

Ханс Магнус Энценсбергер

ДУХ ЧИСЛА



Книга под подушку
для всех,
кто боится математики



ПРОДАНО БОЛЕЕ
МИЛЛИОНА
ЭКЗЕМПЛЯРОВ

Ханс Магнус
Энценсбергер

ДУХ ЧИСЛА



*Книга под подушку
для всех, кто боится математики*

Иллюстрации
Ротраут Сюзанн Бернер

Перевод с немецкого
Игорь Калинин



СТРАТА
Санкт-Петербург
2013

УДК 001, 501, 510

ББК 22.1

Э 68

- Э 68 Энценсбергер Ханс Магнус. Дух Числа (Книга под подушку для всех, кто боится математики). — СПб.: ООО «Страта», 2013. — 256 с.

ISBN 978-5-906150-07-3

Ханс Магнус Энценсбергер родился в Германии в 1929 году в небольшом баварском селении Кауфбойрен в семье почтового служащего. Сейчас он живет в Мюнхене. Ханс Энценсбергер — один из самых известных немецких поэтов и писателей. Будучи автором многих серьезных книг и стихов, он в первый раз в 1961 году опубликовал детский стишок «Allerleirauh», ставший очень популярным и известным.

«Дух Числа» (Der Zahlenteufel) является первой книгой Ханса Энценсбергера для детей, опубликованной издательством Hanser в Германии и впоследствии ставшей мировым бестселлером, переведенным на 26 языков.

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельцев.

All rights reserved. No parts of this publication can be reproduced, sold or transmitted by any means without permission of the publisher.

© Carl Hanser Verlag Munchen Wien, 1997

© ООО «Ринвол», 2013

© ООО «Страта», 2013

© Калинин И. С., перевод с немецкого, 2013

ISBN 978-5-906150-07-3

Благодарности

Автор данной книги совсем не математик, и он хочет выразить свою благодарность всем тем, кто помог воспарить его воображению и осуществить задуманную идею в написании этой книги.

В первую очередь он хотел бы поблагодарить своего учителя математики Тео Реннера (студента школы Соммерфельд), который, в отличие от доктора Бокеля, наглядно снова и снова доказывает, что в математике можно легко находить удовольствие и её можно совсем не бояться.

Также автор хочет отметить тех Дьяволов Числа, которые помогли сделать работу особенно интересной и полезной: Джон Х. Конвэй, Филип Дж. Дэвис, Кейт Девлин, Ивар Экланд, Ричард К. Гай, Рубен Херш, Конрад Якобс, Тео Кемперман, Имре Лакатош, Бенуа Мандельброт, Хайнц-Отто Пайтхен и Ян Стюарт.

Питер Море из Института Математики Макса Планка в Бонне был так любезен, что согласился прочесть рукопись и исправить некоторые ошибки.

Само собой разумеется, что никто из вышеупомянутых господ не несёт ответственности за удивительные и фантастические сны Роберта.

Мюнхен, осень 1996 года

Терезе

Первая ночь

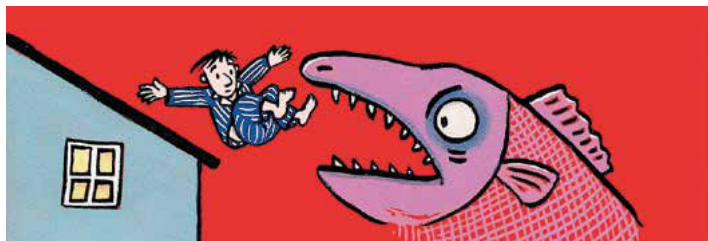


Роберта давно мучили сновидения. «На этот раз я совсем одурел!» — проснувшись, подумал он.

Однажды ему приснилось, как его проглотила огромная противная рыба, и даже после пробуждения он чувствовал её ужасный запах. В другой раз он, поскользнувшись, летел по нескончаемому откосу всё ниже и ниже. Он хотел затормозить, кричал: «Помогите!», но продолжал скользить вниз всё быстрее и быстрее, пока не просыпался в холодном поту.

Сновиденья как будто издевались над ним, особенно когда Роберту чего-то очень сильно хотелось. Ну, скажем — гоночный велосипед с двадцатью восемью скоростями. И сновидения опять начинали играть с ним в свои игры. Ему снилось, что велосипед уже ждёт его в подвале, сверкая новыми крыльями цвета фиолетовый металл. Сон был невероятно правдоподобным. Роберт явно видел его стоящим там внизу, слева от винного шкафа, и ему был известен даже шифр его кодового замка: 12345. Уж такое-то число он не мог не запомнить! Проснувшись посреди ночи, Роберт взял с полки ключ и, пошатываясь спросонок, прямо в пижаме побрёл по лестнице вниз — и что же

он обнаружил там внизу слева от винного шкафа? Дохлаю мышь. Это был чистейший обман! Очень грязный трюк!



В конце концов Роберт придумал, как бороться с трюками этих противных снов. Чувствуя их приближение, он, не просыпаясь, прямо во сне думал — «Просто плавает ещё одна противная рыба. И я прекрасно знаю, что будет дальше. Она опять собирается меня сожрать. Но я также знаю, что это всего лишь сон, потому что только во сне рыба способна проглотить человека». Или опять ему снилось, как летит он вниз по склону и не может остановиться. «Ну и пусть, — думал он. — Я не могу остановиться, но ведь и лечу я не взаправду».

И когда к нему вновь возвращались видения о гоночном велосипеде или о любимой компьютерной игре, диск с которой уже лежит возле телефона, Роберт не поддавался на эти игры. Он знал, что всё это подлое надувательство! Он отворачивался, стараясь не замечать этот велосипед. Но, что бы ни делал Роберт, противные сны вновь возвращались к нему и вновь продолжали мучить его.

Вдруг однажды ночью ему приснился Дух Числа!



Маленький старичок, ростом с кузнечика, спрыгнул вниз, уселся на лист шпината и уставился на пришельца своими яркими блестящими глазёнками.

Роберт был рад тому, что за ним не гонится страшная голодная рыбина и он не летит снова в пропасть, пытаясь остановиться и не в силах этого сделать. На этот раз ему приснился луг. Удивительные травы на этом лугу росли так высоко, что почти дотягивались до небес и цветы качались у него над головой. Он увидел прямо перед собой удивительный мир! Огромный жук сидел напротив него вытаращив свои суровые глазища, а рядом с ним гусеница сползала по травинке и маленький старичок, ростом с кузнечика, спрыгнул вниз, уселся на лист шпината и уставился на пришельца своими яркими блестящими глазёнками.

— Кто вы? — спросил Роберт.

Маленький человек отвечал удивительно громким голосом:

— Я Дух Числа!

Роберт был совсем не в настроении слушать подобную чепуху от какой-то козявки.

— Во-первых, Духов Числа не бывает.

— Это как же? Как можешь ты тогда беседовать со мной, если меня нет?

— А во-вторых... Я ненавижу всё, что связано с математикой.

— Почему это, позвольте спросить?

— Как будто вы никогда не ходили в школу? Или, может быть, вы сами учитель? «Если 2 пекаря делают 444 кренделя за 6 часов, то сколько времени понадобится 5 пекарям, чтобы сделать 88 кренделей?» Вздор всё это, — проворчал Роберт. — Пустая трата времени. Убирайся восвояси! Кыш!

Но вместо того, чтобы отправиться прочь, Дух Числа, легко и элегантно прыгнул с листа и приземлился рядышком с Робертом, который удобно расположился внизу, как будто в знак протеста против нереально высоченной травы.

— Скажи, где ты взял эту историю о кренделях? Не иначе, как в школе!

— Где ж ещё? — ответил Роберт. — Господин Бокель — наш новый учитель по математике. Он всегда голодный, хотя и так уже толще некуда. Когда он думает, что мы ничего не видим и не слышим, корпя над своими задачами, потихонечку открывает свой портфель и вытаскивает из него кренделёк за крендельком, уплетая их так, что только за ушами трещит.

— Понятно, — усмехнулся Дух Числа. — Я ничего не имею против вашего господина Бокеля, но его задачи вовсе не те, которые интересуют меня. Хочешь, расскажу тебе по секрету? Многие настоящие математики частенько не в ладах с арифметикой. Да и времени им жаль на такие пустяки. Для этого есть карманные калькуляторы. Ведь, наверно, и у тебя такой тоже есть?

— Конечно, есть! Но нам не разрешают ими пользоваться на уроках.

— Понимаю, — сказал Дух Числа. — И это правильно. Нет ничего плохого в знании таблицы умножения, и даже неплохо иногда поупражняться в сложении и вычитании. А то что ты будешь делать, когда в калькуляторе сядет батарейка? Однако математика, мой мальчик, это совсем другое дело!

— Ты просто пытаешься задурить мне голову, — сказал Роберт. — Я не верю тебе. Если ты попробуешь дать мне домашнее задание во сне, я заору как резаный! Это издевательство над детьми!

— Если бы я знал, что ты труслив, как заяц, — сказал Дух Числа, — ни за что не пришел бы в твой сон. Я всего лишь хотел чуточку подбодрить тебя. По ночам я обычно не на службе и отдыхаю, а тут увидел тебя и подумал: может, избавить Роберта от бесконечных падений в пропасть?

— Чёрт возьми, спасибо!

— Я рад, что ты меня понял.

— Я надеюсь, ты тоже понимаешь, что тебе не удастся меня провести.

Внезапно старичок вскочил и, поднявшись выше травы, в одно мгновение превратился в грозного Повелителя Чисел.

— Как ты смеешь так говорить со мной, мальчишка! — закричал Дух. Его глаза засверкали. Он спрыгнул вниз и принялся топтать траву, пока вся она не полегла, до последнего стебелька.

— Извините, — опешивши, пробормотал Роберт. Ситуация становилась всё более странной и пугающей.

— Но если говорить о числах можно так же легко и свободно, как о кино или велосипедах, зачем числам понадобился собственный Дух?

— Ты попал прямо в точку, мой мальчик, — ответил Дух Числа. — В том-то всё и дело, что сами по себе числа очень просты и им совершенно необходим попе-



читель! Доказать их простоту можно даже без калькулятора. Для этого тебе потребуется одна-единственная единица. Я, разумеется, говорю о цифре один, с помощью которой ты сможешь сделать всё что угодно. Если боишься больших чисел — скажем, пять миллионов семьсот двадцать три тысячи восемьсот двенадцать, — то начать можешь всего лишь с:

$$\begin{array}{l} 1+1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1 \\ \dots \end{array}$$

и продолжать так до тех пор, пока не дойдёшь до пяти миллионов с лишним. Ты ведь не станешь утверждать, что это слишком сложно для тебя, не так ли? Любой дурак с этим справится!

— Верно, — согласился Роберт.

— И это ещё не всё, — сказал Дух Числа и, взяв в руки трость с серебряной ручкой, стал крутить ей перед самым носом у Роберта. — Когда ты досчитаешь до пяти миллионов с лишним, то можешь продолжать считать и дальше. И так до бесконечности, потому что число самих чисел бесконечно.

Роберт растерялся, не зная, верить ли ему.

— А ты откуда это знаешь? — спросил он. — Сам, что ли, пробовал?

— Не буду врать, — ответил Дух Числа. — Сам не пробовал. Это, с одной стороны, слишком долго и нудно, а с другой — совершенно бессмысленно. Пустая трата времени.

Однако Роберта это, похоже, не убедило.

— Либо я могу досчитать до конца, и тогда не существует никакой бесконечности, либо не существует конца и тогда я, конечно, не могу досчитать до него.

— Неверно! — воскликнул рассерженный Дух Числа. Его усы задрожали от гнева, глаза вновь налились, а лицо побагровело от ярости.

— Что ты считаешь неверным? — спросил Роберт.

— Раз так! А ну-ка, болван, скажи мне, сколько всего жевательных резинок сжевали все люди на Земле за всё время?

— Понятия не имею!

— Говори наобум.

— Ужасно много! — воскликнул Роберт. — Если посчитать моих друзей Альберта, Бетти и Чарли, и всех остальных детей в классе и в нашей школе, во всех школах, во всём мире... получатся миллиарды!

— По меньшей мере, — заявил Дух Числа. — Хорошо, теперь представим себе, что все люди на Земле взялись жевать жевательные резинки, и так до последнего кусочка. Потом я вытаскиваю из своего кармана самую последнюю жвачку, которую припас для себя, и что мы теперь получим? Все миллиарды жевательных резинок, которые мы перечислили, плюс ещё одна. Ты понял, что я имею в виду? Мне ведь не нужно пересчитывать их все

заново. Нужно просто найти способ, как можно продолжить их считать. И этот способ у меня есть!

Обдумав всё, что сказал Дух Числа, Роберт был вынужден признать, что в его словах есть резон.

— Кстати, верно и обратное, — добавил старикашка.

— Обратное? Это как это?

— Понимаешь, Роберт, — усмехнулся Дух Числа. — Раз существуют бесконечно большие числа, должны существовать и бесконечно малые. Бесконечное число бесконечно малых чисел. — При этих словах он вновь поднял трость и завертел её, как пропеллером, перед носом у Роберта.

«Опять всё кружится в голове» — подумал Роберт. Это чувство было очень похоже на то, которое он испытывал в том сне, когда срывался с обрыва и скользил в пропасть.

— Прекрати! — закричал он.

— Зачем так нервничать, Роберт? — осведомился Дух Числа. — Моя трость совершенно безобидна. Смотри, я достаю из кармана ещё одну жевательную резинку. Вот она...

Он и вправду вытащил жевательную резинку, но она была невероятно длинной, как линейка, твёрдой, как камень, и имела странный фиолетовый оттенок.

— Ты называешь это жевательной резинкой? — пробормотал Роберт.

— Жевательная резинка твоей мечты! — заявил Дух Числа. — Готов с тобою поделиться. Смотри внимательно. Пока она целая, она вся моя. Одна жвачка для одного че-



ловека. — Сказав это, старичок достал кусочек мела тоже странного фиолетового цвета и закрепил его на конце своей трости.

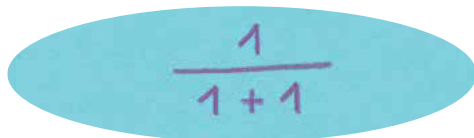
— Вот как мы запишем это:


$$\frac{1}{1}$$

И он прямо на небе начертил две фиолетовые единицы. Такой след оставляют на небе самолеты во время авиашоу. Лиловые единицы некоторое время парили на фоне белых облаков, а потом медленно растаяли, как земляничное мороженое.

— Фантастика! — воскликнул Роберт. — Я многое готов отдать за такую трость.

— В этом нет ничего особенного. Этой тростью я пишу всё и везде: на облаках, на стенах, на экранах. Мне вообще не нужны ни тетради, ни портфель. Но речь сейчас не об этом. Давай вернёмся к нашей жевательной резинке. Если я разделю её пополам, то у меня останется половина, а другая половина может стать твоей. Одна жвачка для двух человек. Для этого жвачку отправляем вверх в числитель, а нас с тобой обоих — вниз, в знаменатель:


$$\frac{1}{1 + 1}$$

— Теперь наверняка твои друзья тоже захотят по кусочку...

— И Альберт, и Бетти, конечно, — сказал Роберт.

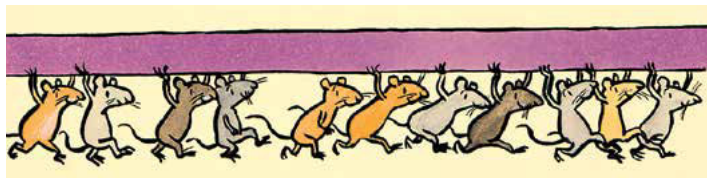
— Нет проблем! Пусть Альберт попросит жевательную резинку у меня, а Бетти у тебя, и мы оба с ними поделимся. Тогда каждый из нас получит по четверти:

$$\frac{1}{1+1+1+1}$$

— И это только начало. Все остальные тоже захотят себе по кусочку жвачки. Все дети вашего класса, вся школа, а потом и весь город... Таким образом, каждый из нас разделит свою четвертинку ещё с кем-то, а потом ещё и ещё и так далее.

— После дождичка в четверг, — сказал Роберт.

— Так можно делить, пока кусочки жевательной резинки не станут так малы, что их уже будет трудно увидеть невооружённым глазом, — объяснил Дух Числа. — Но и это не всё. Мы будем делить её на части и дальше, чтобы всем шести миллиардам жителей Земли досталось хоть по самому крошечному кусочку. Но тут к нам в гости явятся шестьсот миллиардов мышей и тоже захотят получить свой кусочек. Такая



делёжка может продолжаться до скончания века, и мы никогда её не закончим.

Говоря это, старичок рисовал бесконечные ряды фиолетовых единиц на голубом небосводе.

— Ты заполнишь ими весь мир, если так будешь продолжать! — закричал Роберт.

— Ага! А что, количество тебя пугает? — воскликнул Дух Числа, опять раздуваясь в размерах. — Я ведь делаю это исключительно для тебя. Ты же боишься чисел? Ты хочешь, чтобы всё было просто и чтобы ты не путался. Пожалуйста!

— Но это всё скоро становится скучно и однообразно. К тому же такие записи очень громоздки и не умещаются в моей голове, — решил возразить Роберт.

— Смотри! — воскликнул старик и небрежным взмахом руки расчистил всё небо. И все единицы мгновенно исчезли, как будто и не были.

— Очевидно, ты согласишься со мной, что нам желательно иметь что-нибудь менее громоздкое и более практичное, чем бесконечная черед $1+1+1+1+1...$ Числа, например? И для этого я их придумал.

— Что? Ты хочешь сказать, что числа придумал ты? Я не верю в это!

— Я, конечно! Ну, скажем, я и ещё кое-кто, но это не имеет особого значения. Мне непонятно, почему ты так недоверчив? Что ты скажешь, если я покажу тебе, как можно из единицы сделать все остальные числа?

— Как же ты это сделаешь?

— Очень просто. Я сделаю так:

$$1 \times 1 = 1$$

И потом:

$$11 \times 11$$

— Готов поспорить, тебе для этого нужен калькулятор.

— Ерунда! — сказал Роберт.

$$11 \times 11 = 121$$

— Вот видишь, — заявил Дух Числа. — Ничего не было, кроме единиц, и вдруг появилась двойка. А теперь, что ты скажешь на это:

$$111 \times 111$$

— Это уже слишком сложно, — запротестовал Роберт. — Такой пример в уме я решить не могу.

— Воспользуйся калькулятором.

— Калькулятором? Надеюсь, ты не думаешь, что я взял его с собой в постель?

— Тогда возьми вот это, — сказал Дух Числа и сунул ему в руку плоскую штуковину. Это была странная вещь, мягкая и липкая, как тесто, отвратительно-болотного цвета, но всё же это был калькулятор. И самое удивительное — он работал! Роберт ввёл в него это выражение:

$$111 \times 111$$

И каков же был результат?

$$12321$$

— Ну, замечательно! — воскликнул Роберт. — Теперь у нас появилась ещё тройка.

— Правильно. Теперь просто продолжай.

Роберт стал набирать следующие выражения:

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

— Очень хорошо, — сказал старичок, похлопывая Роберта по плечу. — Уверен, ты заметил, что с каждым новым результатом ты не только получаешь следующую цифру, но и само полученное число обладает удивительной особенностью. Оно может одинаково правильно читаться и слева, и справа. Так же, как слова: АННА, ШАЛАШ, ЗАКАЗ. А то бывают и целые фразы. Прочти, к примеру, такую: «ЛУНУ КОЛОКОЛ ОКУНУЛ», или «А РОЗА УПАЛА НА ЛАПУ АЗОРА».

Роберту понравился этот трюк, и он принялся считать дальше. Но когда он добрался до:

|||||/|||×|||||/|||

калькулятор испустил дух. К удивлению Роберта, он вдруг зашипел: «Пффф» — и расплавился прямо в руках, превратившись в отвратительную ярко-зелёную слизь.

— Тыфу! — выругался Роберт, вытирая с пальцев зелёную гадость.

— Тебе нужен более мощный калькулятор, или даже лучше компьютер. Приличный компьютер выплюнет нужный ответ за секунду.

— Ты уверен?

— Конечно, уверен! — заявил Дух Числа. Роберт подумал — уж слишком он самоуверен, этот смешной старичок. «Может быть, он просто хвастун? Попробую проверить его».

— А ты не пробовал справиться вот с такими числами:

11 111 111 111 × 11 111 111 111

— По правде, нет.

— Готов поспорить, что с этими числами и ему не справиться, — сказал Роберт.

Дух Числа начал считать в уме, но от напряжения лицо его стало красным, а голову раздуло, как воздушный шар. Было заметно, что он в гневе и сердится от собственного бессилия и невозможности решить эту задачу.



— Подожди, — пробормотал старичок и задумался. — Я не могу решить эту задачу. Ты был прав! Откуда ты знал это?

— Да ничего я не знал! Уж не думаешь ли ты, что я похож на сумасшедшего, который станет решать такие задачи? Я просто догадался, что это бесполезно.

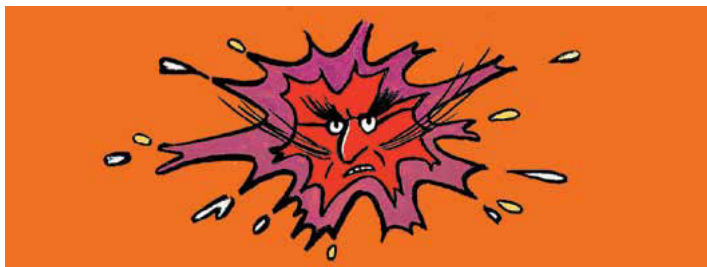
— Догадался? В математике недопустимо гадание! Математика — точная наука!

— Но ведь когда ты говорил мне, что числам нет конца, что они могут продолжаться до бесконечности, это тоже было предположение, не так ли?

— Да как ты смеешь! Кто ты такой? Новичок! Любитель порассуждать на умные темы! И ты пытаешься учить меня тому, что я называю своим ремеслом?

При этом он пыхтел и отдувался и вновь рос, с каждым словом становясь всё больше и толще. Роберт даже испугался.

— Ты мелкая сошка! Козявка со спичечной головкой! Заносчивый тупица и карлик! — завопил Дух Числа и так вскипел, что, едва успев произнести последние слова, лопнул с оглушительным взрывом!



Роберт проснулся. Он упал с кровати и чувствовал, как ещё кружится голова, но, вспомнив, как он ловко обхитрил Духа Числа, Роберт весело рассмеялся.



Вторая ночь



Роберт опять летел вниз. Всё та же старая история. Она началась в ту же минуту, как его голова коснулась подушки, и он никак не мог остановить её. На этот раз он сорвался с дерева и скользил вниз по его ветвям. Главное не смотреть вниз, — уговаривал он сам себя, пытаюсь зацепиться за что-нибудь, уносясь всё ниже и ниже.

И вдруг, к своему удивлению, он мягко приземлился на моховой ковёр. Затем совсем рядом он услышал чей-то смех. Конечно, это он! Дух Числа восседал на огромном бархатисто-коричневом грибе и смотрел на Роберта сверху вниз своими блестящими глазами. В таком виде он казался ещё меньше, чем в прошлый раз.

— Откуда ты прибыл? — спросил он Роберта с усмешкой.

Роберт посмотрел на ствол дерева, уходящий далеко ввысь. Рядом стояли и другие, точно такие же деревья с гладкими стволами и вершинами, уходящими в самое небо. Но теперь он заметил, что это были скорее не деревья, а огромные единицы. Он попал в лес из огромных единиц.

В этом странном лесу весь воздух гудел, наполненный мелкими, как мошки, циферками, кружившими в непо-



Не смотреть вниз, — уговаривал он сам себя, пытаясь зацепиться за что-нибудь, уносясь всё ниже и ниже... И вдруг, к своему удивлению, он мягко приземлился на моховой ковёр.

нятном танце перед самым носом. Роберт пытался их отпугнуть, но их было слишком много. Двойки, тройки, четвёрки, пятёрки, шестёрки и девятки продолжали кружить вокруг. Он всегда не мог терпеть этих противных комаров и мошек за их ужасную назойливость.

— Они тебе мешают? — спросил Дух Числа. Он приложил руки ко рту и дунул изо всех сил — фуу! Всю мошкарку тут же сдуло ветром, и остался только лес из высоченных единиц, упирающихся своими макушками в самое небо.

— Садись, Роберт, — сказал Дух Числа. В этот раз он был удивительно доброжелателен.

— Куда сесть? На гриб?

— Почему бы и нет?

— Это будет выглядеть глупо, — пожаловался мальчик. — Кстати, а где мы? В книжке с картинками? В прошлый раз я встретил тебя сидящим на листе шпината, а теперь вот на грибе. Что-то мне это сильно напоминает одну книгу, которую я читал раньше.

— Этот гриб — точная копия из книги «Алиса в стране чудес», — заявил Дух Числа.

— Что же общего между этой выдуманной сказкой и твоей математикой?

— То, как они соединяются в твоём сне, мой мальчик. Думаешь, тех циферных мух я сотворил? Вот и нет! Я точно не сплю, а вот ты как раз спишь и видишь это во сне.

— Так о чём мы говорили? Кстати, ты собираешься вечно стоять там внизу?

Роберт понял, что старичок прав, и, выбрав по близости другой гриб, вскарабкался на него. Гриб был огромный и, за исключением некоторых неровностей, напоминал большое плюшевое кресло.

— Как тебе здесь нравится?

— Здесь интересно, — сказал Роберт. — Только я не могу понять, кто придумал тех мошек в виде цифр и лес с деревьями из единиц. Это точно был не я! Я не смог бы такого придумать, даже в самом кошмарном сне. Думаю, это сделал ты!

— Даже если и так? — заявил Дух Числа, гордо восседая на своём кресле-грибе. — Хотя кое-чего у нас пока не хватает.

— Чего?

— Ничего! Точнее — нуля.

Он был прав. Среди всех тех летающих мелких и назойливых цифр не было ни одного нуля.

— Почему? — спросил Роберт.

— Потому что люди нашли его позже всех остальных цифр. И это не удивительно, потому что ноль является самым сложным числом. Кстати, в русском языке его можно называть ноль или нуль, как тебе это больше нравится. Но всё же чаще мы называем его ноль. Смотри, что я ещё покажу тебе.

Найдя на небе между огромными деревьями чистое пространство, Дух Числа своей волшебной тростью написал на нём какие-то загадочные буквы:

М С М

— Когда ты родился, Роберт?

— Я? В 1986, — сказал Роберт, немного смутившись. Старичок поднял трость и дополнил свою надпись:

МСМLXXXVI

— Я не знаю таких цифр. Хотя когда-то я видел такие надписи, высеченные на древних памятниках. Наверно, это очень старинные цифры?

— Эти цифры, мой мальчик, пришли к нам от древних римлян. Жители Древнего Рима с ними тоже намаялись. Записи у них получались длинными, и читать их было нелегко. Хотя вот эта цифра, по моему, проста:

I

— Единица! — воскликнул Роберт.

— Хорошо! Дальше.

X

— Десять.

— Правильно! И это, дорогой мой, ничто иное, а год

МСМLXXXVI

в котором ты родился.

— Первая буква М означает — 1000, С — 100, но когда меньшая цифра стоит перед большей, её надо

вычесть и получится — 900. L — это 50, а V — 5. Складываем их все вместе и получаем — 1986.

— Боже мой, как сложно! — застонал Роберт.

— Именно так, а знаешь почему? В Древнем Риме не было нуля.

— Ну и что? Не понимаю, в чём проблема с этим твоим нулем? Ноль, это ничего — пустое место.

— Вот именно, это и отличает его от всех других цифр, — сказал старичок.

— Но раз ноль это ничего, то и нечего тут считать.

— Не будь так самоуверен. Помнишь, как мы разделили тот кусочек жевательной резинки на многие миллиарды людей и сотни миллиардов мышей? Кусочки становились всё меньше и меньше, и их было трудно увидеть даже в самый мощный микроскоп. Но мы всё равно могли и дальше продолжить делить их, уменьшая в размере почти до нуля. Однако, сколько бы мы ни продолжали эту делёжку, никогда даже самый крошечный последний кусочек не превратился бы в полный ноль.

— Ну и что? — спросил Роберт.

— А то, что нам стоит поискать что-то ещё. Например, вычитание! Я думаю, с вычитанием должно всё получиться.

Сказав это, старичок протянул свою трость и ткнул ею в одно из деревьев. Прямо на глазах это громадное дерево стало сжиматься, пока не превратилось в совсем маленькую скромную единичку, покорно стоящую у самых ног Роберта.



— Ну что, попробовать разок? — сказал Дух Числа.

— Боюсь, что я не смогу, — усомнился Роберт.

— Ерунда!

$$1 - 1 =$$

— Один минус один равно нулю, — сказал Роберт. — Это знает каждый.

— Ты видишь? Видишь теперь, как необходим ноль? Здесь тебе без него никак не обойтись.

— Но зачем его обязательно писать? Если ничего нет, пусть останется пустое место. Зачем придумывать цифру для того, чего не существует?

— Тогда как быть вот с этим:

$$1 - 2 =$$

— Это элементарно! Один минус два будет минус один, — ответил Роберт.

— Верно. Но посмотри, что получится, если сравнивать между собой числа по порядку:

$$\dots 4, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -4 \dots$$

— Разность между четырьмя и тремя равна единице. Между тремя и двумя тоже единица. Два минус один опять один. А вот какова разница между единицей и минус единицей?

— Похоже, что два, — с сомнением ответил Роберт.

— Значит, между этими цифрами что-то пропущено?

— Эту маленькую трудность может исправить ноль.

— Я же говорил тебе, что нам не обойтись без него, — обрадовался Дух Числа. — Бедные римляне. Они думали, что смогут обойтись без нуля, и посмотри, что у них из этого получилось. Вместо простой записи числа 1986 им приходилось возиться с этими хитрыми М, С, L, V, X и I.

— А какое отношение это всё имеет к минусу и жевательной резинке? — с сомнением поинтересовался Роберт.

— Забудь о минусе и жевательной резинке. Настоящая красота нуля лучше всего видна в одном интересном примере. Но чтобы его понять, тебе придётся немного пошевелить мозгами. Ты готов к этому, или, может быть, тебе уже пора отдохнуть?

— Нет, пока я не провалился ещё ниже, я в полном порядке, и сидеть здесь, на этом грибе, мне очень приятно.

— Хорошо. Тогда позволь мне озадачить тебя небольшой проблемой.

«Странно, почему Дух Числа так добр и вежлив, — думал Роберт. — Нужно быть начеку. Что-то здесь нечисто». Но вслух он сказал:

— Валяй, я готов!

И Дух Числа спросил:

$$9 + 1 =$$

— Если я не полный идиот, ответ — десять! — выпалил Роберт.

— А как ты это напишешь?

— Мне нужна ручка.

— Пиши прямо на небе. Вот тебе моя трость.

$$9 + 1 = 10$$

написал Роберт фиолетовые цифры прямо на белых облаках.

— Один и ноль? — поинтересовался Дух Числа. — Но один плюс ноль не получится десять.

— Да брось! Я же не писал один плюс ноль, я написал один и ноль, а это и есть десять.

— А можно тебя спросить, почему две цифры один и ноль вместе означают десять?

— Потому что так принято записывать это число.

— И почему же так принято? Ты можешь это объяснить? — не унимался старичок.

— Почему, почему, почему? — завопил Роберт. — Ты специально действуешь мне на нервы?

— Значит, ты не знаешь этого? Я могу рассказать тебе, — сказал таинственно Дух Числа, откинувшись на спинку своего грибного кресла.

— Хватит томить! Рассказывай, уж раз начал, — потребовал Роберт.

— Всё очень просто. Это просто числовой прыжок.

— Прыжок? — презрительно усмехнулся Роберт. — Глупость какая-то. Числа не блохи, чтоб им прыгать.



— Числа будут не только прыгать, но и танцевать под музыку, если я им прикажу, — ответил Дух Числа. — Не забывай, мальчик, с кем ты говоришь!

— Хорошо, хорошо, — успокоил его Роберт. — Не надо волноваться, просто объясни мне, как они прыгают?

— Охотно. Вернёмся, как говорится, на круги своя, а точнее, к нашей единице. Посмотрим, как она ведёт себя с умножением:

$$\begin{aligned}1 \times 1 &= 1 \\1 \times 1 \times 1 &= 1 \\1 \times 1 \times 1 \times 1 &= 1\end{aligned}$$

— Как видишь, этот пример можно продолжать и дальше, но всё равно ответ будет один — единица.

— Естественно. Но к чему ты клонишь?

— Попробуй сделать то же самое с двойкой.

— Хорошо, — сказал Роберт.

$$\begin{aligned}2 \times 2 &= 4 \\2 \times 2 \times 2 &= 8 \\2 \times 2 \times 2 \times 2 &= 16 \\2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 &= 32 \\&\dots\end{aligned}$$

— Однако эти числа растут чертовски быстро! Ещё немного, и мне снова понадобится калькулятор.

— Пока не стоит. Вот если взять цифру пять, результаты действительно будут расти быстрее ветра! Не хочешь попробовать?

$$\begin{aligned}5 \times 5 &= 25 \\5 \times 5 \times 5 &= 125 \\5 \times 5 \times 5 \times 5 &= 625 \\5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 &= 3125 \\5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 &= 15625\end{aligned}$$

— Хватит, — взмолился Роберт.

— Почему ты так боишься больших чисел? Уверю тебя, они совершенно безобидны.

— Что-то я в этом не уверен, — заявил Роберт. — Кроме того, я не вижу никакого смысла умножать бесконечно число пять само на себя.

— К этой мысли я и веду тебя. Я и сам бы никогда не стал выписывать эти скучные пятёрки. Гораздо удобнее записать это вот так:

$$\begin{aligned}5^1 &= 5 \\5^2 &= 25 \\5^3 &= 125\end{aligned}$$

и так далее.

— Одна пятёрка означает — пять в первой степени, две умноженные друг на друга — это пять во второй степени, три — в третьей. Так я заставляю числа прыгать. Понял? Если ты сделаешь то же самое с десяткой, то поймёшь, что в этом нет ничего сложного. Заставь

десятку сделать первый прыжок, и увидишь, она останется такой, как была. При этом свой калькулятор можешь выкинуть в ведро.

$$10^1 = 10$$

— Теперь прыгни дважды, и получишь:

$$10^2 = 100$$

— Повтори этот прыжок трижды:

$$10^3 = 1000$$

— Значит, если я заставляю её прыгнуть пять раз, то получится 100 000, а если потом ещё один раз, то будет уже миллион.

— Сколько угодно, — согласился Дух Числа. — В этом и заключается простота и красота нуля. Он упрощает запись числа и определяет для всех цифр их положение и значимость в числе. Если цифра стоит слева от нуля, то она возрастает в десять раз, а если справа, то, наоборот, уменьшается в десять раз. Когда ты пишешь число 555, то знаешь, что последняя пятёрка — это просто пять. Та, что стоит слева перед ней, уже в десять раз больше и равна пятидесяти. Ну, а самая левая из них больше в сто раз и, значит, равна пятистам. Спросишь почему? Просто она прыгнула на место слева от двух других цифр в этом числе. В этом отличие этой пятёрки от пятёрки древних римлян. Там бы она всегда оставалась просто обычной пятёркой. Римские пятёрки прыгать не умели. Почему не умели? Потому

что у древних римлян не было нуля, который мог бы менять их значимость. Вот и мучились они с чудовищными числами типа MCMLXXXVI. Так что радуйся, мой мальчик! Тебе повезло гораздо больше, чем римлянам. С помощью нашего прекрасного нуля мы в несколько прыжков построим любое большое и маленькое число. Возьмём, к примеру, 786.

— Мне не нужно 786, — усмехнулся Роберт.

— Не строй из себя дурачка. Ладно, допустим, сейчас оно тебе и не нужно. Можешь снова взять год своего рождения 1986.

Старичок начинал сердиться и, как обычно, при этом угрожающе рос. Причём на этот раз он увеличился вместе с грибом, на котором сидел.

— Ну чего ты ждёшь? — вскипел он. — Шевелись быстрее!

«Ну вот, опять началось, — с тоской подумал Роберт. — Когда он сердится, становится хуже, чем господин Бокель».

Мальчик старательно написал на небе огромную единицу.

— Неверно, — воскликнул Дух Числа. — Полная чушь! Как меня угораздило связаться с таким тупицей! Я же просил написать число, а не каракули во всё небо.

Роберт готов был отдать всё, чтобы проснуться. «Не собираюсь я с этим мириться», — подумал Роберт, глядя на раздувшуюся голову Духа Числа, ставшую пунцово-красной от гнева.

— Начинай с конца! — ревел Дух Числа.



Роберт удивленно посмотрел на старичка.

— Ты должен написать число начиная с конца. Это очень важно!

— Если ты так требуешь, пожалуйста, — решил больше не спорить с ним Роберт

Он вытер единицу и на её месте написал шестёрку.

— Ну, наконец-то дело сдвинулось с мёртвой точки! Что ж, теперь мы можем продолжить.

— Нет проблем, — сказал Роберт осторожно. — Только я прошу тебя не устраивать таких истерик из-за всяких мелочей.

— Я сожалею, — сказал старик, — но не могу ничего с собой сделать. Я Дух Числа, а не Санта Клаус. Духи не всегда бывают добрыми.

— Нравится тебе моя шестёрка? — поинтересовался Роберт.

Старик одобрительно кивнул и написал дальше:

$$6 \times 1 = 6$$

— От этого ничего не изменилось, — сказал Роберт.

— Подожди, скоро увидишь. Следующая цифра восемь, не забудь про прыжок.

Внезапно Роберт понял, на что намекает старичок, и написал:

$$8 \times 10 = 80$$

— Я понял! Теперь я знаю, что делать дальше, — крикнул Роберт, опередив Духа Числа. — С девяткой мы заставим десятку сделать два прыжка.

И Роберт написал:

$$9 \times 100 = 900$$

И затем:

$$1 \times 1000 = 1000$$

— Это был заключительный тройной прыжок! Теперь всё вместе:

$$6 + 80 + 900 + 1000 = 1986$$

— Это не так сложно, как казалось вначале. Теперь я могу это сделать и без Духа Числа.

— Вот как! Ты становишься очень дерзким, мой дорогой. Однако не забудь, что до сих пор ты занимался лишь простейшими числами. Так что хвалиться пока рано. Дождись, когда я начну вытаскивать самые разные числа, как фокусник вытаскивает кроликов из своей шляпы. Ты даже не представляешь, какие разные бывают числа. Они бывают мнимые и иррациональные, бывают бесконечно бегущие по кругу и нескончаемо огромные, сводящие с ума и путающие мысли.

Дух Числа продолжал говорить, и ухмылка на его лице становилась всё шире. Роберт мог разглядеть все зубы у него во рту, и они тоже казались ему бесконечными. Потом он снова начал кружить своей тростью перед носом у Роберта.

— Караул! — закричал Роберт и проснулся.

Раскрыв глаза и увидев рядом маму, не понимая спросонья, где он и что с ним, Роберт произнёс:



Дух Числа продолжал говорить, и ухмылка на его лице становилась всё шире. Роберт мог разглядеть все зубы у него во рту, и они тоже казались ему бесконечными.

— Ты помнишь год моего рождения? Это 6×1 и 8×10 и 9×100 и 1×1000 .

— Не знаю, кто в тебя вселился, — сказала мама, качая головой. — На, возьми, — она протянула Роберту чашку горячего шоколада. — Ты говоришь странные вещи. Выпей, может, это поможет тебе.

Роберт сделал глоток шоколада. «Есть вещи, — подумал он, — которые даже маме трудно объяснить».



Третья ночь



Со временем Роберт привык к появлениям во сне Духа Числа. Он даже стал ожидать этих встреч. Правда, он прекрасно мог бы прожить и без этого всезнающего старикашки с его непредсказуемыми вспышками гнева. Никогда не угадаешь, с чего вдруг Дух Числа разразится криком и в гневе раздуется, как воздушный шар, но всё же это гораздо лучше, чем противная, вонючая глотающая тебя рыбина или бесконечное падение вниз в чёрную пропасть.

Кроме того, Роберт решил показать Духу Числа, что он и сам отнюдь не дурак. «Таких заносчивых командиров нужно ставить на место», — подумал Роберт, ложась спать. Слишком много он строит из себя из-за этого нуля. А если задуматься, то он и сам не многим больше нуля. Стоит только проснуться, и он, как призрак, превращается в ничто!

«Но для того, чтобы поставить его на место, мне надо встретиться с ним, а сделать это можно только во сне».

Тут Роберт понял, что он уже давно ворочается в постели и не может уснуть. Раньше с ним такого не бывало.

— Чего ты крутишься с боку на бок? — услышал он голос Духа Числа.

Тут неожиданно Роберт увидел, что кровать его находится в пещере, а перед ним сидит старик и размахивает своей тростью.

— Вставай, мой друг! — сказал он. — Сегодня мы с тобой приступаем к делению!

— Не уверен, что мне это нужно, — буркнул Роберт. — Не будешь ли ты так любезен подождать хотя бы, пока я усну? Кроме того, я терпеть не могу деления.

— Почему так?

— Когда ты складываешь или вычитаешь, или даже умножаешь, то получаешь нормальный ответ. А в делении меня раздражает, что в ответе часто появляется совершенно не нужный непонятный остаток.

— В том то и дело, что не всегда.

— А когда? — спросил Роберт.

— В этом всё и дело! Иногда остаток есть, а иногда его нет. Было бы удобней сразу на глаз видеть, какое число разделится без остатка, а какое нет.

— Конечно, — согласился Роберт. — Как, например, с чётными числами, которые все без остатка делятся на два. Нет проблем! У меня ещё более-менее получается делить на три:

$$\begin{array}{l} 9 : 3 \\ 15 : 3 \end{array}$$

и так далее.

Это так же, как при умножении, только наоборот.

$$3 \times 5 = 15$$

Тогда:

$$15 : 3 = 5$$

— Для решения таких задач мне не нужен Дух Числа. С ними я и сам справлюсь.

Лучше бы Роберт этого не говорил. Старик схватил Роберта и вытащил его из постели. Его усы дрожали, нос покраснел, а голова начала раздуваться.

— Ты понятия не имеешь, о чём говоришь, — кричал он. — Увидел знакомую таблицу умножения и возомнил себя великим математиком! Невежда — вот ты кто!

«Опять начинается, — подумал Роберт. — Вытаскивает меня из постели, орёт и раздувается только из-за того, что я сказал, будто знаю деление».

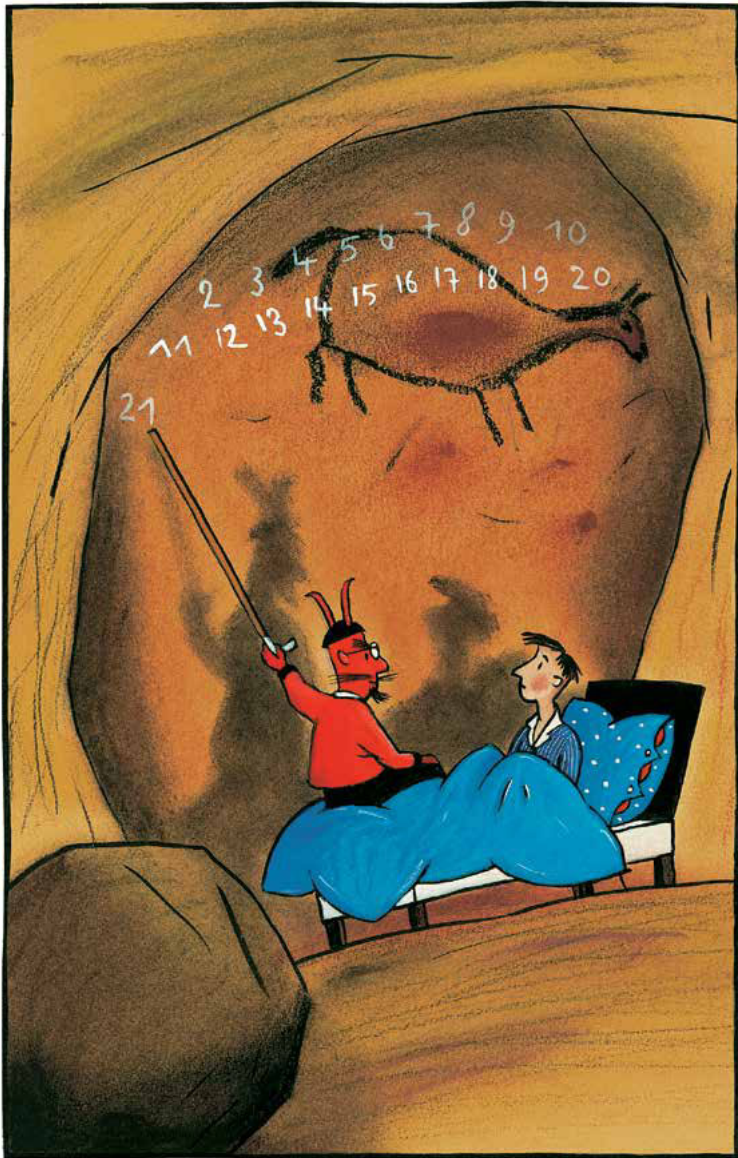
— От чистого сердца и по доброте сердечной я прихожу к этому недоучке, пытаюсь его чему-то научить, а он рта мне не даёт раскрыть, как начинает острить и зубоскалить.

— Ты называешь это добротой? — усмехнулся Роберт. В другой ситуации он бы просто встал и ушёл. Но как уйти из собственного сна? Он оглядел всю пещеру, но нигде не увидел выхода.

— Что ты ищешь?

— Выход.





В другой ситуации он бы просто встал и ушёл. Но как уйти из собственного сна? Он оглядел всю пещеру, но нигде не увидел выхода.

— Если ты уйдёшь сейчас, больше меня не увидишь! И мне будет безразлично, как ты будешь умирать от скуки на уроках господина Бокеля с его крендельками и дурацкими задачами.

Роберт понял, что его поймали за живое.

— Мне жаль, что так вышло, — пробормотал Роберт. — Я не хотел тебя обижать.

— Порядок, — одобрительно ответил Дух Числа, быстро сменив гнев на милость. — Тогда берём 19. Попробуешь справиться с девятнадцатью? Сможешь разделить его без остатка?

Роберт задумался.

— Единственное, как я могу это сделать, это разделить его на девятнадцать частей.

— Это не считается, — ответил Дух Числа. — Слишком просто.

— Могу ещё разделить его на ноль.

— Это исключено!

— Почему, ты считаешь, я не могу этого сделать?

— Потому что это строжайше запрещено! Делить на ноль не разрешается.

— А если я всё равно это сделаю?

— Тогда вся математика пойдёт по швам.

Дух Числа чуть не начал снова выходить из себя, но на этот раз сумел взять себя в руки.

— Ответ мне, — сказал он, — что ты предполагал получить, разделив девятнадцать на ноль?

— Я не знаю. Может быть, сто или ноль, или какое-то число между ними.

— Но разве не ты ли сам сказал мне, что деление — это как умножение наоборот? А если это так, то:

$$3 \times 5 = 15$$

Таким образом мы можем это перевернуть:

$$15 : 3 = 5$$

— Ну а теперь сделай то же с 19. В одну и другую сторону.

— Пусть разделить 19 на ноль будет 190, — предложил Роберт.

— А наоборот?

— 190 умножить на ноль... 190 на ноль... будет ноль.

— Вот видишь? И не важно, какое число ты выберешь, в результате всё равно получишь ноль и никогда не вернёшь 19.

— Что же из этого следует?

— То, что я и говорил, — никогда нельзя делить на ноль.

— Ну ладно, — согласился Роберт, — я сдаюсь. Но что мы будем делать с девятнадцатью? Не важно, на какое число я буду делить его — на 2, на 3, на 4, 5, 6, 7, 8, — в любом случае получится остаток.

— Подойди сюда, — сказал Дух Числа, — я раскрою тебе одну тайну.

Роберт наклонился к нему так низко, что усы старичка щекотали ему ухо.



— Существует два вида чисел, — прошептал старичок. — Первый вид — это дружелюбные удобные числа, которые можно разделить без остатка, и второй вид — это числа, которые всегда делятся с остатком. Лично я предпочитаю последние. Знаешь почему? Потому что они великие! Из-за них математики ещё тысячи лет назад немало поломали голову. А какие это замечательные числа! Например, одиннадцать, тринадцать или семнадцать.

Роберт никак не мог понять, почему Дух Числа так восхищается этими числами. Он был так счастлив, как будто у него во рту таял кусочек шоколада.

— Теперь назови мне, дорогой мой Роберт, какое-нибудь великое число.

— Ноль, — сказал Роберт, явно пытаясь вредничать.

— Запрещаю ноль! — закричал старик, вскинув вверх свою трость.



— Тогда единица.

— Единица не считается. Сколько можно это повторять!

— Ну ладно, — сказал Роберт, пытаясь сгладить ситуацию и несколько успокоить старика. — Пусть будет два. Как и все великие числа, два делится только на себя. И ещё, как мне кажется, подходит три. Четыре по понятным причинам не годится. Это мы уже знаем. Пять. Уверен, что пять ни на что не делится. Ну и так далее.

— Ха! Что означает и так далее? — потирая руки, переспросил Дух Числа. Это был верный признак того, что у него припасён ещё один козырь. — Самое удивительное, друг мой, состоит в том, что никто заранее не знает, какое великое число будет далее! Никто, кроме меня, конечно, но я этого никому не скажу.

— Совсем никому?

— Никому и никогда! Хитрость заключается в том, что никто не может, просто глядя на число, понять, относится ли оно к великим. Ни одному человеку не дано знать этого заранее, и ты должен каждый раз это проверять.

— Как же проверить великое число?

— А вот посмотри, — сказал Дух Числа и принялся писать своей тростью на стене пещеры.

Он строчил очень быстро, выписывая числа от 2 до 50, а Роберт стоял и смотрел, как он стремительно нарисовал целую таблицу.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

— А теперь, мой друг, возьми эту трость и покажи мне те числа, которые ты можешь отнести к великим. И как только ты дотронешься до него, оно сразу исчезнет.

— Но почему здесь нет ни нуля ни единицы? — удивился Роберт.

— Сколько раз мне ещё придется тебе повторять, что и ноль, и единица — не такие числа, как все, и они не могут относиться к великим числам. Ты хоть помнишь свои прошлые сны? Помнишь, как ты узнал о том, что все числа произошли от единицы, а ноль уже придумали потом, для удобства вычислений?

— Ты, как всегда, прав, — ухмыльнулся Роберт, — только я для начала удалю все чётные числа, поскольку они точно делятся на 2. Так будет проще.

— Это будет верный шаг, только не забудь, что само число 2 является великим числом.

Роберт взялся за работу, и вскоре рисунок на стене пещеры изменился.

	2	3	5	7	9
11		13	15	17	19
21		23	25	27	29
31		33	35	37	39
41		43	45	47	49

— Теперь — число три. Тройка — великое число, и я удаляю 6, 9, 12 и другие, которые делятся на 3 без остатка.

Роберт поднял трость и погасил ненужные числа.

	2	3	5	7	
11		13		17	19
		23	25		29
31			35	37	
41		43		47	49

— Теперь четыре, — начал Роберт, но тут же осёкся. — Нет, нет! Нам нет надобности убирать числа, делящиеся на 4, так как мы уже разобрались с двойкой. И, как нам известно, 4 — не великое число. Оно равно 2×2 , и значит, все числа, которые делятся на 4, мы и так

уже удалили. Вот пять — это великое число. А десятку можно сразу отбросить, потому что она — это 5×2 .

— Значит, удаляем все числа, которые заканчиваются на пять? — спросил Дух Числа

— Однозначно!

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	

Роберт вошёл во вкус этого занятия.

— Шесть мы забываем, так как это — 2×3 . Вот семерка — это великое число.

— Отлично! Молодец! — воскликнул Дух Числа.

— Далее одиннадцать.

— Что же у нас остаётся?

Да, дорогой читатель, на этот вопрос ты должен сам найти ответ. Перерисуй оставшуюся таблицу в свою тетрадку. Возьми какой-нибудь толстый фломастер и убери все числа, которые нельзя назвать великими. Могу подсказать тебе по секрету, что их должно остаться ровно пятнадцать, ни больше, ни меньше.

— Молодчина Роберт, — похвалил его Дух Числа, закуривая трубку и посмеиваясь.

— А что тут смешного? — спросил Роберт.

— Всё достаточно просто, если остановиться на пятидесяти, — ответил старичок с лукавой ухмылкой, усаживаясь поудобнее, положив ногу на ногу. — Но что, если мы возьмём, к примеру, число:

10 000 019 .

Или

141 421 356 237 307 .

— Это великие числа или нет? Если бы ты только знал, сколько выдающихся математиков ломали себе головы над этим вопросом. Эта задача и чёрту не по зубам!

— Раньше ты говорил, что знаешь следующие великие числа. Может, ты просто не хочешь открыть мне этот секрет?

— Пожалуй, я немного преувеличил свои способности.

— Я рад это слышать! Значит, ты признаёшь, что тоже не можешь знать всего? Это замечательно, а то иногда, разговаривая с тобой, мне кажется, что ты не Дух Числа, а какой-то Числовой Монстр!

— Многие пытливые умы пробовали решить эту задачу с помощью больших компьютеров. Они задавали им программу и месяцами ждали ответа. А хитрость этой задачи я уже рассказал тебе — сначала мы отбрасываем числа, которые делятся на 2, потом на 3, на 5, и, казалось бы,

дело в шляпе. Приём довольно простой, но когда числа становятся действительно большими, вычислять их становится всё труднее. А что дальше? Мы же можем сделать их ещё больше — бесконечно большими, при помощи наших прыжков. Вообще говоря, есть множество и других способов поиска великих чисел, однако все они не могут справиться с бесконечностью. Вот что делает эти числа чертовски интересными и загадочными. Ты согласен со мной?

Произнося эту речь, Дух Числа с восторгом размахивал своей тростью.

— Да, но какой смысл во всей этой головной боли? — спросил Роберт.

— Не задавай глупых вопросов. Мир чисел не бывает таким тухлым, как твой господин Бокель с его крендельками. К счастью для тебя, я приоткрыл тебе завесу над таинственными загадками математики. Но много секретов ещё впереди. Вот, к примеру: возьми любое число больше единицы и умножь его на два.

— 222, — предложил Роберт. — Если умножить на два, будет 444.

— Поверь мне, что между первым и вторым числом всегда будет хотя бы одно великое число.

— Ты уверен?

— 307, — уверенно сказал старик. — И это правило работает даже с самыми огромными числами.

— Откуда ты всё это знаешь?

— Да ладно, это пустяки, — гордо ответил Дух Числа, наслаждаясь восхищением Роберта.

Теперь уже его было не остановить.

— Скажи любое, какое хочешь чётное число, только чтобы оно было больше двух, и я смогу найти два великих числа, которые в сумме дадут твоё названное число.

— 48, — быстро назвал Роберт.

— Тридцать один плюс семнадцать, — сказал Дух Числа, не раздумывая и секунды.

— 34! — воскликнул Роберт.

— Двадцать девять плюс пять, — даже не вынув изо рта трубки, ответил Дух Числа.

— И это работает всегда? — спросил поражённый Роберт. — Почему? Как?

— Сказать по правде, — нахмурился Дух Числа, провожая взглядом кольца дыма, — я и сам хотел бы это знать. Каждый мой знакомый среди духов пытался найти объяснение, но... это правило действует, но никто не знает почему.

«Хитрец» — подумал Роберт и рассмеялся.

— Это здорово, — сказал он. Роберт был очень горд тем, что Дух Числа поведал ему свою тайну.

На мгновение лицо Духа Числа стало серьёзным. Видимо, он немного растерялся и о чём-то задумался. Но потом вдруг улыбнулся, вытряхнул трубку и громко рассмеялся вместе с мальчишкой.

— Ты не такой глупец, каким кажешься поначалу, Роберт. Прости, но сегодня мне пора идти. Сегодня ночью я должен посетить ещё несколько математиков. Мне нравится немножко помучить их.

При этих словах он становился всё тоньше, и даже не тоньше, а скорее прозрачней. Затем он совсем исчез, и Ро-



берт оказался совсем один в пещере, где ещё продолжали кружиться клубы лёгкого дыма, оставленного Духом Числа. А потом начали растворяться надписи на стене пещеры, и сама стена поплыла перед его глазами, превращаясь в мягкое и тёплое одеяло. Роберт пытался вспомнить, что замечательного было в великих числах, но мысли его кружились и превращались в туманные облака из белой ваты.

Он ещё никогда не спал так крепко.



А ты, мой читатель, ещё не спишь? Тогда я расскажу тебе ещё один фокус. Этот трюк действует не только с чётными, но и с нечётными числами. Просто загадай любое число, большее пяти. Например, 55 или 27. Ты сможешь найти великие числа, из которых оно состоит, только их будет не два, а три. Возьмём, к примеру, число 55:

$$55 = 5 + 19 + 31.$$

А теперь сам проверь число 27. Ты убедишься, что это правило всегда работает, но даже я не могу объяснить почему...

Четвёртая ночь



«Куда он снова тащит меня! Может быть, опять в пещеру, без входа и выхода, или лес, в котором вместо деревьев растут единицы, а грибы размером с огромное кресло. Что ждёт меня сегодня и где я окажусь?» — закрыв глаза, думал Роберт.

— На морском побережье, друг мой. Оглянись!

Роберт посмотрел вокруг и увидел кругом только белые пески и за ними воду. Недалеко от берега, на перевёрнутой лодке сидел Дух Числа. Место, в котором они находились, было совершенно пустынным.

— Могу поспорить, что и на сей раз ты не прихватил с собой калькулятор, — сказал Дух Числа.

— Слушай, — ответил Роберт, — сколько раз я говорил, что не могу ложиться в постель, захватив с собой все свои вещи. Я же не знаю, что мне приснится, пока я не уснул.

— Конечно, нет, — ответил старик. — Но если ты думаешь встретить во сне меня, то ты можешь также легко придумать заодно и калькулятор. Но нет, ты заставляешь это делать меня. Опять меня, вместо того, чтобы немножко пошевелиться самому! А по-

— Тройка за тройкой и так дальше — скучотища, — заявил Роберт.

— Да, это так.

— Но, — пробормотал Роберт, — это же бессмысленно! Гораздо проще и удобней написать:

$$\frac{1}{3}$$

Тогда мне не придётся знать обо всех этих бесконечных тройках.

— Это верно, — ответил Дух Числа, — но тогда приготовься иметь дело с дробями! Сильно сомневаюсь, что ты их очень любишь. Если $\frac{1}{3}$ от 33 пекарей за 2 и $\frac{1}{2}$ часа может испечь 89 крендельков, ответь мне: сколько крендельков могут испечь $5\frac{3}{4}$ пекарей за $1\frac{1}{2}$ часа?

— Нет, нет! Ради Бога, не надо мучить меня, как господин Бокель. Лучше я буду считать на калькуляторе десятичные числа, даже если после запятой они никогда не кончатся. Мне просто было интересно узнать, откуда берутся все эти тройки?

— Это не сложно. Первая тройка после запятой означает десятые доли числа, то есть три десятых. Вторая тройка — три сотых, третья тройка, соответственно — три тысячных. Ну и так дальше...

0,3
0,03
0,003
0,0003
0,00003
...

Понял? Хорошо. Тогда попробуй все эти числа умножить на три. По очереди умножь: три десятых, потом три сотых и так далее.

— Нет проблем, — сказал Роберт. — Я даже попробую сделать это в уме.

$$\begin{aligned}0,3 \times 3 &= 0,9 \\0,03 \times 3 &= 0,09 \\0,003 \times 3 &= 0,009 \\0,0003 \times 3 &= 0,0009.\end{aligned}$$

— Хорошо. И когда ты дойдёшь до конца, попробуй сложить все свои ответы. Что получится?

— Подожди минутку! $0,9 + 0,09$ равно $0,99$, и плюс ещё $0,009$ получится $0,999$. Всё больше и больше девяток! Что-то мне это напоминает? Похоже, это тоже будет продолжаться вечно.

— Ты всё делаешь правильно, но если задуматься, тут есть что-то подозрительное. Согласись, что $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, не так ли? Значит $\frac{1}{3}$, умноженная на 3, равна единице. Целой единице! Так что ты об этом думаешь?

— Понятия не имею, — заключил Роберт. — Здесь явно чего-то не хватает. Ведь $0,999$ — это почти единица, только без самой маленькой капельки.

— В том-то и дело. Тебе придётся бесконечно дописывать девятки в этом числе.

— Легко сказать!



Дух Числа, усмехнувшись, взмахнул своей тростью. В то же мгновение небо наполнилось бесконечными рядами фиолетовых девяток.

— Но только не для Духа Числа, — сказал старичок и, усмехнувшись, взмахнул своей тростью. В то же мгновение небо наполнилось бесконечными рядами фиолетовых девяток. Они растянулись на всё небо и змеёй стали спускаться на землю.

— Остановись! Перестань! — закричал Роберт. — У меня кружится голова.

— Мне стоит только щёлкнуть пальцем, и все они исчезнут, но я хочу, чтобы ты поверил — эта бесконечная змея девяток после нуля в бесконечности приведёт тебя к единице.

Пока Дух Числа это говорил, змея из девяток росла всё длиннее и длиннее. Даже небо над головой потемнело от их количества. У Роберта кружилась голова, и его начинало подташнивать, но он всё никак не хотел сдаваться.

— Ни за что! — сказал Роберт. — Не важно, сколько будет длиться твоя змея девяток, но ей всегда чего-то будет не хватать. Хотя бы ещё одной последней девятки!

— Не существует никакой последней девятки! — заорал Дух Числа.

Роберт пожал плечами. Сейчас его не страшил гнев Духа Числа. Каждый раз это случалось, когда в их споре возникал вопрос, который даже самому Духу Числа было трудно объяснить. Однако цепь девяток уже кружила над самой головой Роберта, а старика она окутывала так плотно, что его почти не было видно.

— Ладно. Я сдаюсь, — молвил Роберт. — Только избавьте меня от этих девяток.

— Вот так-то лучше, — сказал Дух Числа, с трудом поднимая вверх трость, всю обвешанную девятками. Потом он пробурчал что-то невнятное себе под нос, и в то же мгновение все девятки исчезли, как не бывали.

— Ух! — вздохнул Роберт. — Какие ужасные змеи могут создавать тройки и девятки. А другие числа тоже способны на это?

— Бесконечные цепи могут создавать любые числа, друг мой. Прикинь, сколько их может уместиться между 0,0 и 1,0?

Роберт задумался надолго.

— Бесконечно много! Столько же, сколько песчинок на пляже, Столько же, сколько от единицы до бесконечности!

— Мудрая мысль, мой мальчик! — одобрительно похвалил Дух Числа. — Но смог бы ты это доказать?

— Конечно, смогу.

— Тогда я жду.

— Всё, что нужно, это просто написать ноль, поставить запятую и после неё единицу, то есть: 0,1. Потом дальше, после единицы, я напишу двойку, потом тройку и дальше. Я могу сколько угодно продолжать дописывать любые числа к 0,1..., но мне никогда не добраться даже до 0,2.

— Для этого тебе понадобятся все целые числа.

— Конечно. Для любого целого числа от единицы до бесконечности мы можем поставить впереди ноль и запятую, и полученное число всегда будет меньше единицы.

— Отлично, Роберт! Я горжусь тобой! Ноль с запятой перед любым числом всегда образует число меньше единицы.

Дух Числа был явно доволен результатом, но он не умел останавливаться на достигнутом, и у него родилась новая мысль.

— Некоторые числа после запятой начинают вести себя очень странно. Хочешь, покажу?

— Пожалуйста, — сказал Роберт. — Надеюсь, что ими не будет потом кишеть весь пляж?

— Не стоит волноваться, — заверил его Дух Числа. — Твой огромный калькулятор позаботится об этом. Тебе нужно всего лишь набрать: семь разделить на одиннадцать.

Роберт сходу прийнявся за дело.

$$7:11 = 0,636363636363636 \dots$$

— Эй! Что происходит! — возмущённо воскликнул Роберт, увидев результат. — Похоже, все эти 63 собираются повторяться вечно.

— Конечно. Но это ещё ничего. Попробуй разделить шесть на семь.

Роберт взявся за калькулятор.

$$6:7 = 0,857\ 142857\ 142857\ldots$$

— Час от часу не легче! Теперь у меня снова и снова выскакивает число 857142. Оно так и будет вращаться по кругу?

— Я же говорил тебе, что многие числа ведут себя действительно фантастически. Честно говоря, совсем



обычных чисел и не бывает. Каждое число хранит свои секреты, и ты никогда не узнаешь их все. Например, та змея из девяток после нуля, которая, извиваясь до бесконечности, так и не может достичь единицы. А многие из них ведут себя ещё хуже. Они хоть и не повторяют одно и то же, но при этом и никогда не кончаются, уходя после нуля с запятой в бесконечность. Их называют иррациональными числами, потому что они отказываются играть по правилам. Удели-ка мне ещё минутку, и я покажу тебе кое-что.

Роберт уже знал, если Дух Числа вдруг становился вежливым и обходительным, значит, он задумал какую-то хитрость. Но Роберт был слишком любопытен, чтобы отказаться узнать новый секрет.

— Ладно, — сказал он. — Давай.

— Ты помнишь нашу игру с прыжками? То, что мы делали с двойкой, пятёркой и десяткой? Десять раз по десять раз и ещё по десять раз, получается тысяча. Мы это записывали:

$$10^3 = 1000$$

потому что так удобнее и быстрее.

— Верно! А когда мы прыгали с двойкой, то получали:

$$2, 4, 8, 16, 32$$

— И так далее, пока голова не распухнет, — добавил Роберт.

— Тогда скажи, — спросил Дух Числа, — сколько будет два, умноженное на себя четыре раза?

— Шестнадцать, — отрапортовал Роберт. — Неплохо я считаю?

— Великолепно, мой мальчик! А теперь сделай один прыжок обратно от того числа, которое я буду называть. Я говорю шестнадцать.

— Восемь!

— Тогда я тоже говорю восемь?

— Четыре, — почти не раздумывая, ответил Роберт. — А из четырёх один прыжок назад будет два.

— Вот мы и пришли к тому, с чего начинали. Я называю эти прыжки в обратную сторону вытягиванием репки с корнем. Давай-ка вытянем репку из ста? Это десять. А репка из тысячи — это сто. А как вытянуть репку из двадцати пяти?

— Двадцать пять? — переспросил Роберт. — Пятью пять будет двадцать пять. Значит, корень этой репки равен пяти.

— Продолжай в том же духе, Роберт, и однажды я назову тебя своим учеником! А сможешь ли ты назвать мне репку из 5929?

— Ты что, с ума сошёл! — воскликнул Роберт. — Каким образом, по-твоему, я должен решить эту задачу? Ты же сам говорил, что арифметика сама по себе бессмысленна. Хватит с меня господина Бокеля в школе. Не хватает ещё во сне заниматься такой ерундой.

— Успокойся, — сказал Дух Числа — Для таких ничтожных проблем у тебя есть карманный калькулятор.



— Карманный? Да этот калькулятор размером с диван у меня дома!

— Может быть, он и не многим меньше твоего дивана, но зато у него есть клавиша:



если ты, конечно, заметил это. И что она означает?

— Корень, — ответил Роберт.

— Правильно. Тогда попробуй его:

$$\sqrt{5929} =$$

Роберт нажал на кнопку, и сразу же его калькулятор-диван выдал ответ:

77

— Ну, теперь стой крепче на ногах и вытащи-ка мне репку из двух.

Роберт сделал, как просил Дух Числа:

1,4 142 1356237309504880 1688724...

— Ужас! — сказал он. — Белиберда какая-то! Полная каша. Я не вижу никакого смысла и порядка в этих цифрах.

— И никто не видит, мой дорогой Роберт. Эта репка не проста! Дело в том, что корень из двойки — это иррациональное число.

— Интересно, а я бы смог узнать, какие цифры будут дальше в этом числе? Мне кажется, что это не сложно.

— Ты прав! Только я боюсь, что не смогу тебе в этом помочь. Скорее калькулятор и я вместе с ним отдадим концы, чем сумеем добраться до последней цифры в этом числе!

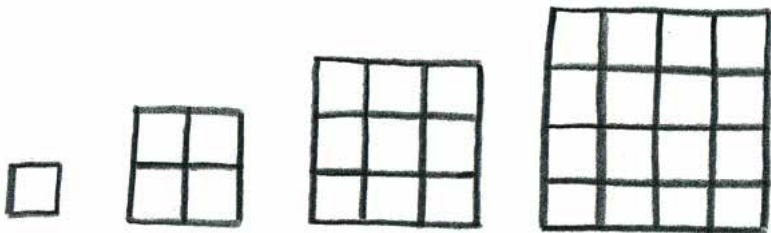
— Как всё запутано, — сказал Роберт. — Этот числовой монстр сводит с ума своим видом, но если записать его иначе, он выглядит совершенно безобидно:

$$\sqrt{2}$$

— Так и есть, — согласился Дух Числа. — Ладно, давай рассмотрим что-нибудь попроще.

Тростью на песке он стал чертить какие-то фигуры.

— Посмотри сюда, Роберт:



Представь, что это коробочки внутри каждого квадрата. Посчитай их и скажи, не видишь ли ты что-то особенное в них?

— Конечно, заметил. Все они подпрыгивающие числа.

$$\begin{aligned} 1 \times 1 &= 1^2 = 1 \\ 2 \times 2 &= 2^2 = 4 \\ 3 \times 3 &= 3^2 = 9 \\ 4 \times 4 &= 4^2 = 16 \end{aligned}$$

— Правильно, — сказал Дух Числа. — Теперь посмотри, как работает это правило. Сосчитай все коробочки внутри любого большого квадрата и сравни их с количеством коробочек по одной его стороне. Общее число коробочек в квадрате будет прыжком одной его стороны. И наоборот. Если ты возьмёшь, к примеру, квадрат площадью в 36 коробочек и извлечёшь репку из этого числа, то получишь количество коробочек вдоль одной стороны.

$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$$

— Отлично! — воскликнул Роберт. — Но как это связано с иррациональными числами?

— Ммм. Квадраты не так просты, как кажутся. Никогда не доверяй им и особенно их площади. С виду они могут казаться совершенно простыми, а на деле возьмут и обманут тебя. Посмотри, к примеру, сюда!

Взяв снова трость, старичок начертил на песке совершенно обычный квадрат. Затем вытащил из кармана красную палочку и положил её сверху по диагонали.



— Пусть каждая сторона имеет длину, равную единице.

— Единице чего? Один сантиметр или один метр? — перебил его Роберт.

— А это не важно, — отрезал Дух Числа. — Выбери что хочешь и так назови. Как говорится, хоть горшком назови, только в печку не ставь. Что ж, будем мерить его в горшках! — рассмеялся старичок. — Теперь назови мне, какой длины красная палочка?

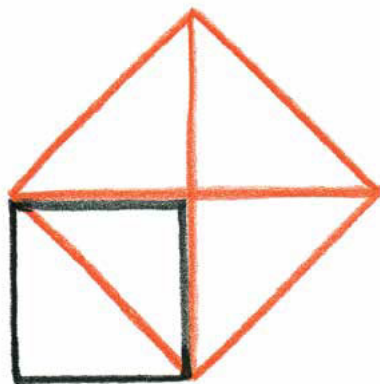
— Откуда я могу это знать?

— Репка из двух! — торжествующе воскликнул старик, сияя дьявольской улыбкой.

— С чего ты это взял? — спросил ошеломленный Роберт.

— Не волнуйся, — заявил Дух Числа, — сейчас ты сам всё увидишь. Всё, что нам нужно, это нарисовать ещё один квадрат под углом к этому.

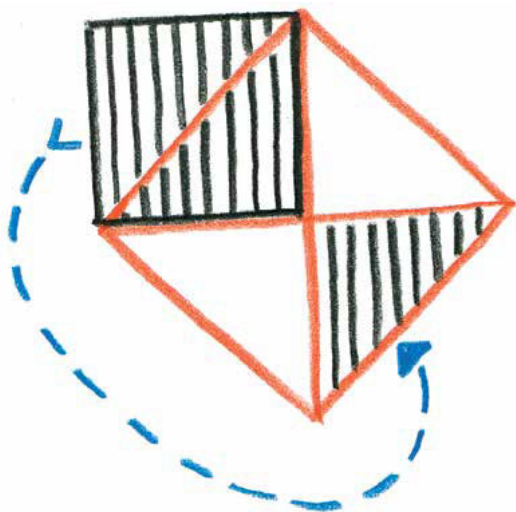
Он достал из кармана ещё пять красных палочек и разложил их на песке в виде нового квадрата. Теперь это выглядело так:



— Теперь, как ты думаешь, какого размера у нас получился красный квадрат?

— Понятия не имею.

— Он ровно вдвое больше чёрного, — сказал Дух Числа. — Чтобы это увидеть, нужно перенести отрезанную половинку чёрного квадрата и положить её на красный.



— Это напоминает мне одну игру из моего детства, — сказал Роберт. — Она называлась «рай и ад». В мешок или коробку высыпали красные и чёрные листочки бумаги, а потом, не глядя, доставали их по очереди. Кто вытаскивал чёрный листок, попадал в рай, а кто красный — в ад.

— Как видишь, в нашем случае красного вдвое больше, чем чёрного?

— Да, теперь это очевидно, — признал Роберт.

— Хорошо. Пусть площадь чёрного квадрата равна одному горшку, помнишь, мы договорились измерять длину его стороны горшками? Это можно записать как 1^2 . Какая же у нас будет площадь красного квадрата?

— В два раза больше, — сказал Роберт.

— Говоря иначе, это будет два горшка, — ответил Дух Числа. — Как теперь определить длину его стороны? Я подскажу тебе немного, для этого нужно сделать один прыжок назад.

— Рисуем репку! — воскликнул Роберт, поняв и увидев вдруг всю оригинальность и простоту этого решения. — Точно это репка! Репка из двух!

— И он возвращает нас к ужасному нерациональному числу: 1,414213 ...

— Остановись! — взмолился Роберт. — Ты продолжаешь сводить меня с ума с этим числом.

— Всё не так страшно, — заверил старик. — Тебе же не надо считать это число. Оно может так и оставаться записанным в виде корня из двух. Если ты думаешь, что такие числа встречаются редко, то глубоко ошибаешься. Напротив, их пруд пруди! Их больше, чем песчинок на этом пляже. Между нами говоря, они встречаются даже чаще других чисел.

— Я думал, что обычных чисел существует бесконечное количество. По крайней мере, ты сам раньше так говорил.

— Это действительно так. Честное слово! Но, как я уже говорил, иррациональных чисел намного больше.

— Больше, чем что? Больше, чем бесконечность?

— Именно так.

— Теперь ты уже зашёл слишком далеко, — твёрдо сказал Роберт. — Я отказываюсь тебе верить. Получается какая-то полная ерунда! Не может ничего быть больше, чем бесконечность.

— Ты хочешь, чтобы я доказал это? — спросил Дух Числа. — Не хочешь ли ты, чтобы я вызвал сейчас и сюда все иррациональные числа сразу?

— Нет, только не это! Мне хватило тех змей из девяток, и к тому же колдовство — не доказательство.

— Чёрт побери! — возмутился Дух Числа. — На этот раз ты меня поймал!

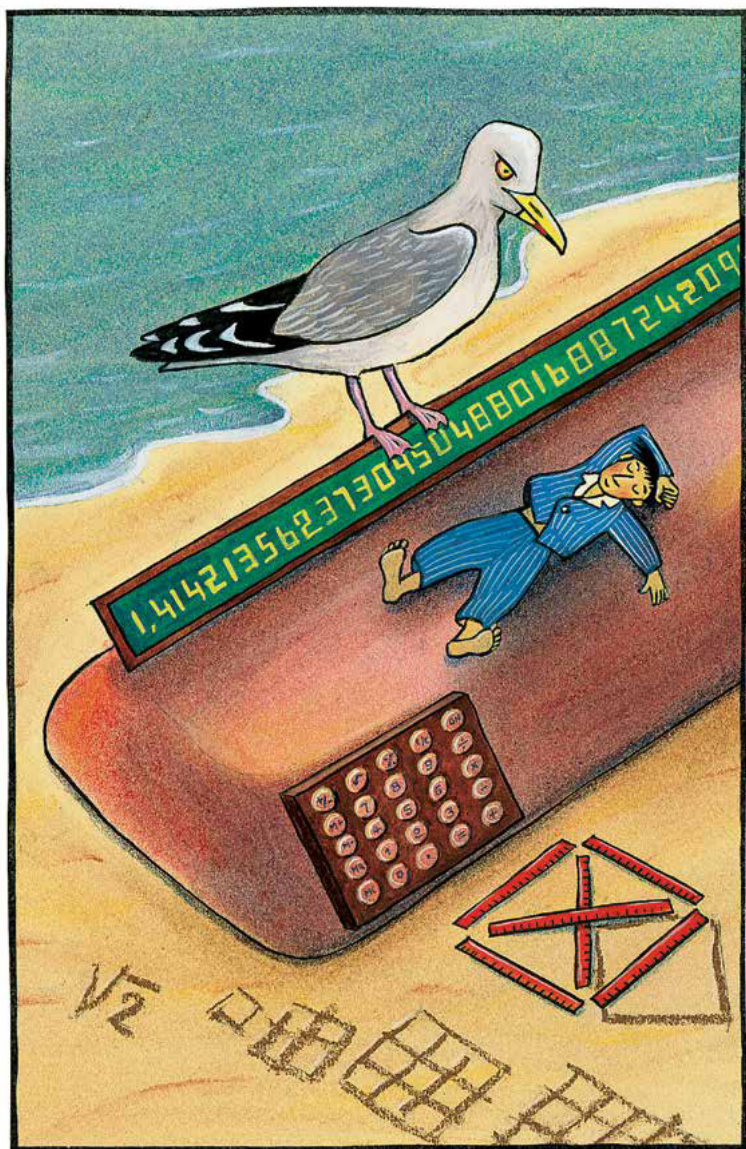
Похоже, в этот раз он был не сильно раздражён и потому только нахмурился и задумался надолго.

— Если ты будешь настаивать, — сказал он наконец, — я сумею найти другое доказательство.

— Нет уж, покорно благодарю, — ответил Роберт. — Я достаточно на сегодня устал и хочу выпаться. Мне ещё предстоит заниматься завтра в школе. Я вот думаю, не прилечь ли мне на этом калькуляторе, если ты не будешь возражать? Он вполне сгодится, чтобы заменить мне диван.

И Роберт улёгся на пушистый и уютный диван-калькулятор.

— Ладно, — сказал старик. — Спи. Во сне ты ещё лучше усвоишь наш урок. — И он удалился, осторожно



— Нет уж, покорно благодарю, — ответил Роберт. — Я достаточно на сегодня устал и хочу выспаться...
И Роберт улёгся на пушистый и уютный диван-калькулятор.

на цыпочках ступая по песку, чтобы не разбудить Роберта.

«Может быть, он и не так уж плох, — подумал, засыпая, Роберт. — В принципе, он часто бывает даже очень хорошим и забавным». Он спокойно уснул, и до самого утра ему больше не снились никакие сны.

Проснулся Роберт, когда утро уже заканчивалось и начинался новый день. И тут он вспомнил, что сегодня суббота, а в субботу не существует никаких занятий и никакой школы.



Пятая ночь



Вдруг всё закончилось. Роберт ждал и ждал своего гостя из царства цифр, но Дух Числа всё не приходил. Наступала ночь, он ложился спать, и, как обычно, ему снились сны. Это были обычные прежние сны, в которых не было дивана-калькулятора и прыгающих цифр, а были непонятные и странные вещи. Снились глубокие чёрные ямы, в которые он проваливался, или чулан, забитый старыми чемоданами с кишасщими вокруг них красными муравьями. Дверь чулана была заперта, и он не мог выбраться, а муравьи ползли по его ногам, поднимаясь всё выше. В другой раз он переправлялся через бушующий бурный поток реки, у которой, конечно же, не было моста. Он прыгал с камня на камень, и в тот миг, когда уже казалось что берег совсем рядом, все камни вдруг исчезли. Ни вперёд, ни назад, он остался посередине бушующего потока. Одни сплошные кошмары и нигде никакого Духа Числа.

«В обычной жизни я всегда могу решить, о чём хочу думать, а о чём нет, — думал про себя Роберт. — Но когда я сплю, я не властвую над мыслями. Почему, интересно?»

— Ты знаешь, — сказал он однажды вечером своей маме, — я принял решение, и с сегодняшнего дня больше никаких сновидений!

— Рада это слышать, мой мальчик, — сказала она. — После плохих снов ты рассеян и невнимателен в школе на уроках. В результате приносишь домой плохие оценки.

Конечно, это было совсем не то, что беспокоило самого Роберта, но вслух он сказал только «спокойной ночи, мама». Он знал, что всё рассказать маме он не может.

Не успел он закрыть глаза, как всё началось снова. Он бродил по пустыне, не находя ни тени, ни воды. На нем были только плавки, и он изнемогал от жары. Роберт побежал вперёд. Он бежал, изнемогая от жары, весь потный, бежал, пока на ногах не появились волдыри. Наконец он увидел впереди несколько деревьев. «Должно быть, это мираж, — подумал Роберт. — Но, может быть, это оазис». Прихрамывая, он приблизился к первой пальме и тут услышал хорошо знакомый голос:

— Привет, Роберт!

Он посмотрел вверх. Ну, конечно, это был он! Дух Числа раскачивался, сидя на верхушке дерева посредине пальмовых листьев. Казалось, что в пустыне он чувствовал себя как дома.

— Я умираю от жажды, — пробормотал Роберт.

— Забирайся ко мне, — пригласил Дух Числа.

Из последних сил Роберт вскарабкался на вершину пальмы. Старый знакомый протянул ему кокос, в кото-



Прихрамывая, он приблизился к первой пальме и тут услышал хорошо знакомый голос. Он посмотрел вверх. Ну, конечно, это был он!

ром заранее перочинным ножиком проделал отверстие для питья. Какой замечательный был вкус у этого кокоса!

— Давно не виделись, — сказал Роберт. — Где ты был?

— Уезжал в отпуск.

— А что мы будем делать сегодня?

— Я думал, что ты устал от своих странствий по пустыне.

— Не беспокойся, — сказал Роберт. — Я чувствую себя уже лучше. В чём дело? Может быть, у тебя кончились идеи?

— Мои идеи не могут иссякнуть, — ответил старик.

— Числа, цифры и снова числа.

— А что, есть что-то более захватывающее? Числа прекрасны! — При этих словах он подтолкнул в руки Роберту пустой кокосовый орех.

— Брось его!

— Куда?

— Просто вниз.

Роберт швырнул вниз на песок выпитый кокос. Сверху он казался совсем маленькой точкой.

— Вот ещё один орех. Кидай, — приказал старичок. — Теперь ещё и ещё.

— И зачем это нужно?

— Сейчас увидишь.

Роберт взял три свежих кокосовых ореха и бросил их вниз. Глядя с верхушки пальмы, были видны четыре пятнышка упавших кокосов:



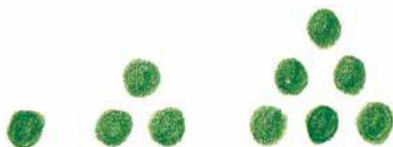


— Продолжай! — воскликнул старик.

Роберт бросил ещё, ещё и ещё.

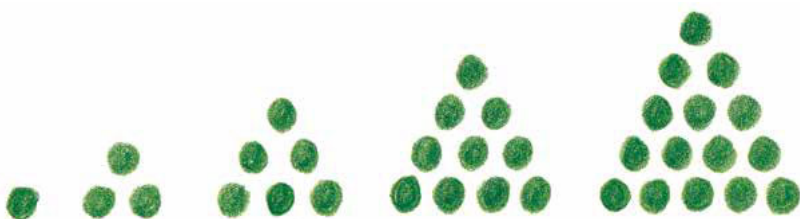
— Что ты видишь теперь?

— Стало больше точек. Они похожи на треуголь-
ники.



— Нужна помощь? — спросил Дух Числа. Он тоже
взял несколько орехов и бросил их вниз.

Они стали рвать кокосы и вместе бросать их с паль-
мы вниз. Так продолжалось, пока на песке не образо-
валось ещё несколько треугольников:



— Забавно, что орехи упали так аккуратно, — уди-
вился Роберт. — Я даже не целился! А если бы и старал-
ся, всё равно не смог бы уложить их так аккуратно.

— Конечно, — ответил Дух Числа. — Такой точности ты можешь достичь только во сне и ещё в математике. Математика способна создавать из многих вещей стройные картины, конечно, если ты умеешь ей пользоваться. Кстати, нам совсем не обязательно было бросать кокосы. С таким же успехом мы могли воспользоваться для этого теннисными мячами, или кнопками от застёжек, или вишней в шоколаде. Теперь давай посчитаем, сколько там внизу кокосов лежит в каждом треугольнике.

— Первый треугольник — вовсе и не треугольник, а точка. В нём всего один кокос.

— Или это очень маленький треугольник, — заметил Дух Числа. — Настолько крошечный, что превратился в одну видимую точку.

— Итак, мы снова вернулись к единице, — сказал Роберт. — Второй треугольник имеет три кокоса, третий — шесть, четвёртый — десять, а пятый — я не могу сказать так сразу. Подождите, мне нужно посчитать.

— Зачем? Не думаю, что тебе нужно их высчитывать. Попробуй сообразить.

— Боюсь, я не сумею, — сказал Роберт.

— Да я уверен, что сможешь, — подбодрил его старичок. — Смотри, первый треугольник так мал, что он вовсе и не треугольник, а просто один кокос. Второй треугольник на два кокоса больше. На те два нижних кокоса, которые лежат под первым. То есть:

$$1 + 2 = 3$$



$$3 + 3 = 6$$

— У третьего в нижнем ряду добавляется ещё три кокоса:

$$6 + 4 = 10$$

— Четвёртый получает дополнительный нижний ряд из четырёх кокосов:

$$10 + 5 = 15$$

— Так сколько же кокосов в пятом треугольнике?

К тому моменту Роберт уже едва сдерживал себя, чтобы не выкрикнуть ответ.

— Больше не надо бросать кокосы, — сказал Роберт, — я и так могу назвать следующие ответы. Следующий треугольник будет состоять из двадцати одного кокоса. Пятнадцать из предыдущего пятого треугольника и шесть новых.

— Замечательно, — сказал Дух Числа. — Теперь мы можем спуститься вниз и устроиться поудобнее.

Спускаться было удивительно легко, и когда они оказались на земле, Роберт не поверил своим глазам. Под пальмой их ожидали два сине-белых полосатых шезлонга, стоящие около большого бассейна, а возле них два стакана с холодным апельсиновым соком.

«Неудивительно, что старик выбрал этот оазис, — подумал Роберт. — Находиться здесь — это праздник души!»



— Теперь давай забудем о кокосах и вернёмся к цифрам, — предложил Дух Числа, когда их стаканы с соком опустели. — Эти числа весьма необычны. У них есть особое свойство, за которое их называют треугольными числами. Кроме того, этих чисел гораздо больше, чем ты думаешь.

— Я это предполагал, — сказал Роберт. — С тобой, за что ни возьмись, всё улетает в бесконечность!

— Это верно! — рассмеялся старик. — Но пока давай возьмём только первый десяток. Ты позволишь мне их написать?

Он встал с кресла и, взяв трость, подошёл к бассейну. Склонившись над водой, он начал выводить на её поверхности следующие числа:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 . . .

«Происходящее с эти стариком всегда выходит за рамки реального, — размышлял Роберт. — Небо

и песок для него как бумага, а теперь он пишет даже на воде».

— Ты не поверишь, на что способны эти треугольные числа, — шепнул ему на ухо Дух Числа. — Попробуй, просто для примера, найти разницу.

— Разницу между чем и чем? — спросил Роберт.

— Между двумя соседними треугольными числами. Роберт внимательно посмотрел на числа.

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 . . .

— Три минус один равно двум. Шесть минус три равно трём. Десять минус шесть равно четырём. Эти ответы идут по порядку, друг за другом. Как будто мы считаем от одного до десяти. Здорово! Наверно, и дальше всё будет продолжаться точно так же?

— Вот именно, — удовлетворённо ответил Дух Числа. — Но это ещё не всё! Выбери любое известное тебе число, и я докажу, что оно состоит из суммы двух или трёх треугольных чисел.

— Ну, хорошо, — сказал Роберт. — Пусть будет 51.

— Это проще простого! Его я сложу всего из двух чисел:

$$51 = 15 + 36$$

— 83!

— К Вашим услугам:

$$83 = 10 + 28 + 45$$

— 12!

— Всегда пожалуйста:

$$12 = 1 + 1 + 10$$

— Ты видишь, это правило работает всегда. А теперь, мой друг, я покажу тебе нечто действительно уникальное. Сложи вместе два стоящих рядом треугольных числа, и ты поразишься тому, что увидишь!

Роберт с удивлением смотрел на числа, проплывающие вблизи.

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 ...

Он начал складывать пары, стоящие вместе:

$$\begin{aligned}1 + 3 &= 4 \\3 + 6 &= 9 \\6 + 10 &= 16 \\10 + 15 &= 25\end{aligned}$$

— Так это же прыгающие числа: 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 !

— Неплохо, да? — улыбнулся Дух Числа. — Ты можешь так продолжать до бесконечности.

— Это замечательно, — сказал Роберт, — но я бы предпочёл испугнуться.

— Хорошо, но позволь мне перед этим показать тебе ещё один фокус.

— Здесь так жарко, — проворчал Роберт.

— Что ж, тогда я ухожу, — заявил Дух Числа.

«Теперь он точно обиделся, — подумал Роберт. — Если я сейчас отпущу его, то мне наверняка приснится какая-нибудь гадость, типа красных муравьёв». Поэтому он ответил:

— Нет! Я прошу тебя, останься.

— Ты этого хочешь?

— Конечно, я хочу посмотреть твой фокус.

— Тогда смотри внимательней. Что будет, если сложить все обычные числа от одного до двенадцати?

— Ой, — застонал Роберт. — Какая скучная задача! Это не похоже на тебя. Такие задачи любит задавать господин Бокель.

— Не волнуйся. С треугольными числами эта задача становится элементарной. Просто бери ряд треугольных чисел и считай до двенадцатого. Двенадцатое число и будет суммой обычных чисел от одного до двенадцати.

Роберт посмотрел на воду и принялся считать.

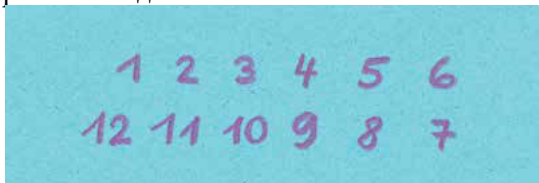
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 ...

— Семьдесят восемь, — объявил Роберт.

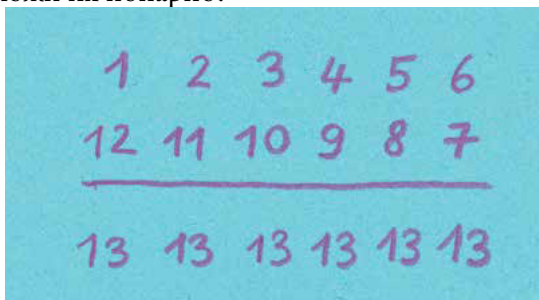
— Совершенно верно.

— Но как это получилось?

Дух Числа взял в руки своего помощника — трость и начертил на воде:



— Всё, что я сделал, это просто записал числа от одного до двенадцати в два ряда друг под другом. Первые шесть по порядку направо, а вторые шесть налево. Догадываешься, почему? Проведи под ними черту и сложи их попарно:



— Что получилось?

— Шесть раз по тринадцать, — сказал Роберт.

— Теперь тебе, наверно, нужен калькулятор? — спросил Дух Числа.

— Шестью тринадцать будет семьдесят восемь, — ответил Роберт.

— Двенадцатое в ряду треугольных чисел. Точно! — воскликнул старичок. — Ты видишь, какая за-

мечательная вещь эти треугольные числа. Кстати, квадратные числа, ничуть не менее интересны.

— Я надеялся всё же искупнуться.

— Искупаемся чуть позже. Сначала разберёмся с квадратными числами.

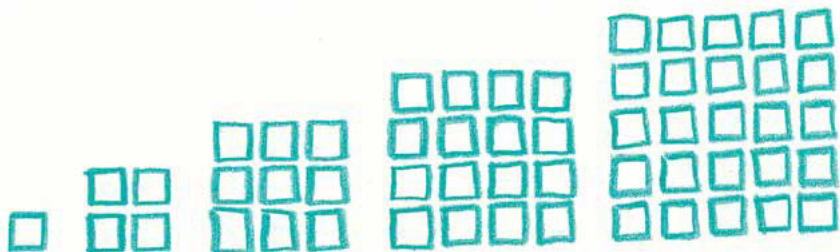
Роберт с тоской посмотрел на бассейн, в котором, словно выводок утят за мамой уткой, плавали друг за другом треугольные числа.

— Если ты продолжишь мучить меня, — пригрозил Роберт, — я проснусь, и все числа исчезнут.

— Вместе с бассейном, — предупредил Дух Числа. — К тому же ты не можешь управлять своими снами. Так или иначе, но кто здесь главный? Я или ты?

«Опять начинается, — подумал Роберт. — Ещё немного и он опять начнёт кричать. Конечно, я понимаю, что это просто сон, но даже во сне мне всё равно это неприятно. Да и Бог знает, что ему придёт в голову на этот раз».

Тем временем старик взял из холодильника несколько кубиков льда и собрал из них пять квадратов. Каждый следующий квадрат у него был больше предыдущего.



— Это совсем не сложно, — утешил он Роберта. — Точно так же, как с кокосами, только на этот раз вместо них будут кубики.

— Пожалуйста, не говори ни слова, — попросил Роберт. — Здесь и слепому всё ясно! Это прыгающие числа. Чтобы узнать площадь квадрата, нужно только посчитать количество кубиков льда по одной его стороне и, подпрыгнув, получить ответ:

$$\begin{array}{l} 1 \times 1 = 1^2 = 1 \\ 2 \times 2 = 2^2 = 4 \\ 3 \times 3 = 3^2 = 9 \\ 4 \times 4 = 4^2 = 16 \\ 5 \times 5 = 5^2 = 25 \end{array}$$

— Ну и так далее. Как обычно.

— Очень хорошо, — сказал Дух Числа. — Чертовски здорово! Ты блестящий ученик, мой дорогой!

— Только этот замечательный ученик очень сильно хочет искупаться, — проворчал Роберт.

— Может быть, ты хочешь узнать о других числах? Например, о пятигранных или шестигранных числах?

— Нет, спасибо, не очень, — ответил Роберт и прыгнул, не раздумывая, в бассейн.

— Постой! — закричал Дух Числа. — Бассейн переполнен числами. Подожди минутку, пока я их выловлю.

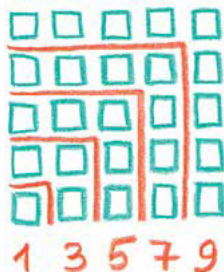
Но Роберт уже плыл вперёд, лавируя между цифрами, качающимися на волнах. Он плыл всё дальше

и дальше, уплывая от берега, и уже не слышал криков старика. Бассейн казался бесконечно огромным, как бесконечны сами числа, и столь же замечательным, как удивительные фокусы с их вычислениями.



Кто ещё не совсем запарился, как Роберт, может продолжить поиграть в кубики льда, пока они не растаяли. Вам нужно разделить квадрат несколькими угловыми линиями следующим образом:

И ниже Вы пишете, сколько кубиков внутри каждого из углов. Теперь сложите вместе все полученные числа от 1 до 9. Что получается? Думаю, полученный ответ покажется Вам очень знакомым!



А теперь сам проверь число 27. Ты удивишься, что это правило всегда работает, но даже я не могу объяснить почему...

Шестая ночь



-Ты, наверно, думаешь, что я такой единственный на всём свете? — сказал Дух Числа, когда появился в следующий раз. На этот раз он сидел на складном стульчике посреди бескрайнего поля картофеля.

— Какой ты единственный? — уточнил Роберт.

— Единственный Дух Числа. Но это не так. Я лишь один из многих. Райское место, откуда я родом, сплошь населено Духами Чисел. К сожалению, я даже не самый главный там. Есть там Старшие Духи, которые сидят в кругу своих Чисел и только размышляют. Иногда один из них может рассмеяться и сказать что-то вроде: « R_n равно h_n , умноженному на факториал f по n , скобка открывается плюс бета, скобка закрывается», и окружающие его Старшие Духи при этом смеются и одобрительно кивают. Иногда я и сам плохо понимаю, о чём они говорят.

— Ты тоже иногда чувствуешь себя глупцом? — спросил Роберт. — А я думал, что ты всегда во всём уверен! Но я всё равно очень рад, что встретил тебя в своих снах.

— Не пойми меня превратно, — сказал друг Роберта (теперь они оба чувствовали себя старыми друзьями

ми). — Я не имею ничего против того, что они там говорят наверху. К тому же среди них есть один, который мне особенно нравится. Его зовут Боначчи, или Фибоначчи. Он жил в Италии и умер уже много лет назад. Умер как человек, но как Дух Числа он, как и прежде, среди нас. Он был большим молодцом, этот Фибоначчи! Кстати, он одним из первых понял, как важен для вычислений ноль. Конечно, не он его придумал, но зато он придумал нечто весьма интересное, что мы теперь называем числами Фибоначчи. Идея была великолепной! Как и большинство хороших идей, она начиналась с начала, а точнее, с единицы! Или, ещё точнее, с двух единиц: $1 + 1 = 2$.



и так далее.

— До скончания века.

После этого объяснения Дух Числа откинулся на своем стуле и с восхищённым выражением на лице запел арию из оперы Фибоначчи:

— Один-два-три-четыре-восемь-тринадцать-двадцатьодин-тридцатьчетыре-пятьдесятпять-восемьдесят девять-стосорокчетыре-двеститридцатьтри-тристасемьдесятсемь...

От заунывного пения Роберт заткнул уши.

— Тебе не нравится, как я пою? — спросил Дух Числа. — Хорошо, я буду писать. Так тебе привычнее для запоминания.

— На чём ты собираешься писать?

— А на чём бы ты хотел? Может быть, на бумажной ленте?

Он открутил набалдашник своей трости и вытащил из него длинный и тонкий свиток бумаги.

Бросив на землю, он поддал по нему ногой, так что свиток в мгновение расстелился бесконечной лентой, вдоль картофельной борозды. Невероятно, как такое количество бумаги могло уместиться в одном маленьком набалдашнике трости! Лента всё кружилась и продолжала разворачиваться, пока конец её совсем не исчез за горизонтом, вместе с написанными на ней числами Фибоначчи:



1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Цифры на ленте улетали всё дальше и становились всё меньше, так что Роберт уже с трудом мог их различать.

— Что теперь? — спросил Роберт.

— Теперь, если ты возьмёшь сумму первых пяти цифр и прибавишь единицу, получишь седьмое число. Если к сумме первых пяти прибавишь шестое и единицу, то получишь восьмое число Фибоначчи. Ну и так далее.

— Понятно, — сказал Роберт, но явно без особого восторга.

— Это правило работает ещё одним интересным образом. Если записывать числа с пропусками, через одно, то сумма предыдущих будет равна следующему числу Фибоначчи. Только начинать надо так:

Отправляемся

$$1 + 1 = 2 ,$$

а теперь ты пропускаешь одно число

$$+ 3 ,$$

теперь ещё одно

$$+ 8 .$$

Снова одно и так далее

$$+ 21 .$$

Теперь, если сложить эти четыре числа вместе, что мы получим?

— Тридцать четыре, — ответил Роберт.

— Иными словами, это следующее число Фибоначчи после 21. Однако, если такой способ тебе кажется слишком громоздким, ты можешь вычислять новые числа с помощью прыжков. Например, возьмём четвёртое число Фибоначчи 3 и прыгнем на 3^2 . Получим?

— Девять, — сказал Роберт.

— Теперь возьмём следующее пятое число Фибоначчи 5 и тоже прыгнем с ним.

— $5^2 = 25$, — ответил Роберт без колебаний.

— Ну, а теперь сложим их вместе.

$$9 + 25 = 34$$

— Новое число Фибоначчи! — воскликнул Роберт.

— А теперь смотри: для его вычисления мы взяли четвёртое и пятое числа Фибоначчи. Четыре плюс пять равно девяти. Девятое число Фибоначчи — это тридцать четыре, — сказал старик, потирая руки.

— Я понял. Всё это очень хорошо, но скажи мне, для чего нужны эти числа Фибоначчи?

— О! — воскликнул Дух Числа. — Ты не задумывался над тем, что числа нужны не только в математике? Природе тоже нужны числа. Даже рыбы и деревья не могут обходиться без этих чисел.

— Какая ерунда! — воскликнул Роберт. — Ты, наверно, хочешь сделать меня ослом?

— Даже ослы, как и все прочие животные, живут в согласии с числовыми законами Фибоначчи. Может быть, некоторые из них понимают, как работают эти законы?

— Вот уж в этом я совсем сомневаюсь!

— Возьмём, к примеру, кроликов. С ними интересней, чем с рыбами. Здесь, на этом поле, точно есть кролики!

— Я их не вижу, — отозвался Роберт.

— Да как же, вон два!

И в тот же миг пара кроликов оказалась у самых ног Роберта.

— Я думаю, это Он и Она, — сказал Дух Числа. — Самец и самка вместе образуют одну пару. Как видишь, друг мой, опять всё начинается с единицы.

— Он хочет, чтобы я поверил, будто вы можете считать, — сказал Роберт, шутливо обращаясь к кроликам. — Но я не так глуп, чтобы верить в это.

— О! Роберт, а что ты вообще знаешь о кроликах? — воскликнули одновременно оба зверька. — Уверены, у тебя нет ни малейшего представления о том, кто мы и как живём. Наверно, ты представляешь нас хорошенькими беленькими зайчиками, прыгающими по снегу?

— Снежные зайчики, — ответил Роберт, желая показать, что он кое в чём разбирается, — это зимние животные.

— Именно так! Однако мы белые только до тех пор, пока совсем маленькие. Через месяц, когда мы подрастём, наша шёрстка становится бурой, и это значит, мы уже совсем взрослые. Мы образуем семьи и хотим иметь детей. Проходит ещё один месяц, и на свет появляются два маленьких крольчонка, девочка и мальчик.

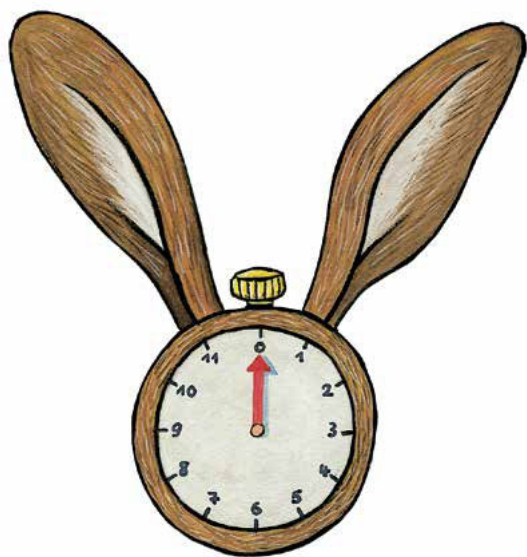
— Только двое? — спросил Роберт. — Я всегда думал, что у кроликов бывает огромное потомство. Даже есть поговорка: плодятся, как кролики!

— Так и есть, — сказал кролик. — У нас бывает очень много деток, но не сразу. Каждый месяц по два кролика, это совсем неплохо! Они месяц растут, и потом у них тоже рождаются детки. Вот увидишь.

— Не думаю, что буду здесь так долго, чтобы увидеть это. Пока ваши крольчата родятся, я уже проснусь и пойду в школу.

— Нет проблем, — вмешался в их беседу Дух Числа. — Здесь, на картофельном поле, время летит значительно быстрее, чем ты думаешь. Обычный месяц продолжается всего пять минут. Только для этого нужно воспользоваться специальными кроличьими часами, которые я как раз случайно прихватил с собой.

С этими словами старик вытащил из брюк огромные карманные часы. Это были странные часы с двумя большими кроличьими ушами с одной стороны и с циферблатом с другой. На циферблате у них была только одна стрелка:

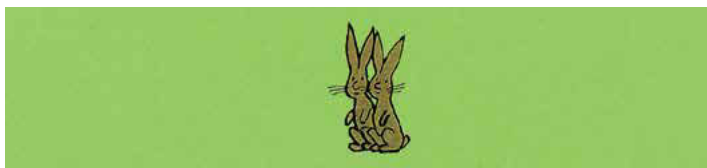


— Эта стрелка показывает не часы, а месяца, — объяснил Дух Числа. — А будильник звонит в конце каждого месяца. Стоит только нажать на верхнюю кнопку, и кроличье время пойдёт. Ну что, начинаем?

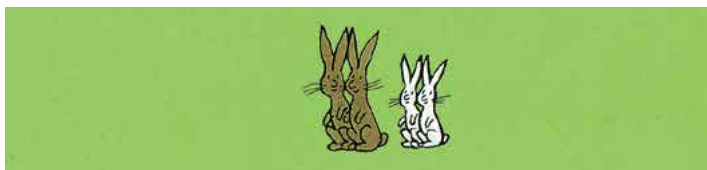
— Да, да, — воскликнули хором оба кролика.

— Вперёд!

Дух Числа нажал на кнопку, часы затикали и стрелка побежала вперёд. Когда она приблизилась к единице, раздался звонок. Месяц прошёл. Кролики тоже заметно повзрослели, и их белая шёрстка стала теперь бурой.

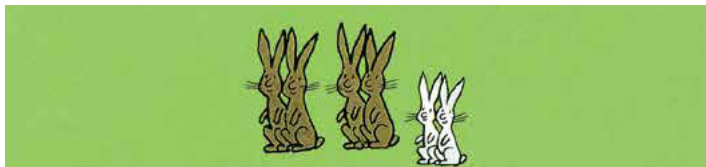


Стрелка часов всё бежала вперёд и уже приближалась к двум. Ещё чуть-чуть, и раздался звонок, означающий, что прошло уже два месяца. Роберт в ожидании посмотрел на кроликов, и тут появилась мама крольчиха с двумя маленькими беленькими крольчатами. Теперь было две пары кроликов, взрослая и молодая.



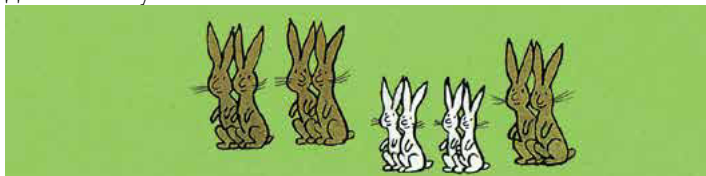
Однако кролики и не думали останавливаться на этом. Они хотели иметь ещё больше детей. Часы тем временем бежали вперёд и уже приближались к трём.

Звонок, и мама крольчиха вновь принесла ещё одну пару беленьких крольчат. Роберт считал пары. Их было уже три: самая старшая пара с тёмной шерсткой, их первое потомство, тоже успевшее сменить цвет на бурый, и рядом молоденькие беленькие крольчата.



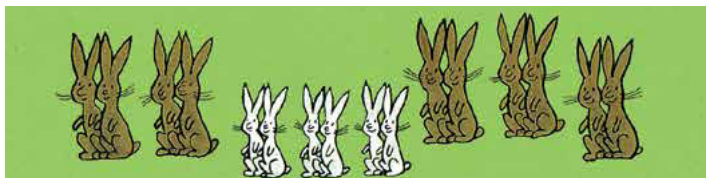
Когда стрелка приблизилась к четырём, произошло следующее: мать крольчиха-вновь принесла пару беленьких крольчат, и её старшая дочь, не желая отставать, — ещё двоих.

Теперь по картофельному полю прыгали уже пять пар, из которых три были бурыми, а две молодые пары детей и внуков беленькие.

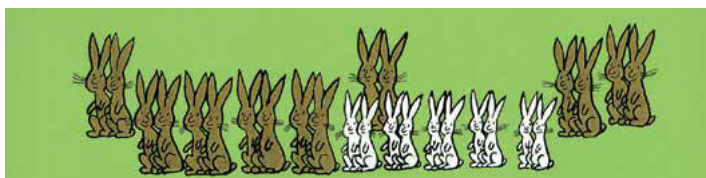


— Я бы на твоём месте даже не пытался их считать, — усмехнулся Дух Числа. — Это пустая трата времени!

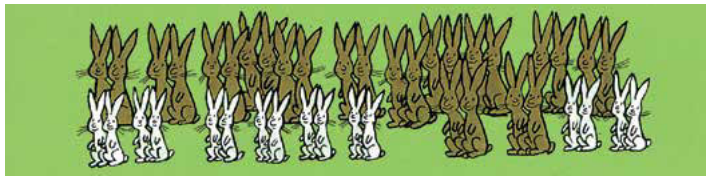
Однако, когда часы пробили пять и кроликов стало уже восемь пар, Роберт без особого труда смог снова их посчитать.



Часы пробили шесть, и появились тринадцать пар кроликов. «Прямо целая толпа, — подумал Роберт. — Пока я ещё могу их сосчитать, но интересно, чем это кончится?»



В семь месяцев Роберт уже с трудом смог определить их количество. Вокруг них бегала и прыгала 21 пара кроликов.



— Скажи, Роберт, тебе это ничего, не напоминает? — осведомился Дух Числа.

— Конечно, — вспомнил Роберт. — Это же числа Фибоначчи!

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...



*Часы, тем временем, неумолимо шли вперёд и уже повернули на второй круг.
— Помогите! — закричал Роберт. — Им нет ни конца, ни края. Их уже тысячи!*

В то время, пока они говорили, на свет появлялись всё новые пары кроликов.

Среди огромного числа бурых кроликов на поле весело резвились и прыгали молодые белые крольчата. Роберт уже просто не мог углядеть за всеми и тем более считать их. Часы, тем временем, неумолимо шли вперёд и уже повернули на второй круг.

— Помогите! — закричал Роберт. — Им нет ни конца, ни края. Их уже тысячи! Это уже не шутки, это кошмар!

— Итак, теперь ты видишь, как работает эта последовательность. Я специально набросал на листке небольшую табличку, из которой хорошо видно, что происходило от самого начала до седьмого месяца.

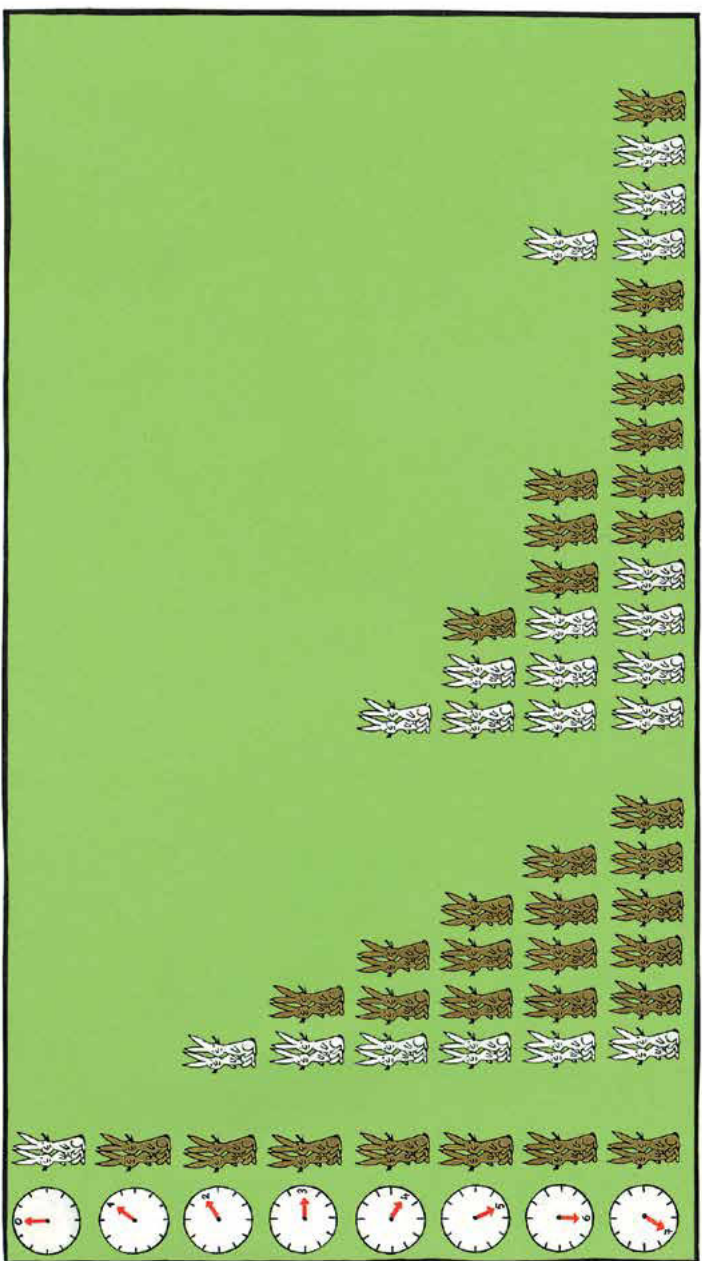
— Семь уже давным-давно прошло, — возмутился Роберт. — Сейчас у нас этих кроликов уже тысячи!

— А если точно: 4181 пара и через пять минут будет 6765.

— И ты позволишь им продолжать плодиться с такой скоростью? Тогда я чувствую, что очень скоро кролики заполонят собой всю землю!

— Скоро? Нет, Роберт, гораздо быстрее, чем ты думаешь! — сказал старик, не моргнув глазом. Ещё несколько раундов кроличьих часов, и этот момент настанет.

— Пожалуйста, не надо! — взмолился Роберт. — Это кошмар! Я ничего не имею против кроликов, они мне даже нравятся, но их слишком, слишком много. Ты должен это остановить.



— Хорошо, Роберт, но только в том случае, если ты признаешь, что кролики ведут себя так, как будто они знают числа Фибоначчи наизусть.

— О, Боже праведный, конечно, признаю! Однако поторопись, или очень скоро они будут прыгать у нас по голове.

Дух Числа дважды нажал на верхнюю кнопку часов, и они пошли в обратную сторону. Каждый раз теперь, когда звенел звонок, кроликов становилось всё меньше и меньше. После нескольких оборотов стрелки они совсем исчезли, и только два оставшихся белых кролика сидели посреди пустого картофельного поля.

— А что с ними делать? — спросил старик. — Хочешь, могу оставить их здесь?

— Наверно, не стоит, а то, боюсь, всё начнется заново.

— Да, так устроена природа, — сказал Дух Числа, блаженно раскачиваясь на своём складном стуле.

— Вот они какие, числа Фибоначчи, — заметил Роберт. — Не больно-то мне нравится, что они всякий раз вмиг уносятся в бесконечность.

— Но, как ты видел, они с таким же успехом могут быстро вернуться обратно. К тому, с чего всё начиналось.

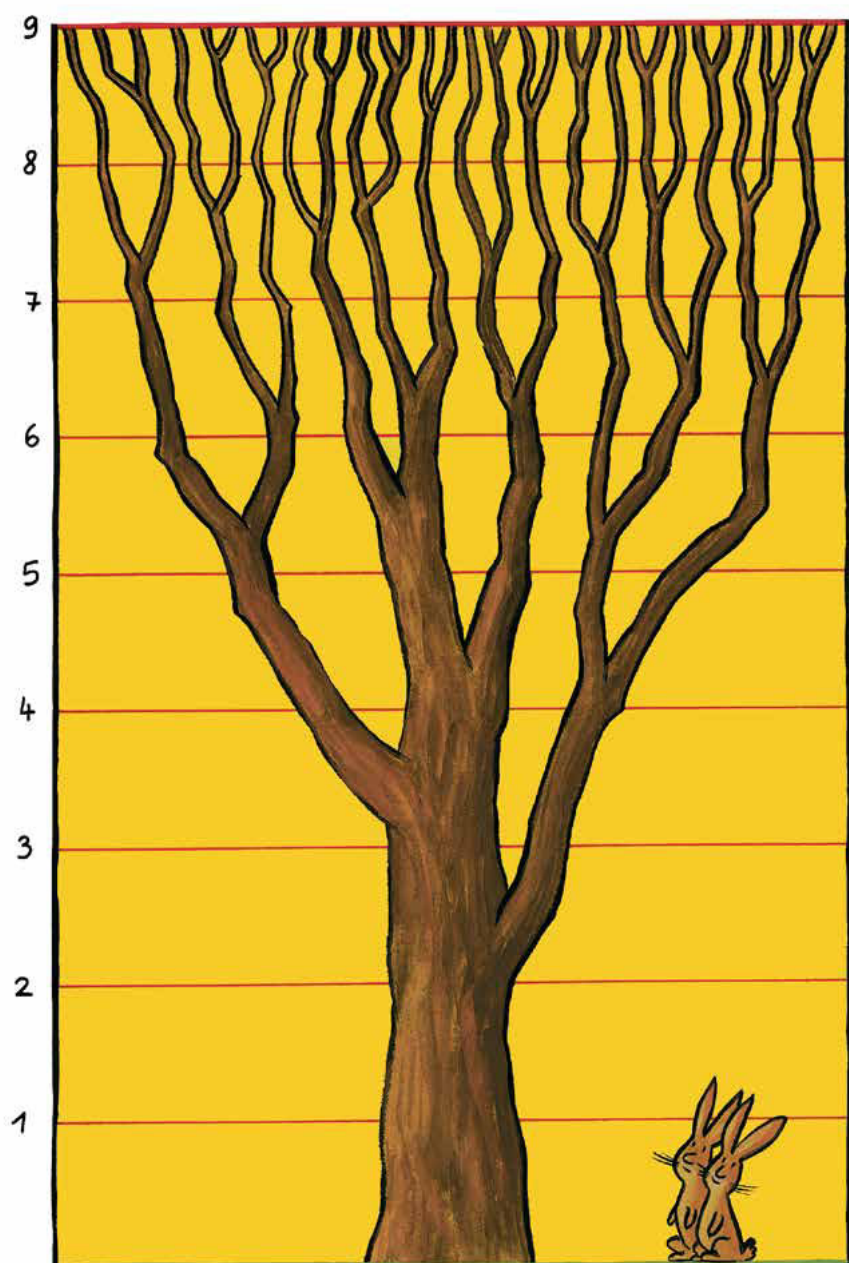
На этот раз Роберт и Дух Числа прощались мирно, оставив на картофельном поле резвиться пару молодых крольчат. Дух Числа отправился в свой Числовой рай, к своему старому другу Фибоначчи и другим приятелям, таким же, как он сам, любителям чисел, а Роберт

глубоко заснул, пока утром его не разбудил будильник. К счастью, это был совершенно обыкновенный будильник и никаких кроличьих ушей.



Если Вы до сих пор сомневаетесь в том, что природа действует именно так, словно знает всё о числах, взгляните на дерево на следующей странице. Может быть, кого-то из Вас запутали кролики, тогда ему будет легче разобраться с деревом. Оно не будет прыгать по полю, и Вы легко пересчитаете все его ветви.

Начните с первой нижней красной линии № 1. Она пересекает только ствол, как и линия № 2. Линия № 3 уже пересекает не только само дерево, но первую появившуюся ветку. Продолжайте считать. Сколько веток Вы насчитаете на самой верхушке дерева на уровне линии № 9?



Седьмая ночь



-Я очень волнуюсь, — сказала как-то раз мама Роберта. — Раньше мальчик всё время гулял во дворе, и со своими друзьями Альбертом, Чарли и Энрике они частенько гоняли в футбол. Теперь же он всё время запирается в своей комнате. Делает школьные задания, а потом расстилает перед собой большой рулон бумаги и рисует на нём тысячи кроликов.

— Тише, мама! — попросил Роберт. — Ты сбиваешь меня. Я не могу сосредоточиться.

— Потом он всё время бормочет какие-то числа. Это ненормально.

Она разговаривала сама с собой, как будто не замечая присутствия Роберта.

— Раньше он никогда не проявлял интереса к числам. Даже напротив, слышал бы кто, как он поносил своего учителя математики господина Бокеля за его домашние задачи.

— Шёл бы подышать свежим воздухом! — сказала мама, поворачиваясь к Роберту.

Роберт поднял голову от стола.

— Ты права, мама. Если я продолжу считать этих кроликов, то моя голова скоро лопнет.

Роберт вышел из дома и пошёл в городской парк. Вокруг было много зелени, деревьев и большой луг в центре парка, на котором не было ни одного кролика.

— Привет, Роберт! — воскликнул Альберт, когда увидел его. — Ты будешь играть с нами?

Его друзья, Энрике, Герхард, Иван и Карл, играли в футбол, но Роберту не захотелось присоединиться к ним. «Ведь они понятия не имеют, как растут деревья!» — подумал он.

Он вернулся домой уже довольно поздно. Сразу после ужина Роберт отправился спать в свою комнату, по пути незаметно сунув в карман своей пижамы толстый фломастер.

— С каких это пор ты сам так рано ложишься спать? — поинтересовалась мама. — Раньше я с трудом загоняла тебя в кровать.

Роберт прекрасно знал, с каких пор и почему его так манит сон, но не мог же он рассказать об этом маме. Она бы всё равно не поверила, что кролики, деревья и даже рыбы рождаются и живут в точном соответствии с числами, которые поведал ему его друг Дух Числа.

Едва только голова Роберта коснулась подушки, Дух Числа был тут как тут.

— Сегодня я покажу тебе кое-что очень важное, — сказал он.

— Что угодно, только не кроликов. Они преследовали меня весь день, и моя голова идёт кругом от этих белых и бурых.

— Забудь о них. Пойдём!

И он привёл Роберта к большому белому дому в форме куба. Внутри дома тоже всё было белое, даже лестницы и двери. Они вошли в большую, пустую белоснежную комнату.

— Здесь даже присесть некуда, — пожаловался Роберт. — А что здесь делают эти камни?

Роберт подошёл к высокой груде камней, сваленных в углу комнаты, и стал внимательно рассматривать их. Камни были необычными.

— Они похожи на кубики, сделанные из стекла или прозрачного пластика, — заметил Роберт. — К тому же у них внутри что-то светится. Что-то искусственное, электрическое.

— Да, электрическое, — согласился Дух Числа. — Давай строить из них пирамиду!

Он взял несколько кубиков и разложил их на белом полу.

— Давай, Роберт, не скучай!

И они вместе выложили эти кубики в ряд друг за другом:



— Стоп! — внезапно воскликнул Дух Числа. — Сколько кубиков мы уже уложили?

Роберт принялся считать.

— Семнадцать, — объявил он. — Самое заурядное число.



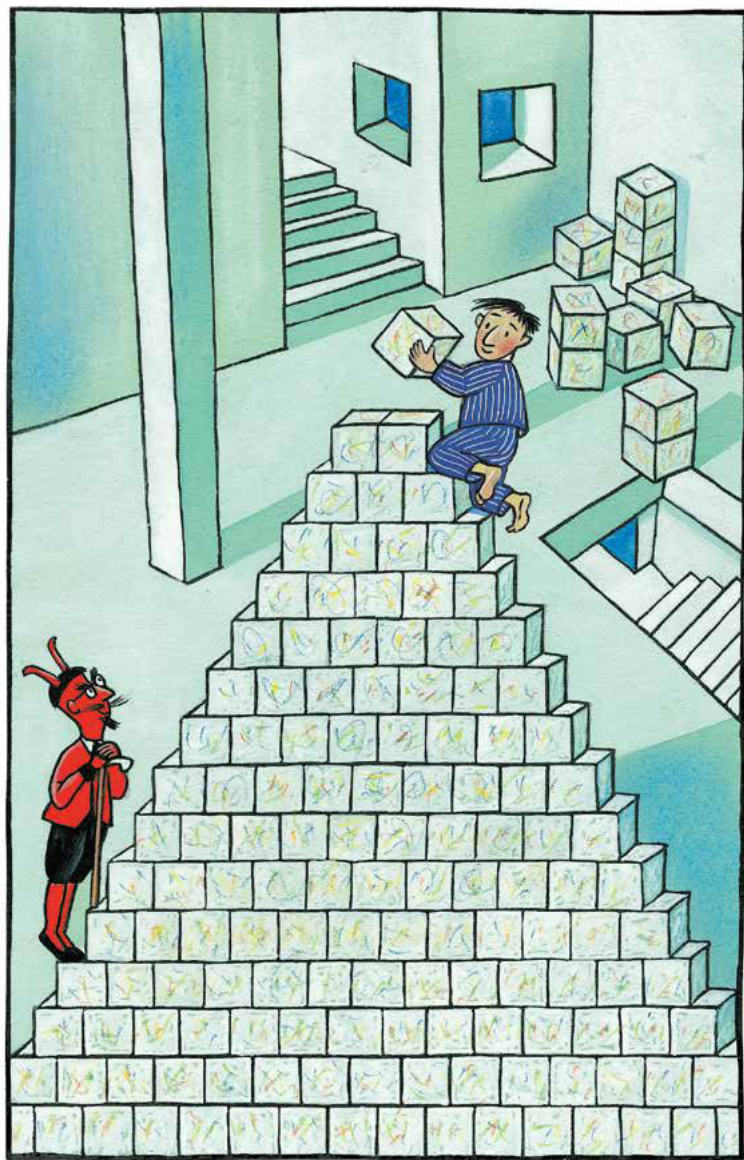
— Не такое и заурядное, как ты думаешь! Попробуй вычти из него единицу.

— Получится шестнадцать. Опять прыгающее число. Чтобы его получить, двойка должна прыгнуть четыре раза — 2^4 .

— Это верно, — одобрительно кивнул Дух Числа, — но ты заметил ещё не всё. Давай вернёмся к нашей стройке. Теперь будем класть кубики сверху так, чтобы они попадали на стык двух нижних. Так делают каменщики, когда кладут кирпичную стену.



— Давай, — согласился Роберт. — Жаль, что пирамиду нам построить не удастся. У пирамиды в основании должен лежать треугольник, или прямоугольник, а наша конструкция получится совсем плоской. Но зато мы можем построить треугольник.



— Они похожи на кубики, сделанные из стекла или прозрачно-го пластика, — заметил Роберт. — К тому же у них внутри что-то блестит. Что-то искусственное, электрическое.

— Ну и хорошо, — сказал Дух Числа, — значит, будем строить плоский треугольник.

И они продолжили строительство, пока всё не закончили.

— Готово! — воскликнул Роберт.

— Как готово? Не торопись, всё ещё только начинается!

С этими словами старик вскарабкался по ступенькам треугольника на самый верх и на самом верхнем кубе написал единицу.

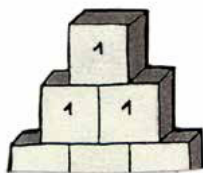
— Как всегда, — пробормотал Роберт. — Опять ты со своей единицей.

— Конечно, — ответил старик. — Всё начинается с начала, и мы с тобой всегда начинаем с единицы.

— Ладно, а что будет дальше?

— Сейчас увидишь! На каждом нижнем кубике мы будем писать сумму кубиков, стоящих над ним.

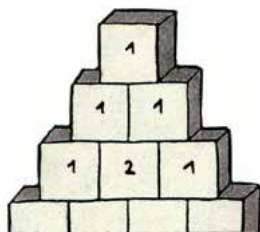
— И всего-то? — спросил Роберт и, вытащив из кармана припрятанный там фломастер, смело написал:



— Всё те же единицы, — усмехнулся он. — Калькулятор мне пока не требуется.

— Скоро всё изменится, — предупредил Дух Числа. — Двигайся дальше!

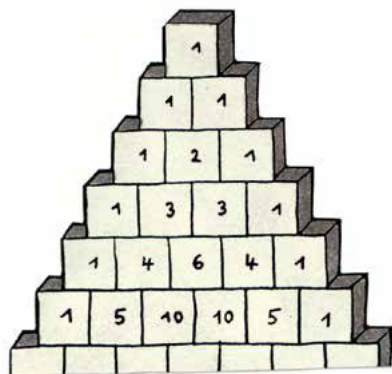
И Роберт продолжил:



— Примитивное занятие. Забава для малышей!

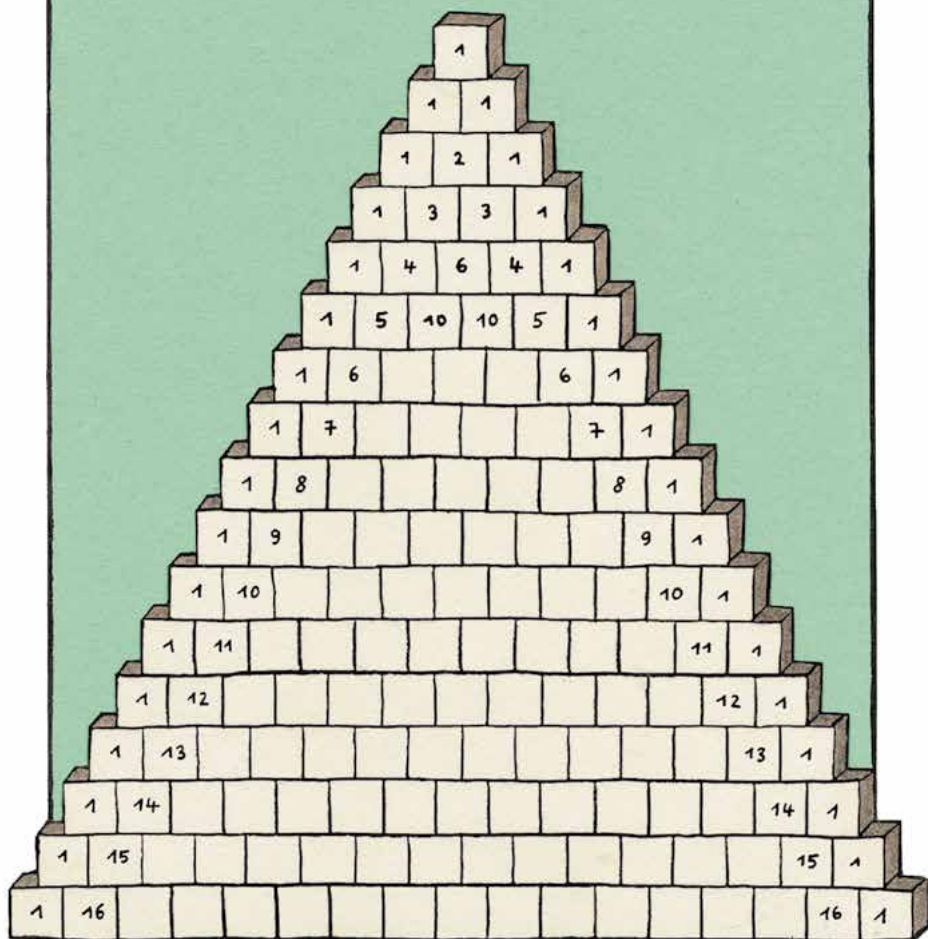
— Не будь таким дерзким, мой дорогой, — сказал старик. — Просто продолжай делать то, о чём мы договорились.

Роберт не возражал и продолжал писать:



— Я заметил, что все цифры по краям нашего треугольника — единицы. И это не изменится, независимо от того, на сколько рядов я опущусь. А вот числа в следующей диагонали вдоль обеих сторон треугольника — это простой ряд обычных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Роберт не возражал и продолжал писать,
опускаясь всё ниже:



— А что ты скажешь по поводу второго ряда диагонали? Того, который идёт ниже 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Назови мне первые четыре числа, — попросил Дух Числа, хитро улыбаясь.

Роберт начал читать, двигаясь по диагонали третьего ряда от вершины треугольника к левому нижнему краю.

— 1, 3, 6, 10, ... Ой! Что-то знакомо мне в этих числах.

— Кокосы, помнишь кокосы! — воскликнул старик.

— Точно! Я помню их. 1, 3, 6, 10, — это же треугольные числа!

— А как мы их получили?

— К сожалению, я забыл это, — сказал Роберт.

— Очень просто:

$$1 + 2 = 3$$

$$3 + 3 = 6$$

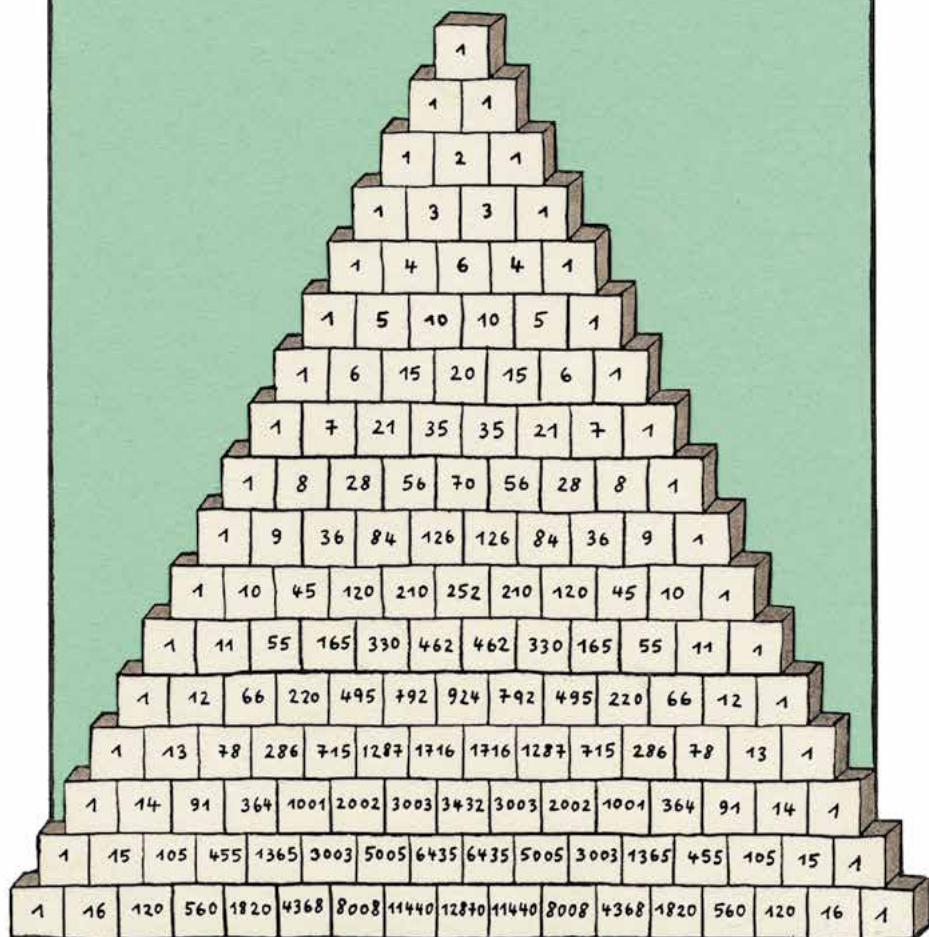
$$6 + 4 = 10$$

$$10 + 5 = 15$$

— ... $15 + 6 = 21$, — продолжил Роберт.

— Ты молодец!

Теперь Роберт без особого труда продолжил вписывать следующие числа в нижние кубики.



С одной стороны, его задача упростилась, и, приближаясь к основанию треугольника, Роберт чувствовал, что скоро закончит эту работу, но с другой стороны числа становились всё больше, и он уже с трудом выписывал их на маленьком кубике.

— Нет, — наконец не выдержал Роберт. — Я больше не в состоянии складывать в уме такие числа.

— Вот незадача, — улыбнулся Дух Числа. — Ладно, не волнуйся. В конце концов, я же Дух Чисел и с большим удовольствием помогу тебе.

В тот же миг с молниеносной скоростью весь треугольник заполнился числами до самого низа.

— Как они все поместились? — удивился Роберт. — Даже 12 870 втиснулось!

Ещё раз хочу заметить! Не подумайте, что все эти числа нужны для того, чтобы вы ломали себе голову. Вовсе нет! Даже наоборот, они созданы для самых ленивых. Для тех, кому лень складывать длинные числа. Допустим, вам нужно найти сумму первых двенадцати треугольных чисел. В таком случае проведите пальцем вниз и направо по третьей диагонали, той, что начинается с 1, 3, 6, 10 и далее до двенадцатого кубика. Посмотрите на число, которое стоит под ним слева. Что вы видите?

Таким образом, вы сохранили свои силы и время, не решая следующий пример: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 = ?$

И это правило справедливо для любой диагонали треугольника. Если, суммируя числа, спускаться вниз и вправо, то их общая сумма будет находиться под последним кубиком, слева, и наоборот.

— Это сущие пустяки! Ты, наверно, даже не догадываешься, сколько всего интересного заключено в этом треугольнике? — спросил Дух Числа. — Это не просто треугольник, это экран монитора. Ты же заметил, что у всех этих кубиков внутри есть электронный свет? Всё, что мне нужно сделать, это просто включить его.

Дух Числа хлопнул в ладоши, и в потемневшей комнате белым светом вспыхнул весь треугольник. Он вновь хлопнул в ладоши, и самый верхний кубик зажёгся ярко-красным светом, как светофор.

— Ну, вот и наша любимая единица, — обречённо промолвил Роберт.

Старик снова хлопнул в ладоши, и вместо верхнего кубика алым светом зажёгся второй ряд.

— Не мог бы ты помочь мне посчитать их сумму? — спросил Дух Числа.

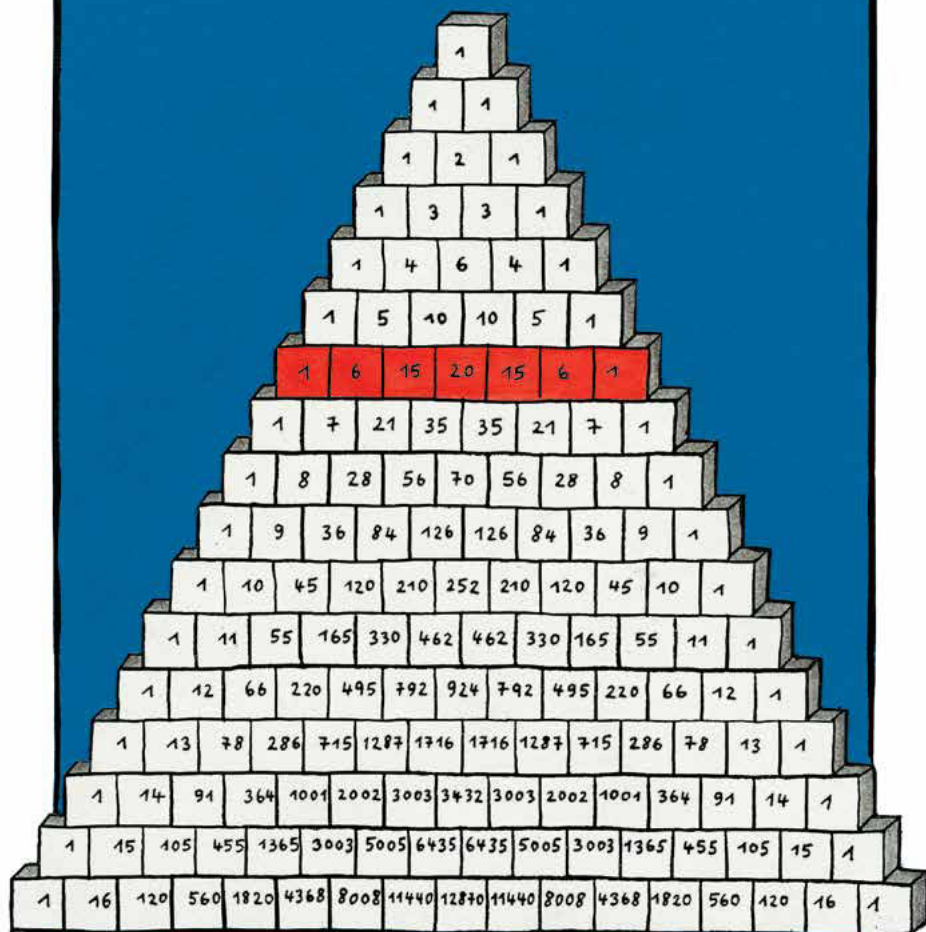
— $1 + 1 = 2$, — пробормотал Роберт. — Подумаешь, сложность!

Старик вновь хлопнул в ладоши, и теперь кубики третьего ряда засветились красным светом.

— $1 + 2 + 1 = 4$, — ответил Роберт. — Я понял, я понял! — воскликнул вдруг он, — можешь больше не продолжать и не хлопать. Это наш старый друг, прыгающая двойка. Следующий ряд будет $2 \times 2 \times 2$, или 2^3 , в общем, это будет 8. Далее 16, 32, 64, пока не опустимся до самого основания треугольника.

— В последней строке сумма чисел будет равна 2^{16} , — сказал Дух Числа. — Да будет тебе известно, это достаточно большое число, 65 536.





— Я бы мог обойтись и без него.

— Ладно, не бойся, — дружелюбно ответил Дух Числа.

Он хлопнул в ладоши ещё раз, и все кубики погасли.

— Не хочешь ли ты повидать старых друзей? — спросил он.

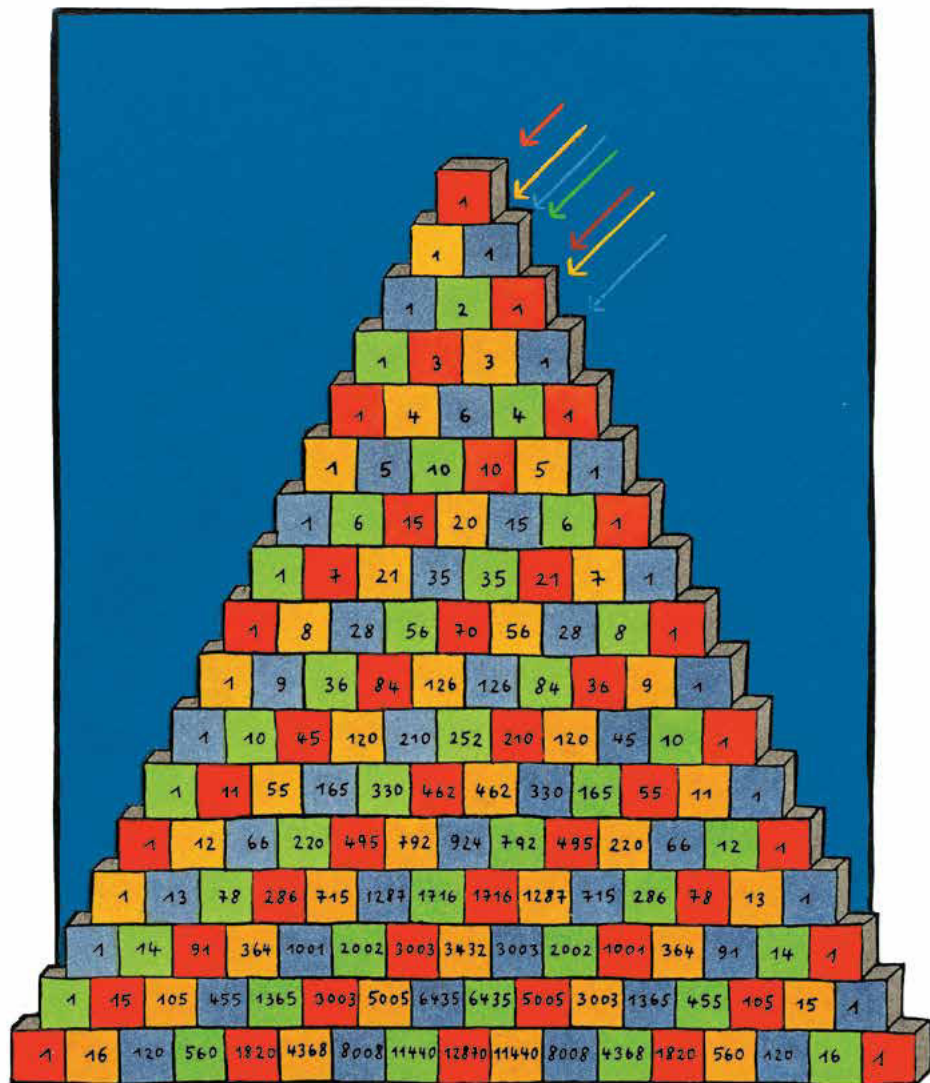
— Смотря кого.

Старик хлопнул в ладоши три раза, и кубики вспыхнули вновь. Но на этот раз они светились разным цветом: одни жёлтым, другие синим, третьи зелёным и остальные красным.



— Выглядит как новогодняя ёлка, — заметил Роберт.

— Лучше внимательно взгляни на эту цветную лестницу. Видишь, как кубики одного цвета образуют диагонали, ведущие от правой верхней стороны треугольника в левую нижнюю. Они расположены друг под другом, но не совсем ровно по диагонали, а со сдвигом ещё на пол кубика. А теперь попробуй сложить вместе все числа на кубиках одного цвета в такой диагонали. Начинай с верхнего красного!



— Красный сам по себе, — сказал Роберт. — Он один на вершине, и ответ единица.

— Чуть ниже под ним жёлтый.

— Он тоже сам по себе, и это тоже единица.

— Далее ниже идет синий. Синих кубиков два, и на обоих написана единица.

— $1 + 1 = 2$.

— Ниже под ним зелёный. Зелёных тоже два, но на одном из них двойка.

— $2 + 1 = 3$.

Роберт начал догадываться, что будет дальше.

— Снова красный, и теперь: $1 + 3 + 1 = 5$. Дальше опять жёлтый: $3 + 4 + 1 = 8$. Синий: $1 + 6 + 5 + 1 = 13$.

— Что могут значить эти числа: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...?

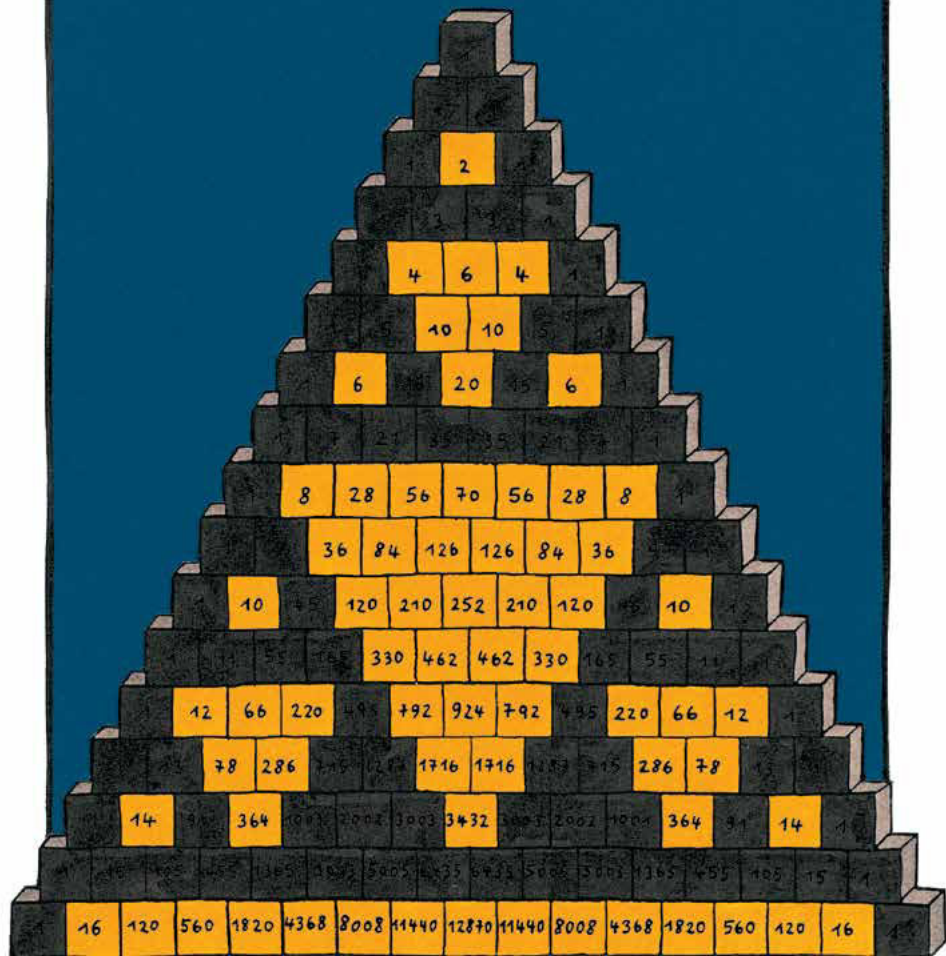
— Ну конечно! Это же числа Фибоначчи! Наши старые знакомые — кроличьи числа.

— Ты видишь, они тоже сидят внутри нашего треугольника, — сказал Дух Числа. — Я бы мог открыть тебе ещё много его тайн, но для этого нам потребуется не один день. Но сдаётся мне, что тебе уже достаточно открытий на сегодняшний день?

— Уже трижды достаточно, — согласился Роберт.

— Ну, хорошо, давай закончим, — сказал Дух Числа и, хлопнув в ладоши, погасил все красочные светящиеся кубики. — Жаль только, что ты не узнаешь, что я могу сделать ещё одним хлопком. А ведь я могу зажечь только чётные числа, а все нечётные оставить погашенными. Хочешь взглянуть на это?

— Специально для меня? Ну, давай!



Роберт был поражён! Увиденное зрелище стало для него настоящим сюрпризом.

— Это фантастика! Удивительный узор, — воскликнул Роберт. — Внутри большого треугольника образовались новые треугольники меньше размером и перевёрнутые с ног на голову.

— Причём они разные, большие и маленькие, — заявил Дух Числа. — Самые маленькие из них выглядят как куб, но на самом деле в них тоже скрыты треугольники. Средние состоят из 6 кубиков, а самый большой из 28, и, кстати, это ведь тоже треугольные числа. Сейчас у нас все чётные числа горят жёлтым светом. Чётные — это те, что делятся на два. А как ты думаешь, что произойдёт с нашим монитором, если высветить все числа, которые делятся на три, на четыре или на пять? Для этого мне достаточно лишь вновь хлопнуть в ладоши. Ну, что ты выбираешь? Пробуем пять?

— Давай, — сказал Роберт. — Зажигай все, что делятся на пять.

Дух Числа снова хлопнул в ладоши. Погасли все жёлтые кубики, и тут же вспыхнули зелёные.

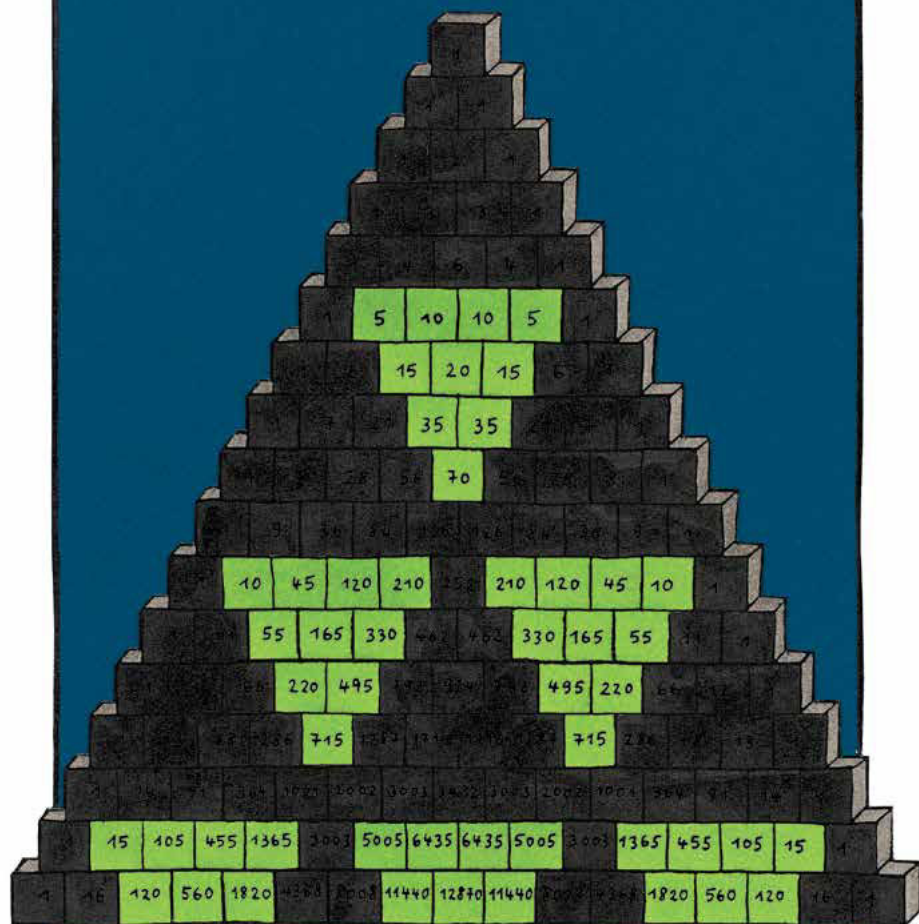
— Никогда бы не подумал, что вновь увижу новый узор из треугольников, — задумчиво произнёс Роберт. — Это какое-то наваждение!

— Да, мой друг, я сам часто спрашиваю себя, где заканчивается математика и начинается волшебство.

— Фантастика. Это всё твои фокусы?

— Нет, — спокойно ответил Дух Числа.

— Тогда чьи?



— Бог знает! История треугольников уходит в глубь веков. Она гораздо старше меня.

— Но ты тоже не похож на младенца.

— Я? Да как ты можешь судить обо мне? — возмутился старик. — Я один из самых молодых духов в нашем Числовом раю. А история нашего треугольника насчитывает более двух тысяч лет. Мне кажется, его придумали в Китае. Какому-то древнему мудрецу в голову пришла замечательная мысль, и он создал его, а мы с тех пор продолжаем играть с этим треугольником, и он продолжает открывать нам всё новые фокусы.

«Если он так будет продолжать, — подумал Роберт, — то это никогда не кончится». И, хотя он не сказал об этом вслух, похоже, Дух Числа понял его.

— Да, математика — это бесконечная история, — сказал он. — Стоит копнуть чуть глубже, и откроются новые секреты.

— Значит, ты никогда не сможешь остановиться? — спросил Роберт.

— Я нет, — прошептал Дух Числа. — Но ты...

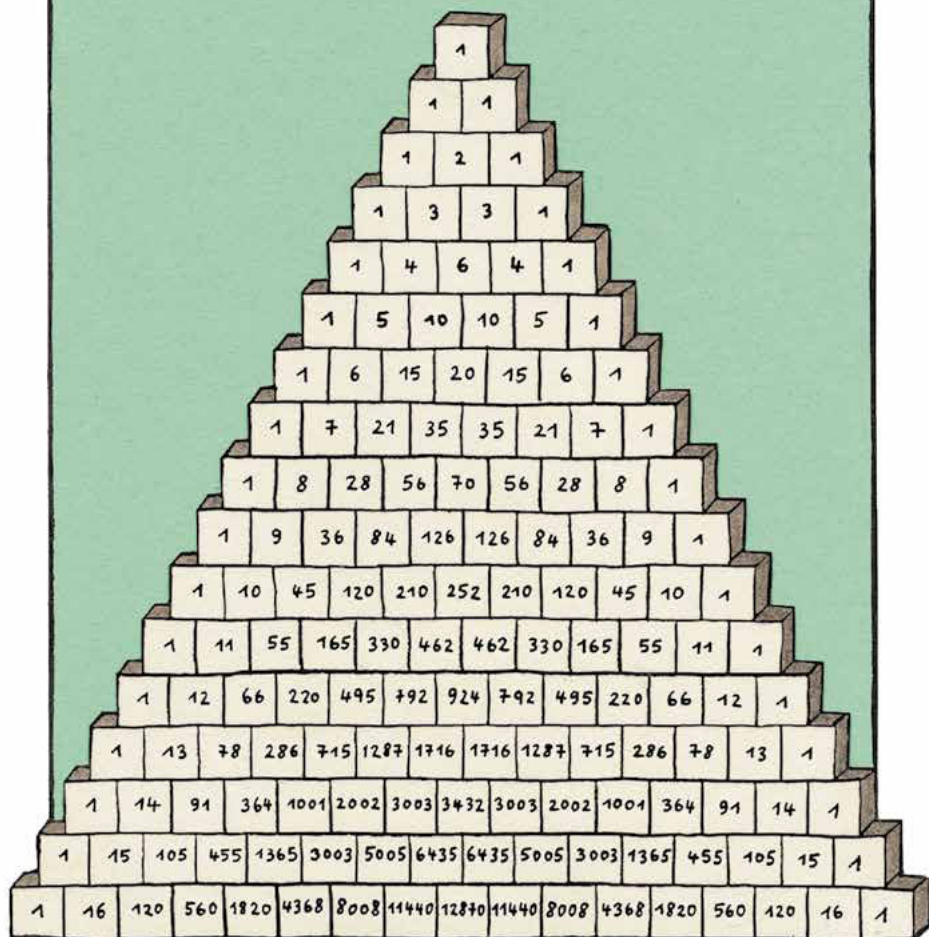
Пока он это говорил, зелёные кубики начали бледнеть и таять, а сам Дух Числа становился всё тоньше и тоньше, пока не превратился в совсем тонкую исчезающую нить. И в следующее мгновение всё потухло, погасло и растворилось в воздухе, не оставив даже тени. В комнате стало темно и тихо. В памяти у Роберта стали исчезать яркие цветные кубы и треугольники, числа Фибоначчи и даже сам его друг Дух Числа.



Он спал и спал, и когда проснулся, увидел маму.
— Ты что-то бледен сегодня, Роберт, — сказала она. — Опять снились кошмары?
— Да нет! — сказал Роберт. — С чего ты это взяла?
— Не нравишься ты мне.
— Брось, мама, — ответил Роберт. — Не так страшен чёрт, как его малюют!

Знает ли кто-нибудь, что будет на экране монитора, когда зажгутся все числа, кратные четырём? Попробуйте сами! Для этого не нужен Дух Числа. Перерисуйте треугольник, нарисованный на следующей странице, и закрасьте цветным карандашом все числа из таблицы умножения на четыре. Потом для больших чисел воспользуйтесь калькулятором. Выбираете число из нашего треугольника и делите его на 4. Если ответ получается без остатка, это число в треугольнике тоже закрасьте цветом.





Восьмая ночь



Роберт стоял у доски. За первой партой сидели двое его друзей — Альберт, с которым Роберт обычно играл в футбол, и Бетти с тонкими косичками. И, как всегда, они спорили друг с другом.

«Только этого мне не хватало, — подумал Роберт. — Теперь мне уже школа снится».

В этот момент распахнулась дверь, и в класс вошёл, кто бы вы думали? Нет, не господин Бокель, а он самый — Дух Числа.

— Доброе утро, — сказал он. — Опять, как вижу, ссоритесь?

— Бетти села на моё место, — пожаловался Альберт.

— Тогда просто поменяйтесь местами.

— Она не хочет, — ответил Альберт.

— Напиши на доске, — попросил Роберта Дух Числа.

— Что?

— Напиши две буквы: А для Альберта и Б для Бетти, — велел Дух Числа. — В одну строчку, слева А, а справа Б.

Роберт не понял, зачем это нужно, но про себя подумал: «Ладно, мне не трудно, напишу, если ему от этого полегчает».

А Б

— А теперь, Бетти, — обратился к ней Дух Числа, — поменяйтесь местами с Альбертом.

На удивление, Бетти не стала пререкаться, а просто встала и пересела на место Альберта.

Б А

Написал на доске Роберт.

В это время дверь открылась, и в класс вбежал опоздавший Виктор. Увидев свободное место, он быстро сел рядом с Бетти.

В Б А

вывел мелом Роберт.

Но это уже совсем не понравилось Бетти, и она возмутилась.

— Я не буду сидеть между ними!

— О Боже! — ворчал Виктор. — Ну, давайте поменяемся местами.

Б В А

Теперь расстроился Альберт. Он всегда привык сидеть рядом с Бетти, и добродушный Виктор благородно уступил ему место.

Б А В

«Если так будет продолжаться, — подумал Роберт, — то про урок математики можно будет забыть». И тут Альберт заявил, что он очень хочет сесть слева.

— Теперь мы снова все должны пересаживаться? — возмутилась Бетти. — Я не вижу в этом никакого смысла, ну ладно, так и быть... Давай, Виктор!

И он снова принялись рассаживаться.

А Б В

Но такое положение оставалось тоже недолго.

— Рядом с Виктором я не хочу сидеть ни минуты, — опять возразила Бетти.

Она и вправду могла довести кого угодно своим упрямством. Мальчишки решили не спорить с ней, и Виктор пересел слева от Альберта.

В А Б

— Может, хватит уже? — спросил Роберт.

— Ты так думаешь? — спросил Дух Числа. — Эта тройца ещё не исчерпала всех возможных вариантов. Например: Альберт может сесть слева, Виктор посередине, а Бетти справа, правда же?

— Ни за что! — воскликнула Бетти.

— Не надо кричать из-за ерунды, — строго сказал старик.

Вся тройца нехотя поднялась и пересела по-новому.

А В Б

— Эй, Роберт! Обрати внимание, я думаю, твоим друзьям больше не придумать новых вариантов?

Роберт посмотрел на доску:



— Да, похоже, все возможные варианты они уже ис-
пробовали, — согласился Роберт.

— Я тоже так думаю, — согласился Дух Числа. —
Но ведь в этом классе учиться не только вы четверо?
Уверен, что учеников должно быть гораздо больше.

Не успел он это договорить, как дверь распахнулась,
и на пороге появилась Герда.

— Что у вас происходит? Где господин Бокель?
А кто Вы такой? — запыхавшись, спросила Герда Духа
Числа.

— Я замещаю его, — ответил Дух Числа. — Госпо-
дин Бокель взял сегодня выходной, но он передал мне,
что с вашим классом у него есть проблемы.

— Ещё бы! — подхватила Герда. — Вы только по-
смотрите на них. Все уселись не на свои места. С каких
это пор ты сидишь здесь, Виктор? Это же моё место!



— Что ты предлагаешь, Герда? — спросил Дух Числа.

— Я предлагаю сесть в алфавитном порядке: сначала А, значит, первым садится Альберт, потом Б — садится Бетти, затем В для Виктора и так далее. Это самый простой вариант.

— Как вам угодно. Давайте попробуем? — предложил старик

Роберт написал на доске:

А Б В Г

Однако всех остальных предложение Герды не устраивало. Все стали спорить друг с другом, и класс превратился в сумасшедший дом. Больше всех бунтовала Бетти. Она кусалась и царапалась, когда другие пытались стащить её с места. Остальные тоже вели себя не многим лучше. Все толкали и спихивали друг друга, пытаясь захватить очередную стул. Мало-помалу весь этот кавардак превратился в весёлую игру, где каждый пытался занять новое место. Роберт едва поспевал за ними, записывая все варианты того, как рассаживались его друзья. В конце концов, все варианты были исчерпаны, а у Роберта заполнена вся доска.

АБВГ	БАВГ	ВАБГ	ГАБВ
АБГВ	БАГВ	ВАГВ	ГАВБ
АВБГ	БВАГ	ВБАГ	ГБАВ
АВГБ	БВГА	ВБГА	ГВБА
АГБВ	БГАВ	ВГАБ	ГВАБ
АГВБ	БГВА	ВГБА	ГВБА



— Нет! — воскликнул Роберт. — Пожалуйста, не надо. Только не садитесь, а то я сойду с ума!

— Ну ладно, — сказал Дух Числа. — На сегодня хватит.

«Хорошо, что сегодня ещё не все ребята пришли в школу, — подумал Роберт. — Иначе, боюсь, эти пересадки никогда бы не кончились» Но тут вновь открылась дверь, и в класс вошли: Дорис, Ева, Жан, Зигмунд, Иван, Карл и Леон.

— Нет! — воскликнул Роберт. — Пожалуйста, не надо. Только не садитесь, а то я сойду с ума!

— Ну ладно, — сказал Дух Числа. — На сегодня хватит. Все могут быть свободны, кроме...

— Я тоже? — спросил Роберт.

— Нет, ты как раз можешь остаться, на некоторое время.

Пока его одноклассники с шумом понеслись гулять на школьный двор, Роберт разглядывал свои записи на доске.

— Ну и что ты думаешь об этом? — спросил Дух Числа.

— Даже не знаю, что думать. Одно ясно, что количество вариантов растёт с немыслимой скоростью. Пока ребят было двое, была всего пара вариантов, как их посадить. Когда их стало трое, количество вариантов увеличилось до шести. Когда появилась четвёртая Герда, их стало уже — сейчас скажу! — двадцать четыре.

— Так, давай по порядку, — предложил Дух Числа. — Допустим, у нас всего один ученик.

— О чём здесь речь? Один ученик — одна возможность.

— Попробуй умножать каждый следующий номер на предыдущий. И начни с единицы.

учеников: вариантов:

1	1
2	$1 \times 2 = 2$
3	$1 \times 2 \times 3 = 6$
4	$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

— Ага, — сказал Роберт. — Интересно.

— Чем больше твоих одноклассников присоединится к игре, тем труднее и утомительней будет записывать на доске новые варианты. Но есть способ написать это и по-другому. Просто пишешь число участников игры и ставишь после него восклицательный знак. Смотри как:

$$4! = 24$$

— Будем называть это четыре Ух!

— Представляю, что бы было, если бы ты не отправил гулять Дорис, Еву, Жана, Зигмунда, Ивана, Карла и Леона.

— Полный хаос и кошмар, — сказал Дух Числа. — Даже представить не могу, как бы они кричали и толкались, пробуя все варианты рассаживания. Да и времени это заняло Бог знает сколько. Вместе с Альбертом, Бетти и Виктором их получилось бы одиннадцать

человек, а возможных вариантов — одиннадцать факториал! Ты можешь предположить, сколько это?

— В уме ни один человек такое не сосчитает, — сказал Роберт. — Правда, я всегда ношу с собой калькулятор, и даже в школу, но, конечно, тайком от господина Бокеля. Он терпеть не может, когда им кто-то пользуется.

И Роберт стал набирать:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 =$$

— Одиннадцать Ух! — восхищённо объявил Роберт, — это 39 916 800. Почти сорок миллионов!

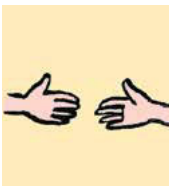
— Ты видишь, Роберт, если бы мы позволили твоим друзьям перепробовать все варианты, нам пришлось бы сидеть здесь лет восемьдесят. К концу этого занятия твои одноклассники сидели бы уже в инвалидных колясках, и мы бы к каждому из них приставили по сиделке, чтобы возить их. Хорошо, что математика может спасти нас от таких кошмаров. Кстати, посмотри в окно, кто из твоих одноклассников ещё во дворе?

— Не сомневаюсь, что они уже давно распрощались и разошлись по домам.

— Вы пожимаете друг другу руки, когда прощаетесь?

— Вот ещё! Максимум крикну: «Пока!» или «До завтра!».

— Жаль, — вздохнул Дух Числа. — Я бы хотел знать, как это — чувствовать руку друга.



— Да брось! — успокоил его Роберт. — В этом нет ничего особенного. К тому же это займёт кучу времени. Представь, если ребят одиннадцать, то рукопожатий будет одиннадцать факториал.

— А вот и нет! — возразил старик.

— Минуточку, — задумался Роберт. — Если людей двое, то им достаточно одного рукопожатия. Если их будет трое...

— Запиши лучше это на доске.

И Роберт написал:

люди: рукопожатия:

<i>А</i>	<i>—</i>
<i>АБ</i>	<i>АБ</i>
<i>АБВ</i>	<i>АБ АВ БВ</i>
<i>АБВГ</i>	<i>АБ АВ АГ БВ БГ ВГ</i>

— Получается одно рукопожатие на двоих. Три на троих, а на четверых уже шесть.

— 1, 3, 6... тебе это ничего не напоминает?

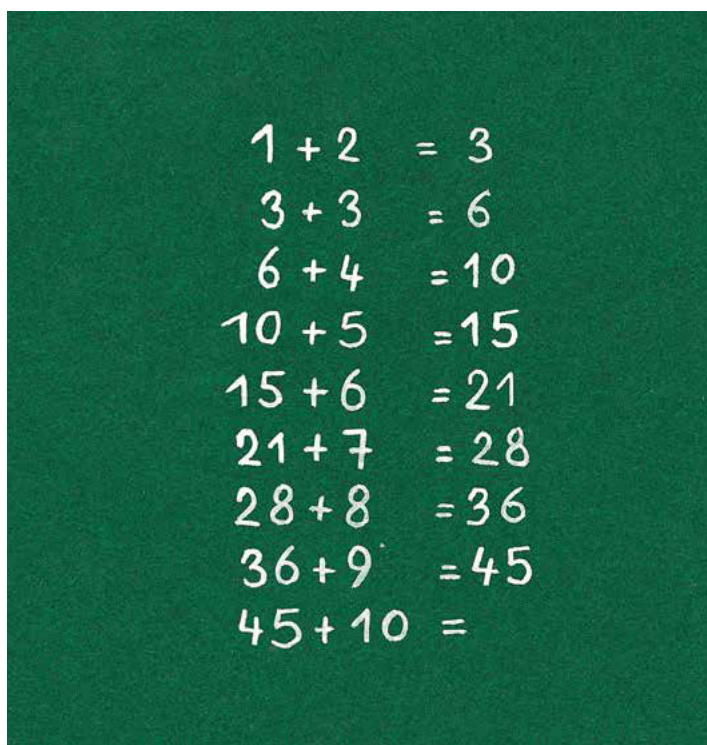
Роберт пытался вспомнить. Тогда Дух Числа нарисовал на доске несколько больших точек.



— Кокосы! — воскликнул Роберт. — Треугольные числа!

— И какие же они?

— Ты же сам их прекрасно знаешь:



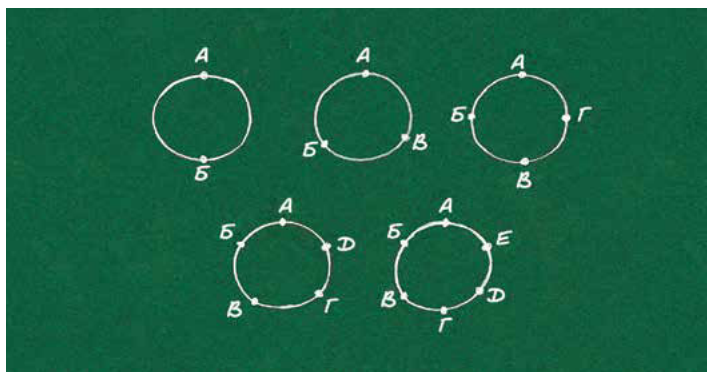
A green chalkboard with a list of triangular numbers and their sums. The numbers are written in white chalk. The list starts with 1 + 2 = 3 and continues down to 45 + 10 = .

1 + 2	= 3
3 + 3	= 6
6 + 4	= 10
10 + 5	= 15
15 + 6	= 21
21 + 7	= 28
28 + 8	= 36
36 + 9	= 45
45 + 10	=

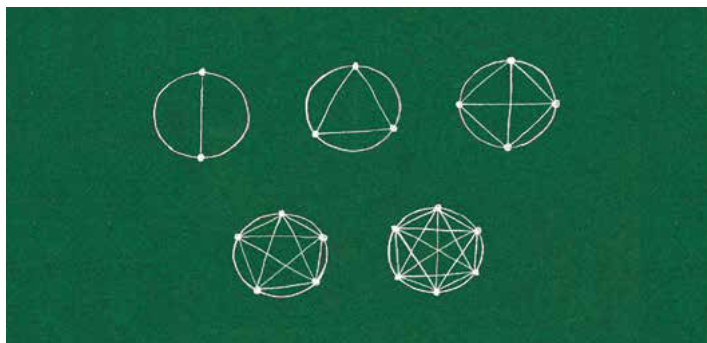
— Всего 55 рукопожатий.

— Ну, это ещё не так страшно, — ответил Роберт.

— Есть тебе не хочется считать таким способом, то есть и другой. Нарисуй мне несколько больших кругов, вот так:



— Точками на окружности ты можешь обозначить своих друзей: А для Альберта, Б для Бетти, В для Виктора и так далее. Если теперь ты соединишь все эти буквы линиями, получишь:



— Выглядит красиво, не так ли? Каждая линия — это одно рукопожатие. Ты можешь это проверить, пересчитав их.

— 1, 3, 6, 10, 15... ты прав, как обычно, — сказал Роберт. — Я не понимаю только одного, как ты всегда находишь такие способы решения?

— Я же Дух Чисел в мире математики. Я могу делать с ними всё, что захочу. Ну, скажем, почти всё. Помнишь про трудности с великими числами? С ними нужно быть чертовски аккуратным, иначе попадёшь впросак. Хотя, по большому счёту, они точно так же прекрасно подчинятся законам математики. Но многие люди не любят их, просто потому что боятся. А я считаю, что нет плохих и хороших чисел, для меня все они равны. Благодаря им во всём можно навести порядок. Посмотри, к примеру, в окно. Посмотри, ваш школьный двор выглядит как помойка!

Роберт был вынужден согласиться. Школьный двор действительно был усеян пустыми банками из-под кока-колы, обрывками бумаги и обёртками от бутербродов.

— Если хотя бы трое из вас возьмут по метле, ты увидишь, что ваш двор за полчаса станет намного чище.

— И кто же должны быть эти трое? — спросил Роберт.

— Например, Альберт, Бетти и Виктор, ну, или Герда, Дорис и Ева. Кроме того, у нас есть ещё Жан, Зигмунд, Иван, Карл и Леон.

— Но ты сказал, что достаточно трёх.

— Конечно, — согласился Дух Числа. — Но вопрос, кто будут эти трое?

— Значит, этими тремя могут стать кто угодно, — догадался Роберт.

— Безусловно. Но, возможно, не все из них сейчас свободны? Допустим, мы смогли найти только Альберта, Бетти и Виктора.

— Тогда эту работу придётся делать им, — согласился Роберт.

— Ну и напиши это на доске!

Роберт вновь взял мел.

А Б В

— А если Герда, как обычно, примчится позже всех? Какие у нас есть варианты, — задумался Роберт и написал.

АБВ АБГ АВГ БВГ

— Четыре варианта, — ответил он на свой же вопрос.

— Допустим, случайно мимо проходила Дорис. Почему бы не взять в компанию и её? Тогда у нас есть пять помощников на три места. Давай-ка попробуем разобраться с ними!

Но Роберт явно не хотел разбираться. Он уже почувствовал, что дальше будет всё сложнее.

— Может, ты лучше сам напишешь, что получится, — раздражённо ответил Роберт.

— Могу, без проблем, — согласился Дух Числа. — Из трёх человек мы можем собрать только одну группу. С четырьмя у нас есть четыре возможных комбинации, а вот с пятью их сразу становится десять. Я сейчас напишу это:

люди: группы:

3	АБВ								
4	АБВ	АБГ		АВГ			БВГ		
5	АБВ	АБГ	АБД	АВГ	АВД	АГД	БВГ	БВД	БГД

— Обрати внимание, здесь есть кое-что необычное. Как видишь, я поставил группы в алфавитном порядке. Теперь смотри, сколько групп начинается на букву А? Десять. Сколько на букву Б? Четыре. А на букву В — вообще всего одна! Опять повторяются одни и те же числа:

1, 4, 10 ...

— Догадайся, что произойдёт дальше? Я имею в виду, если кто-то ещё из твоих друзей решит к нам присоединиться. Скажем, Ева, Жан, Зигмунд, Иван, Карл или Леон. Сколько разных групп по три человека мы сможем из них составить?

— Я сдаюсь, — взмолился Роберт.

— Помнишь, как мы решили задачу с рукопожатиями? Если каждый пожимает руку каждому?

— Это было легко. Мы использовали треугольные числа:

1, 3, 6, 10, 15, 21...

— Но они не годятся для наших дворников, работающих по трое.

— Пока нет. Но если ты попробуешь сложить два первых числа в этом ряду?

— Получится четыре.

— А если прибавить следующее?

— Десять.

— Следующее?

— $10 + 10 = 20$.

— Дальше.

— Ты имеешь в виду, продолжать до тех пор, пока я не доберусь до одиннадцатого числа? Ты это серьёзно предлагаешь мне считать?

— Не волнуйся, дорогой, — успокоил его Дух Числа. — Ответ на этот вопрос можно найти, не прибегая к арифметике и даже без волшебных букв АБВГДЕЖЗИКЛ.

— Но как?

— С помощью нашего замечательного и красивого числового треугольника, — объявил старик.

— Ты собираешься раскрасить нашу доску?

— Нет, это будет скучно. Пожалуй, я воспользуюсь своей волшебной тростью.



Едва только он поднёс свою трость к доске, как в тот же миг на ней вспыхнул огромный четырёхцветный треугольник.

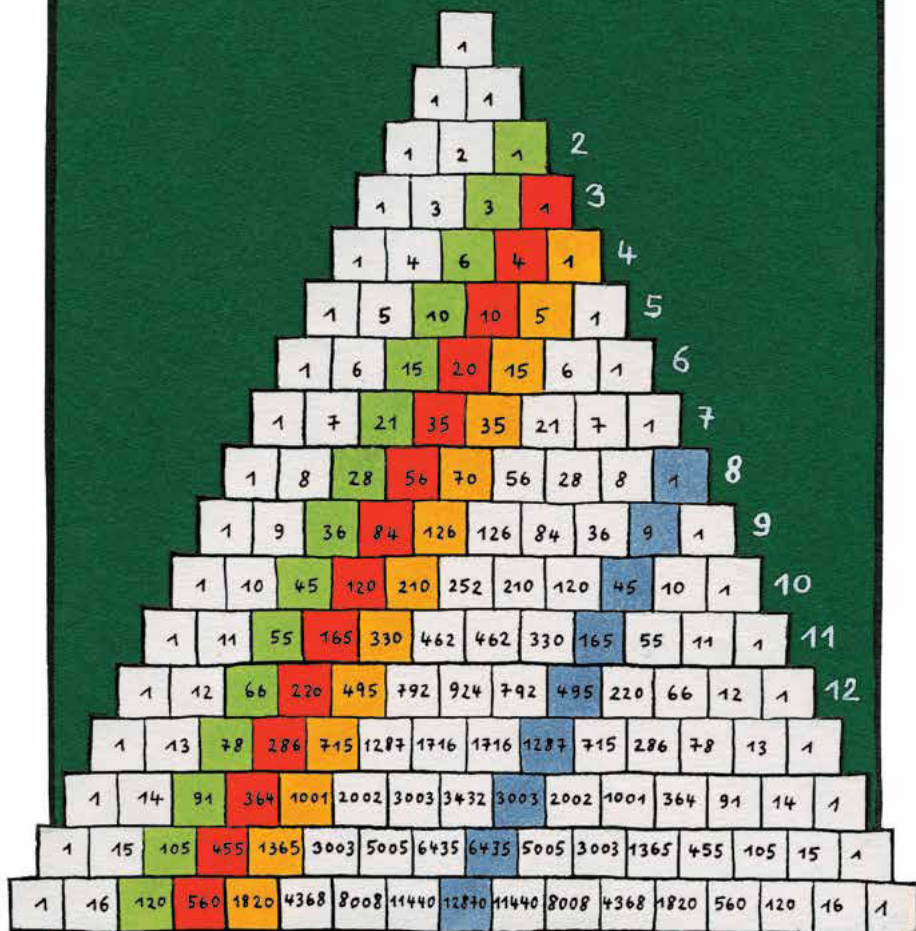
— Очень удобно, — произнес Дух Числа. — Когда считаешь рукопожатия, нужно считать сверху вниз все зелёные кубики. Два человека, одно рукопожатие. Три человека, три рукопожатия. Одиннадцать человек, 55 рукопожатий.

— Для нашей бригады дворников нужны красные кубики. И опять идём сверху вниз. Для трёх человек есть только один вариант. А вот когда появляется четвёртый, таких вариантов бригады будет уже четыре. Появился пятый, и у нас уже 10 различных комбинаций. А что если к нам явятся все одиннадцать твоих одноклассников?

— 165 различных вариантов, — ответил Роберт. — И считать ничего не надо. Этот треугольник лучше компьютера. Скажи, а зачем нам нужны жёлтые кубики?

— Ах, жёлтые, — улыбнулся Дух Числа. — Ты же знаешь, что Духи Числа всегда ненасытны. Нам всегда и всего мало. Допустим, мне мало трёх человек для уборки школьного двора. Пусть теперь у нас будет бригада из четырёх человек. Смотри на жёлтые кубики. Теперь именно они расскажут тебе про все возможные варианты. Представь, что восемь учеников пришли к нам убирать двор, и мы должны выбрать четырёх из них.

— Семьдесят, — сообщил Роберт, без особого труда отыскав на треугольнике нужный ответ.



— Точно, — похвалил его Дух Числа. — А теперь догадайся, для чего нужны синие кубики?

— Восемь дворников, — догадался Роберт. — Когда их восемь, и думать нечего, вариант будет только один. А вот десять помощников дадут нам 45 вариантов бригад из восьми дворников. Я могу продолжить?

— Ты понял принцип, и это главное! — одобрил Дух Числа.

— Мне хочется посмотреть на школьный двор, — сказал Роберт, выглядывая в окно.

Он выглянул в окно и не узнал свой школьный двор. Он сверкал чистотой, как никогда прежде.

— Интересно, кто были те три дворника, что навели у нас такой порядок?

— В любом случае это был не ты, мой дорогой Роберт.

— Конечно, как бы я мог мести школьный двор, когда я всю ночь воевал с цифрами и кубиками.

— Признайся, — спросил старик, — ведь они тебе понравились?

— Интересно было, — согласился Роберт. — А что будет дальше?

— Разве ты не устал от меня? — спросил Дух Числа. — Я намеревался взять отпуск на несколько дней и немного отдохнуть, а ты всегда можешь поговорить о числах с господином Бокелем.

Хотя Роберта не слишком радовала такая перспектива, но что он мог сделать? К тому же на следующее утро ему вновь предстояло идти в школу.



Утром, войдя в класс, Роберт увидел Альберта и Бетти, как обычно, сидящих вместе на своих местах. Все остальные ребята тоже сидели на своих местах, и никто ни с кем не собирался меняться местами.

— А вот и наш гениальный математик! — крикнул Виктор.

— Роберт решает задачи даже во сне, — съехидничала Бетти.

— Думаешь, это полезно? — спросила Герда.

— Очень сомневаюсь, — ответил Леон, — так как господин Бокель его просто не выносит.

— У нас с ним это чувство взаимное, — пошутил Роберт.

Пока не пришёл господин Бокель, Роберт быстро подошел к окну и выглянул во двор. Кучи мусора были на своём месте. Жаль, что чистый школьный двор остался лишь во сне. Но ведь ещё остались числа, которые открыл ему Дух Числа. На числа он всегда может положиться.

Открылась дверь, и в класс вошел всё тот же несносный господин Бокель, со своим любимым портфелем, битком набитым крендельками.



Девятая ночь



Роберту приснилось, что он спит. Он уже давно привык к разным кошмарам. Когда снилось что-нибудь страшное, как будто он цепляется за скользкий обломок скалы, сползая в бурный поток бушующей горной реки, Роберт говорил себе: «Не надо бояться, это всего лишь сон».

Однажды он сильно заболел гриппом. Весь день у него был жар. Он валялся в постели с высокой температурой, и ему снились кошмары. Кошмары во время болезни — самые противные, и эти слова не действовали на них. Он вспомнил, как когда болел в последний раз, ему снился ужасный извергающийся вулкан, из жерла которого ему никак не удавалось выбраться. Взрывом огнедышащей горы его подкинуло высоко в небо, а потом он стал медленно, медленно опускаться в самое жерло вулкана, всё ниже... Даже вспоминать об этом было страшно, и Роберт изо всех сил старался не уснуть.

А мама Роберта всё причитала:

— Нужно спать во время болезни. Это самое лучшее лекарство. А вот читать не так много, чтение только утомляет тебя и отбирает последние силы.



Впрочем, когда Роберт дочитал двенадцатый комикс, глаза его сами стали закрываться, и он незаметно для себя сомкнул веки и уснул. То, что снилось ему, было очень странным.

Ему снилось, что он болен гриппом и лежит в кровати с высокой температурой, а рядом с ним на краю кровати сидит его лучший друг Дух Числа. На столике у изголовья стоял стакан воды. Всё было очень реально. «У меня по-прежнему жар и высокая температура, — подумал Роберт. — Не думаю, что я сплю».

— Ну, ты как? — спросил Дух Числа. — Считаешь меня сновидением, или я действительно здесь?

— Не знаю, — сказал Роберт.

— Да это, в общем, и не имеет значения. Просто я решил проведать тебя, поскольку ты, мой друг, заболел и не можешь теперь бегать по пустыне или ловить кроликов на картофельных полях. Я подумал, что для тебя будет лучше провести тихий спокойный вечер дома. Чтобы ты не скучал, я захватил с собой несколько чисел. Ты же знаешь, я не могу без них, но ты не волнуйся. Они абсолютно безобидны и безвредны даже для больных.

— Ты всегда так говоришь, — усмехнулся Роберт.

Тут раздался стук в дверь.

— Войдите! — воскликнул Дух Числа.

Они вошли. Все разом, в одно мгновение, заполнив толпой всю спальню Роберта. Роберт не мог поверить, сколько людей втиснулось в его маленькую комнату между кроватью и дверью. А ещё он подумал, что

они велосипедисты или марафонцы, потому что на них были надеты майки с номерами. Они входили и входили, и Роберт поначалу даже испугался. Что же будет с его комнатой? Но потом он заметил, что чем больше этих спортсменов входило в дверь, тем дальше она отодвигалась от мальчика. Его комната увеличивалась в размерах, росла и вытягивалась в бесконечно длинный коридор, конца которого он уже не мог видеть.

Некоторое время числа бездельничали, смеялись и болтали между собой. Вдруг Дух Числа неожиданно, словно сержант, муштрующий солдат на плацу, рявкнул:

— Внимание! Первая шеренга, становись!

И они тут же выстроились в ряд спиной к стене по порядку, начиная с единицы и далее.

— А где же ноль? — спросил Роберт.

— Ноль, шаг вперед! — рявкнул Дух Числа.

Но никто не двинулся, только что-то зашуршало под кроватью у Роберта. Это был он. Ноль выбрался оттуда и в смущении сказал:

— Я подумал, что я здесь не нужен. К тому же мне нехорошо. Похоже, я заразился гриппом. Не могли бы Вы отпустить меня на больничный?

— Свободен! — проворчал Дух Числа, и ноль быстро забрался обратно под кровать.

— Ох уж этот ноль! Вечно он требует к себе особого внимания. Зато другие, ты заметил, насколько они послушны?

Дух Числа с явным удовольствием рассматривал, как смиренно стоят в ряд обычные числа.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	-----

— Вторая шеренга, становись! — крикнул он, и тут же новые числа с шумом и грохотом бросились занимать свои места. Через мгновение их строй был готов:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...
---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

Они выстроились прямо перед первой шеренгой, и комната стала ещё больше похожа на длинный тоннель. На всех новых числах были надеты ярко-красные футболки.

— Понятно, — сказал Роберт. — Красные все нечётные.

— Правильно. А ты бы не мог мне сказать, сколько здесь этих красных по сравнению с белыми, что стоят у стены?

— Конечно, это же очевидно! Каждое второе число нечётное, и по сравнению с белыми они стоят через одного. Значит, их в два раза меньше, — ответил Роберт.

— Значит, ты считаешь, — усмехнувшись, спросил Дух Числа, — что обычных чисел существует в два раза больше, чем нечётных?

— Ясное дело!

В ответ Дух Числа громко рассмеялся. Но это был недобрый смех. В нём явно звучали саркастические нотки.

— Жаль разочаровывать тебя, мой мальчик, но, как видишь, здесь белых чисел ровно столько же, сколько и красных.

— Это чушь! — воскликнул Роберт. — Быть такого не может, чтобы половина была такой же, как целое.

— Хорошо, друг мой, тогда посмотри, что я тебе покажу, — сказал Дух Числа и, повернувшись к числам, крикнул:

— Первая и вторая шеренги! Слушай мою команду! Пожать друг другу руки!

— Не надо всё время так кричать, — сердито заметил Роберт. — Здесь тебе не казарма. Постарайся быть немного повежливей.

Но его упрёк никто не расслышал, потому что числа уже строились в пары и красные с белыми охотно пожимали друг другу руки.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...

— Ну что, теперь ты видишь? — спросил старик. — У каждого обычного белого числа есть своя пара — красное нечётное число, и так продолжается до бесконечности, насколько я могу это видеть. Но может быть, ты заметил, что кто-нибудь остался без пары? Таким образом, существует бесконечно много обычных чисел и так же бесконечно много нечётных чисел. Бесконечное множество — понимаешь, о чём я толкую?

Некоторое время Роберт был погружён в свои мысли.

— Ты хочешь сказать, что если одну бесконечность разделить на две бесконечности, то все они будут бесконечны и, значит, равны друг другу? Даже целая бесконечность равна половинной бесконечности?

— Конечно! — ответил Дух Числа. — И это ещё не всё.

Старик вытащил из кармана свисток и дунул в него. В то же мгновение из глубины коридора вынырнула новая шеренга чисел. На это раз все они были одеты в зелёные футболки. Они так же толкались и перекликались друг с другом, пока Дух Числа грозно не скомандовал:

— Третья шеренга! Становись!

Одно мгновение, и зелёная шеренга вытянулась в длинный бесконечный ряд перед своими красными и белыми товарищами.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	...
---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

— Это же великие числа, — сказал Роберт.

Старик кивнул и снова достал свой свисток. На этот раз он свистнул в него подряд четыре раза, и в спальне воцарился крошечный ад! Казалось, будто маленькая комнатка Роберта растянулась чуть ли не до Луны. Как в неё могло поместиться столько человек? Роберт почувствовал, что задыхается, и в голове у него вспыхнул жар.

— Стоп! Остановись! — воскликнул он. — Я не могу больше.



— Войдите! — воскликнул Дух Числа.

Они вошли. Все разом, в одно мгновение, заполнив толтой всю спальню Роберта.

— Это от того, что ты болен гриппом, — заботливо сказал Дух Числа. — Уверен, завтра тебе будет намного лучше.

Затем он обернулся к своим числам и громко крикнул:

— Слушай мою команду! Шеренги: четыре, пять, шесть и семь приготовиться к построению! Бегом марш!

Роберт поднял отяжелевшие веки и с трудом пытался разглядеть, что происходит. В огромном водовороте футболок с числами мелькали белые, красные, зелёные, синие, жёлтые, чёрные и розовые цвета, встраиваясь в стройные и бесконечные шеренги:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	...
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	...
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	...	
1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800	...				

Числа, написанные на розовых футболоках, увеличивались так стремительно, что им просто не хватало места, и Роберт с трудом мог разглядеть даже те, что находились не так далеко от него.

— Они растут так быстро, что мне за ними не угнаться!

— Вспомни — Ух! — воскликнул Дух Числа. — Числа с восклицательным знаком:

$$\begin{aligned} 3! &= 1 \times 2 \times 3 \\ 4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \end{aligned}$$

— И так далее. Так будет легче за ними поспевать. А что ты скажешь о других? Ты не узнаёшь их?

— Красные, понятно, нечётные. Зелёные — великие числа, синие — не знаю... Хотя что-то они мне напоминают.

— Помнишь картофельное поле? Кроликов?

— Ах да! Это же числа Фибоначчи. И жёлтые я вспомнил — это треугольные числа.

— Совсем недурно. Грипп не смог затуманить твой разум. Не зря же ты ученик Духа Числа!

— Чёрные, — гордо продолжил Роберт, — прыгающие числа: 2^2 , 2^3 , 2^4 и так далее.

— Причём количество чисел каждого цвета равно, — усмехнувшись, заметил старик.

— Бесконечное количество, — вздохнул Роберт. — Огромная ужасная толпа.

— Шеренги, с первой по седьмую, свободны! — гаркнул Дух Числа.

Поднялся жуткий шум и гам. Толкая друг друга, пытая и перекликаясь, числа стали покидать комнату, и вскоре спальня Роберта опустела. Привычная комната вновь вернулась в свои скромные границы.

— Теперь мне нужен только аспирин и стакан воды, — устало промолвил Роберт.

— И хороший отдых, — добавил Дух Числа, заботливо накрывая Роберта одеялом. — Чтобы завтра ты был уже на ногах. Только обещай не закрывать глаза, пока я не закончу то, что у нас ещё осталось. Я буду писать на потолке. Так тебе будет удобней.

— Господи! А что у нас ещё осталось?

Ооо! — воскликнул старик, размахивая тростью. — Я выгнал отсюда эти числа, потому что от них было слишком много шума и грязи. Но мы забыли упомянуть ещё несколько очень интересных числовых рядов.

— Числовых рядов? Каких ещё рядов?

— Дело в том, — сказал Дух Числа, — что числа не всегда просто стоят рядом друг с другом, как оловянные солдатики. Что будет, если они объединятся? Я имею в виду, если их сложить?

— Я не понимаю, о чём ты, — застонал Роберт.

Но в это время старик уже начал выводить тростью на потолке первую последовательность чисел.

— Разве не ты только что говорил, что мне нужен отдых?

— Не строй из себя еле живого. Тебе нужно всего лишь прочесть то, что я напишу:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \dots =$$

— Опять дроби! — возмущённо воскликнул Роберт. — Фу!

— Ты меня, конечно, прости, но, по-моему, тут всё элементарно. Только взгляни!

— Одна вторая, — грустно прочёл Роберт, — плюс четверть, плюс одна восьмая, плюс одна шестнадцатая, плюс одна тридцать вторая, и так далее. Сверху в числителе единица, а в знаменателе прыгающая двойка, как на чёрных футболках: 2, 4, 8, 16... и могу догадаться, что будет дальше.

— Да, но что будет, если сложить все эти дроби?

— Трудно сказать, — ответил Роберт. — Раз этот ряд никогда не кончится, то в результате может получиться бесконечно большое число. Но, с другой стороны, одна четвёртая меньше половины, а одна восьмая в два раза меньше её, и дальше каждое следующее число будет всё меньше и меньше.

Роберт задумался.

Вдруг все цифры исчезли с потолка, и когда Роберт вновь поднял глаза, он увидел на потолке длинный отрезок:

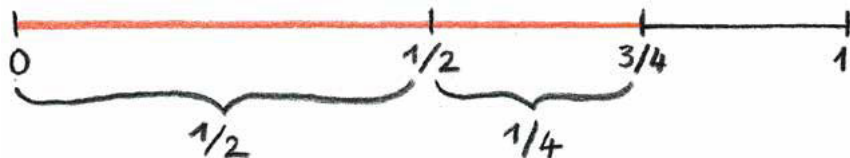


— Ага! — воскликнул мальчик через некоторое время. — Кажется, я начинаю понимать, что будет дальше. Мы начали с половины от единицы и затем добавили к ней половину от оставшейся половины, или иначе — четверть.

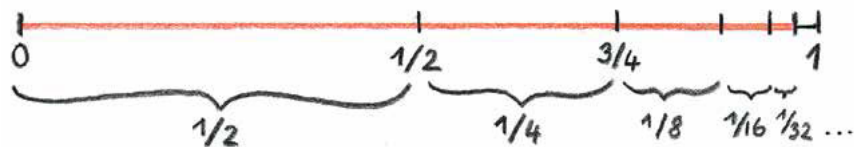


Когда Роберт вновь поднял глаза, он увидел на потолке длинный отрезок.

Пока Роберт рассуждал, на потолке появлялись новые числа:



— Мы всё время прибавляем половину от того, что осталось. Половина от $1/4$ — это $1/8$, половина от $1/8$ — это $1/16$, и так далее. Оставшаяся доля будет становиться всё меньше и меньше, пока станет невидимой невооружённым глазом. В общем, это очень похоже на то, как мы делили жевательную резинку.



— Так я могу долго продвигаться по отрезку, закрашивая красным каждую новую половинку от чёрного остатка, но пока останется хоть капелька чёрного, я всё равно никогда не доберусь до единицы.

— Пожалуй, ты будешь продолжать делать это до бесконечности.

— Не буду! По-моему, ты забыл, что я нахожусь в постели и вообще-то болен гриппом?

— Тем не менее, друг мой, — удовлетворённо заключил Дух Числа, — ты понял, куда это всё катится. Пусть ты болен и устал, но я могу и сам продолжить эту мысль.

Роберт вновь поднял усталые глаза. На потолке уже не было отрезка, а вместо него был ряд следующего вида:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \dots = 1$$

— Замечательный ряд! — воскликнул Дух Числа. — Может, продолжишь?

— Я устал. Я должен спать!

— Ты хочешь спать? — удивлённо спросил старик. — А разве сейчас ты не спишь? Конечно, спишь, и я тебе снюсь. Не знаю, можешь ли ты уснуть во сне?

Возразить было нечего, однако Роберт чувствовал себя так, будто его мозг превращался в желе.

— Ладно, — сказал Роберт, — соглашусь ещё на одну твою сумасшедшую историю, но потом уже точно хочу от всего отдохнуть.

Дух Числа гордо поднял вверх трость и, как фокусник, щёлкнул пальцем. На потолке появилась новая последовательность чисел:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots =$$

— То же, что и раньше, — заключил Роберт. — Я буду складывать их до бесконечности, но поскольку каждое следующее меньше предыдущего, я никогда не доберусь до единицы.

— Ты в этом уверен? — спросил Дух Числа. — Давай посмотрим внимательно на этот ряд. Не буду просить тебя сосчитать его сумму, тебе сейчас это тяжело, но давай попробуем просто подумать и порассуждать. Для начала оставим только первые два числа.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

— Сколько это будет?

— Не знаю, — пробормотал Роберт.

— Не строй из себя дурачка, — возмутился старик. — Не можешь сказать сумму, тогда скажи, что больше — одна вторая или одна четвёртая?

— Конечно, одна вторая, — сердито ответил Роберт. — Я же не совсем дурак?

— Нет, мой дорогой, но, пожалуйста, скажи мне ещё, что больше — одна треть или одна четверть?

— Одна треть, конечно!

— Таким образом, мы имеем две дроби, каждая из которых больше, чем четверть. А чему равны две четверти?

— Глупый вопрос! Две четверти равны половине, то есть одной второй.

— Ты видишь?

Значит $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ больше, чем $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, то есть больше, чем половина.



— Давай теперь сравним следующие четыре числа этого ряда с одной восьмой.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

— Уверен, что в сумме они тоже будут больше половины.

— Это слишком сложно для меня, — пробормотал Роберт.

— Ерунда! — воскликнул Дух Числа. — Что больше, одна четверть или одна восьмая?

— Четверть.

— Одна пятая или одна восьмая?

— Одна пятая.

— Верно! Согласись, что с одной шестой и одной седьмой будет то же самое. Значит, у нас есть четыре дроби

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$$

каждая из которых больше, чем одна восьмая. А чему равна сумма четырёх дробей одна восьмая или, иначе говоря, — четырёх восьмых?

— Четыре восьмых это то же, что одна вторая, или половина, — с неохотой ответил Роберт.

— Замечательно! Значит, сумма этих четырёх дробей тоже будет больше половины. И тогда...

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\substack{\text{больше} \\ \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\substack{\text{больше} \\ \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \dots}_{\substack{\text{больше} \\ \frac{1}{2}}}$$

— Так можно продолжать хоть до бесконечности, но ты видишь, что уже первые шесть чисел этого ряда дают в сумме больше единицы? Ну а если мы продолжим...

— Не надо, пожалуйста! — взмолился Роберт.

— Хорошо, не будем. Только не волнуйся, — успокоил его Дух Числа. — Но если бы мы всё же решили продолжить, как ты думаешь, какой бы результат нас ждал в конце?

— Наверно, вновь эта чёртова бесконечность!

— Кроме того, такой подсчёт занял бы огромное время. Даже если бы мы могли считать со скоростью света, тебе не хватило бы жизни, чтобы добраться до первой тысячи. Ведь чем дальше, тем всё медленней будет увеличиваться сумма ряда.

— Тогда давай оставим его в покое? — предложил Роберт.

— Да, пожалуй, оставим его.

Надпись на потолке стала бледнеть, а вместе с ней и Дух Числа становился всё тоньше и прозрачнее. Вскоре всё совсем исчезло, а время понемногу шло дальше, приближая рассвет.

Роберт проснулся от того, что солнце щекотало его нос.

— Слава Богу, температура спала, — сказала мама, трогая рукой лоб сына.

Как медленно тянется от единицы до бесконечности... А что тянется? Нет, не вспомнить... Он уже совсем позабыл об этом.



Десятая ночь



Роберт сидел на своём рюкзаке, а вокруг него всё было покрыто толстым снежным покрывалом. Он понятия не имел, где очутился. Руки заледенели от холода, а ветер не унимался, пронизывая до костей. Настоящая сибирская зима! И нигде ни единого огонька, ни единого домика и ни одной живой души. Вдобавок уже темнело, и надвигалась ночь. Оставалось только ждать чуда или замерзнуть в этой ледяной пустыне.

«Может, он оказался на Северном Полюсе?» — думал Роберт. Пытаясь отогреться, он растирал свои посиневшие руки, но ничего не помогало. Он был в отчаянии! Ему совсем не хотелось замёрзнуть здесь. И в этот момент он вдруг увидел другого Роберта, сидевшего в мягком и удобном кресле и смотревшего со стороны на него, дрожащего от холода. «Значит, возможно, находясь во сне, видеть, как ты спишь, и свой сон как бы со стороны?» — подумал Роберт.

Потом вдруг снежинки, кружившие вокруг замёрзшего Роберта, стали увеличиваться и расти в размерах, а тот другой Роберт, сидевший в тепле, удобно развалившись в кресле, вдруг заметил, что ни одна из этих снежинок не походит на другую. Каждая большая, пушистая

снежинка имела свой узор и свою форму. Большинство из них были шестиугольными, или с шестью лучами. Действительно, несмотря на всё их многообразие, они все были похожи на шестиконечную, гексагональную звезду. У каждой снежинки шесть лучей, начинавшихся от центра, потом разветвлялись на меньшие, а те, в свою очередь, на ещё меньшие, и так далее.

Вдруг Роберт почувствовал руку на своём плече, и знакомый голос спросил:

— Разве они не прекрасны?

Это был Дух Числа, который сидел позади него.

— Где я? — спросил Роберт.

— погоди, — сказал старик. — Сейчас я включу свет.





У каждой снежинки шесть лучей, начинавшихся от центра, потом разветвлялись на меньшие, а те, в свою очередь, на ещё меньшие, и так далее. Разве они не прекрасны?

Вспыхнул яркий свет, и Роберт обнаружил, что сидит в небольшом уютном кинозале с двумя рядами красных плюшевых кресел.

— Закрытый показ, — объявил Дух Числа. — Только для тебя!

— Я уже думал, что замёрзну там до смерти.

— Это был просто фильм. Посмотри, что я тебе принёс сегодня.

На этот раз, слава Богу, это был не просто калькулятор, не зелёная липучка и не пушистый диван. Это был красивый современный компьютер серебристого цвета с плоским экраном и мышкой.

— Компьютер! — воскликнул Роберт.

— Просто маленький ноутбук, — сказал старик. — Все данные, которые ты вводишь, появляются на его экране, а ещё ты можешь прямо на экране рисовать мышкой. Ну что, начнём?

— Хорошо, но только без метели! Пусть лучше будут числа, чем снежная буря на Северном полюсе.

— Числа Фибоначчи?

— Опять ты со своими Фибоначчи! — воскликнул Роберт. — Скажи мне, этот парень твой лучший друг?

Он застучал по клавишам, и на экране появился ряд чисел:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

— А теперь попробуй поделить их друг на друга, — предложил Дух Числа. — Возьми два соседних числа и раздели большее на меньшее.



— Идёт, — согласился Роберт и с интересом стал набирать задание на экране:

$1:1 = 1$
 $2:1 = 2$
 $3:2 = 1,5$
 $5:3 = 1,6666666666...$
 $8:5 = 1,6$
 $13:8 = 1,625$
 $21:13 = 1,615384615...$
 $34:21 = 1,619047619...$
 $55:34 = 1,617647059...$
 $89:55 = 1,618181818...$

— Вот это да! — удивился Роберт. — Какие разные числа. Одно зацикливается на 6, у другого на хвосте бесконечно повторяется 18. Некоторые выглядят совершенно иррациональными.

— Ты правильно рассуждаешь, — заметил старик. — Но приглядиись внимательней, что ты ещё здесь видишь?

Роберт задумался на миг и потом произнёс:

— Все эти числа шатают то вверх, то вниз. Второе число больше чем первое. Третье меньше второго, а четвертое снова немного больше его и так далее. Каждое следующее число качается то вверх, то вниз,

но чем дальше мы продвигаемся, тем меньше они качаются.

— Верно. Чем больше число Фибоначчи, тем ближе его отношение с соседом к определённом значению:

1, 618 033 989 ...

— Только не подумай, что это конец истории. Это число принадлежит к иррациональным числам, которые, как ты знаешь, никогда не заканчиваются. Оно может приближаться к своему значению долго, долго, но добраться до его конца так никогда и не удастся.

— Что ещё можно ожидать от этого Фибоначчи? — спросил Роберт. — Только я всё равно не пойму, почему они так качаются вокруг этого странного числа.

— Ах, это, — вздохнул Дух Числа. — Ничего особенного, они все так делают.

— Что ты имеешь в виду? Кто они, и что они все делают?

— Я хочу сказать, что это вовсе не обязательно должны быть числа Фибоначчи. Давай возьмём, к примеру, два совершенно обычных числа. Назови мне первые два, которые придут тебе в голову.

— Одиннадцать, семнадцать, — выпалил Роберт.

— Хорошо. Теперь сложи их вместе.

— Я могу это сделать в уме. 28.

— Замечательно. А теперь я покажу тебе, что будет дальше, если складывать последнее число с результатом предыдущей суммы:

$$\begin{aligned}
 11 + 17 &= 28 \\
 17 + 28 &= 45 \\
 28 + 45 &= 73 \\
 45 + 73 &= 118 \\
 73 + 118 &= 191 \\
 118 + 191 &= 309
 \end{aligned}$$

— Это ясно, — сказал Роберт, — и что дальше?

— А теперь мы сделаем с ними то же самое, что делали с числами Фибоначчи. Мы разделим старшего соседа на младшего. Вперёд, мой мальчик, — воскликнул Дух Числа. — И посмотрим, что мы получим.

Пальцы Роберта вновь застучали по клавишам ноутбука, и вскоре на экране появилась запись:

$$\begin{aligned}
 17:11 &= 1,545\,454\dots \\
 28:17 &= 1,647\,058\dots \\
 45:28 &= 1,607\,142\dots \\
 73:45 &= 1,622\,222\dots \\
 118:73 &= 1,616\,438\dots \\
 191:118 &= 1,618\,644\dots \\
 309:191 &= 1,617\,801\dots
 \end{aligned}$$

— То же самое число! Фантастика! — воскликнул Роберт. — Результат не зависит от того, какие числа я выберу? Значит, это безумное число спрятано во всех других числах?

— Да, во всех, — ответил Дух Числа. — Кстати, если тебе это так интересно, я могу показать тебе, как может ещё выглядеть число 1,618...

На экране появилась чудовищного вида дробь:

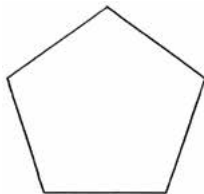
$$1,618\dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

— Стоп! — воскликнул Роберт. — Опять дробь! Да ещё какая ужасная. У меня от таких дробей кружится голова и рябит в глазах. Эти бескончаемые дроби, любимое средство мучения для господина Бокеля. Как я их ненавижу! Пожалуйста, убери это чудовище с моих глаз.

— Не паникуй. Это просто цепная дробь. Неужели тебя не восхищает сам способ, которым можно извлечь наше безумное число 1,618... из этого бесконечного деления и сложения единиц?

— Я готов признать что угодно, лишь бы ты избавил меня от дробей. И прежде всего от тех, которые не имеют конца.

— Всё в порядке, мой друг. Я просто хотел немного заинтриговать тебя. Но если цепные дроби так сильно пугают тебя, давай посмотрим на этот простой пятиугольник.



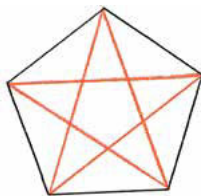
— Допустим, что каждая его сторона равна одному.

— Одному чему? — переспросил Роберт. — Одному метру или одному сантиметру? Может, я измеряю его?

— Это не имеет ни малейшего значения, — раздражённо ответил Дух Числа. — Вспомни, однажды мы уже столкнулись с такой проблемой — хоть горшком назови, только в печку не ставь. Надеюсь, мы не будем мерить пятиугольник в горшках, а просто договоримся считать, что каждая его сторона равна единице. Согласен?

— Ладно, я не возражаю.

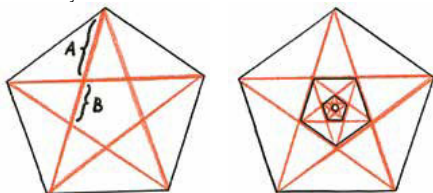
— Теперь я нарисую оранжевую звезду внутри пятиугольника.



— Звезда состоит из пяти оранжевых линий. Если спросишь меня, какой длины эти красные линии, я легко отвечу тебе: ровно 1,618... Хотя в горшках, хоть в метрах, и не больше, и ни меньше.

— Это заколдованное число! — удивлённо воскликнул Роберт.

— Ты и половины пока не знаешь, — сказал старик, не скрывая довольной улыбки. — Теперь будь внимателен. Теперь я отмечу на одной из оранжевых линий две части и обозначу их А и В.



— А длиннее, чем В, — твёрдо заявил Роберт.

— Причём, тебе совсем не нужно напрягать голову, чтобы вычислить, на сколько оно длиннее. Как ты уже, возможно, догадался, А ровно в 1,618... раз больше, чем В. Если мы продолжим дальше, то увидим, что наша звезда очень похожа на снежинку и внутри её можно нарисовать ещё один чёрный пятиугольник. Потом внутри него снова оранжевую звезду и новый чёрный пятиугольник, и так далее.

— И везде мы столкнёмся с этим безумным иррациональным числом? — спросил Роберт?

— Очевидно, да. И если ты ещё не слишком устал...

— Нисколько! — заверил Роберт. — Мне так интересно.

— Тогда снова возьми ноутбук и введи в него наш безумный номер. Я продиктую тебе его:

1,618 033 989...

— Отлично! Теперь вычти 0,5:

1,618 033 989... - 0,5
= 1,118 033 989...

— Теперь удвоим результат. Умножь его на 2:

1,118 033 989... × 2
= 2,236 067 978...

— Так, а теперь заставь прыгнуть это число. То есть умножь его само на себя. Для этого у нас есть специальная кнопка X^2 :

2,236 067 978...² = 5,000 000 000

— Ровно пять! — воскликнул Роберт. — Не может быть! Как такое возможно?

— Ну, — с наслаждением промолвил Дух Числа, — ведь это число изначально таилось внутри нашей звезды и нашего пятиугольника.

— Просто фантастика, — сказал Роберт.

— А сейчас мы нарисуем узлы на пересечении всех линий нашей звезды и пятиугольника:



— Посчитай, сколько их получилось.

— Десять, — ответил Роберт.

— А теперь посчитай, сколько у нас белых плоскостей между всеми линиями на этом рисунке?

Роберт насчитал одиннадцать

— Теперь сосчитай все отрезки между любыми двумя узлами, — предложил Дух Числа.

Это заняло у Роберта некоторое время. Он несколько раз сбивался и начинал сначала, но в конце концов это ему удалось. Отрезков оказалось ровно 20.

— Верно, — похвалил старик. — А теперь посмотри сюда:



$$10 + 11 - 20 = 1$$

$$(У + П - О = 1)$$

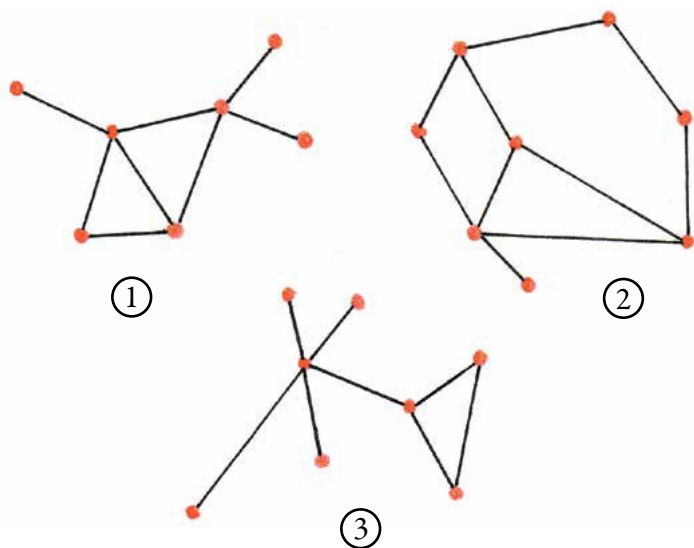
— Если сложить количество узлов с количеством белых плоскостей и вычесть количество отрезков, получится единица.

— Ну и что из этого? — безразлично переспросил Роберт.

— Ты можешь подумать, что результат равен единице только с нашей звездой и пятиугольником, но это

не так. Так будет с любой плоской фигурой, и с простой, и с самой сложной. Попробуй, нарисуй любую, какую захочешь, и тогда сам в этом убедишься.

Старик протянул Роберту компьютер с мышкой. Роберт положил мышь на экран и начал выводить на нём самые запутанные фигуры:



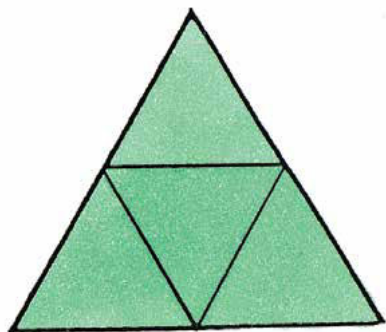
— Можешь не трудиться с вычислениями, — сказал Дух Числа. — Я уже сделал это за тебя. Первая фигура имеет семь узлов, две плоскости и восемь отрезков: $7 + 2 - 8 = 1$. У второй фигуры: $8 + 3 - 10 = 1$. У третьей: $8 + 1 - 8 = 1$. Как видишь, всегда единица!

Кстати, это правило работает не только с плоскими фигурами. Он справедливо для пирамид, кубов и даже для граней бриллианта. Вот только для них ре-

зультат будет равен не одному, как у плоских фигур, а двум.

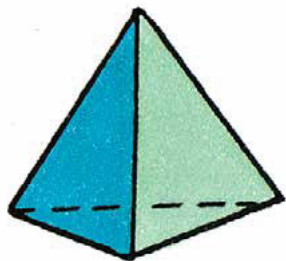
— А как это можно проверить? — усомнился Роберт.

— Представь, что это пирамида, — сказал Дух Числа, поворачивая к Роберту экран ноутбука.

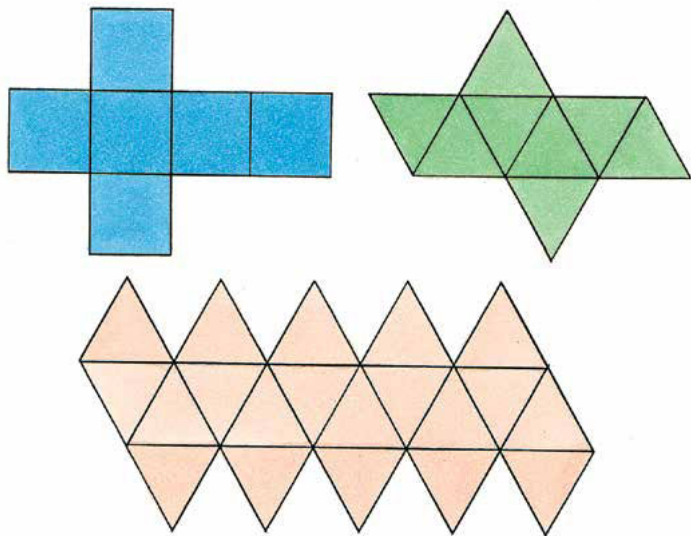


— Какая же это пирамида? Это просто несколько слипшихся треугольников.

— А что, если эту фигуру вырезать и сложить? — предложил Дух Числа. — Посмотри на экран:

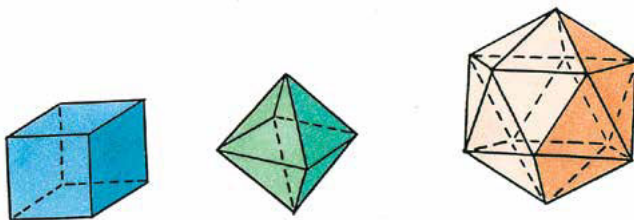


— То же самое ты можешь сделать и с другими фигурами. Вот тебе для примера ещё три:

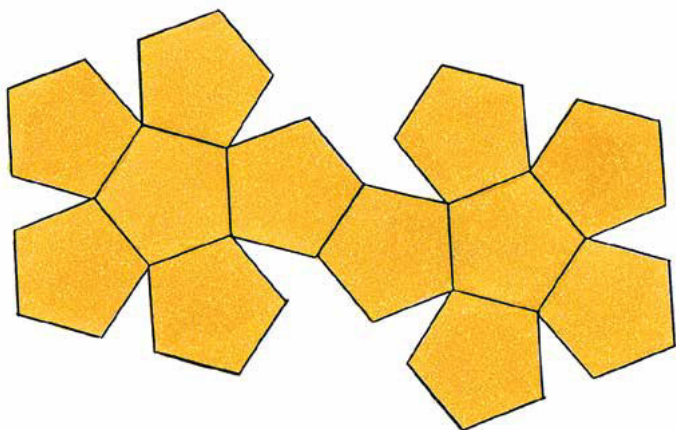


— С первой фигурой не сложно. Я уже делал такое, — заявил Роберт. — Если её вырезать и склеить, получится куб. Но вот вторая и третья сложнее, и я их не знаю.

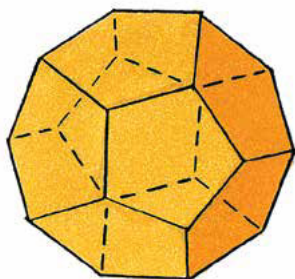
— Я помогу тебе. Смотри на экран. Вот как они будут выглядеть:



— Вторая фигура похожа на двойную пирамиду, вершины которой смотрят вверх и вниз. Третья фигура похожа на сферическое тело, состоящее из двадцати треугольников. Кстати, из наших любимых пятиугольников может получиться футбольный мяч, если их сложить между собой определённым образом:

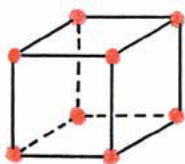


— А затем вырезать и склеить вот так:



— Неплохо, — восхищённо заметил Роберт. — Пожалуй, я бы тоже сделал себе такой.

— Пожалуйста, но только не сейчас, — попросил Дух Числа. — Сейчас давай снова вернёмся к нашей игре с узлами, отрезками и плоскостями между ними. Давай начнём с куба. Это проще всего:



Сосчитав все восемь узлов, шесть плоскостей и двенадцать отрезков, Роберт объявил результат:

$$— 8 + 6 - 12 = 2.$$

— Всегда два! — воскликнул Дух Числа. — Какой бы ни была форма фигуры, результат будет два. Сумма узлов и плоскостей минус все отрезки фигуры всегда равняется двум. Без исключений. Да, мой дорогой мальчик. Всё, что бы ты ни вырезал и ни собирал, даже бриллиант из кольца твоей мамы, всё даст один и тот же результат. Наверно, даже снежинки, хотя их трудно успеть сосчитать, пока они не растаяли.

Дух Числа продолжал восхищаться своим открытием, а голос его становился всё тише и глуше. В небольшом кинозале смеркался свет, и на экране вновь пошёл снег. Но в этот раз он не испугал Роберта. Он знал, где находится, и знал, что не замёрзнет, хотя вокруг уже снова кружила белая метель.

Проснувшись, Роберт обнаружил, что никакого снега вокруг нет, а он лежит на мягком белом шерстяном одеяле, на котором нет ни узлов, ни отрезков. И форма у этого одеяла была привычной четырёхугольной, мягко облегающей сонного Роберта. Жаль только, что красивый серебристый компьютер тоже исчез.

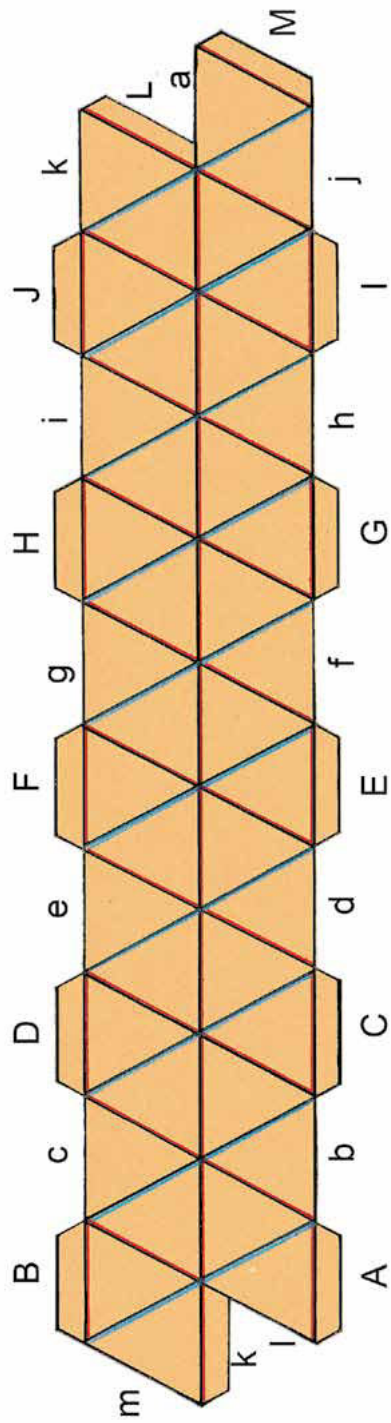
Что там было за безумное число — один запятая шесть... Да, оно было бесконечным, он помнил это, но больше ничего вспомнить уже не мог.



Те, у кого хватит терпения и есть под рукой ножницы и клей, могут попробовать сами сделать фигуры, которые рисовал Роберту Дух Числа. Чтобы было проще их склеивать, когда будете их вырезать, нужно оставить небольшие отступы на одной из двух склеиваемых между собой граней.

Если Вы справитесь со всеми пятью фигурами и захотите продолжить, у меня найдётся одна очень хитрая и сложная фигура. Нужно быть очень внимательным и терпеливым. Возьмите большой лист плотной бумаги (не меньше чем 35×20 см), но лучше не картон. Скопируйте на него фигуру, нарисованную на следующей странице. Имейте в виду, что все стороны всех треугольников обязательно должны быть равными. Можете сами решить, какой длины сделать стороны треугольников, но я думаю, что 3 или 4 см — самый подходящий размер. Вырежьте фигуру и затем с помощью линейки сложите её вперёд, вдоль красных линий, и назад, вдоль синих. Затем склейте фигуру в правильном порядке. Сначала припуск В с треугольником b, затем припуск С с треугольником с, и так далее. Последним склеивается припуск А с треугольником а. Что же у Вас получилось. Удивительное волшебное кольцо, состоящее из десяти маленьких пирамид. Его можно выворачивать вперёд и назад (только очень осторожно!), и каждый раз оно будет превращаться в новый пятиугольник или пятияконечную звезду. Кстати, как Вы думаете, что получится, если сложить все узлы и плоскости этой фигуры и вычесть все отрезки:

$$\gamma + \Pi - O = ?$$



Одиннадцатая ночь



Было почти темно. Роберт бежал по центру города, но улицы и дома вокруг были совсем ему не знакомы. Он нёсся изо всех сил, так как за ним гнался господин Бокель. Один раз он был уже так близко, что Роберт слышал за спиной его тяжёлое дыхание. «Стой!» — закричал господин Бокель, и Роберт припустил ещё быстрее. Он понятия не имел, почему за ним гонится господин Бокель и зачем он сам убегает от него. Конечно, у господина Бокеля не было никаких шансов догнать Роберта. Слишком уж он был толст и неповоротлив.



Однако, добежав до следующего перекрёстка, он вдруг неожиданно увидел слева от себя второго господина Бокеля. Роберт, как кошка, рванул через дорогу, не дожидаясь зелёного сигнала светофора. Теперь уже целый хор голосов кричал ему вслед: «Стой, Роберт, остановись! Мы просто хотим тебе помочь!»

За ним гнались по пятам уже четыре или пять господ Бокелей. Роберт нёсся вперёд и видел, как из соседних улиц ему навстречу выбегали всё новые и новые Бокели, похожие друг на друга, как две капли воды.

Роберт стал звать на помощь.

Вдруг костлявая рука схватила его за плечо и потащила в сторону от дороги. Слава Богу! Это был он, Дух Числа.

— Следуй за мной, — прошептал он. — Я знаю потайной лифт в частном доме, который подбросит нас на самый верхний этаж.

Стены лифта были зеркальными, и Роберт мог любоваться бесконечной шеренгой своих двойников и зеркальных копий Духа Числа. «По-моему, это уже слишком, — подумал Роберт. — Хватит с меня этих одинаковых повторяющихся людей!»

К счастью, голоса господ Бокелей с улицы здесь были не слышны. Лифт продолжал подниматься всё выше, и вскоре Роберт и Дух Числа достигли пятидесятого этажа. Дверь лифта бесшумно открылась, и они очутились в восхитительном саду на крыше дома.

— Как я мечтал об этом, — сказал уставший от бега Роберт, когда они уселись на качающуюся скамейку.

С той высоты, на которой они сидели, люди на улице выглядели словно муравьи.

— Я не представлял, что на свете существует столько господ Бокелей, — сказал Роберт.

— Тебя не должно это беспокоить, — заверил Дух Числа. — Они совершенно безобидны и не представляют никакой опасности.

— Такое бывает лишь во сне, — сказал Роберт. — Но если б ты не появился вовремя, не знаю, что бы я делал.



— Я не представлял, что на свете существует столько господ Бокелей, — сказал Роберт.

— Тебя не должно это беспокоить, — заверил Дух Числа. — Они совершенно безобидны и не представляют никакой опасности.

— Вот потому я здесь! И теперь, когда нет причины беспокоиться, расскажи мне, что случилось?

— Всю прошлую неделю я думал над тем, что ты рассказал мне в прошлый раз, и как всё это связать вместе. Мне понравились все твои фокусы. Они очень интересны, но я спрашиваю себя, почему всё происходит так, а не иначе? Откуда всегда появляется это безумное число? Или как появилось пять? А те кролики, которые ведут себя так, как будто знают числа Фибоначчи? Почему иррациональные числа никогда не заканчиваются? И почему то, что ты говоришь, всегда оказывается законом для всех?

— Так вот оно что! — воскликнул Дух Числа. — Тебе уже недостаточно просто играть с числами. Ты хочешь знать, что за ними стоит. Хочешь знать правила игры. Суть того, как всё происходит. Ты хочешь знать то, что хотят знать все математики.

— Понятия не имею, что хотят знать математики. Просто ты всегда показывал мне трюки с числами, но никогда не объяснял, почему так происходит.

— Это верно, — согласился Дух Числа. — Прошу у тебя прощения. Дело в том, что демонстрировать сами трюки легко и весело. Тайна всегда вызывает интерес, и мы с тобой не раз проверяли наши догадки на забавных примерах. Только, к сожалению, всех этих догадок недостаточно для доказательства истины. Доказательство — это главная основа в математике. И вот теперь ты тоже хочешь получить доказательства.

— Конечно, — ответил Роберт. — Некоторые вещи, о которых ты рассказал мне, я прекрасно понимаю и вижу. Но есть другие, которые никак не укладываются в моей голове.



— Короче говоря, ты недоволен тем, что знаешь? Это хорошо. Думаешь, мы, Духи Чисел, всегда удовлетворены своими знаниями? Никогда! Мы всегда ищем новые доказательства. всю жизнь мы думаем и размышляем над загадками математики. Со стороны это может показаться скучным, но только не для математика. На решение иной проблемы может понадобиться сотня лет и не одно поколение математиков, прежде чем забрезжит свет в конце тоннеля. Но когда истина открыта, это настоящая победа и настоящее счастье!

— Ты, наверно, преувеличиваешь? Неужели доказательство может быть таким сложным?

— Даже трудно представить, как всё бывает сложно, — сказал Дух Числа. — Бывает, что однажды утром, проснувшись и взглянув на знакомую вещь, находишь в ней неразрешимую загадку.

— Ну, например?

Дух Числа остановился и на мгновение задумался.

— Ты думаешь, что всё знаешь о прыгающих числах? — неожиданно спросил он. — Что может быть проще, чем последовательно переходить от 2 к 2×2 , от 2×2 к $2 \times 2 \times 2$ и так далее.

— Конечно, это будет: 2^1 , 2^2 , 2^3 и так далее. Это очень просто.

— Да, но что будет, если ты прыгнешь на ноль? 10, 80 или 1000? Ну, так что, сколько это будет? Хочешь, скажу? Ты будешь смеяться, но ответ везде будет один, и этот ответ — единица:

$$1^0 = 1, 8^0 = 1, 100^0 = 1$$

— Почему? — озадаченно спросил Роберт.

— Лучше не спрашивай, мой дорогой. Если я начну это доказывать, боюсь, ты раньше сойдёшь с ума, чем я закончу объяснять.

— А ты сперва попробуй! — сердито воскликнул Роберт.

Но Дух Числа как будто не слышал его и продолжал невозмутимо и спокойно.

— Ты никогда не пробовал перебраться через бушующую реку? — неожиданно спросил он.

— Ты ещё спрашиваешь меня? — воскликнул Роберт. — Конечно, пробовал, и не один раз.

— Ты не можешь переплыть эту реку, так как быстрое течение просто снесёт тебя вниз к порогам. Однако из воды кое-где торчат большие камни. Так что же ты будешь делать?

— Я буду выбирать камни, стоящие ближе друг к другу, и перепрыгивать с одного на другой. Если мне повезёт, я переберусь на другую сторону, а если нет, могу застрять посреди реки.

— То же самое и с доказательствами, — сказал Дух Числа. — Многие математики потратили не одну тысячу лет, чтобы найти способы, как перебраться через



бурный поток, и теперь нам не нужно начинать с нуля. Теперь все виды камней в этой реке известны и проверены не один раз. Ты знаешь, какие из них скользкие, а на какие ты можешь смело положиться. Когда у тебя рождается новая идея, ты выбираешь ближайшие безопасные камни и, осторожно прыгая с одного на другой, находишь правильный путь на другой берег, не замочив ноги.

— Всё это замечательно, — сказал Роберт. — Но ответь мне, где тот спасительный берег для чисел, пятиугольников или прыгающих чисел?

— Хороший вопрос, — согласился Дух Числа. — Спасительный берег — это всего несколько простых слов, или фраз, делающих сложное простым. Если найдешь их, они помогут тебе выбрать правильный путь и достичь цели целым и невредимым. Они и есть доказательства.

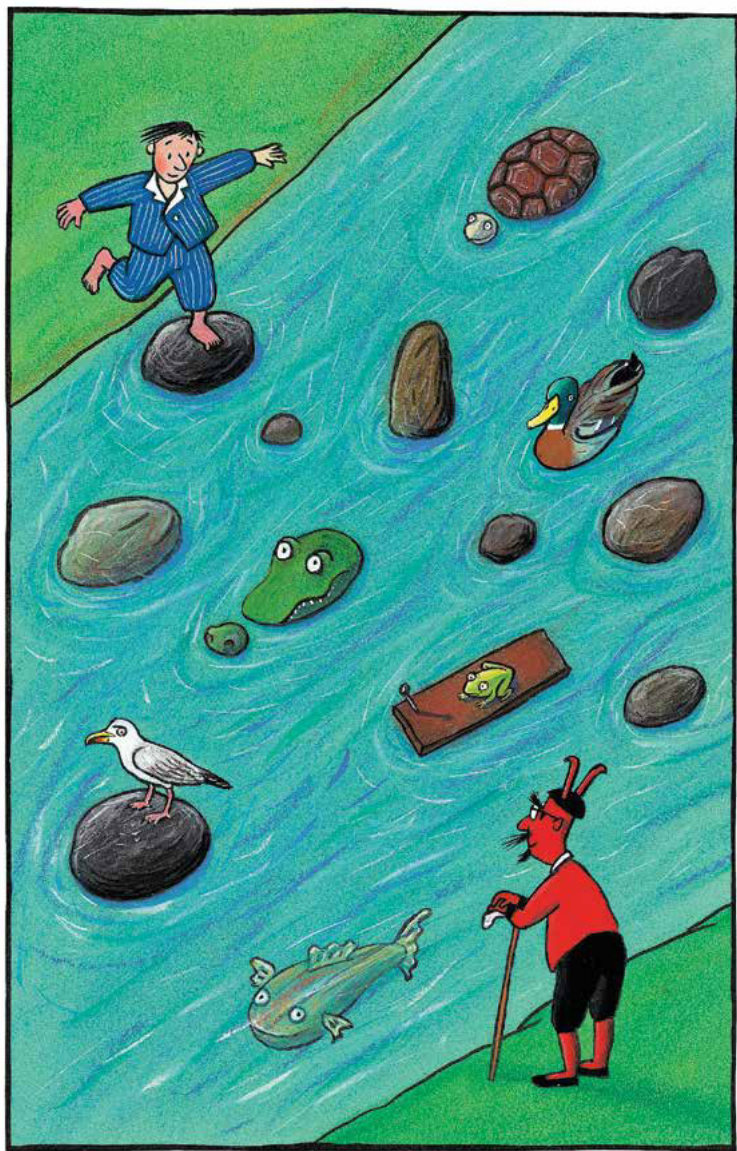
— Что же это за слова и фразы?

— Ну, например, вот: для каждого обычного числа, неважно, 14 или 14 миллиардов, всегда существует только одно следующее обычное число. Это число на единицу больше предыдущего. Или: точку нельзя разделить на части, так как она не имеет площади. А вот ещё пример: через две точки на плоскости ты можешь провести только одну прямую, которая будет продолжаться бесконечно в обе стороны.

— Это легко!

— И многое другое тоже, — ответил Духа Числа.

Его глаза светились от радости и гордости.



— Ты должен быть очень осторожен перед каждым прыжком, — сказал старик. — Камни слишком далеко друг от друга. Если ты прыгнешь, можешь упасть в воду.

— Но ты должен быть очень осторожен перед каждым прыжком через бурную реку, — сказал старик. — Некоторые камни лежат слишком далеко, и тебе не перепрыгнуть с одного на другой. А если всё же решишься, можешь соскользнуть и упасть в воду. Иногда приходится искать сложные обходные пути, но даже они не всегда выводят на спасительный берег. Тогда ты придумываешь новый путь, но и он может завести тебя в тупик. Кажущаяся блестящей идея, спустя время и тщетные попытки её осуществить, часто меркнет и забывается.

Дух Числа посмотрел на Роберта с ласковой улыбкой.

— Ты помнишь, о чём я говорил тебе в самом начале нашего знакомства? Как можно создавать числа из одних единиц?

$$\begin{aligned}1 &\times 1 = 1 \\11 &\times 11 = 121 \\111 &\times 111 = 12321 \\1111 &\times 1111 = 1234321\end{aligned}$$

— И так далее. Казалось, мы можем продолжать это до бесконечности.

— Да, — вспомнил Роберт. — Ты тогда сильно рассердился, когда я сказал, что это подозрительно. По правде говоря, я сказал это нарочно, чтобы позлить тебя. Ведь у меня не было никаких доказательств, что это не так.

— Однако у тебя неплохой нюх! — признался Дух Числа. — Позже я вернулся к этому примеру, и представь себе, когда я дошёл до

1 111 111 111 × 1 111 111 111

я соскользнул в воду! Моё правило перестало работать. В результате получился какой-то винегрет из цифр. Этот фокус хорошо работал, но только до определённого момента, а потом правило вдруг оказалось неверным. Всё рухнуло, потому что это правило не имело доказательств.



Даже Дух Числа может попасть впросак. Я помню историю про одного человека. Его звали Джонни Луна, и он придумал формулу, которая должна быть верна везде и всегда. Он был сумасшедший математик, и он проверял её миллиард и пятьсот миллионов раз! И каждый раз она работала. Он мучил себя до полусмерти, вычисляя её бесконечное число раз на самом мощном компьютере. Его вычисления были намного точнее, чем наши, когда мы вычисляли число 1,618... Когда же не осталось никаких сомнений в том, что его формула верна всегда, он откинулся

на спинку стула в полном счастье и блаженстве. Наконец он мог расслабиться и отдохнуть.

Но его счастье оказалось недолгим. Появился другой Дух Числа, не помню сейчас, как его зовут, и он замучил себя этими вычислениями ещё больше. В результате пересчитал всё с ещё большей точностью. И что же он получил? А то, что Джонни Луна был не прав. Его замечательная формула была верна почти всегда, но это «почти» меняло всё. Бедняга Джонни Луна! Он выбрал для себя нелёгкий путь. Он ведь работал с великими числами, а это чертовски непростое дело.



— Тут я согласен, — сказал Роберт. — Даже если речь идёт о нескольких паршивых кренделях этого ужасного господина Бокеля. И сейчас не могу забыть, как он сводит меня с ума своими задачками. Почему столько пекарей печёт так долго это бесконечное

количество кренделей? Нет, ни хочу о нём даже вспоминать. Мне нравятся твои фокусы и задачки, Дух Числа!

— Ты слишком строг к нему, — ответил Дух Числа. — Господин Бокель просто выполняет свои обязанности по школе. Он ведь не может прыгать с камня на камень, через бурный поток, как это делаем мы с тобой. Мне искренне жаль его. Он, как всегда, пошёл домой проверять и исправлять домашние задания своих учеников.

Роберт нагнулся и посмотрел вниз на улицу. Там было тихо и безлюдно и не было ни одного господина Бокеля.

— Многим из нас, — продолжал Дух Числа, — ещё труднее, чем твоему господину Бокелю. К примеру, один из моих коллег, знаменитый Лорд Рассел из Англии, решил доказать, что $1 + 1 = 2$. Ты только взгляни на то, как выглядит его доказательство:

*54.42. $\vdash :: \alpha \in 2. \supset :: \beta \subset \alpha. !\beta. \beta \neq \alpha. \equiv. \beta \in 1 \cdot \alpha$

Dem.

-. *54.4. $\supset \vdash :: \alpha = 1'x \cup 1'y. \supset ::$

$\beta \subset \alpha. \exists !\beta. \equiv : \beta = \wedge. v. \beta = 1'x. v. \beta = 1'y.$

[*24.53.56.*51.161] $\equiv : \beta = 1'x. v. \beta = 1'y. \wedge v. \beta = \alpha : \exists !\beta$

†. *54.25. Transp. *52.22. $\supset \vdash : x \neq y. \supset. 1'x \cup 1'y$

[*13.12] $\supset \vdash : \alpha = 1'x \cup 1'y. x \neq y. \supset. \alpha \neq 1'x. \alpha \neq 1'y$ (2)

$$\begin{aligned}
& \vdash (1). (2). \supset \vdash :: \alpha = l'x \cup l'y. x \neq y. \supset :. \\
& \quad \beta \subset \alpha. \exists ! \beta. \beta \neq \alpha. \equiv : \beta = l'x. \vee. \beta = l'y : \\
& \quad [51.235] \quad \equiv : (\exists z). z \in \alpha. \beta = l'z : \\
& \quad [*37.6] \quad \equiv : \beta \in l''\alpha \quad (3) \\
& \vdash (3). *11.11.35. *54.101. \supset \vdash. \text{Prop.} \\
& *54.43. \vdash : \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv. \alpha \cup \beta \in 2 \\
& \quad \text{Dem.} \\
& \quad \vdash. *54.26. \supset \vdash : \alpha = l'x. \beta = l'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv x \neq y. \\
& \quad [51.231] \quad \equiv. l'x \cap l'y = \Lambda. \\
& \quad [*13.12] \quad \equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1) \\
& \vdash (1). *11.11.35. \supset \\
& \quad \vdash : (\exists x, y). \alpha = l'x. \beta = l'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \\
& \quad \equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2) \\
& \vdash (2). *11.54. *52.1. \supset \vdash. \text{Prop.}
\end{aligned}$$

— Кошмарrrrr! — содрогнулся Роберт. — Неужели весь этот ужас только для того, чтобы доказать, что $1 + 1 = 2$? Но ведь это и так очевидно.

— Правильно, — согласился Дух Числа. — Но, несмотря на то, что это очевидно для всех, Лорд Рассел хотел это доказать. Ну вот, ты видишь, к чему это может привести.

Дух Числа так увлёкся своим рассказом, что не замечал уже никого вокруг. Он ходил взад и вперёд, размахивая руками и пытаясь всеми силами передать то, что трудно выразить словами.

— Кстати, — продолжал он, — существует немало задач, которые на первый взгляд выглядят так же

очевидно, как $1 + 1 = 2$. Однако доказать их математически совсем не просто. Взять, к примеру, туризм. Допустим, ты собрался в двухнедельное путешествие по стране, в которой живёт двадцать пять твоих друзей. Все они живут в разных городах и все приглашают тебя в гости. Скорее всего, ты возьмёшь карту и попытаешься составить наиболее оптимальный маршрут, чтобы потратить меньше времени и денег на каждый переезд. Каким способом лучше это сделать?

Звучит довольно просто, не так ли? Но поверь мне, эта проблема уже многих людей оставила без сна и покоя. Эту задачу пытались решить многие Духи Числа. Но и по сей день она осталась неразрешимой.

— Странно. Что тут такого трудного? — удивился Роберт. — По-моему, нужно просто определить все варианты, потом нанести их на карту и выбрать, какой из них самый короткий.

— Ты предлагаешь составить схему с двадцатью пятью узлами?

— Верно! Допустим, что у меня было всего два друга. Тогда маршрут будет всего один из точки А в точку В:

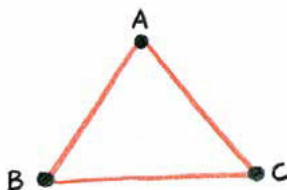


На самом деле есть два пути. Ты ведь можешь двигаться и в обратном направлении из точки В в точку А.

— Это одно и то же, — заявил Роберт. — В них нет никакой разницы.

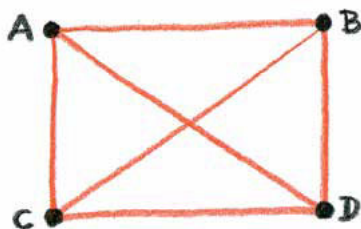
— Теперь представим, что ты хочешь посетить трёх друзей. Тогда у тебя будет уже шесть вариантов:

$A \rightarrow B \rightarrow C$
 $A \rightarrow C \rightarrow B$
 $B \rightarrow A \rightarrow C$
 $B \rightarrow C \rightarrow A$
 $C \rightarrow A \rightarrow B$
 $C \rightarrow B \rightarrow A$



— Хочу заметить, — сказал Роберт, — что все эти маршруты по-прежнему равны.

— Да, но вот когда ты соберёшься посетить четверых друзей, всё станет гораздо сложнее:



— Знаешь, — сказал Роберт, — у меня нет большого желания пересчитывать все варианты.

— И не надо. Я скажу тебе и так. Их будет ровно двадцать четыре. Тебе не кажется, что эта задачка сильно напоминает ту, с пересаживанием твоих друзей за партой? Помнишь, как долго пересаживались Альберт, Бетти и Виктор и как много оказалось там вариантов?

— Конечно, помню! — оживился Роберт. — Трое учеников — три Ух! Четверо учеников — четыре Ух! Ну и так далее.

— Ну, так и здесь почти то же самое.

— Тогда не пойму, что здесь трудного? — спросил Роберт. — Мне нужно просто подсчитать все варианты и выбрать из них лучший.

— Ха, ха! — засмеялся Дух Числа. — Если б это было так просто. Когда у тебя 25 друзей, то это будет 25 Ух! Возможно, ты не до конца представляешь, как выглядит это число. Примерно:

1 600 000 000 000 000 000 000 000 000 000

— Тебе не удастся проверить все эти варианты и выбрать из них самый короткий. Это не под силу даже самому мощному из современных компьютеров.

— Значит, эту задачу невозможно решить?

— Не всегда. Мы давно уже ломаем голову над этим. Многие умнейшие Духи Числа испробовали кучу разных способов. Иногда им удаётся найти решение, а иногда нет.

— Жаль, — сказал Роберт. — Иногда — это только полдела.

— Что ещё хуже, мы не можем с уверенностью доказать, что идеального решения не существует. Это было бы уже хоть что-то. Тогда мы могли бы прекратить наши поиски. В конечном счёте доказать то, что доказательства не существует, тоже своего рода доказательство.



— Хм, — сказал Роберт. — Конечно, приятно знать, что Духи Числа тоже могут попасть впросак, но я был уверен, что ты можешь решить всё что угодно.

— Это так кажется. Сколько раз я застревал посреди реки. Иногда случается удача, и удаётся выйти на берег, не замочив ног, а иногда приходится возвращаться и начинать сначала. Поверь, я не пытаюсь ставить себя рядом с великими, но даже у них не раз возникали такие проблемы. Но это означает, что математика, как наука, никогда не окончится и математикам всегда будет чем заняться. Именно поэтому сейчас я хочу попрощаться с тобой. Завтра утром мне необходимо найти симплексный алгоритм для искривлённых плоскостей.

— Что найти?

— Лучший способ распутать путаницу. Для этого мне нужно выспаться и набраться сил. Я отправляюсь спать. Спокойной ночи!

Дух Числа исчез, а Роберт продолжал в одиночестве качаться на скамейке. «Интересно, как выглядят эти искривлённые поверхности?» — подумал Роберт. Хотя зачем ему это? Зато он знал теперь, что может не бояться господина Бокея. Если тот снова вздумает гнаться за ним, Дух Числа непременно его спасёт.

Ночь была тёплая и ясная. В саду, на крыше дома, было приятно мечтать о разных пустяках. Так Роберт просидел, покачиваясь на скамейке, до самого рассвета.

Двенадцатая ночь



Роберт перестал видеть сны. Не было больше огромной рыбы, пытающейся проглотить его, или муравьёв, карабкающихся по ногам. Даже господин Бокель со своими двойниками оставил его в покое. Он больше не срывался в пропасть с горы, его не запирали в подвале и он не мёрз на Северном Полюсе. Он спал так хорошо, как никогда раньше.

С одной стороны, ему было хорошо, но с другой стороны, от этого покоя ему стало ужасно скучно. Что сейчас происходит с Духом Числа? Может быть, он нашёл хорошую идею и пытается её доказать. Может, он застрял посреди той искривлённой поверхности, о которой говорил в последний раз?

А может, он просто забыл про Роберта? Нет, эту мысль он старался отогнать от себя

Мама продолжала удивляться, почему её сын, часами сидя в саду, рисовал какие-то схемы с узлами и пересекающимися линиями. При этом он бормотал себе под нос о каких-то несуществующих друзьях из других городов.

— Сделай лучше побыстрей домашнее задание, — говорила она.

Однажды господин Бокель поймал его на уроке за посторонним занятием.

— Чем это ты занимаешься на уроке? Дай быстро мне это сюда.

Роберт успел скомкать листок бумаги с нарисованным на нём огромным треугольником чисел и перебросить его Виктору. На Виктора он мог положиться. Тот не раз покрывал своего друга.

Однажды ночью Роберт уснул так крепко, что даже не слышал, как кто-то долго и громко стучит ему в дверь.

— Роберт! Роберт!

Прошло некоторое время, пока Роберт сообразил, что происходит, встал и открыл дверь. На пороге стоял Дух Числа.

— Ну, наконец, ты пришёл! — воскликнул он. — Я уже так соскучился по тебе.



— Быстрее собирайся и идём, — сказал Дух Числа. — У меня есть приглашение для тебя.

И он протянул ему карточку, на которой в золотой рамке было напечатано:

*Вручить лично!
Приглашается сегодня
Роберт,
Ученик Духа Числа
Теплотаксла,
принять участие в торжественном
вечере,
который состоится в аду/раю Чисел.
Генеральный Секретарь*
تلاش

Подпись состояла из неразборчивых закорючек, напоминающих персидское или арабское письмо.

— Так, значит, тебя зовут Теплотаксла? — спросил Роберт, быстро натягивая на себя рубашку. — Почему ты мне раньше об этом не говорил?

— Только посвящённые в наш круг могут знать имя Духа Числа, — ответил он.

— Значит, и я теперь принадлежу к посвящённым?

— По-видимому. Иначе ты бы не получил это приглашение.

— Забавно, — сказал Роберт, читая приглашение. — Тут сказано: в аду/раю Чисел. Что это значит? Где в итоге, там или там?

— Рай, или Ад Чисел — это в общем-то одно и то же место, — сказал старик.

Он подошёл к окну и широко распахнул его.

— Увидишь сам. Ты готов?

— Да! — громко ответил Роберт, хотя в душе ему было чуть-чуть страшновато.

— Тогда влезай ко мне на плечи.

Роберт подумал, что он слишком тяжёл для маленького старичка, но не осмелился сказать ему об этом. И, о чудо, не успел он обнять шею Духа Числа, как тот выпрыгнул в окно и взмыл в воздух.

«Такое может случиться только во сне», — подумал Роберт. А почему бы и нет? Полёт по воздуху без двигателя, без ремней безопасности и глупых стюардесс, которые вечно суют тебе книжки-раскраски и детские игрушки, словно тебе три годика. Очень приятное отличие!

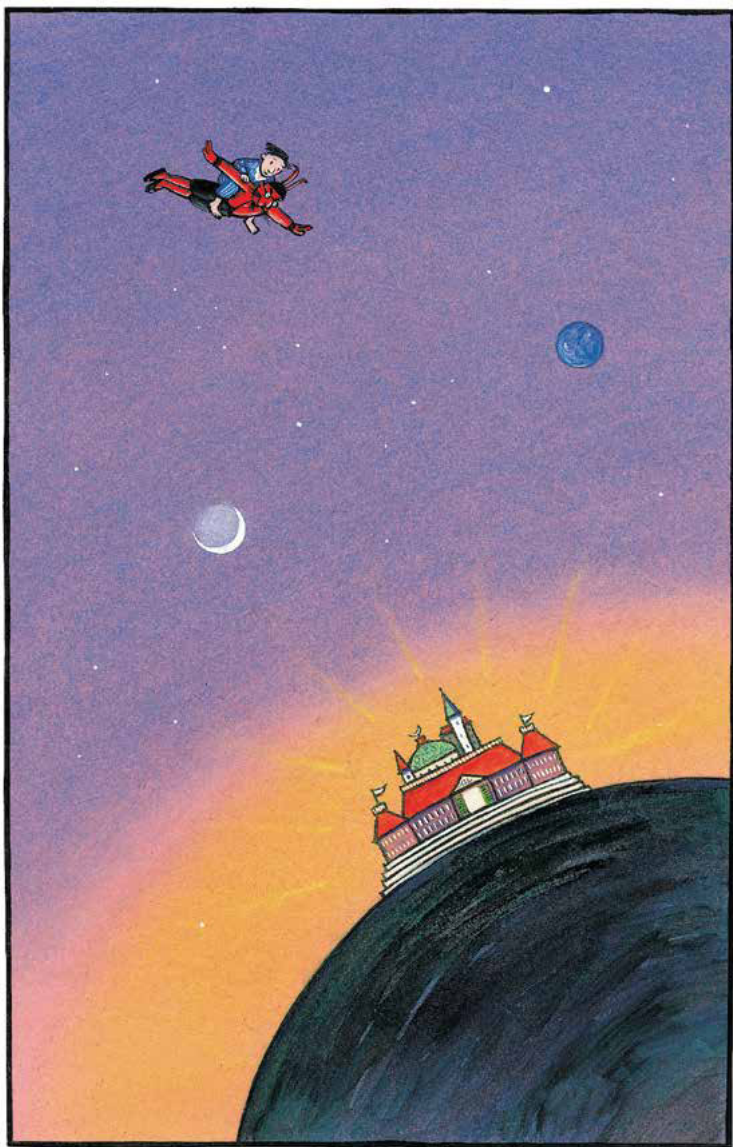
После бесшумного полёта Дух Числа приземлился на небольшую трассу великолепного дворца.

— Ну, вот мы и прибыли, — сказал Дух Числа, спуская Роберта на землю.

— Где же моё приглашение? — заволновался Роберт. — Боюсь, я забыл его дома.

— Это уже не важно, — ответил Дух Числа. — Тот, кто действительно хочет, сможет войти сюда. Главное добраться сюда в числе первых. А Дорога сюда известна не многим.

В самом деле, высокие створки ворот были распахнуты настежь и никто не проверял входящих. Они вошли внутрь и оказались в длинном коридоре, по обе стороны которого были двери. Одни из них были открыты, другие чуть приоткрыты. Из любопытства Ро-



*Не успел Роберт обнять шею Духа Числа, как тот выпрыгнул
в окно и взмыл в воздух.*

берт заглянул в самую первую дверь. Теплотаксла приложил палец к губам и произнес: «Тсс!» Внутри Роберт увидел очень старого человека с белыми, как снег, волосами и длинным носом. Он прохаживался по комнате и при этом вёл научный спор сам с собой.

— Все англичане лжецы, — бормотал старик. — И что это значит? Ведь я и сам англичанин. Значит, и я тоже лгу. Раз я лгу, то получается, что то, что я только что сказал, это ложь! Значит, я оклеветал англичан, и все они говорят правду. И раз я англичанин, то я тоже говорю правду. Как разобраться в этой круговерти?

Дух Числа махнул Роберту рукой, и они пошли дальше.

— Это бедный Лорд Рассел, — объяснил Теплотаксла своему гостю. — Тот самый, который хотел доказать, что $1 + 1 = 2$.

— Похоже, он запутался, — сказал Роберт. — Чему удивляться, ведь он уже так стар.

— Ты напрасно так думаешь, — ответил Дух Числа. — Это парень прекрасно знает, что он делает. А что до возраста, так он здесь ничего не значит. К тому же Лорд Рассел принадлежит к нашей молодёжи. Ведь ему всего лишь 150 лет.

— Значит, здесь, во дворце, есть гораздо более старые жители?

— Скоро увидишь, — сказал Теплотаксла. — В раю, или аду чисел никто не умирает.

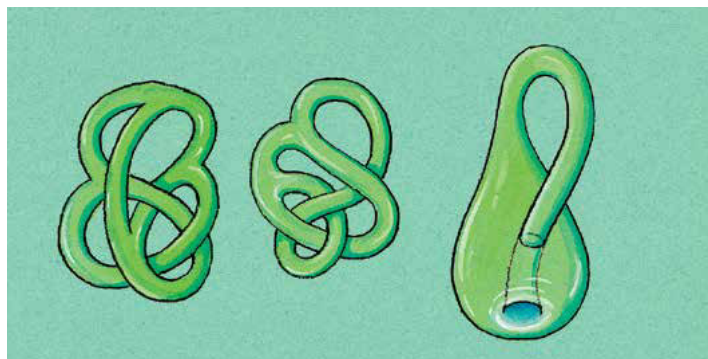
Они подошли к следующей открытой двери и, заглянув внутрь, увидели маленького человечка, сидев-



шего на корточках в углу. Он был настолько мал, что Роберт поначалу его даже не заметил.

Его комнату наполняли самые необычные предметы. Некоторые из них напоминали большие крендели, сделанные из стекла. «Вот бы порадовался господин Бокель», — подумал Роберт. Хотя все они имели не совсем обычную форму, и есть их явно было нельзя. Дух Числа обратил внимание Роберта на необычного вида бутылку из зелёного стекла.

— Приглядишься к ней внимательно, — прошептал Теплотаксла на ухо Роберту.



— В такой бутылке ты никогда не будешь знать, где у неё внутри, а где снаружи.

«Да, — подумал Роберт. — Такие бутылки могут только присниться».

— Представь себе, — предложил ему Дух Числа, — что ты решил выкрасить её внутри синим цветом, а снаружи красным. И как же ты сможешь это

сделать? Ведь у неё нет никаких краёв! Где же закончить красить синим и где начинать красным?

— Так эту штуку придумал этот маленький человечек? — спросил Роберт. — По-моему, он был бы счастлив оказаться внутри своей бутылки!

— Не так громко! Ты знаешь, кто это? Сам доктор Клейн! А теперь идём дальше. Нам ещё нужно многое успеть.

Они проходили много закрытых дверей, на которых часто висели таблички «Не беспокоить». Наконец они остановились возле открытой настежь двери. Все стены и мебель в этой комнате были покрыты тонким слоем мелкой пыли.

— Это не обычная пыль, — сказал Теплотаксла. — Здесь больше пылинок, чем ты бы мог сосчитать за всю свою жизнь! Она такая мелкая, что если ты решил покрыть ею даже кончик иглы, тебе понадобится собрать всю пыль в этой комнате. А вот и сам профессор Кантор, который обнаружил эту пыль.

— Кстати, ты знаешь, что Кантор (Cantor) переводится с латинского как певец или учитель музыки?

У профессора было бледное лицо, козлиная борода и колючие пронизательные глаза. Кружась по комнате, он напевал себе под нос странную песенку.

— Бесконечность на бесконечность будет бесконечность, — напевал Кантор. — Супербесконечность на бесконечность будет супербесконечность.

«Пора отсюда сматывать», — подумал Роберт.



В это время его спутник вежливо постучал в соседнюю дверь, и дружелюбный голос за стеной крикнул: «Входите!»

Теплотаксла был прав, все обитатели дворца были настолько старыми, что сам Дух Числа в сравнении с ними выглядел просто юношей. Однако два старичка, встретившие их, оказались весьма энергичными.

— Добро пожаловать, господа, — весело сказал старичок с большими выразительными глазами и в парике. — Меня зовут Сова, а это профессор Гаусс.

Последний выглядел очень суровым и едва оторвал взгляд от своих бумаг. Роберт подумал, что он очень недоволен их визитом.

— Мы как раз говорили о великих числах, — сказал приветливый господин в парике. — Вы же знаете, какая это увлекательная тема!

— О, да! — сказал Роберт. — Никогда не знаешь, как с ними справиться.

— Ты прав, но я надеюсь, что с помощью моих коллег мне удастся скрутить их.

— А могу я спросить, чем так увлечённо занимается профессор Гаусс?

Но Гаусс не был расположен к общению и отказался разглашать секреты своих трудов.

— Профессор Гаусс сделал замечательное открытие. Он открыл совершенно новый вид чисел. Как Вы называете их, мой дорогой друг?

— «И», — сурово взглянув на коллегу, промывчал он.



— Это означает воображаемые числа, — объяснил Роберту Теплотаксла. — Извините нас, господа, за беспокойство. Нам пора.

Попрощавшись с новыми знакомыми, друзья продолжили путешествие по дворцу. Они заглянули к Боначчи. Его комната кишела кроликами, и пройти туда было невозможно.



Далее шли бесконечные комнаты, в которых индейцы майя, арабы, персы и индийцы работали, спали и говорили между собой. И чем дальше шли Роберт и Дух Числа, тем старше становились жители дворца.

— Вон, видишь того, который похож на магараджи, — показал Теплотаксла. — Ему не меньше двух тысяч лет.

Комнаты, которые они проходили, становились всё больше и роскошнее, пока наконец они остановились перед входом, напоминающим вход в храм.

— К сожалению, сюда нам нельзя, — сказал спутник Роберта. — Человек в белом платье, которого ты увидишь, так велик, что маленькому Духу Числа не разрешается даже говорить с ним. Он родом из Греции, и то, что он придумал, просто поражает воображение. Посмотри на эти плитки на полу. Те, на которых изображены звёзды и пятиугольники.

— Однажды он захотел выложить этими плитками весь пол. Но сделать это, не оставляя зазоров, у него не получилось. Вот тогда он стал искать, в чём проблема, и обнаружил иррациональные числа. Объяснить почему?



Репка из пяти и репка из двух... Ты помнишь эти ужасные числа?

— Ещё бы! — заверил Роберт.

— Пифагор! — прошептал Дух Числа. — Его зовут Пифагор. А знаешь, что ещё он придумал? Слово «математика»! Теперь мы почти у цели.

Зал, в который они вошли, был самый большой, который когда-либо видел Роберт. Он был больше, чем спортзал, больше, чем зал театра, и намного красивее. Его стены украшали удивительные мозаичные картины. Золотой трон стоял на первой площадке гигантской лестницы, уходящей так далеко вверх, что конец её терялся из вида. Трон был пуст.

Роберт был поражён красотой увиденных апартаментов. Он и не думал, что его друг живёт в такой роскоши.

— Не похоже это на Ад Чисел, — воскликнул Роберт. — Это настоящий Рай.

— Не спеши судить! Я не люблю жаловаться, но бывают случаи, когда кажется, что я сойду с ума. Когда до решения задачи остаётся один шаг, а на пути встаёт непреодолимая стена — всё вокруг превращается в Ад!

Роберт тактично молчал и смотрел по сторонам. Он заметил бесконечно длинный стол в центре зала и официантов, стоящих вдоль стены. Вдруг долговязый парень возле входа изо всех сил ударил в гонг. Звук разнёсся по всему дворцу, эхом отдаваясь в бесчисленных залах.

— Следуй за мной, — сказал Теплотаксла. — Наши места на этом конце стола.

Когда они сели за стол, гости ещё продолжали идти и занимать свои места. Мимо них прошли Сова и профессор Гаусс. За ними шёл Боначчи с кроликом на плече. Но большинство гостей Роберт никогда раньше не видел. Здесь были важные египтяне и индусы с красными точками на лбу, арабы, одетые в бурнусы, и монахи в рясах, индейцы майя и африканцы, турки с кривыми мечами и американцы в обыкновенных джинсах. Их были тысячи.



Роберт был поражён таким количеством Духов Числа. Ещё он заметил, что среди них почти не было женщин. Он насчитал их буквально шесть или семь, причём другие Духи, казалось, не воспринимали их всерьёз.

— Где же женщины? — спросил Роберт. — Они не заслужили присутствовать здесь?

— В старые времена отношение к ним во дворце было другое. Считалось, что математика — исключительно мужская работа. Хотя в последнее время, мне кажется, всё стало меняться.

Когда все гости, наконец, заняли свои места и поздоровались друг с другом, долговязый парень у входа вновь ударил в гонг, и в зале воцарилась тишина. Какой-то китаец, одетый в тонкие шёлковые одежды, стал подниматься по лестнице и, поднявшись, сел на золотой трон.

— Кто это? — спросил Роберт.

— Это изобретатель нуля, — прошептал Тепло-таксла.

— Он что, самый великий из всех Духов Числа?

— Он второй по значимости, — сказал Тепло-таксла. — Самый великий живёт высоко за облаками. Там, где заканчивается эта лестница.

— Он тоже китаец? — спросил Роберт.

— Этого не знает никто. Никто из нас никогда не видел его лица, но мы очень чтим его. Он наш верховный главнокомандующий, и он тот человек, который открыл единицу. Как знать, может быть, он женщина, а может быть, и вовсе не человек!

Роберт был так поражён, что онемел от удивления.

Тем временем официанты начали подавать еду.

— Эй! А почему мы начинаем с десерта? — воскликнул Роберт, увидев на своей тарелке кусок пирога.

— Тс-с! Не так громко, мой мальчик. Мы едим эти пироги потому, что они имеют самую правильную круглую форму. Круг — это самая совершенная из всех фигур. Лучше попробуй его.

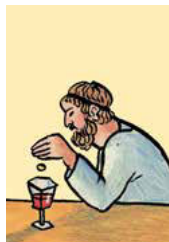
Никогда ещё Роберт не пробовал такого вкусного пирога.



— Если ты захочешь узнать, насколько велик этот пирог, — спросил Дух Числа, — как ты сделаешь это?

— Я не знаю. Ты мне не говорил об этом. А в школе нам рассказывают только про крендельки.

— Для этого тебе потребуется одно очень важное нерациональное число. Самое главное из всех нерациональных чисел. Его более двух тысяч лет назад открыл один грек. Этот человек сейчас сидит во главе стола. Без него мы бы и по сей день не знали, какой пирог больше и как измерить длину кольца или размер колеса. Очень многое вокруг нас имеет круглую форму. Даже Луна и наша собственная Земля. Без числа «пи» мы бы совершенно пропали!



Зал гудел и ревел от множества весёлых и взволнованных голосов Духов Числа. Большинство с аппетитом уплетали вкусные пироги, но некоторые задумчиво глядели в пространство или скатывали шарики из теста. Напитков было тоже вдоволь. Их разливали в пятиугольные хрустальные бокалы, по счастью, не похожие на сумасшедшие сосуды доктора Клейна.

Когда трапеза закончилась, долговязый парень вновь ударил в гонг. Изобретатель нуля поднялся со своего трона и ушёл вверх по лестнице. Другие Духи Числа также стали вставать со своих мест. Первыми уходили самые выдающиеся, за ними и остальные понемногу разошлись по своим комнатам. Остались только Двое: Роберт и его покровитель.

Когда же они тоже собрались уходить, к ним подошёл господин в великолепном костюме.

— Значит, это и есть твой ученик? — строгим голосом спросил господин Теплотаксу. — Он ведь совсем молод, не так ли? Думаю, он не успел ещё ничего открыть?

«Наверно это и есть тот Генеральный Секретарь, — подумал Роберт. — Тот человек, который подписал моё приглашение».

— Пока нет, — ответил друг Роберта. — Но думаю, что вскоре это, несомненно, произойдёт.

— Умеет ли он обращаться с великими числами? Знает ли он, сколько их?

— Ровно столько же, сколько и обычных, нечётных и прыгающих чисел, — мгновенно ответил Роберт.

— Отлично! Он прошёл первое испытание. Как его зовут?

— Роберт.

— Встань, Роберт. Властью данной мне как Генеральному Секретарю, я принимаю тебя в ранг Учеников Числа и награждаю орденом Пифагора пятой степени.

С этими словами он торжественно надел на шею Роберта цепь с золотой пятиконечной звездой.

— Спасибо, — сказал Роберт.

— Надеюсь, ты понимаешь, что этот знак отличия ты должен хранить в тайне? — добавил Генеральный Секретарь и, повернувшись на каблуках, исчез.

— Ну, вот и всё, — сказал Дух Числа. — Мне пора. Теперь тебе всё придётся постигать самому.

— Что? — воскликнул Роберт. — Ты хочешь вот так просто оставить меня?

— Поверь, мне очень жаль, — ответил Теплотаксла. — Но я должен вернуться к своей работе.

Роберт смотрел на него и едва сдерживал слёзы. Только сейчас он понял, какой важной частью его жизни стал этот старик. Теплотаксла сам едва сдерживал слёзы, но ни один из них не хотел показывать свою слабость. Теплотаксла собрался уходить.

— Береги себя, Роберт.

— Пока, — сказал Роберт.

В мгновение ока его друг исчез.



Теперь Роберт остался совсем один в этом огромном зале за опустевшим столом. «Господи, как же теперь вернуться домой?» — подумал он. Он чувствовал, как цепь на его шее становилась всё тяжелей. Желудок тоже распирало. «Возможно, я съел слишком много пирога или выпил лишний стакан сока?» — задавал он вопрос сам себе. Глаза закрывались, и вскоре он уже крепко спал, откинувшись на спинку стула и позабыв о том, как летал во дворец на плечах своего учителя.

Конечно, он проснулся в своей постели. Мама трясла его за плечо:

— Пора, Роберт! Вставай! Если сейчас не встанешь, опоздаешь в школу.

«Как всегда, — подумал про себя Роберт. — Во сне ты ешь во дворце самые вкусные пироги и тебя награждают золотой звездой, но стоит открыть глаза, и всё возвращается на круги своя».

Когда, стоя в пижаме перед зеркалом, он чистил зубы, то вдруг почувствовал, как что-то щекочет его грудь. Опустив глаза вниз, он с изумлением увидел маленькую пятиконечную звёздочку на тоненькой цепочке. «Не может быть! На это раз мой сон был на самом деле?» Роберт не мог поверить своим глазам.

Одевшись, он снял цепочку и бережно положил её себе в карман. Ему не хотелось отвечать на глупые вопросы мамы. Откуда взялась эта звезда? Она спросит об этом тотчас, как увидит её! Мальчики не должны носить украшений.

Как мог он объяснить ей, что это вовсе не украшение, а эмблема секретного ордена?

В школе всё было как всегда, вот только господин Бокель выглядел более усталым, чем обычно. Он долго шуршал газетой, делая вид, что читает, но, видимо, ему хотелось умять пару своих крендельков. Тогда он придумал задачу, которую ребята не могли бы решить до конца урока.

— Сколько учеников в нашем классе? — спросил он. Высочка Герда, подняв руку, тут же ответила:

— Тридцать восемь.

— Хорошо, Герда. А теперь слушайте моё задание. Предположим, что у мальчика, сидящего за первой партой, — как там тебя зовут? Ах да, Альберт! Допустим, что

у Альберта есть один кренделёк, а у следующей за ним Бетти уже два. Затем у Виктора три, а у Герды уже четыре, и так далее, вплоть до самого последнего тридцать восьмого. Так сколько же всего я должен купить крендельков, чтобы их хватило на всех учеников в классе?

Роберт вскипел от ярости.

«Чёрт возьми! Опять типичные бокелевские задачки, — подумал Роберт. — Теперь он будет до конца урока жевать свои крендельки, а мы, как каторжные, трудиться, пока он отдыхает».

Довольный собой, господин Бокель спокойно достал газету, а несчастные ученики склонились над партами, считая огромную задачу. Роберту совсем не нравилось это глупое занятие, и, вместо того, чтобы считать, как все, он демонстративно уставился в окно.

— В чём дело, Роберт? — строго спросил господин Бокель. — О чём ты мечтаешь на уроке?

«Значит, одним глазом он всё же следит за нами», — подумал Роберт.

— Нет, нет, — сказал он вслух. — Я решаю Вашу задачу.

И начал писать в своей тетрадке:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots$$

«Боже мой, какая тоска!» Когда он добрался до одиннадцати, то совершенно запутался. Как же так, он, носитель ордена Пифагора, пусть даже всего лишь пятой степени, не может справиться с какой-то глупой

задачкой? Он вспомнил про свою звезду, которую положил в карман. Очень осторожно он вытащил её и так, чтобы не видел никто и особенно господин Бокель, надел на шею под рубашку. В тот же миг блестящая идея осенила его. Решение откроют треугольные числа! Конечно, они! Не зря же Дух Числа раскрыл их тайну для него. «Так как же там у них было?» — вспоминал Роберт и, открыв новый лист, написал:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\
 \hline
 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13
 \end{array}$$

$$6 \times 13 = 78$$

«Если это правило работает от одного до двенадцати, то оно должно работать и до тридцати восьми!»

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & \dots & 18 & 19 \\
 38 & 37 & 36 & \dots & 21 & 20 \\
 \hline
 39 & 39 & 39 & \dots & 39 & 39
 \end{array}$$

$$19 \times 39 = ?$$

Осторожно вытащив из портфеля калькулятор, Роберт незаметно под партой набрал:

$$19 \times 39 = 741.$$

— Я сосчитал! — воскликнул он. — Это совсем просто!

— Что сосчитал? — удивлённо поинтересовался господин Бокель, опустив газету.

— 741, — спокойно ответил Роберт.

В классе стояла такая тишина, что слышно было, как пролетает муха.

— Как ты смог решить это? — спросил господин Бокель.

— О, — воскликнул Роберт. — Задача практически решилась сама.

Роберт стоял перед классом, сжимая под рубашкой звезду и мысленно благодаря Духа Числа за всё, что он сделал для него.





ВНИМАНИЕ!

Во сне всё происходит совсем не так, как в школе и в науке. Когда мы с Робертом в своих приключениях говорим странные и непривычные слова, не стоит удивляться. Ведь вся эта история весьма необычна и даже невероятна.

Не стоит думать, что все наши слова, сказанные во сне, будут понятны каждому. Например, вашему учителю математики или вашим родителям. Думаю, что если Вы расскажете им о прыгающих числах или про вытягивание репки из числа, они, скорее всего, просто не поймут, о чём вы говорите. У взрослых людей для этого есть другие слова — специальные термины. Вот, например, когда они хотят заставить прыгнуть число два раза, то говорят, что возводят его во вторую степень,

или в квадрат. Они никогда не скажут, что вытягивают репку из числа, они говорят, что извлекают квадратный корень, и вместо нашего $Ух!$, они говорят — факториал!

В математике взрослых великие числа называют простыми, а воображаемые — мнимыми.

Но мы во сне не хотим говорить, как они. Нам не нужны сложные термины. У нас все говорят простыми словами. Когда я, ваш Дух Числа, во сне рисую картинки вместо сложных и скучных вычислений с возведением в степень и извлечением корня, это вовсе не детское развлечение. Просто мне нравится делать сложное простым, а скучное весёлым.

Но на уроках мы ведь никогда не спим и очень редко мечтаем. Поэтому ваш учитель совершенно прав, когда использует те названия и термины, которые приняты во всём мире. Пожалуйста, прошу вас, делайте так, как он говорит. Иначе в школе у вас могут быть проблемы.

Послесловие издателя: тринадцатая ночь

С. Л. Деменок

Год делится на 12 месяцев и 12 знаков Зодиака, день и ночь продолжаются 12 часов. Число 13 открывает новый цикл и как бы нарушает равновесие, достигнутое в предыдущем. Число 13, завершая старый цикл, открывает новый. Король умер. Да здравствует Король!

Сон в тринадцатую ночь продолжает сны Роберта. И все-таки это уже не сон Роберта. И это уже не совсем сон. На самой кромке сна, в ту долю секунды, когда мы уже не спим и ещё не проснулись, происходит самое интересное на свете. Ткань сна теряет свою сплошность. В разрывах появляются фрагменты реальности — звонок будильника, голос мамы, пение птиц или гул машин за окном. Это удивительное время, в котором сон и явь причудливо переплетаются друг с другом. В таком состоянии реальность, будучи чёткой, остается одновременно и смутной.

Однажды, именно в момент пробуждения, сон Роберта из первой ночи странным образом соединился в моей голове со сном Роберта из одиннадцатой ночи.

Вы помните, что говорил Дух Числа Роберту в первом сне? Он объяснял как создать числовой ряд из единицы:

$$1 \times 1 = 1$$

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1\ 111 \times 1\ 111 = 1234321$$

$$11\ 111 \times 11\ 111 = 123454321$$

и т. д.

Правило работает просто великолепно вплоть до девяти единиц:

$$111\ 111\ 111 \times 111\ 111\ 111 = 12345678987654321$$

Но вдруг правило перестаёт работать, когда число единиц достигнет десяти. В одиннадцатом сне Роберта Дух Числа «соскользнул в воду»! Правило перестало работать. И если мы продолжим упражнения, то получим совершенно новый строй:

$$(1\ 111\ 111\ 111)^2 = 1234567900987654321$$

$$(11\ 111\ 111\ 111)^2 = 123456790120987654321$$

$$(111\ 111\ 111\ 111\ 111)^2 = 123456790123456543210987654321$$

и т. д.

Теперь внутри числового ряда формируется новый удвоенный числовой ряд. Исходный ряд имеет едва заметное искажение — в восходящей его части исчезает восьмёрка!

Математики замечали, что иногда все как будто повторяется, но повторяется не совсем точно. Не так давно, в середине 1970-х годов, геометры научились строить такие не совсем строгие формы. С их помощью удалось запрограммировать горный рельеф, молнии, облака и пену для «Звездных войн». Это сделали на студии «Industrial Light & Magic». Фрагменты облака похожи друг на друга, но никогда точно не повторяются. Геометрические формы, похожие на облако или на лист папоротника, называются фракталами. Наш числовой ряд тоже повторяется, но повторяется с едва заметным искажением. И это выдает его фрактальную природу. Остается только удивляться, что достаточно одного числа — единицы — для появления фрактального объекта, пусть самого простого — фрактального числового ряда.

Появлению фрактальной геометрии предшествовали некоторые удивительные математические открытия. Одно из них связано с математической пылью, которую обнаружил профессор Кантор. Помните двенадцатый сон Роберта? Все стены и мебель в комнате, мимо которой проходили Роберт и Теплотаксла, были покрыты тонким слоем мелкой пыли. На ходу Теплотаксла пояснил:

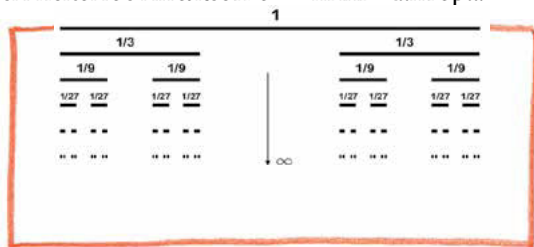
«Это не обычная пыль. Здесь больше пылинок, чем ты бы мог сосчитать за всю свою жизнь! Она такая мелкая, что если ты решил покрыть ею даже кончик иглы, тебе понадобится собрать всю пыль в этой комнате».

Далее мы узнаём, что Кантор (Cantor) переводится с латинского как певец или учитель музыки. И тут же происходит мимолётная встреча Роберта с профессором:

— Бесконечность на бесконечность будет бесконечность. Супербесконечность на бесконечность будет супербесконечность».

От этого голова идёт кругом. Построив свою «пыль», Кантор и сам был озадачен. *«Я вижу это, но не верю»*, — писал он. И ведь есть чему удивляться. На единичном отрезке Кантор построил множество, содержащее столько же точек, сколько и отрезок, но которое на этом отрезке совсем не занимает места! Стрела, пущенная наугад, вряд ли поразила бы хоть один элемент этого множества.

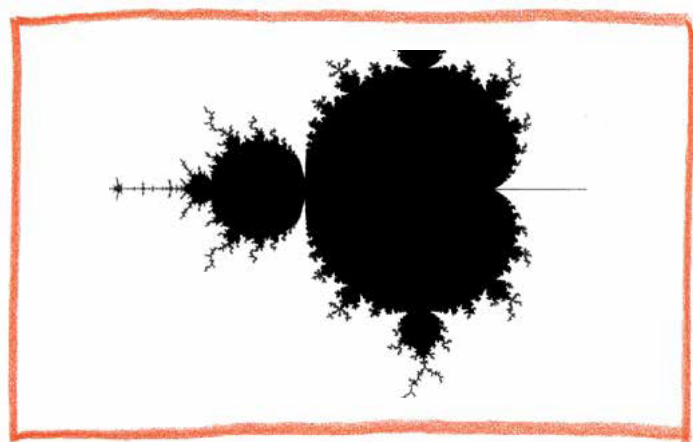
Можно ли представить себе что-либо более странное? Чтобы понять, о чём мы говорим, давайте сделаем пыль Кантора сами. Для начала возьмём отрезок единичной длины (исходный шаг $n = 0$), затем разделим его на три части и изыдем среднюю треть ($n = 1$). Далее будем поступать точно так же с каждым из образовавшихся отрезков. В результате бесконечного количества повторений операции получаем искомое множество — пыль Кантора.



Канторова пыль совершенно разрывная. Между любыми двумя пылинками Кантора обязательно

есть пустота и обязательно есть пылинки Кантора. Она сплошная и рваная одновременно!

Подобные парадоксальные качества присущи многим фракталам. Самый знаменитый фрактал — фрактал Мандельброта — просто кладёзь парадоксов. Его изучают уже более пятидесяти лет. И всё-таки он преподносит сюрпризы.



Так, в 1991 году Дэйв Болл исследовал точку срачивания кардиоиды и главного круга. Для построения границы фрактала Мандельброта в окрестности этой точки компьютеру приходится повторять одну и ту же операцию множество раз. В ходе этих повторений результат может либо возрасть до бесконечности, либо приближаться к некоторому конечному числу. Болл считал число повторений, которые «выбрасывают результат на бесконечность». Результаты он сводил в таблицу:

e	Iterations
0.1	33
0.01	315
0.001	3143
0.0001	31417
0.00001	314160
0.000001	3141593
0.0000001	31415928

По мере появления новых строк удивление Болла росло. Ему хотелось воскликнуть: *«Какого чёрта оно тут делает!»* При чем здесь число $\pi = 3,141592\dots$? И число ли это π ? Ответа не было и нет. Во всяком случае, я его не знаю. А если кто-то поймёт и растолкует мне природу появления здесь числа π , я обещаю приз!

Вы помните, кого увидел Роберт во главе стола на торжественном вечере в аду/раю Чисел? Это был Пифагор. Более двух тысяч лет назад он открыл число π — отношение длины окружности к её диаметру. Без числа «пи» мы бы совершенно пропали.

Если бы «Оскара» присуждали числам, то, вне сомнений, больше всего их бы собрало число π .

Но это тема совсем другой истории...



ИСКАТЬ ПО СПИСКУ

Как только Вы закончили читать эту книжку и не можете вспомнить что-то важное, обращайтесь к этому списку, и он поможет вам отыскать то, что нужно.

В этом списке вы найдёте не только те слова, которые говорил во сне Роберту Дух Числа, но и те, которые используют во взрослой математике и во всём мире. В этом списке для удобства *слова из сна написаны курсивом*.

Кстати, в этом списке есть некоторые названия и фразы, о которых вообще не упоминалось в этой книге. Вы не обращайтесь на них внимания. Я включил их в список ради шутки для учителей математики или других взрослых, к кому в руки случайно может попасть эта книга. Пусть они тоже, в конце концов, улыбнутся вместе с нами!

Предметный указатель

$i(\sqrt{-1})$ (И)	222
Аксиома	201—204
Арифметическая прогрессия	88—89, 231—233
Архимед из Сиракуз (287—212 до н. э.)	227
Бесконечная десятичная дробь	59—65, 178
Бесконечно большие числа	12—14
Бесконечно малые числа	14—16
<i>Бесконечно увеличивающееся число</i> (Пролиферация)	13
Бесконечное деление конечного (<i>Деление жвачки</i>)	14—16
Бесконечные ряды	12—14, 157—163
Бутылка Клейна	220—221
<i>Великие числа</i> (Простые числа)	48—56, 160
Вершина (<i>Узел</i>)	185—187, 190—193
Возведение в степень (<i>Прыжок</i>)	33—35

Возведения в квадрат (<i>Прыжок</i>)	69—70, 122, 163
<i>Волшебное кольцо</i> (Тетраэдрическое кольцо)	192—193
<i>Воображаемые числа</i> (Мнимые числа)	222—223
<i>Вытаскивать репку</i> (Квадратный корень)	68—70
Гармонический ряд	168—171
Гаусс Карл Фридрих (1777—1855)	222, 225
Геометрическая прогрессия	164—167
Гипотеза Гольдбаха	56
Гипотеза Эйлера	55
<i>Горшок</i>	71—72, 182
<i>Двадцатигранник</i> (Икосаэдр)	188
<i>Двойная пирамида</i> (Октаэдр)	188—189
<i>Деление жвачки</i> (Бесконечное деление конечного)	14—16
Деление на ноль	46—48
Делить	43—44
<i>Дерево</i> (задача)	108—109
Десятичная дробь	59—65, 178

Десятичный	31—38
Джон Мун (<i>Джонни Луна</i>)	205—206
Диагональ квадрата	70
Додекаэдр (<i>Мяч из 12 пятиугольников</i>)	189
Доказательство	199—209, 211
Дробь	15—16, 166—171
Единица	12, 226
Задача коммивояжёра (<i>Путешествие по стране</i>)	209—211
Задача оптимизации	211—212
i ($\sqrt{-1}$)	222
Икосаэдр (<i>Двадцатигранник</i>)	188
Иррациональные числа (<i>Нерациональные числа</i>)	66, 68, 73, 178, 227
Искривленные поверхности	212
Кантор Георг (1845—1925)	221
Квадратные числа (Площадь квадрата)	90—92
Квадратный корень (<i>Вытаскивать репку</i>)	68—70

Класс (<i>Команда дворников</i>)	146—152
Клейн Феликс (1849—1925)	220—221, 227
<i>Кокосовые орехи (треугольных чисел)</i>	82—89
<i>Команда дворников</i> (Класс)	146—152
Комбинаторика	134—152
Комбинация без повторений (<i>Рукопожатия</i>)	142—145
Корень (<i>Репка</i>)	68—70
<i>Крендельки</i> (топологические свойства)	220
Кривая Коха	175
Кристаллы снега (снежинки)	174—175
<i>Кролики</i>	98 — 108
<i>Кроличьи часы</i>	100—108
<i>Куб</i> (Шестигранник)	188, 190
Леонардо из Пизы (1170—1240) (<i>Фибоначчи</i>)	95, 223, 225
<i>Лорд Рассел</i> (Бертран Рассел, 1872—1970)	207—209, 219
Мнимые числа (<i>Воображаемые числа</i>)	222—223

Многогранник	186—193
<i>Мяч из пятиугольников</i> (Додекаэдр)	189
Натуральные числа (Обычные числа)	117, 157—159, 179, 202
Непрерывная дробь (или цепная дробь)	181
<i>Нерациональные числа</i> (Иррациональные числа)	66, 68, 73, 178, 227
Несчётные множества	73—74, 222
Нечётные числа	158—159
Нулевая степень	201
Нуль	27—31, 35, 226
<i>Обычные числа</i> (Натуральные числа)	117, 157—159, 179, 202
Октаэдр (<i>Двойная пирамида</i>)	188—189
<i>Отрезок</i> (Ребро)	185—187, 190—193
Отрицательные числа	30
Паскаль Блез (1623—1662)	114—131
Пентагон (<i>Пятиугольник</i>)	182—184

Перестановки	134—142
Периодическая десятичная дробь	65, 178
Пи (π)	227
<i>Пирамида</i> (Тетраэдр)	187
Пифагор из Самоса (VI век н. э.)	223—224
Площадь квадрата (<i>Квадратные числа</i>)	90—92
Последовательность Фибоначчи (<i>числа Фибоначчи</i>)	95—108, 125—126, 177
Постулат Бертрана	54
Предел (Lim)	61, 167, 179
Предположения	199
«Принципы математики» (Б. Рассел и А. Н. Уайтхед)	206—208
Пролиферация (<i>Бесконечно увеличивающееся число</i>)	13
Простая дробь	15—16, 164, 167
Простые числа (<i>Великие числа</i>)	48—56, 160
<i>Прыжок</i> (Возведение в степень)	33—35
<i>Прыжок</i> (Возведения в квадрат)	69—70, 122, 163

<i>Путешествие по стране</i> (Задача коммивояжёра)	209—211
Пыль Кантора	221
<i>Пятиугольник</i> (Пентагон)	182—184
Расчёт круга (<i>Определение размера пирога</i>)	227
Ребро (<i>Отрезок</i>)	185—187, 190—193
Рекурсия	95, 178, 180
<i>Репка</i> (Корень)	68—70
Решето Эратосфена (Метод нахождения простых чисел)	50—52
Римские цифры	28
<i>Рукопожатия</i> (Комбинация без повторений)	142—145
Ряд	158
Самоподобие	183
Сеть	185—186
Симплекс — алгоритм	212
<i>Сова</i> (Эйлер)	222, 225
Теорема Пифагора	71—73
Тетраэдр (<i>Пирамида</i>)	187

Тетраэдрическое кольцо (<i>Волшебное кольцо</i>)	192—193
Топологические объекты	220
Треугольник Паскаля	114—131
Треугольник Серпинского	126—131
<i>Треугольные числа</i>	82, 89, 119—121, 143—145, 232—233
Угол (<i>Узел</i>)	185—186, 190—193
<i>Узел</i> (Вершина)	185—187, 190—193
<i>Узел</i> (Угол)	185—186, 190—193
<i>Ух!</i> (Факториал)	141—142, 163, 211
Факториал (<i>Ух!</i>)	141—142, 163, 211
Факторизация	53—54
<i>Фибоначчи</i> (Леонардо из Пизы, 1170—1240)	95, 223, 225
Формула Эйлера	185—186, 193
Фракталы	174—176

Цепная дробь (или непрерывная дробь)	181
<i>Числа Фибоначчи</i>	95—108,
(Последовательность Фибоначчи)	125—126, 177
Шестигранник (<i>Куб</i>)	188, 190
Эйлер Леонард (1707—1783)	222, 225

СОДЕРЖАНИЕ

Первая ночь

5

Вторая ночь

23

Третья ночь

41

Четвёртая ночь

57

Пятая ночь

77

Шестая ночь

93

Седьмая ночь

110

Восьмая ночь

133

Девятая ночь

154

Десятая ночь

173

Одиннадцатая ночь

195

Двенадцатая ночь

213

Послесловие издателя

236

Искать по списку

242



Ахманов М. С.

ПРОСТО АРИФМЕТИКА

Возможно, наши далекие предки еще не владели речью, но уже умели считать. Счет — древнейшая интеллектуальная операция, которую освоило человечество. Как считали египтяне и шумеры, греки и римляне? Как развивались приемы счета в Средние века и в Новое время? Как были изобретены первые компьютеры? Кто из гениев внес вклад в науку счета?

История вычислений не завершена, и вряд ли она когда-нибудь завершится в обитаемом людьми мире.

Мы лишь проследили путь ее развития от костей с зарубками, от камешков, счетных палочек и абака до механизмов из валиков и колес и первых электронных компьютеров.

По вопросам приобретения книг можно обращаться в издательство «СТРАТА» по адресу:
195112, Россия, Санкт-Петербург, Новочеркасский пр., дом 39, корпус 1, лит. А.

Тел/факс +7(812)528-68-71

www.strata.spb.ru

E-mail: info@strata.spb.ru



Деменок С. Л.

ПРОСТО ФРАКТАЛ

Книга посвящена фракталам не для математиков, не для инженеров и не для философов.

Она для тех, кому нужно часто принимать правильные решения в нашем интенсивном сетевом настоящем.

Она — для интеллектуалов в начале пути и поседевших от проблем управляющих. Словом, для тех, кто понимает, что путь от тривиального к простому лежит через сложное.

«Несомненно, эта книга для прагматичных умов, жаждущих истинных чудес, и я надеюсь, что таким читателям она доставит радость».

Михаил Ахманов,

кандидат физ.-мат. наук, писатель



Деменок С. Л.

ПРОСТО ХАОС

Книга представляет собой упрощённое изложение основных представлений теории динамического хаоса. Она не предназначена для специалистов в этой области. Эта книга для дилетантов в теории хаоса — для тех, кто живёт в самой гуще интенсивного настоящего и вынужден динамично и адекватно реагировать на тенденции и тренды, просматривая следующие за ними метаморфозы реальных событий.

«Хаос делает понятной и управляемой нашу все более глобальную и виртуальную жизнь. Странные аттракторы, фракталы и топология четырёх измерений входят в наш лексикон вместе с облачными сетевыми технологиями. Эта книга великолепно раскрывает смысл новых образов нашего мира и потому может быть полезна тем людям практического склада, которым нужно принимать решения с опорой на научное знание и у которых нет времени добывать это знание из научных монографий».

Д. В. Иванов, профессор, доктор социологических наук

Энценсбергер Ханс Магнус

ДУХ ЧИСЛА

Книга под подушку
для всех, кто боится математики

Перевод с немецкого
Калинин Игорь Сергеевич

Иллюстрации
Ротраут Сюзанн Бернер
(Rotraut Susanne Berner)

Директор издательства:
Калинин Игорь Сергеевич

Редактор серии:
Деменок Сергей Леонидович

Корректор:
Муратова Ангелина Валерьевна

Разработка макета,
верстка и допечатная подготовка:
Мороз Сергей Владимирович

ООО «Страта»

195112, Санкт-Петербург, Новочеркасский пр., д. 39, корп.1

Тел. /факс: +7 (812) 528-68-71

www.strata.spb.ru, e-mail: info@strata.spb.ru

Подписано в печать 15.11.2013. Формат 60 x 90 / 16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9.

Тираж 1000 экз. Заказ №

Типография «ЛИТОГРАФИЯ»

СПб., ул. Днепропетровская, дом 8

Телефон: (812) 977-72-72

Тел./факс: (812) 712-02-08

E-mail: 9777272@mail.ru, www.spbprinting.ru

**Книга «Дух числа» (Der Zahlenteufel) Ханса Энценсбергера, ставшая мировым бестселлером, опубликована на 27 языках по всему миру.
Продано более МИЛЛИОНА экземпляров.**

Двенадцатилетний Роберт не любит математику. Во сне Роберту является Дух Числа, который волшебным образом оживляет этот «скучный» предмет. С находчивостью и шармом Дух Числа делает скучные цифры интересными и восхитительными.

Издательство «СТРАТА» имеет честь представить эту замечательную книгу нашей лучшей аудитории — детям и школьникам в серии «ПРОСТО...», которую для этой книги можно было бы назвать «ПРОЩЕ ПРОСТОГО...».

Ханс Энценсбергер — один из самых известных немецких поэтов и писателей. Он родился в Германии в 1929 году в небольшом баварском селении Кауфбойрен в семье почтового служащего. Сейчас живет в Мюнхене. Будучи автором многих серьезных книг и стихов, он в первый раз в 1961 году опубликовал детский стишок «Allerleirauh», ставший очень популярным.

«Эта увлекательная и захватывающая книга поможет детям на всю жизнь избавиться от фобии перед математикой».

Daily mail

«Энценсбергер сделал Пифагора новым Гарри Поттером, объясняя математику в ясной и совершенно оригинальной форме».

Sunday Business Post



**ИЗДАТЕЛЬСТВО «СТРАТА»
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 2013**