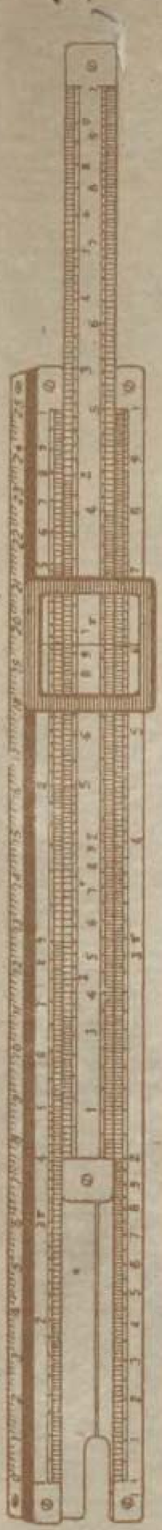
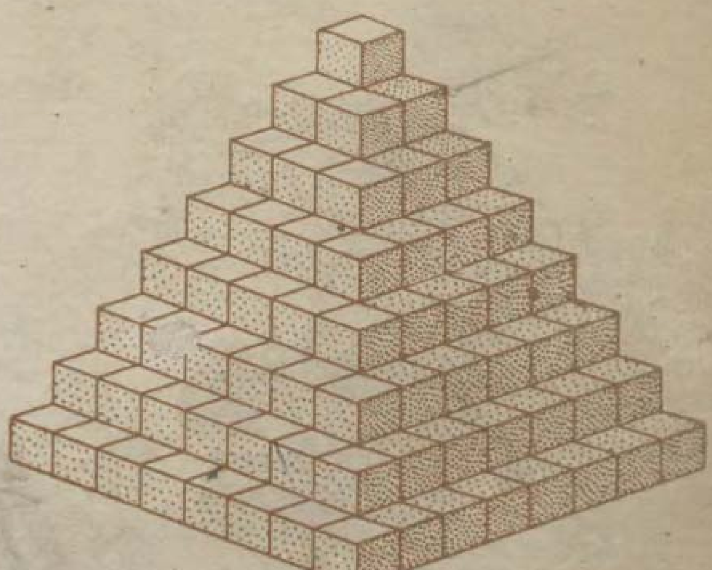
АКАДЕМИЯ НАУК — СТАХАНОВЦАМ



И. Б. АБЕЛЬСОН

ДВЕ ПРОГРЕССИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

И. Б. АБЕЛЬСОН ДВЕ ПРОГРЕССИИ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ
„АКАДЕМИЯ НАУК—СТАХАНОВЦАМ“
ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ ПРЕЗИДЕНТА АН СССР АКАД. *В. Л. КОМАРОВА*

И. Б. АБЕЛЬСОН

ДВЕ ПРОГРЕССИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1938 ЛЕНИНГРАД

Ответственный редактор Р. Н. Б о н ч к о в с к и й

Технический редактор В. М. Ю р о в а Корректор Л. Г. Афанасьева

Сдано в набор 7/III 1938 г. Подписано к печати 3/VIII 1938 г. Формат $60\times92^{1}/_{16}$. Об'ем $10^{1}/_{4}$ л.
Учет. авт. л. 8,62. В 1 п. л. 43000 печ. зн. Тираж 10000 экз. Уполн. Главлита Б-42787
РИСО 662. АНИ 492 Зак. 854. Цена 3 р. переплет 1 р.
1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига", Москва, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц в тип. изд-ва „Власть Советов" Москва, ул. Куйбышева 1. Зак. № 2729

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тема настоящей книжки, с одной стороны, соприкасается с самой азбукой математики, а с другой стороны — доходит до областей довольно высокого порядка, как понятие логарифмической функции, идея дифференциального уравнения и т. п. Поэтому книжка может быть полезна для начинающего математика, как трамплин, способный сразу поднять его с азов на сравнительно большую высоту.

Основная тема книжки выражена в главе II (арифметические прогрессии) и главе IV (геометрические прогрессии). Но с ними тесно переплетаются глава I (более глубокое рассмотрение пропорции), глава III (комбинаторика) и глава V (о логарифме). Таким образом, передовые рабочие, а также школьники, которые имеют самую небольшую теоретическую подготовку, смогут прочесть эту книгу и в ней познакомиться со всеми высшими отделами элементарной математики.

В изложении автор стремится не столько логически обосновать предмет, сколько при помощи разнообразных примеров убедить читателя в необходимости вводимых им новых понятий. В этом главная ценность книжки. Вторая особенность книжки состоит в весьма широком пользовании геометрическими моделями, которые развивают в читателе геометрическое воображение. Можно надеяться, что эта книжка разовьет у многих вкус к математическому мышлению.

Член-корр. АН СССР проф. ***Н. Чеботарев***

18 мая 1938 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

„НА СКОЛЬКО“ и „ВО СКОЛЬКО“

Я показал выше решение нескольких задач. Ибо при изучении наук примеры полезнее правил.

Ньютон

1. Отношение двух количеств

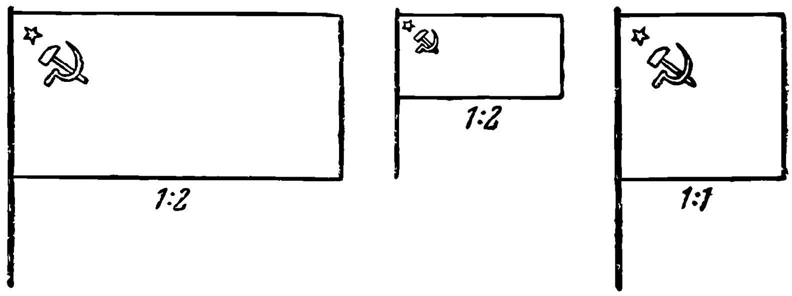
При сравнении двух количеств можно поставить два основных вопроса: 1) на сколько одно из них больше другого; 2) во сколько раз одно больше другого. Например, если одна фабрика выпускает ежедневно 920 пар обуви, а другая — 800 пар, то на вопрос: „На сколько продукция первой фабрики больше?“, ответ будет: „На 120 пар“, так как $920-800=$ $=120$. Если же спросить: „Во сколько раз продукция первой фабрики больше продукции второй?“, то ответить на этот вопрос будет труднее. Число 920 не делится без остатка на 800, поэтому ответ нельзя дать в виде целого числа, сказав, что продукция первой фабрики, например, в 2 или 3 раза больше... В указанном случае придется дать ответ в виде дроби. Соотношение чисел 920 и 800 можно заменить соотношением чисел 92 и 80, или же чисел 23 и 20. А это означает: если продукцию второй фабрики считать равной 20 долям, то продукция первой фабрики равна 23 таким же долям.

Отношение чисел 920 и 800 можно записать не только дробью $\frac{920}{800}$, или $\frac{23}{20}$, но и так: $23:20$. Пара чисел $(23:20)$ дает ответ на поставленный вопрос: отношение чисел 920 и 800 равно отношению чисел 23 и 20, или, иначе, $920:800=23:20$.

Следует отметить, что на вопрос „во сколько“ ответ часто дают в процентах. Так, в нашем примере продукцию второй фабрики (800 пар обуви) можно принять за 100%; тогда разница в 120 пар составит 15%, а потому продукция первой фабрики составит 115%. Хотя и принято говорить, что первая фабрика выпускает обуви на 15% больше, чем вторая, но счет в процентах не дает все же ответа на вопрос „на сколько“, а означает именно отношение величин — во сколько". На 15% больше, это значит „больше в отношении 115:100".

Пример 1. В Сталинской Конституции имеется статья 144, которая касается флага СССР: „Отношение ширины флага к длине 1:2". Означает ли это, что установлена определенная величина флага? Конечно, нет. Можно приготовить огромные флаги, флаги средней величины и маленькие флажки, притом так, чтобы все они соответствовали указанному пункту Конституции. Что же выражает это предписание (1:2)? Оно дает отношение двух величин, двух отрезков, соотношение длины и ширины.

Если задать длину флага, например в 3 метра, то ширина должна быть равна 1,5 метрам. И наоборот, если известна ширина флага, например 50 см, то длину следует взять рав-



Черт. 1.

ной одному метру. Таким образом, узаконенное отношение (1:2) вполне определяет форму флага, но не его величину. Это отчетливо видно на черт. 1: первые два советских флага нарисованы с соблюдением узаконенного Конституцией отношения сторон; третий флаг взят с отношением сторон 1:1. Форма последнего флага противоречит Конституции.

Наш пример показывает, что отношение двух чисел не только выражает, во сколько раз одно число больше другого, но может иметь и самостоятельное значение. Так, в нашем случае отношение 1:2 определяет форму флага.

Пример 2. В саду во время гулянья была устроена лотерея. Выпустили 1000 билетов, из которых выигрышных было 80. Какова вероятность выиграть, купив один билет?

Шансы на выигрыш, очевидно, зависят от отношения числа выигрышных билетов к общему числу всех билетов, т. е. определяются парой чисел (80:1000). Это отношение называется вероятностью выигрыша и записывается обычно в виде дроби:

$$p = \frac{80}{1000} = \frac{8}{100}, \text{ или } 0{,}08.$$

Если 75 школьников возьмут по билету, то следует ожидать, что из них выиграют $75 \cdot p = 75 \cdot 0{,}08 = 12$ человек.

Если устроить лотерею с 3000 билетов, из которых 240 выигрышных, то шансы на выигрыш не изменяются, так как отношение числа выигрышных билетов к общему числу остается прежним:

$$\frac{240}{3000} = p = \frac{80}{1000} = 0{,}08.$$

Последний пример отчетливо показывает, что отношение p может оставаться неизменным, хотя изменяются числа, определяющие отношение. Это имеет место тогда, когда оба числа, составляющие отношение, умножаются или делятся на одно и то же число. Иначе говоря, отношение $(am:bm)$ равно отношению $(a:b)$.

Выяснив на этих примерах, что такое отношение, покажем, как это понятие применяется в вычислениях. Члены отношения $(m:n)$ можно разделить одновременно на число n. Тогда получим:

$$(m:n) = \left(\frac{m}{n} : \frac{n}{n}\right) = \left(\frac{m}{n} : 1\right) = (k:1).$$

Например:

$$(85:100) = \left(\frac{85}{100} : \frac{100}{100}\right) = \left(\frac{85}{100} : 1\right);$$

здесь $k = \frac{85}{100}$.

Число k называют численной величиной отношения. Если, например, $a = 240$, $b = 280$, то численная величина отношения $(b:a)$ равна $k = \frac{7}{6}$. Отношения $(a:b)$ и $(b:a)$ называются взаимно обратными. Их численные величины k_1 и k_2 удовлетворяют равенству $k_1 \cdot k_2 = 1$. В дальнейшем, для краткости, вместо „численная величина отношения“ будем говорить „величина отношения“.

Если известно одно из количеств (например $a = 700$ кг) и величина отношения другого количества к первому $\frac{b}{a} = k$ (например $k = 1{,}2$), то можно найти это второе количество b.

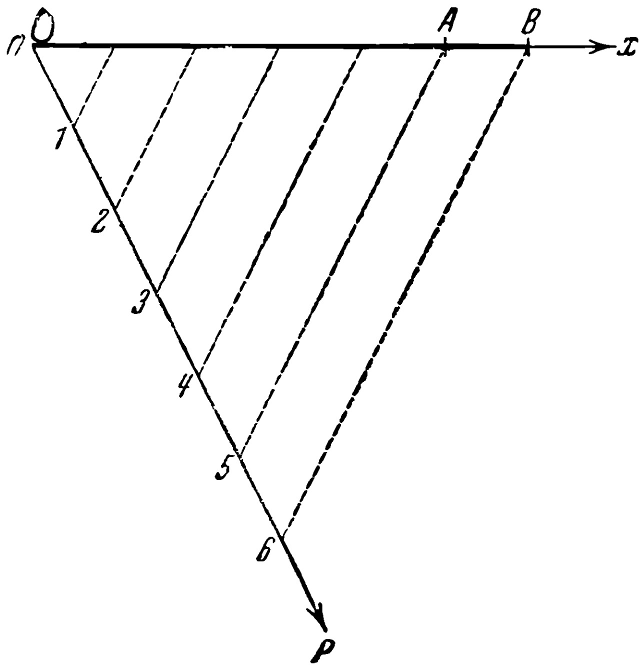
Из равенства $\frac{b}{a} = k$ получаем $b = ak$, т. е. чтобы получить число b, нужно число a умножить на численную величину отношения; взяв числа, поставленные в скобках, получим:

$$b = ak = 700 \cdot 1{,}2 = 840 \text{ кг.}$$

Ту же задачу можно решить графически. Примем некоторый отрезок за единицу масштаба, и пусть отрезок OA (черт. 2) на оси Ox представляет в этом масштабе величину a. Пусть дана также величина отношения $k = 1{,}2 = \frac{6}{5}$.

Под произвольным углом проводим из точки O другую ось Op. На этой оси, начиная от точки O, откладываем один за другим шесть равных отрезков. Конец пятого отрезка соединяем прямой линией с точкой A. Если из конца шестого отрезка провести параллель к прямой (5-A), то эта параллель пересечет ось Ox в некоторой точке B. Отрезок OB, измеренный в выбранном нами масштабе, дает искомую величину b.

Читатель, знакомый с элементами геометрии, тотчас заметит, что треугольники $O5A$ и $O6B$ подобны. Стороны второго треугольника получаются увеличением сторон первого в отношении ($5 \to 6$), [1] т. е. умножением на коэффициент $k = \frac{6}{5}$ (k — величина отношения); поэтому $OB = OA \cdot \frac{6}{5}$.



Черт. 2.

Сказанное тесно связано с двумя основными задачами арифметики: „найти часть по известному целому“ и „целое по известной его части“.

Пример 3. Заводом получено 70 тонн цинка, из этого количества одному из цехов выдано 80%. Сколько тонн выдано этому цеху?

Решение. Здесь известно целое: оно равно 70 т. Найти 80% — это значит перейти от 100 долей (которые содержатся в 70 т) к 80 долям; этот переход можно обозначить как ($100 \to 80$) или ($5 \to 4$). Переход совершается умножением на величину отношения, т. е. на коэффициент $k = \frac{4}{5}$.

Пример 4. Заводом получено 70 т цинка, это количество составляет 80% запаса, имевшегося на складе. Сколько тонн было на складе?

Здесь известна часть, состоящая из 80 долей, — она равна 70 т. Она получается из целого путем перехода ($5 \to 4$). Поэтому, обратно, целое получится из этой части, если применить обратный переход ($4 \to 5$), т. е. умножить 70 т на коэффициент $k = \frac{5}{4}$.

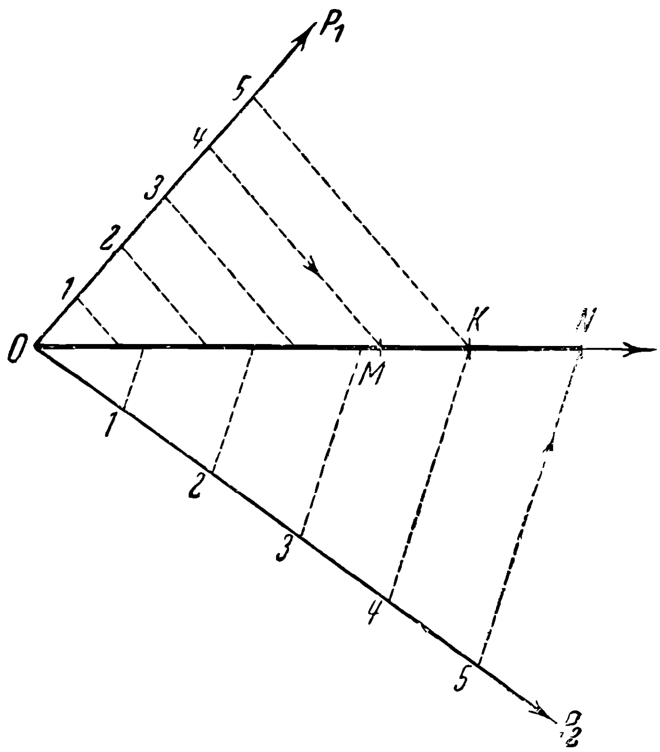
[1] Стрелка означает переход от одной величины к другой.

Полезно сопоставить обе задачи. С этой целью графическое решение обеих задач показано на одном и том же чертеже (черт. 3) Для первой задачи служит верхняя часть чертежа, для второй — нижняя. В первой задаче данная величина выражается отрезком OK, искомая — отрезком OM. Во второй задаче данная величина опять есть отрезок OK, искомая — отрезок ON.

2. Геометрическая модель отношения двух чисел

Две переменные величины называются пропорциональными, если при увеличении одной из этих переменных в несколько раз, во столько же раз увеличивается и другая величина. Так, пропорциональными являются радиус окружности и ее длина; длина пути и работа по перевозке груза и т. д.

Иногда две переменные величины связаны так, что с увеличением одной из них в несколько раз — другая не возрастает, а уменьшается во столько же раз. Такие две величины называются обратно пропорциональными. Таковы, например, число рабочих и число дней, необходимых для кладки стены (чем больше рабочих кладут стену, тем скорее они закончат работу); таковы длина и ширина прямоугольника при заданной его площади (чем больше ширина прямоугольника, тем меньше должна быть его длина); таковы же, наконец, сопротивление проводника и сила электрического тока при постоянном напряжении (чем выше сопротивление проводника, тем меньше сила тока, проходящего через него) и т. д.

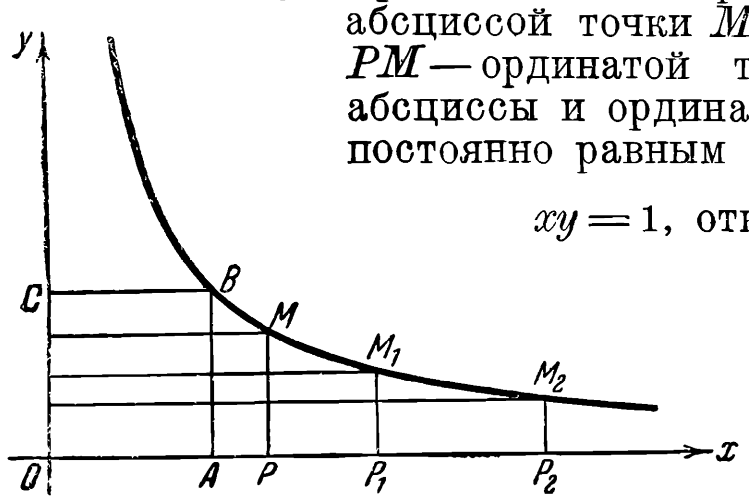


Черт. 3.

Построим график, показывающий связь двух величин, обратно пропорциональных друг другу. Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy (оси координат) (черт. 4). Будем строить прямоугольники, прилегающие к осям координат, так, чтобы площадь каждого из них была равна 1 кв. единице. Если взять $OA = 1$ ед., то высоту AB придется взять равной также 1 ед., и мы получим квадрат $OABC$. Если $OP_1 = 2$ ед., то высоту P_1M_1 придется взять равной $\frac{1}{2}$ ед.;

если $OP_2=3$ ед., то высоту P_2M_2 надо взять равной $\frac{1}{3}$ ед., и т. д.

Можно построить сколько угодно таких прямоугольников. В самом деле, для всякого отрезка $OP=x$ можно определить соответственную высоту прямоугольника PM, которую обозначим через y. Горизонтальный отрезок OP называют обычно абсциссой точки M, а вертикальный отрезок PM — ординатой точки M. Произведение абсциссы и ординаты $OP \cdot PM$ должно быть постоянно равным 1:

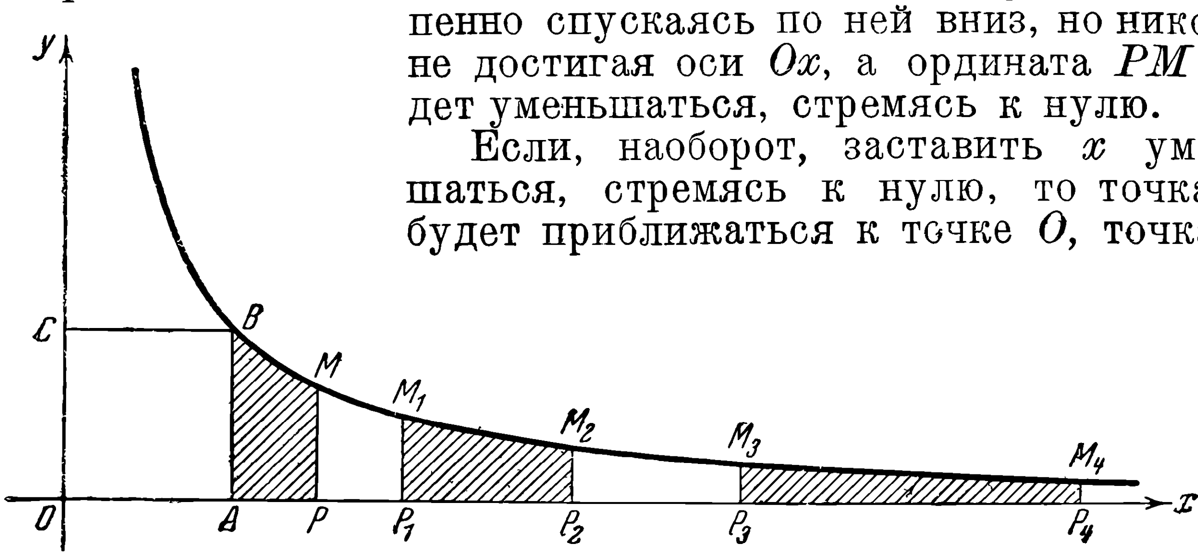


Черт. 4.

$$xy=1, \text{ откуда } y=\frac{1}{x}.$$

Если нанести на чертеж весьма большое число произвольно взятых абсцисс и соответствующих им ординат и через концы ординат провести плавную линию, то получим кривую, которая называется „равнобочной гиперболой“. Эта кривая дает возможность наглядно представить себе, как изменяются две переменные, из которых одна обратно пропорциональна другой. Для этого вообразим, что точка P движется по оси Ox вправо; тогда абсцисса $OP=x$ будет возрастать, точка M станет скользить по гиперболе, постепенно спускаясь по ней вниз, но никогда не достигая оси Ox, а ордината PM будет уменьшаться, стремясь к нулю.

Если, наоборот, заставить x уменьшаться, стремясь к нулю, то точка P будет приближаться к точке O, точка M



Черт. 5.

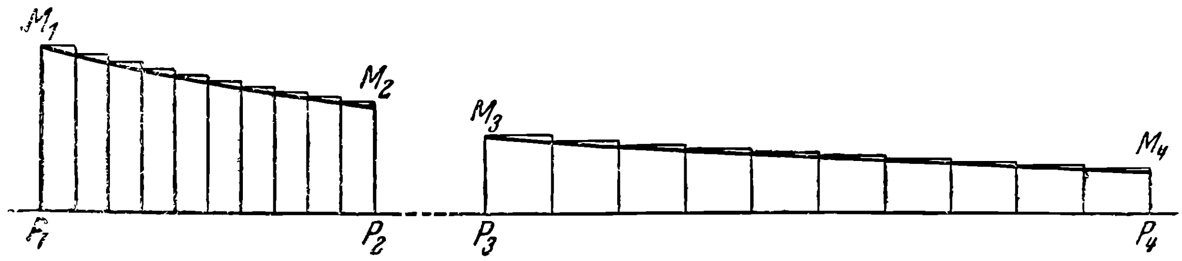
будет подниматься по гиперболе влево, удаляясь от оси Ox, вместе с тем ордината $y=PM$ будет неограниченно возрастать.

Пусть теперь даны какие-нибудь два числа: $x_1=a$, $x_2=b$ (пусть $x_1=2$, $x_2=3$). Взяв отрезки $OP_1=x_1$ и $OP_2=x_2$, построим для них соответствующие ординаты $P_1M_1=y_1$

и $P_2M_2=y_2$. Такое построение можно сделать для любой пары чисел x_1, x_2.

Криволинейную площадь $P_1P_2M_2M_1$, т. е. площадь, ограниченную ординатами P_1M_1 и P_2M_2 и кривой линией M_1M_2 (дугой гиперболы — черт. 5), мы сопоставим с отношением $k=\frac{x_2}{x_1}$.

Связь между отношением $\frac{x_2}{x_1}$ и площадью $P_1P_2M_2M_1$ оказывается полезной в математических вопросах, потому что рассматриваемая площадь обладает основным свойством отношения. Именно, как величина отношения $k=\frac{x_2}{x_1}$ не изменяется, если оба числа x_1 и x_2 умножить на одно и то же число $\left(\frac{mx_2}{mx_1}=\frac{x_2}{x_1}=k\right)$, так и площадь, построенная на интервале $[x_1 \ldots x_2]$, равна площади, построенной на интервале $[mx_1 \ldots mx_2]$.



Черт. 6.

Для простоты рассмотрим интервал от $x_1=2$ до $x_2=3$ и интервал от $x_3=4$ до $x_4=6$. Последние два числа в 2 раза больше первых двух. Отложим отрезки $OP_1=x_1$; $OP_2=x_2$; $OP_3=x_3$; $OP_4=x_4$ (черт. 5). Построим на отрезках P_1P_2 и P_3P_4 криволинейные площади $P_1P_2M_2M_1$ и $P_3P_4M_4M_3$. Докажем, что эти площади равны по величине, т. е. содержат одинаковое число квадратных единиц.

Так как эти площади ограничены кривой линией, то доказательство их равенства придется вести косвенным путем. Представим себе, что интервал P_1P_2 разделен на 10 равных долей; так как $P_1P_2=1$ ед., то длина одной доли равна 0,1 ед. Построим ступенчатую фигуру, как показано на черт. 6 (на нем обе криволинейные трапеции избражены в большем масштабе, чем на черт. 5). Каждый маленький прямоугольник имеет высотой левую ординату, и потому прямоугольники выходят зубцами за кривую линию. Точно такое же построение сделаем для второго отрезка P_3P_4. Длина P_3P_4 равна 2 ед.; длина одной доли будет равна $\frac{2}{10}=0,2$ ед. Сравнивая любой из десяти прямоугольников второй фигуры с соответствующим прямоугольником первой фигуры (например. 4-й с 4-м; 5-й с 5-м и т. д.), видим, что у второй фигуры ширина прямоугольника в 2 раза больше, но одновременно высота каждого прямоугольника второй фигуры в 2 раза меньше, чем высота соответствующего прямоугольника первой фигуры, как это видно из способа построения гиперболы (см. стр. 10). Итак, соответственные прямоугольники равны по площади. Отсюда следует, что и площадь всей второй ступенчатой фигуры равна площади всей первой фигуры.

Разделим теперь мысленно отрезки P_1P_2 и P_3P_4 каждый на 100 равных долей и построим опять ступенчатые фигуры, каждая из которых на этот раз состоит из 100 прямоугольников. Повторив прежние рассуждения, придем к выводу, что площади этих новых ступенчатых фигур между собой равны.

Процесс такого одновременного подразделения обоих отрезков P_1P_2 и P_3P_4 можно продолжать как угодно далеко, все более увеличивая число долей, на которые делятся эти отрезки; каждый раз будем приходить к равенству площадей обеих ступенчатых фигур. Если брать число долей $n = 100$, 200, 400, 800 и т. д., то левая ступенчатая фигура по величине площади подходит как угодно близко к криволинейной площади $P_1P_2M_2M_1$ и одновременно правая — к криволинейной площади $P_3P_4M_4M_3$.

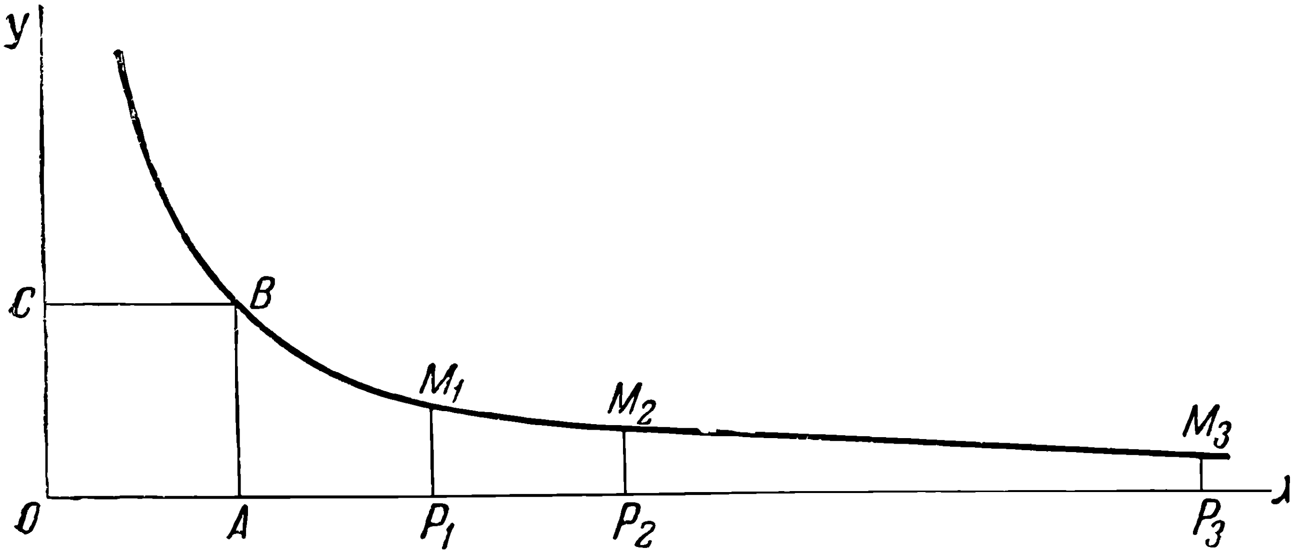
Разность между площадью ступенчатой фигуры и площадью соответствующей „гладкой“ фигуры можно сделать меньше любого заданного числа, например меньше чем 0,000 001, меньше чем 0,000 000 001, и т. д.; для этого нужно лишь достаточно мелко разделить отрезки P_1P_2 и P_3P_4.

Но площади обеих ступенчатых фигур в процессе их изменения все время остаются равными между собой, а потому и площади обеих гладких фигур, к которым приближаются наши ступенчатые фигуры, не могут не быть равными между собой.

Мы взяли две криволинейные трапеции, опирающиеся на отрезки [2...3] и [4...6]. Если бы вторую из этих трапеций мы заменили трапецией, построенной на отрезке [6...9], то прямоугольники ступенчатой фигуры, построенной для этой трапеции, были бы в три раза шире и в три раза ниже, чем прямоугольники первой криволинейной фигуры, так что площадь этой криволинейной трапеции была бы такой же, как и у рассмотренных ранее. Ту же площадь, очевидно, будет иметь всякая криволинейная трапеция, построенная на отрезке [$2m$...$3m$]. Иначе говоря, если изменять границы отрезка [a...b], на котором построена криволинейная трапеция, оставляя неизменным отношение $b:a$, то площадь криволинейной трапеции не изменяется. Во взятом примере отношение большего числа к меньшему равно 3:2. Поэтому обе рассмотренные нами криволинейные площади равны площади, опирающейся на отрезок [1...1,5]; эта последняя является как бы мерой остальных.

Итак, каждому отношению двух чисел $\frac{x_2}{x_1}=k$ мы отнесли некоторую другую величину — площадь криволинейной трапеции. Величина k не изменяется при одновременном изменении чисел x_1, x_2 в одном и том же отношении, но при этом и площадь криволинейной трапеции остается неизменной. Площадь трапеции, опирающейся на интервал $[x_1 \ldots x_2]$, как бы сопутствует величине отношения $k=\frac{x_2}{x_1}$. Но как измерить эту площадь?

Приближенно площадь криволинейной трапеции можно вычислить, если сделать весь чертеж на миллиметровой бумаге в большом масштабе; тогда можно подсчитать квад-



Черт. 7.

ратики, заключенные внутри криволинейной площади. Но математика стремится к точности, и в V главе этой книги читатель узнает формулу, дающую точную величину площади. Здесь же нам важно подчеркнуть, что именно отношение двух чисел $\frac{x_2}{x_1}$, и только оно, определяет величину площади, ограниченной линией гиперболы $y=\frac{1}{x}$ и опирающейся на отрезок $[x_1 \ldots x_2]$.

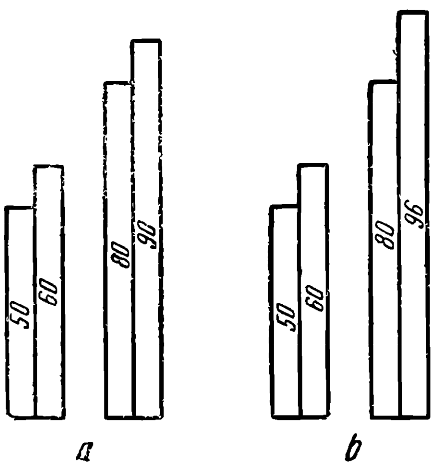
Из вышеизложенного можно извлечь следующее неожиданное и весьма важное следствие. Пусть произведение двух чисел $x_1 \cdot x_2$ дает третье число x_3.

Для конкретности будем считать, что $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=x_1 \cdot x_2=2 \cdot 3=6$. На черт. 7 отложены соответствующие отрезки $OP_1=x_1$; $OP_2=x_2$; $OP_3=x_3$.

Площадь, ограниченную гиперболой и опирающуюся на отрезок [1...6], можно представить как сумму площадей, опирающихся на отрезок [1...3] и на отрезок [3...6]. Но отношение (6:3) равно отношению (2:1), а потому площадь, опирающуюся на отрезок [3...6], можно заменить площадью, опирающейся на отрезок [1...2]. Отсюда следует: криволинейная площадь, ограниченная гиперболой и расположенная на отрезке [1...6], равна сумме площадей, ограниченных той же гиперболой и расположенных на отрезках [1...2] и [1...3]. Вообще для всяких трех чисел x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих условию $x_3 = x_1 \cdot x_2$, площадь, ограниченная гиперболой и лежащая на отрезке [1...x_3], равна сумме площадей, ограниченных той же гиперболой, лежащих на отрезках [1...x_1] и [1...x_2]. Этот результат мы вкратце сформулируем так:

Теорема 1. Криволинейная площадь, ограниченная гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и лежащая на интервале [1...$x_1 x_2$], равна сумме площадей, лежащих на интервале [1...x_1] и интервале [1...x_2].

Так как на эти площади переносится, как мы видели, основное свойство отношений, то можно сказать, что эти площади играют роль геометрической модели отношений. Важное значение этой модели выяснится в последней главе. Там мы увидим, что величина площади, лежащей на интервале [1...a], есть „натуральный логарифм“ числа a, а теорема 1 даст принцип, на котором построена счетная линейка.



Черт. 8.

3. Пропорция и ее основное свойство

Мы только что имели дело с такими парами чисел, у которых отношение одного числа к другому одинаково, например 2 и 3; 4 и 6; 6 и 9. В каждой такой паре отношение первого числа ко второму равно 1:1,5. Если четыре величины a, b, c, d таковы, что отношение двух величин ($a:b$) равно отношению двух других ($c:d$), то говорят, что эти четыре величины образуют пропорцию и пишут $a:b = c:d$. Иногда такую пропорцию называют „кратной“ пропорцией, в отличие от разностной пропорции, о которой речь будет дальше. Данное нами определение пропорции означает, что величина первого отношения $k_1 = \frac{a}{b}$ и величина второго отношения $k_2 = \frac{c}{d}$ равны между собой. Так, взяв первую и последнюю пары из написанного выше ряда пар, можем написать пропорцию $2:3 = 6:9$.

Чтобы лучше уяснить сущность пропорции, полезно сопоставить ее с другим соотношением такого же рода. На черт. 8*a* представлены в виде столбиков четыре числа: $a=50$; $b=60$; $c=80$ и $d=90$. Из них второе настолько больше первого, насколько четвертое больше третьего: $60-50=90-80$, или $b-a=d-c$. Такую связь четырех чисел называют разностной пропорцией. На чертеже 8*b* представлены четыре числа: $a=50$, $b=60$, $c=80$, $d=96$. Здесь второе число во столько раз больше первого, во сколько раз четвертое больше третьего, а именно, $60:50=96:80$, или $b:a=d:c$. Такую связь четырех величин, как уже указано, называют кратной пропорцией, или просто пропорцией.

Из следующей таблички видна аналогия, существующая между свойствами разностной и кратной пропорций.

Разностная прогрессия Кратная прогрессия

	На сколько	Во сколько
I	$60-50=90-80$ $b-a=d-c=r$	$60:50=96:80$ $b:a=d:c=k$
II	$b=a+r$; $d=c+r$	$b=ak$; $d=ck$
III	$a+d=b+c$	$a\cdot d=b\cdot c$

При сложении двух крайних столбиков (1-го и 4-го) на черт. 8*a* и двух средних столбиков (2-го и 3-го) получаются одинаковые результаты. Это значит, что в разностной пропорции сумма крайних членов равна сумме средних.

Подобную связь можно установить и между членами кратной пропорции, с той лишь разницей, что здесь вместо суммы следует взять произведения средних и крайних членов. Если величина отношения $b:a$ равна k, то и $d:c=k$; отсюда следует, что $b=ak$, $d=ck$. Произведение крайних членов ad может быть заменено произведением трех множителей, если вместо d написать ck, $ad=a\cdot(ck)=ack$. Произведение средних также можно представить как произведение тех же трех множителей: $bc=(a\cdot k)\cdot c=akc$. Таким образом, установлено основное свойство всякой (кратной) пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних.

Для дальнейшего полезно сделать следующие замечания.

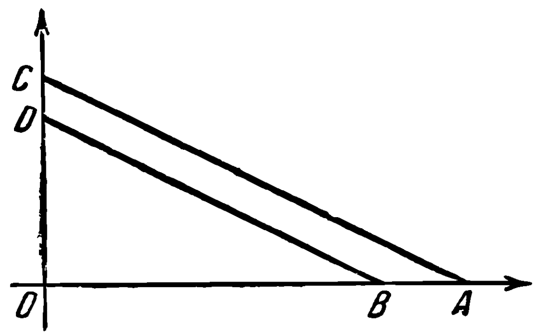
I. Если четыре числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению $ab=cd$, то из них можно образовать пропорцию, например такую:

$$\frac{a}{c}=\frac{d}{b}.$$

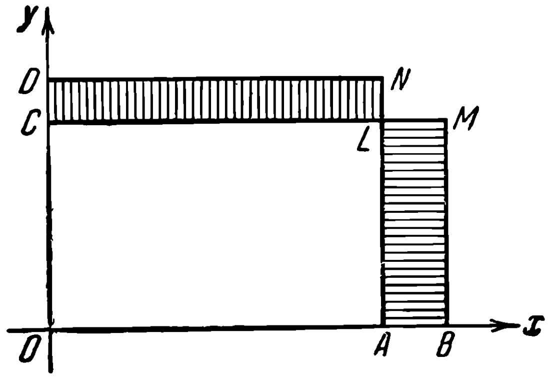
В самом деле, для того, чтобы получить эту пропорцию, достаточно равные произведения ab и cd разделить на одно и то же число bc. Получим пропорцию $\frac{ab}{bc}=\frac{cd}{bc}$. Но отношение $\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$, а $\frac{cd}{bc}=\frac{d}{b}$; значит $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$, что и требовалось.

II. Во всякой кратной пропорции $a:b=c:d$ можно переставить средние члены, т. е. вместо указанной пропорции написать такую: $a:c=b:d$. Это подтверждается тем, что из пропорции $a:b=c:d$ следует: $ad=bc$, а из этого равенства, согласно предыдущему замечанию, следует пропорция: $a:c=b:d$.

Перестановку средних членов пропорции можно пояснить чертежом 9, на котором изображены подобные треугольники OAC и OBD. Можно сказать, что треугольник OAC получен из треугольника OBD путем растягивания его сторон OB



Черт. 9.



Черт. 10.

и OD так, что $\frac{OA}{OB}=k_1=\frac{OC}{OD}$; обозначая стороны OA, OB, OC, OD буквами a, b, c, d, имеем: $a:b=c:d$. Но при таком растяжении отношение сторон $OB:OD$ не может измениться, так что будет: $OA:OC=OB:OD$, или $a:c=b:d$.

Поясним основное свойство пропорции еще одним геометрическим способом.

На осях координат Ox и Oy отложим отрезки $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$ (черт. 10) так, чтобы было

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=k,$$

и построим на этих отрезках как на сторонах прямоугольники $OALC$, $OBMC$, $OAND$. Из пропорции $b:a=d:c=k$ следует, что $b=ak$ и $d=ck$. Сравним теперь площади прямоугольников $OALC$ и $OAND$. Их общим основанием служит отрезок OA; высота второго из них (d) в k раз больше, чем высота первого (c). Поэтому площадь прямоугольника $OAND$ в k раз больше площади прямоугольника $OALC$:

$$\text{пл.}OAND=k\cdot\text{пл.}OALC. \qquad (1)$$

Сравним теперь площади прямоугольников $OALC$ и $OBMC$. Так как высоты их равны, и основание (b) второго из них в k раз больше, чем основание первого (a), то и площадь второго из них в k раз больше, чем площадь первого:

$$\text{пл.}\,OBMC = k \cdot \text{пл.}\,OALC. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), убеждаемся, что площади $OAND$ и $OBMC$ равны. Но пл. $OAND = ad$ и пл. $OBMC = bc$. Следовательно,

$$ad = bc.$$

Таким геометрическим путем мы пришли к основному свойству пропорции: из пропорции $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ мы получили равенство $ad = bc$.

Для иллюстрации основного свойства кратной пропорции можно воспользоваться также геометрической моделью отношений и теоремой 1 (стр. 14). Пусть дана пропорция $a:b = c:d$. На оси Ox отложим отрезки $OP_1 = a$, $OP_2 = b$, $OP_3 = c$, $OP_4 = d$ (черт. 5). Из § 2 нам известно, что криволинейная площадь $P_1P_2M_2M_1$ равна площади $P_3P_4M_4M_3$ и обе эти площади равны площади, расположенной на отрезке $[1\ldots k]$, где $k = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; иначе говоря, пл. $[a\ldots b]$ = пл. $[c\ldots d]$ = пл. $[1\ldots k]$.

Чтобы доказать, что $bc = ad$, достаточно доказать, что площадь, расположенная на отрезке $[1\ldots ad]$, равна площади, расположенной на отрезке $[1\ldots bc]$.

Согласно теореме 1:

$$\text{пл.}\ [1\ldots ad] = \text{пл.}\ [1\ldots a] + \text{пл.}\ [1\ldots d],$$
$$\text{пл.}\ [1\ldots bc] = \text{пл.}\ [1\ldots b] + \text{пл.}\ [1\ldots c].$$

Но, как видно на чертеже 5:

$$\text{пл.}\ [1\ldots d] = \text{пл.}\ [1\ldots c] + \text{пл.}\ [c\ldots d] = \text{пл.}\ [1\ldots c] + \text{пл.}\ [1\ldots k]$$

(так как пл. $[c\ldots d]$ = пл. $[1\ldots k]$). Точно так же

$$\text{пл.}\ [1\ldots b] = \text{пл.}\ [1\ldots a] + \text{пл.}\ [a\ldots b] = \text{пл.}\ [1\ldots a] + \text{пл.}\ [1\ldots k].$$

Поэтому предыдущие равенства превращаются в такие:

$$\text{пл.}\ [1\ldots ad] = \text{пл.}\ [1\ldots a] + \text{пл.}\ [1\ldots c] + \text{пл.}\ [1\ldots k],$$
$$\text{пл.}\ [1\ldots bc] = \text{пл.}\ [1\ldots c] + \text{пл.}\ [1\ldots a] + \text{пл.}\ [1\ldots k],$$

а эти равенства показывают, что

$$\text{пл.}\ [1\ldots ad] = \text{пл.}\ [1\ldots bc],$$

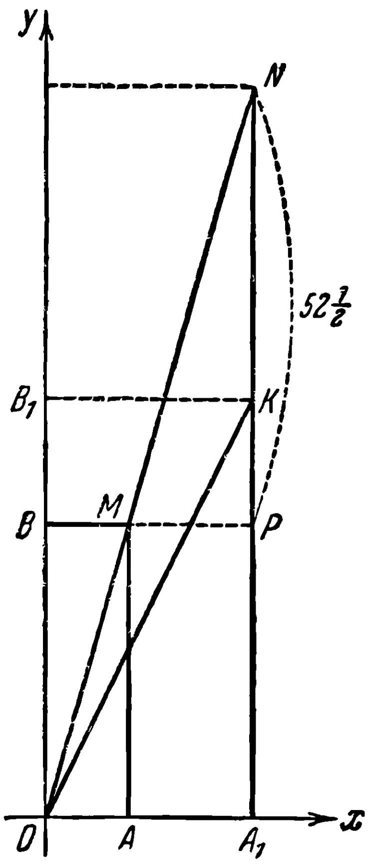
и, следовательно, $ad = bc$.

Основное свойство пропорции часто применяется при решении арифметических задач.

4. Задачи школьного типа

Задача 1.[1] Отец старше сына в $3^1/_2$ раза. Известно, что через 15 лет отец будет старше лишь в 2 раза. Сколько лет каждому?

Решение. С течением времени годы одинаково прибавляются к возрасту отца и возрасту сына, но отношение их лет с каждым годом изменяется. Сейчас отец старше сына в $3^1/_2$ раза. Если к годам сына прибавить 15 лет, то для того, чтобы отношение их лет оставалось прежним, следовало бы (рассуждая отвлеченно) прибавить к годам отца не 15, а $15 \cdot 3^1/_2 = 15 \cdot {}^7/_2 = 52^1/_2$ года.



Черт. 11.

Итак, можно сравнить два случая:

Воображаемый: к годам сына прибавляется 15 лет, к годам отца прибавляется $52^1/_2$ года.

Действительный: к годам сына прибавляется 15 лет, к годам отца прибавляется 15 лет.

Примем новый возраст сына за 1 долю; тогда новый возраст отца равен 2 долям; если же к годам отца прибавить $52^1/_2$, то этот предполагаемый возраст содержал бы $3^1/_2$ доли. Произведем сравнение:

прибавляя $52^1/_2$ лет, получаем $3^1/_2$ доли;
прибавляя 15 лет, получим 2 доли.

Лишние $1^1/_2$ доли получаются от прибавления лишних $37^1/_2$ лет. Поэтому $37^1/_2 = 1^1/_2$ долям. Одна доля равна $37^1/_2 : 1^1/_2 = \frac{75}{2} : \frac{3}{2} = 25$, т. е. 1 доля равна 25 годам. Но за одну долю мы приняли новый возраст сына. Следовательно, через 15 лет сыну будет 25 лет. В настоящее время сыну 10 лет. Отцу в настоящее время $10 \cdot 3^1/_2 = 35$ лет.

Поясним решение нашей задачи при помощи чертежа (черт. 11). Вдоль оси Ox будем откладывать число лет сына (отрезок OA), вдоль оси Oy — число лет отца (отрезок OB).

---

[1] Эта задача кажется малозначительной по содержанию. Но в действительности под этой кажущейся малозначительностью кроется важное внутреннее содержание, увидеть которое не так легко. Задача должна показать читателю, что если две величины (в данном случае — возраст сына и возраст отца) увеличиваются равномерно на одно и то же число, то отношение этих величин изменяется.

Отношение возраста отца к возрасту сына на графике выражается отношением сторон $\frac{AM}{OA}$ прямоугольника $OAMB$, т. е. крутизной наклона диагонали OM к оси Ox.

Положение вещей через 15 лет дается прямоугольником OA_1KB_1, причем $AA_1 = BB_1 = 15$ ед. Отношение $\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{A_1K}{OA_1}$ равно 2:1. Наклон диагонали OK значительно меньше, чем наклон диагонали OM.

Чтобы наклон диагонали нового прямоугольника не отличался от наклона диагонали OM, нужно, чтобы прямая OK совпала по направлению с прямой OM; это возможно только в том случае, если к отрезку A_1P прибавить отрезок PN, который в $3^1/_2$ раза больше отрезка MP. В последнем случае треугольник OA_1N будет подобен треугольнику OAM, и поэтому

$$\frac{A_1N}{OA_1} = \frac{AM}{OA} = \frac{3^1/_2}{1}.$$

Рядом с этой пропорцией поставим пропорцию $\frac{A_1K}{OA_1} = \frac{2}{1}$.

Если длину OA_1 принять за 1 долю, то в силу второй пропорции длина A_1K равна 2 долям; в силу первой пропорции длина $A_1N = 3^1/_2$ долям. Разность $A_1N - A_1K = KN$ равна, следовательно, $1^1/_2$ долям. Но эта разность составляет $37^1/_2$ лет и т. д., как это было сделано выше.

> Задача 2. У Иванова в два раза больше денег, чем у Петрова. Если Иванов отдаст Петрову 15 рублей, то у Иванова будет в $1^1/_2$ раза больше, чем у Петрова. Сколько денег у каждого?

Решение. Нам известно, что у Иванова было вдвое больше денег, чем у Петрова. Если кто-нибудь посторонний даст Петрову 15 рублей, а Иванову — 30 рублей, то у Иванова будет попрежнему в 2 раза больше денег, чем у Петрова. Если после этого сумму денег, образовавшуюся у Петрова, считать за одну долю, то сумма денег, образовавшаяся у Иванова, будет равна двум долям.

В действительности же Иванов не только не получил 30 рублей, но даже отдал 15 рублей: сумма денег, оставшаяся у него в действительности, равна всего лишь $1^1/_2$ долям. Сравним это действительное положение вещей с предполагаемым.

Предполагаемое: Иванов получил 30 рублей — получившаяся сумма денег равна 2 долям.

Фактическое: Иванов отдал 15 рублей — оставшаяся сумма денег равна $1^1/_2$ долям.

Разница в 45 рублей, очевидно, составляет $^1/_2$ доли. Значит, целая доля составляет 90 рублей. Чтобы узнать, какую сумму денег имел Петров, надо вычесть отсюда те 15 рублей, которые были ему даны. Значит, Петров имел 75 рублей. Иванов имел вдвое больше — 150 рублей.

Предлагаем читателю самому составить поясняющий чертеж, подобный чертежу, составленному нами для предыдущей задачи.

> Задача 3. (Индусская задача XII в.) *A* сказал своему другу *B*: „Дай мне 100 монет, и я буду в 2 раза богаче тебя". На это *B* ответил: Дай мне 10 монет, и я буду в 6 раз богаче тебя". Сколько денег у каждого?

Первое решение. Эта задача решается так же, как предыдущая, если искать не суммы денег, которыми обладали друзья, а те суммы, которые они имели бы, если бы поделили деньги так, как предлагал *A*. Тогда у *A* было бы в 2 раза больше денег, чем у *B*.

Если после этого *A* отдаст своему другу 100 монет, то у каждого из них станет столько монет, сколько было на самом деле; если *A* отдаст приятелю еще 10 монет, то у него будет в 6 раз меньше денег, чем у *B*. Так мы приходим к новой, вспомогательной задаче.

> Вспомогательная задача. *A* имеет в 2 раза больше монет, чем *B*. Если *A* передаст своему другу *B* 110 монет, то *B* будет иметь денег в 6 раз больше, чем *A*. Сколько монет у каждого?

Но эта вспомогательная задача того же типа, как задачи 1 и 2.

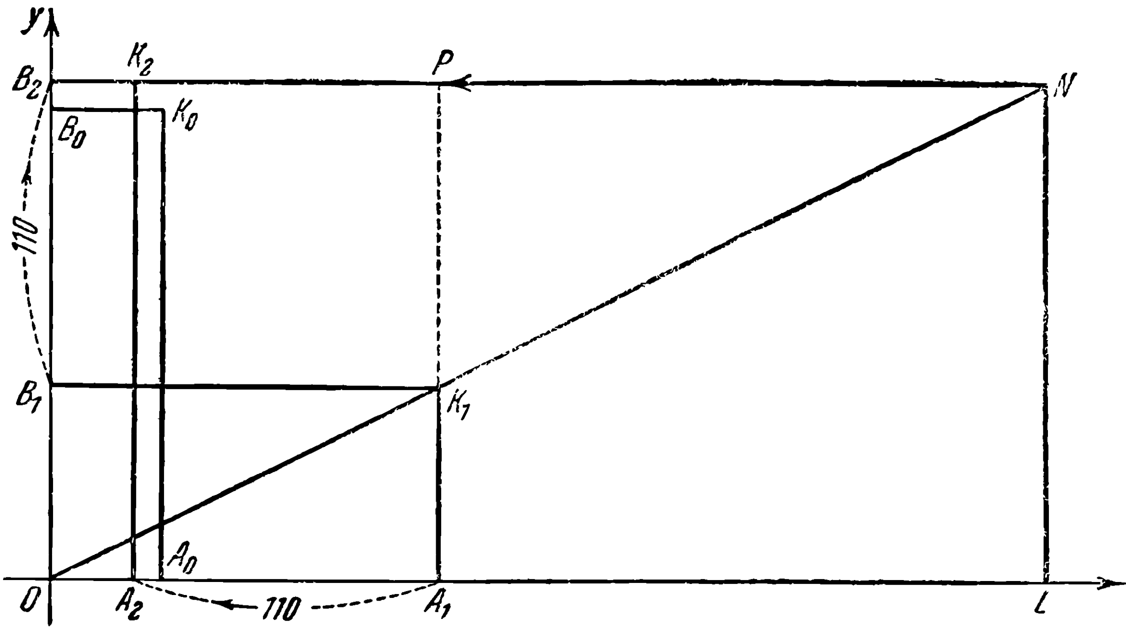
Решение. *A* имеет монет в 2 раза больше, чем *B*. Допустим, что *B* получил со стороны 110 монет. Тогда, чтобы сохранилось отношение (2:1), следовало бы лицу *A* дать со стороны 220 монет.

Итак, если лицу *A* добавить 220 монет, то ему принадлежащая сумма денег будет в 2 раза больше, чем новая сумма *B*; если же у лица *A* отнять 110 монет, то оно будет иметь лишь $^1/_6$ новой суммы *B*. Если принять новую сумму *B* за 1 долю, то в первом случае *A* будет иметь 2 доли, а во втором случае $^1/_6$ доли. В первом случае *A* будет иметь на 330 монет больше, и эти 330 монет составляют $2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$ доли. Итак, $\frac{11}{6}$ доли $= 330$, откуда 1 доля $= 330 : \frac{11}{6} = 330 \cdot \frac{6}{11} = 180$. Новая сумма *B* равна 180 монетам. Прежняя его сумма равна $180 - 110 = 70$ монетам. Прежняя сумма лица *A* равна $70 \cdot 2 = 140$ монетам.

Итак, вспомогательная задача решена: A имеет 140 монет; B имеет 70 монет.

Решение основной задачи. Теперь можно получить решение основной задачи. Так как 140 монет оказалось у A после того, как он получил 100 монет, то первоначально у него было $140-100=40$ монет, а у B было $70+100=170$ монет.

Иллюстрируем теперь решение задачи при помощи чертежа (черт. 12). Фактическое положение дается прямоугольником $OA_0K_0B_0$. Здесь отрезок OA_0 изображает ту сумму денег, которую имел A, а отрезок OB_0 — ту сумму денег, которую имел B.



Черт. 12.

Если исполнить пожелание A, то создалось бы положение, даваемое прямоугольником $OA_1K_1B_1$. Именно это положение мы приняли за исходное во вспомогательной задаче.

Если исходить от положения $OA_1K_1B_1$, то для выполнения пожелания B надо отложить:

$B_1B_2 = +110$ ед. вдоль оси Oy,

$A_1A_2 = -110$ ед. на оси Ox (в направлении справа налево).

Решение вспомогательной задачи можно проследить на графике следующим образом. OA_1 в 2 раза больше, чем OB_1. Если отрезок OB_1 получает прибавку $B_1B_2 = 110$ ед., то для сохранения величины угла K_1OA_1 (т. е. отношения 2:1) следовало бы прибавить к OA_1 отрезок A_1L, равный 220 ед., т. е. перейти к прямоугольнику $OLNB_2$. Мы же, наоборот, отнимаем от OA_1 отрезок $A_1A_2 = PK_2 = 110$ ед. Весь отрезок $NK_2 = NP + PK_2 = 220 + 110 = 330$ ед. Поэтому можно сопоставить два отношения:

$$B_2N : OB_2 = 2:1; \quad B_2K_2 : OB_2 = \frac{1}{6} : 1.$$

Если отрезок OB_2 (т. е. сумму, которую будет иметь B при исполнении его пожелания) принять за 1 долю, то отрезок $OL = B_2N$ равен 2 долям, а отрезок $B_2K_2 = \frac{1}{6}$ доли. Разность $B_2N - B_2K_2 = K_2N$ равна $\frac{11}{6}$ доли и в то же время $K_2N = 330$ ед. Отсюда 1 доля, т. е. отрезок $OB_2 = 180$ ед., и т. д.

Второе решение. Можно решить эту же задачу и иначе, вовсе не прибегая к решению вспомогательной задачи. Будем рассуждать так:

Если выполнить пожелание A, то у A будет вдвое больше денег, чем у B, — следовательно, у A будет $^2/_3$ всей суммы денег, имевшейся у них обоих вместе.

Если же выполнить пожелание B, то у B будет в шесть раз больше денег, чем у A; значит, у A будет только $\frac{1}{7}$ часть всей суммы денег.

Посмотрим теперь, насколько $^2/_3$ всей суммы больше, чем $^1/_7$. $^1/_7$ всей суммы денег получилась, когда A отдал 10 рублей; $^2/_3$ всей суммы получилось, когда A получил 100 рублей. Значит, к $^1/_7$ всей суммы надо прибавить 110 рублей, чтобы получить $^2/_3$ всей суммы.

Узнаем теперь, какую часть всей суммы составляют эти 110 рублей. Для этого придется из $^2/_3$ вычесть $^1/_7$:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{7} = \frac{14-3}{21} = \frac{11}{21}.$$

Итак, 110 рублей составляют $^{11}/_{21}$ всей суммы. Значит, вся сумма равна $110 \cdot \frac{21}{11} = 210$ рублей. $^1/_3$ этой суммы равна 70 рублям. Но B имел на 100 рублей больше, чем $^1/_3$ всей суммы; значит, B имел 170 рублей, а A—40 рублей.

Примечание. Рассмотренная задача легко решается алгебраическим путем. Решение сводится к составлению и решению системы уравнений:

$$\frac{x+100}{y-100} = \frac{2}{1}; \quad \frac{x-10}{y+10} = \frac{1}{6},$$

где x и y обозначают неизвестные суммы денег, принадлежащие двум друзьям. Однако в этой книге мы стараемся держаться ближе к арифметике и по возможности все задачи решать без помощи алгебры. Это — своеобразная умственная гимнастика, полезная для дальнейших занятий математикой.

Задача 4. Если поезд будет итти со скоростью 45 км в час, то он придет на конечную станцию с опозданием на 1 час 20 мин. Если же поезд будет делать 60 км в час, то он придет на 4 часа раньше, чем полагается по расписанию. Узнать нормальную скорость поезда и длину пути.

Первое решение. Допустим, что из начального пункта пути одновременно выходят три поезда:

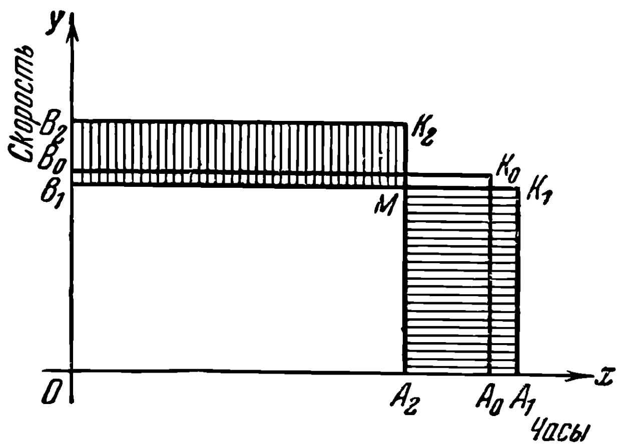
Нормальный, идущий с неизвестной нормальной скоростью x_0 км в час.

Замедленный, идущий со скоростью 45 км в час.

Скорый, идущий со скоростью 60 км в час.

Сравним движение замедленного и скорого поездов. Рассмотрим положение поездов в тот момент, когда скорый поезд дошел до конечной станции. Нормальному поезду осталось итти еще 4 часа, а замедленному — еще $4+1^1/_3=5^1/_3$ часа.

Так как замедленный поезд идет со скоростью 45 км, то в указанный момент ему осталось пройти до конечной станции $45\cdot 5\frac{1}{3}=45\cdot\frac{16}{3}=240$ км. Таким образом, за время, протекшее от момента отправления поездов до момента прибытия скорого поезда на конечную станцию, замедленный поезд отстал от скорого на 240 км. Но за каждый час замедленный отставал на $60-45=15$ км. Следовательно, до указанного момента оба поезда были в пути $\frac{240}{15}=16$ часов. Так как скорый поезд проходит в 16 часов весь путь, делая по 60 км в час, то длина пути равна $60\times 16=960$ км. Нормальное время пробега равно $16+4=20$ часам. Нормальная скорость равна $960:20=48$ км в час.



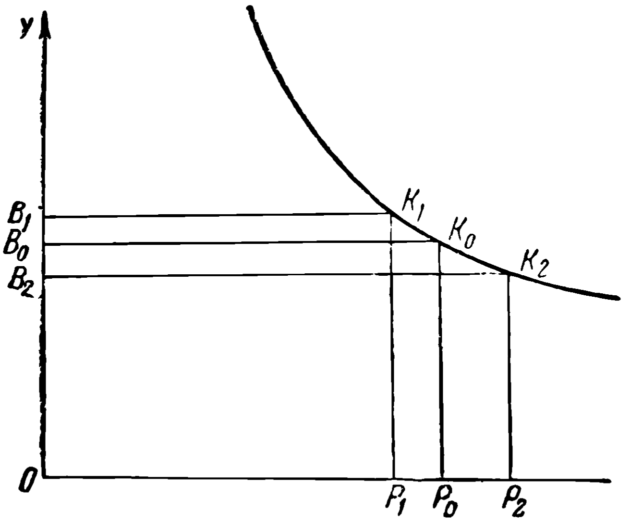
Черт. 13.

Покажем теперь решение задачи на чертеже (черт. 13).

Время в часах откладывается в некотором масштабе вдоль оси Ox; скорость в километрах — в некотором масштабе вдоль оси Oy. Произведение (часы на скорость) дает длину пройденного пути; на чертеже длина пройденного пути изображается площадью прямоугольника. Движение нормального поезда дается прямоугольником $OA_0K_0B_0$ (отрезок OA_0 изображает промежуток времени, в течение которого поезд находился в пути; отрезок OB_0 — скорость нормального поезда; площадь $OA_0K_0B_0$, измеренная в квадратных единицах, дает длину пути в километрах). Движение замедленного поезда дается прямоугольником $OA_1K_1B_1$; движение скорого — прямоугольником $OA_2K_2B_2$. На чертеже $OB_1=45$; $OB_2=60$; так как $OB_2>OB_1$, то $OA_2<OA_1$.

Площадь прямоугольника $OA_2K_2B_2$, так же как пл. $OA_1K_1B_1$, дает полную длину пути, поэтому эти площади равны. Площадь OA_2MB_1 дает длину пути, пройденного замедленным поездом за то время, за которое скорый поезд прошел весь путь. Расстояние, на которое отстал замедленный поезд, выражается площадью $B_1MK_2B_2$; но вместо нее можно взять площадь $A_2A_1K_1M$, так как эти площади равны; но пл. $A_2A_1K_1M$ равна $A_2M \times A_2A_1 = 45 \cdot 5^1/_3 = 240$; а потому и пл. $B_1MK_2B_2 = 240$. Отрезок $B_1B_2 = 15$; отсюда можно определить длину $B_1M = OA_2$: она равна $\frac{240}{15} = 16$ ед. и т. д.

Второе решение. Покажем его сразу на черт. 13. Так как обе площади $OA_1K_1B_1$ и $OA_2K_2B_2$ выражают длину всего пути и равны между собой, то имеем: $OA_1 \cdot OB_1 = OA_2 \cdot OB_2$, или: $OA_1 \cdot 45 = OA_2 \cdot 60$. Но если произведение двух чисел равно произведению двух других чисел, то из них можно составить пропорцию (см. стр. 13). В данном случае можно написать:



Черт. 14.

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{60}{45}; \text{ или же } \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{4}{3}.$$

Мы не знаем длины отрезков OA_1 и OA_2; но разность $OA_1 - OA_2 = 5^1/_3$ часов. Если $OA_1 = 4$ долям, то $OA_2 = 3$ долям; $A_2A_1 = 1$ доле $= 5^1/_3$ часов, откуда $OA_2 = 5^1/_3 \cdot 3 = 16$ часам; $OA_0 = OA_2 + A_2A_0 = 20$ часам, и т. д.

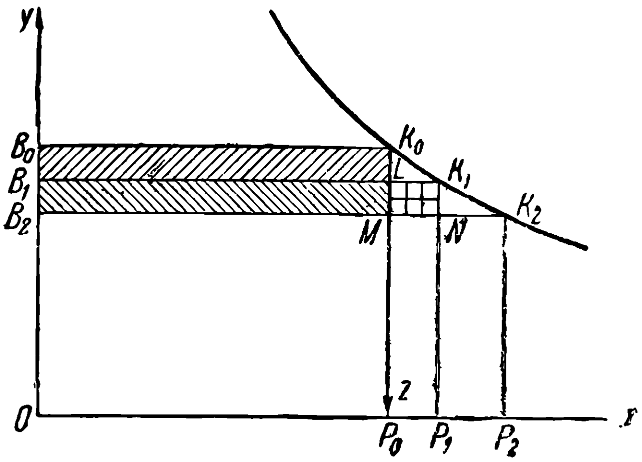
Задача 5. Несколько рабочих должны были сложить кирпичную стену. Если трех рабочих отпустить, то работа продлится двумя днями дольше. Если же нанять лишних четырех рабочих, то работа будет окончена двумя днями раньше срока. Сколько было рабочих и на сколько дней предполагалась работа?

Решение. Если число рабочих увеличить в несколько раз, то число дней работы уменьшится во столько же раз, и наоборот. Увеличение числа рабочих в отношении $k = \frac{m}{n}$ влечет за собой изменение числа дней работы в обратном отношении $\frac{1}{k} = \frac{n}{m}$. Иначе говоря: число рабочих и число дней работы обратно пропорциональны (стр. 9). При этом остается неизменным произведение числа дней работы на число рабочих, так называемое число человеко-дней. Если обозначить число рабочих через x, число дней работы через y, то произведение xy постоянно. Графиком, связывающим x и y, будет уже знакомая нам гипербола (черт. 14).

Предполагавшийся план работы дается прямоугольником $OP_0K_0B_0$. Первый случай, о котором говорится в условии задачи, представлен прямоугольником $OP_1K_1B_1$; второй случай — прямоугольником $OP_2K_2B_2$. Согласно условию задачи имеем (знак + обозначает увеличение числа рабочих; знак — обозначает их уменьшение):

$$\text{если } P_0P_1 = -3, \text{ то } B_0B_1 = +2;$$
$$\text{если } P_0P_2 = +4, \text{ то } B_0B_2 = -2.$$

Мы слегка видоизменим условие задачи, а именно — примем за исходное то положение, когда число рабочих наименьшее. Сообразно с этим переменим обозначения на чертеже, обозначая нулевыми значками новое исходное положение (черт. 15). $OP_0K_0B_0$ — исходный прямоугольник; число рабочих $OP_0 = x_0$; число дней работы $OB_0 = y_0$. Вместе с тем изменится и условие задачи, которое примет теперь такой вид: несколько рабочих должны сложить кирпичную стену: 1) если нанять еще 3 рабочих, то срок работы сократится на 2 дня; 2) если нанять еще 7 рабочих, то срок работы сократится на 4 дня.



Черт. 15.

В первом случае мы переходим от прямоугольника $OP_0K_0B_0$ к прямоугольнику $OP_1K_1B_1$. При этом исчезает полоса $B_1LK_0B_0$ (прежние рабочие работают на 2 дня меньше), но вместо нее прибавляется равная ей по площади полоса $P_0P_1K_1L$ (работа трех новых рабочих в течение $y_0 - 2$ дней) Во втором случае мы переходим от прямоугольника $OP_0K_0B_0$ к прямоугольнику $OP_2K_2B_2$. Сокращается полоса $B_0B_2MK_0$ (прежние рабочие работают на 4 дня меньше), но прибавляется равная по площади полоса $MP_0P_2K_2$ (новые 7 рабочих работают $y_0 - 4$ дней).

У нас $B_1B_0 = 2$; $B_2B_1 = 2$. Это значит, что площадь полосы $B_2MK_0B_0$ в 2 раза больше площади полосы $B_1LK_0B_0$. Отсюда следует, что площадь $P_0P_2K_2M$ в 2 раза больше площади $P_0P_1K_1L$. Обозначим для краткости длину отрезка P_0M, равную $y_0 - 4$, через z. Тогда пл. $P_0P_1K_1L =$ пл. $P_0P_1NM +$ + пл. $MNK_1L = z \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 3z + 6$. Площадь $P_0P_2K_2M$ равна $z \cdot 7$. Отсюда получаем уравнение: $7z = 2\ (3z + 6)$. Или же: $7z = 6z + 12$; откуда $z = 12$.

Итак, $MP_0 = 12$; $OB_0 = 16$. Предполагалось, что работа продлится 16 дней. Отсюда следует, что длина $P_0L = 14$; пл. $P_0P_1K_1L = P_0P_1 \times P_0L = 3 \cdot 14 = 42$ кв. ед. Но тогда и пл. $B_1LK_0B_0$ равна 42 кв. ед., $B_0B_1LK_0 = 2 \times B_1L = 42$ кв. ед. Отсюда $B_1L = 21 = B_0K_0$. Получаем решение: 21 рабочий и 16 дней.

Для случаев 1) и 2) получаем:
1) 24 рабочих и 14 дней,
2) 28 рабочих и 12 дней.

Задача 6. Задача Ньютона. (Условие задачи имеет искусственный характер, так как трудно представить себе совершенно равномерный прирост травы ежедневно в течение месяцев. Но мы все же приводим задачу, так как она очень полезна как упражнение.)

На одном лугу, площадью в 20 гектаров, паслись 64 коровы и они за 60 дней съели траву, которая первоначально была на лугу, а также ту траву, которая выростала в течение этих 60 дней. На другом лугу в 30 га паслись 120 коров и они за 36 дней съели траву, имевшуюся первоначально, а также ту, которая выростала за эти дни. Сколько коров можно пустить на луг площадью в 40 га, чтобы они при тех же условиях могли прокормиться 48 дней?

Решение. Прежде всего заметим, что, увеличивая площадь луга в несколько раз, можно и число пасущихся коров увеличить во столько же раз, потому что во столько же раз увеличится и первоначальный запас травы и количество травы, вновь вырастающей. Иными словами, число гектаров площади и число коров пропорциональны.

Поэтому видоизменим условие задачи таким образом, чтобы площадь луга во всех трех случаях была одинаковой.

Если решить задачу в таком виде, т. е. найти значение x для площади в 10 га, то для получения окончательного ответа надо будет число x умножить на 4.

Площадь	Коров	Дней
10 га	32	60
10 га	40	36
10 га	x	48

Прежде чем перейти к решению задачи, обратим внимание на то, из чего складываются количества корма на лугах. Во-первых, на всех трех лугах (площадью по 10 га) имеется одинаковое первоначальное количество травы. Во-вторых, на лугах происходит равномерный рост травы, и это количество вновь вырастающей травы пропорционально числу дней. В результате общее количество корма на лугах не пропорционально числу дней; в этой непропорциональности и заключается трудность задачи.

Переходим к решению.

1-й способ. Обозначим количество травы, имеющейся первоначально на лугу в 10 га, через A; количество травы, вновь вырастающей за 1 день, через a. Тогда все количество корма, которое получат коровы на первом лугу в 60 дней, равно $A+60a$; все количество корма на втором лугу, которое получат коровы в 36 дней, равно $A+36a$.

Если принять количество травы, которое съедает одна корова в 1 день, за одну порцию, то на первом лугу 32 коровы за 60 дней съедят $32 \cdot 60=1920$ порций, а на втором лугу 40 коров за 36 дней съедят $40 \cdot 36=1440$ порций. Итак, мы получаем равенства:

$$A+60a=1920 \text{ порций},$$
$$A+36a=1440 \text{ порций}.$$

По поводу этих двух равенств можно поставить два вопроса:

1) на сколько на первом лугу съедено травы больше, чем на втором лугу?

2) во сколько раз на первом лугу съедено травы больше, чем на втором лугу?

Остановимся сперва на первом вопросе.

На первом лугу съедено было больше на $1920-1440=480$ порций. Соответствующее излишнее количество корма на первом лугу имелось потому, что трава выростала в течение более длинного срока: $60a-36a=24a$. Поэтому $24a=480$ порциям, откуда $a=\frac{480}{24}=20$ порциям. Итак, за 1 день на лугу в 10 га вырастает трава в количестве 20 порций. Теперь можно определить и первоначальное количество травы. Если, например, взять I луг, то для него $60a=60 \cdot 20=1200$ порциям, откуда $A=1920-1200=720$ порциям. После того как найдены величины A и a, будет легко закончить решение задачи. На третьем лугу коровы должны пастись 48 дней; поэтому можно рассчитывать на количество корма $A+48a$, или же $720+48 \cdot 20=720+960=1680$ порциям. Неизвестное количество коров (x) должно за 48 дней съесть 1680 порций. Откуда

$$x=\frac{1680}{48}=35,$$

т. е. на третьем лугу паслось 35 коров.

2-й способ. Можно, однако, решить задачу, не отыскивая ни одной из величин A и a. С этой целью перепишем прежние равенства:

$$A+60a=1920 \text{ порциям},$$
$$A+36a=1440 \text{ порциям},$$

и поставим вопрос: во сколько раз на первом лугу было съедено травы больше, чем на втором лугу, т. е. рассмотрим отношения левых и правых частей обоих равенств. Получим пропорцию:

$$\frac{A+60a}{A+36a}=\frac{1920}{1440}, \text{ или же } \frac{A+60a}{A+36a}=\frac{4}{3}.$$

Из этой пропорции мы не сумеем определить неизвестные величины A и a. Однако, пользуясь основным свойством пропорции, получим соотношение: $3A+180a=4a+144a$; откуда дальше следует: $A=36a$.

Это соотношение означает, что первоначальное количество травы на лугу в 10 га равно такому, какое вновь вырастает в течение 36 дней. Этой связи неизвестных величин A и a достаточно, чтобы довести решение задачи до конца. А именно, теперь мы можем учесть общие количества корма на лугах в одинаковых долях, и отпадает та трудность задачи, о которой выше говорилось.

Сравним положение вещей на первом лугу (можно было бы взять также и второй луг) и на третьем лугу. На первом лугу при 60 днях мы имеем общее количество корма, равное $A+60a$, или же $36a+60a=96a$; на третьем лугу, где коровы должны пастись 48 дней, мы можем рассчитывать на запас корма, равный $A+48a=36a+48a=84a$. Теперь мы имеем перед собой обычную задачу на тройное правило.

	Запас	Число дней	Число коров
I луг	$96\ a$	60	32
III луг	$84\ a$	48	x

Очевидно, число коров должно быть пропорциональным запасу корма, а при одинаковых количествах корма обратно пропорциональным числу дней.

Хотя мы не знаем величины a, однако отношение $84a:96a$ вполне определенное; оно равно отношению $\frac{84}{96}=\frac{7}{8}$. Поэтому, переходя от первого луга к третьему, надо число коров (32) изменить в отношении $(8\longrightarrow 7)$, т. е. умножить на дробь $\frac{7}{8}$. Далее, при переходе от 60 к 48 дням, т. е. при изменении периода времени в отношении $(5\longrightarrow 4)$, мы должны число коров изменить в обратном отношении $(4\longrightarrow 5)$, т. е. умножить на дробь $\frac{5}{4}$. В результате получаем:

$$x=32\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{4}=35.$$

В исходной задаче, площадь третьего луга была равна не 10 га, а 40 га. Соответственно этому, надо увеличить и число коров. Окончательный ответ: 140 коров.

Заметим в заключение, что всю эту задачу можно решить в общем виде — не на конкретных числах, а на буквах.

Такое решение требует весьма длинных выкладок. Здесь укажем только результат такого буквенного решения.

	Площадь	Число дней	Число коров
I луг	S_1	t_1	n_1
II луг	S_2	t_2	n_2
III луг	S_3	t_3	$n_3 = x$

Ответ такой: $x = \dfrac{S_3\,[S_1 n_2 t_2 (t_3 - t_1) + S_2 n_1 t_1 (t_2 - t_1)]}{S_1 \cdot S_2 \cdot t_3 (t_2 - t_1)}$.

Эта формула действует как автомат. Надо только вместо букв подставить численные данные и подсчитать. Получится искомое число коров на третьем лугу.

В следующих главах читатель встретит много примеров того, как составляются формулы.

5. Комбинирование отношений (цепное правило). Слияние нескольких отношений

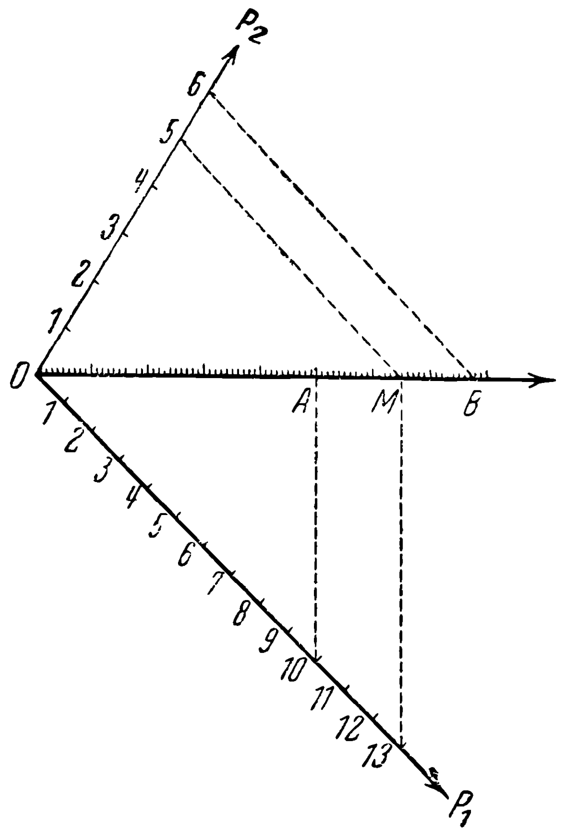
Мы показали, как отношения применяются при решении задач. Однако эти применения становятся более широкими благодаря тому, что можно из двух, трех, четырех,... отношений образовать одно. Поясним это примером.

> Пример. Заводоуправление увеличило число станков в 2 раза; в то же время, благодаря принятым мерам рационализации, производительность труда повысилась на 25%. Требуется узнать, во сколько раз увеличилась продукция завода.

Здесь мы имеем одно увеличение в отношении ($1 \to 2$) и другое в отношении ($100 \to 125$), или ($4 \to 5$). Задача состоит в том, чтобы узнать результат этих двух изменений.

Решим задачу следующим образом. После увеличения числа станков вдвое завод будет выпускать вместо одной единицы продукции две таких единицы. Но повышение производительности труда таково, что вместо каждых 4 единиц выпускается 5. Поэтому надо указанные 2 единицы умножить на коэффициент $^5/_4$. Получим: $2 \times \frac{5}{4} = 2{,}5$ единицы. В результате вместо 1 единицы будет выпускаться 2,5 единицы. Увеличение в $2\,^1/_2$ раза. Коэффициенты изменения $k_1 = 2$ и $k_2 = 1\,^1/_4$ как бы сливаются в один коэффициент $k = 2\,^1/_2$, который, как легко заметить, получился в результате их перемножения $2 \times 1\,^1/_4 = 2\,^1/_2$.

Допустим теперь, что после этих мероприятий на заводе образовалась группа стахановцев, которая указала новые приемы работы, повышающие производительность труда еще на 30%. Увеличение на 30% означает изменение в отношении (100⟶130) или же (10⟶13). Надо учесть эту величину нового отношения $k_3=\frac{13}{10}$, а для этого надо прежнюю продукцию умножить на дробь $^{13}/_{10}$. В результате получим: $2{,}5\times\frac{13}{10}=3{,}25$. Итак, окончательно, в результате всех мероприятий выпуск продукции достигает 325% первоначальной продукции. Увеличение на 225%. Коэффициент увеличения равен $^{13}/_{4}$.



Черт. 16.

Последний коэффициент $k={}^{13}/_{4}$ получился в результате слияния трех коэффициентов: $k_1={}^{2}/_{1}$; $k_2={}^{5}/_{4}$; $k_3={}^{13}/_{10}$, т. е. в результате их перемножения.

В виду того, что задачи, в которых несколько отношений сливаются в одно, часто встречаются в жизненной практике, остановимся на таких задачах подробнее.

Задача 1. Оборот кооператива поднялся за год на 30%; за второй год он поднялся на 20%. На сколько процентов поднялся оборот кооператива за два года?

Решение. Примем первоначальный оборот за 100%, или 100 долей. Тогда, после первого повышения, которое выражается отношением (100⟶130), или (10⟶13), т. е. коэффициентом $^{13}/_{10}$, оборот будет составлять 130 долей. К новому обороту надо применить второе увеличение в отношении (100⟶120), или (5⟶6). Такое изменение дается коэффициентом $k_2={}^{6}/_{5}$. Умножаем: $130\times{}^{6}/_{5}=156$. Вместо 100 долей получается в результате 156. Увеличение на 56%. Окончательный коэффициент $k=\frac{156}{100}=\frac{78}{50}=\frac{39}{25}$ получился путем объединения коэффициентов $k_1={}^{13}/_{10}$ и $k_2={}^{6}/_{5}$.

Вместо такого последовательного умножения можно сразу получить коэффициент увеличения оборота путем перемножения данных коэффициентов:

$$\frac{13}{10}\cdot\frac{6}{5}=\frac{39}{25}=\frac{156}{100}.$$

Присмотримся внимательнее к тому, что происходит с коэффициентами при их слиянии. При этом разборе воспользуемся чертежом (черт. 16). Исходная величина представлена отрезком OA; обозначим длину OA через a. Величина первого отношения $k_1 = {}^{13}/_{10}$ означает переход от отрезка OA к отрезку OM. Такое изменение на чертеже достигается при помощи добавочной оси OP_1 с 10 и 13 делениями. К новому отрезку OM надо применить изменение в отношении ($5 \rightarrow 6$). С этой целью на чертеже берется другая ось OP_2 с 5 и 6 делениями; вместо отрезка OM получаем отрезок OB.

Если OA равно 10 долям, то $OM = 13$ таким долям. Далее, надо отрезок OM разделить на 5 равных частей. Так как число 13 не делится на 5, то придется каждый из 13 отрезков, на которые разбит отрезок OM, разделить на 5 мелких долей. Тогда отрезок OM будет содержат 65 мелких долей, а отрезок OA — 50 таких же долей.

Если теперь отрезок OM разделить на 5 равных частей, то в каждой из них будет содержаться $\frac{65}{5} = 13$ мелких долей; но в таком случае отрезок OB содержит $13 \cdot 6 = 78$ мелких долей.

В результате получается: исходный отрезок OA содержит 50 мелких долей; отрезок OB содержит 78 таких же долей. Отношение $\frac{OB}{OA} = \frac{78}{50}$. Важно отметить, что число 50 получилось от того, что сперва отрезок OA был разделен на 10 частей, а затем каждая часть еще на 5 частей, т. е. OA в конце концов оказался разделенным на 50 частей. Число 50 есть произведение знаменателей обоих коэффициентов $k_1 = {}^{13}/_{10}$ и $k_2 = {}^{6}/_{5}$. Число 78 получилось оттого, что на оси OP_1 перешли к 13 частям, а затем на оси OP_2 — к 6 частям. Число 78 есть произведение числителей обоих коэффициентов k_1 и k_2.

Итак, новый коэффициент $k = {}^{78}/_{50}$ получается путем умножения обоих знаменателей и обоих числителей двух данных отношений. Но в арифметике такое действие производится при умножении двух дробей. Отсюда вытекает: если к величине a надо применить последовательно два изменения с коэффициентами k_1 и k_2, то вместо них можно применить одно изменение с коэффициентом k, который арифметически равен произведению первых двух:

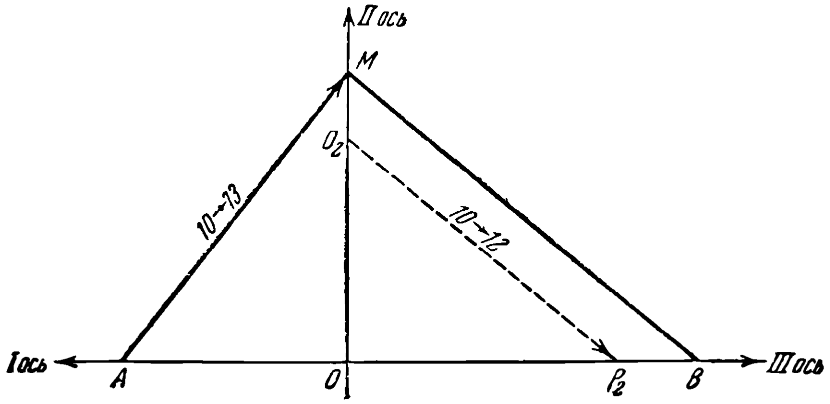
$$k = k_1 \cdot k_2.$$

Так мы получили указанное ранее правило.

Это важнейшее правило недостаточно применять механически. Надо вдуматься в его смысл, понять его сущность.

Решение рассмотренной задачи можно иллюстрировать еще другим чертежом (черт. 17).

Основной отрезок OA ($=100$ долям) отложен от точки O влево вдоль оси I. Первое изменение дается переходом к отрезку OM на оси II. Стрелка O_2P_2 означает второе изменение в отношении ($10 \rightarrow 12$). Проводя из точки M параллель к стрелке O_2P_2, получаем в пересечении с осью III точку B.

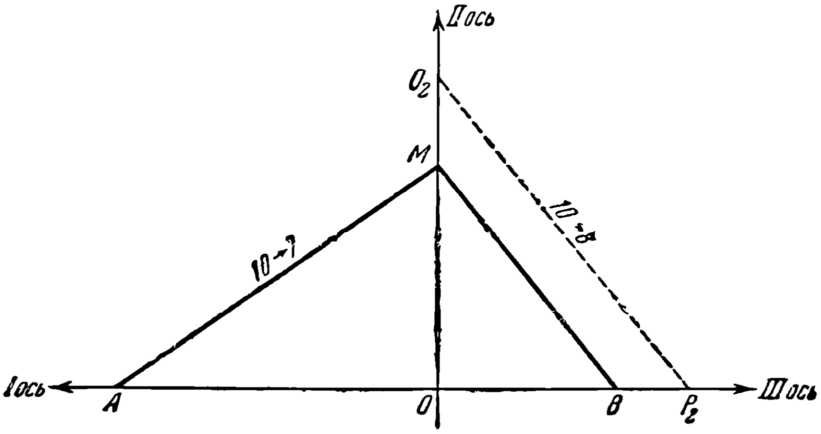


Черт. 17.

Из подобия треугольников O_2OP_2 и MOB следует: $\frac{OB}{OM}=\frac{OP_2}{OO_2}$; в нашей задаче $\frac{OB}{130}=\frac{120}{100}$ или $\frac{6}{5}$; откуда найдем $OB=156$.

Отношение $\frac{OB}{OA}=\frac{156}{100}$ дает решение задачи.

Рассмотрим еще несколько примеров.



Черт. 18.

Задача 2. Первоначально цена товара была понижена на 30%; затем опять понижена на 20%. На сколько процентов понизилась цена против первоначальной?

Решение. Эта задача решается таким же способом, как и предыдущая.

Первое изменение цены ($100 \longrightarrow 70$) выражается коэффициентом $k_1 = {}^7/_{10}$; второе изменение ($100 \longrightarrow 80$) — коэффициентом $k_2 = {}^4/_5$. В результате получится изменение, которое выражается коэффициентом:

$$k = k_1 \cdot k_2 = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{50}, \text{ или же } k = \frac{56}{100}.$$

Окончательная цена составляет 56% первоначальной; общее понижение цены 44%.

Решение этой задачи схематически представлено на черт. 18.

Задача 3. Сперва цена товара была повышена на 10%; затем понижена на 40%. На сколько процентов цена понизилась против первоначальной?

Решение. Первое изменение можно выразить коэффициентом $k_1 = \frac{110}{100} = \frac{11}{10}$; второе — коэффициентом $k_2 = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$. Из слияния обоих коэффициентов получается $k = k_1 \cdot k_2 = \frac{11}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{66}{100}$.

Итак, цены понизились на 34%.

Графическое решение предлагаем составить читателю самостоятельно.

Остановимся еще на вопросе, имеет ли значение порядок, в котором производятся два изменения. Выразим этот вопрос в форме задачи.

Задача 4. Допустим, что один кооператив получил распоряжение поднять цены на 10%, затем, вслед за ним, распоряжение понизить цены на 40%. Другой кооператив получил те же два распоряжения, но в обратном порядке: сперва понизить цены на 40%, затем повысить на 10%. Будут ли окончательные цены у обоих кооперативов одинаковы? Если нет, то у которого цена будет выше?

Решение. После всего вышесказанного не трудно ответить на поставленный вопрос. В первом случае окончательный коэффициент изменения равен: $k = k_1 \cdot k_2 = \frac{11}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{66}{100}$. Во втором случае окончательный коэффициент равен: $k = k_2 \cdot k_1 = \frac{6}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{66}{100}$. Согласно правилу умножения дробей, произведение в обоих случаях одно и то же. Окончательные цены в обоих кооперативах одни и те же.

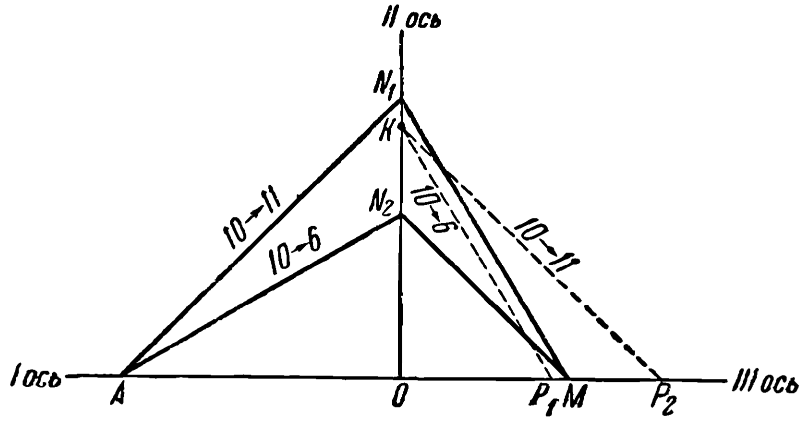
Покажем теперь на графике совпадение того и другого результата.

На черт. 19 первому случаю соответствует ломаная линия AN_1M, а второму случаю — линия AN_2M. Будем считать, что AO содержит 100 долей; при переходе к ON_1 происходит изменение в отношении $(10 \rightarrow 11)$; значит ON_1 равно 110 долям. При переходе от ON_1 к OM происходит изменение в отношении $(10 \rightarrow 6)$; значит $OM = 110 \cdot {}^6/_{10} = 66$ долям. Если же пойти по ломаной AN_2M, то получим $ON_2 = AO \cdot {}^6/_{10} = 100 \cdot {}^6/_{10} = 60$; $OM = 60 \cdot {}^{11}/_{10} = 66$, т. е. отрезок OM оказывается равным также 66 долям. Значит в обоих случаях получается один и тот же результат.

Задача 5. В саду устроена лотерея. Поставлены два сосуда с шарами. В одном сосуде имеется 4 красных и 16 белых, в другом 6 красных и 14 белых шаров. Каждый играющий вынимает по одному шару из обоих сосудов. Играющий выигрывает, если оба вынутых шара окажутся красными. Каковы шансы на выигрыш?

Примечание. Вынутые шары каждый раз возвращаются в те сосуды, из которых они были взяты, и перемешиваются.

Первое решение. Вероятность вынуть красный шар из первого сосуда определяется отношением (4:20) = (1:5) или дробью $p_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Это означает, что если вынимать подряд, например 100 раз, то из них примерно 20 раз появится красный шар. Чем больше число опытов, тем результат ближе к ожидаемому результату.



Черт. 19.

Допустим теперь, что в игре принимают участие 1000 чел. Если они все сначала вынимают шар из первого сосуда, то следует ожидать, что около 200 чел. вынут красный шар. Вынувшие белый шар из игры выбывают.

Остающиеся 200 чел. будут продолжать игру: каждый из них имеет право вынуть шар из второго сосуда. Вероятность вынуть красный шар из второго сосуда определяется отношением (6:20) = (3:10), или же дробью $p_2 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Следовательно, можно рассчитывать, что из 200 чел., удачно получивших красный шар из первого сосуда, только $200 \cdot {}^{8}/_{10} = 60$ чел. вынут красный шар также и из второго сосуда. Итак, из 1000 чел., участвующих в игре, лишь около 60 чел. окажутся выигравшими.

Отношение числа выигравших к числу всех играющих есть (60:1000), или (6:100), т. е. 6%. Таким образом, из комбинирования отношений $p_1 = \frac{4}{20}$ и $p_2 = \frac{6}{20}$ получено новое отношение $p = \frac{6}{100}$. Этот результат вполне согласуется с выше-указанным правилом сочетания двух коэффициентов: новое отношение равно произведению двух данных:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{20} \cdot \frac{6}{20} = \frac{24}{400} = \frac{6}{100}.$$

Заметим, что результат не изменится, если играющие сперва обратятся ко второму сосуду, а затем к первому.

Второе решение. Перенумеруем все шары в первом сосуде, причем номера 1—4 поставим на красных шарах, остальные номера 5—20—на белых. Так же поступим с шарами во втором сосуде: номера 1—6 поставим на красных, остальные на белых шарах. Если играющий вынимает по одному шару из обоих сосудов, то при этом может появиться любой номер из первого сосуда в сочетании с любым номером из второго сосуда, — номер одного шара не зависит от номера другого. Поэтому число всевозможных пар номеров равно $20 \cdot 20 = 400$. На прилагаемой схеме показаны такие сочетания двух номеров. В каждой клетке первое число указывает номер шара из первого сосуда, второе число — номер шара из второго сосуда. Нет никаких оснований ожидать, что какая-либо пара должна появляться чаще других; поэтому мы считаем, что появление всех пар одинаково возможно.

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6	1; 7	1; 8	. . .	1; 18	1; 19	1; 20
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6	2; 7	2; 8	. . .	2; 18	2; 19	2; 20
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6	3; 7	3; 8	. . .	3; 18	3; 19	3; 20
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6	4; 7	4; 8	. . .	4; 18	4; 19	4; 20
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6	5; 7	5; 8	. . .	5; 18	5; 19	5; 20
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6	6; 7	6; 8	. . .	6; 18	6; 19	6; 20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19; 1	19; 2	19; 3	19; 4	19; 5	19; 6	19; 7	19; 8	. . .	19; 18	19; 19	19; 20
20; 1	20; 2	20; 3	20; 4	20; 5	20; 6	20; 7	20; 8	. . .	20; 18	20; 19	20; 20

Какие же из этих пар номеров дают выигрыш? Очевидно, только те пары, в которых первое число не более 4, а второе — не более 6. На прилагаемой схеме они отделены жирной линией. Число этих пар равно $4 \cdot 6 = 24$. Итак, из 400 возможных пар только 24 пары номеров дают право на выигрыш. Так как вероятность появления всех пар одинакова, то отсюда следует, что шансы на выигрыш определяются отношением $(24:400) = (6:100)$, или дробью $p = \frac{24}{400} = \frac{6}{100}$. Вместе с тем имеет место равенство: $p = \frac{24}{400} = \frac{4}{20} \cdot \frac{6}{20} = p_1 \cdot p_2$. Это равенство еще раз подтверждает вышеуказанное правило комбинирования отношений.

На последнем примере с полной ясностью вырисовывается тот факт, что результат сочетаний двух отношений не зависит от того, в каком порядке эти отношения взяты. Ведь взять отношения в другом порядке — это значит вынимать сначала шар из второго сосуда, а уж потом из первого. Такое изменение порядка на нашей схеме отразится лишь в замене строк столбцами и столбцов строками.

Заметим еще, что такой же ход решения будет иметь задача вычисления вероятностей в случае трех, четырех и более сосудов. Если обозначить вероятности вынуть красный шар из одного сосуда буквами p_1, p_2, p_3, p_4,..., то вероятность вынуть только красные шары из всех сосудов можно определить по формуле $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots$.

6. Равные отношения

Мы видели, каким образом несколько заданных отношений соединяются в одно результирующее отношение. Обратимся теперь к рассмотрению такого случая, когда заданные отношения все равны между собой, т. е. величины отношений совпадают. Иллюстрируем этот случай задачами.

З а д а ч а 1. В парке устроена игра. Имеются 5 сосудов, в каждом из которых 60 красных и 40 белых шаров. Каждый играющий вынимает по одному шару из каждого сосуда. Выигрывает и получает премию тот, у кого все 5 вынутых шаров окажутся красными. Сколько премий должна приготовить администрация парка, если предполагается, что в игре примут участие 3000 человек.

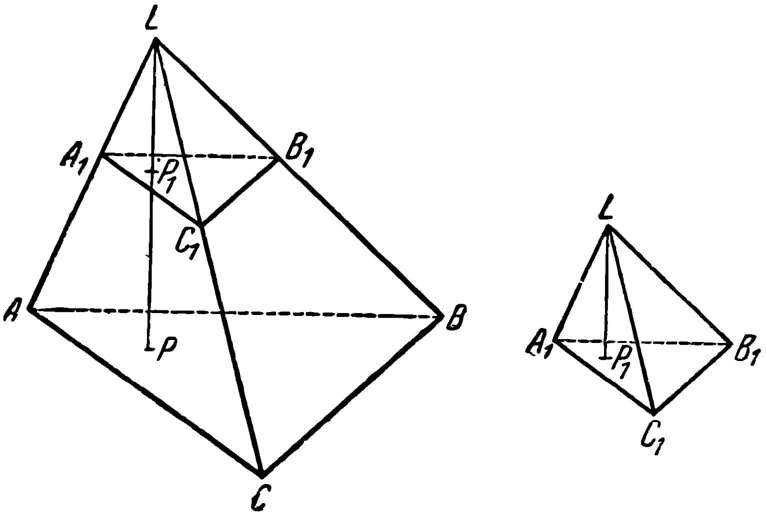
Р е ш е н и е. Вероятность вынуть красный шар из одного сосуда выражается отношением (60:100) или дробью $p = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$. Как уже было установлено, в случае нескольких сосудов вероятность выигрыша p равна произведению вероятностей получить красный шар из каждого сосуда в отдельности. Но в данном случае все эти вероятности между собой равны, поэтому искомая вероятность p равна $\frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10}$. Такое произведение нескольких равных множителей для краткости записывается так: $p = \left(\frac{6}{10}\right)^5$.

Значок 5, указывающий число равных множителей, называется показателем степени, а самое действие перемножения нескольких равных множителей — возвышением в степень. Путем обычного умножения получим: $p = \frac{7776}{100\,000}$. Эта дробь приблизительно равна $\frac{78}{1000}$, или $7{,}8\%$.

Полученный результат показывает, что из 1000 играющих в среднем будут выигрывать 78 чел. Если же в игре примут участие 3000 чел., то следует ожидать, что из них выиграют $78 \cdot 3 = 234$ чел.

Так как в действительности могут произойти отклонения в ту или другую сторону, то администрация должна приготовить премии в несколько большем количестве. Вопрос о том, какие возможны отклонения от ожидаемого числа выигрышей и какова вероятность того или иного отклонения, составляет предмет особого раздела математики — теории вероятностей.

Задача 2. Дана пирамида $LABC$ (черт. 20). Высота ее LP разделена в отношении $3:4$, считая от вершины. Через точку деления P_1 проведена плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды. Она рассекает пирамиду на две части. Требуется сравнить объемы обеих полученных частей.



Черт. 20.

Решение. Задача будет решена, если мы сумеем определить отношение объема верхней отсеченной пирамиды $LA_1B_1C_1$ к объему всей пирамиды.

Верхняя пирамида $LA_1B_1C_1$ является как бы уменьшенной копией пирамиды $LABC$; такие две пирамиды называются подобными. Найдем отношение высот обеих пирамид, т. е. отрезков LP_1 и LP. Отношение $LP_1:P_1P$ равно $3:4$, иначе говоря: отрезок LP_1 содержит 3 доли, а отрезок P_1P—4 доли. Тогда весь отрезок LP содержит 7 долей, и отношение $\frac{LP_1}{LP} = k$ равно $\frac{3}{7}$. Вследствие подобия фигур, таким же будет отношение любых соответственных ребер обеих пирамид.

Чтобы сравнить обе пирамиды $LA_1B_1C_1$ и $LABC$ по объему, построим два куба (черт. 21), из которых один имеет сторону, равную высоте $LP_1 = h_1$ пирамиды $LA_1B_1C_1$, а другой — сторону, равную высоте $LP = h$ пирамиды $LABC$. Объем пирамиды $LA_1B_1C_1$ меньше объема куба со стороной h_1; обозначим отношение объема пирамиды к объему куба через q (q, очевидно, есть правильная дробь).

Если увеличивать одновременно размеры пирамиды и размеры куба так, чтобы ребра куба все время оставались равными высоте пирамиды, то оба объема будут возрастать, но их отношение q остается неизменным (это положение принимаем без доказательства); иными словами, отношение q зависит только от формы пирамиды.

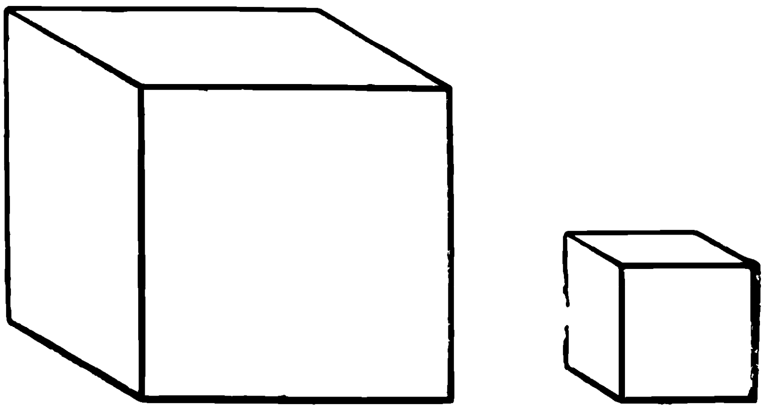
В конце концов, постепенно увеличиваясь, пирамида $LA_1B_1C_1$ превратится в пирамиду $LABC$, а куб — в куб с высотой h. Так как при этом превращении одной пирамиды в другую отношение объема пирамиды к объему куба не изменялось, то отношение объема пирамиды $LABC$ к объему куба со стороной h также равна q, и можно написать пропорцию:

$$\frac{\text{об. } LA_1B_1C_1}{\text{об. куба со стор. } h_1} = q = \frac{\text{об. } LABC}{\text{об. куба со стор. } h}.$$

Или же, переставляя средние члены пропорции (стр. 16):

$$\frac{\text{об. } LA_1B_1C_1}{\text{об. } LABC} = \frac{\text{об. куба со стор. } h_1}{\text{об. куба со стор. } h}.$$

Но объем куба равен третьей степени его ребра (получается трехкратным умножением ребра на самого себя), по-



Черт. 21.

этому отношение объемов кубов равно $\frac{h_1^3}{h^3}$. Эту последнюю дробь перепишем иначе: $\frac{h_1^3}{h^3} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = k^3$, где k есть величина отношения высоты меньшей пирамиды к высоте всей пирамиды. Итак, в результате находим:

$$\frac{\text{об. } LA_1B_1C_1}{\text{об. } LABC} = \left(\frac{LP_1}{LP}\right)^3 = k^3.$$

В нашем примере величина k равна $\frac{3}{7}$; поэтому величина отношения:

$$q = \frac{\text{об. } LA_1B_1C_1}{\text{об. } LABC} = \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{27}{343}.$$

Если объем всей пирамиды принять за 343 доли, то объем верхней пирамиды содержит 27 долей. Но тогда объем нижней части пирамиды содержит $343-27=316$ долей. Как видим, верхняя часть пирамиды гораздо меньше нижней.

Полезно отметить следующий общий принцип. Если даны две подобные фигуры в пространстве и величина отношения линейных размеров есть k, то величина отношения объемов q определяется равенством $q=k^3$. Для двух подобных фигур на плоскости, у которых величина отношения линейных размеров есть k, величина отношения площадей q определяется равенством $q=k^2$. Иначе говоря, при переходе от линейных размеров к площадям величина k возводится во вторую степень; при переходе от линейных размеров к объемам величина k возводится в третью степень.

Для дальнейшего будет полезно сделать следующее замечание. Пусть дан коэффициент отношения k, который больше, чем 1, например $k=1{,}2$. Рассмотрим ряд величин: A, Ak, Ak^2, Ak^3,.... Тогда разность Ak^2-Ak больше разности $Ak-A$, разность Ak^3-Ak^2 больше разности Ak^2-Ak, и т. д.

Приведем конкретный пример. Пусть A обозначает первоначальную продукцию завода. Если завод ежегодно увеличивает свою продукцию на 20% против предыдущего года, то величина отношения $k=\frac{120}{100}=1{,}2$. Тогда

за 1-й год завод выпустит $A\cdot k=A\cdot 1{,}2$ ед.,
за 2-й „ „ „ $(A\,k)\,k=Ak^2=A\,(1{,}2)^2$ ед.,
за 3-й „ „ „ $(Ak^2)\,k=Ak^3=A\,(1{,}2)^3$ ед. и т. д.

Излишек выработки завода за 1-й год против первоначальной равен:

$$Ak-A=1{,}2\cdot A-A=0{,}2A;$$

излишек выработки за 2-й год против выработки 1-го года равен:

$$Ak^2-Ak=A\cdot(1{,}2)^2-A\cdot 1{,}2=A\cdot 1{,}44-A\cdot 1{,}20=A\cdot 0{,}24.$$

Излишек выработки за 3-й год против выработки 2-го года равен:

$$A\cdot k^3-A\cdot k^2=A\cdot(1{,}2)^3-A\cdot(1{,}2)^2=A\cdot 1{,}728-A\cdot 1{,}44=A\cdot 0{,}288$$

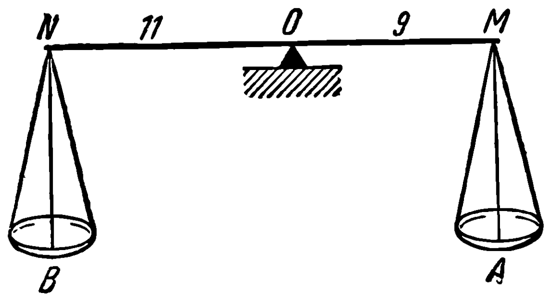
и т. д.

Отсюда видно, что излишки возрастают с каждым годом. Да это и понятно. Мы имеем каждый год повышение на 20%. Так как выработка завода с каждым годом растет, то и самые излишки, составляющие определенный процент выработки, также должны возрастать. Этим замечанием мы воспользуемся при решении следующей задачи.

Задача 3.[1]) У торговца имелись весы, но они оказались неправильными: точка опоры коромысла O не лежала на середине коромысла (черт. 22).

Заметив это, торговец стал поступать следующим образом. Одному покупателю он клал гири на чашку A и товар на чашку B, следующему покупателю наоборот — гири на чашку B и товар на чашку A. Он считал, что из двух рядом стоящих покупателей один получит немного больше, чем требуется, другой—немного меньше, а в общем интересы его и покупателей будут сохранены. Правильно ли он рассчитал? Если нет, то кто остался в убытке?

Решение. Пусть одно плечо коромысла $OM = m$ см, а другое $ON = n$ см (например, $m = 9$, $n = 11$). Из механики известно следующее правило: при равновесии рычага (коромысло весов представляет собой рычаг) произведение левого груза на длину левого плеча ON равно произведению правого груза на длину правого плеча OM.



Черт. 22.

Предположим теперь, что к торговцу пришли два покупателя, один вслед за другим, и оба купили по 1 кг масла. Взвешивая масло первому из них, торговец положил гири, скажем, на правую чашку, а масло на левую чашку. Пользуясь вышеприведенным правилом, не трудно определить истинный вес отпущенного масла: приравнивая произведение правого груза на правое плечо и левого груза на левое плечо, получаем:

1) $$1 \cdot OM = x \cdot ON;$$

$$\text{или } 1 \cdot m = x \cdot n, \text{ откуда } x = \frac{m}{n} \text{ кг};$$

$$1 \cdot 9 = x \cdot 11, \text{ откуда } x = \frac{9}{11} \text{ кг}.$$

Отвешивая масло следующему покупателю, торговец кладет гирю на другую чашку. Поэтому получаем:

2) $$1 \cdot ON = y \cdot OM$$

$$\text{или } 1 \cdot n = y \cdot m, \text{ откуда } y = \frac{n}{m} \text{ кг};$$

$$1 \cdot 11 = y \cdot 9, \text{ откуда } y = \frac{11}{9} \text{ кг}.$$

[1]) Задача взята из старого французского журнала. В наших условиях она совершенно не имеет практического значения; но как упражнение по арифметике задача представляет интерес.

Оба покупателя вместе должны получить 2 кг; но в действительности они получат $\frac{9}{11}$ кг $+\frac{11}{9}$ кг $=2\frac{4}{99}$ кг.

Как видим, торговец отпустил им лишних около 0,04 кг, т. е. 40 г; это составляет 2% от взвешенного товара.

Мы подсчитали результат для численного примера: $m = 9$ см, $n = 11$ см. Сделаем подсчет в общем виде, на буквах, не прибегая к численным данным. Истинный вес масла будет равен:

$$x+y=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}.$$

Он выражается суммой двух обратных дробей. Покажем что сумма двух обратных дробей всегда больше двух.

Допустим, что $m < n$. Преобразуем обе дроби, входящие в сумму:

$$\frac{m}{n}=\frac{n-(n-m)}{n}=\frac{n}{n}-\frac{n-m}{n}=1-\frac{n-m}{n};$$

$$\frac{n}{m}=\frac{m+(n-m)}{m}=\frac{m}{m}+\frac{n-m}{m}=1+\frac{n-m}{m}.$$

Первая дробь меньше единицы на величину $\frac{n-m}{n}$. Вторая дробь больше единицы на величину $\frac{n-m}{m}$. Из двух величин $\frac{n-m}{n}$ и $\frac{n-m}{m}$ вторая больше, так как у нее числитель такой же, как у первой дроби, а знаменатель меньше. Поэтому сумма дробей $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ больше, чем $1+1=2$.

Если принять во внимание, что в среднем одинаковые количества товара берут как те покупатели, которым товар взвешивается на правой чашке, так и те, кому он взвешивается на левой чашке, то не трудно понять, что торговец останется в убытке.

Все решение задачи о неправильных весах свелось к доказательству чисто арифметического неравенства

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}>2.$$

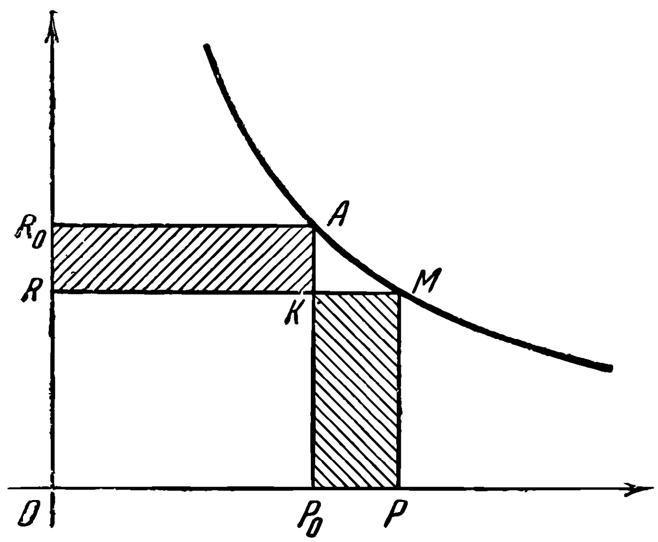
Можно это неравенство доказать еще следующим, скорее логическим, путем. Поставим рядом три количества

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \frac{m}{n} & 1 & \frac{n}{m} \\ \hline \end{array}\,, \text{ или же } \begin{array}{|c|c|c|}\hline \frac{9}{11} & \frac{11}{11}=1=\frac{9}{9} & \frac{11}{9} \\ \hline \end{array}\,.$$

Сравнивая первое число со вторым, мы видим (см. стрелку), что если первое разделить на 9 равных долей, то второе содержит 11 таких долей. Сравнивая второе число с третьим, мы также (см. стрелку) находим, что если второе разделить на 9 равных долей, то третье содержит 11 таких долей (эти доли отличны от предыдущих). Таким образом, отношение второго числа к первому равно отношению третьего ко второму. Если это отношение обозначить через k, а первое число условно обозначить буквой A, то рассматриваемые три числа можно представить в виде:

$$A,\ Ak,\ Ak^2.$$

Но в таком случае (стр. 39) излишек третьего числа над вторым больше, чем излишек второго числа над первым. Отсюда следует, что сумма крайних чисел больше, чем удвоенное среднее, т. е. больше 2.



Черт. 23.

В виде упражнения дадим еще графическое доказательство неравенства $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}>2$. Мы уже видели в начале главы, что взаимно обратные числа можно представить графически, при помощи равносторонней гиперболы (черт. 23). Если отложить абсциссу $OP=x=\frac{n}{m}$, то ордината будет $PM=y=\frac{1}{x}=\frac{m}{n}$. Число обратное 1 есть 1; на чертеже $OP_0=P_0A=1$. Если на оси Ox отложить отрезок $OP=x>1$, то соответствующая ордината $PM=y<1$. Требуется доказать, что сумма отрезков $OP+PM$ или $RM+MP>2$. Так как $R_0A=AP_0=1$, то достаточно показать, что $RM+MP>$ $>R_0A+AP_0$, т. е. что ломаная RMP длиннее ломаной R_0AP_0.

Согласно самому построению гиперболы (см. стр. 10) площадь любого прямоугольника $OPMR$ равна 1 кв. ед., так как $xy=1$. Поэтому пл. $OPMR$ равна пл. OP_0AR_0, откуда следует, что площадь полоски P_0PMK равна площади полоски $RKAR_0$. Но длина отрезка R_0A равна 1, а длина $P_0K<1$. Поскольку обе прямоугольные полоски равны по площади, ширина первой полоски KM должна быть больше ширины KA второй. Таким образом, $KM>KA$. А потому также

$$RK+KM+MP>R_0A+AK+KP_0.$$

Или же, наконец,

$$RM+MP>R_0A+AP_0,$$

т. е.

$$RM+MP>2;$$

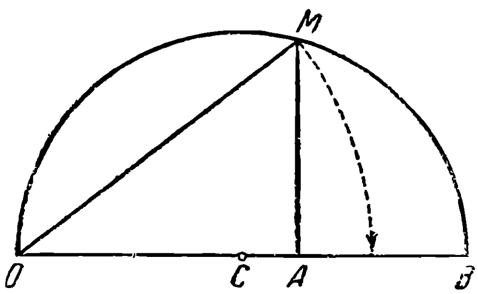
или, в другой записи,

$$x+y=\frac{n}{m}+\frac{m}{n}>2,$$

что и требовалось доказать.

7. Извлечение корня

Мы видели, каким образом несколько равных отношений сливаются в одно: коэффициент результирующего отношения равен степени коэффициента равных отношений, причем показатель степени равен числу равных отношений: $k=k_1^n$. Обратная задача, нахождение общего коэффициента нескольких равных отношений по данному коэффициенту результирующего отношения, выполняется с помощью действия извлечения корня.



Черт. 24.

Знаком действия извлечения корня служит знак $\sqrt[n]{\ }$. Например, запись $k_1=\sqrt[n]{k}$ обозначает, что число k_1 в n-й степени равно k. Значок n называется показателем или степенью корня. Извлечение корней второй и третьей степени выполняется обычно при помощи таблиц; извлечение корней более высоких степеней выполняется с помощью логарифмов (об этом будет сказано в последней главе).

Приближенное извлечение квадратного корня может быть выполнено графическим путем (черт. 24).

Пусть, например, требуется извлечь квадратный корень из числа $k^2=1{,}6$, т.е. найти число $k=\sqrt{1{,}6}$. Будем считать отрезок OA равным единице. Вдоль прямой OA отложим отрезок OB, равный в этом масштабе 1,6 ед. Строим окружность на OB как на диаметре; радиус этого круга будет равен $\frac{1}{2}OB$; $OC=$ $=\frac{1}{2}OB=0{,}8$ ед. Из точки A восставляем перпендикуляр к прямой OB до встречи с окружностью в некоторой точке M. Тогда длина отрезка OM дает искомую величину $k=\sqrt{1{,}6}$.

Чтобы доказать правильность построения, заметим, что треугольники OAM и OMB подобны (на нашем чертеже сторона MB второго из этих треугольников не проведена), — они прямоугольные и острый угол при точке O у них общий.

Из подобия треугольников следует, что $\frac{OM}{OA}=\frac{OB}{OM}$, или, если принять во внимание, что $OA=1$ и $OB=k^2$, получаем:

$$OM=\frac{k^2}{OM}, \text{ или } OM^2=k^2,$$

откуда

$$OM=k=\sqrt{1,6},$$

что и требовалось доказать.

8. Среднее геометрическое

В предыдущем параграфе мы считали, что на черт. 24 отрезок OA равен единице. Допустим теперь, что этот отрезок имеет произвольную длину. Будем считать, что длина $OA=$ $=a$ ед., длина $OB=b$ ед., длина $OM=g$ ед. Для отрезка OM мы установили пропорцию:

$$OA:OM=OM:OB, \text{ или же } a:g=g:b.$$

Так как в этой пропорции число g занимает оба средних места, то его по отношению к числам a и b называют средним пропорциональным.

Взяв произведения средних и крайних членов пропорции, получим:

$$a\cdot b=g\cdot g=g^2, \text{ или } g^2=ab.$$

Итак,

$$g=\sqrt{ab}.$$

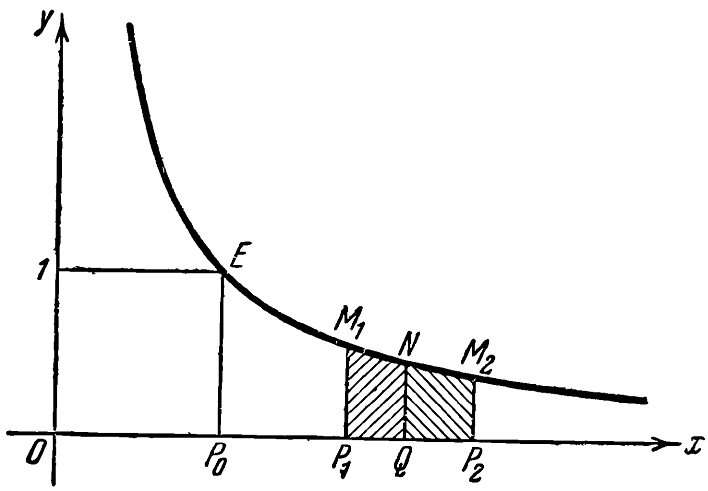
Если, например, $a=20$ см; $b=30$ см, то из пропорции $20:g=g:30$ получаем $g^2=20\cdot30$; $g=\sqrt{20\cdot30}=\sqrt{600}$ (приблизительно $g=24{,}5$).

Нахождение среднего пропорционального встречается еще в книге Эвклида „Начала“ (III в. до нашей эры). Оно необходимо при решении многих геометрических задач, в связи с чем число $g=\sqrt{ab}$ нередко называют средним геометрическим чисел a и b. В дальнейшем мы будем пользоваться этим последним названием.

Дадим еще одно наглядное и вместе с тем совсем неожиданное истолкование среднего геометрического двух чисел с помощью нашей модели для отношений.

На черт. 25 изображена гипербола, построенная нами в § 1: $OP_0=P_0E=1$. Вдоль оси Ox откладываем отрезок $OP_1=a$; $OP_2=b$. На отрезке $[1\ldots a]$ расположена криволинейная площадь $P_0P_1M_1E$; на отрезке $[1\ldots b]$ — площадь $P_0P_2M_2E$. Допустим теперь, что каким-нибудь образом удалось провести ординату QN так, что она разделила пополам площадь фигуры $P_1P_2M_2M_1$: пл. $P_1QNM_1 =$ пл. QP_2M_2N. Покажем, что в таком случае отрезок OQ будет средним геометрическим для отрезков OP_1 и OP_2.

Как мы знаем (стр. 13), площадь, ограниченная гиперболой и расположенная на отрезке $[x_1 \ldots x_2]$, соответствует отношению $\frac{x_2}{x_1}$. В данном случае пл. P_1QNM_1 соответствует отношению $\frac{OQ}{OP_1} = \frac{OQ}{a}$; пл. QP_2M_2N соответствует отношению $\frac{OP_2}{OQ} = \frac{b}{OQ}$. Ранее было доказано (стр. 12), что если два отношения равны, то равны также и соответствующие им площади, и обратно. Так как, по предположению, ордината QN разделила площадь фигуры $P_1P_2M_2M_1$ пополам, то пл. P_1QNM_1 равна пл. QP_2M_2N и отношение $\frac{OQ}{OP_1}$ равно отношению $\frac{OP_2}{OQ}$; значит, $\frac{OQ}{a} = \frac{b}{OQ}$. Полученную пропорцию можно переписать в таком виде: $a : OQ = OQ : b$. Значит, длина отрезка OQ и есть среднее геометрическое для чисел a и b.



Черт. 25.

Итак, если удалось каким-нибудь путем провести ординату QN так, чтобы она разделила пополам площадь, лежащую на отрезке $[a \ldots b]$, то длина отрезка OQ дает искомое среднее геометрическое.

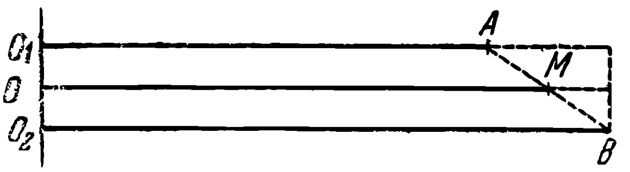
Практически мы не умеем определять площади криволинейных фигур, ограниченных гиперболой, и потому не знаем, где провести ординату QN. Наше рассуждение поэтому носит пока чисто теоретический характер.

С л е д с т в и е. Среднее геометрическое двух чисел a и b ближе к меньшему из этих двух чисел (т. е. $g - a < b - g$, если $a < b$).

В самом деле, из только что указанного построения следует, что если длина $OQ = g$ есть среднее геометрическое чисел a и b ($OP_1 = a$, $OP_2 = b$), то ордината QN должна делить пополам пл. $P_1P_2M_2M_1$. Но линия гиперболы, если смотреть вдоль оси Ox вправо, постепенно понижается, а потому вертикальный отрезок QN, делящий пополам пл. $P_1P_2M_2M_1$, должен быть расположен ближе к левой ординате P_1M_1. Таким образом, разность $OQ - OP_1 = g - a$ меньше разности $OP_2 - OQ = b - g$, что и требовалось доказать.

9. Три средних

В предыдущем параграфе мы познакомились со средним геометрическим, его обычно обозначают буквой g (первая буква французского слова géométrique — геометрический). Помимо среднего геометрического в математике употребляют еще два «средних»: среднее арифметическое и среднее гармоническое. На практике особенно часто употребляется среднее арифметическое. Так, например, если рабочий получил в один месяц 250 руб., а в следующий месяц 280 руб., то его средняя зарплата за эти два месяца была 265 руб. Она равна полусумме обоих чисел. Принято обозначать арифметическое среднее буквой m (от французского слова „moyenne" — средняя, или латинского medium — среднее). Итак, для двух заданных чисел a и b среднее арифметическое есть $m = \frac{a+b}{2}$.



Черт. 26.

На графике (черт. 26) показано построение среднего арифметического. На нем $O_1A = a$; $O_2B = b$; $OM = m = \frac{a+b}{2}$. Этот график едва ли требует пояснений.

Помимо среднего геометрического и среднего арифметического в математике встречается еще одно „среднее", носящее название среднего гармонического. Словесное определение его довольно громоздко: среднее гармоническое двух данных чисел есть число, обратное среднему арифметическому чисел, обратных заданным числам. Легче понять на конкретном примере, как образуется это „среднее":

Данные числа	Обратные им числа	Среднее арифметическое для обратных чисел	Число обратное последнему
$a = 20$ $b = 30$	$\frac{1}{a} = a_1 = \frac{1}{20}$ $\frac{1}{b} = b_1 = \frac{1}{30}$	$\frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)$	$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)}$

Принято обозначать это новое „среднее" буквой h (от французского слова harmonique — гармонический).

Сосчитаем это h для взятых чисел 20 и 30:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}; \quad 1 : \frac{1}{24} = 24 = h.$$

Не трудно также написать общую формулу для среднего гармонического. Имеем:

$$a_1=\frac{1}{a};\quad b_1=\frac{1}{b};\quad a_1+b_1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab};$$

$$\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{a+b}{2ab};\qquad 1:\frac{a+b}{2ab}=\frac{2ab}{a+b}=h.$$

Таким образом, среднее гармоническое определяется формулой:

$$h=\frac{2ab}{a+b}.$$

Нетрудно видеть, что среднее гармоническое можно определять и таким равенством:

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Покажем теперь, как можно построить среднее гармоническое, если пользоваться геометрической моделью отношений. На черт. 27 представлена гипербола, для каждой точки которой произведение $OP\cdot PM=x\cdot y=1$. Пусть длина $OP_1=a$; $OP_2=b$. Тогда длина ординаты P_1M_1 равна $\frac{1}{a}=a_1$; ордината $P_2M_2=\frac{1}{b}=b_1$. При помощи горизонтальных прямых M_1P_1' и M_2P_2' отложим эти новые отрезки на оси Oy. Для этих обратных величин a_1 и b_1 берем среднее арифметическое, т. е. точку H_1', лежащую посредине между точками P_2' и P_1'. Из точки H_1' проводим горизонтальную прямую до встречи с гиперболой в некоторой точке H; из точки H проводим ординату Hh. Тогда длина отрезка Oh представит собой среднее гармоническое величин a и b.

Сравним теперь все три рассмотренные нами „средние“ двух чисел a и b:

1) среднее геометрическое

$$g=\sqrt{a\cdot b};\ a:g=g:b;\ g\cdot g=a\cdot b,$$

2) среднее арифметическое

$$m=\frac{a+b}{2};\ b-m=m-a;\ m+m=a+b,$$

3) среднее гармоническое

$$h=\frac{2ab}{a+b};\ \frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right);\ \frac{1}{h}+\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Мы предполагаем, что $a<b$ и что оба числа больше 1. Оказывается, что для любых двух чисел средние g, m, h всегда располагаются в определенном порядке.

Выше мы уже показали (стр. 45), что среднее геометрическое g ближе к меньшему числу a. А это означает, что g меньше среднего арифметического m.

Итак, $a<g<m<b$. Остается установить положение среднего гармонического h. Можно показать, что среднее гармоническое h всегда меньше среднего геометрического g. Для этого достаточно показать, что на черт. 27 ордината hH делит площадь $P_1P_2M_2M_1$ так, что левая часть меньше правой (ранее было показано, что ордината gG делит эту же площадь пополам).

По построению гиперболы (стр. 10) имеем: пл. $OP_1M_1P_1'=$ $=$ пл. $OhHH_1'=1$ кв. ед. Отсюда следует, что площади прямоугольников $H_1'KM_1P_1'$ и P_1hHK равны; прибавляя к тому и другому прямоугольнику „криволинейный" треугольник KHM_1, получим: криволинейная пл. $H_1'HM_1P_1'$ равна криволинейной площади P_1hHM_1. Таким же образом можно показать, что криволинейная пл. $P_2'M_2HH_1'$ равна криволинейной площади hP_2M_2H.

Из сравнения криволинейных узких площадей $H_1'HM_1P_1'$ и $P_2'M_2HH'_1$ следует, что первая площадь меньше второй: ширина обеих полосок одинакова, длина у второй полосы всюду больше, чем у первой. Отсюда следует, что и пл. $P_1hHM_1<$ пл. hP_2M_2H.

Итак, доказано, что $h<g$. Таким образом, установлено расположение всех трех „средних": пять чисел a, h, g, m и b располагаются по возрастающей величине в следующем порядке:

$$a<h<g<m<b.$$

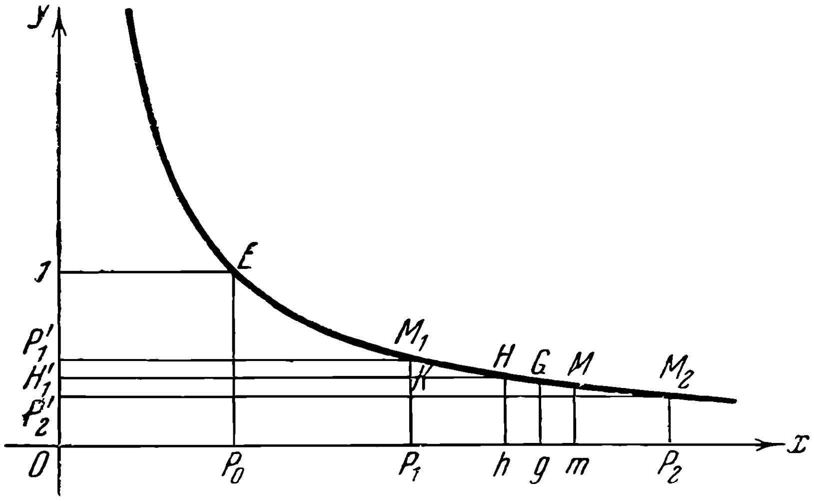
На черт. 27 отложены пять отрезков, соответствующие этим числам, на оси Ox:

$$OP_1=a;\quad Oh=h;\quad Og=g;\quad Om=m;\quad OP_2=b.$$

Теорема. Из трех средних h, g, m, число g есть среднее геометрическое двух других.

Доказательство. Докажем эту теорему геометрическим путем на черт. 27. Собственно, достаточно показать, что ордината gG делит криволинейную площадь $hmMH$ пополам, т. е. что пл. $hgGH=$ пл. $gmMG$. Прежде всего заметим, что поскольку g есть среднее геометрическое чисел a и b, ордината gG делит всю площадь $P_1P_2M_2M_1$ пополам. Если удастся доказать, что пл. P_1hHM_1 равна пл. mP_2M_2M, то разность пл. P_1gGM_1 — пл. P_1hHM_1 будет равна разности пл. gP_2M_2G — — пл. mP_2M_2M, иначе говоря, в таком случае можно будет утверждать, что пл. $hgGH=$ пл. $gmMG$; а это последнее равенство равносильно нашей теореме.

С другой стороны, равенство площадей P_1hHM_1 и mP_2M_2M равносильно пропорции $\frac{Oh}{Oa}=\frac{Ob}{Om}$, или же $\frac{h}{a}=\frac{b}{m}$. Эту пропорцию можно выразить так: среднее гармоническое во столько раз больше числа a, во сколько раз число b больше среднего арифметического. Интересно отметить, что эта пропорция была известна (как недавно установлено археологами) в древнем Вавилоне $4^1/_2$ тысячи лет назад.



Черт. 27.

Чтобы установить правильность пропорции, достаточно показать, что произведение крайних членов равно произведению средних. Для среднего арифметического m и среднего гармонического h мы имели формулы: $h=\frac{2ab}{a+b}$; $m=\frac{a+b}{2}$. Их произведение $h\cdot m=\frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2}=ab$. Таким образом, „вавилонское“ соотношение доказано.

Отсюда, обратно, следует, что пл. $P_1hHM_1=$ пл. mP_2M_2M, далее, что пл. $hgGH=$ пл. $gmMG$ и что $h:g=g:m$, а это и требовалось доказать.

ГЛАВА II

ЛЕСТНИЦА „НА СКОЛЬКО"

1. Как выводится формула

Основной задачей этой главы является рассмотрение арифметической прогрессии и задач, с нею связанных. Но первый параграф будет стоять в стороне от основной темы. Здесь мы покажем на одном типичном примере, каким образом из анализа задачи выводится формула.

Задача. Из семи кандидатов требуется выбрать трех делегатов на конференцию. Сколько может быть различных результатов выборов (различных случаев?[1])

Решение. Обозначим фамилии кандидатов буквами A, B, C, D, E, F, G. Будем решать задачу постепенно.

Если бы требовалось выбрать только одного делегата, то число вариантов было бы 7, так как может быть выбран любой из семи человек. Пусть требуется выбрать двух делегатов. Если выбрано лицо A, то к нему можно присоединить или B, или C, или D и т. д. Мы получим, таким образом, варианты AB, AC, AD, AE, AF, AG (6 вариантов). Точно так же, если уже выбрано лицо B, то к нему можно присоединить любого из остальных, и получаем опять 6 вариантов. То же самое получится, если первым выбрано лицо C, лицо D и т. д. Если собрать все полученные таким образом возможные пары делегатов, то их можно записать в следующей прямоугольной таблице:

AB	AC	AD	AE	AF	AG
BA	BC	BD	BE	BF	BG
CA	CB	CD	CE	CF	CG
DA	DB	DC	DE	DF	DG
EA	EB	EC	ED	EF	EG
FA	FB	FC	FD	FE	FG
GA	GB	GC	GD	GE	GF

[1]) Вместо слов „различные случаи" принято говорить „варианты", от латинского слова varius — различный.

В первой строке записаны все пары, первым избранным в которых стоит делегат A; во второй — делегат B и т. д. Всего в таблице 7 строк и 6 столбцов: значит, число возможных пар равно $7 \cdot 6 = 42$. Однако было бы неправильным считать, что и число вариантов (при выборе 2 делегатов из 7 человек) равно 42. В нашей таблице много лишних пар. Если взять, например, пару B и F, то легко увидеть, что она вошла в схему два раза: один раз в порядке (BF), другой раз в порядке (FB). Между тем по смыслу задачи порядок, в котором выбраны делегаты, не должен иметь значения. Так как всякая пара букв входит в таблицу два раза, то искомое число вариантов равно половине найденного числа, т. е. равно

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Итак, двух делегатов можно выбрать 21 различным способом.

Для дальнейшего нужно отметить, какие пары из нашей таблицы мы отбросим и какие оставим. Условимся, например, что из двух пар, содержащих одинаковые буквы, мы будем оставлять ту, в которой буквы расположены в алфавитном порядке; например, из двух пар BF и FB мы оставим пару BF.

Перейдем теперь к рассмотрению выборов трех делегатов. Выпишем в один вертикальный столбец все только что полученные 21 пары. К каждой из этих пар делегатов нужно добавить третьего, т. е. приписать одну из остающихся пяти букв. Получим новую таблицу.

ABC	ABD	ABE	ABF	ABG
ACB	ACD	ACE	ACF	ACG
ADB	ADC	ADE	ADF	ADG
AEB	AEC	AED	AEF	AEG
AFB	AFC	AFD	AFE	AFG
AGB	AGC	AGD	AGE	AGF
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
DGA	DGB	DGC	DGE	DGF
EFA	EFB	EFC	EFD	EFG
EGA	EGB	EGC	EGD	EGF
FGA	FGB	FGC	FGD	FGE

В этой таблице 21 строка и 5 столбцов, содержащих интересующие нас тройки букв; число троек букв равно $21 \cdot 5 = 105 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2}$. Но и на этот раз мы получили много лишних троек. Если, например, взять тройку букв A, D, G, то в нашей таблице она содержится 3 раза. В самом деле: первые две буквы должны быть обязательно в алфавитном порядке. Поэтому в таблице найдутся такие тройки: 1) буква A стоит в конце, остальные две буквы стоят в алфавитном порядке: DGA; 2) буква D стоит в конце, остальные две буквы стоят в алфавитном порядке: AGD; 3) буква G стоит в конце, остальные две буквы стоят в алфавитном порядке: ADG.

Так как каждая тройка букв будет встречаться в таблице 3 раза, то число различных по составу троек, т. е. искомое число вариантов, получим, разделив выше найденное число $105=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2}$ на 3. Значит, число вариантов равно $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{105}{3}=35$. Если напишем еще в знаменателе множитель 1 (что не изменяет величины дроби), то получим очень удобную для запоми ания дробь $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Число вариантов выбора 3 элементов из 7 (в нашем случае 3 делегатов из 7 человек) принято в математике обозначать знаком C_7^3; буква C есть начальная буква французского слова combinaison — комбинация, сочетание. Говорят: найти число сочетаний из 7 элементов по 3. Пишут: $C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Точно так же может быть решена задача: найти число сочетаний из 10 элементов по 3. Получим $C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$.

Если требуется найти число сочетаний из 10 элементов по 4, т. е. C_{10}^4, то надо будет построить таблицу из четверок букв. Подобно тому, как в таблице из троек букв, в которой первые две буквы каждой тройки были поставлены в алфавитном порядке, каждое сочетание встречалось ровно три раза, так и в таблице из четверок букв, в которой первые три буквы стоят в алфавитном порядке, каждое сочетание встречается ровно четыре раза. В самом деле, на конце четверки может стоять первая, вторая, третья или четвертая буквы. Остальные буквы стоят перед ней в определенном порядке.

Таблица, содержащая четверки, будет содержать $C_{10}^3\cdot 7$ четверок, потому что к каждому сочетанию из трех букв, расположенных в алфавитном порядке, можно приписать любую не входящую в эту тройку букву; так как всех элементов 10, то элементов, не входящих в данную тройку, 7 и, следовательно, из всех троек получается $C_{10}^3\cdot 7$ четверок.

Но, чтобы найти число различных четверок, нужно еще полученное число C_{10}^3 7 разделить на 4: ведь каждая четверка встречается в таблице 4 раза. Таким образом, $C_{10}^4=C_{10}^3\cdot\frac{7}{4}=$ $=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$.

Число сочетаний из 20 по 5 может быть получено подобным же образом; оно напишется так: $C_{20}^5=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$. Эту дробь запишем в другой форме:

$$C_{20}^5=\frac{(20-0)(20-1)(20-2)(20-3)(20-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

В этой дроби в числителе столько же множителей, как и в знаменателе.

Не трудно составить формулу для числа сочетаний из n элементов по k (n и k — любые целые числа, $k < n$):

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}. \qquad (1)$$

Следствие. Будем рассматривать, например, числа сочетаний из 8 элементов:

$$C_8^1 = \frac{8}{1} = 8;\quad C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28;\quad C_8^3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56;\quad C_8^4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 70;$$

$$C_8^5 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56;\quad C_8^6 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28;$$

$$C_8^7 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{8}{1} = 8.$$

Таким образом, $C_8^5 = C_8^3$; $C_8^6 = C_8^2$; $C_8^7 = C_8^1$.

Эти равенства можно вывести и путем рассуждения: например, C_8^5 может означать число вариантов выбора из 8 человек 5 делегатов на конференцию. Но если 5 человек уедут на конференцию, то останутся 3 человека. Каждому новому составу выбранных 5 делегатов соответствует новый состав остающихся трех, и обратно.

Поэтому вместо того, чтобы выбирать 5 делегатов уезжающих на конференцию, можно выбирать трех делегатов, остающихся на месте. Получим то же число вариантов: $C_8^5 = C_8^3$. Таким же рассуждением можно показать, что $C_8^6 = C_8^2$; $C_{10}^7 = C_{10}^3$; $C_{20}^{16} = C_{20}^4$ и т. д.

К полученным числам сочетаний из 8 элементов мы добавим еще два числа:

1. Число C_8^8, т. е. число сочетаний из 8 элементов по 8; это число, очевидно, равно 1.

2. Число C_8^0. Оно дает ответ на вопрос: сколько существует различных способов не послать ни одного делегата на конференцию? Очевидно, только один способ — не посылать никого. Добавив числа C_8^8 и C_8^0, мы получаем полную строку чисел сочетаний из 8 элементов:

$$C_8^0;\ C_8^1;\ C_8^2;\ C_8^3;\ C_8^4;\ C_8^5;\ C_8^6;\ C_8^7;\ C_8^8,$$

или

1	8	28	56	70	56	28	8	1

Группы чисел такого рода могут быть составлены не только для числа 8, но и для любого целого числа. Мы встретимся с ними в следующей главе при разборе замечательной формулы Паскаля.

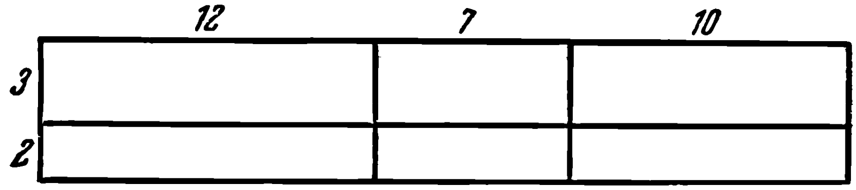
2. Три формулы

Мы уже упоминали в первой главе книги о действии возвышения в степень, действии, которое можно было бы назвать пятым действием арифметики. Если приходится перемножать несколько одинаковых множителей, например $(a \cdot a \cdot a \cdot a)$, то вместо этого произведения пишут a^4. Отметим следующее правило. Пусть требуется перемножить, например, $(a^4 \cdot a^3)$. Имеем: $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$; произведение $a^4 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$.

Таким образом: $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$. Общая формула такова:

$$a^{k_1} \cdot a^{k_2} = a^{k_1 + k_2},$$

т. е. при умножении степеней одного и того же числа получается степень того же числа, показатель которой равен сумме показателей сомножителей.



Черт. 28.

Заметим еще одно правило. Пусть требуется перемножить сумму $(12 + 7 + 10)$ на сумму $(3 + 2)$. Можно, конечно (как это обычно и делают), сначала выполнить действие в скобках, а потом результаты перемножить; но можно поступить и иначе: сначала все три слагаемые первой суммы умножить на число 3; затем эти же слагаемые умножить на число 2, и все полученные 6 произведений сложить:

$$(12 + 7 + 10) \cdot (3 + 2) = 12 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 10 \cdot 2.$$

В буквенных обозначениях такое умножение суммы на сумму запишется так:

$$(a + b + c)(m + n) = am + bm + cm + an + bn + cn.$$

Такое умножение можно пояснить графиком (черт. 28): площадь всего прямоугольника равна $(12 + 7 + 10) \cdot (3 + 2)$; площадь каждого из шести прямоугольников, на которые он разделен, равна одному из шести слагаемых правой части.

Пусть требуется найти произведение $(a + b)(a + b)$ или, в иной записи, $(a + b)^2$. По общему правилу получаем:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ba + ab + b^2, \text{ или же } a^2 + 2ab + b^2.$$

Например,

$$(14+3)^2=14^2+2\cdot 14\cdot 3+3^2=196+84+9=289.$$

Формулу $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ приходится применять очень часто.

Дадим еще геометрический вывод этой формулы (черт. 29). Имеется квадрат $OACB$ со стороной, равной 14 см. Пусть его сторона увеличена на 3 см, т. е. $AM=BN=3$ см. Тогда площадь нового, увеличенного квадрата будет равна $(14+3)^2=17^2$ кв. см. Посмотрим, из каких частей слагается новая площадь. Из чертежа видно, что пл. $OACB=14^2$ кв. см; площадь незаштрихованного квадратика в углу равна 3^2 кв. см. Сверх того, имеются два прямоугольника; площадь каждого из них равна $14\cdot 3$ кв. см. Поэтому вся площадь равна $14^2+2\cdot 14\cdot 3+3^2$. Отсюда получаем равенство:

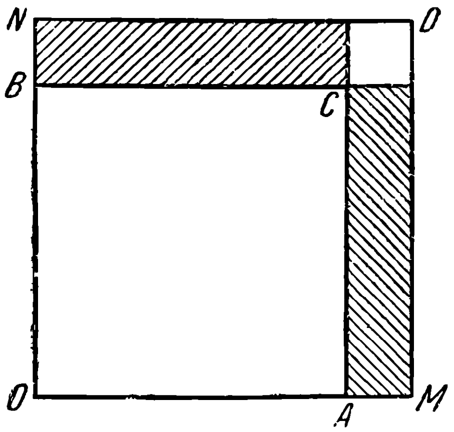
$$(14+3)^2=14^2+2\cdot 14\cdot 3+3^2.$$

Такой же результат получим для любых двух чисел:

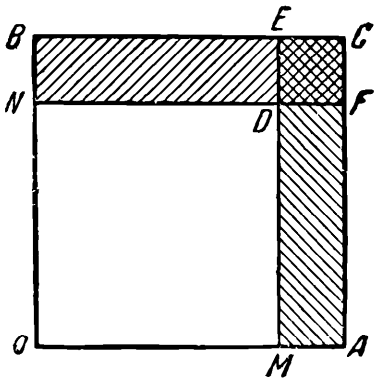
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \tag{2}$$

Перейдем к выводу второй формулы:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$



Черт. 29.



Черт. 30.

Ее вывод мало отличается от предыдущего; мы пойдем тем же геометрическим путем.

Имеется квадрат $OACB$ со стороной равной 14 см (черт. 30). Пусть его сторона уменьшена на 3 см. $AM=BN=3$ см.

Площадь $OMDN$ равна $11^2=(14-3)^2$ кв. см. Эту площадь можно получить, если из площади исходного квадрата $OACB$ вычесть полосу $BNFC$ и полосу $DMAF$. Но можно вместо этого вычесть полосу $BNFC$, добавить квадратик $EDFC$ и затем вычесть полосу $EMAC$.

Итак:

пл. $OMDN=$пл. $OACB-$пл. $BNFC+$пл. $EDFC-$пл. $EMAC$

Обе отнимаемые полосы равны между собой; площадь каждой из них равна 14·3 кв. см. Поэтому

$$\text{пл. } OMDN = 14^2 - 2(14 \cdot 3) + 3^2.$$

Но, с другой стороны, та же площадь равна $(14-3)^2$ кв. см. Отсюда следует равенство:

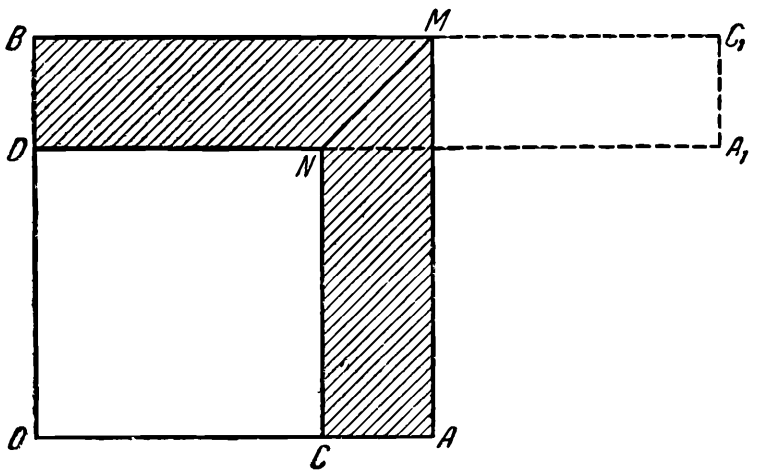
$$(14-3)^2 = 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 3 + 3^2.$$

Или в общем виде:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \qquad (3)$$

Выведем еще третью, тоже весьма полезную формулу. Покажем, что разность вида $a^2 - b^2$ можно представить в виде произведения множителей: $(a+b)(a-b)$; например,

$$80^2 - 72^2 = (80+72)(80-72) = 152 \cdot 8;$$
$$18^2 - 13^2 = (18+13)(18-13) = 31 \cdot 5.$$



Черт. 31.

Для доказательства этого соотношения рассмотрим два квадрата со сторонами равными 18 см и 13 см.

Расположим меньший из них внутри большего, как показано на чертеже (черт. 31). Пл. $OAMB = 18^2$ кв. см; пл. $OCND = 13^2$ кв. см; заштрихованная площадь представляет собой разность площадей обоих квадратов; она равна $18^2 - 13^2$ кв. см. Если сделать разрез фигуры вдоль NM, затем трапецию $CNMA$ перевернуть и приставить к трапеции $DNMB$ так, как показано на чертеже пунктиром, то получим прямоугольник DA_1C_1B. Его площадь, очевидно, равна площади заштрихованной части фигуры. С другой стороны, длина прямоугольника $BC_1 = (18+13)$ см, его ширина равна $(18-13)$ см; площадь равна $(18+13)(18-13)$ кв. см. Отсюда получаем равенство:

$$18^2 - 13^2 = (18+13)(18-13),$$

или в общем виде:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Последнее равенство можно также прочитать справа налево:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \qquad (4)$$

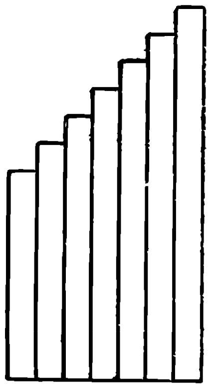
3. Арифметическая прогрессия

Рассмотрим следующий ряд чисел: 40; 43; 46: 49; 52; 55; 58... Не трудно заметить, что каждое число этого ряда получается из предыдущего путем прибавления одного и того же числа, числа 3. Такой ряд чисел называется арифметической прогрессией. Числа, входящие в ряд, называются членами прогрессии; постоянная прибавка— „разностью" прогрессии.

Приведем еще пример. Ряд чисел 25; 29; 33; 37; 41; 45; 49... есть арифметическая прогрессия, — здесь первый член равен 25; разность прогрессии равна 4.

Обычно члены прогрессии обозначаются буквами a_1, a_2, $a_3, \ldots$, разность — буквой d. В данном примере: $a_1 = 25$; $a_2 = 29$; $a_3 = 33, \ldots$; $d = 4$; маленькая цифра справа внизу около буквы a указывает порядковый номер члена ряда.

В приведенных примерах каждое последующее число больше предыдущего; такая прогрессия называется возрастающей. Если же последующее число меньше предыдущего, то прогрессия называется убывающей. Например, ряд



Черт. 32.

$$50;\ 44;\ 38;\ 32;\ 26;\ 20;\ 14$$

есть убывающая арифметическая прогрессия.

Арифметическую прогрессию можно представить на чертеже (черт. 32). Здесь каждый член прогрессии представлен прямоугольником. Пусть ширина каждого прямоугольника равна 1 см; высоты прямоугольников равны последовательно 15 см, 19 см, 23 см, 27 см и т. д.; площади этих прямоугольников будут равны соответственно 15 кв. см, 19 кв. см, 23 кв. см, 27 кв. см. и т. д.

Арифметическую прогрессию можно назвать числовой лестницей „на сколько", так как каждый последующий член „на столько-то единиц" больше предыдущего. В IV главе книги будет рассмотрена прогрессия другого рода, лестница „во сколько". Изучение свойств этих двух прогрессий и их сопоставление и есть основная тема нашей книги.

При рассмотрении арифметической прогрессии могут возникнуть следующие два основных вопроса:

1) Как по первым нескольким членам прогрессии определить любой ее член, например a_{30}?

2) Как определить сумму нескольких последовательных членов прогрессии, например, сумму 30 членов?

Начнем с первого вопроса. Пусть дана прогрессия 15; 19; 23; 27; 31;... Требуется определить сразу 30-й член этой прогрессии. Обратимся к нашему черт. 32; надо найти высоту

30-го столбика. Эту высоту найдем, если к высоте первого (основного) столбика прибавим высоту подъема, даваемого 29 ступеньками, ведущими от 1-го к 30-му столбику. Подъем одной ступеньки в нашем примере равен 4 см; подъем, образуемый 29 ступеньками, равен $d \cdot 29 = 4 \cdot 29 = 116$ см. Поэтому высота 30-го столбика равна: $25 + 4 \cdot 29 = 25 + 116 = 141$ см. Таким образом: $a_{30} = a_1 + 4 \cdot 29 = a_1 + d \cdot 29$ или же $a_{30} = a_1 + d\,(30—1)$.

Если бы требовалось найти 20-й член прогрессии, то мы написали бы:

$$a_{20} = a_1 + d\,(20—1).$$

Для члена прогрессии с номером n получаем:

$$a_n = a_1 + d\,(n—1). \tag{5}$$

Приведем пример применения этой формулы. Завод сельскохозяйственных орудий выпустил в январе 800 машин. Затем он стал повышать свою продукцию каждый месяц на 25 машин. Сколько машин завод выпустил в декабре?

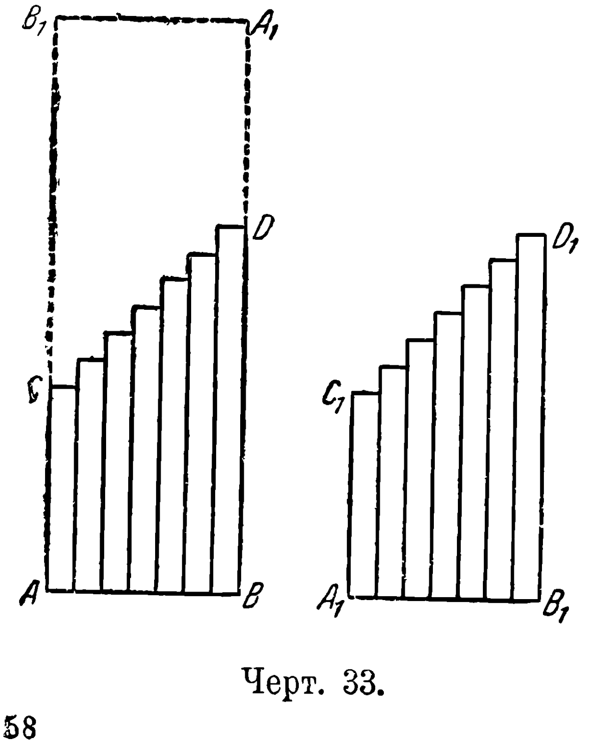
В данном случае $a_1 = 800$; $d = 25$; $n = 12$. Согласно формуле пишем:

$$a_{12} = a_1 + d \cdot 11;\ a_{12} = 800 + 25 \cdot 11 = 800 + 275 = 1075.$$

Перейдем ко второму вопросу — нахождению суммы членов прогрессии.

Пусть дана прогрессия 25; 29; 33; 37; 41; 45; 49. Требуется найти сумму 7 членов этой прогрессии.

Можно было бы, конечно, найти сумму непосредственным сложением этих членов. Однако это было бы слишком громоздко уже для 7 членов. Можно себе представить, какую огромную работу пришлось бы проделать, если бы требовалось найти сумму 500 членов. Нельзя ли найти формулу, дающую возможность решать такие задачи быстро и легко?



Черт. 33.

Чтобы получить эту формулу, обратимся к прежней модели. На черт. 33 построена ступенчатая фигура для прогрессии 25; 29; 33; 37; 41; 45; 49. Ширина каждого столбика равна 1 см; длина равна соответственно 25 см, 29 см и т. д. Очевидно, сумма членов прогрессии численно равна площади фигуры $ACDB$ в квадратных сантиметрах.

Построим еще одну фигуру $A_1C_1D_1B_1$, в точности равную фигуре $ACDB$. Приложим фигуру $A_1C_1D_1B_1$ к фигуре $ACDB$ так, как показано на чертеже пунктиром. В этом прямоугольнике длина стороны AB_1 равна сумме $AC+CB_1=AC+B_1D_1$, или же сумме $AC+BD$. Ширина прямоугольника равна $AB=7$ см. Площадь прямоугольника AB_1A_1B равна $(AC+BD)AB$; но AC есть первый член прогрессии $a_1=25$, BD — последний член прогрессии $a_n=49$, AB равно числу членов прогрессии $n=7$. Поэтому получаем:

$$S=\frac{(25+49)\cdot 7}{2}=259, \tag{6}$$

или в общем виде:

$$S=\frac{(a_1+a_n)\,n}{2}.$$

Формула суммы членов арифметической прогрессии имеет в математике большое значение.

Пример. Подсчитать сумму членов ряда 1, 2, 3,..., 299, 300.

Решение. По полученной формуле $S_{300}=\frac{(1+300)\cdot 300}{2}=45\,150$.

Ряд последовательных целых чисел 1, 2, 3, 4, 5,..., продолженный как угодно далеко, называется в математике „натуральным“ рядом. Мы только что получили сумму трехсот членов натурального ряда. Подобным же образом можно получить сумму любого числа n членов натурального ряда:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(1+n)\,n}{2}. \tag{7}$$

Выведем еще одну специальную формулу, которая, вообще говоря, в математике не имеет особого значения, но окажется весьма полезной в этой главе, при решении дальнейших задач.

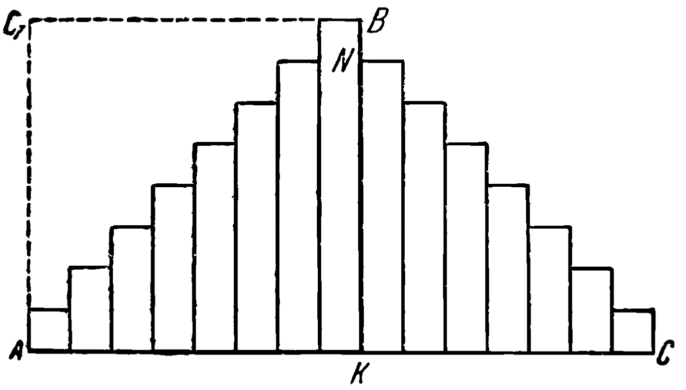
Пусть требуется найти сумму ряда:

$$1+2+3+\ldots+18+19+20+19+18+\ldots+3+2+1.$$

Можно было бы вычислить ее по общей формуле, взяв два раза сумму $(1+2+3+\ldots+18+19)$ и прибавив число 20. Но задачу можно решить короче, если заданный ряд чисел представить в виде двух строк:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 18 & 19 \\ 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & \ldots & 2 & 1 \end{array}\quad 20$$

Мы получим всего 20 столбцов; сумма чисел в каждом столбце равна 20 (последний столбец состоит из одного числа). Поэтому общая сумма равна $20\cdot 20=20^2\,(=400)$. Это решение можно иллюстрировать чертежом (черт. 34).



Черт. 34.

На чертеже дана ступенчатая фигура; взято $n=8$. Площадь фигуры ABC в квадратных сантиметрах равна $1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1$. Если сделать разрез вдоль прямой NK, затем фигуру NKC повернуть и приложить зубцами к фигуре ABK, то получим квадрат $AKBC_1$ со стороной, равной 8 см. Поэтому

$$1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1=8^2.$$

Общая формула такова:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1=n^2. \quad (8)$$

4. Сумма квадратов и кубов

Рассмотрим натуральный ряд чисел: 1; 2; 3; 4; ..., взятых до некоторого значения n, например до $n=500$. Пусть каждое из этих чисел возведено в квадрат. Требуется найти сумму всех этих квадратов, т. е. сумму $1^2+2^2+3^2+\ldots$ $\ldots+499^2+500^2$.

Понятно, что нас интересует не прямой подсчет, а формула, дающая возможность легко и быстро найти такую сумму.

Рассматриваемую сумму квадратов кратко записывают так:

$$\sum_{m=1}^{500} m^2.$$

Знак Σ есть греческая буква „сигма". Этим знаком принято обозначать сумму целого ряда сходных между собой слагаемых. Вместо буквы m надо подставлять последовательно числа ряда 1, 2, 3... до 500. Если имеется n слагаемых, то сумма записывается так: $\sum\limits_{m=1}^{n} m^2$, или короче: $\sum\limits_{1}^{n} m^2$. В этой книге мы будем записывать такую сумму совсем кратко: Σ_2; значок $_2$ должен напоминать, что суммируются вторые степени натуральных чисел.

Вторая задача, которую мы здесь рассмотрим, отличается от первой лишь тем, что вместо квадратов суммируются кубы чисел натурального ряда. Для краткости эту сумму обозначим знаком Σ_3, т. е. $\Sigma_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

Получить эту сумму непосредственным вычислением при большом n еще труднее, чем Σ_2.

Из истории математики известно, что задачи этого типа в течение многих веков занимали ученых различных стран. В начале XVII в. немецкому математику Фаульхаберу (1580—1635) удалось найти формулы для сумм степеней Σ_2, Σ_3, $\Sigma_4 \ldots$ до Σ_{11}. Ход его решения не сохранился, — формулы оказались правильными. Великие математики Ферма и Паскаль впервые подняли этот вопрос на принципиальную высоту и дали общий метод решения. До них существовали лишь кустарные приемы нахождения той или иной отдельной суммы Σ_k.

В этой главе мы остановимся именно на отдельных приемах решения. Трудно установить, кому они принадлежат, так как передавались они из поколения в поколение. При этом начнем со второй задачи, т. е. с нахождения суммы кубов Σ_3, так как она решается проще.

5. Сумма кубов $\sum_3$

Решим эту задачу с помощью так называемой таблицы умножения Пифагора, которая каждому знакома с детских лет (черт. 35).

Рассмотрим сумму чисел, находящихся на чертеже между двумя жирными линиями, например сумму

$$6+12+18+24+30+36+30+24+18+12+6.$$

Все слагаемые этой суммы делятся на 6. Поэтому их сумму можно записать в виде:

$$6\cdot1+6\cdot2+6\cdot3+6\cdot4+6\cdot5+6\cdot6+6\cdot5+6\cdot4+6\cdot3+6\cdot2+6\cdot1,$$

или же как

$$6\,(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1).$$

Согласно формуле (8), сумма, стоящая в скобках, равна 6^2. Поэтому рассматриваемая сумма чисел, лежащих в полосе между жирными линиями, равна $6\cdot6^2 = 6\cdot6\cdot6 = 6^3$.

Сумма чисел, лежащих в полосе между следующими жирными линиями $[7,\ 14, \ldots,\ 49, \ldots,\ 14,\ 7]$, равна:

$$7\,(1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1) = 7\cdot7^2 = 7^3.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Черт. 35.

Первая полоса таблицы Пифагора состоит из одного верхнего левого квадрата и дает 1^3; вторая полоса дает 2^3; третья дает 3^3 и т. д.; последняя полоса дает 10^3. Значит, сумма всех чисел, стоящих в таблице Пифагора, дает:

$$\sum_{1}^{10} m^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3.$$

Но сумму всех чисел таблицы можно сосчитать иначе, а именно — по строкам. Сумма чисел первой строки равна:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10;$$

обозначим ее через S_1. Числа второй строки в 2 раза больше соответствующих чисел первой строки; поэтому и сумма их в 2 раза больше, т. е. равна $2S_1$. Числа третьей строки в 3 раза больше соответствующих чисел первой строки. Поэтому их сумма равна $3S_1$; и так далее. Общая же сумма всех чисел таблицы, сложенных по строкам, равна

$$S_1 + 2S_1 + 3S_1 + \ldots + 9S_1 + 10S_1.$$

Эту последнюю сумму можно представить в виде:

$$S_1\ (1 + 2 + 3 + \ldots + 10).$$

Но сумма, стоящая в скобках, также равна S_1; поэтому общая сумма равна $S_1 \cdot S_1$ или

$$(S_1)^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10)^2.$$

Таков результат подсчета по строкам. Этот результат должен быть равен предыдущему, так как складывались те же числа таблицы, хотя и в другом порядке. Поэтому

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10)^2.$$

Рассуждение нисколько не изменится, если вместо пифагоровой таблицы из 10 строк и 10 столбцов рассматривать пифагорову таблицу, имеющую n строк и n столбцов. Получим равенство:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots (n-1)^3 + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Левую часть равенства мы выше условились обозначать через Σ_3. Сумму чисел натурального ряда

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \text{ можно обозначить через } \Sigma_1;$$

значок 1 показывает, что числа натурального ряда взяты в первой степени. Тогда полученная нами формула может быть в сжатой форме записана так:

$$\Sigma_3 = (\Sigma_1)^2. \tag{9}$$

Полученное соотношение (9) дает практическую возможность быстро сосчитать сумму Σ_3 до любого заданного значения n. Выше мы взяли значение $n = 500$. Чтобы найти сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 500^3$, надо вычислить сперва Σ_1 по формуле (7).

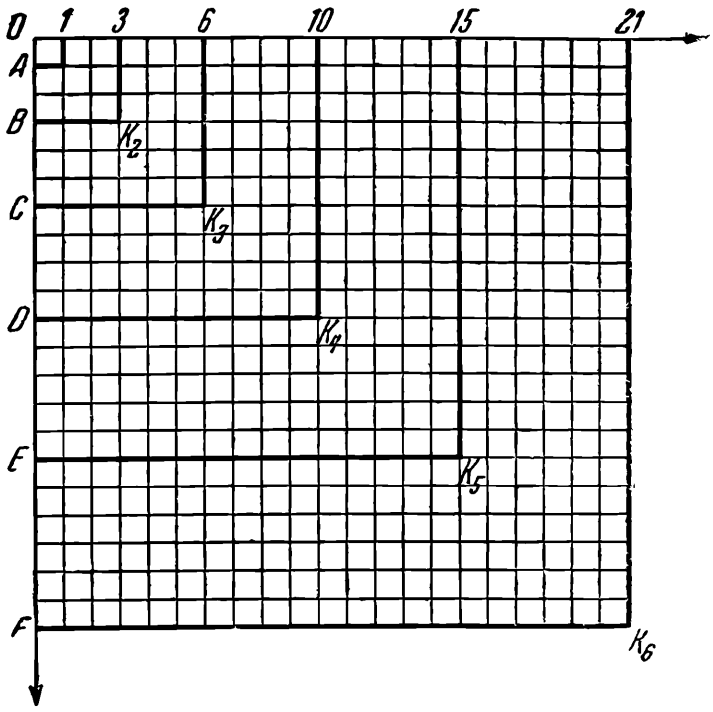
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 499 + 500 = \frac{(1 + 500)\ 500}{2} = 125\,250.$$

Далее:

$$\sum\nolimits_3 = \left(\sum\nolimits_1\right)^2 = (125\,250)^2 = 15\,687\,562\,500.$$

Дадим еще один вывод формулы (9) при помощи чертежа (черт. 36).

Начиная с точки O откладываем вертикально вниз последовательно отрезки $OA = 1$ ед.; $AB = 2$ ед.; $BC = 3$ ед.; $CD = 4$ ед.; $DE = 5$ ед.; $EF = 6$ ед. и т. д. Тогда отрезки $OA = 1$; $OB = 3$; $OC = 6$; $OD = 10$; $OE = 15$; $OF = 21$ и т. д. Такие же отрезки откладываем от точки O горизонтально вправо. На этих отрезках строим сеть клеток, равных 1 кв. ед. На нашем чертеже имеется всего $21 \times 21 = 441$ клеток.



Черт. 36.

Посмотрим, сколько клеток заключается между двумя жирными линиями, границами квадратов. Первый участок содержит всего $1 = 1^3$ клеток; во втором участке $3^2 - 1^2 = 8 = 2^3$ клеток; в третьем участке содержится $6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 = 3^3$ клеток и т. д. Таким образом оказывается, что между

0-й	и 1-й	ломаной	$1 = 1^3$	клеток
1-й	и 2-й	жирной ломаной	$8 = 2^3$	„
2-й	и 3-й	жирной ломаной . . .	$27 = 3^3$	„
3-й	и 4-й	„ „	$64 = 4^3$	„
4-й	и 5-й	„ „	$125 = 5^3$	„
5-й	и 6-й	„ „	$216 = 6^3$	„

Как видим, число клеток в каждом участке равно кубу номера участка. Конечно, это не случайно, и можно доказать, что при продолжении таблицы всегда будут получаться последовательные „кубические“ числа. Доказательство этого найдено еще в сочинении одного арабского математика, жившего около 1000 года нашей эры.

Пусть мы хотим подсчитать число клеток в участке с номером m. Больший квадрат, содержащий этот участок, содержит:

$$[1+2+3+\ldots.+(m-1)+m]^2 \text{ клеток;}$$

меньший квадрат, прилегающий к этому участку, содержит

$$[1+2+3+\ldots+(m-1)]^2 \text{ клеток.}$$

В участке, заключенном между ними, заключается

$$1+2+3+\ldots+(m-1)+m]^2-[1+2+3+\ldots+(m-1)]^2 \text{ клеток.}$$

Если обозначить выражение, стоящее внутри первой скобки, через A, а стоящее внутри второй скобки — через B, то написанная разность представится в виде A^2-B^2. На основании формулы (4) можно эту разность приравнять произведению:

$$A^2-B^2=(A+B)\ (A-B).$$

В данном случае сумма обоих выражений, стоящих в скобках, равна:

$$A+B=1+2+3+\ldots+(m-1)+m+1+2+3+\ldots+(m-1),$$

или же

$$1+2+3+\ldots+(m-1)+m+(m-1)+\ldots+3+2+1,$$

а это выражение, согласно специальной формуле (8), равно m^2.

Разность выражений, стоящих в скобках, равна m. Поэтому разность квадратов A^2-B^2, т. е. искомое число клеток равно $m^2\cdot m=m^3$. Таким образом, на нашей схеме в участке с номером m заключается m^3 клеток. Так, девятый участок содержит $9^3=729$ клеток; десятый участок содержит $10^3=1000$ клеток.

Теперь уже не трудно доказать формулу (9). Если квадратная схема имеет n участков, то сумма клеток во всех участках равна $1^3+2^3+\ldots+n^3$. С другой стороны, сторона объемлющего квадрата равна $(1+2+3+\ldots+n)$ ед., а потому квадрат содержит $(1+2+3+\ldots+n)^2$ клеток. Из сравнения обоих результатов получаем прежнюю формулу:

$$\Sigma_3=(\Sigma_1)^2. \qquad (9)$$

В заключение заметим, что формулу (9) можно представить иначе, а именно так, чтобы сумма кубов Σ_3 прямо была выражена через число n. Для этого достаточно вместо Σ_1 подставить значение этой суммы.

По формуле (7) мы имели:

$$\sum_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1+n)\,n}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_3 = \sum_1 \cdot \sum_1 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Или же

$$\sum_3 = \frac{1}{4} n^2 (n^2 + 2n + 1) = \frac{1}{4} (n^4 + 2n^3 + n^2),$$

и, окончательно:

$$\sum_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2. \tag{10}$$

6. Сумма квадратов $\sum_2$ (задача Архимеда)

Перейдем ко второй из намеченных задач, к нахождению суммы квадратов $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. Решение этой задачи впервые было дано великим греческим математиком Архимедом в сочинении „О спиралях“.

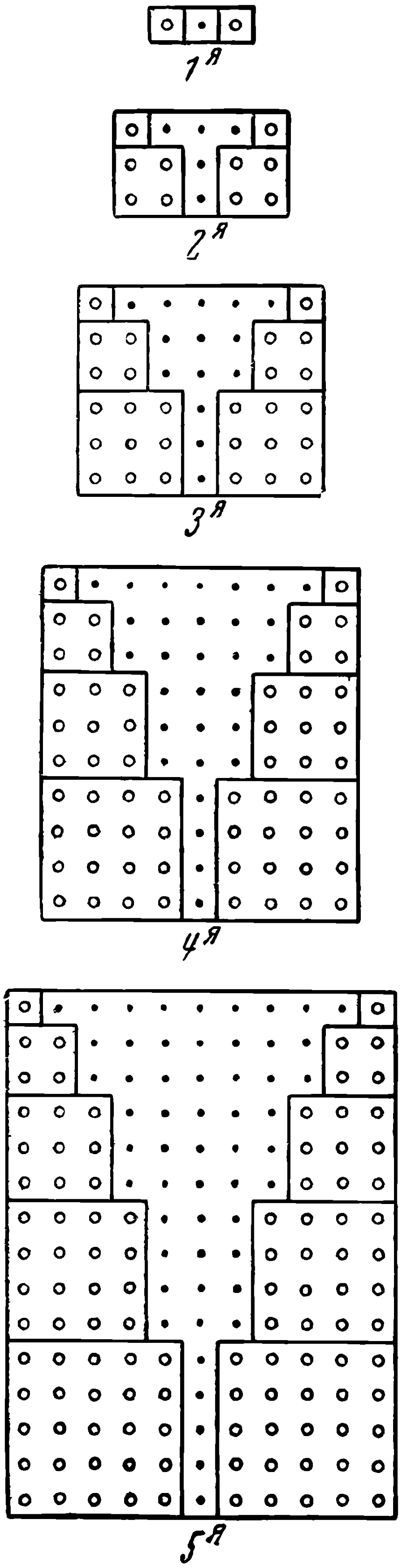
Прежде чем изложить решение, данное Архимедом, рассмотрим другое весьма простое и наглядное решение с помощью геометрической модели.

Первое решение. На каждой из прилагаемых прямоугольных схем имеется (черт. 37) по две группы кружков, слева и справа по одинаковому числу. На первой схеме имеется слева и справа по 1 кружку; на второй схеме в каждой группе по $1 + 4 = 5$ кружков; на третьей — по $1 + 4 + 9 = 14$ кружков; на четвертой — по $1 + 4 + 9 + 16 = 30$ кружков и т. д.

Каждое слагаемое в этих суммах есть „квадратное“ число, как прямо следует из чертежа. Все остающиеся клетки каждой схемы заполнены точками. Оказывается, что в каждой схеме точек посредине имеется столько же, сколько кружков слева или справа. Прежде всего можно равенство числа кружков и точек проверить простым подсчетом для первых нескольких схем. Так, на 2-й схеме кружков $1 + 4 = 5$; точек посредине 5. На 3-ей схеме кружков $1 + 4 + 9 = 14$; точек посредине 14. Но если это равенство подтверждается для всех пяти схем чертежа, то можно ли отсюда заключить, что такое равенство будет сохраняться для схемы с любым номером n?

Чтобы такое заключение было обоснованным, надо показать, что при переходе от схемы с номером m к схеме с номером $m + 1$ равенство числа кружков и точек сохраняется. Мы разберем переход от номера $m=5$ к номеру $m+1=6$; но можно в этом рассуждении вместо числа 5 мысленно подставить любое число.

Если перейти от 5-й схемы к 6-й, которую читатель может себе мысленно представить, то с левой и правой стороны прибавится по квадрату, каждый из которых содержит $6^2=36$ кружков. Сколько же прибавится точек? Так как слева и справа новые квадраты будут на 1 клетку шире прежних, то ширина всей схемы увеличится на 2 клетки. Вследствие этого в каждой из строк прежней схемы прибавится по 2 точки, а всего в прежних строках прибавится $(1+2+3+4+5)\cdot 2$ точек. Сверх того, между двумя новыми квадратами появится вертикальная полоска, шириной в 1 см, содержащая 6 точек. Итак, всего прибавится $2\cdot(1+2+3+4+5)+6$ точек или же $1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1$ точек; согласно специальной формуле (8) это число равно $6^2=36$. Таким образом, при переходе от 5-й к 6-й схеме прибавится по одинаковому числу кружков и точек, а потому и в 6-й схеме числа кружков и точек будут равны.



Черт. 37.

Подведем итог сказанному.

Непосредственным подсчетом мы убеждаемся, что число кружков (слева или справа) и число точек равны для схем с несколькими первыми номерами, например для $n=1; 2; 3; 4$. Затем доказывается, что при переходе от схемы m-й к схеме $(m+1)$-й число кружков (слева или справа) и число точек увеличиваются одинаково, т. е. что равенство сохраняется при переходе от m к $m+1$. Таким образом, получаем уверенность в том, что равенство имеет место при любом значении n, т. е. для любой схемы.

Способ доказательства, которым мы здесь воспользовались, носит название метода математической индукции.

Теперь не трудно будет решить поставленную задачу о сумме квадратов Σ_2. Вообразим себе схему с номером n (например, $n=40$). Тогда число кружков на левой стороне схемы равно:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_1^n m^2,$$

или короче Σ_2. Столько же будет кружков на правой стороне, и, как доказано, столько же будет точек посредине; а потому число всех кружков и точек вместе равно

$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=3\sum\nolimits_2.$$

С другой стороны, можно подсчитать число всех клеток n-й прямоугольной схемы.

Число строк схемы равно $1+2+3+\ldots+n$; эта сумма равна $\frac{(1+n)n}{2}$. Число вертикальных столбцов схемы равно $n+1+n=$ $=2n+1$. Число всех клеток схемы получим умножением длины на ширину; оно равно произведению:

$$\frac{(1+n)n}{2}\cdot(2n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Но общее число всех кружков и точек, очевидно, равно числу всех клеток схемы, а потому можно написать равенство:

$$3\sum\nolimits_2=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Откуда следует:

$$\sum\nolimits_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (11)$$

Эта формула позволяет быстро произвести подсчет суммы квадратов для любого значения n. Если, например, $n=40$, то

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+39^2+40^2=\frac{1}{6}\cdot 40\cdot(40+1)(2\cdot 40+1)=$$

$$=\frac{40\cdot 41\cdot 81}{6}=22\,140.$$

Если взять $n=100$, то сумма

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2=\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}=338\,350.$$

В т о р о е р е ш е н и е. Дадим теперь для формулы (11) другой вывод, а именно тот, который принадлежит самому Архимеду.

Доказательство Архимеда основывается на одном вспомогательном равенстве, и надо прежде всего рассмотреть и доказать это равенство.

Напишем в ряд первые n чисел натурального ряда и под ними в обратном порядке первые n нечетных чисел (пусть, например, $n=10$):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

Составим теперь сумму из произведений чисел, стоящих друг под другом:

$$1\cdot 19+2\cdot 17+3\cdot 15+4\cdot 13+5\cdot 11+6\cdot 9+7\cdot 7+8\cdot 5+9\cdot 3+10\cdot 1.$$

Равенство Архимеда говорит, что эта сумма равна сумме квадратов:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2+10^2.$$

В общем виде равенство Архимеда запишется так:

$$1\cdot(2n-1)+2(2n-3)+\ldots+(n-2)\cdot 5+(n-1)\cdot 3+n\cdot 1= \\ =1^2+2^2+\ldots+n^2. \qquad (12)$$

Чтобы доказать равенство (12), обратимся к квадратной таблице на черт. 38. Подсчитаем сумму всех чисел таблицы двумя способами.

Во-первых, подсчитаем их внутри каждого участка, ограниченного жирными линиями. В первом участке имеется лишь одно число $1=1^2$; сумма трех чисел, находящихся во втором участке, есть $1+2+1=4=2^2$. Сумма чисел в любом участке легко получается с помощью полученной ранее особой формулы. Например, для 6-го участка имеем: $1+2+\ldots+5+6+ +5+\ldots+2+1=6^2$. Вообще сумма чисел в каждом участке равна квадрату номера этого участка. Поэтому общий результат подсчета во всех участках будет $1^2+2^2+3^2+ +\ldots+10^2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	8	8
1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Черт. 38.

Во-вторых, подсчитаем суммы чисел, стоящих в участках, ограниченных тонкими линиями. В первом участке (состоящем из единиц) стоит $2\cdot 10-1=19$ единиц; во втором участке $2\cdot 9-1=17$ двоек; в следующим участке $2\cdot 8-1=15$ троек, и т. д. Результат этого подсчета дает сумму $1\cdot 19+2\cdot 17+3\cdot 15+ +\ldots+8\cdot 5+9\cdot 3+10\cdot 1$.

Результаты того и другого подсчета должны быть равны; тем самым равенство (12) доказано.

Приведенное доказательство можно сделать весьма наглядным, если от числовой таблицы перейти к пространственной фигуре в виде ступенчатой пирамиды.

Пусть имеется клетчатая доска с клетками в 1 кв. см (черт. 38). Будем ставить на каждой клетке друг на друга столько кубиков, сколько единиц содержит число, стоящее в клетке. В результате получится ступенчатая четырехугольная пирамида, изображенная на обложке книги (для $n=8$).

Подсчет общего числа кубиков, входящих в пирамиду, можно произвести двояко.

Во-первых, можно постепенно отсекать ступени, начиная с нижней. Мы будем иметь первую ступень высотой в один кубик, в которой $1\cdot 19$ кубиков; вторую ступень, высотой в 2 кубика, в которой $2\cdot 17$ кубиков; третью ступень, в которой $3\cdot 15$ кубиков, и т. д. Всего получается $1\cdot 19+2\cdot 17+3\cdot 15+\ldots+9\cdot 3+10\cdot 1$ кубиков.

Во-вторых, можно рассечь фигуру плоскостями, параллельными плоскости основания. Рассматривая кубики, лежащие в отдельных этажах, получим сумму: $10^2+9^2+\ldots+3^2+2^2+1^2$.

Отсюда следует равенство:

$$1\cdot 19+2\cdot 17+3\cdot 15+\ldots+9\cdot 3+10\cdot 1=1^2+2^2+\ldots+10^2,$$

т. е. опять равенство (12).

Перейдем теперь к выводу формулы для Σ_2. Мы будем вести рассуждение для значения $n=10$, но доказательство сохраняет силу для любого значения n. Архимед исходит из простейшей формулы (2) для квадрата суммы:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Он пишет (при $n=10$) такое равенство 11 раз, а именно:

	В среднем столбце имеем	Прибавим к среднему столбцу	Получим
$(0+10)^2=10^2$	0	0	0
$(1+9)^2=1^2+2\cdot 1\cdot 9+9^2$	$1\cdot 18$	1	$1\cdot 19$
$(2+8)^2=2^2+2\cdot 2\cdot 8+8^2$	$2\cdot 16$	2	$2\cdot 17$
$(3+7)^2=3^2+2\cdot 3\cdot 7+7^2$	$3\cdot 14$	3	3.15
$(4+6)^2=4^2+2\cdot 4\cdot 6+6^2$	$4\cdot 12$	4	$4\cdot 13$
$(5+5)^2=5^2+2\cdot 5\cdot 5+5^2$	$5\cdot 10$	5	$5\cdot 11$
$(6+4)^2=6^2+2.6.4+4^2$	$6\cdot 8$	6	$6\cdot 9$
$(7+4)^2=7^2+2\cdot 7\cdot 3+3^2$	$7\cdot 6$	7	$7\cdot 7$
$(8+2)^2=8^2+2\cdot 8\cdot 2+2^2$	$8\cdot 4$	8	$8\cdot 5$
$(9+1)^2=9^2+2\cdot 9\cdot 1+1^2$	$9\cdot 2$	9	$9\cdot 3$
$(10+0)^2=10^2$	$10\cdot 0$	10	$10\cdot 1$

В левых частях равенств имеем число 10^2, написанное 11 раз, а потому сумма левых частей равенств дает $(10+1)\cdot 10^2$ или, в общем случае, $(n+1)\cdot n^2$.

Будем теперь правые части равенств складывать по столбцам. Стоящий слева столбец дает сумму $1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2$. Такую же сумму дает столбец, стоящий справа. Остается сложить числа, стоящие в среднем столбце. На прилагаемой таблице показано, что эту сумму можно представить в виде:

$$1\cdot 18+2\cdot 16+3\cdot 14+\ldots+9\cdot 2.$$

И вот тут Архимед применяет остроумный прием. Чтобы удобнее подсчитать сумму чисел среднего столбца, он прибавляет к среднему столбцу ряд чисел: $1+2+3+\ldots+9+10$, чтобы получилась левая часть равенства (12).

Теперь в правой части получится:

$$2\sum\nolimits_2+(1\cdot 19+2\cdot 17+3\cdot 15+\ldots+9\cdot 3+10\cdot 1=$$
$$=2\sum\nolimits_2+(1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2+10^2)=2\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_2=3\sum\nolimits_2.$$

В левой части равенства будем иметь:

$$(10+1)\cdot 10^2+(1+2+3+\ldots+10)=(10+1)\cdot 10^2+\frac{(1+10)\cdot 10}{2}.$$

В результате равенство примет такой вид:

$$3\sum\nolimits_2=(10+1)\cdot 10^2+\frac{1}{2}\,10\,(10+1).$$

Или же, в общей форме, для любого значения n:

$$3\sum\nolimits_2=(n+1)\cdot n^2+\frac{1}{2}\,n\,(n+1).$$

Остается преобразовать полученное равенство. Правую его часть перепишем так:

$$n\cdot n\cdot (n+1)+\frac{1}{2}\,n\,(n+1).$$

Произведение множителей $n\,(n+1)$ входит в оба слагаемых; сумму можно представить так:

$$n\,(n+1)\,\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

или же так:

$$n\,(n+1)\cdot\frac{2n+1}{2}=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2}.$$

Итак, мы получили равенство:

$$3\sum\nolimits_2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2},$$

откуда следует:

$$\sum\nolimits_2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Мы снова пришли к формуле (11).

ГЛАВА III

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Ищите закономерности... (Из письма *И. П. Павлова* к молодежи).

В предыдущей главе были выведены три формулы, дающие возможность найти легко и быстро суммы:

$$\sum_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots, + n;$$
$$\sum_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2;$$
$$\sum_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Эти формулы были таковы:

$$\sum_1 = \frac{1}{2} n (n+1);$$
$$\sum_2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1);$$
$$\sum_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2.$$

Но вторая и третья формулы были получены специально придуманными, искусственными приемами. Это обстоятельство не нарушает правильности формул. Однако математика, как наука, не удовлетворяется тем, что полученный ответ на задачу правилен. Она ставит требование, чтобы решение задачи было дано в стройной форме; она постоянно стремится улучшить метод исследования. С этой целью математика старается вскрыть связь между отдельными формулами.

В данном случае можно поставить перед собой вопрос: нельзя ли установить связь между доказанными тремя формулами для Σ_1, Σ_2, Σ_3? Если бы удалось это сделать, то можно было бы пытаться вывести формулу для Σ_4; затем для Σ_5 и т. д. Читатель, вероятно, заметит, что поставленный сейчас вопрос не является частным вопросом, а носит общий, принципиальный характер. Разработка именно таких более высоких, более принципиальных вопросов и составляет сущность математики, как науки. Разрешая одни вопросы, математика выдвигает другие, и в этом заключается ее поступательное движение вперед. Мы уже указывали в предыдущей главе, что математик Фаульхабер (1580 — 1635) дал формулы для Σ_m до значения $m=11$.

Перепишем формулы для Σ_1, Σ_2, Σ_3 в несколько ином виде:

$$\sum_1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n;$$
$$\sum_2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n;$$
$$\sum_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2,$$

и добавим к ним несколько последующих формул Фаульхабера:

$$\sum_4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n;$$
$$\sum_5 = \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2;$$
$$\sum_6 = \frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n.$$

При сопоставлении этих формул не трудно заметить, как составлено первое слагаемое. Вероятно, читатель сам сделает заключение, что для суммы Σ_7 первый член правой части должен быть равен $\frac{1}{8} n^8$; для Σ_8 $\frac{1}{9} n^9$. Но верно ли это и остается ли это правило неизменным для суммы Σ_m с любым значением m? Ведь мы сделали такое предположение только на основании нескольких приведенных формул, а этого недостаточно, чтобы высказать общее утверждение. Как говорит французская пословица: сравнение не есть доказательство (comparaison n'est pas raison). Чтобы решить по-настоящему поставленный вопрос, надо вскрыть внутреннюю закономерность в формулах для различных Σ_m. Темой настоящей главы и является проделать эту работу для нескольких первых формул, чтобы на них проследить общий метод и получить затем возможность вычислить любую Σ_m. Следует отметить, что в средние века вопрос о Σ_m носил характер математической загадки, был своего рода спортом, но в настоящее время дело обстоит совсем по-иному. Общая формула для Σ_m позволяет с большой легкостью получить одну из важнейших формул интегрального исчисления, а эта последняя необходима при решении многих практических задач механики и физики.

1. Таблица Тарталья

Пусть дан ряд чисел:

21, 56, 126, 252, 462, 792, 1287, 2002.

Если спросить, взяты эти числа случайно или по какому-то определенному правилу, то на этот вопрос ответить будет не легко. Оказывается, для данного ряда такое правило имеется, но оно глубоко скрыто. Мы его вскроем следующим образом.

Найдем разности между соседними числами; получим ряд:

35, 70, 126, 210, 330, 495, 715.

Для этого ряда найдем опять разности между соседними числами; получим:

35, 56, 84, 120, 165, 220.

Будем продолжать этот процесс нахождения разностей. Получим ряд:

21, 28, 36, 45, 55,

затем следующий:

7, 8, 9, 10,

т. е. ряд последовательных целых чисел, или арифметическую прогрессию. Если взять еще раз разности, то получим ряд равных чисел

1, 1, 1.

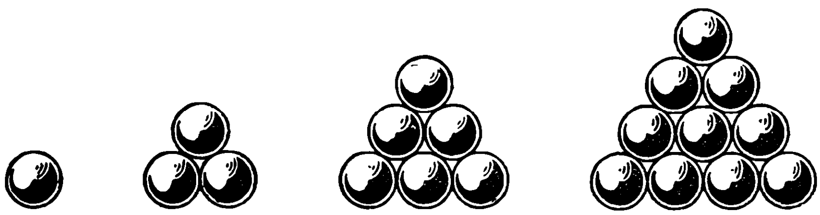
В этом и заключается закономерность выше предложенного ряда чисел.

Все ряды разностей можно сопоставить в одной таблице:

21	56	126	252	462	792	1287	2002
35	70	126	210	330	495	715	
35	56	84	120	165	220		
21	28	36	45	55			
7	8	9	10				
1	1	1					

Нам придется решать обратную задачу, т. е. переходить от простой арифметической прогрессии к более сложным рядам. Построение таких рядов (более высокого порядка) приводит к так называемой таблице Тарталья—Паскаля.

Пусть имеются бильярдные шары в большом количестве. Будем их укладывать на плоскость в виде треугольника; из них можно составить группы, изображенные на черт. 39: 1) из 1 шара; 2) из 3 шаров; 3) из 6 шаров; 4) из 10 шаров, и так далее. Заметим, что при образовании четвертой группы надо было к третьей группе добавить 4 шара; при образовании пятой группы надо добавить 5 шаров и т. д. Не трудно видеть, что число всех шаров четвертой группы равно $1+2+3+4=10$, число шаров 5-й группы равно $1+2+3+4+5=15$. Число групп шаров с номером m равно $1+2+3+\ldots+m$.



Черт. 39.

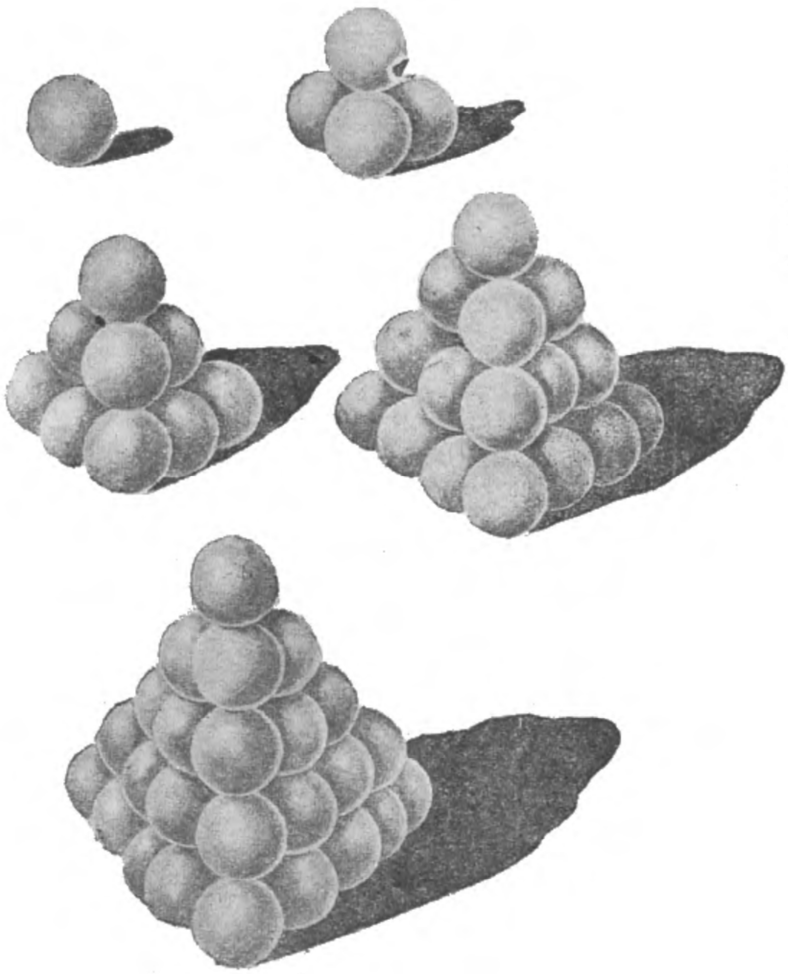
Запишем числа шаров каждой группы параллельно с числами натурального ряда (номерами групп). Получим таблицу:

Номер группы	Число шаров	Номер группы	Число шаров
1	1	5	15
2	3	6	21
3	6	7	28
4	10	8	36

Так как составленные нами группы шаров имеют форму треугольника, то числа, стоящие с правой стороны, получили название „треугольных“ чисел.

Будем теперь складывать шары в пространственные группы в форме треугольных пирамид (черт. 40). За группой из одного шара идет такая группа: 3 шара внизу, один над ними, всего 4 шара. Более сложные группы можно получить, если накладывать друг на друга различные плоские группы. Если группу из 6 шаров положить на плоскость в форме треугольника, а плоскую группу из 3 шаров поместить в углублениях над ними, то получим как бы двухэтажную группу, добавив к которой сверху 1 шар, получим пирамиду из 10 шаров (третья пирамида — черт. 40).

Можно продолжить такое построение: надо поместить на плоскость группу из 10 шаров, опять в форме треугольника, и над этим слоем поставить всю предыдущую группу. Получим как бы четырехэтажную группу в пространстве из $1+3+6+$ $+10=20$ шаров. Далее, можно под предыдущую „постройку“ подвести фундамент в виде плоской треугольной группы из 15 шаров. Получится группа из $1+3+6+10+$ $+15=35$ шаров; и так далее. Из этого процесса построения следует, что числа шаров пространственных групп получаются путем сложения одного, двух, трех и так далее чисел того ряда, который мы выше назвали „треугольными числами“. Поэтому совсем не трудно дополнить предыдущую таблицу еще одним, третьим столбцом чисел. Новый ряд чисел получил название „пирамидальных“. Числа натурального ряда, треугольные и пирамидальные числа, а также числа, которые мы сейчас получим, носят название фигурных чисел.



Черт. 40.

Номер группы	Треугольные числа	Пирамидальные числа	Номер группы	Треугольные числа	Пирамидальные числа
1	1	1	6	21	56
2	3	4	7	28	84
3	6	10	8	36	120
4	10	20	9	45	165
5	15	35	10	55	220

Числа, стоящие в первом столбце нашей таблицы, назовем фигурными числами первого порядка; числа, стоящие во втором столбце, — фигурными числами второго порядка; наконец, числа третьего столбца — фигурными числами третьего порядка. Мы получили эти числа с помощью геометрических фигур, состоящих из бильярдных шаров; но их можно получить и иначе. Верхнее число каждого столбца равно единице. Второе число получается путем сложения этой единицы с числом предыдущего столбца, стоящим во второй строке; третье число каждого столбца получается путем сложения второго числа того же столбца с третьим числом предыдущего столбца и т. д.

Хотя уже нельзя строить геометрические фигуры из бильярдных шаров, числа которых давали бы числа следующего, четвертого столбца, однако подмеченное нами правило дает возможность построить эти числа: пишем в первом ряду четвертого столбца 1; к ней прибавляем 4 (второе число третьего столбца), получаем 5 (второе число четвертого столбца) и т. д.

Получаем числа четвертого порядка:

$$1,\ 5,\ 15,\ 35,\ 70,\ 126,\ \ldots$$

Ничто не мешает из полученных чисел образовать числа пятого порядка и т. д.

В пятом столбце получим ряд чисел:

$$21,\ 56,\ 126,\ 252,\ 792,\ 1287,$$

о которых шла речь в начале параграфа.

С левой стороны таблицы добавляется еще один вертикальный столбец, состоящий из одних единиц; числа этого столбца (единицы) называют фигурными числами нулевого порядка. В результате получим такую таблицу:

Порядок / Номер	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	21
4	1	4	10	20	35	56
5	1	5	15	35	70	126
6	1	6	21	56	126	252
7	1	7	28	84	210	462
8	1	8	36	120	330	792
9	1	9	45	165	495	1 287
10	1	10	55	220	715	2 002
11	1	11	66	286	1 001	3 003
12	1	12	78	364	1 365	4 368

Так построенная таблица фигурных чисел впервые встречается в большом сочинении по арифметике итальянца Тарталья (1500—1557). Однако систематическое изложение свойств чисел различных порядков было дано лишь в сочинении „Об арифметическом треугольнике“ Паскаля (1623—1662), выдающегося французского математика и физика.

Укажем теперь на основное свойство полученной таблицы. Из самого способа ее составления вытекает: если взять, например, первые 10 чисел второго порядка, то их сумма равна одному десятому числу третьего порядка. Чтобы это показать, заметим, что в третьем столбце второе число 4 равно сумме $1+3$; третье число 10 равно $4+6$ или же $1+3+6$, четвертое число 20 равно $10+10$ или же $1+3+6+10$, т. е. четвертое число третьего столбца равно сумме первых четырех чисел второго столбца; пятое число третьего столбца 35 равно $20+15$ или же $1+3+6+10+15$, т. е. сумме первых 5 чисел второго столбца; и так далее. Поэтому и десятое число третьего порядка равно сумме первых 10 чисел второго порядка. Таким же образом можно показать, что, например, сумма первых 8 чисел третьего порядка равна одному восьмому числу четвертого порядка.

Общее правило таково: сумма первых n фигурных чисел какого-либо порядка равна одному n-му числу следующего порядка.

Введем следующие обозначения. Число, стоящее на m-й строке и в столбце с номером k, обозначим через F_m^k; например 8-е фигурное число второго порядка будет обозначаться через F_8^2; десятое число третьего порядка F_{10}^3 и т. д.

Тот факт, что сумма первых шести чисел второго порядка равна шестому числу третьего порядка, в этих обозначениях запишется так:

$$F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2+F_5^2+F_6^2=F_6^3.$$

Таким же образом можно записать, что сумма первых восьми чисел третьего порядка равна восьмому числу четвертого порядка:

$$F_1^3+F_2^3+F_3^3+F_4^3+F_5^3+F_6^3+F_7^3+F_8^3=F_8^4.$$

Можно записать и общую формулу такого „автоматического" сложения:

$$F_1^k+F_2^k+F_3^k+\ldots+F_{n-1}^k+F_n^k=F_n^{k+1}. \qquad (1)$$

Если бы мы имели в своем распоряжении весьма большую таблицу, то могли бы сразу находить суммы такого рода; например, сумму первых 300 чисел третьего порядка; сумму первых 450 чисел четвертого порядка и т. д.

Но оказывается, можно производить такое суммирование сразу, не имея огромных таблиц. Можно, например, быстро найти сумму первых 300 слагаемых третьего порядка без таблицы. Для этого, согласно изложенному, достаточно знать только фигурное число F_{300}^4. Но как его узнать? Ответ на этот вопрос дает формула другого великого французского математика, Пьера Ферма (1601—1665). Эта формула впервые встречается в письме, которое Ферма писал своему приятелю в 1636 г., т. е. 300 лет назад. Фигурное число F^4_{300}, согласно формуле Ферма, равно $\frac{300\cdot 301\cdot 302\cdot 303}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$.

К выводу формулы Ферма мы и перейдем.

2. Формула для любого числа таблицы Тарталья

Решим предварительно такую задачу. Требуется сложить сумму $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots$ (100 слагаемых). Последние слагаемые будут: $99\cdot 100\cdot 101$; $100\cdot 101\cdot 102$.

Для нахождения суммы можно применить следующий весьма удобный прием. Сперва умножим все слагаемые на 4. Получим:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4+4\cdot 5\cdot 6\cdot 4+\ldots+100\cdot 101\cdot 102\cdot 4.$$

Такое увеличение всех слагаемых влечет за собой и увеличение всей суммы в 4 раза; поэтому результат нового суммирования придется потом разделить на 4.

Новую сумму будем вычислять постепенно: сперва найдем сумму первых двух слагаемых; к полученному добавим третье слагаемое; затем добавим четвертое и т. д.

Складываем первые два слагаемых:[1]

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 4=1\,(2\cdot 3\cdot 4)+(2\cdot 3\cdot 4)\cdot 4=(2\cdot 3\cdot 4)\cdot 5=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5.$$

К полученному добавим третье слагаемое:

$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4=2\,(3\cdot 4\cdot 5)+(3\cdot 4\cdot 5)\cdot 4=(3\cdot 4\cdot 5)\cdot 6=3\cdot 4\cdot 5\cdot 6.$$

К полученному добавим четвертое слагаемое:

$$3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+4\cdot 5\cdot 6\cdot 4=3\cdot(4\cdot 5\cdot 6)+(4\cdot 5\cdot 6)\cdot 4=(4\cdot 5\cdot 6)\cdot 7=4\cdot 5\cdot 6\cdot 7.$$

Итак, сумма первых четырех слагаемых

$$\begin{gathered}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4+4\cdot 5\cdot 6\cdot 4=\\=4\cdot(1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6)\end{gathered}$$

оказалась равной $4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$.

Подметив закономерность суммирования, можно сразу написать, например, сумму первых двадцати слагаемых:

$$\begin{gathered}4(1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+19\cdot 20\cdot 21+20\cdot 21\cdot 22)=\\=20\cdot 21\cdot 22\cdot 23.\end{gathered}$$

---

[1] Здесь нужно сделать следующее замечание: сумму вида $mab+abn$ можно преобразовать так:

$$m\,(ab)+(ab)n=(ab)\,m+(ab)\,n=ab\,(m+n).$$

Например, вместо суммы $2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 7$ можно написать:

$$2\cdot(3\cdot 4)+(3\cdot 4)\cdot 7=(3\cdot 4)\cdot 2+(3\cdot 4)\cdot 7=(3\cdot 4)\cdot(2+7)=(3\cdot 4)\cdot 9=3\cdot 4\cdot 9.$$

Таким же образом напишем сразу сумму первых 100 слагаемых:

$$4(1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+99\cdot100\cdot101+100\cdot101\cdot102)=$$
$$=100\cdot101\cdot102\cdot103.$$

Теперь вернемся к основной задаче, к нахождению суммы:

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+99\cdot100\cdot101+100\cdot101\cdot102.$$

Для нее найдем значение $\frac{100\cdot101\cdot102\cdot103}{4}$. В общем случае, для любого числа n слагаемых результат решения задачи запишется так:

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+(n-1)n(n+1)+$$
$$+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Следует отметить, что все слагаемые состояли из трех множителей, а сумма содержит четыре множителя; кроме того, появляется множитель $\frac{1}{4}$.

Таким же способом может быть решена задача нахождения суммы слагаемых такого вида:

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+4\cdot5\cdot6\cdot7+\ldots$$
$$\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3).$$

В данном случае придется все слагаемые предварительно умножить на 5. Решение может быть проведено в точности так же, как в предыдущем случае; в результате получится:

$$\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Вернемся теперь к таблице Тарталья (в дальнейшем будем ее называть таблицей Паскаля; такое название более употребительно). В первом столбце таблицы находятся числа 1, 2, 3, 4... Хотя мы и знаем формулу для суммы чисел этого ряда, будет полезно найти ее только что указанным приемом. Для этого надо предварительно умножить числа ряда на 2. Получим:

$$1\cdot2+2\cdot2+3\cdot2+4\cdot2+\ldots+(n-1)\cdot2+n\cdot2.$$

Сумма первых двух слагаемых найдется так:

$$1\cdot2+2\cdot2=2(1+2)=2\cdot3.$$

Затем прибавляем третье слагаемое:

$$2\cdot3+3\cdot2=3\cdot(2+2)=3\cdot4.$$

Далее прибавляем четвертое слагаемое:

$$3\cdot4+4\cdot2=4(3+2)=4\cdot5.$$

Поэтому сумма первых четырех слагаемых:

$$1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 2=2(1+2+3+4)=4\cdot 5.$$

Сумма первых n слагаемых окажется равной

$$n(n+1).$$

Для нахождения суммы основного ряда надо этот результат разделить на 2. Получим:

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Иначе это равенство можно записать так:

$$F_1^1+F_2^1+F_3^1+F_4^1+\ldots+F_n^1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Но сумма, стоящая на левой стороне, равна также F_n^2. Отсюда получаем формулу:

$$F_n^2=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}.$$

Выведем теперь формулу для фигурного числа третьего порядка, т. е. F_n^3.

Как известно,

$$F_n^3=F_1^2+F_2^2+F_3^2+\ldots+F_{n-1}^2+F_n^2.$$

Для фигурных чисел F_m^2 второго порядка мы только что получили формулу: $F_m^2=\frac{m(m+1)}{2}$. Поэтому F_n^3 можно представить в виде суммы:

$$1+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{4\cdot 5}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Вынося множитель $\frac{1}{2}$ за скобки, получим:

$$F_n^3=\frac{1}{2}\left[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\cdots+n(n+1)\right].$$

Но слагаемые, стоящие внутри скобки, мы умеем суммировать:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Отсюда следует, что фигурное число третьего порядка выражается формулой:

$$F_n^3=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}.$$

Для симметрии можно написать:

$$F_n^3=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Теперь уже не трудно написать формулу для фигурного числа четвертого порядка:

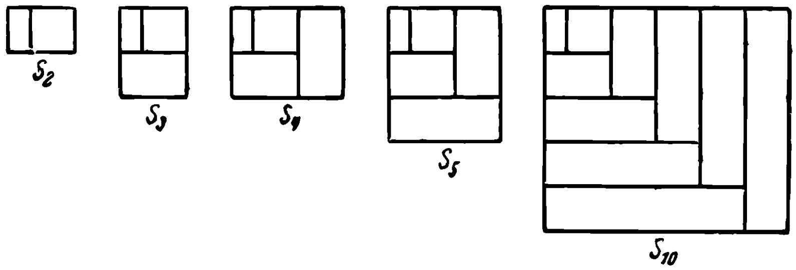
$$F_n^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Самая общая формула для фигурного числа имеет вид:

$$F_n^k = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k}.$$

Именно эту формулу сообщал Ферма в письме другу в 1636 г.

Дадим теперь геометрическую иллюстрацию к изложенному способу суммирования произведений последовательных чисел натурального ряда. Пусть требуется сложить числа первого порядка, т. е. числа $1+2+3+4+5+\dots+n$. Эти числа можно представить прямоугольниками, длина которых равна 1 см, 2 см, 3 см, ..., n см, а ширина 1 см. Площади



Черт. 41.

прямоугольников будут равны тем же фигурным числам первого порядка: $1\cdot 1$ кв. см $=1$ кв. см, $2\cdot 1$ кв. см $=2$ кв. см, $3\cdot 1$ кв. см $=3$ кв. см, $4\cdot 1$ кв. см $=4$ кв. см,...

Условимся повсюду указывать сперва длину, затем ширину.

Согласно вышеизложенному способу удвоим ширину всех этих прямоугольников, т. е. сделаем ее равной 2 см. Теперь приступаем к последовательному сложению их площадей (черт. 41).

Сумму площадей первых двух прямоугольников получим, приставив второй из них справа к первому; получится прямоугольник площадью в 2×3 кв. см; эту площадь обозначим через S_2. К полученному прямоугольнику приставляем снизу третий прямоугольник; в результате получится новый прямоугольник площадью в 3×4 кв. см; обозначим его величину через S_3. К полученной фигуре приставляем справа четвертый прямоугольник, предварительно опрокинув его так, чтобы основанием служила сторона, равная 2 см. В результате получим прямоугольную фигуру размером 5×4 кв. см; эту величину обозначим через S_4.

Такой процесс последовательного прикладывания справа и снизу новых прямоугольников можно продолжать как угодно далеко. Не трудно видеть, что, например, сумма 10 прямоугольников представит собой прямоугольник с площадью $S_{10}=11\cdot 10$ кв. см (черт. 41). Отсюда следует, что сумма $2(1+2+3+\ldots+10)=10\cdot 11$, или же в общем виде: $2(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$; разделив обе части равенства на 2, получим $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Перейдем к суммированию фигурных чисел второго порядка: их сумма есть $\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{4\cdot 5}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=$ $=\frac{1}{2}\left[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)\right]$. Мы отбросим пока множитель $\frac{1}{2}$; впоследствии мы его учтем.

Возьмем прямоугольные параллелепипеды (коробочки), размеры которых указаны в следующей таблице:

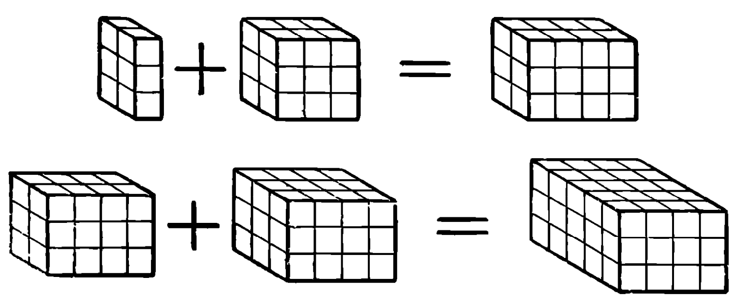
	Первый паралл.	Второй паралл.	Третий паралл.	Четвертый паралл.	. . .
Длина	1 см	2 см	3 см	4 см	. . .
Ширина	2 „	3 „	4 „	5 „	. . .
Высота	1 „	1 „	1 „	1 „	. . .

Объемы этих коробочек в кубических сантиметрах выражаются произведениями $1\cdot 2$, $2\cdot 3$, $3\cdot 4, \ldots$ куб. см. Увеличим высоту всех коробочек в 3 раза. Получим коробочки таких размеров:

Длина	1 см	2 см	3 см	4 см	. . .
Ширина	2 „	3 „	4 „	5 „	. . .
Высота	3 „	3 „	3 „	3 „	. . .

Объемы этих новых коробочек можно суммировать тем же приемом, каким мы раньше суммировали площади прямоугольников. Складываем первую и вторую коробочки.

Для этого опрокидываем вторую коробочку так, чтобы ее размеры „по порядку“ были: $3\times 2\times 3$ куб. см. Приставляем ее справа к первой коробочке (черт. 42). Тогда из двух коробок образуется одна коробка, длина которой будет равна $1+3=4$ см,



Черт. 42.

и в сумме получим коробку $V_2=4\times2\times3$ куб. см. К полученной коробке прибавим третью коробку. С этой целью опрокинем ее так, чтобы ее размеры по порядку были $4\times3\times3$ куб. см. Приставим эту коробку к предыдущей коробке так, чтобы грани в 3×4 кв. см у них слились. Тогда из них сложится новая коробка $V_3=4\cdot2\cdot3+4\cdot3\cdot3=$ $=4\cdot(2+3)\cdot3=4\cdot5\cdot3$ куб. см. Так будем продолжать дальше. Наибольшей по размеру стороной у вновь образующихся коробок будут по очереди: длина, ширина, высота; длина, ширина, высота и т. д. В результате складывания получим коробку с объемом, равным произведению $n(n+1)(n+2)$ куб. см (порядок множителей может быть иным,— это не имеет значения). Искомую сумму фигурных чисел F_m^2 получим, разделив результат на 3 и умножив еще на множитель $\frac{1}{2}$; получим $\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot3}$; это и есть значение F_n^3.

Дальше итти геометрическим путем мы не можем, так как такой же прием для суммирования чисел F_m^3 требовал бы четвертого измерения, которого пространство не имеет.

Доказав формулу Ферма, мы могли бы перейти к разрешению вопроса, поставленного в начале главы, к нахождению сумм Σ_k. Однако мы сделаем отступление в сторону, а именно: покажем, каким, совершенно иным, путем пришел Паскаль к той же самой формуле для фигурных чисел F_n^k.

3. Диагонали таблицы и формула Паскаля

В эпоху, когда жили Тарталья, Ферма и Паскаль, азартные игры были в большом распространении. Свою таблицу Тарталья составил, имея в виду расчеты при игре в кости; подобные же задачи натолкнули Паскаля на исследование новых математических вопросов; их разработка привела его к созданию новой ветви математики — теории вероятностей. Одной из таких задач была задача о бросании монеты.

Если 1 раз подбрасывают монету, то может выпасть либо решетка, либо герб. Будем выпадение решетки обозначать нулем, выпадение герба — единицей. Тогда результат одного подбрасывания выразится знаком:

0
1

Если монету подбросить второй раз, то опять может выпасть либо решетка, либо герб, причем любой результат второго бросания монеты может сочетаться с любым результатом первого. Всего получим 4 возможных случая, или, как принято говорить, 4 варианта:

0 0	и	0 1
1 0		1 1

Объединяя их в одну схему, получим:

Ни одного раза герб	0 0	1 вар.
1 раз герб	1 0 0 1	2 вар.
2 раза герб	1 1	1 вар.

Перейдем к случаю трех бросаний монеты. В результате третьего бросания опять может выпасть либо решетка, либо герб, и каждый из этих результатов может сочетаться с любым из 4 вариантов результата первых 2 бросаний. Получим две схемы:

0 0 0	→	0 0 1
1 0 0 0 1 0	→	1 0 1 0 1 1
1 1 0		1 1 1

Третий столбец показывает результат 3-го бросания. Всего получим $4 \cdot 2 = 8$ вариантов. Их можно распределить по числу выпадений герба. Например, „1 раз герб“ встречается два раза на левой схеме и один раз на правой. Соединение одинаковых вариантов (по числу гербов) показано стрелками. Теперь можно все эти 8 вариантов соединить в одну схему. Получим:

Ни одного раза герб	0 0 0	1 вар.
1 раз герб	1 0 0 0 1 0 0 0 1	3 вар.
2 раза герб	1 1 0 1 0 1 0 1 1	3 вар.
3 раза герб	1 1 1	1 вар.

Подбросим монету в четвертый раз. Независимо от предыдущих результатов, опять может выпасть либо решетка, либо герб. К полученной схеме, сообразно с этим, можно справа приставить столбец с нулями или столбец с единицами. В результате получим $8 \cdot 2 = 16$ вариантов:

0 0 0 0	0 0 0 1
1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0	1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1
1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0	1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1
1 1 1 0	1 1 1 1

Распределим эти 16 вариантов по числу выпадений герба:

Ни одного раза герб	0 0 0 0	1 вар.
1 раз герб	1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1	4 вар.
2 раза герб	1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1	6 вар.
3 раза герб	1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1	4 вар.
4 раза герб	1 1 1 1	1 вар.

Отметим опять, что варианты каждой категории в последней таблице получаются путем сложения вариантов этой категории в левой и правой схеме, ранее указанных. Такое сложение вариантов одной категории можно представить весьма просто, если группу чисел:

1	3	3	1

дающих результаты 3 бросаний, написать 2 раза, затем вторую группу чисел сдвинуть вправо на одну клетку так:

1	3	3	1	
	1	3	3	1

Складывая по вертикалям, получим новую группу чисел, т. е. числа вариантов 4 бросаний:

1	4	6	4	1

Переходя к случаю 5 бросаний, покажем результаты на схеме без объяснений:

0 0 0 0 0	0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1
1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0	1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1
1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0	1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0	1 1 1 1 1

Соединяя оба столбца вместе, получим:

Ни одного раза герб	0 0 0 0 0	1 вар.
1 раз герб	1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1	5 вар.
2 раза герб	1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1	10 вар.
3 раза герб	1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1	10 вар.
4 раза герб	1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1	5 вар.
5 раз герб	1 1 1 1 1	1 вар.

Новые числа вариантов попрежнему можно получить путем своеобразного сложения двух групп чисел — результатов **4** бросаний:

1	4 1	6 4	4 6	1 4	 1
1	5	10	10	5	1

Этот процесс подсчета чисел вариантов можно продолжить. Для случая 6 бросаний получим:

1	5 1	10 5	10 10	5 10	5	1
1	6	15	20	15	6	1

Для случая 7 бросаний получим:

1	6 1	15 6	20 15	15 20	6 15	1 6	1
1	7	21	35	35	21	7	1

И так далее.

Выпишем подряд группы чисел, дающие числа вариантов при 1, 2, 3, 4, 5, ... бросаниях:

1	1

1	2	1

1	3	3	1

1	4	6	4	1

1	5	10	10	5	1

1	6	15	20	15	6	1

И так далее.

Расположим эти группы чисел одну под другой. Тогда получим числовой „треугольник“.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Таблица эта была известна уже очень давно: такая в точности таблица имеется в книге „Драгоценное зеркало четырех начал“ (1303 г.) китайского математика Тшу-Ши-Ки.

Дадим теперь этому „китайскому треугольнику“ иное расположение, а именно такое, чтобы единицы шли горизонтально вправо и вертикально вниз. Тогда получим ту форму таблицы, которую рассматривал Паскаль в своей книге. Отсюда произошло название „Арифметический треугольник Паскаля“:

пар / №	0	I	II	III	IV	V			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	
3	1	3	6	10	15	21	28		
4	1	4	10	20	35	56			
5	1	5	15	35	70				
6	1	6	21	56					
7	1	7	28						
8	1	8							
9	1								

Если эту треугольную таблицу Паскаля сравним с прямоугольной таблицей Тарталья (стр. 76), то убедимся, что треугольник Паскаля есть срезанный вдоль диагонали прямоугольник Тарталья. Таким образом, если мы сумеем написать формулу для любого числа треугольника Паскаля, то можно будет написать формулу и для любого фигурного числа F_n^k. Но присмотримся к группам чисел, находящихся на диагоналях треугольника. С такими группами чисел мы уже встречались в начале второй главы. Мы, например, имели группу чисел:

1	8	28	56	70	56	28	8	1

и для них формулы:

$$C_8^0=1;\ C_8^1=8;\ C_8^2=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28;\ C_8^3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56;\ C_8^4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70;$$

$$C_8^5=C_8^3=56;\ C_8^6=C_8^2=28;\ C_8^7=C_8^1=8;\ C_8^8=1.$$

Это не случайно. Здесь, в задаче с подбрасыванием монеты, число 28 дает ответ на вопрос: при 8 бросаниях герб выпадает 2 раза; сколько имеется таких вариантов? Так как выпадение герба могло произойти при любом из 8 бросаний, то, перенумеровав бросания, мы можем свести задачу к такой: сколькими различными способами можно из 8 номеров выбрать 2?

Но это явно напоминает задачу второй главы: из 8 членов завкома надо выбрать двух делегатов на конференцию; сколько имеется вариантов результата выборов?

В обоих случаях из 8 номеров надо выбрать 2. В первом случае нумеруются бросания; во втором случае — члены завкома. Естественно, что ответ на обе задачи выражается одним и тем же числом.

Точно так же число 56, лежащее на восьмой диагонали паскалева треугольника, есть число вариантов трехкратного выпадения герба при 8 бросаниях и в то же время есть ответ на вопрос: сколько имеется вариантов — выбрать трех человек из 8 человек?

Итак, числа, лежащие на диагоналях паскалевой таблицы, представляют собой числа сочетаний; на 5-й диагонали — сочетаний из 5 элементов; на 6-й диагонали — сочетаний из 6 элементов и т. д. Поэтому для определения чисел, входящих в паскалев треугольник, можно дать такие правила:

Всякое число, лежащее в нулевом столбце, равно 1. Число, лежащее в первом столбце и n-й диагонали, равно $C_n^1 = n$.

Число, лежащее в втором столбце и n-й диагонали, равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$.

Число, лежащее в третьем столбце и n-й диагонали, равно $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д.

Теперь уже не трудно будет вывести формулу Паскаля для любого фигурного числа. Пусть, например, требуется найти F_6^3. Чтобы знать его место в треугольнике Паскаля, нужно определить номер диагонали, на которой оно лежит. С этой целью будем передвигаться от числа F_6^3 влево вниз. При таком передвижении нижнее число m будет возрастать, а верхнее убывать. После F_6^3 встретим число F_7^2, затем число F_8^1. Дальше передвигаться не надо, так как именно в первом столбце значится и номер диагонали. В данном случае мы передвинулись на два места влево вниз и из третьего столбца попали на первый столбец. Вообще, чтобы число F_n^k передвинуть по диагонали в первый столбец, нужно сделать $(k-1)$ перемещение. Значит, номер диагонали будет $n+k-1$. Поэтому общая формула такова:

$$F_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Это и есть формула Паскаля для фигурных чисел.

Остается показать, что эта формула дает то же самое, что и формула Ферма. Это легко проверить:

По формуле Ферма	По формуле Паскаля
$F_6^3=\frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3}$	$F_6^3=C_8^3=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}$
$F_8^4=\frac{8\cdot9\cdot10\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$	$F_8^4=C_{11}^4=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
$F_n^k=\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1\cdot2\ldots k}$	$F_n^k=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n}{1\cdot2\ldots k}$

4. Решение задачи о суммах $\sum_k$

Теперь мы обладаем достаточно сильными средствами, чтобы решить задачу о суммах Σ_k, т. е. найти сумму

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k.$$

Для того чтобы найти сумму k-х степеней натурального ряда, мы поступим так. Вместо $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ будем складывать фигурные числа $F_1^k+F_2^k+\ldots+F_n^k$; получим F_n^{k+1}, а затем учтем поправку, которую надо внести в этот результат.

На основании формулы Ферма, таблицу Паскаля можно представить в таком виде:

1	1	$1=\frac{1\cdot2}{2}$	$1=\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot3}$	$1=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
1	2	$\frac{2\cdot3}{2}$	$\frac{2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
1	3	$\frac{3\cdot4}{2}$	$\frac{3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
1	4	$\frac{4\cdot5}{2}$	$\frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
1	5	$\frac{5\cdot6}{2}$	$\frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
1	6	$\frac{6\cdot7}{2}$	$\frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
1	7	$\frac{7\cdot8}{2}$	$\frac{7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
1	8	$\frac{8\cdot9}{2}$	$\frac{8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{8\cdot9\cdot10\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

Будем считать известной сумму Σ_1 и начнем с нахождения суммы квадратов Σ_2, — например, первой сотни чисел натурального ряда.

Как мы знаем,

$$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\ldots+F_{100}^2=F_{100}^3,$$

или короче:

$$\sum_1^{100} F_m^2=F_{100}^3.$$

Слагаемые этой суммы находятся во втором столбце таблицы. Любое m-е число этого столбца равно $\frac{m(m+1)}{2}$, или, после перемножения, $\frac{m^2+m}{2}=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m$. Если мы возьмем первые 100 чисел второго столбца, то их можно будет представить в таком виде:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\cdot 1 \\
\frac{1}{2}\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 2 \\
\frac{1}{2}\cdot 3^2+\frac{1}{2}\cdot 3 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\frac{1}{2}\cdot 99^2+\frac{1}{2}\cdot 99 \\
\frac{1}{2}\cdot 100^2+\frac{1}{2}\cdot 100
\end{array}$$

Будем складывать отдельно первые слагаемые этих сумм и отдельно вторые слагаемые. Тогда получим:

$$\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2)+\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+100),$$

или

$$\frac{1}{2}\sum\nolimits_2+\frac{1}{2}\sum\nolimits_1.$$

С другой стороны, сумма первых 100 фигурных чисел второго порядка равна F_{100}^3 или, в общем виде, F_n^3. Итак, получаем равенство:

$$\frac{1}{2}\sum\nolimits_2+\frac{1}{2}\sum\nolimits_1=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

В правой части равенства, после перемножения, получим $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$. Но в равенстве $\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{2}\sum_1=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)$ нам известна сумма Σ_1; она равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Следовательно, можно будет определить искомую сумму Σ_2 из равенства:

$$\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{4}(n^2+n)=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n).$$

Или

$$\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}n=\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\sum_2=\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{12}n,$$

или окончательно:

$$\sum_2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

Этот результат совпадает с формулой (11) предыдущей главы.

Перейдем к выводу формулы для Σ_3. Теперь мы можем считать уже известными суммы Σ_1 и Σ_2. Подобно тому, как формулу для Σ_2 мы вывели из рассмотрения равенства $\sum_{m=1}^{n} F_m^2=F_n^3$, мы выведем формулу для Σ_3 из суммирования фигурных чисел третьего порядка, т. е. из равенства $\sum_{m=1}^{n} F_m^3=F_n^4$. Любое m-е число третьего порядка определяется формулой:

$$F_m^3=\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{m^3+3m^2+2m}{6}=\frac{1}{6}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m.$$

Поэтому, если требуется найти, например, сумму первых 100 чисел третьего столбца таблицы Паскаля, то можно эти числа представить следующей таблицей:

$$\frac{1}{6}\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{3}\cdot 1$$
$$\frac{1}{6}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 2^2+\frac{1}{3}\cdot 2$$
$$\frac{1}{6}\cdot 3^3+\frac{1}{2}\cdot 3^2+\frac{1}{3}\cdot 3$$
$$\frac{1}{6}\cdot 4^3+\frac{1}{2}\cdot 4^2+\frac{1}{3}\cdot 4$$

. . . .

$$\frac{1}{6}\cdot 99^3+\frac{1}{2}\cdot 99^2+\frac{1}{3}\cdot 99$$
$$\frac{1}{6}\cdot 100^3+\frac{1}{2}\cdot 100^2+\frac{1}{3}\cdot 100.$$

Складывая отдельно первые, вторые и третьи члены, получим:

$$\frac{1}{6}(1^3+2^3+3^3+\ldots+99^3+100^3)+$$
$$+\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+99^2+100^2)+$$
$$+\frac{1}{3}(1+2+3+\ldots+99+100),$$

или же короче:

$$\frac{1}{6}\sum_3+\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{3}\sum_1.$$

Вся эта сумма равна:

$$F_{100}^4=\frac{100\cdot 101\cdot 102\cdot 103}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

или, в общем виде:

$$F_n^4=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}.$$

Итак, мы получим равенство:

$$\frac{1}{6}\sum_3+\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{3}\sum_1=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}.$$

Умножая обе части равенства на 24, получим:

$$4\Sigma_3+12\Sigma_2+8\Sigma_1=n^4+6n^3+11n^2+6n.$$

Подставляя в левую часть вместо Σ_1 и Σ_2 их значения:

$$\sum_1=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n;\quad \sum_2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

получим:

$$4\sum_3+12\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)+8\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)=$$
$$=n^4+6n^3+11n^2+6n$$

или

$$4\Sigma_3+4n^3+6n^2+2n+4n^2+4n=n^4+6n^3+11n^2+6n.$$

Откуда следует:

$$4\sum_3=n^4+2n^3+n^2;\ \sum_3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Эта формула совпадает с формулой (10) предыдущей главы.

Ничто не мешает двигаться и дальше по этому же пути; этот способ дает возможность получить Σ_4, Σ_5 и т. д., в то время как искусственные приемы предыдущей главы для этой цели оказываются непригодными. [1]

Правда, выкладки будут становиться все более длинными и утомительными, но никаких принципиальных затруднений на этом пути встретиться не может. При желании можно вывести все 11 формул Фаульхабера и даже превзойти его результаты, получив несколько дальнейших формул.

5. Площадь, ограниченная параболой

Рассмотрим выражение x^2. Если x означает переменное число, то и величина x^2 будет переменной. Если x получает последовательно значения 1; 2; 3; 4;..., то x^2 будет принимать значения 1; 4; 9; 16;... Переменному x можно давать и промежуточные значения, например: 1; $1\frac{1}{2}$; 2; $2\frac{1}{2}$; 3;...; тогда x^2 будет соответственно равно 1; $2\frac{1}{4}$; 4; $6\frac{1}{4}$; 9;....

Обозначим x^2 через y, т. е. примем $y=x^2$. Значения переменных x и y можно расположить в виде прилагаемой таблицы:

x	0	$^1/_2$	1	$1^1/_2$	2	$2^1/_2$
y	0	$^1/_4$	1	$2^1/_4$	4	$6^1/_4$.

Если считать, что переменное x изменяется непрерывно и возрастая принимает последовательно все возможные числовые значения, то y будет изменяться также непрерывно. Связь между обеими переменными удобно представить графически (черт. 43).

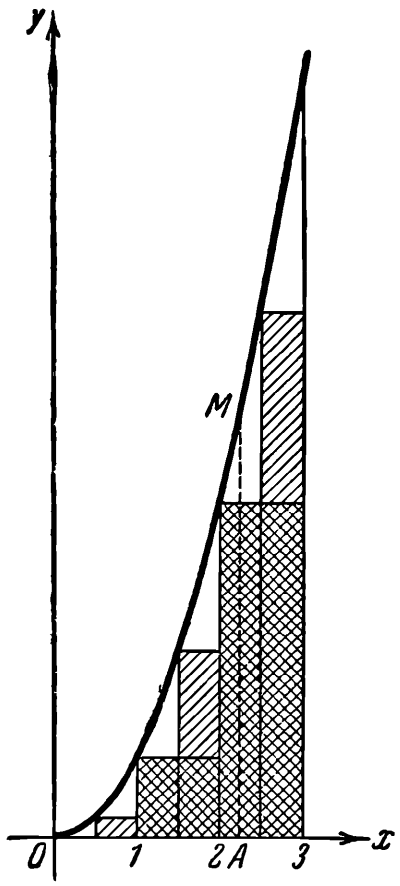
Если x непрерывно возрастает, то точка A — конец отрезка OA, изображающего число x, движется по оси x вправо, постепенно удаляясь от точки O. Если для каждого значения x (для каждого возможного положения точки A) построить ординату $AM=y$, равную соответствующему значению y, то концы этих ординат лежат на плавной кривой линии, называемой параболой; так как x^2 есть вторая степень от x, то эту параболу называют также параболой второй степени.

Пусть на чертеже имеется парабола $y=x^2$. Задача, которую мы теперь хотим решить, состоит в определении площади,

[1] Такой способ постепенного вывода одним и тем же приемом более сложных формул на основе уже выведенных ранее носит название „рекуррентного способа" (recurro по-латински значит „снова бегаю").

ограниченной отрезками OA и AM и кривой линией параболы OM.

В течение многих веков ученые пытались решить задачу об определении площадей, ограниченных кривыми линиями, но их попытки оставались безуспешными. Некоторые удачные результаты получил древнегреческий математик Архимед, но в позднейшие века произошел застой в развитии математики и даже приемы Архимеда были забыты. Новое оживление наступило в XVI и XVII веках, когда начала зарождаться так называемая высшая математика. В исследованиях ученых того времени — Кеплера, Валлиса, Ферма, Паскаля, Барроу, Ньютона, Лейбница, Меркатора, Маклорена и др. — определение площадей и объемов, ограниченных кривыми линиями и поверхностями, занимало центральное место. Трудность этой задачи состоит в том, что кривая линия, ограничивающая площадь, искривлена даже в своих мельчайших частях, а потому такую площадь нельзя разбить на треугольники, прямоугольники и другие фигуры, ограниченные прямыми линиями. Пробовали найти выход в том, чтобы мысленно разделить площадь на бесконечное множество полосок, как это делал Кеплер, но эти рассуждения с бесконечностями отличались крайней туманностью, и математика вынуждена была от них отказаться.



Черт. 43.

Правильное решение вопроса было найдено тогда, когда отказались от лобовой атаки и пошли обходным путем. Ключ к разрешению задачи для параболы дает как раз выведенная нами формула для Σ_2.

Решим задачу сперва для случая, когда отрезок на оси Ox есть $[0 \dots 1.]$ Разделим этот интервал (черт. 44) на некоторое число равных долей, например на 20, и построим ординаты y для значений x:

$$0;\ \frac{1}{20};\ \frac{2}{20};\ \frac{3}{20};\ \dots;\ \frac{18}{20};\ \frac{19}{20}.$$

Длина соответственных ординат y будет:

$$0;\ \frac{1}{20^2};\ \frac{4}{20^2};\ \frac{9}{20^2};\ \dots;\ \frac{18^2}{20^2};\ \frac{19^2}{20^2}.$$

Построим ступенчатую фигуру, как показано на чертеже.

Ширина каждой прямоугольной полоски равна $\frac{1}{20}$ ед. Площадь полоски с номером m будет равна: $\frac{m^2}{20^2}\cdot\frac{1}{20}$ кв. ед. Площадь всей ступенчатой фигуры будет равна:

$$\left(\frac{1^2}{20^2}+\frac{2^2}{20^2}+\frac{3^2}{20^2}+\ldots+\frac{18^2}{20^2}+\frac{19^2}{20^2}\right)\cdot\frac{1}{20}=$$
$$=\frac{1}{20^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+18^2+19^2).$$

Если отрезок [0...1] на оси Ox разделим на большее число равных долей, например на 100 ($n=100$), то получим для площади ступенчатой фигуры значение:

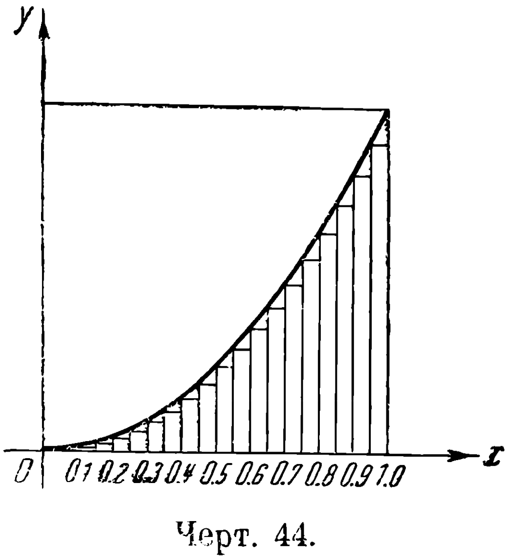
$$\frac{1}{100^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+98^2+99^2).$$

Но, очевидно, при увеличении числа долей n площадь ступенчатой фигуры все ближе и ближе приближается к искомой криволинейной площади. Это ясно видно на черт. 43, на котором заштрихованная в клетку площадь есть площадь ступенчатой фигуры при $n=3$, а площадь всей заштрихованной фигуры есть площадь ступенчатой фигуры при $n=6$.

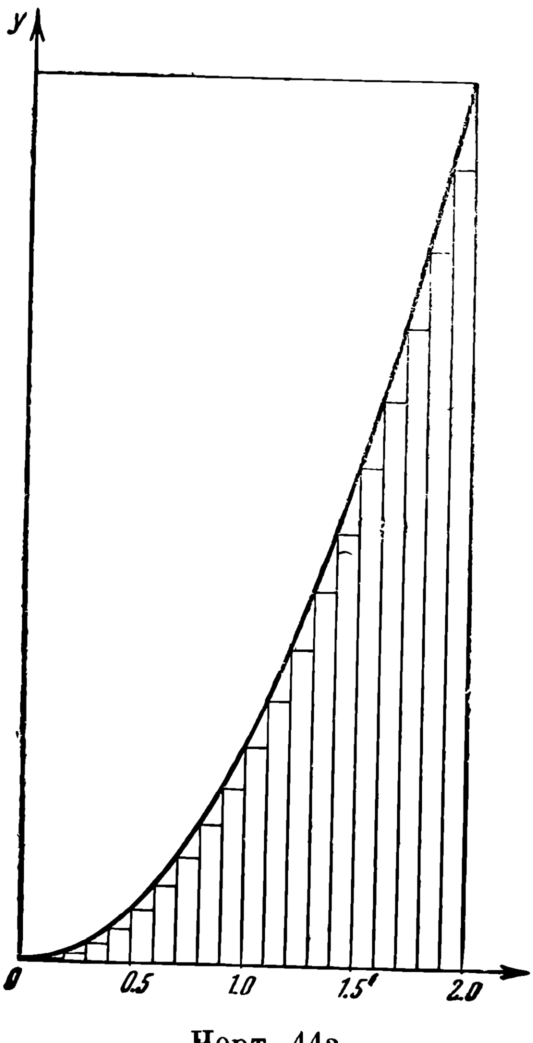
Если допустить, что число долей n растет неограниченно и если при этом площадь ступенчатой фигуры

$$\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]$$

будет приближаться к некоторому постоянному числу, то это предельное число и даст искомую площадь криволинейной фигуры. Но как



Черт. 44.



Черт. 44a.

сосчитать сумму квадратов, если взять $n = 1000$; $n = 10\,000$ и так далее? Формула для Σ_2 дает выход из этого затруднения.

Чтобы удобнее было применить формулу для Σ_2, добавим к выражению, стоящему в скобках, еще одно слагаемое n^2; от этого сумма увеличится на величину $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Если же n неограниченно возрастает, то величина дроби $\frac{1}{n}$ стремится к нулю, а потому результат от прибавления этой дроби не изменится. Получим выражение:

$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \sum\nolimits_2.$$

Но мы имели:

$$\sum\nolimits_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Поэтому площадь ступенчатой фигуры вместе с дополнительным слагаемым $\frac{1}{n}$ равна:

$$\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Если, например, взято $n = 1000$, то площадь равна:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 1000} + \frac{1}{6 \cdot 1\,000\,000} \text{ кв. ед.}$$

Если взять значение $n = 10\,000$, то площадь будет равна:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 10\,000} + \frac{1}{6 \cdot 100\,000\,000} \text{ кв. ед.}$$

и т. д.

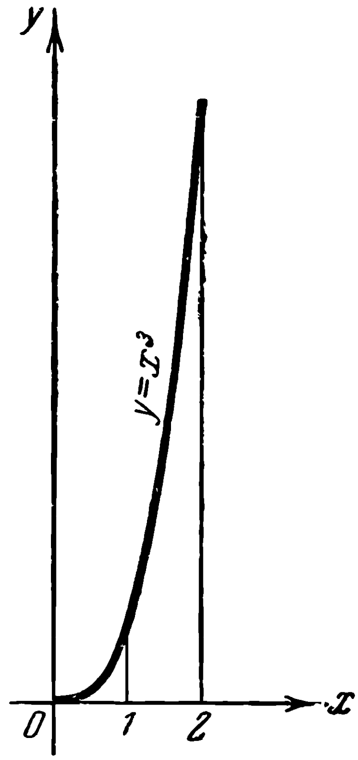
Если число n увеличивать все больше и больше, то в выражении $\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ второе слагаемое, а тем более третье, будут приближаться к нулю, а все выражение в целом — к постоянному числу, равному $^1/_3$. Отсюда заключаем, что точная величина площади, ограниченной параболой $y = x^2$ и лежащей на отрезке $[0\ldots1]$, равна $\frac{1}{3}$ кв. ед.

Перейдем теперь к случаю, когда парабола взята не на отрезке $[0\ldots1]$, а на большем отрезке, например на отрезке $[0\ldots2]$. Мы имеем в виду перейти в дальнейшем к любому отрезку $[0\ldots b]$ (черт. 44а).

Сравним площадь параболы на отрезке $[0\ldots2]$ с площадью параболы на отрезке $[0\ldots1]$. Будем производить с новой площадью те же операции, как с прежней. Разделим отрезок $[0\ldots2]$ сперва на 20 равных долей, затем на 100 долей, на 1000 долей и т. д. и будем делать одновременно то же самое с прежней площадью на отрезке $[0\ldots 1]$. Если оба отрезка $[0\ldots 1]$ и $[0\ldots 2]$ разделены на равное число долей и построены соответствующие фигуры, то ширина полосок одного и того же номера в обеих ступенчатых фигурах будет различной: во второй фигуре она будет в 2 раз больше; высота каждой полоски во второй фигуре будет уже в 4 раза больше, чем высота полоски с тем же номером в первой фигуре, так как, при увеличении x в 2 раза, $y=x^2$ увеличивается в 4 раза. Поэтому площадь каждой полоски второй фигуры будет в 8 раз больше, чем площадь соответствующей полоски первой фигуры. А так как это отношение $(8:1)$ остается постоянным для всех пар полосок с одинаковым номером, то и вся вторая ступенчатая фигура по площади в 8 раз больше первой ступенчатой фигуры. При дальнейшем увеличении числа n отношение $(8:1)$ остается неизменным, поэтому точная площадь второй криволинейной фигуры тоже в 8 раз больше, чем точная площадь первой криволинейной фигуры (на чертежах 44 и 44а эти соотношения не вполне выдержаны).

Мы взяли для второй фигуры интервал $[0\ldots 2]$. Если бы мы взяли для нее интервал $[0\ldots 7]$, то получили бы, что ее площадь больше площади на интервале $[0\ldots 1]$ в 343 раза: $7^3=343$.

Так как площадь, лежащая на интервале $[0\ldots 1]$, как мы показали, равна $\frac{1}{3}$ кв. ед., то для площади, лежащей на любом интервале $[0\ldots b]$, площадь равна $\frac{1}{3}b^3$ кв. ед. Это и есть решение нашей задачи.



Черт. 45.

Таким же путем можно найти площадь, ограниченную параболой $y=x^3$ (параболой третьей степени, черт. 45).

Опять-таки сначала решим задачу для интервала $[0\ldots 1]$. Попрежнему делим отрезок $OP=x$ на n равных долей. Если взять $n=100$, то последовательные значения отрезка $OP=x$ будут:

$$0;\ \frac{1}{100};\ \frac{2}{100};\ \frac{3}{100};\ \ldots;\ \frac{99}{100},$$

а соответствующих ординат y:

$$0;\ \frac{1}{100^3};\ \frac{2^3}{100^3};\ \frac{3^3}{100^3};\ \ldots;\ \frac{99^3}{100^3}.$$

Площади прямоугольных полосок будут равны:

$$0;\ \frac{1}{100^3}\cdot\frac{1}{100};\ \frac{2^3}{100^3}\cdot\frac{1}{100};\ \frac{3^3}{100^3}\cdot\frac{1}{100};\ \ldots;\ \frac{m^3}{100^3}\cdot\frac{1}{100};\ \ldots;\ \frac{99^3}{100^3}\cdot\frac{1}{100},$$

т. е.

$$0;\ \frac{1}{100^4};\ \frac{2^3}{100^4};\ \frac{3^3}{100^4};\ \ldots;\ \frac{m^3}{100^4};\ \ldots;\ \frac{99^3}{100^4} \text{ кв. ед.}$$

Вся площадь ступенчатой фигуры окажется равной

$$\frac{1}{100^4}(1^3+2^3+3^3+\ldots+99^3).$$

Если n произвольное число, то рассматриваемая площадь равна:

$$\frac{1}{n^4}[1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3].$$

Как и раньше, заменим эту величину другой, весьма мало от нее отличающейся:

$$\frac{1}{n^4}[1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3].$$

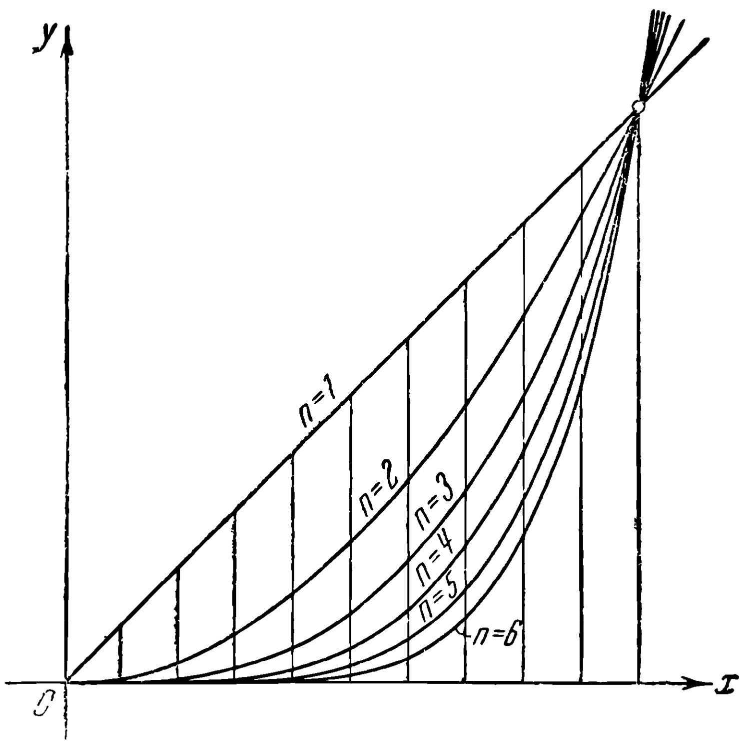
В скобках стоит сумма кубов:

$$\sum\nolimits_3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Поэтому площадь ступенчатой фигуры приблизительно равна:

$$\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}.$$

Чем больше число долей n, тем меньшую роль играют второе и третье слагаемые. При неограниченном возрастании числа n второе слагаемое, а тем более третье, стремятся к нулю. А потому искомая криволинейная площадь равна $^1/_4$ кв. ед.; этот результат является уже совершенно точным.



Черт. 46.

Как и раньше, рассмотрим еще один случай, когда отрезок на оси Ox будет не $[0\ldots1]$, а какой-нибудь $[0\ \ldots\ b]$, например $[0\ldots\ 3]$.

Опять сравниваем прямоугольные полоски ступенчатой фигуры на интервале

$[0 \ldots 1]$ с полосками фигуры, построенной на интервале $[0 \ldots 3]$ при одном и том же значении n. У второй фигуры ширина полосок в 3 раза больше, а высота в $3^3 = 27$ раз больше, чем у первой. Поэтому площади прямоугольных полосок у второй фигуры в $3^4 = 81$ раз больше, чем у первой фигуры. Значит, и вся площадь второй ступенчатой фигуры в 81 раз больше площади первой ступенчатой фигуры. При безграничном возрастании n обе ступенчатых фигуры переходят в конце концов в криволинейные фигуры, и для последних сохраняется соотношение площадей (81:1).

Так как площадь, ограниченная параболой $y = x^3$ и лежащая на интервале $[0 \ldots 1]$, равна $^1/_4$ кв. ед., то для площади, лежащей на интервале $[0 \ldots b]$, путем повторения предыдущих рассуждений получаем величину $\frac{1}{4}b^4$ кв. ед.

Переходя к параболам более высокой степени (на черт. 46 изображены дуги парабол $y = x^n$ на интервале $[0 \ldots 1]$ при $n = 1, 2, 3, 4$), например $y = x^4$; $y = x^5$; ..., можно теперь без колебаний утверждать, что площадь, ограниченная параболой $y = x^4$ на интервале $[0 \ldots b]$, равна $\frac{1}{5}b^5$ кв. ед.; площадь, ограниченная параболой $y = x^5$ на том же интервале, равна $\frac{1}{6}b^6$ и т. д.

Теорема 2. **Площадь, ограниченная кривой $y = x^n$ на интервале $[0 \ldots b]$, равна $\frac{b^{n+1}}{n+1}$ кв. ед.**

ГЛАВА IV

ЛЕСТНИЦА „ВО СКОЛЬКО"

1. Геометрическая прогрессия

В первой главе книги мы подробно разобрали два способа сравнения величин: „на сколько больше" и „во сколько больше". Первый способ связан с вычитанием, второй — с делением.

Далее, во второй главе мы рассматривали арифметическую прогрессию, или „лестницу на сколько", т. е. ряд величин, из которых каждая на столько-то единиц больше предыдущей. В настоящей главе мы разберем прогрессию другого рода, а именно — лестницу „во сколько". Лестница „во сколько" или геометрическая прогрессия, это — такой ряд чисел, в котором каждое число находится в заданном отношении к предыдущему, — иначе говоря, каждое число получается путем умножения предыдущего на постоянный коэффициент k (знаменатель прогрессии).

Примером геометрической прогрессии может служить ряд чисел: 5, 10, 20, ... Здесь $k = 2$.

Числа, образующие прогрессию, называются ее членами.

Следует отметить, что геометрическая прогрессия труднее дается пониманию, чем арифметическая. Это подтверждается и историей математики: арифметическая прогрессия была известна в самые отдаленные эпохи; о геометрической прогрессии мы находим первые отрывочные замечания в греческой математике лишь около 2000 лет назад. Увеличение „во сколько" гораздо сложнее и более абстрактно, чем увеличение „на сколько".

Лучше всего можно понять геометрическую прогрессию, если сопоставить ее с прогрессией арифметической. С этой целью приведем следующий пример.

> Директоры двух заводов А и В встретились на совещании. Из их беседы выяснилось, что оба завода выпустили за последний год одинаковые количества продук-

ции, а именно по 1250 т металлических изделий. На совещании было решено добиваться дальнейшего роста продукции, причем был намечен ежегодный рост на 20%.

Директор завода А выполнял задание следующим образом. В первый год после совещания его завод выпустил на 20% больше, чем раньше, т. е. на $^1/_5$. А именно:

$$1250 + 1250 \cdot {}^1/_5 = 1250 + 250 = 1500.$$

За второй год завод выпустил еще на 250 т больше, т. е.

$$1500 + 250 = 1750,$$

и так далее. В результате выпуск изделий за последующие 4 года оказался таким:

до совещания	1250
1-й год	1500
2-й „	1750
3-й „	2000
4-й „	2250

Что касается директора завода В, то он поступил иначе. За первый год после совещания он выпустил на 20% больше, чем раньше, т. е.

$$1250 + 1250 \cdot {}^1/_5 = 1500 \text{ т},$$

столько же, сколько директор А. За второй год директор завода В добился дальнейшего роста производительности труда, и завод выпустил за второй год на 20% больше, чем за первый:

$$1500 + 1500 \cdot {}^1/_5 = 1500 + 300 = 1800 \text{ т}.$$

На третий год он составил план по тому же принципу: опять увеличить выработку на 20% по сравнению с предыдущим годом:

$$1800 + 1800 \cdot {}^1/_5 = 1800 + 360 = 2160 \text{ т}.$$

За четвертый год завод В дал такую выработку:

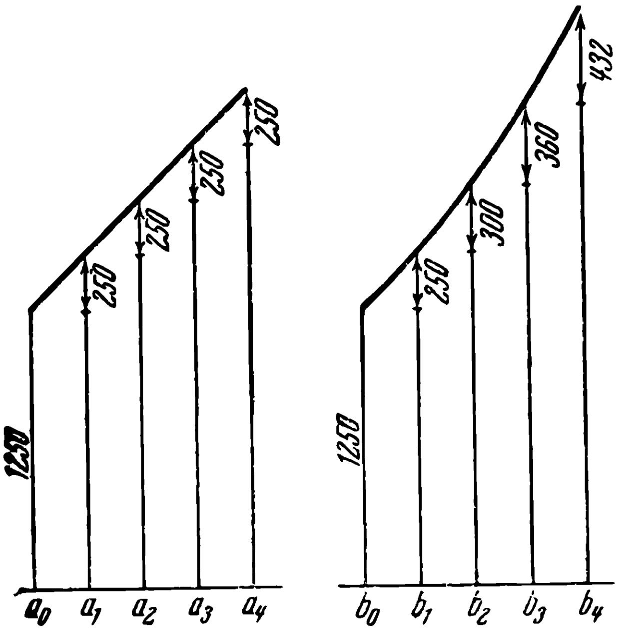
$$2160 + 2160 \cdot {}^1/_5 = 2160 + 432 = 2592 \text{ т}.$$

В результате выпуск изделий заводом В оказался следующим:

до совещания	1 250
1-й год	1 500
2-й „	1 800
3-й „	2 160
4-й „	2 592

Заметим, что коэффициент увеличения здесь равен $^6/_5$, так как $a + a \cdot {}^1/_5 = a \cdot {}^6/_5$; $1250 \cdot {}^6/_5 = 1500$; $1500 \cdot {}^6/_5 = 1800$, и так далее.

Через 4 года директоры заводов A и B снова встретились на совещании и сравнили выработку обоих заводов. Оказалось, что завод B выпустил значительно больше изделий, чем завод A.



Черт. 47.

Завод A сохранял одну и ту же надбавку „на сколько". Завод B сохранял неизменным отношение выработки двух соседних годов, т. е. коэффициент увеличения $k = {}^6/_5$, а так как с каждым годом продукция увеличивалась, то и прибавки, составлявшие определенный процент продукции предыдущего года, сами становились больше. Представим на графике продукцию того и другого завода (черт. 47).

Приведем еще один пример.

Задача. Некто положил в банк 200 руб. В течение 5 лет он не приходил за деньгами. Банк в конце каждого года насчитывал 6% к его вкладу. Сколько получит вкладчик через 5 лет?

Решение. Через 1 год вкладчик мог получить:

$$200 + 200 \cdot \frac{6}{100} = 200\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 200 \cdot 1{,}06 = 212 \text{ руб.}$$

Через 2 года он мог получить:

$$212 + 212 \cdot \frac{6}{100} = 212\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 224{,}7 \text{ руб.}$$

Эту сумму можно записать в виде:

$$(200 \cdot 1{,}06) \cdot 1{,}06 = 200 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 200 \cdot (1{,}06)^2.$$

Через 3 года вкладчик мог получить:

$$224{,}7\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 224{,}7 \cdot 1{,}06 = 238{,}2, \text{ руб.};$$

иначе эту сумму можно обозначить так:

$$[200 \cdot (1{,}06)^2] \cdot 1{,}06 = 200 \cdot (1{,}06)^2 \cdot 1{,}06 = 200 \cdot (1{,}06)^3.$$

Через 4 года вкладчик мог получить:

$$238{,}2 \cdot 1{,}06 = 252{,}5 \text{ руб.}$$

Эту **сумму** запишем еще так:

$$[200\cdot(1{,}06)^3]\cdot 1{,}06 = 200\cdot(1{,}06)^3\cdot 1{,}06 = 200\cdot(1{,}06)^4.$$

Через 5 лет вкладчик получит:

$$252{,}5\cdot 1{,}06 = 267{,}6 \text{ руб.}$$

Эту **сумму** запишем так:

$$[200\cdot(1{,}06)^4]\cdot 1{,}06 = 200\cdot(1{,}06)^5.$$

Проделаем то же самое в буквенных обозначениях.

Если начальный вклад обозначим через a_0, а коэффициент ежегодного увеличения вклада через k, то суммы, которые вкладчик может получить в конце первого, второго, третьего и так далее годов, можно записать следующими формулами:

$$\begin{array}{lll}
\text{через 1 год:} & a_1 = a_0\cdot k, & a_1 = a_0k; \\
\text{через 2 года:} & a_2 = a_1\cdot k, & a_2 = a_0k^2; \\
\text{через 3 года:} & a_3 = a_2\cdot k, & a_3 = a_0k^3; \\
\dots\dots\dots & & \dots\dots \\
\text{через 10 лет:} & a_{10} = a_9\cdot k, & a_{10} = a_0\cdot k^{10}; \\
\dots\dots\dots & & \dots\dots \\
\text{через } n \text{ лет} & a_n = a_{n-1}\cdot k, & a_n = a_0k^n.
\end{array}$$

Равенства первого столбца выражают именно то, что числа представляют собой геометрическую прогрессию.

Равенства второго столбца дают формулу для любого члена прогрессии. Коэффициент k, дающий отношение каждого члена прогрессии к предыдущему, принято обозначать буквой q; его называют „знаменателем“ прогрессии. Тогда формула для любого члена прогрессии запишется так:

$$a_n = a_0\cdot q^n \qquad (1)$$

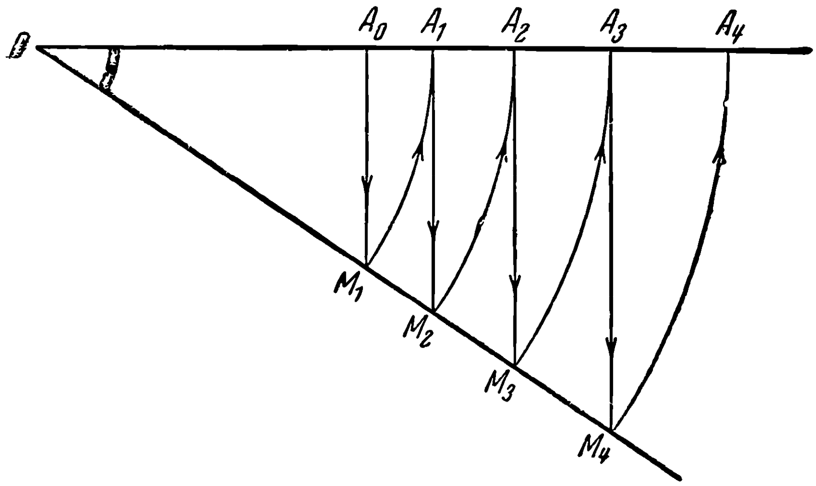
Заметим тут же, что в учебниках принято эту формулу записывать иначе. В нашем рассуждении первый (начальный) член прогрессии был обозначен, как a_0, второй — как a_1, третий — как a_2, и т. д. Если же первый (начальный) член прогрессии обозначить через a_1, второй — через a_2, третий — через a_3 и т. д., то формула (1) запишется в такой форме:

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1}.$$

Вычисление a_n по формуле (1) гораздо сложнее, чем вычисление a_n в случае арифметической прогрессии. Пусть, например, $a_0 = 20$, $q = 1{,}08$ и требуется найти a_{30}. Тогда по формуле напишем: $a_{30} = a_0\cdot q^{30}$. Но как сосчитать $(1{,}08)^{30}$?

Умножать 30 раз на 1,08 весьма утомительно. Если требуется точный результат, то придется иметь дело с огромным числом десятичных знаков. Очевидно, в таких случаях округляют получающиеся числа; надо, однако, следить за тем, чтобы эти округления в общем итоге не дали большого отклонения от искомого результата. В настоящее время такие вычисления делают весьма быстро и со значительной степенью точности при помощи таблиц логарифмов, но об этом речь будет дальше.

Покажем теперь, как можно строить геометрическую прогрессию графическим путем. Пусть даны первый член и знаменатель прогрессии, например, $a_0=20$; $q=1,2$.



Черт. 48.

Откладываем (черт. 48) вдоль горизонтальной оси Ox отрезок $OA_0 = a_0$. Способом, указанным в первой главе (стр. 8), увеличиваем отрезок OA_0 в отношении $(1 \longrightarrow q)$, например в отношении $(1 \longrightarrow 1,2)$, и отрезок OA_1, равный $a_0 \cdot q$, откладываем вдоль той же оси Ox. Для построения дальнейших отрезков, дающих значения членов прогрессии, из точки A_0 восставляем перпендикуляр к оси Ox; затем из точки O, как центра, описываем радиусом, равным OA_1, дугу окружности до встречи с перпендикуляром в некоторой точке M_1.

На чертеже показан переход $A \longrightarrow M_1 \longrightarrow A_1$. Если такого рода переходы совершать дальше $A_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow A_2$, $A_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow A_3$, $A_3 \longrightarrow M_4 \longrightarrow A_4$ и т. д., то на оси Ox отложатся отрезки OA_2, OA_3, OA_4, $OA_5, \ldots$, представляющие последовательные члены геометрической прогрессии aq^2, aq^3, aq^4, и т. д.

Чтобы показать правильность этого построения, надо рассмотреть пары соседних треугольников. Треугольники OA_0M_1 и OA_1M_2 подобны. Из их подобия следует:

$$\frac{OM_2}{OA_1} = \frac{OM_1}{OA_0}.$$

Согласно построению, мы имеем $OA_1 = OM_1 = a_0 \cdot q$; $OA_0 = a_0$, поэтому

$$\frac{OM_2}{a_0q} = \frac{a_0q}{a_0}.$$

Второе отношение равно $\frac{q}{1}$. Отсюда следует:

$$OM_2 = a_0q \cdot q = a_0q^2.$$

Кривая M_2A_2 есть дуга окружности; поэтому OA_2 также равно A_0q^2.

Далее берем треугольники OA_2M_3 и OA_1M_2. Из их подобия следует:

$$\frac{OM_3}{OA_2}=\frac{OM_2}{OA_1};$$

или

$$\frac{OM_3}{a_0q^2}=\frac{a_0q^2}{a_0q}=\frac{q}{1},$$

откуда

$$OM_3=a_0q^2\cdot q=a_0q^3.$$

Отрезок OA_3 также равен aq^3, и так далее.

Если не требуется большой степени точности, то можно пользоваться таким графическим построением.

Если сопоставить определения геометрической и арифметической прогрессии, то тотчас можно заметить сходство между ними. В арифметической прогрессии мы прибавляем каждый раз одно и то же количество, в геометрической — умножаем каждый раз на один и тот же коэффициент. Это сходство находит отражение и в формулах для любого члена:

в арифметической прогрессии: $a_n=a_0+dn$,
в геометрической прогрессии: $a_n=a_0q^n$.

Но можно (сравните стр. 15) еще теснее связать обе прогрессии — лестницу „на сколько" и лестницу „во сколько", — если воспользоваться данной в первой главе моделью отношения двух величин.

Рассмотрим геометрическую прогрессию, у которой $a_0=2$; $q=1{,}2$. Вычисления дают:

$$a_0=2;\ a_1=2{,}4;\ a_2=2{,}88;\ a_3=3{,}46;\ a_4=4{,}15;\ a_5=4{,}98;\ldots$$

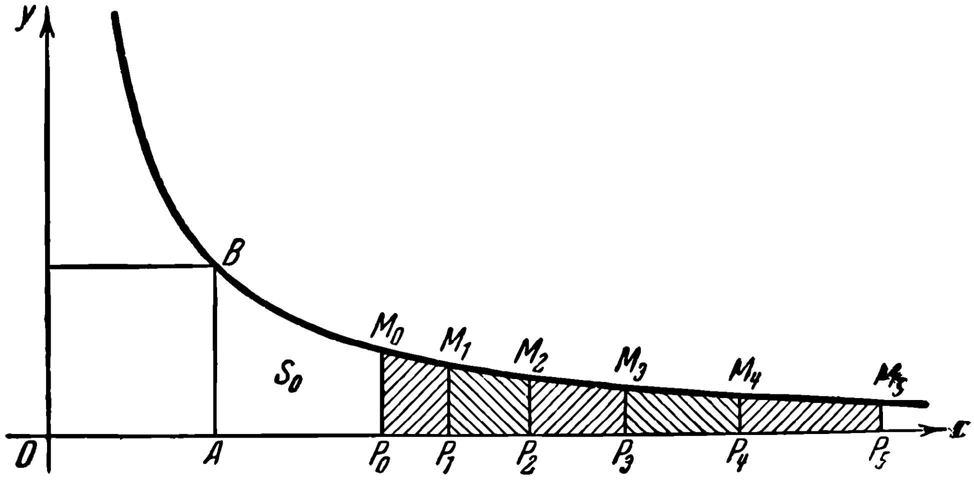
Строим оси координат и график гиперболы $y=\frac{1}{x}$. Вдоль оси Ox откладываем от начальной точки O последовательно отрезки:

$$OP_0=2;\ OP_1=2{,}4;\ OP_2=2{,}88;\ OP_3=3{,}46;\ OP_4=4{,}15;$$

$OP_5=4{,}98$ (черт. 49). В концах этих отрезков строим ординаты точек гиперболы. Мы получим криволинейную фигуру AP_0M_0B и ряд криволинейных фигур $P_0P_1M_1M_0$, $P_1P_2M_2M_1$, $P_2P_3M_3M_2$,.. В первой главе было доказано (стр. 13), что величина площади такой фигуры не зависит от длины отрезка $[x_1\ldots x_2]$, но только от отношения $\frac{x_2}{x_1}$. Но в данном случае, согласно определению геометрической прогрессии, отношения $\frac{a_2}{a_1}$; $\frac{a_3}{a_2}$; $\frac{a_4}{a_3}$;... все равны между собой: $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_5}=\ldots=q=1{,}2$.

А потому можно утверждать, что все указанные площади (за исключением первой) равны между собой:

$$\text{пл. } P_0P_1M_1M_0 = \text{пл. } P_1P_2M_2M_1 = \text{пл. } P_2P_3M_3M_2 = \ldots = S.$$

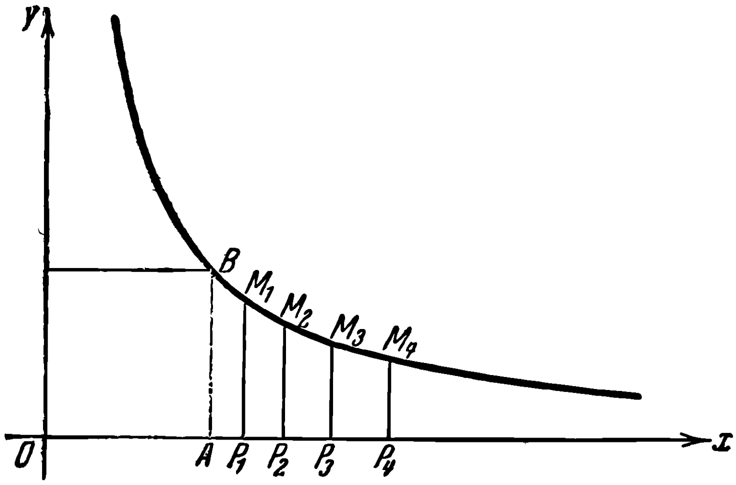


Черт. 49.

Отсюда получаем:

площадь на отрезке $[1 \ldots a_0] = S_0$;
" " " $[1 \ldots a_1] = S_0 + S$;
" " " $[1 \ldots a_2] = S_0 + 2S$;
" " " $[1 \ldots a_3] = S_0 + 3S$;
" " " $[1 \ldots a_4] = S_0 + 4S$;
. . . .
" " " $[1 \ldots a_n] = S_0 + nS$.

Таким образом, площади, опирающиеся на эти отрезки, составляют арифметическую прогрессию, в то время как длины отрезков OP_0, OP_1, OP_2, $OP_3 \ldots$ образуют геометрическую прогрессию. Этим мы установили связь между обеими прогрессиями, хотя и не знаем еще, как определить величину этих площадей в квадратных единицах.



Черт. 50.

Рассмотрим еще геометрическую прогрессию, у которой начальный член $a_0 = 1$: $1, q, q^2, q^3, q^4, \ldots$. Пусть, например, $q = 1{,}2$. Если для этой прогрессии построить график (черт. 50) такой, как для предыдущей, то получим ряд площадей AP_1M_1B; $P_1P_2M_2M_1$; $P_2P_3M_3M_2; \ldots$, причем первая площадь равна всем остальным.

Получаем:

$$
\begin{array}{llll}
\text{площадь на отрезке} & [1 \ldots 1\ ] = 0, \\
\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & [1 \ldots q\ ] = S_0, \\
\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & [1 \ldots q^2] = 2S_0, \\
\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & [1 \ldots q^3] = 3S_0, \\
\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & [1 \ldots q^4] = 4S_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & [1 \ldots q^n] = nS_0.
\end{array}
$$

И здесь имеет место соответствие между геометрической прогрессией $OA=1$; $OP_1=q$; $OP_2=q^2$; $OP_3=q^3$; ..., и арифметической прогрессией 0; S_0; $2S_0$; $3S_0$; $4S_0$; ... Связь между геометрической прогрессией длин отрезков и арифметической прогрессией площадей можно формулировать следующим образом: возвышению в степень коэффициента q соответствует умножение площади S_0 на число n.

Шестое действие арифметики. Как уже отмечалось в первой главе, действие, обратное возвышению в степень, называется извлечением корня. Если, например, $x^7=128$, т. е. x, умноженное на себя 7 раз, дает в результате 128, то можно написать: $x=\sqrt[7]{128}=2$. Если $x^4=52$, то $x=\sqrt[4]{52}$.

На практике приходится часто решать задачи, приводящие к извлечению корня. Пусть, например, завод выпускает ежедневно 200 машин. По плану завод должен в течение 5 лет увеличить свою продукцию до 360 машин в день. Спрашивается: как следует повышать продукцию, чтобы повышение было равномерным из года в год, и в конце срока продукция достигла намеченной цифры?

Чтобы из года в год был одинаковый процент увеличения продукции, надо построить геометрическую прогрессию a_0, a_0q, a_0q^2, a_0q^3, a_0q^4,..., такую, что $a_0=200$; $a_0q^5=360$. Если все члены прогрессии разделить на 200, то последний член прогрессии сделается равным $\frac{a_0q^5}{200}=\frac{360}{200}=1{,}8$.

Итак, требуется составить прогрессию:

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ q^5=1{,}8.$$

Дело сводится к нахождению знаменателя прогрессии $q=\sqrt[5]{1{,}8}$. Но знак корня мало помогает делу. Надо уметь его извлечь (вычислить). Как справедливо заметил Паскаль, поставить новый значок, приклеить новый ярлык — это еще не означает разрешить задачу. Ведь для вычисления корня пятой степени мы не имеем никаких средств. Недаром в течение многих веков эта задача считалась неразрешимой. Средство для ее решения было найдено только в 1614 г., когда шотландский математик Джон Непер опубликовал свои „удивительные таблицы“ логарифмов.

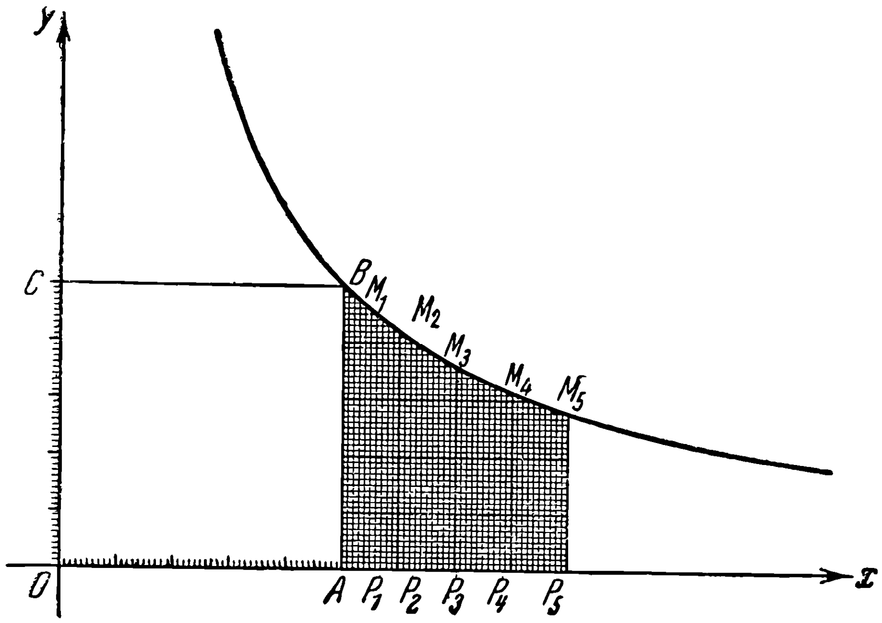
Правда, если довольствоваться грубым, громоздким и весьма неточным решением, то извлекать корни можно и без помощи логарифмов.

Построим уже знакомую нам гиперболу (черт. 51). Советуем сделать чертеж в крупном масштабе на клетчатой бумаге с весьма мелкими квадратиками. Отложим на оси Ox отрезок $OP_5 = 1{,}8$. Если бы на оси Ox были отложены отрезки $OA = 1$; $OP_1 = q$; $OP_2 = q^2$; $OP_3 = q^3$; $OP_4 = q^4$; $OP_5 = q^5 = 1{,}8$, то площади, построенные на отрезках AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, были бы равны:

$$\text{пл. } AP_1M_1B = \text{пл. } P_1P_2M_2M_1 = \text{пл. } P_2P_3M_3M_2 =$$

$$= \text{пл. } P_3P_4M_4M_3 = \text{пл. } P_4P_5M_5M_4 = S.$$

Вся площадь AP_5M_5B была бы равна $5S$.



Черт. 51.

Подсчитаем число мелких квадратиков сетки, заключающихся в криволинейной площади AP_5M_5B. Этот подсчет можно сделать лишь приближенно, потому что кривая линия гиперболы BM_5 будет пересекать некоторые квадратики сетки. Если основной квадрат $OABC$ содержит, например, 625 мелких квадратиков, подсчет покажет, что в криволинейной площади AP_5M_5B содержится приблизительно 370—380 квадратиков. Эти 380 квадратиков составляют $5S$; следовательно, S содержит приблизительно $\frac{380}{5}$ квадратиков, т. е. около 76 квадратиков. Теперь остается только передвигать ординату PM, начиная от положения AB, вправо до тех пор, пока площадь $APMB$ не будет содержать приблизительно 76 квадратиков. После того как такая площадь будет найдена, надо измерить длину соответствующего отрезка OP_1. Длина OP_1 и дает искомую величину q. Приблизительно она равна 1,12.

Очевидно, этот способ — весьма несовершенный и грубый. Однако он передает идею того, как математика справилась с задачей извлечения корня, т. е. преодолела трудность шестого действия арифметики.

Позднее будет показано, как составить таблицу, дающую для каждого отрезка $OP=x$ величину соответствующей криволинейной площади $APMB$, лежащей над отрезком $[1...x]$. Имея такую таблицу, уже нет надобности подсчитывать квадратики. Вопросу о составлении таких таблиц (таблиц логарифмов) будет посвящена пятая глава этой книги.

2. Сумма членов геометрической прогрессии

Как и в случае арифметической прогрессии, при рассмотрении геометрической прогрессии основными являются два вопроса: 1) найти любой член прогрессии a_n; 2) найти сумму n членов прогрессии. На первый вопрос мы ответили формулой $a_n=a_0\cdot q^n$ или $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$.

Обратимся ко второму вопросу. Пусть имеется прогрессия

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n.$$

Возьмем для определенности $n=20$; сумма членов этой прогрессии есть:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_{19}+a_{20}=$$
$$=a_1+a_1q+a_1q^2+\dots+a_1q^{18}+a_1q^{19}.$$

Обозначим эту сумму буквой S. Если умножить все слагаемые суммы на знаменатель q, получим другую сумму:

$$a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\dots+a_1q^{19}+a_1q^{20},$$

которая равна Sq. Эта новая сумма содержит все слага мые первой суммы, кроме a_1, а также имеет одно добавочное слагаемое a_1q^{20}:

$$\begin{aligned} a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+a_1q^4+\dots+a_1q^{18}+a_1q^{19} \qquad &=S,\\ a_1q+a_1q^2+a_1q^3+a_1q^4+\dots+a_1q^{18}+a_1q^{19}+a_1q^{20} &=Sq. \end{aligned}$$

Если взять только слагаемые, входящие одновременно как в первую, так и во вторую строку, т. е.

$$a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\dots+a_1q^{18}+a_1q^{19},$$

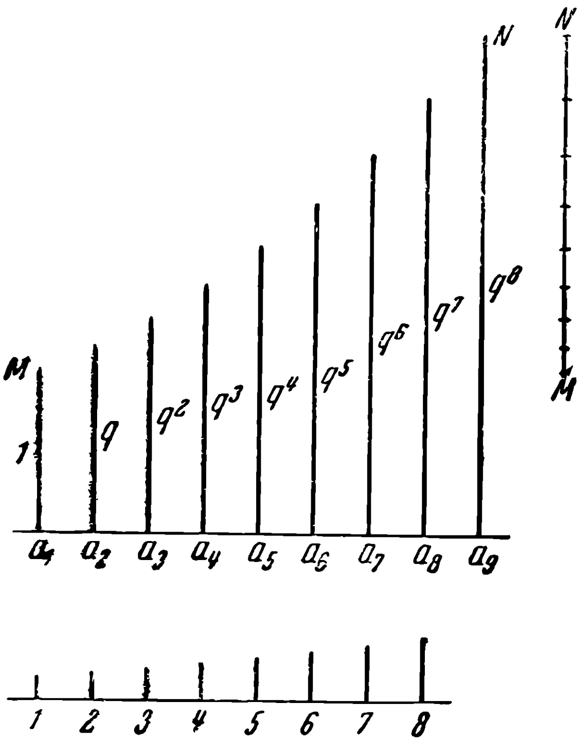
то их сумма, согласно первому равенству, равна $S-a_1$, а согласно второму $Sq-a_1q^{20}$. Поэтому имеет место новое равенство:

$$Sq-a_1q^{20}=S-a_1.$$

В последнем равенстве неизвестным является сумма S;

оно входит в это равенство в первой степени; следовательно, наше равенство есть уравнение первой степени относительно неизвестного S. Решая это уравнение относительно S, получим последовательно:

$$Sq - S = a_1 q^{20} - a;$$
$$S(q-1) = a_1 q^{20} - a_1;$$
$$S(q-1) = a_1 (q^{20} - 1);$$
$$S = \frac{a_1 (q^{20} - 1)}{q - 1}.$$



Черт. 52.

Мы взяли в качестве примера значение $n = 20$. Таким же образом для любого значения n получим формулу:

$$S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Перейдем теперь к более наглядному графическому выводу этой весьма важной формулы. Пусть, например, $n = 8$, $q = 1{,}15$; требуется найти сумму членов

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 + a_1 q^6 + a_1 q^7$$

или

$$a_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7).$$

Очевидно, вопрос сводится к нахождению суммы

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7,$$

которую мы временно обозначим через S.

Эти величины на чертеже (черт. 52) представлены отрезками. Найти сумму прогрессии — это значит найти сумму всех отрезков. Мы будем решать задачу косвенным образом. Вместо заданных отрезков рассмотрим разности между парами соседних отрезков, т. е. разности $a_2 - a_1$; $a_3 - a_2$; $a_4 - a_3, \ldots$ и т. д. Разность $a_2 - a_1$ принято обозначать через Δa_1 (знак Δ заменяет слово „прирост“, „приращение“; Δ не есть множитель). Аналогично обозначаются и другие разности:

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = q - 1 = 1{,}15 - 1 = 0{,}15,$$
$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = q^2 - q = q(q-1) = 1{,}15 \cdot 0{,}15,$$
$$\Delta a_3 = a_4 - a_3 = q^3 - q^2 = q^2(q-1) = 1{,}15^2 \cdot 0{,}15,$$
$$\Delta a_4 = a_5 - a_4 = q^4 - q^3 = q^3(q-1) = 1{,}15^3 \cdot 0{,}15.$$

. . . .

. . . .

Таких разностей будет только 7; чтобы и последний член прогрессии получил приращение, добавим к прогрессии еще один член $a_9 = q^8$.

Тогда получим:

$$\Delta a_8 = a_9 - a_8 = q^8 - q^7 = q^7 (q - 1) = 1{,}15^7 \cdot 0{,}15.$$

Все эти 8 приращений представлены на чертеже рядом с основной фигурой.

Так как каждое из приращений равно члену прогрессии с тем же номером, умноженному на $0{,}15 = q - 1$,

$$\Delta a_m = a_m \cdot (q - 1) = a_m \cdot 0{,}15,$$

то, очевидно, и сумма приращений равна сумме прогрессии S, умноженной на 0,15, т. е. на $q - 1$:

$$S \cdot 0{,}15 = S(1{,}15 - 1) = S(q - 1).$$

Но сумму всех приращений найти не трудно: все они, вместе взятые, равны разности между последним отрезком a_9 и первым a_1 (они, как ступеньки лестницы, ведут от верхнего конца первого отрезка к верхнему концу последнего). Итак, сумма приращений Δa_m равна $a_9 - a_1 = q^8 - 1$. Отсюда получаем равенство:

$$q^8 - 1 = S(q - 1); \text{ или } 1{,}15^8 - 1 = S(1{,}15 - 1).$$

Из этого равенства находим неизвестную сумму прогрессии S:

$$S = \frac{1{,}15^8 - 1}{1{,}15 - 1}; \text{ или } S = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Если задана прогрессия $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3 \ldots,$ то во все члены войдет добавочный множитель a_1 и в результате получится

$$S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

т. е. та формула, которая раньше была получена другим способом.

П р и м е р. Сумма членов прогрессии

$$45;\ 45 \cdot 1{,}05;\ 45 \cdot (1{,}05)^2;\ \ldots;\ 45\,(1{,}05)^{27}$$

равна

$$S = 45 \cdot \frac{1{,}05^{28} - 1}{1{,}05 - 1}.$$

Из этого примера видно, что полученная формула будет нам полезна только тогда, когда мы будем уметь вычислять такие степени, как $1{,}05^{28}$.

Остановимся вкратце на случае убывающей геометрической прогрессии, т. е. на том случае, когда знаменатель $q<1$. Если, например, каждый член прогрессии на $15^0/_0$ меньше предыдущего, то $q=\frac{85}{100}=0{,}85$.

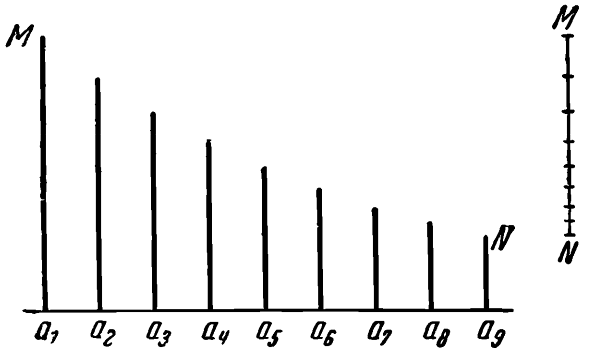
Члены прогрессии будут:

$$a_1;\ a_1\cdot 0{,}85;\ a_1\cdot 0{,}85^2;\ a_1\cdot 0{,}85^3;\ a_1\cdot 0{,}85^4;\ldots$$

Требуется найти сумму

$$a_1+a_1\cdot 0{,}85+a_1\cdot(0{,}85)^2+a_1(0{,}85)^3+\ldots+a_1(0{,}85)^{n-1}.$$

Решение покажем на чертеже (черт. 53). Он составлен аналогично черт. 52, но здесь приращения $\Delta a_1;\Delta a_2;\ \Delta a_3;\ldots$ отрицательны; заметим еще, что в этом случае приращения будут убывать по своей численной величине. Сумма приращений численно равна отрезку MN, т. е. разности $a_1-a_9=a_1-a_1q^8=a_1\,(1-q^8)$. Но приращения равны $\frac{15}{100}$ самых отрезков. Поэтому



Черт. 53.

$$a_1(1-q^8)=S\cdot 0{,}15=S(1-q);$$

откуда

$$S=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=a_1\frac{1-q^8}{1-q}.$$

Эта формула отличается от предыдущей лишь тем, что в числителе и знаменателе знаки изменены на противоположные; с точки зрения алгебры обе формулы одинаковы.

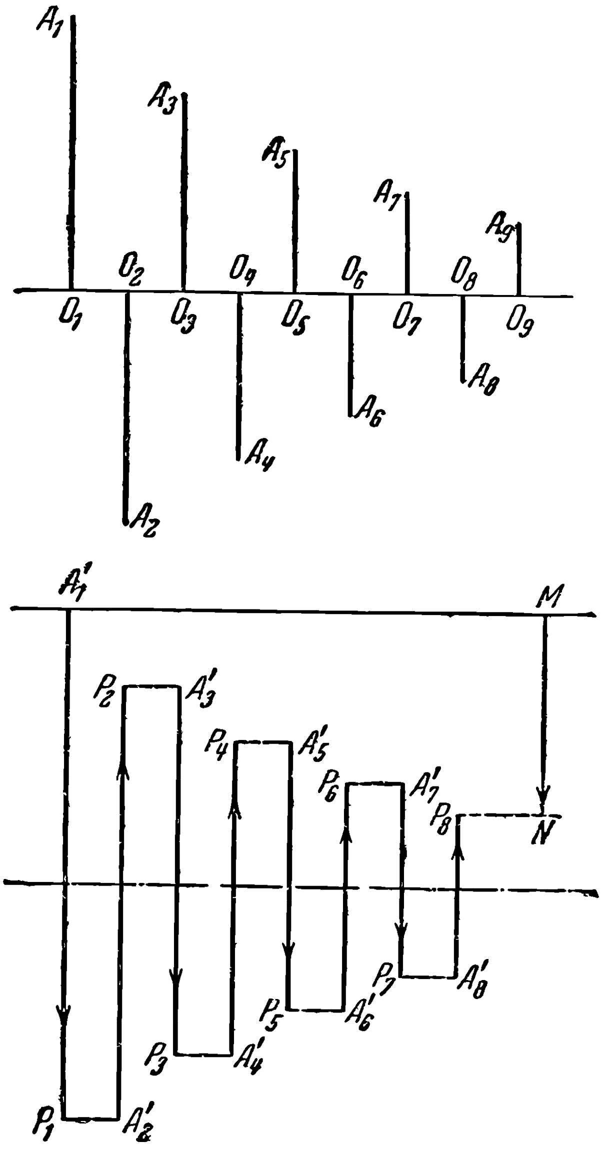
Рассмотрим еще сумму членов геометрической прогрессии особого рода, а именно такой, в которой члены прогрессии попеременно положительны и отрицательны, например:

$$a_1-a_1\cdot 0{,}85+a_1\cdot 0{,}85^2-a_1\cdot 0{,}85^3+a_1\cdot 0{,}85^4-a_1\cdot 0{,}85^5+\ldots.$$

Построим график (черт. 54, верхняя половина), в котором положительные члены представлены отрезками, идущими вверх, отрицательные — отрезками, идущими вниз. Будем считать число членов n четным; тогда последний отрезок, например a_8, направлен вниз. Как и на чертежах 52 и 53, добавим еще один отрезок a_9.

Чтобы вычислить „сумму“ такой прогрессии, мы, подобно предыдущему, будем рассматривать, на ряду с искомой суммой S, другую сумму S_1, слагаемые которой находятся в определенном отношении к слагаемым данной.

Допустим, что на черт. 54 какое-нибудь тело перемещается из точки A_1 в точку A_2, затем из точки A_2 в точку A_3 и так далее. Эти перемещения будем считать положительными, если они совершаются снизу вверх, и отрицательными — в обратном случае. При этом нас будет интересовать не длина самих перемещений, а разность высот начальной и конечной точек перемещений. При перемещении A_1A_2 понижение численно равно сумме отрезков $O_1A_1 + O_2A_2$; это перемещение, направленное вниз, изображено на нижней половине черт. 54 отрезком A'_1P_1 со стрелкой. Перемещение A_2A_3 изображено отрезком A'_2P_2 со стрелкой и так далее. Рассмотрим сумму новых отрезков A'_1P_1, A'_2P_2, $A'_3P_3, \ldots$, учитывая их знаки. Так как знаки соседних членов противоположны, то сумма первых двух членов A'_1P_1 и A'_2P_2 будет получаться вычитанием отрезка A'_2P_2 из отрезка A'_1P_1 и окажется равной расстоянию точки P_2 от горизонтальной линии A'_1M (со знаком минус, так как перемещение, направленное вниз, больше).



Черт. 54.

Сумма первых трех членов $A'_1P_1 + A'_2P_2 + A'_3P_3$ будет равна расстоянию точки P_3 от линии A'_1M (со знаком минус) и т. д. Сумма всех восьми членов с учетом их знаков окажется равной расстоянию последней точки P_8 от линии A'_1M, т. е. длине отрезка MN со знаком минус. Итак, сумма S_1 равна — длина $MN = -$(дл. $O_1A_1 -$ дл. $O_9A_9) = -(1 - 0{,}85^8) = -(1 - q^8)$.

Обратимся теперь к нашей основной сумме, т. е. к сумме отрезков O_1A_1, O_2A_2, $O_3A_3 \ldots$ с их знаками. Сравнивая эти отрезки с отрезками A'_1P_1, A'_2P_2, $A'_3P_3, \ldots$, мы видим, что,

во-первых, знаки отрезков O_1A_1, O_2A_2, $O_3A_3, \ldots$ противоположны знакам соответствующих отрезков A'_1P_1, A'_2P_2, $A'_3P_3 \ldots$, во-вторых, отрезки $A_1'P_1$, $A_2'P_2 \ldots$ по своей длине больше соответствующих отрезков O_1A_1, $O_2A_2 \ldots$ в определенном отношении. Найдем величину этого отношения: если принять длину отрезка O_1A_1 за единицу, то длина отрезка O_2A_2 равна 0,85 ед.; длина же отрезка $A_1'P_1$ равна 1,85 ед. Поэтому отношение отрезков $A_1'P_1$ и O_1A_1, если отвлечься от противоположности их направлений, равно (1,85:1). Далее, сравним отрезки O_2A_2 и $A_2'P_2$. Длина отрезка O_3A_3 равна 0,85 длины отрезка O_2A_2; длина отрезка $A_2'P_2$ численно равна сумме длин отрезков O_2A_2 и O_3A_3, т. е.:

$$A_2'P_2 = O_2A_2 + O_2A_2 \cdot 0{,}85 = O_2A_2 \cdot 1{,}85.$$

Поэтому отношение отрезков $A_2'P_2$ и O_2A_2, если отвлечься от знаков, равно опять (1,85:1), и так далее. Отсюда следует, что и вся сумма отрезков $A_i'P_i$ больше всей суммы отрезков O_iA_i в отношении (1,85:1). Но сумма отрезков $A_i'P_i$ с их знаками уже найдена и оказалась равной

$$-(1-0{,}85^8) = -(1-q^8) = S_1.$$

Чтобы определить искомую сумму прогрессии, надо изменить знак величины S_1 на противоположный и изменить ее в отношении (1:1,85). Получим:

$$S = \frac{1-0{,}85^8}{1{,}85} = \frac{1-q^8}{1{,}85}.$$

Если численную величину знаменателя прогрессии (здесь 0,85) обозначить через k, то получим формулу:

$$S_8 = \frac{1-k^8}{1+k};$$

для нечетного числа членов, например $n=9$, получили бы:

$$S_9 = \frac{1+k^9}{1+k}.$$

Общая формула будет:

$$S_n = \frac{1 \pm kn}{1+k}$$

(в числителе знак плюс в случае нечетного числа членов и знак минус — в случае четного).

Но в алгебре принято поступать иначе. Если члены прогрессии имеют чередующиеся знаки, то знаменатель прогрессии q считают отрицательным, например $q = -0{,}85$. Рассмотренную нами величину отношения 1,85 можно представить как $1-(-0{,}85)$. Тогда получим:

$$S_8 = \frac{1-(-0{,}85)^8}{1-(-0{,}85)} = \frac{1-q^8}{1-q}.$$

И общая формула будет такова:

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \tag{2}$$

независимо от того, будет ли число членов четным или нечетным.

Эта формула ничем не отличается от формулы для прогрессии с постоянными знаками.

3. Бесконечная убывающая прогрессия

Пусть дана убывающая геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots;$$

допустим, что знаменатель $q < 1$ и число членов прогрессии весьма велико. Очевидно, что при достаточно большом числе n величина членов прогрессии может стать сколь угодно малой.

Если, например, $a_0 = 45$, $q = 0{,}9$, $n = 20\,000$, то $a_n = a_0 q^n = 45\,(0{,}9)^{20\,000}$. Количество $(0{,}9)^{20\,000}$ очень мало. Если мы будем увеличивать и брать значения $n = 40\,000$, $n = 100\,000$, и т. д., то количество $(0{,}9)^n$ будет все время уменьшаться и приближаться к нулю.

Сделаем теперь смелое допущение, что число n членов ничем не ограничено, что прогрессия продолжается бесконечно, и попробуем найти ее „сумму“. Прежде всего может возникнуть такая мысль: „число слагаемых не ограничено, новые слагаемые „без конца“ прибавляются к начальным, повидимому, и сумма их возрастает без конца, т. е. растет до бесконечности“. Но, оказывается, это не так: если знаменатель прогрессии $q < 1$, то сумма членов прогрессии остается конечной, как бы далеко ее ни продолжать.

Чтобы это доказать, допустим сперва, что n имеет какое-то определенное большое значение, например $n = 2000$. На основании формулы (2) можно написать, что сумма

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{1 - q^{2000}}{1 - q}.$$

Если, например, $q = \frac{3}{4}$, то

$$S_n = a_1 \frac{1 - (0{,}75)^{2000}}{1 - 0{,}75}$$

Эту сумму можно представить как разность двух слагаемых:

$$S_n = a_1 \frac{1}{1 - 0{,}75} - a_1 \frac{(0{,}75)^{2000}}{1 - 0{,}75}$$

или

$$S_n = a_1 \frac{1}{1 - q} - a_1 \frac{q^n}{1 - q}.$$

Так как второе слагаемое — чрезвычайно малая дробь, то, отнимая такую дробь, мы получаем лишь немногим меньше, чем $\frac{a_1}{1-q}$. Чем больше число слагаемых n, тем меньше будет величина, которая отнимается от $\frac{a_1}{1-q}$; эта же последняя величина — постоянная и не зависит от номера n. Если теперь допустить, что число слагаемых n возрастает, и возрастает неограниченно, то количество q^n будет убывать и как угодно близко подходить к нулю. Таким образом, величина q^n, а потому и величина $\frac{q^n}{1-q}$, как бы уничтожается, и, в конце концов, результат подходит к дроби $\frac{a_1}{1-q}$.

В данном численном примере:

$$\frac{a_1}{1-0{,}75}=\frac{a_1}{0{,}25}=4a_1.$$

Итак, при $q<1$

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots=\frac{a}{1-q}. \tag{3}$$

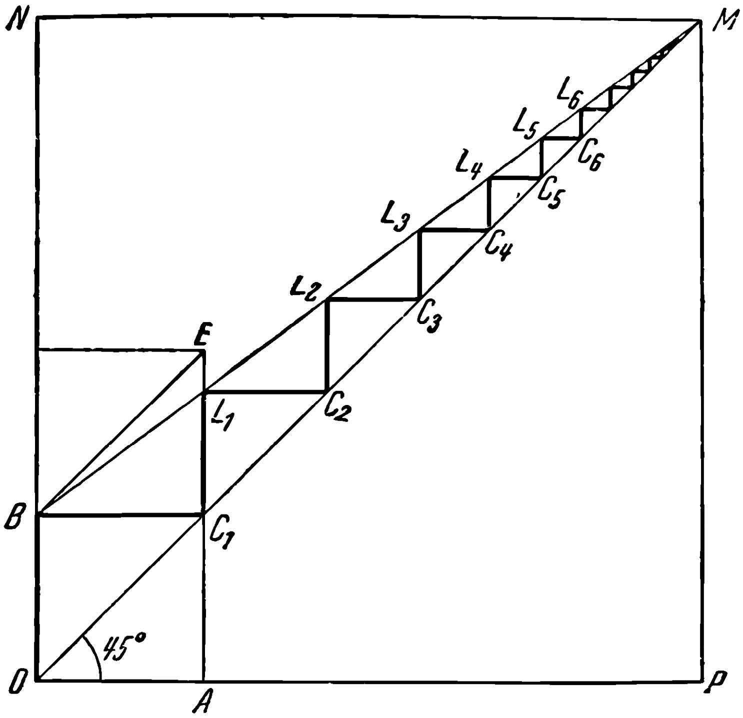
Однако равенство это имеет необычный характер, так как в левой его части мы не можем буквально сложить все „бесконечное множество“ слагаемых. Оно выражает лишь то, что чем больше слагаемых левой части мы сложим, тем меньше наша сумма будет отличаться от $\frac{a}{1-q}$.

Формула суммы членов бесконечной прогрессии оказалась проще, чем для конечной. Именно то слагаемое $\frac{q^n}{1-q}$, которое трудно поддается вычислению, теперь отпало, и получилось более простое соотношение.

Дадим теперь вывод формулы (3) графическим способом и покажем эту необычную сумму на чертеже. Берем конкретный пример: $a_1=1$; $q={}^3/_4$. График (черт. 55) строится следующим образом. Берем квадрат со стороной, равной 1; $OA=$ $=OB=1$ (например 1 дм). Продолжаем сторону квадрата AC_1 на отрезок C_1L_1, численно равный q (в нашем примере $={}^3/_4$ дм). Затем проводим диагональ OC_1 и прямую BL_1; обе эти прямые продолжаем до их пересечения. Обозначим точку пересечения через M. Затем строится „лестница“ следующим образом. Из точки L_1 проводим горизонтальный отрезок L_1C_2 до встречи с диагональю C_1M; из полученной точки C_2 проводим вертикальный отрезок C_2L_2 до встречи с прямой BM в точке L_2. Далее, из точки L_2 — горизонтальный отрезок L_2C_3; из точки C_3 вертикальный отрезок C_3L_3 и так далее. Этот процесс проведения горизонтальных и вертикальных отрезков, теоретически рассуждая, никогда не приостановится. А именно, где бы мы ни взяли точку на отрезке BM (кроме самой точки M), из нее можно провести горизонтальный отрезок; из полученной точки пересечения — опять вертикальный. Сама точка M является в этом процессе как бы недостижимой; с другой стороны, из графика прямо следует, что точка M находится на конечной высоте и что высота этой „нескончаемой“ лестницы $OBC_1L_1C_2L_2C_3L_3C_4L_4\ldots$ может быть приравнена отрезку PM.

Прежде всего покажем, что отрезки OB; C_1L_1; C_2L_2; C_3L_3; C_4L_4; C_5L_5;... равны последовательным членам геометрической прогрессии, о которой идет речь: 1; 0,75; $0{,}75^2$;$0{,}75^3$;...

Треугольник $C_1L_1C_2$ равнобедренный; в нем углы C_1 и C_2 равны 45°; поэтому $L_1C_1 = L_1C_2 = q$. Далее, треугольник $L_1C_2L_2$ подобен треугольнику BC_1L_1; так как отношение $\frac{L_1C_1}{BC_1} = q$, то и отношение $\frac{C_2L_2}{L_1C_2}$ равно q. В нашем примере $L_1C_1 = {}^3/_4$ дм; тогда $C_2L_2 = {}^3/_4 \cdot {}^3/_4 = q^2$. Далее, треугольник $C_2L_2C_3$ опять равнобедренный; $C_2L_2 = L_2C_3$, а потому L_2C_3 также равен q^2. Треугольник $L_2C_3L_3$ подобен треугольнику BC_1L_1; поэтому отношение $\frac{C_3L_3}{L_2C_3} = q$; $C_3L_3 = L_2C_3 \cdot q = q^2 \cdot q = q^3$, и так далее.



Черт. 55.

В результате подъем ступенек нашей лестницы определяется равенствами: $C_1L_1 = q$; $C_2L_2 = q^2$; $C_3L_3 = q^3$;$C_4L_4 = q^4$; и так далее. Поэтому сумма нескольких членов прогрессии равна высоте последней взятой ступени над горизонталью OP. Когда число ступеней неограниченно растет, то вершина лестницы подходит как угодно близко к предельной точке M, упирается в точку M. А потому найти „сумму“ членов прогрессии — значит определить длину отрезка PM.

Так как фигура $OPMN$ квадрат, то можно его сторону PM заменить стороной MN. Мы найдем длину MN из геометрических свойств чертежа следующим образом. Продолжим отрезок $C_1L_1 = {}^3/_4$ ед. до точки E так, чтобы отрезок C_1E был равен 1 и построим треугольник BL_1E. Не трудно видеть, что треугольник BL_1E подобен треугольнику ML_1C_1, так как у них стороны BE и C_1M параллельны. Далее, треугольник ML_1C_1, очевидно, подобен треугольнику MBO, а потому треугольник BL_1E подобен треугольнику MBO. Из подобия последних двух треугольников мы определим длину стороны MN, т. е. искомую сумму прогрессии.

У подобных треугольников MBO и BL_1E высоты, опущенные из соответствующих вершин M и B, относятся между собой как сходственные стороны, — например, как основания BO и L_1E: $\frac{MN}{BC_1}=\frac{BO}{L_1E}$. Но из входящих в эту пропорцию четырех величин три нам известны, а именно: $BC_1=1$ ед.; $BO=1$ ед.; $L_1E=C_1E-C_1L_1=1-q$ (в данном примере $L_1E=1-{}^3/_4={}^1/_4$ ед.). Поэтому: $MN:1=1:(1-q)$. Согласно основному свойству пропорции отсюда получаем: $MN=\frac{1}{1-q}$; в нашем примере $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ ед. Итак, мы снова получили: $S=\frac{1}{1-}$.

Если же задается прогрессия вида a, aq, aq^2, aq^3, ..., то сумма ее членов равна $a(1+q+q^2+q^3+\ldots)=a\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{a}{1-q}$.

Получили найденную ранее формулу (3).

4. Периодические десятичные дроби

Полученную формулу можно применить к одному чисто арифметическому вопросу. Пусть задана дробь 0,77777..., в которой число десятичных знаков не ограничено. Что собой представляет эта дробь? Каково численное значение дроби?

Представим заданную дробь в виде суммы

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{10\,000}+\ldots,$$

или же в виде

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{7}{10^4}+\ldots.$$

После всего вышесказанного нас не будет пугать то обстоятельство, что ряд тянется без конца. Написанный ряд представляет собой убывающую геометрическую прогрессию. Каждое слагаемое в 10 раз меньше предыдущего, т. е. знаменатель прогрессии $q=\frac{1}{10}$.

Согласно формуле (3), пишем:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0{,}7}{1-0{,}1}=\frac{0{,}7}{0{,}9}=\frac{7}{9}.$$

Таким же образом можно определить значение периодической дроби 0,23232323... Представим эту дробь в виде:

$$\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\frac{23}{100^4}+\ldots$$

Знаменатель прогрессии в данном случае есть $q=\frac{1}{100}$. Поэтому сумма

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{0{,}23}{1-0{,}01}=\frac{0{,}23}{0{,}99}=\frac{23}{99}.$$

Если задана смешанная периодическая дробь, например $0{,}5\,(12)=0{,}51212121212\ldots$, то ее можно представить в виде суммы:

$$\frac{5}{10}+\frac{12}{1000}+\frac{12}{1000\cdot 100}+\frac{12}{1000\cdot 100^2}+\ldots$$

Если не считать первое слагаемое, то остальные представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{100}$. Поэтому значение дроби равно:

$$\frac{5}{10}+\frac{{}^{12}/_{1000}}{1-{}^{1}/_{100}}=\frac{5}{10}+\left(\frac{12}{1000}:\frac{99}{100}\right)=\frac{5}{10}+\frac{12}{990}.$$

Мы рассмотрим еще бесконечную убывающую прогрессию другого рода, а именно такую, в которой члены прогрессии имеют попеременно знак плюс и минус. Таковой будет, например, прогрессия:

$$1-0{,}7+0{,}7^2-0{,}7^3+0{,}7^4\ldots$$

Формулу для „суммы“ такой бесконечной прогрессии можно получить из соответствующей формулы для конечной суммы:

$$S=\frac{a_1\pm a_1q^n}{1+q}.$$

Так как второе слагаемое в числителе при возрастании n как угодно близко подходит к нулю, то им в конце концов можно пренебречь, и получим:

$$S=\frac{a_1}{1+q}.$$

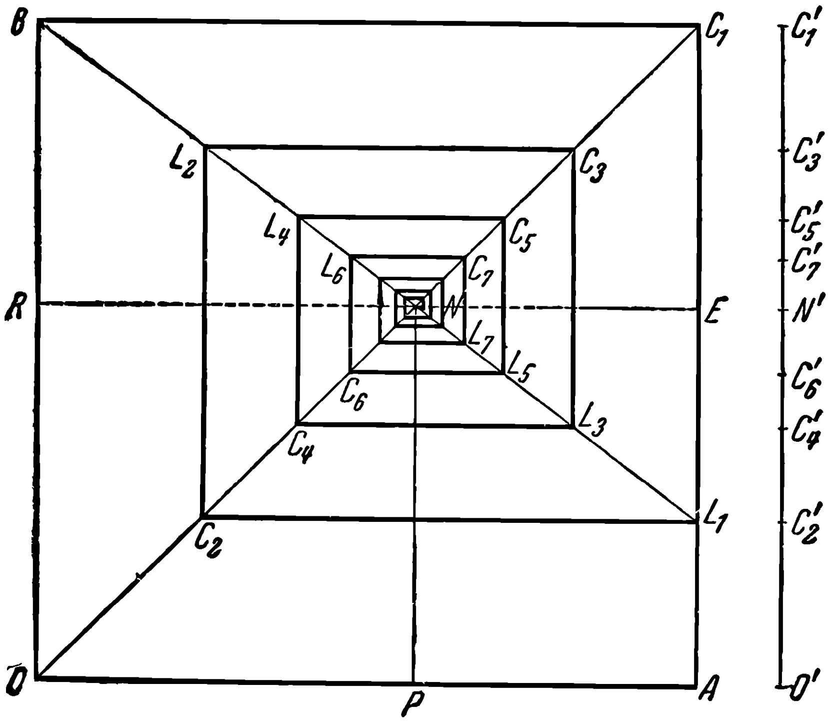
И для этого случая можно дать вывод при помощи графика. Мы даем этот график (черт. 56) еще и потому, что он сыграет большую роль в дальнейшем изложении. Что же касается доказательства формулы, мы ограничимся лишь краткими указаниями. На черт. 56 изображен квадрат OAC_1B со стороной, равной 1. Отрезок $C_1L_1=q$ (на чертеже $q={}^3/_4$). Из подобия треугольников NC_1L_1 и NC_2L_2 можно найти, что $C_2L_2=q^2$; далее окажется, что $C_3L_3=q^3$; $C_4L_4=q^4$.

Сторона OB направлена вверх; сторона C_1L_1 — вниз; сторона C_2L_2 — вверх; C_3L_3 — вниз и т. д. Беря нечетное число слагаемых, мы получаем сумму бо́льшую, чем предельная сумма S, т. е. больше отрезка PN; беря четное число слагаемых, получаем сумму, меньшую, чем S. Если слева направить на чертеж пучок параллельных лучей света и проектировать на экран $O'C_1'$ частичные суммы

$$1;\ 1-q;\ 1-q+q^2;\ 1-q+q^2-q^3;\ 1-q+q^2-q^3+q^4;\ldots,$$

то эти суммы представятся отрезками:

$$O'C_1';\ O'C_2';\ O'C_3';\ O'C_4';\ O'C_5';\ O'C_6';\ldots$$



Черт. 56.

Концы их будут совершать колебания, постепенно затухающие около некоторой предельной точки N'. Длина отрезка $O'N'$ или, что все равно, PN и представляет собой сумму „всей“ прогрессии. Чтобы найти значение этой суммы, заметим, что треугольники BNO и C_1NL_1 подобны и $PN = NR_1$. Из подобия этих треугольников находим:

$$\frac{NR}{NE} = \frac{BO}{C_1L_1};$$

или

$$\frac{S}{1-S} = \frac{1}{q};$$

откуда следует равенство:

$$Sq = 1 - S;\ 1 = Sq + S = S\,(1+q).$$

Откуда

$$S=\frac{1}{1+q}.$$

Итак, мы получили:

$$a-aq+aq^2-aq^3+\ldots=\frac{a}{1+q}.$$

И в этом случае надо отметить, что в алгебре формулу пишут иначе, а именно так:

$$S=\frac{a_1}{1-q},$$

но считают q отрицательным.

5. Гипербола и параболы

Нам уже хорошо известно, что графиком обратной пропорциональности $y=\frac{1}{x}$ служит гипербола. С другой стороны, мы в конце предыдущей главы рассматривали параболы как графики функций $y=x^2$; $y=x^3$; $y=x^4$; .... К ним можно еще добавить кривую $y=x^1$, т. е. прямую линию, совпадающую с биссектрисой координатного угла (см. черт. 59); для всякой точки M этой прямой ордината PM любой ее точки равна абсциссе OP. Эта прямая есть как бы парабола первого порядка.

Иногда добавляют еще для полноты параболу нулевого порядка: $y=x^0=1$. Это — прямая, параллельная оси Ox и отстоящая от нее на расстоянии, равном 1.

Выведенная нами формула для суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{1}{1+x}\ \ldots\ \text{при}\ x<1$$

позволяет установить связь между гиперболой и параболами. А именно, мы покажем, что гиперболу можно рассматривать как конечный результат своеобразного (графического) сложения парабол, взятых в неограниченном количестве.

Прежде всего можно указанную формулу прочитать справа налево, т. е. так:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots$$

Здесь x означает некоторое определенное число, которое, однако, должно быть меньше, чем 1, т. е. правильной дробью. Если взять, например, значение x равным 0,3, то наша формула дает:

$$\frac{1}{1+0{,}3}=1-0{,}3+0{,}3^2-0{,}3^3+0{,}3^4-\ldots$$

В левой части мы имеем вполне определенное число $\frac{1}{1,3}=\frac{10}{13}$. В правой части число слагаемых не ограничено. Согласно вышеизложенному, смысл равенства заключается в следующем. Можно написать приближенное равенство: $\frac{1}{1+0,3}\approx 1-0,3$, но в таком случае правая часть будет меньше левой.

Можно написать: $\frac{1}{1+0,3}\approx 1-0,3+0,3^2$, но тогда правая часть больше левой. Далее следуют приближенные равенства: $\frac{1}{1+0,3}\approx 1-0,3+0,3^2-0,3^3$ (правая часть меньше левой); $\frac{1}{1+0,3}\approx 1-0,3+0,3^2-0,3^3+0,3^4$ (правая часть больше левой), и так далее. Прибавляя к правой части все новые и новые слагаемые, мы будем получать величины, которые попеременно то меньше, то больше постоянной величины: $\frac{1}{1+0,3}=\frac{1}{1,3}=\frac{10}{13}$. Таким образом, вполне определенная величина $\frac{10}{13}$ представляется как предельная, к которой подходят снизу и сверху как угодно близко другие величины. Эти „подходящие" величины составлены из нечетного или четного числа слагаемых.

К чему такое усложнение? Объясняется оно тем, что иногда приходится подходить к решению задачи окольным путем; так, указанное усложнение дает возможность решить центральную задачу следующей главы.

Предположим теперь, что в нашей основной формуле значение x не остается постоянным, например x вместо значения 0,3 получит значение 0,31.
Вместо равенства

$$\frac{1}{1+0,3}=1-0,3+0,3^2-0,3^3+0,3^4-\ldots$$

будем иметь такое:

$$\frac{1}{1+0,31}=1-0,31+0,31^2-0,31^3+0,31^4-\ldots$$

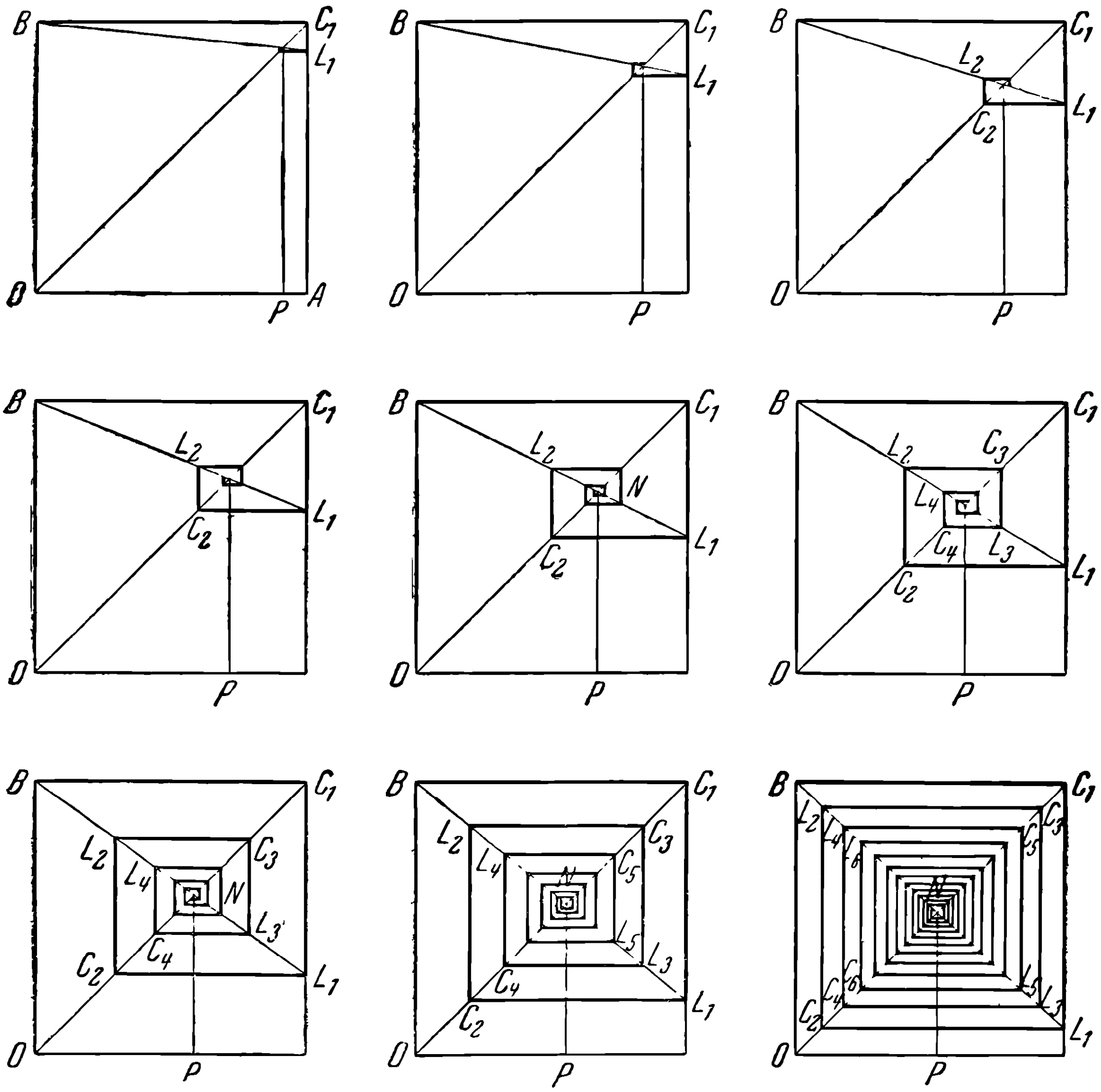
В левой части изменилась лишь одна величина, в правой изменятся значения всего бесконечного множества слагаемых. Чтобы лучше уяснить себе изменения, происходящие в левой и правой частях формулы, обратимся к черт. 56 и допустим, что длина отрезка C_1L_1 не остается постоянной, а изменяется. При каждом новом положении точки L_1 изменяется вся фигура в целом. На черт. 57 показаны 9 квадратов, на которых длина отрезка C_1L_1 принимает последовательно значения $C_1L_1=q=x=0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4;\ \ldots\ 0,8;\ 0,9.$

Отсюда ясно видно, что при переходе от одного квадрата к следующему, например от квадрата № 5 к квадрату № 6, изменяются сразу „все“ слагаемые. Если в квадрате № 5 имеем отрезки

$$C_1L_1 = 0{,}5;\ C_2L_2 = 0{,}5^2;\ C_3L_3 = 0{,}5^3;\ C_4L_4 = 0{,}5^4;\ \ldots,$$

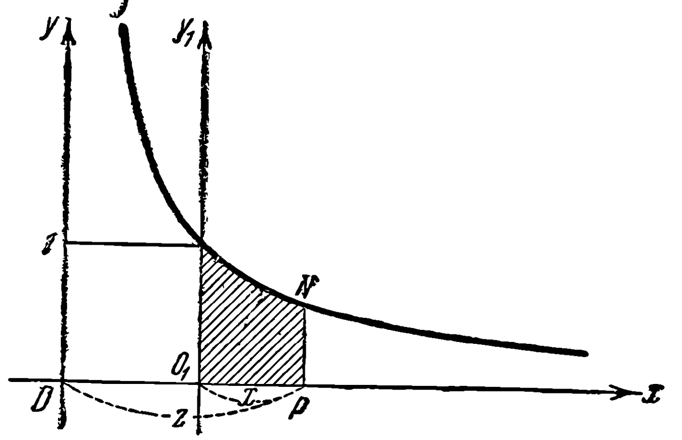
то в квадрате № 6 соответствующие отрезки будут:

$$C_1L_1 = 0{,}6;\ C_2L_2 = 0{,}6^2;\ C_3L_3 = 0{,}6^3;\ C_4L_4 = 0{,}6^4;\ \ldots,$$



Черт. 57.

При переходе от квадрата к квадрату длина $C_1L_1 = x$ получает приращения, равные 0,1 ед. Можно эти приращения взять меньшими, например равными $\frac{1}{20}$ ед. Тогда весь чертеж состоял бы из 19 квадратов; переход от каждого квадрата к следующему был бы менее резким. Если взять приращения, равные $\frac{1}{100}$ ед., то получили бы чертеж из 99 квадратов; переход от каждого квадрата к следующему стал бы незаметным на-глаз, и т. д. Если построить чертежи весьма большого числа квадратов, например 599, нанести их на пленку и пропустить их, как в кинематографе, в течение, например, 2 минут, то наблюдателю на экране представится, что изменение длины отрезка C_1L_1 совершается непрерывным образом: точка L сползает вертикально и равномерно вниз, предельная точка N передвигается влево и вниз замедленным движением; одновременно будут „расти“ отрезки C_2L_2, C_3L_3, $C_4L_4, \ldots$ Но при этом неизменно, в любой момент времени, длина отрезка PN представляется как предельное значение суммы $OB - C_1L_1 + C_2L_2 - C_3L_3 + C_4L_4 - \ldots$ Если построить график так, что вдоль горизонтальной оси O_1x откладывать длину $O_1P = x$, а вдоль вертикальной соответствующую длину отрезка PN, то получим график зависимости (функции): $y_1 = \frac{1}{1+x}$. Если обозначить $1 + x = z$, то получим $y = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{z}$, т. е. графиком является знакомая нам гипербола (черт. 58). Но в каждый момент времени длина отрезка PN составлена из слагаемых $OB = 1$; $C_1L_1 = x$; $C_2L_2 = x^2$; $C_3L_3 = x^3$; $\ldots$, взятых попеременно с минусом и плюсом. Если отобрать эти слагаемые, например для 9 квадратов черт. 57, и построить для них графики, то получим:



Черт. 58.

о) для отрезка $OB = C_0L_0$ постоянное значение 1 (нулевая парабола);

1) для отрезка C_1L_1 значения 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; ...; 0,9 (парабола 1-й степени, т. е. прямая);

2) для отрезка C_2L_2 значения $0{,}1^2$; $0{,}2^2$; $0{,}3^2$; $0{,}4^2 \ldots$; $0{,}9^2$ (парабола 2-й степени);

3) для отрезка C_3L_3 значения $0{,}1^3$; $0{,}2^3$; $0{,}3^3$; $0{,}4^3$; ...; $0{,}9^3$ (парабола 3-й степени);

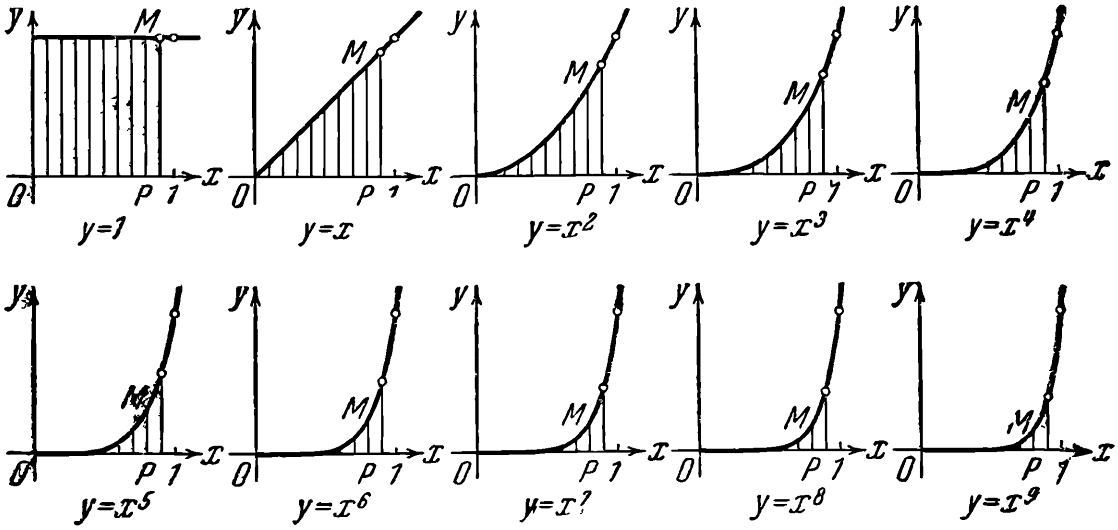
4) для отрезка C_4L_4 значения $0{,}1^4$; $0{,}2^4$; $0{,}3^4$; $0{,}4^4$; ...; $0{,}9^4$ (парабола 4-й степени), и так далее.

Эти графики представлены на черт. 59.

Теперь можно утверждать: для любого значения абсциссы x длина ординаты PN на одном черт. 58, получится, если алгебраически складывать неограниченно большое число ординат PM кривых черт. 59, соответствующих тому же значению x. При этом для кривых $y = x^4$ при нечетном n ординаты берем с минусом. Если представить себе, что такого рода сложение ординат PM происходит одновременно для всех значений абсциссы x на интервале от 0 до 1, за исключением небольшого отрезка в правом конце, то можно сказать, что параболы, складываясь в бесчисленном количестве, дают в результате гиперболу. Как происходит такое „сложение“ кривых линий, показано на черт. 60.

Пусть y_k означает график функции $y=x^k$, т. е. k-ю параболу. Тогда черт. 60 показывает последовательно следующие операции:

$y_0+y_1=y_{(1)}$ (1-я суммарная кривая)
$y_{(1)}+y_2=y_0+y_1+y_2=y_{(2)}$ (2-я суммарная)
$y_{(2)}+y_3=y_0+y_1+y_2+y_3=y_{(3)}$ (3-я суммарная)
$y_{(3)}+y_4=y_0+y_1+y_2+y_3+y_4=y_{(4)}$ (4-я суммарная кривая)



Черт. 59.

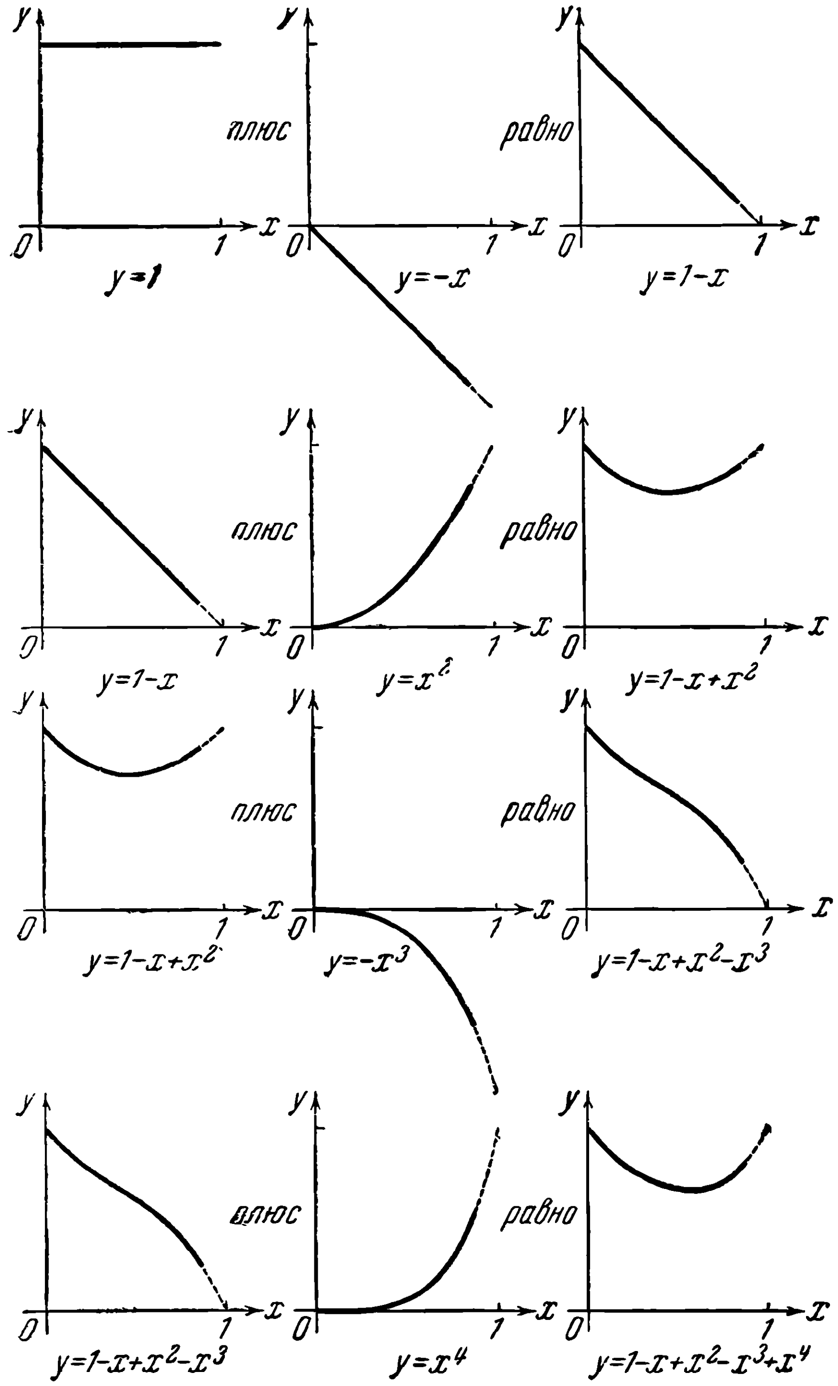
и так далее.

Сложив n парабол, получим:

$y_{(n-1)}+y_n=y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+y_n=y_{(n)}$, т. е. n-ю суммарную кривую.

Подобно тому, как на черт. 56, если взять достаточно большое число слагаемых, мы в любом квадрате получим точку, лежащую на высоте, почти равной высоте предельной точки N, так и теперь, взяв значительное число „слагаемых кривых“, получим кривую, которая на протяжении взятого интервала близко подходит к предельной кривой — гиперболе. И если, рассуждая теоретически, необходимо бесконечное множество парабол, чтобы в точности получить гиперболу, то практически достаточно взять, например, 10, 20, 30 парабол (в зависимости от требуемой точности), чтобы получить суммарную кривую $y_{(n)}$, весьма близкую к гиперболе.

Такой подход к гиперболе показан на черт. 61, где суммарные кривые $y_{(3)}$, $y_{(4)}$, $y_{(5)}$ колеблются около гиперболы. Если опять представить себе, что последовательное сложение кривых-парабол показано при помощи фильма на экране, то после небольшого числа сложений суммарная кривая $y_{(n)}$ почти перестает изменяться, она как бы застывает в одном положении, и лишь в микроскоп будут видны незначительные колебания, которые в конце концов обращают $y_{(n)}$ в гиперболу.



Черт. 60.

Заметим еще, что расхождение между суммарной кривой $y_{(n)}$ и гиперболой увеличивается, если передвигаться слева направо, и оно больше всего вблизи правого конца интервала [0 ... 1]. Но можно доказать, что если только не взят правый конец, т. е. отброшен хотя бы мельчайший отрезок справа, то можно сделать это расхождение с к о л ь угодно малым, если взять число кривых n достаточно большим. Если же подойти вплотную к правому концу интервала [0 ... 1], то в правой части нашей формулы

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-$$
$$-x^3+x^4 \ldots$$

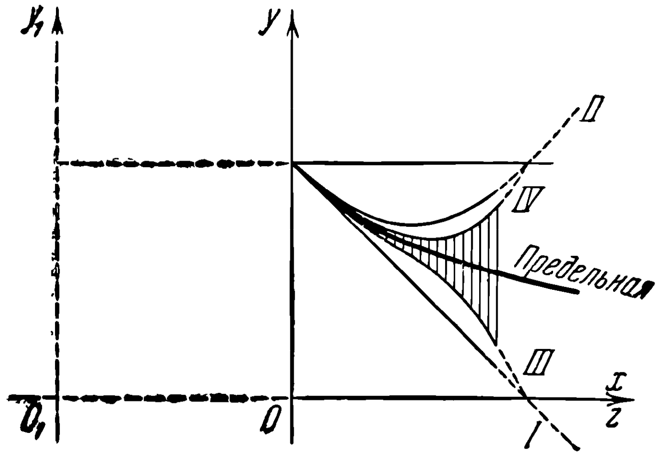
мы получили бы выражение $1-1+1-$ $-1+1\ldots$

Последовательные суммы слагаемых давали бы попеременно 0 или 1. В левой части мы получили бы попросту $^1/_2$. Получается разрыв между левой и правой частью равенства. Современная математика уделяет много внимания и таким „разрывным функциям". Проще всего будет отказаться от небольшой частицы в правом конце интервала, т. е. взять, например, вместо [0 ... 1] интервал [0 ... 0,999].

Мы можем резюмировать результат всего вышеизложенного в виде следующей теоремы:

Теорема 3. Гиперболу $y=\frac{1}{1+x}$ можно на неполном интервале $[0\ldots 1-p]$, где p означает малую дробь, приближенно заменить кривой, сложенной из парабол:

$$y_{(n)}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\pm x^n,$$



Черт. 61.

причем, увеличивая число n, можно погрешность (расхождение) на указанном интервале сделать сколь угодно малой.

ГЛАВА V

ЧТО ТАКОЕ ЛОГАРИФМ?

Популярный писатель подводит читателя к глубокой мысли, к глубокому учению, исходя из самых простых общеизвестных данных. *Ленин.*
Мюнхен, 1902.

1. Таблица Бюрги

Как известно, инженеры и техники всех стран пользуются счетной линейкой для быстрых практических вычислений. Если посмотреть на счетную линейку, то бросается в глаза то обстоятельство, что деления на ней расставлены неравномерно: по мере продвижения к правому краю линейки деления идут все чаще и чаще. Чтобы понять, каким образом устроена линейка, надо знать, по какому принципу ставятся на ней деления, какая закономерность лежит в основе неодинаковых расстояний между ними. Но объяснить это — значит объяснить теорию логарифмов. Здесь мы, поскольку позволяют размеры книги, изложим эту теорию.

Коснемся сначала истории вопроса. Уже у старых французских математиков Орезма (1328—1382) и Шюкэ (его книга вышла в свет в 1489 г.) мы находим сопоставление арифметической и геометрической прогрессий. Вполне отчетливо это сопоставление высказано в „Общей арифметике“ Михаила Штифеля, вышедшей в 1544 г. Штифель рассматривал различные степени одного и того же числа, например такой ряд: 2; $2^2=4$; $2^3=8$; $2^4=16$; $2^5=32$; . . ., и составлял таблицу:

2	4	8	16	32	64	128
1	2	3	4	5	6	7

Эту таблицу он продолжал и влево. Так как в верхнем ряду, если подвигаться влево, числа каждый раз уменьшаются в два раза, то дальше пойдут числа: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$.

В нижнем ряду, при передвижении влево, числа уменьшаются на 1; получим новые числа: $0; -1, -2; -3; -4; , \ldots$

В результате получается таблица:

$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Если перемножить какие-нибудь два числа верхнего ряда, например 4 и 32 ($4 \cdot 32 = 128$), то, параллельно с этим умножением, происходит сложение соответственных нижних чисел: $2 + 5 = 7$. Это потому, что

$$4 = 2^2;\ 32 = 2^5;\ 4 \cdot 32 = 2^2 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = \\ = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7.$$

Еще один пример. Произведение $\frac{1}{8} \cdot 128$ дает 16. Соответственные нижние числа будут: -3, 7, 4, причем $(-3) + 7 = 4$.

В своей „Арифметике“ Штифель пишет:

<table>
<tr><td>умножению</td><td rowspan="2">чисел геометрической прогрессии</td><td>сложение</td></tr>
<tr><td>делению</td><td>вычитание</td></tr>
<tr><td>возвышению в степень k</td><td rowspan="2">отвечает в арифметической прогрессии</td><td>умножение на k</td></tr>
<tr><td>извлечению корня степени k</td><td>деление на k</td></tr>
</table>

Свои замечания Штифель заканчивает такими словами: „Можно было бы написать целую книгу об этих замечательных свойствах числовых рядов, однако здесь я этим ограничусь и пройду мимо с закрытыми глазами“.

Приблизительно через 70 лет после выхода в свет книги Штифеля, его идея была воплощена в жизнь в виде таблиц для вычислений одновременно и независимо друг от друга двумя математиками, швейцарцем Бюрги и шотландцем Непером. При этом Непер ввел самое понятие логарифма и высказал ряд глубоких мыслей, сыгравших роль в дальнейшем развитии математики.

Мы начнем с таблиц Бюрги, так как они проще. Бюрги составил их в период 1603—1611 гг.; напечатаны они были в Праге в 1620 г.

Чтобы понять основную мысль Бюрги, лучше всего нам самим составить таблицу, подобную его таблице. Для этого рассмотрим геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1{,}01$ и начальным членом $a_0 = 1$:

$$1;\ 1{,}01;\ 1{,}01^2;\ 1{,}01^3;\ 1{,}01^4;\ \ldots;\ 1{,}01^n;\ 1{,}01^{n+1};\ \ldots$$

Ниже помещена таблица, в которой имеются значения 240 членов этой прогрессии. Каждый может сам составить такую таблицу. Если, например, $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{65} = 1{,}909$, то следующим числом таблицы будет $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{66} = 1{,}909\ 1{,}01$. Умножаем, как обычно:

$$1{,}909 \cdot 1{,}01 = 1{,}909 + 1{,}909 \cdot 1{,}01, \text{ т. е.}$$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{l} 1{,}909 \\ 0{,}01909 \end{array} \\ \hline 1{,}92809 \approx 1{,}928. \end{array}$$

Следующее число будет $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{67}$, т. е.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{l} 1{,}928 \\ 0{,}01928 \end{array} \\ \hline 1{,}94728 \approx 1{,}947. \end{array}$$

При составлении таблиц встречается затруднение: как производить округление последних цифр? Ведь, округляя первые числа ряда, мы этим самым влияем на последующие, и, может быть, незначительные погрешности в начале таблицы дадут большие отклонения в конце таблицы. Чтобы избежать ошибки, приходится составлять такие „округленные“ таблицы, например с 7 или 8 десятичными знаками, и лишь потом оставлять в них 3 десятичных знака, как у нас. Но здесь мы не можем войти в обсуждение этих деталей. Прилагаемая таблица носит лишь учебный, вспомогательный характер.

В дальнейшем мы узнаем формулы, которые позволяют:

1) эти таблицы вычислять весьма быстро,

2) составить другие, принципиально точные таблицы.

Покажем теперь, как, имея под руками эту таблицу, можно производить с большой экономией времени различные вычисления, правда, лишь с некоторым приближением.

	1—20	21—40	41—60	61—80	81—100	101—120	121—140	141—160	161—180	181—200	201—220	221—240
1	1,010	1,232	1,504	1,835	2,238	2,732	3,333	4 067	4,963	6,056	7,389	9,017
2	1,020	1,244	1,519	1,853	2,260	2,759	3,366	4,108	5,013	6,117	7,463	9,107
3	1,030	1,256	1,533	1,872	2,283	2,787	3,400	4,149	5,063	6,178	7,538	9,198
4	1,040	1,269	1,548	1,890	2,306	2,815	3,434	4,190	5,114	6,240	7,613	9,290
5	1,050	1,282	1,563	1,909	2,329	2,843	3,469	4,232	5,165	6,302	7,690	9,383
6	1,061	1,295	1,579	1,928	2,352	2,871	3,504	4,274	5,216	6,365	7,767	9,477
7	1,072	1,308	1,595	1,947	2,376	2,900	3,539	4,317	5,268	6,429	7,845	9,572
8	1,083	1,321	1,611	1,966	2,400	2,929	3,574	4,360	5,321	6,493	7,923	9,668
9	1,094	1,334	1,627	1,986	2,424	2,958	3,610	4,404	5,374	6,558	8,002	9,765
10	1,105	1,348	1,644	2,006	2,448	2,987	3,646	4,448	5,428	6,624	8,081	9,862
11	1,116	1,361	1,660	2,026	2,472	3,017	3,682	4,492	5,482	6,690	8,162	9,959
12	1,127	1,375	1,677	2,046	2,497	3,047	3,719	4,537	5,537	6,757	8,244	10,06
13	1,138	1,389	1,693	2,067	2,523	3,077	3,756	4,582	5,592	6,825	8,326	10,16
14	1,149	1,403	1,710	2,087	2,548	3,108	3,794	4,628	5,648	6,893	8,409	10,26
15	1,160	1,417	1,727	2,108	2,573	3,140	3,832	4,675	5,705	6,961	8,494	10,36
16	1,172	1,431	1,744	2,129	2,599	3,172	3,870	4,723	5,762	7,031	8,579	10,46
17	1,184	1,445	1,761	2,150	2,525	3,204	3,909	4,770	5,820	7,101	8,665	10,56
18	1,196	1,459	1,779	2,171	2,651	3,236	3,948	4,818	5,878	7,172	8,752	10,67
19	1,208	1,474	1,797	2,193	2,677	3,268	3,987	4,866	5,937	7,244	8,839	10,78
20	1,220	1,489	1,317	2,216	2,705	3,300	4,027	4,914	5,996	7,316	8,928	10,89

Пусть требуется умножить 1,872 на 1,563. Посмотрев на таблицу, видим, что этим числам слева отвечают номера $n_1 = 63$; $n_2 = 45$. Складываем эти номера:
$n_1 + n_2 = 63 + 45 = 108 = n_3$. Этому номеру n_3 в таблице соответствует число 2,929. Поэтому $1{,}872 \cdot 1{,}563 = 2{,}929$. Объяснение следует из равенства:

$$(1{,}01)^{63} \cdot (1{,}01)^{45} = (1{,}01)^{108}.$$

При этом, как видим, числа n (номера) складываются; числа $1{,}01^n$ перемножаются.

Но не всегда вычисления проходят гладко. В таблице очень многие числа отсутствуют; точнее говоря, в таблице мы имеем только определенную сеть чисел. Как же поступить, если надо производить дйствия над промежуточными числами?

Пусть, например, надо умножить 5,19 на 1,87. Этих чисел в таблице нет. Единственное, что остается сделать, — это брать, вместо заданных чисел, ближайшие к ним числа таблицы. Конечно, тогда и результат будет лишь приближенным, не говоря уже о том, что самые таблицы дают приближенные значения $1{,}01^n$.

Число 5,19 лежит между 5,165 и 5,216; ему соответствует число n_1, лежащее между 165 и 166: берем $n_1 = 165^1/_2$; вместо числа 1,87 берем 1,872; соответствующее число $n_2 = 63$.

Тогда $n_1 + n_2 = 165^1/_2 + 63 = 228^1/_2$.

Результат будет заключаться между 9,668 и 9,765; если взять среднее между ними число, то получим 9,716. Произведя обычное умножение, получим 9,7053.

Ошибка значительная, но какая быстрота в вычислении! Если же необходима бо́льшая точность, то следует построить более подробные таблицы. Сам Бюрги построил таблицы степеней $\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^n$. Тогда при перемножении $5{,}19 \cdot 1{,}87$ результат в первых четырех десятичных знаках будет вполне точным. По этому поводу заметим, что отличие новой, современной математики от старой, например от древнегреческой, состоит в том, что во многих вопросах современная математика сначала как будто идет на уступки, отказываясь от точного результата, но затем, путем углубленного анализа, добивается такого способа, который дает возможность решить задачу с любой степенью точности, и таким обходным путем она достигает совершенной точности. Поэтому читатель должен терпеливо отнестись к этим неточным вычислениям, помня о том, что недостаток может быть восполнен и будет восполнен (стр. 156).

Рассмотрим теперь деление чисел; это действие обратно умножению.

Пусть надо разделить 9,52 на 2,95. Соответственные левые числа:

$n_1 = 226\frac{1}{2}$; $n_2 = 109$. Вычитаем: $226\frac{1}{2} - 109 = 117\frac{1}{2}$; результат дается соответствующим правым числом: 3,220.

Объясняется это равенством:

$$(1{,}01)^{226^1/_2} : (1{,}01)^{109} = (1{,}01)^{117^1/_2}.$$

Перейдем к более сложному действию — возвышению в степень. Пусть надо найти $(1{,}16)^7$. Для числа 1,16 соответствующее левое число n есть 15. Умножаем $15 \cdot 7 = 105$. Левому числу $n = 105$ соответствует число 2,843. Поэтому имеем приближенное равенство: $(1{,}16)^7 \approx 2{,}84$.

Объяснение таково:

$$1{,}16 \approx (1{,}01)^{15};\ 1{,}16^7 = (1{,}01^{15})^7 = 1{,}01^{15 \cdot 7} = 1{,}01^{105}.$$

При возвышении $(1{,}01^n)$ в 7-ю степень показатель n умножается на число 7. Таким образом, возвышение в степень k, благодаря таблице, заменяется действием умножения на число k.

Как уже упоминалось возвышение в степень иногда называют пятым действием арифметики. Перейдем теперь к шестому действию, к извлечению корня.

Если $(1{,}01^n)^k = 1{,}01^{nk}$, то обратно $\sqrt[k]{1{,}01^n} = 1{,}01^{\frac{n}{k}}$.

Пусть требуется извлечь $\sqrt[5]{8{,}4}$. Так как 8,4 есть $(1{,}01)^{214}$, то $\sqrt[5]{8{,}4} = \sqrt[5]{1{,}01^{214}}$, т. е. $1{,}01^{\frac{214}{5}} = 1{,}01^{43}$; левому числу 43 в таблице соответствует число 1,533. Поэтому $\sqrt[5]{8{,}4} = 1{,}53$. Извлечением корня степени k приводится к делению „левого“ числа на число k.

Подведем итоги. При вычислениях с помощью таблицы Бюрги производится:

вместо умножения $A \cdot B$	сложение $n_1 + n_2$
вместо деления $A : B$	вычитание $n_1 - n_2$
вместо возвышения в k-ю степень A^k	умножение $n_1 \cdot k$
вместо извлечения корня k-й степени $\sqrt[k]{A}$	деление $n_1 : k$

Если расположить все шесть действий по ступеням

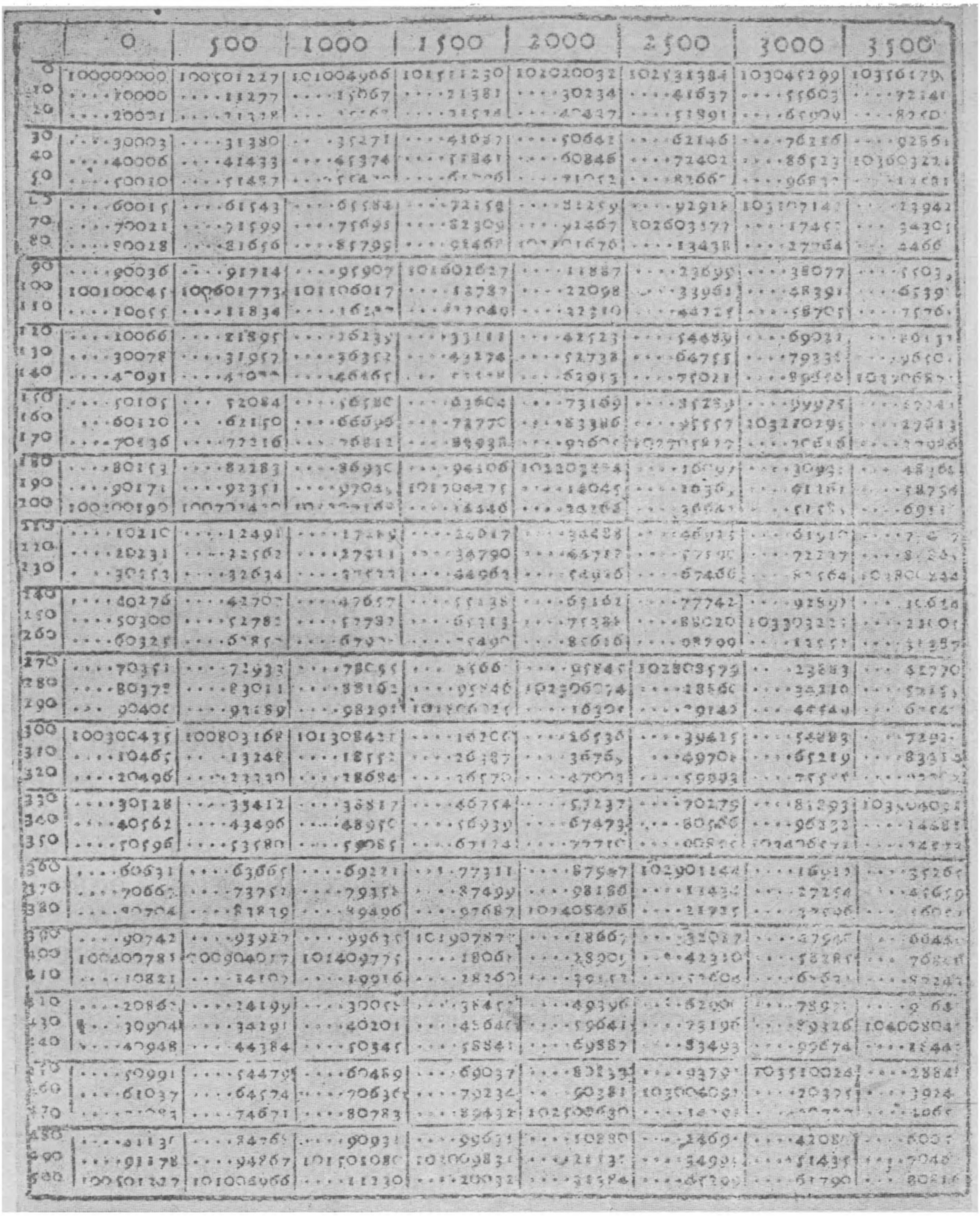
III	возвышение в степень	извлечение корня
II	умножение	деление
I	сложение	вычитание

то можно сказать, что при вычислениях с помощью таблиц Бюрги, мы действия второй ступени сводим к действиям первой ступени, а действия третьей ступени — к действиям второй ступени. Важно еще отметить, что это понижение на одну ступень делает возможным производить шестое действие — извлечение корня, которое мы иным путем, вообще говоря, не умеем вовсе выполнять.

Сам Бюрги за начальный член прогрессии a_0 взял не 1, а число $10^8 = 100 \cdot 000 \cdot 000$ (сто миллионов); знаменатель прогрессии q у него равен $1 + \frac{1}{10\,000}$. Поэтому у него каждое число больше предыдущего на $\frac{1}{10\,000}$ этого предыдущего. Левые „числа" таблицы, т. е. числа n, Бюрги берет все увеличенными в 10 раз; этот факт, по существу, значения не имеет. Числа $10n$, представляющие собой арифметическую прогрессию, у Бюрги были отпечатаны красным шрифтом, числа геометрического ряда, т. е. $10^8 \left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^n$, — черным шрифтом. Поэтому, если все черные числа таблицы Бюрги разделить на 10^8, а все красные разделить на 10, то его таблица принципиально не будет отличаться от нашей. Но таблица Бюрги, конечно, давала возможность производить гораздо более точные вычисления, чем построенная нами таблица.

Читатель может составить себе представление о ней по прилагаемой фотографии одной из ее страниц.

Бюрги продолжает свою таблицу до тех пор, пока исходное число 10^8 не оказывается увеличенным в 10 раз, т. е. до $10^9 = 1\,000\,000\,000$ (тысяча миллионов). И Бюрги, как и нам, приходилось, конечно, округлять последние десятичные знаки. Он высчитал, что если взять показатель $n = 23\,027$, то число $10^8 \cdot (1{,}0001)^{23\,027}$ будет меньше, чем 10^9; если же взять $n = 23\,028$, то число $10^8 \cdot (1{,}0001)^{23\,028}$ больше, чем 10^9. Несмотря на то, что таблица Бюрги гораздо точнее, чем построенная нами, однако и у нас $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{231} = 9{,}959$, а $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{232} = 10{,}06$; таким образом, лестница „во сколько", со знаменателем $q = 1{,}0001$, не так уж сильно отличается от такой же лестницы при $q = 1{,}01$.



Страница из таблиц Бюрги.

Полезно отметить для дальнейшего, что в таблице Бюрги высота 10 000-й ступеньки равна

$$10^8 \cdot \left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 27181459;$$

иначе говоря

$$\left(q + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 2{,}7181459.$$

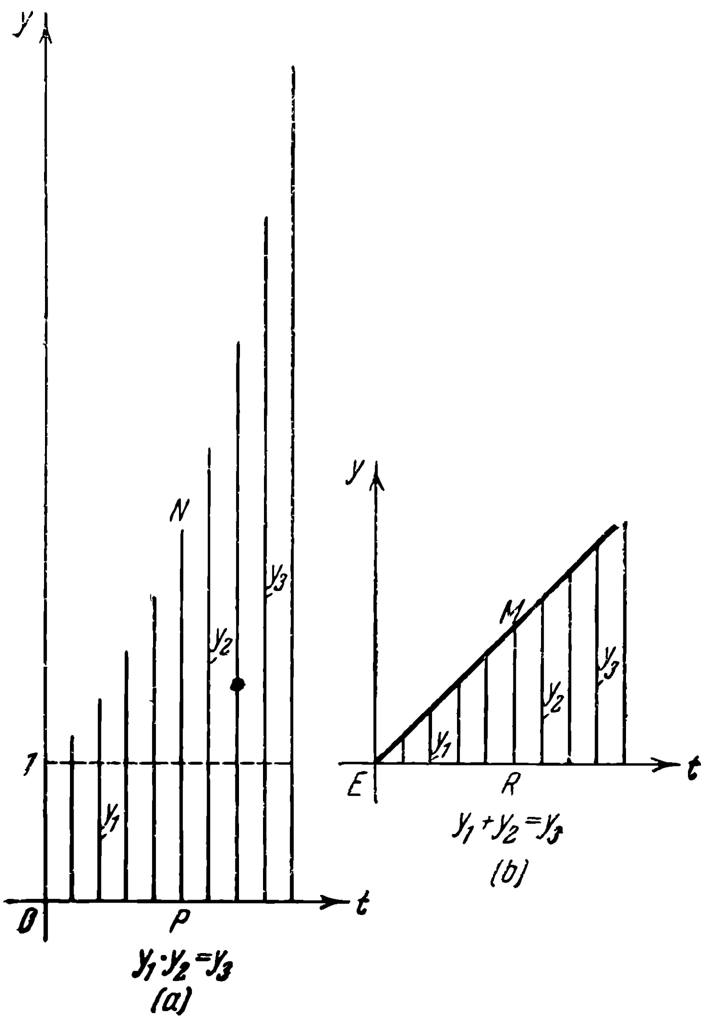
В нашей таблице имеется

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}705.$$

И то и другое число близко к некоторому числу, имеющему важное значение в математике, к числу e. С этим числом $e = 2{,}71828\ldots$ мы еще встретимся.

2. Идея Непера. Показательная кривая

Прежде чем перейти к точным таблицам, свободным от произвола в степени приближения, представим на графике связь обеих прогрессий, какая дается таблицами типа Бюрги. Как мы видели, основным в этой связи является то обстоятельство, что при перемножении одних чисел y (членов геометрической прогрессии) другие числа x (члены арифметической прогрессии) складываются. Эта связь сохраняется, если все числа x умножить на какое-либо постоянное число (например, Бюрги умножал номера n на число 10). Поэтому можно сопоставить такие два ряда чисел (берем $n = 100$):



Черт. 62.

1	$1+\frac{1}{100}$	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^2$	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^3$	$\ldots$	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^m$	$\ldots$
0	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\ldots$	$\frac{m}{100}$	$\ldots$

Представим себе, что возрастание чисел верхнего и нижнего рядов происходит одновременно, причем новые члены рядов появляются через равные промежутки времени. Для дальнейшего удобно будет принять, что каждый промежуток времени также равен $\frac{1}{n}$ некоторой единицы, например $\frac{1}{100}$ часа.

Изменение членов того и другого ряда представим на графике (черт. 62). Отрезки, отложенные вдоль горизонтальной оси Ot (абсцисс), изображают промежутки времени, а ординаты дают значения членов ряда. Тогда на левом чертеже (a)

ординаты составят лестницу „во сколько“, на чертеже (b) лестницу „на сколько“. Подъем от начальной ступеньки к первой ступеньке в том и другом случае одинаков и равен $\frac{1}{100}$ ед. Далее на правом чертеже подъем все время остается равным $\frac{1}{100}$ ед. Угол наклона прямой EM к горизонтальной оси Ot равен 45°, так как и приращение времени Δt изображается отрезками в 0,01 м.

На левом чертеже рост ступеней происходит, очевидно, неравномерно, а именно — с течением времени все быстрее. Вопрос о том, как происходит изменение длины ступенек в течение промежутка времени Δt нас пока не интересует: важно лишь то, что в конце каждого промежутка Δt появляется новая ступенька.

Из рассмотрения таблицы Бюрги вытекают следующие два свойства:

1. Каждое приращение Δy ступеньки PN составляет определенную долю $\left(\text{в нашем примере } \frac{1}{100}\right)$ высоты этой ступеньки; эта доля (дробь) одна и та же для всех ступенек лестницы. В самом начале лестницы имеем:

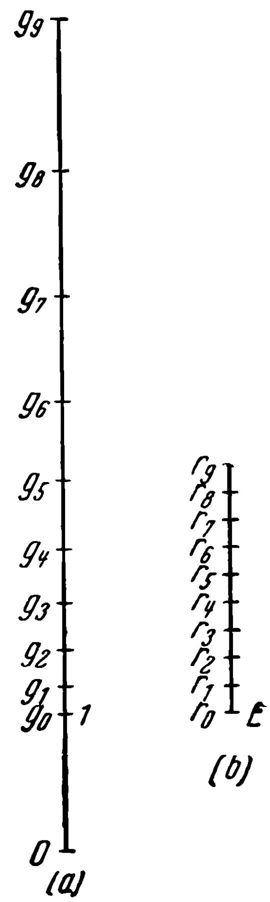
$$\frac{\Delta y_0}{y_0}=\frac{1}{100}=\Delta t;\quad \frac{\Delta y_1}{y_1}=\frac{1}{100}=\Delta t;\quad \frac{\Delta y_2}{y_2}=\Delta t;$$

$$\frac{\Delta y_3}{y_3}=\Delta t\;;\ldots$$

и для всякого номера i имеем:

$$\frac{\Delta y_i}{y_i}=\Delta t.$$

2. Перемножение двух ординат чертежа (a) сопровождается сложением двух соответствующих ординат чертежа (b).



Черт. 63.

Для дальнейшего анализа будет весьма удобным связать возрастание членов обеих прогрессий с идеей движения.

Представим себе, что с правой стороны на оба чертежа 62 падает пучок горизонтальных лучей, параллельных оси Ot. Тогда все ординаты PN и RM проектируются на вертикальную ось Oy. Обозначим точки, которые служат проекциями концов N_i ординат P_iN_i через g_i и соответственно для концов M_i ординат R_iM_i через r_i (черт. 63). Представим себе далее, что на черт. 63a вдоль оси Oy движется материальная точка, например шарик, занимающий в соответствующие моменты положение точки g. В начальный момент при $t=0$ шарик g находится на расстоянии $Og_0=1$, а затем через промежутки Δt он оказывается последовательно в точках g_1; g_2; g_3; ...; g_m; .... Если от начального момента движения прошло, например, $24 \cdot \Delta t$ $\left(= 24 \cdot \frac{1}{100}\text{ часа}\right)$, то в этот момент шарик g окажется в точке g_{24}, причем $Og_{24} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{24}$, и т. д.

На черт. 63b соответственные точки r_i будут равноотстоящими; за время $24 \cdot \Delta t$ шарик r пройдет расстояние $Er_{24} = \frac{24}{100}$ метра от своей начальной точки E. Мы опять-таки не касаемся вопроса о том, как движутся шарик g и шарик r в течение самих промежутков времени Δt. Очевидно, все это рассуждение не изменится, если рассматривать промежутки времени Δt более мелкие, например, вместо $\Delta t = \frac{1}{100}$ часа взять $\Delta t = \frac{1}{200}$; $\Delta t = \frac{1}{400}$; $\Delta t = \frac{1}{800}$ часа и т. д.

Если взять определенный интервал времени, например 0,24 часа, то, при переходе от $\Delta t = \frac{1}{100}$ к $\Delta t = \frac{1}{200}$ часа, мы вместо 24 промежутков будем иметь 48 промежутков. Как не трудно сообразить, расстояние Er_{48} при этом более мелком подразделении времени на промежутки будет равно прежнему Er_{24}; расстояние же Og_{48} будет больше прежнего расстояния Og_{24}.[1] Заставляя число n в равенстве $\Delta t = \frac{1}{n}$ возрастать все более и более, мы будем получать все более густую сеть точек r_i и точек g_i на вертикальных осях.

Можно ли добиться того, чтобы вместо сети точек на той и другой оси получилось непрерывное распределение точек? Смелую идею — исследовать непрерывное движение шарика g вдоль прямой Og и одновременно шарика r вдоль прямой Er — впервые высказал шотландский математик Джон Непер.

Чтобы лучше уяснить себе этот трудный вопрос, удобно будет сначала представить себе, что движение шарика g совершается по следующему закону. В начальный момент шарик находится на расстоянии $Og_0 = 1$ м и его скорость равна 1 м/ч. С этой скоростью шарик движется равномерно в течение $\Delta t = \frac{1}{n} = \frac{1}{100}$ часа и проходит, очевидно, отрезок пути длиною в $\frac{1}{100}$ м. В самом конце промежутка времени Δt скорость ша-

---

[1]) Потому что вместо каждого множителя $\left(1 + \frac{1}{100}\right)$ появятся два равных множителя $\left(1 + \frac{1}{200}\right)\left(1 + \frac{1}{200}\right) = \left(1 + \frac{1}{200}\right)^2$, а эта величина больше, чем $\left(1 + \frac{1}{100}\right)$, так как $\left(1 + \frac{1}{200}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{200} + \frac{1}{200^2} = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{40\,000}$.

рика мгновенно изменяется и сразу оказывается равной 1,01м/ч, т. е. численно равной длине расстояния Og_1. С этой новой скоростью шарик g движется равномерно в течение $\frac{1}{n}=\frac{1}{100}$часа, и проходит расстояние, равное $\left(1+\frac{1}{100}\right)\frac{1}{100}$ м; в конце этого промежутка Δt расстояние шарика g от начала O сделается равным $Og_2=\left(1+\frac{1}{100}\right)^2$ м. В этот момент скорость шарика опять испытывает мгновенное изменение и делается равной $(1{,}01)^2$ м/ч и т. д. Что касается второго шарика r, то его движение можно мыслить происходящим все время с постоянной скоростью 1 м/ч.

Если увеличивать n, т. е. уменьшать промежуток $\Delta t=\frac{1}{n}$, то скорость шарика g будет все чаще и чаще испытывать изменения в сторону ее возрастания. Но когда промежутки Δt становятся чрезвычайно малыми, тогда и приращения пути шарика g станут малыми, а вследствие этого и приращения скорости будут малыми. Оказывается, что, например, переход от $\Delta t=\frac{1}{1000}$ к $\Delta t=\frac{1}{2000}$ лишь очень мало изменяет общую картину движения. Что же произойдет, если число n увеличивать безгранично? Точное математическое решение этого вопроса весьма сложно и выходит за рамки этой небольшой книги. Достаточно указать, что лишь через 200 лет после книги Непера точное математическое объяснение было дано французским ученым Копи, а некоторые недоразумения, связанные с точным доказательством, были разрешены лишь через 250 лет после Непера. Однако, не претендуя на логически безупречное доказательство, мы здесь изложим, в чем заключается идея Непера.

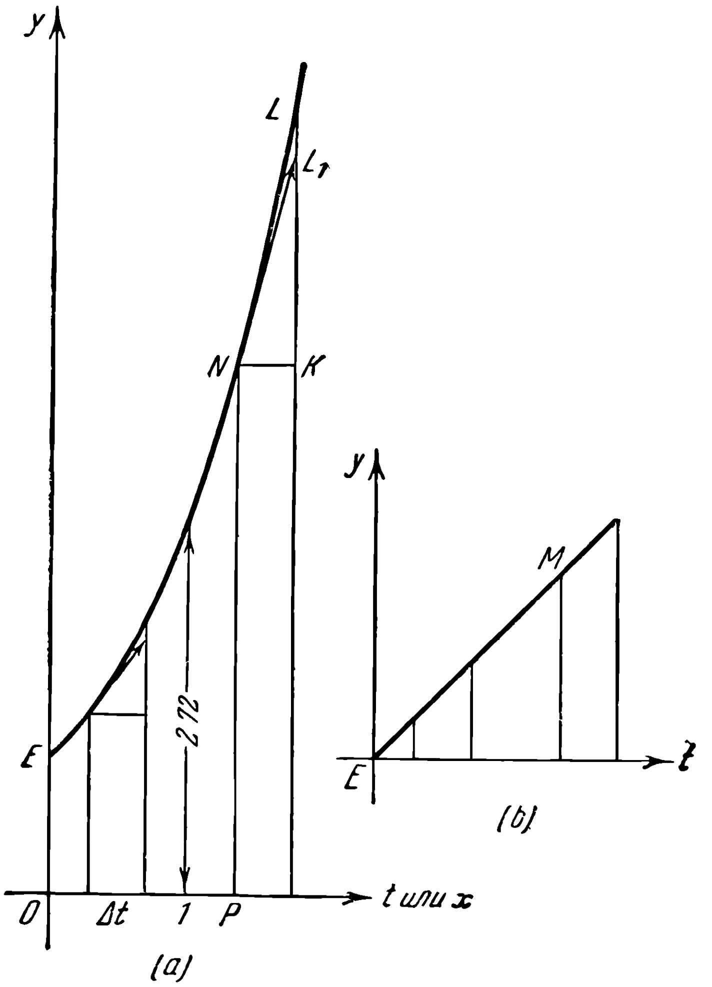
Вообразим себе, что промежутки времени Δt стремятся к нулю и одновременно число таких промежутков n в единицу времени (1 час) безгранично растет. Тогда, в конце концов, рассмотренное нами движение заменится таким предельным движением, при котором скорость шарика g будет изменяться непрерывным образом, т. е. возрастает непрестанно. Оказывается, что это новое движение обладает следующими свойствами:

1. Оно получается плавным (незаметным) образом из вышерассмотренного движения со скачкообразно изменяющейся скоростью.

2. При новом движении сохраняется правило, которое раньше относилось только к концам промежутков Δt, а именно теперь скорость в любое мгновенье численно равна длине пройденного расстояния Og. Если, например, в данный момент шарик находится от начальной точки O на расстоянии $Og=$

$=2{,}8$ м, то скорость в данный момент равна 2,8 м/ч. Это последнее означает, что если бы шарику g предоставили бы двигаться по инерции, то он стал бы двигаться равномерно со скоростью 2,8 м/ч.

3. Рассматривая одновременно равномерное движение второго шарика со скоростью 1 м/ч, можно и при новом движении шарика связь того и другого движения выразить так: умножение $Og_1 \cdot Og_2 = Og_3$ сопровождается сложением $Er_1 + Er_2 = Er_3$.



Черт. 64.

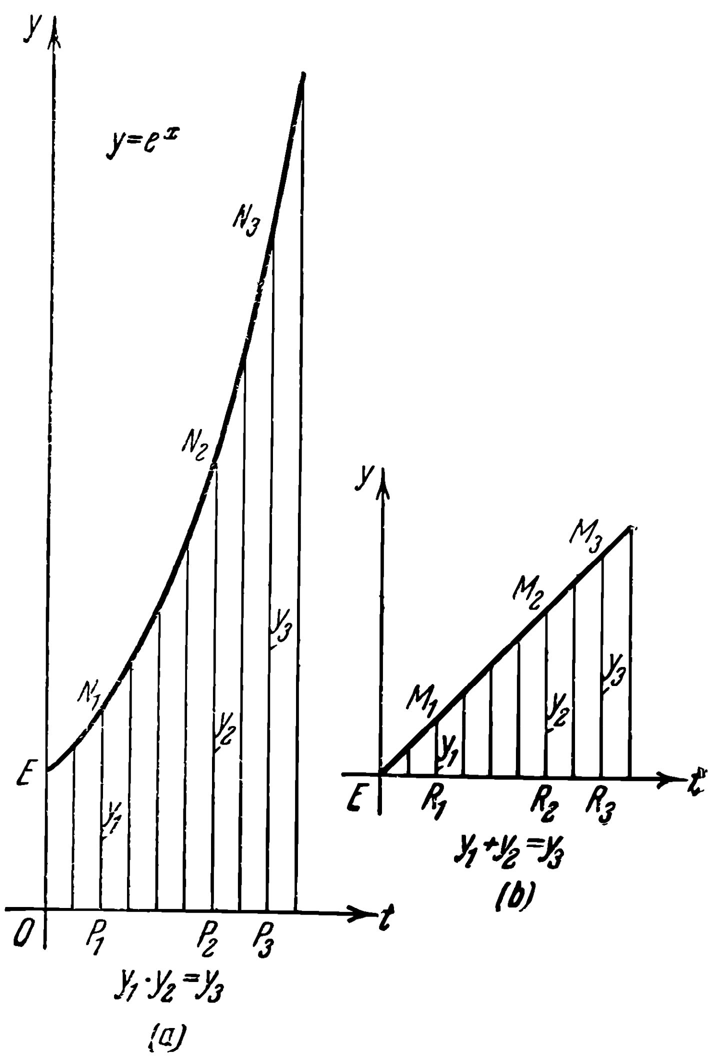
Если теперь, обратно, построить график движения шарика g, т. е. откладывать протекшее время вдоль горизонтальной оси Ot, а длину расстояния в виде ординат, то график движения будет на этот раз плавной линией EL (черт. 64).

Чтобы изобразить мгновенную скорость шарика для какого-либо момента времени $t = t_1$, придется провести в соответствующей точке касательную. На чертеже (черт. 64) изображены два положения касательной маленькими стрелками; наклон стрелки можно характеризовать отношением катетов прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны осям координат, а гипотенуза совпадает с касательной. Эти касательные изображают равномерное движение, которое совершалось бы в промежуток времени $[t_1 \ldots t_1 + \Delta t]$, если бы, начиная от момента $t = t_1$ шарик g пошел по инерции. Но фактически этого не случается: в течение любого, даже чрезвычайно малого, промежутка Δt скорость изменяется, и никакая часть кривой линии EL не может быть совмещена с отрезком касательной.

При скачкообразном изменении скорости мы имели соотношение

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \Delta t; \text{ или } \frac{\Delta y_i}{\Delta t} = y_i.$$

Теперь же, для случая плавного (предельного) движения, пишут: $\frac{dy}{dx}=y$, что означает: отношение „бесконечно малых“ приращений пути и времени равно длине пути. Понятие бесконечно малых есть необходимая абстракция, которой пользуются для того, чтобы выразить свойства единого процесса движения с непрерывно изменяющейся скоростью.



Черг. 65.

Итак, в результате, вместо ломаной лестницы „во сколько“, мы имеем график в виде плавной линии EL. Она соед - няет в себе и свойства геометрической прогрессии и непрерывность гладкой кривой. Это одна из важнейших кривых линий, изучаемых математикой. Она получила название „показательной кривой“. Слово „показательная“ связано со словом „показатель степени“; здесь мы не будем подробнее выяснять происхождение этого названия.

График движения второго шарика r не представляет затруднений. Это есть прямая линия EM, составляющая угол в 45° с осью Ot. Сопоставляя оба графика, дадим следующее определение, почти не отличающееся от определения Непера.

Первое определение. Если одному и тому же моменту отвечают ордината PN показательной кривой и ордината RM линии EM, то отрезок (RM) называется логарифмом отрезка (PN).

Пишут: $(RM)=\log\ (PN)$.

Вышеуказанное третье свойство движения, рассматриваемого Непером, можно записать (черт. 65) в следующем виде:

Равенство

$$P_1N_1\cdot P_2N_2=P_3N_3.$$

влечет за собой равенство

$$R_1M_1 + R_2M_2 = R_3M_3;$$

а так как

$$(RM) = \log (PN),$$

то

$$\log (P_1N_1) + \log (P_2N_2) = \log (P_3N_3).$$

Знак log обозначает логарифм, а логарифм есть переход от величины PN к соответствующей величине RM (черт. 65).

Определение логарифма можно видоизменить. Так как прямая EM составляет с осью Ot угол в 45°, то для любой точки M этой прямой имеем: $RM = ER$.

Далее, $ER = OP = t$. Но в таком случае: $\log (PN) = OP = t$. Это равенство дает следующее определение:

Второе определение. Логарифмом числа y ($= PN$) называется величина интервала времени, в течение которого шарик g поднимается на высоту, равную y.

Таким образом, можно обойтись без чертежа 64b и пользоваться только одним чертежом 64a.

Мы видели, что соотношение

$$y_1 \cdot y_2 = y_3$$

влечет за собой

$$t_1 + t_2 = t_3.$$

Так как, согласно второму определению, $\log y = t$, то можно написать:

$$\text{при } y_1 \cdot y_2 = y_3, \quad \log (y_3) = \log (y_1) + \log (y_2).$$

Как мы видели, для объяснения логарифма Непер пользуется анализом движения, так как оно дает наглядное представление об изменении величин. Но теперь, когда нами уже построен график „предельного" движения, можно при желании движение уже не рассматривать, а ограничиться рассмотрением только графика, т. е. показательной кривой. Таким образом, можно отвлечься от „механики" и перейти к „геометрии".

Пусть на чертеже (черт. 64) изображена показательная кривая. Горизонтальную ось назовем через Ox вместо Ot (буква t означала время). Положение любой точки на плоскости выражается при помощи двух величин: отрезка $PN = y$ (ординаты точки) и отрезка $OP = x$ (абсциссы), так называемых координат точки.

Теперь можно дать логарифму такое определение:

Третье определение. Имеется показательная кривая. Каждой ординате $PN=y$ соответствует абсцисса $OP=x$. Тогда логарифмом числа y называется число x:

$$\log y = x.$$

Мы будем это третье определение считать основным.

Итак, понятие логарифма есть понятие о связи двух переменных величин. Изменение ординаты PN сопровождается изменением отрезка OP. Связь обеих величин устанавливается именно при помощи показательной кривой. Понятие логарифма теснейшим образом связано с таким изменением величины, как изменение расстояния шарика g в движении, которое рассматривает Непер.

Вместо вышеуказанного соотношения

$$y_1 \cdot y_2 = y_3 \text{ влечет за собой } t_1 + t_2 = t_3;$$

теперь запишем:

$$y_1 \cdot y_2 = y_3 \text{ влечет за собой } x_1 + x_2 = x_3,$$

или же:

$$\text{при } y_1 \cdot y_2 = y_3$$
$$\log y_3 = \log y_1 + \log y_2.$$

При изучении свойств логарифма возникают два основных вопроса:

1) Как по данному логарифму неизвестного числа найти это число, иначе говоря, для любой абсциссы $OP=x$ найти соответствующую ординату $PN=y$?

2) Как найти логарифм заданного числа, т. е. как для любой ординаты $PN=y$ найти соответствующую абсциссу $OP=x$?

Мы уже знаем из таблицы Бюрги, что для применения всей теории важнее уметь решить второй вопрос. Поэтому мы лишь вскользь коснемся первого вопроса, [1] чтобы затем уже подробнее остановиться на втором.

Впервые решение вопроса о переходе $x \to y$ было дано в сочинении „Введение в анализ бесконечно малых“ великого математика Эйлера. Это сочинение вышло в 1748 г. Эйлер дал формулу, посредством которой можно, по заданному значению x, найти y с любой желаемой степенью точности, а именно — формулу:

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots$$

Если, например, $x = 0{,}56$, то для величины y имеем:

$$y = 1 + \frac{0{,}56}{1} + \frac{0{,}56^2}{1\cdot 2} + \frac{0{,}56^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{0{,}56^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

[1] Дадим некоторые сведения о нем без доказательства.

Доказывается, что хотя число слагаемых здесь неограниченное, сумма любого числа слагаемых остается конечной.

Если, согласно этой формуле, составить таблицу для последовательных значений x, например через 0,001, то получим таблицу такого же типа, как таблица Бюрги. Но при этом отпадает та неопределенность, которая была характерна для таблиц типа Бюрги. Там один вычислитель брал $\left(1+\frac{1}{100}\right)^n$; другой $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^n$; третий $\left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^n$, и т. д. Теперь получена предельная кривая. Число ступенек лестницы неограниченное, иными словами — нет больше отдельных ступенек, а есть лишь сплошная плавная линия, к которой все лестницы величин вида $\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$ будут более или менее близки.

Формула Эйлера является конечным результатом всех попыток построить лестницу геометрической прогрессии и содержит в себе, так сказать, источник неограниченной точности.

Отметим еще то значение ординаты $PN=y$, которое получается (черт. 64), если длина абсциссы $OP=x$ равна 1. Тогда по формуле Эйлера имеем:

$$y=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}+\ldots$$

Это число принято обозначать буквой e, начальной буквой фамилии Эйлера (Euler); оно равно:

$$\boxed{e=2{,}7182818284590\ldots}$$

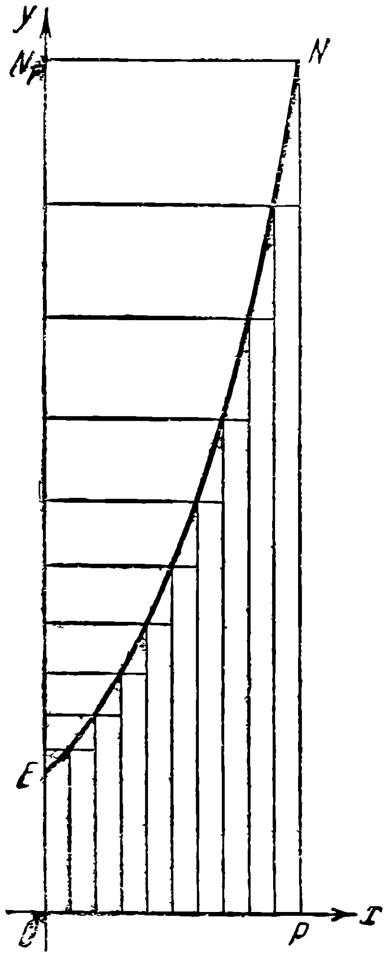
Оно играет важнейшую роль во всей математике. Его называют также неперовым числом, в честь Непера. Интересно отметить, что в той небольшой таблице типа Бюрги, которую мы сами построили, оно уже имеется, правда со значительной погрешностью; а именно: мы имели $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\approx$ $\approx 2{,}705$. Там это число означало высоту 100-й ступеньки PN, при условии, что высота ступеньки RM равна 1 м.

Здесь число e означает высоту, на которую поднимается шарик g, если от начального момента движения прошел ровно 1 час, или же ординату той точки показательной кривой, абсцисса которой равна 1.

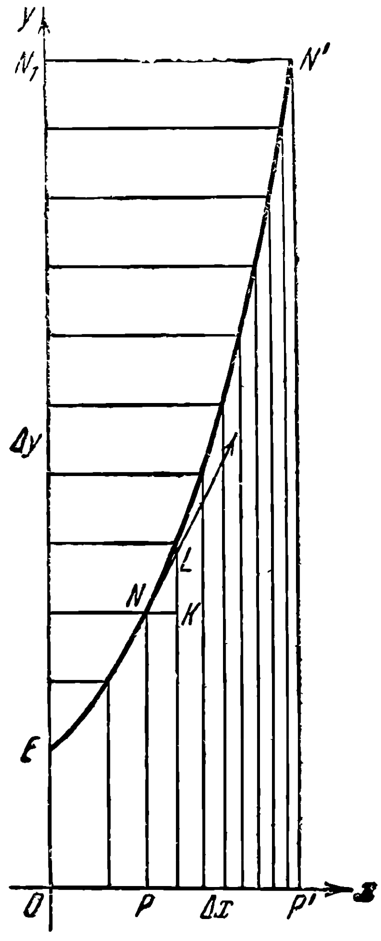
3. Логарифм как площадь

Теперь вернемся ко второму вопросу, т. е. к вопросу о переходе от чисел к их логарифмам, о переходе $y\rightarrow x$.

Напомним основное свойство показательной кривой (черт. 64). Подъем кривой в любой ее точке N характеризуется наклоном стрелки, касательной к кривой в этой точке, по отношению к горизонтальной оси; наклон стрелки можно определить, рассматривая отношение катета KL_1 к катету NK. Как мы видели, это отношение $\frac{\text{катет } KL_1}{\text{катет } NK}$ или $\frac{dy}{dx}$ численно равно ординате $PN = y$, причем такое равенство имеет место для любой точки на показательной кривой EL.



Черт. 66a.

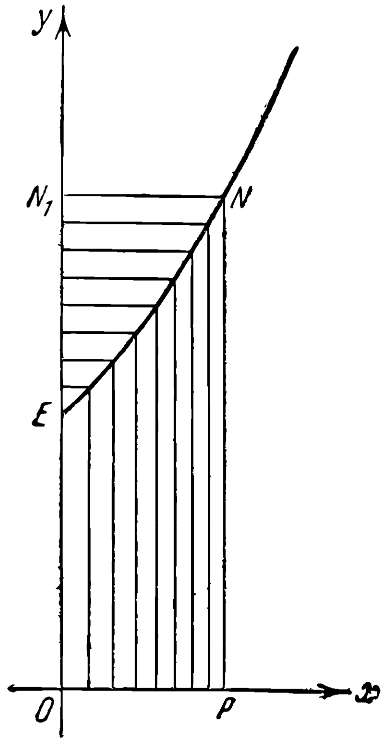


Черт. 66b.

Чтобы показать ход решения вопроса, допустим сначала, что взята ордината определенной длины, например $PN = y$ (черт. 66a). Если абсциссу взятой точки показательной кривой, т. е. отрезок OP, разделить на n равных долей, то соответствующие приращения ординаты Δy не будут равны между собой, — они будут возрастать по мере увеличения x. Если проектировать ординаты на Oy, то отрезок EN_1 на оси Oy будет состоять из 10 неравных долей, увеличивающихся по мере продвижения вверх. Эти отрезки можно приближенно заменить вертикальными катетами малых треугольников, построенных с помощью касательных (черт. 64b).

Обратно, если разделить отрезок EN_1 на оси Oy на n равных долей и провести из точек деления горизонтали до встречи с показательной кривой, то соответствующие приращения абсциссы Δx будут неравными, а именно — будут уменьшаться по мере продвижения вправо (черт. 66b). Найдем длину отдельных приращений Δx или же отрезков NK в этом случае (см. также стр. 142).

Так как отношение катетов $\frac{KL}{NK}$ для треугольников NKL нам известно: $\frac{KL}{NK}$ численно равно $PN=y$, то можно, обратно, из этих равенств определить длину отрезков NK, именно:



Черт. 67.

$$NK=\frac{KL}{y}\text{ , т. е. } N_1K_1=\frac{K_1L_1}{y_0}\text{ ; } N_2K_2=$$
$$=\frac{K_2L_2}{y_1}\text{ ; } N_3K_3=\frac{K_3L_3}{y_2}\text{ ;...}$$

Возьмем отрезок EN_1, равным, например, 0,8 м, — в дальнейших рассуждениях важно лишь, что этот отрезок EN_1 меньше 1. Разделим этот отрезок на $n=80$ равных долей; тогда длина $OP=x$ будет приближенно[1] равна сумме 80 отрезков, т. е.

$$\frac{0{,}01}{1}\text{; }\frac{0{,}01}{1{,}01}\text{; }\frac{0{,}01}{1{,}02}\text{; }\frac{0{,}01}{1{,}03}\text{; }\ldots\text{;}$$
$$\frac{0{,}01}{1{,}77}\text{; }\frac{0{,}01}{1{,}78}\text{; }\frac{0{,}01}{1{,}79}\text{.}$$

(На чертеже 67 взято $n=8$.)

Если взять число точек деления отрезка EN_1 равным $n=800$, то длина абсциссы $OP=x$ выразится приближенно суммой:

$$\frac{0{,}001}{1}+\frac{0{,}001}{1{,}001}+\frac{0{,}001}{1{,}002}+\frac{0{,}001}{1{,}003}+\ldots+\frac{0{,}001}{1{,}797}+\frac{0{,}001}{1{,}798}+\frac{0{,}001}{1{,}799}\text{.}$$

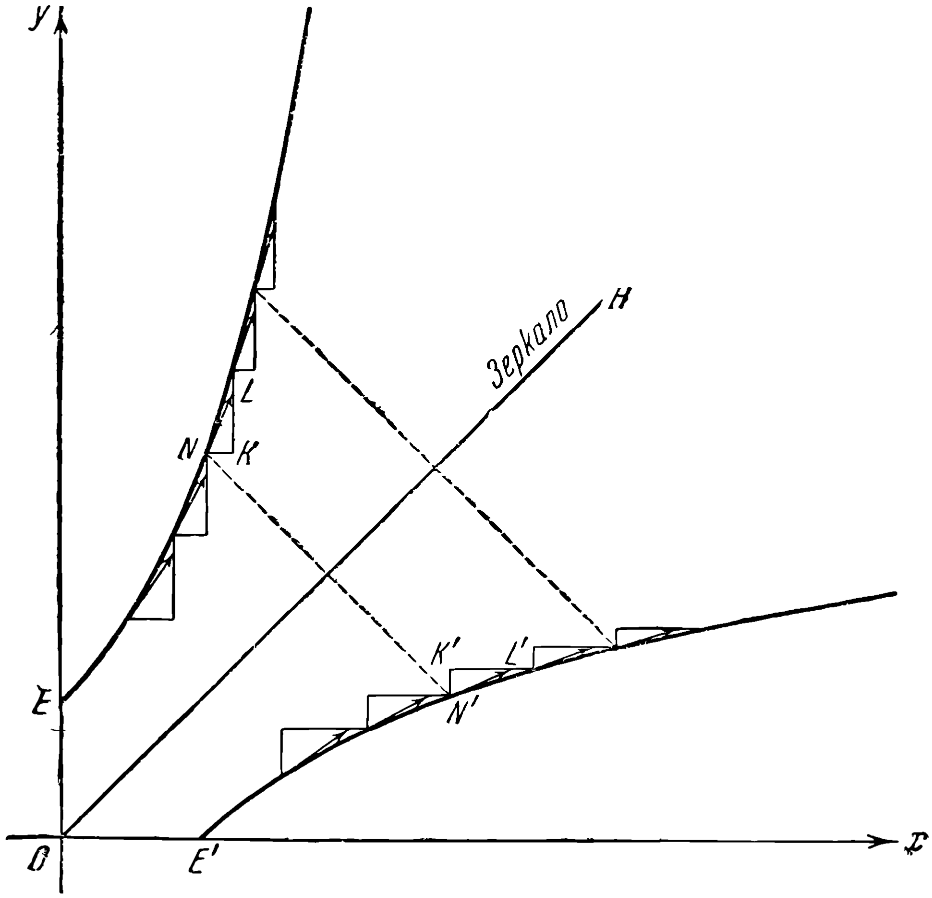
Чем больше число n, тем касательные NL в своей совокупности ближе подходят к показательной кривой EN, и сумма отрезков NK дает результат более близкий к искомой длине $OP=x$.

Для дальнейшего будет полезным преобразовать наш чертеж следующим образом. Проведем биссектрису OH прямого угла, образуемого осями координат. Допустим, что прямая OH представляет собою зеркало, перпендикулярное к плоскости чертежа. Тогда (черт. 68) кривая линия EN отразится в зеркале, и отражение представит собой ту же,

[1] Так как катеты KL не равны в точности приращениям $\Delta y=0{,}01$.

но иначе расположенную линию, показанную на чертеже. Эту линию называют логарифмической кривой. На черт. 69 она представлена отдельно.

Вертикальные отрезки после отражения станут горизонтальными отрезками, и наоборот. Если на новом чертеже горизонтальную ось опять обозначить через Ox, то переменные x, y (абсцисса и ордината) поменяются местами. Вместо $\log y = x$ для новой кривой будет $\log x = y$.



Черт. 68.

При переходе к точке N' изменится на обратное отношение катетов; ординату точки N надо будет заменить абсциссой точки N'.

Раньше выполнялись приближенные равенства

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} \approx 1; \quad \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \approx 1{,}01; \quad \frac{\Delta y_2}{\Delta x} \approx 1{,}02; \quad \frac{\Delta y_3}{\Delta x} \approx 1{,}03; \ \ldots \ ;$$

теперь, после отражения в зеркале, эти равенства превратятся в такие, также приближенные:

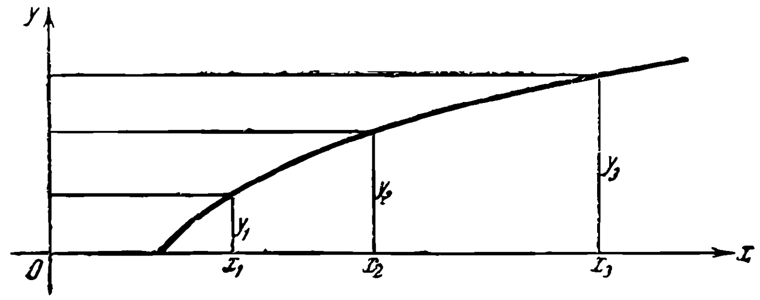
$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} \approx 1; \quad \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \approx \frac{1}{1{,}01}; \quad \frac{\Delta y_2}{\Delta x} \approx \frac{1}{1{,}02}; \quad \frac{\Delta y_3}{\Delta x} \approx \frac{1}{1{,}03}; \ \ldots$$

Из этих равенств следует, что последовательные приращения ординат будут приближенно равны:

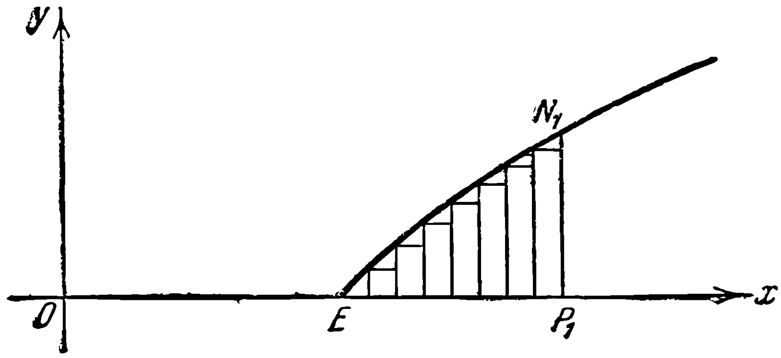
$$\Delta y_0 \approx 1 \cdot \Delta x; \quad \Delta y_1 \approx \frac{\Delta x}{1{,}01}; \quad \Delta y_2 \approx \frac{\Delta x}{1{,}02}; \quad \Delta y_3 \approx \frac{\Delta x}{1{,}03}; \ \ldots$$

Наша задача заключается в том, чтобы найти логарифм, т. е. по длине абсциссы x найти длину ординаты y логарифмической кривой (черт. 76).

Мы достигаем этой цели тем, что суммируем n величин ($n=8$, 80, 800, 8000 и т. д.) таких, как $\frac{\Delta x}{x_i}$. Чем больше число долей, тем точнее будет результат. Точный результат получится, если представить, что число долей n растет неограниченно. Тогда каждое приращение Δx, в нашем примере $\Delta x=\frac{0,8}{n}$, стремится к нулю; также будет стремиться к нулю величина $\Delta y \approx \frac{\Delta x}{x_i}$. С суммированием такого рода мы уже встречались в конце третьей главы. Мелкие неточные доли искомой величины, т. е. отрезки $\frac{\Delta x}{x_i}$ называют дифференциалами, а предельную сумму их $\sum\frac{\Delta x}{x_i}$, при неограниченном возрастании числа n долей, называют интегралом и обозначают $\int\limits_0^{1,8}\frac{dx}{x}$.



Черт. 69.



Черт. 70.

Как же найти эту предельную сумму, т. е. длину ординаты P_1N_1? Для разрешения этого основного вопроса дадим еще одно, на этот раз уже последнее, определение логарифма.

Начертим график гиперболы, который неоднократно уже встречали (черт. 71). Как известно, связь координат любой точки гиперболы определяется равенством: $y=\frac{1}{x}$. На горизонтальной оси Ox возьмем тот же интервал [1 ... 1,8], который сейчас рассматривали.

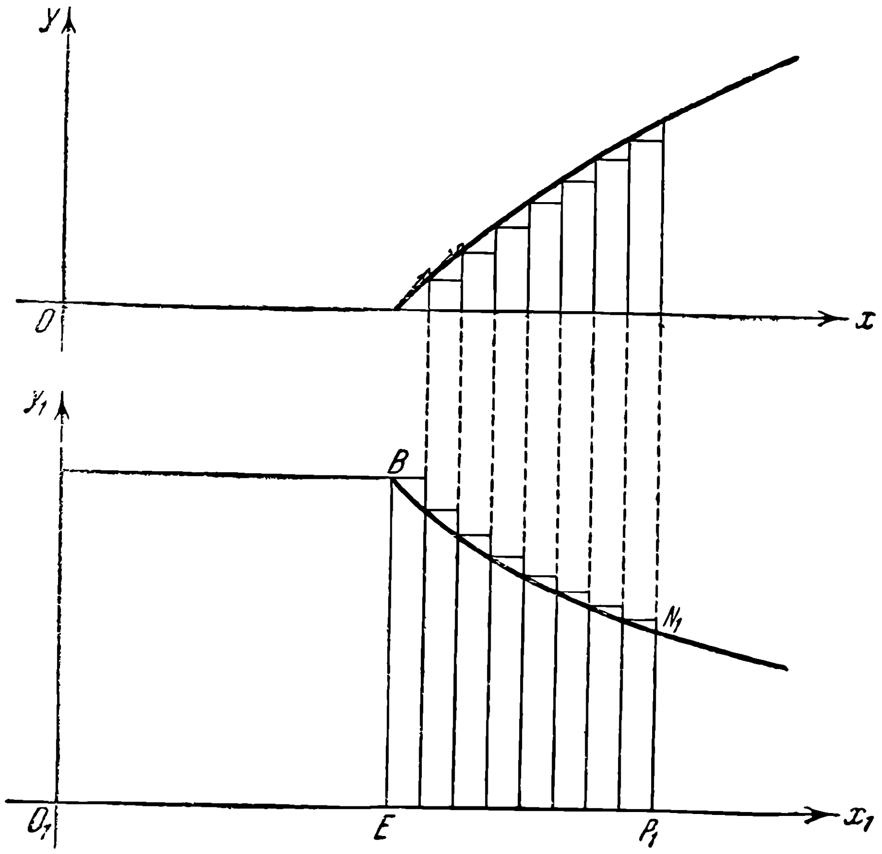
Допустим, что этот интервал разделен на $n=80$ равных долей (на чертеже $n=8$), так что длина каждого Δx равна 0,01 м.

Построим ступенчатую фигуру из выступающих прямоугольников, какую мы строили еще в первой главе (стр. 13).

Площади полученных прямоугольных полосок будут в квадратных единицах выражаться следующими числами:

$$1 \cdot 0{,}01; \quad \frac{1}{1{,}01} \cdot 0{,}01; \quad \frac{1}{1{,}02} \cdot 0{,}01; \quad \frac{1}{1{,}03} \cdot 0{,}01; \quad \ldots; \quad \frac{1}{1{,}79} \cdot 0{,}01.$$

Если сравнить эти числа, выражающие площади в квадратных единицах, с числами, выражавшими длины отрезков верхнего чертежа в линейных единицах, то обнаружится полное совпадение. Поэтому и приближенная длина всей ординаты логарифмической кривой $y = \log x$ равна приближенной величине криволинейной площади EP_1N_1B настоящего чертежа. При безграничном увеличении n при-



Черт. 71.

ближенная длина стремится к точной длине и приближенная площадь — к точной площади. Так как обе величины оказались равными при любом значении n, то должны быть равны и их пределы.

Итак, длина ординаты логарифмической кривой $y = \log x$ (т. е. значение логарифма) в точности равна площади фигуры EP_1N_1B; только первая измеряется в линейных единицах, вторая — в квадратных. Отсюда вытекает возможность определять логарифм так:

> Четвертое определение. Логарифмом числа z называется величина (в кв. ед.) площади, ограниченной гиперболой и расположенной на интервале $[1 \ldots z]$.

Это наглядное определение логарифма было предложено крупным немецким ученым и педагогом Феликсом Клейном (умер в 1925 г.).

Далее, на чертеже 69 мы видим, что для логарифмической кривой

$$\text{если } x_1 \cdot x_2 = x_3, \text{ то одновременно } y_1 + y_2 = y_3.$$

Так как мы показали, что величину ординаты $y = \log z$ можно численно заменить величиной площади гиперболы на интервале $[1 \ldots z]$, то последнее соотношение можно выразить так:

$$\text{если } z_1 \cdot z_2 = z_3, \text{ то пл. } [1 \ldots z_1] + \text{пл. } [1 \ldots z_2] = \text{пл. } [1 \ldots z_3].$$

Это значит, что при перемножении абсцисс z точек гиперболы соответствующие площади складываются. Это свойство было нами доказано еще в начале книги и формулировано в виде теоремы 1 на стр. 16. Теперь мы снова пришли к этой теореме исходя из общей теории, из связи двух прогрессий, из свойств показательной кривой. Если раньше геометрическая модель в виде криволинейной площади казалась только случайно связанной с отношением двух чисел, то теперь вскрыта закономерность этой связи. Таким образом, все то, что раньше в книге говорилось по поводу криволинейных площадей, относится к логарифмам.

В первой главе, на стр. 19, была показана связь кратной пропорции с разностной; в конце первой главы — на стр. 51 задача о 5 точках была решена при помощи модели отношений; в четвертой главе, на стр. 111, была показана связь геометрической прогрессии с арифметической; там же, на стр. 112, была решена кустарным способом (подсчетом клеток) задача извлечения корня 5-й степени. Все это относится к логарифмам и записывается при помощи знака log. Читатель при желании сможет сам переписать соответствующие формулы, пользуясь новыми терминами; например, теорему 1 можно записать так:

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

4. Формула Меркатора

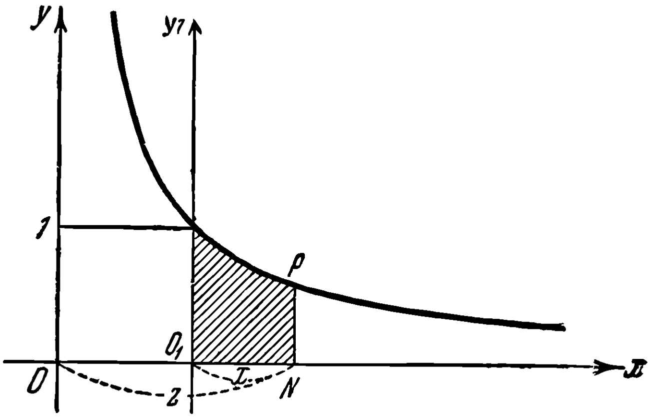
Все рассуждения этой главы были приведены, конечно, не с той целью, чтобы дать то или иное определение логарифма. Для того чтобы из изложенного извлечь практическую пользу для вычислений, надо уметь найти самое значение логарифма. Логарифм есть площадь (4-е определение). Но как вычислить быстро эту площадь? Как найти без затруднений значение логарифма? Задача эта не легкая. Исторически задача определения площади, ограниченной гиперболой, была одной из тех, по поводу которых шла оживленная переписка между учеными XVII в. Она была разрешена некоторыми учеными весьма сложным способом. Но неожиданно в 1668 г. Николай Меркатор предложил весьма простое и остроумное решение. Всем предыдущим изложением мы вполне подготовлены к тому, чтобы понять решение, данное Меркатором. Оно заключается в следующем:

Во-первых, гиперболу рассматривают, как предельную линию для суммарных кривых $y_{(n)}$, составленных из парабол. Таково именно содержание теоремы 3, приведенной в конце предыдущей главы.

Во-вторых, при графическом „сложении" парабол происходит одновременно и сложение площадей, ограниченных этими параболами. Этого свойства мы здесь не будем доказывать, а сошлемся на черт. 61. Например, при сложении $y_{(3)}+y_4=y_{(4)}$, очевидно, появляется новая добавочная полоска на (чертеже заштрихована).

В-третьих, для площадей, ограниченных каждой из парабол $y=x^k$, мы имеем готовую формулу, которая дана в виде теоремы 2 (стр. 103).

Этих трех положений достаточно, чтобы вывести замечательную формулу Меркатора для нахождения логарифма.



Черт. 72.

Предварительно ограничим задачу и рассмотрим вопрос о нахождении логарифма для чисел z, лежащих между 1 и 2. Обозначим $z=1+x$. На черт. 72 показан интервал $[1\ldots1{,}8]$, и искомый логарифм мы толкуем как неизвестную нам величину криволинейной трапеции, расположенную на этом интервале.

Согласно теореме 3 можно подобрать такую суммарную кривую $y_{(n)}=1-x+x^2-x^3+\ldots\pm x^n$, которая на всем протяжении интервала весьма мало отклонялась бы от линии гиперболы $y=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+x}\cdot$ Наибольшее отклонение, как уже раньше упоминалось, приходится на правый конец интервала. Если это наибольшее отклонение равно, например, 0,01 ед., а желательно, чтобы отклонение не превышало 0,001 ед., то надо только взять бо́льшее число парабол. Таким образом, можно сделать отклонение сколь угодно малым (на всем интервале), а потому разность между искомой площадью гиперболы и площадью суммарной кривой $y_{(n)}$ может быть сделана сколь угодно малой, т. е. при увеличении числа n эта разность стремится к нулю.

Перейдем теперь к самому вычислению площади. Площадь, ограниченную гиперболой, можно приближенно заменить площадью, ограниченной суммарной кривой $y_{(n)}$.

Но площадь, ограниченная кривой $y_{(3)}$, есть алгебраическая сумма величин (черт. 59, 60):

$+$ пл., ограниченная кривой ($y=1$)
$-$ пл., ограниченная кривой ($y=x$)
$+$ пл., ограниченная кривой ($y=x^2$)
$-$ пл., ограниченная кривой ($y=x^3$).

Далее, площадь, ограниченная суммарной кривой $y_{(4)}$, есть алгебраическая сумма величин:

$+$ пл., ограниченная кривой ($y=1$)
$-$ пл., ограниченная кривой ($y=x$)
$+$ пл., ограниченная кривой ($y=x^2$)
$-$ пл., ограниченная кривой ($y=x^3$)
$+$ пл., ограниченная кривой ($y=x^4$)

Но каждую из этих плóщадей мы умеем определить на основании теоремы 2: площадь, ограниченная параболой $y=x^k$ на интервале $[0\dots x]$, равна $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ кв. ед. В нашем примере $x=0{,}8$. Заметим еще, что нулевая парабола ограничивает прямоугольник с высотой, равной 1; парабола 1-й степени ограничивает треугольник, с площадью, равной $\frac{x\cdot x}{2}=\frac{x^2}{2}$. Поэтому в нашем примере, взяв суммарную кривую $y_{(4)}$, получим приближенное значение логарифма, равное

$$0{,}8-\frac{0{,}8^2}{2}+\frac{0{,}8^3}{3}-\frac{0{,}8^4}{4}.$$

Если желательна бóльшая точность, то можно заменить гиперболу суммарной кривой $y_{(10)}$; тогда получим:

$$\frac{0{,}8}{1}-\frac{0{,}8^2}{2}+\frac{0{,}8^3}{3}-\frac{0{,}8^4}{4}+\frac{0{,}8^5}{5}-\frac{0{,}8^6}{6}+\frac{0{,}8^7}{7}-\frac{0{,}8^8}{8}+\frac{0{,}8^9}{9}-\frac{0{,}8^{10}}{10},$$

и так далее.

Эта величина, согласно определению, дает приближенное значение логарифма $\log\,(1+x)$; формула годится для любого числа $x<1$, т. е. для значений $z<2$, а потому ее можно написать в общей форме:

$$\log\,(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\pm\frac{x^n}{n}.$$

Мы видели выше, что при неограниченном увеличении числа n взятых парабол величина площади, ограниченной суммарной кривой $y_{(n)}$, как угодно близко подходит к искомой площади, ограниченной гиперболой. В результате получается математически точная формула:

$$\log z = \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{n+1} \pm \ldots$$

Здесь в правой части число слагаемых не ограничено. Это и есть формула Меркатора, дающая возможность найти значение логарифма приближенно, с любой степенью точности. Бесконечный ряд, стоящий в правой части формулы, исторически был первым бесконечным рядом (если не считать геометрической убывающей прогрессии), который предстал перед взором математиков. Согласно этой формуле, например:

$$\log 1{,}3 = \log(1+0{,}3) = \frac{0{,}3}{1} - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} - \frac{0{,}3^4}{4} + \ldots$$

$$\log 1{,}32 = \frac{0{,}32}{1} - \frac{0{,}32^2}{2} + \frac{0{,}32^3}{3} - \frac{0{,}32^4}{4} + \ldots$$

Чем точнее требуемый результат, тем бо́льшее число слагаемых надо взять в правой части равенства.

До сих пор мы считали $x<1$; $z<2$. Остается еще ответить на вопрос: как найти логарифм любого числа z? Как вообще составляются таблицы логарифмов?

Пусть требуется найти $\log 2$. Представим число 2 как произведение чисел $1{,}6 \cdot 1{,}25$. Основное свойство логарифма выражается равенством: $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$. Поэтому в данном случае имеем: $\log 2 = \log(1{,}6 \cdot 1{,}25) = \log 1{,}6 + \log 1{,}25$. И первое и второе слагаемое последней суммы можно найти по формуле Меркатора; сложив результаты вычислений, найдем и $\log 2$. Приблизительно $\log 2 = 0{,}6931$[1].

Далее, можно таким же образом перейти от числа 2 к числу 3:

$$\log 3 = \log(2 \cdot 1{,}5) = \log 2 + \log 1{,}5 = \log 2 + \log(1+0{,}5).$$

Затем можно перейти от числа 3 к числу 4:

$$\log 4 = \log\left(3 \cdot \frac{4}{3}\right) = \log 3 + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) \text{ и так далее.}$$

Таким образом можно составить таблицу логарифмов.

В зависимости от требуемой степени точности пользуются таблицами с 4 десятичными знаками, с 5 десятичными знаками, с 7 десятичными знаками и т. д. Ниже приводим таблицу логарифмов последовательных целых чисел до 100 с 4 десятичными знаками (последняя цифра округлена).

---

[1] По поводу $\log 2$ интересно отметить следующее. В формуле Меркатора естественно принять, что x должно быть <1, так как при выводе мы исхо-

Десятки	Единицы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972	2,3026
1	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444	2,9957
2	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673	3,4012
3	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636	3,6889
4	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918	3,9120
5	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775	4,0943
6	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341	4,2485
7	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694	4,3820
8	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886	4,4998
9	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951	4,6052

Имея под руками такую таблицу, можно выполнять те же вычисления, которые мы производили в начале этой главы при помощи таблицы типа Бюрги. Но теперь отпала та неопределенность в степени точности и та логическая незаконченность, которые характеризовали прежние вычисления. Правила вычислений остаются прежними. Как и раньше, происходит понижение порядка действий на одну ступень.

О том, как производятся самые вычисления, можно найти указания в любом учебнике алгебры или в таблицах логарифмов.

Здесь же мы хотим еще сказать вкратце об одном весьма удобном усовершенствовании такого рода вычислений. Инструментом для них служит счетная (или логарифмическая) линейка.

5. Принцип устройства счетной линейки

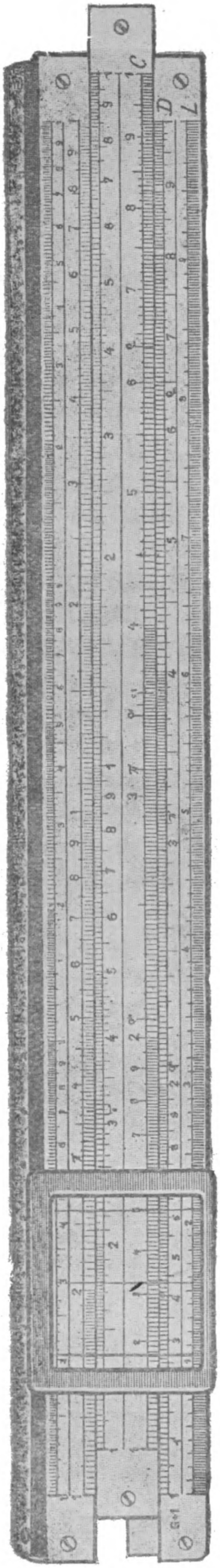
Счетная линейка есть инструмент, позволяющий без таблиц логарифмов делать те же вычисления, которые делаются при помощи таблиц. При этом вычисления производятся гораздо быстрее, но они менее точны. Достаточно взглянуть на счетную линейку (черт. 73), чтобы видеть, что деления

дили из убывающей геометрической прогрессии $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots$; между тем эта прогрессия при $x = 1$ принимает неопределенную форму $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

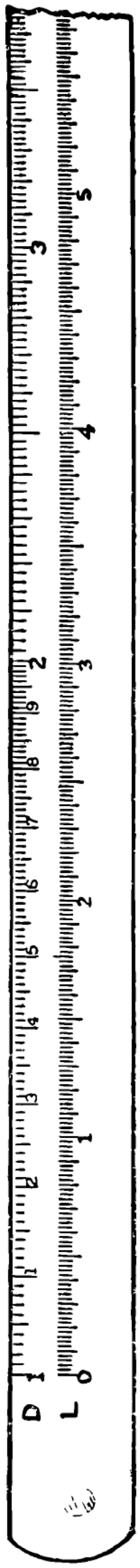
Однако позднее оказалось, что формула Меркатора остается в силе и при значении $x = 1$. Получается замечательная формула:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

Точное доказательство правильности этой формулы дал в 1826 г. норвежский математик Абель.

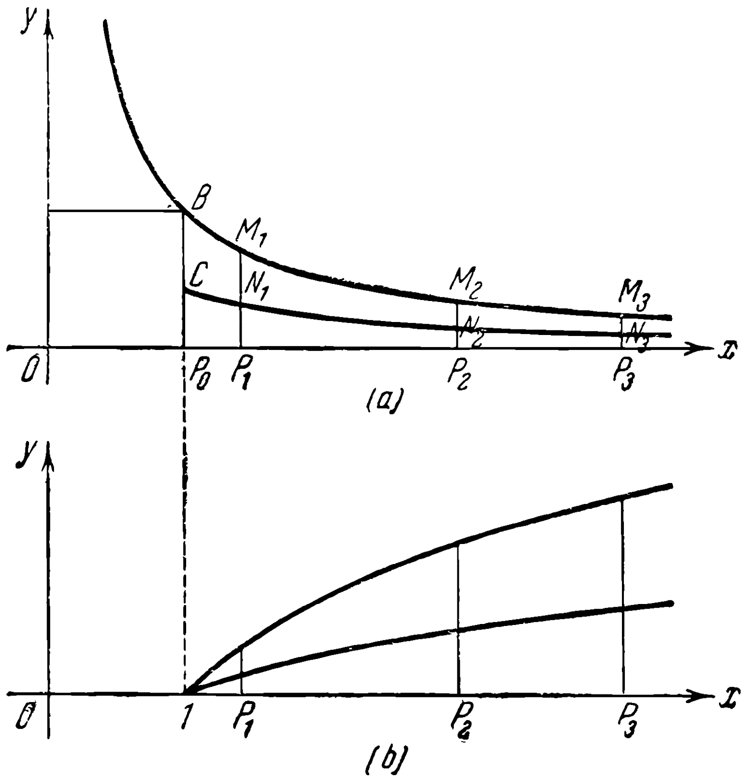


Черт. 73a.



Черт. 73b.

на ней необычные: ряд чисел 1,1; 1,2; 1,3;...; 2; 2,1; 2,2;... сгущается по мере передвижения вправо. Как расставлены эти деления? Именно эта необычная расстановка делений и скрывает в себе таблицу логарифмов, а сама линейка является как бы осязаемым результатом всей изложенной теории. Прежде чем дать объяснение устройства линейки, нам придется сделать небольшое отступление.



Черт. 74.

Та таблица логарифмов, которая приведена на стр. 156, является основной. Но допустим, что кто-нибудь вздумает умножить все значения логарифмов на некоторое постоянное число, например на $k=2$, или на $k=3{,}5$, или на $k=0{,}016$. Можно ли будет пользоваться новой таблицей? Оказывается, ею можно будет пользоваться с таким же успехом, как и основной. Докажем это.

Пусть в основной таблице числам A, B, $C, \ldots$ P, Q соответствуют значения логарифмов, равные a, b, $c, \ldots, p$, q. Все применения логарифмов основаны на таком свойстве:

$$\text{если } A\cdot B=Q, \text{ то } \log A+\log B=\log Q$$
$$\text{или } a+b=q.$$

В видоизмененной таблице числам A, B, $C, \ldots, P$, Q будут соответствовать значения логарифмов ak, bk, $ck, \ldots, pk$, qk. Так как числа $a, b, \ldots, q$ удовлетворяют равенству $a+b=q$, то по новой таблице будем иметь:

$$\log A+\log B=ak+bk=(a+b)k=qk;$$

в новой же таблице qk есть $\log Q$. Поэтому и в новой таблице:

$$\log A+\log B=\log Q.$$

Можно подтвердить сказанное и чертежом, на котором возможность изменить все значения логарифмов в одинаковом отношении становится очевидной (черт. 74). Если все ординаты точек M уменьшить в n раз, т. е. вместо гиперболы MB взять линию CN, расположенную соответственно в n раз ниже, то и любая площадь P_0PMB окажется уменьшенной в n раз, если ее заменить площадью P_0PNC.

Если для основной гиперболы, при условии $x_1 \cdot x_2 = x_3$, имеет место равенство:

$$\text{пл. } P_0P_1M_1B + \text{пл. } P_0P_2M_2B = \text{пл. } P_0P_3M_3B,$$

то и для новой линии CN будет соблюдаться равенство:

$$\text{пл. } P_0P_1N_1C + \text{пл. } P_0P_2N_2C = \text{пл. } P_0P_3N_3C.$$

Очевидно, можно и увеличить все ординаты, и взять кривую линию, идущую выше, чем основная линия BM. Такая возможность распоряжаться всей таблицей, т. е. умножать все логарифмы на постоянный коэффициент, оправдывает тот факт, что на ряду с изложенной системой логарифмов — неперовой или „натуральной“ — получила большое распространение другая система логарифмов — десятичная. Исторически она появилась позднее натуральной, и интересно отметить, что ее первый составитель, англичанин Бригг, при ее составлении советовался с изобретателем натуральных логарифмов — Непером. Новая десятичная система получается, если все значения логарифмов основной системы умножить на постоянный коэффициент, приблизительно равный 0,4343.

Откуда берется этот множитель? Дело в том, что все наши вычисления обычно связаны с числом 10 (этот факт объясняется тем, что в давние времена люди считали на пальцах): число 10 лежит в основании общеупотребительной системы счисления. Поэтому представляется удобным пользоваться таблицами, в которых числу 10 соответствует логарифм, равный 1. Если же мы обратимся к нашей таблице, данной на стр. 156, то увидим, что натуральный логарифм числа 10 равен 2,3026. Пользуясь возможностью уменьшить все значения логарифмов в одинаковом отношении, разделим их на число 2,3026, или, иначе говоря, умножим все значения логарифмов на коэффициент $k = \frac{1}{2{,}3026} = 0{,}4343$. Тогда и получим систему десятичных логарифмов. Переход от натуральных логарифмов к десятичным показан на черт. 74. Чтобы не возникло недоразумений, натуральные логарифмы обозначают знаками $\log A$, $\log \text{nat } A$, или сокращенно, $\ln A$; а десятичные логарифмы — знаком $\log_{10} A$, иногда — $\lg A$.

Укажем вкратце на преимущество новой системы. Для нее: $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = \lg(10 \cdot 10) = \lg 10 + \lg 10 = 1 + 1 = 2$; $\lg 1000 = \lg(10 \cdot 10 \cdot 10) = \lg 10 + \lg 10 + \lg 10 = 3$.

Далее, в десятичной системе логарифмов, если мы узнали, например, логарифм числа 2,36 и оказалось, что $\lg 2{,}36 = 0{,}3729$, то имеем:

$$\lg 23{,}6 = \lg (2{,}36 \cdot 10\ ) = \lg 2{,}36 + \lg 10\ = \lg 2{,}36 + 1 = 1{,}3729;$$
$$\lg 23{,}6 = \lg (2{,}36 \cdot 100) = \lg 2{,}36 + \lg 100 = \lg 2{,}36 + 2 = 2{,}3729.$$

Такого удобства в технике вычислений мы не имеем, если пользоваться натуральными логарифмами. Там роль числа 10 играет число $e = 2{,}71828\ldots$, так как $\log e = 1$, как следует из черт. 64. Это число, конечно, менее удобно для вычислений, но по существу именно оно играет роль единицы в теории логарифмов.

После сделанного отступления вернемся к объяснению устройства счетной линейки. С этой целью построим черт. 75. Это часть черт. 74*b*.

На оси Ox размечены деления:

$$1;\ 1{,}2;\ 1{,}4;\ 1{,}6;\ 1{,}8;\ 2;\ 2{,}2;\ 2{,}4;\ 2{,}6;\ 2{,}8.$$

Для всех этих чисел мы умеем найти соответствующие им (натуральные) логарифмы. Это можно сделать, пользуясь таблицей на стр. 156. А именно:

$$\log 1{,}1 = \log \frac{11}{10} = \log 11 - \log 10 = 2{,}3979 - 2{,}3026 = 0{,}0953;$$
$$\log 1{,}2 = \log 12 - \log 10 = 2{,}4849 - 2{,}3026 = 0{,}1823; \text{ и т. д.}$$

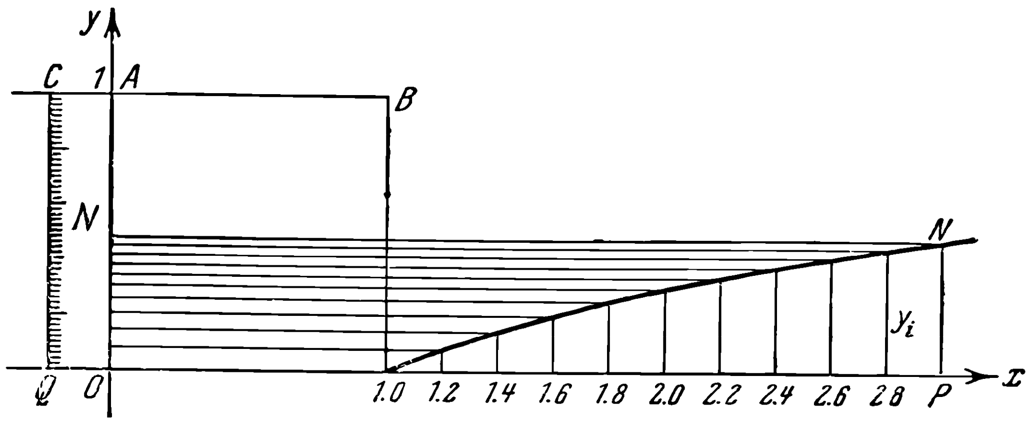
Умножив эти значения логарифмов на коэффициент 0,4343, получим значения десятичных логарифмов. Эти значения собраны в следующей таблице:

Число	Десятичн. логарифмы	Число	Десятичн. логарифмы	Число	Десятичн. логарифмы	Число	Десятичн. логарифмы
1,1	0,0414	1,9	0,2788	3,4	0,5315	6,5	0,8129
1,2	0,0792	2	0,3010	3,6	0,5563	7	0,8451
1,3	0,1139	2,2	0,3424	3,8	0,5798	7,5	0,8751
1,4	0,1461	2,4	0,3802	4	0,6021	8	0,9031
1,5	0,1761	2,6	0,4150	4,5	0,6532	8,5	0,9294
1,6	0,2041	2,8	0,4472	5	0,6990	9	0,9542
1,7	0,2304	3	0,4771	5,5	0,7404	9,5	0,9777
1,8	0,2553	3,2	0,5051	6	0,7782	10	1

В верхней части чертежа 74 эти числа означают величину (в кв. ед.) площади, так что если $\lg 6{,}5 = 0{,}8129$, то площадь, расположенная на интервале $[1\ldots6{,}5]$, равна 0,8129 кв. ед.

В нижней части чертежа эти же числа дают длину ординаты точки на логарифмической кривой, т. е. если $x = 6{,}5$, то соответствующая ордината $y = \lg x = 0{,}8129$. Будем проектировать отмеченные точки логарифмической кривой на вертикальную ось Oy. Тогда получим на этой оси сеть неравноотстоящих точек, как показано на черт. 75; на этом чертеже рядом с отрезком OA поставлен другой вертикальный отрезок, на котором нанесены обычные деления.

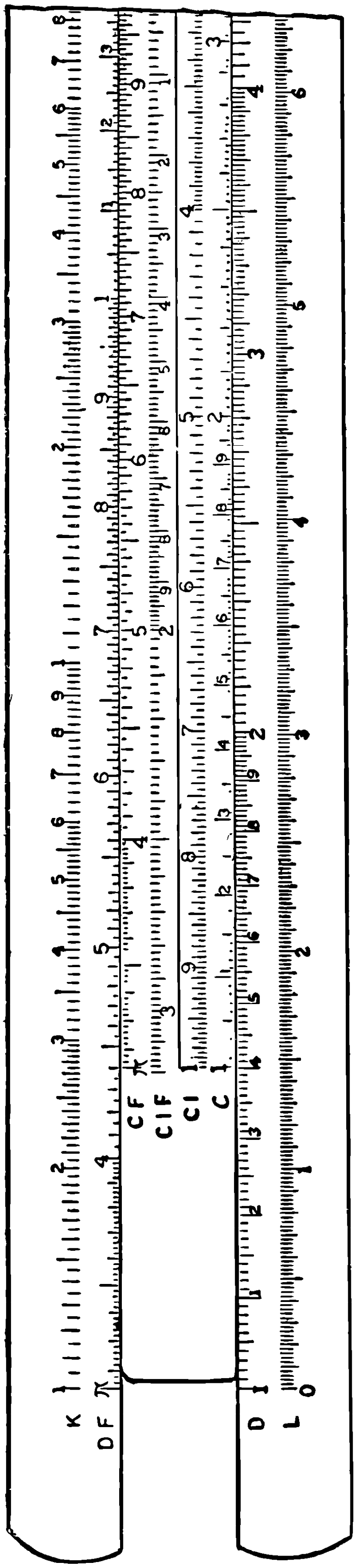
Остроумие изобретателя счетной линейки заключается в том, что он обходится без всего этого чертежа: он оставляет одну только вертикальную ось OA, но ставит на ней не обычные числа, а именно: против точки N ставится не число, измеряющее длину ординаты $PN = y$, а длину соответ-



Черт. 75.

ствующей абсциссы $OP = x$. Таким образом, на отрезке OA откладываются ординаты y, а записываются соответствующие абсциссы x. Например, откладывается длина $ON = y = \lg 1{,}2 = 0{,}079$, а против этой точки помечается число $x = 1{,}2$; откладывается длина $y = \lg 1{,}8 = 0{,}255$, а помечается число $x = 1{,}8$, и так далее. Если оба отрезка OA и QC положить в горизонтальном положении, то получим нижнюю часть счетной линейки. Уже эта часть счетной линейки представляет собой в сжатом виде таблицу логарифмов (приблизительно с тремя десятичными знаками). В самой нижней части имеется обычная линейка с 500 делениями; если каждое мелкое деление мысленно разделить пополам, то будем иметь 1000 равных долей единицы, т. е. длины линейки. Если требуется, например, узнать $\lg 2{,}8$, то надо сосчитать, сколько делений имеется от левого края до точки, помеченной 2,8; в данном случае будет 447 делений, т. е. $\lg 2{,}8 = 0{,}447$; таким же образом найдем: $\lg 2{,}4 = 0{,}380$; $\lg 3{,}6 = 0{,}556$ приблизительно, и так далее.

Но этого мало. Счетная линейка позволяет механизировать процесс умножения и деления. Для этой цели служит средняя часть линейки — „движок“; на нижней строке его имеется точная копия только что рассмотренной шкалы. Поясним, как при помощи этого движка автоматически производится умножение двух чисел.



Черт. 76.

Пусть требуется перемножить два числа, например 1,4 и 3. Отодвигаем движок настолько, чтобы его начальное деление приходилось против пометки 1,4 на неподвижной шкале (черт. 76). На шкале движка отыскиваем пометку 3. Тогда против пометки 3, на неподвижной шкале, найдем число 4,2, которое и есть произведение двух заданных чисел. Чем это объясняется?

Перемещением движка мы произвели сложение двух отрезков. Первый отрезок на неподвижной шкале, от пометки 1 до пометки 1,4, по своей длине фактически равен не 1,4 ед., а $\lg 1{,}4$, т. е. 0,146 единицы (этот факт можно проверить по обычной линейке, расположенной в самом низу прибора). Далее, второй отрезок, взятый нами на движке от пометки 1 до пометки 3, по своей длине фактически равен не 3 ед., а $\lg 3 = 0{,}477$ единицы (длины линейки). Мы произвели сложение обоих отрезков:

$$0{,}146 + 0,\ 477 = 0{,}623.$$

Какую же пометку мы прочитаем, если отойдем от левого края линейки на $\frac{623}{1000}$ ее длины?

Имеем:

$$0{,}146 = \log x_1;\ 0{,}477 = \log x_2;$$
$$0{,}623 = \log x_1 + \log x_2.$$

Но основное свойство логарифмов гласит:

при умножении чисел $x_1 \cdot x_2$ их логарифмы складываются. Значит, и обратно:

при сложении логарифмов соответствующие им числа перемножаются:

$$\lg x_1 + \lg x_2 = \lg (x_1 \cdot x_2).$$

А потому:

$$0{,}623 = \lg x_1 + \lg x_2 = \lg 1{,}4 + \lg 3 = \lg (1{,}4 \cdot 3) = \lg 4{,}2.$$

А это и означает, что после сложения обоих отрезков мы найдем пометку 4,2. Таким образом, сложение отрезков, взятых на обеих шкалах, автоматически сопровождается умножением чисел, помеченных в концах этих отрезков.

Мы не будем останавливаться на других действиях, которые можно производить с помощью счетной линейки, так как нам здесь важно было лишь установить принцип ее устройства.

Если бы читателю было предложено самому построить линейку, то он мог бы справиться с этим заданием. Для этой цели ему пришлось бы составить таблицу логарифмов, такую, как на стр. 156, а это он сумеет сделать, если воспользуется формулой Меркатора:

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Для того же, чтобы узнать, откуда взялась эта формула, ему пришлось прочитать и продумать почти весь материал этой книги. Теперь необычно расположенные деления на счетной линейке уже не будут казаться загадкой. Читатель знает, как рассчитать местоположение этих делений, чтобы шкала могла служить удобным инструментом для вычислений.

Цена 4 руб.

К-421