Министерство образования и науки РФ

Барнаульский государственный педуниверситет

Горно-Алтайский государственный университет

Г.Г. Михайличенко

ДВУМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИИ

Приложение
В.А.Кырова

Барнаул
Горно-Алтайск
2004

ББК 181.15
М 69
УДК 514.1 + 512.816

Г.Г.Михайличенко. Двумерные геометрии. Барнаул: издательство Барнаульского государственного педагогического университета, 2004, 129 с.

Двумерные геометрии задаются на двумерном многообразии невырожденной метрической функцией. Их феноменологическая симметрия означает следующее: для любой четверки точек шесть возможных взаимных расстояний функционально связаны. Плоскость Евклида, например, является двумерной феноменологически симметричной геометрией, но не только она. Приводится полная классификация таких геометрий, выявляется их групповая симметрия и устанавливается ее эквивалентность феноменологической симметрии. В двумерных геометриях естественно определяются окружности и циклы, причем для последних возникают особого рода функциональные уравнения. Двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии с двухкомпонентной метрической функцией допускают содержательную физическую интерпретацию в термодинамике и также наделены групповой симметрией. Трехмерные и триметрические феноменологически симметричные геометрии определяются аналогично двумерным и двуметрическим.

Книга адресована преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов как пособие к спецкурсу "Двумерные геометрии", который систематически читается автором студентам физико-математического факультета Горно-Алтайского государственного университета, а также был прочитан им в весенний семестр 2003 года бакалаврам и магистрам математического факультета Барнаульского государственного педагогического университета.

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-01071).

Р е ц е н з е т ы:

доктор физико-математических наук Е.Д.Родионов,
доктор физико-математических наук В.В.Славский,
кандидат физико-математических наук К.О.Кизбикенов.

Содержание

Введение

Для иллюстрации феноменологической и групповой симметрий в геометрии, а также связи между ними, рассмотрим обычную плоскость Евклида. В декартовой прямоугольной системе координат (x, y) квадрат расстояния $\rho(ij)$ между любыми двумя ее точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задается функцией

$$f(ij) = \rho^2(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2. \tag{B.1}$$

Возьмем на плоскости Евклида четыре произвольные точки i, j, k, l и запишем для них по метрической функции (B.1) шесть взаимных расстояний: $f(ij)$, $f(ik)$, $f(il)$, $f(jk)$, $f(jl)$, $f(kl)$. Хорошо известно, что они функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) \\ 1 & f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) \\ 1 & f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) \\ 1 & f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{B.2}$$

Геометрический смысл соотношения (B.2) состоит в том, что трехмерный объем тетраэдра с вершинами, лежащими на двумерной плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И.Кулакова [1] соотношение (B.2), справедливое для любой четверки $<ijkl>$, выражает феноменологическую симметрию плоскости Евклида.

По метрической функции (B.1) можно найти множество ее движений, то есть таких гладких и обратимых преобразований

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y) \tag{B.3}$$

плоскости, относительно которых эта функция сохраняется. Действительно, если преобразование (B.3) является движением, то его функции λ и σ удовлетворяют функциональному уравнению

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2,$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, все решения которого могут быть найдены методами математического анализа:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x, y) = x\cos\varphi - \varepsilon y \sin\varphi + c, \\ \sigma(x, y) = x\sin\varphi + \varepsilon y \cos\varphi + d\ , \end{aligned}\right\} \tag{B.4}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, а три параметра c, d и φ принимают произвольные значения.

Множество всех движений (B.3) с функциями (B.4) есть, очевидно, группа, выражающая групповую симметрию плоскости Евклида, причем первые два параметра c, d определяют параллельный перенос вдоль соответствующих координатных осей, а третий параметр φ – поворот вокруг начала системы координат. С другой стороны, эта трехпараметрическая группа преобразований координатной плоскости (x, y) задает на ней по Ф.Клейну [2] двумерную евклидову геометрию.

Выясним теперь, имеется ли связь феноменологической и групповой симметрий для двумерной геометрии с метрической функцией

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{B.5}$$

обобщающей выражение (B.1). Жесткая фигура на плоскости при любом разумном определении понятия движения имеет три степени свободы. Возьмем четырехточечную фигуру $<ijkl>$. Каждая ее точка задается двумя координатами, а вся фигура, следовательно, восемью. Шесть значений метрической функции (B.5) для этой фигуры должны быть зависимы, так как, иначе, при ее движении число степеней свободы будет равно только двум: $8-6=2$. Таким образом, для любой четверки $<ijkl>$ должна существовать функциональная связь

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0, \tag{B.6}$$

выражающая феноменологическую симметрию этой двумерной геометрии.

Аналогичные простые соображения приводят к выводу о том, что если имеет место связь (B.6), то существует трехпараметрическая группа преобразований

$$\left.\begin{array}{r} x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3)\ , \end{array}\right\} \tag{B.7}$$

относительно которой метрическая функция (B.5), удовлетворяя уравнению

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{B.8}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i; a^1, a^2, a^3)$, является двухточечным инвариантом. Множество всех движений (B.7) определяет групповую симметрию двумерной геометрии с метрической функцией (B.5).

Заметим, что приведенные выше соображения о связи феноменологической и групповой симметрий применимы не только в отношении плоскости Евклида, но и в отношении других двумерных геометрий (плоскости Лобачевского, плоскости Минковского, двумерной сферы и т.д.).

Г.Гельмгольц в его знаменитой работе "О фактах, лежащих в основании геометрии"[3] высказал предположение, что метрическая функция (B.5) двумерной геометрии не может быть произвольной если твердое тело в своем движении имеет три степени свободы. Но в таком случае между всеми взаимными расстояниями для любых его четырех точек i, j, k, l должна существовать функциональная связь (B.6), так как при ее отсутствии число степеней свободы четырехточечной жесткой фигуры с общим расположением точек, движение которой однозначно определяет движение всего твердого тела, уменьшится ровно на единицу. Поэтому естественно было предположить, что и феноменологическая симметрия двумерной геометрии, выражаемая уравнением (B.6), невозможна при произвольной метрической функции (B.5). Этот факт был установлен автором и опубликован в работе [4]. Заметим еще, что задачу определения всех двумерных геометрий, в которых "положение фигуры задается тремя условиями", впервые четко сформулировал А.Пуанкаре в его известной работе "Об основных гипотезах геометрии"[5]. Классификация таких геометрий с невырожденной метрической функцией (В.5) будет проведена в §8 гл. II настоящего издания.

Задание метрической функции (В.5) определяет двумерную геометрию. Действительно, по этой функции, решая функциональное уравнение (В.8), можно найти полную группу ее движений (В.7), относительно которой она является двухточечным инвариантом. Групповая же симметрия лежит в основе "Эрлангенской программы"Ф.Клейна [2], согласно которой геометрия есть теория инвариантов некоторой группы преобразований данного многообразия. Тем самым метрическое и групповое задания геометрии оказываются эквивалентными, что отмечено автором и G.P.Wene в работах [6] и [7]. С другой стороны, в геометрии обнаруживает себя и так называемая феноменологическая симметрия, на которую впервые особое внимание обратил Ю.И.Кулаков [1], сделав ее основным принципом своей *теории физических структур* [8]. Сущность же феноменологической симметрии двумерной геометрии состоит в следующем: имеется функциональная связь между шестью взаимными расстояниями для любых четырех точек $<ijkl>$, выражаемая некоторым уравнением (В.6).

В первой главе дается точное определение феноменологической симметрии двумерных геометрий и приводится их полная классификация с кратким описанием ее метода. Приводится также классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий без их определения, так как оно легко может быть воспроизведено по соответствующему определению двумерных. Во второй главе дается точное определение групповой симметрии двумерной геометрии и устанавливается ее эквивалентность феноменологической симметрии, позволяющая классифицировать метрическую функцию как двухточечный невырожденный инвариант трехпараметрической группы локальных преобразований двумерного многообразия. В третьей главе изучаются инвариантные объекты двумерных и трехмерных геометрий, сохраняющиеся при всех движениях некоторой подгруппы полной локальной группы движений. Четвертый параграф посвящен изучению двуметрических геометрий, когда двум точкам сопоставляется не одно расстояние, а два. Одной из интерпретаций такой необычной геометрии является плоскость термодинамических состояний. Оказывается, что двуметрические геометрии, с одной стороны, феноменологически симметричны, а с другй – наделены групповой симметрией, причем обе симметрии эквивалентны друг другу.

Полная классификация феноменологически симметричных геометрий содержит не только привычные геометрии, но и необычные, метрические функции которых даже в их канонической форме обладают особенными свойствами. В приложении В.А.Кырова рассматриваются симплектические геометрии и соответствующие симплектические многообразия разной размерности, обсуждаются их математическое содержание и возможный физический смысл.

В последнем параграфе каждой главы приводятся примеры и формулируются задачи творческого содержания, из которых составлены варианты индивидуальных контрольных заданий.

ГЛАВА I. Феноменологическая симметрия

§1. Определение двумерных геометрий

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$, являющееся двумерным многообразием, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \to R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ – область ее определения, сопоставляющая каждой паре $<ij> \in \mathfrak{S}_f$ некоторое вещественное число $f(ij) \in R$. Функцию f будем называть *метрической*, не требуя, однако, положительной ее определенности и выполнения для нее аксиом обычной метрики. Заметим, что в общем случае $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$, то есть, возможно, функция f не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляет число, но в последующем изложении удобно в явной записи "расстояния"$f(ij)$ подразумевать, что $<ij> \in \mathfrak{S}_f$. Обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}$, через $U(<ij>)$ – окрестность пары $<ij> \in \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}$ на себя.

Для некоторой пары $< k_1k_2 >$ введем функции $\overline{f^2} = \overline{f}[k_1k_2]$ и $\overline{\overline{f^2}} = \overline{\overline{f}}[k_1k_2]$, сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ точки $(f(ik_1), f(ik_2)) \in R^2$ и $(f(k_1i), f(k_2i)) \in R^2$ соответственно, если $< ik_1 >, < ik_2 > \in \mathfrak{S}_f$ и $< k_1i >, < k_2i > \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения введенных функций $\overline{f^2}$ и $\overline{\overline{f^2}}$ могут не совпадать друг с другом и с самим множеством $\mathfrak{M}$.

В отношении двумерного многообразия $\mathfrak{M}$ с метрической функцией f будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область $\mathfrak{S}_f$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множество.

II. Функция f в области своего определения есть достаточно гладкая функция.

III. В $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ плотно множество пар, для которых функция $\overline{f^2}(\overline{\overline{f^2}})$ имеет максимальный ранг, равный двум, в точках плотного в $\mathfrak{M}$ множества.

Достаточная гладкость означает, что в области ее определения непрерывна как сама функция f, так и все ее производные достаточно высокого порядка. Гладкую метрическую функцию f, для которой выполняется аксиома III, будем называть *невырожденной*. Заметим, что ограничения в аксиомах I, II, III открытыми и плотными множествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются. Например, область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f может не содержать диагональных пар $<ii>$.

Определение. Будем говорить, что невырожденная метрическая функция f, удовлетворяющая условиям аксиом I, II, III, задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ *двумерную геометрию*.

§2. Феноменологическая симметрия двумерных геометрий

Введем функцию F, сопоставляя четверке $<ijkl>$ из $\mathfrak{M}^4$ точку $(f(ij),\ f(ik),\ f(il),\ f(jk), f(jl), f(kl)) \in R^6$, координаты которой в R^6 определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью шести "расстояний"для следующих пар его точек: $<ij>, <ik>, <il>, <jk>, <jl>, <kl>$, если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения функции F обозначим через $\mathfrak{S}_F$. Очевидно, что область $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}^4$ множество.

Определение. Будем говорить, что невырожденная метрическая функция f задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную геометрию* ранга четыре, если, кроме аксиом I, II, III из §1, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждой четверки $<ijkl>$ которого и некоторой ее окрестности $U(<ijkl>)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathcal{E} \to R$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^6$, содержащей точку $F(<ijkl>)$, что в ней $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ и множество $F(U(<ijkl>))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), (jk), f(jl), f(kl)) = 0 \tag{2.1}$$

для всех четверок из $U(<ijkl>)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии ранга четыре для двумерной геометрии. Эта аксиома выражает собой требование, чтобы шесть расстояний между точками любой четверки из $U(<ijkl>)$ были функционально связаны, удовлетворяя уравнению (2.1). Условие $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ означает, что в этом уравнении функция Φ тождественно в постоянную не обращается.

Если (x, y) – локальные координаты в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$, то для метрической функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $<ij> \in \mathfrak{S}_f$ можно выписать явно ее локальное координатное представление:

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{2.2}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III из §1. Поскольку в соответствии с аксиомой III ранги функций $\overline{f^2}$ и $\overline{\overline{f^2}}$ максимальны, координаты x_i, y_i и x_j, y_j входят в представление (2.2) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально обратимая гладкая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (2.2), то есть нет такой системы координат, в которой оно может быть записано, например, без координаты y_i в следующем виде:

$$f(ij) = f(x_i, x_j, y_j).$$

Действительно, в данном случае для любой пары $<j_1j_2> \in (U(j))^2$ и для любой точки из $U(i)$ ранг функции $\overline{f^2} = \overline{f}[j_1j_2]$ будет заведомо меньше двух, что противоречит аксиоме III. Заметим, что существенная зависимость представления (2.2) от локальных координат гарантирует выполнение аксиомы III.

Используя выражение (2.2), запишем локальное координатное представление введенной выше функции F:

$$\left.\begin{array}{c} f(ij)=f(x_i,y_i,x_j,y_j),\\ f(ik)=f(x_i,y_i,x_k,y_k),\\ f(il)=f(x_i,y_i,x_l,y_l),\\ f(jk)=f(x_j,y_j,x_k,y_k),\\ f(jl)=f(x_j,y_j,x_l,y_l),\\ f(kl)=f(x_k,y_k,x_l,y_l), \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

матрица Якоби которой

$$\left\|\begin{array}{cccccc} \dfrac{\partial f(ij)}{\partial x_i} & \dfrac{\partial f(ik)}{\partial x_i} & \dfrac{\partial f(il)}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{\partial f(ij)}{\partial y_i} & \dfrac{\partial f(ik)}{\partial y_i} & \dfrac{\partial f(il)}{\partial y_i} & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{\partial f(ij)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \dfrac{\partial f(jk)}{\partial x_j} & \dfrac{\partial f(jl)}{\partial x_j} & 0\\ \dfrac{\partial f(ij)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \dfrac{\partial f(jk)}{\partial y_j} & \dfrac{\partial f(jl)}{\partial y_j} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial f(ik)}{\partial x_k} & 0 & \dfrac{\partial f(jk)}{\partial x_k} & 0 & \dfrac{\partial f(kl)}{\partial x_k}\\ 0 & \dfrac{\partial f(ik)}{\partial y_k} & 0 & \dfrac{\partial f(jk)}{\partial y_k} & 0 & \dfrac{\partial f(kl)}{\partial y_k}\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial f(il)}{\partial x_l} & 0 & \dfrac{\partial f(jl)}{\partial x_l} & \dfrac{\partial f(kl)}{\partial x_l}\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial f(il)}{\partial y_l} & 0 & \dfrac{\partial f(jl)}{\partial y_l} & \dfrac{\partial f(kl)}{\partial y_l} \end{array}\right\| \tag{2.4}$$

имеет восемь строк и шесть столбцов.

Представление (2.3) задается системой шести функций $f(ij), f(ik), f(il), f(jk)$, $f(jl), f(kl)$, зависящих специальным образом от восьми координат x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l всех точек четверки $< ijkl >$. Поскольку число функций в системе (2.3) меньше числа координат, наличие связи (2.1) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольной системы (2.3).

Функция F, согласно ее локальному координатному представлению (2.3), отображает окрестность $U(< ijkl >) \subset \mathfrak{S}_F$ в R^6. Функциональной матрицей этого отображения является матрица Якоби (2.4) системы функций (2.3), а его рангом называется ранг этой матрицы.

Теорема. *Для того, чтобы метрическая функция f, удовлетворяющая аксиомам* I, II, III *из* §1, *задавала на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга четыре, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен пяти на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Докажем сначала необходимость условия теоремы о ранге отображения F.

Лемма 1. *В функциональной матрице* (2.4) *отображения F с координатным представлением* (2.3) *имеется квадратная подматрица порядка пять, определитель которой отличен от нуля.*

Выделим в матрице (2.4) квадратную ступенчатую подматрицу пятого порядка, диагональными клетками которой являются следующие квадратные матрицы Якоби: для двух функций $f(ik), f(il)$ по двум переменным x_i, y_i; для двух функций $f(jk), f(jl)$ по двум переменным x_j, y_j; для функции $f(kl)$ по переменной x_k. Эта квадратная подматрица состоит из компонент исходной матрицы, стоящих на пересечении первых пяти строк и всех столбцов, кроме первого. Согласно аксиоме III из §1 отличны от нуля якобианы $\partial(f(ik), f(il))/\partial(x_i, y_i)$ и $\partial(f(jk), f(jl))/\partial(x_j, y_j)$, а также производная $\partial f(kl)/\partial x_k$. Поэтому ранг выделенной выше ступенчатой подматрицы пятого порядка для некоторого кортежа из $U(<ijkl>)$ оказывается равным пяти. Лемма 1 доказана.

Следствие. *Ранг матрицы Якоби* (2.4) *не может быть меньше пяти.*

Согласно аксиоме IV в любой окрестности произвольной четверки $<ijkl>$ из $\mathfrak{S}_F$ найдется такая ее окрестность $U(<ijkl>) \subset \mathfrak{S}_F$, что множество значений $F(U(<ijkl>))$ будет удовлетворять некоторому уравнению (2.1), причем $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ в точке $F(<ijkl>)$. Поскольку функция Φ достаточно гладкая, можно, без ограничения общности, считать, что $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ для всех точек области ее определения $\mathcal{E} \subset R^6$ и, конечно же, на множестве значений $F(U(<ijkl>))$. Тогда множество нулей функции Φ, но не обязательно множество $F(U(<ijkl>))$, будет гладкой без особых точек гиперповерхностью в R^6.

Продифференцируем уравнение (2.1) по каждой из восьми координат x_i, y_i, $x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$ точек четверки $<ijkl>$. В результате получаем систему восьми линейных однородных уравнений относительно шести производных функции Φ:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial\Phi}{\partial f(ij)}\cdot\dfrac{\partial f(ij)}{\partial x_i}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial f(ik)}\cdot\dfrac{\partial f(ik)}{\partial x_i}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial f(il)}\cdot\dfrac{\partial f(il)}{\partial x_i}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial f(il)}\cdot\dfrac{\partial f(il)}{\partial y_l}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial f(jl)}\cdot\dfrac{\partial f(jl)}{\partial y_l}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial f(kl)}\cdot\dfrac{\partial f(kl)}{\partial y_l}=0,
\end{array}\right\} \qquad (2.5)$$

матрица которой совпадает с матрицей Якоби (2.4) системы функций (2.3).

Лемма 2. *Ранг матрицы системы уравнений* (2.5) *не может быть равен шести, то есть своему максимальному значению.*

Предположим противное, то есть что ранг матрицы системы уравнений (2.5) равен шести. Но тогда эта система будет иметь только нулевое решение, так как она однородна и в ней всего шесть неизвестных. Однако уравнения системы (2.5) должны иметь, по крайней мере, одно ненулевое решение в некоторой окрестности $U(<ijkl>)$, так как по аксиоме IV $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ в точке $F(<ijkl>)$. Установленное противоречие и доказывает лемму 2.

Из леммы 2 и следствия леммы 1 однозначно вытекает, что ранг матрицы системы уравнений (2.5), совпадающей с матрицей Якоби (2.4), для некоторого кортежа $<i_1j_1k_1l_1> \in U(<ijkl>)$ будет равен пяти. Легко понять, что множество таких кортежей плотно в $\mathfrak{S}_F$, так как плотно в $\mathfrak{S}_F$ множество четверок $<ijkl>$, о которых говорится в аксиоме IV. На этом завершается доказательство необходимости условия теоремы. Перейдем теперь к доказательству достаточности ее условия о ранге отображения F.

Лемма 3. *Для любой четверки из* $\mathfrak{S}_F$ *ранг матрицы* (2.4)*, то есть ранг отображения* F*, не равен шести.*

Действительно, если для некоторой четверки из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (2.4) будет равен шести, то он в силу гладкости функций системы (2.3), будет равен шести, то есть своему максимально возможному значению, не только для нее, но и для всех четверок из какой-то ее окрестности $U \subset \mathfrak{S}_F$. Но тогда в этой окрестности не найдется ни одной четверки, для которой ранг отображения F был бы равен пяти, что противоречит условию доказываемой теоремы. Лемма 3 доказана.

Пусть для четверки $<ijkl>$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества, о котором говорится в условии теоремы, ранг отображения F, задаваемого системой функций (2.3), равен пяти. Из леммы 3, очевидно, следует, что для любой окрестности четверки $<ijkl>$ ранг матрицы Якоби (2.4) не больше пяти и равен для нее этому значению. По известной теореме математического анализа о функциональной зависимости для некоторой окрестности $U(<ijkl>)$ существует такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathcal{E} \to R$, определенная в соответствующей области $\mathcal{E} \subset R^6$, содержащей точку $F(<ijkl>)$, в которой $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$, что множество $F(U(<ijkl>))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть имеет место уравнение (2.1) для всех кортежей из $U(<ijkl>)$. Поскольку ранг матрицы (2.4) для исходной четверки $<ijkl>$ равен пяти и максимален в окрестности $U(<ijkl>)$, из той же теоремы о функциональной зависимости следует, что существует такая ее окрестность $U' \subset U$ и соответствующая область $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, для которых множество значений $F(U')$ совпадает с множеством нулей функции Φ в $\mathcal{E}'$, являясь гладкой без особых точек гиперповерхностью в R^6. Теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что феноменологически инвариантная функциональная связь (2.1) имеет определенное геометрическое содержание. Для евклидовой плоскости об этом было сказано во Введении. Для других же двумерных геометрий ее содержание может быть иным. Например, для двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве связь (2.1) выражает линейную зависимость четырех радиус-векторов ее точек i, j, k, l. Аналогично и для плоскости

Лобачевского как некоторой сферы в трехмерном псевдоевклидовом пространстве.

§3. Классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий

Итак, двумерная геометрия задается на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ метрической функцией $f : \mathfrak{S}_f \to R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, и ее координатное представление определяется выражением (2.2) из §2:

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \tag{3.1}$$

Если эта функция задает феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга четыре, то по аксиоме IV из §2 шесть ее значений для четверки $<ijkl>$ фукционально связаны:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0. \tag{3.2}$$

Невырожденная метрическая функция (3.1) по аксиоме III из §1 должна, очевидно, удовлетворять следующим двум условиям:

$$\left.\begin{array}{c} \partial(f(ik), f(il))/\partial(x_i, y_i) \neq 0, \\ \partial(f(kj), f(lj))/\partial(x_j, y_j) \neq 0 \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^3$ множества троек $<ikl>$ и $<klj>$.

Плоскость Евклида с метрической функцией (В.1) и функциональной связью (В.2), которая во Введении была рассмотрена в качестве примера, является одной из таких геометрий. Но сколько их может быть? На этот вопрос отвечает следующая теорема (см. [4]):

Теорема. *С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) невырожденная метрическая функция* (3.1)*, задающая на двумерном многообразии феноменологически симметричную геометрию ранга четыре со связью* (3.2)*, может быть представлена одним из следующих одиннадцати канонических выражений:*

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \tag{3.4}$$

$$f(ij) = \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \tag{3.5}$$

$$f(ij) = \mathrm{sh} y_i \mathrm{sh} y_j \cos(x_i - x_j) - \mathrm{ch} y_i \mathrm{ch} y_j, \tag{3.6}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2, \tag{3.7}$$

$$f(ij) = \mathrm{ch} y_i \mathrm{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \mathrm{sh} y_i \mathrm{sh} y_j, \tag{3.8}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i, \tag{3.9}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \tag{3.10}$$

$$f(ij) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\beta \mathrm{ar(c)th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{3.11}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{3.12}$$

$$f(ij) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\gamma \mathrm{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{3.13}$$

$$f(ij) = \frac{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon_i y_i^2 + \varepsilon_j y_j^2}{y_i y_j}, \tag{3.14}$$

где $\beta > 0$ *и* $\beta \neq 1$; $\gamma > 0$; $\varepsilon_i = 0, \pm 1$; $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, *причем не обязательно* $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Шесть выражений (3.4)–(3.9) определяют метрические функции хорошо известных двумерных геометрий: **(3.4)** – *плоскости Евклида*; **(3.5)** – *двумерной сферы* в трехмерном евклидовом пространстве; **(3.6)** – *плоскости Лобачевского* как двумерного двухполостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; **(3.7)** – *плоскости Минковского*; **(3.8)** – *двумерного однополостного гиперболоида* в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; **(3.9)** – *симплектической плоскости.* Существование четырех метрических функций (3.10)–(3.13), задающих двумерные феноменологически симметричные геометрии ранга четыре, впервые было установлено автором [4]. Профессор А.М.Широков (кафедра геометрии Казанского госуниверситета) обратил внимание автора на то, что три метрические функции (3.11), (3.12) и (3.13) можно записать единообразно, используя три типа комплексных чисел:

$$f(ij) = (z_i - z_j)\overline{(z_i - z_j)} \exp 2\gamma \arg(z_i - z_j),$$

где $z = x + ey$, $\overline{z} = x - ey$, причем $e^2 = +1$, $\gamma > 0$ и дополнительно $\gamma \neq 1$ для выражения (3.11); $e^2 = 0$ и $\gamma = 1$ для выражения (3.12); $e^2 = -1$ и $\gamma > 0$ для выражения (3.13). Таким образом, все три возможных типа комплексных чисел на плоскости, а именно: двойные ($e^2 = +1$), дуальные ($e^2 = 0$) и обычные ($e^2 = -1$), естественно вписались в полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий ранга четыре. По-видимому, соответствующие геометрии детально геометрами не изучались и потому специального общепринятого названия не имеют. Двумерную геометрию с метрической функцией **(3.13)** автор назвал *плоскостью Гельмгольца*, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко сообщает Гельмгольц в своей работе [3], считая это отрицательной характеристикой такой геометрии. Соответственно метрическая функция **(3.11)** задает *псевдогельмгольцеву плоскость*, а метрическая функция **(3.12)** – *дуальногельмгольцеву* плоскость. Метрическая функция **(3.10)** задает так называемую *симплициальную плоскость*, название которой было подсказано автору известным геометром Р.Пименовым, в исследованиях которого такое выражение встречалось. И наконец, выражение **(3.14)** определяет метрическую функцию, задающую двумерную феноменологически симметричную геометрию на *несвязном двумерном многообразии*, на связных компонентах которого будет либо симплектическая плоскось ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$), либо плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = +1$), либо двумерный однополостной гиперболоид ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$).

В работе [4] результаты (3.4) – (3.14) были приведены без доказательства, которое оказалось слишком громоздким и достаточно сложным, поэтому ниже мы кратко изложим его основные идеи.

Феноменологическая симметрия двумерной геометрии означает, что шесть взаимных расстояний $f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)$, то есть шесть метрических функций, соответствующих всем упорядоченным парам в четверке $<ijkl>$ и имеющих координатное представление (3.1), функционально связаны, удовлетворяя некоторому уравнению (3.2). Шесть этих функций зависят в общей сложности от восьми координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$ точек четверки $<ijkl>$ и потому связь (3.2) между ними возможна не всегда, являясь, в действительности, функциональным уравнением особого рода относительно обеих функций f и Φ.

Согласно известной теореме математического анализа для того, чтобы шесть функций от восьми переменных были функционально связаны, необходимо и достаточно, чтобы общий ранг матрицы Якоби для них, то есть матрицы (2.4) из §2, был меньше шести. А это означает, что любой определитель шестого порядка, полученный вычеркиванием каких-либо двух ее строк, должен обращаться в ноль.

Рассмотрим определитель, полученный вычеркиванием в матрице (2.4) последних двух строк. Поскольку по всем восьми координатам четверки $<ijkl>$ он тождественно обращается в ноль, зафиксируем в нем координаты точек k, l и разложим его по элементам первого столбца. В результате относительно метрической функции $f(ij)$ получаем линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, которое, после введения удобных обозначений коэффициентов при производных, можно записать в следующем виде:

$$A(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} + B(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} + A(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} + B(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0,$$

где, например, $A(i) = A(x_i, y_i)$. Это уравнение решается методом характеристик:

$$f(ij) = \chi(\varphi(i) - \varphi(j), \psi(i), \psi(j)),$$

где $\chi(u, v, w)$ – произвольная функция трех переменных, а функции двух переменных φ и ψ независимы. После естественной замены координат $\varphi(x, y) \to x$, $\psi(x, y) \to y$ решение запишется в более простом виде:

$$f(ij) = \chi(x_i - x_j, y_i, y_j). \tag{3.15}$$

Подставим решение (3.15) в матрицу (2.4) и рассмотрим другие два ее определителя шестого порядка, полученные вычеркиванием первой, второй и первой, четвертой строк. Эти определители также обращаются в ноль тождественно по всем восьми координатам точек четверки $<ijkl>$. Фиксируя в них координаты точек k, l, приходим к следующим двум соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\chi_w(ij)}{\chi_u(ij)} &= +\mu(j) + \nu(j)\frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)}\ , \\ \frac{\chi_v(ij)}{\chi_u(ij)} &= -\mu(i) - \nu(i)\frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)}\ , \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

которые, прежде всего, являются системой двух функциональных уравнений относительно функций μ, ν, λ, σ, так как в их левые части координаты x_i и x_j входят в виде разности $x_i - x_j$. Решив их, превратим соотношения (3.16) в систему двух дифференциальных уравнений относительно функции $\chi(u, v, w)$. Решения последней и определяют всю совокупность метрических функций (3.4)–(3.14), задающих двумерные феноменологически симметричные геометрии ранга четыре со связью (3.2). Наиболее сложный этап в описанном выше методе – нахождение явных выражений для четырех функций μ, ν, λ, σ из двух функциональных уравнений (3.16), так как они имеют большое число решений. Заметим, что все метрические функции (3.4)–(3.14) классификационной теоремы настоящего параграфа будут получены в §8 второй главы, исходя из установленной в ней эквивалентности феноменологической и групповой симметрий двумерных геометрий.

§4. Трехмерные феноменологически симметричные геометрии

Примером трехмерной феноменологически симметричной геометрии является трехмерное пространство Евклида E^3. Для метрической функции $f(ij)$, сопоставляющей паре его точек $< ij >$ квадрат обычного расстояния, в декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) представление будет следующим:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2. \tag{4.1}$$

Возьмем в E^3 пять произвольных точек i, j, k, l, m и выпишем для них по метрической функции (4.1) десять ее значений $f(ij), f(ik), \ldots, f(lm)$, соответствующих всем возможным парам $<ij>, <ik>, \ldots, <lm>$. Хорошо известно, что эти десять значений функционально связаны между собой, обращая в ноль определитель Кэли-Менгера шестого порядка, строение которого аналогично строению определителя пятого порядка (В.2):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) & f(im) \\ 1 & f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) & f(jm) \\ 1 & f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) & f(km) \\ 1 & f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 & f(lm) \\ 1 & f(im) & f(jm) & f(km) & f(lm) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.2}$$

По терминологии Ю.И.Кулакова [1] соотношение (4.2), справедливое для любой пятерки $<ijklm>$, выражает феноменологическую симметрию трехмерного пространства Евклида. Заметим, что ранг этой симметрии равен пяти, так как соотношение (4.2) записано для пяти произвольных точек пространства.

Трехмерные геометрии задаются на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ невырожденной метрической функцией f, сопоставляющей паре $<ij>$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f$ в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ некоторое число $f(ij) \in R$. Если в многообразии $\mathfrak{M}$ ввести систему локальных координат (x, y, z), то для метрической функции f в некоторой окрестности пары $<ij>$ из области ее определения можно записать соответствующее координатное представление:

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j). \tag{4.3}$$

Невырожденность функции (4.3) означает, что координаты точек i и j входят в нее существенным образом, что возможно при выполнении следующих двух условий:

$$\frac{\partial(f(ik), f(il), f(im))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(kj), f(lj), f(mj))}{\partial(x_j, y_j, z_j)} \neq 0 \tag{4.4}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^4$ множества четверок $<iklm>$ и $<klmj>$. Предполагается, конечно, что метрическая функция (4.3) достаточно гладкая и область ее определения $\mathfrak{S}_f$ есть плотное и открытое в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множество.

Введем функцию F, сопоставляя пятерке $<ijklm>$ из $\mathfrak{M}^5$ точку $(f(ij), f(ik), \ldots, f(lm)) \in R^{10}$, координаты которой в R^{10} определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью десяти расстояний для следующих пар его точек: $<ij>, <ik>, \ldots, <lm>$, если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения функции F обозначим через $\mathfrak{S}_F$. Очевидно, что область $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}^5$ множество.

Определение. Будем говорить, что невырожденная метрическая функция f задает на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную геометрию* ранга пять, если дополнительно имеет место следующая аксиома:

Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждой пятерки $<ijklm>$ которого и некоторой ее окрестности $U(<ijklm>)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathcal{E} \to R$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{10}$, содержащей точку $F(<ijklm>)$, что в ней $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ и множество $F(U(<ijklm>))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(im), f(jk), f(jl), f(jm), f(kl), f(km), f(lm)) = 0 \tag{4.5}$$

для всех пятерок из $U(<ijklm>)$.

Эта аксиома составляет содержание принципа феноменологической симметрии ранга пять для трехмерной геометрии. Она выражает собой требование, чтобы десять расстояний между точками любой пятерки из $U(<ijklm>)$ были функционально связаны, удовлетворяя уравнению (4.5). Условие $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ означает, что в этом уравнении функция Φ тождественно в постоянную не обращается.

Теорема 1. *Для того, чтобы невырожденная метрическая функция f задавала на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга пять, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен девяти на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Только что сформулированная теорема 1 аналогична соответствующей теореме из §2 для феноменологически симметричной двумерной геометрии и доказывается точно также. Уравнение (4.5) выражает функциональную зависимость десяти функций от большего числа переменных – пятнадцати координат всех точек пятерки $<ijklm>$. Соответствующая матрица Якоби имеет пятнадцать строк и десять столбцов, а ранг ее должен быть равен девяти.

Полная классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий ранга пять была построена методом, аналогичным описанному в §3, но технически еще более громоздкому и сложному. Приведем ее ниже по работе [9].

Теорема 2. *С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y, z) невырожденная метрическая функция* (4.3), *задающая на трехмерном многообразии феноменологически симметричную геометрию ранга пять со связью* (4.5), *может быть представлена одним из следующих тринадцати канонических выражений:*

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \tag{4.6}$$

$$f(ij) = \sin z_i \sin z_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] + \cos z_i \cos z_j, \tag{4.7}$$

$$f(ij) = \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] - \mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j, \tag{4.8}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2, \tag{4.9}$$

$$f(ij) = \mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] - \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j, \tag{4.10}$$

$$f(ij) = \mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j [\mathrm{ch} y_i \mathrm{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \mathrm{sh} y_i \mathrm{sh} y_j] - \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j, \tag{4.11}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j, \tag{4.12}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \exp(z_i + z_j), \tag{4.13}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] \exp(z_i + z_j), \tag{4.14}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]\exp(z_i + z_j), \tag{4.15}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2]\exp[2(\beta \mathrm{ar(c)th}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j)], \tag{4.16}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 \exp[2(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j)], \tag{4.17}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]\exp[2(\gamma \mathrm{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j)], \tag{4.18}$$

где $\beta > 0$ *и* $\beta \neq 1$; $\gamma > 0$.

Семь выражений (4.6)–(4.12) определяют метрические функции хорошо известных трехмерных геометрий: **(4.6)** – *пространства Евклида* как естественного трехмерного расширения плоскости Евклида с метрической функцией (3.4); **(4.7)** – *трехмерной сферы* в четырехмерном евклидовом пространстве; **(4.8)** – *пространства Лобачевского* как трехмерного двухполостного гиперболоида в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $< + + + - >$; **(4.9)** – *пространства Минковского* как естественного трехмерного расширения плоскости Минковского с метрической функцией (3.7); **(4.10)** – *трехмерного однополостного гиперболоида* I в четырехмерном псевдоевклидовом пространнстве той же сигнатуры $< + + + - >$; **(4.11)** – *трехмерного однополостного гиперболоида* II в четырехмерном псевдоевклидовом прстранстве, но другой сигнатуры $< + + - - >$; **(4.12)** – *симплектического пространства* как естественного расширения симплектической плоскости с метрической функцией (3.9) на нечетную размерность, равную трем. Остальные шесть выражений (4.13)–(4.18) определяют метрические функции таких трехмерных геометрий, которые впервые были обнаружены В.Х.Левом [9], геометрами не изучались и потому специального общепринятого названия не имеют: **(4.13)** – *симплициального пространства* как особого трехмерного феноменологически симметричного расширения симплициальной плоскости с метрической функцией (3.10); **(4.14)** – *особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Минковского* с метрической функцией (3.7); **(4.15)** – *особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Евклида* с метрической функцией (3.4); **(4.16)** – *псевдогельмгольцева пространства* как трехмерного феноменологически симметричного расширения псевдогельмгольцевой плоскости с метрической функцией (3.11); **(4.17)** – *дуальногельмгольцева пространства* как трехмерного феноменологически симметричного расширения дуальногельмгольцевой плоскости с метрической функцией (3.12); **(4.18)** – *пространства Гельмгольца* как трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Гельмгольца с метрической функцией (3.13).

В заключение заметим, что n-мерные феноменологически симметричные геометрии ранга $n+2$ задаются на n-мерном многообразии невырожденной метрической функцией с координатным представлением

$$f(ij) = f(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n, x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n), \tag{4.19}$$

причем для любого кортежа $<ijk\ldots vw>$ длины $n+2$ и некоторой его окрестности, таких, что множество пар $<ij>, <ik>, \ldots, <vw>$ принадлежит области ее определения $\mathfrak{S}_f$, соответствующее множество значений $f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)$ функционально связаны некоторым уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0, \tag{4.20}$$

причем $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$.

Классификации таких геометрий проведены только для $n = 2$ и $n = 3$ (см. §3 и §4 настоящей главы). В случае же $n \geqslant 4$ аналогичные классификации еще не построены, однако можно выписать некоторые выражения для метрической функции (4.19) n-мерной феноменологически симметричной геометрии ранга $n+2$ как естественные и особые расширения отдельных выражений из классификации двумерных (3.4)–(3.14) и трехмерных (4.6)–(4.18) феноменологически симметричных геометрий ранга четыре и пять соответственно.

§5. Некоторые примеры и задачи

Соотношение (2.1) представляет собой специальное функциональное уравнение относительно двух функций: метрической функции f, задающей двумерную геометрию, и функции Φ, с помощью которой выражается ее феноменологическая симметрия. В §3 приведены все канонические выражения для метрической функции (2.2) как решения уравнения (2.1). Зная же только метрическую функцию, можно для двумерной феноменологически симметричной геометрии либо найти явную запись уравнения (2.1), либо доказать существование такой функции Φ, с помощью которой неявно выражается эта симметрия.

Пример 1. Доказать, что для плоскости Евклида с метрической функцией **(3.4)** соотношение феноменологической симметрии (2.1) выражается следующим уравнением:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) \\ 1 & f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) \\ 1 & f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) \\ 1 & f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.1}$$

Решение. Используя известное правило перемножения квадратных матриц и их определителей, представим уравнение (5.1) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_i & y_i & x_i^2+y_i^2 & 1 & 0 \\ x_j & y_j & x_j^2+y_j^2 & 1 & 0 \\ x_k & y_k & x_k^2+y_k^2 & 1 & 0 \\ x_l & y_l & x_l^2+y_l^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -2x_i & -2x_j & -2x_k & -2x_l \\ 0 & -2y_i & -2y_j & -2y_k & -2y_l \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_i^2+y_i^2 & x_j^2+y_j^2 & x_k^2+y_k^2 & x_l^2+y_l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.1'}$$

Действительно, левые части уравнений (5.1) и (5.1$'$) совпадают для метрической функции (3.4). Убедимся в этом, перемножив, например, в левой части уравнения (5.1$'$) вторую строку первого определителя на четвертый столбец второго: $-2x_ix_k - 2y_iy_k + x_i^2 + y_i^2 + x_k^2 + y_k^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 = f(ik)$. Поскольку оба перемножаемых определителя, имея нулевой столбец и нулевую строку, заведомо равны нулю, их произведение, совпадающее с определителем Кэли-Менгера в левой части уравнения (5.1), также равно нулю. Это и доказывает справедливость уравнения (5.1), которое являтся тождеством по всем восьми координатам $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$ четырех точек i, j, k, l.

Пример 2. Установить, что для двумерной сферы с метрической функцией **(3.5)** соотношение феноменологической симметрии (2.1) выражается уравнением:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(ij) & f(ik) & f(il) \\ f(ij) & 1 & f(jk) & f(jl) \\ f(ik) & f(jk) & 1 & f(kl) \\ f(il) & f(jl) & f(kl) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.2}$$

Указание к решению. Представить левую часть уравнения (5.2) в виде произведения двух определителей с нулевым столбцом и нулевой строкой, используя явное выражение (3.5) для метрической функции двумерной сферы.

Пример 3. Для симплициальной плоскости с метрической функцией **(3.10)** найти уравнение (2.1), которым выражается ее феноменологическая симметрия.

Решение. Преобразуем выражение (3.10) следующим образом: перенесем правую часть влево и избавимся от знаменателя: $(x_i - x_j)f(ij) - (y_i - y_j) = 0$. Аналогичное преобразование сделаем и с выражениями для $f(ik), f(il), f(jk), f(jl)$, $f(kl)$. Введя для сокращения записи обозначения $u = x_i - x_j,\ v = x_i - x_k,\ w = x_i - x_l$ и $p = y_i - y_j,\ q = y_i - y_k,\ r = y_i - y_l$, получаем шесть соотношений:

$$\left.\begin{array}{c} uf(ij) - p = 0,\ vf(ik) - q = 0, \\ wf(il) - r = 0,\ (v-u)f(jk) - (q-p) = 0, \\ (w-u)f(jl) - (r-p) = 0,\ (w-v)f(kl) - (r-q) = 0, \end{array}\right\}$$

которые можно рассматривать как алгебраическую систему шести линейных однородных уравнений относительно шести неизвестных, а именно u, v, w, p, q, r. Поскольку эта система заведомо имеет ненулевое решение, определитель ее матрицы должен быть равен нулю, то есть:

$$\begin{vmatrix} f(ij) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & f(ik) & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f(il) & 0 & 0 & -1 \\ -f(jk) & f(jk) & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -f(jl) & 0 & f(jl) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -f(kl) & f(kl) & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное уравнение и есть искомое, однако удобно очевидным образом понизить порядок определителя до третьего:

$$\begin{vmatrix} f(ij)-f(jk) & f(jk)-f(ik) & 0 \\ f(ij)-f(jl) & 0 & f(il)-f(jl) \\ 0 & f(ik)-f(kl) & f(il)-f(kl) \end{vmatrix} = 0. \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) выражает феноменологическую симметрию симплицмальной плоскости. В его справедливости можно убедиться непосредственно подстановкой в него соответствующего выражения (3.10) для метрической функции. Впрочем, для проверки тождественного по координатам точек четверки $<ijkl>$ обращения в ноль определителя в левой части уравнения (5.3) можно использовать современные возможности ЭВМ.

Задача 1. Для следующих двумерных геометрий с метрическими функциями: **(3.6)** – плоскости Лобачевского; **(3.7)** – плоскости Минковского; **(3.8)** – однополостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; **(3.9)** – симплектической плоскости; **(3.14)** – на несвязном двумерном многообразии *найти* уравнение (2.1), выражающее их феноменологическую симметрию.

Указание к решению. Уравнение (2.1) для всех перечисленных двумерных геометрий может быть записано в виде обращения в ноль определителя четвертого или пятого порядка. Используя явное выражение для метрической функции, необходимо представить этот определитель как произведение двух определителей с нулевым столбцом и нулевой строкой, то есть заведомо равных нулю. Имеет смысл предварительно разобраться в рассмотренных выше примерах 1 и 2.

Задача 2. Для следующих двумерных геометрий, задаваемых метрическими функциями: **(3.11)** – псевдогельмгольцевой плоскости; **(3.12)** – дуальногельмгольцевой плоскости; **(3.13)** – плоскости Гельмгольца *установить* их феноменологическую ранга четыре симметрию.

Указание к решению. По-видимому, для этих трех геометрий невозможно представить уравнение (2.1), выражающее их феноменологическую симметрию, в явном виде. Его существование можно установить по матрице Якоби (2.4) для системы функций (2.3). Ранг этой матрицы согласно теореме из §2 должен быть равен пяти. То есть, записав матрицу Якоби, находим ее ранг, и если он равен пяти, то двумерная геометрия, задаваемая данной метрической функцией, действительно феноменологически симметрична. Вручную установить ранг матрицы Якоби (2.4), у которой шесть столбцов и восемь строк, довольно трудно, так как необходимо найти значение всех определителей шестого порядка. Поэтому имеет смысл использовать современные ресурсы ЭВМ. Можно также попытаться с их помощью найти для этих трех геометрий явную запись уравнения (2.1) или доказать невозможность такой записи.

Задача 3. Для следующих трехмерных геометрий с метрическими функциями: **(4.6)** – пространство Евклида; **(4.7)** – трехмерной сферы; **(4.8)** – пространства Лобачевского; **(4.9)** – пространства Минковского; **(4.10)** – трехмерного гиперболоида I; **(4.11)** – трехмерного гиперболоида II; **(4.12)** – симплектического пространства; **(4.13)** – симплициального пространства; **(4.14)** – особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Минковского; **(4.15)** – особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Евклида *найти* уравнение (4.5), выражающее их феноменологическую симметрию.

Указание к решению. См. аналогичное указание к задаче 1. Соответствующие определители будут пятого или шестого порядка.

Задача 4. Для следующих трехмерных геометрий, задаваемых метрическими функциями: **(4.16)** – псевдогельмгольцева пространства; **(4.17)** – дуально-гельмгольцева пространства; **(4.18)** – пространства Гельмгольца, *установить* их феноменологическую ранга пять симметрию.

Указание к решению. См. аналогичное указание к задаче 2. Соответствующая матрица Якоби имеет десять столбцов и пятнадцать строк.

ГЛАВА II. Групповая симметрия

§6. Групповая симметрия двумерных геометрий и ее эквивалентность феноменологической симметрии

Рассмотрим теперь групповые свойства двумерной феноменологически симметричной геометрии, введенной выше определением из §2.

Пусть U и U' – открытые области в многообразии $\mathfrak{M}$, не обязательно связные. Гладкое инъективное отображение

$$\lambda : U \to U' \tag{6.1}$$

называется локальным *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию f. Последнее означает, что для любой пары $<ij> \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i, j \in U$, и соответствующей пары $<\lambda(i), \lambda(j)>$, такой что она тоже принадлежит $\mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij). \tag{6.2}$$

Множество всех движеней (6.1) есть локальная группа преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}$, для которой метрическая функция f согласно равенству (6.2) является *двухточечным инвариантом.* Если она задана явно, например, в своем координатном представлении (2.2) из §2: $f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$, то равенство (6.2) является функциональным уравнением, решая которое можно найти полную группу локальных движений (6.1). Нам же о метрической функции известно только то, что она невырождена и удовлетворяет некоторому уравнению (2.1) из §2. Но этого оказывается достаточно для установления факта существования трехпараметрической группы ее движений.

Для большей ясности последующего изложения воспроизведем в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя монографии Л.С. Понтрягина "Непрерывные группы преобразований"(см. [10], стр. 435). Пусть G^r – r-мерная локальная группа Ли и U – некоторая область гладкого многообразия $\mathfrak{M}$. Допустим, что каждому элементу $a \in G^r$ поставлено в соответствие непрерывно зависящее от a инъективное отображение $\lambda_a : U \to U'$ области U в некоторую область U' многообразия $\mathfrak{M}$, относящее каждой точке $i \in U$ некоторую точку $i' \in U'$, то есть $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i, a)$. Будем говорить, что G^r есть локальная группа Ли преобразований области U, если выполнены следующие три условия:

1. Единице e группы G^r соответсвует тождественное преобразование $i' = \lambda(i, e) = i$ области U на себя и $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, то есть произведению $ab \in G^r$ соответствует композиция преобразований: сначала λ_a и затем λ_b (возможен и другой порядок: $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ba)$).

2. Два преобразования λ_a и λ_b совпадают тогда и только тогда, когда $a = b$ (это условие можно сформулировать иначе, потребовав, чтобы преобразование λ_a было тождественным лишь при условии, что a есть единица e группы G^r).

3. В координатной форме $\lambda(i, a)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция точки $i \in U$ и элемента $a \in G^r$.

Определенная только что группа преобразований по условию 2 эффективна и потому сами элементы группы G^r могут считаться преобразованиями. То есть можно говорить о r-мерной локальной группе преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, которую обозначим через $G^r(\lambda)$. Таким образом, в области U задано эффективное гладкое действие группы G^r, причем условия 1, 2, 3 выполняются для некоторой ее части, то есть некоторой, зависящей от U, окрестности единичного элемента.

В последующем изложении удобно считать, что область $U \subset \mathfrak{M}$ не обязательно связна, например, может состоять из двух связных областей: $U = U_1 \cup U_2$, причем $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Определение. Будем говорить, что метрическая функция f задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ *двумерную геометрию, наделенную групповой симметрией* степени три, если, кроме аксиом I, II, III из §1 гл. I, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV′. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие трехмерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i)$, $U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что метрическая функция $f(ij)$ является двухточечным инвариантом этих действий.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IV′, определяют локальную подвижность жестких фигур в двумерном пространстве $\mathfrak{M}$, аналогичную их подвижности в плоскости Евклида. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы G^3 определены согласно аксиоме IV′ в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Множество пар $< ij >$, для которых метрическая функция f определена и является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Будем говорить также, что метрическая функция f *допускает* трехмерную локальную группу Ли локальных движений.

Из аксиомы IV′ следует также, что на открытом и плотном в $\mathfrak{M}$ множестве задано трехмерное линейное семейство гладких векторных полей X, замкнутое относительно операции коммутирования, то есть алгебра Ли преобразований (см. [10], §60). В некоторой локальной системе координат (x, y) базисные векторные поля этого семейства запишем в операторной форме:

$$X_\omega = \lambda_\omega(x, y)\partial/\partial x + \sigma_\omega(x, y)\partial/\partial y, \tag{6.3}$$

где $\omega = 1, 2, 3$. Метрическая функция f будет двухточечным инвариантом локальной группы Ли преобразований некоторых окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ точек i

и j в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе трех уравнений

$$X_\omega(i)f(ij) + X_\omega(j)f(ij) = 0 \tag{6.4}$$

с операторами (6.3):

$$\lambda_\omega(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} + \sigma_\omega(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} + \lambda_\omega(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} + \sigma_\omega(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0,$$

где $\omega = 1, 2, 3$ и, например, $\lambda_\omega(i) = \lambda_\omega(x_i, y_i)$ (см. [11], с.229 и 237).

Если векторное поле X ненулевое, то в области его задания есть хотя бы одна точка в которой оно отлично от нуля. Однако в других точках этой области поле X может обращаться в нуль. Если же для соответствующей группы Ли преобразований, алгебре Ли которой принадлежит поле X, метрическая функция f является невырожденным двухточечным инвариантом, то имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Множество точек, где ненулевое векторное поле X алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований, удовлетворяющей аксиоме* IV$'$, *отлично от нуля, открыто и плотно в* $\mathfrak{M}$.

Предположим противное. Пусть ненулевое векторное поле $X = a^\omega X_\omega$, где a^ω, $\omega = 1, 2, 3$ – постоянные, не все равные нулю одновременно, в некоторой окрестности $U(i)$ точки i обращается в нуль тождественно. Поле X ненулевое, поэтому в какой-то другой точке j, а значит и в некоторой ее окрестности $U(j)$, оно отлично от нуля. Поскольку область $\mathfrak{S}_f$ открыта и плотна в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ по аксиоме I из §1, можно считать, что пара $<ij> \in \mathfrak{S}_f$. Но тогда, согласно аксиоме IV$'$, метрическая функция $f(ij)$ будет двухточечным инвариантом, являясь решением системы трех уравнений (6.4). С учетом того, что по предположению $X(i) = a^\omega X_\omega(i) = 0$ и $X(j) = a^\omega X_\omega(j) \neq 0$, из этой системы получаем уравнение:

$$a^\omega\lambda_\omega(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} + a^\omega\sigma_\omega(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0, \tag{6.4$'$}$$

в которое входят производные только по координатам точки j и от этих же только координат зависят коэффициенты при производных, причем, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Следовательно, уравнение (6.4$'$) может быть решено методом характеристик. Уравнение характеристик для него имеет не более одного интеграла, и потому общее решение уравнения (6.4$'$) будет:

$$f(ij) = f(x_i, y_i, , \psi(x_j, y_j)).$$

Но в это выражение для метрической функции f координаты точки j входят несущественным образом через функцию $\psi(j)$, что, очевидно, противоречит аксиоме III из §1. Таким образом, в окрестности $U(i)$ обязательно найдется точка, где исходное векторное поле отлично от нуля. Поскольку область задания поля

X плотна и открыта в $\mathfrak{M}$, множество точек, где оно отлично от нуля, тоже плотно и открыто в $\mathfrak{M}$, хотя может и не совпадать с областью его задания. Лемма 1 доказана.

Следствие. *Множество точек, где базисные векторные поля X_ω, $\omega = 1, 2, 3$, алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований, удовлетворяющей аксиоме* IV$'$, *одновременно отличны от нуля, открыто и плотно в* $\mathfrak{M}$.

Следствие очевидно, так как по доказанной выше лемме 1 каждое из базисных векторных полей X_1, X_2, X_3 отлично от нуля на открытом и плотном в $\mathfrak{M}$ множестве. Пересечение же трех таких множеств открыто и плотно в $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Для того, чтобы метрическая функция f, удовлетворяющая аксиомам* I, II, III *из* §1, *задавала на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ двумерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени три, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен пяти на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Докажем сначала необходимость условия теоремы 1 о ранге отображения F. Пусть $<ijkl> \in \mathfrak{M}^4$ такая четверка, что ее точки i, j, k, l принадлежат открытому и плотному в $\mathfrak{M}$ множеству, о котором говорится в аксиоме IV$'$ определения настоящего параграфа. Ясно, что множество таких четверок открыто и плотно в $\mathfrak{M}^4$, а его пересечение с $\mathfrak{S}_F$ открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $<ijkl> \in \mathfrak{S}_F$. Согласно аксиоме IV$'$ существуют такие окрестности $U(i), U(j), U(k), U(l)$ точек этой четверки, что действия некоторой трехмерной локальной группы Ли в них сохраняют метрическую функцию f, определенную в каждой из окрестностей $U(i) \times U(j), U(i) \times U(k), \ldots, U(k) \times U(l)$ пар $< ij >$, $< ik >, \ldots, < kl >$. Возьмем теперь произвольную четырехточечную фигуру, соответствующую некоторой четверке из окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k) \times U(l) \subset \mathfrak{S}_F$. Движение этой фугуры как жесткой конструкции означает, что при действии группы G^3 в окрестностях $U(i), U(j), U(k), U(l)$, то есть изменении координат ее точек, все шесть расстояний в ней, определяемых системой функций (2.3) из §2, сохраняются, являясь двухточечными инвариантами. Инвариантность же этих функций при локальных преобразованиях, задаваемых векторными полями

$$X = \lambda(x, y)\partial/\partial x + \sigma(x, y)\partial/\partial y \tag{6.5}$$

в окрестностях $U(i), U(j), U(k), U(l)$, означает, что эти функции удовлетворяют следующей системе уравнений, аналогичных уравнению (6.4) с операторами

(6.3):

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(i)\dfrac{\partial f(ij)}{\partial x_i}+\sigma(i)\dfrac{\partial f(ij)}{\partial y_i}+\lambda(j)\dfrac{\partial f(ij)}{\partial x_j}+\sigma(j)\dfrac{\partial f(ij)}{\partial y_j}=0,\\ \dotfill\\ \lambda(k)\dfrac{\partial f(kl)}{\partial x_k}+\sigma(k)\dfrac{\partial f(kl)}{\partial y_k}+\lambda(l)\dfrac{\partial f(kl)}{\partial x_l}+\sigma(l)\dfrac{\partial f(kl)}{\partial y_l}=0.\end{array}\right\} \qquad (6.6)$$

Система (6.6) при известной метрической функции f может быть рассмотрена как система шести линейных однородных уравнений относительно восьми компонент векторных полей (6.5) в некоторых окрестностях точек i, j, k, l. Заметим, что матрица этой системы совпадает с функциональной матрицей (2.4) из §2 отображения F. Алгебры Ли векторных полей (6.5) трехмерны, так как такую размерность имеют согласно аксиоме IV$'$ локальные группы Ли преобразований окрестностей $U(i), U(j), U(k), U(l)$. Система (6.6), следовательно, имеет решение

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(i)=a^{\omega}\lambda_{\omega}(i),\ \sigma(i)=a^{\omega}\sigma_{\omega}(i),\\ \dotfill\\ \lambda(l)=a^{\omega}\lambda_{\omega}(l),\ \sigma(l)=a^{\omega}\sigma_{\omega}(l),\end{array}\right\} \qquad (6.7)$$

где a^{ω} – произвольные константы и по "немому"индексу ω производится суммирование в пределах от 1 до 3, причем функции $\lambda_{\omega}(x,y),\ \sigma_{\omega}(x,y)$ линейно независимы по этому индексу с постоянными коэффициентами в соответствующих окрестностях каждой точки четверки $<ijkl>$.

Таким образом, система (6.6) имеет три линейно независимых с постоянными коэффициентами ненулевых решения. Эти решения можно выписать по общему решению (6.7), беря три линейно независимых ненулевых вектора (a^1, a^2, a^3), например, (1,0,0), (0,1,0,), (0,0,1):

$$\lambda_{\omega}(i),\sigma_{\omega}(i),\ \lambda_{\omega}(j),\sigma_{\omega}(j),\ \lambda_{\omega}(k),\sigma_{\omega}(k),\ \lambda_{\omega}(l),\sigma_{\omega}(l), \qquad (6.7')$$

где $\omega = 1, 2, 3$.

Лемма 2. *Решения* (6.7$'$) *линейно независимы по нижнему индексу* ω *не только с постоянными коэффициентами, но линейно независимы по нему также и с переменными коэффициентами, то есть в общем смысле.*

Предположим противное. Пусть найдутся такие переменные коэффициенты $c^{\omega} = c^{\omega}(<ijkl>)$, $\omega = 1, 2, 3$, что имеют место следующие восемь соотношений:

$$c^{\omega}\lambda_{\omega}(i)=0,\ c^{\omega}\sigma_{\omega}(i)=0,\ \ldots,\ c^{\omega}\lambda_{\omega}(l)=0,\ c^{\omega}\sigma_{\omega}(l)=0, \qquad (6.8)$$

вытекающие из предполагаемой линейной зависимости решений (6.7$'$), которые, напомним, линейно независимы с постоянными коэффициентами. Коэффициенты c^1, c^2, c^3 есть решения системы уравнений (6.8) и являются некоторыми функциями координат точек четверки $<ijkl>$, одновременно в нуль не обращающимися ни для одной из таких четверок. Заметим, что система (6.8) не обязательно имеет ненулевое решение, так как число уравнений в ней больше числа неизвестных.

Рассмотрим движение произвольной пары $<kl>$, содержащей две точки, и тройки $<jkl>$, содержащей три точки, причем переход от пары к тройке состоит в добавлении точки j. Поскольку при движении тройки сохраняются дополнительно два расстояний $f(jk), f(jl)$, относительно двух компонент векторного поля $X(j)$, то есть поля (6.5) в некоторой окрестности $U(j)$ точки j, естественно возникает система двух линейных неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(j)\frac{\partial f(jk)}{\partial x_j} + \sigma(j)\frac{\partial f(jk)}{\partial y_j} = -\lambda(k)\frac{\partial f(jk)}{\partial x_k} - \sigma(k)\frac{\partial f(jk)}{\partial y_k}, \\ \lambda(j)\frac{\partial f(jl)}{\partial x_j} + \sigma(j)\frac{\partial f(jl)}{\partial y_j} = -\lambda(l)\frac{\partial f(jl)}{\partial x_l} - \sigma(l)\frac{\partial f(jl)}{\partial y_l}. \end{aligned}\right\}$$

Ранг матрицы этой системы согласно аксиоме III из §1 равен двум по крайней мере для одной пары $<kl>$ и одной точки j из соответствующих окрестностей. Решая уравнения системы, находим выражения для компонент векторного поля $X(j)$ через компоненты векторных полей $X(k), X(l)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(j) = b_1^1\lambda(k) + b_2^1\sigma(k) + b_3^1\lambda(l) + b_4^1\sigma(l), \\ \sigma(j) = b_1^2\lambda(k) + b_2^2\sigma(k) + b_3^2\lambda(l) + b_4^2\sigma(l), \end{aligned}\right\}$$

где $b_1^1 = b_1^1(<jkl>), \dots, b_4^2 = b_4^2(<jkl>)$. В силу произвольности коэффициентов a^ω в решении (6.7), из этих выражений получаем линейную связь:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_\omega(j) = b_1^1\lambda_\omega(k) + b_2^1\sigma_\omega(k) + b_3^1\lambda_\omega(l) + b_4^1\sigma_\omega(l), \\ \sigma_\omega(j) = b_1^2\lambda_\omega(k) + b_2^2\sigma_\omega(k) + b_3^2\lambda_\omega(l) + b_4^2\sigma_\omega(l). \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Запишем подсистему системы уравнений (6.8), относящуюся к паре $<kl>$:

$$c^\omega\lambda_\omega(k) = 0,\ c^\omega\sigma_\omega(k) = 0,\ c^\omega\lambda_\omega(l) = 0,\ c^\omega\sigma_\omega(l) = 0. \tag{6.8$'$}$$

Соответствующая подсистема системы (6.8) для тройки $<jkl>$ получается добавлением к подсистеме (6.8$'$) двух уравнений $c^\omega\lambda_\omega(j) = 0,\ c^\omega\sigma_\omega(j) = 0$. Но эти уравнения в силу линейной связи (6.9) являются следствием уравнений подсистемы (6.8$'$). То есть ранги матриц подсистем системы (6.8), относящихся к паре $<kl>$ и тройке $<jkl>$, совпадают. Ранг матрицы подсистемы (6.8$'$) равен двум или единице. Действительно, с одной стороны, этот ранг не превышает значения, равного трем, так как в противном случае вся система(6.8) будет иметь только нулевое решение, что противоречит сделанному предположению. С другой стороны, по следствию леммы 1 он не может быть меньше единицы. Таким образом, в матрице подсистемы (6.8$'$) найдется такая квадратная подматрица ненулевого порядка $r < 3$, определитель которой отличен от нуля. Возьмем определитель $r+1$ порядка, содержащий эту квадратную подматрицу в качестве минора порядка r и строку из матрицы подсистемы (6.8) для тройки $<jkl>$, в которую входят или функции $\lambda_\omega(j)$ или функции $\sigma_\omega(j)$. Поскольку по доказанному выше ранг матрицы подсистемы системы (6.8) для тройки $<jkl>$ тоже равен r, указанный определитель $r+1$ порядка должен обращаться в нуль. Раскрывая этот определитель по элементам строки, содержащей функции $\lambda_\omega(j)$ и $\sigma_\omega(j)$, получаем связь

$$\widetilde{c}^\omega(<kl>)\lambda_\omega(j) = 0, \ \widetilde{c}^\omega(<kl>)\sigma_\omega(j) = 0,$$

где $\widetilde{c}^\omega(<kl>)$ есть алгебраическое дополнение к $\lambda_\omega(j)$ или $\sigma_\omega(j)$, зависящее от координат точек пары $<kl>$ и не зависящее от координат точки j. Заметим, что хотя бы одно из этих алгебраических дополнений тождественно в нуль не обращается. Фиксируя в полученной связи координаты точек пары $<kl>$, по которым эта связь выполняется тождественно, устанавливаем, что функции $\lambda_\omega(j)$ и $\sigma_\omega(j)$ линейно зависимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Но этот результат противоречит основному условию аксиомы IV$'$, согласно которому размерность локальной группы Ли преобразований окрестности $U(j)$ равна трем, и потому такую же размерность имеет соответствующая алгебра Ли векторных полей $X(j)$ с базисом $X_\omega(j) = \lambda_\omega(j)\partial/\partial x_j + \sigma_\omega(j)\partial/\partial y_j$, где $\omega = 1, 2, 3$. Установленное противоречие и доказывает лемму 2.

Итак, по только что доказанной лемме 2 система уравнений (6.6) имеет три линейно независимых в общем смысле ненулевых решения в некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k) \times U(l)$ четверки $<ijkl>$. Предположим, что в этой окрестности найдется такая четверка, для которой ранг матрицы (2.4) из §2, то есть ранг матрицы системы (6.6), равен шести. В силу гладкости метрической функции f ранг матрицы (2.4) будет равен шести и в некоторой окрестности указанной четверки, содержащейся в окрестности $U(i) \times \cdots \times U(l)$. Как известно, максимальное число линейно независимых (для системы (6.6) – в общем смысле) ненулевых решений алгебраической системы линейных однородных уравнений равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы. В предполагаемом случае для системы (6.6) оно будет равно двум $(8 - 6 = 2)$, то есть меньше трех, хотя, в действительности, по лемме 2 эта система имеет три линейно независимых в общем смысле ненулевых решения (6.7$'$). Таким образом, ранг матрицы (2.4) из §2 в окрестности $U(i) \times \cdots \times U(l)$ не может быть больше пяти. С другой стороны, в этой матрице по лемме 1 из §2 имеется квадратная подматрица пятого порядка с отличным от нуля определителем для некоторого кортежа из окрестности $U(i) \times \cdots \times U(l)$. Следовательно, в любой окрестности плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества четверок $<ijkl>$, описанных в самом начале доказательства теоремы 1, найдется такая четверка, для которой ранг матрицы (2.4) из §2, то есть ранг отображения F, задаваемого системой функций (2.3) из §2, точно равен пяти. Множество таких четверок, очевидно, плотно в $\mathfrak{S}_F$. На этом доказательство необходимости условия теоремы 1 о ранге отображения F завершено.

Перейдем к более сложному доказательству достаточности этого условия. Пусть для четверки $<ijkl>$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества, о котором говорится в условии теоремы 1, ранг отображения F с функциональной матрицей (2.4) из §2 равен пяти. Опираясь на лемму 3 из §2, можем полагать, что ранг матрицы (2.4) из §2 будет равен пяти для всех четверок из некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k) \times U(l) \subset \mathfrak{S}_F$ исходной четверки. Поскольку число строк в этой матрице, равное восьми, больше ее ранга, между ними существует линейная связь, которую запишем по элементам каждого столбца:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda[i]\dfrac{\partial f(ij)}{\partial x_i}+\sigma[i]\dfrac{\partial f(ij)}{\partial y_i}+\lambda[j]\dfrac{\partial f(ij)}{\partial x_j}+\sigma[j]\dfrac{\partial f(ij)}{\partial y_j}=0,\\ \dotfill \\ \lambda[k]\dfrac{\partial f(kl)}{\partial x_k}+\sigma[k]\dfrac{\partial f(kl)}{\partial y_k}+\lambda[l]\dfrac{\partial f(kl)}{\partial x_l}+\sigma[l]\dfrac{\partial f(kl)}{\partial y_l}=0,\end{array}\right\} \tag{6.10}$$

где, например, $\lambda[i]$ и $\sigma[i]$ – коэффициенты линейной зависимости при строках с дифференцированием по координатам x_i и y_i, а для их отличия от компонент $\lambda(i)$ и $\sigma(i)$ векторного поля (6.5) в окрестности $U(i)$, входящих в уравнения системы (6.6), здесь использованы квадратные скобки.

Соотношения (6.10) при известной метрической функции f представляют собой алгебраическую систему шести линейных однородных уравнений относительно восьми коэффициентов линейной зависимости $\lambda[i],\sigma(i),\lambda[j],\ \sigma(j),\lambda[k],\sigma(k),$ $\lambda[l],\sigma[l]$, которые одновременно в нуль не обращаются в окрестности $U(i)\times U(j)\times$ $U(k)\times U(l)$. Максимальное число линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений системы (6.10) равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы, то есть равно трем. Выпишем общее решение системы (6.10):

$$\left.\begin{array}{l}\lambda[i]=c^\omega\lambda_\omega(i,<ijkl>),\ \sigma[i]=c^\omega\sigma_\omega(i,<ijkl>),\\ \dotfill \\ \lambda[l]=c^\omega\lambda_\omega(l,<ijkl>),\ \sigma[l]=c^\omega\sigma_\omega(l,<ijkl>),\end{array}\right\} \tag{6.11}$$

где $c^\omega=c^\omega(<ijkl>)$ – коэффициенты общего решения в его выражении через линейно независимые ненулевые решения этой же системы, причем суммирование по "немому"индексу ω производится в пределах от 1 до 3. Однако в отличие от решения (6.7) аналогичной системы (6.6) здесь учтена возможная зависимость выражений $\lambda[i],\sigma[i],\lambda[j],\sigma[j],\lambda[k],\sigma[k],\lambda[l],\sigma[l]$ не только от координат той точки, по координате которой проводится дифференцирование в соответствующем строке функциональной матрицы (2.4) из §2, но и от координат всех точек исходной четверки $<ijkl>$, входящих в коэффициенты уравнений (6.10). Кроме того, в решении (6.11) коэффициенты c^ω являются, в общем случае, функциями, тогда как в решении (6.7) коэффициенты a^ω были только произвольными константами.

Лемма 3. *Общее решение* (6.11) *системы* (6.10) *может быть записано в такой форме, что координаты точки i и координаты точки j входят явно в функции $\lambda_\omega,\sigma_\omega$ только для выражений $\lambda[i],\sigma[i]$ и $\lambda[j],\sigma[j]$ соответственно.*

Выделим из системы (6.10) уравнение для пары $<kl>$, которое не включает в себя коэффициентов с координатами точек i и j:

$$\lambda[k]\frac{\partial f(kl)}{\partial x_k}+\sigma[k]\frac{\partial f(kl)}{\partial y_k}+\lambda[l]\frac{\partial f(kl)}{\partial x_l}+\sigma[l]\frac{\partial f(kl)}{\partial y_l}=0. \tag{6.10$'$}$$

Ранг уравнения $(6.10')$ равен единице, по крайней мере, для одной пары из $U(k)\times U(l)$ и некоторой ее окрестности, так как по условию аксиомы III из §1 метрическая функция f невырождена. Но тогда уравнение $(6.10')$ имеет в этой окрестности три и не более в общем смысле линейно независимых ненулевых решения, поскольку максимальное число таких решений равно числу входящих в нее неизвестных (= 4) минус его ранг (= 1). В уравнении $(6.10')$ нет зависимости от координат точек i, j и потому его общее решение можно записать в такой форме, в которой функции $\lambda_\omega, \sigma_\omega$ не зависят от этих координат:

$$\left.\begin{aligned} \lambda[k] = c^\omega\lambda_\omega(k, <kl>),\ \sigma[k] = c^\omega\sigma_\omega(k, <kl>), \\ \lambda[l] = c^\omega\lambda_\omega(l, <kl>),\ \sigma[l] = c^\omega\sigma_\omega(l, <kl>), \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

причем "немое"суммирование по индексу ω, как и в общем решении (6.11) всей системы (6.10), производится в тех же пределах от 1 до 3.

Выделим из системы (6.10) подсистемы двух уравнений, коэффициенты которых содержат координаты точки i:

$$\left.\begin{aligned} \lambda[i]\frac{\partial f(ik)}{\partial x_i} + \sigma[i]\frac{\partial f(ik)}{\partial y_i} + \lambda[k]\frac{\partial f(ik)}{\partial x_k} + \sigma[k]\frac{\partial f(ik)}{\partial y_k} = 0, \\ \lambda[i]\frac{\partial f(il)}{\partial x_i} + \sigma[i]\frac{\partial f(il)}{\partial y_i} + \lambda[l]\frac{\partial f(il)}{\partial x_l} + \sigma[l]\frac{\partial f(il)}{\partial y_l} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.10''}$$

и коэффициенты которых содержат координаты точки j:

$$\left.\begin{aligned} \lambda[j]\frac{\partial f(jk)}{\partial x_j} + \sigma[j]\frac{\partial f(jk)}{\partial y_j} + \lambda[k]\frac{\partial f(jk)}{\partial x_k} + \sigma[k]\frac{\partial f(jk)}{\partial y_k} = 0, \\ \lambda[j]\frac{\partial f(jl)}{\partial x_j} + \sigma[j]\frac{\partial f(jl)}{\partial y_j} + \lambda[l]\frac{\partial f(jl)}{\partial x_l} + \sigma[l]\frac{\partial f(jl)}{\partial y_l} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.10'''}$$

Относительно неизвестных $\lambda[i], \sigma[i]$ и $\lambda[j], \sigma[j]$ выделенные подсистемы неоднородны и по аксиоме III из §1 имеют ранг, равный двум. Но тогда эти неизвестные могут быть однозначно выражены через общее решение (6.12) подсистемы $(6.10')$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda[i] = c^\omega\lambda_\omega(i, <kl>),\ \sigma[i] = c^\omega\sigma_\omega(i, <kl>), \\ \lambda[j] = c^\omega\lambda_\omega(j, <kl>),\ \sigma[j] = c^\omega\sigma_\omega(j, <kl>), \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Ранг подсистемы системы уравнений (6.10) без первого уравнения

$$\lambda[i]\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} + \sigma[i]\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} + \lambda[j]\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} + \sigma[j]\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0 \tag{6.14}$$

равен рангу самой системы (6.10), в чем легко убедиться, составляя ее из подсистем $(6.10')$, $(6.10'')$ и $(6.10''')$. Поэтому первое уравнение системы (6.10), то есть уравнение (6.14), является следствием всех остальных и никаких дополнительных ограничений на решения (6.13) не налагает. Совокупность решений (6.12) и

(6.13) подсистем (6.10$'$) и (6.10$''$), (6.10$'''$) в соответствующей окрестности некоторой четверки из $U(i)\times U(j)\times U(k)\times U(l)$ задает общее решение системы (6.10), причем в этом решении координаты точек i и j входят явно в функции $\lambda_\omega,\sigma_\omega$ только для выражений $\lambda[i],\sigma[i]$ и $\lambda[j],\sigma[j]$ соответственно. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим, далее, пару $<pq>\in\mathfrak{S}_f$ и запишем уравнение (6.10$'$) для нее и некоторой ее окрестности $U(p)\times U(q)$. Это уравнение, как было показано выше, имеет три и не более линейно независимых ненулевых решения. Общее его решение можно записать по решению (6.12) простой заменой точек пары $<kl>$ на соответствующие точки пары $<pq>$:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda[p]=c^\omega\lambda_\omega(p,<pq>),\ \sigma[p]=c^\omega\sigma_\omega(p,<pq>),\\ \lambda[q]=c^\omega\lambda_\omega(q,<pq>),\ \sigma[q]=c^\omega\sigma_\omega(q,<pq>),\end{array}\right\}\tag{6.12*}$$

причем для обеих точек пары $<pq>$ функции λ_ω и σ_ω линейно независимы в общем смысле по нижнему индексу ω.

Пусть i – такая точка из $\mathfrak{M}$, что пары $<ip>,<iq>\in\mathfrak{S}_f$. Запишем систему двух уравнений (6.10$''$) для тройки $<ipq>$ и некоторой ее окрестности $U(i)\times U(p)\times U(q)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda[i]\dfrac{\partial f(ip)}{\partial x_i}+\sigma[i]\dfrac{\partial f(ip)}{\partial y_i}+\lambda[p]\dfrac{\partial f(ip)}{\partial x_p}+\sigma[p]\dfrac{\partial f(ip)}{\partial y_p}=0,\\[2ex] \lambda[i]\dfrac{\partial f(iq)}{\partial x_i}+\sigma[i]\dfrac{\partial f(iq)}{\partial y_i}+\lambda[q]\dfrac{\partial f(iq)}{\partial x_q}+\sigma[q]\dfrac{\partial f(iq)}{\partial y_q}=0.\end{array}\right\}\tag{6.15}$$

Решение этой системы можно записать по решению (6.13):

$$\lambda[i]=c^\omega\lambda_\omega(i,<pq>),\ \sigma[i]=c^\omega\sigma_\omega(i,<pq>),\tag{6.16}$$

где, напомним, суммирование по индексу ω производится в пределах от 1 до 3.

Лемма 4. *Функции $\lambda_\omega(i,<pq>)$, $\sigma_\omega(i,<pq>)$ в решении* (6.16) *системы уравнений* (6.15) *линейно независимы по индексу ω с коэффициентами $a^\omega=a^\omega(<pq>)$.*

Предположим противное, то есть что найдутся такие переменные коэффициенты $a^\omega=a^\omega(<pq>)$, $\omega=1,2,3$, не все равные нулю одновременно, с которыми имеют место соотношения $a^\omega\lambda_\omega(i,<pq>)=0$ и $a^\omega\sigma_\omega(i,<pq>)=0$. Естественно при этом, что хотя бы для одной из точек пары $<pq>$ в отношении функций $\lambda_\omega,\sigma_\omega$ решений (6.12*) будет выполняться либо неравенство $a^\omega\lambda_\omega\neq0$, либо неравенство $a^\omega\sigma_\omega\neq0$, например, $a^\omega\lambda_\omega(p,<pq>)\neq0$. Подставим выражения (6.16) для $\lambda[i],\sigma[i]$ и выражения для $\lambda[p],\sigma[p]$ из решений (6.12*) в первое уравнение системы (6.15). С учетом независимости переменных коэффициентов c^ω имеем три уравнения

$$\lambda_\omega(i,<pq>)\frac{\partial f(ip)}{\partial x_i}+\sigma_\omega(i,<pq>]\frac{\partial f(ip)}{\partial y_i}+$$
$$+\lambda_\omega(p,<pq>)\frac{\partial f(ip)}{\partial x_p}+\sigma_\omega(p,<pq>)\frac{\partial f(ip)}{\partial y_p}=0,$$

где $\omega=1,2,3$, из которых при сделанных предположениях получаем одно:

$$a^\omega\lambda_\omega(p,<pq>)\frac{\partial f(ip)}{\partial x_p}+a^\omega\sigma_\omega(p,<pq>)\frac{\partial f(ip)}{\partial y_p}=0.$$

В полученном уравнении неизвестной является метрическая функция f. Фиксируя в нем координаты точки q, приходим для пары $<ip>$ к уравнению типа (6.4′), следствием которого является несущественная зависимость метрической функции $f(ip)$ от координат точки p, что, очевидно, приводит к противоречию с аксиомой III из §1. Значит, должны быть равенства $a^\omega\lambda_\omega(p,<pq>)=0$, $a^\omega\sigma_\omega(p,<pq>)=0$. Аналогично устанавливаются равенства $a^\omega\lambda_\omega(q,<pq>)=0$, $a^\omega\sigma_\omega(q,<pq>)=0$ и для точки q в решении (6.12*). Однако это противоречит тому, что решение (6.12*) системы $(6.10^{'})$ для пары $<pq>$ общее и максимальное число ее линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений равно трем. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Множество решений* (6.16) *различных систем* (6.15), *отличающихся друг от друга выражениями* (6.12*) *для множителей* $\lambda[p],\sigma[p]$, $\lambda[q],\sigma[q]$, *образуют линейное семейство.*

Пусть $\lambda[i],\sigma[i]$ и $\widetilde{\lambda}[i],\widetilde{\sigma}[i]$ два решения системы уравнений (6.15) с множителями $\lambda[p],\sigma[p],\lambda[q],\sigma[q]$ и $\widetilde{\lambda}[p],\widetilde{\sigma}[p]$, $\widetilde{\lambda}[q],\widetilde{\sigma}[q]$ соответственно. Эти множители, в свою очередь, получаются из выражений общего решения (6.12*) при подстановке каких-то коэффициентов c^ω и $\widetilde{c}^\omega$. Тогда линейная комбинация $a\lambda[i]+\widetilde{a}\widetilde{\lambda}[i]$, $a\sigma[i]+\widetilde{a}\widetilde{\sigma}[i]$, где a и $\widetilde{a}$ – произвольные постоянные, также будет решением системы (6.15) с множителями $a\lambda[p]+\widetilde{a}\widetilde{\lambda}[p]$, $a\sigma[p]+\widetilde{a}\widetilde{\sigma}[p]$, $a\lambda[q]+\widetilde{a}\widetilde{\lambda}[q]$, $a\sigma[q]+\widetilde{a}\widetilde{\sigma}[q]$, которые можно получить из общего решения (6.12*) при подстановке коэффициентов $ac^\omega+\widetilde{a}\widetilde{c}^\omega$. Лемма 5 доказана.

Согласно аксиоме III из §1 в окрестности $U(p)\times U(q)\subset\mathfrak{M}^2$ найдется такая пара $<p_0q_0>$, что ранг функции $\overline{f}^2=\overline{f}[p_0q_0]$ будет равен двум для некоторого плотного в $\mathfrak{M}$ множества точек i. Записывая системы уравнений (6.15) для троек $<ip_0q_0>$ и некоторых их окрестностей, получаем решения этих уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\lambda[i]=c^\omega\lambda_\omega(i,<p_0q_0>)=c^\omega\lambda_\omega(i),\\ \sigma[i]=c^\omega\sigma_\omega(i,<p_0q_0>)=c^\omega\sigma_\omega(i),\end{aligned}\right\}\qquad(6.16')$$

которые по доказанной выше лемме 5 образуют линейное семейство, причем точка i принадлежит некоторому открытому и плотному в $\mathfrak{M}$ множеству.

Рассмотрим такую четверку $<ijkl> \in \mathfrak{S}_F$, что каждая его точка принадлежит области определения линейного семейства $(6.16')$. Множество таких четверок, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Тогда в некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k) \times U(l) \subset \mathfrak{S}_F$ определяется линейное семейство

$$\left.\begin{array}{l} \lambda[i] = c^\omega \lambda_\omega(i),\ \sigma[i] = c^\omega \sigma_\omega(i), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda[l] = c^\omega \lambda_\omega(l),\ \sigma[l] = c^\omega \sigma_\omega(l). \end{array}\right\} \tag{6.17}$$

Коэффициенты (6.17) являются некоторым решением системы (6.10), аналогично тому, как решения (6.13) подсистем $(6.10'')$ и $(6.10''')$ являлись некоторым решением уравнения (6.14), то есть первого уравнения системы (6.10). Беря для строки коэффициентов (c^1, c^2, c^3) значения (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), получаем следующее множество решений системы (6.10):

$$\lambda_\omega(i), \sigma_\omega(i),\ \lambda_\omega(j), \sigma_\omega(j),\ \lambda_\omega(k), \sigma_\omega(k),\ \lambda_\omega(l), \sigma_\omega(l), \tag{6.18}$$

где $\omega = 1, 2, 3$. Эти решения, как следует из леммы 4, линейно независимы по нижнему индексу ω с коэффициентами $a^\omega = a^\omega(<p_0 q_0>)$. Однако они оказываются линейно независимыми не только с этими постоянными коэффициентами, но и с переменными, то есть в общем смысле, что можно установить точно также, как это было сделано в отношении решений $(6.7')$ системы (6.6) при доказательстве леммы 2. Поскольку, с другой стороны, система (6.10) имеет три и не более линейно независимые в общем смысле ненулевые решения, ее общее решение может быть записано в форме (6.17) с произвольными коэффициентами $c^\omega = c^\omega(<ijkl>)$.

Каждое из трех решений (6.18) определяет в некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k) \times U(l)$ исходной четверки $<ijkl>$ гладкое векторное поле. Совокупность всех решений (6.18) образует базис трехмерного линейного семейства таких полей. Любое поле этого семейства может быть представленно в базисе (6.18) выражениями

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(i) = a^\omega \lambda_\omega(i),\ \sigma(i) = a^\omega \sigma_\omega(i), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda(l) = a^\omega \lambda_\omega(l),\ \sigma(l) = a^\omega \sigma_\omega(l), \end{array}\right\} \tag{6.19}$$

где, в отличие от аналогичных выражений (6.17), a^ω – постоянные коэффициенты.

Лемма 6. *Линейное трехмерное семейство гладких векторных полей* (6.19) *с базисом* (6.18) *замкнуто относительно операции коммутирования.*

Пусть векторное поле

$$\lambda(i), \sigma(i),\ \lambda(j), \sigma(j),\ \lambda(k), \sigma(k),\ \lambda(l), \sigma(l) \tag{6.20}$$

есть коммутатор каких-либо двух векторных полей семейства (6.19). Ясно, что коммутатор любых двух векторных полей этого семейства имеет форму (6.20) вследствие независимости координат, относящихся к различным точкам четверки $<ijkl>$. С другой стороны, коммутатор (6.20), очевидно, является некоторым решением системы (6.10). Поэтому коммутатор (6.20) может быть записан по ее общему решению (6.17):

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(i) = c^{\omega}\lambda_{\omega}(i),\ \sigma(i) = c^{\omega}\sigma_{\omega}(i), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda(l) = c^{\omega}\lambda_{\omega}(l),\ \sigma(l) = c^{\omega}\sigma_{\omega}(l), \end{array}\right\} \qquad (6.21)$$

в котором коэффициенты c^{ω}, вообще говоря, могут быть некоторыми функциями координат точек четверки $< ijkl >$. Убедимся, однако, в том, что в решении (6.21) коэффициенты c^{ω}, в действительности, постоянны. Для этого будем рассматривать совокупность выражений (6.21) как систему восьми линейных, в общем случае, неоднородных уравнений относительно коэффициентов c^{ω}, где $\omega = 1, 2, 3$. Выделим из нее подсистему шести уравнений, опуская выражения $\lambda(i) = c^{\omega}\lambda_{\omega}(i)$, $\sigma(i) = c^{\omega}\sigma_{\omega}(i)$. Столбцами матрицы этой подсистемы являются ненулевые решения $\lambda_{\omega}(j), \sigma_{\omega}(j)$, $\lambda_{\omega}(k), \sigma_{\omega}(k)$, $\lambda_{\omega}(l), \sigma_{\omega}(l)$ уравнений (6.10$'$), (6.10$'''$) системы (6.10), линейная независимость которых в общем смысле устанавливается точно так же, как и линейная независимость в общем смысле решений (6.7$'$) системы (6.6) в доказательстве леммы 2. Таким образом, выделенная из системы (6.21) опусканием двух выражений для $\lambda(i), \sigma(i)$ подсистема шести уравнений имеет ранг три, точно равный числу неизвестных коэффициентов c^{ω}, и потому ее решение может зависеть только от координат точек тройки $<jkl>$, то есть $c^{\omega} = c^{\omega}(<jkl>)$. Подставим это решение в опущенные выражения:

$$\lambda(i) = c^{\omega}(<jkl>)\lambda_{\omega}(i),\ \sigma(i) = c^{\omega}(<jkl>)\sigma_{\omega}(i) \qquad (6.22)$$

и предположим, что для некоторого коэффициента c^{ω} его производная по какой-либо из координат точек тройки $(< jkl >)$ отлична от нуля. Дифференцируя правую и левую части выражений (6.22) по указанной координате, а затем фиксируя все координаты, кроме координаты точки i, приходим к соотношению $a^{\omega}\lambda_{\omega}(i) = 0$, в котором коэффициенты a^{ω} – постоянные и, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Но такой результат противоречит лемме 4, так как, по обозначению в решении (6.16$'$) $\lambda_{\omega}(i) = \lambda_{\omega}(i, < p_0q_0 >)$. Следовательно, в выражениях (6.21) для коммутатора (6.20) $c^{\omega} = \mathrm{const}$, $\omega = 1, 2, 3$, то есть коммутатор (6.21) принадлежит семейству векторных полей (6.19), которое, тем самым, оказывается замкнутым относительно операции коммутирования. Лемма 6 доказана.

Линейное семейство гладких векторных полей (6.19) с базисом (6.18), замкнутое по лемме 6 относительно операции коммутирования, является трехмерной алгеброй Ли преобразований окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k) \times U(l)$ четверки $<ijkl>$, множество которых открыто и плотно не только в $\mathfrak{S}_F$, но и, очевидно, в $\mathfrak{M}^4$. В окрестности же $U(i)$ составляющей семейства (6.19)

$$\lambda(i) = a^\omega \lambda_\omega(i),\ \sigma(i) = a^\omega \sigma_\omega(i) \tag{6.23}$$

определяется трехмерное линейное семейство гладких векторных полей с теми же структурными константами коммутационных соотношений в базисе

$$\lambda_\omega(i),\ \sigma_\omega(i), \tag{6.24}$$

что и у исходного семейства (6.19) в базисе (6.18). Поэтому семейство (6.23) является трехмерной алгеброй Ли преобразований окрестности $U(i)$, изоморфной алгебре (6.19), причем базисы (6.24) и (6.18) соответствуют друг другу.

Множество точек i, в некоторой окрестности $U(i)$ которых определены векторные поля $\lambda(i), \sigma(i)$, открыто и плотно в $\mathfrak{M}$. Поэтому не конкретизируя обозначение точки i, векторные поля (6.23) удобно записать в общекоординатной операторной форме (6.5), а базисные векторные поля (6.24) – в операторной форме (6.3). Векторные поля $\lambda(i), \sigma(i)$ и $\lambda(j), \sigma(j)$, заданные в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ двух точек i и j, совпадают, очевидна, в пересечении $U(i) \cap U(j)$. Если пара $< ij >$ принадлежит $\mathfrak{S}_f$, то метрическая функция $f(ij)$ удовлетворяет уравнению (6.14):

$$\lambda(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} + \sigma(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} + \lambda(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} + \sigma(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = 0, \tag{6.25}$$

из которого в соответствующих базисах $\lambda_\omega(i), \sigma_\omega(i)$ и $\lambda_\omega(j), \sigma_\omega(j)$ получается система уравнений (6.4).

Согласно второй (обращенной) теореме С.Ли (см., например, [10], стр. 438) трехмерная алгебра Ли гладких векторных полей (6.23) с базисом (6.24) однозначно определяет эффективное гладкое действие трехмерной группы Ли в некоторой окрестности точки i, множество которых открыто и плотно в $\mathfrak{M}$, причем действия ее в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ двух точек i и j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$. То есть алгебра Ли векторных полей (6.23) (в операторной форме – (6.5)) с базисом (6.24) (в операторной форме – (6.3)) определяет трехмерную локальную группу Ли локальных преобразований некоторого открытого и плотного в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ множества, для которой метрическая функция f, удовлетворяющая уравнению (6.25), а в соответствующих базисах – системе уравнений (6.4), является двухточечным инвариантом. Теорема 1 полностью доказана.

Иноговым результатом изложенного в §2 и §6 является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий геометрии, задаваемой на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ метрической функцией f. Эта эквивалентность является следствием доказанных выше теоремы из §2 и теоремы 1 из настоящего параграфа, необходимые и достаточные условия которых о ранге отображения F совпадают.

Теорема 2. *Для того, чтобы метрическая функция f задавала на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга четыре, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на нем двумерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени три.*

Заметим, что условие о ранге отображения F можно сформулировать как четвертую аксиому в определении геометрии. Такая геометря будет, с одной стороны, феноменологически симметрична, а с другой – наделена групповой симметрией, причем обе симметрии в смысле теоремы 2 окажутся эквивалентными.

Теорема 3. *Размерность группы локальных движений, допускаемых метрической функцией f, задающей на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга четыре, или двумерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени три, не превышает этой степени.*

Предположим противное, то есть что метрическая функция f допускает группу движений, размерность которой больше трех. Тогда система уравнений (6.6) будет иметь более трех линейно независимых с постоянными коэффициентами ненулевых решений. Эти решения будут также линейно независимы и с переменными коэффициентами, то есть в общем смысле. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно повторить рассуждения, следующие за системой уравнений (6.8) в доказательстве леммы 2. Поскольку система (6.6) в предполагаемом случае имеет более трех линейно независимых в общем смысле ненулевых решений, ранг ее матрицы, то есть функциональной матрицы (6.4) из §2, должен быть меньше пяти. Однако это противоречит следствию леммы 1 из §2. Полученное противоречие и доказывает теорему 3.

§7. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости

Согласно теореме 2 из §6 каждая феноменологически инвариантная метрическая функция

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) \tag{7.1}$$

допускает трехпараметрическую локальную группу локальных движений, то есть таких гладких и обратимых преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3) \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

с $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, которые ее сохраняют:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{7.3}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i; a^1, a^2, a^3)$.

Таким образом, метрическая функция является двухточечным инвариантом группы ее движений. Если известно явное выражение (7.1) для метрической функции, то условие (7.3) представляет собой функциональное уравнение относительно группы ее движений (7.2). Если же, наоборот, задана трехпараметрическая группа преобразований (7.2), то условие (7.3) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно метрической функции (7.1).

Основной целью настоящего и следующего параграфов является воспроизведение классификационных результатов §3 с помощью установленной в §6 эквивалентности феноменологической и групповой симметрий.

Пусть нулевым значениям трех параметров $a = (a^1, a^2, a^3)$ соответствует тождественное преобразование из группы (7.2). Тогда бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование, близкое к тождественному, запишется в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \lambda_1(x,y)a^1 + \lambda_2(x,y)a^2 + \lambda_3(x,y)a^3, \\ y' &= y + \sigma_1(x,y)a^1 + \sigma_2(x,y)a^2 + \sigma_3(x,y)a^3, \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

где, например, $\lambda_1 = \partial\lambda/\partial a^1)|_{a=0}$.

Операторы

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1(x,y)\partial_x + \sigma_1(x,y)\partial_y, \\ X_2 &= \lambda_2(x,y)\partial_x + \sigma_2(x,y)\partial_y, \\ X_3 &= \lambda_3(x,y)\partial_x + \sigma_3(x,y)\partial_y, \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, однозначно задаваемые преобразованиями (7.4) и однозначно их определяющие, линейно независимы с постоянными коэффициентами и составляют естественный координатный базис трехмерной алгебры Ли преобразований плоскости с коммутаторами

$$[X_\alpha, X_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma,$$

причем структурные константы $C^\gamma_{\alpha\beta}$ антисимметричны по нижним индексам α, β и удовлетворяют тождеству Якоби:

$$C^\delta_{\alpha\beta} C^\varepsilon_{\delta\gamma} + C^\delta_{\beta\gamma} C^\varepsilon_{\delta\alpha} + C^\delta_{\gamma\alpha} C^\varepsilon_{\delta\beta} = 0.$$

Полная с точностью до изоморфизма классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли была дана Бианки в 1918 г. Приведем ее здесь по монографии [12], записывая соответствующие выражения для трех возможных коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных векторов X_1, X_2, X_3:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0; \tag{7.6}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1; \tag{7.7}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = X_1 + X_2; \tag{7.8}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = pX_2; \tag{7.9}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = X_2; \tag{7.10}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = 0; \tag{7.11}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = -X_2; \tag{7.12}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2; \tag{7.13}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1; \tag{7.14}$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad [X_2, X_3] = X_1; \tag{7.15}$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \tag{7.16}$$

где $0 < p^2 < 1$ и $0 < q < 2$.

Теорема. *Базисные операторы* (7.5) *трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований двумерного многообразия (плоскости), имеющей в базисе X_1, X_2, X_3 структуру коммутационных соотношений* (7.6)–(7.16), *в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x; \tag{7.6.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = -\partial_y; \tag{7.7.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \delta\partial_y; \tag{7.7.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x - \partial_y; \tag{7.8.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x + y)\partial_x + y\partial_y; \tag{7.8.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + (1 - p)y\partial_y; \tag{7.9.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y; \tag{7.9.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x; \tag{7.10.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{7.10.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{7.11.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + \delta\partial_y; \tag{7.11.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + 2y\partial_y; \tag{7.12.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y; \tag{7.12.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1 - qy + y^2)\partial_y; \tag{7.13.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x + qy)\partial_y; \tag{7.13.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1 + y^2)\partial_y; \tag{7.14.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + x\partial_y; \tag{7.14.2}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1=\partial_x, \\ X_2=\mathrm{tg}y\ \sin x\partial_x+\cos x\partial_y, \\ X_3=\mathrm{tg}y\ \cos x\partial_x-\sin x\partial_y; \end{array}\right\} \tag{7.15.1}$$

$$X_1=\partial_x, \quad X_2=\sin x\partial_x, \quad X_3=\cos x\partial_x; \tag{7.16.1}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1=\partial_x, \\ X_2=\sin x\partial_x+\cos x\partial_y, \\ X_3=\cos x\partial_x-\sin x\partial_y; \end{array}\right\} \tag{7.16.2}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1=\partial_x, \\ X_2=-\mathrm{th}y\ \sin x\partial_x+\cos x\partial_y, \\ X_3=-\mathrm{th}y\ \cos x\partial_x-\sin x\partial_y; \end{array}\right\} \tag{7.16.3}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1=\partial_x, \\ X_2=-\mathrm{cth}y\ \sin x\partial_x+\cos x\partial_y, \\ X_3=-\mathrm{cth}y\ \cos x\partial_x-\sin x\partial_y; \end{array}\right\} \tag{7.16.4}$$

где $0<p^2<1$, $0<q<2$, $\lambda''(y)\neq 0$, δ *– любое число.*

Алгебра (7.12.2) есть алгебра движений плоскости Минковского, (7.14.2) – евклидовой плоскости, (7.15.1) – двумерной сферы, (7.16.2) – симплектической плоскости, (7.16.3) – однополостного двумерного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, (7.16.4) – плоскости Лобачевского, то есть двухполостного двумерного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, (7.7.1) – плоскости Галилея, (7.12.1) – антипсевдоевклидовой плоскости и т.д. Приведенные в теореме результаты исчерпывают все трехмерные локальные группы Ли локальных преобразований плоскости, определяющие на ней все двумерные геометрии, удовлетворяющие двум гипотезам Пуанкаре [5]. Девять плоских геометрий Кэли-Клейна (см., например, [13]) естественно входят сюда как частный случай.

Заметим, что базисные операторы (7.7.1) и (7.7.2) с различными значениями δ, так же, как и базисные операторы (7.11.2) с различными значениями δ, не могут быть сведены друг к другу никакой локально обратимой заменой координат на плоскости. То есть они определяют изоморфные с точностью до совпадения структурных констант в соответствующих базисах, но различные действия одной и той же трехмерной группы G^3 на плоскости. В классификации же самого С.Ли [14], проведенной им с точностью до подобия, допускающего автоморфизм, то есть переход в одной из сопоставляемых алгебр к другому базису с сохранением структурных констант, эти алгебры отождествляются и остаются только алгебры (7.7.1) и (7.11.2) с $\delta=0$.

Базисные операторы (7.16.2), (7.16.3), (7.16.4) изоморфных алгебр Ли можно записать единообразно, если в выражениях для них произвести соответственно следующие замены координат:

$$\xi=\sin x/(\cos x+1), \quad \eta=\exp y/(\cos x+1),$$

$$\xi=\sin x/(\cos x-\mathrm{th}y), \quad \eta=1/(\cos x-\mathrm{th}y)\mathrm{ch}y,$$

$$\xi = \sin x/(\cos x - \mathrm{cth} y), \quad \eta = 1/(\cos x - \mathrm{cth} y)\mathrm{sh} y$$

и возвратиться к их прежним обозначениям:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}(1 + x^2 - \varepsilon y^2)\partial_x + xy\partial_y, \\ X_2 &= x\partial_x + y\partial_y, \\ X_3 &= \frac{1}{2}(1 - x^2 + \varepsilon y^2)\partial_x - xy\partial_y, \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

где $\varepsilon = 0$ для (7.16.2), $\varepsilon = -1$ для (7.16.3) и $\varepsilon = +1$ для (7.16.4). Результаты сформулированной выше теоремы опубликованы автором в работе [15].

Приступим к доказательству классификационной теоремы §7.

В двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ (локально плоскости R^2) произведем локально обратимую гладкую замену координат

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{7.18}$$

причем $\partial(\varphi, \psi)/\partial(x, y) \neq 0$. В новых координатах ξ, η для инфинитезимальных операторов (7.5) будем иметь такие выражения:

$$X_\alpha = (\lambda_\alpha \varphi_x + \sigma_\alpha \varphi_y)\partial_\xi + (\lambda_\alpha \psi_x + \sigma_\alpha \psi_y)\partial_\eta, \tag{7.19}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$. Пусть функции φ, ψ в замене координат (7.18) являются независимыми решениями системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_x + \sigma_1 \varphi_y = 1, \\ \lambda_1 \psi_x + \sigma_1 \psi_y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

в которой, очевидно, $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 \neq 0$. Тогда для оператора X_1 получаем максимально простое выражение: $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь в (7.19) к прежним обозначениям коэффициентов и координат, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda_2(x, y)\partial_x + \sigma_2(x, y)\partial_y, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y)\partial_x + \sigma_3(x, y)\partial_y. \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

В полученных выражениях (7.21) имеем: $\lambda_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$. Система уравнений (7.20) с такими коэффициентами значительно упрощается: $\varphi_x = 1$, $\psi_x = 0$ и ее независимые решения

$$\xi = x + \varphi(y), \quad \eta = \psi(y), \tag{7.22}$$

в которых $\psi'(y) \neq 0$, определяют такую замену координат в R^2, которая за оператором X_1 сохраняет его простейшую форму.

По классификации (7.6)–(7.16) коммутатор $[X_1, X_2]$ либо равен нулю, либо совпадает с оператором X_3. Рассмотрим сначала первый случай:

$$[X_1, X_2] = 0. \tag{7.23}$$

Подставим в коммутатор (7.23) выражения (7.21) для операторов X_1 и X_2. В результате получаем уравнения $\lambda_{2x} = 0$, $\sigma_{2x} = 0$ с решениями $\lambda_2 = \lambda(y)$, $\sigma_2 = \sigma(y)$ и потому $X_2 = \lambda(y)\partial_x + \sigma(y)\partial_y$. Осуществим допустимую замену координат (7.22):

$$X_2 = (\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\psi'(y)\partial_\eta.$$

Предположим сначала, что $\sigma(y) = 0$. Тогда необходимо должно быть $\lambda(y) \neq \mathrm{const}$, так как операторы X_1 и X_2 линейно независимы. Полагая $\psi(y) = \lambda(y)$, для оператора X_2 получаем: $X_2 = \eta\partial_\xi$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, можем записать выражения

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \\ X_3 = \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y, \end{array}\right\} \tag{7.24}$$

сохраняющиеся при замене координат

$$\xi = x + \varphi(y), \quad \eta = y. \tag{7.25}$$

Если же $\sigma(y) \neq 0$, то функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ в замене координат (7.22) возьмем из решений уравнений $\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$, $\sigma(y)\psi'(y) = 1$. Очевидно, что такие решения существуют. Тогда для оператора X_2 получаем: $X_2 = \partial_\eta$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к выражениям

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ X_3 = \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y \end{array}\right\} \tag{7.26}$$

с допустимой заменой координат

$$\xi = x + a, \quad \eta = y + b, \tag{7.27}$$

в которой a, b – произвольные постоянные.

Итак, коммутирование операторов X_1, X_2 в рассмотренном выше случае (7.23) привело к двум выражениям (7.24) и (7.26) с допустимыми заменами координат (7.25) и (7.27) соответственно.

Обратимся теперь ко второму коммутатору $[X_3, X_1]$, который для случая (7.23) согласно классификации (7.6)–(7.16) может быть равен 0, $-X_1$ и $-X_2$.

Пусть

$$[X_3, X_1] = 0. \tag{7.28}$$

Для операторов (7.24) коммутационное соотношение (7.28) приводит к уравнениям $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 0$, решая которые находим выражение для оператора X_3:

$$X_3 = \lambda(y)\partial_x + \sigma(y)\partial_y. \tag{7.29}$$

Произведем в операторе (7.29) допустимую замену координат (7.25):

$$X_2 = (\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\partial_\eta.$$

Предположим, что $\sigma(y) = 0$. Тогда $X_3 = \lambda(\eta)\partial_\xi$ и в прежних обозначениях координат получаем выражения

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x. \tag{7.30}$$

причем $\lambda''(y) \neq 0$, так как операторы X_1, X_2, X_3 линейно независимы.

Если же $\sigma \neq 0$, то функцию $\varphi(y)$ возьмем из решений уравнения $\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$. Тогда $X_3 = \widetilde{\sigma}(\eta)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, получаем:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \sigma(y)\partial_y. \tag{7.31}$$

При подстановке операторов (7.26) в коммутатор (7.28) аналогично получаем уравнения $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 0$ и, следовательно, выражение (7.29) для оператора X_3:

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ X_3 = \lambda(y)\partial_x + \sigma(y)\partial_y \end{array}\right\} \tag{7.32}$$

с допустимой заменой координат (7.27).

Выясним теперь, какие возникают дополнительные ограничения на операторы (7.30), (7.31), (7.32), если третий коммутатор $[X_2, X_3]$ обращается в ноль:

$$[X_2, X_3] = 0. \tag{7.33}$$

Для операторов (7.30), совпадающих с операторами (7.6.1), коммутационное соотношение (7.33) выполняется автоматически. Для операторов же (7.31) это соотношение выполняться не может, так как $[X_2, X_3] = -\sigma(y)\partial_x$, а $\sigma(y) \neq 0$.

Подставляя в условие (7.33) операторы (7.32), получаем уравнения $\lambda'(y) = 0$, $\sigma'(y) = 0$, то есть $\lambda(y) = \mathrm{const}$, $\sigma(y) = \mathrm{const}$, что невозможно, так как базисные операторы (7.32) должны быть линейно независимыми.

Итак, для абелевой алгебры (7.6) получено только одно представление операторами преобразований двумерноо многообразия, задаваемое выражениями (7.6.1) в формулировке теоремы.

Пусть, далее, операторы (7.31) и (7.32) удовлетворяют условию

$$[X_2, X_3] = X_1, \tag{7.34}$$

которое для операторов (7.30) не выполняется.

Для операторов (7.31) из условия (7.34) легко получаем: $\sigma(y) = -1$ и $X_3 = -\partial_y$, то есть выражения (7.7.1) базисных операторов, представляющих алгебру (7.7).

Подставляя в коммутатор (7.34) операторы (7.32), получаем уравнения $\lambda'(y) = 1$, $\sigma'(y) = 0$ и для оператора X_3 после их интегрирования выражение

$$X_3 = (y + b)\partial_x + \delta\partial_y,$$

где b и δ – произвольные постоянные.

Допустимой заменой координат (7.27) можно исключить аддитивное слагаемое b. В результате получаем в прежних обозначениях базисные операторы (7.7.2) представления алгебры (7.7), причем постоянная δ может принимать любые значения. Поскольку в выражении (7.7.2) для оператора X_3 постоянная δ никакой заменой координат не может быть изменена, соответствующие разным значениям этой постоянной представления алгебры (7.7) не сводимы друг к другу.

Выше был полностью рассмотрен случай коммутирования по условию (7.28) операторов X_1 и X_3. Перейдем ко второму случаю из трех возможных, когда коммутатор $[X_3, X_1]$ по классификации (7.6)–(7.16) при условии (7.23) отличен от нуля и равен $-X_1$:

$$[X_3, X_1] = -X_1. \tag{7.35}$$

Подставим операторы (7.24) и (7.26), удовлетворяющие условию (7.23), в коммутатор (7.35). Итегрируя получающиеся при этом уравнения $\lambda_x = 1$, $\sigma_x = 0$, приходим к таким для них выражениям соответственно:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \\ X_3 = (x + \lambda(y))\partial_x + \sigma(y)\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{7.36}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ X_3 = (x + \lambda(y))\partial_x + \sigma(y)\partial_y, \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

с допустимыми заменами координат (7.25) и (7.27).

Операторы (7.36) и (7.37) удовлетворяют двум коммутационным соотношениям (7.23) и (7.35). По общей классификации (7.6)–(7.16) третий коммутатор $[X_2, X_3]$ может принимать при этом такие значения: $X_1 + X_2$; pX_2, где $0 < p^2 < 1$; X_2; 0; $-X_2$. Рассмотрим отдельно все эти пять случаев.

Предположим сначала, что

$$[X_2, X_3] = X_1 + X_2. \tag{7.38}$$

Подставляя в условие (7.38) операторы (7.36), легко находим: $\sigma = -1$, то есть

$$X_3 = (x + \lambda(y))\partial_x - \partial_y,$$

после чего произведем допустимую замену координат (7.25):

$$X_3 = (x + \lambda(y) - \varphi'(y))\partial_\xi - \partial_\eta.$$

Функцию φ возьмем из решений уравнения $\lambda(y) - \varphi(y) - \varphi'(y) = 0$ и тогда $X_3 = \xi\partial_\xi - \partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем выражения (7.8.1) базисных операторов представления алгебры (7.8).

Подставим таперь в коммутационное соотношение (7.38) операторы (7.37). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda'(y) = 1$, $\sigma'(y) = 1$, для оператора X_3 получаем выражение

$$X_3 = (x + y + a)\partial_x + (y + b)\partial_y,$$

в котором постоянные a и b можно исключить, очевидно, допустимой заменой координат (7.27). В результате получаем базисные операторы (7.8.2) представления алгебры (7.8).

Заметим, что алгебра (7.8) имеет два различных представления, которые не сводятся друг к другу никакой общей заменой координат (7.18).

Предположим теперь, что коммутатор $[X_2, X_3]$ для операторов (7.36) и (7.37) равен pX_2:

$$[X_2, X_3] = pX_2, \tag{7.39}$$

где $0 < p^2 < 1$, то есть $p \neq +1, 0, -1$.

Подставим сначала в условие (7.39) операторы (7.36). В результате получаем: $\sigma = (1-p)y$ и для оператора X_3 выражение:

$$X_3 = (x + \lambda(y))\partial_x + (1-p)y\partial_y,$$

в котором произведем допустимую замену координат (7.25):

$$X_3 = (x + \lambda(y) + (1-p)y\varphi'(y))\partial_\xi + (1-p)y\partial_\eta. \tag{7.40}$$

Беря функцию φ из решений уравнения $\lambda(y) - \varphi(y) + (1-p)y\varphi'(y) = 0$ и возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (7.9.1) представления алгебры (7.9).

Подставим в коммутатор (7.39) операторы (7.37). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda'(y) = 0$, $\sigma'(y) = p$, для оператора X_3 приходим к выражению

$$X_3 = (x + a)\partial_x + (py + \delta)\partial_y, \tag{7.41}$$

в котором при $p \neq 0$ постоянные a и δ можно, очевидно, исключить допустимой заменой координат (7.27). В результате получаем базисные операторы (7.9.2) представления алгебры (7.9).

Пусть третий коммутатор $[X_2, X_3]$ для операторов (7.36) и (7.37) равен X_2:

$$[X_2, X_3] = X_2. \tag{7.42}$$

Формально коммутационное соотношение (7.42) можно считать частным случаем соотношения (7.39), если в нем для p допустить значение, равное единице. Заметим, что в последующих преобразованиях выражений (7.40) и (7.41) для оператора X_3 условие $p \neq 1$ не использовалось, поэтому, полагая в операторах (7.9.1) и (7.9.2) $p = 1$, получаем базисные оператору (7.10.1) и (7.10.2) представления алгебры (7.10).

Перейдем к рассмотрению случая коммутирования операторов X_2, X_3:

$$[X_2, X_3] = 0. \tag{7.43}$$

Формально условие (7.43) можно получить из коммутационного соотношения (7.39), если допустить в нем нулевое значение для p. Поскольку в последующих преобразованиях выражения (7.40) ограничение $p \neq 0$ не использовалось, положим в операторах (7.9.1) $p = 0$. В результате получаем базисные операторы (7.11.1) представления алгебры (7.11).

Запишем еще выражение (7.41) для оператора X_3, полагая в нем $p = 0$:

$$X_3 = (x + a)\partial_x + \delta\partial_y.$$

Исключая постоянную a допустимой заменой координат (7.27), получаем базисные операторы (7.11.2) представления алгебры (7.11), в котором вторая постоянная δ, как и в представлении (7.7.2) алгебры (7.7), не может быть устранена или изменена какой-либо допустимой заменой координат.

Пусть, в заключение,

$$[X_2, X_3] = -X_2. \tag{7.44}$$

Коммутационное соотношение (7.44) формально может быть получено из соотношения (7.39), если в нем положить $p = -1$. С другой стороны, при преобразованиях выражений (7.40) и (7.41) ограничение $p \neq -1$ не использовалось. Поэтому, полагая в окончательных выражениях (7.9.1) и (7.9.2) $p = -1$, получаем соответственно базисные операторы (7.12.1) и (7.12.2) представления алгебры (7.12).

Вернемся к операторам (7.24), (7.26), подчиняющимся коммутационному соотношению (7.23), и потребуем, чтобы они удовлетворяли также соотношению

$$[X_3, X_1] = -X_2, \tag{7.45}$$

входящему в алгебры (7.13) и (7.14).

Подставим сначала в соотношение (7.45) операторы (7.24). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_x = y$, $\sigma_x = 0$, получаем выражения

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \\ X_3 = (xy + \lambda(y))\partial_x + \sigma(y)\partial_y \end{array}\right\} \tag{7.46}$$

с допустимой заменой координат (7.25).

Подставим в то же соотношение (7.45) операторы (7.26). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 1$, получаем выражения

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ X_3 = \lambda(y)\partial_x + (x + \sigma(y))\partial_y \end{array}\right\} \tag{7.47}$$

с допустимой заменой координат (7.27).

Операторы (7.46) и (7.47) удовлетворяют соотношениям (7.23), (7.45). Потребуем для них выполнения третьего коммутационного соотношения, входящего в алгебру (7.13):

$$[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2, \tag{7.48}$$

где $0 < q < 2$.

Подставляя в соотношение (7.48) операторы (7.46), легко находим;

$$\sigma(y) = y^2 - qy + 1, \tag{7.49}$$

после чего произведем допустимую замену координат (7.25):

$$X_3 = (xy + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\partial_\eta.$$

Функцию $\varphi(y)$ можно взять из решений уравнения $\lambda(y) - y\varphi(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$, то есть $X_3 = \xi\eta\partial_\xi + (\eta^2 - q\eta + 1)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (7.13.1) представления алгебры (7.13).

Подставим теперь в соотношение (7.48) операторы (7.47). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda'(y) = -1$, $\sigma'(y) = q$, приходим к следующему выражению для оператора X_3:

$$X_3 = (-y + a)\partial_x + (x + qy + b)\partial_y,$$

в котором постоянные a и b можно исключить допустимой заменой координат (7.27). Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (7.13.2) представления алгебры (7.13).

Третий коммутатор алгебры (7.14): $[X_2, X_3] = -X_1$ формально можно рассматривать как частный случай коммутатора (7.48), если в нем для q допустить нулевое значение. С другой стороны, при подстановке операторов (7.46), (7.47) в коммутатор (7.48) и последующих их преобразованиях с помощью замен координат (7.25), (7.27) ограничение $q \neq 0$ не использовалось. Поэтому из базисных операторов (7.13.1), (7.13.2) представлений алгебры (7.13) можно сразу получить соответствующие представления (7.14.1), (7.14.2) алгебры (7.14), если просто положить в них $q = 0$.

Выше был полностью рассмотрен случай, когда по классификации (7.6)–(7.16) первый коммутатор $[X_1, X_2]$ обращается в нуль. Перейдем к исследованию второго возможного случая, когда этот коммутатор отличен от нуля:

$$[X_1, X_2] = X_3. \tag{7.50}$$

При подстановке операторов (7.21) в коммутационное соотношение (7.50) устанавливаются следующие связи: $\lambda_{2x} = \lambda_3, \sigma_{2x} = \sigma_3$, используя которые перепишем эти операторы, опустив для упрощения записи индекс "2":

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y, \\ X_3 &= \lambda_x(x,y)\partial_x + \sigma_x(x,y)\partial_y, \end{aligned}\right\} \tag{7.51}$$

причем замена координат (7.22) по-прежнему остается допустимой.

Пусть еще для операторов (7.51) выполняется второе коммутационное соотношение алгебр (7.15) и (7.16):

$$[X_3, X_1] = X_2. \tag{7.52}$$

При подстановке в него этих операторов получаем уравнения $\lambda_{xx} + \lambda = 0$ и $\sigma_{xx} + \sigma = 0$, решения которых хорошо известны:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y) &= \lambda(y)\sin x + \mu(y)\cos x, \\ \sigma(x,y) &= \sigma(y)\sin x + \nu(y)\cos x, \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

где $\lambda^2+\sigma^2+\mu^2+\nu^2\neq 0$, так как X_2, X_3 – ненулевые операторы.

Произведем в операторах (7.51) с коэффициентами (7.53) допустимую замену координат (7.22). Выражение для оператора X_2, например, после некоторых очевидных преобразований при такой замене станет следующим:

$$
\begin{aligned}
X_2 = \{&[\mu\sin\varphi+\lambda\cos\varphi+(\nu\sin\varphi+\sigma\cos\varphi)\varphi']\sin\xi+ \\
&+[\mu\cos\varphi-\lambda\sin\varphi+(\nu\cos\varphi-\sigma\sin\varphi)\varphi']\cos\xi\}\partial_\xi+ \\
&+\{[(\nu\sin\varphi+\sigma\cos\varphi)\psi']\sin\xi+[(\nu\ cos\varphi-\sigma\sin\varphi)\psi']\cos\xi\}\partial_\eta.
\end{aligned}
$$

Функцию φ возьмем из решений уравнения

$$\mu\cos\varphi-\lambda\sin\varphi+(\nu\cos\varphi-\sigma\sin\varphi)\varphi'=0.$$

Если $\sigma^2+\nu^2=0$ (и потому $\lambda^2+\mu^2\neq 0$), то в прежних обозначениях коэффициентов и координат получаем выражения для операторов X_1, X_2, X_3:

$$X_1=\partial_x,\quad X_2=\lambda(y)\sin x\partial_x,\quad X_3=\lambda(y)\cos x\partial_x. \tag{7.54}$$

Если же $\sigma^2+\nu^2\neq 0$, но при этом $\nu\sin\varphi+\sigma\cos\varphi=0$ (и потому, очевидно, $\nu\cos\varphi-\sigma\sin\varphi\neq 0$), то функцию ψ возьмем из решений уравнения

$$(\nu\cos\varphi-\sigma\sin\varphi)\psi'=1$$

и тогда для операторов X_1, X_2, X_3 в прежних обозначениях получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} X_1=\partial_x,\quad X_2&=\lambda(y)\sin x\partial_x+\cos x\partial_y, \\ X_3&=\lambda(y)\cos x\partial_x-\sin x\partial_y. \end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

Если же, наконец, при $\sigma^2+\nu^2\neq 0$ имеем $\nu\sin\varphi+\sigma\cos\varphi\neq 0$, то функцию ψ возьмем из решения уравнения

$$(\nu\sin\varphi+\sigma\cos\varphi)\psi'=1$$

и тогда для операторов X_1, X_2, X_3 в прежних обозначениях можем записать следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} X_1&=\partial_x, \\ X_2&=\lambda(y)\sin x\partial_x+(\sin x+\nu(y)\cos x)\partial_y, \\ X_3&=\lambda(y)\cos x\partial_x+(\cos x-\nu(y)\sin x)\partial_y. \end{aligned}\right\} \tag{7.56}$$

Операторы (7.54), (7.55), (7.56) удовлетворяют первым двум коммутационным соотношениям (7.50) и (7.52) алгебр (7.15), (7.16). Предположим, что они удовлетворяют третьему коммутационному соотношению алгебры (7.15):

$$[X_2,X_3]=X_1. \tag{7.57}$$

Подставим сначала в коммутатор (7.57) операторы (7.54). Относительно коэффициента $\lambda(y)$ получаем уравнение $\lambda^2=-1$, которое в области действительных функций решения не имеет. То есть операторы (7.54) ни при каком коэффициенте $\lambda(y)$ не могут удовлетворять коммутационному соотношению (7.57).

Подставим теперь в коммутатор (7.57) операторы (7.55). Относительно коэффициента $\lambda(y)$ получаем уравнение $\lambda' = \lambda^2 + 1$, единственное решение которого легко находится: $\lambda(y) = \mathrm{tg}(y + a)$, где a – произвольная постоянная, которую можно исключить допустимой заменой координат $\xi = x$, $\eta = y + a$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (7.15.1) представления алгебры (7.15).

В операторах (7.56) предварительно произведем общую допустимую замену координат (7.22):

$$\begin{aligned} X_2 = \{&[\lambda\cos\varphi + (\nu\sin\varphi + \cos\varphi)\varphi']\sin\xi + \\ &+ [-\lambda\sin\varphi + (\nu\cos\varphi - \sin\varphi)\varphi']\cos\xi\}\partial_\xi + \\ &+ [(\nu\sin\varphi + \cos\varphi)\psi'\sin\xi + (\nu\cos\varphi - \sin\varphi)\psi'\cos\xi]\partial_\eta. \end{aligned}$$

Функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ возьмем из решений двух уравнений $\nu\sin\varphi + \cos\varphi = 0$ и $(\nu\cos\varphi - \sin\varphi)\psi' = 1$. Дифференцируя первое из них по y и используя уравнение $\lambda + \nu' = 0$, возникающее при подстановке операторов (7.56) в коммутатор (7.57), устанавливаем, дополнительно, что $(\nu\cos\varphi - \sin\varphi)\varphi' - \lambda sin\varphi = 0$ и потому $X_2 = \widetilde{\lambda}(\eta)\sin\xi\partial_\xi + \cos\xi\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, получаем для операторов X_1, X_2, X_3 выражения (7.55), которые выше уже были рассмотрены. Таким образом, для алгебры (7.15) представление (7.15.1) оказывается единственным.

Подставим, в заключение, операторы (7.54), (7.55), (7.56) в третий коммутатор алгебры (7.16):

$$[X_2, X_3] = -X_1. \tag{7.58}$$

Для операторов (7.54) при подстановке в коммутатор (7.58) получаем уравнение $\lambda^2 = 1$ и потому $\lambda = \pm 1$. При $\lambda = +1$ получаем базисные операторы (7.16.1) представления алгебры (7.16). Если же $\lambda = -1$, то замена координат $\xi = x + \pi$, $\eta = y$ приводит к тем же выражениям (7.16.1).

Подставим теперь операторы (7.55) в коммутатор (7.58). Возникающее при этом уравнение $\lambda' = \lambda^2 - 1$ имеет четыре различных решения: $\lambda = \pm 1$, $\lambda = -\mathrm{th}(y + a)$, $\lambda = -\mathrm{cth}(y + a)$, где a – произвольная постоянная. При $\lambda = +1$ получаем базисные операторы (7.16.2) представления алгебры (16). Если же $\lambda = -1$, то, производя замену координат $\xi = x + \pi$, $\eta = -y$, приходим к тем же выражениям (7.16.2). Если $\lambda = -\mathrm{th}(y + a)$ или $\lambda = -\mathrm{cth}(y + a)$, то после допустимой замены координат $\xi = x$, $\eta = y + a$ получаем соответственно базисные операторы (7.16.3) или (7.16.4) представления алгебры (7.16).

Подставляя операторы (7.56) в коммутатор (7.58), получаем, в частности, уравнение $\lambda + \nu' = 0$. Как было показано выше при исследовании аналогичного случая (7.57), общей допустимой заменой координат (7.22), с учетом уравнения $\lambda + \nu' = 0$, выражения (7.56) могут быть сведены к выражениям (7.55), которые выше уже были рассмотрены. Заметим, что алгебра Ли (7.16) в отличие от алгебры (7.15) имеет четыре представления алгебрами Ли преобразований плоскости (локально двумерного многообразия). Этим замечанием и завершается доказательство теоремы настоящего параграфа, сформулированной сразу после приведения списка (7.6)–(7.16) всех трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли.

§8. Метрическая функция как двухточечный инвариант

Подставим в уравнение (7.3) из §7 бесконечно малые преобразования (7.4) окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ и продифференцируем его отдельно по каждому из независимых параметров a^1, a^2, a^3, полагая затем в результатах дифференцирования $a^1 = 0,\ a^2 = 0,\ a^3 = 0$. В результате относительно метрической функции (7.1), которая является двухточечным инвариантом группы преобразований (7.2), получаем систему трех линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\left.\begin{array}{r} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0, \\ X_3(i)f(ij) + X_3(j)f(ij) = 0, \end{array}\right\} \tag{8.1}$$

с операторами (7.5), причем, например, $X_\alpha(i) = \lambda_\alpha(x_i, y_i)\partial/\partial x_i + \sigma_\alpha(x_i, y_i)\partial/\partial y_i$, где $\alpha = 1, 2, 3$. Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. [16], стр. 77) все решения системы (8.1) являются также решениями исходного функционального уравнения (7.3) и наоборот.

Базисные операторы $X_\alpha(i)$ задают локальные преобразования окрестности $U(i)$, а операторы $X_\alpha(j)$ – окрестности $U(j)$. При нахождении метрической функции $f(ij)$ по уравнениям (8.1) рассматриваются преобразования окрестности $U(i) \times U(j)$, задаваемые операторами $X_\alpha(ij) = X_\alpha(i) + X_\alpha(j)$. Поскольку операторы $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ коммутируют между собой, соответствующие алгебры изоморфны алгебре с базисом $X_\alpha(ij)$ с точностью до совпадения структурных констант. Однако это вовсе не означает, что операторы $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ переходят друг в друга при некотором локальном диффеоморфизме $U(i) \to U(j)$. Поэтому, если, например, имеются две изоморфные, но различные трехмерные алгебры Ли локальных преобразований двумерного многообразия (плоскости), то двухточечный инвариант $f(ij)$ необходимо искать для всех трех принципиально различных сочетаний базисных операторов $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ в системе уравнений (8.1).Заметим, что в тройной нумерации результатов классификационной теоремы из §7 первые две цифры одинаковы для изоморфных алгебр, базисные операторы которых не сводятся друг к другу никакой локально обратимой заменой координат $x \to \varphi(x, y)$, $y \to \psi(x, y)$.

Лемма. *Если группе локальных преобразований двумерного многообразия соответствует некоторая алгебра Ли с базисными операторами* X_1, X_2, X_3

из списка (7.6.1)–(7.16.4) *классификационной теоремы §7, причем* $X_1 = \partial_x$, $X_2 = y\partial_x$ *или* $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \sin x\partial_x$, *то любой ее двухточечный инвариант* $f(ij)$ *вырожден.*

Запишем первые два уравнения системы (8.1) с этими операторами:

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ y_i\partial f(ij)/\partial x_i + y_j\partial f(ij)/\partial x_j = 0; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ \sin x_i\partial f(ij)/\partial x_i + \sin x_j\partial f(ij)/\partial x_j = 0. \end{aligned}\right\}$$

Обе системы имеют ранг равный двум, поэтому $\partial f(ij)/\partial x_i = 0$, $\partial f(ij)/\partial x_j = 0$ и их решения не зависят от координат x_i и x_j:

$$f(ij) = \chi(y_i, y_j).$$

Ясно, что такой двухточечный инвариант вырожден. Лемма доказана.

Таким образом, при нахождении двухточечных инвариантов $f(ij)$ как решений систем уравнений (8.1) те алгебры Ли, у которых либо $X_1 = \partial_x$, $X_2 = y\partial_x$, либо $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \sin x\partial_x$, то есть алгебры (7.6.1)–(7.14.1), (7.16.1), можно не рассматривать.

Теорема. *Невырожденные двухточечные инварианты трехпараметрических групп Ли локальных преобразований двумерного многообразия с точностью до масштабной функции* $\psi(f) \to f$ *и в надлежаще выбранной системе локальных координат совпадают с метрическими функциями* (3.4)–(3.14)*, задающими на нем феноменологически симметричные геометрии ранга четыре со связью* (3.2).

Доказательство теоремы состоит в последовательном решении систем уравнений (8.1) для тринадцати алгебр: (7.7.2)–(7.14.2), (7.15.1), (7.16.2), (7.16.3), (7.16.4), а также указании тех масштабных функций и замен локальных координат, которые приведут к совпадению решений этих систем с метрическими функциями списка (3.4)–(3.14) теоремы из §3.

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.7.2):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \\ y_i\partial f(ij)/\partial x_i + \delta\partial f(ij)/\partial y_i + \\ + y_j\partial f(ij)/\partial x_j + \delta\partial f(ij)/\partial y_j = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Из первых двух уравнений легко находим:

$$f(ij) = \chi(x_i - x_j, y_i - y_j), \tag{8.3}$$

где $\chi(u,v)$ – произвольная функция двух переменных

$$u = x_i - x_j, \quad v = y_i - y_j. \tag{8.4}$$

Подставляя результат (8.3) в третье уравнение системы (8.2), получаем $v\chi_u = 0$, то есть $\chi_u = 0$ и $\chi(u,v) = \psi(v)$, где ψ – произвольная функция одной переменной. Двухточечный инвариант (8.3) с такой функцией χ явно вырожден, так как в нем нет зависимости от координат x_i и x_j:

$$f(ij) = \psi(y_i - y_j). \tag{8.5}$$

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.8.2):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0,\\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j = 0,\\ (x_i + y_i)\partial f(ij)/\partial x_i + y_i \partial f(ij)/\partial y_i +\\ +(x_j + y_j)\partial f(ij)/\partial x_j + y_j \partial f(ij)/\partial y_j = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Общее решение первых двух уравнений системы (8.6) задается выражением (8.3). Подставляя его в третье, получаем уравнение $(u + v)\chi_u + v\chi_v = 0$, решение которого легко находится:

$$\chi(u,v) = \psi(v^2 \exp(-2u/v)), \tag{8.7}$$

где ψ есть уже произвольная функция только одной переменной. По решениям (8.3), (8.7) и обозначению (8.4) получаем невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi((y_i - y_j)^2 \exp(-2(x_i - x_j)/(y_i - y_j)), \tag{8.8}$$

который эквивалентен метрической функции (3.12), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$ и замене координат $x \to y$, $y \to -x$. Заметим, что плоскость с такой метрической функцией называется дуальногельмгольцевой и до настоящего времени геометрами не рассматривалась.

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.9.2):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0,\\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j = 0,\\ x_i \partial f(ij)/\partial x_i + p y_i \partial f(ij)/\partial y_i +\\ +x_j \partial f(ij)/\partial x_j + p y_j \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

причем $0 < p^2 < 1$. Общее решение первых двух уравнений системы (8.9) задается выражением (8.3). Подставляя его в последнее, получаем уравнение $u\chi_u + pv\chi_v = 0$, которое интегрируется методом характеристик:

$$\chi(u,v) = \psi(u^p/v), \tag{8.10}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (8.3), (8.10) и обозначению (8.4) получаем невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi\left(\frac{(x_i - x_j)^p}{y_i - y_j}\right), \tag{8.11}$$

который эквивалентен метрической функции (3.11), переходя в нее при замене координат $x \to x - y$, $y \to x + y$, введении нового параметра $\beta = (1+p)/(1-p)$, причем $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, и следующем масштабном преобразовании: $f \to (\psi^{-1}(f))^{2/(p-1)}$, если $|(y_i - y_j)/(x_i - x_j)| < 1$ и $f \to ((-1)^{(p+1)/2}\psi^{-1}(f))^{2/(p-1)}$, если $|(y_i - y_j)/(x_i - x_j)| > 1$. В первом случае в показатель экспоненты выражения (3.11) для метрической функции входит гиперболический ареатангенс (arth), а во втором гиперболический ареакотангенс (arcth). Заметим, что метрической функцией (3.11) задается геометрия псевдогельмгольцевой плоскости.

Двумерная геометрия с метрической функцией (8.11) рассматривалась только для $p = 1/2$ и $\psi(t) = 1/t^2$, когда она становится финслеровой: $df = dy^2/dx$, причем при переходе $dx \to \lambda dx$, $dy \to \lambda dy$ имеем $df \to \lambda df$, то есть выполняется условие ее однородности.

Система уравнений (8.1) с операторами (7.10.2) может быть получена из системы (8.9), если в ней положить $p = +1$. С другой стороны, при ее интегрировании условие $p \neq +1$ не было исспользовано. В результате, полагая в решении (8.11) $p = +1$, получаем невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi\left(\frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}\right), \tag{8.12}$$

который эквивалентен метрической функции (3.10), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f^{-1})$. Плоскость с такой метрической функцией называется симплициальной и в геометрии не рассматривалась.

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.11.2);

$$\left.\begin{array}{r} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \\ x_i \partial f(ij)/\partial x_i + \delta \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + x_j \partial f(ij)/\partial x_j + \delta \partial f(ij)/\partial y_j = 0. \end{array}\right\} \tag{8.13}$$

Интегрирование системы (8.13) аналогично интегрированию системы (8.2), также содержащей постоянную δ в третьем уравнении. В результате получаем вырожденный двухточечный инвариант (8.5).

Система уравнений (8.1) для алгебры (7.12.2) может быть формально получена из системы (8.9), если в ней положить $p = -1$. Но при интегрировании этой системы условие $p \neq -1$ не было использовано. Полагая в решении (8.11) $p = -1$, получаем невырожденный двухточечный инвариант;

$$f(ij) = \psi\left(\frac{1}{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}\right), \tag{8.14}$$

который эквивалентен метрической функции (3.7), так как она переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(4f^{-1})$ и замене координат $x \to x + y$, $y \to x - y$. Напомним, что выражением (3.7) определяется метрическая функция псевдоевклидовой плоскости Минковского.

Запишем систему уравнений (8.1) для операторов (7.13.2):

$$\left.\begin{array}{r} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \\ -y_i\partial f(ij)/\partial x_i + (x_i + qy_i)\partial f(ij)/\partial y_i - \\ -y_j\partial f(ij)/\partial x_j + (x_j + qy_j)\partial f(ij)/\partial y_j = 0, \end{array}\right\} \tag{8.15}$$

причем $0 < q < 2$. Общее решение первых двух уравнений системы (8.15) задается выражением (8.3). Подставляя его в последнее уравнение этой системы, получаем уравнение для функции $\chi(u,v)$:

$$-v\chi_u + (u + qv)\chi_v = 0,$$

решение которого находится методом характеристик:

$$\begin{array}{r} \chi(u,v) = \psi(\ln((2u + qv)^2 + (4 - q^2)v^2) + \\ + \dfrac{2q}{\sqrt{4-q^2}}\ \mathrm{arctg}\dfrac{2u + qv}{v\sqrt{4-q^2}}), \end{array} \tag{8.16}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (8.3), (8.16) и обозначению (8.4) получаем двухточечный инвариант

$$\begin{array}{r} f(ij) = \psi\{\ln[(2(x_i - x_j) + q(y_i - y_j))^2 + (4 - q^2)(y_i - y_j)^2] + \\ + \dfrac{2q}{\sqrt{4-q^2}}\ \mathrm{arctg}\dfrac{2(x_i - x_j) + q(y_i - y_j)}{(y_i - y_j)\sqrt{4-q^2}}\}, \end{array} \tag{8.17}$$

который при $\psi' \neq 0$ удовлетворяет условиям (3.3) и потому невырожден. Инвариант (8.17) эквивалентен метрической функции (3.13), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$, переобозначении параметра: $\gamma = q/\sqrt{4-q^2}$ и удобной замене координат: $x \to (y\sqrt{4-q^2} - qx)/2\sqrt{4-q^2}$, $y \to x/\sqrt{4-q^2}$. Заметим, что выражением (3.13) определяется метрическая функция плоскости Гельмгольца (термин автора), геометрию которой еще предстоит исследовать.

Система уравнений (8.1) с операторами (7.14.2) может быть получена из системы (8.15), если в ней положить $q = 0$. Но при ее интегрировании условие $q \neq 0$ не было использовано. Поэтому соответствующий невырожденный двухточечный инвариант можно получить из выражения (8.17), если положить в нем $q = 0$:

$$f(ij) = \psi[\ln(4(x_i - x_j)^2 + 4(y_i - y_j)^2)]. \tag{8.18}$$

Инвариант (8.18) эквивалентен метрической функции (3.4) плоскости Евклида, которая переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(ln(4f))$.

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.15.1);

$$\left.\begin{array}{r} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ \mathrm{tg} y_i \sin x_i \partial f(ij)/\partial x_i + \cos x_i \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + \mathrm{tg} y_j \sin x_j \partial f(ij)/\partial x_j + \cos x_j \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \\ \mathrm{tg} y_i \cos x_i \partial f(ij)/\partial x_i - \sin x_i \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + \mathrm{tg} y_j \cos x_j \partial f(ij)/\partial x_j - \sin x_j \partial f(ij)/\partial y_j = 0. \end{array}\right\} \tag{8.19}$$

Общее решение первого уравнения системы (8.19) задается, очевидно, следующим выражением:

$$f(ij) = \theta(x_i - x_j, y_i, y_j), \tag{8.20}$$

где $\theta(u, v, w)$ – произвольная функция трех переменных. Подставим это выражение во второе и третье уравнения системы (8.19). Затем умножим второе уравнение на $\cos x_j$ (соответственно на $\cos x_i$) и сложим с третьим, умноженным на $-\sin x_j$ (соответственно на $-\sin x_i$). В результате получаем систему двух уравнений для функции $\theta(u, v, w)$:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}v \sin u\ \theta_u + \cos u\ \theta_v + \theta_w = 0, \\ \mathrm{tg}w \sin u\ \theta_u + \theta_v + \cos u\ \theta_w = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

где, напомним,

$$u = x_i - x_j, \quad v = y_i, \quad w = y_j. \tag{8.22}$$

Умножим, далее, первое уравнение системы (8.21) на $\mathrm{tg}w$ и сложим со вторым, умноженным на $-\mathrm{tg}v$:

$$(\mathrm{tg}w \cos u - \mathrm{tg}v)\theta_v - (\mathrm{tg}v \cos u - \mathrm{tg}w)\theta_w = 0.$$

Полученное уравнение имеет следующее решение:

$$\theta(u, v, w) = \chi(u,\ \cos v \cos w \cos u + \sin v \sin w),$$

где $\chi(s, t)$ – произвольная функция двух переменных. Подставим его в первое уравнение системы (8.21): $\chi_s = 0$, то есть $\chi(s, t) = \psi(t)$ и потому

$$\theta(u, v, w) = \psi(\cos v \cos w \cos u + \sin v \sin w), \tag{8.23}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (8.20), (8.23) и обозначению (8.22) находим невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi(\cos y_i \cos y_j \cos(x_i - x_j) + \sin y_i \sin y_j), \tag{8.24}$$

который эквивалентен метрической функции (3.5), переходящей в него при масштабном отображении $f \to \psi(f)$ и замене координат $x \to x$, $y \to (\pi - 2y)/2$. Заметим, что выражение (3.5) определяет метрическую функцию двумерной сферы единичного радиуса в трехмерном евклидовом пространстве.

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.16.2):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ \sin x_i \partial f(ij)/\partial x_i + \cos x_i \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + \sin x_j \partial f(ij)/\partial x_j + \cos x_j \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \\ \cos x_i \partial f(ij)/\partial x_i - \sin x_i \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + \cos x_j \partial f(ij)/\partial x_j - \sin x_j \partial f(ij)/\partial y_j = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.25}$$

Из первого уравнения системы (8.25) получаем выражение (8.20). Подставим его во второе и третье уравнения. Затем умножим второе уравнение на $\sin x_i$

(соответственно на $\sin x_j$), третье – на $\cos x_i$ (соответственно на $\cos x_j$) и сложим их:

$$\left.\begin{array}{l}(1-\cos u)\theta_u + \sin u\ \theta_w = 0, \\ (1-\cos u)\theta_u + \sin u\ \theta_v = 0,\end{array}\right\} \qquad (8.26)$$

Из системы (8.26) легко получаем уравнение $\theta_v - \theta_w = 0$, решение которого есть

$$\theta(u,v,w) = \chi(u, v+w), \qquad (8.27)$$

где $\chi(s,t)$ – произвольная гладкая функция двух переменных

$$s = u, \quad t = v + w. \qquad (8.28)$$

Подставим выражение (8.27) в первое уравнение системы (8.26):

$$(1-\cos s)\chi_s + \sin s\ \chi_t = 0$$

и решим его методом характеристик:

$$\chi(s,t) = \psi\left(\exp\left(-\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right), \qquad (8.29)$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (8.20), (8.27), (8.29) и обозначениям (8.22), (8.28) получаем двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi\left(\exp\left(-\frac{y_i+y_j}{2}\right)\sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)\right), \qquad (8.30)$$

который при $\psi' \neq 0$ удовлетворяет условию (3.3) и потому невырожден. Инвариант (8.30) эквивалентен метрической функции (3.9), которая переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$ и замене координат $x \to \exp(-y/2)\sin(x/2)$, $y \to \exp(-y/2)\cos(x/2)$. Заметим, что выражение (3.9) определяет метрическую функцию симплектической плоскости, геометрия которой хорошо изучена.

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.16.3):

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ -\mathrm{th} y_i \sin x_i \partial f(ij)/\partial x_i + \cos x_i \partial f(ij)/\partial y_i - \\ -\mathrm{th} y_j \sin x_j \partial f(ij)/\partial x_j + \cos x_j \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \\ -\mathrm{th} y_i \cos x_i \partial f(ij)/\partial x_i - \sin x_i \partial f(ij)/\partial y_i - \\ -\mathrm{th} y_j \cos x_j \partial f(ij)/\partial x_j - \sin x_j \partial f(ij)/\partial y_j = 0.\end{array}\right\} \qquad (8.31)$$

Из первого уравнения системы (8.31) следует, что в двухточечный инвариант $f(ij)$ координаты x_i и x_j входят в виде разности $x_i - x_j$. Общее решение этой системы удобно искать в следующем виде:

$$f(ij) = \theta(\mathrm{ch} y_i \mathrm{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \mathrm{sh} y_i \mathrm{sh} y_j, y_i, y_j), \qquad (8.32)$$

где $\theta(u,v,w)$ – произвольная гладкая функция трех переменных

$$u = \mathrm{ch}y_i\mathrm{ch}y_j\cos(x_i - x_j) - \mathrm{sh}y_i\mathrm{sh}y_j,\ v = y_i,\ w = y_j, \tag{8.33}$$

причем выражение для первой из них является одним из ее решений. Подставим выражение (8.32) во второе и третье уравнения системы (8.31):

$$\cos x_i\theta_v + \cos x_j\theta_w = 0, \quad \sin x_i\theta_v + \sin x_j\theta_w = 0,$$

откуда следует, что $\theta_v = 0$, $\theta_w = 0$ и потому

$$\theta(u,v,w) = \psi(u), \tag{8.34}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (8.32), (8.34) и обозначению (8.33) находим двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi(\mathrm{ch}y_i\mathrm{ch}y_j\cos(x_i - x_j) - \mathrm{sh}y_i\mathrm{sh}y_j), \tag{8.35}$$

который невырожден при $\psi' \neq 0$, так как удовлетворяет условиям (3.3). Инвариант (8.35) эквивалентен метрической функции (3.8), которая переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$ без замены координат. Заметим, что выражение (3.8) задает метрическую функцию однополостного двумерного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Геометрию такого гиперболоида можно рассматривать как объединение двух плоских геометрий Кэли-Клейна (см. [13]), а именно гиперболической и дважды гиперболической.

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.16.4):

$$\left.\begin{array}{r} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ -\mathrm{cth}y_i\sin x_i\partial f(ij)/\partial x_i + \cos x_i\partial f(ij)/\partial y_i - \\ -\mathrm{cth}y_j\sin x_j\partial f(ij)/\partial x_j + \cos x_j\partial f(ij)/\partial y_j = 0, \\ -\mathrm{cth}y_i\cos x_i\partial f(ij)/\partial x_i - \sin x_i\partial f(ij)/\partial y_i - \\ -\mathrm{cth}y_j\cos x_j\partial f(ij)/\partial x_j - \sin x_j\partial f(ij)/\partial y_j = 0. \end{array}\right\} \tag{8.36}$$

Система (8.36) решается методом, в деталях совпадающим с тем, который был использован в отношении предыдущей системы (8.31). В результате получаем двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi(\mathrm{sh}y_i\mathrm{sh}y_j\cos(x_i - x_j) - \mathrm{ch}y_i\mathrm{ch}y_j), \tag{8.37}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. Инвариант (8.37) при $\psi' \neq 0$ удовлетворяет условиям невырожденности и эквивалентен метрической функции (3.6) плоскости Лобачевского, реализуемой на одной из полостей двухполостного двумерного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве.

При рассмотрении смешанных вариантов, когда преобразования окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ могут задаваться изоморфными, но различными алгебрами Ли с базисными операторами (7.16.2), (7.16.3), (7.16.4), удобно для последних использовать единообразную форму записи (7.17).

Запишем систему уравнений (8.1) с операторами (7.17):

$$\left.\begin{array}{r}(1+x_i^2-\varepsilon_i y_i^2)\partial f(ij)/\partial x_i+2x_iy_i\partial f(ij)/\partial y_i+\\ +(1+x_j^2-\varepsilon_j y_j^2)\partial f(ij)/\partial x_j+2x_jy_j\partial f(ij)/\partial y_j=0,\\ x_i\partial f(ij)/\partial x_i+y_i\partial f(ij)/\partial y_i+\\ +x_j\partial f(ij)/\partial x_j+y_j\partial f(ij)/\partial y_j=0,\\ (1-x_i^2+\varepsilon_i y_i^2)\partial f(ij)/\partial x_i-2x_iy_i\partial f(ij)/\partial y_i+\\ +(1-x_j^2+\varepsilon_j y_j^2)\partial f(ij)/\partial x_j-2x_jy_j\partial f(ij)/\partial y_j=0,\end{array}\right\} \tag{8.38}$$

где $\varepsilon_i=0,\pm1$; $\varepsilon_j=0,\pm1$, причем не обязательно $\varepsilon_i=\varepsilon_j$. Сложим первое и третье уравнения системы (8.38):

$$\partial f(ij)/\partial x_i+\partial f(ij)/\partial x_j=0,$$

откуда следует, что координаты x_i и x_j входят в двухточечный инвариант $f(ij)$ разностью x_i-x_j. Общее решение системы (8.38) будем искать в следующем виде:

$$f(ij)=\theta\left(\frac{(x_i-x_j)^2+\varepsilon_i y_i^2+\varepsilon_j y_j^2}{y_iy_j},y_i,y_j\right), \tag{8.39}$$

где $\theta(u,v,w)$ – произвольная функция трех переменных

$$u=((x_i-x_j)^2+\varepsilon_i y_i^2+\varepsilon_j y_j^2)/y_iy_j,\ v=y_i,\ w=y_j, \tag{8.40}$$

причем дробный аргумент в ней является одним из ее решений.

Подставим выражение (8.39) в первое и второе уравнения системы (8.38):

$$\left.\begin{array}{r}x_iy_i\theta_v+x_jy_j\theta_w=0,\\ y_i\Theta_v+y_j\Theta_w=0,\end{array}\right\}$$

откуда следует, что $\theta_v=0$, $\theta_w=0$ и потому

$$\theta(u,v,w)=\psi(u), \tag{8.41}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (8.39), (8.41) и обозначению (8.40) получаем невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij)=\psi\left(\frac{(x_i-x_j)^2+\varepsilon_i y_i^2+\varepsilon_j y_j^2}{y_iy_j}\right), \tag{8.42}$$

который эквивалентен метрической функции (3.14), переходящей в него при масштабном преобразовании $f\to\psi(f)$. Теорема доказана.

В работе [17] автором были найдены все двухточечные инварианты как решения систем (8.1) для всевозможных изоморфных алгебр Ли с базисными операторами $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$, взятыми из полного списка классификационной теоремы предыдущего §7. Многие из таких систем не рассматривались по условиям леммы о вырождении двухточечного инварианта, доказанной перед формулировкой теоремы настоящего §8. Например, система (8.1) с операторами (7.12.1) и (7.12.2):

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x_i+\partial f(ij)/\partial x_j=0,\\ y_i\partial f(ij)/\partial x_i+\partial f(ij)/\partial y_j=0,\\ x_i\partial f(ij)/\partial x_i+2y_i\partial f(ij)/\partial y_i+\\ +x_j\partial f(ij)/\partial x_j-y_j\partial f(ij)/\partial y_j=0,\end{array}\right\}$$

имеет решение:

$$f(ij)=\psi((x_i-x_j-y_iy_j)/\sqrt{y_i}),\tag{8.43}$$

в то время как с операторами (7.12.1):

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x_i+\partial f(ij)/\partial x_j=0,\\ y_i\partial f(ij)/\partial x_i+y_j\partial f(ij)/\partial x_j=0,\\ x_i\partial f(ij)/\partial x_i+2y_i\partial f(ij)/\partial y_i+\\ +x_j\partial f(ij)/\partial x_j+2y_j\partial f(ij)/\partial y_j=0,\end{array}\right\}$$

ее решение другое:

$$f(ij)=\psi(y_i/y_j),\tag{8.44}$$

и в нем отсутствуют координаты x_i и x_j. С операторами же (7.12.2) система уравнений (8.1) была рассмотрена выше (см. систему (8.9) при $p=-1$) и ее решение будет следующим:

$$f(ij)=\psi(1/(x_i-x_j)(y_i-y_j)).\tag{8.45}$$

Пусть двумерное многообразие несвязно и преобразование его компонент задается изоморфными, но различными алгебрами Ли (7.12.1) и (7.12.2). Тогда в целом двухточечный инвариант представляется совокупностью трех решений (8.43), (8.44), (8.45) и оказывается вырожденным, так как для той компоненты многообразия, преобразование которой задается алгеброй Ли (8.12.1), в решении (8.44) нет координат x_i и x_j. Заметим, что в аналогичных условиях двухточечный инвариант (8.42) невырожден как "внутри"каждой из компонент многообразия, так и "между", когда точки i и j находятся в разных его компонентах.

§9. Группы движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий

Трехмерные феноменологически симметричные геометрии, определенные в §4 гл.I, допускают шестимерную группу движений

$$\left.\begin{array}{l}x'=\lambda(x,y,z;a^1,a^2,\ldots,a^6),\\ y'=\sigma(x,y,z;a^1,a^2,\ldots,a^6),\\ z'=\tau(x,y,z;a^1,a^2,\ldots,a^6),\end{array}\right\}\tag{9.1}$$

относительно которой метрическая функция (4.3) сохраняется:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \tau(i), \lambda(j), \sigma(j), \tau(j)) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \tag{9.2}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i, z_i; a^1, a^2, \ldots, a^6)$.

Таким образом, для трехмерной геометрии степень групповой симметрии равна шести, причем групповая симметрия такой степени оказывается эквивалентна феноменологической симметрии ранга пять, подобно тому как для двумерной геометрии групповая симметрия степени три эквивалентна феноменологической симметрии ранга четыре (см. §6).

Группе преобразований (9.1) трехмерного многообразия однозначно соответствует шестимерная алгебра Ли, базисными векторми которой являются линейные дифференциальные операторы:

$$X_\omega = \lambda_\omega(x, y, z)\partial_x + \sigma_\omega(x, y, z)\partial_y + \tau_\omega(x, y, z)\partial_z, \tag{9.3}$$

где $\omega = 1, 2, \ldots, 6$ и, например, $\partial_x = \partial/\partial x, \ \ \lambda_\omega = \partial\lambda/\partial a^\omega|_{a=0}$.

Метрическая функция (4.3), являющаяся по уравнению (9.2) двухточечным инвариантом, может быть найдена также как решение следующей системы шести линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$X_\omega(i)f(ij) + X_\omega(j)f(ij) = 0 \tag{9.4}$$

с операторами (9.3). Для произвольного оператора шестимерной алгебры Ли $X = c^\omega X_\omega$, где c^ω – какие-то постоянные, а $\omega = 1, 2, \ldots, 6$, выполняется уравнение

$$X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0. \tag{9.5}$$

Функциональное уравнение (9.2) и дифференциальное уравнение (9.5) могут быть рассмотрены с двух различных позиций. Если задана группа преобразований (9.1), то, решая функциональное уравнение (9.2), можно найти метрическую функцию $f(ij)$ как ее двухточечный инвариант. Но эту же метрическую функцию можно найти и как решение дифференциальных уравнений (9.5), записанных для операторов соответствующей данной группе преобразований алгебры Ли.

Теперь предположим, что метрическая функция $f(ij)$ задана в ее координатном представлении (4.3). Тогда условие ее сохранения (9.2) представляет собой функциональное уравнение на группу движений (9.1). Особенностью феноменологически симметричных геометрий с невырожденной метрической функцией является обратимость уравнения (9.2) в следующем смысле. Если по группе преобразований (9.1) решением функционального уравнения (9.2) найдена метрическая функция (4.3), то по ней решением того же функционального уравнения (9.2) может быть восстановлена исходная группа преобразований (9.1). И наоборот, если по известной метрической функции (4.3) решением функционального уравнения (9.2) найденна группа ее движений (9.1), то сама она по этой группе может быть восстановлена решением исходного уравнения (9.2).

Аналогично при известной метрической функции (4.3) решением уравнения (9.5) могут быть найдены операторы шестимерной алгебры Ли, в частности, ее базисные операторы. Эта задача также обратима в том смысле, что, найдя по метрической функции алгебру Ли группы ее движений, можно восстановить эту функцию по найденной алгебре решением дифференциальных уравнений (9.5).

Уравнение (9.5) запишем в развернутой форме:

$$\begin{gathered}\lambda(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}+\sigma(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}+\tau(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}+\\+\lambda(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}+\sigma(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}+\tau(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=0,\end{gathered}\tag{9.5$'$}$$

считая в нем метрическую функцию $f(ij)$ известной и рассматривая в качестве неизвестных коэффициенты λ,σ,τ дифференциального оператора $X=\lambda\partial_x+\sigma\partial_y+\tau\partial_z$. Справедлива следующая

Теорема. *Базисные операторы* (9.3) *шестимерных алгебр Ли групп движений трехмерных геометрий с метрическими функциями* (4.6)–(4.18) *задаются соответственно следующими выражениями*:

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad X_4=-y\partial_x+x\partial_y,\\ X_5=-x\partial_z+z\partial_x,\quad X_6=-z\partial_y+y\partial_z;\end{array}\right\}\tag{9.6}$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\mathrm{ctg}y\cos x\partial_x+\sin x\partial_y,\\ X_3=-\mathrm{ctg}y\sin x\partial_x+\cos x\partial_y,\\ X_4=\mathrm{ctg}z\sin^{-1}y\cos x\partial_x+\mathrm{ctg}z\cos y\sin x\partial_y+\sin y\sin x\partial_z,\\ X_5=-\mathrm{ctg}z\sin^{-1}y\sin x\partial_x+\mathrm{ctg}z\cos y\cos x\partial_y+\sin y\cos x\partial_z,\\ X_6=-\mathrm{ctg}z\sin y\partial_y+\cos y\partial_z;\end{array}\right\}\tag{9.7}$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\mathrm{ctg}y\cos x\partial_x+\sin x\partial_y,\\ X_3=-\mathrm{ctg}y\sin x\partial_x+\cos x\partial_y,\\ X_4=\mathrm{cth}z\sin^{-1}y\cos x\partial_x+\mathrm{cth}z\cos y\sin x\partial_y+\sin y\sin x\partial_z,\\ X_5=-\mathrm{cth}z\sin^{-1}y\sin x\partial_x+\mathrm{cth}z\cos y\cos x\partial_y+\sin y\cos x\partial_z,\\ X_6=-\mathrm{cth}z\sin y\partial_y+\cos y\partial_z;\end{array}\right\}\tag{9.8}$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad X_4=-y\partial_x+x\partial_y,\\ X_5=z\partial_x+x\partial_z,\quad X_6=z\partial_y+y\partial_z;\end{array}\right\}\tag{9.9}$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\mathrm{ctg}y\cos x\partial_x+\sin x\partial_y,\\ X_3=-\mathrm{ctg}y\sin x\partial_x+\cos x\partial_y,\\ X_4=\mathrm{th}z\sin^{-1}y\cos x\partial_x+\mathrm{th}z\cos y\sin x\partial_y+\sin y\sin x\partial_z,\\ X_5=-\mathrm{th}z\sin^{-1}y\sin x\partial_x+\mathrm{th}z\cos y\cos x\partial_y+\sin y\cos x\partial_z,\\ X_6=-\mathrm{th}z\sin y\partial_y+\cos y\partial_z;\end{array}\right\}\tag{9.10}$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\mathrm{th}y\cos x\partial_x+\sin x\partial_y,\\ X_3=-\mathrm{th}y\sin x\partial_x+\cos x\partial_y,\\ X_4=\mathrm{th}z\mathrm{ch}^{-1}y\cos x\partial_x-\mathrm{th}z\mathrm{sh}y\sin x\partial_y+\mathrm{ch}y\sin x\partial_z,\\ X_5=-\mathrm{th}z\mathrm{ch}^{-1}y\sin x\partial_x-\mathrm{th}z\mathrm{sh}y\cos x\partial_y+\mathrm{ch}y\cos x\partial_z,\\ X_6=\mathrm{th}z\mathrm{ch}y\partial_y-\mathrm{sh}y\partial_z;\end{array}\right\}\qquad(9.11)$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=y\partial_x,\quad X_2=x\partial_y,\quad X_3=x\partial_x-y\partial_y,\\ X_4=\partial_z,\quad X_5=\partial_x+y\partial_z,\quad X_6=\partial_y-x\partial_z;\end{array}\right\}\qquad(9.12)$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=x\partial_x+y\partial_y,\\ X_4=x\partial_x-y\partial_y+\partial_z,\quad X_5=x^2\partial_x+x\partial z,\quad X_6=-y^2\partial_y+y\partial_z;\end{array}\right\}\qquad(9.13)$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=y\partial_x+x\partial_y,\\ X_4=2x\partial_x+2y\partial_y-\partial_z,\\ X_5=(x^2+y^2)\partial_x+2xy\partial y-x\partial_z,\\ X_6=2xy\partial x+(x^2+y^2)\partial_y-y\partial_z;\end{array}\right\}\qquad(9.14)$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=-y\partial_x+x\partial_y,\\ X_4=2x\partial_x+2y\partial_y-\partial_z,\\ X_5=(x^2-y^2)\partial_x+2xy\partial y-x\partial_z,\\ X_6=2xy\partial x-(x^2-y^2)\partial_y-y\partial_z,\end{array}\right\}\qquad(9.15)$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=(y-\beta x)\partial_x+(x-\beta y)\partial_y,\\ X_4=2(x-\beta y)\partial_x+2(y-\beta x)\partial_y-(1-\beta^2)\partial_z,\\ X_5=(x^2+y^2-2\beta xy)\partial_x+(2xy-\beta(x^2+y^2))\partial y-(1-\beta^2)x\partial_z,\\ X_6=(2xy-\beta(x^2+y^2))\partial x+(x^2+y^2-2\beta xy)\partial_y-(1-\beta^2)y\partial_z;\end{array}\right\}\qquad(9.16)$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=x\partial_x+(y-x)\partial_y,\\ X_4=2x\partial_y-\partial_z,\quad X_5=x^2\partial_y-x\partial_z,\\ X_6=x^2\partial x+(2xy-x^2)\partial_y-y\partial_z;\end{array}\right\}\qquad(9.17)$$

$$\left.\begin{array}{l}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=-(y+\gamma x)\partial_x+(x-\gamma y)\partial_y,\\ X_4=2(x-\gamma y)\partial_x+2(y+\gamma x)\partial_y-(1+\gamma^2)\partial_z,\\ X_5=(x^2-y^2-2\gamma xy)\partial_x+(2xy+\gamma(x^2-y^2))\partial y-(1+\gamma^2)x\partial_z,\\ X_6=(2xy+\gamma(x^2-y^2))\partial x-(x^2-y^2-2\gamma xy)\partial_y-(1+\gamma^2)y\partial_z,\end{array}\right\}\qquad(9.18)$$

где $\beta>0$ *и* $\beta\neq 1$; $\gamma>0$.

Полное доказательство сформулированой выше теоремы можно найти в Приложении В.А.Кырова к монографии автора [18]. В качестве иллюстрации приведем получение выражений (9.6) базисных операторов шестимерной алгебры Ли группы движений трехмерного пространства Евклида с метрической функцией (4.6), для которой функциональное уравнение (9.5′) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\lambda(i)(x_i - x_j) + \sigma(i)(y_i - y_j) + \tau(i)(z_i - z_j) -\\ &- \lambda(j)(x_i - x_j) - \sigma(j)(y_i - y_j) - \tau(j)(z_i - z_j) = 0.\end{aligned} \tag{9.19}$$

Продифференцируем уравнение (9.19) по координатам x_i, y_i, z_i точки i, а затем результаты дифференцирований по координатам x_j, y_j, z_j точки j:

$$\left.\begin{array}{lll}\lambda_x(i) + \lambda_x(j) = 0, & \sigma_x(i) + \lambda_y(j) = 0, & \tau_x(i) + \lambda_z(j) = 0,\\ \lambda_y(i) + \sigma_x(j) = 0, & \sigma_y(i) + \sigma_y(j) = 0, & \tau_y(i) + \sigma_z(j) = 0,\\ \lambda_z(i) + \tau_x(j) = 0, & \sigma_z(i) + \tau_y(j) = 0, & \tau_z(i) + \tau_z(j) = 0.\end{array}\right\}$$

откуда, разделяя переменные, относящиеся к координатам различных точек i и j, а потом интегрируя получающиеся уравнения, находим:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda(x,y,z) = -c^4 y + c^5 z + c^1,\\ \sigma(x,y,z) = c^4 x - c^6 z + c^2,\\ \tau(x,y,z) = -c^5 x + c^6 y + c^3.\end{array}\right\}$$

Придавая совокупности шести чисел $(c^1, c^2, c^3, c^4, c^5, c^6)$ шесть независимых значений (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), ..., (0,0,0,0,0,1), приходим к выражениям (9.6).

Остальные выражения (9.7)–(9.18) получаются аналогичным методом, хотя и не всегда таким простым и наглядным.

§10. Некоторые примеры и задачи

Пусть метрическая функция

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{10.1}$$

задающая на двумерном многообразии феноменологически симметричную ранга четыре геометрию, известна. Тогда условие ее сохранения:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) \tag{10.2}$$

при локально обратимых преобразованиях

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y) \tag{10.3}$$

этого многообразия представляет собой функциональное уравнение на группу движений, которая согласно результатам §6 должна быть трехпараметрической:

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \quad y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3), \tag{10.3′}$$

а соответствующая ей алгебра Ли с базисными операторами

$$\left.\begin{array}{r}X_1 = \lambda_1(x,y)\partial/\partial x + \sigma_1(x,y)\partial/\partial y,\\ X_2 = \lambda_2(x,y)\partial/\partial x + \sigma_2(x,y)\partial/\partial y,\\ X_3 = \lambda_3(x,y)\partial/\partial x + \sigma_3(x,y)\partial/\partial y\end{array}\right\} \qquad (10.4)$$

– трехмерной. Сама же метрическая функция $f(ij)$ может быть восстановлена либо как решение исходного функционального уравнения (10.2) по найденной группе движений (10.3′), либо как решение системы трех дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{r}X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0,\\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0,\\ X_3(i)f(ij) + X_3(j)f(ij) = 0\end{array}\right\} \qquad (10.5)$$

с операторами (10.4).

Пример 1. Для плоскости Евклида с метрической функцией

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \qquad (10.6)$$

найти полную локальную группу движений (10.3′), базисные операторы (10.4) ее алгебры Ли, по которым восстановить саму метрическую функцию как решение системы трех дифференциальных уравнений (10.5).

Решение. Запишем функциональное уравнение (10.2) для метрической функции (10.6) евклидовой плоскости:

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2. \qquad (10.7)$$

Вследствие предполагаемой локальной обратимости преобразований (10.3) отличен от нуля якобиан для двух функций $\lambda(x,y),\ \sigma(x,y)$ по двум переменным x, y:

$$\Delta = \partial(\lambda,\sigma)/\partial(x,y) \neq 0. \qquad (10.8)$$

Уравнение (10.7) справедливо для любых точек i и j, поэтому по их координатам x_i, y_i и x_j, y_j оно должно выполняться тождественно. Продифференцируем его по координатам x_j, y_j точки j. После деления на минус 2 получаем:

$$\left.\begin{array}{r}(\lambda(i) - \lambda(j))\lambda_x(j) + (\sigma(i) - \sigma(j))\sigma_x(j) = x_i - x_j,\\ (\lambda(i) - \lambda(j))\lambda_y(j) + (\sigma(i) - \sigma(j))\sigma_y(j) = y_i - y_j.\end{array}\right\} \qquad (10.9)$$

Результаты дифференцированя (10.9) рассмотрим как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно разностей $\lambda(i) - \lambda(j)$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$. Поскольку определитель этой системы совпадает с якобианом (10.8) для точки j и отличен от нуля, она может быть решена методом Крамера:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda(i) - \lambda(j) = (x_i - x_j)\sigma_y(j)/\Delta(j) - (y_i - y_j)\sigma_x(j)/\Delta(j),\\ \sigma(i) - \sigma(j) = -(x_i - x_j)\lambda_y(j)/\Delta(j) + (y_i - y_j)\lambda_x(j)/\Delta(j).\end{array}\right\}$$

Дифференцируя найденные решения по координатам точки i, получаем:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_x(i) = \sigma_y(j)/\Delta(j),\ \lambda_y(i) = -\sigma_x(j)/\Delta(j),\\ \sigma_x(i) = -\lambda_y(j)/\Delta(j),\ \sigma_y(i) = \lambda_x(j)/\Delta(j),\end{array}\right\}$$

то есть коэффициенты в них при разностях координат $x_i - x_j$ и $y_i - y_j$ являются постоянными, которые обозначим соответственно через a, g, b, h:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(i) - \lambda(j) = a(x_i - x_j) + g(y_i - y_j),\\ \sigma(i) - \sigma(j) = b(x_i - x_j) + h(y_i - y_j).\end{array}\right\} \tag{10.9}$$

Разделяя, далее, в решениях (10.9) точки i,j и затем опуская их обозначения, приходим к следующим выражениям:

$$\lambda(x, y) = ax + gy + c,\ \sigma(x, y) = bx + hy + d, \tag{10.10}$$

которые необходимо подставить в исходное функциональное уравнение (10.7). В результате получаем связь между коэффициетами этих выражений:

$$a^2 + b^2 = 1,\ g^2 + h^2 = 1,\ ag + bh = 0,$$

откуда легко находим:

$$h = \varepsilon a,\ g = -\varepsilon b,\ a^2 + b^2 = 1,\ \varepsilon = \pm 1.$$

Таким образом, для функций λ и σ преобразования (10.3), являющегося движением плоскости Евклида, получаем окончательно следующие выражения:

$$\lambda(x, y) = ax - \varepsilon by + c,\ \sigma(x, y) = bx + \varepsilon ay + d, \tag{10.11}$$

где $a^2 + b^2 = 1,\ \varepsilon = \pm 1$. Множество преобразований (10.3) с функциями (10.11) является полной группой движений плоскости Евклида, в которую входят как собственные движения с $\varepsilon = +1$, так и несобственные с $\varepsilon = -1$. Все собственные движения составляют связную локальную группу преобразований, которые можно записать в следующем виде:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + c,\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + d. \tag{10.12}$$

Сопоставляя полученные уравнения движений (10.12) с общей их записью (10.3$'$), устанавливаем соотношение параметров: $a^1 = c,\ a^2 = d,\ a^3 = \varphi$. Линейные параметры c, d задают параллельный перенос, а угловой параметр φ – поворот в плоскости Евклида.

Запишем бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование (10.12), близкое к тождественному, которое задается нулевыми значениями всех параметров:

$$x' = x - y\varphi + c,\ y' = y + x\varphi + d,$$

откуда получаем координатный базис соответствующей трехмерной алгебры Ли:

$$X_1 = \partial/\partial x,\ X_2 = \partial/\partial y,\ X_3 = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y, \tag{10.13}$$

Система уравнений (10.5) с операторами (10.13) совпадает с системой (8.15) при $q=0$ и ее решение (8.18) восстанавливает метрическую функцию (10.6) плоскости Евклида с точностью до масштабного преобразования:

$$f(ij)=\psi((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2).$$

Пример 2. Для плоскости Евклида найти координатный базис трехмерной алгебры Ли, которая соответствует локальной группе ее движений, исходя из того, что для любого оператора этой алгебры

$$X=\lambda(x,y)\partial/\partial x+\sigma(x,y)\partial/\partial y \tag{10.14}$$

метрическая функция (10.6) является решением уравнения

$$X(i)f(ij)+X(j)f(ij)=0. \tag{10.15}$$

Решение. Подставим в уравнение (10.15) оператор (10.14) и метрическую функцию (10.6), произведя некоторые очевидные преобразования:

$$(\lambda(i)-\lambda(j))(x_i-x_j)+(\sigma(i)-\sigma(j))(y_i-y_j)=0, \tag{10.16}$$

после чего дополнительно продифференцируем его по координатам точек i и j:

$$\lambda_x(i)+\lambda_x(j)=0,\ \sigma_x(i)+\lambda_y(j)=0,\ \lambda_y(i)+\sigma_x(j)=0,\ \sigma_y(i)+\sigma_y(j)=0.$$

Возникшая система четырех функционально-дифференциальных уравнений легко интегрируется, так как в ней разделяются координаты x_i,y_i и x_j,y_j:

$$\lambda(x,y)=a^1-a^3y,\ \sigma(x,y)=a^2+a^3x, \tag{10.17}$$

причем найденные решения являются также и решениями исходного функционального уравнения (10.16), что можно проверить непосредственной их подстановкой.

Придавая параметрам (a^1,a^2,a^3) решения (10.17) три значения (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), получаем три независимых выражения для функций λ и σ, которые по формуле (10.14) и определят три базисных оператора (10.13) трехмерной алгебры Ли группы движений плоскости Евклида с метрической функцией (10.6).

Пример 3. Для пространства Евклида найти координатный базис шестимерной алгебры Ли, которая соответствует локальной группе его движений, исходя из того, что для любого оператора этой алгебры

$$X=\lambda(x,y,z)\partial/\partial x+\sigma(x,y,z)\partial/\partial y+\tau(x,y,z)\partial/\partial z \tag{10.18}$$

метрическая функция

$$f(ij)=(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2 \tag{10.19}$$

является решением уравнения (10.15).

Указание к решению. Этот пример был рассмотрен в §9 как частный случай доказательства теоремы об алгебрах Ли групп движений всех трехмерных феноменологически симметричных геометрий и помещен сразу после ее формулировки.

Задача 1. Для следующих двумерных феноменологически симметричных геометрий с метрическими функциями: **(3.5)** – двумерной сферы; **(3.6)** – плоскости Лобачевского; **(3.7)** – плоскости Минковского; **(3.8)** – однополостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; **(3.9)** – симплектической плоскости; **(3.10)** – симплициальной плоскости; **(3.11)** – псевдогельмгольцевой плоскости; **(3.12)** – дуальногельмгольцевой плоскости; **(3.13)** – плоскости Гельмгольца; **(3.14)** – двумерной геометрии на несвязном многообразии *найти* полную локальную группу движений (10.3′), базисные операторы (10.4) соответствующей трехмерной алгебры Ли, по которым восстановить саму метрическую функцию как решение системы трех дифференциальных уравнений (10.5).

Указание к решению. Для данной метрической функции записать функциональное уравнение (10.2), свести его к функционально-дифференциальным уравнениям и по их решению определить полную локальную группу движений (10.3′), зависящую от трех параметров. По группе движений найти базисные операторы (10.4) соответствующей алгебры Ли и затем восстановить саму метрическую функцию как решение системы трех дифференциальных уравнений (10.5). Предварительно имеет смысл познакомиться с решением аналогичной задачи в примере 1 для плоскости Евклида с метрической функцией (10.6), обозначенной в таблице полной классификации §3 номером **(3.4)**.

Задача 2. Для следующих двумерных феноменологически симметричных геометрий с метрическими функциями: **(3.5)** – двумерной сферы; **(3.6)** – плоскости Лобачевского; **(3.7)** – плоскости Минковского; **(3.8)** – однополостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; **(3.9)** – симплектической плоскости; **(3.10)** – симплициальной плоскости; **(3.11)** – псевдогельмгольцевой плоскости; **(3.12)** – дуальногельмгольцевой плоскости; **(3.13)** – плоскости Гельмгольца; **(3.14)** – двумерной геометрии на несвязном многообразии *найти* координатный базис трехмерной алгебры Ли, которая соответствует полной локальной группе ее движений, исходя из того, что для любого оператора (10.14) этой алгебры метрическая функция является решением уравнения (10.15).

Указание к решению. Метод решения подобных задач достаточно подробно описан в примере 2 для плоскости Евклида с метрической функцией (10.6), которая в полной классификации §3 значится под номером **(3.4)**.

Задача 3. Для следующих трехмерных геометрий с метрическими функциями: **(4.7)** – трехмерной сферы; **(4.8)** – пространства Лобачевского; **(4.9)** – пространства Минковского; **(4.10)** – трехмерного гиперболоида I; **(4.11)** – трехмерного гиперболоида II; **(4.12)** – симплектического пространства; **(4.13)** – симплициального пространства; **(4.14)** – особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Минковского; **(4.15)** – особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Евклида; **(4.16)** – псевдогельмгольцева пространства; **(4.17)** – дуальногельмгольцева пространства; **(4.18)** – пространства Гельмгольца *найти* координатный базис шестимерной алгебры Ли, которая соответствует полной локальной группе ее движений, исходя из того, что для любого опрератора (10.18) этой алгебры метрическая функция является решением уравнения (10.15).

Указание к решению. Метод решения подобных задач описан в примере 3 для пространства Евклида с метрической функцией (10.19), которая в таблице классификационной теоремы четвертого параграфа идет под номером **(4.6)**.

ГЛАВА III. Окружности и циклы

§11. Окружности и циклы двумерных геометрий

Пусть метрическая функция с координатным представлением

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{11.1}$$

удовлетворяющая условиям трех аксиом из §1, задает геометрию на двумерном многообразии. Зафиксируем одну из точек в выражении метрической функции $f(ij)$ и рассмотрим все те другие точки в ней, для которых ее значение остается постоянным. Множество таких точек назовем *окружностью*. Фиксированную точку обозначим через o, а у координат другой опустим индекс, ее обозначающий. Тогда уравнение окружности можно записать в следующих двух видах:

$$f(x, y, x_o, y_o) = r \quad \text{или} \quad f(x_o, y_o, x, y) = r, \tag{11.2}$$

где r – некоторая постоянная, которую назовем *радиусом* окружности. В общем случае метрическая функция $f(ij)$ не симметрична, поэтому не обязательно совпадают окружности, определяемые первым и вторым уравнениями (11.2). В случае же ее симметрии обе они совпадают и тогда окружность можно задать одним из этих уравнений, например, первым. Заметим, что метрические функции $f(ij)$ феноменологически симметричных двумерных геометрий, приведенные в таблице классификационной теоремы §3, за исключением симплектической плоскости, симметричны по перестановке точек i, j.

Далее определим еще в двумерном многообразии с метрической функцией (11.1) *цикл* как такую гладкую кривую, которая является траекторией некоторой однопараметрической подгруппы полной локальной группы ее движений. Ясно, что при этом сама метрическая функция должна допускать, по крайней мере, однопараметрическую группу движений.

Цикл, как всякая гладкая кривая в двумерном многообразии, может быть задан либо неявно общим уравнением

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{11.3}$$

где Φ – функция двух переменных, удовлетворяющая условию

$$\mathrm{grad}\Phi \neq 0, \tag{11.4}$$

либо явно параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \; y = y(t), \tag{11.5}$$

в которых параметр t принадлежит некоторой области в R, а функции одной переменной $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют условию

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0, \tag{11.6}$$

где точка над координатой означает ее дифференцирование по параметру t.

§12. Функциональные уравнения на цикл

Метрическая функция (11.1) двумерной феноменологически симметричной геометрии допускает, согласно результатам §6, трехпараметрическую группу локальных движений

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \quad y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3), \tag{12.1}$$

причем предполагается, что нулевым значениям трех параметров $a = (a^1, a^2, a^3)$ соответствует тождественное преобразование $x' = x,\ y' = y$, то есть отсутствие движения или покой. Обозначим через α параметр некоторой однопараметрической подгруппы группы движений, причем будем предполагать также, что его нулевому значению соответствует отсутствие движения. Таким образом, для однопараметрической подгруппы имеем:

$$a^1 = a^1(\alpha),\ a^2 = a^2(\alpha),\ a^3 = a^3(\alpha) \ \text{ или } \ a = a(\alpha). \tag{12.2}$$

Предположим, что цикл, задаваемый уравнением (11.3) с условием (11.4), является траекторией этой однопараметрической подгруппы группы движений (12.1) при связи (12.2) их параметров. Тогда смещенная точка с координатами x', y' также принадлежит циклу и потому

$$\Phi(x', y') = 0 \ \text{ или } \ \Phi[\lambda(x, y; a(\alpha)), \sigma(x, y; a(\alpha))] = 0. \tag{12.3}$$

Если известны уравнения группы движений (12.1), сохраняющих метрическую функцию (11.1), и связи (12.2), задающие ее однопараметрическую подгруппу, то условие (12.3) инвариантности цикла относительно однопараметрической подгруппы представляет собой функциональное уравнение относительно функции Φ, с помощью которой неявно задается цикл. Для того, чтобы найти цикл, надо решить это уравнение, перейдя от него к дифференциальному уравнению в частных производных, методы решения которого хорошо известны.

Продифференцируем уравнение (12.3) по параметру однопараметрической подгруппы α, после чего положим $\alpha = 0$, помня, что при этом $a(0) = 0$ и $\lambda(x, y; 0) = x,\ \sigma(x, y; 0) = y$:

$$X\Phi(x, y) = 0, \tag{12.4}$$

где $X = c^1X_1 + c^2X_2 + c^3X_3$ – произвольный ненулевой оператор трехмерной алгебры Ли группы движений (12.1); X_1, X_2, X_3 – ее базисные операторы (7.5), а c^1, c^2, c^3 – постоянные коэффициенты.

Второе функциональное уравнение на цикл получим из следующих простых соображений. Пусть две точки i, j принадлежат циклу и их положение на нем задается параметрами цикла t_i, t_j. Используя уравнения (11.5) с условием (11.6), для метрической функции (11.1) получаем ее параметрическое представление

$$f(ij) = f(x(t_i), y(t_i), x(t_j), y(t_j)) = f(t_i, t_j), \tag{12.5}$$

причем справа для удобства сохранено прежнее обозначение f.

Действие однопараметрической подгруппы движений на точки цикла задается некоторым преобразованием

$$t' = \lambda(t, \alpha), \tag{12.6}$$

которое сохраняет метрическую функцию (12.5):

$$f(\lambda(t_i, \alpha), \lambda(t_j, \alpha)) = f(t_i, t_j).$$

Продифференцируем это равенство по параметру α, полагая затем $\alpha = 0$:

$$\lambda(t_i)\frac{\partial f(ij)}{\partial t_i} + \lambda(t_j)\frac{\partial f(ij)}{\partial t_j} = 0,$$

где $\lambda(t) = \partial\lambda(t, \alpha)/\partial\alpha|_\alpha = 0$, причем $\lambda(t)$ тождественно в нуль не обращается ни для какой окрестности точек цикла, так как метрическая функция (12.5) невырожденная, то есть параметры t_i, t_j точек i и j входят в нее существенным образом. Полученное относительно метрической функции дифференциальное уравнение может быть проинтегрировано методом характеристик:

$$f(ij) = \psi(\varphi(t_i) - \varphi(t_j)), \tag{12.7}$$

где $\varphi(t) = \int dt/\lambda(t)$.

Введем естественное переобозначение параметра цикла $\varphi(t) \to t$ и соответствующее переобозначение параметра подгруппы движений (12.6). Тогда метрическая фукция (12.7) и сохраняющая ее однопараметрическая группа преобразований цикла запишутся в следующем виде:

$$f(ij) = \psi(t_i - t_j), \tag{12.8}$$

$$t' = t + \alpha. \tag{12.9}$$

Второе функциональное уравнение на цикл получается при подстановке в равенство (12.5) представления (12.8) метрической функции $f(ij)$ с использованием нового параметра цикла:

$$f(x(t_i), y(t_i), x(t_j), y(t_j)) = \psi(t_i - t_j), \tag{12.10}$$

Чтобы решить это функциональное уравнение, необходимо свести его к дифференциальному, учитывая, что оно выполняется тождественно по координатам точек цикла i и j, то есть по параметрам t_i и t_j.

Хорошо известно, что однопараметрическая группа преобразований локально подобна группе паралельнах переносов. То есть движения цикла в его задании уравнениями (11.5) при надлежаще выбранных параметре цикла t и параметре группы α может быть записано установленным выше уравнением (12.9). Заметим дополнительно, что метрическая функция (12.8) на цикле, то есть одномерном многообразии, задает феноменологически симметричную одномерную геометрию ранга три, так как для любых трех точек цикла i, j, k имеет место следующая функциональная связь:

$$\psi^{-1}(f(ij)) - \psi^{-1}(f(ik)) + \psi^{-1}(f(jk)) = 0, \tag{12.11}$$

где ψ^{-1} – обратная к ψ функция. Геометрия эта наделена групповой симметрией степени один, так как группа ее движений (12.9) однопараметрическая.

Для получения других функциональных уравнений на цикл, заметим, что для точек цикла при действии однопараметрической группы (12.9), с одной стороны, $t' = t + \alpha$, а с другой, по уравнениям (11.5), $x' = x(t'),\ y' = y(t')$. Соотнеся это с уравненями (12.1) и связью параметров (12.2), получаем равенства

$$x(t+\alpha) = \lambda(x(t), y(t); a(\alpha)), \quad y(t+\alpha) = \sigma(x(t), y(t); a(\alpha)), \tag{12.12}$$

которые выполняются тождественно по параметру цикла t и по параметру группы его движений α. Два соотношения (12.12) составляют систему функциональных уравнений не только на цикл (11.5), но и на однопараметрическую подгруппу (12.2), траекторией которой он является. Как обычно, дифференцированием по параметрам t и α функциональные уравнения (12.12) сводятся к функционально-дифференциальным, а последние просто к дифференциальным, методы решения которых хорошо известны. Некоторые примеры решения функциональных уравнений на цикл будут приведены в §15 – последнем параграфе этой главы.

§13. Циклы трехмерных геометрий

Трехмерная геометрия задается на трехмерном многообразии невырожденной метрической функцией

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) \tag{13.1}$$

и ее группа движений

$$x' = \lambda(x, y, z; a),\ y' = \sigma(x, y, z; a),\ z' = \tau(x, y, z; a), \tag{13.2}$$

где $a = (a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6)$, зависит от шести параметров, если эта геометрия феноменологически симметрична с рангом, равным пяти. Кривую без особых точек в трехмерном многообразии назовем *циклом*, если она является траекторией некоторой однопараметрической подгруппы группы движений (13.2). Обозначим через α параметр этой подгруппы и тогда

$$a = a(\alpha), \tag{13.3}$$

причем, как обычно, предполагается, что нулевым значениям всех параметров соответствует тождественное преобразование, в частности, $a(0) = 0$.

Цикл в трехмерном многообразии может быть задан неявно уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0, \tag{13.4}$$

в котором двухкомпонентная функция трех переменных $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ имеет независимые компоненты Φ_1 и Φ_2, или явно параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{13.5}$$

при выполнении естественного ограничительного условия $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \neq 0$.

Однопараметрическая подгруппа точку цикла, заданного уравнением (13.4), переводит в другую точку того же цикла, поэтому $\Phi(x', y', z') = 0$ и мы приходим к первому функциональному уравнению на цикл при заданной группе движений (13.2) и ее однопараметрической подгруппе со связью (13.3) параметров a и α:

$$\Phi(\lambda(x, y, z; a(\alpha)), \sigma(x, y, z; a(\alpha)), \tau(x, y, z; a(\alpha)) = 0. \tag{13.6}$$

Дифференцируя по параметру α и полагая его равным нулю, от функционального уравнения (13.6) приходим к дифференциальному:

$$X\Phi(x, y, z) = 0, \tag{13.7}$$

где $X = c^1X_1 + c^2X_2 + \ldots + c^6X_6$ – произвольный ненулевой оператор (9.3) шестимерной алгебры Ли, которая соответствует группе движений (13.2); $X_1, X_2, \ldots, X_6$ – ее базисные операторы; $c^1, c^2, \ldots, c^6$ – постоянные коэффициенты. Уравнение (13.7) имеет, очевидно, два независимых решения.

Подставляя в метрическую функцию (13.1) задание цикла уравнениями (13.5):

$$f(ij) = f(x(t_i), y(t_i), z(t_i), x(t_j), y(t_j), z(t_j)) = f(t_i, t_j), \tag{13.8}$$

получаем ее параметрическое представление для точек цикла. В предыдущем §12 было установлено, что для цикла, как одномерного многообразия, допускающего однопараметрическую группу движений, при надлежаще выбранных параметре цикла t и параметре группы α метрическая функция и группа ее движений могут быть записаны выражением (12.8) и уравнением (12.9). Подставляя выражение (12.8) в равенство (13.8), получаем второе функциональное уравнение на цикл трехмерных геометрий:

$$f(x(t_i), y(t_i), z(t_i), x(t_j), y(t_j), z(t_j)) = \psi(t_i - t_j), \tag{13.9}$$

которое выполняется тождественно по параметрам t_i, t_j точек i, j.

Систему трех функциональных уравнений на цикл трехмерной геометрии и на однопараметрическую группу его движений можно получить, подставляя в уравнения группы (13.1) уравнение (12.9) однопараметрической подгруппы:

$$\left.\begin{aligned} x(t+\alpha) &= \lambda(x(t), y(t), z(t); a(\alpha)),\\ y(t+\alpha) &= \sigma(x(t), y(t), z(t); a(\alpha)),\\ z(t+\alpha) &= \tau(x(t), y(t), z(t); a(\alpha)). \end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

Ясно, что уравнения (13.10) нельзя записать, если неизвестны уравнения (13.1) полной локальной группы движений данной трехмерной геометрии.

§14. Сферы и циклические поверхности трехмерных геометрий

Сфера в трехмерной геометрии определяется аналогично окружности в двумерной. Зафиксируем некоторую точку o, заданную координатами x_o, y_o, z_o, и рассмотрим все те другие точки трехмерного многообразия, для которых метрическая функция (13.1) имеет одно и то же значение, равное r. Если опустить у другой точки ее явное обозначение, то уравнение *сферы* будет следующим:

$$f(x, y, z, x_o, y_o, z_o) = r \quad \text{или} \quad f(x_o, y_o, z_o, x, y, z) = r. \tag{14.1}$$

Постоянная r, которая может быть названа *радиусом* сферы, принимает не только положительные значения, но так же отрицательные и нулевые. В §4 приведена полная классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий, из которой видно, что все их метрические функции $f(ij)$, кроме одной, симметричны по перестановке точек i, j, поэтому сферу такой трехмерной геометрии можно задавать в основном одним из уравнений (14.1), например, первым.

Циклической поверхностью в трехмерной геометрии назовем такую, которая инвариантна относительно какой-то трехпараметрической группы движений, являющейся, естественно, подгруппой полной локальной группы движений (13.2). Если ее параметры обозначить через α, β, γ, предполагая, что их нулевым значениям соответствует тождественное преобразование, то должна быть следующая их связь с шестью параметрами группы (13.2):

$$a = a(\alpha, \beta, \gamma). \tag{14.2}$$

Гладкую поверхность можно задать неявно уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0, \tag{14.3}$$

в котором функция Φ имеет отличный от нуля градиент. Поскольку точки циклической поверхности при движениях из трехпараметрической определяющей ее подгруппы остаются на ней же, должно выполняться уравнение $\Phi(x', y', z') = 0$, то есть при подстановке преобразований (13.2) и связи параметров (14.2) получаем:

$$\Phi(\lambda(x, y, z; a(\alpha, \beta, \gamma), \sigma(x, y, z; a(\alpha, \beta, \gamma), \tau(x, y, z; a(\alpha, \beta, \gamma)) = 0. \tag{14.4}$$

При известной трехпараметрической подгруппе движений соотношение (14.4) является функциональным уравнением на функцию Φ, то есть на циклическую поверхность. Это уравнение выполняется тождественно по параметрам α, β, γ, поэтому, дифференцируя по ним и обращая их затем в нуль, получаем относительно функции Φ систему трех дифференциальных уравнений в частных производных:

$$Y_1\Phi(x, y, z) = 0, \quad Y_2\Phi(x, y, z) = 0, \quad Y_3\Phi(x, y, z) = 0, \tag{14.5}$$

где Y_1, Y_2, Y_3 – базисные операторы трехмерной алгебры, которая является подалгеброй шестимерной алгебры Ли полной локальной группы движений (13.2).

Гладкую поверхность можно задать и явно параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v), \tag{14.6}$$

при условии что ранг матрицы Якоби для трех функций x, y, z от двух переменных u, v равен двум. Тогда для точек i и j, положение которых задается параметрами u_i, v_i и u_j, v_j, метрическая функция $f(ij)$ с координатным представлением (13.1) может быть записана следующим выражением:

$$f(ij) = f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i), x(u_j, v_j), y(u_j, v_j), z(u_j, v_j)). \tag{14.7}$$

Циклическая поверхность в ее параметрическом задании (14.6) допускает трехмерную группу движений, являющуюся подгруппой группы (13.2) со связью параметров (13.3). Поэтому для движений по циклической поверхности из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x(u', v') &= \lambda(x(u, v), y(u, v), z(u, v); a(\alpha, \beta, \gamma)), \\ y(u', v') &= \sigma(x(u, v), y(u, v), z(u, v); a(\alpha, \beta, \gamma)), \\ z(u', v') &= \tau(x(u, v), y(u, v), z(u, v); a(\alpha, \beta, \gamma)) \end{aligned}\right\} \tag{14.8}$$

следуют их уравнения в параметрах поверхности u, v и трехмерной группы α, β, γ:

$$u' = \mu(u, v; \alpha, \beta, \gamma), \; v' = \rho(u, v; \alpha, \beta, \gamma), \tag{14.9}$$

Таким образом, метрическая функция (14.7) на двумерном многообразии с локальными координатами u, v задает геометрию, наделенную групповой симметрией степени три. Но тогда, согласно результатам §6, в котором установлена эквивалентность феноменологической и групповой симметрий, эта двумерная геометрия феноменологически симметрична с рангом, равным четырем.

В §3 приведена полная с точностью до масштабной функции ψ и замены локальных координат классификация метрических функций, задающих на двумерном многообразии феноменологически симметричные геометрии. Используя канонические формы (3.4)–(3.14), в которых необходимо координаты x и y заменить на параметры u и v соответственно, получаем из выражений (14.7) функциональное уравнение на циклическую поверхность трехмерной геометрии:

$$\begin{aligned} f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i),z(u_i,v_i),x(u_j,v_j),y(u_j,v_j),z(u_j,v_j)) = \\ = \psi(f(u_i,v_i,u_j,v_j)), \end{aligned} \tag{14.10}$$

где f справа – каноническое выражение для метрической функции двумерной феноменологически симметричной геометрии из списка (3.4)–(3.14). Сочетая их слева с метрическими функциями f из списка (4.6)–(4.18) трехмерных феноменологически симметричных геометрий, получаем более ста вариантов функционального уравнения (14.10), многие из которых, по-видимому, не имеют решения. Преимуществом, однако, этого уравнения перед функциональным уравнением (14.7) является то, что не надо предварительно находить у шестимерной группы движений (13.2) все ее трехпараметрические подгруппы.

Групповым эквивалентом функционального уравнения (14.10), если группы движений (13.2) и (14.9) известны, будет, очевидно, следующая система трех функциональных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x(\mu(u,v;\alpha,\beta,\gamma),\rho(u,v;\alpha,\beta,\gamma)) = \lambda(x(u,v),y(u,v),z(u,v);a(\alpha,\beta,\gamma)), \\ y(\mu(u,v;\alpha,\beta,\gamma),\rho(u,v;\alpha,\beta,\gamma)) = \sigma(x(u,v),y(u,v),z(u,v);a(\alpha,\beta,\gamma)), \\ z(\mu(u,v;\alpha,\beta,\gamma),\rho(u,v;\alpha,\beta,\gamma)) = \tau(x(u,v),y(u,v),z(u,v);a(\alpha,\beta,\gamma)), \end{aligned}\right\} \tag{14.11}$$

в которой неизвестными будут функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, задающие циклическую поверхность (14.6), и функции $a = a(\alpha,\beta,\gamma)$, устанавливающие связь (14.2) параметров шестимерной группы $a = (a^1,\ldots,a^6)$ и параметров трехмерной группы α,β,γ. Если система (14.11) имеет нетривиальное решение, то эта трехмерная группа с действием (14.9) в двумерном многообразии (u,v), является подгруппой шестимерной группы с действием (13.2) в трехмерном многообразии (x,y,z).

§15. Некоторые примеры и задачи

Функциональные уравнения на цикл и циклические поверхности могут быть записаны в большом числе вариантов, поскольку в списках полной классификации двумерных и трехмерных феноменологически симметриичных геометрий (см. §3 и §4) для метрической функции $f(ij)$ имеется не менее десяти различных выражений (3.4)–(3.14) и (4.6)–(4.16). Основные методы решения таких уравнений можно выявить уже на примере евклидовой плоскости и евклидового пространства. Для других геометрий эти методы необходимо модифицировать и дополнить некоторыми частными методиками, выявление которых в каждом отдельном случае может представить самостоятельный интерес.

Для евклидовой плоскости с метрической функцией

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \tag{15.1}$$

известны (см. §10, пример 1) уравнения полной локальной группы движений:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + c,\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + d \tag{15.2}$$

и базисные операторы ее трехмерной алгебры Ли:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = -y\partial_x + x\partial_y. \tag{15.3}$$

Функциональные уравнения на цикл плоскости Евклида напишем по результатам §12. При неявном задании цикла одно уравнение:

$$\Phi(x\cos\varphi(\alpha) - y\sin\varphi(\alpha) + c(\alpha),\ \sin\varphi(\alpha) + y\cos\varphi(\alpha) + d(\alpha)) = 0, \tag{15.4}$$

а при явном параметрическом задании уравнение:

$$(x(t_i) - x(t_j))^2 + (y(t_i) - y(t_j))^2 = \psi(t_i - t_j) \tag{15.5}$$

и система

$$\left.\begin{aligned} x(t+\alpha) &= x(t)\cos\varphi(\alpha) - y(t)\sin\varphi(\alpha) + c(\alpha), \\ y(t+\alpha) &= x(t)\sin\varphi(\alpha) + y(t)\cos\varphi(\alpha) + d(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

из которой находится не только сам цикл, но и сохраняющая его однопараметрическая группа движений.

Пример 1. Для плоскости Евклида с метрической функцией (15.1) и полной локальной группой движений (15.2) найти все циклы, решая отдельно каждое из функциональных уравнений (15.4), (15.5), (15.6) и сопоставляя получаемые результаты. Для каждого цикла найти ту однопараметрическую группу движений, относительно которой он сохраняется, являясь ее инвариантной траекторией.

Решение. Продифференцируем уравнение (15.4) по параметру α и затем положим его равным нулю. В результате приходим к дифференциальному уравнению $X\Phi(x,y) = 0$ с оператором $X = c^1X_1 + c^2X_2 + c^3X_3$ из трехмерной алгебры Ли (15.3), где c^1, c^2, c^3 – произвольные постоянные, не все равные нулю одновременно:

$$(c^1 - c^3y)\Phi_x(x,y) + (c^2 + c^3x)\Phi_y(x,y) = 0. \tag{15.7}$$

Предположим сначала, что $c^3 = 0$. Тогда решение получающегося простого уравнения $c^1\Phi_x + c^2\Phi_y = 0$ находится методом характеристик: $\Phi(x,y) = \Theta(c^2x - c^1y)$, где Θ – произвольная функция одной переменной с отличной от нуля производной Θ'. Цикл задается неявно уравнением $\Phi(x,y) = 0$, то есть $c^2x - c^1y = \mathrm{const}$, или, после удобных переобозначений:

$$ax + by + c = 0, \tag{15.8}$$

где a, b, c – произвольные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$. Уравнением (15.8) задается прямая на плоскости Евклида, переходящая сама в себя при параллельных переносах

$$x' = x + b\alpha,\ y' = y - a\alpha \tag{15.9}$$

с параметром α вдоль ненулевого вектора $(b, -a)$, которые составляют однопараметрическую подгруппу полной локальной группы движений (15.2) со следующей связью параметров: $\varphi = 0,\ c = b\alpha,\ d = -a\alpha$.

Предположим теперь, что в уравнении (15.7) $c^3 \neq 0$. Соответствующее уравнение характеристик для него $dx/(c^1 - c^3 y) = dy/(c^2 + c^3 x)$ легко интегрируется и решением уравнения (15.7) будет функция $\Phi(x, y) = \Theta((c^2 + c^3 x)^2 + (c^1 - c^3 y)^2)$. Из неявного задания цикла уравнением $\Phi(x, y) = 0$ естественно получаем $(c^2 + c^3 x)^2 + (c^1 - c^3 y)^2 = \mathrm{const}$, или, после удобных переобозначений:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2 = 0, \tag{15.10}$$

где x_o, y_o, R – произвольные постоянные, причем $R > 0$, так как при $R = 0$ кривая (15.10) вырождается в точку $x = x_o,\ y = y_o$. Уравнением (15.10) задается на плоскости Евклида окружность радиуса R с центром в точке (x_o, y_o), которая сохраняется при вращениях

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x - x_o)\cos\alpha - (y - y_o)\sin\alpha + x_o, \\ y' &= (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_o)\cos\alpha + y_o \end{aligned}\right\} \tag{15.11}$$

вокруг ее центра o, составляющих однопараметрическую подгруппу полной локальной группы движений (15.2) со следующей связью параметров: $\varphi = \alpha,\ c = x_o - x_o\cos\alpha + y_o\sin\alpha,\ d = y_o - x_o\sin\alpha - y_o\cos\alpha$.

Таким образом, по результатам решения дифференциального уравнения (15.7) множество циклов на плоскости Евклида состоит из всевозможных прямых и окружностей, задаваемых неявно уравнениями (15.8) и (15.10), с соответствующими однопараметрическими группами движений (15.9) и (15.11), относительно которых они являются инвариантными траекториями. Легко проверяется, что циклы (15.8) и (15.10) вместе с сохраняющими их группами движений (15.9) и (15.11) удовлетворяют также и исходному функциональному уравнению (15.4).

Методы решения второго функционального уравнения (15.5) на цикл в плоскости Евклида существенно отличны от методов решения первого уравнения (15.4), однако результаты этих решений должны совпадать, определяя одно и то же множество циклов, состоящее из прямых и окружностей. Убедимся в этом. Сначала перепишем уравнение (15.5) в виде, удобном для сокращения записи в последующих его математических преобразованиях:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = \psi(t_i - t_j), \tag{15.5$'$}$$

где, например, $x_i = x(t_i)$, причем производную по параметру t_i здесь и ниже из соображений удобства будем обозначать штрихом: $x'_i = dx(t_i)/dt_i$ (не путать со штрихом в уравнениях группы движений (15.2) и ее подгрупп (15.9), (15.11)).

Продифференцируем уравнение (15.5$'$) по переменным t_i и t_j. Соответствующие производные правой части отличаются только знаком. Поэтому, складывая результаты дифференцирования и сокращая двойку, приходим к функционально-дифференциальному уравнению на цикл:

$$(x_i - x_j)(x'_i - x'_j) + (y_i - y_j)(y'_i - y'_j) = 0, \tag{15.12}$$

в котором будем различать две возможности: $x' = \text{const}$ и $x' \neq \text{const}$.

Предположим сначала, что $x' = b = \text{const}$, то есть $x'_i - x'_j = 0$. Но тогда по уравнению (15.12) должно быть также $y'_i - y'_j = 0$, то есть $y' = -a = \text{const}$, откуда после интегрирования по переменной t получаем:

$$x = bt + h,\ y = -at + g. \tag{15.13}$$

Параметрическими уравнениями (15.13) на плоскости Евклида явно задается множество всевозможных прямых, для которых, естественно, должно выполняться условие $a^2 + b^2 \neq 0$, чтобы прямая не вырождалась в точку $(x = h, y = g)$. Переход к явному заданию (15.8) исключением параметра t очевиден, причем $c = -(ah + bg)$. Заметим, что функции (15.13) являются решениями не только функционально-дифференциального уравнения (15.12), но и исходного функционального уравнения (15.5). Действительно, при подстановке в него функций (15.13) имеем для его правой части: $\psi(t_i - t_j) = (a^2 + b^2)(t_i - t_j)^2$.

Предположим теперь, что $x' \neq \text{const}$, то есть $x'_i - x'_j \neq 0$, откуда по уравнению (15.12) одновременно должно быть $y' \neq \text{const}$, в частности, $x' \neq 0, y' \neq 0$. Дополнительно установим, что $y'/x' \neq \text{const}$, то есть $(y'/x')' \neq 0$. В самом деле, если $y'/x' = a = \text{const}$, то $y' = ax'$ и после интегрирования $y = ax + b$. Подставляя полученные соотношения в уравнение (15.12), приходим к противоречию: $(1 + a^2)(x_i - x_j)(x'_i - x'_j) = 0$, хотя ни один из трех сомножителей не равен нулю.

Продифференцируем уравнение (15.12) одновременно по переменным t_i, t_j, после чего разделим его на отличное от нуля произведение $x'_i \cdot x'_j$:

$$\frac{x''_i}{x'_i} + \frac{x''_j}{x'_j} + \frac{y''_i}{x'_i} \cdot \frac{y'_j}{x'_j} + \frac{y''_j}{x'_j} \cdot \frac{y'_i}{x'_i} = 0.$$

Полученный результат продифференцируем одновременно по тем же переменным, после чего разделим его на отличное от нуля произведение $(y'_i/x'_i)' \cdot (y'_j/x'_j)'$:

$$\left(\frac{y''_i}{x'_i}\right)' \Big/ \left(\frac{y'_i}{x'_i}\right)' + \left(\frac{y''_j}{x'_j}\right)' \Big/ \left(\frac{y'_j}{x'_j}\right)' = 0,$$

откуда, опуская нижние индексы i, j, имеем $(y''/x')'/(y'/x')' = 0$ и, вследствие отличия от нуля знаменателя, $(y''/x')' = 0$. После двух интегрирований приходим к уравнению $y' = bx + h$. Совершенно аналогично из того же функционально-дифференциального уравнения (15.12) может быть получено второе уравнение $x' = ay + g$. Подставляя их в исходное, легко устанавливаем связь: $b = -a$. Таким образом, для цикла в случае $x' \neq \text{const}, y' \neq \text{const}$ получилась система двух дифференциальных уравнений

$$x' = ay + g,\ y' = -ax + h, \tag{15.14}$$

в которой, очевидно, $a \neq 0$. Решить эту систему несложно. Продифференцируем ее первое уравнение и подставим в него второе. Полученное дифференциальное уравнение $x'' + a^2 x = ah$ имеет решение $x = R\cos(at+\delta) + h/a$, где R и δ – произвольные постоянные, причем $R > 0$. Из первого уравнения системы (15.14) находим другую функцию: $y = -R\sin(at+\delta) - g/a$. Производя переобозначение параметра цикла: $at+\delta \to -t$ и констант в его уравнении: $h/a \to x_o$, $g/a \to -y_o$, получаем окружность радиуса R с центром в точке (x_o, y_o):

$$x = R\cos t + x_o,\ y = R\sin t + y_o. \tag{15.15}$$

Легко проверяется, что функции (15.15) являются решениями и исходного функционального уравнения (15.5), так как при их подстановке в него для его правой части получаем: $\psi(t_i - t_j) = 2R^2(1-\cos(t_i - t_j))$. Итак, по итогам решения второго функционального уравнения (15.5), как и первого (15.4), множество циклов на плоскости Евклида состоит из прямых и окружностей, явное параметрическое задание которых записывается уравнениями (15.13) и (15.15).

Приступим, в заключение, к решению системы функциональных уравнений (15.6) на цикл плоскости Евлида. В левую часть этих уравнений параметры t и α входят в виде суммы $t+\alpha$, поэтому дифференцирование по ним дает один и тот же результат:

$$\left.\begin{aligned} x'\cos\varphi - y'\sin\varphi &= -x\varphi'\sin\varphi - y\varphi'\cos\varphi + c', \\ x'\sin\varphi + y'\cos\varphi &= x\varphi'\cos\varphi - y\varphi'\sin\varphi + d', \end{aligned}\right\}$$

где x', y' означает дифференцирование по параметру цикла t, а φ', c', d' – по параметру α группы движений, которая его сохраняет. Полагая $\alpha = 0$ и помня, что при этом имеем тождественное преобразование с нулевыми значениями всех параметров движения φ, c, d, получаем, очевидно, систему дифференциальных уравнений $x' = \widetilde{a}y + \widetilde{g}$, $y' = -\widetilde{a}x + \widetilde{h}$ на цикл, причем константа $\widetilde{a}$ в них, в отличие от аналогичной системы (15.14), не обязательно отлична от нуля. Ясно, что при $\widetilde{a} = 0$ из этих уравнений получается множество прямых (15.13), а при $\widetilde{a} \neq 0$ – множество окружностей (15.15).

Подставляя параметрическое задание прямой (15.13), в систему функциональных уравнений (15.6), получаем выражения для параметров движения (15.2): $\varphi = 0$, $c = b\alpha$, $d = -a\alpha$ и соответствующую однопараметрическую группу движений (15.9), для которой эта прямая является инвариантной траекторией. Аналогично при подстановке параметрического задания окружности (15.15) в те же функциональные уравнения (15.6) для параметров общего движения (15.2) находим: $\varphi = \alpha$, $c = x_o - x_o\cos\alpha + y_o\sin\alpha$, $d = y_o - x_o\sin\alpha - y_o\cos\alpha$ и соответствующую однопараметрическую группу движений (15.11), сохраняющую эту окружность.

Пример 2. Для пространства Евклида с метрической функцией (4.6):

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \tag{15.16}$$

найти множество всех циклов.

Решение. Конечные уравнения (13.2) для группы движений трехмерного пространства Евклида достаточно громоздки, поэтому от первого функционального уравнения (13.6) на цикл перейдем к дифференциальному уравнению (13.7)

$$(c^1X_1 + c^2X_2 + \ldots + c^6X_6)\Phi(x,y,z) = 0,$$

в котором для базисных операторов соответствующей шестимерной алгебры Ли возьмем выражения (9.6):

$$[c^1\partial_x + c^2\partial_y + c^3\partial_z + c^4(x\partial_y - y\partial_x) + c^5(z\partial_x - x\partial_z) + c^6(y\partial_z - z\partial_y)]\Phi(x,y,z) = 0.$$

Введем для сокращения записи этого уравнения два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ со следующими проекциями: $a_x = c^1,\ a_y = c^2,\ a_z = c^3$ и $b_x = c^6,\ b_y = c^5,\ b_z = c^4$:

$$(\vec{a} + \vec{b} \times \vec{r})\mathrm{grad}\Phi(x,y,z) = 0, \tag{15.17}$$

где $\vec{b} \times \vec{r}$ – векторное произведение вектора $\vec{b}$ и радиуса-вектора $\vec{r}$ с проекциями x, y, z, причем постоянные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одновременно в нуль не обращаются.

При решении уравнения (15.17) будем различать такие два случая: **1.** $\vec{b} = 0$ и **2.** $\vec{b} \neq 0$. В первом случае вектор $\vec{a} \neq 0$ и поворотом системы координат его всегда можно направить, например, вдоль оси z, то есть $a_x = 0,\ a_y = 0,\ a_z = a \neq 0$. Тогда дифференциальное уравнение (15.17), принимая вид $\Phi_z = 0$, имеет, очевидно, два независимых решения

$$\Phi_1(x,y,z) = x - g,\ \ \Phi_2(x,y,z) = y - h, \tag{15.18}$$

определяющих уравнениями (13.4): $\Phi_1 = 0,\ \Phi_2 = 0$ прямую в пространстве, параллельную оси z. Учитывая возможность произвольного поворота и переноса, приходим к заключению, что циклами в трехмерном пространстве Евклида являются все прямые в нем, но не только они.

Во втором случае, когда $\vec{b} \neq 0$, поворотом системы координат направим вектор $\vec{b}$ вдоль оси z, так что $b_x = 0,\ b_y = 0,\ b_z = b \neq 0$. Введя затем удобные переобозначения постоянных в уравнении (15.17): $a_x/b = y_o,\ a_y/b = -x_o,\ a_z/b = h$, можно записать его в следующем виде: $-(y - y_o)\Phi_x + (x - x_o)\Phi_y + h\Phi_z = 0$. Это уравнение имеет два независимых решения, которые находятся методом характеристик:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) &= (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2, \\ \Phi_2(x,y,z) &= z - h \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{y - y_o}{x - x_o}\right) - g, \end{aligned}\right\} \tag{15.19}$$

оперделяющих в пространстве Евклида уравнениями (13.4) винтовую линию радиуса R и шага $2\pi h$, ось которой параллельна оси z. Если $h = 0$, то винтовая линия переходит в окружность. При $h > 0$ винтовая линия будет правой, а при $h < 0$ – левой. Поворотом и переносом ось винтовой линии можно совместить с любой направленной прямой в пространстве, то есть циклами в пространстве являются также и все винтовые линии, частным случаем которых при нулевом шаге будут плоские окружности.

Подводя итог, заключаем, что множество циклов в трехмерном евклидовом пространстве состоит из всех винтовых линий и всех прямых.

Попробуем теперь найти то же множество циклов в пространстве Евклида, решая второе функциональное уравнение (13.9):

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \psi(t_i - t_j), \qquad (15.20)$$

в котором $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ и $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \neq 0$.

Уравнение (15.20) продифференцируем по переменным t_i и t_j, после чего сложим результаты дифференцирования, сокращая на общий множитель "2":

$$(x_i - x_j)(x_i' - x_j') + (y_i - y_j)(y_i' - y_j') + (z_i - z_j)(z_i' - z_j') = 0. \qquad (15.21)$$

При решении полученного функционально-дифференциального уравнения, как и при решении дифференциального уравнения (15.17), используем повороты в пространстве Евклида, сохраняющие его метрику и дающие возможность ограничиться рассмотрением следующих четырех случаев: **1.** $x_i' - x_j' = 0,\ y_i' - y_j' = 0,\ z_i' - z_j' = 0$; **2.** $x_i' - x_j' = 0,\ y_i' - y_j' = 0,\ z_i' - z_j' \neq 0$; **3.** $x_i' - x_j' = 0,\ y_i' - y_j' \neq 0,\ z_i' - z_j' \neq 0$; **4.** $x_i' - x_j' \neq 0,\ y_i' - y_j' \neq 0,\ z_i' - z_j' \neq 0$.

Для первого случая, когда равны нулю все три разности производных, опуская у них нижние индексы i и j, получаем простую систему дифференциальных уравнений: $x' = a,\ y' = c,\ z' = g$, интегрируя которую приходим к параметрическому заданию прямой:

$$x = at + b,\ y = ct + d,\ z = gt + h, \qquad (15.22)$$

где $a^2 + c^2 + g^2 \neq 0$. Функции (15.22) являются решениями и исходного функционального уравнения (15.20), так как при их подстановке в него его правая часть будет такой: $\psi(t_i - t_j) = (a^2 + c^2 + g^2)(t_i - t_j)^2$ и потому все прямые в пространстве Евклида являются циклами.

Второй случай, когда равны нулю только две разности производных, на самом деле не может реализоваться, так как он противоречит уравнению (15.21), которое редуцируется к виду $(z_i - z_j)(z_i' - z_j') = 0$, что невозможно при $z_i' - z_j' \neq 0$ и следующего отсюда неравенства $z_i - z_j \neq 0$.

В третьем случае, когда обращается в ноль только одна разность производных: $x_i' - x_j' = 0$, в уравнении (15.21), а именно: $(y_i - y_j)(y_i' - y_j') + (z_i - z_j)(z_i' - z_j') = 0$, обе их разности отличны от нуля. В результате имеем систему из двух функционально-дифференциальных уравнений, причем второе идентично уравнению (15.12) с его решением (15.15). Решения

$$x = ht + g,\ y = R\cos t + y_o,\ z = R\sin t + z_o \qquad (15.23)$$

этой системы задают в пространстве винтовую линию радиуса R и шага $2\pi h$, ось которой параллельна оси x. Функции (15.23) являются также решениями исходного функционального уравнения (15.20), поскольку его правая часть при их подстановке будет следующей: $\psi(t_i - t_j) = h^2(t_i - t_j)^2 + 2R^2(1 - \cos(t_i - t_j))$.

Если учесть такие движения как поворот и перенос, то можно утверждать, что любая винтовая линия, в частности, плоская окружность при $h = 0$, является циклом пространства Евклида.

Четвертый случай, когда все три разности производных в уравнении (15.21) отличны от нуля, оказывается наиболее сложным. Заметим, что в данном случае цикл не может быть плоской кривой, так как поворотом системы координат одну из ее осей можно направить перпендикулярно этой плоскости. Но тогда соответствующая координата цикла будет постоянной и для нее в уравнении (15.21) разность производных будет равна нулю, в противоречие со сделанным предположением.

Продифференцируем уравнение (15.21) одновременно по переменным t_i и t_j:

$$x_i'x_j'' + x_i''x_j' + y_i'y_j'' + y_i''y_j' + z_i'z_j'' + z_i''z_j' = 0,$$

затем разделим его на произведение $z_i' \cdot z_j'$, которое при $z_i' - z_j' \neq 0$, очевидно, отлично от нуля, после чего еще раз продифференцируем результат по тем же переменным:

$$\left(\frac{x_i'}{z_i'}\right)' \cdot \left(\frac{x_j''}{z_j'}\right)' + \left(\frac{x_i''}{z_i'}\right)' \cdot \left(\frac{x_j'}{z_j'}\right)' + \left(\frac{y_i'}{z_i'}\right)' \cdot \left(\frac{y_j''}{z_j'}\right)' + \left(\frac{y_i''}{z_i'}\right)' \cdot \left(\frac{y_j'}{z_j'}\right)' = 0.$$

Если $(y'/z')' = 0$, то $y = az + b$ и цикл лежит в плоскости. Поэтому должно быть $(y'/z')' \neq 0$ и последний результат можно разделить на ненулевое произведение $(y_i'/z_i')' \cdot (y_j'/z_j')'$, после чего продифференцируем его по переменным t_i и t_j:

$$\left[\left(\frac{x_i'}{z_i'}\right)' / \left(\frac{y_i'}{z_i'}\right)'\right]' \cdot \left[\left(\frac{x_j''}{z_j'}\right)' / \left(\frac{y_j'}{z_j'}\right)'\right]' + \left[\left(\frac{x_i''}{z_i'}\right)' / \left(\frac{y_i'}{z_i'}\right)'\right]' \cdot \left[\left(\frac{x_j'}{z_j'}\right)' / \left(\frac{y_j'}{z_j'}\right)'\right]' = 0.$$

Если $[(x'/z')'/(y'/z')']' = 0$, то после интегрирования имеем $x = ay + bz + \beta$ и цикл лежит в плоскости. Таким образом, $[(x'/z')'/(y'/z')']' \neq 0$ и тогда должно быть $[(x''/z')'/(y'/z')']' = 0$, откуда после интегрирования $x' = ay + bz + \beta$. Аналогичные выражения получаются в четвертом случае и для производных y' и z'. В итоге возникает система трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x' = ay + bz + \beta, \; y' = cx + dz + \gamma, \; z' = gx + hy + \delta, \tag{15.24}$$

причем $a^2 + b^2 \neq 0, \; c^2 + d^2 \neq 0, \; g^2 + h^2 \neq 0$, так как производные x', y', z' не являются константами.

Подставим выражения (15.24) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (15.21):

$$p(x_i - x_j)(y_i - y_j) + q(x_i - x_j)(z_i - z_j) + r(y_i - y_j)(z_i - z_j) = 0, \tag{15.25}$$

где $p = a + c, \; q = b + g, \; r = d + h$.

Если $p = q = r = 0$, то из уравнений (15.24) получаем $dx' + gy' + az' = \text{const}$ и при повороте системы координат, таком, что одна из координат определится выражением, пропорциональным $dx + gy + az$, ее производная будет постоянной, в противоречие с предположением для четвертого случая. Если же, например, $p = q = 0$, а $r \neq 0$, то из соотношения (15.25) приходим к противоречию: $r(y_i - y_j)(z_i - z_j) = 0$, хотя все три сомножителя отличны от нуля. Если же $p = 0$, а $q \neq 0$ и $r \neq 0$, то из соотношения (15,25) после сокращения на ненулевую разность $z_i - z_j$ получаем $q(x_i - x_j) + r(y_i - y_j) = 0$, то есть $qx + ry = \text{const}$ и цикл оказывается плоской кривой. Если же, наконец, в соотношении (15.25) отличны от нуля все три коэффициента p, q, r, то дифференцируя его, как обычно по переменным t_i и t_j в естественных для четвертого случая следствиях: $z' \neq 0$, $(y'/z')' \neq 0$ и $(x'/z')' \neq 0$ приходим к противоречию: $(x'/z') \cdot (y'/z')' = 0$.

Итак, решениями второго функционального уравнения (15.20) также устанавливается, что множество циклов в трехмерном евклидовом пространстве состоит из всех винтовых линий и всех прямых.

Для того, чтобы записать систему трех функциональных уравнений (13.10) на цикл в евклидовом пространстве, необходимо явное задание уравнений шестимерной группы его движений. Как известно произвольное собственное движение составляется из трех параллельных переносов вдоль трех осей и трех вращений вокруг них. Например, поворот на угол φ вокруг оси z задается слудующими уравнениями:

$$x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi, \; y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi, \; z' = z$$

и аналогично для других двух осей x и y. Уравнения системы (13.10) дифференцируем по параметру α однопараметрической группы движений, после чего приравниваем его нулю. В результате для радиуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точки цикла с проекциями $x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\vec{r'} = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{r}, \tag{15.26}$$

в котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одновременно в ноль не обращаются. Заметим, что правая часть уравнения (15.26) совпадает с коэффициентом в левой части уравнения (15.17) и это, конечно, не случайно.

Предположим сначала, что $\vec{b} = 0$. Уравнение (15.26) становится совсем простым: $\vec{r'} = \vec{a}$ и его решение

$$\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c} \tag{15.27}$$

задает в евклидовом пространстве прямую, параллельную ненулевому вектору $\vec{a}$. Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ произвольны, получаем все множество прямых, которые являются циклами, но, как мы уже знаем, не только они.

Если же вектор $\vec{b}$ отличен от нуля, то поворотом системы кординат направим его вдоль оси z, что значительно упростит векторное уравнение (15.26), которое запишем ниже по его проекциям на оси координат:

$$x' = a_x, \; y' = a_y - bz, \; z' = a_z + by.$$

Решение этих уравнений легко находится: $x = a_x t + c, \; y = R\cos(bt + \beta) - a_z/b, \; z = R\sin(bt + \beta) + a_y/b$. Произведя в этом решении удобные замены параметра t и констант, можем записать его выражениями (15.23), задающими винтовую линию радиуса R и шага $2\pi h$, ось которой параллельна координатной оси x. Ясно, что поворотами и переносами в пространстве Евклида ось винтовой линии можно совместить с любой направленной прямой.

Таким образом, и по результатам решения системы функциональных уравнений (13.10) однозначно устанавливается, что в трехмерном евклидовом пространстве множество циклов состоит из всех винтовых линий и всех прямых.

Пример 3. В трехмерном евклидовом пространстве с метрической функцией (15.16) найти циклические поверхности различного типа (евклидовые, сферические, симплектические и т.д.).

Указание к решению. Запишем соответствующее функциональное уравнение (14.10) на циклическую поверхность:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \psi(f(u_i, v_i, u_j, v_j), \qquad (15.28)$$

где, например, $x_i = x(u_i, v_i)$, а f справа – метрическая функция двумерной феноменологически симметричной геометрии по списку (3.4)–(3.14) с заменой обозначений координат x и y двумерного многообразия соответственно на параметры u и v циклической поверхности .

Для евклидовой циклической поверхности в уравнение (15.28) надо подставить метрическую функцию (3.4) плоскости Евклида:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \psi((u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2). \qquad (15.29)$$

Одним из решений этого уравнения, как легко проверить, являются функции:

$$x = a_x u + b_x v + c_x,\ y = a_y u + b_y v + c_y,\ z = a_z u + b_z v + c_z, \qquad (15.30)$$

где $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ – единичные ортогональные векторы, а вектор $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ – произвольный.

Параметрическими уравнениями (15.30) в пространстве Евклида задается евклидовая плоскость, перпендикулярная векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$ и параллельная той плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторная запись уравнения этой плоскости будет, очевидно, следующей: $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{r} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \mathrm{const}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор ее произвольной точки. Другие решения еще не найдены, так как пока не наработаны общие методы решения как исходного функционального уравнения (14.10), так и его частных случаев (15.28) и (15.29). Повидимому, других решений, кроме (15.30), функциональное уравнение (15.29) не имеет, то есть плоскость в пространстве Евклида является единственной евклидовой циклической поверхностью, но это надо доказать.

Для сферической циклической поверхности в пространстве Евклида в уравнение (15.28) надо подставить метрическую функцию (3.5) единичной сферы:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \psi(\sin v_i \sin v_j \cos(u_i - u_j) + \cos v_i \cos v_j). \qquad (15.31)$$

Одним из решений этого уравнения, в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой, являются функции

$$x = R \sin v \cos u + x_o,\ y = R \sin v \sin u + y_o,\ z = R \cos v + z_o. \qquad (15.32)$$

Параметрическими уравнениями (15.32) в трехмерном евклидовом пространстве задается двумерная сфера радиуса R с центром в точке (x_0, y_o, z_o). Возможно, других решений, отличных от (15.32), уравнение (15.31) не имеет.

Для симплектической циклической поверхности в уравнение (15.28) надо подставить метрическую функцию (3.9) симплектической плоскости:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \psi(u_i v_j - u_j v_i). \tag{15.33}$$

По-видимому, уравнение (15.33) вообще не имеет решений, то есть в трехмерном пространстве Евклида нет циклических поверхностей симплектического типа.

В заключение отметим, что, поскольку еще не разработаны методы решения функционального уравнения (15.28), выводы, сделанные в отношении уравнений (15.29), (15.31) и (15.33), носят предварительный характер.

Задача 1. Для следующих двумерных геометрий с метрическими функциями: **(3.5)** – двумерной сферы; **(3.6)** – плоскости Лобачевского; **(3.7)** – плоскости Минковского; **(3.8)** – однополостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; **(3.9)** – симплектической плоскости; **(3.10)** – симплициальной плоскости; **(3.11)** – псевдогельмгольцевой плоскости; **(3.12)** – дуальногельмгольцевой плоскости; **(3.13)** – плоскости Гельмгольца; **(3.14)** – двумерной геометрии на несвязном многообразии *найти* все циклы, решая отдельно каждое из функциональных уравнений (12.3), (12.10), (12.12) и сопоставляя получаемые результаты. Для каждого цикла найти ту однопараметрическую группу движений, относительно которой он сохраняется, являясь ее инвариантной траекторией.

Указание к решению. Ознакомиться в деталях с методом решения функциональных уравнений (15.4), (15.5), (15.6), рассмотренных в примере 1, как частных случаев функциональных уравнений (12.3), (12.10), (12.12) соответственно для евклидовой плоскости. Модифицировать этот метод для двумерной геометрии, циклы которой необходимо найти.

Задача 2. Для следующих трехмерных геометрий с метрическими функциями: **(4.7)** – трехмерной сферы; **(4.8)** – пространства Лобачевского; **(4.9)** – пространства Минковского; **(4.10)** – трехмерного гиперболоида I; **(4.11)** – трехмерного гиперболоида II; **(4.12)** – симплектического пространства; **(4.13)** – симплициального пространства; **(4.14)** – особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Минковского; **(4.15)** – особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Евклида; **(4.16)** – псевдогельмгольцева пространства; **(4.17)** – дуальногельмгольцева пространства; **(4.18)** – пространства Гельмгольца *найти* множество всех циклов.

Указание к решению. Проанализировать метод нахождения циклов трехмерного пространства Евлкида, подробно описанный в примере 2. Из трех функциональных уравнений (13.6), (13.9). (13.10) на цикл трехмерной геометрии можно ограничиться рассмотрением какого-то одного, метод решения которого окажется наиболее простым.

Задача 3. Для следующих трехмерных геометрий с метрическими функциями: **(4.7)** – трехмерной сферы; **(4.8)** – пространства Лобачевского; **(4.9)** – пространства Минковского; **(4.10)** – трехмерного гиперболоида I; **(4.11)** – трехмерного гиперболоида II; **(4.12)** – симплектического пространства; **(4.13)** – симплициального пространства; **(4.14)** – особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Минковского; **(4.15)** – особого трехмерного феноменологически симметричного расширения плоскости Евклида; **(4.16)** – псевдогельмгольцева пространства; **(4.17)** – дуальногельмгольцева пространства; **(4.18)** – пространства Гельмгольца *найти* циклические поверхности различного типа (евклидовые, сферические, симплектические и т.д.).

Указание к решению. Задача сводится к решению функциональных уравнений (14.4), (14.10), (14.11). Соответствующие методы находятся еще в стадии разработки. Следует выбрать из этих трех уравнений то, для которого метод окажется наиболее простым. Полезно предварительно ознакомиться с решением аналогичной задачи определения циклических поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, рассмотренной в примере 3. Тип циклической поверхности определяется метрической функцией двумерной геометрии, которая, с одной стороны, индуцируется метрической функцией объемлющей трехмерной геометрии, а с другой с точностью до масштабного пребразования определяется одним из канонических выражений классификационного списка (3.4)–(3.14). Наглядно последнее обстоятельство отражено в строении второго функционального уравнения (14.10) на циклическую поверхность, в которое входят обе метрические функции.

Задача 4. Для следующих четырехмерных феноменологически симметричных геометрий ранга шесть с метрическими функциями:

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 + (u_i - u_j)^2, \qquad \mathbf{(15.34)}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (u_i - u_j)^2, \qquad \mathbf{(15.35)}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2 - (u_i - u_j)^2, \qquad \mathbf{(15.36)}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2] \exp(u_i + u_j), \qquad \mathbf{(15.37)}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2] \exp(u_i + u_j), \qquad \mathbf{(15.38)}$$

$$\begin{aligned} f(ij) = \sin u_i \sin u_j [&\sin z_i \sin z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ &+ \cos y_i \cos y_j) + \cos z_i \cos z_j] + \cos u_i \cos u_j, \end{aligned} \qquad \mathbf{(15.39)}$$

$$\begin{aligned} f(ij) = \mathrm{ch} u_i \mathrm{ch} u_j [&\sin z_i \sin z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ &+ \cos y_i \cos y_j) + \cos z_i \cos z_j] - \mathrm{sh} u_i \mathrm{sh} u_j, \end{aligned} \qquad \mathbf{(15.40)}$$

$$\begin{aligned} f(ij) = \mathrm{sh} u_i \mathrm{sh} u_j [&\sin z_i \sin z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ &+ \cos y_i \cos y_j) + \cos z_i \cos z_j] - \mathrm{ch} u_i \mathrm{ch} u_j, \end{aligned} \qquad \mathbf{(15.41)}$$

$$\begin{aligned} f(ij) = \mathrm{ch} u_i \mathrm{ch} u_j [&\mathrm{ch} z_i \mathrm{ch} z_j (\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ &+ \cos y_i \cos y_j) - \mathrm{sh} z_i \mathrm{sh} z_j] - \mathrm{sh} u_i \mathrm{sh} u_j, \end{aligned} \qquad \mathbf{(15.42)}$$

$$f(ij) = \mathrm{sh}u_i \mathrm{sh}u_j[\mathrm{ch}z_i \mathrm{ch}z_j(\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \\ + \cos y_i \cos y_j) - \mathrm{sh}z_i \mathrm{sh}z_j] - \mathrm{ch}u_i \mathrm{ch}u_j, \quad \textbf{(15.43)}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i u_j - u_j z_i \quad \textbf{(15.44)}$$

найти множество всех циклов.

Указание к решению. Цикл в его явном параметрическом задании

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ u = u(t)$$

является решением метрического функционального уравнения

$$f(x(t_i), y(t_i), z(t_i), u(t_i), x(t_j), y(t_j), z(t_j), u(t_j)) = \psi(t_i - t_j), \quad (15.45)$$

удовлетворяющим условию гладкости $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + (u')^2 \neq 0$. Это уравнение аналогично уравнению (15.20), рассмотренному в примере 1, метод решения которого следует предварительно во всех деталях изучить.

ГЛАВА IV. Двуметрические геометрии

§16. Плоскость термодинамических состояний

Рассмотрим некоторую термодинамическую систему. Пусть ее состояние i задается двумя термодинамическими параметрами – энтропией S_i и температурой T_i. Тогда все множество состояний представляет собой числовую плоскость. Каждой паре состояний $<ij>$ сопоставим два числа, равные двум количествам тепла $Q^{TS}(ij)$ и $Q^{ST}(ij)$, которые система отдает внешним телам при ее переходе из начального состояния i в конечное состояние j по двум различным путям TS и ST, состоящим из равновесных изотермического ($T = \mathrm{const}$) и адиабатического ($S = \mathrm{const}$) процессов:

$$\left.\begin{aligned} Q^{TS}(ij) = (S_i - S_j)T_i, \\ Q^{ST}(ij) = (S_i - S_j)T_j\ . \end{aligned}\right\} \tag{16.1}$$

Двухкомпонентная тепловая функция $Q = (Q^{TS}, Q^{ST})$ с выражениями (16.1) для ее компонент задает на плоскости термодинамических состояний (S,T) двуметрическую геометрию, которая, подобно евклидовой геометрии, задаваемой на координатной плоскости (x, y) метрической функцией (В.1), наделена одновременно феноменологической и групповой симметриями.

Возьмем три произвольные состояния i, j, k. Тогда дополнительно к двум количествам тепла (16.1) можно выписать еще четыре: $Q^{TS}(ik)$, $Q^{ST}(ik)$ и $Q^{TS}(jk)$, $Q^{ST}(jk)$ для пар состояний $<ik>$ и $<jk>$. Из этих шести количеств тепла можно исключить все шесть параметров S_i, T_i, S_j, T_j, S_k, T_k трех состояний i, j, k, в результате чего получаются две функциональные связи между ними, задаваемые двумя независимыми уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -Q^{ST}(ij) & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ij) & 0 & -Q^{ST}(jk) \\ Q^{TS}(ik) & Q^{TS}(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} Q^{TS}(ij) & Q^{TS}(jk) & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ik) & 0 & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ik) & -Q^{ST}(ij) & -Q^{ST}(jk) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

Соотношения (16.2), справедливые для любой тройки состояний $<ijk>$, выражают феноменологическую ранга три симметрию двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости термодинамических состояний (S,T) двухкомпонентной тепловой функцией (16.1).

Группа движений функции (16.1) состоит из всех тех преобразований

$$S' = \lambda(S,T),\ T' = \sigma(S,T), \tag{16.3}$$

плоскости (S,T), которые удовлетворяют двум функциональным уравнениям, являющимся следствиями инвариантности ее компонент:

$$\left.\begin{array}{r}(\lambda(i)-\lambda(j))\sigma(i)=(S_i-S_j)T_i,\\(\lambda(i)-\lambda(j))\sigma(j)=(S_i-S_j)T_j\ ,\end{array}\right\} \tag{16.4}$$

Решения этих уравнений легко находятся с помощью дифференцирования и последующего разделения переменных:

$$\lambda(S,T)=aS+b,\ \sigma(S,T)=T/a, \tag{16.5}$$

где $a>0$.

Множество всех преобразований (16.3) с решениями (16.5) является полной группой движений двухкомпонентной функции (16.1), выражая групповую симметрию двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости термодинамических состояний (S,T) этой функцией.

§17. Феноменологическая и групповая симметрии двуметрических двумерных геометрий

Двуметрическая двумерная геометрия задается на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ двухкомпонентной метрической функцией $f=(f^1,f^2)$, сопоставляющей любой паре $<ij>$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f\subseteq\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ некоторые два действительных числа $f(ij)=(f^1(ij),f^2(ij))\in R^2$. Как обычно предполагается, что область определения $\mathfrak{S}_f$ метрической функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ множество.

Если x,y – локальные координаты в $\mathfrak{M}$, то ее координатное представление

$$f(ij)=f(x_i,y_i,x_j,y_j), \tag{17.1}$$

или в более подробной записи по компонентам:

$$\left.\begin{array}{r}f^1(ij)=f^1(x_i,y_i,x_j,y_j),\\f^2(ij)=f^2(x_i,y_i,x_j,y_j),\end{array}\right\} \tag{17.1$'$}$$

является гладкой функцией координат x_i,y_i и x_j,y_j, которые должны входить в нее существенным образом. Последнее условие – невырожденность метрической функции $f=(f^1,f^2)$ – математически выражается двумя неравенствами:

$$\left.\begin{array}{l}\partial(f^1(ij),f^2(ij))/\partial(x_i,y_i)\neq 0,\\\partial(f^1(ij),f^2(ij))/\partial(x_j,y_j)\neq 0\end{array}\right\} \tag{17.2}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ множества пар $<ij>$. Ниже двухкомпонентную метрическую функцию (17.1), удовлетворяющую перечисленным выше трем условиям, будем называть *двуметрикой*.

Если двуметрика (17.1) задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга три, то для любой тройки $<ijk>$ из плотного и открытого в $\mathfrak{M}^3$ множества, такой что пары $<ij>, <ik>, <jk>$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$, шесть взаимных расстояний $f(ij)$, $f(ik)$, $f(jk)$ функционально связаны двумя независимыми уравнениями:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0, \tag{17.3}$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – двухкомпонентная функция шести переменных. В более подробной записи по компонентам имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(f^1(ij), f^2(ij), f^1(ik), f^2(ik), f^1(jk), f^2(jk)) = 0, \\ \Phi_2(f^1(ij), f^2(ij), f^1(ik), f^2(ik), f^1(jk), f^2(jk)) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{17.3$'$}$$

причем независимость этих уравнений означает, что $\mathrm{rang}\Phi = 2$.

Мы уже знаем, что феноменологическая симметрия геометрии тесно связана с ее групповой симметрией. В частности, плоскость термодинамических состояний, рассмотренная в предыдущем §16, с одной стороны, феноменологически симметрична с рангом три, а с другой – наделена групповой симметрией степени два. Оказывается, такое соотношение ранга одной симметрии и степени другой не случайно и является следствием их эквивалентности, аналогичной той, которая была установлена в §6 для однометрических геометрий. В самом деле, в нашем случае трехточечная жесткая фигура должна свободно двигаться с двумя степенями свободы и не более, так как ее положение задается шестью координатами, на которые наложены четыре связи, происходящие от сохранения шести расстояний, удовлетворяющих двум соотношениям (17.3$'$). Эквивалентность феноменологической и групповой симметрий двуметрических двумерных геометрий устанавливается тем же способом, каким она была установлена в §6 для однометрических двумерных геометрий, поэтому соответствующий результат сформулируем ниже без доказательства.

Теорема 1. *Для того, чтобы невырожденная двухкомпонентная метрическая функция $f = (f^1, f^2)$ задавала на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга три, необходимо и достаточно, чтобы она задавала на том же многообразии двуметрическую двумерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени два.*

Таким образом, двуметрика (17.1) феноменологически симметричной ранга три двумерной геометрии допускает двухпараметрическую группу движений, то есть таких эффективных гладких локальных действий в плоскости некоторой локальной группы Ли G^2:

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2), \quad y' = \sigma(x, y; a^1, a^2), \tag{17.4}$$

что каждая компонента двуметрики сохраняется:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{17.5}$$

где $(a^1, a^2) \in G^2$ и, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i; a^1, a^2)$.

§18. Классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий

Запишем базисные векторные поля X_1, X_2 двумерной алгебры Ли локальных преобразований (17.4) двумерного многообразия $\mathfrak{M}$ в операторной форме:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \lambda_1(x,y)\partial_x + \sigma_1(x,y)\partial_y, \\ X_2 = \lambda_2(x,y)\partial_x + \sigma_2(x,y)\partial_y, \end{array}\right\} \tag{18.1}$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$ и, например, $\lambda_1(x,y) = \partial\lambda(x,y;a^1,a^2)/\partial a^1|_{a^1=a^2=0}$, предполагая, что при $a^1 = a^2 = 0$ имеем тождественное преобразование в группе (17.4). Двуметрика (17.1), будучи по равенству (17.5) двухточечным инвариантом группы преобразований (17.4), необходимо является решением следующей системы двух дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0. \end{array}\right\} \tag{18.2}$$

с операторами (18.1).

В отношении системы двух уравнений (18.2) необходимо повторить замечание, сделанное ранее в отношении уравнений (8.1). Алгебры Ли преобразований окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ изоморфны с точностью до совпадения структурных констант в соответствующих базисах. Но базисые операторы $X_1(i)$, $X_2(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$ не обязательно переходят друг в друга при некотором диффеоморфизме $U(i) \to U(j)$. В частности, это может быть тогда, когда точки i и j принадлежат различным несвязным компонентам многообразия, в котором действует группа G^2. Поэтому в уравнениях (18.2) операторы X_1, X_2 для точек i и j могут задаваться выражениями, не сводимыми друг к другу заменой координат, если имеются изоморфные, но различные действия (17.4) группы G^2 в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$.

В свое время (1893) Софус Ли дал полную классификацию конечномерных локальных групп преобразований плоскости [14]. Из этой классификации можно выделить базисные операторы (18.1) всех двумерных алгебр Ли преобразований плоскости. Полезно, однако, провести эту простую классификацию способом, отличным от использованного С.Ли, рассматривая двумерную алгебру Ли преобразований плоскости как представление двумерной абстрактной вещественной алгебры Ли операторами (18.1).

Лемма 1. *С точностью до изоморфизма имеются всего две двумерные абстрактные вещественные алгебры Ли. В некотором базисе X_1, X_2 коммутатор $[X_1, X_2]$ либо равен нулю, либо отличен от нуля и равен X_1:*

$$[X_1, X_2] = 0, \tag{18.3}$$

$$[X_1, X_2] = X_1. \tag{18.4}$$

Действительно, пусть $[X_1, X_2] = aX_1 + bX_2$. Тогда в случае $a^2 + b^2 = 0$ имеем первое коммутационное соотношение (18.3): $[X_1, X_2] = 0$. Если же $a^2 + b^2 \neq 0$, то, переходя к новому базису алгебры по формулам: $X_1' = (aX_1 + bX_2)/(a^2 + b^2)$, $X_2' = (-bX_1 + aX_2)/(a^2 + b^2)$, получаем, как легко проверить, второе коммутационное соотношение (18.4): $[X_1', X_2'] = X_1'$.

Лемма 2. *Базисные операторы* (18.1) *двумерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований двумерного многообразия, имеющей в этом базисе структуру коммутационных соотношений* (18.3), (18.4), *в надлежаще выбранной системе локальных координат* (x, y) *задаются следующими выражениями*:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x; \tag{18.3.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y; \tag{18.3.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x; \tag{18.4.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + \partial_y. \tag{18.4.2}$$

Осуществим в выражениях (18.1) для операторов X_1, X_2 обратимую замену локальных координат

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

в которой $\partial(\varphi, \psi)/\partial(x, y) \neq 0$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (\lambda_1\varphi_x + \sigma_1\varphi_y)\partial_\xi + (\lambda_1\psi_x + \sigma_1\psi_y)\partial_\eta, \\ X_2 &= (\lambda_2\varphi_x + \sigma_2\varphi_y)\partial_\xi + (\lambda_2\psi_x + \sigma_2\psi_y)\partial_\eta. \end{aligned}\right\}$$

Если функции φ и ψ взять из решений интегрируемых уравнений $\lambda_1\varphi_x + \sigma_1\varphi_y = 1$ и $\lambda_1\psi_x + \sigma_1\psi_y = 0$, где $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 \neq 0$, так как базисный оператор X_1 ненулевой, то для него получим максимально простое выражение: $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, а также опуская в выражении для оператора X_2 ставший излишним индекс "2", можем записать:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \lambda(x, y)\partial_x + \sigma(x, y)\partial_y. \tag{18.5}$$

Заметим, что полученные выражения (18.5) допускают замену координат

$$\xi = x + \varphi(y), \quad \eta = \psi(y) \tag{18.6}$$

с $\psi' \neq 0$, которая сохраняет за оператором X_1 его максимально простую форму.

Подставим сначала операторы (18.5) в коммутатор (18.3): $\lambda_x \partial_x + \sigma_x \partial_y = 0$, откуда, в силу линейной независимости операторов дифференцирования ∂_x и ∂_y, следует, что $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 0$, то есть $\lambda(x,y) = \lambda(y)$, $\sigma(x,y) = \sigma(y)$, и потому $X_2 = \lambda(y)\partial_x + \sigma(y)\partial_y$. Далее осуществим допустимую замену координат (18.6):

$$X_2 = (\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\psi'(y)\partial_\eta.$$

Если $\sigma(y) = 0$, то $X_2 = \lambda(y)\partial_\xi$, причем $\lambda'(y) \neq 0$, так как операторы X_1 и X_2 линейно независимы. Полагая $\psi(y) = \lambda(y)$ и возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем выражения (18.3.1) для базисных операторов X_1, X_2 первого представления алгебры (18.3). Если же $\sigma(y) \neq 0$, то пусть функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ замены координат (18.6) являются решениями уравнений $\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$ и $\sigma(y)\psi'(y) = 1$. Тогда в прежних обозначениях координат получим выражения (18.3.2) для базисных операторов X_1, X_2 второго представления алгебры (18.3).

Подставим теперь операторы (18.5) в коммутатор (18.4): $\lambda_x \partial_x + \sigma_x \partial_y = \partial_x$, откуда следует: $\lambda_x = 1$, $\sigma_x = 0$ и после интегрирования: $\lambda(x,y) = x + \lambda(y)$, $\sigma(x,y) = \sigma(y)$. Для оператора X_2 теперь имеем выражение $X_2 = (x + \lambda(y))\partial_x + \sigma(y)\partial_y$, в котором произведем допустимую замену координат (18.6):

$$X_2 = (x + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\psi'(y)\partial_\eta.$$

Если $\sigma(y) = 0$, то $X_2 = (x + \lambda(y))\partial_\xi$. Полагая $\varphi(y) = \lambda(y)$, в прежних обозначениях координат получаем выражения (18.4.1) для базисных операторов X_1, X_2 первого представления алгебры (18.4). Если же $\sigma(y) \neq 0$, то функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ можно взять из решений уравнений $\lambda(y) - \varphi(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$ и $\sigma(y)\psi'(y) = 1$. В этом случае, возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем выражения (18.4.2) для базисных операторов X_1, X_2 второго представления алгебры (18.4). Лемма 2 доказана,

Результаты, сформулированные в лемме 2, совпадают с соответствующими результатами С.Ли, извлеченными из его полной классификации [14]. Заметим, что такого совпадения могло бы и не быть, так как свою классификацию С.Ли проводил с точностью до подобия, допускающего не только замену координат в плоскости, но и переход к другому базису с сохранением структурных констант.

Теорема. *Сууществуют две и только две не сводимые друг к другу двуметрики $f = (f^1, f^2)$, задающие на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ простейшую феноменологически симметричную геометрию ранга три. С точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$, где $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) эти двуметрики могут быть представлены следующими каноническими выражениями:*

$$f^1(ij) = x_i - x_j, \quad f^2(ij) = y_i - y_j; \tag{18.7}$$

$$f^1(ij) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(ij) = (x_i - x_j)y_j. \tag{18.8}$$

Компоненты двуметрики $f = (f^1, f^2)$ являются независимыми решениями системы уравнений (18.2). Для базисных операторов (18.3.1) и (18.3.2) представлений алгебры Ли (18.3), учитывая замечание, сделанное после уравнений (18.2), можно записать только три принципиально различных системы:

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ y_i\partial f(ij)/\partial x_i + y_j\partial f(ij)/\partial x_j = 0; \end{aligned}\right\} \tag{18.9}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j = 0; \end{aligned}\right\} \tag{18.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ y_i\partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18.11}$$

ранг которых равен двум. Поскольку в уравнениях (18.9) и (18.11) отсутствует оператор дифференцирования $\partial/\partial y_i$, их независимыми решениями будут функции y_i и $\varphi(ij)$. То есть для двуметрики получаем выражение $f(ij) = f(y_i, \varphi(ij))$, где $f : R^2 \to R^2$. Поскольку для нее не выполняется второе из условий (17.2), такая двуметрика оказывается вырожденной. С другой стороны, два независимых решения системы (18.10), которые легко находятся методом характеристик, совпадают в своем явном координатном представлении с компонентами двуметрики (18.7). Эта двуметрика невырождена, так как оба якобиана из условия (17.2) равны единице для нее, то есть отличны от нуля.

Для базисных операторов (18.4.1) и (18.4.2) представлений алгебры (18.4) также имеем три принципиально различные системы уравнений (18.2):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ x_i\partial f(ij)/\partial x_i + x_j\partial f(ij)/\partial x_j = 0; \end{aligned}\right\} \tag{18.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ x_i\partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial y_i + \\ + x_j\partial f(ij)/\partial x_j + \partial f(ij)/\partial y_j = 0; \end{aligned}\right\} \tag{18.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ x_i\partial f(ij)/\partial x_i + x_j\partial f(ij)/\partial x_j + \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18.14}$$

ранг которых равен двум. Двуметрики, являющиеся решениями систем уравнений (18.12) и (18.14), в которых нет оператора $\partial/\partial y_i$, очевидно, вырождены. Общее решение $f(ij) = \chi(x_i - x_j, y_i, y_j)$ первого уравнения системы (18.13) подставим во второе: $u\chi_u + \chi_{y_i} + \chi_{y_j} = 0$, где $u = x_i - x_j$. Соответствующие уравнения характеристик $du/u = dy_i = dy_j$ имеют два независимых интеграла: $u\exp(-y_i) = \mathrm{const}$, $u\exp(-y_j) = \mathrm{const}$, по которым определяются компоненты двуметрики: $f(ij) = (f^1(ij), f^2(ij)) = ((x_i - x_j)\exp(-y_i),\ (x_i - x_j)\exp(-y_j))$. Произведя затем замену координат $x \to x$, $\exp(-y) \to y$, получаем двуметрику (18.8), которая невырождена, так как для нее якобианы (17.2) отличны от нуля.Теорема доказана.

Компоненты двуметрики (18.7) можно, например, интерпретировать проекциями вектора $\vec{ji}$ на координатные оси. Соответствующая функциональная связь (17.3) задается двумя независимыми уравнениями

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\ f^2(ij) - f^2(ik) + f^2(jk) = 0. \end{array}\right\}$$

Двуметрика (18.8) допускает содержательную физическую интерпретацию в термодинамике, рассмотренную подробно в §16. Соответствующая функциональная связь (17.3) задается двумя независимыми уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & -f^2(ij) & -f^2(ik) \\ f^1(ij) & 0 & -f^2(jk) \\ f^1(ik) & f^1(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} f^1(ij) & f^1(jk) & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & 0 & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & -f^2(ij) & -f^2(jk) \end{vmatrix} = 0. \end{array}\right\}$$

§19. Триметрические геометрии

В настоящем параграфе будут рассмотрены простейшие триметрические геометрии, а именно триметрические феноменологически симметричные геометрии ранга три, задаваемые на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ триметрикой – трехкомпонентной функцией $f = (f^1, f^2, f^3)$, которая каждой паре $<ij>$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляет три числа $f(ij) = (f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij)) \in R^3$.

Пусть x, y, z – локальные координаты в $\mathfrak{M}$. Для триметрики f в некоторой окрестности пары $<ij> \in \mathfrak{S}_f$ можно записать ее координатное представление:

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j). \tag{19.1}$$

невырожденность которой, то есть ее существенная зависимость от координат x_i, y_i, z_i и x_j, y_j, z_j точек i и j, означает необращение в нуль двух якобианов:

$$\left.\begin{array}{r} \partial(f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij))/\partial(x_i, y_i, z_i) \neq 0, \\ \partial(f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij))/\partial(x_j, y_j, z_j) \neq 0 \end{array}\right\} \tag{19.2}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множества пар $< ij >$.

Если невырожденная триметрика (19.1) задает на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга три, то найдется такая трехкомпонентная функция $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ от девяти переменных, что девять взаимных "расстояний"между точками открытого и плотного в $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^3$ множества троек $<ijk>$ функционально связаны тремя независимыми уравнениями

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0. \tag{19.3}$$

Триметрика (19.1) допускает трехпараметрическую группу движений:

$$\left.\begin{array}{r} x' = \lambda(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ y' = \sigma(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ z' = \tau(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \end{array}\right\} \tag{19.4}$$

относительно которой она является невырожденным двухточечным инвариантом, удовлетворяя следующему функциональному уравнению:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \tau(i), \lambda(j), \sigma(j), \tau(j)) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \tag{19.5}$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i, z_i; a^1, a^2, a^3)$. Вследствие локальной обратимости преоюразований (19.4) должно выполняться условие:

$$\partial(\lambda, \sigma, \tau)/\partial(x, y, z) \neq 0.$$

При специальном выборе параметров $a = (a^1, a^2, a^3)$, когда их нулевым значениям и только им соответствует в группе (19.4) тождественное преобразование $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование, близкое к тождественному, запишется следующим образом:

$$\left.\begin{array}{r} x' = x + \lambda_1(x, y, z)a^1 + \lambda_2(x, y, z)a^2 + \lambda_3(x, y, z)a^3, \\ y' = y + \sigma_1(x, y, z)a^1 + \sigma_2(x, y, z)a^2 + \sigma_3(x, y, z)a^3, \\ z' = z + \tau_1(x, y, z)a^1 + \tau_2(x, y, z)a^2 + \tau_3(x, y, z)a^3, \end{array}\right\} \tag{19.4$'$}$$

где, например, $\lambda_1 = (\partial\lambda/\partial a^1)|_{a=0}$.

Обозначим через

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \lambda_1(x, y, z)\partial_x + \sigma_1(x, y, z)\partial_y + \tau_1(x, y, z)\partial_z, \\ X_2 = \lambda_2(x, y, z)\partial_x + \sigma_2(x, y, z)\partial_y + \tau_2(x, y, z)\partial_z, \\ X_3 = \lambda_3(x, y, z)\partial_x + \sigma_3(x, y, z)\partial_y + \tau_3(x, y, z)\partial_z \end{array}\right\} \tag{19.6}$$

базисные операторы трехмерной алгебры Ли группы (19.4), взаимно однозначно связанные с инфинитезимальными преобразованиями (19.4$'$). Если в функциональное уравнение (19.5) подставить эти преобразования (19.4$'$), то, учитывая независимость параметров (a^1, a^2, a^3), для триметрики (19.1) получаем систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{array}{r} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0, \\ X_3(i)f(ij) + X_3(j)f(ij) = 0, \end{array}\right\} \tag{19.7}$$

с операторами (19.6). Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. [16], стр. 77) триметрика является двухточечным инвариантом группы (19.4) в том и только в том случае, если она является решением системы (19.7).

Заметим. что операторы $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ не обязательно переходят друг в друга при некотором локальном диффеоморфизме $U(i) \to U(j)$.

Таким образом, задача классификации триметрик (19.1) сводится к классификации трехмерных алгебр Ли преобразований трехмерного многообразия (локально пространства R^3) с базисными операторами (19.6) и к интегрированию соответствующих систем уравнений (19.7). Триметрика, являющаяся решением этой системы, должна быть невырожденной, то есть удовлетворять двум условиям (19.2). Вырожденность триметрики как совокупности трех независимых решений системы (19.7) в большинстве случаев можно установить до ее интегрирования, если использовать известные представления о транзитивности и интранзитивности групп преобразований. Группа преобразований называется локально *транзитивной*, если для любых двух точек из некоторой окрестности одной из них существует преобразование, не обязательно единственное, которое переводит первую точку во вторую. Если же такое преобразование существует не для любых двух точек, то группа называется *интранзитивной*.

Лемма 1. *Для того, чтобы трехпараметрическая группа Ли локальных преобразований трехмерного многообразия (пространства R^3) с базисными операторами* (19.6) *соответствующей алгебры Ли была локально транзитивной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1(x,y,z) & \sigma_1(x,y,z) & \tau_1(x,y,z) \\ \lambda_2(x,y,z) & \sigma_2(x,y,z) & \tau_2(x,y,z) \\ \lambda_3(x,y,z) & \sigma_3(x,y,z) & \tau_3(x,y,z) \end{Vmatrix} \tag{19.8}$$

был равен трем.

Достаточность очевидна. Действительно, если ранг матрицы (19.8) равен трем и ее определитель отличен от нуля, то для любых двух точек (x, y, z) и (x', y', z') из некоторой ее окрестности $U((x, y, z))$ три уравнения бесконечно малых преобразований (19.4′) однозначно разрешимы относительно параметров (a^1, a^2, a^3), задающих то преобразование, которое переведет точку (x, y, z) в точку (x', y', z').

Докажем теперь необходимость. Предположим противное, то есть что ранг матрицы (19.8) меньше трех. В этом случае между ее столбцами существует линейная связь с коэффициентами $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$, $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\lambda_1 + \beta\sigma_1 + \gamma\tau_1 = 0, \\ \alpha\lambda_2 + \beta\sigma_2 + \gamma\tau_2 = 0, \\ \alpha\lambda_3 + \beta\sigma_3 + \gamma\tau_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{19.9}$$

причем $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$. Умножая уравнения инфинитезимальных преобразований (19.4′) на коэффициенты α, β, γ соответственно и складывая их, получаем в координатах (x', y', z') уравнение плоскости

$$\alpha(x' - x) + \beta(y' - y) + \gamma(z' - z) = 0, \tag{19.10}$$

проходящей через точку (x, y, z). Таким образом, множество тех точек (x', y', z'), в которые может переходить точка (x, y, z), лежат на плоскости, задаваемой уравнением (19.10). То есть локально группа преобразований (19.4) с базисными операторами (19.6) соответствующей алгебры Ли будет интранзитивной, так как никакое ее преобразование не переведет точку (x, y, z) в ту точку окрестности $U((x, y, z))$, которая не лежит на плоскости, задаваемой уравнением (19.10). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если триметрика (19.1) невырождена, то базисные операторы $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ определяют транзитивные группы Ли преобразований окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ в локальной группе ее движений.*

Триметрика $f(ij) = (f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij))$ является совокупностью трех независимых решений системы уравнений (19.7), матрица коэффициентов которой

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1(i) & \sigma_1(i) & \tau_1(i) & \lambda_1(j) & \sigma_1(j) & \tau_1(j) \\ \lambda_2(i) & \sigma_2(i) & \tau_2(i) & \lambda_2(j) & \sigma_2(j) & \tau_2(j) \\ \lambda_3(i) & \sigma_3(i) & \tau_3(i) & \lambda_3(j) & \sigma_3(j) & \tau_3(j) \end{Vmatrix} \tag{19.11}$$

составлена из матриц (19.8) коэффициентов базисных операторов $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$.

Предположим сначала, что ранг матрицы (19.8) в окрестности $U(i)$ равен трем, а в окрестности $U(j)$ – меньше трех. В этом случае по лемме 1 группа преобразований окрестности $U(i)$ транзитивна, а группа преобразований окрестности $U(j)$ интранзитивна. В окрестности $U(j)$ введем такую систему координат, чтобы инвариантная плоскость (19.10) задавалась уравнением $z_j = \text{const}$. В выражениях (19.6) для операторов $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ тогда исчезнет оператор дифференцирования $\partial/\partial z_j$. Ранг матрицы (19.11) равен трем и потому система уравнений (19.7) имеет следующие три независимые решения: z_j, $\varphi(ij)$, $\psi(ij)$. Их число равно числу переменных ($= 6$) минус ранг матрицы системы ($= 3$). Общее выражение триметрики, построенное на этих решениях, будет следующим: $f(ij) = f(z_j, \varphi(ij), \psi(ij))$, где $f : R^3 \to R^3$. Но такая триметрика не удовлетворяет, очевидно, первому условию (19.2) и потому вырождена.

Пусть теперь ранг матрицы (19.8) в окрестности $U(i)$ равен двум, а в окрестности $U(j)$ меньше трех, так как случай, когда он равен трем, аналогичен рассмотренному выше. В окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ введем такие координаты, чтобы инвариантные плоскости (19.10) задавались уравнениями $z_i = \text{const}$ и $z_j = \text{const}$. Но тогда в выражениях (19.6) для операторов $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ будут отсутствовать операторы дифференцирования $\partial/\partial z_i$ и $\partial/\partial z_j$. С другой стороны, ранг матрицы (19.11) равен трем. Действительно, если предположить, что он равен двум, то любой определитель третьего порядка, содержащий три столбца этой матрицы, будет равен нулю. Поскольку по начальному предположению ранг матрицы (19.8) в окрестности $U(i)$ равен двум, легко получаем следующие три связи между компонентами матрицы (19.8) в окрестности $U(j)$:

$$\left.\begin{aligned} c_1(i)\lambda_1(j) + c_2(i)\lambda_2(j) + c_3(i)\lambda_3(j) = 0, \\ c_1(i)\sigma_1(j) + c_2(i)\sigma_2(j) + c_3(i)\sigma_3(j) = 0, \\ c_1(i)\tau_1(j) + c_2(i)\tau_2(j) + c_3(i)\tau_3(j) = 0, \end{aligned}\right\}$$

причем $c_1^2+c_2^2+c_3^2 \neq 0$. Фиксируя координаты точки i, получаем линейную связь строк матрицы (19.8) в окрестности $U(j)$ с постоянными коэффициентами. Но тогда будут линейно зависимы с постоянными коэффициентами базисные операторы $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$, что противоречит их линейной независимости. Таким образом, ранг матрицы (19.11) равен трем и система уравнений (19.7) имеет три и только три независимые решения: z_i, z_j, $\varphi(ij)$. Общий вид триметрики будет тогда следующим: $f(ij) = f(z_i, z_j, \varphi(ij))$, где $f : R^3 \to R^3$. Но для такой триметрики не выполняется ни одно из двух условий (19.2), то есть она оказывается вырожденной.

Предположим, наконец, что ранг матрицы (19.8) в окрестности $U(i)$ равен единице, то есть своему минимальному значению. В окрестности $U(j)$ пусть этот ранг тоже равен единице, так как случаи, когда он там равен трем или двум, аналогичны рассмотренным выше. Между столбцами матрицы (19.8), если ее ранг равен единице, существуют две независимые связи (19.9). А это означает, что множество точек (x', y', z'), в которые может переходить точка (x, y, z), лежит на пересечении двух различных плоскостей, задаваемых двумя линейно независимыми уравнениями типа (19.10), то есть на прямой, проходящей через точку (x, y, z). Введем такую систему координат в окрестности точки (x, y, z), чтобы соответствующая ей инвариантная прямая задавалась уравнениями $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. Но тогда в базисных операторах (19.6) явно будет присутствовать только оператор дифференцирования $\partial/\partial x$, а в матрице (19.8) будет отличен от нуля только первый столбец. Его элементы λ_1, λ_2, λ_3 должны быть отличны от нуля и линейно независимы с постоянными коэффициентами, поскольку исходные операторы (19.6) ненулевые и базисные. В матрице (19.11) будет всего два ненулевых столбца – первый и четвертый. То есть ранг ее заведомо меньше трех. Легко видеть, что он равен двум, так как, например, определитель из элементов матрицы (19.11), стоящих на пересечении первой, второй строк и первого, четвертого столбцов, отличен от нуля вследствие линейной независимости фунукций λ_1, λ_2, λ_3 с постоянными коэффициентами. Но тогда система (19.7) будет иметь следующие четыре и только четыре независимые решения: y_i, z_i, y_j, z_j, а общий вид триметрики будет задаваться выражением $f(ij) = f(y_i, y_j, z_i, z_j)$, где $f : R^4 \to R^3$, в котором отсутствуют координаты x_i и x_j. Ясно, что такая триметрика вырождена, поскольку она не удовлетворяет ни одному из условий невырожденности (19.2). Лемма 2 доказана полностью, так как выше были рассмотрены все возможные случаи, когда хотя бы одна из групп преобразований окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ интранзитивна.

Исчерпывающая классификация конечномерных локальных групп Ли локальных преобразований пространства еще не построена. Софус Ли в 1893г. нашел все конечномерные локальные группы преобразований плоскости [14]. Однако в отношении групп преобразований трехмерного пространства его результаты и результаты его последователей носят в основном предварительный и частный характер. Согласно лемме 2 невырожденные триметрики являются решениями системы уравнений (19.7), для которых операторы (19.6) как в окрестности $U(i)$, так и в окрестности $U(j)$ определяют *транзитивные* группы преобразований. Учитывая этот факт, приведем ниже без доказательства их классификацию по работе [19].

Теорема 1. *Базисные операторы* (19.6) *трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локально транзитивных преобразований трехмерного многообразия* (*пространства* R^3) *с точностью до изоморфизма и в надлежаще выбранной системе локальных координат* (x, y, z) *задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z; \tag{19.12}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{19.13}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{19.14}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y + \partial_z; \tag{19.15}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x+qy)\partial_y + \partial_z; \tag{19.16}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = \mathrm{tg}\, y \ \sin x \ \partial_x + \cos x \ \partial_y + \sec y \ \sin x \ \partial_z, \\ X_3 = \mathrm{tg}\, y \ \cos x \ \partial_x - \sin x \ \partial_y + \sec y \ \cos x \ \partial_z; \end{array}\right\} \tag{19.17}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = \sin x \ \partial_x + \cos x \ \partial_y + \exp y \ \sin x \ \partial_z, \\ X_3 = \cos x \ \partial_x - \sin x \ \partial_y + \exp y \ \cos x \ \partial_z, \end{array}\right\} \tag{19.18}$$

где $-1 \leqslant p \leqslant 1$, $0 \leqslant q < 2$.

Теорема 2. *С точностью до масштабного преобразования* $\psi(f) \to f$, *где* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, *и в надлежаще выбранной системе локальных координат* (x, y, z) *триметрика* $f = (f^1,\ f^2, f^3)$, *задающая на трехмерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *простейшую феноменологически симметричную геометрию ранга три, может быть представлена одним из следующих одиннадцати выражений:*

$$f^1(ij) = x_i - x_j,\ f^2(ij) = y_i - y_j,\ f^3(ij) = z_i - z_j; \tag{19.19}$$

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = y_i - y_j, \\ f^2(ij) = (x_i - x_j)y_i + z_i - z_j, \\ f^3(ij) = (x_i - x_j)y_j + z_i - z_j; \end{array}\right\} \tag{19.20}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= (x_i - x_j)^2\ \exp\left(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i,\ f^3(ij) = (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{19.21}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{19.22}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= (x_i - x_j)(y_i - y_j), \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{19.23}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= y_i - y_j, \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{19.24}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= \frac{(x_i - x_j)^p}{y_i - y_j}, \\ f^2(ij) &= (x_i - x_j)z_i, \\ f^3(ij) &= (x_i - x_j)z_j; \end{aligned}\right\} \tag{19.25}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \\ f^2(ij) &= z_i + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\ f^3(ij) &= z_j + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right); \end{aligned}\right\} \tag{19.26}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)\times \\ &\times \exp\left(2\gamma\operatorname{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\ f^2(ij) &= z_i + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \\ f^3(ij) &= z_j + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right); \end{aligned}\right\} \tag{19.27}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \\ f^2(ij) &= z_i - \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y_i}\right) \arcsin\left(\frac{\sin(x_i - x_j)\sin y_i}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right), \\ f^3(ij) &= z_j + \operatorname{sign}\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y_j}\right) \arcsin\left(\frac{\sin(x_i - x_j)\sin y_j}{\sqrt{1 - (f^1(ij))^2}}\right); \end{aligned}\right\} \tag{19.28}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) &= (x_i - x_j)y_i y_j, \\ f^2(ij) &= z_i + \frac{1}{(x_i - x_j)y_i^2}, \\ f^3(ij) &= z_j - \frac{1}{(x_i - x_j)y_j^2}, \end{aligned}\right\} \tag{19.29}$$

причем здесь $0 < |p| < 1$ *и* $0 < \gamma < \infty$, *где* $\gamma = q/\sqrt{4 - q^2}$ *при* $0 < q < 2$.

Доказательство теоремы 2, то есть получение всех триметрик (19.19)–(19.29), состоит в последовательном решении всех систем уравнений (19.7) с операторами (19.12)–(19.18) соответственно, что в техническом отношении особых трудностей не представляет. Поэтому результат, составляющий содержание теоремы 2, также приводится без доказательства.

Компоненты триметрики (19.19) можно интерпретировать проекциями вектора $\vec{ji}$ в трехмерном пространстве на координатные оси. Соответствующая функциональная связь (19.3) задается системой трех независимых уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\ f^2(ij) - f^2(ik) + f^2(jk) = 0, \\ f^3(ij) - f^3(ik) + f^3(jk) = 0. \end{array}\right\}$$

Триметрика (19.20) допускает содержательную физическую интерпретацию в термодинамике. Первую ее компоненту представим как разность температур T_i и T_j термодинамической системы в состояниях i и j, а вторую и третью – как работы $A^{TS}(ij)$ и $A^{ST}(ij)$ внешних тел над ней при ее переходе из состояния i в состояние j по двум путям, составленным из равновесных изотермического ($T = \mathrm{const}$) и адиабатического ($S = \mathrm{const}$) процессов:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = T_i - T_j, \\ f^2(ij) = A^{TS}(ij) = (S_i - S_j)T_i - U_i + U_j, \\ f^3(ij) = A^{ST}(ij) = (S_i - S_j)T_j - U_i + U_j, \end{array}\right\}$$

где S, T и U - энтропия, температура и внутренняя энергия системы. Соответствующая феноменологически симметричная функциональная связь (19.3) задается в этом случае тремя независимыми уравнениями:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\[2ex] \dfrac{f^2(ij) - f^3(ij)}{f^1(ij)} - \dfrac{f^2(ik) - f^3(ik)}{f^1(ik)} + \dfrac{f^2(jk) - f^3(jk)}{f^1(jk)} = 0, \\[2ex] \dfrac{f^3(ij) - f^3(ik) + f^2(jk)}{f^1(jk)} - \dfrac{f^2(ik) - f^3(ik)}{f^1(ik)} = 0. \end{array}\right\}$$

В термодинамике можно интерпретировать еще и компоненты триметрики (19.24) разностью температур и работами среды над системой при ее переходе из состояния i в состояние j по путям PV и VP, где P и V – давление и объем системы. Вопрос о физической и математической интерпретации остальных триметрик остается пока открытым. Их нетривиальные симметрии, групповая и феноменологическая, обуславливающие друг друга, дают основание надеяться, что такие интерпретации будут найдены и для других восьми триметрик классификационного списка (19.19)–(19.29).

§20. Некоторые примеры и задачи

В предыдущем §19 основная классификационная теорема 2 для триметрических геометрий была приведена без доказательства, детали которого имеет смысл рассмотреть в качестве примера и предложить как отдельную задачу.

Пример 1. Получить триметрику (19.20) как решение системы трех дифференциальных уравнений (19.7) с операторами (19.13).

Решение. Запишем систему уравнений (19.7) с операторами (19.13):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial x_j = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y_i + \partial f(ij)/\partial y_j = 0, \\ y_i \partial f(ij)/\partial x_i + \partial f(ij)/\partial z_i + \\ + y_j \partial f(ij)/\partial x_j + \partial f(ij)/\partial z_j = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20.1}$$

Общее решение первых двух уравнений системы (20.1) легко найти:

$$f(ij) = \theta(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i, z_j), \tag{20.2}$$

где θ – произвольная функция четырех переменных. Подставим это решение в третье уравнение системы (20.1): $v\theta_u + \theta_{z_i} + \theta_{z_j} = 0$, где $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$. Соответствующие уравнения характеристик: $du/v = dz_i = dz_j$ имеют следующие три независимые интеграла: $z_i - z_j = c_1$, $vz_i - u = c_2$, $vz_j - u = c_3$, с помощью которых можно выразить любое решение системы (20.1), так как ранг ее равен трем. Введя дополнительно удобную замену координат: $x \to -z$, $y \to x$, $z \to y$, получаем компоненты невырожденной триметрики (19.20), для которой якобианы (19.2), равные по модулю $|y_i - y_j|$, отличны от нуля.

Для двуметрических двумерных геометрий, так же как и для однометрических, естественно определяется цикл как инвариантная траектория некоторой однопараметрической группы движений, являющейся подгруппой полной группы движений, которая, напомним, двухпараметрическая. При неявном задании цикла уравнением $\Phi(x, y) = 0$ получаем на цикл функциональное уравнение (12.3). От него переходим к дифференциальному уравнению (12.4), в котором $X = c^1X_1 + c^2X_2$, где X_1, X_2 – базисные операторы двумерной алгебры Ли группы движений, причем эти операторы надо найти независимо по двуметрике, так при ее получении возможен был переход к другим координатам. При явном параметрическом задании цикла уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциональное уравнение на цикл двуметрических геометрий будет такими же как для однометрических, то есть это будет уравнение (12.10), в котором функции f и ψ двухкомпонентные, и система двух уравнений (12.12), в которых предварительно группу движенией надо определить по двуметрике, задающей соответствующую двумерную геометрию.

Пример 2. Найти все циклы двумерной геометрии, задаваемой на двумерном многообразии с локальными координатами x, y двухкомпонентной функцией

$$f^1(ij) = x_i - x_j, \ f^2(ij) = y_i - y_j, \tag{20.3}$$

то есть двуметрикой (18.7), а также те однопараметрические группы движений, относительно которых эти циклы являются инвариантными траекториями.

Решение. Группа движений двуметрики (18.7) находится как решение двух простейших функциональных уравнений

$$x'_i - x'_j = x_i - x_j,\ y'_i - y'_j = y_i - y_j$$

разделением переменных, относящихся к точкам i и j:

$$x' = x + c,\ y' = y + d, \tag{20.4}$$

причем выражения для базисных операторов X_1, X_2 соответствующей двумерной алгебры Ли легко находятся по конечным уравнениям (20.4):

$$X_1 = \partial/\partial x,\ X_2 = \partial/\partial y, \tag{20.5}$$

совпадая с выражениями (18.3.2).

Функциональное уравнение (12.3) для группы движений (20.4) будет таким: $\Phi(x + c(\alpha), y + d(\alpha)) = 0$. Дифференцируя его по параметру α однопараметрической подгруппы движений и полагая затем $\alpha = 0$, получаем дифференциальное уравнение (12.4) с оператором $X = c^1\partial_x + c^2\partial_y$:

$$c^1\Phi_x(x, y) + c^2\Phi_y(x, y) = 0,$$

в котором постоянные c^1 и c^2 одновременно в нуль не обращаются. Это уравнение решается методом характеристик. Интеграл соответствующего уравнения характеристик $dx/c^1 = dy/c^2$ легко находится: $c^2x - c^1y = \mathrm{const}$. Уравнение цикла после удобных переобозначений коэффициентов запишется в следующем виде:

$$ax + by + c = 0, \tag{20.6}$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$. Это уравнение, как и его дубликат (15.8), задает на плоскости прямую, которая переходит сама в себя при движениях (15.9).

Аналогом второго метрического функционального уравнения (12.10) на цикл для геометрии, задаваемой двуметрикой (20.3), будет следующая система:

$$x_i - x_j = \psi_1(t_i - t_j),\ y_i - y_j = \psi_2(t_i - t_j). \tag{20.7}$$

Дифференцируя уравнения (20.7) по параметрам t_i и t_j, устанавливаем равенство производных: $x'(t_i) = x'(t_j),\ y'(t_i) = y'(y_j)$, то есть $x' = \mathrm{const},\ y' = \mathrm{const}$. Согласуя обозначение этих констант с уравнением (20.6), параметрическое задание цикла запишем следующими уравнениями:

$$x = bt + h,\ y = -at + g, \tag{20.8}$$

дубликатом которых являются уравнения (15.13), задающие прямую на плоскости.

В заключение для двумерной геометрии с двуметрикой (20.3) запишем аналог системы функциональных уравнений (12.12):

$$x(t+\alpha)=x(t)+c(\alpha),\ y(t+\alpha)=y(t)+d(\alpha). \tag{20.9}$$

Дифференцируем эти уравнения по параметру α и полагаем $\alpha=0$. Вводя удобные обозначения постоянных, приходим к дифференциальным уравнениям $x'=b,\ y'=-a$, интегрируя которые возвращаемся к заданию цикла уравнениями (20.8). При их подстановке в функциональные уравнения (20.9), легко получаем однопараметрическую группу движений (15.9), относительно которой прямая (20.8) является инвариантной траекторией. Таким образом множество циклов двумерной геометрии, задаваемой двуметрикой (20.3) включает в себя только прямые.

Задача 1. Получить следующие девять триметрик: 1. – **(19.21)**; 2. – **(19.22)**; 3. – **(19.23)**; 4. – **(19.24)**; 5. – **(19.25)**; 6. – **(19.26)**; 7. – **(19.27)**; 8. – **(19.28)**; 9. – **(19.29)** как решения систем трех дифференциальных уравнений (19.7) с операторами: 1. – (19.14); 2. – (19.15) при $p=1$; 3. – (19.15) при $p=-1$; 4. – (19.15) при $p=0$; 5. – (19.15) при $0<|p|<1$; 6. – (19.16) при $q=0$; 7. – (19.16) при $0<q<2$; 8. – (19.17); 9. – (19.18) соответственно.

Указание к решению. Записать систему уравнений (19.7) с соответствующими операторами и решить ее, исходя из того, что ограничения на решение отдельного уравнения системы находятся при подстановке его в другие уравнения системы. Для освоения методов интегрирования системы дифференциальных уравнений полезно ознакомиться с тем, который был применен при решении системы (20.1). Может оказаться, что найденное решение не совпадает с каноическим выражением для триметрики. Поэтому дополнительно необходимо найти такую замену координат и такую масштабную функцию, которые приведут к их совпадению.

Задача 2. Найти все циклы двуметрической двумерной геометрии, задаваемой на двумерном многообразии двуметрикой **(18.8)**, а также соответствующие однопараметрические группы движений, для которых эти циклы являются инвариантными траекториями.

Указание к решению. Внимательно изучить метод решения аналогичной задачи, разобранной в примере 1. Группу движений и базис соответствующей двумерной алгебры Ли найти независимо, так как они не совпадают с операторами (18.4.2) вследствие произведенной замены координат при переходе от решения системы уравнений (18.13) к каноническому выражению (18.8) для двуметрики.

Задача 3. Найти базисные операторы (19.6) трехмерной алгебры Ли группы движений следующих триметрик в их канонической форме: **(19.19)**, **(19.20)**, **(19.21)**, **(19.22)**, **(19.23)**, **(19.24)**, **(19.25)**, **(19.26)**, **(19.27)**, **(19.28)**, **(19.29)**.

Указание к решению. Для любого оператора $X=\lambda(x,y,z)\partial_x+\sigma(x,y,z)\partial_y+\tau(x,y,z)\partial_z$ из этой алгебры каждая компонента триметрики удовлетворяет уравнению $X(i)f(ij)+X(j)f(ij)=0$. В результате получаем систему из трех функциональных уравнений на коэффициенты λ,σ,τ, решая которые и находим базисные операторы X_1,X_2,X_3 трехмерной алгебры Ли локальных преобразований трехмерного многообразия для соответствующей триметрики. Может оказаться, что найденные выражения не совпадут с выражениями операторов из классификационного списка (19.12) – (19.18), так как при получении канонических форм триметрик была произведена некоторая замена координат.

Задача 4. Определить множество всех циклов для следующих триметрических трехмерных геометрий, задаваемых на трехмерном многообразии трехкомпонентными метрическими функциями **(19.19)**, **(19.20)**, **(19.21)**, **(19.22)**, **(19.23)**, **(19.24)**, **(19.25)**, **(19.26)**, **(19.27)**, **(19.28)**, **(19.29)**.

Указание к решению. Сначала следует попытаться решить систему трех метрических функциональных уравнений (13.9) на цикл в его явном параметрическом задании (13.5), помня, что метрическая функция f и масштабная функция ψ трехкомпонентные: $f = (f^1, f^2, f^3)$ и $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. Если же при решении этих уравнений встретятся непреодолимые трудности, то можно попробовать найти цикл в его неявном задании (13.4) как решение дифференциального уравнения (13.7), в котором $X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + c^3 X_3$ – ненулевой оператор трехмерной алгебры Ли группы движений соответствующей триметрики. Предварительно надо найти ее базисные операторы по каноническому выражению для триметрики (см. задачу 3).

Заключение

Классификация геометрий является одной из наиболее важных задач математики, которой посвятили свои усилия многие известные ученые в прошлом и настоящем. Гельмгольц, например, еще в XIX столетии в своей работе "О фактах, лежащих в основании геометрии", исходя из групповой симметрии, построил классификацию двумерных геометрий с невырожденной метрической функцией. Некоторые из найденных им геометрий обладали необычными свойствами и не имели тогда содержательной интерпретации. В частности, двумерная геометрия, в которой существовал ненулевой вектор, который был сам себе перпендикулярен, а расстояние между двумя различными точками могло быть равным нулю. Такую "неудобную"геометрию Гельмгольц исключил введением дополнительной аксиомы. Сейчас эта геометрия известна как плоскость Минковского, представляя собой двумерное пространство-время. Исключил он из рассмотрения и "свою"геометрию, впервые им обнаруженную, в которой окружностью была логарифмическая спираль. Мы назвали эту геометрию *плоскостью Гельмгольца.* И хотя до сих пор не вполне ясна ее физическая интерпретация, групповая симметрия, означающая наличие максимальной подвижности, делает ее в математическом смысле очень содержательным объектом исследования, равноправным с плоскостью Евклида, двумерной сферой и плоскостью Лобачевского. Упомянем еще симплектическую плоскость, также исключенную Гельмгольцем, геометрия которой обнаруживает себя в построениях аналитической механики. Поэтому всякая геометрия, наделенная какими-то фундаментальными свойствами, например, групповой или феноменологической симметриями, должна быть объектом математического исследования, безотносительно к тому, найдена или нет в настоящее время ее интерпретация.

Вспомним усилия Лобачевского по исследованию пространства, в котором не выполнялся пятый постулат Евклида о параллельных прямых. Геометрию такого постранства Лобачевский называл "воображаемой". Заметим, что аналогичные исследования проводил и Гаусс, однако в отличие от Лобачевского, он не отважился на их опубликование. Сейчас же эта "воображаемая"геометрия известна как геометрия пространства постоянной отрицательной кривизны, называемого пространством Лобачевского, которая имеет многочисленные физические и математические интерпретации.

В §3 были рассмотрены двумерные феноменологически симметричные геометрии с невырожденной метрической функцией, допускающие максимальную подвижность, равную трем. В следующем §4 приведена классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий с максимальной подвижностью, равной шести. Каждая из этих геометрий может стать объектом математического исследования, в частности, в плане построения дифференциальной геометрии соответствующих многообразий. Открытой для способного и вдумчивого исследователя остается проблема классификации геометрий более высокой размерности, например, четырехмерных и, вообще, n-мерных с $n > 3$. Даже простое воспроизведение *другими методами* классификации трехмерных феноменологически симметричных геометрий ранга пять является весьма важной математической проблемой, так как эта классификация была построена настолько сложным и громоздким методом, что необходима их проверка конечными результатами, как это было сделано в отношении двумерных геометрий.

По мнению автора та подготовка, которую обепечивает усвоение материала данного пособия и выполнение контрольных заданий, будет достаточна, чтобы студент третьего курса с базовым математическим образованием мог подключиться к активным научным исследованиям с перспективой не только дипломной работы, но, при достаточной результативности, и работы диссертационной.

Варианты контрольных заданий

Вариант 1: §5, задача 1 – (3.6); §10, задача 3 – (4.11).

Вариант 2: §5, задача 1 – (3.7); §20, задача 1 – (19.27).

Вариант 3: §5, задача 1 – (3.8); §20, задача 1 – (19.28).

Вариант 4: §5, задача 1 – (3.9); §20, задача 1 – (19.29).

Вариант 5: §5, задача 1 – (3.14); §10, задача 3 – (4.7).

Вариант 6: §5, задача 2 – (3.11); §10, задача 3 – (4.8).

Вариант 7: §5, задача 2 – (3.12); §10, задача 3 – (4.10).

Вариант 8: §5, задача 2 – (3.13); §10, задача 1 – (3.5).

Вариант 9: §5, задача 3 – (4.6); §10, задача 1 – (3.6).

Вариант 10: §5, задача 3 – (4.7); §10, задача 1 – (3.8).

Вариант 11: §5, задача 3 – (4.8); §15, задача 1 – (3.5).

Вариант 12: §5, задача 3 – (4.9); §15, задача 1 – (3.6).

Вариант 13: §5, задача 3 – (4.10); §15, задача 1 – (3.7).

Вариант 14: §5, задача 3 – (4.11); §20, задача 4 – (19.26).

Вариант 15: §5, задача 3 – (4.12); §20, задача 4 – (19.27).

Вариант 16: §5, задача 3 – (4.13); §20, задача 4 – (19.28).

Вариант 17: §5, задача 3 – (4.14); §20, задача 4 – (19.29).

Вариант 18: §5, задача 3 – (4.15); §15, задача 2 – (4.9).

Вариант 19: §5, задача 4 – (4.16); §15, задача 2 – (4. 12).

Вариант 20: §5, задача 4 – (4.17); §15, задача 2 – (4.13).

Вариант 21: §5, задача 4 – (4.18); §15, задача 2 – (4.14).

Вариант 22: §10, задача 2 – (3.7); §15, задача 2 – (4.15).

Вариант 23: §10, задача 2 – (3.9); §15, задача 2 – (4.16).

Вариант 24: §10, задача 2 – (3.10); §15, задача 2 – (4.17).

Вариант 25: §10, задача 2 – (3.11); §15, задача 2 – (4.18).

Вариант 26: §10, задача 2 – (3.12); §15, задача 3 – (4.8).

Вариант 27: §10, задача 2 – (3.13); §15, задача 3 – (4.9).

Вариант 28: §10, задача 2 – (3.14); §15, задача 3 – (4.10).

Вариант 29: §20, задача 3 – (19.19); §15, задача 3 – (4.11).

Вариант 30: §20, задача 3 – (19.20); §15, задача 3 – (4.12).

Вариант 31: §20, задача 3 – (19.21); §15, задача 3 – (4.13).

Вариант 32: §20, задача 3 – (19.22); §15, задача 3 – (4.14).

Вариант 33: §20, задача 3 – (19.23); §15, задача 3 – (4.15).

Вариант 34: §20, задача 3 – (19.24); §15, задача 3 – (4.16).

Вариант 35: §20, задача 3 – (19.25); §15, задача 3 – (4.17).

Вариант 36: §10, задача 1 – (3.7); §20, задача 1 – (19.21).

Вариант 37: §10, задача 1 – (3.9); §20, задача 1 – (19.22).

Вариант 38: §10, задача 1 – (3.10); §20, задача 1 – (19.23).

Вариант 39: §10, задача 1 – (3.11); §20, задача 1 – (19.24).

Вариант 40: §10, задача 1 – (3.12); §20, задача 1 – (19.25).

Вариант 41: §10, задача 1 – (3.13); §20, задача 1 – (19.26).

Вариант 42: §10, задача 1 – (3.14); §20, задача 2 – (18.8).

Вариант 43: §10, задача 2 – (3.5); §20, задача 4 – (19.19).

Вариант 44: §10, задача 2 – (3.6); §20, задача 4 – (19.20).

Вариант 45: §10, задача 2 – (3.7); §20, задача 4 – (19.21).

Вариант 46: §10, задача 3 – (4.9); §20, задача 4 – (19.22).

Вариант 47: §10, задача 3 – (4.12); §20, задача 4 – (19.23).

Вариант 48: §10, задача 3 – (4.13); §20, задача 4 – (19.24).

Вариант 49: §10, задача 3 – (4.14); §20, задача 4 – (19.25).

Вариант 50: §10, задача 3 – (4.15); §15, задача 1 – (3.7).

Вариант 51: §10, задача 3 – (4.16); §15, задача 1 – (3.9).

Вариант 52: §10, задача 3 – (4.17); §15, задача 1 – (3.10).

Вариант 53: §10, задача 3 – (4.18); §15, задача 1 – (3.11).

Вариант 54: §20, задача 3 – (19.26); §15, задача 1 – (3.12).

Вариант 55: §20, задача 3 – (19.27); §15, задача 1 – (3.13).

Вариант 56: §20, задача 3 – (19.28); §15, задача 1 – (3.14).

Вариант 57: §20, задача 3 – (19.29); §15, задача 3 – (4.18).

Вариант 58: §15, задача 2 – (4.7). **Вариант 59**: §15, задача 2 – (4.8).

Вариант 60: §15, задача 2 – (4.10). **Вариант 61**: §15, задача 2 – (4.11).

Вариант 62: §15, задача 4 – (15.34). **Вариант 63**: §15, задача 4 – (15.35).

Вариант 64: §15, задача 4 – (15.36). **Вариант 65**: §15, задача 4 – (15.37).

Вариант 66: §15, задача 4 – (15.38). **Вариант 67**: §15, задача 4 – (15.39).

Вариант 68: §15, задача 4 – (15.40). **Вариант 69**: §15, задача 4 – (15.41).

Вариант 70: §15, задача 4 – (15.42). **Вариант 71**: §15, задача 4 – (15.43).

Вариант 72: §15, задача 4 – (15.44).

Литература

1. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физ-ких структур // Докл. АН СССР, 1970, Т.193, №5, С.985-987.

2. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") // Об основаниях геометрии. М., 1956, С.402-434.

3. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956, С.366-388.

4. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР, 1981, Т.260, №4, С.803-805 (Mikhaylitchenko G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 16 novembre 1981, T.293, Serie 1, P.529-531).

5. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956, С.388-398.

6. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР, 1983, Т.269, №2, С.284-288.

7. Wene G.P. Comments of the geometry of Lie algebras and Lie-homotopic algebras // Hadronic J., 1985, Vol.8, №2, P.63-74.

8. Кулаков Ю.И. О теории физических структур // Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1983, Т.127, С.103-151.

9. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988, Вып.125, С.90-103.

10. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

11. Овсянников Л.В. Групповой анализ диф-ных уравнений. М.: Наука, 1978.

12. Петров А.З. Новые методы в общей теории относи-ости. М.: Наука, 1966.

13. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969.

14. Lie S., Engel F. Theorie der Transformations gruppen, Bd 3, Leipzig, 1893.

15. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости // Сиб. мат. журн., 1982, Т.23, №5, С.132-141.

16. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.

17. Михайличенко Г.Г. Метрика плоскости как двухточечный инвариант / "Сиб. мат. журн.", 1984, 38с., деп. в ВИНИТИ 30.10.84, №6980-84 (Реферат // Сиб. мат. журн., 1985, Т.26, №5, С.198).

18. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: НГУ, 2001.

19. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства // Изв. вузов. Математика, 1997, №9(424), С.41-48.

Симплектические многообразия

В.А. Кыров

Содержание

§1. Симплектическая геометрия

В данном параграфе определяется симплектическая геометрия, находится группа ее движений, а затем решается обратная задача о восстановлении метрической функции по группе движений. В конце параграфа приводятся некоторые свойства этой геометрии.

Под *симплектической геометрией* понимается геометрия четномерного пространства R^{2n} с метрической функцией f, которая в специальных координатах $(x^1, x^2, ..., x^{2n})$ принимает следующий вид:

$$f(ij) = x_i^1 x_j^{n+1} - x_i^{n+1} x_j^1 + ... + x_i^n x_j^{2n} - x_i^{2n} x_j^n, \tag{1}$$

где, например, $(x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{2n})$ – координаты точки i пространства R^{2n} [1, 2]. Симплектическое пространство будем обозначать через Sp^{2n}. Для плоскости Sp^2 метрическая функция запишется в виде:

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i, \tag{1'}$$

где $x = x^1$, $y = x^2$. Эта функция была найдена Г.Г. Михайличенко при классификации двумерных геометрий (см. [3], а также §3 гл.I настоящего пособия). Для краткой записи метрической функции (1) воспользуемся матричными обозначениями:

$$x = (x^\alpha) = \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ x^{2n} \end{pmatrix}, \quad G = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta = 1, ..., 2n$; G – блочная матрица порядка $2n$, а E и 0 – единичная и нулевая матрицы порядка n. Метрическая функция (1) запишется тогда в таком виде:

$$f(ij) = g_{\alpha\beta} x_i^\alpha x_j^\beta = x_i^T G x_j. \tag{1''}$$

Заметим, что для симплектической геометрии справедлива теорема об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий [3], согласно которой по метрической функции (1) можно найти n(2n+1)-параметрическую группу ее движений, а по ней восстановить саму метрическую функцию. Для нахождения группы движений необходимо решить функциональное уравнение

$$f(\lambda_i^1, ..., \lambda_i^{2n}, \lambda_j^1, ..., \lambda_j^{2n}) = f(x_i^1, ..., x_i^{2n}, x_j^1, ..., x_j^{2n}), \tag{2}$$

в котором неизвестными являются гладкие функции $\lambda^1, ..., \lambda^{2n}$, задающие преобразования пространства R^{2n}:

$$\begin{aligned} x'^1 &= \lambda^1(x^1, ..., x^{2n}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x'^{2n} &= \lambda^{2n}(x^1, ..., x^{2n}), \end{aligned} \tag{3}$$

при условии, что якобиан $(\partial\lambda^1, ..., \partial\lambda^{2n})/(\partial x^1, ..., \partial x^{2n})$ отличен от нуля, поскольку движения обратимы.

Лемма 1. *Функции* $\lambda^1, ..., \lambda^{2n}$ *системы* (3), *удовлетворяющие функциональному уравнению* (2) *для симплектического пространства* Sp^{2n}, *являются однородными, то есть имеют вид:*

$$\begin{aligned} x'^1 &= a_1^1 x^1 + ... + a_{2n}^1 x^{2n}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x'^{2n} &= a_1^{2n} x^1 + ... + a_{2n}^{2n} x^{2n}. \end{aligned} \tag{3'}$$

или

$$x' = Ax,$$

где A *— матрица системы* (3′).

Запишем уравнение (2) для метрической функции (1):

$$\lambda_i^1 \lambda_j^{n+1} - \lambda_i^{n+1} \lambda_j^1 + ... + \lambda_i^n \lambda_j^{2n} - \lambda_i^{2n} \lambda_j^n = x_i^1 x_j^{n+1} - x_i^{n+1} x_j^1 + ... + x_i^n x_j^{2n} - x_i^{2n} x_j^n.$$

Дифференцируя его по координатам $(x_j^1, ..., x_j^{2n})$ и разрешая полученную систему относительно функций $\lambda_i^1, ..., \lambda_i^{2n}$, после фиксирования точки j получаем выражения (3′). Лемма 1 доказана.

Перейдем теперь к определению группы движений пространства Sp^{2n}. Для этого воспользуемся выше доказанной леммой 1 и формулой $(1'')$. Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$x_i'^T G x_j' = x_i^T G x_j$$

и после подстановки в него выражения $(3')$, имеем:

$$x_i^T A^T G A x_j = x_i^T G x_j. \tag{4}$$

Равенство (4) выполняется тождественно по координатам точек i и j. Дифференцируя по ним, получаем:

$$A^T G A = G. \tag{5}$$

Последнее равенство говорит о том, что матрица A является симплектической [4], то есть принадлежит симплектической группе $Sp(2n)$. Итак, нами доказана

Теорема 2. *Преобразования* $(3')$ *симплектического пространства* Sp^{2n} *тогда и только тогда являются его движениями, когда матрица преобразования* A *является симплектической* ($A \in Sp(2n)$)*, то есть удовлетворяет условию* (5).

Для выяснения структуры матрицы A представим ее в блочном виде:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}, \tag{6}$$

причем блоками являются матрицы порядка n. Подставляя матрицу (6) в условие (5), приходим к равенствам: $B^T D - D^T B = 0$, $C^T F - F^T C = 0$, $B^T F - D^T C = E$, $F^T B - C^T D = E$.

Группа движений симплектической плоскости с метрической функцией $(1')$ записывается, очевидно, в следующем виде:

$$x' = bx + cy, \;\; y' = dx + fy,$$

причем $bf - cd = 1$.

Предположим теперь, что в функциональном уравнении (2) неизвестной является метрическая функция f, а группа движений $(3')$ со связью параметров (5) известна. Тогда, решая это уравнение, можно найти метрическую функцию как двухточечный инвариант. Задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$X_\omega(i) f(ij) + X_\omega(j) f(ij) = 0, \tag{7}$$

где X_ω – базисные инфинитезимальные операторы алгебры Ли группы движений, причем $\omega = 1, \ldots, n(2n+1)$.

Группа $Sp(2n)$ является $n(2n+1)$-параметрической группой Ли, причем ее алгебра Ли состоит из матриц a порядка $2n$, удовлетворяющих, согласно [4], условию:

$$a^T G + G a = 0. \tag{8}$$

Из этого условия легко определяется структура матрицы a:

$$a = \begin{pmatrix} b & c \\ d & f \end{pmatrix},$$

причем $c^T = c,\ \ d^T = d,\ \ b^T = -f,\ \ f^T = -b$ или по компонентам:

$$a = \begin{pmatrix} b_1^1 & ... & b_n^1 & c_1^1 & ... & c_n^1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_1^n & ... & b_n^n & c_n^1 & ... & c_n^n \\ d_1^1 & ... & d_n^1 & -b_1^1 & ... & -b_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ d_n^1 & ... & d_n^n & -b_n^1 & ... & -b_n^n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Введем матрицу M_β^α порядка n, у которой на пересечении строки α и столбца β стоит 1, а на остальных местах стоят нули. Обозначим

$$N_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} M_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -M_\alpha^\beta \end{pmatrix}, \quad U_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \delta^0_{\alpha\beta}(M_\beta^\alpha + M_\alpha^\beta) + \delta_{\alpha\beta}(M_\beta^\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^0_{\alpha\beta}(M_\beta^\alpha + M_\alpha^\beta) + \delta_{\alpha\beta}(M_\beta^\alpha) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\delta_{\alpha\beta} = \left\{ {}^{1, \alpha=\beta}_{0, \alpha\neq\beta} \right.$ — символы Кронекера, $\delta^0_{\alpha\beta} = \left\{ {}^{0, \alpha=\beta}_{1, \alpha\neq\beta} \right.$. Тогда для произвольной матрицы из алгебры Ли $sp(2n)$

$$a = \sum b_\beta^\alpha N_\beta^\alpha + \sum c_\beta^\alpha U_\beta^\alpha + \sum d_\beta^\alpha V_\beta^\alpha. \tag{9$'$}$$

Справедлива следующая

Лемма 3. *Базисные операторы алгебры Ли $n(2n+1)$-мерной группы движений симплектического пространства Sp^{2n} задаются следующими выражениями:*

$$\begin{gathered} X^{p,q} = x^p \partial_{x^q} - x^{n+p} \partial_{x^{n+q}}, \\ X^p = x^{n+p} \partial_{x^p}, \ \ X^{\alpha,\beta} = x^{n+\alpha+1} \partial_{x^\beta} + x^{n+\beta} \partial_{x^{\alpha+1}}, \\ X^q = x^q \partial_{x^{n+q}}, \ \ X^{\mu,\nu} = x^{\mu+1} \partial_{x^{n+\nu}} + x^\nu \partial_{x^{n+\mu+1}}, \end{gathered} \tag{10}$$

причем $\alpha \geq \beta = 1, ..., n-1$, $\mu \geq \nu = 1, ..., n-1$, $p, q = 1, ..., n$.

Для доказательства необходимо продифференцировать уравнения группы движений ($3'$) по независимым параметрам в тождественной точке. В результате получаем компоненты операторов алгебры Ли группы движений: ax, где a — матрица вида ($9'$). Придавая постоянным b_β^α, c_β^α и d_β^α значения 0 и 1, приходим к базисным операторам (10). Лемма 3 доказана.

Запишем систему уравнений (7) для операторов (10):

$$x_i^p \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^q} - x_i^{n+p} \frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{n+q}} + x_j^p \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^q} - x_j^{n+p} \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{n+q}} = 0,$$

$$x_i^{n+p}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^p}+x_j^{n+p}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^p}=0,$$

$$x_i^{q}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{n+q}}+x_j^{q}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{n+q}}=0, \tag{11}$$

$$x_i^{n+\alpha+1}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{\beta}}+x_i^{n+\beta}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{\alpha+1}}+x_j^{n+\alpha+1}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{\beta}}+x_j^{n+\beta}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{\alpha+1}}=0,$$

$$x_i^{\mu+1}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{n+\nu}}+x_i^{\nu}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i^{n+\mu+1}}+x_j^{\mu+1}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{n+\nu}}+x_j^{\nu}\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j^{n+\mu+1}}=0.$$

Интегралом системы уравнений (11) является метрическая функция

$$f(ij)=\psi(x_i^1x_j^{n+1}-x_i^{n+1}x_j^1+...+x_i^nx_j^{2n}-x_i^{2n}x_j^n), \tag{12}$$

где ψ — произвольная функция одной переменной. Итак, доказана

Теорема 4. *Двухточечным инвариантом группы движений* (3$'$) *симплектического пространства Sp^{2n} с точностью до масштабного преобразования $\psi : R \to R$ является метрическая функция* (1).

Симплектическое пространство Sp^{2n} феноменологически симметрично, что выражается в функциональной связи всех взаимных расстояний для произвольных $2n+2$ точек кортежа $< i_1...i_{2n+2} >$:

$$\Phi(f(i_1i_2),...,f(i_{2n+1}i_{2n+2}))=0.$$

В явном виде эта функциональная связь задается следующим уравнением:

$$\begin{vmatrix} 0 & f(i_1i_2) & f(i_1i_3) & ... & f(i_1i_{2n+2}) \\ f(i_2i_1) & 0 & f(i_2i_3) & ... & f(i_2i_{2n+2}) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ f(i_{2n+2}i_1) & f(i_{2n+2}i_2) & f(i_{2n+2}i_3) & ... & 0 \end{vmatrix}=0.$$

В конце параграфа приведем некоторые геометрические свойства симплектического пространства. Под Sp^{2n} с данного момента будем понимать линейное пространство с метрической функцией (1), причем i — это теперь вектор данного линейного пространства. Это пространство будем также называть симплектическим. Метрическую функцию $f(ij)$ будем называть еще *кососкалярным произведением* векторов i и j. Очевидно следующее свойство кососкалярного произведения: $f(ij)=-f(ji)$. Геометрически кососкалярное произведение векторов i и j – это сумма ориентированных площадей параллелограмма (i,j) на n координатных плоскостях $(x^\alpha, x^{n+\alpha})$, где $\alpha=1,...,n$. В двумерном случае кососкалярное произведение двух векторов – это ориентированная площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Два вектора i и j назовем *косоортогональными*, если их кососкалярное произведение равно нулю, то есть $f(ij)=0$. Множество всех векторов, косоортогональных данному вектору, называется *косоортогональным дополнением* к этому вектору.

k-мерная плоскость симплектического пространства называется *нулевой* (нулевые плоскости называются также *изотропными*, а при k = n — лагранжевыми), если она сама себе кососортогональна, то есть кососкалярное произведение любых двух векторов плоскости равно нулю (можно сказать, что симплектическая структура не индуцируется на эту плоскость).

Примеры. 1). Любая прямая (1-плоскость) является нулевой. 2). Координатные 2-плоскости (x^α, x^β), где α, β одновременно либо меньше n, либо больше n, являются нулевыми. 3). Координатная n- плоскость $(x^1, ..., x^n)$ является лагранжевой.

Косоортогональное дополнение к m-плоскости имеет дополнительную размерность 2n-m, причем эти два пространства пересекаются по k-плоскости, которая является максимальной нулевой, содержащейся в выше описанных.

Примеры. 4). Для 1-плоскости (x^1) косоортогональное дополнение – это 2n-1-плоскость $(x^1, ..., x^n, x^{n+2}, ..., x^{2n})$. Заметим, что эти две плоскости пересекаются по прямой (x^1). 5). Для 2-плоскости (x^1, x^{n+1}) косоортогональное дополнение — это 2n-2- плоскость $(x^2, ..., x^n, x^{n+2}, ..., x^{2n})$, причем эти две плоскости пересекаются по нулевому пространству. 6). Для n-плоскости $(x^1, ..., x^n)$ косоортогональное дополнение – это та же n-плоскость $(x^1, ..., x^n)$.

В симплектическом линейном пространстве можно выделить специальный базис. Под *симплектическим базисом* понимаются 2n векторов $(e_{x^\alpha}, e_{x^{n+\alpha}})$, кососкалярные произведения которых имеют вид:

$$f(e_{x^\alpha}, e_{x^\beta}) = 0, \quad f(e_{x^{n+\alpha}}, e_{x^{n+\beta}}) = 0, \quad f(e_{x^\alpha}, e_{x^{n+\beta}}) = 0, \quad f(e_{x^\alpha}, e_{x^{n+\alpha}}) = 1,$$

где $\alpha, \beta = 1, ..., n$, причем в третьем случае $\alpha \neq \beta$.

Заметим, что в симплектическом базисе кососкалярное произведение имеет простейший вид. Используя этот базис, можно доказать, что все симплектические пространства одной размерности изоморфны.

§2. Почти гамильтоновы многообразия

В данном параграфе строятся почти гамильтоновы четномерные многообразия, которые характеризуются тем, что касательное пространство в каждой их точке является симплектическим. Находятся метрические функции этих многообразий. Начиная с этого параграфа под i и j будут пониматься индексы суммирования.

Прежде всего определим многообразие. *Топологическое многообразие* – это хаусдорфово пространство со счетной базой, локально гомеоморфное R^n. Число n называется *размерностью* многообразия. *Картой* или *системой координат* многообразия называется гомеоморфизм x некоторого открытого подмножества многообразия M на R^n. Множество карт $\mathfrak{U}$ называется *дифференцируемым атласом*, если: 1) каждая точка многообразия M принадлежит области определения некоторой карты $x \in \mathfrak{U}$; 2) для любых двух карт $x, y \in \mathfrak{U}$ отображение $x \circ y^{-1}$ дифференцируемо. $\mathfrak{U}$ называется *дифференцируемой структурой* на M, если каждая согласованная с $\mathfrak{U}$ карта принадлежит $\mathfrak{U}$. *Дифференцируемое многообразие* – объект, состоящий из топологического многообразия и дифференцируемой структуры. Многообразиями, например, являются евклидово пространство, сфера, тор, проективное пространство, двумерный круговой цилиндр.

Пусть M – гладкое $2n$-мерное многообразие, $T(M)$ – касательное расслоение со стандартным слоем R^{2n}, то есть множество всех касательных векторов во всех точках многообразия. Это пространство является гладким многообразием, причем класс гладкости на единицу меньше класса гладкости многообразия M. Атлас этого многообразия составляют прямые произведения $U \times R^{2n}$, причем $U \in \mathfrak{U}$. Слоем этого расслоения является $T_x(M)$ – касательное пространство, то есть множество всех касательных векторов многообразия M в точке x. Это пространство является линейным размерности $2n$, причем пространства $T_x(M)$ и R^{2n} изоморфны (координаты касательного вектора в фиксированном базисе отождествляются с координатами вектора из R^{2n}). Можно сказать, что касательное расслоение $T(M)$ состоит из касательных пространств $T_x(M)$ во всех точках многообразия M. Поскольку $\dim M = 2n$, то $\dim T(M) = 4n$.

Рассмотрив также $L(M)$ – расслоение линейных реперов u со структурной группой $GL(2n, R)$, то есть множество всех линейных реперов во всех точках многообразия. Это пространство естественным образом является гладким многообразием. Атлас многообразия $L(M)$ составляют прямые произведения $U \times GL(2n, R)$, причем $U \in \mathfrak{U}$. $L_x(M)$ – множество линейных реперов в точке x многообразия M, то есть множество базисов в касательном пространстве $T_x(M)$, которые отличаются друг от друга на невырожденные матрицы порядка $2n$. Поэтому $\dim L_x(M) = 4n$, а $\dim L(M) = 6n$. Линейный репер обозначается так: $u = (X_1, ..., X_{2n})$ Каждый линейный репер u из $L(M)$ можно считать изоморфизмом R^{2n} на $T_x(M)$. Пусть $e_1, ..., e_{2n}$ фиксированный базис в R^{2n}. Тогда $ue_i = X_i$, где $i = 1, ..., 2n$, следовательно $u\xi = \xi^i X_i \in T_x(M)$, причем $\xi = \xi^i e_i$ – произвольный касательный вектор.

Рассмотрим отображение

$$\omega : L_x(M) \times L_x(M) \times T_x(M) \to V^2, \tag{1}$$

которое в явном виде задается формулой:

$$\omega(u, v, X) = a_i^j X^i e_j, \tag{2}$$

причем

$$a = X^{-1},$$

где X — матрица отличия репера u от v, а $X^1, ..., X^{2n}$ — координаты вектора $X \in T_x(M)$ в базисе v, $i, j = 1, ..., 2n$. Предполагается, что соответствие (1) является гладким в координатной окрестности $U \subset M$, причем элементы матрицы a являются гладкими функциями в U, которые будем называть *структурными функциями.*

Лемма 1. *При переходе от системы координат в U к системе координат в U' структурные функции a в точке из непустого пересечения $U \cap U'$ преоб-*

разуются по закону

$$a_i^{'j} = a_k^j \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}, \quad i, j, k = 1, ..., 2n,$$

где a и a' – структурные функции в координатных окрестностях U и U' соответственно.

Из этой леммы следует, что функции (2) инвариантны относительно произвольной замены координат.

Заметим, что в точке $x \in U$, в силу произвольности репера $u \in L_x(M)$, отображение (1) равносильно семейству изоморфизмов $\{\rho_x\}$:

$$\rho_x : T_x(M) \to R^{2n}. \tag{2'}$$

Очевидно, соответствие $x \to \rho_x$ является гладким.

Пусть G – замкнутая подгруппа Ли линейной группы $GL(2n, R)$. Редукция группы $GL(2n, R)$ к подгруппе G приводит к подрасслоению $Q(M, G)$ или просто Q расслоению линейных реперов $L(M)$. Под редукцией здесь понимается вложение расслоения Q в расслоение $L(M)$, которое индуцирует тождественное преобразование многообразия M и групповое вложение G в $GL(2n, R)$ (мономорфизм). Рассмотрим сужение отображения (1) на Q_x относительно первого аргумента

$$\omega : Q_x(M) \times L_x(M) \times T_x(M) \to V^n. \tag{3}$$

Функция (3), также как и функция (1) является гладкой. Тогда для фиксированного репера $v \in L_x(M)$

$$\omega_v(u, X) = a_i^j X^i e_j, \tag{4}$$

где u – произвольный репер из Q_x. Заметим, что функция (4) инвариантна относительно произвольной замены координат. Поскольку u – произвольный репер из Q_x, а v – некоторый фиксированный репер из $L_x(M)$, то для матрицы a справедливо разложение:

$$a = bc \tag{5}$$

или в координатах: $a_j^i = b_k^i c_j^k$, где в произвольной точке из U матрица b – произвольный элемент подгруппы G, а c – некоторая фиксированная матрица из группы $GL(2n, R)$.

Редукция группы $GL(2n, R)$ к подгруппе G превращает многообразие M в G-пространство, то есть в пространство, в каждом касательном слое которого определено действие подгруппы G.

G-пространство M в окрестности U является локально плоским, если в подходящих координатах структурные функции a равны: δ_i^j.

Для редуцированного подрасслоения Q семейство изоморфизмов (2′) отображает произвольный вектор из $T_x(M)$ в вектор из R^{2n}:

$$\rho_x(X) = b_k^i c_j^k X^j e_i. \tag{4'}$$

Рассмотрим фиксированное отображение из семейства (4′)

$$\rho_x(X) = c_j^i X^j e_i. \tag{4''}$$

Это отображение переводит вектор $X \in T_x(M)$ в вектор с координатами $c^1_j X^j e_1 + ... + c^{2n}_j X^j e_{2n}$. Тогда, согласно $(4')$, G индуцирует действие этой группы в линейном пространстве R^{2n}: $G(R^{2n})$.

Предположим, что G – это симплектическая группа $Sp(2n)$, определенная в первом параграфе. Двухвекторным инвариантом группы $Sp(2n)(R^{2n})$ является функция $f(\xi,\eta)$, удовлетворяющая тождеству

$$f(b\xi, b\eta) = f(\xi,\eta), \tag{6}$$

где $b \in Sp(2n)$. Если X и Y – произвольные векторы из $T_x(M)$, то полагая $\xi = \rho_x(X) = c^i_j X^j e_i$ и $\eta = \rho_x(Y) = c^i_j Y^j e_i$, от (6) приходим

$$f(b^i_k c^k_j X^j e_i, b^i_k c^k_j Y^j e_i) = f(c^i_j X^j e_i, c^i_j Y^j e_i),$$

где $i,j,k,l = 1,...,2n$. Воспользовавшись (5), получаем

$$f(b^i_k a^k_j X^j e_i, b^i_k a^k_j Y^j e_i) = f(a^i_j X^j e_i, a^i_j Y^j e_i), \tag{6'}$$

Решение уравнения $(6')$ мы будем обозначать $f(X,Y)$ и называть *метрической функцией почти гамильтонова многообразия* [5].

Решая функциональное уравнение $(6')$, приходим к метрической функции почти гамильтонова многообразия:

$$f(X,Y) = a^1_i X^i a^{n+1}_j Y^j - a^{n+1}_i X^i a^1_j Y^j + ... + a^n_i X^i a^{2n}_j Y^j - a^{2n}_i X^i a^n_j Y^j, \tag{7}$$

причем $i,j = 1,...,2n$. Введем символы

$$g_{ij} = a^1_i a^{n+1}_j - a^{n+1}_i a^1_j + ... + a^n_i a^{2n}_j - a^{2n}_i a^n_j, \tag{8}$$

образующие, согласно выше доказанной лемме, тензор, называемый *кососимметричным метрическим тензором*, так как для него $g_{ij} = -g_{ji}$. Используя последние обозначение, получаем

$$f(X,Y) = g_{ij} X^i Y^j, \tag{7'}$$

или с учетом антисимметрии тензора g_{ij}:

$$f(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} g_{ij}(X^i Y^j - X^j Y^i). \tag{7''}$$

Для двумерного почти гамильтонова многообразия метрическая функция имеет вид:

$$f(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i<j=1}^{2} (a^1_i a^2_j - a^2_i a^1_j)(X^i Y^j - X^j Y^i).$$

Справедливо

Предложение 2. *Локально плоское почти гамильтоново многообразие задается метрической функцией*

$$f(X,Y) = \frac{1}{2}[X^1Y^{n+1} - X^{n+1}Y^1 + ... + X^nY^{2n} - X^{2n}Y^n]. \qquad (7''')$$

Используя подходящие локальные координаты можно упростить матрицу c. Это вытекает из леммы 1:

$$a_i^{'j} = b_l^j c_k^l \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}, \quad i,j,k,l = 1,...,2n. \qquad (9)$$

При замене координат мы оперируем 2n функциями, которые можем выбрать произвольным образом. Упростим матрицу c для двумерного почти гамильтонова многообразия. Нам необходима следующая

Лемма 3. *Матрицу c двумерного почти гамильтонова многообразия можно привести к виду:*

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},$$

где q – гладкая функция.

Доказательство вытекает из формулы (5) и структуры симплектической группы $Sp(2)$, которая совпадает с унимодулярной группой $Sl(2)$, состоящей из матриц порядка 2 с определителем, равным 1 [4].

Справедлива следующая

Теорема 4. *Двумерное почти гамильтоново многообразие локально плоское, то есть в некоторой координатной окрестности произвольной точки из окрестности U его метрическая функция принимает следующий вид:*

$$f(X,Y) = X^1Y^2 - X^2Y^1.$$

Доказательство. Для данного многообразия, умножая матрицу c из леммы 3 на матрицу Якоби, приходим к системе дифференциальных уравнений $\partial x^1/\partial x'^1 = \sqrt{2}$, $\partial x^1/\partial x'^2 = 0$, $q\partial x^2/\partial x'^2 = \sqrt{2}$, которая совместна. Значит матрица c равна

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ a' & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

то есть в координатной окрестности U матрица $c/\sqrt{2}$ является симплектической, и потому, согласно разложению (5) вместо c можно взять единичную матицу. Теорема 4 доказана.

§3. Дифференциальные формы

В данном параграфе определяются дифференциальные формы на многообразии, строятся симплектические многообразия. Формулируется классическая теорема Дарбу.

Рассмотрим n-мерное линейное пространство V. Отображение

$$\nu : V^m \to R$$

называется *полилинейным*, если выполняется условие:

$$\nu(a^1, ..., \alpha a^i + \beta b^i, ..., a^m) = \alpha\nu(a^1, ..., a^i, ..., a^m) + \beta\nu(a^1, ..., b^i, ..., a^m),$$

где $i = 1, ..., m$ [1]. Полилинейное отображение называется *кососимметричным*, если

$$\nu(a^1, ..., a^i, ..., a^j, ..., a^m) = -\nu(a^1, ..., a^j, ..., a^i, ..., a^m),$$

причем $i, j = 1, ..., m$.

Рассмотрим теперь гладкое многообразие M и семейство координатных окрестностей $\{U_\alpha\}$. Рассмотрим также касательное расслоение $T(M)$, определенное в §2. *Дифференциальной формой ранга m в точке x* на многообразии M называется кососимметричное полилинеиное отображение

$$\omega_x^m : T_x(M) \times ... \times T_x(M) \to R$$

m экземпляров касательного пространства $T_x(M)$ в R. Если такая форма задана в каждой точке $x \in M$, причем соответствие $x \mapsto \omega_x$ гладко, то говорят, что задана *дифференциальная форма ранга m на многообразии M* [1, 6].

В координатной окрестности U многообразия M (локальные координаты) дифференциальная форма ранга m задается выражением:

$$\omega = \sum_{i_1 < ... < i_m} a_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_m}, \tag{1}$$

причем $a_{i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_m} = -a_{i_1 \dots i_l \dots i_k \dots i_m}$; $\wedge$ — антисимметричная операция внешнего произведения дифференциальных форм. Для дифференциальных форм рангов 1 и 2, приходим к выражениям:

$$\omega = a_1 dx^1 + ... + a_n dx^n. \tag{1$'$}$$

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j; \tag{1$''$}$$

На множестве дифференциальных форм вводится операция внешнего дифференцирования d по правилу:

$$d\omega = \sum_{i_1 < ... < i_m} da_{i_1 \dots i_m} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_m}. \tag{2}$$

Для форм ранга 1 и 2 справедливы равенства:

$$d\omega = \sum_{p,i} \frac{\partial a_i}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^i. \tag{2$'$}$$

$$d\omega = \sum_{p,i<j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^i \wedge dx^j; \qquad (2'')$$

Видно, что операция внешнего дифференцирования повышает ранг дифференциальной формы на единицу [1, 6]. Справедливо также тождество:

$$dd\omega = 0. \qquad (3)$$

Дифференциальная форма ω называется *замкнутой*, если

$$d\omega = 0. \qquad (4)$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Дифференциальная форма ранга 1 замкнута тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^p} - \frac{\partial a_p}{\partial x^i} = 0; \qquad (5)$$

дифференциальная форма ранга 2 замкнута тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^p} + \frac{\partial a_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{pi}}{\partial x^j} = 0, \qquad (6)$$

где $i, j, p = 1, ..., n$.

Утверждение леммы следует из того, что формулы (2′) и (2″) можно привести к виду:

$$d\omega = \sum_{p<i} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^p} - \frac{\partial a_p}{\partial x^i}\right) dx^p \wedge dx^i;$$

$$d\omega = \sum_{p<i<j} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^p} + \frac{\partial a_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{pi}}{\partial x^j}\right) dx^p \wedge dx^i \wedge dx^j.$$

Рассмотрим дифференциальную форму ω ранга m и систему из m линейно независимых касательных векторов: $X_1 = (X_1^1, ..., X_1^n), ..., X_m = (X_m^1, ..., X_m^n)$. Тогда результатом действия дифференциальной формы на эти векторы является функция:

$$\omega(X_1, ..., X_m) = \sum_{i_1<...<i_m} a_{i_1...i_m} \mathrm{Asym}(X_1^{i_1} ... X_m^{i_m}), \qquad (7)$$

где $\mathrm{Asym}(X_1^{i_1} ... X_m^{i_m})$ – сумма всевозможных произведений компонент касательных векторов с соответствующими индексами, причем перед слагаемым ставится положительный знак в случае четной перестановки индексов и отрицательный знак в противном случае. Для дифференциальной формы ранга 1 имеем

$$\omega(X) = a_1 X^1 + ... a_n X^n, \qquad (7')$$

аналогично для формы ранга 2:

$$\omega(X_1, X_2) = \sum_{i<j} a_{ij} (X_1^i X_2^j - X_1^j X_2^i). \qquad (7'')$$

С учетом выше сделанных построений метрическую функцию ((7″) из §2) для почти гамильтонова пространства можно записать в виде:

$$f(X,Y) = \Omega(X,Y), \tag{8}$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{i<j} g_{ij}dx^i \wedge dx^j. \tag{9}$$

Почти гамильтоново многообразие M называется *симплектическим*, если дифференциальная форма Ω замкнута.

Из формулы (6) леммы 1 следуют условия замкнутости для формы (9) с компонентами (8) из §2:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = 0. \tag{6'}$$

Левую часть (6′) обозначим T_{ijk}. Отметим следующие свойства:

1) если совпадают любые два индекса из трех, то $T_{ijk} = 0$;

2) при четной перестановке индексов T_{ijk} сохраняется, а при нечетной – меняет знак на противоположный.

Из этого следует, что число независимых символов T_{ijk} равно $2n(2n-1)(n-1)/3$.

Можно в явном виде записать условия (6′) для почти гамильтонова многообразия, помня при этом, что

$$g_{ij} = c_i^1 c_j^{n+1} - c_i^{n+1} c_j^1 + ... + c_i^n c_j^{2n} - c_i^{2n} c_j^n.$$

Для четырехмерного многообразия, например, условие (6′) запишется:

$$\frac{\partial c_i^1}{\partial x^p}c_j^3 - \frac{\partial c_i^3}{\partial x^p}c_j^1 + \frac{\partial c_i^2}{\partial x^p}c_j^4 - \frac{\partial c_i^4}{\partial x^p}c_j^2 + \frac{\partial c_j^1}{\partial x^i}c_p^3 - \frac{\partial c_j^3}{\partial x^i}c_p^1 + \frac{\partial c_j^2}{\partial x^i}c_p^4 - \frac{\partial c_j^4}{\partial x^i}c_p^2 +$$

$$\frac{\partial c_p^1}{\partial x^j}c_i^3 - \frac{\partial c_p^3}{\partial x^j}c_i^1 + \frac{\partial c_p^2}{\partial x^j}c_i^4 - \frac{\partial c_p^4}{\partial x^j}c_i^2 + c_i^1\frac{\partial c_j^3}{\partial x^p} - c_i^3\frac{\partial c_j^1}{\partial x^p} + c_i^2\frac{\partial c_j^4}{\partial x^p} - c_i^4\frac{\partial c_j^2}{\partial x^p} +$$

$$c_j^1\frac{\partial c_p^3}{\partial x^i} - c_j^3\frac{\partial c_p^1}{\partial x^i} + c_j^2\frac{\partial c_p^4}{\partial x^i} - c_j^4\frac{\partial c_p^2}{\partial x^i} + c_p^1\frac{\partial c_i^3}{\partial x^j} - c_p^3\frac{\partial c_i^1}{\partial x^j} + c_p^2\frac{\partial c_i^4}{\partial x^j} - c_p^4\frac{\partial c_i^2}{\partial x^j} = 0,$$

где $i < j < p = 1, 2, 3, 4$.

Приведем теперь пример симплектического многообразия. Пусть M – гладкое многообразие размерности n, $T^*(M)$ – кокасательное расслоение со стандартным слоем R^{*n} (R^{*n} – дуальное пространство к R^n), то есть множество всех кокасательных векторов (поле ковекторов называется еще дифференциальной формой ранга 1) во всех точках многообразия. Это пространство является гладким многообразием. Атлас этого многообразия составляют прямые произведения $U \times R^{*n}$, причем $U \in \mathfrak{U}$. Слоем этого расслоения является $T_x^*(M)$ – кокасательное пространство, то есть множество всех кокасательных векторов многообразия M в точке x. Это пространство является линейным размерности n, причем пространства $T_x^*(M)$ и R^{*n} изоморфны (координаты кокасательного вектора в фиксированном базисе отождествляются с координатами ковектора из R^{*n}). Поскольку $\dim M = n$, то $\dim T(M) = 2n$.

В кокасательном расслоении $T^*(M)$ вводится естественная симплектическая структура. Пусть $q = (q_1, ..., q_n)$ – локальные координаты произвольной точки q многообразия M, а $p = (p_1, ..., p_n)$ – компоненты произвольной формы p ранга 1 в этой точке. Рассмотрим естественную проекцию $\pi : T^*(M) \to M$ и дифференциал этой проекции: $\pi_* : T(T^*(M)) \to T(M)$. Пусть $\xi \in T_p(T^*(M))$ – касательный вектор к слою кокасательного расслоения в точке $p \in T_q^*(M)$. Тогда дифференциал проекции π_* вектор ξ переводит в касательный вектор $\pi_*\xi \in T_q(M)$. Определим форму ω ранга 1 на $T^*(M)$ формулой $\omega(\xi) = p(\pi_*\xi)$, следовательно $\omega = p_1 \wedge dq_1 + ... + p_n \wedge dq_n$. Значит, согласно определению симплектического многообразия, форма $d\omega$ определяет симплектическую структуру.

В геометрии симплектических многообразий важное значение имеет теорема Дарбу [1].

Теорема 2 *(Дарбу). В симплектическом многообразии M для каждой точки можно подобрать такую координатную окрестность U, что относительно определенной в ней системы координат метрическая функция (7) из §2 принимает простейший вид:*

$$f(X, Y) = X^1Y^{n+1} - X^{n+1}Y^1 + ... + X^nY^{2n} - X^{2n}Y^n, \tag{10}$$

то есть симплектическое многообразие всегда локально плоское.

Координаты, описанные в теореме Дарбу называются *координатами Дарбу* и обычно обозначаются: $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$. В этих координатах дифференциальная форма (9) записывается в виде:

$$\Omega = dp_1 \wedge dq_1 + ... + dp_n \wedge dq_n. \tag{11}$$

Из (10) или (11) следует, что матрица c является единичной.

Следует заметить, что теорема 4 из §2 является теоремой Дарбу для двумерного симплектического многообразия.

§4. Гамильтонова механика и симплектическая геометрия

В данном параграфе вводится аксиоматика механики Лагранжа и аксиоматика механики Гамильтона. Определяются гамильтоновы векторные поля и скобки Пуассона.

Рассмотрим стационарную механическую систему (в данном параграфе работаем только со стационарными механическими системами, поскольку при их изучении достаточно ограничиться фазовым пространством с естественной симплектической структурой, а для изучения нестационарных механических систем необходимо рассмотрение нечетномерного расширенного фазового пространства без симплектической структуры), примером которой может служить: математический маятник, сферический маятник, свободная частица и т. д. Построим сначала механику Лагранжа, а затем механику Гамильтона механической системы. Лагранжева механика задается системой трех аксиом:

1. Каждой стационарной механической системе с n степенями свободы соответствует конфигурационное многообразие M, локальные координаты которого – это обобщенные координаты механической системы: $q_1, ..., q_n$, а точки – это положения механической системы.

2. В касательном расслоении конфигурационного многообразия механической системы определяется функция Лагранжа:

$$L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) = T(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) - U(q_1, ..., q_n), \tag{1}$$

где $(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$ – вектор скорости вдоль траектории движения механической системы, причем T – кинетическая энергия (заметим, что кинетическая энергия механической системы – это риманова метрика в конфигурационном многообразии, то есть положительно определенная квадратичная форма в касательном пространстве в произвольной точке), а U – потенциальная энергия (некоторая функция в конфигурационном многообразии) механической системы.

3. Рассмотрим функционал действия:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Экстремаль этого функционала – траектория движения механической системы. Данное утверждение называется *принципом Гамильтона*. Этот принцип называется еще *принципом наименьшего действия*.

Несложно доказать, что траектории движения механической системы – это интегралы уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{2}$$

где $i = 1, ..., n$. Производные

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

называются *обобщенными импульсами* механической системы. Следует заметить, что обобщенный импульс механической системы – это ковектор конфигурационного многообразия M [1, 7].

Энергией E механической системы называется величина

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \tag{3}$$

Сформулируем теперь аксиоматику гамильтоновой механики.

1. Состояние стационарной механической системы – это точка кокасательного расслоения $T^*(M)$. Данное пространство называется *фазовым*, причем его размерность равна 2n. Точка фазового пространства имеет локальные координаты: $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$.

2. В фазовом пространстве определяется функция Гамильтона как энергия, выраженная через координаты и импульсы механической системы:

$$H(p,q) = H(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n) = \sum_i p_i \dot{q}_i \ (p,q) - L(p,q). \tag{4}$$

3. Траектория движения механической системы – экстремаль действия S, которая является решением системы 2n уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{5}$$

называемых *каноническими уравнениями.*

Фазовое пространство механической системы $N = T^*(M)$ имеет естественную симплектическую структуру (§3), в координатах Дарбу $(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$, задаваемую дифференциальной формой

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + ... + dp_n \wedge dq_n. \tag{6}$$

Пусть $x = (p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$ — произвольная точка фазового многообразия N. Рассмотрим изоморфизм $I : T_x^*(N) \to T_x(N)$, который в локальных координатах Дарбу $(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$ принимает вид:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

то есть ковектору с координатами $(a_1,...,a_n,b_1,...,b_n)$ ставит в соответствие вектор с координатами $(-b_1,...,-b_n,a_1,...,a_n)$, а дифференциальной форме dH — векторное поле IdH. Векторное поле IdH называется *гамильтоновым.* Вдоль траектории движения, очевидно, $\dot{x} = IdH(x)$. Расписывая это выражение покоординатно, приходим к уравнениям Гамильтона (5). В теории симплектических многообразий доказывается, что гамильтоново векторное поле IdH является векторным полем группы движений симплектического многообразия.

Рассмотрим произвольную достаточно гладкую функцию фазового пространства N: $F(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n)$. *Скобкой Пуассона* функций H и F называется следующая функция:

$$(H,F) = dF(IdH).$$

Последняя формула равносильна следующей [1]:

$$(H,F) = \omega(IdH, IdF). \tag{7}$$

Итак, скобка Пуассона является естественным следствием симплектической структуры в фазовом пространстве N. В локальных координатах скобка Пуассона представима в виде:

$$(H,F) = \omega(IdH, IdF) = \sum_i (\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}). \tag{8}$$

Доказательство этого равенства сводится к простым вычислениям, поэтому оно предоставляется читателю.

Функция F называется *первым интегралом* уравнений Гамильтона (5), если она постоянна вдоль интегральной кривой этих уравнений, то есть вдоль траектории движения.

Скобка Пуассона удовлетворяет следующим свойствам [1].

Предложение 1. *Функция F тогда и только тогда является первым интегралом канонических уравнений (5) с функцией Гамильтона H, когда $(H, F) = 0$.*

Так как функция F постоянна вдоль траектории движения, то $F(IdH) = \text{const}$, поэтому $(H, F) = 0$.

Предложение 2. *Скобки Пуассона трех функций A, B, C удовлетворяют тождеству Якоби:*

$$((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B) = 0.$$

Доказательство этого предложения следует из формулы (8) и сводится к непосредственным вычислениям, поэтому оно предоставляется читателю.

Предложение 3. *(Теорема Пуассона.) Скобка Пуассона (F_1, F_2) двух первых интегралов F_1 и F_2 механической системы есть снова первый интеграл.*

Для доказательства воспользуемся тождеством Якоби:

$$((F_1, F_2), H) + ((F_2, H), F_1) + ((H, F_1), F_2) = 0,$$

следовательно $((F_1, F_2), H) = 0$, то есть (F_1, F_2) – первый интергал.

Заметим, что функции F в фазовом пространстве с функцией Гамильтона H, в силу предложения 2, образуют алгебру Ли с коммутатором $Id(F_1, F_2)$, а первые интегралы подалгебру Ли. Очевидно, две функции являются коммутативными ($Id(F_1, F_2) = 0$) тогда и только тогда, когда скобка Пуассона этих функций (F_1, F_2) постоянна. Обратим еще внимание на то, что оператор I индуцирует естественное мономорфное вложение алгебры Ли функций в алгебру Ли гамильтоновых векторных полей с ядром из постоянных функций.

В заключении рассмотрим физический пример. Сферическим маятником называется материальная точка массой m, движущаяся по поверхности сферы радиуса l в поле силы тяжести [7]. Декартовы координаты x, y, z точки связаны с обобщенными координатами φ, θ уравнениями: $x = l\sin\theta\cos\varphi$, $y = l\sin\theta\sin\varphi$, $z = l\cos\theta$. Следует заметить, что конфигурационным многообразием механической системы является двумерная сфера. Функция Лагранжа принимает вид:

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{?}\theta^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2) + mgl\cos\theta.$$

По функции Лагранжа находим обобщенные импульсы: $p_\varphi = ml^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}$, $p_\theta = ml^2\,\dot{\theta}$. Тогда для функции Гамильтона имеем

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta.$$

Компоненты гамильтонова векторного поля IdH, очевидно, равны:

$$0, \frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl\sin\theta, \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}, \frac{p_\theta}{ml^2}.$$

Из формулы (7) следует, что скобка Пуассона $(H, H) = 0$, поэтому, соглано предложению 1, энергия сферического маятника является первым интегралом уравнений Гамильтона (5), то есть интегралом движения. Несложно также проверить, что

$$(H, p_\varphi) = \omega(IdH, Idp_\varphi) = dp_\varphi(IdH) = 0,$$

то есть функция p_φ является интегралом движения. В механике эта функция интерпретируется как проекция момента импульса M_z.

Список литературы

[1] *Арнольд В.И.* Математический аппарат классической механики. М.:Наука,1974.

[2] *Арнольд В.И., Гивенталь А.Б.* Симплектическая геометрия. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика",2000.

[3] *Михайличенко Г.Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск, НГУ,2001.

[4] *Постников М.М.* Лекции по геометрии, семестр 5. Группы и алгебры Ли. М.:Наука,1982.

[5] *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.:Мир,1970.

[6] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.:Наука,1979.

[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, т.1. Механика. М.:Наука,1988.