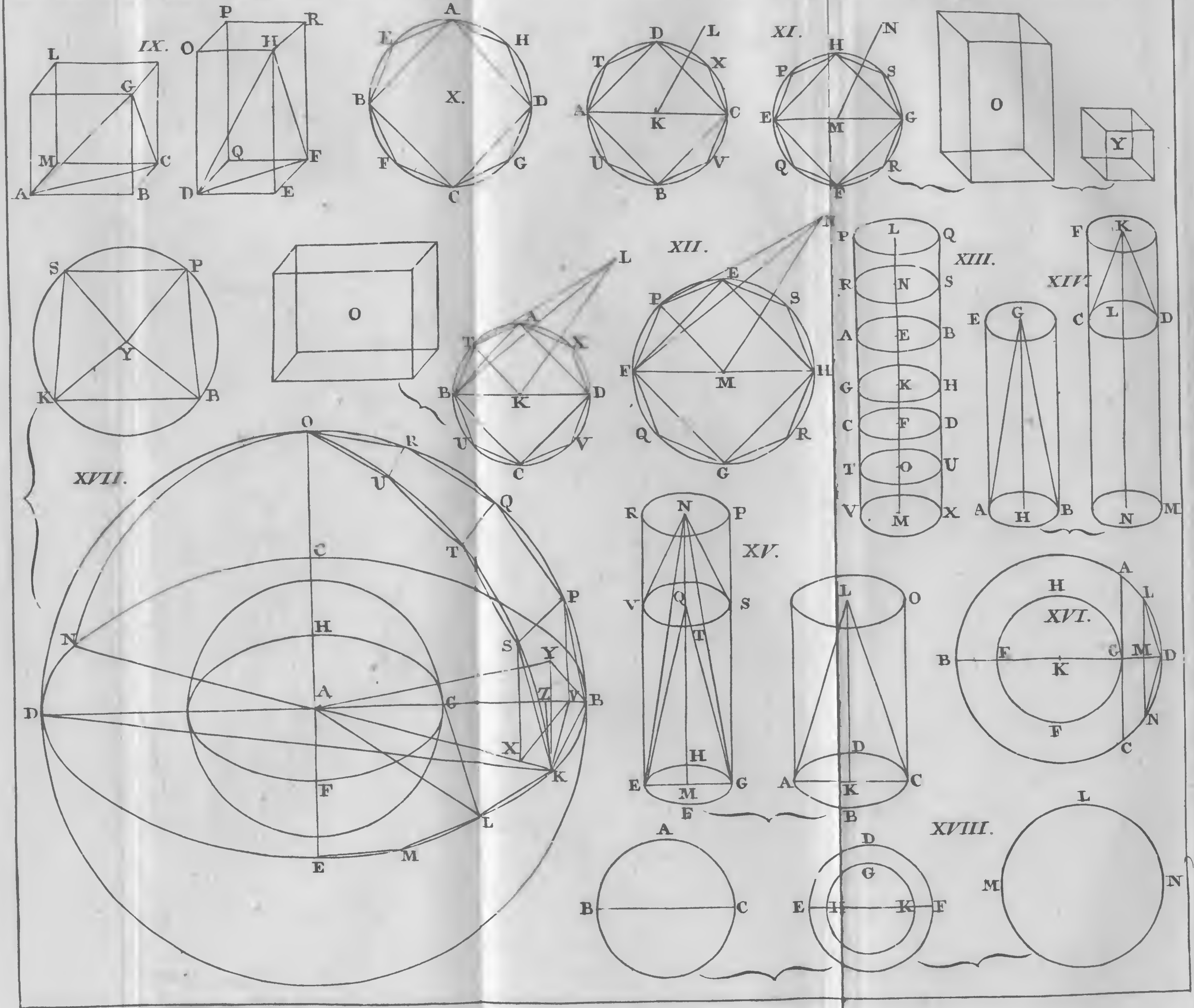
Виды и свойства Начала Третья однадцатая.



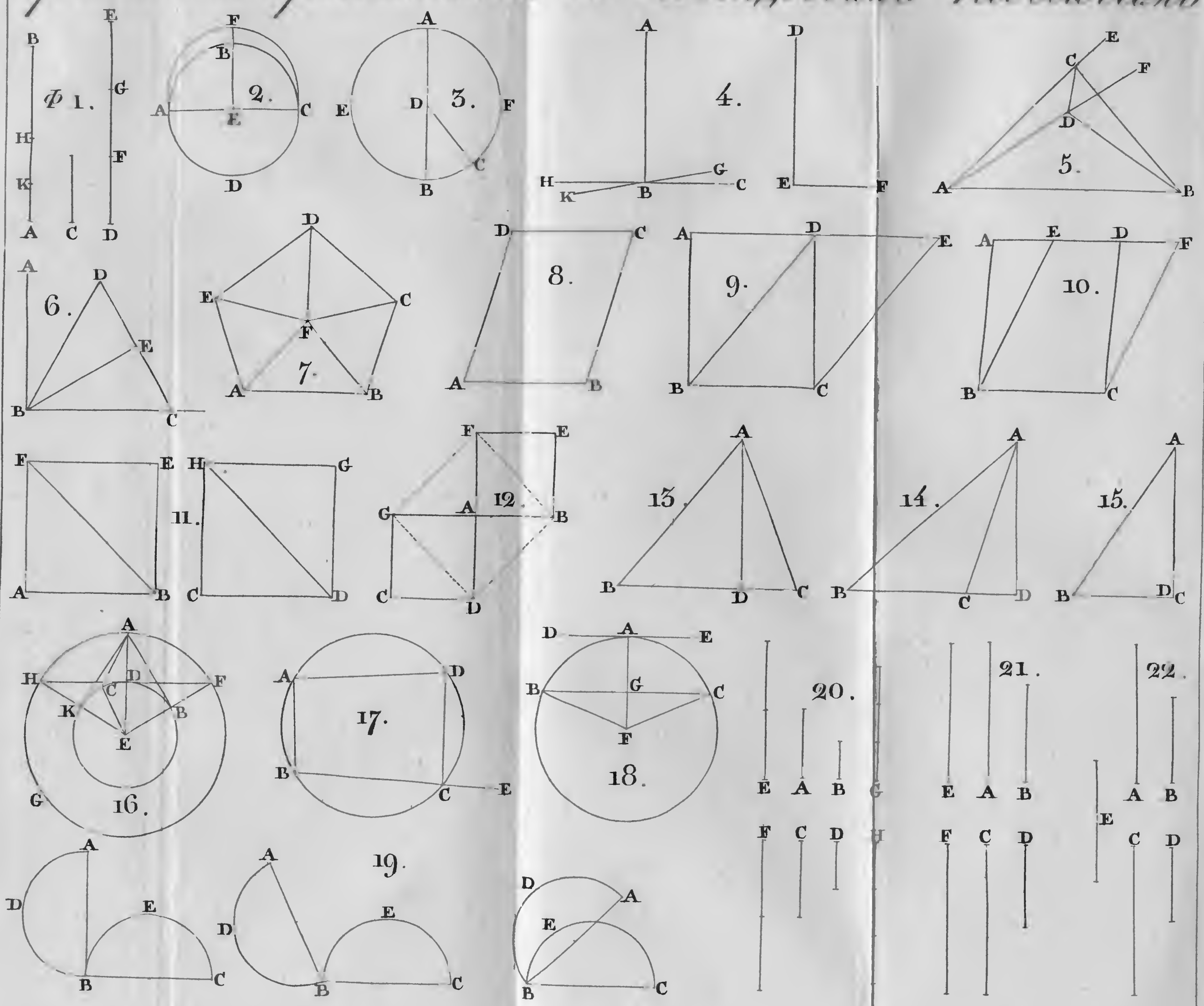
Виды и свойства Начала Третья двенадцатая.



Решеніе задачъ Начала Книги дванадцатая.



Примѣлы и приобщенія къ Евклидовымъ Началамъ



Приемы и прибавления къ Евклидовымъ Началамъ

