ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1337

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

par

N. BOURBAKI

Fascicule XXXIV

DEUXIÈME PARTIE

GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

CHAPITRE IV

GROUPES DE COXETER ET SYSTÈMES DE TITS

CHAPITRE V

GROUPES ENGENDRÉS PAR DES RÉFLEXIONS

CHAPITRE VI

SYSTÈMES DE RACINES

HERMANN

115, Boulevard Saint-Germain, Paris VI

1968

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

ГРУППЫ КОКСТЕРА И СИСТЕМЫ ТИТСА
ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОТРАЖЕНИЯМИ
СИСТЕМЫ КОРНЕЙ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
А. И. КОСТРИКИНА и А. Н. ТЮРИНА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. И. КОСТРИКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

МОСКВА 1972

УДК 512; 519.46

Книга входит в завоевавшую мировое признание энциклопедию современной математики „Элементы математики“, созданную группой французских ученых, выступающих под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки. Ряд томов этой энциклопедии уже вышел в русском переводе и получил заслуженно высокую оценку читателей.

Эта книга посвящена преимущественно группам, порожденным отражениями. Она содержит обширный материал по теории групп Ли, их дискретных подгрупп, алгебраических и конечных групп, алгебр Ли, теории представлений.

Книга предназначена для самого широкого круга математиков различных специальностей, от студентов до научных работников.

Редакция литературы по математическим наукам

$\frac{2\text{-}2\text{-}3}{5\text{-}72}$

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Новая книга Н. Бурбаки „Группы и алгебры Ли“, относящаяся ко второй части его известного трактата „Элементы математики“, выходит в свет разрозненными выпусками. В 1960 г. была издана (а десять лет спустя переиздана) глава I „Алгебры Ли“, в которой изложены основы теории, не касающиеся вопросов классификации простых алгебр Ли; в русском переводе эта глава еще не появлялась. Главы II и III пока не опубликованы.

При этих обстоятельствах перевод на русский язык изолированных глав IV—VI мог бы показаться несколько преждевременным. Все сомнения, однако, рассеиваются при самом беглом ознакомлении с содержанием настоящего выпуска, к которому вполне подошло бы общее название „Дискретные группы, порожденные отражениями“. В мировой математической литературе до сих пор не было связного и столь исчерпывающего изложения этой увлекательной темы, представляющей значительный интерес для весьма широкого круга математиков, да и не только математиков. Авторское введение и поучительный (хотя и неполный) исторический очерк помогут даже неспециалисту воссоздать тот естественный фон, на котором проходило становление и совершенствование теории кристаллографических групп, систем корней, групп Вейля, групп Коксотера, систем Титса (BN-пар).

Насыщенная конкретными результатами, в том числе справочного характера, книга рассчитана на достаточно квалифицированного читателя. Но она целиком базируется на материале ранее изданных (и имеющихся в русском переводе) книг „Элементов математики“. Во всяком случае, щепетильность автора в соблюдении схемы логической зависимости отдельных книг и глав трактата нашла здесь свое дополнительное подтверждение.

А. Кострикин

ВВЕДЕНИЕ

Изучение полупростых групп (аналитических или алгебраических) и их алгебр Ли приводит к рассмотрению структур *систем корней*, *групп Кокстера* и *систем Титса.* Настоящие главы IV, V и VI как раз и посвящены этим структурам.

Чтобы было понятно, о чем идет речь, приведем несколько примеров.

I. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана [1]). *Корнем* алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ называется ненулевая линейная форма α на $\mathfrak{h}$, такая, что выполнено соотношение $[h, x] = \alpha(h)x$ для некоторого элемента x алгебры $\mathfrak{g}$, отличного от нуля, и для любого $h \in \mathfrak{h}$. Корни образуют в векторном пространстве $\mathfrak{h}^*$, дуальном к $\mathfrak{h}$, приведенную систему корней R. Задание R определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма, и всякая приведенная система корней изоморфна системе корней, полученной описанным способом. Автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, оставляющий устойчивой подалгебру $\mathfrak{h}$, определяет автоморфизм на $\mathfrak{h}^*$, оставляющий инвариантной систему R, и таким образом получается каждый автоморфизм этой системы. Группа Вейля системы R состоит из автоморфизмов пространства $\mathfrak{g}^*$, которые определены внутренними автоморфизмами алгебры $\mathfrak{g}$, оставляющими устойчивой подалгебру $\mathfrak{h}$. Эта группа является группой Кокстера.

Пусть G — связная комплексная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть Γ — подгруппа в $\mathfrak{h}$, состоящая из таких элементов h, что $\exp_G(2\pi i h) = 1$. Пусть $R^\vee$ — система корней в $\mathfrak{h}$, дуальная к R, $Q(R^\vee)$ — подгруппа в $\mathfrak{h}$, порожденная системой $R^\vee$, и пусть $P(R^\vee)$ — подгруппа, которая ассоциирована с подгруппой $Q(R)$ в $\mathfrak{h}^*$, порожденной R (т. е. множество $h \in \mathfrak{h}$ таких, что $\lambda(h)$ — *целое* число для каждого $\lambda \in Q(R)$). Тогда $P(R^\vee) \supset \Gamma \supset Q(R^\vee)$. Далее, центр группы G канонически

---

[1]) В этом Введении мы будем свободно пользоваться как традиционной терминологией, так и понятиями, определения которых появятся только в настоящем выпуске.

изоморфен $P(R^{\vee})/\Gamma$, а ее фундаментальная группа изоморфна $\Gamma/Q(R^{\vee})$. В частности, Γ совпадает с $P(R^{\vee})$, если G — присоединенная группа, и Γ равна $Q(R^{\vee})$, если G односвязна. Наконец, веса конечномерных линейных представлений группы G суть элементы подгруппы $\mathfrak{h}^*$, ассоциированной с Γ.

II. Пусть G — вещественная связная компактная полупростая группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Пусть T — максимальный тор в G с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$ и X — его группа характеров. Пусть, далее, R — множество ненулевых элементов α группы X таких, что $(\operatorname{Ad} t).x=\alpha(t)x$ для какого-нибудь отличного от нуля элемента x алгебры $\mathfrak{g}$ и любого $t\in T$. Отождествим X с решеткой в вещественном векторном пространстве $V=X\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$. Тогда R будет приведенной системой корней в V. Пусть N — нормализатор тора T в G. Действие N на T определяет изоморфизм группы N/T с группой Вейля системы R. Имеем $P(R)\supset X\supset Q(R)$, причем $X=P(R)$, когда G односвязна, и $X=Q(R)$, когда центр G сводится к единичному элементу.

Комплексификация алгебры $\mathfrak{g}$ есть полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ и $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$ — ее подалгебра Картана. Существует канонический изоморфизм пространства $V_{(\mathbf{C})}$ на пространство, дуальное к $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$, который переводит R в систему корней алгебры $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ относительно $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$.

III. Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над коммутативным полем k. Пусть T — максимальный элемент множества торов в G, разложимых над k, и X — группа характеров T (гомоморфизмов T в мультипликативную группу). Отождествим X с решеткой в вещественном векторном пространстве $V=X\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$. Корнями группы G относительно T являются ненулевые элементы α группы X, для каждого из которых существует отличный от нуля элемент x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G такой, что $(\operatorname{Ad} t).x=\alpha(t)x$, какова бы ни была точка t из T. Таким образом мы получаем систему корней R в V, которая, однако, не обязана быть приведенной. Пусть N — нормализатор и Z — централизатор тора T в G, и пусть $N(k)$ и $Z(k)$ — их группы рациональных точек над k. Действие $N(k)$ на T определяет изоморфизм группы $N(k)/Z(k)$ на группу Вейля системы R.

Пусть U — максимальный элемент множества унипотентных подгрупп в G, определенных над k и нормализуемых Z. Положим, $P=Z.U$. Имеем $P(k)=Z(k).U(k)$ и $P(k)\cap N(k)=$ $=Z(k)$. Далее, существует базис $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ системы R такой, что весами тора T в U будут положительные для этого базиса корни системы R. Пусть S — множество элементов группы $N(k)/Z(k)$, которые соответствуют при определенном выше изоморфизме симметриям $s_{\alpha_i} \in W(R)$, ассоциированным с корнями α_i. Тогда четверка $(G(k), P(k), N(k), S)$ есть система Титса.

IV. В теории алгебраических полупростых групп над локальным полем встречаются системы Титса, у которых группа W есть аффинная группа Вейля системы корней. Пусть, например $G = \mathbf{SL}(n+1, \mathbf{Q}_p)$ $(n \geqslant 1)$. Пусть B — группа матриц $(a_{ij}) \in \mathbf{SL}(n+1, \mathbf{Z}_p)$, у которых $a_{ij} \in p\mathbf{Z}_p$ для $i < j$, и N — подгруппа G, состоящая из матриц, у которых в каждом столбце и каждой строке не более одного отличного от нуля элемента. Тогда существует такое подмножество S группы $N/(B \cap N)$, что четверка (G, B, N, S) будет системой Титса. Группа $W = N/(B \cap N)$ есть аффинная группа Вейля системы корней типа A_n. Это — бесконечная группа Кокстера.

При написании этих трех глав неоценимую помощь оказали нам многочисленные беседы с Ж. Титсом. Мы дружески его благодарим.

ГЛАВА IV

ГРУППЫ КОКСТЕРА И СИСТЕМЫ ТИТСА

§ 1. Группы Кокстера

Всюду в этом параграфе через W обозначается группа, записываемая мультипликативно, с единичным элементом 1, и через S — подмножество образующих группы W, такое, что $S=S^{-1}$ и $1 \notin S$. Каждый элемент в W есть произведение конечного числа элементов из S. Начиная с n° 3, предполагается, что каждый элемент множества S имеет порядок 2.

1. Длина и приведенные разложения

Определение 1. *Пусть $w \in W$. Наименьшее целое число $q \geqslant 0$, такое, что w есть произведение q элементов из S, называется длиной элемента w (относительно множества образующих S) и обозначается через $l_s(w)$ или просто $l(w)$. Приведенным разложением элемента w (относительно S) называется всякая последовательность $\mathbf{s}=(s_1, \ldots, s_q)$ элементов из S, для которой $w=s_1 \ldots s_q$ и $q=l(w)$.*

Таким образом, 1 — единственный элемент длины 0, а S состоит из элементов длины 1.

Предложение 1. *Для любых двух элементов w и w' из W имеют место соотношения*

$$l(ww') \leqslant l(w)+l(w'), \tag{1}$$

$$l(w^{-1})=l(w), \tag{2}$$

$$|l(w)-l(w')| \leqslant l(ww'^{-1}). \tag{3}$$

Пусть $(s_1, \ldots, s_p)$ и $(s'_1, \ldots, s'_q)$ — приведенные разложения w и w' соответственно. Тогда $l(w)=p$, $l(w')=q$, и поскольку $ww'=s_1 \ldots s_p s'_1 \ldots s'_q$, то $l(ww') \leqslant p+q$, что дает неравенство (1). Так как $S=S^{-1}$ и $w^{-1}=s_p^{-1} \ldots s_1^{-1}$, то $l(w^{-1}) \leqslant p=l(w)$. Заменяя w на w^{-1}, получаем обратное неравенство, откуда следует (2). Заменяя w на ww'^{-1} в (1) и (2), получаем соотношения

$$l(w)-l(w') \leqslant l(ww'^{-1}), \tag{4}$$

$$l(ww'^{-1})=l(w'w^{-1}); \tag{5}$$

меняя местами w и w' в (4) и применяя (5), получаем $l(w') - l(w) \leqslant l(ww'^{-1})$. Отсюда вытекает неравенство (3).

Следствие. *Пусть* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_p)$ *и* $\mathbf{s}' = (s'_1, \ldots, s'_q)$ — *две последовательности элементов из* S, $w = s_1 \ldots s_p$ и $w' = s'_1 \ldots s'_q$. *Если последовательность* $(s_1, \ldots, s_p, s'_1, \ldots, s'_q)$ *является приведенным разложением элемента* ww', *то* $\mathbf{s}$ *будет приведенным разложением* w *и* $\mathbf{s}'$ — *приведенным разложением* w'.

По предположению $l(w) \leqslant p$, $l(w') \leqslant q$ и $l(ww') = p + q$, поэтому в силу (1) $l(w) = p$ и $l(w') = q$, откуда и вытекает утверждение следствия.

Замечание. Формула $d(w, w') = l(ww'^{-1})$ определяет расстояние d на W. Соотношения (1) и (2) показывают, что оно инвариантно относительно правых переносов.

2. *Диэдральные группы*

Определение 2. *Диэдральной группой (или группой диэдра) называется всякая группа с двумя различными образующими порядка* 2.

Пример. Пусть M — мультипликативная группа $\{1, -1\}$ и и m — целое число $\geqslant 2$ (соотв. $m = \infty$). Заставим M действовать на $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (соотв. на $\mathbf{Z}$), полагая $(-1).x = -x$, и обозначим через $\mathbf{D}_m$ связанное с этим действием полупрямое произведение M на $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (соотв. M на $\mathbf{Z}$). Элементами $\mathbf{D}_m$ будут пары (ε, x), где $\varepsilon = \pm 1$ и $x \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (соотв. $x \in \mathbf{Z}$). Групповой закон в D_m задается формулой

$$(\varepsilon, x).(\varepsilon', x') = (\varepsilon\varepsilon', \varepsilon' x + x'). \tag{6}$$

Обозначим через ι класс 1 по модулю m (соотв. $\iota = 1$) и положим

$$\rho = (-1, 0), \quad \rho' = (-1, \iota), \quad \pi = (1, \iota); \tag{7}$$

тогда $\rho^2 = \rho'^2 = 1$ и $\pi = \rho\rho'$. Формулы

$$\pi^n = (1, n\iota), \quad \rho\pi^n = (-1, n\iota) \tag{8}$$

показывают, что $\mathbf{D}_m$ — группа диэдра, порожденная множеством $\{\rho, \rho'\}$.

Предложение 2. *Предположим, что* S *состоит из двух различных элементов* s *и* s' *порядка* 2.

(i) *Подгруппа* $P \subset W$ *с образующей* $p = ss'$ *нормальна в* W *и* W *является полупрямым произведением подгрупп* $T = \{1, s\}$ и P, *причем* $(W : P) = 2$.

(ii) *Пусть* m — *порядок (конечный или бесконечный) элемента* p. *Тогда* $m \geqslant 2$ *и* W *имеет порядок* $2m$. *Существует* *единственный изоморфизм* φ *группы* $\mathbf{D}_m$ *на* W, *такой, что* $\varphi(\rho)=s$ *и* $\varphi(\rho')=s'$.

(i) Имеем $sps^{-1}=sss's=s's=p^{-1}$, откуда

$$sp^n s^{-1}=p^{-n} \tag{9}$$

для любого целого числа n. Группа W порождается парой $\{s, s'\}$, а также парой $\{s, p\}$, так что P — нормальная подгруппа в W. Следовательно, TP — подгруппа в W, а так как она содержит s и $s'=sp$, то $W=TP=P\cup sP$. Поэтому для доказательства (i) достаточно убедиться в том, что $W\neq P$. Если бы $W=P$, то W была бы коммутативна, откуда $p^2=s^2s'^2=1$. Группа $W=P$ содержала бы только два элемента 1 и p, вопреки предположению, что в W имеются по крайней мере три элемента 1, s и s'.

(ii) Так как $s\neq s'$, то $p\neq 1$, откуда $m\geqslant 2$. Поскольку P имеет порядок m и $(W:P)=2$, порядок W равен $2m$. Если m конечно (соотв. бесконечно), то существует изоморфизм φ' группы $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (соотв. $\mathbf{Z}$) на P, переводящий π в p. Далее существует изоморфизм φ' группы $M=\{1, -1\}$ на T, переводящий -1 в s. Группа W является полупрямым произведением T и P. Формула (9) и соотношение $\rho\pi^n\rho^{-1}=\pi^{-n}$ позволяют построить из φ' и φ'' такой изоморфизм φ группы D_m на W, что $\varphi(\rho)=s$ и $\varphi(\pi)=p$, откуда $\varphi(\rho')=s'$. Единственность φ следует из того, что $\mathbf{D}_m$ порождается $\{\rho, \rho'\}$.

Замечание. Рассмотрим диэдральную группу W порядка $2m$, порожденную двумя различными элементами s и s' порядка 2. Обозначим через $\mathbf{s}_q$ (соотв. $\mathbf{s}'_q$) последовательность длины q, четными (соотв. нечетными) членами которой являются s', а нечетными (соотв. четными) — s. Пусть w_q (соотв. w'_q) — произведение элементов последовательности $\mathbf{s}_q$ (соотв. $\mathbf{s}'_q$). Имеем

$$w_{2k}=(ss')^k, \qquad w_{2k+1}=(ss')^k s,$$

$$w'_{2k}=(s's)^k=(ss')^{-k}, \quad w'_{2k+1}=(s's)^k s'=(ss')^{-k-1} s.$$

Если $\mathbf{s}=(s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение (относительно $\{s, s'\}$) элемента $w\in W$, то, очевидно, $s_i\neq s_{i+1}$ для $1\leqslant i\leqslant q-1$. Следовательно, $\mathbf{s}=\mathbf{s}_q$ или $\mathbf{s}=\mathbf{s}'_q$.

В случае $m=\infty$ элементы $(ss')^n$ и $(ss')^n s$ для $n\in\mathbf{Z}$ все различны. Следовательно, элементы $w_q\,(q\geqslant 0)$ и $w'_q\,(q>0)$ все различны, и если $\mathbf{s}$ — приведенное разложение w_q (соотв. w'_q), то с необходимостью будет $\mathbf{s}=\mathbf{s}_q$ (соотв. $\mathbf{s}=\mathbf{s}'_q$). Отсюда следует, что $l(w_q)=l(w'_q)=q$ и что *множество приведенных разложений элементов группы* W *совпадает с множеством последовательностей* $\mathbf{s}_q$ *и* $\mathbf{s}'_q$. Кроме того, каждый элемент из W допускает единственное приведенное разложение.

Пусть теперь m *конечно*. Если $q \geqslant 2m$, то $w_q = w_{q-2m}$ и $w'_q = w'_{q-2m}$. Если $m \leqslant q \leqslant 2m$, то $w_q = w'_{2m-q}$, $w'_q = w_{2m-q}$. Следовательно, при $q > m$ ни s_q, ни s'_q не являются приведенными разложениями. Отсюда вытекает, что все $2m$ элементов группы W содержатся среди элементов $w_0 = w'_0$, w_q, и w'_q для $1 \leqslant q \leqslant m-1$ и $w_m = w'_m$. Таким образом, эти $2m$ элементов различны и из вышесказанного следует, что $l(w_q) = l(w'_q) = q$ для $q \leqslant m$ и что *множество приведенных разложений элементов группы W совпадает с множеством последовательностей s_q и s'_q для $0 \leqslant q \leqslant m$*. Каждый элемент группы W, отличный от w_m, допускает единственное приведенное разложение. Элемент w_m допускает два таких разложения.

3. Основные свойства групп Кокстера

Напомним, что начиная с этого места мы предполагаем, что все элементы из S имеют порядок 2.

Определение 3. *Пара (W, S) называется системой Кокстера, если выполнено следующее условие*:

(K) *Для любых двух элементов s и s' из S обозначим через $m(s, s')$ порядок элемента ss'. Пусть I — множество пар (s, s'), для которых $m(s, s')$ конечно. Тогда система образующих S вместе с соотношениями $(ss')^{m(s, s')} = 1$ для $(s, s') \in I$ будет заданием группы W образующими и определяющими соотношениями*[1].

В случае когда (W, S) — система Кокстера, то, допуская вольность речи, говорят также, что W — *группа Кокстера*.

Примеры. 1) Пусть m — целое число $\geqslant 2$ или ∞ и W — группа, определенная множеством образующих $S = (s, s')$ и определяющими соотношениями $s^2 = s'^2 = 1$, когда $m = \infty$, или же $s^2 = s'^2 = (ss')^m = 1$, когда m конечно. Далее, рассмотрим группу диэдра D_n (n°2, *пример*) и элементы ρ и ρ' в D_m, определенные равенством (7). Поскольку $\rho^2 = \rho'^2 = 1$ и $(\rho\rho')^m = 1$, когда m конечно, то существует однозначно

---

[1]) Это означает, что пара (W, S) удовлетворяет следующему условию универсальности: каковы бы ни были группа G и вложение f множества S в G, такое, что $(f(s), f(s'))^{m(s, s')} = 1$ для (s, s') из I, найдется гомоморфизм g группы W в G, продолжающий f. Этот гомоморфизм единствен, поскольку S порождает W. Эквивалентная форма нашего определения заключается в следующем. Пусть $\overline{W}$ — группа, f — гомоморфизм $\overline{W}$ на W и h — отображение S в $\overline{W}$, такое, что $f(h(s)) = s$, $(h(s)\,h(s'))^{m(s, s')} = 1$ для (s, s') из I и образы $h(s)$ (для $s \in S$) порождают $\overline{W}$. Тогда f — инъективное отображение (и тем самым изоморфизм $\overline{W}$ на W).

определенный гомоморфизм f группы W на $\mathbf{D}_m$, такой, что $f(s) = \rho$ и $f(s') = \rho'$. Так как $\rho\rho'$ имеет порядок m, то ss' тоже имеет порядок m. Следовательно, (W, S) — система Кокстера, W — диэдральная группа порядка $2m$ и f — изоморфизм (предложение 2).

Путем перенесения структуры получается, что каждая группа диэдра является группой Кокстера.

2) Пусть $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа степени n, $n \geqslant 2$, s_i — транспозиция i и $i+1$ для $1 \leqslant i < n$, и пусть $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Можно показать (§ 2, n° 4, *пример* и § 1, упр. 4), что $(\mathfrak{S}_n, S)$ — система Кокстера.

3) Классификация конечных групп Кокстера приведена в § 4 гл. VI.

Замечание. Пусть (W, S) — система Кокстера. Существует гомоморфизм ε группы W в группу $\{1, -1\}$, характеризующийся тем, что $\varepsilon(s) = -1$ для всех $s \in S$. Число $\varepsilon(w)$ называется *сигнатурой* элемента w; оно равно $(-1)^{l(w)}$. Следовательно, формула $\varepsilon(ww') = \varepsilon(w) \cdot \varepsilon(w')$ выражается сравнением $l(ww') \equiv l(w) + l(w') \bmod 2$.

Предложение 3. *Предположим, что (W, S) — система Кокстера. Для того чтобы два элемента s и s' из S были сопряжены*[1]) *в W, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

(I) *Существует такая конечная последовательность $(s_1, \ldots, s_q)$ элементов из S, что $s_1 = s$, $s_q = s'$ и $s_j s_{j+1}$ имеет конечный нечетный порядок для $1 \leqslant j < q$.*

Пусть s и s' из S таковы, что порядок $p = ss'$ равен $2n+1$. В силу равенства (9) имеем $sp^{-n} = p^n s$, откуда

$$p^n s p^{-n} = p^n p^n s = p^{-1} s = s' s s = s', \tag{10}$$

и s' сопряжен с s.

Для любого s из S пусть A_s — множество элементов $s' \in S$, удовлетворяющих условию (I). Согласно этому условию и только что сделанному замечанию, элементы s_j и s_{j+1}, $1 \leqslant j < q$, сопряжены, откуда следует, что все элементы s' из A_s сопряжены с s. Пусть f — отображение S в $M = \{1, -1\}$, равное 1 на A_s и -1 на $S - A_s$. Пусть элементы s' и s'' из S таковы, что $s's''$ имеет конечный порядок m. В случае когда s' и s'' оба лежат в A_s или в $S - A_s$, имеем $f(s') f(s'') = 1$. В противном случае $f(s') f(s'') = -1$; но m четно, так что во всех случаях $(f(s') f(s''))^m = 1$. Поскольку (W, S) — система Кокстера, существует гомоморфизм g группы W в M, инду-

---

[1]) Напомним, что два элемента (соотв. два подмножества) группы W называются сопряженными, если существует внутренний автоморфизм W, переводящий один элемент в другой (соотв. одно подмножество в другое).

цирующий f на S. Если s' сопряжен с s, то принадлежность s ядру g влечет принадлежность s' этому же ядру. Значит, $f(s') = g(s') = 1$ и тем самым $s' \in A_s$. Ч. Т. Д.

4. *Приведенные разложения в группе Кокстера*

Пусть (W, S) — система Кокстера и T — множество сопряженных с элементами из S элементов группы W. Для любой конечной последовательности $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ элементов из S обозначим через $\Phi(\mathbf{s})$ последовательность $(t_1, \ldots, t_q)$ элементов из T, определенных формулой

$$t_j = (s_1 \ldots s_{j-1}) s_j (s_1 \ldots s_{j-1})^{-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant q. \tag{11}$$

Тогда $t_1 = s_1$ и $s_1 \ldots s_q = t_q t_{q-1} \ldots t_1$. Для каждого элемента $t \in T$ обозначим через $n(\mathbf{s}, t)$ число индексов j, таких, что $1 \leqslant j \leqslant q$ и $t_j = t$ в $\Phi(\mathbf{s})$. Наконец, положим

$$R = \{1, -1\} \times T.$$

Лемма 1. (i) *Пусть $w \in W$ и $t \in T$. Функция $(\mathbf{s}, t) \mapsto (-1)^{n(\mathbf{s}, t)}$ имеет одно и то же значение $\eta(w, t)$ для всех последовательностей $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ элементов из S, таких, что $w = s_1 \ldots s_q$.*

(ii) *Для $w \in W$ пусть U_w — отображение R в себя, определенное формулой*

$$U_w(\varepsilon, t) = (\varepsilon . \eta(w^{-1}, t), wtw^{-1}) \quad (\varepsilon = \pm 1, \ t \in T). \tag{12}$$

Отображение $w \mapsto U_w$ является гомоморфизмом группы W в группу перестановок множества R.

Для $s \in S$ определим отображение U_s множества R в себя формулой

$$U_s(\varepsilon, t) = \left(\varepsilon . (-1)^{\delta_{s,t}}, sts^{-1}\right) \quad (\varepsilon = \pm 1, \ t \in T), \tag{13}$$

где $\delta_{s,t}$ — символ Кронекера. Легко видеть, что $U_s^2 = \mathrm{Id}_R$, а это показывает, что U_s является *перестановкой* на R.

Пусть $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ — последовательность элементов из S. Положим $w = s_q \ldots s_1$ и $U_{\mathbf{s}} = U_{s_q} \ldots U_{s_1}$. Индукцией по q мы хотим показать, что

$$U_{\mathbf{s}}(\varepsilon, t) = \left(\varepsilon . (-1)^{n(\mathbf{s}, t)}, wtw^{-1}\right). \tag{14}$$

Это очевидно для $q = 0, 1$. Если $q > 1$, то положим $\mathbf{s}' = (s_1, \ldots, s_{q-1})$ и

$$w' = s_{q-1} \ldots s_1.$$

Используя предположение индукции, получаем

$$U_{\mathbf{s}}(\varepsilon, t) = U_{s_q}\left(\varepsilon.(-1)^{n(\mathbf{s}', t)} w' t w'^{-1}\right) =$$
$$= \left(\varepsilon.(-1)^{n(\mathbf{s}', t)+\delta_{s_q, w' t w'^{-1}}}, w t w^{-1}\right).$$

Однако $\Phi(\mathbf{s}) = (\Phi(\mathbf{s}'), w'^{-1} s_q w')$ и $n(\mathbf{s}, t) = n(\mathbf{s}', t) + \delta_{w'^{-1} s_q w', t}$, откуда и следует формула (14).

Пусть $s, s' \in S$ таковы, что $p = ss'$ имеет конечный порядок m. Пусть $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_{2m})$ — последовательность элементов из S, в которой $s_j = s$ для нечетных j и $s_j = s'$ для четных j. Тогда $s_{2m} \ldots s_1 = p^{-m} = 1$, и формула (11) дает

$$t_j = p^{j-1} s, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2m. \tag{15}$$

Поскольку p имеет порядок m, все элементы $t_1, \ldots, t_m$ различны и $t_{j+m} = t_j$ для $1 \leqslant j \leqslant m$. Для каждого $t \in T$ целое число $n(\mathbf{s}, t)$ равно поэтому 0 или 2, и равенство (14) показывает, что $U_{\mathbf{s}} = \mathrm{Id}_R$. Иначе говоря, $(U_s U_{s'})^m = \mathrm{Id}_R$. По самому определению системы Кокстера существует, следовательно, гомоморфизм $w \mapsto U_w$ группы W в группу перестановок на R, при котором U_s задается правой частью формулы (13). Тогда $U_w = U_{\mathbf{s}}$ для любой последовательности $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$, такой, что $w = s_q \ldots s_1$, и утверждения леммы 1 сразу следуют из равенства (14).

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$, $\Phi(\mathbf{s}) = (t_1, \ldots, t_q)$ *и* $w = s_1 \ldots s_q$. *Пусть* T_w — *множество элементов* $t \in T$, *для которых* $\eta(w, t) = -1$. *Для того чтобы* $\mathbf{s}$ *было приведенным разложением* w, *необходимо и достаточно, чтобы все* t_i *были различны. Тогда* $T_w = \{t_1, \ldots, t_q\}$ *и* $\mathrm{Card}(T_w) = l(w)$.

Как легко видеть, $T_w \subset \{t_1, \ldots, t_q\}$. Взяв $\mathbf{s}$ приведенным, находим сначала, что $\mathrm{Card}\, T_w \leqslant l(w)$. Далее, если t_i все различны, то $n(\mathbf{s}, t) = 1$ в случае, когда t принадлежит последовательности $\{t_1, \ldots, t_q\}$ и $n(\mathbf{s}, t) = 0$ в противном случае. Отсюда $T_w = \{t_1, \ldots, t_q\}$ и $q = \mathrm{Card}(T_w) \leqslant l(w)$, что влечет приведенность $\mathbf{s}$. Предположим, наконец, что $t_i = t_j$ при $i < j$. Представляя s_i в виде $s_i = u s_j u^{-1}$, где $u = s_{i+1} \ldots s_{j-1}$, получаем

$$w = s_1 \ldots s_{i-1} s_{i+1} \ldots s_{j-1} s_{j+1} \ldots s_q,$$

а это означает, что $\mathbf{s}$ не является приведенным разложением элемента w.

Лемма 3. *Пусть* $w \in W$ *и* $s \in S$, *причем* $l(sw) \leqslant l(w)$. *Для любой последовательности* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ *элементов из* S *с* $w = s_1 \ldots s_q$ *существует* j, $1 \leqslant j \leqslant q$, *для которого*

$$s s_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_{j-1} s_j.$$

Пусть p — длина w и $w' = sw$. Ввиду *замечания* в n°3 $l(w') \equiv l(w) + 1 \bmod 2$. Из условия $l(w') \leqslant l(w)$ и соотношения

$$|l(w) - l(w')| \leqslant l(ww'^{-1}) = l(s) = 1$$

следует тогда, что $l(w') = p - 1$. Выберем приведенное разложение

$$(s'_1, \ldots, s'_{p-1})$$

элемента w' и положим $\mathbf{s}' = (s, s'_1, \ldots, s'_{p-1})$ и $\Phi(\mathbf{s}') = (t'_1, \ldots, t'_p)$. Ясно, что $\mathbf{s}'$ — приведенное разложение w и что $t'_1 = s$. В силу леммы 2 элементы $t'_1, \ldots, t'_p$ все различны, и мы имеем $n(\mathbf{s}', s) = 1$. Так как w — произведение элементов последовательности s, то из леммы 1 вытекает, что $n(\mathbf{s}, s) \equiv n(\mathbf{s}', s) \bmod 2$, откуда $n(\mathbf{s}, s) \neq 0$. Следовательно, s равно одному из элементов t_j последовательности $\Phi(\mathbf{s})$, откуда и следует утверждение леммы.

Замечание. Множество T_w, определенное в лемме 2, состоит из элементов $w''sw''^{-1}$, соответствующих тройкам $(w', w'', s) \in W \times W \times S$, таким, что $w = w''sw'$ и $l(w') + l(w'') + 1 = l(w)$.

5. Условие замены

Под „условием замены“ понимается следующее утверждение о (W, S):

(З) *Пусть $w \in W$, $s \in S$ и $l(sw) \leqslant l(w)$. Для всякого приведенного разложения $(s_1, \ldots, s_q)$ элемента w существует такой индекс j, $1 \leqslant j \leqslant q$, что*

$$ss_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_{j-1}s_j. \tag{16}$$

В этом пункте предполагается, что (W, S) удовлетворяет условию (З); таковыми являются по лемме 3 системы Кокстера, к которым применимы, следовательно, все наши результаты.

Предложение 4. *Пусть $s \in S$, $w \in W$ и $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение для w. Возможны только два случая:*

а) $l(sw = l(w) + 1$ *и* $(s, s_1, \ldots, s_q)$ — *приведенное разложение элемента sw.*

б) $l(sw) = l(w) - 1$ *и существует индекс j, $1 \leqslant j \leqslant q$, такой, что*

$$(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$$

будет приведенным разложением элемента sw, а последовательность $(s, s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$ — приведенным разложением w.

Положим $w' = sw$. Согласно формуле (3) n° 1,

$$|l(w) - l(w')| \leqslant l(s) = 1.$$

Рассмотрим отдельно два случая:

а) $l(w') > l(w)$. Стало быть, $l(w') = q + 1$ и $w' = ss_1 \dots s_q$, так что

$$(s, s_1, \dots, s_q)$$

— приведенное разложение w'.

б) $l(w') \leqslant l(w)$. По свойству (3) тогда найдется индекс j, $1 \leqslant j \leqslant q$, для которого выполнено равенство (16). Имеем $w = ss_1 \dots s_{j-1}s_{j+1} \dots s_q$, откуда

$$w' = s_1 \dots s_{j-1}s_{j+1} \dots s_q.$$

Так как $q - 1 \leqslant l(w') \leqslant q$, то $l(w') = q - 1$ и $(s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_q)$ — приведенное разложение для w'.

Лемма 4. *Пусть $w \in W$ — элемент длины $q \geqslant 1$, D — множество его приведенных разложений и F — отображение D в некоторое множество E. Предположим, что $F(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{s}')$, коль скоро $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_q)$ и $\boldsymbol{s}' = (s'_1, \dots, s'_q)$ — элементы множества D, удовлетворяющие одному из следующих условий:*

а) $s_1 = s'_1$ *или* $s_q = s'_q$;

б) *для j нечетного и k четного существуют такие s и s' в S, что $s_j = s'_k = s$ и $s_k = s'_j = s'$.*

Тогда F постоянно.

А) Для $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in D$ положим $\boldsymbol{t} = (s'_1, s_1, \dots, s_{q-1})$. Покажем, что если $F(\boldsymbol{s}) \neq F(\boldsymbol{s}')$, то $\boldsymbol{t} \in D$ и $F(\boldsymbol{t}) \neq F(\boldsymbol{s})$. В самом деле, $w = s'_1 \dots s'_q$, значит, $s'_1 w = s'_2 \dots s'_q$ имеет длину $< q$. Согласно предложению 4, существует индекс j, $1 \leqslant j \leqslant q$, такой, что последовательность $\boldsymbol{u} = (s'_1, s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_q)$ принадлежит D. Условие а) дает тогда $F(\boldsymbol{u}) = F(\boldsymbol{s}')$. Если бы $j \neq q$, то по тем же соображениям $F(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{u})$, откуда $F(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{s}')$, вопреки предположению. Значит, $j = q$, откуда $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u} \in D$ и $F(\boldsymbol{t}) = F(\boldsymbol{s}') \neq F(\boldsymbol{s})$.

Б) Пусть $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{s}'$ — элементы в D. Для любого целого числа j, $0 \leqslant j \leqslant q$, определим последовательность $\boldsymbol{s}_j$ из q элементов множества S следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{s}_0 = (s'_1, \dots, s'_q),\\
&\boldsymbol{s}_1 = (s_1, \dots, s_q),\\
&\boldsymbol{s}_{q+1-k} = (s_1, s'_1, \dots, s_1, s'_1, s_1, s_2, \dots, s_k)\\
&\qquad \text{для } q-k \text{ четного и } 1 \leqslant k \leqslant q\\
&\boldsymbol{s}_{q+1-k} = (s'_1, s_1, \dots, s_1, s'_1, s_1, s_2, \dots, s_k)\\
&\qquad \text{для } q-k \text{ нечетного и } 1 \leqslant k \leqslant q.
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Обозначим символом (H_j) утверждение „$\boldsymbol{s}_j \in D$, $\boldsymbol{s}_{j+1} \in D$ и $F(\boldsymbol{s}_j) \neq F(\boldsymbol{s}_{j+1})$“. Из (A) следует, что ($\mathrm{H}_j$) $\Rightarrow$ (H_{j+1}) для $0 \leqslant j < q$; но условие б) противоречит утверждению (H_q). Следовательно, утверждение (H_0) несправедливо, и так как $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{s}'$ и $\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{s}$, то $F(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{s}')$.

Предложение 5. *Пусть M — моноид (с единичным элементом 1) и f — отображение S в M. Пусть $m(s, s')$ — порядок произведения ss' для любых двух элементов s и s' из S. Положим*

$$a(s, s') = \begin{cases} (f(s) f(s'))^l, & \text{когда } m(s, s') = 2l, \ l \text{ конечно}, \\ (f(s) f(s'))^l f(s), & \text{когда } m(s, s') = 2l + 1, \ l \text{ конечно}, \\ 1, & \text{когда } m(s, s') = \infty. \end{cases} \tag{18}$$

Если $a(s, s') = a(s', s)$ для всех $s \neq s'$ из S, то существует отображение g группы W в M, такое, что

$$g(w) = f(s_1) \ldots f(s_q) \tag{19}$$

для любого элемента $w \in W$ и любого его приведенного разложения $(s_1, \ldots, s_q)$.

Пусть D_w — множество приведенных разложений произвольного элемента $w \in W$ и F_w — отображение D_w в M, определенное соотношением

$$F_w(s_1, \ldots, s_q) = f(s_1) \ldots f(s_q).$$

Докажем индукцией по длине элемента w, что F_w постоянно, откуда будет следовать утверждение предложения 5. Случаи $l(w) = 0$, 1 тривиальны, и мы предположим, что $q \geqslant 2$ и что утверждение доказано для всех элементов w с $l(w) < q$. Пусть длина w равна q и $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ — элементы из D_w. Согласно лемме 4, достаточно доказать, что $F_w(\boldsymbol{s}) = F_w(\boldsymbol{s}')$ при условиях а) и б), сформулированных в этой лемме.

а) Из формулы

$$F_w(s_1, \ldots, s_q) = f(s_1) F_{w''}(s_2, \ldots, s_q) = F_{w'}(s_1, \ldots, s_{q-1}) f(s_q)$$

для $w' = s_1 \ldots s_{q-1}$ и $w'' = s_2 \ldots s_q$ и из предположения индукции следует, что $F_w(\boldsymbol{s}) = F_w(\boldsymbol{s}')$, если $s_1 = s_1'$ или $s_q = s_q'$.

б) Пусть существуют такие два элемента s, $s' \in S$, что $s_j = s_k' = s$, $s_k = s_j' = s'$ для нечетного j и четного k. Достаточно обсудить только случай $s \neq s'$. В этом случае последовательности $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{s}'$ будут двумя различными приведенными разложениями w в диэдральной группе, порожденной s и s'. В соответствии с замечанием из n° 2 порядок m элемента ss' обязательно конечен и в обозначениях этого замечания $s = s_m$ и $s' = s'_m$. Следовательно, $F_w(s) = a(s, s')$ и $F_w(s') = a(s' s,)$, откуда

$$F_w(s) = F_w(s').$$

6. *Характеризация групп Кокстера*

Теорема 1. *Для того чтобы пара* (W, S) *была системой Кокстера, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие замены* (З) *из* n° 5.

Лемма 3 из n° 4 показывает, что системы Кокстера удовлетворяют условию (З).

Обратно, предположим, что условие (З) выполнено. Пусть G — группа и f — отображение S в G, для которого $(f(s) f(s'))^m = 1$ всякий раз, когда $s, s' \in S$ и ss' имеет конечный порядок m. Из предложения 5 следует существование отображения g группы W в G, такого, что

$$g(w) = f(s_1) \ldots f(s_q), \tag{20}$$

каков бы ни был элемент $w = s_1 \ldots s_q$ длины q. Для того чтобы доказать, что пара (W, S) является системой Кокстера, достаточно убедиться в том, что g — гомоморфизм, а это следует из формулы

$$g(sw) = f(s) g(w) \qquad s \in S, \quad w \in W, \tag{21}$$

поскольку S порождает W. Предложение 4 из n° 5 оставляет только две возможности:

а) $l(sw) = l(w) + 1$; если $(s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение w, то $(s, s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение элемента sw, откуда и следует (21).

б) $l(sw) = l(w) - 1$; положим $w' = sw$. Тогда $w = sw'$ и $l(sw') = l(w') + 1$. Поэтому из а) следует, что $g(w) = f(s) g(sw)$, откуда $f(s) g(w) = g(sw)$, ибо $(f(s))^2 = 1$.

7. *Семейства разбиений*

Пусть (W, S) — система Кокстера. Для любого s из S обозначим через P_s множество элементов $w \in W$, таких, что $l(sw) > l(w)$. Тогда имеют место следующие утверждения:

(A) $\bigcap_{s \in S} P_s = \{1\}$.

Действительно, пусть $w \neq 1$ в W и $(s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение. Тогда $q \geqslant 1$ и $(s_2, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение элемента $s_1 w$. Поэтому $l(w) = q$, $l(s_1 w) = q - 1$ и тем самым $w \notin P_{s_1}$.

(Б) *Для любого s из S множества P_s и sP_s образуют разбиение группы W.*

Пусть $w \in W$ и $s \in S$. Ввиду предложения 4 из n°5 следует различать только два случая:

а) $l(sw) = l(w) + 1$. Тогда $w \in P_s$.

б) $l(sw) = l(w) - 1$. Положим $w' = sw$ или, что то же самое, $w = sw'$. Имеем

$$l(w') < l(sw'),$$

поэтому $w' \in P_s$ и тем самым $w \in sP_s$.

(В) *Пусть s и s' — два элемента из S и $w \in W$. Если $w \in P_s$ и $ws' \notin P_s$, то $sw = ws'$.*

Пусть q — длина w. Так как $w \in P$, то $l(sw) = q + 1$; так как $ws' \notin P_s$, то $l(sws') = l(ws') - 1 \leqslant q$, а поскольку $l(sws') = l(sw) \pm 1$, мы приходим к заключению, что $l(ws') = q + 1$ и $l(sws') = q$.

Пусть $(s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение w и $s_{q+1} = s'$. Тогда $(s_1, \ldots, s_q, s_{q+1})$ — приведенное разложение элемента ws' длины $q + 1$. Согласно условию замены, существует индекс j, $1 \leqslant j \leqslant q + 1$, для которого

$$ss_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_j. \tag{22}$$

Если бы $1 \leqslant j \leqslant q$, то равенство $sw = s_1 \ldots s_{j-1} s_{j+1} \ldots s_q$ противоречило бы соотношению $l(sw) = q + 1$. Значит, $j = q + 1$ и формула (22) принимает вид $sw = ws'$.

Обратно, имеет место следующий результат:

Предложение 6. *Пусть $(P_s)_{s \in S}$ — семейство подмножеств группы W, удовлетворяющих* (В) *и двум следующим условиям:*

(А′) $1 \in P_s$ *для всякого* $s \in S$.

(Б′) *При всех $s \in S$ множества P_s и sP_s не пересекаются.*

Тогда (W, S) является системой Кокстера и P_s состоит из элементов $w \in W$, для которых $l(sw) > l(w)$.

Пусть $s \in S$ и $w \in W$. Возможны два случая:

а) $w \notin P_s$. Пусть тогда $(s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение w и

$$w_j = s_1 \ldots s_j$$

для $1 \leqslant j \leqslant q$. Положим, кроме того, $w_0 = 1$. Так как $w_0 \in P_s$ по условию (A′) и $w = w_q$ не принадлежит P_s, то существует индекс j, $1 \leqslant j \leqslant q$, такой, что $w_{j-s} \in P_s$, а $w_j = w_{j-1}s_j$ не принадлежит P_s. Из условия (B) получаем тогда

$$sw_{j-1} = w_{j-1}s_j.$$

Таким образом, мы доказали формулу

$$ss_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_{j-1}s_j,$$

откуда следует, что $sw = s_1 \ldots s_{j-1}s_{j+1} \ldots s_q$ и $l(sw) < l(w)$.

б) $w \in P_s$. Пусть $w' = sw$ и тем самым ввиду условия (Б′) $w' \notin P_s$. Тогда, согласно (а), $l(sw') < l(w')$, или, что равносильно, $l(w) < l(sw)$.

Сравнение случаев а) и б) показывает, что P_s состоит из тех $w \in W$, для которых $l(sw) > l(w)$. Условие замены следует из рассуждений, использованных в случае а), поэтому (W, S) — система Кокстера (теорема 1 из n° 6).

8. Подгруппы групп Кокстера

В этом пункте предполагается, что (W, S) — система Кокстера. Для любого подмножества X множества S обозначим через W_X подгруппу в W, порожденную X.

Предложение 7. *Пусть w — элемент из W. Существует подмножество $S_w \subset S$, такое, что $\{s_1, \ldots, s_q\} = S_w$ для любого приведенного разложения $(s_1, \ldots, s_q)$ элемента w.*

Обозначим через M моноид, составленный из подмножеств множества S, с законом композиции $(A, B) \mapsto A \cup B$. Единичным элементом в M будет $\varnothing$. Положим $f(s) = \{s\}$ для $s \in S$. Применим к M и f предложение 5 из n° 5. Тогда $a(s, s') = \{s, s'\}$, если $s, s' \in S$ и $m(s, s')$ конечно. Значит, существует отображение $g: w \mapsto S_w$ группы W в M, такое, что $g(w) = f(s_1) \cup \ldots \cup f(s_q)$. Иначе говоря, $S_w = \{s_1, \ldots, s_q\}$ для $w \in W$ и любого приведенного разложения $(s_1, \ldots, s_q)$ элемента w.

Следствие 1. *Для любого подмножества $X \subset S$ подгруппа W_X группы W состоит из элементов w таких, что $S_w \subset X$.*

Если $w = s_1 \ldots s_q$, где $s_1, \ldots, s_q$ — элементы из S, то $w^{-1} = s_q \ldots s_1$ и, значит,

$$S_{w^{-1}} = S_w. \tag{23}$$

Предложение 4 из n°5 показывает, что $S_{sw'} \subset \{s\} \cup S_{w'}$ для $s \in S$ и $w' \in W$. Отсюда индукцией по длине w получаем

$$S_{ww'} \subset S_w \cup S_{w'}. \tag{24}$$

Из соотношений (23) и (24) следует, что множество U тех $w \in W$, для которых $S_w \subset X$, является подгруппой в W. Итак, $X \subset U \subset W_X$, откуда $U = W_X$.

Следствие 2. *Для любого подмножества* $X \subset S$

$$W_X \cap S = X.$$

Это вытекает из следствия 1 и формулы $S_s = \{s\}$ для $s \in S$.

Следствие 3. *Множество S является минимальным множеством образующих группы W.*

Если $X \subset S$ порождает W, то $W = W_X$ и в силу следствия 2 $X = S \cap W_X = S$.

Следствие 4. *Для всякого подмножества $X \subset S$ длина любого элемента $w \in W_X$ относительно системы образующих X группы W_X равна $l_S(w)$.*

Пусть $(s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение w как элемента из W. Тогда $w = s_1 \ldots s_q$ и $s_j \in X$ для $1 \leqslant j \leqslant q$ (следствие 1). Кроме того, по определению $q = l_s(w)$ элемент w не может быть произведением $q' < q$ элементов из $X \subset S$.

Теорема 2. (i) *Для любого подмножества $X \subset S$ пара (W_X, X) является системой Кокстера.*

(ii) *Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство подмножеств в S. Если $X = \bigcap\limits_{i \in I} X_i$, то $W_X = \bigcap\limits_{i \in I} W_{X_i}$.*

(iii) *Пусть X и X' — два подмножества в S. Тогда $W_X \subset W_{X'}$* (соотв. $W_X = W_{X'}$) *в том и только том случае, если $X \subset X'$* (соотв. $X = X'$).

Каждый элемент множества X имеет порядок 2, и X порождает W_X. Пусть $x \in X$, $w \in W_X$ и $l_X(xw) \leqslant l_X(w) = q$. Тогда из следствия 4 предложения 7 вытекает, что

$$l_S(xw) \leqslant l_S(w) = q.$$

Пусть $x_1, \ldots, x_q$ — элементы из X, такие, что $w = x_1 \ldots x_q$. Так как (W, S) удовлетворяет условию замены (теорема 1 n°6), то существует индекс j, $1 \leqslant j \leqslant q$, для которого $xx_1 \ldots x_{j-1} = x_1 \ldots x_{j-1}x_j$. Следовательно, пара (W_X, X)

удовлетворяет условию замены и является системой Кокстера (теорема 1 n° 6). Тем самым доказано (i).

Утверждения (ii) и (iii) получаются непосредственно при помощи следствия 1 предложения 7.

9. *Матрицы и графы Кокстера*

Определение 4. *Пусть I — некоторое множество. Матрицей Кокстера типа I называется всякая симметрическая квадратная матрица $M=(m_{ij})_{i,\,j\in I}$, элементы которой — целые числа или же символ $+\infty$, удовлетворяющие соотношениям*

$$m_{ii}=1 \quad \textit{для всех} \quad i\in I; \tag{25}$$

$$m_{ij}\geqslant 2 \quad \textit{для} \quad i,\, j\in I, \quad i\neq j. \tag{26}$$

Назовем (допуская вольность речи) графом Кокстера типа I пару, состоящую из графа[1]) Γ, *у которого I — множество вершин, и отображения f множества ребер этого графа в множество, состоящее из символа $+\infty$ и целых чисел $\geqslant 3$. Будем говорить, что Γ — граф, подчиненный графу Кокстера* (Γ, f).

Каждой матрице Кокстера M типа I следующим образом сопоставляется граф Кокстера (Γ, f):

граф Γ имеет в качестве множества вершин I, а в качестве ребер — пары $\{i, j\}$ из I, для которых $m_{ij}\geqslant 3$. Отображение f сопоставляет ребру $\{i, j\}$ элемент m_{ij} матрицы M.

Очевидно, что таким образом устанавливается биективное соответствие между множеством матриц Кокстера типа I и множеством графов Кокстера типа I.

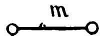
Для простоты восприятия граф Кокстера типа I зачастую представляют схемой, изображающей подчиненный граф, приписывая еще над каждым (или рядом с каждым) ребром $\{i, j\}$ число $f(\{i, j\})$. Обычно опускают приписывание тех из этих чисел, которые равны 3.

Если (W, S) — система Кокстера, то матрица $M=(m(s, s'))_{s,\, s'\in S}$, где $m(s, s')$ — порядок элемента ss', является матрицей Кокстера типа S, называемой матрицей системы (W, S). Действительно, $m(s, s)=1$, поскольку $s^2=1$ для всех $s\in S$, и $m(s, s')=m(s', s)\geqslant 2$ в случае $s\neq s'$, поскольку $ss'=(s's)^{-1}\neq 1$. Граф Кокстера (Γ, f), ассоциированный с матрицей M, называется графом Кокстера системы (W, S). Заметим, что две вершины s и s' графа Γ

---

[1]) Определение и используемые здесь свойства *графов* даны в Дополнении.

соединены тогда и только тогда, когда s и s' не коммутируют. Например, матрицей Кокстера диэдральной группы порядка $2m$ является $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$, а ее граф Кокстера изображается схемой



когда $m \geqslant 3$ (или

когда $m = 3$), и

когда $m = 2$.

* Граф Кокстера симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ изображается схемой

($n - 1$ вершин). *

Позже (гл. V, § 4) мы покажем, что, обратно, каждая матрица Кокстера является матрицей некоторой системы Кокстера.

Говорят, что система Кокстера (W, S) *неприводима*, если граф Γ, который подчинен графу Кокстера, ассоциированному с (W, S), *связен* (дополнение, n°2) и *непуст*. Это соответствует тому, что S непусто и не существует разбиения S на два множества S' и S'', отличные от S и такие, что каждый элемент из S' коммутирует с каждым элементом из S''. Более общо, пусть $(\Gamma_i)_{i \in I}$ — семейство связных компонент графа Γ (дополнение, n°2) и S_i — множество вершин компоненты Γ_i. Пусть $W_i = W_{S_i}$ — подгруппа в W, порожденная S_i (см. n°8). Тогда все (W_i, S_i) суть неприводимые системы Кокстера (см. n°8, теорема 2), называемые *неприводимыми компонентами системы* (W, S). Кроме того, W является *ограниченным прямым произведением* [1]) *подгрупп* W_i

[1]) Группа G называется *ограниченным прямым произведением* семейства $(G_i)_{i \in I}$ своих подгрупп, если для любого конечного подмножества $J \subset I$ группа G_J, порожденная G_i, $i \in J$, будет прямым произведением групп G_i, $i \in J$, и если G — объединение G_J. Это означает, что каждый элемент из G_i коммутирует с каждым элементом из G_j для $i \neq j$ и любой элемент группы G однозначно записывается в виде произведения $\coprod_{i \in I} g_i$, где $g_i \in G_i$ и $g_i = 1$ для всех индексов, кроме конечного

для $i \in I$. Это вытекает из следующего более общего утверждения:

Предложение 8. *Пусть* $(S_i)_{i \in I}$ — *такое разбиение* S, *что каждый элемент из* S_i *коммутирует с каждым элементом из* S_j *при* $i \neq j$. *Для всякого* $i \in I$ *пусть* W_i — *подгруппа, порожденная* S_i. *Тогда* W *является ограниченным прямым произведением семейства* $(W_i)_{i \in I}$.

Ясно, что для $i \in I$ подгруппа W'_i, порожденная объединением всех W_j, где $j \neq i$, порождается также множеством $S'_i = \bigcup_{i \neq j} S_j$. По теореме 2 n°8 имеем тогда

$$W_i \cap W'_i = W_\varnothing = \{1\}.$$

Поскольку W порождается объединением подгрупп W_i, предложение доказано.

§ 2. Системы Титса

На протяжении всего этого параграфа символы G, B, N, S, T, W *имеют один и тот же смысл, определяемый ниже в* n° 1.

1. Определение и основные свойства

Пусть G — группа и B — ее подгруппа. Тогда группа $B \times B$ действует на G по правилу $(b, b') \cdot g = bgb'^{-1}$, где b, $b' \in B$ и $g \in G$. Орбитами группы $B \times B$ в G будут множества BgB, $g \in G$, которые называются *двойными смежными классами* (или просто *двойными классами*) G по B. Классы образуют *разбиение* группы G. Соответствующее фактормножество обозначается символом $B \backslash G / B$. Если C и C' — два двойных класса, то множество CC' будет *объединением* двойных классов.

Определение 1. *Пусть* G — *группа,* B *и* N — *ее подгруппы и* S — *подмножество в* $N/(B \cap N)$. *Системой Титса называется четверка* (G, B, N, S), *удовлетворяющая следующим аксиомам:*

(T1) *Множество* $B \cup N$ *порождает* G *и* $B \cap N$ *является нормальной подгруппой группы* N.

числа. Это последнее условие эквивалентно следующему: G порождается объединением G_i и $G_i \cap G_J = \{1\}$ для всех $i \in I$ и любого конечного подмножества $J \subset I$, такого, что $i \notin J$.

(T2) *Множество* S *порождает группу* $W = N/(B \cap N)$ *и состоит из элементов порядка* 2.

(T3) $sBw \subset BwB \cup BswB$ *для* $s \in S$ *и* $w \in W$ [1]).

(T4) $sBs \not\subset B$ *для любого* $s \in S$.

Группу $W = N/(B \cap N)$ иногда называют *группой Вейля* системы Титса (G, B, N, S).

Замечания. 1) В n°5 (следствие теоремы 3) будет показано, что при заданных (G, B, N) существует не более одного подмножества S в $(N/(B \cap N)$, для которого четверка (G, B, N, S) образует систему Титса.

2) Пусть (G, B, N, S) — система Титса и Z — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в B. Пусть $G' = G/Z$, $B' = B/Z$, $N' = N/(Z \cap N)$, и пусть S' — образ S в $N'/(B' \cap N')$. Тогда легко видеть, что (G', B', N', S') будет системой Титса.

Далее всюду в этом параграфе четверка (G, B, N, S) *обозначает систему Титса. Положим, кроме того,* $T = B \cap N$ *и* $W = N/T$. *Под двойным классом мы будем подразумевать двойной смежный класс группы* G *по подгруппе* B. *Для каждого* $w \in W$ *положим* $C(w) = BwB$. *Это двойной класс.*

Выведем несколько элементарных следствий из аксиом (T1) — (T4).

Пусть $w, w', \ldots$ — элементы из W и $s, s', \ldots$ — элементы из S. Очевидны соотношения

$$C(1) = B, \quad C(ww') \subset C(w) . C(w'), \quad C(w^{-1}) = C(w)^{-1}. \tag{1}$$

Аксиома (T3) записывается также в виде

$$C(s) . C(w) \subset C(w) \cup C(sw). \tag{2}$$

Из (1) следует, что $C(sw) \subset C(s) . C(w)$. Кроме того, $C(s) . C(w)$ — объединение двойных классов. Поэтому имеются только две возможности:

$$C(s) . C(w) = \begin{cases} C(sw), & \text{если } C(w) \not\subset C(s) . C(w), \\ C(w) \cup C(sw), & \text{если } C(w) \subset C(s) . C(w). \end{cases} \tag{3}$$

В силу аксиомы (T4) $B \neq C(s) . C(s)$. Подставляя $w = s$ в (3) и используя соотношение $s^2 = 1$, получаем

$$C(s) . C(s) = B \cup C(s). \tag{4}$$

---

[1]) Каждый элемент группы W есть смежный класс по подгруппе $B \cap N$, т. е. подмножество группы G. Это придает смысл произведениям вида BwB. Вообще для каждого подмножества A группы W обозначим через BAB подмножество $\bigcup_{w \in A} BwB$.

Эта формула показывает, что $B \cup C(s)$ — подгруппа в G. Умножая оба члена в (4) *справа* на $C(w)$ и используя формулу (3) и соотношение

$$B \, . \, C(w) = C(w),$$

получаем

$$C(s) \, . \, C(s) \, . \, C(w) = C(w) \cup C(sw). \tag{5}$$

Заменяя все множества, входящие в соотношения (2), (3) и (5), на обратные, а затем w на w^{-1}, мы получим формулы

$$C(w) \, . \, C(s) \subset C(w) \cup C(ws); \tag{2'}$$

$$C(w) \, . \, C(s) = \begin{cases} C(ws), & \text{если} \quad C(w) \not\subset C(w) \, . \, C(s), \\ C(w) \cup C(ws), & \text{если} \quad C(w) \subset C(w) \, . \, C(s). \end{cases} \tag{3'}$$

$$C(w) \, . \, C(s) \, . \, C(s) = C(w) \cup C(ws). \tag{5'}$$

Лемма 1. *Пусть* $s_1, \ldots, s_q \in S$ *и* $w \in W$. *Тогда*

$$C(s_1 \ldots s_q) \, . \, C(w) \subset \bigcup_{(i_1, \ldots, i_p)} C(s_{i_1} \ldots s_{i_p} w),$$

где $(i_1, \ldots, i_p)$ *пробегает множество строго возрастающих последовательностей целых чисел из интервала* $[1, q]$.

Случай $q = 0$ тривиален, и мы проведем индукцию по q. Если $q \geqslant 1$, то $C(s_1 \ldots s_q) \, . \, C(w) \subset C(s_1) \, . \, C(s_2 \ldots s_q) \, . \, C(w)$. По предположению индукции $C(s_2 \ldots s_q) \, . \, C(w)$ содержится в объединении классов $C(s_{j_1} \ldots s_{j_p} w)$, где

$$2 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant q.$$

Согласно (T3), множество $C(s_1) \, . \, C(s_{j_1} \ldots s_{j_p} w)$ содержится в объединении $C(s_1 s_{j_1} \ldots s_{j_p} w)$ и $C(s_{j_1} \ldots s_{j_p} w)$. Отсюда следует утверждение леммы.

2. *Пример*

Пусть k — поле, n — целое число $\geqslant 0$ и (e_i) — канонический базис в k^n. Пусть $G = \mathbf{GL}(n, k)$, B — верхняя треугольная подгруппа в G (состоящая из матриц с нулями ниже главной диагонали), и пусть N — подгруппа в G, состоящая из матриц, у которых в каждом столбце и каждой строке только один элемент отличен от 0. Элементы группы N переставляют прямые ke_i, поэтому существует сюръективный гомоморфизм $N \to \mathfrak{S}_n$, ядром которого служит подгруппа $T = B \cap N$ диагональных матриц. Тем самым мы можем отождествить $W = N/T$ и $\mathfrak{S}_n$. Обозначим через s_j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ элемент из W, соответствующий транспозиции j и $j+1$.

Пусть S — множество всех s_j. Тогда *четверка* (G, B, N, S) *будет системой Титса.*

Действительно, справедливость аксиом (T1) и (T4) достаточно очевидна.

Аксиома (T2) доказана в *Алг.*, гл. I, упр. к § 7.

Остается проверить, что имеет место (T3), т. е. что

$$s_jBw \subset BwB \cup Bs_jwB, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \ w \in W,$$

или, что то же самое, что

$$s_jB \subset BB' \cup Bs_jB', \text{ где } B' = wBw^{-1}.$$

Пусть G_j — подгруппа в G, оставляющая неподвижными все e_i, $i \neq j$, $j+1$, и оставляющая устойчивой плоскость, натянутую на e_j и e_{j+1}. Эта группа изоморфна $\mathbf{GL}(2, k)$. Ясно, что $G_jB = BG_j$. Так как $s_j \in G_j$, то $s_jB \subset BG_j$, и достаточно доказать формулу

$$G_j \subset (B \cap G_j)(B' \cap G_j) \cup (B \cap G_j)\, s_j\, (B' \cap G_j).$$

Отождествим G_j с $\mathbf{GL}(2, k)$. Тогда группа $B \cap G_j$ отождествится с верхней треугольной подгруппой B_2 группы $\mathbf{GL}(2, k)$. Группа $B' \cap G_j$ отождествляется с B_2, когда $w(j) < w(j+1)$, а в других случаях — с нижней треугольной подгруппой B_2^- (матриц с нулями выше диагонали). В первом случае формула, которую надо доказать, принимает вид

$$\mathbf{GL}(2, k) = B_2 \cup B_2sB_2, \quad \text{где} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она следует, например, из того, что B_2 — стационарная подгруппа точки при действии $\mathbf{GL}(2, k)$ на проективной прямой $\mathbf{P}_1(k)$, транзитивная на дополнении к этой точке. Во втором случае подлежащая доказательству формула

$$\mathbf{GL}(2, k) = B_2B_2^- \cup B_2sB_2^-$$

получается из предыдущей формулы умножением справа на s, поскольку $B_2^- = sB_2s$.

3. Разложение G на двойные классы

Теорема 1. *Имеет место равенство $G = BWB$. Соответствие $w \mapsto C(w)$ является биективным отображением W на множество $B \backslash G / B$ двойных классов G по B.*

Ясно, что BWB устойчиво относительно операции $x \mapsto x^{-1}$, а лемма 1 показывает, что оно устойчиво и относительно произведения. Так как BWB содержит B и N, то оно совпадает с G.

Нам остается проверить, что $C(w) \neq C(w')$, если $w \neq w'$. Для этого мы докажем индукцией по q следующее утверждение:

(A_q) Пусть даны два различных элемента w и w' из W, причем $l_S(w) \geqslant l_S(w') = q$. Тогда $C(w) \neq C(w')$ (определение $l_S(w)$ см. в § 1, n° 1).

Это утверждение очевидно при $q = 0$, поскольку в этом случае $w' = 1$ и $w \neq 1$, откуда $C(w') = B$ и $C(w) \neq B$.

Пусть теперь $q \geqslant 1$, а w и w' удовлетворяют предположениям (A_q). Существует элемент $s \in S$, такой, что sw' имеет длину $q-1$. Тогда

$$l_S(w) > l_S(Sw'), \tag{6}$$

поэтому $w \neq sw'$. Далее, $sw \neq sw'$, и по формуле (3) из § 1, n° 1, имеем

$$l_S(sw) \geqslant l_S(w) - 1 \geqslant l_S(sw') = q - 1. \tag{7}$$

По предположению индукции $C(sw')$ отличен от $C(w)$ и $C(sw)$. Из формулы (2) получаем

$$C(sw') \cap C(s) . C(w) = \varnothing. \tag{8}$$

Но так как, кроме того, $C(sw') \subset C(s) . C(w')$, то окончательно $C(w) \neq C(w')$.

Замечание. Аксиома (T4) в предыдущем доказательстве не использовалась.

4. Связь с системами Кокстера

Теорема 2. *Пара (W, S) является системой Кокстера. Далее, для $s \in S$ и $w \in W$ соотношения $C(sw) = C(s) . C(w)$ и $l_S(sw) > l_S(w)$ эквивалентны.*

Для каждого $s \in S$ пусть P_s — множество элементов $w \in W$, таких, что

$$C(s) . C(w) = C(sw).$$

Мы сейчас проверим, что множества P_s удовлетворяют условиям (A′), (Б′) и (В) из § 1, n° 7. Оба утверждения теоремы будут следовать тогда из предложения 6 § 1, n° 7.

Условие (A′), очевидно, выполнено.

Проверим (Б′). Если бы P_s и sP_s обладали общим элементом w, то $w \in P_s$ и $sw \in P_s$, откуда

$$C(s) . C(w) = C(sw), \quad C(s) . C(sw) = C(w).$$

Следовательно, $C(s).C(s).C(w)=C(w)$, и из формулы (5) вытекало бы $C(w)=C(sw)$, что противоречит теореме 1.

Проверим условие (B). Пусть $s, s' \in S$ и $w, w' \in W$, причем $w'=ws'$. По предположению $w \in P_s$, а $w' \notin P_s$, откуда

$$C(sw)=C(s).C(w), \tag{9}$$

и ввиду (3)

$$C(w') \subset C(s).C(w'). \tag{10}$$

Из формулы (9) и соотношения $w=w's'$ получаем

$$C(s)w's'B=C(sw). \tag{11}$$

По формуле (2′) $C(w')C(s') \subset C(w') \cup C(w's')$, откуда сразу следует

$$C(w')s'B \subset C(ws') \cup C(w). \tag{12}$$

Так как $C(w')$ — объединение левых смежных классов gB и так как

$$C(s)C(w')=C(s)w'B,$$

то формула (10) показывает, что $C(s)w'$ пересекается с $C(w')$ и тем более $C(s)w's'B$ пересекается с $C(w')s'B$. Из формул (11) и (12) тогда следует, что двойной класс $C(sw)$ совпадает либо с $C(ws')$, либо с $C(w)$. Поскольку $sw \neq w$, теорема 1 позволяет сделать заключение, что $sw=ws'$.

Следствие 1. *Пусть* $w_1, \ldots, w_q \in W$ и $w=w_1 \ldots w_q$. *Если*

$$l_S(w)=l_S(w_1)+\ldots+l_S(w_q),$$

то

$$C(w)=C(w_1)\ldots C(w_q).$$

Рассматривая приведенные разложения элементов w_i, мы сводим все к случаю приведенного разложения

$$w=s_1 \ldots s_r \quad \text{с} \quad s_i \in S.$$

Если $u=s_2 \ldots s_r$, то $w=s_1u$ и $l_S(s_1u)>l_S(u)$. Отсюда и из теоремы 2 следует, что $C(w)=C(s_1).C(u)$. Требуемая формула получается теперь индукцией по r.

Следствие 2. *Пусть* $w \in W$, *и пусть* T_w — *подмножество в* W, *ассоциированное с* w *описанным в лемме* 2 *из* § 1, n° 4, *способом. Если* $t \in T_w$, *то*

$$C(t) \subset C(w).C(w^{-1}).$$

Если $t \in T_w$, то по определению существуют элементы w', $w'' \in W$ и $s \in S$, для которых

$$w=w'sw'', \quad l_S(w)=l_S(w')+l_S(w'')+1, \qquad t=w'sw'^{-1}.$$

Ввиду следствия 1

$$C(w).C(w^{-1})=C(w').C(s).C(w'').C(w''^{-1}).C(s).C(w'^{-1}).$$

Отсюда

$$C(w).C(w^{-1})\supset C(w').C(s).C(s).C(w'^{-1}).$$

В соответствии с формулой (4) $C(s)\subset C(s).C(s)$, так что

$$C(w).C(w^{-1})\supset C(w').C(s).C(w'^{-1})\supset C(t).$$

Следствие 3. *Пусть $w\in W$, и пусть H_w — подгруппа в G, порожденная множеством $C(w).C(w^{-1})$. Тогда*

а) *для каждого приведенного разложения $(s_1, \ldots, s_q)$ элемента w имеем*

$$C(s_j)\subset H_w, \qquad 1\leqslant j\leqslant q;$$

б) *группа H_w содержит класс $C(w)$ и порождается им.*

Доказываем а) индукцией по j. Пусть $C(s_k)$ содержится в H_w для $k<j$. Положим

$$t=(s_1 \ldots s_{j-1})s_j(s_1 \ldots s_{j-1})^{-1}.$$

Элемент t принадлежит подмножеству $T_w\subset W$, определенному в лемме 2, § 1, n°4. Следствие 2 дает $C(t)\subset H_w$, откуда $C(s_j)\subset H_w$.

Согласно следствию 1, $C(w)=C(s_1)\ldots C(s_q)$, поэтому $C(w)\subset H_w$, откуда вытекает б).

Пример. Теорема 2, примененная к системе Титса из n°2, показывает, что *симметрическая группа* $\mathfrak{S}_n$ с описанным там множеством образующих (транспозиции рядом стоящих символов) является группой Кокстера.

5. Подгруппы группы G, содержащие B

Для любого подмножества $X\subset S$ обозначим через W_X подгруппу в W, порожденную X (ср. § 1, n° 8), и через G_X объединение BW_XB двойных классов $C(w)$, $w\in W_X$. По определению $G_\varnothing=B$ и $G_S=G$.

Теорема 3. а) *Для любого подмножества $X\subset S$ множество G_X есть подгруппа в G, порожденная $\bigcup_{s\in X} C(s)$.*

б) *Отображение $X\mapsto G_X$ является биекцией $\mathfrak{P}(S)$ на множество подгрупп в G, содержащих B.*

в) *Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство подмножеств в S. Если $X=\bigcap_{i\in I} X_i$, то $\bigcap_{i\in I} G_{X_i}=G_X$.*

г) *Пусть* X *и* Y — *два подмножества в* S. *Включение* $G_X \subset G_Y$ (*соотв. равенство* $G_X = G_Y$) *имеет место тогда и только тогда, когда* $X \subset Y$ (*соотв.* $X = Y$).

Ясно, что $G_X = (G_X)^{-1}$. Лемма 1 n° 1 показывает, что $G_X . G_X \subset G_X$. Отсюда и из следствия 1 теоремы 2 получаем утверждение а).

Инъективность отображения $X \mapsto G_X$ следует из инъективности отображения $X \mapsto W_X$ (§ 1, n° 8, теорема 2). Далее, пусть H — подгруппа в G, содержащая B, и пусть U — множество $w \in W$, таких, что $C(w) \subset H$. Тогда $H = BUB$, поскольку H — объединение двойных классов. Пусть $X = U \cap S$. Покажем, что $H = G_X$. Очевидно, что $G_X \subset H$. С другой стороны, пусть $u \in U$ и $(s_1, \ldots, s_q)$ — его приведенное разложение. Следствие 3 теоремы 2 влечет $C(s_j) \subset H$, откуда $s_j \in X$ для $1 \leqslant j \leqslant q$. Мы имеем теперь $u \in W_X$, и так как H есть объединение $C(u)$, $u \in U$, то $H \subset G_X$, чем завершается доказательство утверждения б).

Утверждения в) и г) следуют из аналогичных свойств групп W_X (§ 1 n° 8, теорема 2).

Следствие. *Множество* S *состоит из элементов* $w \in W$, $w \neq 1$, *для которых* $B \cup C(w)$ *является подгруппой в* G.

Элементы $w \in W$, для которых $B \cup C(w)$ — подгруппа в G, характеризуются тем, что для каждого из них существует $X \subset S$ с $W_X = \{1, w\}$. Если, кроме того, $w \neq 1$, то необходимо $\mathrm{Card}(X) = 1$, т. е. $w \in S$.

Замечание 1). Предыдущее следствие показывает, что множество S определяется тройкой (G, B, N). По этой причине иногда системой Титса называют тройку (G, B, N); говорят еще, что (B, N) — *система Титса в* G.

Предложение 1. *Пусть* X — *подмножество в* S *и* N' — *подгруппа в* N, *образ которой в* W *совпадает с* W_X. *Тогда* (G_X, B, N', X) *является системой Титса.*

Имеем $G_X = BW_XB = BN'B$. Отсюда следует, что G_X порождается множеством $B \cup N'$. Выполнение аксиом (T1)—(T4) легко проверить.

Предложение 2. *Пусть* $X, Y \subset S$ *и* $w \in W$. *Тогда*

$$G_X w G_Y = BW_X w W_Y B.$$

Пусть $s_1, \ldots, s_q \in X$ и $t_1, \ldots, t_q \in Y$. Лемма 1 показывает, что

$$C(s_1 \ldots s_q) . C(w) . C(t_1 \ldots t_q) \subset BW_X w W_Y B,$$

откуда

$$G_X w G_Y \subset B W_X w W_Y B.$$

Обратное включение очевидно.

Замечание 2). Обозначим через $G_X \backslash G / G_Y$ множество подмножеств в G вида $G_X g G_Y$, $g \in G$. Аналогичным образом определим $W_X \backslash W / W_Y$. Предыдущее предложение показывает, что каноническая биекция $w \longmapsto C(w)$ группы W на $B \backslash G / B$ определяет посредством факторизации *биективное отображение* $W_X \backslash W / W_Y \to G_X \backslash G / G_Y$.

Предложение 3. *Пусть* $X \subset S$ *и* $g \in G$. *Тогда из соотношения* $gBg^{-1} \subset G_X$ *следует* $g \in G_X$.

Пусть $g \in C(w)$ для какого-то $w \in W$. Поскольку B — подгруппа в G_X, условие $gBg^{-1} \subset G_X$ влечет $C(w) . C(w^{-1}) \subset G_X$. Теперь следствие 3 теоремы 2 дает $C(w) \subset G_X$, и g принадлежит подгруппе G_X.

6. Параболические подгруппы

Определение 2. *Подгруппа группы* G *называется параболической, если она содержит подгруппу, сопряженную с* B.

Ясно, что всякая подгруппа, содержащая параболическую подгруппу, сама является параболической.

Предложение 4. *Пусть* P — *подгруппа группы* G.

а) *Для того чтобы* P *была параболической, необходимо и достаточно, чтобы* P *была сопряжена с подгруппой* G_X, *где* X — *некоторое подмножество в* S (определение G_X в n° 5).

б) *Пусть* X, $X' \subset S$ *и* g, $g' \in G$ *таковы, что* $P = gG_Xg^{-1} = g'G_{X'}g'^{-1}$. *Тогда* $X = X'$ и $g'g^{-1} \in P$.

Утверждение а) следует из теоремы 3,б).

В условиях пункта б) нашего предложения имеем

$$g^{-1}g'Bg'^{-1}g \subset g^{-1}g'G_{X'}g'^{-1}g = G_X,$$

и предложение 3 показывает, что $g^{-1}g' \in G_X$. Поэтому, согласно теореме 3,б), $G_{X'} = G_X$ и $X' = X$. Наконец,

$$g'g^{-1} = g . g^{-1}g' . g^{-1} \in gG_Xg^{-1},$$

откуда следует утверждение б).

Если параболическая подгруппа P сопряжена с G_X, где $X \subset S$, то P называется подгруппой *типа* X.

Теорема 4. (i) *Пусть* P_1 *и* P_2 — *две параболические подгруппы в* G, *пересечение которых тоже является параболи-*

ческой подгруппой, и пусть $gP_1g^{-1} \subset P_2$ *для некоторого элемента* $g \in G$. *Тогда* $g \in P_2$ *и* $P_1 \subset P_2$.

(ii) *Две различные параболические подгруппы, пересечение которых — параболическая подгруппа, не сопряжены.*

(iii) *Пусть* Q_1 *и* Q_2 — *две параболические подгруппы, содержащиеся в подгруппе* $Q \subset G$. *Тогда все элементы* $g \subset G$, *для которых* $gQ_1g^{-1} = Q_2$, *принадлежат* Q.

(iv) *Каждая параболическая подгруппа совпадает со своим нормализатором* [1]).

Утверждение (i) следует из предложений 3 и 4 и влечет утверждение (ii). В условиях (iii) $gQ_1g^{-1} \subset Q$. Отсюда и из утверждения (i) следует теперь, что $g \in Q$.

Наконец, утверждение (iv) вытекает из (iii), если положить $Q_1 = Q_2 = Q$.

Предложение 5. *Пусть* P_1 *и* P_2 — *две параболические подгруппы в* G. *Тогда* $P_1 \cap P_2$ *содержит подгруппу, сопряженную с* T.

Применяя в случае надобности некоторый внутренний автоморфизм группы G к P_1 и P_2, можно предполагать, что $B \subset P_1$. Пусть $g \in G$ — тот элемент, для которого $gBg^{-1} \subset P_2$. По теореме 1 существуют $n \in N$ и $b, b' \in B$, такие, что $g = bnb'$. Поскольку подгруппа T нормальна в N, имеем

$$P_2 \supset gBg^{-1} = bnBn^{-1}b^{-1} \supset bnTn^{-1}b^{-1} = bTb^{-1}$$

и

$$P_1 \supset B \supset bTb^{-1},$$

откуда и следует предложение.

7. Теорема простоты

Лемма 2. *Пусть* H — *нормальная подгруппа группы* G. *Существует такое подмножество* X *в* S, *что* $BH = G_X$ *и каждый элемент из* X *коммутирует с каждым элементом из* $S - X$.

Так как BH — подгруппа в G, содержащая B, то существует единственное подмножество X в S, для которого $BH = G_X$ (теорема 3).

Пусть $s_1 \in X$ и $s_2 \in S - X$, а n_1 и n_2 — представители s_1 и s_2 в N. Имеем $n_1 \in G_X = BH$, и существует элемент $b \in B$,

---

[1]) Нормализатором в G подгруппы $H \subset G$ называется подгруппа $\mathfrak{N}(H)$, состоящая из элементов $g \in G$, для которых $gHg^{-1} = H$. Говорят, что подгруппа H' нормализует H, если $H' \subset \mathfrak{N}(H)$; тогда $HH' = H'H$ будет подгруппой в G с нормальной подгруппой H.

такой, что $bn_1 \in H$. Так как подгруппа H нормальна в G, то элемент $h = n_2 b n_1 n_2^{-1}$ принадлежит H. С другой стороны,

$$h \in C(s_2) \, . \, C(s_1) \, . \, C(s_2).$$

Если длина элемента $s_2 s_1 s_2$ равна 3, то следствие 1 теоремы 2 влечет

$$C(s_2) \, . \, C(s_1) \, . \, C(s_2) = C(s_2 s_1 s_2),$$

и, значит, $h \in H \cap C(s_2 s_1 s_2)$. Поскольку $H \cap C(s_2 s_1 s_2)$ непусто, то $s_2 s_1 s_2 \in W_X$. Последовательность (s_2, s_1, s_2) является приведенным разложением и потому (§ 1, n° 8, следствие 1 предложения 7) $s_2 \in X$, что противоречит предположению.

Пусть теперь $l_S(s_2 s_1 s_2) \leqslant 2$. Если $l_S(s_1 s_2) = 1$, то $s_1 s_2 \in S$ и $(s_1 s_2)^2 = 1$, откуда $s_1 s_2 = s_2 s_1$. Если же $l_S(s_1 s_2) = 2$, то из свойства (3) § 1 следует, что $s_2 s_1 = s_1 s_2$, поскольку $s_1 \neq s_2$. Ч. Т. Д.

В теореме 5, которая будет доказана ниже, фигурирует следующее свойство группы U.

(P) *Для любой нормальной подгруппы $V \subset U$, отличной от U, коммутант* (см. *Алг.*, гл. I, § 6, n° 8) *группы U/V отличен от U/V.*

Каждая разрешимая группа удовлетворяет свойству (P). В частности, коммутативные группы удовлетворяют (P). То же относится и ко всякой некоммутативной простой группе U, если исключить случай $V = \{1\}$. Можно показать, что (P) выполнено для симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ при любом n (см. упр. 29).

Теорема 5. *Пусть Z — пересечение подгрупп, сопряженных с B, U — подгруппа в B и G_1 — подгруппа, порожденная сопряженными с U подгруппами в G. Предполагаются выполненными следующие условия:*

(1) *U нормальна в B и $B = UT$;*
(2) *U удовлетворяет условию* (P);
(3) *G_1 совпадает со своим коммутантом;*
(4) *Система Кокстера* (W, S) *неприводима* (см. § 1, n° 9).

Тогда любая подгруппа H группы G, нормализуемая подгруппой G_1, содержится в Z или содержит G_1.

Докажем сначала, что $G = G_1 T$. Группа $G_1 T$ содержит B и поэтому совпадает со своим нормализатором (теорема 4). Так как N нормализует G_1 и T, то она нормализует $G_1 T$, откуда $N \subset G_1 T$. Поскольку G порождается B и N, имеет место равенство $G = G_1 T$.

Положим теперь

$$G' = G_1H,\ B' = B \cap G',\ N' = N \cap G',$$
$$T' = T \cap G' = B' \cap N' \text{ и } W' = N'/T'.$$

Так как G' содержит G_1, то $G = G'T$ и поэтому $N = N'T$. Таким образом, вложение N' в N определяет посредством факторизации изоморфизм α: $W' \to W$. Пусть $S' = \alpha^{-1}(S)$.

Покажем, что (G', B', N', S') *является системой Титса.* Так как $G = BNB$ и $B = TU = UT$, то $G = UNU$, а поскольку U — подгруппа в G', приходим к заключению, что $G' = UN'U$. Это дает (T1), поскольку $U \subset B'$. Аксиома (T2) выполнена ввиду того, что α — изоморфизм. Пусть $w \in W$ и $w' = \alpha^{-1}(w)$ — соответствующий элемент в W'. Тогда

$$BwB = BwB' = Bw'B', \text{ поскольку } B = B'T.$$

Отсюда мы заключаем, что $G' \cap BwB = B'w'B'$. Другими словами, вложение G' в G определяет посредством факторизации биективное отображение $B'\backslash G'/B'$ на $B\backslash G/B$. Это сразу дает аксиому (T3). Аксиома (T4) следует из равенства $B = B'T$.

Подгруппа H нормальна в G'. Лемма 2, примененная к (G', B', N', S'), утверждает существование подмножества $X' \subset S'$, такого, что $B'H = G'_{X'}$, причем каждый элемент в $S' - X'$ коммутирует с каждым элементом в X'. Условие (4) оставляет только две возможности:

а) $X' = \varnothing$, т. е. $B'H = B'$ и $H \subset B' \subset B$. Если $g \in G$, то $g = g_1t$, где $g_1 \in G_1$, $t \in T$ и $H \subset g_1Bg_1^{-1}$, ибо G_1 нормализует H. Поэтому $H \subset gBg^{-1}$. Так как Z есть пересечение gBg^{-1}, то $H \subset Z$.

б) $X' = S'$, т. е. $B'H = G'$. В силу равенства $G = G'T$ имеем

$$G = B'HT = HB'T = HB.$$

Так как B нормализует U, то всякая группа, сопряженная с U, имеет вид hUh^{-1}, где $h \in H$. Такие подгруппы содержатся в группе UH, откуда (по определению G_1) $G_1 \subset UH$. Получаем изоморфизмы

$$U/(U \cap H) \simeq UH/H = G_1H/H \simeq G_1/(G_1 \cap H).$$

По условию (3) $G_1/(G_1 \cap H)$ совпадает со своим коммутантом. Условие (2) показывает тогда, что группа $U/(U \cap H)$, изоморфная $G_1/(G_1 \cap H)$, состоит только из единичного элемента. Следовательно, $G_1 \cap H = G_1$, т. е. $G_1 \subset H$, и доказательство закончено.

Следствие. *В предположениях теоремы* 5 *группа* $G_1/(G_1 \cap Z)$ *либо является некоммутативной простой, либо сводится к единичному элементу.*

Согласно теореме 5, группа $G_1/(G_1 \cap Z)$ либо проста, либо состоит только из единицы. Но условие (3) требует, чтобы она совпадала со своим коммутантом. Отсюда вытекает утверждение следствия.

Замечания. 1) Условия (2)—(4) не использовались при доказательстве того, что (G', B', N', S') является системой Титса.

2) Предположим, что $Z \cap U = \{1\}$. Так как Z и U нормальны в B, то каждый элемент из Z коммутирует с любым элементом из U, а тем самым и с любым элементом из G_1. Ввиду предыдущего следствия это означает, что $G_1 \cap Z$ — *центр* группы G_1.

3) Предположение (3) вытекает из следующего условия:

(3′) U *порождается коммутаторами* $b^{-1}u^{-1}bu$, *где* $u \in U$ *и* $b \in B \cap G_1$.

Примеры. 1) Пусть k — поле, n — целое число $\geqslant 0$, $G = \mathbf{GL}(n, k)$ и (G, B, N, S) — система Титса, описанная в n° 2. Пусть U — верхняя строго треугольная группа, т. е. подгруппа в B, состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Условие (1) теоремы 5 проверяется немедленно. То же относится к условию (2), так как U разрешима. Условие (4) выполнено, если $n \geqslant 2$. Можно доказать (см. *Алг.*, гл. II, 3-е изд., § 10, упр. 13), что условие (3) выполняется, если $n \geqslant 3$ или $n = 2$ и $\mathrm{Card}(k) \geqslant 4$. При этих условиях заключаем, что группа $G_1/(G_1 \cap Z)$ *простая* и что $G_1 \cap Z$ — центр группы G_1 (см. *замечание* 2).

Когда k коммутативно, то $G_1 = \mathbf{SL}(n, k)$, см. *Алг.*, гл. III, 3-е изд., § 8, n° 9.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbf{C}$ и G — группа ее внутренних автоморфизмов (см. гл. III). Используя теорему 5, можно показать, что G — неабелева простая группа.

Дополнение

ГРАФЫ

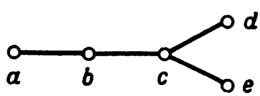
1. Определения

Определение 1. *Комбинаторным графом* (или просто *графом*, когда исключены какие-либо недоразумения) *называется пара* $\Gamma=(A, S)$, *где* S — *множество и* A — *подмножество в* $\mathfrak{P}(S)$, *образованное множествами из двух элементов.*

Пусть $\Gamma(A, S)$ — граф. Элементы из A называются *ребрами*, а элементы из S — *вершинами* графа Γ. Говорят, что две вершины x и y *соединены*, если $\{x, y\}$ есть ребро. Вершина называется *концевой*, если она соединена не более чем с одной вершиной, и *точкой ветвления*, если она соединена по крайней мере с тремя вершинами.

Согласно общим определениям (*Теор. множ.*, Сводка рез., § 8), *изоморфизм* графа Γ на граф $\Gamma'=(A', S')$ есть биективное отображение f множества S на S', которое переводит A в A'. Граф $\Gamma'=(A', S')$ называется *подграфом* в Γ, если $S'\subset S$ и $A'\subset A$. Говорят, что Γ' — *целый* подграф в Γ, если $S'\subset S$ и $A'=A\cap\mathfrak{P}(S')$. Ясно, что любое подмножество множества S совпадает с множеством вершин одного и только одного целого подграфа графа Γ.

Для наглядности граф изображают фигурой, которая состоит из точек, соответствующих вершинам, и из отрезков, связывающих две точки тогда и только тогда, когда представляемые ими вершины соединены в графе.
Например, фигура



изображает граф с вершинами a, b, c, d, e и ребрами $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ и $\{c, e\}$.

2. Связные компоненты графа

Пусть $\Gamma=(A, S)$ — граф. Если a и b — две его вершины, то *путем*, связывающим a и b, называется всякая последовательность $(x_0, \ldots, x_n)$ вершин графа Γ с $x_0=a$, $x_n=b$, в которой вершины X_i и X_{i+1} соединены при $0 \leqslant i < n$. Целое число $n \geqslant 0$ называется *длиной* рассматриваемого пути. Путь называется *инъективным*, если $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$. Путь $(x_0, \ldots, x_n)$, связывающий a с b и обладающий минимальной длиной, обязательно инъективен: в противном случае нашлись бы i и j с $0 \leqslant i < j \leqslant n$ и $x_i = x_j$, так что последовательность

$$(x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

была бы путем длины $< n$, связывающим a с b.

Отношение „существует путь, связывающий a с b“ между двумя вершинами a и b графа Γ определяет отношение эквивалентности R в множестве вершин S. Классы эквивалентности по R называются *связными компонентами* графа Γ. Говорят, что граф Γ *связен*, если он состоит из одной связной компоненты, т. е. если любые две вершины в Γ могут быть соединены по меньшей мере одним путем.

Предложение 1. *Пусть $\Gamma = (A, S)$ — граф и $(S_\alpha)_{\alpha \in L}$ — семейство его связных компонент. Обозначим через Γ_α целый подграф в Γ с множеством S_α в качестве множества вершин.*

(i) *Для каждого $\alpha \in L$ граф Γ_α связен.*

(ii) *Если $\Gamma' = (A', S')$ — связный подграф в Γ, то найдется такое α из L, что $S' \subset S_\alpha$.*

(iii) *При $\alpha \neq \beta$ никакой элемент из S_α не соединен ни с каким элементом из S_β* (иначе говоря, каждое ребро графа Γ является ребром в одном из Γ_α).

(iv) *Пусть $(S'_\lambda)_{\lambda \in M}$ — такое разбиение множества S, что при $\lambda \neq \mu$ никакой элемент из S'_λ не соединен в Γ ни с одним элементом из S'_μ. Тогда каждое множество S'_λ есть объединение связных компонент графа Γ.*

(i) Пусть $\alpha \in L$ и $a, b \in S_\alpha$. Существует, следовательно, путь $c = (x_0, \ldots, x_n)$ *в* Γ, связывающий a с b. Для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n$, путь $(x_0, \ldots, x_i)$ связывает a с x_i в Γ, откуда $x_i \in S_\alpha$. Таким образом, c является путем *в* Γ_α, связывающим a с b. Значит, граф Γ_α связен.

(ii) Пусть $\Gamma' = (A', S')$ — непустой связный подграф в Γ, a — элемент из S' и S_α — связная компонента в Γ, содержащая a. Для любого b из S' существует путь c, связывающий a с b *в* Γ' и *тем более в* Γ. Следовательно, $S' \subset S_\alpha$.

(iii) При заданных различных α и β из L и вершинах $a \in S_\alpha$ и $b \in S_\beta$ не существует пути, связывающего a с b, и, в частности, не существует ребра, соединяющего a и b.

(iv) Пусть $a \in S'_\lambda$ и S_a — связная компонента в Г, содержащая a. Для любого b из S_a существует путь $(x_0, \ldots, x_n)$, связывающий a с b в Г. Если $0 \leqslant i < n$ и $x_i \in S'_\lambda$, то $x_{i+1} \in S'_\lambda$, поскольку x_i соединяется с x_{i+1}. Следовательно, по индукции $x_i \in S'_\lambda$ для $0 \leqslant i \leqslant n$ и, в частности, $b = x_n$ принадлежит S'_λ. Отсюда $S_a \subset S'_\lambda$.

Следствие 1. *Для того чтобы граф* $\Gamma(A, S)$ *был связным, необходимо и достаточно, чтобы не существовало разбиения* (S', S'') *множества* S *на два непустых подмножества, таких, что никакой элемент из* S' *не соединен ни с каким элементом из* S''.

Пусть Г не связен и S' — одна из его связных компонент. По предложению 1 (i) $S'' = S - S'$ непусто и никакой элемент из S' не соединен в Г ни с одним элементом из S'', как это утверждает предложение 1 (iii).

Предположим теперь, что Г связен и что (S', S'') — разбиение с упомянутыми свойствами. В силу предложения 1 (iv) множество S' содержит по крайней мере одну связную компоненту. Значит, $S' = S$ и $S'' = \varnothing$, вопреки предположению.

Следствие 2. *Для того чтобы подмножество* S' *множества* S *было объединением связных компонент, необходимо и достаточно, чтобы никакая вершина из* S' *не соединялась ни с какой вершиной из* $S - S'$.

Это условие достаточно по предложению 1 (iv) и необходимо в силу утверждения (iii) последнего предложения.

3. Леса и деревья

Пусть $\Gamma = (A, S)$ — граф. *Циклом* в Г называется всякая последовательность

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

различных вершин графа Г, в которой $n \geqslant 3$, вершина x_i соединена с x_{i+1} при $1 \leqslant i < n$ и вершина x_n соединена с x_1. Граф Г называется *лесом*, если он не содержит циклов. Любой подграф в Г тогда тоже будет лесом. Связный лес называется *деревом*. Таким образом, связные компоненты леса являются деревьями.

Предложение 2. *Пусть* $\Gamma = (A, S)$ — *лес с конечным числом вершин.*

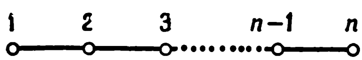
(i) *Если* Г *обладает хотя бы одной вершиной, то у него есть концевая вершина.*

(ii) *Если Γ имеет по крайней мере две вершины, то существует разбиение (S', S'') множества вершин на два непустых подмножества, таких, что две различные вершины, принадлежащие одновременно к S' или к S'', не будут соединены.*

Предположим, что Γ имеет по крайней мере одну вершину. Пусть $(x_0, \ldots, x_n)$ — инъективный путь максимальной длины в Γ. Вершину x_0 нельзя соединить ни с какой вершиной y, отличной от $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ибо тогда в Γ существовал бы путь длины $n+1$, а именно $(y, x_0, \ldots, x_n)$. Вершина x_0 не соединена ни с какой вершиной x_i, $2 \leqslant i \leqslant n$, в противном случае $(x_0, x_1, \ldots, x_i)$ был бы циклом в лесу Γ. Значит, вершина x_0 — концевая.

Докажем (ii) индукцией по числу m вершин в Γ. Случай $m=2$ тривиален. Пусть $m \geqslant 3$ и утверждение (ii) доказано для графов с $m-1$ вершинами. Пусть a — концевая вершина в Γ (см. (i)). Применим предположение индукции к целому подграфу, получающемуся из Γ выбрасыванием вершины a. Существуют, следовательно, два непустых подмножества S_1' и S_1'' в S с $S_1' \cup S_1'' = S - \{a\}$, причем никакая пара вершин из S_1' (соотв. S_1'') не соединена. Так как a соединена не более чем с одной вершиной в Γ, то она не соединена ни с какой вершиной одного из множеств, например S_1''. Тогда разбиение $(S_1', S_1'' \cup \{a\})$ множества S обладает требуемыми свойствами. Ч. Т. Д.

Для любого целого числа $n \geqslant 1$ обозначим через A_n граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$ и ребрами $\{i, j\}$, где $i - j = \pm 1$:



Говорят, что граф Γ есть *цепь длины* $m \geqslant 0$, если он изоморфен A_{m+1}. Это эквивалентно существованию в Γ инъективного пути $(x_0, \ldots, x_m)$, содержащего все вершины, причем вершины x_i и x_j не соединены при $|j-i| > 1$.

Предложение 3. *Для того чтобы граф был цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел конечное ненулевое число вершин и был деревом без точек ветвления.*

Предположим, что граф Γ — цепь $(x_0, \ldots, x_m)$ с перечисленными свойствами. Каждая вершина соединена не более чем с двумя другими. Для $i < j$ кусок пути $(x_i, \ldots, x_j)$ является путем, связывающим x_i с x_j. Значит, Γ связен. Наконец, пусть $(x_{p_1}, \ldots, x_{p_n})$ — цикл. Пусть p_k — наименьшее среди различных целых чисел $p_1, \ldots, p_n$. Должны существовать различные i и j такие, что вершина x_{p_k} будет соединена с x_{p_i} и с x_{p_j}. Это следует из определения цикла. Так как $p_k < p_i$ и $p_k < p_j$, то обязательно $p_i = p_j = p_k + 1$, что противоречит тому, что все $p_1, \ldots, p_n$ различны. Значит, в Γ нет циклов.

Обратно, пусть Γ — дерево без точек ветвления с ненулевым конечным числом вершин. Пусть $(x_0, \ldots, x_m)$ — инъективный путь максимальной длины в Γ и T — множество вершин, отличных от $x_0, \ldots, x_m$. Вершина $b \in T$ не может быть соединена ни с какой вершиной x_i. Действительно, имеются три возможности:

a) $i = 0$, но тогда $(b, x_0, \ldots, x_m)$ был бы инъективным путем длины $m + 1$ в Γ;

b) $i = m$, но тогда $(x_0, \ldots, x_m, b)$ был бы инъективным путем длины $m + 1$ в Γ;

c) $0 < i < m$, но тогда вершина x_i была бы соединена с тремя вершинами x_{i-1}, x_{i+1} и b.

Так как Γ связен, то T пусто в силу следствия 1 предложения 1. Далее, если бы существовали i и j такие, что $j - i > 1$ и x_i и x_j соединены, то путь $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j)$ был бы циклом в Γ. Следовательно, Γ — цепь. Ч. Т. Д.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1.

1) а) Пусть (W, S) — система Кокстера и $s_1, \ldots, s_r$ — элементы множества S. Положим $w = s_1 \ldots s_r$. Показать, что если $l_S(w) < r$, то существуют два таких целых числа p и q, $1 \leqslant p < q \leqslant r$, что $w = s_1 \ldots s_{p-1}s_{p+1} \ldots s_{q-1}s_{q+1} \ldots s_r$. Показать, что существует строго возрастающая последовательность чисел $j(1), \ldots, j(k)$, заключенная между 1 и r, и такая, что $(s_{j(1)}, \ldots, s_{j(k)})$ является приведенным разложением элемента w.

б) Пусть (W, S) — система Кокстера и X, Y, Z — три подмножества в S. Показать, что

$$W_X \cap (W_Y \cdot W_Z) = (W_X \cap W_Y) \cdot (W_X \cap W_Z)$$

(показать, что любой элемент $w \in W_Y \cdot W_Z$ допускает приведенное разложение

$$(s_1, \ldots, s_h, t_1, \ldots, t_k),$$

где $s_i \in Y$, $t_j \in Z$, и воспользоваться следствием 1 предложения 7, n° 8).

Показать, что

$$W_X \cdot (W_Y \cap W_Z) = (W_X \cdot W_Y) \cap (W_X \cdot W_Z).$$

2) Пусть (W, S) — система Кокстера и X — подмножество в S. Показать, что для того чтобы подгруппа W_X была нормальной в W, необходимо и достаточно, чтобы любой элемент множества X коммутировал с любым элементом множества $S - X$.

3) Пусть (W, S) — система Кокстера и X, Y — два подмножества в S. Пусть $a \in W$. Показать, что существует, и притом единственный, элемент $w \in W_X a W_Y$ минимальной длины и такой, что всякий элемент

$$w' \in W_X a W_Y$$

записывается в виде $w' = xwy$, где $x \in W_X$, $y \in W_Y$ и $l(w') = l(x) + l(w) + l(y)$ (выбрать в $W_X a W_Y$ элемент минимальной длины и воспользоваться упражнением 1). Элемент $w \in W$ называется (X, Y)-*приведенным*, если он является элементом минимальной длины в двойном смежном классе $W_X w W_Y$. Показать, что если элемент w $(X, \varnothing)$-приведен, то $l(xw) = l(x) + l(w)$ для всех $x \in W_X$, и что любой элемент из W однозначно записывается в виде xw, где $x \in W_X$, а w есть $(X, \varnothing)$-приведенный элемент. Показать, что элемент $w \in W$ является $(X, \varnothing)$-приведенным в том и только том случае, когда $l(xw) > l(w)$ для всех $x \in X$ (записать w в виде yw', где $y \in W_X$ и w' является $(X, \varnothing)$-приведенным). Показать, что для (X, Y)-приведенности элемента $w \in W$ необходимо и достаточно, чтобы w был одновременно и $(X, \varnothing)$-приведенным, и $(\varnothing, Y)$-приведенным.

4) Пусть n — целое число $\geqslant 2$. Обозначим через s_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, транспозицию i и $i+1$ в последовательности $\{1, 2, \ldots, n\}$ и через H_i множество $w \in \mathfrak{S}_n$, для которых $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$. Пусть $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Показать, что $(\mathfrak{S}_n, S)$ — система Коксτера и что H_i совпадает с множеством элементов $w \in \mathfrak{S}_n$, для которых $l(w) < l(s_i w)$ (использовать предложение 6 из n° 7).

¶ 5) Пусть X — непустое множество и W — некоторое множество перестановок на X. Пусть заданы множество $\mathscr{P}$ отношений эквивалентности в X, элемент $x_0 \in X$ и отображение $\varphi\colon H \longmapsto s_H$ множества $\mathscr{P}$ в W. Обозначим через $\mathscr{P}_0$ множество тех $H \in \mathscr{P}$, для которых $s_H(x_0) \equiv x_0 \bmod H'$ при всех $H' \neq H$ из $\mathscr{P}$, и через S_0 множество всех s_H с H, принадлежащими $\mathscr{P}_0$. Предположим, что выполнены следующие условия:

(i) Для любого $H \in \mathscr{P}$ существуют два класса эквивалентности по модулю H, которые переставляются элементом s_H и $s_H^2 = 1$.

(ii) Для любого $H \in \mathscr{P}$ и любого $w \in W$ отношение эквивалентности $w(H)$, получающееся из H при перестановке w, принадлежит множеству $\mathscr{P}$ и $s_{w(H)} = w s_H w^{-1}$.

(iii) Для любого $w \neq 1$ из W множество $H \in \mathscr{P}$ таких, что $w(x_0) \not\equiv x_0 \bmod H$, конечно и пересекается с $\mathscr{P}_0$.

а) Доказать, что (W, S_0) является системой Коксτера (использовать предложение 6 из n° 7).

б) Доказать, что длина $l_{S_0}(w)$ равна числу элементов $H \in \mathscr{P}$, для которых

$$w(x_0) \not\equiv x_0 \bmod H.$$

в) Пусть E — конечное множество и X — множество отношений совершенного порядка на E. Обозначим через W группу перестановок множества E, очевидным образом действующую на X. Пусть i и j — различные элементы из E. Назовем два элемента R и R' множества X эквивалентными по модулю H_{ij}, если имеют место одновременно либо $R(i, j)$ и $R'(i, j)$, либо $R(j, i)$ и $R'(j, i)$. Обозначим через s_{ij} транспозицию i и j. Пусть $\mathscr{P}$ — множество отношений эквивалентности вида H_{ij} и φ — отображение множества $\mathscr{P}$ в W по формуле $\varphi(H_{ij}) = s_{ij}$. Наконец, пусть x_0 — какой-нибудь элемент множества X. Показать, что эти данные удовлетворяют предположениям (i)—(iii), и заново получить результаты упражнения 4.

6) Пусть E — множество из шести элементов и F — множество структур проективной прямой в множестве E относительно поля $\mathbf{F}_5$. Обозначим через $\mathfrak{S}_E$ группу перестановок множества E. Для любого элемента $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ обозначим через $\tilde{\sigma}$ перестановку на F, полученную из σ посредством перенесения структуры. Показать, что существует биекция u множества E на F и что отображение $\sigma \longmapsto u^{-1}\tilde{\sigma}u$ является внешним автоморфизмом группы $\mathfrak{S}_E$ (если s — транспозиция, то $u^{-1}\tilde{s}u$ имеет три орбиты по два элемента).

7) Построить группу W с двумя подмножествами S в S_0' такими, что (W, S) и (W, S') являются изоморфными системами Коксτера, но W не обладает внутренним автоморфизмом, переводящим S в S' (использовать упражнения 4 и 6).

8) Построить группу W и два подмножества S и S' в W такие, что (W, S) и (W, S') будут неизоморфными системами Коксτера, одна из

которых неприводима, а другая — нет (взять в качестве W диэдральную группу порядка 12, порожденную множеством $\{s, s'\}$, где s и s' — элементы порядка 2 и $s \neq s'$, и положить $S = \{s, s'\}$, а $S' = \{(ss')^3, s', s'(ss')^2\}$).

9) Пусть (W, S) — система Кокстера с матрицей $(m(s, s'))$ и W^+ — подгруппа в W, состоящая из элементов четной длины. Пусть $s_0 \in S$. Положим $g_s = ss_0$. Показать, что семейство $(g_s)_{s \in S - \{s_0\}}$ и соотношения $g_s^{m(s, s_0)} = 1$ для $m(s, s_0) \neq \infty$ и $(g_s g_{s'}^{-1})^{m(s, s')} = 1$ для $ss' \in S - \{s_0\}$ и $m(s, s') \neq \infty$ образуют задание (или копредставление) группы W^+. (Пусть H^+ — группа, заданная описанной выше системой образующих и определяющих соотношений. Показать, что существует автоморфизм α группы H^+ с квадратом, равным 1, который переводит g_s в g_s^{-1} для всех $s \in S - \{s_0\}$. Определить взаимно обратные гомоморфизмы $H_\alpha \to W$ и $W \to H_\alpha$, где H_α — полупрямое произведение групп $\{1, -1\}$ и H^+ относительно α. Показать, что если элементы множества S сопряжены (см. предложение 3), то W^+ является *коммутантом* группы W (заметить, что в этом случае элементы g_s будут коммутаторами).

10) Пусть $\mathfrak{A}_n$ — знакопеременная группа степени n, состоящая из перестановок $w \in \mathfrak{S}_n$ с сигнатурой 1. Показать, что $\mathfrak{A}_n$ — коммутант группы $\mathfrak{S}_n$ (использовать упражнения 4 и 9). Для любого целого i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$, положим $u_i = s_1 s_{i+1}$ (в обозначениях упражнения 4). Показать, что семейство $\{u_i\}$ и соотношения $u_1^3 = 1$, $u_i^2 = 1$ для $i \geqslant 2$, $(u_i u_{i+1})^3 = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n-3$ и $u_i u_j = u_j u_i$ для $3 \leqslant i+2 \leqslant j \leqslant n-2$ образуют задание группы $\mathfrak{A}_n$ (использовать упражнение 9).

*11) Пусть (W, S) — система Кокстера. Пусть Γ_∞ — граф с множеством вершин S; две вершины s и s' связаны ребром тогда и только тогда, когда $m(s, s') \neq \infty$. Пусть S_α — связные компоненты графа Γ_∞. Показать, что W можно отождествить со *свободным произведением* групп W_{S_α}. В частности, любой элемент $w \in W$ однозначно записывается в виде произведения $w_s \ldots w_h$, $w_i \neq 1$, где $w_i \in W_{S_{\alpha_i}}$ и $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant h-1$. Показать, что длина элемента w равна сумме длин элементов w_i. *

12) Пусть (W, S) — система Кокстера с четными $m(s, s')$ для $s \neq s'$, и пусть X — подмножество в S. Показать, что существует, причем только один, гомоморфизм f_X группы W на W_X такой, что $f_X(s) = s$ для $s \in X$ и $f_X(s) = 1$ для $s \in S - X$. Вывести отсюда, что W есть полупрямое произведение группы W_X и ядра гомоморфизма f_X. Показать, что если $X \subset Y \subset S$, то существует единственный гомоморфизм $f_{X, Y}$ группы W_Y на W_X, для которого $f_X = f_{X, Y} \circ f_Y$, и что W отождествляется с подгруппой проективной системы, составленной из W_X, когда X пробегает фильтрующееся множество конечных подмножеств в S.

¶ 13) Пусть (W, S) — система Кокстера. Для $s, s' \in S$ определим последовательность $\boldsymbol{a}(s, s')$, руководствуясь правилами:

(i) если ss' имеет бесконечный порядок, то $\boldsymbol{a}(s, s')$ — пустая последовательность;

(ii) если ss' имеет бесконечный порядок m, то последовательность $\boldsymbol{a}(s, s')$ имеет длину m и ее четные члены равны s', а нечетные s.

Обозначим через $a(s, s')$ произведение элементов последовательности $\mathbf{a}(s, s')$.

а) Показать, что множество образующих S и определяющие соотношения $s^2 = 1$ и $a(s, s') = a(s', s)$ образуют задание группы W.

б) Пусть q — целое число $\geqslant 1$, Σ_q — множество последовательностей из q элементов в S, и пусть R_q — наиболее тонкое отношение эквивалентности в Σ_q, при котором последовательности вида $(A, \mathbf{a}(s, s'), B)$ и $(A, \mathbf{a}(s', s), B)$ (где $s, s' \in S$, а A и B — последовательности элементов из S) эквивалентны. Пусть Σ_q^r — множество последовательностей $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$, таких, что $w(\mathbf{s}) = s_1 \ldots s_q$ имеет длину q. Показать, что последовательности $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \Sigma_q^r$ эквивалентны по модулю R_q в том и только том случае, когда $w(\mathbf{s}) = w(\mathbf{s}')$ (провести индукцию по q и применить предложение 5 из n° 5).

в) Показать, что, для того чтобы последовательность $\mathbf{s} \in \Sigma_q$ не принадлежала Σ_q^r, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{s}$ была эквивалентна по модулю R_q последовательности с двумя равными рядом стоящими членами. (Рассуждая по индукции относительно q, сводим все к случаю последовательности $(s_1, \ldots, s_q)$, не принадлежащей Σ_q^r, но такой, что $(s_1, \ldots, s_{q-1})$ и $(s_2, \ldots, s_q)$ принадлежат Σ_{q-1}^r. Воспользовавшись упражнением 1, показываем, что $s_1, \ldots, s_{q-1} = s_2 \ldots s_q$, и применяем упражнение б).)

* 14) Пусть (W, S) — система Кокстера, (Γ, f) — ее граф Кокстера, и пусть k — целое число $\geqslant 3$, а a — ребро графа Г. Положим $f_k(a) = f(a)$, если $f(a) \neq \infty$, и $f_k(a) = k$, если $f(a) = \infty$. Пусть (W_k, S) — система Кокстера, определяемая графом Кокстера (Γ, f_k) (гл. V, § 4, n° 3, следствие предложения 4). Показать, что существует единственный гомоморфизм φ_k группы W на W_k, индуцирующий тождественное отображение на S. Показать, что если k делит k', то существует единственный гомоморфизм $\varphi_{k, k'}$ группы $W_{k'}$ на W_k, для которого $\varphi_k = \varphi_{k, k'} \circ \varphi_{k'}$. Показать, что гомоморфизм (φ_k) группы W в проективный предел групп W_k является инъективным (использовать упражнение 13, в)), но, вообще говоря, не сюръективным (как, например, в случае бесконечной диэдральной группы). *

15) [1] Пусть A — множество и $\mathfrak{C}$ — подмножество в $\mathfrak{P}(A)$. Элементы из $\mathfrak{C}$ называются *камерами* множества A, а подмножество F камеры C называется *ячейкой. Коразмерность* ячейки F в C есть мощность дополнения $C - F$. Ячейка F называется *перегородкой* камеры C, если F имеет в C коразмерность 1. Две камеры C и C' называются *смежными*, если они имеют общую перегородку F. *Галерееи* длины n называется последовательность $\Gamma = (C_0, C_1, \ldots, C_n)$ из $n + 1$ камер, такая, что C_i и C_{i+1} смежны для $0 \leqslant i \leqslant n - 1$. Камеры C_0 и C_n называются *концами* галереи Г. Галерея Г называется *инъективной*, если $C_i \neq C_{i+1}$ для $0 \leqslant i \leqslant n - 1$; она называется *минимальной*, если нет галереи меньшей длины с теми же концами.

---

[1] Упражнения с 15 по 24 в этом параграфе, а также с 3 по 17 в § 2, большей частью нигде не опубликованные, были сообщены нам Ж. Титсом.

Множество A (снабженное $\mathfrak{C}$) называется *ансамблем* [1]), если каждый элемент из A принадлежит какой-нибудь камере и если любые две камеры являются концами некоторой галереи. *Расстоянием* между двумя камерами C и C' называется длина $d(C, C')$ минимальной галереи с концами C и C'.

Секцией ансамбля A называется подмножество $D \subset A$, такое, что если D снабдить системой $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}(D)$, то получится ансамбль.

а) Показать, что в ансамбле A любая ячейка имеет одну и ту же коразмерность во всех камерах, в которых она содержится. Это дает возможность говорить о коразмерности ячейки или перегородки в A без указания частной камеры. *Морфизмом* ансамбля B в A называется отображение $f\colon B \to A$, такое, что сужение f на любую камеру C ансамбля B есть биекция C на камеру $f(C)$ ансамбля A. Показать, что образом ячейки ансамбля B при отображении f является ячейка ансамбля A той же коразмерности.

б) Ансамбль называется *апартаментом* (или *плоским ансамблем*), если каждая его перегородка содержится точно в двух камерах. Показать, что любой автоморфизм апартамента A (т. е. любая перестановка множества A, сохраняющая $\mathfrak{C}$), оставляющий неподвижными все точки какой-нибудь камеры, тождествен. Более общо, пусть φ — эндоморфизм множества A и C — камера в A, такая, что $\varphi(a) = a$ для всех $a \in C$. Пусть $(C, C_1, \ldots, C_n)$ — галерея в A. Показать, что либо галерея $(C, \varphi(C_1), \ldots, \varphi(C_n))$ не инъективна, либо $\varphi(a) = a$ для любой точки a из объединения всех C_i.

16) Пусть (W, S) — система Кокстера. Для любого элемента $s \in S$ обозначим через $W^{(s)}$ подгруппу $W_{S-\{s\}}$ группы W, через A — множество подмножеств группы W вида $wW^{(s)}$, где $w \in W$ и $s \in S$, и через $\mathfrak{C}$ — множество подмножеств в A вида $C_w = \{wW^{(s)} \mid s \in S\}$, $w \in W$, которые будут называться камерами в A (упражнение 15).

а) Показать, что $w \longmapsto C_w$ есть биекция множества W на $\mathfrak{C}$.

б) Показать, что для того чтобы две различные камеры C_w и $C_{w'}$ были смежными, необходимо и достаточно, чтобы существовал элемент $s \in S$, для которого $w' = ws$. Вывести отсюда, что A (со структурой $\mathfrak{C}$) является апартаментом (упражнение 15), называемым апартаментом системы (W, S). Показать, что длина минимальной галереи с концами C_w и $C_{w'}$ равна $l_S(w^{-1}w')$.

в) Пусть $\mathfrak{F}$ — множество ячеек ансамбля A и $F \in \mathfrak{F}$. Показать, что существуют однозначно определенное множество X в S и элемент $w \in W$, такие, что $wW_X = \bigcap_{i \in F} i$. Говорят тогда, что F — ячейка *типа* X. Показать, что коразмерность ячейки F равна мощности множества X. Показать, что отображение $j\colon F \longmapsto \bigcap_{i \in F}$ есть *строго убывающая* (по включению) *биекция* $\mathfrak{F}$ на множество подмножеств в W вида wW_X для $w \in W$ и $X \subset S$. Показать, что для любого множества Y, такого, что $X \subset Y \subset S$, каждая ячейка типа X содержит ячейку типа Y, и притом только одну.

---

[1]) Имеется в виду архитектурный ансамбль (система зданий или дом — immeuble), что находится в соответствии с наглядно геометрической терминологией, принятой в упражнениях этой книги. Иногда ансамбль, ассоциированный с парой (G, B), где B — подгруппа Титса в G (см. упражнения к § 2), называется также *основой* соответствующей системы Титса. — *Прим. ред.*

г) Группа W действует на A посредством левых переносов. Пусть $C = C_e$. Показать, что W действует на $\mathfrak{C}$ просто транзитивно[1]). Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — камеры в A. Установить эквивалентность следующих условий:

(i) последовательность $\Gamma = (C_0 = C, C_1, \ldots, C_n)$ является инъективной галереей;

(ii) существует последовательность $s = (s_1, \ldots, s_n)$ элементов из S, такая, что $C_j = t_j(C_{j-1})$ для $1 \leqslant j \leqslant n$, где t_j — элементы последовательности $\Phi(s)$, определенные формулой (11) в n° 4.

Показать, что если эти условия выполнены, то последовательность s единственна и $C_n = s_1 \ldots s_n(C)$. Показать, что галерея Γ минимальна в том и только том случае, когда последовательность $s(\Gamma) = s$ есть приведенное разложение элемента $w = s_1 \ldots s_n$

д) Пусть T — объединение множеств, сопряженных с S. Для $t \in T$ обозначим через L_t и назовем *стенкой*, определенной элементом t, множество точек из A, инвариантных относительно t. Показать, что L_t есть объединение перегородок и что необходимое и достаточное условие принадлежности перегородки F стенке L_t заключается в том, что $j(F)$ имеет вид $wW_{\{s\}}$, где $t = wsw^{-1}$. Вывести отсюда, что для любой перегородки F существует, и притом единственный, элемент $t = t(F) \in T$ такой, что $F \subset L_t$. При этом L_t называется *носителем* перегородки F.

Показать, что если $w(L_t) = L_t$ (для $w \in W$), то $w = 1$ или $w = t$.

е) Для $w', w'' \in W$ положим $C' = w'(C)$, $C'' = w''(C)$. Пусть $\Gamma = (C_0 = C', C_1, \ldots, C_n = C'')$ — инъективная галерея с концами C' и C''. Пусть t_j — элемент из T, определяющий стенку, — носитель перегородки $C_j \cap C_{j-1}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Показать, что последовательность $\Psi(\Gamma) = (w'^{-1}t_jw')_{1 \leqslant j \leqslant n}$ совпадает с последовательностью $\Phi(s(w'^{-1}(\Gamma)))$.

Для $t \in T$ обозначим символом $n(\Gamma, t)$ число вхождений элемента $w'^{-1}tw'$ в $\Psi(\Gamma)$. Вывести из леммы 1, n° 4, что число $(-1)^{n(\Gamma, t)}$ зависит только от C' и C'', а не от Γ. Обозначим его через $\eta(C', C'', t)$. Показать, что соотношение $\eta(C', C'', t) = 1$ определяет отношение эквивалентности между C' и C'' и что соответствующие классы эквивалентности переставляются элементом t. Обозначим через $\mathfrak{C}^+(t)$ тот из этих двух классов, который содержит C, а через $\mathfrak{C}^-(t)$ — другой.

Показать, что для $w \in W$ и $s \in S$ камера $w(C)$ принадлежит $\mathfrak{C}^+(s)$ в том и только том случае, когда $l(sw) > l(w)$.

ё) Пусть $A^+(t)$ (соотв. $A^-(t)$) — объединение камер, принадлежащих $\mathfrak{C}^+(t)$ (соотв. $\mathfrak{C}^-(t)$) (для $t \in T$). Показать, что $A^+(t) \cap A^-(t) = L_t$. (Для доказательства включения $A^+(t) \cap A^-(t) \subset L_t$ сведем все к случаю, когда $t \in S$. При $a \in A^+(t) \cap A^-(t)$ положим $a = wW^{(s)}$ с $s \in S$ и с $(\varnothing, S - \{s\})$-приведенным элементом w (упражнение 3). Если $w(C) \in \mathfrak{C}^-(t)$, то $l(tw) < l(w)$, и $w = ts_1 \ldots s_q$, где $s_j \in S$, так что $l(w) = q + 1$. Поскольку $a \in A^-(t)$, существует элемент $x \in W^{(s)}$ такой, что $wx(C) \in \mathfrak{C}^+(t)$. Имеем тогда

$$l(twx) = 1 + l(wx) = 1 + l(w) + l(x).$$

---

[1]) Пусть H — группа, действующая на непустом множестве E. Действие H называется *просто транзитивным* на E, если при любом $x \in E$ отображение $h \longmapsto h.x$ есть биекция H на E. Множество E называется еще *главным однородным множеством* для H.

Но $twx = s_1 \ldots s_q x$, что приводит к противоречию. Таким образом, $w(C) \in \mathfrak{C}^+(t)$ и $l(tw) = 1 + l(w)$. Если x — элемент из $W^{(s)}$, для которого $l(twx) < l(wx)$, то при помощи упражнения 1 выводим, что $twx = wx'$, где $x' \in W^{(s)}$. Отсюда $ta = a$ и $a \in L_t$.)

Подмножества $A^+(t)$ и $A^-(t)$ называются *половинами* множества A, определенными стенкой L_t. Мы скажем, что две точки множества A лежат по одну сторону (соотв. строго по разные стороны) от L_t, если они обе принадлежат одной из этих половин (соотв. не принадлежат обе ни одной из них). Каждая ячейка лежит в одной из половин, определенных стенкой L_t. Если две ячейки содержатся в разных половинах, то мы скажем, что они лежат по разные стороны от L_t или что стенка L_t их разделяет.

ж) Пусть $w \in W$. Показать, что $l(w)$ равно числу стенок, разделяющих камеры C и $w(C)$.

з) Показать, что отображение φ, которое половине $A^+(t)$ (соотв. $A^-(t)$) сопоставляет пару $(1, t)$ (соотв. $(-1, t)$), есть биекция множества $\mathfrak{M}$ половин множества A на множество $R = \{1, -1\} \times T$ (ср. n° 4). Заимствуя понятия леммы 1 из n° 4, показать, что $\varphi(w(M)) = U_w(\varphi(M))$, каковы бы ни были $w \in W$ и $M \in \mathfrak{M}$.

17) Сохраним обозначения упражнения 16 и предположим, что группа W конечна. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество стенок в A. Каждой стенке $H \in \mathfrak{H}$ сопоставим половину H^+, определенную H и содержащую камеру C. Показать, что элементы из $\mathfrak{H}$ можно пронумеровать так, что отображение $j \to \bigcap_{i \leqslant j} H_i^+$ будет строго убывающим на интервале $[1, \operatorname{Card}(\mathfrak{H})]$. (Рассмотрим семейство $\mathfrak{F}$ пересечений множеств H^+, упорядоченных по включению, и строго убывающую последовательность $(F_0, \ldots, F_q)$ максимальной длины элементов из $\mathfrak{F}$. Для любого $H \in \mathfrak{H}$ существует i такое, что $H^+ \supset F_j$ при $j \geqslant i$ и $H \not\supset F_{i-1}$. Показать, что $F_i = H^+ \cap F_{i-1}$.)

18) Пусть A — апартамент (упражнение 15). *Перегибом* апартамента A назовем такой его эндоморфизм π, что $\pi^2 = \pi$ и каждая камера в A является образом при π либо 0, либо 2 камер.

а) Пусть π — перегиб апартамента A и C — камера в A такая, что $\pi(C) = C$. Для любой смежной с C камеры C' мы имеем либо $\pi(C') = C'$, либо $\pi(C') = C$. Если $a \in C$, то $\pi(a) = a$. Пусть $(C_0 = C, C_1, \ldots, C_n)$ — галерея. Показать, что либо $\pi(C_i) = C_i$ для всех i, либо $(C_0, \pi(C_1), \ldots \ldots, \pi(C_n))$ неминимальна (и имеются две одинаковые последовательные камеры). Получить отсюда, что минимальная галерея с концами, инвариантными относительно π, сама инвариантна относительно π. Если $(C = C_0, C_1, \ldots, C_n)$ — минимальная галерея и $\pi(C_n) \neq C_n$, то существует такой индекс i, $0 \leqslant i < n$, что $\pi(C_j) = C_j$ при $0 \leqslant j \leqslant i$ и $\pi(C_j) \neq C_j$ при $i < j \leqslant n$.

б) Пусть C_1, C_2 — две различные смежные камеры и π, π' — два перегиба апартамента A. Предположим, что $\pi(C_2) = C_1$ и $\pi'(C_1) = C_2$. Пусть C — камера. Рассмотрим три следующих условия:

(1) $$\pi(C) = C;$$

(2) $$d(C, C_1) < d(C, C_2);$$

(3) $$\pi'(C) \neq C.$$

Показать, что (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), и получить отсюда, что эти три условия эквивалентны. Показать, что π (соотв. π') — единственный перегиб множества A, переводящий C_2 (соотв. C_1) в C_1 (соотв. C_2). (Пусть условие (2) выполнено, и пусть $(C_1, C_2', \ldots, C_n' = C)$ — минимальная галерея. Показать, что $\pi'(C_{j+1}')$ — единственная камера, отличная от $\pi'(C_j')$ и содержащая перегородку $\pi'(C_j' \cap C_{j+1}')$.) Показать, что $\pi(\mathfrak{C})$ и $\pi'(\mathfrak{C})$ образуют разбиение множества $\mathfrak{C}$ камер в A и что $\pi(a) = \pi'(a) = a$ для всех $a \in \pi(A) \cap \pi'(A)$. Показать, что отображение A в себя, совпадающее с π' на $\pi(A)$ и с π на $\pi'(A)$, является инволютивным автоморфизмом множества A. Он называется *отражением* относительно перегородки $C_1 \cap C_2$. Показать, что это — единственный нетривиальный автоморфизм множества A, оставляющий неподвижным все точки $C_1 \cap C_2$ (использовать упражнение 5, б)).

в) Пусть A — апартамент, ассоциированный с системой Кокстера (W, S). Вернемся к обозначениям упражнения 16. Пусть C_1 и C_2 — две смежные камеры и t — такой элемент из T, что стенка L_t является носителем перегородки $C_1 \cap C_2$. Пусть M_j — половина A, определенная L_t и содержащая C_j (для $j = 1, 2$). Показать, что отображение π, определенное равенством $\pi(a) = a$, если $a \in M_1$, и $\pi(a) = t(a)$, если $a \in M_2$, есть перегиб апартамента A, для которого $\pi(C_2) = C_1$, и что отражение относительно перегородки $C_1 \cap C_2$ есть отображение $a \longmapsto t(a)$.

19) Пусть A — апартамент. Предположим, что для произвольных различных смежных камер C_1 и C_2 существует перегиб (упражнение 18) множества A, переводящий C_1 в C_2.

Пусть C — камера в A и $(C_i)_{i \in I}$ — семейство камер, смежных с C и отличных от C. Обозначим через s_i отражение относительно перегородки $C \cap C_i$ (упражнение 18, б)). Положим $S = \{s_i \mid i \in I\}$ и обозначим через W группу автоморфизмов апартамента A, порожденную элементами s_i.

а) Показать, что для любой камеры C' найдется такой элемент $w \in W$, что $C' = w(C)$ (провести индукцию по длине $d(C, C')$).

б) Показать, что (W, S) является системой Кокстера. (Для $i \in I$ положить

$$P_{s_i} = \{w \in W \mid w(C) \subset \pi_i(A)\},$$

где π_i — перегиб, переводящий C_i в C, и показать, что условия предложения 6 выполнены. Для доказательства выполнимости условия (C′) следует заметить, что если $w \in P_{s_i}$ и $ws_j \notin P_{s_i}$, то

$$w(C) \cap ws_j(C) \subset \pi_i(A) \cap s_i\pi_i(A).$$

Так как камеры $w(C)$ и $ws_j(C)$ — смежные, то мы получаем отсюда, что $s_i = ws_jw^{-1}$ (упражнение 18, б).)

в) Пусть F — ячейка камеры C. Показать, что стабилизатор W_F ячейки F в W порождается элементами $s_i \in S$, для которых $F \cup C \cap C_i$. (Пусть $w \in W_F$ с $l_S(w) > 1$, и пусть $i \in I$ таково, что $w = s_i w'$ с $l(w') = l(w) - 1$. В силу предложения 6 имеем $w' \in P_{s_i}$, откуда $w(C) \subset s_i\pi_i(A)$, $F \subset \pi_i(A) \cap s_i\pi_i(A)$ и $s_i \in W_F$.) В частности, $w(C) = C$ тогда и только тогда, когда $w = 1$.

г) Показать, что отображение $a \longmapsto W_{\{a\}}$ является изоморфизмом апартамента A на апартамент, ассоциированный с (W, S) (упражнение 16), и что этот изоморфизм совместим с действием группы W.

20) Пусть A — ансамбль и S — множество. Мы скажем, что A *пронумерован* множеством S, если задано отображение f множества A в S,

такое, что для любой камеры C ансамбля A сужение f на C есть *биекция* камеры C на S. Если F — ячейка в A, то $f(F)$ называется ее *типом*. Пусть A — пронумерованный ансамбль. Эндоморфизм φ ансамбля A называется *допустимым*, если a и $\varphi(a)$ имеют один и тот же тип при всех $a \in A$.

а) Пусть φ — эндоморфизм ансамбля A. Показать, что если в A есть камера C, такая, что a и $\varphi(a)$ имеют одинаковый тип при всех $a \in C$, то φ — допустимый эндоморфизм. Показать, что если A — апартамент и π — его перегиб (упражнение 18), то π — допустимый эндоморфизм.

б) Подмножество $D \subset A$ называется *выпуклым*, если для любого $a \in A - D$ существует допустимый эндоморфизм φ ансамбля $\mathscr{A}$, такой, что $\varphi(x) = x$ при всех $x \in D$ и $\varphi(a) \neq a$. Показать, что пересечение выпуклых подмножеств всегда выпукло и что для любого подмножества $D \subset A$ существует наименьшее выпуклое множество, его содержащее. Это выпуклое множество называется *выпуклой оболочкой* множества D и обозначается символом $\Gamma(D)$.

21) Пусть (W, S) — система Кокстера и A — ассоциированный с ней апартамент (см. упражнение 16, обозначений которого мы придерживаемся).

а) Показать, что существует, и притом единственная, нумерация (называемая канонической) множества A, для которой тип ячейки F совпадает с типом, определенным в упражнении 16, в). Мы будем всегда рассматривать A с этой нумерацией.

б) Показать, что допустимыми автоморфизмами апартамента A являются действия элементов группы W.

в) Пусть D — подмножество в A, содержащее хотя бы одну камеру. Установить эквивалентность следующих условий:

(i) D есть пересечение половин множества A (упражнение 16, ё)), содержащих D;

(ii) D выпукло;

(iii) каковы бы ни были ячейки F_1 и F_2, содержащиеся в D, выпуклая оболочка множества $F_1 \cup F_2$ содержится в D;

(iv) каковы бы ни были камера C_1 и ячейка F, содержащиеся в D, и какова бы ни была галерея $(C_1, \ldots, C_n)$, обладающая наименьшей возможной длиной и такая, что $F \subset C_n$, имеют место включения $C_i \subset D$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(Для доказательства импликации (iii) $\Rightarrow$ (iv) использовать упражнение 15, б).) При доказательстве импликации (iv) $\Rightarrow$ (i) провести рассуждение от противного. Пусть D' — пересечение половин апартамента A, содержащих D. Пусть $a \in D' - D$, C_0 — камера в D и $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ — галерея наименьшей длины, для которой $a \in C_n$. Тогда $C_j \subset D'$ для всех j. Показать, что существует такое целое число j, $0 \leqslant j < n$, что $C_j \subset D$ и $C_{j+1} \not\subset D$. Пусть M (соотв. M') — половина A, определенная стенкой — носителем перегородки $C_j \cap C_{j+1}$ и содержащая C_j (соотв. C_{j+1}). Показать, что $D \not\subset M$. Пусть $b \in D \cap (A - M)$ и $\Gamma = \left(C_j, C_1', \ldots, C_p'\right)$ — галерея минимальной возможной длины, для которой $b \in C_p'$. Тогда $C_k' \subset D$, $1 \leqslant k \leqslant p$, и $C_p' \subset M'$. Пусть π — перегиб апартамента A с образом M' (упражнение 18, в)). Тогда $\pi(C_j) = C_{j+1}$, и галерея $\pi(\Gamma)$ неинъективна (упражнение 18, а)). Если $\Gamma' = \left(C_{j+1}, C_2'', \ldots, C_{p-2}'', C_p'\right)$ — галерея, которая получается из $\pi(\Gamma)$ удалением одной из двух последовательных одинаковых камер, то галерея $\left(C_j, C_{j+1}, C_2'', \ldots, C_{p-2}'', C_p'\right)$ будет уже минимальной, согласно определению галереи Γ. Из условия (iv) вытекает тогда, что $C_{j+1} \subset D$. Противоречие.)

22) Сохраним обозначения упражнений 16 и 21.

а) Пусть $t \in T$ и $w \in W$. Показать, что камеры C и $w(C)$ разделены стенкой L_t в том и только том случае, когда $l(tw) < l(w)$ (воспользоваться перегибом на половину $A^+(t)$).

б) Пусть $w_0 \in W$. Установить эквивалентность следующих условий:

(i) $l(ww_0) = l(w_0) - l(w)$ для всех $w \in W$;

(ii) $l(tw_0) < l(w_0)$ для всех $t \in T$;

(iii) каковы бы ни был элемент $t \in T$, камеры C и $w_0(C)$ разделяются стенкой L_t.

Для доказательства импликации (iii)$\Rightarrow$(i) воспользоваться упражнением 16, ж)).

Показать, что элемент w_0 с описанными свойствами определен однозначно и существует в том и только том случае, когда группа W *конечна*. Тогда им является элемент наибольшей длины в W, характеризуемый тем, что

(iv) $l(sw_0) < l(w_0)$ для всех $s \in S$.

Кроме того, $w_0^2 = 1$, $w_0 S w_0 = S$ и $l(w_0) = \mathrm{Card}(T)$.

в) Пусть группа W конечна. Показать, что для любой камеры C_0 существует, и притом единственная, камера $-C_0$, такая, что $C_0 \cup (-C_0)$ не содержится целиком ни в какой половине апартамента A. Показать, что существует единственный инволютивный автоморфизм (не обязательно допустимый) φ, такой, что $\varphi(C_0) = -C_0$ для любой камеры C_0 и $\varphi(L) = L$ для любой стенки L из A. Для $a \in A$ положим $\varphi(a) = -a$. Если F — ячейка, то $-F = \varphi(F)$ называется *противоположной* к ней ячейкой.

г) Пусть C_0 — камеры в A и F — ее перегородка. Показать, что выпуклой оболочкой $C_0 \cup (-F)$ является половина апартамента A, определенная стенкой L с носителем F и содержащая C_0.

23) Снова используем обозначения упражнения 16. Пусть $\mathrm{Aut}(A)$ — группа автоморфизмов апартамента A. Показать, что автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ переставляет стенки апартамента A и что $\varphi t \varphi^{-1} \in T$ для всех $t \in T$ (воспользоваться упражнением 16). Получить отсюда, что W (отождествленная с подгруппой в $\mathrm{Aut}(A)$) является нормальной подгруппой и что $\mathrm{Aut}(A)$ — полупрямое произведение подгруппы E автоморфизмов, сохраняющих камеру C, на W. Доказать, что действие $\mathrm{Aut}(A)$ на W определяет изоморфизм группы E на группу автоморфизмов системы Коксетера (W, S) или, что то же самое, графа Коксетера системы (W, S) (см. также упражнение 19).

24) Мы назовем *структурным ансамблем* ансамбль I с системой $\mathfrak{A}$ секций, удовлетворяющей следующим условиям:

(СА 1) Секции $A \in \mathfrak{A}$ являются апартаментами.

(СА 2) Две камеры в I содержатся по крайней мере в одном из апартаментов системы $\mathfrak{A}$.

(СА 3) Каковы бы ни были $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, такие, что пересечение $A_1 \cap A_2$ содержит камеру, существует изоморфизм A_1 на A_2, оставляющий неподвижными точки из $A_1 \cap A_2$.

Пусть $(I, \mathfrak{A})$ — структурный ансамбль. Элементы системы $\mathfrak{A}$ называются *апартаментами* пары $(I, \mathfrak{A})$ или просто ансамбля I.

а) Показать, что апартаменты ансамбля I попарно изоморфны. Пусть C — камера в I и A — апартамент ансамбля I, содержащий C. Показать, что существует, и только один, эндоморфизм ρ ансамбля I (называемый *ретракцией I на A с центром C*), такой, что $\rho(a) = a$ для всех $a \in A$ и для всякого апартамента A', содержащего C, сужение ρ на A' есть изоморфизм A' на A. (Используя условие (СА 2) и упражнение 15, б)), отметить то обстоятельство, что для любого апартамента A', содержащего C, существует единственный изоморфизм $\rho_{A'}$, оставляющий неподвижными все точки камеры C.) Показать, что $\rho^2 = \rho$ и $\rho^{-1}(C) = C$.

б) Пусть A — апартамент в I, C_0 — камера и F — ячейка, содержащаяся в A. Пусть $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ — галерея наименьшей возможной длины, такая, что $F \subset C_n$. Показать, что $C_i \subset A$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ (рассуждение от противного: если $C_i \subset A$ и $C_{i+1} \not\subset A$, рассмотреть ретракцию ансамбля I на A, центром которой является камера в A, отличная от C_i и содержащая $C_i \cap C_{i+1}$).

в) Пусть A — апартамент в I, C — камера в A, F — перегородка в C, C' — какая-то другая камера в I и $\Gamma = (C_0, \ldots, C_n = C')$ — галерея наименьшей возможной длины и такая, что $F \subset C_0$. Показать, что ретракция ρ ансамбля I на A с центром в C переводит Γ в галерею

$$\left(C'_0, \ldots, C'_n = \rho(C')\right),$$

такую, что длина ее минимальна и $F \subset C'_0$ (рассмотреть апартамент A', содержащий C' и F, и использовать б) и тот факт, что сужение ρ на A' является изоморфизмом).

г) Пусть A — апартамент, C_1 и C_2 — две различные смежные камеры, содержащиеся в A, C' — камера, содержащая $C_1 \cap C_2$ и отличная от C_1 и C_2, A'_i — апартамент, содержащий C_i и C' (для $i = 1, 2$). Пусть φ_i (соотв. ψ_i) — ретракция I на A (соотв. A'_i) с центром C_i (соотв. C'), и пусть ρ_i — сужение $\varphi_i \circ \psi_i$ на A. Пусть C — камера в A. Показать, что если

$$d(C, C_1) \leqslant d(C, C_2),$$

то $\rho_1(a) = a$ для всех $a \in C$ и $d(C, C_1) < d(C, C_2)$ (рассмотреть минимальную галерею Γ с концами C и C_1 и применить в) для доказательства минимальности $\rho_1(\Gamma)$; использовать затем упражнение 15, б)). Показать, что если $d(C, C_2) < d(C, C_1)$, то $\rho_1(C) \neq C$ и $\rho_1^2(C) = \rho_1(C)$ (взять минимальную галерею Γ с концами C и C_2 и использовать в) для доказательства того, что $\rho_1(\Gamma)$ — галерея минимальной возможной длины и такая, что одним ее концом служит $\rho_1(C)$, а другим — камера, содержащая $C_1 \cap C_2$; вывести отсюда, что $d(C_1, \rho_1(C_1)) \leqslant d(C_2, \rho_1(C_1))$).

Показать, что ρ_i — *перегиб* (упражнение 19) апартамента A (показать, что $A = \rho_1(A) \cup \rho_2(A)$, и определить инволютивный автоморфизм σ апартамента A, положив $\sigma(A) = \rho_2(a)$ при $a \in \rho_1(A)$ и $\sigma(a) = \rho_1(a)$ при $a \in \rho_2(A)$; показать, что если C — камера, содержащаяся в $\rho_1(A)$, то $\rho_1^{-1}(C) = \{C, \rho_2(C)\}$).

д) Пусть I — *пространственный* (или *вместительный*) структурный ансамбль, т. е. такой ансамбль, что любая перегородка содержится по крайней мере в трех камерах. Показать, что существует, и с точностью до изоморфизма только одна, система Кокстера (W, S) такая, что апартаменты в I изоморфны апартаменту A_0, ассоциированному с системой (W, S) (использовать г) и упражнение 19). Пусть A — апартамент в I и φ — изоморфизм A_0 на A. Показать, что существует однозначно определенная нумерация ансамбля I со значениями в S, такая, что типы a и $\varphi(a)$ совпадают для всех $a \in A_0$ (выбрать камеру C в A и показать, используя б), что если A' и A'' — два апартамента в I, содержащие C, то нумерации A' и A'', продолжающие нумерацию на C, совпадают на $A' \cap A''$).

Мы скажем, что система Кокстера (W, S) и нумерация, полученные таким образом, *приспособлены к* I.

Показать, что введенные в а) ретракции являются допустимыми эндоморфизмами. Показать, что подмножество в I, содержащееся в апартаменте A ансамбля I, является выпуклым в I тогда и только тогда, когда оно выпукло в A (упражнение 20).

е) В обозначениях д) пусть $\mathfrak{J}$ — множество допустимых изоморфизмов A_0 на различные апартаменты из I. Показать, что если φ, $\psi \subset \mathfrak{J}$ и C — камера, а F — ячейка из I, содержащаяся в $\varphi(A_0) \cap \psi(A_0)$, то существует элемент $w \in W$, для которого $\psi^{-1}(C) = w\varphi^{-1}(C)$ и $\psi^{-1}(F) = w\varphi^{-1}(F)$ (рассмотреть изоморфизм λ апартамента $\varphi(A_0)$ на $\psi(A_0)$, оставляющий неподвижными точки в $\varphi(A_0) \cap \psi(A_0)$, и применить упражнение 21, б) к изоморфизму $\psi^{-1} \circ \lambda \circ \varphi^{-1}$ апартамента A_0).

25) Пусть I — множество и $\mathfrak{F}$ — множество конечных подмножеств в I. Для любого $A \in \mathfrak{F}$ положим $\varepsilon(A) = (-1)^{\operatorname{Card}(A)}$. Пусть G — коммутативная группа, записываемая аддитивно, а φ и ψ — два отображения $\mathfrak{F}$ в G. Показать, что следующие два свойства эквивалентны:

(i) $\varphi(A) = \sum\limits_{B \subset A} \psi(B)$ для любого $A \in \mathfrak{F}$;

(ii) $\psi(A) = \sum\limits_{B \subset A} \varepsilon(A - B)\, \varphi(B)$ для любого $A \in \mathfrak{F}$.

26) Пусть (W, S) — система Коксτера с конечным множеством S. Для любого подмножества H группы W обозначим через $H(t)$ формальный ряд с целыми коэффициентами

$$H(t) = \sum_{w \in H} t^{l(w)}.$$

а) Пусть $\operatorname{Card} S = 2$. Показать, что в этом случае

$$W(t) = \frac{1 + t - t^m - t^{m+1}}{1 - t}, \text{ если } W \text{ имеет конечный порядок } 2m;$$

$$W(t) = \frac{1 + t}{1 - t}, \text{ если } W \text{ бесконечна.}$$

б) Предположим, что группа W *конечна*. Пусть w_0 — элемент наибольшей длины в W (упражнение 22) и $m = l(w_0)$. Показать, что тогда

$$W(t) = t^m W(t^{-1})$$

(воспользоваться упражнением 22).

в) Пусть X — подмножество в S. Обозначим через A_X множество $(X, \varnothing)$-приведенных элементов в W (упражнение 3) и через W_X подгруппу в W, порожденную множеством X. Мы знаем (упражнение 3), что элемент $w \in W$ принадлежит A_X в том и только том случае, когда $l(xw) = l(w) + 1$ для всех $x \in X$, что любой элемент $w \in W$ однозначно записывается в виде $w = uw$ с $u \in W_X$, $v \in A_X$ и что тогда $l(w) = l(u) + l(v)$. Вывести отсюда формулу

$$W(t) = W_X(t) \,.\, A_X(t).$$

г) Сохраним предыдущие обозначения и обозначим через B_X множество $w \in A_X$, таких, что $l(sw) = l(w) - 1$ для любого $s \in S - X$. Показать, что

$$A_X(t) = \sum_{X \subset Y \subset S} B_Y(t).$$

Получить отсюда, что

$$B_X(t) = \sum_{X \subset Y \subset S} \varepsilon(Y - X) A_Y(t), \quad \text{где} \quad \varepsilon(Z) = (-1)^{\mathrm{Card}(Z)}$$

(использовать упражнение 25).

д) Предположим, что группа W *конечна*, и определим m и w_0, как в б). Показать, что $B_\varnothing = \{w_0\}$ и что

$$t^m = \sum_{Y \subset S} \varepsilon(Y) \frac{W(t)}{W_Y(t)}$$

(использовать в) и г)).

е) Пусть W *бесконечна*. Показать, что $B_\varnothing = \varnothing$ и что

$$0 = \sum_{Y \subset S} \frac{\varepsilon(Y)}{W_Y(t)}.$$

ё) Показать, что формальный ряд $W(t)$ является рациональной функцией от t (использовать е) и провести индукцию по $\mathrm{Card}(S)$). Показать, что эта рациональная функция обращается в нуль только при t, являющихся корнями из единицы; показать, что $\frac{1}{W(\infty)}$ — целое число. Показать, что $\frac{1}{W(t^{-1})} \in \mathbf{Z}[[t]]$.

§ 2.

1) Пусть G — группа, B и N — две подгруппы в G и S — подмножество в $W = N/(B \cap N)$. Для любого $w \in W$ положим $C(w) = BwB$. Предположим, что выполнены условия (T1) и (T2) определения 1 n° 1, что при любых $s \in S$ и $w \in W$ справедливо по крайней мере одно из двух соотношений $C(s) . C(w) = C(sw)$ или $C(s) . C(sw) = C(w)$ и что в $B \cup C(s)$ является подгруппой группы G при всех $s \in S$. Показать, что тогда выполнено условие (T3). Если, кроме того, индекс подгруппы B в $B \cup C(s)$ будет $\geqslant 3$, то (G, B, N, S) — система Титса.

2) Пусть G — группа, B и N — две подгруппы в G и S — подмножество в $W = N/(B \cap N)$. Пусть Z — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в B. Пусть B' и N' — канонические образы B и N в $G' = G/Z$. Показать, что каноническое отображение N на N' определяет изоморфизм W на $W' = N'/(B' \cap N')$. Пусть S' — образ множества S при этом изоморфизме. Показать, что (G', B', N', S') будет системой Титса тогда и только тогда, когда (G, B, N, S) — система Титса.

3) Пусть G — группа, B — подгруппа в G и $(C(w))_{w \in W}$ — семейство двойных смежных классов G по B. Говорят, что B — *подгруппа Титса* группы G, если существует подмножество $S \subset W$, такое, что выполнены следующие условия:

(1) объединение классов $C(s)$, $s \in S$, порождает G;

(2) при всяком $s \in S$ множество $B \cup C(s)$ является подгруппой в G и индекс подгруппы B в $B \cup C(s)$ не меньше 3;

(3) для любого $s \in S$ и любого $w \in W$ существует элемент $w' \in W$, такой, что $C(s) . C(w) \subset C(w) \cup C(w')$.

Впредь будет предполагаться, что B — подгруппа Титса группы G и S — подмножество в W, удовлетворяющее условиям (1)—(3).

а) Показать, что $C(s)^{-1} = C(s)$ и что $C(s) . C(s) = B \cup C(s)$ для всех $s \in S$. Показать, что для любого $s \in S$ и любого $w \in W$ существует элемент $w'' \in W$, такой, что $C(w).C(s) \subset C(w) \cup C(w'')$.

б) Назовем *длиной* элемента $w \in W$ и обозначим через $l(w)$ нижнюю границу целых чисел $n \geqslant 0$, таких, что существует последовательность $s_1, \ldots, s_n \in S$, для которой $C(w) \subset C(s_1) \ldots C(s_n)$. Показать, что $l(w)$ конечна для любого $w \in W$.

Пусть $u, v \in W$, $l(u) < l(v)$, и пусть $s \in S$. Показать, что если $C(v) \subset C(u).C(s)$ (соотв. $C(v) \subset C(s).C(u)$), то $C(v) = C(u).C(s)$ (соотв. $C(v) = C(s).C(u)$). (Провести индукцию по длине элемента u. Если $C(v) \neq C(u).C(s)$, то $C(u).C(s) = C(u) \cup C(v)$. Используя предположение индукции, показать, что существуют $t \in S$ и $w \in W$, такие, что

$$C(u) = C(t).C(w) \quad \text{с} \quad l(w) = l(u) - 1.$$

Из соотношений $C(v) \subset C(u).C(s) = C(t).C(w).C(s)$ и $C(t).C(w) = C(u) \neq C(v)$ вывести существование элемента $w' \neq w$, для которого $C(w') \subset C(w).C(s)$ и $C(v) \subset C(t).C(w')$, так что $l(w') \geqslant l(v) - 1 > l(u) - 1 = l(w)$. Предположение индукции дает тогда

$$C(w') = C(w).C(s).$$

Кроме того,

$$C(t).C(u).C(s) = C(t).C(t).C(w).C(s) =$$
$$= C(t).C(w).C(s) \cup C(w).C(s) = C(u).C(s) \cup C(w') =$$
$$= C(u) \cup C(v) \cup C(w'),$$

а также

$$C(t).C(u).C(s) = C(t).(C(u) \cup C(v)) \supset C(t).C(t).C(w) \subset C(w),$$

что приводит к противоречию, поскольку $w \neq u, v, w'$.)

в) Показать, что для любого $w \in W$ и любого $s \in S$ существует один и только один элемент, обозначаемый через $s.w$ (соотв. $w * s$), отличный от w и такой, что

$$C(s.w) \subset C(s).C(w) \subset C(w) \cup C(s.w)$$

(соотв. $C(w * s) \subset C(w).C(s) \subset C(w) \cup C(w * s)$). (Показать индукцией по $l(w)$, что $C(s).C(w) \neq C(w)$. Для этого записать

$$C(w) = C(u).C(t),$$

где $t \in S$, $u \in W$ и $l(w) = l(u) + 1$. Если $C(s).C(w) = C(w)$, то

$$C(s).C(u).C(t) = C(u).C(t),$$

и, умножая это равенство справа на $C(t)$, сделать заключение $C(u) \cup C(w) = C(s).C(u) \cup C(w)$. Так как по предположению индукции $C(u) \neq C(s).C(u)$, то в соответствии с б)

$$C(s).C(u) = C(w),$$

откуда

$$C(u) \subset C(s).C(s).C(u) = C(s).C(w) = C(w),$$

а это невозможно.)

г) Пусть $s \in S$. Показать, что отображение $p_s\colon w \longmapsto s.w$ (соотв. $q_s\colon w \longmapsto w * s$) является перестановкой на W и что $p_s^2 = \mathrm{Id}$ (соотв. $q_s^2 = \mathrm{Id}$). Показать, что при $s, t \in S$ будет $p_s \circ q_t = q_t \circ p_s$. (Исследовать произведение $C(s).C(w).C(t)$ с $w \in W$ и показать, что $(s.w) * t \in \{w, s.w, w * t, s.(w * t)\}$; показать, что $(s.w) * t \notin \{s.w, w * t\}$ и что если $(s.w) * t = w$, то $s.w = w * t$ и $w = s.(w * t)$.)

д) Показать, что порожденная элементами p_s (соотв. q_s), $s \in S$, группа перестановок P (соотв. Q) действует просто транзитивно на W.

(Для доказательства транзитивности P использовать условие (2) и рассуждать, как в лемме 1 из n° 1. Для доказательства однократной транзитивности использовать г).) Вывести отсюда, что на W существует однозначно определенная структура группы, такая, что отображение $p \longmapsto p(e)$ (где e — элемент из W, для которого $B = C(e)$) есть изоморфизм P на W). Отображение $q \longmapsto q(e)$ тогда тоже изоморфизм. При этом $s . w = w * s = sw$ для всех $s \in S$ и всех $w \in W$, а $C(w)^{-1} = C(w^{-1})$.

е) Показать, что пара (W, S) является системой Кокстера, и обобщить результаты n° 4.

ё) Пусть X — подмножество в S и W_X — подгруппа в W, порожденная множеством X. Показать, что множество G_X — объединение классов $C(w)$ для $w \in W_X$ — есть подгруппа в G и что еще справедлива теорема 3 из n° 5. Показать, что B является подгруппой Титса группы G_X. Обобщить предложения 2 и 3 из n° 5, определение 2, предложение 4 и теорему 4 из n° 6. Показать, что S совпадает с множеством элементов $w \in W$, таких, что $B \cup C(w)$ есть подгруппа в G, отличная от B. Система Кокстера (W, S) и группа W (которая называется *группой Вейля* пары (G, B)) зависят, следовательно, только от пары (G, B).

ж) Пусть N — подгруппа в G, такая, что $B \cap N$ нормальна в N и что всякий двойной смежный класс $C(w)$ относительно B пересекается с N по смежному классу относительно $B \cap N$. Показать, что группа $N/(B \cap N)$ отождествляется с W и что (G, B, N, S) является системой Титса.

4) Пусть (G, B, N, S) и (G', B', N', S') — две системы Титса с $G=G'$, $B = B'$ и группами Вейля W и W'. Пусть j — биекция W на W', определенная соотношением

$$BwB = Bj(w)B.$$

Показать, что j является изоморфизмом группы W на W' и что $j(S)=S'$.

5) Пусть $\Sigma = (G, B, N, S)$ — система Титса. Положим $T = B \cap N$ и обозначим через $\widehat{N}$ нормализатор группы N.

а) Пусть $b \in b \cap \widehat{N}$. Показать, что $bnb^{-1}n^{-1} \in B \cap N$ при всех $n \in N$ (положить $bn = n'b$ и использовать теорему 1) и что b принадлежит пересечению $\widetilde{T}$ сопряженных подгрупп nBn^{-1} для $n \in N$. Показать, что $\widetilde{T} \cap N = T$.

Система Σ называется *насыщенной*, когда $\widetilde{T} = T$.

б) Положим $\widetilde{N} = N . \widetilde{T}$. Показать, что $\widetilde{N}$ — подгруппа в G, содержащая $\widetilde{T}$ в качестве нормальной подгруппы, и что $\widetilde{N} \cap B = \widetilde{T}$. Показать, что вложение N в $\widetilde{N}$ определяет изоморфизм j группы Вейля W системы Σ на $\widetilde{N}/\widetilde{T}$.

в) Показать, что $(G, B, \widetilde{N}, j(S))$ — насыщенная система Титса, называемая системой, *ассоциированной* с Σ.

6) Вновь используем обозначения из n° 2. Пусть N_0 — подгруппа в N, состоящая из матриц, все элементы которых равны 0 или 1. Показать, что $B \cap N_0 = T \cap N_0 = \{1\}$ и что каноническое отображение j группы N_0 в $W = N/T$ является изоморфизмом. Положим $S_0 = j^{-1}(S)$. Показать, что (G, B, N_0, S_0) — система Титса и что (G, B, N, S) — ассоциированная с ней насыщенная система Титса.

7) Пусть G — группа, действующая на множестве E. По определению группа G действует на E *дважды транзитивно*, если для любых двух

пар элементов x, y, x', $y' \in E$ с $x \neq y$, $x' \neq y'$ существует такой элемент $g \in G$, что $g \,.\, x = x'$ и $g \,.\, y = y'$.

а) Пусть (G, B, N, S) — система Титса, группа Вейля которой имеет порядок 2. Показать, что G дважды транзитивна на G/B.

б) Пусть G — дважды транзитивная группа на множестве E. Предположим, что $\operatorname{Card} E \geqslant 3$. Обозначим через B стабилизатор какой-нибудь точки $e \in E$. Пусть $x \in E$, $x \neq e$, и пусть n — элемент из G, для которого $n(e) = x$ и $n(x) = e$. Пусть, далее, N — подгруппа группы G, порожденная элементом n, а s — канонический образ элемента n в N/T. Показать, что $(G, B, N, \{s\})$ — система Титса с группой Вейля порядка 2.

8) Пусть (G, B, N, S) — система Титса. Положим $T = B \cap N$ и $W = N/T$. Пусть $\widetilde{G}$ — группа, содержащая G в качестве нормальной подгруппы. Предположим, что для любого $h \in \widetilde{G}$ существует элемент $g \in G$, такой, что $hBh^{-1} = gBg^{-1}$ и $hNh^{-1} = gNg^{-1}$. Пусть $\widehat{B}$ (соотв. $\widehat{N}$) — нормализатор подгруппы B (соотв. N) в $\widetilde{G}$. Положим $\Gamma = \widehat{B} \cap \widehat{N}$, $\widetilde{N} = \Gamma \,.\, N$ и $\widetilde{T} = \widetilde{N} \cap B$.

а) Показать, что $\widetilde{G} = \Gamma \,.\, G$, $\widehat{B} = \Gamma \,.\, B$, $\Gamma \cap B = \Gamma \cap G$ и $\widetilde{T} = (\Gamma \cap B) \,.\, T$. Группы $\Omega = \Gamma/(\Gamma \cap B)$, $\widetilde{G}/G$ и $\widehat{B}/B$, следовательно, канонически изоморфны. Если $\Phi \subset \Omega$ и H — подгруппа в G, содержащая $\Gamma \cap B$, то обозначим через ΦH объединение множеств φH для $\varphi \in \Phi$.

б) Показать, что $\widetilde{T}$ — нормальная подгруппа в $\widetilde{N}$ (для доказательства включения $n\gamma n^{-1} \in \widetilde{T}$ при $n \in \widetilde{N}$ и $\gamma \in \Gamma \cap B$ использовать упражнение 5, а)), что $N \cap \widetilde{T} = T$ и что $\Gamma \cap \widetilde{T} = \Gamma \cap B$. Вложение N (соотв. Γ) в $\widetilde{N}$ позволяет, следовательно, отождествить W (соотв. Ω) с некоторой подгруппой группы $\widetilde{W} = \widetilde{N}/\widetilde{T}$. Показать, что Ω нормализует S и что $\widetilde{W}$ есть полупрямое произведение Ω и W.

в) Показать, что

$$BsBuB \subset (BuB) \cup (BsuB)$$

при всех $s \in S$ и всех $u \in \widetilde{W}$.

г) Показать, что $u \longmapsto BuB$ есть биективное отображение группы $\widetilde{W}$ на $B \backslash \widetilde{G}/B$ (использовать теорему 1 и тот факт, что Γ нормализует B).

д) Пусть $\mathfrak{P}$ — множество пар (Φ, X), где Φ — подгруппа группы Ω и X — подмножество в S, нормализуемое группой Φ. Положим $G_{(\Phi, X)} = \Phi G_X = B\Phi W_X B$ (в обозначениях n° 5). Показать, что отображение $(\Phi, X) \longmapsto G_{(\Phi, X)}$ есть биекция множества $\mathfrak{P}$ на множество подгрупп в $\widetilde{G}$, содержащих B. Обобщить утверждения б) и в) теоремы 3 и предложения 2 из n° 5.

Показать, что нормализатор подгруппы $G_{(\Phi, X)}$ в $\widetilde{G}$ является подгруппой вида $G_{(\Phi', X)}$, где Φ' — множество элементов в Ω, нормализующее как Φ, так и X.

е) Показать, что $G_{(\Phi, X)}$ будет максимальной подгруппой в $\widetilde{G}$ в том и только том случае, когда выполнено одно из следующих двух условий:

(i) $X = S$ и Φ — максимальная подгруппа в Ω;

(ii) $\Phi = \Omega$ и Φ действует транзитивно на $S - X$ (которое не пусто).

Показать, что $G_{(\Phi, X)}$ будет максимальной в множестве подгрупп группы $\widetilde{G}$, не содержащих G, в том и только том случае, когда

(iii) $X \neq S$ и Φ — нормализатор множества X в Ω, транзитивно действующий на $S - X$.

ё) Пусть Φ — нормальная подгруппа в Ω. Положим $G' = \Phi G$, $B' = \Phi B$, $N' = \Phi N$ и $T' = B' \cap N'$. Показать, что $T' = \Phi \widetilde{T}$ и что T' является нормальной подгруппой в N' тогда и только тогда, когда любой элемент группы Φ коммутирует с любым элементом из W. Показать, что тогда G' — нормальная подгруппа в $\widetilde{G}$, что вложение N в N' определяет изоморфизм j группы W на $W' = N'/T'$ и что (G', B', N', S') (где $S' = j(S)$) является системой Титса.

9) Пусть (G, B, N, S) — система Титса и X, Y, Z — три подмножества в S. Показать, что

$$G_X \cap (G_Y \cdot G_Z) = (G_X \cap G_Y) \cdot (G_X \cap G_Z)$$

(воспользоваться упражнением 1 к § 1 и предложением 2 из n° 5).

10) Пусть G — группа и B — ее подгруппа Титса. Вернемся к обозначениям упражнения 3. Для $s \in S$ обозначим через $G^{(s)}$ подгруппу $G_{S-\{s\}}$ (упражнение 3, ё)). Пусть I — множество подмножеств в G вида $gG^{(s)}$ (для $g \in G$ и $s \in S$), $\mathfrak{C}$ — множество подмножеств в I вида $C_g = \{gG^{(s)} \mid s \in S\}$ для $g \in G$. Множества C_g называются камерами в I (§ 1, упражнение 15). Группа G действует на I при помощи левых переносов.

а) Пусть $\mathfrak{F}$ — множество ячеек в I (т. е. частей камер; см. § 1, упражнение 15). Пусть $F \in \mathfrak{F}$. Показать, что существуют однозначно определенное подмножество $X \subset S$ и элемент $g \in G$, такие, что $gG_X = \bigcap_{a \in F} a$. В этом случае говорят, что F — ячейка *типа* X. Показать, что тогда F состоит из $gG^{(s)}$ для $s \in S - X$ и имеет коразмерность $\operatorname{Card} X$ в любой содержащей ее камере. Показать, что отображение $j\colon F \longmapsto \bigcap_{a \in F} a$ есть строго убывающая биекция, совместимая с левыми переносами, множества $\mathfrak{F}$ на множество подмножеств группы G вида gG_X для $g \in G$ и $X \subset S$. Показать, что при $X \subset Y \subset S$ ячейка типа X содержит единственную ячейку типа Y.

б) Показать, что G транзитивно действует на множестве камер $\mathfrak{C}$ и что стабилизатор камеры C_g $(g \in G)$ равен gBg^{-1}. Таким образом, отображение $g \longmapsto C_g$ определяет биекцию G/B на $\mathfrak{C}$.

в) Показать, что две камеры C_g и $C_{g'}$ $(g, g' \in G)$ смежны (§ 1, упражнение 15) в том и только том случае, когда существует $s \in S$, для которого $g' \in g(B \cup BsB)$.

г) Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — камеры в I. Положим $C_0 = C_e$. Установить эквивалентность следующих условий:

(i) последовательность $\Gamma = (C_0, C_1, \ldots, C_n)$ является инъективной галереей;

(ii) существуют последовательность $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ элементов из S и последовательность $(b_1, \ldots, b_n)$ элементов из B, такие, что $C_j = b_1\bar{s}_1b_2\bar{s}_2 \ldots b_j\bar{s}_j(C_0)$ (где $\bar{s}_j$ — данный элемент двойного класса Bs_jB) для $1 \leqslant j \leqslant n$.

Показать, что если эти условия выполнены, то последовательность $\mathbf{s}$ единственна. Назовем ее *типом* галереи Γ и обозначим через $\mathbf{s}(\Gamma)$. Показать, что инъективная галерея минимальна в том и только том случае, когда ее тип является приведенным разложением. Показать, что выполнены следующие условия:

(WI 1) *каковы бы ни были камеры C и C' в I, существует однозначно определенный элемент $t(C, C')$ группы W, такой, что множество типов минимальных галерей с концами C и C' будет множеством приведенных разложений для $t(C, C')$;*

(WI 2) *для любой камеры C отображение $C' \longmapsto t(C, C')$ множества камер из I в W сюръективно.*

д) Показать, что две минимальные галереи одного и того же типа с одинаковыми концами совпадают. (Это сводится к доказательству того, что если $(s_1, \ldots, s_n)$ — приведенное разложение и если $b_1, \ldots, b_n$, $b'_1, \ldots, b'_n$ — элементы из B, для которых $b_1\bar{s}_1 \ldots b_n\bar{s}_n \in b'_1\bar{s}_1 \ldots b'_n s'_n B$, то $b_1\bar{s}_1 \in b'_1\bar{s}_1 B$. Заметить, что если бы $\bar{s}_1^{-1}b_1^{-1}b'_1\ \bar{s}_1 \notin B$, то этот элемент принадлежал бы Bs_1B, откуда $b_2\bar{s}_2 \ldots b_n\bar{s}_n \in b\bar{s}_1 b' b'_2\bar{s}_2 \ldots b'_n\bar{s}_n B$ с $b, b' \in B$, вопреки следствию 1 теоремы 2 n° 4.)

е) Показать, что I, снабженное множеством $\mathfrak{C}$, образует *ансамбль*, называемый ансамблем, *ассоциированным* с парой (G, B). Показать, что существует единственная *нумерация* (§ 1, упражнение 20) ансамбля I, при которой тип ячейки совпадает с типом, определенным в a).

ё) Показать, что I — *пространственный* ансамбль, т. е. что каждая его перегородка содержится по крайней мере в трех камерах (см. § 1, упражнение 24). Показать, что выполнено следующее условие:

(G) *каковы бы ни были перегородка F, камера C_0, галерея $\Gamma = (C_0, \ldots, C_n)$ минимальной возможной длины и такая, что $F \subset C_n$, а также камеры C' и C'', содержащие F и отличные от C_n, существует элемент $g \in G$, для которого $g(C_i) = C_i$ при $0 \leqslant i \leqslant u$ и $g(C') = C''$.*

(Все сводится к случаю, когда $C_0 = C$. Пусть $u \in S$ — такой элемент, что F будет ячейкой типа $S - \{u\}$, и пусть s — тип галереи Γ. Показать, что (s, u) — приведенное разложение. Взять элемент $h \in G$, для которого $C_n = h(C)$. Существуют b' и $b'' \in B$, такие, что $C' = hb'u(C)$ и $C'' = hb''u(C)$. Использовать, далее, следствие 1 теоремы 2 n° 4, обобщенное на случай подгруппы Титса (см. упражнение 3, е)), для доказательства существования $b \in B$, такого, что $bhb'uB = hb''uB$. Тогда $b \in hBuBu^{-1}Bh^{-1} \subset (hBh^{-1}) \cup \cup (hBuBh^{-1})$. Если $b \in hBuBh^{-1}$, то $BhB \subset BhBuB = BhuB$ (там же), а это невозможно. Следовательно, $b(C_n) = C_n$, и из д) следует, что $b(C_i) = C_i$ для любого i.)

11) Пусть (W, S) — система Кокстера и I — ансамбль, пронумерованный множеством S (§ 1, упражнение 20). Назовем *типом* инъективной галереи $\Gamma = (C_0, \ldots, C_n)$ и обозначим через $s(\Gamma)$ такую последовательность $(s_1, \ldots, s_n)$ элементов из S, что перегородка $C_{i-1} \cap C_i$ имеет тип $S - \{s_i\}$ (для $1 \leqslant i \leqslant n$). Говорят, что I есть (W, S)-*ансамбль*, если выполнены условия (WI 1) и (WI 2) упражнения 10.

Пусть I — пространственный (W, S)-ансамбль (см. упражнение 10, ё)), и пусть G — группа его допустимых автоморфизмов, удовлетворяющая следующему условию:

(G_0) *для любых трех различных камер C, C' и C'', содержащих одну и ту же перегородку, существует такой элемент $g \in G$, что $g(C) = C$ и $g(C') = C''$.*

Выберем камеру C ансамбля I и обозначим через B ее стабилизатор в G.

а) Показать, что G действует транзитивно на множестве камер ансамбля I.

б) Пусть C' и C'' — две камеры. Показать, что $t(C, C') = t(C, C'')$ в том и только том случае, когда существует элемент $b \in B$, для которого $C'' = b(C')$. (Если $t(C, C') = t(C, C'') = w$, то рассмотреть приведенное разложение s элемента w и минимальную галерею Γ' (соотв. Γ'') с концами C, C' (соотв. C'') и типа s. Провести индукцию по $l(w)$, используя условие (G_0) и а).) Получить теперь биекцию $w \longmapsto B(w)$ группы W на $B\backslash G/B$.

в) Пусть F — перегородка камеры C типа $S - \{s\}$. Показать, что стабилизатор ячейки F в G равен $B \cup B(s)$ (если $g(F) = F$, то $t(C, g(C)) = 1$ или s). Показать, что $B \subset B(s) B(s)$ (использовать (G_0)).

г) Показать, что B — подгруппа Титса группы G и что система Кокстера пары (G, B) канонически изоморфна системе (W, S). (Пусть $w \in W$ и $s \in S$ таковы, что $l_S(sw) = l_S(w) + 1$. Пусть $g \in B(w)$ и $u \in B(s)$. Пусть $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ — приведенное разложение элемента w и $(C = C_0, C_1, \ldots, C_n = g(C))$ — минимальная галерея типа $\mathbf{s}$. Выбрать элемент $\bar{s}_i \in B(s_i)$. Используя (G_0), показать, что существуют элементы $b_i \in B$, для которых $C_i = b_1 \bar{s}_1 \ldots b_i \bar{s}_i (C)$. Положить $C'_i = u(C_{i-1})$ и показать, что галерея $(C, u(C), u(C_1), \ldots, u(C_n))$ имеет тип $(s, \mathbf{s})$ и, следовательно, минимальна. Вывести отсюда, что $ug \in B(sw)$ и что $B(s) B(w) = B(sw)$. Если теперь $l(sw) = l(w) - 1$, положить $w' = sw$. Тогда $B(s) B(w') = B(w)$, откуда

$$B(s) B(w) = B(s) B(s) B(w') \subset B(w') \cup B(s) B(w') = B(sw) \cup B(w).$$

Наконец, поскольку $B \subset B(s) B(s)$, выполнено также включение $B(w') = B(sw) \subset B(s) B(w)$.)

д) Показать, что существует однозначно определенный изоморфизм ансамбля, ассоциированного с (G, B) (упражнение 10) на I, совместимый с действием группы G и переводящий каноническую камеру C_e в C.

12) Пусть (G, B, N, S) — система Титса, $W = N/(B \cap N)$ — ее группа Вейля, I — (W, S)-ансамбль, ассоциированный с (G, B) (упражнение 10), и $C = C_e$ — каноническая камера ансамбля I. Пусть A_0 — апартамент, ассоциированный с системой Кокстера (W, S) (§ 1, упражнение 16). Для любого $g \in G$ пусть φ_g — отображение A_0 в I, которое точке $wW^{(s)}$ из A_0 $(w \in W, s \in S)$ ставит в соответствие точку $gwG^{(s)}$ ансамбля I.

Показать, что при всех $g \in G$ отображение φ_g есть изоморфизм пронумерованных ансамблей A_0 на секцию ансамбля I, состоящую из объединения камер $gn(C_e)$, $n \in N$. Показать, что I с множеством $\mathfrak{A}$ всех $\varphi_g(A_0)$ для $g \in G$ есть структурный ансамбль (§ 1, упражнение 24). (Для доказательства свойства (СА 2) заметить, что если $g', g'' \in G$, то существуют $b', b'' \in B$ и $n \in N$, такие, что $g'^{-1} g'' = b'nb''$. Положив тогда $g = g'b'n$, показать, что $g'(C)$ и $g''(C)$ содержится в $\varphi_g(A_0)$. Для доказательства свойства (СА 3) свести все к случаю двух апартаментов $A' = \varphi_e(A_0)$ и $A'' = \varphi_b(A_0)$ с $b \in B$ и, используя предложение 2 п° 5, показать, что отображение $a \longmapsto b(a)$ оставляет неподвижными точки пересечения $A' \cap A''$). Показать, что система Кокстера (W, S) и нумерация ансамбля I приспособлены к $(I, \mathfrak{A})$ (§ 1, упражнение 24, д)) и что множество $\mathfrak{J}$ допустимых изоморфизмов апартамента A_0 на различные элементы в $\mathfrak{A}$ совпадает с множеством φ_g для $g \in G$.

13) Вернемся к обозначениям упражнения 24 из § 1: $(I, \mathfrak{A})$ — пространственный структурный ансамбль, снабженный системой Кокстера (W, S) и приспособленной нумерацией; $\mathfrak{J}$ — множество допустимых изоморфизмов апартамента A_0, ассоциированного с (W, S), на различные апартаменты ансамбля $(I, \mathfrak{A})$. Пусть, кроме того, G — группа допустимых автоморфизмов ансамбля I, сохраняющих E. Группа G действует тогда на $\mathfrak{J}$, и мы предположим, что она действует там *транзитивно*.

Пусть, наконец, C — камера в I, A — апартамент в $\mathfrak{A}$, содержащий C, φ — допустимый изоморфизм A_0 на A, переводящий каноническую камеру C_e апартамента A_0 в C, B — стабилизатор камеры C в G и N — стабилизатор апартамента A в G.

а) Показать, что если A' и A'' — два апартамента из $\mathfrak{A}$, содержащие одну и ту же камеру, то существует $g \in G$, для которого $g(A') = A''$

и $g(a)=a$ при всех $a \in A' \cap A''$. Показать, что G транзитивно действует на множество пар (A, C), где $A \in \mathfrak{A}$ и C — камера в A.

б) Показать, что отображение $u \longmapsto \varphi^{-1} \circ n \circ \varphi$ есть сюръективный гомоморфизм N на W с ядром $B \cap N$. Отождествить затем $N/(B \cap N)$ и W.

в) Показать, что условия (WI 1) и (WI 2) упражнения 10, г) выполнены (использовать следующий факт: если апартамент в I содержит две камеры C' и C'', то он содержит и всю минимальную галерею с концами C', C'' (§ 1, упражнение 24, б))).

г) Показать, что условие (G) упражнения 10, ё) (а тем самым и и условие (G_0) упражнения 11) выполнены. (В обозначениях условия (G) рассмотреть апартамент A' (соотв. A'') в I, содержащий C_0 и C' (соотв. C''). Используя упражнение 24, б) из § 1, показать, что $\Gamma \subset A' \cap A''$, и применить а).)

д) Показать, что (G, B, N, S) — система Титса и что $(I, \mathfrak{A})$ канонически изоморфен ассоциированному с ней пронумерованному структурному ансамблю (упражнение 12).

14) Пусть (G, B, N, S) — система Титса, $(I, \mathfrak{A})$ — ассоциированный с ней пронумерованный структурный ансамбль (упражнение 12). Показать, что G, рассматриваемая как группа автоморфизмов ансамбля I, удовлетворяет условиям упражнения 13. В обозначениях упражнения 12 положим $A = \varphi_e(A_0)$ и $C = \varphi_e(C_e)$. Показать, что B — стабилизатор камеры C в G. Пусть $\tilde{N}$ — стабилизатор A в G. Показать, что $\tilde{N}/(B \cap \tilde{N})$ отождествляется с W и что $(G, B, \tilde{N}, S)$ — *насыщенная* система Титса, ассоциированная с (G, B, N, S) (упражнение 5).

15) Вернемся к условиям и обозначениям упражнения 10. Предположим дополнительно, что группа Вейля W пары (G, B) *конечна*, и обозначим через w_0 элемент максимальной длины в W (§ 1, упражнение 22). Говорят, что две камеры C и C' *противоположны*, если $t(C, C') = w_0$.

а) Показать, что если C и C' противоположны, то камеры C' и C также противоположны. Показать, что любая камера C имеет противоположную камеру. Показать, что стабилизатор камеры C в G действует транзитивно на множестве камер, противоположных C.

б) Пусть C и C' — две противоположные камеры. Показать, что для любого $w \in W$ существует, и притом единственная, камера C_w, обладающая следующим свойством: если $(s_1, \ldots, s_k)$ (соотв. $(s'_1, \ldots, s'_h)$) — приведенное разложение элемента w (соотв. $w' = w_0 w^{-1}$), то существует минимальная галерея $(C_0 = C, C_1, \ldots, C_n = C')$ типа $(s_1, \ldots, s_k, s'_1, \ldots, s'_h)$ (где $n = h + k$), такая, что $C_w = C_k$ (использовать упражнение 22 из § 1 и упражнение 10, г) и д)). Показать, что C_w и C_{ww_0} противоположны.

в) Пусть $\mathfrak{M}$ — множество пар противоположных камер. При $m = (C, C') \in \mathfrak{M}$ обозначим через A_m объединение камер C_w, построенных выше. Показать, что I, снабженное множеством $\mathfrak{A}$ всех A_m для $m \in \mathfrak{M}$, есть структурный ансамбль (§ 1, упражнение 24) и что система Коксетера (W, S) и нумерация ансамбля I приспособлены к $(I, \mathfrak{A})$. Определить каноническую биекцию $\mathfrak{M}$ на множество, обозначаемое в упражнении 24 к § 1 символом $\mathfrak{J}$. Отождествить эти два множества.

г) Пусть $m = (C, C') \in \mathfrak{M}$ с $C = C_e$, и пусть N — стабилизатор A_m в G. Показать, что $N/(B \cap N)$ отождествляется с W и что (G, B, N, S) является насыщенной системой Титса (воспользоваться упражнением 13).

16) Сохраним предположения и обозначения упражнения 15.

а) Пусть C и C' — две камеры. Показать, что существует камера C'', противоположная как C, так и C'. (Взять C'', противоположную C и такую, чтобы элемент $t(C', C'')$ имел наибольшую возможную длину. Если $t(C', C'') \neq w_0$, то существует камера C_1, смежная с C'' и такая, что

$l(t(C', C_1)) > l(t(C', C''))$. Используя условие (G) упражнения 10, показать, что можно предполагать $C_1 \not\subset A_{(C, C'')}$ и что тогда C_1 будет противоположна к C.)

б) Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Показать, что существует однозначно определенный инволютивный автоморфизм (не обязательно допустимый) j_A, который переводит каждую камеру из A в противоположную камеру (использовать упражнение 22, в) к § 1). Пусть F и F' — две ячейки в I. Показать, что если $F' = j_A(F)$ для некоторого $A \in \mathfrak{A}$, содержащего F и F', то то же самое верно и для каждого $A \in \mathfrak{A}$, содержащего F и F'. (Если F $F' \in A \cap A'$ и A, $A' \in \mathfrak{A}$, рассмотреть камеру C (соотв. C') в A (соотв. A'), содержащую F (соотв. F'); рассмотреть $A'' \in \mathfrak{A}$, содержащий C и C' и использовать условие (CA 3).) Мы скажем тогда, что ячейки F и F' *противоположны*. Показать, что для того чтобы две ячейки имели общую противоположную, необходимо и достаточно, чтобы они были одного и того же типа T, и что ячейка, противоположная к ячейке типа T, есть ячейка типа $w_0 T w_0^{-1}$.

в) Пусть A_0 — апартамент, ассоциированный с системой Кокстера (W, S) (§ 1, упражнение 16), и пусть $\mathfrak{J}$ — множество допустимых изоморфизмов апартамента A_0 на различные элементы в $\mathfrak{A}$. Если α — какая-то половина A_0, определенная стенкой L (§ 1, упражнение 16), и если $\varphi \in \mathfrak{J}$, то мы скажем, что $\varphi(\alpha)$ — *полуапартамент* ансамбля I *со стенкой* $\varphi(L)$. Показать, что $\varphi(L)$ зависит только от $\varphi(\alpha)$, но не от пары (φ, α). Пусть D_1 и D_2 — два различных полуапартамента с одной и той же стенкой L. Показать, что существуют $\varphi \in \mathfrak{J}$ и стенка L_0 в A_0, такие, что $L = \varphi(L_0)$, а D_i будут образами относительно φ двух половин апартамента A_0, определенных стенкой L_0. (Выбрать перегородку F, лежащую в L, и две камеры C_1 и C_2, одна из которых лежит в D_1, а другая — в D_2, такие, что C_1 содержит F, а C_2 — перегородку, противоположную к F в D_1 (которая также противоположна F в D_2); рассмотреть апартамент в I, содержащий C_1 и C_2.)

17) Сохраним условия и обозначения упражнений 15 и 16. Выберем элемент $\varphi \in \mathfrak{J}$, переводящий каноническую камеру C апартамента A_0 (§ 1, упражнение 16) в каноническую камеру C_e ансамбля I, и обозначим через N, как в упражнении 15, г), стабилизатор апартамента $\varphi(A_0) \in \mathfrak{A}$ в группе G. Для любого подмножества D апартамента A_0 обозначим через B_D подгруппу в G, оставляющую неподвижными все точки из $\varphi(D)$. Имеем $B = B_C$ и $B \cap N = B_{A_0}$.

а) Пусть α — половина апартамента A_0, содержащая C. Показать, что B_α действует транзитивно на полуапартаментах ансамбля I, имеющих в качестве стенки стенку L в $\varphi(\alpha)$ и отличных от $\varphi(\alpha)$. (Пусть X — такой полуапартамент, F — перегородка, содержащаяся в L, и C' — камера в $\varphi(\alpha)$, содержащая F. Используя упражнение 16, в) и упражнение 13, а), показать, что существует элемент $g \in G$, для которого $g(X \cup \varphi(\alpha)) = \varphi(A_0)$ и $g(C') = C'$. Показать, что $g(F) = F$, и из упражнения 22, в) к § 1 вывести, что $g \in B_\alpha$.) Получить отсюда, что B_L действует дважды транзитивно на полуапартаментах со стенкой L и что $(B_L, B_\alpha, B_L \cap N)$ является системой Титса с группой Вейля порядка 2 (см. упражнение 7).

б) Пусть D_1 и D_2 — два выпуклых подмножества в A_0, таких, что $C \subset D_1 \subset D_2$, причем существует однозначно определенная половина α в A_0, для которой $D_1 \subset \alpha$ и $D_2 \not\subset \alpha$. Тогда $D_1 = D_2 \cap \alpha$ (§ 1, упражнение 21, в)). Показать, что $B_{D_1} = B_\alpha B_{D_2}$ и $B_\alpha \cap B_{D_2} = B \cap N$. (Рассмотрев галерею минимальной возможной длины с одним концом в C, а другим, содержащим точку $a \in D_2 - D_1$, показать, что существуют две смежные камеры C'_1 и C'_2 в A_0, такие, что $C'_1 \subset D_1$, $C'_2 \subset D_2$, $C'_2 \not\subset D_1$ и $C'_1 \cap C'_2$ содержится в стенке L' половины α. Положим $C_i = \varphi(C'_i)$, $F = \varphi(C'_1 \cap C'_2)$ и $L = \varphi(L')$. Показать, что выпуклая оболочка множества $D_1 \cup C'_2$ равна D_2. Пусть $b \in B_{D_1}$. Тогда $b(C_1) = C_1$, откуда $b(F) = F$ и $b(C_2) \neq C_1$. Получить отсюда, что выпуклая оболочка множества $b(C_2) \cup L$ является полуапартаментом X со стенкой L, отличным от $\varphi(\alpha)$, и что существует элемент $b' \in B_\alpha$, для которого

$$b'(\varphi(A_0)) = X \cup \varphi(\alpha).$$

Показать, что $b'b(a) = a$ для всех $a \in \varphi(D_1 \cup C'_2)$ и что $b'b \in B_{D_2}$.)

в) Пусть $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ — половины апартамента A_0, содержащие C и пронумерованные таким образом, что отображение

$$j \longmapsto \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant j} \alpha_i$$

является строго убывающим (§ 1, упражнение 17). Показать, что $B = B_{\alpha_1} \ldots B_{\alpha_q}$ и что если $b_i, b'_i \in B_{\alpha_i}$, причем $b_1 \ldots b_q = b'_1 \ldots b'_q$, то $b'_i \in b_i (B \cap N)$, $1 \leqslant i \leqslant q$.

18) Вернемся к обозначениям и понятиям из n°2. Пусть V_i — векторное подпространство в k^n, порожденное элементами $e_1, \ldots, e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

а) Показать, что для любого подмножества X множества S подгруппа G_X (n°5) состоит из элементов $g \in G$, таких, что $g(V_i) = V_i$ при всех i, которым отвечают $s_i \notin X$.

б) Пусть I — ансамбль, ассоциированный с системой Титса (G, B, N, S) (упражнения 10 и 12). Показать, что отображение j, которое точке $gG^{(i)}$ ансамбля I (здесь $G^{(i)}$ обозначает подгруппу $G_{S-\{s_i\}}$ группы G, т. е. стабилизатор подпространства V_i) ставит в соответствие векторное подпространство $g(V_i)$, является *биекцией* ансамбля I на множество $\mathfrak{V}$ векторных подпространств в k^n ($\neq \{0\}$ и $\neq k^n$), согласованной с действием группы G.

в) Назовем *флагом* векторного пространства E совершенно упорядоченное по включению множество векторных подпространств в E. Показать, что элементы $a_1, \ldots, a_k$ ансамбля I принадлежат одной и той же ячейке в том и только том случае, когда $\{j(a_1), \ldots, j(a_k)\}$ — флаг в k^n.

г) Показать, что G действует дважды транзитивно на множестве векторных подпространств размерности 1 в k^n. Пусть $n \geqslant 2$, и пусть N_1 — подгруппа в G, порожденная элементом, который переставляет e_1 и e_2, оставляя неподвижными другие e_i. Показать, что $(G, G^{(1)}, N_1)$ — система Титса с группой Вейля порядка 2.

д) Предположим, что поле k коммутативно. Положим

$$G' = \mathbf{SL}(n, k), \quad B' = G' \cap B, \quad N' = G' \cap N \quad \text{и} \quad T' = N' \cap B' = T \cap G'.$$

Показать, что N'/T' отождествляется с $\mathfrak{S}_n$ и что (G', B', N', S) является системой Титса (рассуждать, как в n°2).

19) Пусть k — коммутативное поле характеристики $\neq 2$ и Q — квадратичная форма $x_1x_3 + x_2^2$ на k^3. Показать, что группа $\mathbf{SO}(Q)$ дважды транзитивно действует на множестве изотропных прямых в k^3. Сравнить соответствующую систему Титса (упражнение 7) с системой, построенной в n°2 для $n = 2$ (ср. *Алг.*, гл. IX, § 9, упр. 15).

20) Вновь используем обозначения из n° 2, предполагая дополнительно поле k коммутативным. Имеем один из следующих случаев:

(B_l) $n = 2l + 1$, где $l \geqslant 1$, характеристика поля k отлична от 2, а на k^n задана квадратичная форма $Q = x_1x_n + \ldots + x_lx_{l+2} + x_{l+1}^2$;

(C_l) $n = 2l$ ($l \geqslant 1$), а на k^n задана знакопеременная форма Φ, такая, что $\Phi(e_i, e_j) = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $i \leqslant j$, исключая случай $i \leqslant l$, $j = n + 1 - i$, когда $\Phi(e_i, e_j) = 1$;

(D_l) $n = 2l$ ($l \geqslant 2$), характеристика поля $k \neq 2$, а на k^n задана квадратичная форма $Q = x_1x_n + \ldots + x_lx_{l+1}$.

Обозначим через G_1 специальную ортогональную группу $\mathbf{SO}(Q)$ в случаях (B_l) и (D_l) и через $\mathbf{Sp}(\Phi)$ симплектическую группу в случае (C_l). Положим

$$B_1 = G_1 \cap B,\ N_1 = G_1 \cap N \quad \text{и} \quad T_1 = G_1 \cap T = B_1 \cap N_1.$$

а) Показать, что действие группы N_1 на множестве прямых ke_i определяет гомоморфизм группы N_1 с ядром T_1 на подгруппу W_1 группы $\mathfrak{S}_n$, позволяющий отождествить W_1 и N_1/T_1. Показать, что W_1 — подгруппа группы $\mathfrak{S}_n$, порожденная:

в случае (B_l) элементами $\sigma_j = s_js_{n-j}$, $1 \leqslant j < l$, и $\sigma_l = s_{l-1}s_ls_{l-1}$;

в случае (C_l) элементами $\sigma_j = s_js_{n-j}$, $1 \leqslant j < l$, и $\sigma_l = s_l$;

в случае (D_l) элементами $\sigma_j = s_js_{n-j}$, $1 \leqslant j < l$, и $\sigma_l = s_{l-1}s_ls_{l-1}s_{l+1}s_l$.

б) Пусть S_1 — множество элементов σ_j для $1 \leqslant j \leqslant l$. Показать, что ($G_1$, B_1, N_1, S_1) является системой Титса. (Доказательство того факта, что подгруппа H группы G_1, порожденная подгруппами B_1 и N_1, совпадает с G_1, проводится так же, как в *Alg.*, chap. II, 3[e] éd., § 10, n° 13, и основывается на двух замечаниях:

1) H содержит большую нижнюю треугольную подгруппу группы G_1;
2) для любого набора $\xi_i \in k$ ($2 \leqslant i \leqslant n$) существует матрица $b = (b_{ij}) \in B_1$, в которой $b_{11} = 1$, $b_{1i} = \xi_i$ для $2 \leqslant i \leqslant n - 1$, а $b_{1n} = \xi_n$ в случае (C_l), $b_{1n} = 0$ в случаях (B_l) и (D_l). Затем рассуждать так же, как в n° 2, вводя подгруппы $G_{1,j} = G_1 \cap (G_j \cdot G_{n-j})$ для $1 \leqslant j < l$ и подгруппу $G_{1,l}$ элементов в G_1, которые оставляют неподвижными:

в случае (B_l) векторы e_i для $i \neq l$, $l + 1$, $l + 2$ и подпространство, порожденное векторами e_l, e_{l+1} и e_{l+2};

в случае (C_l) векторы e_i для $i \neq l$, $l + 1$ и плоскость, порожденную векторами e_l и e_{l+1};

в случае (D_l) векторы e_i для $i < l - 1$ или $i > l + 2$ и две плоскости, порожденные соответственно векторами e_{l-1}, e_{l+1} и e_l, e_{l+2}.

Показать, что G_{1j} отождествляется или с $\mathbf{GL}(2, k)$, или с $\mathbf{SL}(2, k)$, или со специальной ортогональной группой из упражнения 19.)

* в) Показать, что граф Кокстера группы W_1 принадлежит соответственно типу (B_l), (C_l) или (D_l) (гл. VI, § 4, n° 1). *

г) Показать, что для всякого подмножества $X \subset S_1$ подгруппа G_{1X} состоит из элементов $g \in G_1$, таких, что $g(V_i) = V_i$ при всех i, которым отвечают $\sigma_i \notin X$, за исключением случая (D_l), когда то же самое утверждение остается верным, если под V_{r-1} понимать подпространство, порожденное векторами $e_1, \ldots, e_{r-1}$ и e_{r+1}. Получить отсюда, как и в упражнении 18, б), биекцию j ассоциированного с системой (G_1, B_1)

ансамбля на множество вполне изотропных подпространств $\neq 0$ в случаях (B_l), (C_l) и на множество вполне изотропных подпространств размерности $\neq 0$ и $\neq r-1$ в случае (D_l). Показать, что точки $a_1, \ldots, a_k$ в I принадлежат одной и той же ячейке в том и только том случае, когда $\{j(a_1), \ldots, j(a_k)\}$ — флаг.

21) Пусть A — дискретно нормированное кольцо (*Ком. алг.*, гл. VI, § 3, n° 6), $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал, γ — его образующая и K — поле отношений кольца A. Пусть G — группа $\mathbf{SL}(2, k)$, B — подгруппа в G, состоящая из матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, таких, что $a, b, d \in A$ и $c \in \mathfrak{m}$ (причем $ad - bc = 1$), и N — подгруппа группы G, состоящая из матриц, у которых в каждом столбце и каждой строке имеется только один отличный от нуля элемент.

а) Показать, что $T = B \cap N$ — нормальная подгруппа в N и что $W = N/T$ — бесконечная диэдральная группа, порожденная классами s и s' матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ соответственно.

б) Показать, что (G, B, N, S) (где $S = \{s, s'\}$) является системой Титса.

в) Пусть $H = \mathbf{SL}(2, A)$ — подгруппа группы G, состоящая из матриц с коэффициентами в A. Показать, что $(H, B \cap H, N, \{s\})$ — система Титса. Сравнить ее с системой в упражнении 18, д).

г) Пусть $\widehat{A}$ — пополнение кольца A, и пусть $\widehat{G}$, $\widehat{B}$, $\widehat{N}$, $\widehat{T}$ — группы, определенные, как выше, но с заменой кольца A на $\widehat{A}$. Показать, что вложение G в $\widehat{G}$ определяет изоморфизм j ассоциированного с (G, B) ансамбля I (упражнение 10) на ассоциированный с $(\widehat{G}, \widehat{B})$ ансамбль $\widehat{I}$. Пусть $(I, \mathfrak{A})$ (соотв. $(\widehat{I}, \widehat{\mathfrak{A}})$ — *структурный* ансамбль, ассоциированный с (G, B, N) (соотв. $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{N})$ (упражнение 12). Показать, что $j(\mathfrak{A}) \subset \widehat{\mathfrak{A}}$, но что $j(\mathfrak{A}) \neq \widehat{\mathfrak{A}}$, если $\widehat{A} \neq A$. (Заметить, что апартаменты из $\widehat{\mathfrak{A}}$ (соотв. $\mathfrak{A}$) взаимно однозначно соответствуют подгруппам, сопряженным при помощи элементов из G (соотв. $\widehat{G}$) с T (соотв. $\widehat{T}$).

22) Пусть G — группа и B — ее подгруппа.

а) Установить эквивалентность следующих условий:

(i) $B \cap gBg^{-1}$ имеет конечный индекс в B для всех $g \in G$;

(ii) любой двойной смежный класс BgB относительно B является конечным объединением левых смежных классов относительно B.

Более точно, показать, что для любого $g \in G$ индекс q_g подгруппы $B \cap gBg^{-1}$ в B равен числу левых классов относительно B, содержащихся в двойном классе BgB. Показать, что $q_{gh} \leqslant q_g \cdot q_h$ для всех $g, h \in G$.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что условия (i) и (ii) выполнены, и обозначим через k некоторое коммутативное кольцо. Для $t \in G/B$ (соотв. $t \in B\backslash G/B$) обозначим через a_t отображение G в k, определенное следующим образом: $a_t(g) = 0$, если $g \notin t$, и $a_t(g) = 1$, если $g \in t$. Пусть L (соотв. H) — k-модуль, порожденный a_t для всех $t \in G/B$ (соотв. $t \in B\backslash G/B$).

б) Показать, что существует, и притом единственная, линейная форма μ на L, такая, что $\mu(a_t) = 1$ для всех $t \in G/B$.

в) Пусть $\varphi \in L$ и $\psi \in H$. Показать, что при всех $x \in G$ отображение

$$\theta_x\colon\ y \longmapsto \varphi(y)\,\psi(y^{-1}x)$$

принадлежит к L и что отображение $\varphi * \psi\colon x \longmapsto \mu(\theta_x)$ тоже принадлежит к L. Если, кроме того, $\varphi \in H$, то $\varphi * \psi \in H$. Показать, что отображение $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ наделяет H структурой алгебры над k, допускающей a_B в качестве единичного элемента, и определяет на L структуру правого H-модуля.

Алгебра H называется *алгеброй Гекке* группы G относительно подгруппы B и обозначается через $H_k(G, B)$.

г) Показать, что при $t, t' \in B \backslash G / B$ имеет место соотношение

$$a_t * a_{t'} = \sum_{t''} m(t, t'; t'') a_{t''},$$

где $m(t, t'; t'')$ — число смежных классов относительно B, содержащихся в $t \cap gt'^{-1}$ для любого $g \in t''$.

д) Группа G действует на L левыми переносами. Показать, что действие H на L определяет изоморфизм алгебры H на коммутант получающегося при этом линейного представления G в L.

*е) Предположим, что G — *конечная* группа и что характеристика кольца k не делит порядок группы G. Показать, что кольцо $H_k(G, B)$ абсолютно полупросто над k (*Алг.*, гл. VIII, § 7, n° 5) (воспользоваться теоремой Машке (гл. V, Дополнение) и предложением 3 из *Алг.*, гл. VIII, § 5, n° 1).*

ё) Предположим, что G — топологическая группа и B — ее открытая компактная подгруппа. Показать, что условия (i) и (ii) выполнены и что, когда $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, произведение $\varphi * \psi$ совпадает со сверткой относительно правой меры Хаара на G, нормированной условием $\mu(B) = 1$ (см. *Интегр.* гл. VIII, § 4, n° 5).

23) Пусть (W, S) — система Кокстера и k — коммутативное кольцо. Предположим, что при всех $s \in S$ заданы два элемента λ_s и μ_s кольца k, такие, что $\lambda_s = \lambda_{s'}$ и $\mu_s = \mu_{s'}$, когда s и s' сопряжены в W. Положим $E = k^{(W)}$ и обозначим через (e_w) канонический базис в E.

а) Показать, что на E существует однозначно определенная структура алгебры над k, такая, что для любых $s \in S$ и $w \in W$

$$e_s \cdot e_w = \begin{cases} e_{sw}, & \text{если } l(sw) > l(w); \\ \lambda_s e_w + \mu_s e_{sw}, & \text{если } l(sw) < l(w). \end{cases}$$

(Ввести при помощи этих формул эндоморфизм P_s пространства E, полагая $e_s e_w = P_s(w)$, и эндоморфизм $Q_s = jP_s j^{-1}$, где j обозначает автоморфизм пространства E, определенный соотношением $j(e_w) = e_{w^{-1}}$. Показать, что $P_s Q_t = Q_t P_s$ для $s, t \in S$, заметив при этом, что условия $l(swt) = l(w)$ и $l(sw) = l(wt)$ влекут равенство $sw = wt$. Далее рассуждать, как в упражнении 3, д).) Модуль E, снабженный этой структурой алгебры, будем обозначать через $E_k((\lambda_s), (\mu_s))$. Показать, что $E((0), (1))$ есть групповая алгебра $k[W]$ группы W (*Alg.*, chap. III, 3^e ed., § 2, n° 6).

б) Показать, что семейство образующих $(e_s)_{s \in S}$ и соотношений

$$e_s^2 = \lambda_s e_s + \mu_s \quad \text{для} \quad s \in S;$$

$$(e_s e_t)^r = (e_t e_s)^r \text{ для } s, t \in S \text{ с произведением } st$$
конечного четного порядка $2r$;

$$(e_s e_t)^r e_s = (e_t e_s)^r e_t \text{ для } s, t \in S \text{ с произведением } st$$
конечного нечетного порядка $2r + 1$

образует задание алгебры E (рассуждения аналогичны доказательству теоремы 1, n° 6, § 1).

24) Пусть G — группа, B — ее подгруппа Титса (упражнение 3, откуда мы берем обозначения). Предположим, что для каждого $s \in S$ двойной класс $C(s)$ есть объединение конечного числа q_s левых смежных классов относительно B. Используя обозначения из упражнения 22, положим $a_w = a_{C(w)}$ при всех $w \in W$.

а) Показать, что условия (i) и (ii) упражнения 22 удовлетворяются. Следовательно, можно говорить об алгебре Гекке $H_k(G, B)$ (k — коммутативное кольцо), в которой $(a_w)_{w \in W}$ образуют базис.

б) Пусть $s \in S$ и $w \in W$. Показать, что $a_s * a_s = (q_s - 1) a_s + q_s$. Показать, что если $l(sw) > l(w)$, то $a_s * a_w = a_{sw}$.

в) Показать, что линейное отображение алгебры $E_k((q_s - 1), (q_s))$, ассоциированной с системой Коксетера (W, S) (упражнение 23), в $H_k(G, B)$, которое переводит e_w в a_w для всех $w \in W$, является изоморфизмом алгебр.

25) Вернемся к обозначениям упражнения 8. Предположим дополнительно, что при всех $s \in S$ индекс q_s подгруппы $B \cap gBg^{-1}$ в B конечен для любого $g \in BsB$.

а) Показать, что пара $(\widetilde{G}, B)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) упражнения 22.

б) Показать, что при любом $\gamma \in \Gamma$ отображение $x \longmapsto \gamma x \gamma^{-1}$ определяет автоморфизм σ алгебры Гекке $H_k(G, B)$ и что σ зависит только от класса ω элемента γ в $\Omega = \Gamma/(\Gamma \cap B)$. Обозначим его через σ_ω.

в) Пусть $k[\Omega]$ — групповая алгебра группы Ω, (e_ω) — канонический базис. Показать, что линейное отображение j тензорного произведения $k[\Omega] \otimes_k H_k(G, B)$ в $H_k(\widetilde{G}, B)$, определенное формулой $j(e_\omega \otimes a_{BwB}) = a_{B\omega wB}$ (в обозначениях упражнения 22) для $\omega \in \Omega$ и $w \in W$, есть биекция и что имеет место соотношение

$$j^{-1}(j(e_\omega \otimes x)\, j(e_{\omega'} \otimes y)) = e_{\omega\omega'} \otimes \sigma_\omega(x)\, y$$

для $\omega, \omega' \in \Omega$ и $x, y \in H_k(G, B)$.

¶ 26) Пусть E — абсолютно полупростая алгебра конечного ранга над коммутативным полем k. Назовем *численным инвариантом* алгебры E такую последовательность целых чисел $(n_1, \ldots, n_r)$, что $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_r > 0$ и алгебра $\bar{k} \otimes_k E$ изоморфна алгебре $\prod \mathbf{M}_{n_i}(\bar{k})$ для любого алгебраического замыкания $\bar{k}$ поля k.

Пусть V — кольцо целостности, K — его поле отношений, φ — гомоморфизм кольца V в коммутативное поле k и E — некоторая V-алгебра. Предположим, что E — свободный V-модуль конечного ранга. Пусть $E_0 = E \otimes_V k$ и $E_1 = E \otimes_V K$.

а) Предположим, что билинейная форма $(x, y) \longmapsto \mathrm{Tr}_{E_0/k}(xy)$ на E_0 невырождена. Показать, что E_0 и E_1 абсолютно полупросты (см. *Алг.*, гл. IX, § 2, упр. 1).

б) Предположим, что E_0 и E_1 абсолютно полупросты над k и K соответственно. Показать, что E_0 и E_1 имеют один и тот же численный инвариант. (Достаточно рассмотреть случай, когда k и K алгебраически замкнуты. Пусть (e_i) — базис алгебры E над V и (X_i) — переменные. Нужно доказать, что характеристический многочлен элемента $\sum_i X_i e_i$ из $E_1 \otimes_K K[(X_i)]$ (соотв. $E_0 \otimes_k k[(X_i)]$) имеет вид $P = \prod_j P_j^{n_j}$ $\Big($соотв. $Q = \prod_k Q_k^{m_k}\Big)$, где $(n_1, \ldots, n_r)$ (соотв. $m_1, \ldots, m_s$) есть численный инвариант алгебры E_1 (соотв. E_0), причем $\deg P_j = n_j$ (соотв. $\deg Q_k = m_k$). Далее, нужно показать, что $P_j \in V[(X_i)]$ и что $Q = \varphi(P)$. Получить отсюда, что существуют целые числа $c_{jk} \geqslant 0$, такие, что

$$m_k = \sum_j c_{jk} n_j \quad \text{и} \quad n_j = \sum_k c_{jk} m_k.)$$

*27) Пусть (G, B, N, S) — система Титса и k — коммутативное поле. Предположим, что группа G *конечна* и что характеристика поля k не делит порядки групп G и W. Показать, что алгебры $H_k(G, B)$ (упражнение 22) и $k[W]$ абсолютно полупросты и имеют одинаковые численные инварианты, будучи тем самым изоморфными в случае, когда поле k алгебраически замкнуто. (Пусть q_s — индекс подгруппы $B \cap gBg^{-1}$ в B для $g \in BsB$, $s \in S$. Нужно рассмотреть алгебру $E_{k[X]}((X(q_s-1), (1+X(q_s-1)))$, построенную по образцу упражнения 23 по системе Кокстера (W, S) и кольцу многочленов $k[X]$. Далее воспользоваться упражнением 26, а) и б), заметив, что по теореме Машке (гл. V, Дополнение) билинейная форма $\mathrm{Tr}_{k[W]/k}(xy)$ невырождена.)*

28) Пусть G — группа, M — максимальная подгруппа в G и U — нормальная подгруппа в M, удовлетворяющая условию (P) из n° 7. Предположим, что группа G совпадает со своим коммутантом, что она порождена объединением сопряженных с U подгрупп и что пересечение подгрупп, сопряженных с M, состоит только из единичного элемента. Показать, что G — простая группа. (Рассмотреть нормальную подгруппу N в G, отличную от единичной. Показать, что $G = N.M$ и затем что $G = N.U$.)

29) Пусть H — простая некоммутативная группа, θ — ее автоморфизм простого порядка p, и пусть U — полупрямое произведение $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ на H, соответствующее θ. Показать, что если θ не является внутренним автоморфизмом, то единственными нормальными подгруппами в U будут $\{1\}$, H и U. Вывести отсюда, что U неразрешима, но удовлетворяет условию (P) из n° 7. Применить все это к симметрической группе $\mathfrak{S}_n$.

ГЛАВА V

ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОТРАЖЕНИЯМИ

§ 1. Гиперплоскости, камеры и ячейки

В этом параграфе мы будем обозначать символом E *вещественное* аффинное пространство конечной размерности d и символом T пространство переносов пространства E (см. *Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 9, и *Топ. вект. простр.*, гл. II, § 2). Для любых двух точек a и b из E обозначим символом $[ab]$ (соотв. $]ab[$, $]ab]$) замкнутый (соотв. открытый, открытый в a и замкнутый в b) отрезок с концами a и b. На T однозначно вводится топология отделимого топологического векторного пространства (*Топ. вект. простр.*, гл. I, § 2, n° 3), и в этой топологии оно изоморфно $\mathbf{R}^d$. На E однозначно вводится топология такая, что для любого $e \in E$ отображение $t \mapsto e + t$ пространства T на E является гомеоморфизмом.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ *локально конечное* множество гиперплоскостей в E (*Общ. топ.*, гл. I, § 10, n° 12).

1. Основные понятия и обозначения

Пусть H — гиперплоскость в E. Напомним, что $E - H$ распадается на две связные компоненты, которые называются *открытыми полупространствами*, ограниченными гиперплоскостью H. Их замыкания называются *замкнутыми полупространствами*, ограниченными гиперплоскостью H. Пусть $x, y \in E$. Говорят, что x и y лежат *строго по одну сторону* от H, если они содержатся в одном и том же открытом полупространстве, ограниченном H, или, что то же самое, если замкнутый открытый отрезок с концами x и y не пересекается с H. Говорят, что x и y лежат *по разные стороны* от H, если x принадлежит одному открытому полупространству, ограниченному H, а y — другому. Говорят также, что $x \in E$ и $t \in T$ лежат строго по одну сторону от H, если это верно для x и $h + t$, какова бы ни была точка $h \in H$.

Пусть A — связное непустое подмножество в E. Для любой гиперплоскости H в E, не пересекающей A, обозначим через $D_H(A)$ ограниченное гиперплоскостью H единственное открытое полупространство, содержащее A. Положим

$$D_{\mathfrak{H}}(A) = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} D_H(A), \tag{1}$$

где $\mathfrak{N}$ — любое множество гиперплоскостей в E, не пересекающих A. Если A состоит из одной точки a, то мы будем писать $D_H(a)$ и $D_{\mathfrak{N}}(a)$ вместо $D_H(\{a\})$ и $D_{\mathfrak{N}}(\{a\})$.

2. *Ячейки*

Множество точек в E, не принадлежащих никакой гиперплоскости H из множества $\mathfrak{H}$, открыто в E, поскольку $\mathfrak{H}$ локально конечно. Более точно, мы имеем следующее утверждение:

Предложение 1. *Пусть a — точка в E. Существует выпуклая открытая окрестность точки a, которая не пересекает никакой гиперплоскости H из $\mathfrak{H}$, не проходящей через точку a. Далее, существует только конечное число гиперплоскостей из $\mathfrak{H}$, проходящих через a.*

Множество $\mathfrak{N}$ гиперплоскостей H, таких, что $H \in \mathfrak{H}$ и $a \notin H$, локально конечно, ибо оно содержится в $\mathfrak{H}$. Следовательно, множество U точек в E, не принадлежащих никакой гиперплоскости из множества $\mathfrak{N}$, открыто. Так как $a \in U$, то существует выпуклая открытая окрестность a, содержащаяся в U. Конец предложения очевиден.

Пусть даны две точки x и y в E. Обозначим через $R\{x, y\}$ отношение:

„Для любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{H}$ либо $x \in H$ и $y \in H$, либо x и y лежат строго по одну сторону от H“.

Ясно, что R — отношение эквивалентности в E.

Определение 1. *Ячейкой в пространстве E относительно множества гиперплоскостей $\mathfrak{H}$ называется класс эквивалентности по определенному выше отношению R.*

Предложение 2. *Множество ячеек локально конечно.*

Это очевидное следствие локальной конечности $\mathfrak{H}$.

Пусть F — ячейка и a — принадлежащая ей точка. Для того чтобы гиперплоскость $H \in \mathfrak{H}$ содержала F, необходимо и достаточно, чтобы $a \in H$. Поэтому множество $\mathfrak{F}$ таких гиперплоскостей конечно. Их пересечение есть аффинное подпространство L пространства E, которое мы будем называть аффинным *носителем* ячейки F. Размерность пространства L называется *размерностью* ячейки F.

Если $\mathfrak{N}$ — множество гиперплоскостей $H \in \mathfrak{H}$, не содержащих F, то

$$F = L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} D_H(a). \qquad (2)$$

Мы хотим доказать, что замыкание ячейки F задается формулой

$$\bar{F} = L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} \overline{D_H(a)}. \tag{3}$$

Ясно, что левая часть равенства содержится в правой. Обратно, пусть $x \in L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} \overline{D_H(a)}$. Открытый отрезок с концами a и x содержится в L и в каждом $D_H(a)$ для $H \in \mathfrak{N}$, а тем самым и в F. Значит, x принадлежит замыканию F, откуда и следует справедливость формулы.

Предложение 3. *Пусть F — ячейка и L — ее аффинный носитель.*

i) *Множество F является открытой и выпуклой частью аффинного подпространства L в E.*

ii) *Замыкание ячейки F есть объединение F и ячеек размерности, строго меньшей, чем размерность F.*

iii) *В топологическом пространстве L множество F является внутренностью своего замыкания.*

Так как открытое полупространство и любая гиперплоскость выпуклы в E, то формула (2) показывает, что F является пересечением некоторого семейства выпуклых множеств и тем самым само выпукло. Сверх того, пусть a — точка в F и U — ее связная открытая окрестность в E, не пересекающая никакой гиперплоскости из семейства $\mathfrak{N}$ таких $H \in \mathfrak{H}$, что $a \notin H$. Для любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{N}$ имеем тогда $U \subset D_H(a)$, откуда $L \cap U \subset F$ и, следовательно, F открыто в топологическом пространстве L.

Пусть b — точка из $\bar{F} - F$, принадлежащая ячейке F', и $\mathfrak{N}'$ — множество гиперплоскостей $H \in \mathfrak{N}$, проходящих через b. Положим $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N} - \mathfrak{N}'$. Для любой гиперплоскости H из $\mathfrak{N}''$ имеем $b \notin H$ и $b \in \overline{D_H(a)}$, откуда $b \in D_H(a)$ и, следовательно, $D_H(b) = D_H(a)$. Поэтому по определению ячейки

$$F' = L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}'} H \bigcap_{H \in \mathfrak{N}''} D_H(a), \tag{4}$$

а из равенства (3) следует, что

$$\bar{F} = L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}'} \overline{D_H(a)} \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}''} \overline{D_H(a)}, \tag{5}$$

откуда $F' = \bar{F}$. Случай $\mathfrak{N}' = \varnothing$ невозможен, ибо тогда из равенств (2) и (4) следовало бы, что $F = F'$, вопреки предположению $b \notin F$ и $b \in F'$. Носителем ячейки F' является множество $L' = L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{R}'} H$. Но $a \in L$ и $a \notin H$ для H из $\mathfrak{R}'$, откуда следует, что $L' \neq L$ и, наконец, $\dim L' < \dim L$; иначе говоря, $\dim F' < \dim F$. Этим доказано утверждение (ii).

Пусть H — гиперплоскость из $\mathfrak{R}'$ и D — открытое полупространство, ограниченное H и отличное от $D_H(a)$. Тогда $b \in H \cap L$ и $D \cap L$ — полупространство в L, ограниченное гиперплоскостью $H \cap L$ в L. Следовательно, любая окрестность точки b в L пересекает $D \cap L$, а поскольку $D \cap L$ не пересекается с $\bar{F}$, как видно из (3), то мы получаем, что точка b из $\bar{F} - F$ не может быть внутренней точкой $\bar{F}$ в топологическом пространстве L. Так как F открыто в L, то мы получаем утверждение (iii). Ч. Т. Д.

Следствие. *Пусть F и F' — две ячейки. Если $\bar{F} = \bar{F}'$, то F и F' совпадают.*

Это вытекает из утверждения (iii).

Предложение 4. *Пусть F — ячейка и L — аффинное подпространство пространства E — пересечение некоторого множества гиперплоскостей из $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество гиперплоскостей $H \in \mathfrak{H}$, не содержащих L. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует ячейка F' с носителем L, пересекающая $\bar{F}$;*

(ii) *существует ячейка F' с носителем L, содержащаяся в $\bar{F}$;*

(iii) *существует точка x в $L \cap \bar{F}$, не принадлежащая никакой гиперплоскости из $\mathfrak{R}$.*

Если эти условия выполнены, то $L \cap D_{\mathfrak{R}}(F)$ — единственная ячейка с носителем L, содержащаяся в $\bar{F}$.

(i)$\Rightarrow$(ii). Так как $\bar{F}$ — объединение ячеек (предложение 3, (ii)), то любая ячейка, пересекающая $\bar{F}$, пересекает некоторую ячейку, содержащуюся в $\bar{F}$, и, значит, с ней совпадает.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Для любой точки x из F' утверждение (iii) выполнено, ибо гиперплоскость из $\mathfrak{H}$, содержащая x, содержит F' и, следовательно, L.

(iii)$\Rightarrow$(i). Пусть x — точка, удовлетворяющая (iii), и пусть F' — ячейка, содержащая x. Ясно, что F' пересекает $\bar{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $x \notin H$, если $H \in \mathfrak{R}$, и очевидно, что $x \in H$, если $H \notin \mathfrak{R}$. Следовательно, носитель ячейки F' есть пересечение гиперплоскостей из $\mathfrak{H} - \mathfrak{R}$ и совпадает с L.

Наконец, пусть F' — ячейка с носителем L, содержащаяся в $\bar{F}$, и пусть x — точка в F'. Так как никакая гиперплоскость из $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$ не проходит через x, то предложение 1 показывает, что существует выпуклая открытая окрестность U точки x, которая не пересекается ни с одной из гиперплоскостей семейства $\mathfrak{N}$. Поскольку x принадлежит замыканию ячейки F, $U \cap F \neq \varnothing$. Далее, $\mathfrak{N}$ суть множество гиперплоскостей $H \in \mathfrak{H}$, не содержащих F', и для любой H из $\mathfrak{N}$ имеем $D_H(x) = D_H(U) = D_H(U \cap F) = D_H(F)$. Теперь формула (2) дает равенство

$$F' = L \cap D_{\mathfrak{N}}(F). \qquad \text{Ч. Т. Д.}$$

3. *Камеры*

Определение 2. *Камерой пространства E относительно $\mathfrak{H}$* (или просто *камерой*, если ясно, что за $\mathfrak{H}$ имеется в виду) *называется любая ячейка в E относительно $\mathfrak{H}$, которая не принадлежит никакой гиперплоскости из $\mathfrak{H}$.*

Пусть U — открытое множество в E, состоящее из точек, которые не лежат ни на какой гиперплоскости из $\mathfrak{H}$. Так как гиперплоскость из $\mathfrak{H}$ не может пересекать ячейку и ее не содержать, то камерами будут ячейки, содержащиеся в U. Любая камера является открытым и выпуклым (а следовательно, и связным) подмножеством E по предложению 3, (i). Поскольку камеры образуют разбиение множества U, они совпадают с *связными компонентами* в U. Любое выпуклое подмножество A в U связно и, следовательно, содержится в какой-нибудь камере, вполне определенной, если A непусто. Ясно, что камеры — это ячейки с носителем E, и предложение 3, (iii) показывает, что каждая камера является внутренностью своего замыкания. Наконец, пусть C — камеры и A — непустое подмножество в C. Из формул (2) и (3) получаем

$$C = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} D_H(A) = D_{\mathfrak{H}}(A), \qquad \bar{C} = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} \overline{D_H(A)}, \tag{6}$$

поскольку $D_H(A) = D_H(a)$ для любой точки $a \in A$.

Предложение 5. *Пусть C — непустое подмножество в E. Предположим, что существует подмножество $\mathfrak{H}'$ множества $\mathfrak{H}$, обладающее следующими двумя свойствами:*

а) *каждой гиперплоскости H из $\mathfrak{H}'$ можно сопоставить открытое полупространство D_H, ограниченное гиперплоскостью H и такое, что $C = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}'} D_H$;*

б) *множество C не пересекается с гиперплоскостями из $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}'$.*

При этих условиях C является камерой в E относительно $\mathfrak{H}$ и $D_H = D_H(C)$ для любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{H}$.

Свойства а) и б) показывают, что C выпукло в U. Стало быть, существует камера C' с $C \subset C'$. Так как $C \subset D_H$, то $D_H = D_H(C)$ для любой гиперплоскости H из $\mathfrak{H}'$. Отсюда получаем $C = D_{\mathfrak{H}'}(C) \supset D_{\mathfrak{H}}(C)$, поскольку $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}$. По формуле (6) $D_{\mathfrak{H}}(C) = C'$ и $C \supset C'$, так что $C = C'$.

Предложение 6. *Любая точка пространства E принадлежит замыканию хотя бы одной камеры.*

Если E состоит из одной точки, утверждение очевидно. В противном случае пусть $a \in E$ и $H_1, \ldots, H_m$ — гиперплоскости из $\mathfrak{H}$, содержащие a. Так как $\mathfrak{H}$ локально конечно, то существует окрестность V точки a, которую не пересекают гиперплоскости из $\mathfrak{H}$, отличные от $H_1, \ldots, H_m$. Пусть D — прямая, проходящая через a и не содержащаяся ни в какой из гиперплоскостей H_i. Если $x \in D$, $x \neq a$, и x принадлежит достаточно малой окрестности точки a, то открытый отрезок $]ax[$ содержится в V и не пересекает никакой H_i. В таком случае $]ax[\subset U$. Ввиду связности $]ax[$ содержится в некоторой камере C, откуда $a \in \overline{C}$.

Предложение 7. *Пусть L — аффинное подпространство в E и Ω — открытое непустое подмножество в L.*

(i) *Существует точка a в Ω, через которую не проходит ни одна гиперплоскость из $\mathfrak{H}$, не содержащая L.*

(ii) *Если L — гиперплоскость и $L \notin \mathfrak{H}$, то существует камера, пересекающая Ω.*

(iii) *Если L — гиперплоскость и $L \in \mathfrak{H}$, то существует точка a в Ω, не принадлежащая никакой гиперплоскости $H \neq L$ из $\mathfrak{H}$.*

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество гиперплоскостей H с $H \in \mathfrak{H}$ и $L \not\subset H$ и через $\mathfrak{L}$ — множество гиперплоскостей *в аффинном пространстве* L вида $L \cap H$, где $H \in \mathfrak{N}$. Ясно, что $\mathfrak{L}$ — локально конечное множество гиперплоскостей в L, и предложение 6 показывает, что Ω пересекает некоторую камеру Γ в L относительно $\mathfrak{L}$. Если a — точка в $\Gamma \cap \Omega$, то $a \notin H$ для всех H, откуда следует утверждение (i).

Предположим, что L — гиперплоскость. Всякая гиперплоскость, содержащая L, с ней совпадает. Таким образом, мы должны различать два случая:

а) $L \notin \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$ и $a \notin H$ для всех $H \in \mathfrak{H}$. Следовательно, a принадлежит некоторой камере в E относительно $\mathfrak{H}$. Отсюда следует утверждение (ii).

б) $L \in \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} - \{L\}$, откуда следует (iii).

4. Стенки и грани

Определение 3. *Пусть C — камера в E. Назовем гранью камеры C любую ячейку, содержащуюся в замыкании C и имеющую в качестве носителя гиперплоскость. Назовем стенкой камеры C любую гиперплоскость, которая является носителем грани камеры C.*

Каждая стенка камеры C принадлежит $\mathfrak{H}$. Предложение 4 показывает, что гиперплоскость $L \in \mathfrak{H}$ является стенкой камеры C в том и только том случае, когда $C \neq D_{\mathfrak{H}-\{L\}}(C)$. Далее, всякая стенка камеры C является носителем единственной грани камеры C.

Предложение 8. *Любая гиперплоскость H из $\mathfrak{H}$ является стенкой хотя бы одной камеры.*

По предложению 7, (iii) существует точка a в H, не лежащая ни в какой гиперплоскости $H' \neq H$ из $\mathfrak{H}$. По предложению 6 существует камера C, такая, что $a \in \bar{C}$. Предложение 4 показывает тогда, что H является стенкой камеры C.

Предложение 9. *Пусть C — камера и $\mathfrak{M}$ — множество ее стенок. Тогда $C = D_{\mathfrak{M}}(C)$ и любое подмножество $\mathfrak{L}$ множества $\mathfrak{H}$, для которого $C = D_{\mathfrak{L}}(C)$, содержит $\mathfrak{M}$. Для того чтобы подмножество F замыкания $\bar{C}$ было ячейкой, необходимо и достаточно, чтобы оно было ячейкой в E относительно семейства $\mathfrak{M}$.*

а) Пусть $\mathfrak{L}$ — подмножество в $\mathfrak{H}$, такое, что $C = D_{\mathfrak{L}}(C)$. Рассмотрим гиперплоскость L из $\mathfrak{H}$, но не из $\mathfrak{L}$. Пусть $\mathfrak{N}$ — множество гиперплоскостей $H \neq L$ из $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{N}$, откуда $C = D_{\mathfrak{N}}(C)$, и L не пересекает $D_{\mathfrak{N}}(C)$. По предложению 4 (импликация (i)$\Rightarrow$(iii)) гиперплоскость L не является стенкой камеры C. Следовательно, каждая стенка камеры C принадлежит $\mathfrak{L}$.

б) По-прежнему предполагаем $C = D_{\mathfrak{L}}(C)$. Пусть H — гиперплоскость из $\mathfrak{L}$, которая не является стенкой камеры C; положим $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} - \{H\}$. Согласно предложению 4 (импликация (iii)$\Rightarrow$(i)), выпуклое множество $D_{\mathfrak{L}'}(C)$ не пересекает H, значит, $D_{\mathfrak{L}'}(C) \subset D_H(C)$ и $C = D_{\mathfrak{L}'}(C)$. Проведя индукцию по числу элементов множества $\mathfrak{F}$, получим, что если $\mathfrak{F}$ — конечное подмножество в $\mathfrak{L}$, не содержащее ни одной стенки камеры C, то $C = D_{\mathfrak{L}-\mathfrak{F}}(C)$.

в) Пусть a—точка в C. Тогда очевидно, что $C \subset D_{\mathfrak{M}}(a)$. Пусть a' — точка в $D_{\mathfrak{M}}(a)$. Поскольку замкнутый отрезок $[aa']$ компактен, множество $\mathfrak{F}$ гиперплоскостей $H \in \mathfrak{H}$, пересекающих

$[aa']$, конечно. Так как a и a' лежат строго по одну сторону от каждой стенки камеры C, то никакая стенка камеры C не принадлежит $\mathfrak{F}$. Поэтому из б) следует, что $C = D_{\mathfrak{H}-\mathfrak{F}}(C)$. Так как $a' \in D_{\mathfrak{H}-\mathfrak{F}}(a)$, то $a' \in C$. Таким образом, мы убедились, что $D_{\mathfrak{M}}(a) \subset C$, а это доказывает первую часть предложения.

г) Для доказательства последнего утверждения предложения достаточно, очевидно, показать, что подмножество F из $\bar{C}$, являющееся ячейкой в E относительно $\mathfrak{M}$, будет также ячейкой в E относительно $\mathfrak{H}$ или что любая гиперплоскость $H \in \mathfrak{H}$, пересекающая F, содержит F. Пусть, таким образом, H — гиперплоскость, пересекающая F, но не содержащая F. Будучи открытым в своем аффинном носителе, F не лежит целиком по одну сторону от H. Значит, и $\bar{C}$ не лежит целиком по одну сторону от H, и, следовательно, гиперплоскость H не принадлежит $\mathfrak{H}$. Этим заканчивается доказательство.

Замечания. 1) Формула (6) и предложение 9 показывают, что замыканием камеры C служит пересечение замкнутых полупространств, ограниченных стенками камеры C и содержащих C.

2) Пусть F — ячейка с гиперплоскостью L в качестве носителя. Мы хотим показать, что существуют две камеры, для которых F — грань. Пусть $\mathfrak{N}$ — множество гиперплоскостей $H \neq L$ из $\mathfrak{H}$. Положим $A = D_{\mathfrak{N}}(F)$ и обозначим через D^+ и D^- открытые полупространства, ограниченные L. Множество A открыто и содержит $F \subset L$, а поскольку любая точка из L принадлежит замыканию полупространств D^+ и D^-, множества $C^+ = A \cap D^+$ и $C^- = A \cap D^-$ непусты. Они являются камерами. Далее, гиперплоскость L пересекает $D_{\mathfrak{N}}(F) = D_{\mathfrak{N}}(C^+)$. Предложение 4 показывает, что L — стенка камеры C^+, а ячейка F, пересекающая $L \cap D_{\mathfrak{N}}(F)$, является гранью C^+. По тем же соображениям F — грань камеры C^-. Наконец, пусть C — камеры с гранью F, и предположим, например, что $D^+ = D_L(C)$. Согласно предложению 4, множество $D_{\mathfrak{N}}(C)$ пересекает F и, следовательно, совпадает с $D_{\mathfrak{N}}(F)$. Имеем

$$C = D_{\mathfrak{H}}(C) = D_L(C) \cap D_{\mathfrak{N}}(C) = D^+ \cap D_{\mathfrak{N}}(F) = C^+.$$

5. *Двугранные углы*

Напомним (*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 9, n° 3), что два аффинных подпространства P и P' пространства E называются параллельными, если существует вектор t в T, такой, что $P' = t + P$. Ясно, что отношение „P и P' параллельны" является отношением эквивалентности на множестве аффинных подпространств пространства E.

Лемма 1. *Две непараллельные гиперплоскости имеют непустое пересечение.*

Пусть H и H' — две непараллельные гиперплоскости и $a \in H$, $a' \in H'$. Тогда найдутся две гиперплоскости M и M' векторного пространства T, для которых $H = M + a$ и $H' = M' + a'$. Поскольку H и H' непараллельны, $M \neq M'$, откуда $T = M + M'$. В таком случае существуют $u \in M$ и $u' \in M'$, такие, что $a' - a = u - u'$, и точка $u + a = u' + a'$ принадлежит $H \cap H'$.

Лемма 2. *Пусть H и H' — две различные гиперплоскости в E и f, f' — две аффинные функции на E, такие, что H* (соотв. H') *состоит из точек $a \in E$, в которых $f(a) = 0$* (соотв. $f'(a) = 0$). *Наконец, пусть L — гиперплоскость в E. Предположим, что выполнено одно из следующих условий*:

а) *гиперплоскости H, H' и L параллельны*;

б) *гиперплоскости H и H' не параллельны и $H \cap H' \subset L$.*

Тогда существуют два вещественных числа λ, λ', не равные одновременно нулю и такие, что L состоит из $a \in E$, в которых обращается в нуль аффинная функция $g = \lambda . f + \lambda' . f'$.

Утверждение леммы тривиально, если $L = H$, и мы можем предположить, что существует точка a на L, $a \notin H$. Положим $\lambda = f'(a)$, $\lambda' = -f(a)$ и

$$g = \lambda . f + \lambda' . f'.$$

Тогда $\lambda' \neq 0$, поскольку $a \notin H$. Далее, ввиду $H \neq H'$ существует точка $b \in H$, не лежащая на H', и, значит, $f(b) = 0$, $f'(b) \neq 0$, так что $g(b) = -f(a) . f'(b)$ отлично от нуля. Множество L_1 точек, в которых обращается в нуль аффинная функция $g \neq 0$, будет гиперплоскостью в E, причем $a \in L_1$, ибо $g(a) = 0$.

а) Предположим, что H и H' параллельны. В любой точке пересечения $L_1 \cap H$ обращаются в нуль функции g и f, а следовательно, и f', поскольку $\lambda' \neq 0$. Значит, эта точка принадлежит и H'. Но так как H и H' параллельны и различны, то они не пересекаются и, стало быть, $L_1 \cap H = \varnothing$. Лемма 1 показывает, что L_1 параллельна H. Но $a \in L$ и $a \in L_1$, поэтому $L = L_1$.

б) Предположим, что H и H' не параллельны. По лемме 1 существует точка c в $H \cap H'$. Снабдим E структурой векторного пространства, выбрав в качестве начала точку c. Тогда

$H \cap H'$ будет векторным подпространством коразмерности 2 в E и, поскольку $a \notin H$, векторное подпространство M в E, порожденное $H \cap H'$ и a, будет гиперплоскостью. Так как $H \cap H' \subset L \cap L_1$ и $a \in L \cap L_1$, то $M \subset L \cap L_1$, откуда $M = L = L_1$.

Предложение 10. *Пусть C — камера, H и H' — две ее стенки и L — гиперплоскость, пересекающая $D_H(C) \cap D_{H'}(C)$. Предположим, что H отлична от H' и что выполнено одно из следующих условий:*

а) *гиперплоскости H, H' и L параллельны;*

б) *гиперплоскости H и H' не параллельны и $H \cap H' \subset L$. Тогда L пересекает C.*

Пусть b (соотв. b') — точка на грани камеры C с носителем H (соотв. H'). Совершенно очевидно, что любая точка отрезка $[bb']$, отличная от b и b', принадлежит камере C.

Рассмотрим аффинную функцию f, обращающуюся в нуль на H и такую, что $f(x) > 0$ для x из $D_H(C)$. Введем аналогичную аффинную функцию f' для гиперплоскости H'. Применяя лемму 2, мы можем найти числа λ, λ' и аффинную функцию g, обладающие указанными там свойствами. Тогда $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$ и для любой точки x из $L \cap D_H(C) \cap D_{H'}(C)$ будет $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, а $\lambda . f(x) + \lambda' . f'(x) = 0$, откуда $\lambda\lambda' < 0$. Сверх того $g(b) = \lambda' . f'(b)$ и $g(b') = \lambda . f(b')$, а так как $f(b') > 0$, $f'(b) > 0$, то $g(b) . g(b') < 0$. Точки b и b' лежат строго по разные стороны от гиперплоскости L, и существует точка c из L, лежащая на $[bb']$ и отличная от b, b', а потому принадлежащая C.

6. Примеры: симплициальные конусы и симплексы

а) Пусть a — точка пространства E и $(e_1, \ldots, e_d)$ — базис в T. Любая точка из E записывается тогда однозначно в виде

$$x = a + \xi_1 . e_1 + \ldots + \xi_d . e_d, \tag{7}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_d$ — вещественные числа. Обозначим через e'_i аффинную функцию на E, которая при любом $x \in E$, записанном в виде (7), принимает значение ξ_i. Обозначим, далее, через H_i гиперплоскость, состоящую из тех x, для которых $e'_i(x) = 0$, а через $\mathfrak{H}$ множество гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_d$. Для любого подмножества J множества $I = \{1, 2, \ldots, d\}$ положим $H_J = \bigcap_{i \in J} H_i$. Для любой последовательности $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ чисел, равных 0, 1 или -1, обозначим через $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ множество тех $x \in E$, для которых $e'_i(x)$ имеет тот же знак (*Общ. топ.*, гл. IV, § 3, n°2), что и ε_i, при всех i из I. Ясно, что ячейками в E относительно $\mathfrak{H}$ будут множества $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ и что эти множества попарно различны. Носителем ячейки $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ служит H_J, где J — множество $i \in I$, таких, что $\varepsilon_i = 0$. В частности, камерами будут множества вида $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$, где каждое из чисел ε_i равно 1 или —1.

Множество $C = F(1, \ldots, 1)$, состоящее из x с $e'_i(x) > 0$ при любом $i \in I$, является камерой, которая называется *открытым симплициальным конусом с вершиной* a, *определенным базисом* $(e_1, \ldots, e_d)$. Его замыкание при $d \geqslant 1$ состоит из точек x, таких, что $e'_i(x) \geqslant 0$ для любого $i \in I$. В противном случае замыкание пусто. Для любого подмножества $J \subset I$ обозначим через C_J множество точек x пространства E, для которых $e'_i(x) = 0$ при $i \in J$ и $e'_i(x) > 0$ при $i \in I - J$. Тогда C_J — ячейка с носителем H_J, являющаяся открытым симплициальным конусом с вершиной a в аффинном пространстве H_J. Далее, $\bar{C} = \bigcup_{J \subset I} C_J$. В частности, стенками камеры C служат гиперплоскости H_i для $i \in I$, а ее грань, содержащаяся в H_i, совпадает с $C_{\{i\}}$.

Ни одно из множеств H_i, H_J, C, C_J и $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ не изменится, если перейти от базиса $(e_1, \ldots, e_d)$ к базису $(\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_d e_d)$ с $\lambda_i > 0$ при всех i.

б) Пусть теперь в E задана аффинно свободная система точек, скажем $(a_0, a_1, \ldots, a_d)$. Известно, что каждая точка в E однозначно записывается в виде $x = \xi_0 \cdot a_0 + \ldots + \xi_d \cdot a_d$, где $\xi_0, \ldots, \xi_d$ — вещественные числа и $\xi_0 + \ldots + \xi_d = 1$ (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 9, n° 3). Определим аффинные функции $f_0, \ldots, f_d$, полагая, что функция f_i ставит в соответствие каждой точке x число ξ_i из предыдущей формулы. Обозначим через H_i гиперплоскость в E, определенную уравнением $f_i(x) = 0$, а через $\mathfrak{H}$ множество гиперплоскостей H_0, $H_1, \ldots, H_d$. Наконец, положим $I = \{0, 1, \ldots, d\}$. Назовем *открытым симплексом с вершинами* $a_0, \ldots, a_d$ множество C точек x из E, таких, что $f_i(x) > 0$ для любого $i \in I$. Это одна из камер в E относительно $\mathfrak{H}$. Замыкание $\bar{C}$ камеры C состоит из точек $x \in E$, таких, что $f_i(x) \geqslant 0$ для любого $i \in I$. Это выпуклая оболочка конечного множества $\{a_0, \ldots, a_d\}$, и легко видеть, что экстремальными точками $\bar{C}$ будут $a_0, \ldots, a_d$.

Для любого подмножества $J \subset I$, отличного от I, положим $H_J = \bigcap_{i \in J} H_i$ и обозначим через C_J множество точек x из E, таких, что $f_i(x) > 0$ при $i \in K$ и $f_i(x) < 0$ при $i \in I - J$. Множество C_J является открытым симплексом в аффинном пространстве H_J с вершинами a_i для $i \in I - J$. Имеем $C_\varnothing = C$, $\bar{C} = \bigcup_{J \neq I} C_J$ и $C_J \neq C_{J'}$ для $J \neq J'$. Далее, C_J — ячейка с носителем H_J. В частности, стенками камеры C служат гиперплоскости $H_0, \ldots, H_d$, а $C_{\{i\}}$ — грань, лежащая в H_i.

Для всякого непустого подмножества $K \subset I$ обозначим через B_K множество точек x из E, таких, что $f_i(x) > 0$ при $i \in K$ и $f_i(x) < 0$ при $i \in I - K$. Множества B_K будут камерами в E относительно $\mathfrak{H}$, причем $B_I = C$. Легко видеть, что $\bar{C}$ компактно. Напротив, если K — отличное от I подмножество в I мощности p, то камера B_K содержит последовательность точек x_n, определенную при $n \geqslant 2$ условиями

$$f_i(x_n) = \begin{cases} n & \text{для } i \in K, \\ (1 - pn)/(d + 1 - p) & \text{для } i \in I - K. \end{cases}$$

Этим доказано, что B_K не является относительно компактным.

§ 2. Отражения

В этом параграфе символом K обозначается коммутативное поле, характеристика которого начиная с n° 2 будет предполагаться отличной от 2. Обозначим через V векторное пространство над K.

1. Псевдоотражения

Определение 1. *Эндоморфизм s векторного пространства V называется псевдоотражением, если эндоморфизм $1 - s$ имеет ранг 1.*

Пусть s — псевдоотражение в V и D — образ $1 - s$. По определению размерность D равна 1. Поэтому при заданном векторе $a \neq 0$ из D существует ненулевая линейная форма a^* на V, такая, что $x - s(x) = \langle x, a^* \rangle . a$ для любого x из V.

Обратно, пусть заданы вектор $a \neq 0$ в V и линейная форма $a^* \neq 0$ на V; формула

$$s_{a, a^*}(x) = x - \langle x, a^* \rangle . a \qquad (x \in V) \tag{1}$$

определяет псевдоотражение s_{a, a^*}. Образ эндоморфизма $1 - s_{a, a^*}$ порождается вектором a, а ядром служит гиперплоскость в V, состоящая из x, таких, что $\langle x, a^* \rangle = 0$. Если V^* — дуальное к V пространство, то ясно, что эндоморфизм $s_{a^*, a}$ пространства V^*, сопряженный с s_{a, a^*}, является псевдоотражением, определенным по формуле

$$s_{a^*, a}(x^*) = x^* - \langle x^*, a \rangle . a^* \qquad (x^* \in V^*). \tag{2}$$

Назовем *псевдоотражением (вдоль) ненулевого вектора* a любое псевдоотражение s, для которого a принадлежит образу $1-s$. *Гиперплоскостью псевдоотражения* s назовем ядро эндоморфизма $1-s$, т. е. множество векторов x, таких, что $s(x)=x$.

Предложение 1. *Пусть G — группа и ρ — ее линейное неприводимое представление в векторном пространстве V. Предположим, что существует элемент g группы G, такой, что $\rho(g)$ — псевдоотражение.*

(i) *Любой эндоморфизм пространства V, коммутирующий с $\rho(G)$, есть гомотетия, и ρ абсолютно неприводимо.*

(ii) *Предположим, что V имеет конечную размерность. Пусть B — ненулевая билинейная форма на V, инвариантная относительно $\rho(G)$. Тогда форма B невырождена, симметрична или же антисимметрична и любая билинейная форма на V, инвариантная относительно $\rho(G)$, пропорциональна форме B.*

Пусть u — эндоморфизм пространства V, коммутирующий с $\rho(G)$. Пусть, сверх того, g — элемент группы G, такой, что $\rho(g)$ — псевдоотражение, и D — образ эндоморфизма $1-\rho(g)$. Поскольку D имеет размерность 1 и $u(D)\subset D$, в K существует такой элемент α, что $u-\alpha.1$ равно нулю на D. Ядро N эндоморфизма $u-\alpha.1$ будет тогда векторным подпространством пространства V, устойчивым относительно $\rho(G)$ и ненулевым, поскольку оно содержит D. А так как представление ρ неприводимо, то $N=V$ и $u=\alpha.1$. Вторая часть утверждения (i) вытекает из первой в силу следствия предложения 5 из *Алг.*, гл. VIII, § 13, n° 4.

Пусть N (соотв. N') — подпространство в V, состоящее из x, таких, что $B(x, y)=0$ (соотв. $B(y, x)=0$) для любого вектора y из V. Ввиду инвариантности B относительно $\rho(G)$ оба подпространства N и N' устойчивы относительно $\rho(G)$ и отличны от V, поскольку $B\neq 0$. Но ρ неприводимо, поэтому $N=N'=0$, и, таким образом, форма B невырождена.

Так как V имеет конечную размерность, то всякая билинейная форма на нем имеет вид

$$B'(x, y)=B(u(x), y), \tag{3}$$

где u — надлежащий эндоморфизм пространства V. Если форма B' инвариантна относительно $\rho(G)$, то эндоморфизм u коммутирует с $\rho(G)$. Действительно, пусть x, y — элементы из V и g — элемент группы G. Инвариантность форм B и B'

относительно $\rho(G)$ влечет равенства

$$B(u(\rho(g)(x)), y) = B'(\rho(g(x)), y) = B'(x, \rho(g^{-1})(y)) =$$
$$= B(u(x), \rho(g^{-1})(y)) = B(\rho(g)(u(x)), y),$$

откуда ввиду невырожденности B получаем $u(\rho(g)(x)) = \rho(g)(u(x))$. Согласно (i), в K найдется элемент α, для которого $u = \alpha . 1$, т. е. $B' = \alpha . B$.

Применяя этот результат, в частности, к билинейной форме $B'(x, y) = B(y, x)$, получаем $B(y, x) = \alpha . B(x, y) = \alpha^2 . B(x, y)$ *для* любых двух векторов x, y из V, а поскольку форма B ненулевая, $\alpha^2 = 1$, откуда $\alpha = 1$ или же $\alpha = -1$. Таким образом, форма B либо симметрична, либо антисимметрична.

2. *Отражения*

Напомним, что впредь, если специально не оговорено противное, характеристика поля K предполагается отличной от 2. *Отражением* в пространстве V мы называем любое псевдоотражение s, для которого $s^2 = 1$. Если s — какое-нибудь отражение, то обозначим через V_s^+ ядро эндоморфизма $s - 1$, а через V_s^- ядро эндоморфизма $s + 1$.

Предложение 2. *Пусть s — эндоморфизм пространства V.*

(i) *Если s — отражение, то V — прямая сумма гиперплоскости V_s^+ и прямой V_s^-.*

(ii) *Обратно, пусть V — прямая сумма гиперплоскости H и прямой D, причем $s(x) = x$ и $s(y) = -y$ для $x \in H$ и $y \in D$. Тогда s — отражение и $H = V_s^+$, а $D = V_s^-$. Наконец, D совпадает с образом эндоморфизма $1 - s$.*

(i) Если s — отражение, то V_s^+ — гиперплоскость. Если x принадлежит $V_s^+ \cap V_s^-$, то $x = s(x) = -x$, откуда $x = 0$, ибо характеристика поля K отлична от 2. Наконец, для любого x из V вектор $x' = s(x) + x$ (соотв. $x'' = s(x) - x$) принадлежит V_s^+ (соотв. V_s^-), поскольку $s^2 = 1$, и мы имеем $2x = x' - x''$. Поэтому V есть прямая сумма подпространств V_s^+ и V_s^-, причем V_s^- имеет обязательно размерность 1, ибо V_s^+ — гиперплоскость.

(ii) В соответствии с сделанными предположениями каждый элемент пространства V единственным образом записывается в виде $v = x + y$, где $x \in H$, $y \in D$ и $s(v) = x - y$. Отсюда немедленно вытекает утверждение (ii).

Следствие. *Если пространство V конечномерно, то определитель всякого отражения равен -1.*

Пусть s — отражение в пространстве V. Согласно предложению 2, (i), существует базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V, для которого $s(e_1) = e_1, \ldots, s(e_{n-1}) = e_{n-1}$ и $s(e_n) = -e_n$, откуда следует, что $\det s = -1$.

Предложение 3. *Пусть s — отражение в V.*

(ii) *Для того чтобы подпространство V' пространства V было устойчиво относительно s, необходимо и достаточно, чтобы либо $V_s^- \subset V'$, либо $V' \subset V_s^+$.*

(iii) *Для того чтобы эндоморфизм u пространства V коммутировал с s, необходимо и достаточно, чтобы подпространства V_s^+ и V_s^- были устойчивы относительно u.*

(i) Если $V' \subset V_s^+$, то $s(x) = x$ для всех x из V', откуда $s(V') \subset V'$. Предположив, что $V_s^- \subset V'$, для любого x из V' будем иметь $s(x) - x \in V_s^- \subset V'$, откуда $s(x) \in V'$ и снова $s(V') \subset V'$. Обратно, предположим, что $s(v') \subset V'$. Если $V' \not\subset V_s^+$, то существует x в V', для которого $s(x) \neq x$. Отличный от нуля вектор $a = s(x) - x$ принадлежит прямой V_s^- и, следовательно, ее порождает. Так как $a \in V'$, то $V_s^- \subset V'$.

(ii) Предположим сначала, что u коммутирует с s. Если x — вектор, такой, что $s(x) = \varepsilon . x$ (где $\varepsilon = \pm 1$), то $s(u(x)) = u(s(x)) = \varepsilon . u(x)$ и, следовательно, подпространства V_s^+ и V_s^- устойчивы относительно u. Обратно, предположим, что V_s^+ и V_s^- устойчивы относительно u. Ясно, что тогда эндоморфизм $us - su$ равен нулю на V_s^+ и V_s^-, а так как V — прямая сумма V_s^+ и V_s^-, то $us - su = 0$.

Следствие. *Для того чтобы два различных отражения s и u были перестановочны, необходимо и достаточно, чтобы $V_s^- \subset V_u^+$ и $V_u^- \subset V_s^+$.*

Действительно, если $V_s^- \subset V_u^+$ и $V_u^- \subset V_s^+$, то предложение 3, (i) показывает, что V_u^+ и V_u^- устойчивы относительно s, и тем самым $su = us$ в силу утверждения (ii) предложения 3.

Обратно, если $su = us$, то в силу (ii) подпространство V_s^- устойчиво относительно u; утверждение же (i) показывает, что здесь возможны только два случая:

a) $V_u^- \subset V_s^-$. Оба эти пространства, имея размерность 1, совпадают, и поэтому $V_s^- \not\subset V_u^+$. Так как V_u^+ устойчиво относительно s, то $V_u^+ \subset V_s^+$, и эти гиперплоскости совпадают. Но тогда $s = u$, а это по условию исключено.

б) $V_s^- \subset V_u^+$. Образ эндоморфизма $1 - s$ тогда содержится в ядре эндоморфизма $1 - u$, откуда $(1 - u).(1 - s) = 0$. Так как u, s коммутируют, то и $(1 - s).(1 - u) = 0$, т. е. $V_u^- \subset V_s^+$.

Замечание. Пусть $a \neq 0$ в V и a^* — ненулевая линейная форма на V. Из формулы (1) получаем

$$s_{a,\,a^*}^2(x) = x + (\langle a, a^* \rangle - 2)\langle x, a^* \rangle . a,$$

и, следовательно, $s_{a,\,a^*}$ *является отражением в том и только в том случае, если* $\langle a, a^* \rangle = 2$. При этом $s_{a,\,a^*}(a) = -a$.

3. Ортогональные отражения

Предположим, что V конечномерно. Пусть B — невырожденная билинейная форма на V. Согласно предложению 4 из *Алг.*, гл. IX, § 6, n° 3, для того чтобы отражение s в V оставляло форму B инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы подпространства V_s^+ и V_s^- пространства V были взаимно ортогональны относительно B. В этом случае они будут неизотропны. Далее, для любой неизотропной гиперплоскости H в V существует, и притом единственное, отражение s, сохраняющее B и тождественное на H. Это не что иное, как *симметрия относительно* H (*Алг.*, гл. IX, § 6, n° 3). Если a — ненулевой вектор, ортогональный к H, то $B(a, a) \neq 0$, и отражение s задается формулой

$$s(x) = x - 2\frac{(B(x, a))}{B(a, a)} \cdot a \text{ для любого } x \in V, \tag{4}$$

что следует из формулы (6) в *Алг.*, гл. IX, § 6, n° 4. Преобразование s называют также *ортогональным отображением относительно гиперплоскости* H.

Предложение 4. *Пусть V — конечномерное пространство, B — невырожденная симметрическая билинейная форма на V, X — подпространство в V и X^0 — ортогональное дополнение к X относительно формы B. Пусть, наконец, s — ортогональное отражение относительно неизотропной гиперплоскости H в V. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *X устойчиво относительно s;*
(ii) *X^0 устойчиво относительно s;*
(iii) *H содержит X или X^0.*

Имеем $V_s^+ = H$, а по упомянутым выше соображениям V_s^- совпадает с ортогональным дополнением H^0 к H относительно B. Для устойчивости X относительно s в силу предложения 3, (i) необходимо и достаточно, чтобы $X \subset H$ или $H^0 \subset X$. Но, согласно следствию 1 предложения 4 из *Алг.*, гл. IX, § 1, n° 6, включение $H^0 \subset X$ эквивалентно включению $X^0 \subset H$. Тем самым доказана эквивалентность (i) и (iii). Эквивалентность (ii) и (iii) получается, если поменять местами X и X^0, поскольку $(X^0)^0 = X$.

4. *Ортогональные отражения в аффинном евклидовом пространстве*

Сохраним обозначения предыдущего пункта. Пусть E — аффинное пространство, для которого V — пространство переносов. Задание формы B на V наделяет E структурой *евклидова пространства* (*Алг.*, гл. IX, § 6, n° 6).

Пусть H — неизотропная гиперплоскость в E. Симметрия относительно H (*Алг.*, гл. IX, § 6, n° 6) называется также *ортогональным отражением относительно* H. Мы будем обозначать его через s_H. Тогда $s_H^2 = 1$ и s_H — единственное *перемещение* (*там же*, определение 3) пространства E, отличное от тождественного и оставляющее на месте все элементы гиперплоскости H. Автоморфизм пространства V, ассоциированный с s_H, есть ортогональное отражение относительно направляющей гиперплоскости для H (которая является неизотропной гиперплоскостью в V).

Любой элемент $x \in E$ однозначно записывается в виде $x = h + v$ с $h \in H$ и $v \in V$, ортогональным к H. Имеем

$$s_H(h+v) = h - v.$$

Предложение 5. *Пусть H и H' — две параллельные и неизотропные гиперплоскости в E. Тогда существует единственный вектор $v \in V$, ортогональный к H и такой, что $H' = H + v$. Перемещение $s_H s_{H'}$ есть перенос на вектор $2v$.*

Существование и единственность вектора v очевидны. Автоморфизм пространства V, ассоциированный с $s_{H'} s_H$, тождествен, поэтому $s_{H'} \cdot s_H$ — перенос. С другой стороны, если $a \in H'$, то $a - v \in H$ и

$$s_{H'} s_H (a - v) = s_{H'}(a - v) = a + v = (a - v) + 2v,$$

а это показывает, что $s_{H'} s_H$ — перенос на вектор $2v$.

Следствие. *Пусть H и H' — две параллельные гиперплоскости, отличные друг от друга и неизотропные. Если характеристика поля K равна нулю* (соотв. $p > 0$, $p \neq 2$), *то группа перемещений пространства E, порожденная s_H,* *и* $s_{H'}$, *является бесконечной* (соотв. *порядка* $2p$) *диэдральной группой.*

В самом деле, согласно предложению 2 из n°2, § 1 гл. IV, достаточно проверить, что $s_{H'}s_H$ имеет бесконечный порядок (соотв. порядок p), а это очевидно.

Замечание. Вернемся к обозначениям предложения 5 и предположим вдобавок, что $K = \mathbf{R}$. Пусть $s = s_H$ и $s' = s_{H'}$. Пусть, далее, H_n — гиперплоскость $H + n.v$ и C_n — множество точек из E вида $a + \xi.v$, где $a \in H$ и $n < \xi < n+1$. Тогда C_n — открытые связные множества, образующие разбиение множества $E - \bigcup\limits_n H_n$. Следовательно, это *камеры*, определенные системой $\mathfrak{H} = (H_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ в E. Перенос $(s's)^n$ переводит камеру $C = C_0$ в камеру C_{2n}, а так как $s(C_0) = C_1$, то $(s's)^n s(C) = C_{2n-1}$. Таким образом, *диэдральная группа* W, *порожденная элементами* s *и* s', *действует просто транзитивным образом на камерах* C_n. Покажем, далее, что *если камеры* C *и* $w(C)$ *лежат по разные стороны от гиперплоскости* H (для $w \in W$), *то* $l(sw) = l(w) - 1$ (длина рассматривается относительно системы образующих $S = \{s, s'\}$ (гл. IV, § 1, n° 1). Действительно, тогда $w(C) = C_n$ с $n < 0$. Если $n = -2k$, то $w = (ss')^k$ и $sw = (s's)^{k-s} s'$, откуда $l(w) = 2k$ и $l(sw) = 2k - 1$ (гл. IV, § 1, n° 2, *замечание*). Если $n = -2k - 1$, то $w = (ss')^k s$ и $sw = (s's)^k$, откуда $l(w) = 2k + 1$, а $l(sw) = 2k$.

5. Дополнения о вращениях на плоскости

В этом n° через V будет обозначаться вещественное векторное пространство размерности 2, снабженное *скалярным произведением* (т. е. *невырожденной* положительной симметрической билинейной формой) и *ориентацией*. Меры углов будут браться относительно основания 2π; поэтому главной мерой угла между полупрямыми (соотв. прямыми) является вещественное число θ, такое, что $0 \leqslant \theta < 2\pi$ (соотв. $0 \leqslant \theta < \pi$) (*Общ. топ.*, гл. VIII, § 2, n° 3 и 6). Для любого вещественного числа θ назовем, допуская вольность речи, углом θ угол, мера которого равна θ, и обозначим через ρ_θ вращение на угол θ (*Алг.*, гл. IX, § 10, n° 3).

Предложение 6. *Пусть* s *— ортогональное отражение относительно прямой* D *в* V. *Если* Δ *и* Δ' *— две полупрямые с началом* 0 (соотв. *две прямые, проходящие через* 0) *пространства* V, *то*

$$(\widehat{s(\Delta),\ s(\Delta')}) \equiv -(\widehat{\Delta,\ \Delta'}) \pmod{2\pi} \quad (\text{соотв.} \pmod{\pi}).$$

Пусть u — вращение, переводящее Δ и Δ'. Так как su — ортогональное преобразование в V с определителем -1, то оно будет отражением и поэтому $(su)^2 = 1$. Следовательно, $u^{-1} = sus^{-1}$ переводит $s(\Delta)$ в $s(\Delta')$, откуда и следует предложение.

Следствие. *Пусть D и D' — две прямые в V и θ — мера угла $(\widehat{D, D'})$. Тогда $s_{D'}s_D = \rho_{2\theta}$.*

Известно, что $s_{D'}s_D$ — вращение, поскольку его определитель равен 1. Пусть Δ и Δ' — полупрямые с началом 0, содержащиеся в D и D'. Тогда

$$(\widehat{\Delta, s_{D'}s_D(\Delta)}) \equiv (\widehat{\Delta, s_{D'}(\Delta)}) \equiv (\widehat{\Delta, \Delta'}) + (\widehat{\Delta', s_{D'}(\Delta)}) \equiv$$
$$\equiv (\widehat{\Delta, \Delta'}) + (\widehat{s_{D'}(\Delta'), s_{D'}(\Delta)}) \equiv$$
$$\equiv (\widehat{\Delta, \Delta'}) - (\widehat{\Delta', \Delta}) \equiv 2(\widehat{\Delta, \Delta'}) \pmod{2\pi},$$

что и дает следствие.

Пусть теперь Δ и Δ' — две полупрямые в V, такие, что

$$\Delta \neq \Delta' \quad \text{и } \Delta \neq -\Delta',$$

и пусть s и s' — ортогональные отражения относительно прямых D и D', содержащих Δ и Δ'. Пусть θ — главная мера угла $(\widehat{D, D'})$. Если $\theta \in \pi Q$, то обозначим через m наименьшее целое число $\geqslant 1$, для которого $m\theta \in \pi\mathbf{Z}$. Если $\theta \notin \pi Q$, то положим $m = \infty$. Пусть W — группа, порожденная отражениями s и s'.

Предложение 7. *Группа W — диэдральная группа* (гл. IV, § 1, n°2) *порядка $2m$. Она состоит из вращений $\rho_{2n\theta}$ и произведений $\rho_{2n\theta}s$ для $n \in \mathbf{Z}$. Образы прямых D и D' относительно группы W совпадают с образами прямой D относительно вращений $\rho_{n\theta}$ для $n \in \mathbf{Z}$.*

Следствие предложения 6 показывает, что порядок $s's$ равен m, откуда вытекает первое утверждение. Значит, элементы группы W имеют вид $(s's)^n = \rho_{2n}\theta$ или $(s's)^n s = \rho_{2n\theta}s$. Отсюда получается последнее утверждение, поскольку $D' = \rho_\theta(D)$.

Следствие. *Пусть C — открытый угловой сектор — объединение открытых полупрямых Δ_1 с началом 0, для которых $0 < (\widehat{\Delta, \Delta_1}) < \theta$. Для того чтобы образы прямых D и D' отно-*

сительно W не пересекали C, необходимо и достаточно, чтобы m было конечным и чтобы

$$\theta = \pi/m.$$

Если $m = \infty$, то образ множества чисел $n\theta$ ($n \in \mathbf{Z}$) плотен в $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (*Общ. топ.*, гл. VII, следствие предложения 11). Поэтому объединение образов D относительно W плотно в V и пересекает C. Если m конечно и $\theta = k\pi/m$, $1 < k < m$, где целые k и m взаимно просты, то существует целое число h, такое, что $hk \equiv 1 \mod m$. Тогда $(D, \rho_{h\theta}(D)) \equiv \pi/m \pmod{\pi}$ и $\rho_{h\theta}(D)$ пересекает C. Это показывает, что условия следствия необходимы. Обратное утверждение очевидно.

Замечание. Пусть m конечно и $\theta = \pi/m$. При $n \in \mathbf{Z}$ обозначим через C_n объединение открытых полупрямых Δ_1 с началом 0, таких, что

$$n\theta < (\widehat{\Delta, \Delta_1}) < (n+1)\theta.$$

Тогда C_n для $-m \leqslant n < m$ суть связные открытые множества, образующие разбиение множества $E - \bigcup\limits_n D_n$ (мы полагаем $D_n = \rho_{n\theta}(D)$). Значит, это *камеры*, определенные в E системой m прямых D_n ($1 \leqslant n \leqslant m$). Имеем $C_{2k} = \rho_{2k\theta}(C)$ и $C_{2k-1} = \rho_{2k\theta}s(C)$. Кроме того, $C_n = C$ тогда и только тогда, когда $n \in 2m\mathbf{Z}$. Следовательно, *группа W действует на камеры C_n просто транзитивным образом.*

Докажем, наконец, что *если элемент $w \in W$ таков, что камеры C и $w(C)$ лежат по разные стороны от прямой D, то* $l(sw) = l(w) - 1$ (длина берется относительно системы $S = \{s, s'\}$). Действительно, тогда $w(C) = C_n$, где $-m \leqslant n < 0$. Если $n = -2k$, то $w = (ss')^k$ и $sw = s'(ss')^{k-1}$, откуда $l(w) = 2k$ и $l(sw) = 2k - 1$ (гл. IV, § 1, n°2, *замечание*). Если $n = -2k + 1$, то

$$w = (ss')^{k-1}s \quad \text{и} \quad sw = (s's)^{k-1},$$

откуда $l(w) = 2k - 1$ и $l(sw) = 2k - 2$. Ч. Т. Д.

§ 3. Группы перемещений, порожденные отражениями

В этом параграфе через E обозначается *вещественное* аффинное пространство конечной размерности d и через T — его пространство переносов. Предполагается, что T снабжено скалярным произведением (т. е. *невырожденной* положительной симметрической билинейной формой), обозначаемым через $(t\,|\,t')$. Для любого вектора $t \in T$ положим $\|t\| = (t\,|\,t)^{1/2}$. Функция $d(x, y) = \|x - y\|$ есть расстояние на E, определяющее топологию пространства E (§ 1).

Обозначим через $\mathfrak{H}$ некоторое множество гиперплоскостей в E и через W группу перемещения евклидова пространства E, порожденную ортогональными отражениями s_H относительно гиперплоскостей $H \in \mathfrak{H}$ (§ 2, n° 4). Предположим, что выполнены следующие условия:

(П1) *для любого $w \in W$ и любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{H}$ гиперплоскость $w(H)$ принадлежит множеству $\mathfrak{H}$;*

(П2) *группа W, снабженная дискретной топологией, действует в E собственно разрывно.*

Поскольку E локально компактно, *замечание* в § 4, n° 5 книги *Общ. топ.*, 3-е изд., гл. III, показывает, что условие (П2) эквивалентно следующему:

(П′2) *каковы бы ни были компактные подмножества K и L пространства E, множество элементов $w \in W$, для которых $w(K)$ пересекается с L, конечно.*

1. Предварительные результаты

Лемма 1. *Множество гиперплоскостей $\mathfrak{H}$ локально конечно.*

Действительно, пусть K — компактное подмножество в E. Если гиперплоскость $H \in \mathfrak{H}$ пересекает K, то множество $s_H(K)$ тоже пересекает K, поскольку любая точка из $K \cap H$ остается на месте при действии s_H. Поэтому множество $H \in \mathfrak{H}$, пересекающих K, должно быть конечно в силу условия (П′2).

Таким образом, к E и $\mathfrak{H}$ можно применять определения и результаты § 1. Мы будем называть просто камерами, ячейками, стенками и т. д. относительно W камеры, ячейки, стенки и т. д., определенные в E множеством $\mathfrak{H}$. Перемещение $w \in W$ переставляет между собой камеры, ячейки, стенки и т. д.

Лемма 2. *Пусть C — камера.*

(i) *Для любого $x \in E$ существует элемент $w \in W$, такой, что $w(x) \in \bar{C}$.*

(ii) *Для любой камеры C' существует элемент $w \in W$, такой, что $w(C') = C$.*

(iii) *Группа W порождена множеством ортогональных отражений относительно стенок камеры C.*

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество стенок камеры C и $W_{\mathfrak{M}}$ — группа, порожденная отражениями относительно стенок камеры C.

Докажем утверждение (i). Пусть $x \in E$ и J — орбита точки x относительно группы $W_{\mathfrak{M}}$. Достаточно доказать, что J пересекает $\overline{C}$.

Пусть a — точка камеры C. Существует замкнутый шар B с центром a, пересекающий орбиту J. Так как шар B компактен, то условие (П′2) из n° 1 показывает, что множество $B \cap J$ конечно. Поэтому существует точка $y \in J$, такая, что

$$d(a, y) \leqslant d(a, y') \quad \text{для всех} \quad y' \text{ из } J. \qquad (1)$$

Мы хотим доказать, что $y \in \overline{C}$. Для этого достаточно показать, что если H — стенка камеры C, то $y \in \overline{D_H(C)}$ (см. § 1, n° 4, предложение 9). Так как $s_H \in W_{\mathfrak{M}}$, то $s_H(y) \in J$, откуда (рис. 1)

$$d(a, y)^2 \leqslant d(a, s_H(y))^2 \qquad (2)$$

в силу неравенства (1). Существуют точка $b \in H$ и два вектора t и u, такие, что $a = b + t$, $y = b + u$ и вектор u орто-

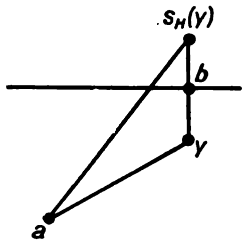


Рис. 1.

гонален к H. Тогда $s_H(y) = b - u$ и неравенство (2) эквивалентно неравенству $(t - u \mid t - u) \leqslant (t + u \mid t + u)$, или, что равносильно, неравенству $(t \mid u) \geqslant 0$. Из этого неравенства следует включение $y \in \overline{D_H(C)}$.

(ii) Пусть C' — какая-то камера и $a' \in C'$. По только что доказанному существует $w \in W_{\mathfrak{M}}$, для которого $w^{-1}(a') \in \overline{C}$. Следовательно, камера C' пересекается с $\overline{w(C)}$. Но так как $\overline{w(C)}$ есть объединение камеры $w(C)$ и ячеек с пустой внутренностью (§ 1, n° 2, предложение 3), то $C' = w(C)$.

(iii) Чтобы доказать равенство $W = W_{\mathfrak{M}}$, достаточно доказать включение $s_{H'} \in W_{\mathfrak{M}}$ для всех $H' \in \mathfrak{H}$. Но H' — стенка по крайней мере одной камеры C' (§ 1, n° 4, предложение 8), и существует $w \in W_{\mathfrak{M}}$, для которого $C' = w(C)$. Следовательно, существует стенка H камеры C, такая, что $H' = w(H)$, откуда $s_{H'} = w \cdot s_H \cdot w^{-1} \in W_{\mathfrak{M}}$.

2. Связь с системами Кокстера

Теорема 1. *Пусть C — камера и S — множество отражений относительно ее стенок.*

(i) *Пара (W, S) есть система Кокстера.*

(ii) *Пусть $w \in W$ и H — стенка камеры C. Соотношение $l(s_H w) > l(w)$ означает, что камеры C и $w(C)$ находятся по одну и ту же сторону от гиперплоскости H.*

(iii) *Для любой камеры C' существует единственный элемент $w \in W$, такой, что $w(C) = C'$.*

(iv) *Множество гиперплоскостей H, для которых $s_H \in W$, совпадает с $\mathfrak{H}$.*

Каждый элемент множества S имеет порядок 2, а по лемме 2 группа W множеством S порождается. Для любой стенки H камеры C обозначим через P_H множество $w \in W$, таких, что камера C и камера $w(C)$ (которая не пересекает H) лежат по одну сторону от H. Мы должны проверить условия (А′), (Б′) и (В) из гл. IV, § 1, n°7.

(А′) $1 \in P_H$. Это очевидно.

(Б′) P_H не имеет общих элементов с $s_H . P_H$. В самом деле, $w(C)$ и $s_H w(C)$ находятся по разные стороны от H, и, значит, если $w(C)$ лежит по ту же сторону от H, что и C, то $s_H w(C)$ — по другую.

(В) *Пусть $w \in P_H$ и H' — стенка камеры C, для которой $ws_{H'} \notin P_H$. Нам нужно доказать, что $ws_{H'} = s_H w$.* По предположению $w(C)$ лежит по ту же сторону от H, что и C, а $ws_{H'}(C)$ — по другую сторону. Значит, $ws_{H'}(C)$ и $w(C)$ будут по разные стороны от H и соответственно камеры $s_{H'}(C)$ и C лежат по разные стороны гиперплоскости $w^{-1}(H)$. Пусть a — точка грани камеры C с носителем H'. Точка $a = s_{H'}(a)$ принадлежит замыканиям двух камер C и $s_{H'}(C)$, которые соответственно содержатся в двух открытых полупространствах, ограниченных $w^{-1}(H)$. Поэтому $a \in w^{-1}(H)$ и, значит, $H' = w^{-1}(H)$. Приходим к заключению, что $s_{H'} = w^{-1} s_H w$, откуда $ws_{H'} = s_H w$.

Коль скоро это установлено, утверждения (i) и (ii) следуют из предложения 6 гл. IV, § 1, n° 7. Кроме того (там же, условие (А)),

$$\bigcap_{H \in \mathfrak{M}} P_H = \{1\}. \tag{3}$$

Лемма 2 показывает, что W действует на множестве камер транзитивно. Если, далее, элемент $w \in W$ таков, что $w(C) = C$, то $w \in P_H$ для любой стенки H камеры C, откуда в соответствии с (3) $w=1$. Тем самым доказано утверждение (iii).

Пусть, наконец, H — гиперплоскость, для которой $s_H \in W$. Если бы $H \notin \mathfrak{H}$, то существовала бы по крайней мере одна камера C', пересекающая H (§ 1, n° 3, предложение 7). Каждая точка пересечения $H \cap C'$ инвариантна относительно s_H и тем самым принадлежит камерам C' и $s_H(C')$. Значит, $C' = s_H(C')$, что противоречит (iii), поскольку $s_H \neq 1$.

Следствие. *Пусть Σ — множество отражений, порождающее группу W. Тогда всякое отражение, принадлежащее W, сопряжено с каким-нибудь элементом множества Σ.*

Пусть $\mathfrak{H}'$ — множество гиперплоскостей вида $w(H)$ с $w \in W$ и $H \in \mathfrak{H}$, такими, что $s_H \in \Sigma$. Поскольку W порождается семейством $(s_H)_{H \in \mathfrak{H}'}$ и множество $\mathfrak{H}'$ устойчиво относительно W, мы можем применить к $\mathfrak{H}'$ вместо $\mathfrak{H}$ все результаты этого n°. Но теорема 1, (iv) показывает, что всякое отражение группы W имеет вид s_H с $H \in \mathfrak{H}'$, откуда и вытекает утверждение следствия.

3. Фундаментальная область. Стабилизаторы

Напомним (*Интегр.*, гл. VII, § 2, n° 10, определение 2), что множество D пространства E называется *фундаментальной областью* для группы W, если любая орбита в E относительно W пересекает D в одной и только одной точке. Это эквивалентно следующим двум условиям:

а) *для любого $x \in E$ существует элемент $w \in W$, такой, что $w(x) \in D$;*

б) *если x, $y \in D$ и $w \in W$ таковы, что $y = w(x)$, то $y = x$ (но возможно, $w \neq 1$).*

Докажем три следующих утверждения.

Теорема 2. *Какова бы ни была камера C, ее замыкание $\overline{C}$ является фундаментальной областью для группы W, действующей на E.*

Предложение 1. *Пусть F — ячейка, C — камера, такая, что $F \subset \overline{C}$, и пусть $w \in W$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *$w(F)$ пересекает F;*

(ii) *$w(F) = F$;*

(iii) *$w(\overline{F}) = \overline{F}$;*

(iv) *w оставляет неподвижной хотя бы одну точку из F;*

(v) *w оставляет неподвижной каждую точку F ячейки F;*

(vi) *w оставляет неподвижными все точки замыкания $\overline{F}$;*

(vii) *w принадлежит подгруппе в W, порожденной отражениями относительно стенок камеры C, содержащих F.*

Для любого подмножества $A \subset E$ обозначим через $W(A)$ подгруппу в W, состоящую из элементов, которые оставляют неподвижными все точки множества A.

Предложение 2. *Пусть A — непустое подмножество в E, $\mathfrak{H}_A$ — множество гиперплоскостей $H \in \mathfrak{H}$, содержащих A, A' — пересечение гиперплоскостей $H \in \mathfrak{H}_A$ и F — ячейка в E, открытая в A'* (§ 1, n° 3, предложение 7). *Тогда $W(A) = W(A') = W(F)$ и $W(A)$ порождается отражениями относительно гиперплоскостей из $\mathfrak{H}_A$.*

Прежде всего докажем следующее утверждение:

(I) *Пусть C — камера, x и y — две точки из $\overline{C}$ и w — элемент группы W, для которого $w(x) = y$. Тогда $x = y$, а w принадлежит подгруппе $W_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{N}$ — множество стенок камеры C, содержащих x.*

Проведем индукцию по длине q элемента w (по отношению к множеству S отражений относительно стенок камеры C). Случай $q = 0$ тривиален. Если $q \geqslant 1$, то существуют стенка H камеры C и элемент $w' \in W$, такие, что $w = s_H w'$ и $l(w') = q - 1$. Поскольку $l(s_H w) < l(w)$, камеры C и $w(C)$ по теореме 1 из n° 2 лежат по разные стороны от H. Поэтому $\overline{C} \cap w(\overline{C}) \subset H$, откуда $y \in H$. Тогда $y = w'(x)$ и по предположению индукции $x = y$, а $w' \in W_{\mathfrak{N}}$. Так как $y \in H$, то получаем $H \in \mathfrak{N}$ и $w = s_H w' \in W_{\mathfrak{N}}$, чем и заканчивается доказательство утверждения (I).

Доказательство теоремы 2. Это утверждение следует из (I) и из леммы 2.

Доказательство предложения 1. Мы знаем, что две различные ячейки не пересекаются и их замыкания не совпадают (§ 1, n° 2, следствие предложения 3). Это приводит к эквивалентности (i), (ii) и (iii). С другой стороны, ясно, что

$$(\mathrm{vii}) \Rightarrow (\mathrm{vi}) \Rightarrow (\mathrm{v}) \Rightarrow (\mathrm{iv}) \Rightarrow (\mathrm{i}),$$

а утверждение (I) показывает, что $(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{vii})$.

Доказательство предложения 2. Пусть A'' — аффинное подпространство пространства E, порожденное множеством A. Очевидно, что $W(A) = W(A'')$. По предложению 7 из § 1, n° 3, существует точка $x \in A''$, не лежащая ни в какой гиперплоскости $H \in \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_A$. Пусть F_x — ячейка, содержащая x; она открыта в A'', и предложение 1 показывает, что

$$W(F_x) \subset W(A') \subset W(A) = W(A'') \subset W(\{x\}) = W(F_x),$$

откуда $W(A) = W(A') = W(F_x)$. Заменив A на F, получаем

$$W(A) = W(F),$$

откуда и следует наше предложение.

Замечания. 1) Из теоремы 2 следует, что если C — камера, а F — ячейка, то *существует, и только одна, содержащаяся в $\bar{C}$ ячейка F', которая переводится в F элементом из W.*

2) Из предложений 1 и 2 следует, что для всякого непустого подмножества A в E существует точка $a \in E$, такая, что $W(A) = W(\{a\})$. Сверх того, группа $W(A)$ является *группой Кокстера* (теорема 1).

3) Пусть C — камера в E и S — множество отражений относительно ее стенок. Пусть $w \in W$ и $(s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение элемента w относительно S. Если $x \in \bar{C}$ инвариантно относительно w, то $s_j(x) = x$ для всех j. Это вытекает из предложения 1 и из следствия 1 предложения 7 гл. IV, § 1.

4. Матрица и граф Кокстера группы W

Пусть C — камера, $S = S(C)$ — множество ортогональных отражений относительно стенок C и $M = (m(s, s'))$ — матрица Кокстера системы Кокстера (W, S) (гл. IV, § 1, n° 9); напомним, что $m(s, s')$ есть порядок (конечный или бесконечный) элемента ss' группы W (для $s, s' \in S$). Если C' — другая камера, то единственный элемент $w \in W$, для которого $w(C) = C'$, определяет биекцию

$$s \longmapsto f(s) = wsw^{-1}$$

множества S на $S' = S(C')$, причем $m(f(s), f(s')) = m(s, s')$. Отсюда следует, что если задать действие W на множестве X пар (C, s), где C — камера и $s \in S(C)$, положив $w.(C, s) = (w(C), wsw^{-1})$, то каждая орбита i группы W в X будет пересекаться с каждым из множеств $\{C\} \times S(C)$ в одной и только одной точке, которую мы обозначим через $(C, s_i(C))$. Пусть в таком случае I — множество этих орбит. Для $i, j \in I$ число $m_{ij} = m(s_i(C), s_j(C))$ не зависит от выбора камеры C. Матрица $M(W) = (m_{ij})_{i, j \in I}$ является матрицей Кокстера и называется *матрицей Кокстера* группы W. Граф Кокстера, ассоциированный с $M(W)$ (гл. IV, § 1, n° 9), называется *графом Кокстера* группы W.

Пусть C — камера. Для любого $i \in I$ обозначим через $H_i(C)$ стенку камеры C, такую, что $s_i(C)$ будет отражением относительно $H_i(C)$, а через $e_i(C)$ — единичный вектор, ортогональный к $H_i(C)$ и лежащий по ту же сторону от $H_i(C)$, что и C. Отображение $i \longmapsto H_i(C)$ называется *канонической индексацией стенок камеры* C.

Предложение 3. *Пусть* C — *камера и* $i, j \in I$, $i \neq j$. *Положим* $s_i = s_i(C)$, $H_i = H_i(C)$, $e_i = e_i(C)$ *и аналогично определим* s_j, H_j, e_j.

(i) *Если* H_i *и* H_j *параллельны, то* $m_{ij} = \infty$ *и* $e_i = -e_j$.

(ii) *Если* H_i *и* H_j *не параллельны, то* m_{ij} *конечно и*

$$(e_i \mid e_j) = -\cos(\pi/m_{ij}). \tag{4}$$

(iii) $(e_i \mid e_j) \leqslant 0$.

Если H_i и H_j параллельны, то $s_i s_j$ — перенос (§ 2, n° 4, предложение 5), откуда $m_{ij} = \infty$. Далее, либо $e_i = e_j$, либо $e_i = -e_j$. Между тем существует точка a (соотв. a') в замыкании C, лежащая в H_i (соотв. H_j), но не лежащая в H_j (соотв. H_i). Тогда $(a' - a \mid e_i) > 0$ и $(a - a' \mid e_j) > 0$, чем исключен случай $e_i = e_j$ и доказано (i).

Предположим теперь, что H_i и H_j не параллельны. Выберем в качестве начальной точку $a \in H_i \cap H_j$ и отождествим T и E при помощи биекции $t \longmapsto a + t$. Пусть V — плоскость, ортогональная к $H_i \cap H_j$ и проходящая через a. Положим $\Gamma = V \cap D_{H_i}(C) \cap D_{H_j}(C)$ (где $D_H(C)$ — открытое полупространство, ограниченное гиперплоскостью H и содержащее камеру C (§ 1, n° 1)). Пусть D (соотв. D') — полупрямая в V, лежащая на $H_i \cap V$ (соотв. $H_j \cap V$) и содержащаяся в замыкании Γ. При выборе подходящей ориентации на V множество Γ будет объединением открытых полупрямых Δ в V, таких, что

$$0 < (\widehat{D, \Delta}) < (\widehat{D, D'}).$$

Пусть W' — подгруппа в W, порожденная s_i и s_j. Для всех $w \in W'$ гиперплоскости $w(H_i)$ и $w(H_j)$ принадлежат $\mathfrak{H}$, содержат $H_i \cap H_j$ и не пересекают C. Поэтому они не пересекают Γ (§ 1, n° 5, предложение 10). Следствие предложения 7 из § 2, n° 5, влечет тогда (ii).

Наконец, утверждение (iii) сразу получается из (i) и (ii), поскольку $m_{ij} \geqslant 2$ для $i \neq j$.

Замечание. Формула (4) имеет смысл на самом деле при любых $i, j \in I$. Действительно, $\pi/m_{ij} = 0$, есть $m_{ij} = \infty$, а если $i = j$, то $m_{ij} = 1$ и $(e_i \mid e_j) = 1$.

5. Системы векторов с отрицательными скалярными произведениями

Лемма 3. *Пусть q — положительная квадратичная форма на вещественном векторном пространстве V и B — ассоциированная с ней симметрическая билинейная форма. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — векторы из V, такие, что $B(a_i, a_j) \leqslant 0$ при $i \neq j$.*

(i) *Если $c_1, \ldots, c_n$ — вещественные числа, для которых $q\left(\sum c_i a_i\right) = 0$, то*

$$q\left(\sum_i |c_i| . a_i\right) = 0.$$

(ii) *Если q невырождена и если существует линейная форма f на V, такая, что $f(a_i) > 0$ при всех i, то векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы.*

Соотношение $B(a_i, a_j) \leqslant 0$ при $i \neq j$ тотчас дает неравенство

$$q\left(\sum_i |c_i| . a_i\right) \leqslant q\left(\sum_i c_i a_i\right),$$

откуда следует утверждение (i). Поэтому в случае невырожденной формы q равенство $\sum_i c_i a_i = 0$ влечет

$$\sum_i |c_i| . a_i = 0.$$

Отсюда для любой линейной формы f на V получаем $\sum |c_i| . f(a_i) = 0$, а если сверх того $f(a_i) > 0$ при всех i, то $c_i = 0$ для любого i. Этим доказано утверждение (ii).

Лемма 4. *Пусть $Q = (q_{ij})$ — симметрическая квадратная матрица порядка n с вещественными коэффициентами, такая, что*

а) *$q_{ij} \leqslant 0$ при $i \neq j$;*

б) *не существует разбиения множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на два непустых подмножества I и J таких, что если $(i, j) \in I \times J$, то $q_{ij} = 0$;*

в) *квадратичная форма $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j$ на $\mathbf{R}^n$ положительна.*

Тогда

(i) *Ядро N формы q имеет размерность 0 или 1. Если $\dim N = 1$, то N порождено вектором, у которого все координаты > 0.*

(ii) *Наименьшее собственное значение матрицы Q обладает кратностью 1, а соответствующий собственный вектор* *имеет либо все положительные координаты, либо все отрицательные.*

Ввиду положительности квадратичной формы q ее ядром N является множество изотропных относительно q векторов (*Алг.*, гл. IX, § 7, n° 1, следствие предложения 2). Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — канонический базис в $\mathbf{R}^n$. Если $\sum_i c_i a_i \in N$, то по лемме 3 и $\sum_i |c_i| . a_i \in N$, откуда $\sum_i q_{ji} . |e_i| = 0$ для любого j. Пусть теперь I — множество тех i, для которых $c_i \neq 0$. Если $j \notin I$, то $q_{ji} |c_i| \leqslant 0$ при $i \in I$ и $q_{ji} |c_i| = 0$ при $i \notin I$, откуда $q_{ji} = 0$ для $j \notin I$ и $i \in I$. Условие б) дает тогда, что либо $I = \varnothing$, либо $I = \{1, \ldots, n\}$. Следовательно, у любого ненулевого вектора из N ни одна из координат не равна нулю. Если бы $\dim N \geqslant 2$, то пересечение ядра N с гиперплоскостью, задаваемой уравнением $x_i = 0$, имело бы размерность $\geqslant 1$ вопреки тому, что мы только что получили. Кроме того, из предыдущих рассуждений следует, что если $\dim N = 1$, то N содержит вектор с положительными координатами. Этим доказано утверждение (i).

С другой стороны, известно, что собственные значения матрицы Q вещественны (*Алг.*, гл. IX, § 7, n° 3, предложение 5) и положительны, поскольку форма q положительна. Пусть λ — наименьшее среди них. Тогда матрица $Q' = Q - \lambda I_n$ будет матрицей вырожденной положительной формы q', у которой недиагональные элементы такие же, как и у Q. Следовательно, Q' тоже удовлетворяет условиям а) — в). Так как ядро N' формы q' — собственное подпространство матрицы Q, соответствующее собственному значению λ, то утверждение (ii) вытекает из (i).

Лемма 5. *Пусть векторы $e_1, \ldots, e_n$, порождающие T, таковы, что*

а) $(e_i | e_j) \leqslant 0$ *при* $i \neq j$;

б) *не существует разбиения множества $\{1, \ldots, n\}$ на два непустых подмножества I и J с $(e_i, e_j) = 0$ при $i \in I$ и $j \in J$.*

Тогда возможны только два случая:

1) $(e_1, \ldots, e_n)$ — *базис пространства* T;

2) $n = \dim T + 1$; *существует семейство $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ вещественных чисел > 0, таких, что $\sum_i c_i e_i = 0$, и всякое семейство $(c'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ вещественных чисел, для которых $\sum_i c'_i e_i = 0$, пропорционально $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.*

Положим $q_{ij} = (e_i | e_j)$. Матрица $Q = (q_{ij})$ удовлетворяет всем предположениям леммы 4: условия а) и б) леммы 4 совпадают с условиями а) и б) нашей леммы, а в) выполнено по той причине, что $\sum_{i,j} q_{ij}x_ix_j = \sum_i \|x_ie_i\|^2$. Ядро N квадратичной формы q на $\mathbf{R}^n$ с матрицей Q есть множество всех $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$, для которых $\sum_i c_ie_i = 0$. Когда $N = \{0\}$, векторы e_i линейно независимы, и имеет место случай 1). Когда же $\dim N > 0$, лемма 4, (i) показывает, что имеет место случай 2).

Лемма 6. *Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в T такой, что $(e_i | e_j) \leqslant 0$ при $i \neq j$.*

(i) *Если $x = \sum_i c_ie_i$ — элемент из T, для которого $(x | e_i) \geqslant 0$ при всех i, то $c_i \geqslant 0$ при всех i.*

(ii) *Если x и y — два элемента пространства T, для которых $(x | e_i) \geqslant 0$ и $(y | e_i) \geqslant 0$ при всех i, то $(x | y) \geqslant 0$. Если $(x | e_i) > 0$ и $(y | e_i) > 0$ при всех i, то $(x | y) > 0$.*

В условиях утверждения (i) предположим, что существует i, для которого $c_i < 0$. Пусть f — линейная форма на T, определенная равенствами $f(e_i) = 1$ и

$$f(e_j) = -c_i \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k| \right) \quad \text{при} \quad j \neq i.$$

Векторы $-x, e_1, \ldots, e_n$ удовлетворяют всем предположениям леммы 3, (ii) (в качестве q взять метрическую форму на T). Однако вытекающее отсюда заключение об их линейной независимости абсурдно, что и приводит к утверждению (i). Далее, если $x = \sum_i c_ie_i \in T$ и $y \in T$, то $(x | y) = \sum_i c_i(e_i | y)$, так что (ii) сразу следует из (i).

6. Теоремы конечности

Лемма 7. *Пусть A — множество единичных векторов в T. Если существует такое вещественное число $\lambda < 1$, что $(a | a') \leqslant \lambda$ для любых $a, a' \in A$ и $a \neq a'$, то множество A конечно.*

Для $a, a' \in A$ и $a \neq a'$ имеем

$$\|a - a'\|^2 = 2 - 2(a | a') \geqslant 2 - 2\lambda.$$

Однако, будучи компактной, единичная сфера S в T допускает конечное покрытие множествами диаметром $< (2 - 2\lambda)^{1/2}$. В каждом таком множестве содержится не более одного вектора из A. Отсюда следует утверждение леммы. Обозначим через $U(w)$ автоморфизм пространства T, ассоциированный с аффинным отображением $w \in W$ пространства E в себя. Имеем

$$w(x+t) = w(x) + U(w).t \quad \text{для} \quad t \in T \quad \text{и} \quad x \in E.$$

Определен, таким образом, гомоморфизм U группы W в ортогональную группу пространства T. Ядром гомоморфизма U является множество переносов, принадлежащих группе W.

Теорема 3. (i) *Множество стенок одной камеры конечно.*

(ii) *Множество направлений гиперплоскостей из* $\mathfrak{H}$ *конечно.*

(iii) *Группа* $U(W)$ *конечна.*

Утверждение (i) сразу следует из предложения 3, (iii) и из леммы 7. Докажем (ii). Пусть C — камера и $\mathfrak{M}$ — множество ее стенок. Множество ячеек в замыкании $\overline{C}$ (относительно $\mathfrak{H}$) совпадает с множеством ячеек относительно $\mathfrak{M}$ (§ 1, n°4, предложение 9). Так как $\mathfrak{M}$ конечно, то число ячеек конечно. Поскольку каждая ячейка пересекается не более чем с конечным числом гиперплоскостей из $\mathfrak{H}$, множество гиперплоскостей, принадлежащих $\mathfrak{H}$ и пересекающих $\overline{C}$, конечно, так же как и множество $A(C)$ единичных векторов в T, ортогональных этим гиперповерхностям. Следовательно, существует вещественное число $\lambda < 1$, такое, что $(a|a') \leqslant \lambda$ для $a, a' \in A(C)$ и $a \neq a'$.

Пусть теперь A — множество единичных векторов в T, ортогональных гиперплоскостям из $\mathfrak{H}$. Пусть $a, a' \in A$, $a \neq a'$. Если a и a' параллельны, то $a = -a'$ и $(a|a') = -1$. В противном случае пусть вектор a (соотв. a') ортогонален к H (соотв. к H'). Тогда $H \cap H' \neq \varnothing$, и если $x \in H \cap H'$, то существует элемент $w \in W$, для которого $x \in w(\overline{C})$. Векторы $U(w).a$ и $U(w).a'$ принадлежат тогда $A(C)$, и

$$(a|a') = (U(w).a \,|\, U(w).a') \leqslant \lambda,$$

так что множество A конечно по лемме 7. Этим доказано (ii).

Пусть теперь элемент $w \in W$ таков, что $U(w).a = a$ для всех $a \in A$. Тогда $U(w).t = t$ для любого t из подпространства в T, порожденного векторами из A. С другой стороны, если $t \in T$ ортогонален к A, то $U(s_H).t = t$ для всех $H \in \mathfrak{H}$, откуда $U(w).t = t$, и, наконец, $U(w) = 1$. Так как $U(w)(A) = A$ для любого элемента $w \in W$, то группа $U(W)$ изоморфна группе перестановок конечного множества A, откуда следует утверждение (iii).

Предложение 4. *Пусть* C — *камера и* $(\mathfrak{N})$ — *множество ее стенок. Пусть* $W_{\mathfrak{N}}$ — *подгруппа группы* W, *порожденная* *ортогональными отражениями относительно гиперплоскостей из $\mathfrak{R}$. Для $H \in \mathfrak{R}$ обозначим через e_H единичный вектор, ортогональный к H и лежащий по ту же сторону от H, что и C. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *группа $W_{\mathfrak{R}}$ конечна;*

(ii) *существует точка пространства E, инвариантная относительно всех элементов группы $W_{\mathfrak{R}}$;*

(iii) *гиперплоскости из $\mathfrak{R}$ имеют непустое пересечение;*

(iv) *семейство векторов $(e_H)_{H \in \mathfrak{R}}$ свободно в T.*

Предположим, что группа $W_{\mathfrak{R}}$ конечна и имеет порядок d. Тогда для любой точки a из E точка $b = \sum_{w \in W_{\mathfrak{R}}} d^{-1} . w(a)$ инвариантна относительно $W_{\mathfrak{R}}$, поэтому из (i) следует (ii).

Согласно свойству (П2) (см. начало § 3), стабилизатор в W всякой точки из E конечен. Следовательно, (ii) влечет (i).

Ввиду того что группа $W_{\mathfrak{R}}$ порождена множеством отражений относительно гиперплоскостей из $\mathfrak{R}$, неподвижные точки относительно $W_{\mathfrak{R}}$ — это точки пространства E, принадлежащие каждой гиперплоскости $H \in \mathfrak{R}$, откуда следует эквивалентность (ii) и (iii).

Предположим, что существует точка a в E, принадлежащая всем гиперплоскостям $H \in \mathfrak{R}$. Пусть $t \in T$ — вектор, для которого $a + t \in C$. Так как $(e_H | e_{H'}) \leqslant 0$ для H, $H' \in \mathfrak{R}$, $H \neq H'$ (предложение 3), а $(t | e_H) > 0$ для всех $H \in \mathfrak{R}$, то лемма 3, (ii) влечет линейную независимость векторов e_H, $H \in \mathfrak{R}$. Поэтому из (iii) следует (iv).

Предположим, наконец, что семейство $(e_H)_{H \in \mathfrak{R}}$ свободно. Пусть a — точка в E. Для любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{R}$ существует вещественное число c_H, такое, что H состоит из точек $a + t$ в E с $(t | e_H) = c_H$. Так как семейство (e_H) свободно, существует вектор $t \in T$, такой, что $(t | e_H) = c_H$ для всех $H \in \mathfrak{R}$, и точка $a + t$ из E принадлежит любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{R}$. Следовательно, (iv) влечет (iii).

Замечания. 1) Поскольку W порождена отражениями относительно стенок камеры C, предыдущее предложение дает критерий конечности этой группы. Мы вернемся к этому вопросу в n° 9.

2) Пусть F — вещественное аффинное пространство конечной размерности и G — его группа автоморфизмов. Для любого $g \in G$ обозначим через $U(g)$ ассоциированный с g автоморфизм пространства переносов V пространства F. Предположим, что образ $U(G)$ — *конечная* подгруппа в $\mathbf{GL}(V)$. Тогда на V существует скалярное произведение, инвариантное относительно $U(G)$ (*Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 1, пред-

ложение 1). Если сверх того G порождена отражениями и, снабженная дискретной топологией, действует на F собственно разрывно, то мы можем применить к G все результаты предыдущего параграфа.

7. Разложение линейного представления группы W в T

Пусть I — множество вершин графа Кокстера группы W (n° 4), и пусть J — подмножество в I, такое, что вершины из J и $I-J$ не связаны между собой. Пусть C — камера, s — каноническая биекция множества I на множество отражений относительно стенок камеры C и $W_{J,C}$ — подгруппа, порожденная образом $s(J)$. Тогда из предложения 8, n° 9, § 1, гл. IV, следует, что W — *прямое произведение* двух своих подгрупп $W_{J,C}$ и $W_{I-J,C}$. Пусть C' — другая камера и s' — соответствующее инъективное отображение I в W. Мы видели (n° 4), что если $w \in W$ переводит C в C', то $s'(i) = ws(i)w^{-1}$ при $i \in I$. Так как $W_{J,C}$ — нормальная подгруппа в W, то $s'(i) \in W_{J,C}$ для всех $i \in J$. Отсюда следует, что *подгруппа $W_{J,C}$ не зависит от выбора C*. Поэтому везде в дальнейшем мы будем обозначать ее просто через W_J.

Определение группы $W_{J,C}$ годится для любого подмножества $J \subset I$. Но если какая-нибудь вершина из J *соединена* с вершиной из $I-J$, то $W_{J,C}$ не будет нормальной подгруппой и будет зависеть от выбора камеры C.

Пусть T_J^0 — подпространство в T, состоящее из векторов, инвариантных относительно всех элементов группы $U(W_J)$, и пусть T_J — подпространство, ортогональное к T_J^0. Так как W_J — нормальная подгруппа в W, то ясно, что T_J^0, а следовательно, и T_J инвариантны относительно $U(W)$.

Предложение 5. *Пусть $J_1, \ldots, J_s$ — множества вершин связных компонент графа Кокстера группы W. Для $1 \leqslant p \leqslant s$ положим*

$$W_p = W_{J_p}, \quad T_p = T_{J_p}, \quad T'_p = T^0_{J_p}, \quad T_0 = \bigcap_{1 \leqslant p \leqslant s} T'_p.$$

(i) *Группа W — прямое произведение подгрупп W_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$.*

(ii) *Пространство T — прямая сумма ортогональных подпространств $T_0, T_1, \ldots, T_s$, устойчивых относительно $U(W)$.*

(iii) *Для любого q, $1 \leqslant q \leqslant s$, подпространство T'_q пространства T состоит из векторов, инвариантных относительно $U(W_q)$. Оно разлагается в прямую сумму тех T_p, для которых $0 \leqslant p \leqslant s$ и $p \neq q$.*

(iv) *Пусть C — камера. Подпространство T_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$ порождено векторами $e_i(C)$ для $i \in J_p$* (в обозначениях n° 4).

(v) *Представления группы W в подпространствах T_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$ абсолютно неприводимы, нетривиальны и попарно неэквивалентны.*

Утверждение (i) следует из результатов гл. IV, § 1, n° 9. С другой стороны, как мы уже видели, подпространства T_p инвариантны относительно $U(W)$ и то же верно для T_0. Пусть C — камера. Так как W_p порождена отражениями $s_i(C)$, $i \in J_p$, то ясно, что T'_p — подпространство, ортогональное к $e_i(C)$ для $i \in J_p$, откуда следует (iv). Сверх того при $i \in J_p$, $j \in J_q$ и $p \neq q$ будет $m_{ij} = 2$, поскольку $\{i, j\}$ не является ребром графа Кокстера, т. е. $(e_i | e_j) = 0$. Отсюда непосредственно получаем (ii), а затем и (iii), ибо T'_q ортогонально к T_q.

Наконец, пусть V — инвариантное относительно $U(W_p)$ подпространство в T_p. Для любого $i \subset J_p$ вектор e_i либо принадлежит V, либо ортогонален к V (§ 2, n° 2, предложение 3). Пусть A (соотв. B) — множество тех $i \in J_p$, для которых $e_i \in V$ (соотв. e_i ортогонален к V). Очевидно, что $(e_i | e_j) = 0$ при $i \in A$ и $j \in B$, а поскольку J_p связно, приходим к заключению, что либо $A = \varnothing$ и $V = \{0\}$, либо $A = J_p$ и $V = T_p$. Следовательно, представление группы W_p в T_p неприводимо, а потому и абсолютно неприводимо в § 2, n° 1, предложение 1. Оно нетривиально по самому определению пространства T_p. Наконец, последнее утверждение в (v) сразу следует из (iii).

Группа W называется *существенной*, если подпространство T_0 векторов из T, инвариантных относительно $U(W)$, сводится к $\{0\}$. Группа W называется *неприводимой*, если неприводимо ее представление U в T.

Следствие. *Пусть $W \neq \{1\}$. Для того чтобы группа W была неприводимой, необходимо и достаточно, чтобы она была существенной и чтобы ее граф Кокстера был связен.*

Замечание. В условиях предложения 5 подпространства T_p для $0 \leqslant p \leqslant s$ являются изотипными компонентами линейного представления U группы W в T (*Алг.*, гл. VIII, § 3, n° 4). Отсюда следует (*там же*, предложение 11), что всякое векторное подпространство V в T, устойчивое относительно W, есть прямая сумма подпространств $V \cap T_p$ для $0 \leqslant p \leqslant s$. Кроме того (*там же*, предложение 10), любой эндоморфизм, коммутирующий со всеми операторами $U(w)$, $w \in W$, оставляет устойчивыми все T_p, $0 \leqslant p \leqslant s$, и индуцирует на каждом из них гомотетию. В частности, всякая билинейная форма Φ на T, инвариантная относительно W, задается равенством

$$\Phi\left(\sum_k t_k,\ \sum_k t'_k\right) = \Phi_0(t_0, t'_0) + \sum_{1 \leqslant p \leqslant s} a_p(t_p \mid t'_p),$$

где Φ_0 — билинейная форма на T_0 и a_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$ — вещественные числа. Действительно, такая форма Φ однозначно записывается в виде $(t, t') \mapsto (A(t) \mid t')$, где A — эндоморфизм пространства T, коммутирующий с $U(w)$ для $w \in W$.

8. Разложение аффинного пространства E в произведение

Сохраним обозначения предложения 5. Пусть E_p с $0 \leqslant \leqslant p \leqslant s$ — множество орбит группы T'_p в E, и пусть φ_p — каноническое отображение пространства E на E_p. Действие T в E переносится на фактор. В частности, T_p действует на E_p, и непосредственно проверяется (например, путем выбора начальной точки в E), что E_p будет аффинным пространством, допускающим T_p в качестве пространства переносов. Положим $E' = E_0 \times \ldots \times E_s$. Это есть аффинное пространство с $T = T_0 \oplus \ldots \oplus T_s$ в качестве пространства переносов. Пусть φ: $E \to E'$ — произведение отображений φ_p. Так как φ коммутирует с действием T, то это отображение будет биекцией и изоморфизмом аффинных пространств. В дальнейшем мы отождествим E и E' посредством φ. Отображение φ_p отождествляется тогда с канонической проекцией E' на E_p.

Поскольку W оставляет устойчивым T'_p, действие W на E переносится на фактор и определяет закон действия W на E_p $(0 \leqslant p \leqslant s)$, а при сужении — закон действия W_p на E_p. Далее, пусть C — камера, $i \in I$, и p — такое целое число, что $i \in J_p$. При всех $x \in E$ имеем

$$s_i(C)(x) = x - \lambda . e_i(C), \quad \text{где } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Так как $e_i \in T'_q$ при $q \neq p$, то

$$\varphi_q(w(x)) = \varphi_q(x) \quad \text{для} \quad x \in E,\ w \in W_p,\ 0 \leqslant q \leqslant s,\ q \neq p.$$

Следовательно, если $w = w_1 \ldots w_s \in W$, с $w_p \in W_p$, $1 \leqslant \leqslant p \leqslant s$, то

$$w((x_0, \ldots, x_s)) = (x_0, w_1(x_1), \ldots, w_s(x_s)), \tag{5}$$

каковы бы ни были $x_p \in E_p$, $0 \leqslant p \leqslant s$. Другими словами, *закон действия группы W на $E = E'$ есть не что иное, как* *произведение законов действий групп W_p на E_p* (мы полагаем $W_0 = \{1\}$). Таким образом, W_p действует точно на E_p, и *W_p можно отождествить с группой перемещений евклидова пространства E_p* (пространство переносов T_p пространства E_p снабжено, естественно, скалярным произведением, индуцированным скалярным произведением на T).

Предложение 6. (i) *Группа W_p есть группа перемещений евклидова аффинного пространства E_p; она порождена отражениями; снабженная дискретной топологией, она действует в E_p собственно разрывно; она неприводима.*

(ii) *Пусть $\mathfrak{H}_p$ — множество гиперплоскостей H в E_p, для которых $s_H \in W_p$. Множество $\mathfrak{H}$ состоит из гиперплоскостей вида*

$$H = E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_{p-1} \times H_p \times E_{p+1} \times \ldots \times E_s,$$

где $p = 1, \ldots, s$ и $H_p \in \mathfrak{H}_p$.

(iii) *Каждая камера C имеет вид $E_0 \times C_1 \times \ldots \times C_s$, где для всякого p множество C_p — камера в E_p относительно множества гиперплоскостей $\mathfrak{H}_p$. Кроме того, стенками камеры C_p служат гиперплоскости $\varphi_p(H_i(C))$, $i \in J_p$.*

Пусть C — камера. Положим $H_i = H_i(C)$, $e_i = e_i(C)$ и $s_i = s_i(C)$ для $i \in I$ (обозначения из n° 4).

(i) Пусть $i \in J_p$. Так как $e_i \in T_p$ и T — прямая сумма попарно ортогональных подпространств $T_0, T_1, \ldots, T_s$, то гиперплоскость в T, ортогональная к e_i, имеет вид $L_i + T'_p$, где L_i — гиперплоскость в T_p, ортогональная к e_i. Аффинная гиперплоскость H_i в E имеет вид $L_i + T'_p + x$, с $x \in E$, и поэтому

$$H_i = E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_{p-1} \times H'_i \times E_{p+1} \times \ldots \times E_s, \quad (6)$$

где $H'_i = L_i + \varphi_p(x) = \varphi_p(H_i)$. В таком случае ясно, что s_i действует в E_p как отражение относительно гиперплоскости $H'_i \subset E_p$. Следовательно, группа W_p есть группа перемещений, порожденная отражениями в E_p. Легко проверить критерий (П'2) собственной разрывности. Наконец, предложение 5, (v) показывает, что W_p неприводима. Тем самым (i) доказано.

(ii) В силу следствия теоремы 1 множество $\mathfrak{H}_p$ состоит из гиперплоскостей вида $w_p(H'_i)$ с i из J_p и с w_p из W_p. Далее, если $w = w_1 \ldots w_s$, где $w_p \in W_p$ для всех p, то в соответствии с формулами (5) и (6)

$$w(H_i) = E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_{p-1} \times w_p(H'_i) \times E_{p+1} \times \ldots \times E_s, \tag{7}$$

откуда сразу следует (ii).

(iii) Пусть $i \in J_p$. По формуле (6) открытое полупространство D_i, ограниченное H_i и содержащее C, имеет вид

$$D_i = E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_{p-1} \times D'_i \times E_{p+1} \times \ldots \times E_s,$$

где D'_i — открытое полупространство, ограниченное H'_i в E_p. Положим $C_p = \bigcap\limits_{i \in J_p} D'_i$. Так как $C = \bigcap\limits_{i \in I} D_i$, то немедленно получаем

$$C = E_0 \times C_1 \times \ldots \times C_s.$$

Стало быть, каждое из множеств C_p непусто, а поскольку C не пересекается с гиперплоскостями из $\mathfrak{H}$, множество C_p не пересекается с гиперплоскостями из $\mathfrak{H}_p$. Предложение 5 из § 1, n°3, показывает, что C_p — одна из камер в E_p относительно $\mathfrak{H}_p$. Воспользовавшись предложением 4 из § 1, n°2, без труда увидим, что стенками камеры C_p являются гиперплоскости $H'_i = \varphi_p(H_i)$, $i \in J_p$.

9. *Строение камер*

Пусть C — камера, $\mathfrak{M}$ — множество ее стенок и e_H для $H \in \mathfrak{M}$ — ортогональный к H единичный вектор, расположенный с той же стороны от гиперплоскости H, что и C.

Предложение 7. *Предположим, что группа W существенна и конечна. Тогда*

(i) *Существует единственная точка $a \in E$, инвариантная относительно W.*

(ii) *Семейство $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ служит базисом в T.*

(iii) *Камера C является открытым симплициальным конусом с вершиной a, определенным базисом $(e'_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ в T, для которого $(e_H | e'_{H'}) = \delta_{HH'}$.*

(i) Согласно предложению 4 из n°6, существует точка $a \in E$, инвариантная относительно W. Пусть вектор $t \in T$ таков, что точка $t + a$ инвариантна относительно W. Тогда для любого $w \in W$ имеем

$$U(w) \, . \, t + a = w(t + a) = t + a,$$

откуда $U(w).t=t$. Ввиду существенности W это влечет $t=0$, чем доказана единственность точки a.

(ii) Так как W — существенная группа, то в обозначениях n°7 $T=T_I$ и предложение 5, (iv) показывает, что семейство $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ порождает векторное пространство T. Существование точки в E, инвариантной относительно W, показывает, что семейство $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ свободно (n°6, предложение 4).

(iii) Пусть a — единственная инвариантная относительно W точка в E. Так как $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ — базис в T и скалярное произведение есть невырожденная билинейная форма на T, то существует, и притом только один, базис $(e'_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ в T, такой, что $(e_H/e'_{H'}) = \delta_{HH'}$ для H, H' из $\mathfrak{M}$. Каждая точка x из E единственным образом записывается в виде $x=t+a$, где $t=\sum\limits_{H \in \mathfrak{M}} \xi_H . e'_H$ и ξ_H — вещественные числа. Для того чтобы точка x принадлежала C, необходимо и достаточно, чтобы эта точка лежала по ту же сторону от любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{M}$, что и e_H, т. е. чтобы число $(t \mid e_H) = \xi_H$ было строго положительным. Отсюда следует (iii).

Предложение 8. *Предположим, что группа W — существенная, неприводимая и бесконечная. Тогда*

(i) *В E нет инвариантных относительно W точек.*

(ii) Card $\mathfrak{M} = \dim T + 1$ *и существуют вещественные числа $c_H > 0$, для которых $\sum\limits_{H \in \mathfrak{M}} c_H . e_H = 0$. Если $\sum\limits_{H \in \mathfrak{M}} c'_H . e_H = 0$ с какими-то вещественными числами c'_H, то найдется вещественное число ξ, такое, что $c'_H = \xi c_H$ для всех H из $\mathfrak{M}$.*

(iii) *Камера C является открытым симплексом.*

Утверждение (i) следует из предложения 4. Далее, ввиду существенности W векторы $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ порождают T. Имеем $(e_H \mid e_{H'}) \leqslant 0$ для H, $H' \in \mathfrak{M}$ и $H \neq H'$ (предложение 3), а поскольку W неприводима, $\mathfrak{M}$ нельзя разбить на два непустых множества $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$, таких, что если $H' \in \mathfrak{M}'$ и $H'' \in \mathfrak{M}''$, то $(e_{H'} \mid e_{H''}) = 0$. Поэтому можно применить лемму 5 из n°5. Случай 1) этой леммы исключен, ибо W не имеет неподвижной точки и векторы e_H линейно зависимы. Отсюда следует утверждение (ii).

Докажем (iii). Пронумеруем стенки камеры C, скажем так: $H_0, H_1, \ldots, H_d$, и положим $t_m = e_{H_m}$. В силу (ii) векторы $t_1, \ldots, t_d$ образуют базис пространства T, поэтому гиперплоскости $H_1, \ldots, H_d$ имеют общую точку a_0 и существует базис $(t'_1, \ldots, t'_d)$ пространства T, для которого $(t_m \mid t'_n) = \delta_{mn}$.

Далее, согласно (ii), всегда найдутся такие вещественные числа $c_1 > 0, \ldots, c_d > 0$, что

$$t_0 = -(c_1 . t_1 + \ldots + c_d . t_d).$$

Так как вектор t_0 ортогонален гиперплоскости H_0, то существует вещественное число c, такое, что H_0 состоит из точек $x = t + a_0$ в E с $(t \mid t_0) = -c$.

Каждая точка пространства E однозначно записывается в виде $x = t + a_0$ с $t = \xi_1 . t'_1 + \ldots + \xi_d . t'_d$ и вещественными $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Для того чтобы x принадлежала C, необходимо и достаточно, чтобы она лежала по ту же сторону от H_m, что и t_m, $0 \leqslant m \leqslant d$. Это выражается неравенствами $(t \mid t_1) > 0, \ldots$ $\ldots, (t \mid t_d) > 0$ и $(t \mid t_0) > -c$ или, что равносильно, $\xi_1 > 0, \ldots$ $\ldots, \xi_d > 0$, $c_1\xi_1 + \ldots + c_d\xi_d < c$. Здесь $c > 0$, поскольку C непусто. Положим $a_m = a_0 + \frac{c}{c_m} \cdot t'_m$ для $1 \leqslant m \leqslant d$. Камера C состоит тогда из точек пространства E вида $a_0 + \sum_{m=1}^{d} \lambda_m . (a_m - a_0)$, где $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_d > 0$ и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_d < 1$. Поэтому C — открытый симплекс с вершинами $a_0, \ldots, a_d$. Ч. Т. Д.

Замечания. 1) Отождествим E с $E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_1$, а W — с $W_1 \times \ldots \times W_1$, как это сделано в n° 8. Тогда по предложению 6 камера C отождествляется с

$$E_0 \times C_1 \times \ldots \times C_s,$$

где C_p — камера в E_p относительно множества гиперплоскостей $\mathfrak{H}_p$. По предложениям 7 и 8 каждая из камер $C_1, \ldots, C_s$ есть либо открытый симплициальный конус, либо открытый симплекс.

2) Предположим, что группа W неприводима и существенна. Если H и H' — две стенки камеры C, то $m_{HH'} = +\infty$ в том и только в том случае, когда $e_H = -e_{H'}$ (предложение 3). В силу предложений 7 и 8 это возможно только тогда, когда H и H' — единственные стенки камеры C и E одномерно. Таким образом, единственный случай, когда одно из $m_{HH'}$ бесконечно, — это тот, когда E одномерно, а группа W порождена отражениями относительно двух различных точек (см. § 2, n° 4).

В общем случае у матрицы Кокстера группы W будут конечные элементы, исключая ситуацию, когда по крайней мере одно из $E_1, \ldots, E_s$ имеет описанный выше тип.

10. Специальные точки

Пусть L — множество переносов, содержащихся в W, и Λ — множество $t \in T$, таких, что перенос $x \mapsto t + x$ принадлежит L. Очевидно, что Λ устойчиво относительно $U(W)$ и что L — нормальная подгруппа в W. Поскольку W действует в E собственно разрывно, то же верно и для L, и отсюда ясно, что Λ — дискретная подгруппа в T. Обозначим через W_x стабилизатор точки $x \in E$ в W.

Предложение 9. *Пусть $a \in E$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $W = W_a . L$;

(ii) *сужение гомоморфизма U на W_a есть изоморфизм группы W_a на $U(W)$;*

(iii) *для любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{H}$ существует гиперплоскость $H' \in \mathfrak{H}$, параллельная H и такая, что $a \in H'$.*

Ясно что (i) $\Leftrightarrow$ (ii), поскольку L — ядро гомоморфизма U и $L \cap W_a = \{1\}$.

Пусть выполнено (i), и пусть $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $s_H \in W_a . L$, так что существует вектор $t \in \Lambda$, для которого $a = s_H(a) + t$. Вектор t ортогонален к H, и если $H' = H + \frac{1}{2} t$, то $s_{H'}(x) = s_H(x) + t$ для всех $x \in E$ (см. § 2, n°4, предложение 5). Так как $t \in \Lambda$ и $s_H \in W$, то $s_{H'} \in W$, откуда $H' \in \mathfrak{H}$. К тому же $a = s_{H'}(a)$ и, значит, $a \in H'$. Таким образом, из (i) следует (iii).

Предположим, что выполнено (iii) и что гиперплоскости H, $H' \in \mathfrak{H}$ такие же, как в (iii). Тогда $s_{H'}(a) = a$, откуда $s_{H'} \in W_a$. Поскольку H параллельна H', элемент $w = s_{H'} . s_H$ группы W есть перенос (§ 2, n°4, предложение 5), откуда $w \in L$. Тогда $s_H = s_{H'} . w \in W_a . L$. Так как W порождена семейством $(s_H)_{H \in \mathfrak{H}}$, то $W = W_a . L$, и из (iii) следует (i).

Определение 1. *Точка a из E называется специальной точкой для W, если она удовлетворяет эквивалентным условиям предложения* 9.

Ясно, что множество специальных точек в E устойчиво относительно W.

Предложение 10. *Существует точка, специальная для W.*

Предложение 6 из n°8 дает нам возможность ограничиться случаем, когда W — существенная группа.

Группа $U(W)$ автоморфизмов пространства T конечна (n°6, теорема 3) и $U(s_H)$ — ортогональное отражение относительно гиперплоскости H. Кроме того, $U(W)$ порождена семейством $(U(s_H))_{H\in\mathfrak{H}}$. По предложению 7 из n°9 существует базис $(e_i)_{i\in T}$ в T, такой, что группа $U(W)$ будет порождена множеством отражений $(s_i)_{i\in I}$ вида

$$s_i(t)=t-2(t\,|\,e_i)\,.\,e_i.$$

Следствие теоремы 1 из n°2 показывает, что всякое отражение $s\in U(W)$ имеет вид $s=U(s_H)$ с $H\in\mathfrak{H}$. Поэтому в $\mathfrak{H}$ можно найти семейство гиперплоскостей $(H_i)_{i\in I}$, для которых $s_i=U(s_{H_i})$ при всех i. Ввиду линейной независимости векторов e_i существует точка $a\in E$, такая, что $a\in H_i$ для всех $i\in I$. Имеем $s_{H_i}\in W_a$, откуда $U(W)=U(W_a)$, т. е. $W=W_a\,.\,L$, поскольку L — ядро гомоморфизма U. Следовательно, a — специальная точка.

В случае когда W — существенная конечная группа, имеется только одна специальная для W точка, а именно единственная точка, инвариантная относительно W. Поэтому рассмотрение специальных точек интересно главным образом в случае бесконечной группы W.

Предложение 11. *Предположим, что группа W существенна. Пусть a — специальная для W точка. Камерами относительно W_a будут открытые симплициальные конусы с вершиной a. Для всякой камеры C' относительно W_a существует, и притом единственная, камера C относительно W, содержащаяся в C' и такая, что $a\in\overline{C}$. Объединение $w'(\overline{C})$ для $w'\in W_a$ будет замкнутой окрестностью точки a в E. Каждая стенка камеры C' есть стенка камеры C. Если W бесконечна и неприводима, то стенками C будут стенки C' и аффинная гиперплоскость, не параллельная стенкам камеры C'.*

Пусть $\mathfrak{H}'$ — множество гиперплоскостей $H\in\mathfrak{H}$, содержащих a. Группа W_a порождена отражениями s_H для $H\in\mathfrak{H}'$ (n°3, предложение 2). Камерами относительно W_a будут открытые симплициальные конусы с вершиной a (n°9, предложение 7). Пусть C' — такая камера и U — непустой открытый шар с центром a, не пересекающий гиперплоскостей из $\mathfrak{H}-\mathfrak{H}'$. Так как $a\in\overline{C'}$, то существует $b\in U\cap C'$. При этом в $b\notin H$ для всех $H\in\mathfrak{H}$, так что b принадлежит некоторой камере C относительно $\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{H}'\subset\mathfrak{H}$, верно включение $C\subset C'$. Множество $U\cap C'$ не пересекает никакой гиперплоскости $H\in\mathfrak{H}$ и выпукло, поэтому $U\cap C'\subset C$. Стало быть, $a\in\overline{C}$. Обратно, пусть C_1 — камера относительно W, содержащаяся в C' и такая, что $a\in\overline{C}_1$. Тогда C_1 пересекает U и $U\cap C_1\subset U\cap C'=U\cap C$. Камеры C и C_1, имея общую точку, совпадают. Для любого элемента $w' \in W_a$ будет $w'(U) = U$, и, следовательно,

$$U \cap w'(C) = w'(U \cap C) = w'(U \cap C') = U \cap w'(C').$$

Поскольку объединение $w'(C')$ с $w' \in W_a$ плотно в E, объединение $U \cap w'(C') = U \cap w'(C)$ является плотным в U, и поэтому объединение $w'(\bar{C})$ с $w' \in W_a$ содержит U. Наконец, если H — стенка камеры C', то существуют точка $c \in U \cap H$ и открытая окрестность $V \subset U$ точки c, такие, что $V \cap C'$ есть пересечение V и открытого полупространства, ограниченного H и содержащего C'. Поскольку $V \cap C' = V \cap U \cap C' = V \cap U \cap C = V \cap C$, мы видим, что H — стенка камеры C. Если W бесконечна и неприводима, то C — открытый симплекс (n°9, предложение 8) и поэтому имеет одной стенкой больше, чем открытый симплициальный конус C'.

Следствие. *Пусть W — существенная группа.*

(i) *Если $a \in E$ — специальная точка, то существует камера C, такая, что a будет экстремальной точкой замыкания $\bar{C}$.*

(ii) *Если C — камера, то в $\bar{C}$ существует экстремальная точка, специальная для W.*

Первое утверждение следует из предложения 11, а второе — из первого и из того факта, что W действует на множестве камер транзитивно.

Напротив, не всякая экстремальная точка замыкания $\bar{C}$ является специальной точкой для W (см. гл. VI, таблица X, системы B_2 и G_2).

Замечание 1). Предположим, что группа W — существенная, неприводимая и бесконечная, и вернемся к обозначениям предложения 11. Так как U — изоморфизм группы W_a на $U(W)$, то мы видим, что граф Кокстера группы перемещений $U(W)$ (порожденной отражениями $U(s_H)$ для $H \in \mathfrak{H}$) получается из графа Кокстера группы W зачеркиванием вершины i, соответствующей единственной стенке камеры C, которая не является стенкой камеры C'.

Предложение 12. *Предположим, что группа W существенна. Пусть a — специальная точка, $L(a)$ — множество ее образов относительно группы переносов L и C — некоторая камера. Тогда $\bar{C}$ пересекает $L(a)$ в одной и только одной точке. Эта точка будет экстремальной в замыкании $\bar{C}$.*

Существует камера C_1, такая, что a будет экстремальной точкой ее замыкания $\bar{C}_1$ (следствие предложения 11). Каждая камера имеет вид $C = tw'(C_1)$ с $w' \in W_a$ и $t \in L$, поскольку $W = W_a . L$. В таком случае $\bar{C}$ имеет экстремальную точку $tw'(a) = t(a) \in L(a)$. С другой стороны, $\bar{C}$ не может содержать двух различных точек из $L(a)$, так как $\bar{C}$ — фундаментальная область для W (n° 3, теорема 2).

Замечание 2). Множество $L(a)$ содержится в множестве специальных точек, но, вообще говоря, с ним не совпадает (см. гл. VI, § 2, n° 2, и таблицы I — VI).

§ 4. Геометрическое представление группы Кокстера

В этом параграфе будут рассматриваться только *вещественные* векторные пространства.

1. Форма, ассоциированная с матрицей Кокстера

Пусть S — некоторое множество и $M = (m(s, s'))_{s, s' \in S}$ — матрица Кокстера (гл. IV, § 1, n° 9) типа S. Напомним, что все это означает следующее:

1) элементы матрицы M суть целые числа или $+\infty$;
2) матрица M — симметрическая;
3) $m(s, s) = 1$ для всех s;
4) $m(s, s') \geqslant 2$ для $s \neq s'$.

Пусть $E = \mathbf{R}^{(S)}$, $(e_s)_{s \in S}$ — канонический базис в E и B_M — билинейная форма на E, такая, что

$$B_M(e_s, e_{s'}) = -\cos\frac{\pi}{m(s, s')}.$$

Форма B_M — симметрическая. Говорят, что эта форма *ассоциирована* с матрицей M. Имеем

$$B_M(e_s, e_s) = 1 \quad \text{и} \quad B_M(e_s, e_{s'}) \leqslant 0, \quad \text{если} \quad s \neq s'.$$

Пусть $s \in S$, и пусть f_s — линейная форма $x \mapsto 2B_M(e_s, x)$. Обозначим через σ_s *псевдоотражение*, определенное парой (e_s, f_s) (см. § 2, n° 1). Поскольку $\langle e_s, f_s \rangle = 2$, это будет отражение (§ 2, n° 2). Имеем

$$\sigma_s(x) = x - 2B_M(e_s, x) . e_s$$

и, в частности,

$$\sigma_s(e_{s'}) = e_{s'} + 2\cos\frac{\pi}{m(s, s')} . e_s.$$

Так как e_s неизотропен относительно B_M, то пространство E есть прямая сумма прямой $\mathbf{R}e_s$ и гиперплоскости H_s, ортогональной к e_s. Ввиду того что σ_s равно -1 на $\mathbf{R}e_s$ и 1 на H_s, псевдоотражение σ_s *сохраняет* форму B_M. Понятно поэтому, что, когда S конечно, а форма B_M невырождена (к этому случаю мы вернемся в n° 8), σ_s будет *ортогональным отражением* (§ 2, n° 3).

2. *Плоскость $E_{s,s'}$ и группа, порожденная отражениями σ_s и $\sigma_{s'}$*

В этом пункте через s и s' обозначаются два элемента множества S, $s \neq s'$. Положим $m = m(s, s')$ и обозначим символом $E_{s,s'}$ плоскость $\mathbf{R}e_s \oplus \mathbf{R}e_{s'}$.

Предложение 1. *Сужение B_M на $E_{s,s'}$ является положительной формой. Она невырождена тогда и только тогда, когда m конечно.*

Пусть $z = xe_s + ye_{s'}$ с $x, y \in \mathbf{R}$ — элемент плоскости $E_{s,s'}$. Тогда

$$B_M(z, z) = x^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{m} + y^2 = \left(x - y\cdot\cos\frac{\pi}{m}\right)^2 + y^2\sin^2\frac{\pi}{m},$$

откуда следует, что B_M положительна на $E_{s,s'}$ и что она невырождена тогда и только тогда, когда $\sin\frac{\pi}{m} \neq 0$. Предложение доказано.

Отражения σ_s и $\sigma_{s'}$ оставляют устойчивой плоскость $E_{s,s'}$. Определим порядок сужения элемента $\sigma_s\sigma_{s'}$ на $E_{s,s'}$. Здесь различаются два случая:

а) $m = +\infty$.

Пусть $u = e_s + e_{s'}$. Тогда $B_M(u, e_s) = B_M(u, e_{s'}) = 0$ и, следовательно, вектор u инвариантен относительно σ_s и $\sigma_{s'}$. Далее,

$$\sigma_s(\sigma_{s'}(e_s)) = \sigma_s(e_s - 2e_{s'}) = 3e_s + 2e_{s'} = 2u + e_s,$$

откуда

$$(\sigma_s\sigma_{s'})^n(e_s) = 2nu + e_s \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, сужение элемента $\sigma_s\sigma_{s'}$ на $E_{ss'}$ имеет бесконечный порядок.

б) *m конечно.*

Форма B_M наделяет $E_{ss'}$ структурой *евклидовой плоскости*. Поскольку скалярное произведение векторов e_s и $e_{s'}$ равно $-\cos\frac{\pi}{m} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right)$, мы можем ориентировать $E_{ss'}$ так, что угол между полупрямыми $\mathbf{R}_+e_s$ и $\mathbf{R}_+e_{s'}$ будет равен

$\pi - \frac{\pi}{m}$. Если D и D' — полупрямые, ортогональные к e_s и $e_{s'}$, то

$$(\widehat{D', D}) = \pi - (\widehat{D, D'}) = \frac{\pi}{m}.$$

Однако сужения $\bar{\sigma}_s$ и $\bar{\sigma}_{s'}$ элементов σ_s и $\sigma_{s'}$ на $E_{s, s'}$ являются *ортогональными отражениями* относительно D и D'. Поэтому, согласно следствию предложения 6 из § 2, n°5, $\bar{\sigma}_s\bar{\sigma}_{s'}$ *есть вращение на угол* $\frac{2\pi}{m}$. В частности, его порядок равен m.

Вернемся теперь к случаю всего пространства E.

Предложение 2. *Подгруппа в* $\mathbf{GL}(E)$, *порожденная* σ_s *и* $\sigma_{s'}$, *есть диэдральная группа порядка* $2m(s, s')$.

Так как элементы σ_s и $\sigma_{s'}$ порядка 2 и различны, то достаточно убедиться в том, что порядок их произведения $\sigma_s\sigma_{s'}$ равен $m(s, s')$. Когда $m(s, s')$ бесконечно, это следует из рассмотренного выше случая а). Если же $m(s, s')$ конечно, то из предложения 1 вытекает, что пространство E будет прямой суммой плоскости $E_{s, s'}$ и ортогонального к ней дополнения $V_{s, s'}$. Поскольку σ_s и $\sigma_{s'}$ действуют на $V_{s, s'}$ тождественным образом, а сужение $\sigma_s\sigma_{s'}$ на $E_{s, s'}$ ввиду б) имеет порядок $m(s, s')$, то порядок $\sigma_s | \sigma_{s'}$ тоже равен $m(s, s')$.

3. *Группа и представление, ассоциированные с матрицей Кокстера*

Мы сохраняем обозначения предыдущих пунктов. Пусть $W = W(M)$ — группа, определенная *семейством образующих* $(g_s)_{s \in S}$ и *соотношениями* [1])

$$(g_s, g_{s'})^{m(s, s')} = 1, \quad s, s' \in S, \quad m(s, s') \neq +\infty.$$

Предложение 3. *Существует, и только один, гомоморфизм*

$$\sigma\colon W \mapsto \mathbf{GL}(E),$$

для которого $\sigma(g_s) = \sigma_s$ *при всех* $s \in S$. *Элементы группы* $\sigma(W)$ *сохраняют билинейную форму* B_M.

Для доказательства существования и единственности σ достаточно убедиться в том, что $(\sigma_s\sigma_{s'})^{m(s, s')} = 1$ при $m(s,s') = = +\infty$. Но для $s = s'$ это следует из того, что σ_s имеет

---

[1]) Это означает, что если L_S — свободная группа с образующими из S, то W есть факторгруппа L_S по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей $(ss')^{m(s, s')}$ для $m(s, s') \neq +\infty$.

порядок 2, а для $s \neq s'$ — из результатов n° 2. Наконец, поскольку отражения σ_s сохраняют B_M, то же самое верно и для любого элемента группы $\sigma(W)$.

Замечание 1). В n° 4 мы докажем, что отображение σ *инъективно*. Таким образом, группа W может быть отождествлена с подгруппой в $\mathbf{GL}(E)$, порожденной отражениями σ_s.

Предложение 4. а) *Отображение $s \mapsto g_s$ множества S в W инъективно.*

б) *Каждый элемент g_s имеет порядок* 2.

в) *Если $s, s' \in S$, то $g_s g_{s'}$ имеет порядок $m(s, s')$.*

Утверждение а) следует из того, что сложное отображение

$$s \mapsto g_s \mapsto \sigma_s$$

множества S в $\mathbf{GL}(E)$ инъективно.

Для доказательства б) (соотв. в)) заметим, что порядок элемента g_s (соотв. произведения $g_s g_{s'}$) *не больше* 2 (соотв. *не больше* $m(s, s')$). Но как видно из n° 2, порядок σ_s (соотв. $\sigma_s\sigma_{s'}$) равен 2 (соотв. $m(s, s')$), так что мы получаем нужные равенства.

Ввиду а) можно *отождествить* S с подмножеством группы W при помощи отображения $s \mapsto g_s$.

Следствие. *Пара (W, S) является системой Кокстера с матрицей M.*

Это не что иное, как перефразировка свойств б) и в) с учетом определения группы W.

Замечание 2). Итак, мы показали, что *всякая матрица Кокстера соответствует некоторой группе Кокстера.*

4. Контраградиентное представление

Пусть E^* — пространство, дуальное к E. Поскольку W действует на E посредством гомоморфизма σ, она действует также с помощью перенесения структуры на E^*. Соответствующее представление

$$\sigma^*: W \to \mathbf{GL}(E^*)$$

называется *контраградиентным представлением для* σ. Имеем

$$\sigma^*(w) = {}^t\sigma(w^{-1}) \text{ для всех } w \in W.$$

Аналогично обозначим через $w(x^*)$ образ элемента $x^* \in E^*$ относительно $\sigma^*(w)$ с $w \in W$. Символом A_s при $s \in S$ обозначим множество тех $x^* \in E^*$, для которых $x^*(e_s) > 0$. Пусть

C — пересечение всех A_s, $s \in S$. В случае когда S конечно, *C — открытый симплициальный конус в E^** (§ 1, n° 6).

Теорема 1 (Титс). *Если $w \in W$ и $C \cap w(C) \neq \varnothing$, то $w = 1$.*

Укажем сразу несколько следствий этой теоремы.

Следствие 1. *Группа W действует просто транзитивным образом на множестве всех $w(C)$, $w \in W$.*

Это очевидно.

Следствие 2. *Представления σ и σ^* инъективны.*

Действительно, если $\sigma^*(w) = 1$, то $w(C) = C$, откуда по теореме 1 $w = 1$. Инъективность представления σ вытекает из инъективности представления σ^*.

Следствие 3. *Если S конечно, то $\sigma(W)$ — дискретная подгруппа группы* $\mathbf{GL}(E)$ (с канонической структурой группы Ли). *Это же справедливо и для $\sigma^*(W)$ как подгруппы в* $\mathbf{GL}(E^*)$.

Пусть $x^* \in C$. Множество U тех $g \in \mathbf{GL}(E^*)$, для которых $g(x^*) \in C$, есть окрестность единичного элемента в $\mathbf{GL}(E^*)$. По теореме имеем

$$\sigma^*(W) \cap U = \{1\}.$$

Следовательно, $\sigma^*(W)$ — дискретная подгруппа группы $\mathbf{GL}(E^*)$. С помощью перенесения структуры получаем, что $\sigma(W)$ дискретна в $\mathbf{GL}(E)$.

Доказательство теоремы 1.

Обозначим через $l(w)$ *длину элемента* $w \in W$ относительно S (гл. IV, § 1, n° 1).

Мы начнем с доказательства следующих утверждений, в которых n — целое число $\geqslant 0$.

(P_n) *Пусть w — элемент из W длины $l(w) = n$ и $s \in S$. Тогда*

либо $w(C) \subset A_s$;

либо $w(C) \subset sA_s$ и $l(sw) = l(w) - 1$.

(Q_n) *Пусть $w \in W$, $l(w) = n$ и $s, s' \in S$, $s \neq s'$. Пусть, далее, $W_{s,s'}$ — подгруппа в W, порожденная s и s'. Тогда существует элемент $u \in W_{s,s'}$, для которого*

$$w(C) \subset u(A_s \cap A_{s'}) \quad \text{и} \quad l(w) = l(u) + l(u^{-1}w).$$

Эти утверждения тривиальны при $n = 0$. Мы будем вести доказательство индукцией по n, следуя схеме

$$((\mathrm{P}_n) \text{ и } (\mathrm{Q}_n)) \Rightarrow (\mathrm{P}_{n+1}) \text{ и } ((\mathrm{P}_{n+1}) \text{ и } (\mathrm{Q}_n)) \Rightarrow (\mathrm{Q}_{n+1}).$$

Доказательство импликации $((\mathrm{P}_n)$ и $(\mathrm{Q}_n)) \Rightarrow (\mathrm{P}_{n+1})$.

Пусть $w \in W$, $l(w) = n + 1$ и $s \in S$. Мы можем записать w в виде $w = s'w'$, где $s' \in S$ и $l(w') = n$. При $s' = s$ утверждение (P_n), примененное к w', показывает, что $w'(C) \subset A_s$, откуда $w(C) \subset s(A_s)$, и мы имеем $l(sw) = l(w') = l(w) - 1$. В случае $s' \neq s$ утверждение (Q_n), примененное к w', показывает, что существует $u \in W_{s, s'}$, для которого

$$w'(C) \subset u(A_s \cap A_{s'}) \quad \text{и} \quad l(w') = l(u) + l(u^{-1}w').$$

Тогда $w(C) = s'w'(C) \subset s'u(A_s \cap A_{s'})$.

Лемма 1. *Пусть $s, s' \in S$, $s \neq s'$, и пусть $v \in W_{s, s'}$. Тогда $v(A_s \cap A_{s'})$ содержится либо в A_s, либо в $s(A_s)$ и во втором случае $l(sv) = l(v) - 1$.*

Доказательство леммы будет дано в n° 5.

Применяя эту лемму к элементу $v = s'u$, мы получаем две возможности:

либо

$$s'u(A_s \cap A_{s'}) \subset A_s \text{ и тем более } w(C) \subset A_s,$$

либо

$$s'u(A_s \cap A_{s'}) \subset s(A_s) \text{ и тем более } w(C) \subset s(A_s).$$

Кроме того, во втором случае $l(ss'u) = l(s'u) - 1$, откуда

$$l(sw) = l(ss'w') = l(ss'u \,.\, u^{-1}w') \leqslant l(ss'u) + l(u^{-1}w') =$$
$$= l(s'u) + l(u^{-1}w') - 1 = l(w) - 1,$$

а как известно, отсюда следует, что $l(sw) = l(w) - 1$.

Доказательство импликации ((P_{n+1}) и (Q_n)) $\Rightarrow$ (Q_{n+1}).

Пусть $w \in W$, $l(w) = n + 1$ и $s, s' \in S$, $s \neq s'$. Если $w(C)$ содержится в $A_s \cap A_{s'}$, то утверждение (Q_{n+1}) справедливо при $u = 1$. В противном случае предположим, например, что $w(C)$ не содержится в A_s. Согласно (P_{n+1}), $w(C) \subset s(A_s)$ и $l(sw) = n$. Согласно (Q_n), примененному к sw, существует элемент $v \in W_{s, s'}$, для которого

$$sw(C) \subset v(A_s \cap A_{s'}) \quad \text{и} \quad l(sw) = l(v) + l(v^{-1}sw).$$

Тогда

$$w(C) \subset sv(A_s \cap A_{s'})$$

и

$$l(w) = 1 + l(sw) = 1 + l(v) + l(v^{-1}sw) \geqslant$$
$$\geqslant l(sv) + l((sv)^{-1}w) \geqslant l(w),$$

так что все неравенства здесь будут равенствами. Мы видим, что (Q_{n+1}) справедливо, например, при $u = sv$.

Доказательство теоремы.

Пусть $w \in W$ и $w \neq 1$. Можно записать w в виде sw' с $s \in S$ и $l(w') = l(w) - 1$. Согласно (P_n) при $n = l(w')$, примененному к w', имеем $w'(C) \subset A_s$, так как случай $w'(C) \subset \subset s(A_s)$ исключается равенствами $l(sw') = l(w) = l(w') + 1$. Итак, $w(C) = sw'(C) \subset s(A_s)$, а поскольку A_s и $s(A_s)$ не пересекаются, $C \cap w(C) = \varnothing$. Ч. Т. Д.

5. Доказательство леммы 1

Пусть $E^*_{s,s'}$ — дуальная к $E_{s,s'} = \mathbf{R}e_s \oplus \mathbf{R}e_{s'}$ плоскость (n° 2). Отображение, сопряженное к инъекции $E_{s,s'} \to E$, является сюръективным отображением

$$p\colon E^* \to E^*_{s,s'},$$

которое коммутирует с действием группы $W_{s,s'}$. Ясно, что A_s, $A_{s'}$ и $A_s \cap A_{s'}$ — *прообразы относительно* p соответствующих подмножеств на плоскости $E^*_{s,s'}$ (рассматриваемой как пространство контрагредиентного представления группы Кокстера $W_{s,s'}$). Так как длина элемента группы $W_{s,s'}$ относительно $\{s, s'\}$ совпадает с его длиной относительно S (гл. IV, § 1, n° 8), то *все сводится в конце концов к случаю, когда* $S = \{s, s'\}$. Если $m = m(s, s')$, то W — *диэдральная* группа порядка $2m$.

Будем различать два случая:

а) $m = +\infty$.

Пусть $(\varepsilon, \varepsilon')$ — базис, дуальный к $(e_s, e_{s'})$. Тогда

$$s\,.\,\varepsilon = -\varepsilon + 2\varepsilon', \quad s'\,.\,\varepsilon = \varepsilon,$$
$$s\,.\,\varepsilon' = \varepsilon' \quad , \quad s'\,.\,\varepsilon' = 2\varepsilon - \varepsilon'.$$

Пусть D — аффинная прямая в E^*, содержащая ε и ε'. Приведенные выше формулы показывают, что D устойчива относительно s и s' и что сужение s (соотв. s') на D есть отражение относительно точки ε' (соотв. ε). Пусть

$$\theta\colon \mathbf{R} \to D$$

— аффинная биекция $t \mapsto \theta(t) = t\varepsilon + (1-t)\varepsilon'$. Пусть I_n — образ относительно θ открытого интервала $]n, n+1[$, и пусть C_n — объединение λI_n, $\lambda > 0$. Тогда $C_0 = C$. Далее, согласно *замечанию* из § 2, n° 4, примененному к аффинному пространству D, интервалы I_n переставляются просто транзитивным образом группой W. Стало быть, то же самое относится и к C_n. Если $v \in W$, то $v(C)$ совпадает с одним из C_n и, следовательно, содержится в A_s при $n \geqslant 0$ и в $s(A_s)$ при

$n < 0$. Во втором случае l_0 и l_n лежат по разные стороны от точки ε', откуда $l(sv) = l(v) - 1$ (*там же*).

б) *m конечно.*

В этом случае форма B_M невырождена (n°2) и позволяет отождествить E^* с E. Мы видели, что плоскость E можно ориентировать так, что угол между полупрямыми $\mathbf{R}_+ e_s$ и $\mathbf{R}_+ e_{s'}$ будет равен $\pi - \frac{\pi}{m}$. Пусть D (соотв. D') — полупрямая, получающаяся из $\mathbf{R}_+ e_s$ (соотв. $\mathbf{R}_+ e_{s'}$) вращением на угол $\pi/2$ (соотв. $-\pi/2$), как это показано на рис. 2.

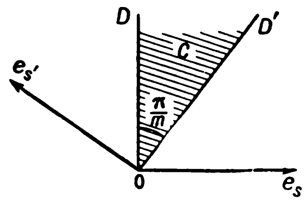


Рис. 2.

Камера C есть множество тех $x \in E$, для которых скалярное произведение с e_s и $e_{s'}$ будет > 0. Это открытый угловой сектор с началом D' и концом D. Согласно *замечанию* из § 2, n°5, любой элемент v из W переводит C в угловой сектор, расположенный от D либо по ту же сторону, что и C (т. е. содержащийся в A_s), либо по другую сторону (т. е. содержащийся в sA_s), и в последнем случае

$$l(sv) = l(v) - 1.$$

Тем самым доказательство леммы закончено.

6. *Фундаментальная область группы W в объединении камер*

Мы сохраняем обозначения n°4. Обозначим через H_s, $s \in S$, гиперплоскость в E^*, ортогональную к e_s; через $\overline{A}_s$ — множество тех $x^* \in E^*$, для которых $\langle x^*, e_s \rangle \geqslant 0$, и через $\overline{C}$ — пересечение всех $\overline{A}_s$ с $s \in S$. В слабой топологии $\sigma(E^*, E)$, определяемой двойственностью между E^* и E (*Топ. вект. простр.*, гл. II, § 4, n°2), множества $\overline{A}_s$ будут замкнутыми полупространствами, а $\overline{C}$ — замкнутым выпуклым конусом. Далее, $\overline{C}$ будет *замыканием* C. В самом деле, если $x^* \in \overline{C}$ и $y^* \in C$, то $x^* + ty^* \in C$ для любого вещественного числа $t > 0$ и $x^* = \lim\limits_{t \to 0} (x^* + ty^*)$.

Для $X \subset S$ положим

$$C_X = \Big(\bigcap_{s \in X} H_s\Big) \cap \Big(\bigcap_{s \in S-X} A_s\Big).$$

Имеем $C_X \subset \bar{C}$, $C_\varnothing = C$ и $C_S = \{0\}$. Множества C_X с $X \in \mathfrak{P}(S)$ образуют *разбиение* $\bar{C}$.

С другой стороны, напомним (гл. IV, § 1, n° 8), что символом W_X мы обозначали подгруппу в W, порожденную множеством X. Очевидно, что $w(x^*) = x^*$ для $w \in W_X$ и $x^* \in C_X$.

Предложение 5. *Пусть X, $X' \subset S$ и w, $w' \in W$. Если $w(C_X) \cap w'(C_{X'}) \neq \varnothing$, то $X = X'$, $wW_X = w'W_{X'}$ и $w(C_X) = w'(C_{X'})$.*

Все немедленно сводится к случаю, когда $w' = 1$. Доказательство проведем индукцией по длине n элемента w. При $n = 0$ утверждение очевидно. Если $l(w) > 0$, то существует $s \in S$, для которого $l(sw) = l(w) - 1$, а тогда (см. конец n° 4) $w(C) \subset s(A_s)$, откуда $w(\bar{C}) \subset s(\bar{A}_s)$. Так как $\bar{C} \subset \bar{A}_s$, то

$$\bar{C} \cap w(\bar{C}) \subset H_s.$$

Поэтому $s(x^*) = x^*$ для всех $x^* \in \bar{C} \cap w(\bar{C})$ и тем более для всех

$$x^* \in C_{X'} \cap w(C_X).$$

Таким образом, из соотношения $C_{X'} \cap w(C_X) \neq \varnothing$ следует, с одной стороны, что $C_{X'} \cap H_s \neq \varnothing$, откуда $s \in X'$, и, с другой стороны, что $C_{X'} \cap sw(C_X) \neq \varnothing$. По предположению индукции тогда имеем $X = X'$ и $swW_X = W_{X'} = W_X$, откуда $sw \in W_X$ и $w \in W_X$, поскольку $s \in W_X$. Значит, $wW_X = W_{X'}$ и $w(C_X) = C_X = C_{X'}$.

Следствие. *Пусть X — подмножество множества S и x^* — элемент из C_X. Тогда стабилизатором x^* в W является группа W_X.*

Пусть теперь U — объединение всех $w(\bar{C})$ для $w \in W$, и пусть $\mathfrak{F}$ — множество подмножеств в U вида $w(C_X)$ с $X \subset S$ и $w \in W$. Из сказанного выше следует, что $\mathfrak{F}$ является *разбиением* U.

Предложение 6. (i) *Конус U выпукл.*

(ii) *Каждый замкнутый отрезок в U пересекает лишь конечное число элементов множества $\mathfrak{F}$.*

(iii) *Конус $\bar{C}$ есть фундаментальная область для группы W, действующей в U.*

Для доказательства утверждения (iii) достаточно показать, что если $w(x^*) = y^*$ для x^*, $y^* \in \bar{C}$ и $w \in W$, то $x^* = y^*$. Но в S существуют два таких подмножества X и Y, что $x^* \in C_X$ и $y^* \in C_Y$. Имеем $w(C_X) \cap C_Y \neq \varnothing$ и по предложению 5 $X = Y$ и $w \in W_X$, откуда следует, что $x^* = y^*$.

Пусть теперь x^*, $y^* \in U$. Покажем, что *замкнутый отрезок* $[x^*y^*]$ *пересекает только конечное число элементов из* $\mathfrak{F}$, доказав тем самым сразу и (i), и (ii). С точностью до преобразования x^* и y^* при помощи одного и того же элемента группы W можно предполагать, что $x^* \in \bar{C}$. Пусть w — элемент из W, для которого $y^* \in w(\bar{C})$. Проведем индукцию по длине элемента w. Для $s \in S$ соотношение $w(\bar{C}) \not\subset A_s$ эквивалентно соотношению $w(C) \not\subset A_s$ и, следовательно, неравенству $l(sw) < l(w)$ (см. n° 4). Поэтому из предложения 7 гл. IV, § 1, n° 8, вытекает, что существует лишь конечное число $s \in S$, для которых $w(\bar{C}) \not\subset \bar{A}_s$. Стало быть, множество T таких $s \in S$, что $\langle y^*, e_s \rangle < 0$, конечно. С другой стороны, пересечение $\bar{C} \cap [x^*y^*]$ есть замкнутый отрезок $[x^*z^*]$. Если $z^* = y^*$, т. е. если $y^* \in \bar{C}$, то существуют подмножества X и Y в S, для которых $x^* \in C_X$ и $y^* \in C_Y$. Тогда открытый отрезок $]x^*y^*[$ содержится в $C_{X \cap Y}$, откуда $[x^*y^*] \subset C_X \cup C_Y \cup C_{X \cap Y}$. Если $z^* \neq y^*$, то найдется такой элемент $s \in T$, что $z^* \in H_s$. Тогда $w(C) \not\subset A_s$ и $l(sw) < l(w)$. Следовательно, по предположению индукции отрезок $[z^*y^*] = s([z^*(sw(y^*))])$ покрывается конечным числом элементов из $\mathfrak{F}$. Поэтому и

$$[x^*y^*] = [x^*z^*] \cup [z^*y^*],$$

ибо $[x^*z^*] \subset \bar{C}$.

7. *Неприводимость геометрического представления группы Кокстера*

Сохраним обозначения предыдущих n° и предположим, что S конечно.

Предложение 7. *Предположим, что система* (W, S) *не приводима* (гл. IV, § 1, n° 9). *Пусть* E^0 — *подпространство в* E, *ортогональное к* E *по отношению к форме* B_M. *Группа* W *действует на* E^0 *тривиально, и любое отличное от* E *подпространство, устойчивое относительно* W, *содержится в* E^0.

Если $x \in E^0$, то $\sigma_s(x) = x - 2B_M(e_s, x)e_s = x$ для всех $s \in S$. Поэтому группа W, порожденная множеством S, тривиально действует на E^0.

Пусть E' — подпространство в E, устойчивое относительно W. Пусть s, $s' \in S'$ — два элемента, *соединенные* в графе Кокстера Γ пары (W, S) (гл. IV, § 1, n° 9). Напомним, что это означает выполнение неравенства $m(s, s') \geqslant 3$.

Предположим, что $e_s \in E'$. Тогда $\sigma_{s'}(e_s) \in E'$, а так как коэффициент при $e_{s'}$ в $\sigma_{s'}(e_s)$ отличен от нуля, то $e_{s'} \in E'$. Ввиду связности Γ из этого следует, что подпространство E', содержащее хотя бы один вектор e_s, содержит их все и совпадает с E. Этот случай исключен условием, и поэтому по предложению 3 из § 2, n°2, для всех $s \in S$ пространство E' должно содержаться в гиперплоскости H_s, ортогональной к e_s. Так как пересечение гиперплоскостей H_s совпадает с E^0, то тем самым предложение доказано.

Следствие. *Предположим, что система* (W, S) *неприводима. Тогда*

а) *если* B_M *невырождена, то* W*-модуль* E *абсолютно прост;*

б) *если* B_M *вырождена, то* W*-модуль* E *является полупростым.*

В случае а) предложение 7 показывает, что модуль E прост, а тем самым и абсолютно прост (§ 2, n° 1, предложение 1).

В случае б) имеем $E^0 \neq 0$, $E \neq E^0$ (поскольку $B_M \neq 0$) и предложение 7 показывает, что E^0 не допускает устойчивого относительно W дополнения. Следовательно, W-модуль E^0 не является полупростым.

8. *Критерий конечности*

Сохраним обозначения предыдущих n° и предположим, что S конечно.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) W *— конечная группа;*

(2) B_M *— невырожденная положительная форма.*

(1)$\Rightarrow$(2). Пусть $S = \bigcup_i S_i$ — разложение множества S на связные компоненты (гл. IV, § 1, n° 9), и пусть $W = \prod_i W_i$ — соответствующее ему разложение группы W. Пространство E отождествляется с прямой суммой пространств $E_i = \mathbf{R}^{S_i}$, а B_M — с прямой суммой соответствующих форм B_{M_i}. Таким образом, мы приходим к случаю, когда система (W, S) *неприводима*. Поскольку W предполагается конечной, E будет полупростым W-модулем (дополнение, предложение 2). Ввиду следствия предложения 5 отсюда вытекает, что модуль E абсолютно прост. Пусть тогда B' — невырожденная положительная форма на E, и пусть B'' — сумма ее образов относительно W. Поскольку эта сумма инвариантна относительно W, она пропорциональна форме B_M (§ 2, n°1, предложение 1). Так как $B_M(e_s, e_s) = 1$ для всех $s \in S$, то коэффициент пропорциональности >0, а так как форма B'' положительна, то и B_M обладает этим свойством, откуда следует утверждение (2).

(2)$\Rightarrow$(1). Если B_M—невырожденная положительная форма, то ортогональная группа $\mathbf{O}(B_M)$ *компактна* (*Интегр.*, гл. VII, § 3, n°1). Поскольку $\sigma(W)$ — *дискретная* подгруппа в $\mathbf{O}(B_M)$ (следствие 3 теоремы 1), отсюда следует, что $\sigma(W)$ конечна, а значит, и группа W конечна. Ч. Т. Д.

В процессе доказательства был получен следующий результат:

Следствие. *Если система (W, S) неприводима и конечна, то E — абсолютно простой W-модуль.*

Критерий, доставляемый теоремой 2, позволяет классифицировать все *конечные* группы КоксReferences (см. гл. VI, § 4). Мы ограничимся здесь одним предварительным результатом.

Предложение 8. *Если группа W конечна, то граф системы (W, S) является лесом* (гл. IV, Дополнение).

Действительно, в противном случае этот граф содержал бы цикл $(s_1, \ldots, s_n)$, $n \geqslant 3$. Если положить $m_i = m(s_i, s_{i+1})$, $1 \leqslant i < n$, и $m_n = m(s_n, s_1)$, то это означает, что $m_i \geqslant 3$ для всех i. Пусть

$$x = e_{s_1} + \ldots + e_{s_n}.$$

Тогда $B_M(x, x) = n + 2\sum_{i<j} B_H(e_{s_i}, e_{s_j})$. Однако[1])

$$B_M(e_{s_i}, e_{s_{i+1}}) = -\cos\frac{\pi}{m_i} \leqslant -\cos\frac{\pi}{3} \leqslant -\frac{1}{2},$$

---

[1]) Корнями уравнения $z^3 - 1 = 0$ являются 1 и $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ и, следовательно, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Заметим по этому поводу, что $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично корнями уравнения $z^2 - i = 0$ являются $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, откуда

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и, значит, } \sin\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

и то же самое верно для $B_M(e_{s_n}, e_{s_1})$. Поскольку остальные члены рассматриваемой суммы будут $\leqslant 0$, получаем

$$B_M(x, x) \leqslant n - n = 0$$

в противоречие с тем, что форма B_M положительна и невырождена.

Следствие. *Если система* (W, S) *неприводима и конечна, то ее граф является деревом.*

Действительно, связный лес — это дерево.

Сравнение с результатами § 3.

Пусть сначала (W, S) — конечная группа Кокстера. Обозначим через $(x|y)$ форму $B_M(x, y)$. По теореме 2 она определяет скалярное произведение на E. При всяком $s \in S$ пусть H_s — гиперплоскость, ассоциированная с ортогональным отражением σ_s, и пусть $\mathfrak{H}$ — семейство гиперплоскостей $w(H_s)$ для $s \in S$, $w \in W$. Пусть C_0 — множество $x \in E$, для которых $(x|e_s) > 0$ при всех $s \in S$. Наконец, отождествим W (при помощи σ) с подгруппой ортогональной группы $\mathbf{O}(E)$ евклидова пространства E.

Предложение 9. *В предыдущих обозначениях* W *есть подгруппа в* $\mathbf{O}(E)$, *порожденная отражениями относительно гиперплоскостей из* $\mathfrak{H}$. *Это существенная группа* (§ 3, n° 7) *и* C_0 — *камера в* E *относительно системы* $\mathfrak{H}$.

Первое утверждение тривиально. С другой стороны, если вектор $x \in E$ инвариантен относительно W, то он ортогонален всем e_s и, следовательно, нулевой. Поэтому группа W существенна. Наконец, изоморфизм $E \to E^*$, определяемый формой B_M, переводит C_0 в множество C из n° 4. Доказанное там свойство (P_n) показывает, что для любого $w \in W$ и любого $s \in S$ множество $w(C_0)$ не пересекается с H_s. Приходим к заключению, что C_0 содержится в дополнении U объединения гиперплоскостей из $\mathfrak{H}$, а поскольку C_0 связно, открыто и замкнуто в U, то это есть *камера* в E относительно $\mathfrak{H}$. Ч. Т. Д.

К W и C_0 можно, следовательно, применить все утверждения, доказанные в § 3. В частности, $\overline{C}_0$ — *фундаментальная область* для действия группы W на E (иначе говоря, конус U, определенный в n° 6, совпадает со всем E).

Обратно, пусть E — вещественное векторное пространство конечной размерности со скалярным произведением $(x|y)$, и пусть W — существенная группа перемещений в E, оставляющая 0 неподвижным. Предположим, что W *порождена* *отражениями*. Пусть C_0 — камера в E относительно W (см. § 3), а S — множество ортогональных отражений относительно ее стенок. Тогда (W, S) — *конечная система Кокстера* (§ 3, n° 2, теорема 1). Далее, обозначим через H_s, $s \in S$, стенку камеры C_0, соответствующую образующей s, и через e_s — единичный вектор, ортогональный к H_s и лежащий по ту же сторону от H_s, что и C_0. Если $(m(s, s'))$ — матрица Кокстера системы (W, S), то предложения 3 и 7 из § 3 показывают, что

$$(e_s \mid e_{s'}) = -\cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right)$$

и что e_s образуют базис в E. Таким образом, *естественное представление W в E отождествляется с представлением σ из* n° 3.

9. Случай, когда форма B_M положительна и вырождена

В этом пункте мы предполагаем, что множество S конечно, система (W, S) *неприводима*, а форма B_M *положительна и вырождена*.

Лемма 2. *Ортогональное ко всему E по отношению к B_M пространство E^0 имеет размерность* 1. *Оно порождено вектором $v = \sum_{s \in S} v_s e_s$ с $v_s > 0$ для всех s.*

Это следует из леммы 4, § 3, n° 5, примененной к матрице формы $B_M(e_s, e_{s'})$.

Пусть $v = \sum_s v_s e_s$ — вектор, удовлетворяющий условиям леммы 2 и такой, что $\sum_s v_s = 1$. Пусть A — аффинная гиперплоскость в E^*, состоящая из тех $y^* \in E^*$, для которых $\langle v, y^* \rangle = 1$. Если через T обозначить ортогональное дополнение к v в E^*, то A наделяется естественным образом структурой аффинного пространства с пространством переносов T. Далее, форма B_M при переходе к факторпространству определяет невырожденное скалярное произведение на E/E^0, а значит, и на дуальном к нему пространстве T. Тем самым получаем структуру *евклидова пространства* на аффинном пространстве A (*Алг*., гл. IX, § 6, n° 6).

Пусть G — подгруппа группы $\mathbf{GL}(E)$, состоящая из автоморфизмов, которые оставляют инвариантными вектор v и форму B_M. Контрагредиентный к $g \in G$ элемент ${}^t g^{-1}$ оставляет устойчивыми A и T и определяет при сужении на A *перемещение* $i(g)$ пространства A (см. § 3). Совершенно очевидно, что таким образом получается *изоморфизм* группы G на группу перемещений пространства A. Далее, стабилизатор G_a точки $a \in A$ отождествляется с ортогональной группой гильбертова пространства I и является, следовательно, *компактным.* В то же время G — локально компактная группа, счетная в бесконечности, и A — пространство Бэра, поэтому (*Интегр.*, гл. VII, приложение I, лемма 2) отображение ψ: $g \mapsto g(a)$ определяет гомеоморфизм G/G_a на A. Следовательно, *G действует на A собственно разрывно* (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 4, n° 2, следствие предложения 5). Поскольку W — подгруппа в G, она отождествляется с группой перемещений пространства A. Докажем теперь, что эта группа удовлетворяет предположениям § 3. Более точно:

Предложение 10. *Группа W с дискретной топологией действует на A собственно разрывно. Она порождена ортогональными отражениями. Она бесконечна, неприводима и существенна* (§ 3, n° 7). *Пересечение $C \cap A$ есть камера в A относительно W. Если обозначить через L_s гиперплоскость в A, высекаемую на A гиперплоскостью в E^*, ортогональной к e_s, то все L_s с $s \in S$ образуют семейство стенок для $C \cap A$. Если ε_s — единичный вектор в T, ортогональный к L_s и лежащий по ту же сторону от L_s, что и $C \cap A$, то* $(\varepsilon_s | \varepsilon_t) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{m(s,t)}\right)$ (*для $s, t \in S$*) *и матрица Кокстера группы W* (§ 3, n° 4) *совпадает с M.*

Согласно следствию 3 теоремы 1, группа W дискретна в $\mathbf{GL}(E)$, а следовательно, и в G и собственно разрывно действует в A. Пусть $s \in S$. Так как $\operatorname{Card} S \geqslant 2$, то гиперплоскость в E^*, ортогональная к e_s, не ортогональна к v и ее пересечение L_s с A тоже будет гиперплоскостью. Таким образом, перемещение, соответствующее s, есть преобразование порядка 2, оставляющее неподвижными все точки гиперплоскости L_s; это не что иное, как ортогональное отражение, ассоциированное с L_s. Тем самым W порождена ортогональными отражениями. Теорема 2 показывает тогда, что W бесконечна, а предложение 7 — что она существенна и неприводима.

Так как C — открытый симплициальный конус, стенками которого являются гиперплоскости с уравнениями $\langle x^*, e_s \rangle = 0$ (для $s \in S$), то пересечение $C \cap A$ выпукло и, значит, связно, открыто и замкнуто в дополнении объединения гиперплоскостей L_s в A. Далее, $C \cap A$ непусто, потому что $x^* \in C$ влечет $\langle x^*, v \rangle = \sum_s v_s \langle x^*, e_s \rangle > 0$ и $\langle x^*, v \rangle^{-1} x^* \in C \cap A$. Отсюда следует, что $C \cap A$ является камерой в A относительно системы гиперплоскостей L_s. Кроме того, $w(C \cap A) \cap L_s = \varnothing$

для всех $w \in W$ (см. n° 4, свойство (P_n)), и поэтому $C \cap A$ — камера в A относительно системы, полученной при действии на гиперплоскости L_s всеми элементами группы W. Согласно следствию теоремы 1 из § 3, n° 2, отсюда следует, что $C \cap A$ будет камерой в A относительно W.

Пусть теперь a_s^* — вершина симплекса $C \cap A$, не лежащая на L_s. Тогда

$$\langle a_s^*, e_t \rangle = 0$$

для $s, t \in S$, $s \neq t$, и

$$\langle a_s^*, e_s \rangle = v_s^{-1} \langle a_s^*, v \rangle = v_s^{-1}.$$

Пусть ε_s — вектор в T, определенный соотношениями

$$(\varepsilon_s \mid a_s^* - a_t^*) = v_s^{-1} \quad \text{для} \quad t \in S, \ t \neq s.$$

Вектор ε_s ортогонален к L_s и лежит по ту же сторону от L_s, что и $C \cap A$. Кроме того,

$$(\varepsilon_s \mid a_s^* - a_t^*) = \langle e_s, a_s^* - a_t^* \rangle, \quad \text{каковы бы ни были} \quad s, t \in S.$$

Это показывает, что ε_s — образ класса элемента e_s при изоморфизме E/E^0 на T, определенном квадратичной формой B_M. Отсюда следует, что

$$(\varepsilon_s \mid \varepsilon_t) = B_M(e_s, e_t).$$

Таким образом, ε_s является на самом деле единичным вектором, и последнее утверждение предложения 10 доказано.

Мы скажем, что евклидово аффинное пространство A, снабженное группой W, есть *пространство, ассоциированное с матрицей Кокстера* M, и обозначим его символом A_M. Предложение 10 допускает обращение:

Предложение 11. *Пусть W — группа перемещений евклидова аффинного пространства A, удовлетворяющая условиям § 3. Предположим, что W бесконечна, существенна и неприводима. Тогда форма B_M, сопоставленная матрице Кокстера M группы W, вырождена и положительна и существует единственный изоморфизм ассоциированного с M аффинного пространства A_M на A, коммутирующий с действием группы W. Этот изоморфизм переводит скалярное произведение на A_M в некоторое кратное скалярного произведения на A.*

Пусть C_0 — камера в A и S — множество ортогональных отражений относительно стенок C_0. Если η_s обозначает единичный вектор, который ортогонален гиперплоскости N_s, ассоциированной с s, и лежит по ту же сторону от N_s, что и C_0 (§ 3, предложение 3), то форма B_M обладает тем свойством, что $B_M(e_s, e_t) = (\eta_s | \eta_t)$ для $s, t \in S$. Следовательно, она *положительна*. Так как η_s линейно зависимы (§ 3, n° 9, предложение 8), то она *вырождена*.

Таким образом, мы можем применить к M предыдущие построения. В тех же обозначениях, что и ранее, имеем $(\varepsilon_s | \varepsilon_t) = (\eta_s | \eta_t)$, и существует, причем единственный, изоморфизм φ гильбертовых пространств, отображающий T на пространство переносов в A, так что $\varphi(\varepsilon_s) = \eta_s$. Пусть a и b — две различные вершины камеры C_0 и s_0 — отражение из S, для которого $a \notin N_{s_0}$. Пусть, далее, $\lambda = (\eta_{s_0} | a - b)$ и ψ — аффинная биекция пространства A_M на A, определенная формулой

$$\psi(a_{s_0} + x) = a + v_{s_0} \lambda \varphi(x) \quad \text{для} \quad x \in T.$$

Отсюда сразу видно, что $\psi(L_s) = N_s$ при всех $s \in S$ и что ψ переводит скалярное произведение на A_M в некоторое кратное скалярного произведения на A. Тотчас приходим к выводу что, ψ коммутирует с действием W. Наконец, единственность ψ очевидна, потому что a_s, например, есть единственная точка в A_M, инвариантная относительно отражений $t \in S$, $t \neq s$.

§ 5. Инварианты в симметрической алгебре

1. Ряд Пуанкаре градуированной алгебры

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, отличное от 0. Пусть M — градуированный K-модуль типа $\mathbf{Z}$ и M_n — множество однородных элементов из M степени n. Предположим, что M_n для каждого n есть *свободный модуль конечного типа*. Тогда ранг $\mathrm{rg}_K(M_n)$ определен при всех n (*Ком. алг.*, гл. II, § 5, n° 3).

Определение 1. *Если существует $n_0 \in \mathbf{Z}$, такое, что $M_n = 0$ при $n \leqslant n_0$, то формальный ряд $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \mathrm{rg}_K(M_n) T^n$, являющийся элементом кольца $\mathbf{Q}((T))$, называется рядом Пуанкаре модуля M и обозначается символом $P_M(T)$.*

Пусть M' — другой градуированный K-модуль типа $\mathbf{Z}$ и $(M'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — его градуировка. Предположим, что M'_n равно нулю для всех n, меньших некоторого числа. Тогда

$$P_{M \oplus M'}(T) = P_M(T) + P_{M'}(T), \tag{1}$$

и если снабдить $M \otimes_K M'$ полной градуировкой (*Алг.*, гл. II, 3-е изд., § 11, n° 5), то

$$P_{M \otimes M'}(T) = P_M(T) P_{M'}(T). \tag{2}$$

Предложение 1. *Пусть* $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} S_n$ — *коммутативная градуированная* K-*алгебра, которая допускает систему образующих* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *состоящую из однородных алгебраически независимых элементов, и пусть* d_i — *степень* x_i. *Предположим, что* $d_i > 0$ *для всех* i. *Тогда* S_n *будут свободными модулями конечного ранга над* K *и*

$$P_S(T) = \prod_{i=1}^{m} (1 - T^{d_i})^{-1}. \tag{3}$$

Действительно, S отождествляется с тензорным произведением $K[x_1] \otimes K[x_2] \otimes \ldots \otimes K[x_m]$, снабженным полной градуировкой. Ряд Пуанкаре модуля $K[x_i]$ совпадает с

$$\sum_{n \geqslant 0} T^{nd_i} = (1 - T^{d_i})^{-1},$$

и остается применить (2).

В условиях предложения 1 будем говорить, что S — *градуированная* K-*алгебра многочленов*.

Следствие. *Степени* d_i *с точностью до порядка определены алгеброй* S.

Действительно, обратным рядом к $P_S(T)$ является многочлен $N(T) = \prod_{i=1}^{m} (1 - T^{d_i})$, который тем самым однозначно определен. Если q — целое число $\geqslant 1$ и $\zeta \in \mathbf{C}$ — примитивный корень q-й степени из 1, то кратность корня ζ в $N(T)$ равна числу тех d_i, которые кратны q. Это число равно нулю для достаточно больших q. Число d_i равных q тоже однозначно определяется последовательным спуском.

Целые числа d_i называются *характеристическими степенями* алгебры S. Их число равно степени трансцендентности алгебры S над K в случае, когда K — поле. Его же мы назовем степенью трансцендентности S над K и в общем случае. Это кратность корня 1 многочлена $N(T)$.

Пусть $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} S_n$ — коммутативная градуированная K-алгебра и $R = \bigoplus_{n \geqslant 0} R_n$ — ее градуированная подалгебра. *Предположим, что каждая компонента* R_n — *свободный модуль конечного типа и что* R-*модуль* S *допускает конечный базис, состоящий из однородных элементов* $z_1, z_2, \ldots, z_N$ *степеней* $f_1, f_2, \ldots, f_N$. Тогда, обозначив через M градуированный K-модуль $\sum_{j=1}^{N} K z_j$, мы придем к выводу, что градуированный K-модуль S будет изоморфен $R \otimes_K M$, следовательно, каждая компонента S_n — свободный модуль конечного типа и

$$P_S(T) = P_M(T) \, . \, P_R(T) = \left(\sum_{j=1}^{N} T^{f_j} \right) P_R(T). \tag{4}$$

Предложение 2. *Сохраним предыдущие обозначения и предположим, что S и R — градуированные K-алгебры многочленов.*

(i) *R и S имеют одну и ту же степень трансцендентности r над K.*

(ii) *Пусть $p_1, \ldots, p_r$ (соотв. $q_1, \ldots, q_r$) — характеристические степени алгебры S* (соотв. *R*). *Тогда*

$$\prod_{i=1}^{r} (1 - T^{q_i}) = \left(\sum_{j=1}^{N} T^{f_j} \right) \prod_{i=1}^{r} (1 - T^{p_i}).$$

(iii) $Np_1p_2 \ldots p_r = q_1q_2 \ldots q_r$.

Во-первых, формула (4) показывает, что кратность корня 1 в многочленах $P_S(T)^{-1}$ и $P_R(T)^{-1}$ одинакова. Воспользовавшись равенством (3), получаем (i), а затем (ii).

Из (ii) следует, что

$$\prod_{i=1}^{r} (1 + T + T^2 + \ldots + T^{q_i - 1}) = \left(\sum_{j=1}^{N} T^{f_j} \right) \prod_{i=1}^{r} (1 + T + T^2 + \ldots \\ \ldots + T^{p_i - 1}).$$

Положив $T = 1$ в этом равенстве, мы получаем (iii).

Замечание. Пусть $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ — градуированная K-алгебра многочленов, d_i — степень X_i и $F(X_1, \ldots, X_n)$ — однородный элемент степени m в S. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} d_i X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = mF. \tag{5}$$

Действительно, очевидно, что K-линейное отображение D алгебры S в себя, переводящее каждый однородный элемент z степени p в pz, есть дифференцирование алгебры S.

Следовательно,

$$mF(X_1, \ldots, X_n) = D(F(X_1, \ldots, X_n)) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) \frac{\partial F}{\partial X_i} = \sum_{i=1}^{n} d_i X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}.$$

2. Инварианты конечной линейной группы: свойства модуля

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, V — некоторый K-модуль, G — группа, действующая на V. Известно, что любой автоморфизм модуля V однозначно продолжается до автоморфизма симметрической алгебры $S = S(V)$ и, стало быть, G действует на этой алгебре. Обозначим через $g_S . x$, где $x \in S$, $g \in G$, образ элемента x относительно g. Пусть R — подалгебра S^G алгебры S, состоящая из инвариантных относительно G элементов.

Предположим, что G конечна, V — конечного типа и K — нётерово. Тогда S есть *R-модуль конечного типа*, а R есть K-алгебра конечного типа (*Ком. алг.*, гл. V, § 1, n°9, теорема 2). Предположим, что S — область целостности и N — ее поле отношений. Поле отношений L алгебры R является множеством элементов из N, инвариантных относительно группы G (*там же*, следствие предложения 23). Следовательно, *N — расширение Галуа* поля L. Всякий элемент из N записывается в виде z/t с $z \in S$ и $t \in R$ (*там же*, предложение 23). Согласно следствию 3 предложения 26 из *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 7, n° 10, ранг R-модуля S равен $[N:L]$. Предположим, что G действует на V свободно. Тогда группа Галуа поля N над L отождествляется с G и $[N:L] = \mathrm{Card}\, G$. Итак,

$$\mathrm{rg}_R(S) = [N:L] = \mathrm{Card}(G). \tag{6}$$

Для любой градуированной алгебры $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots \ldots \oplus A_n \oplus \ldots$ обозначим через A_+ идеал $\bigoplus_{n>0} A_n$.

Теорема 1. *Пусть K — коммутативное поле, V — векторное пространство конечной размерности над K, $S = S(V)$ — симметрическая алгебра пространства V, G — конечная группа автоморфизмов V и R — градуированная подалгебра в S, состоящая из инвариантных относительно G элементов. Предположим, что G порождена псевдоотражениями* (§ 2, n°1) *и что $q = \mathrm{Card}(G)$ взаимно просто с характеристическим показателем поля K. Тогда R-модуль S имеет базис, состоящий из q однородных элементов.*

а) Так как каждый подмодуль модуля $S/(R_+S)$ свободен над $R_0 = K$, то достаточно показать (ввиду предложения 7 из *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 11, n° 4), что канонический гомоморфизм $R_+ \otimes_R S$ в S инъективен. Для любого R-модуля E символом $T(E)$ обозначим R-модуль $\mathrm{Ker}(R_+ \otimes_R E \to E)$ (*иначе говоря, $T(E) = \mathrm{Tor}_1^R(R/R_+, E)_*$). Если E, E' — два R-модуля и если u — гомоморфизм E в E', то гомоморфизм $1 \otimes u$ модуля $R_+ \otimes E$ в $R_+ \otimes E'$ при сужении на $T(E)$ определяет гомоморфизм модуля $T(E)$ в $T(E')$, который мы обозначим через $T(u)$. Если u' — гомоморфизм E' в R-модуль E'', то $T(u' \circ u) = T(u') \circ T(u)$. Следовательно, при R-линейном действии G на E группа G действует и в $T(E)$.

б) Действуя R-линейно в S, группа G, следовательно, действует также в $T(S)$. Далее, $T(S)$ естественным образом снабжается структурой градуированного S-модуля. Покажем сначала, что $g \in G$ переводит каждый элемент x из $T(S)$ в элемент, сравнимый с x по модулю $S_1 T(S)$. Достаточно проверить это для псевдоотражения g. В этом случае существует ненулевой вектор $v \in V$, такой, что $g(x) - x \in Kv$ при всех $x \in V$. Поскольку V порождает S, приходим к заключению, что g_S действует на S/Sv тривиально. Следовательно, для любого $y \in S$ существует элемент $h(y)$ в S, такой, что

$$g_S(y) - y = h(y)\, v.$$

Этот элемент определяется по y однозначным образом, поскольку S — область целостности и вектор v — ненулевой. Очевидно, что h — эндоморфизм степени -1 R-модуля S. Итак, $g_S - 1_S = m_v \circ h$, где m_v — гомотетия в S относительно v. Следовательно,

$$T(g_S) - 1_{T(S)} = T(g_S - 1_S) = T(m_v) \circ T(h),$$

и образ этого эндоморфизма содержится в $vT(S)$, откуда следует наше утверждение.

в) Покажем теперь, что каждый элемент из $T(S)$, инвариантный относительно G, равен нулю. Действительно, пусть Q — эндоморфизм R-модуля S, определенный соотношением

$$Q(y) = q^{-1} \sum_{g \in G} g_S(y)$$

при всех $y \in S$. Тогда $Q(S) = R$, и мы можем записать Q в виде $Q = i \circ Q'$, где Q' — гомоморфизм R-модуля S на R-модуль R, а i — каноническое инъективное отображение R в S. Поэтому $T(Q) = T(i) \circ T(Q)'$ и $T(Q') = 0$, так как $T(R) = \operatorname{Ker}(R_+ \otimes R \mapsto R) = 0$. Следовательно,

$$0 = T(Q) = q^{-1} \sum_{g \in G} T(g_S).$$

Но $q^{-1} \sum_{g \in G} T(g_S)$ оставляет неподвижными элементы из $T(S)$, инвариантные относительно G. Следовательно, каждый из них равен нулю.

г) Предположим, что $T(S) \neq 0$. Тогда в $T(S)$ существует однородный элемент $u \neq 0$ минимальной степени. Согласно б), u инвариантен относительно G. Согласно в), $u = 0$. Полученное противоречие показывает, что $T(S) = 0$. Ч. Т. Д.

Замечания. 1) Известно (*Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 11, n°4, предложение 7), что если $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ — семейство однородных элементов из S, канонические образы которых в $S/(R_+S)$ образуют базис модуля $S/(R_+S)$ над K, то $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ есть базис S над R.

2) Пусть g — псевдоотражение в V конечного порядка $n \geqslant 2$, взаимно простого с характеристической экспонентой поля K. По теореме Машке (дополнение, предложение 2) V можно разложить в сумму $D \oplus H$, где H — гиперплоскость, состоящая из векторов в V, инвариантных относительно g, а D — прямая, на которой g действует умножением на примитивный корень n-й степени из 1. В случае когда $K = \mathbf{R}$, это возможно только при $n = 2$, и тогда g — *отражение*. В этом случае группами, к которым применима теорема 1, будут *конечные группы Коксетера*. (Напротив, при $K = \mathbf{C}$ теорема 1 применима к некоторым группам, которые не являются группами Коксетера [1]).)

Теорема 2. *Предположения и обозначения те же, что и в теореме* 1.

(i) *Существует градуированное векторное подпространство в S, дополнительное к R_+S и устойчивое относительно G.*

(ii) *Пусть U — такое дополнение. Тогда канонический гомоморфизм $U \otimes_K R$ в S является изоморфизмом G-модулей и представление группы G в U (соотв. S) изоморфно регулярному представлению группы G над K (соотв. R).*

Действительно, для любого целого $n \geqslant 0$ векторные K-пространства S_n и $(R_+S) \cap S_n$ устойчивы относительно G и из теоремы Машке (дополнение, предложение 2) следует, что существует дополнение U_n к $(R_+S) \cap S_n$ в S_n, устойчивое относительно G. Тогда $\sum\limits_{n \geqslant 0} U_n$ будет дополнением к R_+S в S, устойчивым относительно G. Отсюда следует утверждение (i).

Пусть U — градуированное векторное подпространство в S, дополнительное к R_+S в S и устойчивое относительно G. Согласно замечанию 1, любой базис векторного K-пространства U будет также базисом R-модуля S и, следовательно, базисом поля отношений N алгебры S над полем отношений L алгебры R. Таким образом, векторное L-пространство N отождествляется с $U \otimes_K L$. Ввиду устойчивости U относительно G это отождествление совместимо с действием G. Алгебра $L[G]$ группы G над L отождествляется с алгеброй $K[G] \otimes_K L$. Расширение Галуа N над L допускает нормаль-

---

[1]) Классификацию этих групп можно найти в статье: G. C. Shephard, J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Maths.*, 6 (1954), 274—304.

ный базис (*Алг.*, гл. V, § 10, теорема 5, и *Алг.*, гл. VII, § 5, n°7) — факт, который можно выразить, сказав, что N как $L[G]$-модуль изоморфно модулю регулярного представления группы G над L. Так как пространство U конечномерно над K, то из предложения 1 дополнения вытекает, что $K[G]$-модуль U изоморфен модулю регулярного представления группы G над K. Отсюда и следуют наши утверждения.

3. Инварианты конечной линейной группы: свойства кольца

Теорема 3. *Сохраняются предположения и обозначения теоремы* 1. *В множестве систем образующих идеала $R_+ \subset R$, состоящих из однородных элементов, выберем минимальный элемент $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$. Пусть k_i — степень α_i. Предположим, что k_i взаимно просты с характеристической экспонентой поля K. Тогда $l = \dim V$, α_i порождают K-алгебру R и являются алгебраически независимыми над K. В частности, R — градуированная K-алгебра многочленов степени трансцендентности l над K.*

Условие, наложенное на k_i, излишне, но оно и не является стеснительным при применении к конечным группам Кокс—тера, поскольку тогда $K = \mathbf{R}$. См. к тому же n°5, где будет дано другое доказательство теоремы 3.

Теорема 3 следует из предложения 2, (i) теоремы 1 и следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть K — коммутативное поле, S — градуированная K-алгебра многочленов и R — градуированная подалгебра конечного типа в S, такая, что R-модуль S допускает базис $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, состоящий из однородных элементов.*

В множестве систем образующих идеала R_+ в R, состоящих из однородных элементов, выберем минимальный элемент $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Предположим, что при всех i степень k_i элемента α_i взаимно проста с характеристической экспонентой p поля K. Тогда α_i порождают K-алгебру R и являются алгебраически независимыми над K.

Согласно предложению 7 из *Алг.*, гл. II, § 11, n°4, условие, наложенное на α_i, эквивалентно тому, что они однородны и их образы в векторном K-пространстве $R_+/(R_+)^2$ образуют базис этого пространства. Это условие инвариантно относительно расширений основного поля. Поэтому мы можем свести все к случаю, когда поле *совершенно*.

Семейство $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ порождает алгебру R по предложению 1 из *Ком. алг.*, гл. III, § 1, n°2. Будем рассуждать от противного и предположим, что это семейство алгебраически зависимо над K.

1) Мы хотим показать сначала, что существуют семейства

$$(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}, \quad (y_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}, \quad (d_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant k \leqslant r}$$

однородных элементов из S, обладающие следующими свойствами:

$$\beta_i \in R \quad \text{для любого } i, \text{ и не все } \beta_i \text{ равны нулю;} \tag{7}$$

$$\deg y_k > 0 \quad \text{для любого } k; \tag{8}$$

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{r} d_{ik} y_k \quad \text{для любого } i; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i d_{ik} = 0 \quad \text{для любого } k. \tag{10}$$

Пусть $X_1, \ldots, X_s$ — переменные. Рассмотрим на $K[X_1, \ldots \ldots, X_s]$ структуру градуированной алгебры, полагая степень X_i равной k_i. В $K[X_1, \ldots, X_s]$ существуют однородные ненулевые элементы $H(X_1, \ldots, X_s)$, для которых $H(\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_s) = 0$. Выберем H так, чтобы его степень была минимальной. Следовательно, если $\partial H/\partial X_i \neq 0$, то многочлен $\partial H/\partial X_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ является ненулевым однородным элементом в R. Если $p \neq 1$, то H не может быть формой H_1^p с $H_1 \in K[X_1, \ldots, X_s]$. Положим тогда

$$\beta_i = k_i \frac{\partial H}{\partial X_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

Так как K совершенно, то многочлены $\dfrac{\partial H}{\partial X_i} \in [X_1, \ldots, X_s]$ не все равны нулю (*Алг.*, гл. V, § 1, n° 3, предложение 4). Условия, наложенные на k_i, наделяют теми же свойствами элементы β_i.

Далее, S отождествляется с градуированной алгеброй многочленов

$$K[x_1, \ldots, x_r],$$

где переменным $x_1, \ldots, x_r$ приписываются надлежащие степени $m_i > 0$. Пусть D_k — частное дифференцирование по x_k в S. Положим $d_{ik} = k_i^{-1} D_k(\alpha_i)$. Тогда равенство (10) справедливо, ибо его левая часть равна $D_k(H(\alpha_1, \ldots, \alpha_k))$. С другой стороны, положив $y_1 = m_1 x_1, \ldots, y_r = m_r x_r$, мы при помощи равенства (5) из n° 1 получим (9).

2) Пусть $\mathfrak{b}$ — идеал в R, порожденный элементами β_i. Существует подмножество J в

$$I = \{1, 2, \ldots, s\},$$

такое, что $(\beta_i)_{i\in J}$ будет минимальной системой образующих идеала $\mathfrak{b}$. При этом $J\neq\varnothing$, поскольку $\mathfrak{b}\neq 0$. Мы хотим получить из равенств (9) и (10), что если $i\in J$, то α_i есть R-линейная комбинация элементов α_j для $j\neq i$. А это противоречило бы минимальности системы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ и заканчивало бы доказательство.

Существуют однородные элементы γ_{ji} в R $(i\in J,\ j\in I-J)$, такие, что

$$\beta_j=\sum_{i\in J}\gamma_{ji}\beta_i \qquad (j\in I-J). \tag{11}$$

С учетом (11) формула (10) переписывается в виде

$$\sum_{i\in J}\beta_i\Big(d_{ik}+\sum_{j\in I-J}\gamma_{ji}d_{jk}\Big)=0. \tag{12}$$

Положим

$$u_{ik}=d_{ik}+\sum_{j\in I-J}\gamma_{ji}d_{jk}. \tag{13}$$

Тогда

$$\sum_{i\in J}\beta_i u_{ik}=0. \tag{14}$$

Запишем $u_{ik}=\sum_{\lambda\in\Lambda}\delta_{ik\lambda}z_\lambda$, где $\delta_{ik\lambda}$ принадлежат R. Соотношение (14) влечет равенство $\sum_{i\in J}\beta_i\delta_{ik\lambda}=0$ для любых k и λ. Если бы один из элементов $\delta_{ik\lambda}$ имел ненулевую однородную компоненту степени 0, то предыдущее равенство означало бы, что какой-то элемент $\beta_i\,(i\leqslant J)$ есть линейная комбинация других, что противоречит минимальности $(\beta_i)_{i\in J}$. Поэтому $\delta_{ik\lambda}\in R_+$ и, следовательно, $u_{ik}\in R_+S$ при всех i и k. Таким образом, найдутся $u_{ikh}\in S$, для которых $u_{ik}=\sum_{h=1}^{s}u_{ikh}\alpha_h$, или с учетом (13)

$$d_{ik}+\sum_{j\in I-J}\gamma_{ji}d_{jk}=\sum_{h=1}^{s}u_{ihk}\alpha_h. \tag*{$(15)_{ik}$}$$

Умножим обе части равенства $(15)_{ik}$ на y_k и при фиксированном i из J проведем суммирование по k $(k=1, 2, \ldots, r)$. Ввиду (9) находим

$$\alpha_i+\sum_{j\in I-J}{}'\gamma_{ji}\alpha_j=\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}u_{ikh}y_k\alpha_h.$$

Возьмем однородные компоненты степени k_i обеих частей равенства. Поскольку $\deg y_k>0$, α_i является S-линейной комбинацией α_j с $j\neq i$. Так как модуль S свободен над R и $\alpha_1, \ldots, \alpha_s\in R$, то на самом деле α_i будет R-линейной комбинацией α_j с $j \neq i$. (*Ком. алг.*, гл. I, § 3, n°5, предложение 9, d)).

Следствие. *В предположениях и обозначениях теоремы 3, произведение характеристических степеней алгебры R равно* $\mathrm{Card}(G)$.

Действительно, $\mathrm{rg}_R(S) = \mathrm{Card}(G)$ (формула (6), n°2). Характеристические степени алгебры S равны 1. Поэтому следствие вытекает из предложения 2, (iii) в n°1.

Лемма 2. *Пусть K — коммутативное поле, V — конечномерное векторное пространство над K, $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} S_n$ — симметрическая алгебра пространства V, s — эндоморфизм V и $s^{(n)}$ — каноническое продолжение s на S_n. Тогда в кольце $K[[T]]$ степенных рядов от одной переменной T выполнено соотношение*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(s^{(n)})\, T^n = (\det(1 - sT))^{-1}.$$

Расширяя основное поле, мы можем предполагать, что K алгебраически замкнуто. Пусть $(e_1, \ldots, e_r)$ — базис в V, относительно которого матрица эндоморфизма s является нижней треугольной, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — диагональные элементы этой матрицы. Относительно базиса $\left(e_1^{i(1)} \ldots e_r^{i(r)}\right)_{i(1)+ \ldots +i(r)=n}$ в S_n, упорядоченного лексикографически, матрица эндоморфизма $s^{(n)}$ будет нижней треугольной с диагональными элементами $\lambda_1^{i(1)} \ldots \lambda_r^{i(r)}$. Поэтому

$$\mathrm{Tr}\left(s^{(n)}\right) = \sum_{i(1)+ \ldots +i(r)=n} \lambda_1^{i(1)} \ldots \lambda_r^{i(r)},$$

и, значит,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(s^{(n)}\right) T^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^n T^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_2^n T^n\right) \ldots \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_r^n T^n\right) = \\ &= (1 - \lambda_1 T)^{-1}(1 - \lambda_2 T)^{-1} \ldots (1 - \lambda_r T)^{-1} = \\ &= (\det(1 - sT))^{-1}.\end{aligned}$$

Лемма 3. *Пусть K, V и S — объекты из леммы 2, G — конечная группа автоморфизмов пространства V, q — ее порядок, R — градуированная подалгебра в S, состоящая из инвариантных относительно G элементов. Предположим, что K имеет характеристику 0. Тогда рядом Пуанкаре алгебры R будет*

$$q^{-1} \sum_{g \in G} (\det(1 - gT))^{-1}.$$

Действительно, эндоморфизм $f = q^{-1} \sum_{g \in G} g^{(n)}$ является проектированием S_n на R_n, так что $\operatorname{Tr}(f) = \dim_K S^G$. Поэтому рядом Пуанкаре алгебры R будет

$$q^{-1} \sum_{g \in G} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Tr} g^{(n)})\, T^n \right),$$

и достаточно применить лемму 2.

Предложение 3. *В предположениях и обозначениях теоремы* 3 *пусть* H — *множество псевдоотражений в* G, *отличных от* 1. *Пусть* K — *поле характеристики* 0. *Тогда* $\operatorname{Card}(H) = \sum_{i=1}^{l} (k_i - 1)$.

Согласно предложению 3 дополнения, мы можем предполагать поле K алгебраически замкнутым. Пусть $\lambda_1(g), \ldots, \lambda_l(g)$ — собственные значения произвольного элемента $g \in G$. Так как все $g \in G$ диагонализуемы (дополнение, предложение 2), то $g = 1$ в том и только в том случае, когда все $\lambda_i(g)$ равны 1, а $g \in H$ в том и только в том случае, когда число $\lambda_i(g)$, равных 1, есть $l-1$ (мы обозначим тогда через $\lambda(g)$ собственное значение, отличное от 1). Согласно предложению 1 из n° 1 и лемме 3, справедливо соотношение

$$q \prod_{i=1}^{l} \left(1 - T^{k_i}\right)^{-1} = \sum_{g \in G} (\det(1 - gT))^{-1} \tag{16}$$

в $K[[T]]$, а значит, и в $K(T)$. Следовательно, в $K(T)$ имеем

$$q \frac{(1-T)^{l-1}}{\prod_{i=1}^{l} \left(1 - T^{k_i}\right)} = \frac{1}{1-T} + \sum_{g \in H} \frac{1}{1 - \lambda(g) T} + \sum_{g \neq 1,\ g \notin H} \frac{(1-T)^{l-1}}{\det(1 - gT)},$$

что переписывается в виде

$$\frac{q - \prod_{i=1}^{l} \left(1 + T + \ldots + T^{k_i - 1}\right)}{(1-T) \prod_{i=1}^{l} \left(1 + T + \ldots + T^{k_i - 1}\right)} = \sum_{g \in H} \frac{1}{1 - \lambda(g) T} + \sum_{g \neq 1,\ g \notin H} \frac{(1-T)^{l-1}}{\det(1 - gT)}.$$

Видно, что $q - \prod_{i=1}^{l} \left(1 + T + \ldots + T^{k_i - 1}\right)$ равно нулю при $T = 1$, поэтому $q = k_1 k_2 \ldots k_l$, что мы уже знаем из следствия теоремы 3. Заметив это, обозначим, далее, через $Q(T)$ многочлен $(1-T)^{-1}\left(q-\prod_{i=1}^{l}(1+T+\ldots+T^{k_i-1})\right)$. Дифференцируя равенство $(1-T)Q(T)=q-\prod_{i=1}^{l}(1+T+\ldots+T^{k_i-1})$ и полагая $T=1$, мы видим, что $-Q(1)$ равно значению при $T=1$ ряда

$$-\frac{d}{dt}\left(\prod_{i=1}^{l}(1+T+\ldots+T^{k_i-1})\right)=$$
$$=-\sum_{i=1}^{l}(1+2T+\ldots+(k_i-1)T^{k_i-2})=$$
$$=\prod_{j\neq i}(1+T+\ldots+T^{k_j-1}),$$

откуда

$$Q(1)=\sum_{i=1}^{l}\frac{(k_i-1)k_i}{2}\prod_{j\neq i}k_j=\left(\prod_{j=1}^{l}k_j\right)\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{k_i-1}{2}\right).$$

Возвращаясь к равенству (17), имеем, далее,

$$Q(1)=\left(\prod_{j=1}^{l}k_j\right)\left(\sum_{g\in H}\frac{1}{1-\lambda(g)}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{k_i-1}{2}=\sum_{g\in H}\frac{1}{1-\lambda(g)}. \tag{18}$$

Но элементы из G, оставляющие неподвижными точки данной гиперплоскости, оставляют устойчивой прямую, дополнительную к этой гиперплоскости (дополнение, предложение 2), и, следовательно, образуют циклическую подгруппу G' в G (см. *Алг.*, гл. V, § 11, n° 1, теорема 1). Пусть t — порядок подгруппы G'. Значения $\lambda(g)$ для $g\in G'$ равны θ, $\theta^2, \ldots, \theta^{t-1}$, где θ — примитивный корень t-й степени из 1. Имеем $\frac{1}{1-\theta^i}+\frac{1}{1-\theta^{t-i}}=1$. Значит,

$$\sum_{g\in G',\ g\neq 1}\frac{1}{1-\lambda(g)}=\frac{1}{2}(t-1)=\frac{1}{2}\operatorname{Card}(H\cap G').$$

Из равенства (18) следует поэтому предложение.

Замечание. В случае когда $K=\mathbf{R}$, G — группа Кокстера, а H — множество отражений, принадлежащих G, элементы множества H находятся, как известно (§ 3), во взаимно однозначном соответствии со *стенками* в V.

Предложение 4. *В предположениях и обозначениях теоремы 3 пусть K — поле характеристики $\neq 2$. Для того чтобы $-1 \in G$, необходимо и достаточно, чтобы характеристические степени $k_1, \ldots, k_l$ алгебры R были четными.*

Пусть f — автоморфизм алгебры S, продолжающий автоморфизм -1 на V. Тогда $f(z) = (-1)^{\deg z} z$ для любого однородного элемента z из S. Поэтому в случае $-1 \in G$ всякий однородный элемент нечетной степени в R равен нулю и, значит, k_i четны. Обратно, если k_i четны, то любой элемент из R инвариантен относительно f и по теории Галуа $-1 \in G$.

4. Антиинвариантные элементы

Сохраняя предположения и обозначения теоремы 3, будем считать, что K — поле характеристики 0. Элемент z из S называется *антиинвариантным* относительно G, если

$$g(z) = (\det g)^{-1} z$$

для всех $g \in G$.

Пусть H — множество псевдоотражений из G, отличных от 1. Для любого $g \in H$ существуют $e_g \in V$ и $f_g \in V^*$, такие, что

$$g(x) = x + f_g(x) e_g, \quad \text{каков бы ни был} \quad x \in V.$$

Предложение 5. (i) *Обозначим через D элемент $\prod'_{g \in H} e_g$ в S. Антиинвариантными относительно G элементами в S будут в точности элементы модуля RD.*

(ii) *Предположим, что мы выбрали базис $(X_1, \ldots, X_l)$ в V и тем самым отождествили S с алгеброй многочленов $K[X_1, \ldots, X_l]$. Пусть $(P_1, \ldots, P_l)$ — алгебраически независимые однородные элементы в S, порождающие алгебру R* (теорема 3). *Тогда якобиан $J = \det\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\right)$ имеет вид λD, где $\lambda \in K^*$.*

a) В обозначениях утверждения (ii) имеем

$$dP_1 \wedge dP_2 \wedge \ldots \wedge dP_l = J\, dX_1 \wedge dX_2 \wedge \ldots \wedge dX_l,$$

откуда при всех $g \in G$

$$g(J)(\det g)\,dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_l = g(J)\,d(gX_1) \wedge \ldots \wedge d(gX_l) = \\ = g(dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_l) = dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_l = \\ = J\,dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_l.$$

Следовательно, J антиинвариантен относительно G. Далее, поле отношений N алгебры S есть расширение Галуа поля отношений E ее подалгебры R (n° 2). Всякое дифференцирование Δ поля E со значениями в некотором подполе $\Omega \subset N$ продолжается до дифференцирования поля N со значениями в Ω (*Алг.*, гл. V, § 9, предложение 5). Так как у нас P_i алгебраически независимы, то $dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_l \neq 0$ и, следовательно, $J \neq 0$.

б) Пусть z — антиинвариантный относительно G элемент из S. Докажем, что z делится в S на D. Пусть a — ненулевой вектор в V. Элементы группы G, оставляющие устойчивой прямую Ka, оставляют устойчивой и дополнительную гиперплоскость L (дополнение, предложение 2). Для того чтобы элемент из G, оставляющий устойчивой Ka, был либо 1, либо псевдоотражением вектора a, необходимо и достаточно, чтобы он индуцировал 1 на L. Стало быть, псевдоотражения вектора a, принадлежащие группе G, образуют вместе с 1 циклическую подгруппу G' группы G. Пусть t — ее порядок. Существует базис $(X_1, \ldots, X_l)$ в V, такой, что $a = X_1$, $X_2 \in L, \ldots, X_l \in L$ и можно отождествить z с многочленом $P(X_1, \ldots, X_l)$ с коэффициентами из K. Равенство $g(z) = (\det g)^{-1} z$ для $g \in G'$ показывает, что X_1 входит в $P(X_1, \ldots, X_l)$ с показателем, сравнимым с -1 по модулю t. Значит, $P(X_1, \ldots, X_l)$ делится на $X_1^{t-1} = a^{t-1}$. Но с точностью до скалярного множителя D является произведением элементов a^{t-1} для $a \in V$, таких, что $t > 1$, и эти элементы алгебры S попарно взаимно просты. Так как S — факториальное кольцо, то z делится на D.

в) Согласно а) и б) якобиан J делится в S на D. Но

$$\deg J = \sum_{i=1}^{l} (k_i - 1) = \mathrm{Card}\,(H)$$

(предложение 3), следовательно, $\deg J = \deg D$ и $J = \lambda D$ с $\lambda \in K$. Так как $J \neq 0$, то $\lambda \in K^*$. Тем самым (ii) доказано.

г) В а) и в) мы убедились в антиинвариантности D относительно G. Значит, при всех $y \in R$ элемент yD будет антиинвариантен относительно G. Наконец, если $z \in S$ антиинвариантен относительно G, то, как мы видели в б), существует $y \in S$, для которого $z = yD$. Поскольку кольцо S целостно, $y \in R$. Этим завершается доказательство утверждения (i).

5. *Дополнения* [1])

Лемма 4. *Пусть K — коммутативное поле, V — конечномерное векторное пространство над K, G — конечная группа автоморфизмов V порядка q, обратимого в K, S — симметрическая алгебра пространства V, R — подалгебра в S, состоящая из инвариантных относительно G элементов. Для того чтобы простой идеал $\mathfrak{P}$ высоты 1 в S был разветвлен над $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ (Ком. алг.), необходимо и достаточно, чтобы существовали отличные от нуля элементы $a \in V$ и $f \in V^*$, такие, что $\mathfrak{P} = Sa$ и псевдоотражение $s_{a,f}$ принадлежит G. Группа разложения $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{P})$ тогда совпадает с подгруппой элементов в G, оставляющих устойчивым Ka, а группа инерции $\mathfrak{G}^T(\mathfrak{P})$ — с циклической подгруппой $H_a \subset G$, состоящей из псевдоотражений в G вектора a. Поле классов вычетов $S(\mathfrak{P})$ алгебры S по модулю $\mathfrak{P}$ сепарабельно над полем классов вычетов $R(\mathfrak{p})$ алгебры R по модулю $\mathfrak{p}$, и индекс ветвления $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, на 1 больший показателя идеала $\mathfrak{P}$ в дивизоре* $\operatorname{div}(\mathfrak{D}_{S/R})$ *дифференты, равен* $\operatorname{Card}(H_a)$.

Разветвленность $\mathfrak{P}$ над R означает, что его группа инерции $\mathfrak{G}^T(\mathfrak{P})$ не сводится к единичному элементу. Иначе говоря, в G существует элемент $g \neq 1$, для которого $g(z) \equiv z \pmod{\mathfrak{P}}$ при всех $z \in S$. Так как S — факториальное кольцо, то $\mathfrak{P}$ — главный идеал Sa и a делит все элементы $g(z) - z$ $(z \in S)$. Но для $z \in V$ эти элементы однородны степени 1 и не все равны нулю (потому, что $g \neq 1$). Следовательно, a должен быть однородным элементом степени 1, т. е. $a \in V$, поэтому существует линейная форма f на V, такая, что $g = s_{a,f}$. Обратно, если g — псевдоотражение $s_{a,f}$, отличное от 1, то $g(z) \equiv z \pmod{Sa}$ для всех $z \in S$, и поэтому g принадлежит группе инерции простого идеала $\mathfrak{P} = Sa$. Тем самым доказано первое утверждение леммы и описаны $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{P})$ и $\mathfrak{G}^T(\mathfrak{P})$. Известно, что степень поля классов вычетов $[S(\mathfrak{P}) : R(\mathfrak{p})]$ делит $\operatorname{Card}(G) = q$ (*Ком. алг.*, гл. V, § 2, n° 2). Так как q взаимно просто с характеристической экспонентой p поля K (а также поля $S(\mathfrak{P})$), то расширение $S(\mathfrak{P})$ над $R(\mathfrak{p})$ сепарабельно. Установлено и равенство $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \operatorname{Card}(H_a)$ (*Ком. алг.*) Поскольку индекс ветвления $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ взаимно прост с p, показатель дивизора $\mathfrak{P}$ в $\operatorname{div}(\mathfrak{D}_{S/R})$ равен $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) - 1$ (*Ком. алг.*), чем и завершается доказательство леммы.

Лемма 5. *Пусть K — коммутативное поле, S — градуированная K-алгебра многочленов и R — градуированная*

[1]) В этом пункте используются результаты из находящихся в подготовке глав книги *Коммутативная алгебра.* Мы отсылаем к ним сокращенным символом „*Ком. алг.*“

подалгебра в S. Для того чтобы S была градуированным свободным R-модулем (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 11, n° 2), *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия*:

а) *R — градуированная K-алгебра многочленов*;

б) *если* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ — *система образующих K-алгебры R, состоящая из однородных алгебраически независимых элементов, то эта система является S-регулярной последовательностью* [1]).

В случае когда S есть R-модуль конечного типа, б) *следует из* а).

Доказательство см. в *Ком. алг.*

Теорема 4. *Пусть K — коммутативное поле, V — конечномерное векторное пространство над K, S — симметрическая алгебра пространства V, G — конечная группа автоморфизмов V и R — подалгебра в S, состоящая из инвариантных относительно G элементов. Предположим, что порядок $q = \operatorname{Card} G$ обратим в K. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *G порождается псевдоотражениями*;

(ii) *S — градуированный свободный R-модуль*;

(iii) *R — градуированная K-алгебра многочленов.*

Эквивалентность (ii) и (iii) вытекает из n° 2 и из леммы 5. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) следует из теоремы 1.

Покажем, что (iii)$\Rightarrow$(i). Пусть G' — подгруппа в G, порожденная псевдоотражениями, принадлежащими G, и пусть R' — подалгебра в S, состоящая из инвариантных относительно G' элементов. Тогда $R \subset R' \subset S$. По лемме 4 $\operatorname{div}(\mathfrak{D}_{S/R}) = \operatorname{div}(\mathfrak{D}_{S/R'})$, откуда $\operatorname{div}(\mathfrak{D}_{R'/R}) = 0$. Предположим затем, что R — градуированная алгебра многочленов. Так как это в равной мере относится и к R' (поскольку G' порождена псевдоотражениями), то по лемме 5 R-модуль R' допускает однородный базис $(Q_1, \ldots, Q_m)$. Пусть $q_i = \deg(Q_i)$. Положим

$$d = \det(\operatorname{Tr}_{R'/R}(Q_i Q_j)) \qquad (\textit{Алг.}, \text{ гл. IX, § 2}).$$

Равенство $\operatorname{div}(\mathfrak{D}_{R'/R}) = 0$ показывает, что $\operatorname{div}(d) = 0$ (*Ком. алг.*), а это означает, что d принадлежит K^*. Но, с другой

---

[1]) Это означает, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ канонический образ элемента α_i в кольце

$$S/(S\alpha_1 + \ldots + S\alpha_{i-1})$$

не является делителем нуля в этом кольце.

стороны, $\mathrm{Tr}_{R'/R}(Q_iQ_j)$ является однородным элементом степени q_i+q_j, а d — однородным элементом степени $2\sum_i q_i$. Таким образом, $\sum_i q_i=0$, т. е. $q_i=0$ для всех i, откуда следует, что $R'=R$, а значит, по теории Галуа $G'=G$. Тем самым доказано, что G порождена псевдоотражениями. Ч. Т. Д.

Замечания. 1) В предположениях теоремы 4 произведение характеристических степеней алгебры R равно q (формула (6), предложение 2, (iii)), и, значит, они взаимно просты с характеристической экспонентой поля K. Это дает утверждение, аннонсированное в n° 3.

2) Если не предполагать более, что порядок $\mathrm{Card}(G)$ обратим в K, то все еще (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) (лемма 5) и (ii) $\Rightarrow$ (i) (упражнение 8). Однако импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) перестает быть верной (упражнение 9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Предположения и обозначения те же, что в теореме 4. Пусть H — множество псевдоотражений в G, отличных от 1. Допустим, что H порождает G. Для любого $g\in H$ положим $g(x)=x+f_g(x)e_g$, где $e_g\in V$, $f_g\in V^*$. Положим*

$$D=\prod_{g\in H} e_g\in S.$$

(i) *Дифферента алгебры S над R является главным идеалом SD.*

(ii) *Пусть в V выбран базис $(X_1, \ldots, X_l)$ и S отождествлена с алгеброй $K[X_1, \ldots, X_l]$. Пусть $P_1, \ldots, P_l$ — однородные алгебраически независимые образующие алгебры R. Тогда якобиан $J=\det\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\right)$ имеет вид λD, где $\lambda\in K^*$.*

(iii) $\sum_{i=1}^{l}(\deg(P_i)-1)=\mathrm{Card}(H)$.

(iv) *Множество антиинвариантных элементов в S совпадает с RD.*

Утверждение (i) следует из леммы 4. Утверждение (ii) следует из того, что SJ является дифферентой алгебры S над R (*Ком. алг.*). Утверждение (iii) вытекает из того, что однородные многочлены D и J имеют одинаковую степень. Доказательство (iv) таково же, как в n° 4 (доказательство предложения 5, этапы б) и г)).

§ 6. Преобразование Кокстера

В этом параграфе через V будет обозначаться вещественное векторное пространство конечной размерности l и через W — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(V)$, порожденная отражениями и являющаяся существенной (§ 3, n° 7). На V имеется скалярное произведение $(x|y)$, инвариантное относительно W. Обозначим через $\mathfrak{H}$ множество гиперплоскостей H в V, таких, что соответствующее ортогональное отражение s_H принадлежит группе W.

1. Определение преобразований Кокстера

Назовем *упорядоченной камерой* относительно W пару, состоящую из камеры C, определенной системой $\mathfrak{H}$, и биекции $i \mapsto H_i$ множества $\{1, 2, \ldots, l\}$ на множество стенок камеры C (§ 3, n° 9, предложение 7).

Определение 1. *Преобразованием Кокстера, определенным упорядоченной камерой* $(C, (H_i)_{1 \leqslant i \leqslant l})$, *называется элемент* $c = s_{H_1} s_{H_2} \ldots s_{H_l}$ *группы* W.

Предложение 1. *Все преобразования Кокстера сопряжены в* W.

Так как W переставляет камеры относительно $\mathfrak{H}$ транзитивно (§ 3, n° 2, теорема 1), то нам остается доказать, что если $(C, (H_i)_{1 \leqslant i \leqslant l})$ — упорядоченная камера и $\pi \in \mathfrak{S}_l$, то $s_{H_1} s_{H_2} \ldots s_{H_l}$ и $s_{H_{\pi(1)}} s_{H_{\pi(2)}} \ldots s_{H_{\pi(l)}}$ сопряжены в W. Ввиду предложения 8 из § 4, n° 8, это непосредственно вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть X — конечный лес, $x \mapsto g_x$ — такое отображение X в группу Γ, что g_x и g_y коммутируют всякий раз, когда x и y не соединены в X. Пусть $\mathscr{T}$ — множество структур совершенных порядков на X. Для любого $\xi \in \mathscr{T}$ обозначим символом p_ξ произведение в Γ последовательности элементов $(g_x)_{x \in X}$, определенной порядком ξ. Тогда элементы p_ξ сопряжены в Γ.*

1) Проведем индукцию по $n = \operatorname{Card} X$. Ввиду тривиальности случая $n = 1$ предположим, что $n \geqslant 2$. В X существует конечная вершина a (гл. IV, дополнение, n° 3, предложение 2). Пусть $b \in X - \{a\}$ — вершина, соединенная с a, если таковая существует; если же a не соединена ни с какой вершиной из $X - \{a\}$, то возьмем в качестве b произвольную вершину в $X - \{a\}$. В любом случае g_a коммутирует с g_x

для $x \neq b$. Пусть порядок $\eta \in \mathcal{T}$ таков, что a — наибольший элемент в X и b — наибольший элемент в $X - \{a\}$. Пусть $\xi \in \mathcal{T}$. Докажем, что p_ξ и p_η сопряжены.

2) Предположим сначала, что для порядка ξ a — наибольший элемент в X, а b — наибольший элемент $X - \{a\}$. Пусть X' — целый подграф в $X - \{a\}$, являющийся лесом. Определим отображение $x \mapsto g'_x$ подграфа X' в Γ, полагая $g'_x = g_x$ при $x \neq b$ и $g'_b = g_b g_a$. Пусть ξ', η' — сужения ξ, η на X'. По предположению индукции $p_{\xi'}$ и $p_{\eta'}$ сопряжены. Но ясно, что $p_{\xi'} = p_\xi$, $p_{\eta'} = p_\eta$, откуда в этом случае и следует утверждение леммы.

3) Предположим, что a — наибольший элемент в X для ξ. Пусть X_1 (соотв. X_2) — множество элементов в $X - \{a\}$ строго мажорированных (соотв. минорированных) элементом b. Пусть ξ_i — сужение ξ на X_i. Тогда

$$p_\xi = p_{\xi_1} g_b p_{\xi_2} g_a = p_{\xi_1} g_b g_a p_{\xi_2},$$

а этот элемент сопряжен с $p_{\xi_2} p_{\xi_1} g_b g_a$. Тем самым мы пришли к случаю 2).

4) В общем случае пусть X_3 (соотв. X_4) — множество элементов в X строго мажорированных (соотв. минорированных) элементом a. Пусть ξ_i — сужение ξ на X_i. Тогда $p_\xi = p_{\xi_3} g_a p_{\xi_4}$ — элемент, сопряженный с $p_{\xi_4} p_{\xi_3} g_a$, и мы приходим к случаю 3).

Из предложения 1 следует, что все преобразования Кокстера имеют одинаковый порядок $h = h(W)$. Это число называется *числом Кокстера* группы W.

Замечание. Пусть $W_1, \ldots, W_n$ — конечные существенные группы, порожденные отражениями в пространствах $V_1, \ldots, V_m$; C_j — камера относительно W_j; $W = W_1 \times \ldots \times W_m$ — группа, действующая на $V_1 \times \ldots \times V_m$. Тогда $C_1 \times \ldots \times C_m$ будет камерой относительно W. Преобразования Кокстера группы W, определенные камерой C, записываются в виде произведений $c_1 c_2 \ldots c_m$, где c_j — преобразование Кокстера группы W_j, определенное камерой C_j.

2. Собственные значения преобразования Кокстера. Показатели

Так как все преобразования Кокстера сопряжены (n° 1, предложение 1), то у них будет один и тот же характеристический многочлен $P(T)$. Пусть h — число Кокстера группы W. Тогда

$$P(T) = \prod_{j=1}^{l} \left(T - \exp \frac{2i\pi m_j}{h}\right),$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_l$ — целые числа, такие, что

$$0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_l < h.$$

Определение 2. *Целые числа $m_1, m_2, \ldots, m_l$ называются показателями группы W.*

Пусть C — камера относительно $\mathfrak{H}$, $H_1, \ldots, H_l$ — ее стенки. Положим $s_i = s_{H_i}$. Обозначим через e_i единичный вектор, ортогональный к H_i и лежащий по ту же сторону от H_i, что и C. Согласно предложению 2 дополнения гл. IV, можно предполагать H_i пронумерованными так, что $e_1, e_2, \ldots, e_r$ и $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_l$ будут попарно ортогональны. Тогда $s' = s_1 s_2 \ldots s_r$ — ортогональная симметрия относительно подпространства

$$V' = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_r,$$

$s'' = s_{r+1} s_{r+2} \ldots s_l$ — ортогональная симметрия относительно

$$V'' = H_{r+1} \cap H_{r+2} \cap \ldots \cap H_l$$

и $c = s's''$ — преобразование Коксстера. Так как $(e_1, \ldots, e_l)$ — базис V, то V — прямая сумма V' и V''.

Отсюда следует, во-первых, что 1 *не является собственным значением* преобразования c. В самом деле, если $c(x) = x$ для какого-то $x \in V$, то $s'(x) = s''(x)$. Значит, вектор $x - s'(x) = x - s''(x)$ ортогонален к V' и V'' и поэтому равен нулю, откуда $x = s'(x) = s''(x) \in V' \cap V'' = \{0\}$. Таким образом,

$$0 < m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_l < h. \tag{1}$$

Характеристический многочлен преобразования c имеет вещественные коэффициенты. Поэтому для любого j множитель $T - \exp \frac{2i\pi m_j}{h}$ входит в $P(T)$ с той же кратностью, что и $T - \exp \frac{2i\pi (h - m_j)}{h}$. Стало быть,

$$m_j + m_{l+1-j} = h \qquad (1 \leqslant j \leqslant l). \tag{2}$$

Складывая почленно равенства (2), получаем

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_l = \frac{1}{2} lh. \tag{3}$$

Лемма 2. *Сохраним предыдущие обозначения и предположим, что группа W неприводима. Существуют два линейно независимых вектора z', z'', такие, что*

(i) *плоскость P, натянутая на z' и z'', устойчива относительно s' и s'';*

(ii) *$s'|P$ и $s''|P$ будут ортогональными отражениями относительно $\mathbf{R}z'$ и $\mathbf{R}z''$;*

(iii) *$z', z'' \in \overline{C}$, и $P \cap C$ — множество линейных комбинаций векторов z' и z'' с коэффициентами >0.*

Пусть $(e^1, \ldots, e^l)$ — базис в V, такой, что $(e^i | e_j) = \delta_{ij}$. Тогда C является открытым симплициальным конусом, определенным базисом $\{e^i\}$ (§ 3, n° 9, предложение 7). Ясно, что V' порождено элементами $e^{r+1}, \ldots, e^l$, а V'' — элементами $e^1, \ldots, e^r$. Пусть q — эндоморфизм пространства V, для которого $q(e^1) = e_1, \ldots, q(e^l) = e_l$. Его матрица относительно $(e^1, \ldots, e^l)$ равна $Q = ((e_i | e_j))$. Имеем $(e_i | e_j) \leqslant 0$ $i \neq j$ (§ 3, n° 4, предложение 3). Поскольку W неприводима, не существует такого разбиения $\{1, 2, \ldots, l\} = I_1 \cup I_2$, что $(e_i | e_j) = 0$ для $i \in I_1$ и $j \in I_2$. Поэтому (§ 3, n° 5, лемма 4) Q имеет собственный вектор $(a_1, \ldots, a_l)$, все координаты которого $\geqslant 0$. Пусть a — соответствующее собственное значение. Положим

$$z = a_1 e^1 + \ldots + a_l e^l,$$
$$z'' = a_1 e^1 + \ldots + a_r e^r \in V'' \cap \overline{C},$$
$$z' = a_{r+1} e^{r+1} + \ldots + a_l e^l \in V' \cap \overline{C}$$

и возьмем за P плоскость, порожденную z' и z''. Тогда $P \cap C$ будет множеством линейных комбинаций z' и z'' с коэффициентами > 0. Соотношение $q(z) = az$ дает $\sum_{j=1}^{l} a_j e_j = \sum_{j=1}^{l} a a_j e^j$. Умножив его скалярно на e_k (для $k \leqslant r$), получим $a_k + \sum_{j=r+1}^{l} a_j (e_j | e_k) = a a_k$. Поэтому

$$(a-1) z'' = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=r+1}^{l} a_j (e_j | e_k) \right) e^k = \sum_{j=r+1}^{l} a_j \left(\sum_{k=1}^{r} (e_j | e_k) e^k \right) =$$
$$= \sum_{j=r+1}^{l} a_j \left(-e^j + \sum_{k=1}^{l} (e_j | e_k) e^k \right) =$$
$$= -\sum_{j=r+1}^{l} a_j e^j + \sum_{j=r+1}^{l} a_j e_j = -z' + \sum_{j=r+1}^{l} a_j e_j.$$

Значит, вектор $(a-1) z'' + z'$ ортогонален к $e^1, \ldots, e^r$, т. е. к пространству V''. Поэтому s'' оставляет устойчивой плоскость, порожденную z'' и $(a-1) z'' + z'$, т. е. P. Аналогично s' оставляет P устойчивой. Так как $z' \in P \cap V'$ и $z'' \in P \cap V''$, то $s'|P$ и $s''|P$ будут отражениями относительно $\mathbf{R}z'$ и $\mathbf{R}z''$.

Теорема 1. *Пусть группа W неприводима. Тогда*
(i) $m_1 = 1$, $m_l = h - 1$.
(ii) $\mathrm{Card}(\mathfrak{H}) = \frac{1}{2} lh$.

Сохраним предыдущие обозначения. Сужение $c = s's''$ на P есть вращение на угол $2(\widehat{z'', z'})$ (§ 2, n° 5, следствие предложения 6). Так как порядок c равен h, то h элементов $1, c, \ldots, c^{h-1}$ группы W попарно различны. Элементы s', $s'c, \ldots, s'c^{h-1}$ тоже попарно различны и отличны от предыдущих, поскольку $c^i \mid P$ — вращение, а $s'c^j \mid P$ — отражение. Множество

$$\{1, c, \ldots, c^{h-1}, s', s'c, \ldots, s'c^{h-1}\}$$

является подгруппой $W' \subset W$, порожденной элементами s' и s'' и индуцирующей на P группу W'', порожденную ортогональными отражениями относительно $\mathbf{R}z'$ и $\mathbf{R}z''$. Образ камеры C относительно элемента из W' либо не пересекается с $-C$, либо совпадает с $-C$. То же самое, следовательно, можно сказать по поводу пересечений $P \cap C$ и $-(P \cap C)$. Поэтому при подходящей ориентации плоскости P найдется целое число $m > 0$, такое, что $(\widehat{z'', z'}) = \frac{\pi}{m}$ (§ 2, n° 5, следствие предложения 7). Сверх того множества $g'(C)$ для $g' \subset W'$ попарно не пересекаются. Поэтому попарно не пересекаются множества $g''(P \cap C)$ для $g'' \in W''$, и, значит, порядок W'' равен $2h$, откуда $m = h$. По определению, $c \mid P$ — вращение на угол $\frac{2\pi}{h}$ и допускает, следовательно, в качестве собственных значений $\exp\frac{2i\pi}{h}$ и $\exp\frac{2i\pi(h-1)}{h}$. Этим доказано, что $m_1 = 1$, $m_l = h - 1$.

Образами прямых $\mathbf{R}z'$ и $\mathbf{R}z''$ относительно W' будут h прямых $D_1, \ldots, D_h$ плоскости P, а точки множества $P - (D_1 \cup \ldots \ldots \cup D_h)$ будут W'-образами точек из $P \cap C$. Следовательно, гиперплоскости семейства $\mathfrak{H}$ пересекают P только по прямым D_i и каждая из них действием W' может быть переведена в гиперплоскость из $\mathfrak{H}$, содержащую либо $\mathbf{R}z'$, либо $\mathbf{R}z''$.

Но любая гиперплоскость $H \in \mathfrak{H}$, которая содержит $\mathbf{R}z'$, совпадает с одной из гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_r$. Действительно, пусть e_H — единичный ортогональный к H вектор, лежащий по ту же сторону от H, что и C. Тогда $e_H = \lambda_1 e_1 + \ldots \ldots + \lambda_l e_l$, где все $\lambda_i \geqslant 0$ (§ 3, n° 5, лемма 6, (i)). Но $0 = (e_H \mid z') = \lambda_{r+1} a_{r+1} + \ldots + \lambda_l a_l$, поэтому

$$\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_l = 0 \quad \text{и} \quad e_H = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r.$$

Предположим, что какие-то два λ_i не равны нулю, например λ_1 и λ_2. Так как $e_1, \ldots, e_r$ попарно ортогональны, то

$$s_1(e_H) = -\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_r e_r,$$

и координаты вектора $s_1 e_H$ не могут быть все одного знака, а это невозможно (*там же*). Поэтому вектор e_H пропорционален одному из векторов $e_1, \ldots, e_r$, и наше утверждение доказано. Точно так же любая гиперплоскость $H \in \mathfrak{H}$, содержащая $\mathbf{R}z''$, совпадает с одной из гиперплоскостей $H_{r+1}, \ldots, H_l$.

Итак, число гиперплоскостей в $\mathfrak{H}$, содержащих либо $\mathbf{R}z'$, либо $\mathbf{R}z''$, равно l. Следовательно, если h четно, то $\mathrm{Card}(\mathfrak{H})$ равно $\frac{h}{2}l$. Если h нечетно, то $\mathrm{Card}(\mathfrak{H})$ равно $\frac{h-1}{2}l + r$, а также $\frac{h-1}{2}l + (l - r)$. Отсюда имеем $r = l - r$, так что $r = \frac{h}{2}$ и $\mathrm{Card}(\mathfrak{H}) = \frac{h-1}{2}l + \frac{l}{2} = \frac{h}{2}l$.

Замечание. Сохраним обозначения предыдущего доказательства. Пусть c' — $\mathbf{C}$-линейное продолжение преобразования c на $V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ и c'' — сужение c' на $P \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Из свойств $c \mid P$ следует, что c'' допускает собственный вектор x, соответствующий собственному значению $\exp\frac{2i\pi}{h}$, и этот вектор не принадлежит никакому множеству $D \cap \mathbf{C}$, где D означает прямую в P (поскольку D не является устойчивой относительно c). Но ясно, что $H \cap P$ — прямая для любой гиперплоскости $H \in \mathfrak{H}$. Значит, $x \notin H \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

Следствие. *Пусть R_0 — множество единичных векторов в V, ортогональных элементам из $\mathfrak{H}$. Если группа W неприводима, то*

$$\sum_{u \in R_0} (x \mid u)^2 = h(x \mid x)$$

для всех $x \in V$.

Положим $f(x) = \sum_{u \in R_0} (x \mid u)^2$. Очевидно, f — положительная квадратичная форма, инвариантная относительно W и невырожденная, поскольку e_i образуют базис в V. Так как группа W неприводима, то существует константа β, для которой $f(x) = \beta(x \mid x)$ (§ 2, n° 1, предложение 1). Если $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — ортонормальный базис в V относительно скалярного произведения $(x \mid y)$, то

$$\beta l = \sum_{i=1}^{l} \beta(x_i \mid x_i) = \sum_{i=1}^{l} f(x_i) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{u \in R_0} (x_i \mid u)^2 =$$
$$= \sum_{u \in R_0} 1 = \mathrm{Card}(R_0) = 2\,\mathrm{Card}(\mathfrak{H}) = hl.$$

Отсюда $\beta = h$, чем и доказано равенство (4).

Предложение 2. *Если h четно, то единственным элементом группы W, переводящим C в $-C$, является $c^{h/2}$.*

Вернемся к обозначениям доказательства теоремы 1. Поскольку $c \mid P$ — вращение на угол $\frac{2\pi}{2}$, то $c^{h/2}$ переводит z' в $-z'$, z'' в $-z''$ и, значит, $z = z' + z''$ в $-z$. Так как $z \in C$, то камера $c^{h/2}(C)$ совпадает с $-C$.

Предложение 3. *Предположим, что группа W неприводима. Пусть $u_1, \ldots, u_l$ — однородные элементы симметрической алгебры $S = S(V)$, алгебраически независимые над $\mathbf{R}$ и порождающие алгебру инвариантных относительно W элементов в S* (§ 5, n° 3, теорема 3). *Если p_j — степень элемента u_j, то показателями группы W будут $p_1 - 1, \ldots, p_l - 1$.*

Положим $V' = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, $S' = S(V') = S \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ и продолжим скалярное произведение на V до эрмитовой формы на V'. Если c — преобразование Кокстера группы W, то существует ортонормальный базис $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ в V', состоящий из собственных векторов преобразования $c \otimes 1$ (*Алг.*, гл. IX, § 7, n° 3, предложение 4). Сверх того можно предполагать, что X_j для $1 \leqslant j \leqslant l$ соответствует собственному значению $\exp \frac{2i\pi m_j}{h}$ преобразования $c \otimes 1$. Ясно, что S' отождествляется с алгеброй $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_l]$ и можно записать $u_j \otimes 1 = f_j(X_1, \ldots, X_l)$, где f_j — однородный многочлен степени p_j в $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_l]$.

Положим $D_j = \frac{\partial}{\partial X_j}$ и $J(X_1, \ldots, X_l) = \det(D_k f_j)$. Напомним (§ 5, n° 4, предложение 5), что $J(X_1, \ldots, X_l)$ пропорционален произведению в S' $\operatorname{Card}(\mathfrak{H})$ векторов y_k из V, каждый из которых ортогонален некоторой гиперплоскости из $\mathfrak{H}$. Так как можно предполагать, что $X_1 \notin H \otimes \mathbf{C}$ для всех $H \in \mathfrak{H}$ (*замечание*), то X_1-компоненты векторов y_k будут $\neq 0$. Следовательно, $J(1, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0$. Правило разложения определителя показывает в таком случае, что существует перестановка σ множества $\{1, 2, \ldots, l\}$, такая, что $(D_{\sigma(j)} f_j)(1, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0$ для всех j. Так как многочлен $D_{\sigma(j)} f_j$ однороден степени $p_j - 1$, то коэффициент при $X_1^{p_j - 1} X_{\sigma(j)}$ в $f_j(X_1, \ldots, X_l)$ не равен нулю. Но $f_j(X_1, \ldots, X_l)$ инвариантен относительно $c \otimes 1$, а

$$(c \otimes 1)\left(X_1^{p_j - 1} X_{\sigma(j)}\right) = \left(\exp \frac{2i\pi}{h}\left(p_j - 1 + m_{\sigma(j)}\right)\right)\left(X_1^{p_j - 1} X_{\sigma(j)}\right).$$

Это показывает, что $p_j - 1 + m_{\sigma(j)} \equiv 0 \pmod{h}$. Однако $h - m_{\sigma(j)}$ является показателем (формула (2)). Переставляя u_j, можно, следовательно, предполагать, что $p_j - 1 \equiv m_j \pmod{h}$ для всех j. Так как $p_j - 1 \geqslant 0$ и $m_j < h$, то $p_j - 1 = m_j + \mu_j h$ с целыми $\mu_j \geqslant 0$. Далее, согласно предложению 3 из § 5,

$$\operatorname{Card}(\mathfrak{H}) = \sum_{j=1}^{l} (p_j - 1) = \sum_{j=1}^{l} m_j + h \sum_{j=1}^{l} \mu_j.$$

Учитывая формулу (3) и теорему 1, (ii), мы получаем $h \sum_{j=1}^{l} \mu_j = 0$; следовательно, $\mu_j = 0$ для всех j и, наконец, $p_j - 1 = m_j$ для всех j.

Следствие 1. *Порядок группы W равен произведению $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots (m_l + 1)$, где $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — возрастающая последовательность ее показателей.*

Это вытекает из соотношений $m_j + 1 = p_j$ и из следствия теоремы 3, § 5, n° 3.

Следствие 2. *Если c — преобразование Кокстера группы W, то*

$$\exp\left(\frac{2i\pi}{h}\right) \quad \textit{и} \quad \exp\left(-\frac{2i\pi}{h}\right)$$

являются его собственными значениями кратности 1.

В противном случае существовали бы два однородных инварианта степени 2 в S, а значит, и две непропорциональные квадратичные формы на V^*, инвариантные относительно W, что противоречит предложению 1 из § 2, n° 1.

Следствие 3. *Для того чтобы гомотетия относительно -1 в V принадлежала группе W, необходимо и достаточно, чтобы все показатели группы W были нечетны. В случае когда это так, h четно и $c^{h/2} = -1$ для любого преобразования Кокстера c группы W.*

Первое утверждение вытекает из предложения 4, § 5, n° 3. Предположим, что показатели W нечетны. Тогда h четно, как это показывает формула (2), и

$$\left(\exp \frac{2i\pi m_j}{h}\right)^{h/2} = \exp(i\pi m_j) = -1.$$

Значит, $c^{h/2} = -1$, поскольку c — полупростой автоморфизм пространства V (*Алг.*, гл., IX, § 7, n° 3, предложение 4).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Следующее предложение служит обобщением предложения 13 из гл. I, § 3, n° 8:

Предложение 1. *Пусть K — коммутативное поле, A — некоторая K-алгебра, V и W — два левых A-модуля, которые являются векторными пространствами конечной размерности над K. Если существует расширение L поля K, такое, что $(A \otimes_K L)$-модули $V \otimes_K L$ и $W \otimes_K L$ изоморфны, то и A-модули V и W изоморфны.*

а) Предположим сначала, что L — расширение поля K *конечной степени* n. Будучи изоморфными как $(A \otimes_K L)$-модули, $V \otimes_K L$ и $W \otimes_K L$ изоморфны и как A-модули. Но как A-модули они изоморфны V^n и W^n соответственно. Далее, V и W суть A-модули конечной длины. Следовательно, V (соотв. W) — прямая сумма некоторого семейства $\left(M_i^{r_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ $\left(\text{соотв. } \left(N_j^{s_j}\right)_{1 \leqslant j \leqslant q}\right)$ подмодулей, причем M_i (соотв. N_j) уже не разложимы, а два M_i (соот. N_j) с различными индексами не изоморфны (*Алг.*, гл. III, § 2, теорема 1). В таком случае V^n (соотв. W^n) — прямая сумма подмодулей $M_i^{nr_i}$ $\left(\text{соотв. } N_j^{ns_j}\right)$. Приходим к заключению (*там же*), что $p = q$ и что с точностью до возможной перестановки N_j модули M_i изоморфны N_i, а nr_i равны ns_i для $1 \leqslant i \leqslant p$. Следовательно, V изоморфен W.

б) Пусть теперь K — бесконечное поле. По условию V и W имеют одинаковую размерность над K. Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i < m}$, $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ — базисы в V и W над K, (a_λ) — базис алгебры A над K. Изоморфизм $u\colon V \otimes_K L \to W \otimes_K L$ есть L-линейное биективное отображение, которое в то же время является $(A \otimes_K L)$-гомоморфизмом; иначе говоря, выполнено следующее условие:

$$a_\lambda u(e_i) = u(a_\lambda e_i) \quad \text{для любых } \lambda \text{ и } i. \tag{1}$$

Положим $a_\lambda e_i = \sum_j \gamma_{\lambda ij} e_j$, $a_\lambda e'_i = \sum_j \gamma'_{\lambda ij} e'_j$, где $\gamma_{\lambda ij}$ и $\gamma'_{\lambda ij}$ принадлежат K, и $u(e_i) = \sum_j \xi_{ij} e'_j$, где ξ_{ij} принадлежат полю L. Условие (1) принимает вид

$$\sum_j \xi_{ij}\gamma'_{\lambda jk} = \sum_j \gamma_{\lambda ij}\xi_{jk} \tag{2}$$

с произвольными λ, i, k. По предположению система линейных однородных уравнений (2) имеет решение $(\xi_{ij}) \in L^{m^2}$, такое, что $\det(\xi_{ij}) \neq 0$. Поскольку коэффициенты системы (2) принадлежат полю K, то, как мы знаем (*Alg.*, chap II, 3^e éd., § 8, n° 5, предложение 6), эта система допускает нетривиальные решения и в K^{m^2}. Пусть E — векторное подпространство в $\mathbf{M}_m(K) = K^{m^2}$, не сводящееся к 0 и состоящее из указанных решений. Пусть $(c_l)_{1 \leqslant l \leqslant p}$ — базис в E. Положим $(\xi_{ij}) = \sum_l \eta_l e_l$ для любой матрицы $(\xi_{ij}) \in E$. Тогда $\det(\xi_{ij})$ является многочленом $P(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ с коэффициентами в K. Кроме того, известно (*там же*), что решения системы (2) в L^{m^2} имеют вид $\sum_l \zeta_l c_l$, на этот раз с $\zeta_l \in L$. Для одного такого решения $\det(\xi_{ij})$ равен $P(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$. Коль скоро это так, то в случае $P(\eta_1, \ldots, \eta_p) = 0$ при произвольных $\eta_1, \ldots, \eta_p \in K$ коэффициенты многочлена P были бы равны 0, поскольку K бесконечно. Мы имели бы тогда $P(\zeta_1, \ldots, \zeta_p) = 0$ для любых $\zeta_1, \ldots, \zeta_p \in L$, что противоречит предположению. Таким образом, мы можем найти матрицу $(\xi_{ij}) \in E$, для которой $\det(\xi_{ij}) \neq 0$, и соответствующее отображение $V \to W$ будет изоморфизмом.

в) *Общий случай.* Пусть Ω — алгебраически замкнутое расширение поля L и K_0 — алгебраическое замыкание поля K в Ω. Тогда по предположению $V \otimes_K \Omega$ и $W \otimes_K \Omega$ будут изоморфными $(A \otimes_K \Omega)$-модулями. Так как K_0 бесконечно, то, согласно б), изоморфны также $(A \otimes_K K_0)$-модули $V \otimes_K K_0$ и $W \otimes_K K_0$. В обозначениях из б) система (2) обладает решением $(\xi_{ij}) \in K_0^{m^2}$, для которого $\det(\xi_{ij}) \neq 0$. Но ξ_{ij} принадлежат одному и тому же алгебраическому расширению K_1 конечной степени над K. Значит, $(A \otimes_K K_1)$-модули $V \otimes_K K_1$ и $W \otimes_K K_1$ изоморфны, и мы получаем из а) то, что нужно.

Предложение 2 (Машке). *Пусть A — кольцо с единицей, E — левый A-модуль, F — его прямое слагаемое, G — конечная группа порядка q, ρ — линейное представление G в E.*

Предположим, что элемент $q.1$ обратим в A и что модуль F устойчив относительно G. Тогда в E существует дополнение модуля F, устойчивое относительно G.

Пусть p — проектирование E на F. Для любого $x \in E$ положим

$$f(x) = q^{-1} \sum_{s \in G} \rho(s)^{-1} p(\rho(s)x).$$

Имеем $f(x) \in F$ и $f(y) = y$ для всех $y \in F$, поэтому f тоже является проектированием E на F. С другой стороны, если $t \in G$, то

$$\begin{aligned}\rho(t) f(x) &= q^{-1} \sum_{s \in G} \rho(st^{-1})^{-1} p(\rho(s)x) = \\ &= q^{-1} \sum_{s \in G} \rho(s)^{-1} p(\rho(st)x) = \\ &= f(\rho(t)x).\end{aligned}$$

Значит, f коммутирует с $\rho(G)$, так что $\operatorname{Ker} f$, дополнительное к F в E, устойчиво относительно G.

Следствие. *Пусть G — конечная группа порядка q, K — коммутативное поле, характеристика которого не делит q. Тогда групповая алгебра группы G над K является полупростой.*

Действительно, по предложению 2 любой модуль над этой алгеброй полупрост.

Предложение 3. *Пусть A — коммутативное кольцо, M — A-модуль, G — конечная группа, действующая на M, и A' — A-модуль. Предположим, что порядок q группы G обратим в A. Пусть M^G — множество инвариантных относительно G элементов модуля M. Тогда канонический гомоморфизм $M^G \otimes_A A'$ в $M \otimes_A A'$ определяет изоморфизм $M^G \otimes_A A'$ на модуль $(M \otimes_A A')^G$ инвариантных относительно G элементов в $M \otimes_A A'$.*

В самом деле, пусть Q — проектирование M на M^G, определенное равенством $Q(x) = q^{-1} \sum_{g \in G} g(x)$ для всех $x \in M$. Если i — каноническое вложение M^G в M, то $Q \circ i$ — тождественное отображение M^G на себя. Следовательно, $(Q \otimes 1_{A'}) \circ (i \otimes 1_{A'})$ — тождественное отображение модуля $M^G \otimes_A A'$. Так как $Q \otimes 1_{A'} = q^{-1} \sum_{g \in G} (g \otimes 1_A)$, то образом

$i \otimes 1_{A'}$ является $(M \otimes A')^G$. С другой стороны, по сказанному выше $i \otimes 1_{A'}$ инъективно.

Замечание. Предыдущее предложение применяется особенно часто тогда, когда A' есть *A-алгебра*. В этом случае $M^G \otimes_A A'$ будет A'-подмодулем модуля $M \otimes_A A'$.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 2.

1) Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, E — A-модуль и E^* — дуальный к нему модуль. Обозначим через φ канонический гомоморфизм модуля $E \otimes E^*$ в $\mathrm{End}(E)$.

а) Назовем *псевдоотражением* в E любой отличный от 1 элемент из $\mathrm{End}(E)$ вида

$$s_{x,\,y^*} = 1 - \varphi(x \otimes y^*),$$

где $x \in E$ и $y^* \in E^*$. Такой элемент s называется *отражением*, если можно выбрать x и y^*, связанные соотношением $\langle x, y^* \rangle = 2$. Показать, что тогда $s^2 = 1$ и $s(x) = -x$.

б) Пусть $x \in E$, $y^* \in E$ таковы, что $\langle x, y^* \rangle = 1$, и пусть s — отражение, соответствующее паре $(2x, y^*)$. Показать, что E является прямой суммой подмодуля K_x, порожденного элементом x, и ортогонального дополнения H к y^*. Показать, что Kx — свободный модуль с базисом x и что s равно 1 на H и -1 на Kx.

2) В тех же обозначениях, что и в упражнении 1, показать, что $\det(s_{x,\,y^*}) = 1 - \langle x, y^* \rangle$, если E — свободный K-модуль конечного типа.

¶ 3) Пусть V — комплексное гильбертово пространство с базисом $e_1, \ldots, e_l$. Для $1 \leqslant i \leqslant l$ пусть s_i — унитарное псевдоотражение вектора e_i (§ 2, n° 1), такое, что $s_i(e_i) = c_i e_i$, где $e_i \neq 1$. Элемент пространства V инвариантен относительно s_i в том и только том случае, когда он ортогонален к e_i. Пусть W — подгруппа группы $\mathbf{GL}(V)$, порожденная всеми s_i.

а) Пусть i — целое число $\geqslant 1$. Показать, что любой элемент пространства $\bigwedge^i V$, инвариантный относительно W, равен нулю. (Провести индукцию по e. Если V' — векторное подпространство в V, порожденное $e_1, \ldots, e_{l-1}$, и если e — ненулевой вектор, ортогональный к V', записать каждый элемент пространства $\bigwedge^i V$ в виде $a + (b \wedge e)$ с $a \in \bigwedge^i V'$ и $b \in \bigwedge^{i-1} V'$. Если $a + (b \wedge e)$ инвариантен относительно W, то a и b будут инвариантны относительно группы W', порожденной $s_1, \ldots, s_{l-1}$, к которой можно применить предположение индукции.)

б) Предположим, что группа W *конечна*. Показать, используя a), что для всякого эндоморфизма A пространства V имеют место соотношения

$$\sum_{w \in W} \det(A - w) = \mathrm{Card}(W) \,.\, \det(A),$$

$$\sum_{w \in W} \det(1 - Aw) = \mathrm{Card}(W).$$

Вывести отсюда, что для любого $A \in \operatorname{End}(V)$ существует элемент $w \in W$, такой, что Aw не имеет ненулевых неподвижных точек.

в) Пусть Γ — граф с множеством вершин $(1, l)$ и с ребрами $\{i, j\}$, где i, j таковы, что e_i и e_j неортогональны. Показать, что V является простым W-модулем тогда и только тогда, когда Γ связен и непуст.

г) Пусть V — простой W-модуль. Показать, что W-модули $\bigwedge^i V$ $(0 \leqslant i \leqslant l)$ будут простыми. (Показать, что существует такое целое число j, что граф $\Gamma - \{j\}$ связен. Провести индукцию по l и применить предположение индукции к подпространству V', порожденному векторами e_i, $i \neq j$.) Показать, что эти модули попарно неизоморфны [1]).

§ 3.

1) При введенных в n° 1 обозначениях и условиях показать, что камеры относительно W являются открытыми симплексами в том и только том случае, когда W бесконечна и неприводима. Показать, что E/W компактно тогда и только тогда, когда W — произведение бесконечных неприводимых групп.

2) Пусть V — вещественное векторное пространство конечной размерности со скалярным произведением, F — конечная подгруппа ортогональной группы пространства V, порожденная отражениями, Λ—дискретная подгруппа в V, устойчивая относительно F, W — группа перемещений пространства V, порожденная подгруппой F и переносами на векторы из Λ. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество гиперплоскостей H в V, таких, что $s_H \in F$. Пусть R — множество элементов из Λ, ортогональных элементам из $\mathfrak{H}$.

а) Для того чтобы W была порождена отражениями, необходимо и достаточно, чтобы R порождало Λ.

б) В $\mathbf{R}^2$ со скалярным произведением $((x, y), (x', y')) \longmapsto xx' + yy'$ пусть

$$e_1 = (1, 0),\ e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ e_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \Delta_i = \mathbf{R}e_i,$$

F — диэдральная группа, порожденная s_{Δ_i}, Λ — дискретная подгруппа в $\mathbf{R}^2$, порожденная e_i, — подгруппа, которая устойчива относительно F. Показать, что W не порождена отражениями.

3) Пусть V — вещественное векторное пространство конечной размерности и W — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(V)$, порожденная отражениями. Показать, что любой элемент порядка 2 в W есть произведение отражений, принадлежащих W и коммутирующих между собой. (Провести индукцию по $\dim V$, воспользовавшись предложением 2.)

4) Пусть V — вещественное векторное пространство конечной размерности, W — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(V)$, порожденная отражениями, w — элемент из W, V' — устойчивое относительно w векторное подпространство в V и k — порядок сужения $w \mid V'$ элемента w на V'. Показать, что существует элемент $x \in W$ порядка k, оставляющий V' устойчивым и такой, что $x \mid V' = w \mid V'$. (Пусть W' — множество элементов группы W, оставляющих неподвижными точки в V'. Эта группа порождена отражениями, и w переставляет камеры относительно W'. Вывести отсюда, что существует элемент $h \in W'$, такой, что wh оставляет устойчивой некоторую камеру относительно W'. Показать, что можно положить $x = wh$.)

---

[1]) Это упражнение, нигде не опубликованное, нам сообщил Р. Стейнберг.

¶ 5) Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство, W — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(V)$, порожденная отражениями, C — камера относительно W и S — множество ее стенок. Для $J \subset S$ пусть W_J—подгруппа в W, порожденная s_H с $H \in J$, и пусть $\varepsilon(J)=(-1)^{\mathrm{Card}(J)}$. Показать, что тогда

$$\frac{1}{\mathrm{Card}(W)} = \sum_{J \subset S} \frac{\varepsilon(J)}{\mathrm{Card}(W_J)}. \tag{*}$$

(Пусть $(x \mid y)$ — скалярное произведение на V, инвариантное относительно W, Σ — единичная сфера в V, μ — положительная мера на Σ, инвариантная относительно W и общей массы 1. Пусть D_H — открытое полупространство, определенное стенкой $H \in S$ и содержащее C, и пусть $E_H = D_H \cap \Sigma$. Справедливо соотношение

$$(-\overline{C}) \cap \Sigma = \bigcap_{H \in S} (\Sigma - E_H),$$

откуда

$$\frac{1}{\mathrm{Card}(W)} = \mu(\overline{C} \cap \Sigma) = \int_\Sigma \prod_{H \in S} (1 - \varphi_{E_H}) d\mu = \sum_{J \in S} \varepsilon(J)\, \mu\Big(\bigcap_{H \in J} E_H\Big).$$

Сделать вывод, заметив, что $\bigcap_{H \in J} E_H$ есть пересечение некоторой камеры группы W_J с Σ и, значит, соответствующая мера равна $1/\mathrm{Card}(W_J)$.

Снова найти формулу (*) при помощи упражнения 26, g) гл. IV, § 1 (положить $t = 1$ в тождестве, доказанном в этом упражнении).

6) а) Пусть K — коммутативное поле, V — векторное пространство конечной размерности n над K, φ — симметрическая билинейная форма на V, N — ее ядро. Предположим, что $\dim N = 1$. Показать, что ядро продолжения φ на $\bigwedge^{n-1} V$ имеет размерность $n - 1$.

б) Пусть, далее, $K = \mathbf{R}$ и форма φ положительно определена. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V и $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. Предположим, что $a_{ij} \leqslant 0$ при $i \neq j$ и что $\{1, 2, \ldots, n\}$ не допускает разбиения $I \cup J$, для которого $a_{ij} = 0$ при $i \in I$, $j \in J$. Пусть A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице (a_{ij}). Показать, что $A_{ij} > 0$, каковы бы ни были i и j. (Пусть $\zeta_1 e_1 + \ldots + \zeta_n e_n$ — вектор, порождающий N и имеющий все координаты > 0. Показать, что каждая строка и каждый столбец матрицы (A_{ij}) пропорциональны $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Вывести отсюда, что $A_{ij} = \mu\zeta_i\zeta_j$, где μ — некоторая константа. Рассмотрев A_{ii}, показать, что $\mu > 0$.)

в) Показать, что $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ пропорциональны $\sqrt{A_{11}}, \ldots, \sqrt{A_{nn}}$.

7) Пусть $q(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j$ $(a_{ij} = a_{ji})$ — вырожденная положительная квадратичная форма на $\mathbf{R}^n$ с $a_{ij} \leqslant 0$ при $i \neq j$. Предположим, что множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ не допускает разбиения $I \cup J$, для которого $a_{ij} = 0$ при $i \in I$, $j \in J$.

а) Показать, что если $\xi_i = 0$, то получается невырожденная положительная форма относительно $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n$.

б) Показать, что $a_{ii} > 0$ для любого i. (Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — элемент ядра формы q с $\zeta_1 > 0, \ldots, \zeta_n > 0$. Воспользоваться равенством $a_{1i}\zeta_1 + \ldots + a_{ni}\zeta_n = 0$.)

в) Показать, что если мы заменим один из элементов a_{ij} на $a'_{ij}<a_{ij}$, то новая форма не будет положительной. (Воспользоваться равенством $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\zeta_i\zeta_j=0$.)

8) Пусть (a_{ij}) — вещественная симметрическая матрица с n строками и n столбцами.

а) Положим $s_k=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}$. Каковы бы ни были $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{R}$, выполняется соотношение

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k=\sum_k s_k\xi_k^2-\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(\xi_i-\xi_k)^2.$$

б) Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathbf{R}^*$. Положим $\sum\limits_i \zeta_i a_{ik}=t_k$. Тогда

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k=\sum_k \frac{t_k\xi_k^2}{\zeta_k}-\frac{1}{2}\sum_{i,k}\zeta_i\zeta_k a_{ik}\left(\frac{\xi_i}{\zeta_i}-\frac{\xi_k}{\zeta_k}\right)^2$$

(заменить в а) ξ_i на ξ_i/ζ_i и a_{ik} на $\zeta_i\zeta_k a_{ik}$).

в) Если существуют числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_n>0$, для которых $\sum\limits_i \zeta_i a_{ik}=0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, и если $a_{ij}\leqslant 0$ при $i\neq j$, то квадратичная форма $\sum\limits_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k$ положительна и вырождена (использовать б)).

г) Пусть $\sum\limits_{i,j} q_{ij}\xi_i\xi_j$ — квадратичная форма на $\mathbf{R}^n$ с $q_{ij}\leqslant 0$ при $i\neq j$. Предположим, что множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ не допускает разбиения $I\cup J$, для которого $q_{ij}=0$ при $i\in I$ и $j\in J$. Для того чтобы форма была невырожденной и положительной, необходимо и достаточно, чтобы не существовало $\zeta_1>0, \ldots, \zeta_n>0$, таких, что $\sum\limits_i \zeta_i q_{ik}=0$ $(k=1, \ldots, n)$.

§ 4.

В упражнениях ниже (W, S) обозначается система Кокстера. Предположим, что множество S *конечно*. Его мощность называется *рангом* системы (W, S). Отождествим W с подгруппой в $\mathbf{GL}(E)$ при помощи σ (см. n° 3 и 4).

1) Пусть E^0 — подпространство, ортогональное к E относительно формы B_M. Показать, что E^0 — радикал W-модуля E (*Алг.*, гл. VIII, § 6, n° 2) и что E/E^0 — прямая сумма абсолютно простых попарно неизоморфных модулей в количестве, равном числу связных компонент графа системы (W, S).

2) а) Пусть Γ_w — множество экстремальных образующих конуса $w(C)$ и A — объединение Γ_w $w\in W$. Показать, что A с множеством $\mathfrak{C}=\{\Gamma_w \mid w\in W\}$ образует ансамбль (гл. IV, § 1, упражнение 15). Показать, что отображение j апартамента A_0, ассоциированного с системой Кокстера (W, C) (гл. IV, § 1, упражнение 16), на A, которое переводит точку $wW^{(s)}\in A_0$ (для $w\in W$, $s\in S$) в образующую $w(\mathbf{R}e_s)$, есть изоморфизм

A_0 на A, совместимый с действием группы W. Показать, что если $t = wsw^{-1}$, где $w \in W$, $s \in S$, то образ относительно j стенки L_t, определенной элементом t (соотв. половиной апартамента A_0, определенной стенкой L_t) (*там же*), есть множество элементов из A, содержащихся в гиперплоскости (соотв. замкнутом полупространстве), которая является образом при $\sigma^*(w)$ гиперплоскости $e_s = 0$ (соотв. замкнутого полупространства $e_s \geqslant 0$ или $e_s \leqslant 0$).

б) Показать, что группа W конечна в том и только том случае, когда существует элемент $w_0 \in W$, такой, что $w_0(C) = -C$. Этот элемент w_0 тогда однозначно определен и имеет наибольшую длину в W (воспользоваться упражнением 22 гл. IV, § 1). Доказать, что тогда $j(-a) = -j(a)$ для всех $a \in A_0$ (упражнение 22, в), гл. IV, § 1).

в) Показать, что группа W конечна в том и только том случае, когда конус U, являющийся объединением замыканий конусов $w(\overline{C})$ для $w \in W$, совпадает со всем пространством E^*. (Когда W конечна, воспользоваться б) и выпуклостью U. Когда $U = E^*$, рассмотреть элемент $w \in W$, для которого $w(\overline{C}) \cap (-C) \neq \varnothing$, и показать, что $w(C) = -C$.)

г) Пусть H — конечная подгруппа в W. Показать, что существует подмножество $X \subset S$, такое, что W_X конечна и содержит подгруппу, сопряженную с H. (Провести индукцию по $\operatorname{Card}(S)$. Пусть $x \in C$ и $\bar{x} = \sum\limits_{h \in H} h(x)$. Используя в), показать, что W конечна, если $\bar{x} = 0$. При $\bar{x} \neq 0$ существуют $w \in W$ и $Y \subset S$, $Y \neq S$, такие, что $w(\bar{x})$ принадлежит C_Y (обозначения из n° 6), откуда $H \subset w^{-1}W_Y w$. Применить предположение индукции к Y.)

3) Предположим, что система (W, S) неприводима.

а) Показать, что коммутант W-модуля E сводится к гомотетиям.

б) Показать, что центр группы W равен $\{1\}$, когда W бесконечна или когда W конечна, а ее элемент w_0 наибольшей длины (упражнение 2) $\neq -1$. Если W конечна и $w_0 = -1$, то центром группы W будет $\{1, w_0\}$.

в) Показать, что любой элемент $w \neq 1$ группы W, для которого $wSw^{-1} = S$, переводит C в $-C$ (показать, что $w(e_s) = -e_{wsw^{-1}}$ сначала для какого-нибудь одного $s \in S$, а потом для любого $s \in S$). Получить отсюда (упражнение 2), что такой элемент существует, только если W конечна, и что тогда он совпадает с w_0.

4) Допустим, что $\operatorname{Card}(S) = 3$. При $s \in S$ положим $a(s) = m(u, v)$, где $\{u, v\} = S - \{s\}$. Пусть $A = \sum\limits_{s \in S} 1/a(s)$. Показать, что

а) если $A > 0$, то форма B_M невырождена и положительна (в каковом случае W конечна);

б) если $A = 1$, то форма B_M положительна и вырождена;

в) если $A < 1$, то форма B_M невырождена и имеет сигнатуру $(2, 1)$ (*Алг.*, гл. IX, § 7, n° 2).

Показать, что в случае а) порядок q группы W задается формулой $q = 4/(A - 1)$ (воспользоваться упражнением 5 к § 3).

5) Пусть A — подкольцо в $\mathbf{R}$, порожденное числами $2\cos(\pi/m(s, s'))$. Показать, что A является свободным $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа и что матрицы преобразований $\sigma(w)$ для $w \in W$ имеют в качестве коэффициентов элементы из A. Получить отсюда, что коэффициенты характеристических многочленов преобразований $\sigma(w)$ являются целыми алгебраическими числами.

¶ 6) а) Пусть m — целое число $\geqslant 2$ или $+\infty$. Показать, что утверждение «$4\cos^2\frac{\pi}{m} \in \mathbf{Z}$» эквивалентно утверждению «$m \in \{2, 3, 4, 6, +\infty\}$».

б) Пусть Γ — *решетка* в E, т. е. дискретная подгруппа в E ранга, равного $\dim E$. Показать, что если Γ устойчива относительно W, то целые числа $m(s, s')$ при $s \neq s'$ принадлежат множеству $\{2, 3, 4, 6, +\infty\}$. (Заметить, что тогда $\operatorname{Tr}(\sigma(w)) \in \mathbf{Z}$ для всех $w \in W$. Применить этот результат к $w = ss'$ и использовать а).)

в) Предположим, что $m(s, t) \in \{2, 3, 4, 6, +\infty\}$ для $s \neq t$. Семейство $(x_s)_{s \in S}$ положительных вещественных чисел называется *радикальным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&m(s, t) = 3 &&\Rightarrow x_s = x_t;\\
&m(s, t) = 4 &&\Rightarrow x_s = \sqrt{2}\cdot x_t \quad \text{или} \quad x_t = \sqrt{2}\cdot x_s;\\
&m(s, t) = 6 &&\Rightarrow x_s = \sqrt{3}\cdot x_t \quad \text{или} \quad x_t = \sqrt{3}\cdot x_s;\\
&m(s, t) = +\infty &&\Rightarrow x_s = e_t \quad \text{или} \quad x_s = 2x_t, \quad \text{или} \quad x_t = 2x_s.
\end{aligned}
$$

Если (x_s) — такое семейство, то положим $\alpha_s = x_s e_s$. Показать, что

$$\sigma_s(\alpha_t) = \alpha_t - n(s, t)\,\alpha_s, \quad \text{где} \quad n(s, t) \in \mathbf{Z}.$$

Получить отсюда, что решетка Γ с базисом $(\alpha_s)_{s \in S}$ *устойчива относительно* W.

г) В условиях упражнения в) предположим, что граф системы (W, S) является *лесом*. Показать, что тогда существует по крайней мере одно радикальное семейство (x_s). (Провести индукцию по $\operatorname{Card}(S)$). Применить предположение индукции к $S - \{s_0\}$, где s_0 — концевая вершина графа S.)

д) В условиях упражнения в) предположим, что граф системы (W, S) является *циклом*. Пусть n_4 (соотв. n_6) — число ребер этого графа $\{s, t\}$ с коэффициентом $m(s, t)$, равным 4 (соотв. 6). Показать, что для существования радикального семейства необходимо и достаточно, чтобы оба числа n_4 и n_6 были *четными*. Показать, что если это условие не выполнено, то вообще не существует *никакой решетки* в E, устойчивой относительно W. (Если $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ и вершина s_i соединена с s_{i+1} при $1 \leqslant i \leqslant n-1$, а s_n соединена с s_1, то положим $c = s_1 \ldots s_n$ и заметим, что $\operatorname{Tr}(\sigma(c))$ не является целым числом).

7) Пусть система (W, S) неприводима, а форма B_M положительна.

а) Показать, что для всякого подмножества $T \subset S$, отличного от S, группа W является конечной (воспользоваться теоремой 2, а также леммой 4 из § 3, n° 5).

б) Показать, что если $\operatorname{Card}(S) \geqslant 3$, то все $m(s, s')$ конечны.

в) Предположим, что W бесконечна. Показать, что при $T \subset S$, $T \neq S$ группа $\sigma(W_T)$ оставляет устойчивой некоторую решетку в $\mathbf{R}^T$. Получить отсюда, что если $\operatorname{Card}(S) \geqslant 3$, то все $m(s, s')$, $s \neq s'$, принадлежат множеству $\{2, 3, 4, 6\}$ (воспользоваться упражнением 6).

8) Пусть $s \in S$ и $w \in W$. Показать, что при $l(ws) > l(w)$ (соотв. $l(ws) < l(w)$) элемент $w(e_s)$ является линейной комбинацией с коэффициентами $\geqslant 0$ (соотв. $\leqslant 0$) векторов e_t для $t \in S$. (Применить свойство (P_n) из n° 4 к w^{-1} и рассуждать от противного.)

9) Показать, что пересечение подгрупп конечного индекса в W состоит только из 1 (использовать упражнение 5). Получить отсюда, что

существует подгруппа конечного индекса группы W, не содержащая никакого элемента конечного порядка, кроме 1 (использовать упражнение 2, г)).

¶ 10) Пусть G — замкнутая подгруппа в $\mathbf{GL}(E)$, содержащая W. Предположим, что G унимодулярна (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 3). Пусть D — полупрямая в E^*, лежащая в C, и пусть G_D — стабилизатор D в G.

а) Пусть Δ — множество элементов $g \in G$, для которых $g(D) \subset C$. Показать, что Δ открыто, устойчиво относительно умножения справа на G_D и что композиция отображений $\Delta \to G \to W \backslash G$ инъективна, где $W \backslash G$ — однородное пространство правых смежных классов G по W.

б) Пусть μ — мера Хаара на G. Показать, что если $\mu(\Delta)$ конечна, то подгруппа G_D компактна. (Пусть K — компактная окрестность единицы, содержащаяся в Δ. Показать, что существует конечное число таких элементов $h_i \in G_D$, что любое множество вида Kh, где $h \in G_D$, пересекается с одним из Kh_i. Получить отсюда, что G_D содержится в объединении множеств $K^{-1} \cdot K \cdot h_i$ и, следовательно, компактно.)

в) Пусть ν — ненулевая положительная мера на $W \backslash G$, инвариантная относительно G. Показать, что если $\nu(W \backslash G) < \infty$, то подгруппа G_D компактна.

¶ 11) Пусть H — подмножество в $\mathbf{R}^n$, состоящее из точек $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, в которых форма

$$B(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$$

строго отрицательна, и пусть $\mathbf{P}H$ — образ H в проективном пространстве $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{R})$. Пусть G — ортогональная группа формы B.

а) Показать, что $\mathbf{P}H$ — однородное пространство группы G, что стабилизатор некоторой точки в $\mathbf{P}H$ компактен и что G действует на $\mathbf{P}H$ собственно разрывно.

б) Пусть ω и Ω — дифференциальные формы на H, заданные формулами

$$\omega = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_i \, dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n-1},$$

$$\Omega = \frac{\omega}{(-B(x))^{n/2}}.$$

Показать, что Ω — прообраз относительно канонической проекции $\pi \colon H \to \mathbf{P}H$ некоторой дифференциальной формы $\widetilde{\Omega}$ на $\mathbf{P}H$. Показать, что положительная мера ν, ассоциированная с формой $\widetilde{\Omega}$ (*Var. diff.*, Res., 2[e] partie), инвариантна относительно G и единственна с точностью до скалярного множителя.

в) Пусть C — открытый симплициальный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной 0 (§ 1, n° 6). Предположим, что C содержится в H, и обозначим через $\mathbf{P}C$ образ C относительно отображения $\pi \colon H \to \mathbf{P}H$. Показать, что если $n \geqslant 3$, то $\nu(\mathbf{P}C) < \infty$. (Отождествить $\mathbf{P}H$ с подпространством в $\mathbf{R}^{n-1}$, состоящим из векторов $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ с $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1$, и определить меру, соответствующую мере ν на этом подпространстве.) Показать, что $\mathbf{P}C$ относительно компактно в $\mathbf{P}H$ в том и только том случае, когда $\overline{C}$ содержится в H.

¶ 12) Предположим, что форма $x \,.\, y = B_M(x, y)$ *невырождена* и что W *бесконечна*. Отождествим E с дуальным пространством E^* при помощи B_M. В частности, обозначим через (e_s^*) базис в E, дуальный базису (e_s), и через C — внутренность симплициального конуса $\overline{C}$, порожденного всеми e_s^*. Пусть G — ортогональная группа формы B_M, и пусть μ — мера Хаара на G. Группа G является унимодулярной и содержит группу W.

а) Показать, что если $\nu(W\backslash G) < \infty$ (где ν — мера, инвариантная относительно G), то форма B_M имеет сигнатуру $(n-1, 1)$, где

$$n = \dim(E) = \mathrm{Card}(S),$$

и что $x.x < 0$ для всех $x \in C$.

(Пусть $x \in C$ — вектор, для которого $x.x \neq 0$, и пусть L_x — гиперплоскость, ортогональная к x. Используя упражнение 10, показать, что сужение формы B_M на L_x либо положительно, либо отрицательно. Во втором случае форма B_M имеет сигнатуру $(1, n-1)$; показать, что это невозможно. Получить отсюда, что $x.x \leqslant 0$ для любого $x \in C$, откуда $x.x < 0$, так как конус C открыт.)

б) Обратно, предположим, что B_M имеет сигнатуру $(n-1, 1)$ и $x.x < 0$ для всех $x \in C$ (в этом случае говорят, что группа W, равно как и система (W, S) и соответствующий граф Коксгера, имеет *гиперболический тип*).

Пусть H — множество $x \in E$, для которых $x.x < 0$, и пусть H_+ — связная компонента множества H, содержащая C. Показать, что H — объединение непересекающихся компонент H_+ и $H_- = -H_+$ и что H_- содержится в симплициальном конусе, порожденном $(e_s)_{s \in S}$ (использовать тот факт, что H_- обратно к H_+). Показать, что H_+ и H_- устойчивы относительно W.

в) Сохраним обозначения и предположения упражнения б). Пусть f — линейная форма на E, определенная равенствами $f(e_s) = 1$ для всех $s \in S$. При $x \in H$ положим $\varphi(x) = f(x)^2/(x.x)$. Если $\mathbf{P}H$ — образ конуса H в проективном пространстве $\mathbf{P}(E)$, то функция φ определяет функцию $\tilde{\varphi}$ на $\mathbf{P}H$. Показать, что отображение

$$\tilde{\varphi}: \mathbf{P}H \to]-\infty, 0[$$

является собственным. Получить отсюда, что для всех $x \in H_+$ функции $w \longmapsto \varphi(w.x)$ и $w \longmapsto f(w.x)$ имеют максимум при некотором w_1 из W (использовать тот факт, что группа G действует собственно разрывно на $\mathbf{P}H$ (см. упражнение 11) и что группа W дискретна в G). Показать, что эти свойства эквивалентны тому, что $w_1(x) \in \overline{C}$. Вывести отсюда, что $\overline{C} \cap H_+$ является *фундаментальной областью* для действия W в H_+ и что образ этой фундаментальной области в $\mathbf{P}H$ имеет конечную меру относительно инвариантной меры ν в $\mathbf{P}H$ (воспользоваться упражнением 11). Заключить отсюда, что $\nu(W\backslash G) < \infty$. Показать, что $W\backslash G$ компактно в том и только том случае, когда $\overline{C}$ содержится в H_+, т. е. когда $e_s^* . e_s^* < 0$ для всех $s \in S$ (мы скажем тогда, что группа W, равно как система (W, S) и соответствующий граф Коксгера, имеет *компактный гиперболический тип*).

¶ 13) Показать, что для того чтобы система (W, S) имела гиперболический тип (см. упражнение 12), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:

(H_1) форма B_M неположительна;

(H_2) для любого подмножества $T \subset S$, отличного от S, форма $B_{M(T)}$, ассоциированная с системой Коксгера (W_T, T), положительна.

(Если система (W, S) гиперболического типа, то, как мы видели, $(e_s^* \cdot e_s^*) \leqslant 0$ для любого $s \in S$ — в обозначениях упражнения 12. Сужение B_M на гиперплоскость $E(s)$, ортогональную к e_s^*, будет поэтому $\geqslant 0$. Так как $E(s)$ порождена всеми e_t, $t \neq s$, то мы получаем (H_2). Обратно, предположим, что (H_1) и (H_2) выполнены. Пусть $x = \sum\limits_s a_s e_s$ — элемент из E, для которого $x \,.\, x < 0$, и пусть x_+ (соотв. x_-) — сумма тех $a_s e_s$, для которых $a_s > 0$ (соотв. $\leqslant 0$). Показать, что тогда либо $x_+ \,.\, x_+ < 0$, либо $x_- \,.\, x_- < 0$. Если V — открытый симплициальный конус, порожденный всеми e_s, и H — множество $x \in E$, таких, что $x \,.\, x < 0$, то существует связная компонента H_0 множества H, пересекающая V. Используя (H_2), показать, что H_0 не пересекает стенок конуса V, т. е. $H_0 \subset V$. Получить отсюда, что форма $B_M(x, y)$ невырождена и имеет сигнатуру $(n-1, 1)$ и что C содержится в $-H_0$, откуда следует, что (W, S) имеет гиперболический тип.)

14) Показать, что для того чтобы (W, S) имела компактный гиперболический тип (см. упражнение 12), необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

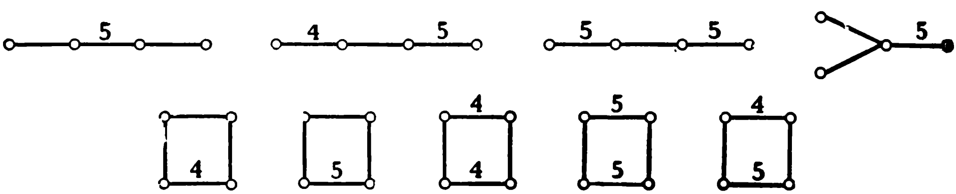
(H_1) форма B_M неположительна;

(HC) для любого подмножества $T \subset S$, отличного от S, группа W_T конечна (т. е. форма $B_{M(T)}$ положительна и невырождена).

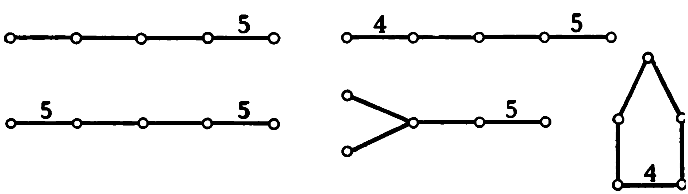
(Использовать упражнения 12 и 13.)

В частности, система Коксгера гиперболического типа ранга 3 имеет компактный гиперболический тип в том и только том случае, когда все $m(s, s')$ конечны (см. упражнение 4).

¶ 15) * а) Показать, что следующие девять графов [1]) имеют компактный гиперболический тип и что с точностью до изоморфизма ими исчерпываются все графы ранга 4, обладающие этим свойством (использовать классификацию, данную в гл. VI, § 4):



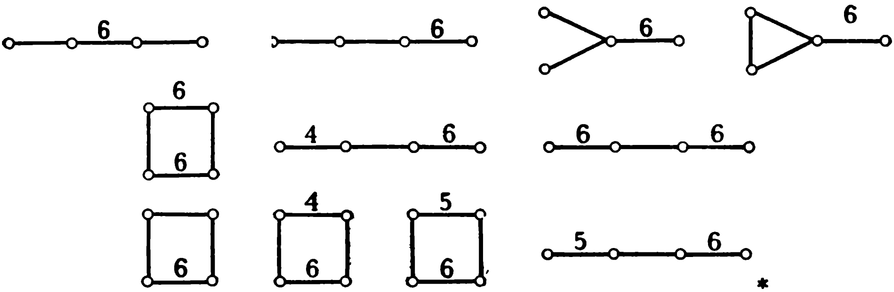
б) Тот же вопрос в случае ранга 5 приводит к следующим пяти графам:



[1]) В этих графах каждое ребро, не снабженное числовой отметкой, имеет на самом деле коэффициент 3 (см. гл. IV, § 1, n° 9).

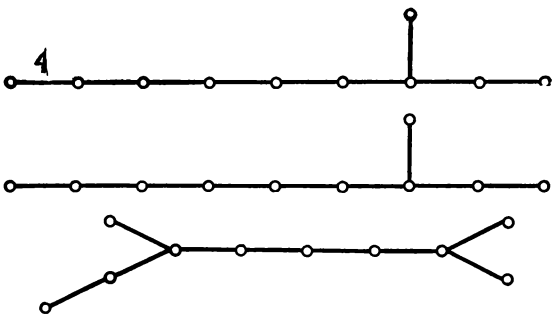
в) Показать, что не существует графов компактного гиперболического типа и ранга $\geqslant 6$. $_*$

16) * Показать, что любой граф Кокстера гиперболического типа и ранга $\geqslant 4$, хотя бы одно ребро которого снабжено числовой отметкой 6, изоморфен одному из следующих одиннадцати графов (некомпактных и ранга 4):



*

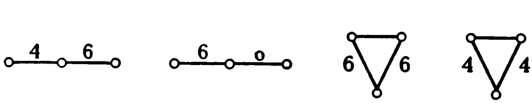
17) * Показать, что гиперболическими графами Кокстера наивысшего ранга будут следующие три (у них ранг равен 10):



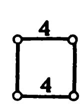
*

¶ 18) Предположим, что система (W, S) гиперболического типа и что W оставляет устойчивой решетку Γ в E. Пусть G — ортогональная группа формы B_M и $G(\Gamma)$ — подгруппа элементов $g \in G$, для которых $g\Gamma = \Gamma$. Показать, что $G(\Gamma)$ — дискретная подгруппа группы G. Показать, что W — подгруппа конечного индекса в $G(\Gamma)$ (использовать тот факт, что мера пространства $W \backslash G$ конечна).

* Показать, что если сверх того (W, S) — система компактного гиперболического типа, то соответствующий граф Кокстера изоморфен одному из следующих (использовать упражнения 4, 6 и 15):

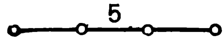


и



Показать, что все группы, соответствующие графам в упражнении 16 (за исключением последних четырех), оставляют устойчивой некоторую решетку (воспользоваться методом упражнения 6). $_*$

19) Пусть (W, S) — система Кокстера, соответствующая графу



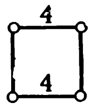
Это система компактного гиперболического типа (см. упражнение 15). Коэффициенты формы B_M относительно базиса (e_s) принадлежат подкольцу A поля $K = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$, состоящему из элементов этого поля, целых над $\mathbf{Z}$.

а) Пусть σ — погружение поля K в $\mathbf{R}$, которое отображает $\sqrt{5}$ в $-\sqrt{5}$. Показать, что образ $\sigma(B_M)$ формы B_M при погружении σ является невырожденной положительной формой.

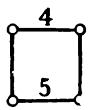
б) Пусть G — ортогональная группа формы B_M, а G_σ — такая же группа формы $\sigma(B_M)$. Пусть G_A — подгруппа группы G, состоящая из элементов, у которых матрицы относительно (e_s) имеют коэффициенты в A. Показать, что G_A отождествляется с дискретной подгруппой в $G \times G_\sigma$, а затем, используя а), показать, что G_A является дискретной подгруппой группы G.

в) Показать, что W — подгруппа конечного индекса в G_A.

г) Доказать аналогичные результаты для других графов упражнения 15 (поле $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ заменяется полем $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$), за исключением графа



в конце упражнения 18 и графа [1])



¶ 20) Для любой пары $\{s, s'\}$ из S с $m(s, s') = \infty$ пусть $r(s, s')$ — вещественное число $\leqslant -1$. Введем на E билинейную форму B_r, такую, что

$$B_r(e_s, e_{s'}) = B_M(e_s, e_{s'}) = -\cos\frac{\pi}{m(s, s')}, \quad \text{если} \quad m(s, s') \neq \infty;$$

$$B_r(e_s, e_{s'}) = r(s, s'), \qquad \text{если} \quad m(s, s') = \infty.$$

Определим так же, как для B_M, отражение σ_s вектора e_s, оставляющее инвариантной форму B_r.

а) Показать, что существует, и притом только один, гомоморфизм $\sigma_r\colon W \to \mathbf{GL}(E)$, такой, что $\sigma_r(g_s)$ совпадает с определенным выше отражением σ_s.

б) Показать, что утверждения предложения 4 теоремы 1, ее следствий и леммы 1 остаются справедливыми и для σ_r.

---

[1]) Как показал Э. Винберг, группа W, соответствующая этому последнему графу, не является „арифметической" подгруппой группы G. То же верно и для некоторых других графов гиперболического типа (на этот раз некомпактных), а именно для последней четверки из упражнения 16. [Первый пример такого рода был построен В. С. Макаровым, *ДАН*, **167** (1966), № 1, 30—33. — *Ред.*]

§ 5.

1) Описать алгебру симметрических инвариантов конечной диэдральной группы (для ее канонического представления размерности 2 см. § 4, n° 2).

2) Пусть A — кольцо главных идеалов, E — свободный A-модуль конечного ранга l и G — конечная подгруппа группы $\mathbf{GL}(E)$. Предположим, что выполнены два следующих условия:

(i) Если $q = \operatorname{Card}(G)$, то элемент $q.1$ кольца A обратим;

(ii) группа G порождена псевдоотражениями модуля E (т. е. такими элементами s, что $(s-1)(E)$ будут моногенными подмодулями модуля E, см. § 2, упражнение 1).

Пусть $\mathbf{S}(E)$ — симметрическая алгебра модуля E, и пусть $\mathbf{S}(E)^G$ — подалгебра этой алгебры, состоящая из инвариантных относительно G элементов. Показать, что при всяком гомоморфизме A в поле k алгебра $\mathbf{S}(E)^G \otimes k$ отождествляется с $\mathbf{S}(E \otimes_k)^G$. Применяя теорему 4, получить отсюда, что $\mathbf{S}(E)^G$ является градуированной алгеброй многочленов над A.

¶ 3) Пусть K — поле характеристики нуль, V — векторное K-пространство конечной размерности l и G — подгруппа группы $\mathbf{GL}(V)$, порожденная псевдоотражениями. Положим $q = \operatorname{Card}(G)$. Обозначим через S (соотв. L) симметрическую алгебру (соотв. внешнюю алгебру) пространства V, а через x (соотв. x') канонический образ элемента $x \in V$ в S (соотв. в L).

а) Пусть $E = S \otimes L$ — тензорное произведение алгебр S и L. Показать, что существует однозначно определенное дифференцирование d алгебры E, такое, что $dx = x'$ и $dx' = 0$ для любого $x \in V$.

б) Пусть S^G — алгебра симметрических инвариантов группы G и $P_1, \ldots, P_l$ — однородные элементы в S^G, такие, что $S^G = K[P_1, \ldots, P_l]$. Для любого подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ интервала $(1, l)$ при $i_1 < \ldots < i_r$ положим

$$\omega_I = dP_{i_1} \ldots dP_{i_r}.$$

Показать, что ω_I линейно независимы над S и что они принадлежат подалгебре E^G инвариантных относительно G элементов в E. Получить отсюда, что для любого $\omega \in E^G$ существуют $a, c_I \in S^G$ с $a \neq 0$, такие, что

$$a\omega = \sum_I c_I \omega_I.$$

в) Показать, что любой элемент из E^G, содержащийся в $S \otimes \bigwedge^l V$, имеет вид $c.dP_1 \ldots dP_l$, где $c \in S^G$. (Применить предложение 5.)

г) Показать, что ω_I образуют базис S^G-модуля S^G. (В обозначениях упражнения б) умножить обе стороны соотношения $a\omega = \sum_I c_I \omega_I$ на ω_J и применить в). Установить, что если множество I дополнительно к J, то a делит c_I. Отсюда следует [1]) тот факт, что ω_I порождают E^G.)

---

[1]) Подробности можно найти в статье: Solomon L., Invariants of finite reflection groups, *Nagoya Math. J.* 22 (1963), 57—64.

д) Пусть S_n (соотв. L_m)—однородные компоненты степени n (соотв. m) алгебры S (соотв. L). Положим

$$E_{n,m} = S_n \otimes L_m, \quad E^G_{n,m} = E^G \cap E_{n,m}, \quad a_{n,m} = \dim E^G_{n,m},$$
$$a(X, Y) = \sum_{n,m \geqslant 0} a_{n,m} X^n Y^m.$$

Используя г), доказать формулу

$$a(X, Y) = \prod_{i=1}^{l} \frac{1 + Y \,.\, X^{p_i - 1}}{1 - X^{p_i}},$$

где $p_i = \deg(P_i)$.

е) Пусть $\mathrm{Tr}_{n,m}(g)$ — след автоморфизма пространства $E_{n,m}$, определенного элементом $g \in G$. Положим

$$\mathrm{Tr}(X, Y)(g) = \sum_{n,m \geqslant 0} \mathrm{Tr}_{n,m}(g)\, X^n Y^m.$$

Показать, что

$$\mathrm{Tr}(X, Y)(g) = \frac{\det(1 + Yg)}{\det(1 - Xg)}.$$

ё) Пусть $q = \mathrm{Card}\, G$. Показать, что

$$\frac{1}{q} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(X, Y)(g) = a(X, Y),$$

т. е.

$$\frac{1}{q} \sum_{g \in G} \frac{\det(1 + Yg)}{\det(1 - Xg)} = \prod_{i=1}^{l} \frac{1 + Y \,.\, X^{p_i - 1}}{1 - X^{p_i}}.$$

(Использовать следующий результат: если G действует на конечномерном векторном пространстве E, то размерность пространства векторов в E, инвариантных относительно G, равна $\frac{1}{q} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}_E(g)$.)

Что дает эта формула при $Y = 0$?

ж) Для любого целого $p \geqslant 0$ пусть H_p — множество элементов $g \in G$, допускающих 1 в качестве собственного значения кратности p. Пусть $h_p = \mathrm{Card}(H_p)$. Доказать формулу

$$\sum_{p=0}^{l} h_p T^p = \prod_{i=1}^{l} (p_i - 1 + T).$$

(В формуле упражнения ё) заменить Y на $-1 + T(1 - X)$ и в полученном выражении положить $X = 1$. Если $g \in H_p$, то $\mathrm{Tr}(X, Y)(g)$ становится равным T^p.)

¶ 4)* Пусть $G_1 = \mathbf{SL}_3(\mathbf{F}_2)$.

а) Показать, что G_1 — простая неабелева группа порядка 168, содержащая 21 элемент порядка 2.

б) Показать, что степенями неприводимых комплексных представлений группы G_1 являются 1, 3, 3, 6, 7, 8.

в) Пусть $\rho\colon G_1 \to \mathbf{GL}_3(C)$ — неприводимое представление степени 3 группы G_1 [1]. Показать, что для элемента $y \in G_1$ порядка 2 имеет место равенство $\operatorname{Tr}(\rho(y)) = -1$. Получить отсюда, что $-\rho(y)$ — отражение.

г) Пусть G — подгруппа группы $\mathbf{GL}_3(\mathbf{C})$, порожденная элементами $-\rho(y)$ для любого y порядка 2 из G_1. Показать, что группа G изоморфна $G_1 \times \{1, -1\}$ и, следовательно, имеет порядок 336.

д) Показать, что характеристические степени k_1, k_2, k_3 алгебры симметрических инвариантов группы G равны 4, 6 и 14. $\left(\text{Воспользоваться соотношениями } \prod_i h_i = 336 \text{ и } \sum_i (k_i - 1) = 21.\right)$

е) Показать, что G не является группой Кокстера. $_*$

5) *Пусть K — поле, и пусть $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ — градуированная K-алгебра многочленов, порожденная алгебраически независимыми однородными элементами X_i степени >0.

а) Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ — однородные элементы степени >0 в S, и пусть $R = K[Y_1, \ldots, Y_n]$ — подалгебра в S, порожденная этими элементами. Доказать эквивалентность следующих свойств:

(i) $(Y_1, \ldots, Y_n)$ есть S-регулярная последовательность;

(ii) S цело над R;

(iii) идеал в S, порожденный $(Y_1, \ldots, Y_n)$, имеет конечную коразмерность в S;

(iv) для любого расширения $\overline{K}$ поля K система уравнений $Y_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ x_i \in \overline{K})$ имеет только тривиальное решение $(0, \ldots, 0)$.

(Эквивалентность (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) следует из теоремы Маколея (*Ком. алг.*); (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) — из теоремы о нулях (*Ком. алг.*, гл. V, § 3, n°3, предложение 2); эквивалентность (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) тривиальна.)

Показать, что если эти свойства выполнены, то Y_i алгебраически независимы над K и S — свободный R-модуль ранга $\prod_i \deg(Y_i) \Big/ \prod_i \deg(X_i)$.

Пусть G — конечная группа автоморфизмов градуированной алгебры S, S^G — подалгебра инвариантов относительно этой группы и $Y_1, \ldots, Y_n$ — элементы из S^G, удовлетворяющие вышеуказанным условиям (i) — (iv). Показать, что $S^G = K[Y_1, \ldots, Y_n]$ в том и только в том случае, когда

$$\operatorname{Card}(G) = \prod_i \deg(Y_i) \Big/ \prod_i \deg(X_i). _*$$

¶ 6) *Пусть n — целое число $\geqslant 1$, q — степень некоторого простого числа $K = \mathbf{F}_q$, $V = K^n$, $G = \mathbf{GL}(n, K)$ и $G_1 = \mathbf{SL}(n, K)$. Отождествим G с группой $\mathbf{GL}(V)$. Далее, обозначим через S алгебру $\mathbf{S}(V) = K[X_1, \ldots, X_n]$ и через R (соотв. R_1) подалгебру в S, состоящую из инвариантных относительно G (соотв. G_1) элементов.

а) Пусть $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — последовательность чисел $\geqslant 0$. Положим

$$L_{\boldsymbol{e}} = \det\left(X_i^{q^{e_j}}\right).$$

Это элемент алгебры S.

Показать, что

$$g \cdot L_{\boldsymbol{e}} = \det(g)\, L_{\boldsymbol{e}} \quad \text{при всех} \quad g \in G.$$

---

[1] Одно из таких представлений подробно изучено в книге: **W e b e r H.**, Lehrbuch der Algebra, Bd. II, Abschn. 15.

(Заметить, что если $g . X_i = \sum_j a_{ij} X_j$, то $g . X_i^{q^e} = \sum_j a_{ij} X_j^{q^e}$.) В частности, L_e. принадлежит подалгебре R_1.

б) Пусть $l \in (1, n)$. Положим

$$Z_l = \prod_{(a_{ij})} \left(X_j + \sum_{i > j} a_{ij} X_i \right),$$

где произведение берется по всем семействам $(a_{ij})_{j < i \leqslant n}$ элементов из K. Пусть

$$T = \prod_{j=1}^{n} Z_j.$$

Показать, что элемент T делит все L_e. Вывести отсюда, что $T = L_{e_m}$, где $e_n = (0, 1, \ldots, n-1)$, и что T инвариантен относительно G_1.

в) Обозначим через e_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ последовательность $(0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ и положим $Y_i = \dfrac{L_{e_i}}{T}$ (см. б)). Показать, что элементы Y_i принадлежат R и что $\deg(Y_i) = q^n - q^i$.

г) Пусть $S' = K(X_1, \ldots, X_{n-1})$, и пусть $T', Y'_1, \ldots, Y'_{n-2}$ — элементы в S', определяемые так же, как $T, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ (с заменой n на $n-1$) Пусть $f \colon S \to S'$ — гомоморфизм, определенный соотношениями

$$f(X_i) = X_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \quad f(X_n) = 0.$$

Показать, что

$$f(T) = 0, \quad f(Y_1) = T'^{q(q-1)}, \; f(Y_i) = Y'^{q}_{i-1} \quad \text{для } 2 \leqslant i \leqslant n-1.$$

д) Показать, что семейство $(T, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ удовлетворяет условию (iv) упражнения 5. (Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — нуль системы, $(T, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ в некотором расширении $\overline{K}$ поля K. Так как x аннулирует T, то x_i удовлетворяют по крайней мере одному нетривиальному линейному соотношению с коэффициентами в K. С точностью до преобразования x при помощи элемента из G_1 можно, следовательно, считать, что $x_n = 0$. Закончить доказательство, используя упражнение г) и проводя индукцию по n.)

е) Показать, что $R_1 = K[T, Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$ и что $T, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ алгебраически независимы („теорема Диксона“). (Применить д) и упражнение 5, заметив, что порядок группы G_1 равен $\deg(T) = \sum_i \deg(Y_i)$.)

ё) Показать, что $R = K[T^{q-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$. *

¶ 7) *Пусть R — регулярное локальное кольцо (*Ком. алг.*) с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем классов вычетов k. Пусть G — конечная группа автоморфизмов кольца R и $R' = R^G$ — подкольцо инвариантных относительно G элементов. Это локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap R'$. Выполнены следующие условия:

(i) кольцо R' нётерово, а кольцо R является R'-модулем конечного типа;

(ii) сложное отображение $R' \to R \to k$ сюръективно.

Положим $V = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Это векторное k-пространство. Действие группы G на R определяет гомоморфизм $\varepsilon \colon G \to \mathbf{GL}(V)$.

а) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1 в R (*Ком. алг.*, гл. VII, § 1, n° 6), и пусть элемент $s \in G$ таков, что $s(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ и s тривиально действует в $R/\mathfrak{p}$. Показать, что $\varepsilon(s)$ — псевдоотражение в V. (Заметить, что образ идеала $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ имеет размерность 0 или 1.)

б) Показать, что если R' регулярно, то подгруппа $\varepsilon(G)$ в $\mathbf{GL}(V)$ порождена псевдоотражениями. (Пусть H—подгруппа группы G, порожденная элементами, образы которых при ε являются псевдоотражениями, и пусть R^H — подкольцо в R инвариантных относительно H элементов. Показать с помощью а), что никакой простой идеал высоты 1 в R' не разветвлен в R^H. Используя тот факт, что кольцо R^H целозамкнуто, вывести с помощью теоремы [1]), что $R' = R^H$ и тем самым $H = G$.)

в) Предположим теперь, что порядок группы G взаимно прост с характеристикой поля k. Показать, что отображение ε инъективно.

Пусть $(\mathfrak{m}'_n)$ — фильтрация в R', индуцированная $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией $(\mathfrak{m}^n)$ кольца R, и пусть

$$i\colon \operatorname{gr}(R') \to \operatorname{gr}(R)$$

— канонический гомоморфизм градуированных колец, ассоциированных с R' и R (*Ком. алг.*, гл. III, § 2). Показать, что гомоморфизм i инъективен и что его образ совпадает с подкольцом $\operatorname{gr}(R)^G$ в $\operatorname{gr}(G)$, состоящим из инвариантных относительно G элементов.

г) Сохраним обозначения и условия упражнения в) и предположим, кроме того, что подгруппа $\varepsilon(G)$ порождена псевдоотражениями. При $l = \dim V$ пусть $P_1, \ldots, P_l$ — однородные алгебраически независимые образующие k-алгебры $\operatorname{gr}(R)^G$ (такие элементы существуют по теореме 4 ввиду того факта, что $\operatorname{gr}(R)$ отождествляется с симметрической алгеброй пространства V). Пусть $p_1, \ldots, p_l$ — их степени. Согласно в), можно найти $x_i \in \mathfrak{m}'_{p_i}$, для которых $\operatorname{gr}(x_i) = P_i$. Показать, что x_i порождают идеал $\mathfrak{m}'$ и вывести отсюда, что R' регулярно. $_*$

¶ 8) * Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K, S — симметрическая алгебра пространства V и G — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(V)$. Предположим, что алгебра S^G симметрических инвариантов относительно G есть градуированная алгебра многочленов.

а) Пусть u — элемент дуального к V пространства V^* и G_u — подгруппа в G, состоящая из элементов, переводящих u в себя. Показать, что G_u порождена псевдоотражениями. (Линейная форма u продолжается до гомоморфизма $f_u\colon S \to K$. Локализация S_u кольца S относительно ядра гомоморфизма f_u является регулярным кольцом. Закончить рассуждение, применив упражнение 7, б) к подгруппе G_u, рассматриваемой как группа автоморфизмов кольца S_u.)

В частности, G порождена псевдоотражениями.

б) Пусть A — подмножество в V^* и $G_A = \bigcap_{u \in A} G_u$. Показать, что G_A порождена псевдоотражениями. (Расширяя, если нужно, основное поле, можно считать K бесконечным. Показать, что тогда в линейной оболочке множества A в V^* существует элемент v, для которого $G_v = G_A$. Применить к v утверждение а).)$_*$

9) Пусть V — векторное пространство размерности 4 над конечным полем K характеристики, отличной от 2, и пусть Q — невырожденная квадратичная форма на V индекса 2 (*Алг.*, гл. IX, § 4, n°2). Пусть

[1]) Auslender M., On the purity of the branch locus, *Amer. J. Math.*, 84 (1962), 116—125.

$G = \mathrm{O}(Q)$ — ортогональная группа формы Q. Эта группа конечна и порождена отражениями (*там же*, § 6, n° 4, предложение 5).

а) Пусть E — максимальное вполне изотропное подпространство в V и G_E — подгруппа в G, состоящая из элементов g, таких, что $g(x) = x$ для всех $x \in E$. Показать, что G_E изоморфна аддитивной группе поля K и не содержит псевдоотражений.

б) Показать, что алгебра симметрических инвариантов группы G не является градуированной алгеброй многочленов (воспользоваться предыдущим упражнением).

§ 6.

В следующих ниже упражнениях (за исключением упражнения 3) обозначения и предположения такие же, как в § 6.

1) Предположим, что группа W неприводима. Пусть c — преобразование Кокстера группы W, Γ — подгруппа в W, порожденная c, и Δ — множество единичных векторов, ортогональных элементам из $\mathfrak{H}$. Показать, что Γ обладает l орбитами в $\mathfrak{H}$ и что каждая из этих орбит содержит h элементов. (Рассуждать так же, как при доказательстве предложения 33, гл. VI, § 1, n° 11.)

¶ 2) Предположим, что группа W неприводима. Пусть C — камера относительно W, $(H_1, \ldots, H_l)$ — ее стенки, e_i — ненулевой вектор, ортогональный к H_i. Предположим, что векторы $e_1, \ldots, e_r$ (соотв. $e_{r+1}, \ldots, e_l$) попарно ортогональны (см. n° 2). Для любого $u \in \mathbf{Z}$ определим H_u и s_u следующими равенствами $H_u = H_k$, если $u \equiv k \pmod{l}$, и $s_u = s_{H_u}$.

а) Показать, что элементами множества $\mathfrak{H}$ служат $s_1 s_2 \ldots s_{u-1} H_u$ для $u = 1, 2, \ldots, \dfrac{lh}{2}$.

б) Пусть $s' = s_1 \ldots s_r$ и $s'' = s_{r+1} \ldots s_l$ таковы, что $c = s's''$ есть преобразование Кокстера, ассоциированное с упорядоченной камерой C. Пусть w_0 — элемент из W, переводящий C в $-C$ (см. § 4, упражнение 2). Показать, что если h нечетно, то

$$w_0 = \underbrace{s's''s' \ldots s''s'}_{h \text{ раз}} = \underbrace{s''s's'' \ldots s's''}_{h \text{ раз}} = s''c^{\frac{h-1}{2}} = c^{\frac{h-1}{2}}s'.$$

в) Пусть $S = \{s_1, \ldots, s_l\}$. Пара (W, S) есть система Кокстера. Обозначим через $l_S(w)$ длину элемента $w \in W$ относительно S (гл. IV, § 1, n° 1). Показать, что

$$l_S(s') = r, \quad l_S(s'') = l - r, \quad l_S(c) = l.$$

Вывести отсюда, что в предположениях упражнения б)

$$l_S(w_0) \leqslant r + \frac{h-1}{2} l \quad \text{и} \quad l_S(w_0) \leqslant (l-r) + \frac{h-1}{2} l.$$

Показать, с другой стороны, что $l_S(w_0) = \mathrm{Card}(\mathfrak{H}) = \dfrac{hl}{2}$ (воспользоваться упражнением 22, гл. IV, § 1). Вывести отсюда, что $r = \dfrac{l}{2}$ и что $(s_1, s_2, \ldots, s_{lh/2})$ — приведенное разложение элемента w_0.

г) Показать, что если h четно, то $(s_1, \ldots, s_{lh/2})$ является приведенным разложением элемента $w_0 = c^{h/2}$ (метод тот же).

¶ 3) Пусть K — коммутативное кольцо, E — свободный K-модуль с базисом $(e_1, \ldots, e_l)$ и $f_1, \ldots, f_l$ — элементы дуального к E пространства. Положим $a_{ij} = f_j(e_i)$. При $1 \leqslant i \leqslant l$ пусть s_i — псевдоотражение s_{e_i, f_i} (§ 2, упражнение 1). Тогда

$$s_i(e_j) = e_j - a_{ij}e_i.$$

Положим $c = s_1 \ldots s_l$ и $z_i = c(e_i)$.

а) Для $1 \leqslant i,\ k \leqslant l$ положим

$$y_i^k = s_1 \ldots s_k(e_i) \quad \text{и} \quad y_i = s_1 \ldots s_{i-1}(e_i) = y_i^{i-1}.$$

Далее, $y_i^0 = e_i$ и $y_i^l = z_i$.

Показать, что

$$y_i^{k-1} - y_i^k = a_{ki}y_k.$$

Получить формулы

$$e_i = y_i + \sum_{k<i} a_{ki}y_k,$$

$$z_i = y_i - \sum_{k \geqslant i} a_{ki}y_k.$$

б) Пусть C — матрица преобразования c относительно базиса (e_i). Пусть $U = (u_{ij})$ и $V = (v_{ij})$ — матрицы, определенные соотношениями

$$u_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i < j, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad v_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < j, \\ a_{ij} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица $I + U$ обратима и имеет определитель 1. Показать, что

$$C = (I - V)(I + V)^{-1}.$$

Вывести отсюда, что

$$\det(\lambda I - C) = \det((\lambda - 1)I + V + \lambda U).$$

Иначе говоря,

$$\det(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} (\lambda - 1) + a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \ldots & \lambda a_{1l} \\ a_{21} & (\lambda - 1) + a_{22} & \lambda a_{23} & \ldots & \lambda a_{2l} \\ a_{31} & a_{32} & (\lambda - 1) + a_{33} & \ldots & \lambda a_{3l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & \ldots & (\lambda - 1) + a_{ll} \end{vmatrix}$$

в) Пусть $\Gamma = (I, S)$ — граф с множеством вершин $I = (1, l)$ и множеством ребер S, состоящим из таких пар $\{i, j\}$ элементов множества I, что либо $a_{ij} \neq 0$, либо $a_{ji} \neq 0$. В случае $\alpha = \{i, s\} \in S$ обозначим через σ_α транспозицию i и j (рассматриваемую как элемент симметрической группы $\mathfrak{S}_l$) и положим $a_\alpha = -a_{ij}a_{ji}$.

Пусть $\mathfrak{P}$ — множество подмножеств в S, состоящих из ребер с различными концами. Обозначим через $C(X)$, $X \in \mathfrak{P}$, множество тех $i \in I$, которые не являются концами ребер из X, и положим $\sigma_X = \prod_{\alpha \in X} \sigma_\alpha$, $a_X = \prod_{\alpha \in X} a_\alpha$.

Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}_l$, и пусть d_σ — член, соответствующий σ в разложении определителя матрицы $(\lambda - 1) I + V + \lambda U$. Показать, что если σ имеет вид σ_X с $X \in \mathfrak{P}$, то

$$d_\sigma = a_X \lambda^{\operatorname{Card}(X)} \prod_{i \in C(X)} (\lambda - 1 + a_{ii}).$$

Предположим теперь, что Γ — *лес* (гл. IV, дополнение, n° 3). Показать, что если $\sigma \in \mathfrak{S}_l$ не имеет вида σ_X с $X \in \mathfrak{P}$, то $d_\sigma = 0$. Вывести отсюда формулу

$$\det(\lambda - c) = \sum_{X \in \mathfrak{P}} a_X \lambda^{\operatorname{Card}(X)} \prod_{i \in C(X)} (\lambda - 1 + a_{ii}).$$

г) Рассмотрим многочлен

$$P(X) = \begin{vmatrix} X & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & X & \dots & a_{l2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & X \end{vmatrix}$$

К предположениям упражнения в) добавим требование, чтобы $a_{ii} = 1$ для всех i. Показать, что тогда

$$\det(\lambda^2 - c) = \lambda^l P(\lambda + \lambda^{-1}).$$

4) В обозначениях и предположениях n° 1 обозначим через n_{ij} порядок произведения $s_{H_i} s_{H_j}$ и положим $a_{ij} = -2 \cos \frac{\pi}{n_{ij}}$. Имеем $a_{ii} = 2$ и $a_{ij} \leqslant 0$, если $i \neq j$ (см. § 3). Показать с помощью предыдущего упражнения, что

$$\begin{vmatrix} X & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & X & \dots & a_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & X \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{l} \left(X - 2 \cos \frac{\pi m_i}{h} \right),$$

где $m_1, \dots, m_l$ — показатели группы W [1]).

---

[1]) Подробности можно найти в статье: Coxeter H. S. M., The product of the generators of a finite group generated by reflexions, *Duke Math. J.*, **43** (1951), 765—782.

ГЛАВА VI

СИСТЕМЫ КОРНЕЙ

§ 1. Системы корней

В этом параграфе k — поле нулевой характеристики. Начиная с n° 3, предполагается, что $k = \mathbf{R}$.

1. Определение системы корней

Лемма 1. *Пусть V — векторное пространство над k, R — конечное подмножество в V, порождающее V. Для любого $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, существует самое большее одно отражение s пространства V, такое, что $s(\alpha) = -\alpha$ и $s(R) = R$.*

Пусть G — группа автоморфизмов пространства V, оставляющая R устойчивым. Поскольку R порождает V, группа G изоморфна подгруппе симметрической группы множества R и поэтому является конечной. Пусть s, s' — два отражения пространства V, для которых $s(\alpha) = s'(\alpha) = -\alpha$, $s(R) = R$, $s'(R) = R$. Тогда $t = ss'$ принадлежит G и имеет, следовательно, конечный порядок m. С другой стороны, имеем

$$t(\alpha) = \alpha \text{ и } t(x) \equiv x \bmod k\alpha \text{ для всех } x \in V.$$

Поэтому на V существует линейная форма f, такая, что

$$t(x) = x + f(x)\alpha \text{ для всех } x \in V \text{ и } f(\alpha) = 0.$$

Индукцией по n получаем, что

$$t^n(x) = x + nf(x)\alpha \text{ для всех } x \in V.$$

Полагая n равным m, видим, что $mf(x) = 0$ для всех $x \in V$, откуда $f = 0$, $t = 1$ и $s = s'$.

Определение 1. *Пусть V — векторное пространство над k и R — некоторое его подмножество. Будем говорить, что R есть система корней (или корневая система) в пространстве V, если выполнены следующие условия:*

(СК$_{\mathrm{I}}$) *R — конечное множество, не содержащее нулевого вектора и порождающее пространство V;*

(СК$_{\mathrm{II}}$) *для любого $\alpha \in R$ существует элемент $\alpha^\vee$ дуального к V пространства V^*, удовлетворяющий равенству*

$\langle\alpha, \alpha^\vee\rangle = 2$ *и такой, что отражение* $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ (гл. V, § 2) *переводит* R *в себя*;

(CK_{III}) $\alpha^\vee(R) \subset \mathbf{Z}$ *для всех* $\alpha \in R$.

Ввиду леммы 1 отражение $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ (а значит, и линейная форма $\alpha^\vee$) однозначно определяется элементом α, что придает смысл условию (CK_{III}). Положим $s_{\alpha, \alpha^\vee} = s_\alpha$, так что $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee\rangle \alpha$ для всех $x \in V$. Элементы множества R называются *корнями* (рассматриваемой системы). Размерность пространства V называется *рангом* системы.

Автоморфизмы пространства V, переводящие R в себя, называются автоморфизмами системы R. Они образуют конечную группу, обозначаемую символом $A(R)$. Подгруппа в $A(R)$, порожденная отражениями s_α, называется *группой Вейля* системы R и обозначается символом $W(R)$ или просто W.

Замечание 1). Пусть k' — расширение поля k. Отождествим канонически V с подмножеством пространства $V \otimes k'$ и V^* с подмножеством пространства $V^* \otimes k' = (V \otimes k')^*$. Тогда R будет системой корней в $V \otimes k'$, а $\alpha^\vee$ будут теми же, что и ранее.

Лемма 2. *Пусть R — система корней в V, и пусть $(x \mid y)$ — невырожденная симметрическая билинейная форма на V, инвариантная относительно $W(R)$. Отождествим V с V^* при помощи этой формы. Тогда любой корень $\alpha \in R$ будет неизотропным и*

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha \mid \alpha)}.$$

Это следует из формулы (4) гл. V, § 2, n°3.

Предложение 1. *Пусть $V_{\mathbf{Q}}$ (соотв. $V^*_{\mathbf{Q}}$) — векторное $\mathbf{Q}$-подпространство в V (соотв. в V^*), порожденное векторами α (соотв. $\alpha^\vee$). Тогда $V_{\mathbf{Q}}$ (соотв. $V^*_{\mathbf{Q}}$) является $\mathbf{Q}$-структурой на V (соотв. на V^*)* (*Алг.* гл. I, § 8, n° 1). *Сужение на $V_{\mathbf{Q}} \times V^*_{\mathbf{Q}}$ канонической билинейной формы произведения $V \times V^*$ позволяет отождествить каждое из пространств $V_{\mathbf{Q}}$, $V^*_{\mathbf{Q}}$ с дуальным к другому. Множество R является системой корней в $V_{\mathbf{Q}}$.*

Если $k = \mathbf{R}$, то существует скалярное произведение на V, инвариантное относительно $W(R)$ (*Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 1, предл. 1); лемма 2 утверждает тогда, что элементы $\alpha^\vee$ порождают V^*. Согласно замечанию 1), $\alpha^\vee$ порождают V^* и в случае $k = \mathbf{Q}$. Переходим к общему случаю. Положим $E = V_{\mathbf{Q}}$. Ввиду (CK_{III}) каждый элемент $\alpha^\vee$ отображает E в $\mathbf{Q}$, определяя тем самым элемент $\tilde{\alpha} \in E^*$. Ясно, что

R — система корней в E и что в E^* элементу α соответствует $\tilde{\alpha}$. Как отмечалось выше, $\tilde{\alpha}$ порождают векторное пространство E^*. Рассмотрим канонический гомоморфизм $i\colon E\otimes_{\mathbf{Q}}k\to V$ и сопряженный к нему ${}^ti\colon V^*\to E^*\otimes_{\mathbf{Q}}k$. Так как R порождает V, то i сюръективен и, следовательно, ${}^ti$ инъективен; но образ гомоморфизма ${}^ti$ содержит элементы $\tilde{\alpha}$, поэтому ${}^ti$ сюръективен. Мы приходим к заключению, что i и ${}^ti$ — изоморфизмы. При их посредстве отождествим V с $E\otimes k$, V^* с $E^*\otimes k$, $\alpha^\vee$ с $\tilde{\alpha}$ и $V^*_{\mathbf{Q}}$ с E^*. Таким образом, $V_{\mathbf{Q}}$ (соотв. $V^*_{\mathbf{Q}}$) становится $\mathbf{Q}$-структурой на V (соотв. на V^*). Сужение на $V_{\mathbf{Q}}\times V^*_{\mathbf{Q}}$ канонической билинейной формы произведения $V\times V^*$ отождествляется с канонической билинейной формой на $E\times E^*$, чем и доказано предложение.

Замечания. 2) Благодаря предложению 1 изучение систем корней можно свести к случаю, когда $k=\mathbf{Q}$. Замечание 1 обеспечивает, далее, возможность сведения к системе корней вещественного векторного пространства $V_{\mathbf{R}}=V_{\mathbf{Q}}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{R}$. Ассоциированные с этими различными системами группы Вейля отождествляются канонически.

3) Так как $\alpha^\vee$ порождают V^*, то группа $W(R)$, рассматриваемая как подгруппа группы $\mathbf{GL}(V_{\mathbf{R}})$, является *существенной* (гл. V, § 3, n°7). Кроме того, следствие теоремы 1 гл. V, § 3, n°2, показывает, что единственными отражениями, содержащимися в $W(R)$, будут s_α.

Предложение 2. *Элементы* $\alpha^\vee$ *образуют систему корней в* V^* *и* $\alpha^{\vee\vee}=\alpha$ *для всех* $\alpha\in R$.

Согласно предложению 1, $\alpha^\vee$ удовлетворяют условию (СК$_{\mathrm{I}}$). Так как $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ — автоморфизм векторного пространства V, наделенного системой R, то ${}^t(s_{\alpha,\alpha^\vee})^{-1}$ оставляет устойчивым множество $R^\vee$ дуальных элементов $\alpha^\vee$; но ${}^t(s_{\alpha,\alpha^\vee})^{-1}=s_{\alpha^\vee,\alpha}$, а это и доказывает, что $R^\vee$ удовлетворяет (СК$_{\mathrm{II}}$) и что $\alpha^{\vee\vee}=\alpha$. Наконец, $\langle\alpha^\vee,\beta\rangle\in\mathbf{Z}$, каковы бы ни были $\alpha^\vee\in R^\vee$ и $\beta\in R$, поэтому $R^\vee$ удовлетворяет (СК$_{\mathrm{III}}$).

Система корней $R^\vee$ называется *дуальной* (или *обратной*) к R. Видно, что отображение $\alpha\mapsto\alpha^\vee$ является биекцией R на $R^\vee$, называемой *канонической биекцией* R *на* $R^\vee$. Следует, однако, иметь в виду, что если α, β — элементы из R, такие, что $\alpha+\beta\in R$, то, вообще говоря, $(\alpha+\beta)^\vee\neq\alpha^\vee+\beta^\vee$.

Так как $s_\alpha(\alpha)=-\alpha$, то в соответствии с аксиомой (СК$_{\mathrm{II}}$) $-R=R$. Очевидно, что $(-\alpha)^\vee=-\alpha^\vee$ и $-1\in A(R)$ (хотя не всегда $-1\in W(R)$).

Из равенства ${}^t(s_{\alpha,\alpha^\vee})^{-1} = s_{\alpha^\vee,\alpha}$ вытекает, что отображение $u \mapsto {}^tu^{-1}$ является изоморфизмом группы $W(R)$ на группу $W(R^\vee)$. Отождествим обе группы при помощи этого изоморфизма; иначе говоря, будем считать $W(R)$ действующей как в V, так и в V^*. То же самое относится к $A(R)$.

Предложение 3. *Для $x, y \in V$ положим*

$$(x \mid y) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^\vee, x \rangle \langle \alpha^\vee, y \rangle.$$

Тогда $(x \mid y)$ — невырожденная симметрическая билинейная форма на V, инвариантная относительно $A(R)$. Если $x, y \in V_{\mathbf{Q}}$, то $(x \mid y) \in \mathbf{Q}$. Каноническое продолжение формы $(x \mid y)$ на

$$V_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$$

будет снова невырожденной положительной формой.

Ясно, что $(x \mid y)$ — симметрическая билинейная форма на V. Если $g \in A(R)$, то

$$(g(x) \mid g(y)) = \sum_{\alpha \in R} \langle {}^tg(\alpha^\vee), x \rangle \langle {}^tg(\alpha^\vee), y \rangle = (x \mid y),$$

поскольку $({}^tg)(R^\vee) = R^\vee$. Если $x, y \in V_{\mathbf{Q}}$, то, согласно (СК$_{\text{III}}$), $(x \mid y) \in \mathbf{Q}$. Если $z \in V_{\mathbf{R}}$, то $(z \mid z) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^\vee, z \rangle^2 \geqslant 0$, и ввиду предложения 1 $(z \mid z) > 0$ для $z \neq 0$, поэтому каноническое продолжение формы $(x \mid y)$ на $V_{\mathbf{R}}$ будет положительным и невырожденным. Будет невырожденным и сужение $(x \mid y)$ на $V_{\mathbf{Q}}$. Следовательно, форма $(x \mid y)$ на V является невырожденной.

Предложение 4. (i) *Пусть X — подмножество в R, V_X — порожденное им векторное подпространство в V, и пусть V'_X — векторное подпространство в V^*, порожденное элементами $\alpha^\vee$, где $\alpha \in X$. Тогда V будет прямой суммой V_X и подпространства, ортогонального к V'_X, а V^* будет прямой суммой V'_X и подпространства, ортогонального к V_X, причем V'_X отождествляется с подпространством, дуальным к V_X.*

(ii) *Пересечение $R \cap V_X$ является системой корней в V_X, и каноническое биективное отображение $R \cap V_X$ на дуальную систему отождествляется с отображением $\alpha \mapsto \alpha^\vee$, суженным на $R \cap V_X$.*

Благодаря замечанию 2 можно предполагать, что $k = \mathbf{R}$. Отождествим V с V^* при помощи симметрической билинейной формы из предложения 3. Согласно лемме 2, $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha \mid \alpha)}$

для всех $\alpha \in R$. Любое векторное подпространство в V является неизотропным, и предложение становится очевидным.

Следствие. *Пусть V_1 — векторное подпространство в V и V_2 — векторное подпространство, порожденное пересечением $R \cap V_1$. Тогда $R \cap V_1$ будет системой корней в V_2.*

Это непосредственно вытекает из утверждения (ii), примененного к $X = R \cap V_1$.

Для $\alpha \in R$ и $\beta \in R$ положим

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = n(\alpha, \beta). \tag{1}$$

В частности, имеем

$$n(\alpha, \alpha) = 2, \tag{2}$$

$$n(-\alpha, \beta) = n(\alpha, -\beta) = -n(\alpha, \beta). \tag{3}$$

В соответствии с (СК$_{\text{III}}$)

$$n(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

По самому определению $n(\alpha, \beta)$

$$s_\beta(\alpha) = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta. \tag{5}$$

Из формулы (1) и предложения 2 следует, что

$$n(\alpha, \beta) = n(\beta^\vee, \alpha^\vee). \tag{6}$$

Пусть $(x \mid y)$ — симметрическая билинейная форма на V, невырожденная и инвариантная относительно $W(R)$ (предложение 3). Тогда ввиду леммы 2

$$n(\alpha, \beta) = \frac{2(\alpha \mid \beta)}{(\beta \mid \beta)}. \tag{7}$$

Легко видеть, что

$$n(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow n(\beta, \alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha \mid \beta) = 0 \Leftrightarrow s_\alpha \text{ и } s_\beta \text{ перестановочны}. \tag{8}$$

Если

$$(\alpha \mid \beta) \neq 0, \text{ то } \frac{n(\beta, \alpha)}{n(\alpha, \beta)} = \frac{(\beta \mid \beta)}{(\alpha \mid \alpha)}. \tag{9}$$

2. *Прямая сумма систем корней*

Пусть векторное пространство V над k является прямой суммой семейства $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ векторных подпространств. Отождествим V^* с прямой суммой подпространств V_i^*. Для любого i пусть R_i — система корней в V_i. Тогда $R = \bigcup_i R_i$ — система корней в V, а дуальной к ней системой будет $R^\vee = \bigcup_i R_i^\vee$; каноническое биективное отображение R на $R^\vee$

служит продолжением, при любом i, канонической биекции R_i на $R_i^\vee$. Система корней R называется *прямой суммой систем* R_i. Пусть $\alpha \in R_i$. Если $j \neq i$, то V_j содержится в ядре линейной формы $\alpha^\vee$, так что s_α действует тождественным образом в V_j; с другой стороны, $k\alpha \subset V_i$, поэтому s_α оставляет устойчивым V_i. Эти замечания показывают, что $W(R)$ *отождествляется с* $\prod_{i=1}^{r} W(R_i)$.

Система корней R называется *неприводимой*, если $R \neq \varnothing$ и R не является прямой суммой двух непустых систем корней.

Предложение 5. *Пусть векторное пространство V над k является прямой суммой векторных подпространств $V_1, \ldots, V_r$, и пусть R — система корней в V. Положим $R_i = R \cap V_i$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(i) *компоненты V_i устойчивы относительно $W(R)$;*

(ii) $R \subset V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_r$;

(iii) *R_i при любом i — система корней в V_i и R — прямая сумма систем R_i.*

(iii)$\Rightarrow$(i). Это вытекает из сказанного в начале n°.

(i)$\Rightarrow$(ii). Предполагая V_i устойчивыми относительно $W(R)$, возьмем произвольный элемент $\alpha \in R$ и ядро H формы $\alpha^\vee$. Согласно предложению 3 гл. V, § 2, n° 2, каждая компонента V_i является суммой некоторого подпространства в H и подпространства в $k\alpha$. Поэтому V_i при некотором i содержит $k\alpha$, откуда $\alpha \in V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_r$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Если условие (ii) выполнено, то R_i порождает V_i при любом i, следовательно, R_i — система корней в V_i (предложение 4). Ясно, что R будет прямой суммой систем R_i.

Следствие. *Пусть R — система корней в V. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *система R неприводима;*

(ii) *$W(R)$-модуль V прост;*

(iii) *$W(R)$-модуль V абсолютно прост.*

(ii)$\Leftrightarrow$(i). Это вытекает непосредственно из предложения 5 и теоремы Машке (гл. V, дополнение, предложение 2).

(iii)$\Leftrightarrow$(ii). Достаточно применить предложение 1 гл. V, § 2, n° 1.

Предложение 6. *Всякая система корней R в V является прямой суммой некоторого семейства $(R_i)_{i \in I}$ неприводимых систем корней, однозначно определенного с точностью до биекции множества индексов.*

Существование R_i доказывается индукцией относительно $\operatorname{Card} R$: если R не пусто и не неприводимо, то R — прямая сумма двух систем корней R', R'', таких, что $\operatorname{Card} R' < \operatorname{Card} R$, $\operatorname{Card} R'' < \operatorname{Card} R$, причем к R' и R'' применимы предположения индукции. Для доказательства единственности достаточно установить, что если R — прямая сумма R' и R'', то любая система R_i обязательно содержится в R' или в R''. Пусть V', V'', V'_i, V''_i — векторные подпространства в V, порожденные системами R', R'', $R' \cap R_i$, $R'' \cap R_i$. Так как сумма $V' + V''$ — прямая, то и сумма $V'_i + V''_i$ — прямая. Но $R_i \subset R' \cup R''$, поэтому R_i — прямая сумма систем корней $R' \cap R_i$ и $R'' \cap R_i$, откуда $R' \cap R_i = \varnothing$ или $R'' \cap R_i = \varnothing$, чем и доказано требуемое утверждение.

Системы R_i называются *неприводимыми компонентами* системы R. Каковы бы ни были ненулевые скаляры λ_i, объединение систем $\lambda_i R_i$ является системой корней в V, для которой дуальной системой будет объединение систем $\lambda_i^{-1} R_i^\vee$, а группой Вейля — $W(R)$.

Предложение 7. *Пусть R — система корней в V, (R_i) — семейство ее неприводимых компонент, V_i — векторное подпространство в V, порожденное компонентой R_i, B — симметрическая билинейная форма, определенная в предложении 3, B' — некоторая другая симметрическая билинейная форма на V, инвариантная относительно $W(R)$. Тогда подпространства V_i будут попарно ортогональны относительно B', а сужения B и B' на V_i при всех i будут пропорциональны.*

Если $v_i \in V_i$, $v_j \in V_j$, $i \neq j$, и если $w \in W(R_j)$, то

$$B'(v_i, w(v_j)) = B'(v_i, v_j),$$

откуда видно, что векторы $w(v_j) - v_j$ и v_i ортогональны относительно B'. Так как подпространство V_j неприводимо относительно $W(R_j)$, то оно порождается векторами $w(v_j) - v_j$ и, следовательно, ортогонально подпространству V_i.

То, что сужения B и B' на каждое из подпространств V_i будут пропорциональны, следует из предложения 1 гл. V, § 2, n° 1.

Замечание. Выберем скалярное произведение на $V_{\mathbf{R}}$, инвариантное относительно $W(R)$. Оно позволит нам говорить о *длине* каждого корня и об *угле* между двумя корнями. Согласно предложению 7, этот угол не зависит от выбора скалярного произведения; то же самое верно и для отношения длин двух корней, коль скоро они принадлежат *одной и той же* неприводимой компоненте системы R.

3. Связи между двумя корнями

Напомним, что *впредь предполагается* $k = \mathbf{R}$ (мы возлагаем на читателя заботу о распространении определений и результатов на общий случай методом, указанным в замечании 2 n° 1).

В дальнейшем R *обозначает систему корней в векторном пространстве* V, *на котором определено скалярное произведение* $(x, y) \mapsto (x \mid y)$, *инвариантное относительно* $W(R)$ (см. предложение 3).

Пусть $\alpha, \beta \in R$. По формуле (7) n° 1 имеем

$$n(\alpha, \beta)\, n(\beta, \alpha) = 4 \cos^2 (\widehat{\alpha, \beta}) \leqslant 4. \tag{10}$$

Следовательно, целое число $n(\alpha, \beta)\, n(\beta, \alpha)$ может принимать лишь значения 0, 1, 2, 3, 4. Принимая во внимание следствие предложения 6 из гл. V, § 2, n° 5, и подстрочное примечание в гл. V, § 4, n° 8, мы приходим к заключению, что с точностью до перемены мест α и β имеются лишь следующие возможности:

1) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 0$;
$(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad s_\alpha s_\beta$ — порядка 2;

2) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 1$;
$(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{3}$; $\|\alpha\| = \|\beta\|$; $\qquad s_\alpha s_\beta$ — порядка 3;

3) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -1$;
$(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{2\pi}{3}$; $\|\alpha\| = \|\beta\|$; $\qquad s_\alpha s_\beta$ — порядка 3;

4) $n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 2$;
$(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{4}$; $\|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|$; $s_\alpha s_\beta$ — порядка 4;

5) $n(\alpha, \beta) = -1, \ n(\beta, \alpha) = -2$;
$(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{3\pi}{4}$; $\|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|$; $s_\alpha s_\beta$ — порядка 4;

6) $n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 3$;
$(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{6}$; $\|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|$; $s_\alpha s_\beta$ — порядка 6;

7) $n(\alpha, \beta) = -1, \ n(\beta, \alpha) = -3$;
$(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{5\pi}{6}$; $\|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|$; $s_\alpha s_\beta$ — порядка 6;

8) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 2$; $\qquad \alpha = \beta$;

9) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -2$; $\qquad \alpha = -\beta$;

10) $n(\alpha, \beta) = 1, \ n(\beta, \alpha) = 4$; $\qquad \beta = 2\alpha$;

11) $n(\alpha, \beta) = -1, \ n(\beta, \alpha) = -4$; $\qquad \beta = -2\alpha$.

В частности, справедливо

Предложение 8. (i) *Если два корня пропорциональны, то множитель пропорциональности может равняться лишь* ± 1, $\pm \frac{1}{2}$, ± 2.

(ii) *Если* α, β — *два непропорциональных корня и если* $\|\alpha\| \leqslant \|\beta\|$, *то* $n(\alpha, \beta)$ *принимает одно из значений* 0, 1, -1.

Корень $\alpha \in R$, для которого $\frac{1}{2}\alpha \notin R$, называется *неделимым*.

Теорема 1. *Пусть* α, β — *два корня.*

(i) *Если* $n(\alpha, \beta) > 0$, *то* $\alpha - \beta$ — *корень, кроме случая* $\alpha = \beta$.

(ii) *Если* $n(\alpha, \beta) < 0$, *то* $\alpha + \beta$ — *корень, кроме случая* $\alpha = -\beta$.

В соответствии с приведенным выше списком в случае $n(\alpha, \beta) > 0$ имеются лишь следующие возможности:

1) $n(\alpha, \beta) = 1$; тогда $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in R$;

2) $n(\beta, \alpha) = 1$; тогда $\beta - \alpha = s_\alpha(\beta) \in R$ и, следовательно, $\alpha - \beta \in R$;

3) $\beta = \alpha$.

Тем самым доказано утверждение (i), а (ii) получается из него заменой β на $-\beta$.

Следствие. *Пусть* α *и* β — *два корня.*

(i) *Если* $(\alpha | \beta) > 0$, *то* $\alpha - \beta$ — *корень, кроме случая* $\alpha = \beta$.

(ii) *Если* $(\alpha | \beta) < 0$, *то* $\alpha + \beta$ — *корень, кроме случая* $\alpha = -\beta$.

(iii) *Если* $\alpha - \beta \notin R \cup \{0\}$ *и* $\alpha + \beta \notin R \cup \{0\}$, *то* $(\alpha | \beta) = 0$.

Утверждения (i) и (ii) вытекают из теоремы 1 и формулы (7) n° 1. В свою очередь (iii) получается при помощи (i) и (ii).

Может случиться, что $\alpha + \beta \in R$, $(\alpha | \beta) = 0$ (табл. X; система B_2). Корни α и β называются *строго ортогональными*, если $\alpha - \beta \notin R \cup \{0\}$ и $\alpha + \beta \notin R \cup \{0\}$.

Предложение 9. *Пусть* α *и* β — *два непропорциональных корня.*

(i) *Множество* I *целых рациональных чисел* j, *таких, что* $\beta + j\alpha$ — *корень, является интервалом* $[-q, p]$ *в* $\mathbf{Z}$, *содержащим* 0.

(ii) *Пусть* S — *множество корней* $\beta + j\alpha$ *для* $j \in I$. *Тогда*

$$s_\alpha(S) = S \quad \textit{и} \quad s_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha.$$

(iii) *Имеет место соотношение* $p - q = -n(\beta, \alpha)$.

Ясно, что $0 \in I$. Пусть p (соотв. $-q$) — наибольший (соотв. наименьший) элемент из I. Если бы не все целые числа из интервала $[-q, p]$ принадлежали множеству I, то в $[-q, p]$ нашлись бы два числа r, s, обладающие следующими свойствами: $s > r+1$, $s \in I$, $r \in I$, $r+k \notin I$ для $1 \leqslant k \leqslant s-r-1$. В обозначениях следствия теоремы 1 это давало бы $(\alpha | \beta + s\alpha) \leqslant 0$, $(\alpha | \beta + r\alpha) \geqslant 0$, что невозможно, поскольку

$$(\alpha | \beta + s\alpha) > (\alpha | \beta + r\alpha).$$

Утверждение (i) доказано.

Очевидно, что $s_\alpha(\beta + j\alpha) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha - j\alpha = \beta + j'\alpha$ с $j' = -j - n(\beta, \alpha)$. Поэтому $s_\alpha(S) \subset S$ и, следовательно, $s_\alpha(S) = S$. Кроме того, получаем, что $j \mapsto -j - n(\beta, \alpha)$ будет убывающим биективным отображением I на I. В частности, $j' = -q$ для $j = p$, так что $-q = -p - n(\beta, \alpha)$. Тем самым доказаны утверждения (ii) и (iii).

Множество S называется *α-серией корней, содержащей* β; $\beta - q\alpha$ называется *началом* серии, $\beta + p\alpha$ — ее *концом*, а $p + q$ — *длиной*.

Следствие. *Пусть S — α-серия корней с началом γ. Длиной S будет* $-n(\gamma, \alpha)$; *она равна* 0, 1, 2 *или* 3.

Первое утверждение вытекает из предложения 9, (iii), примененного к $\beta = \gamma$, если принять во внимание, что $q = 0$. Далее, поскольку γ не пропорционален корню α, из списка, приведенного в начале этого n°, видно, что $|n(\gamma, \alpha)| \leqslant 3$. Следствие доказано.

Замечание. Сохраним обозначения приведенного выше следствия. Тогда

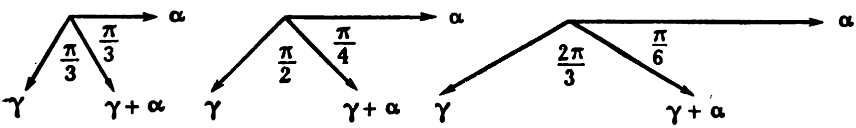
1) Если длина серии S равна 0, то $(\alpha | \gamma) = 0$.

2) Если длина серии S равна 1, то $n(\gamma, \alpha) = -1$, так что возможны три случая:

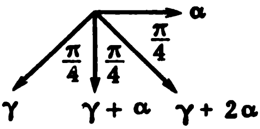
$$n(\alpha, \gamma) = -1,\ (\alpha|\alpha) = (\gamma|\gamma),\ (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha),\ (\widehat{\alpha, \gamma}) = \frac{2\pi}{3};$$

$$n(\alpha, \gamma) = -2,\ (\alpha|\alpha) = 2(\gamma|\gamma),\ (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha),\ (\widehat{\alpha, \gamma}) = \frac{3\pi}{4};$$

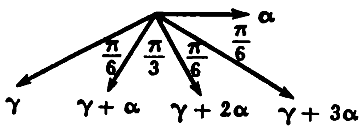
$$n(\alpha, \gamma) = -3,\ (\alpha|\alpha) = 3(\gamma|\gamma),\ (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha),\ (\widehat{\alpha, \gamma}) = \frac{5\pi}{6}:$$



3) Если длина серии S равна 2, то $n(\gamma, \alpha) = -2$, откуда $n(\alpha, \gamma) = -1$, $(\alpha|\alpha) = \frac{1}{2}(\gamma|\gamma)$, $(\alpha|\gamma) = -(\alpha|\alpha)$, $(\widehat{\alpha, \gamma}) = \frac{3\pi}{4}$:



4) Если длина серии S равна 3, то $n(\gamma, \alpha) = -3$, откуда $n(\alpha, \gamma) = -1$, $(\alpha|\alpha) = \frac{1}{3}(\gamma|\gamma)$, $(\alpha|\gamma) = -\frac{3}{2}(\alpha|\alpha)$, $(\widehat{\alpha, \gamma}) = \frac{5\pi}{6}$:



Мы убеждаемся (табл. X, системы A_2, B_2, G_2), что все эти случаи действительно реализуются.

Предложение 10. *Пусть α, β — два непропорциональных корня, такие, что $\beta + \alpha$ тоже будет корнем. Пусть p, q — целые числа из предложения* 9. *Тогда*

$$\frac{(\beta + \alpha | \beta + \alpha)}{(\beta|\beta)} = \frac{q+1}{p},$$

Пусть S — α-серия, содержащая β, и γ — ее начало; ее длина l будет $\geqslant 1$, поскольку $\beta + \alpha$ — корень. Можно выделить следующие случаи:

1) $l = 1$; тогда $\beta = \gamma$, $q = 0$, $p = 1$, $(\beta + \alpha | \beta + \alpha) = (\beta|\beta)$;

2) $l = 2$, $\beta = \gamma$; тогда $q = 0$, $p = 2$, $(\beta + \alpha | \beta + \alpha) = \frac{1}{2}(\beta|\beta)$;

3) $l = 2$, $\beta = \gamma + \alpha$; тогда $q = 1$, $p = 1$, $(\beta + \alpha | \beta + \alpha) = 2(\beta|\beta)$;

4) $l = 3$, $\beta = \gamma$; тогда $q = 0$, $p = 3$, $(\beta + \alpha | \beta + \alpha) = \frac{1}{3}(\beta|\beta)$;

5) $l = 3$, $\beta = \gamma + \alpha$; тогда $q = 1$, $p = 2$, $(\beta + \alpha | \beta + \alpha) = (\beta|\beta)$;

6) $l = 3$, $\beta = \gamma + 2\alpha$; тогда $q = 2$, $p = 1$, $(\beta + \alpha | \beta + \alpha) = 3(\beta|\beta)$.

Во всех этих случаях нужная нам формула подтверждается.

Предложение 11. *Предположим, что система R неприводима. Пусть α и β — два корня, такие, что $\|\alpha\| = \|\beta\|$. Тогда найдется элемент $g \in W(R)$, для которого $g(\alpha) = \beta$.*

Образы корня α относительно $W(R)$ порождают V (n° 2, следствие предложения 5), поэтому существует $g \in W(R)$, для которого $(g(\alpha)|\beta) \neq 0$. Можно, таким образом, предполагать в дальнейшем, что $(\alpha|\beta)\neq 0$. Согласно формуле (9) n° 1, $n(\alpha, \beta)=n(\beta, \alpha)$. Заменяя в случае необходимости β на $s_\beta(\beta)=-\beta$, можно считать $n(\alpha, \beta)>0$. Тогда в соответствии со списком, приведенным в начале этого n°, будет либо $\alpha=\beta$ (когда предложение очевидно), либо $n(\alpha, \beta)=n(\beta, \alpha)=1$; в последнем случае

$$(s_\alpha s_\beta s_\alpha)(\beta)=s_\alpha s_\beta(\beta-\alpha)=s_\alpha(-\beta-\alpha+\beta)=\alpha.$$

4. *Приведенные системы корней*

Система корней называется *приведенной*, если любой корень системы неделим (n° 3).

Предложение 12. *Предположим, что R — неприводимая и приведенная система корней.*

(i) *Отношение* $\frac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ *для* $\alpha\in R$, $\beta\in R$ *может принимать только значения* $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.

(ii) *Множество значений* $(\alpha|\alpha)$ *для* $\alpha\in R$ *состоит не более чем из двух элементов.*

Поскольку система R неприводима, образы любого корня относительно $W(R)$ порождают V (n° 2, следствие предложения 5). Поэтому, каковы бы ни были корни α, β, найдется корень β', такой, что $(\alpha|\beta')\neq 0$ и $(\beta'|\beta')=(\beta|\beta)$. В соответствии с формулой (9) n° 1 и списком из n° 3, $\frac{(\beta'|\beta')}{(\alpha|\alpha)}$ принимает одно из значений $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ (напомним, что система предполагается приведенной). Умножая $(x|y)$ на подходящий скаляр, можно предполагать, что $(\alpha|\alpha)=1$ для некоторых корней и что другими возможными значениями $(\beta|\beta)$ для $\beta\in R$ будут 2 и 3. Значения 2 и 3 не могут достигаться оба, поскольку тогда существовали бы $\beta\in R$, $\gamma\in R$, для которых $\frac{(\gamma|\gamma)}{(\beta|\beta)}=\frac{3}{2}$, в противоречии с тем, что было сказано выше.

Предложение 13. *Предположим, что система R — неприводимая, неприведенная и ранга $\geqslant 2$.*

(i) *Множество R_0 неделимых корней является системой корней в V; эта система — неприводимая и приведенная, причем $W(R_0)=W(R)$.*

(ii) *Пусть A — множество корней α, для которых $(\alpha|\alpha)$ принимает наименьшее значение λ. Тогда любые два непропорциональных элемента из A будут ортогональны.*

(iii) *Пусть B — множество корней $\beta \in R$, таких, что* $(\beta | \beta) = 2\lambda$. *Тогда* $B \neq \varnothing$, $R_0 = A \cup B$, $R = A \cup B \cup 2A$.

Если $\alpha \in R - R_0$, то $\frac{1}{2}\alpha \in R$, но $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \notin R$ (предложение 8), поэтому $\frac{1}{2}\alpha \in R_0$. Отсюда следует, что R_0 удовлетворяет условию ($СК_{I}$). Ясно, далее, что $s_{\alpha, \alpha^\vee}(R_0) = R_0$ для любого $\alpha \in R$, поэтому R_0 удовлетворяет условиям ($СК_{II}$) и ($СК_{III}$). Так как $\alpha \in R - R_0$ влечет $\frac{1}{2}\alpha \in R_0$, а $s_\alpha = s_{\alpha/2}$, то $W(R) = W(R_0)$. Следовательно, система R_0 — неприводимая (следствие предложения 5) и, очевидно, приведенная.

Поскольку R не является приведенной, существует корень $\alpha \in R_0$, такой, что $2\alpha \in R$. Поскольку система R — неприводимая, а $\dim V \geqslant 2$, невозможно, чтобы корень α был пропорционален или ортогонален всякому корню. Пусть корень $\beta \in R_0$ таков, что $n(\beta, \alpha) \neq 0$, причем β не пропорционален корню α. Заменяя в случае необходимости β на $-\beta$, можно считать $n(\beta, \alpha) > 0$. Так как $\frac{1}{2}n(\beta, \alpha) = n(\beta, 2\alpha) \in \mathbf{Z}$, то $n(\beta, \alpha) \in 2\mathbf{Z}$. Из списка в n° 3 видно, что $n(\beta, \alpha) = 2$, $(\beta | \beta) = 2(\alpha | \alpha)$. Ввиду приведенности R_0 применимо предложение 12, показывающее, что $(\gamma | \gamma) = (\alpha | \alpha)$ или $(\gamma | \gamma) = 2(\alpha | \alpha)$ для всех $\gamma \in R_0$. Предыдущие рассуждения показывают, что при любом $\gamma \in R - R_0$ вектор $\frac{1}{2}\gamma$ будет элементом из R_0, таким, что $\left(\frac{1}{2}\gamma \middle| \frac{1}{2}\gamma\right) = (\alpha | \alpha)$. Следовательно, $\lambda = (\alpha | \alpha)$, $B \neq \varnothing$, $R_0 = A \cup B$ и $R \subset A \cup B \cup 2A$. С другой стороны, если $\gamma \in A$, то найдется $g \in W(R)$, для которого $\gamma = g(\alpha)$ (предложение 11), откуда $2\gamma = g(2\alpha) \in R$. Следовательно, $2A \subset R$ и $R = A \cup B \cup 2A$. Наконец, пусть, γ, γ' — два непропорциональных элемента из A. Поскольку γ и γ' одной и той же длины, имеем

$$n(2\gamma, \gamma') = 2n(\gamma, \gamma') = 4n(\gamma, 2\gamma') \in 4\mathbf{Z} \quad \text{и} \quad |n(\gamma, \gamma')| \leqslant 1,$$

откуда $n(\gamma, \gamma') = 0$ и $(\gamma | \gamma') = 0$.

Предложение 14. *Предположим, что система R — неприводимая и приведенная и что $(\alpha | \alpha)$ принимает значения λ и 2λ для $\alpha \in R$. Пусть A — множество корней α, таких, что $(\alpha | \alpha) = \lambda$. Предположим, далее, что любые два непропорциональных элемента из A ортогональны. Тогда $R_1 = R \cup 2A$ является неприведенной неприводимой системой корней, а R — множеством неделимых корней в R_1.*

Очевидно, что R_1 удовлетворяет условиям ($СК_{I}$) и ($СК_{II}$). Докажем, что $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in R_1$. Это очевидно, если $\alpha, \beta \in R$. Утверждение верно и в случае $\alpha, \beta \in 2A$, поскольку $(2\alpha)^\vee = \frac{1}{2}\alpha^\vee$ для $\alpha \in A$. Возьмем, наконец, $\beta \in R$ и $\alpha = 2\gamma$ с $\gamma \in A$.

1) Если $\gamma = \pm\beta$, то $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = \pm\frac{1}{2}\langle\gamma^\vee, \gamma\rangle = \pm 1$.

2) Если γ не пропорционален корню β и если $\beta \in A$, то в соответствии с условиями, определяющими A, $\langle\gamma^\vee, \beta\rangle = 0$, откуда $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = 0$.

3) Если $\beta \in R - A$, то $(\beta\,|\,\beta) = 2\lambda = 2(\gamma\,|\,\gamma)$, поэтому $\langle\beta, \gamma^\vee\rangle$ равно либо 0, либо 2, либо -2 в соответствии со списком из n°3. Следовательно, и $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = \frac{1}{2}\langle\beta, \gamma^\vee\rangle \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, R_1 — система корней в V. Остальные утверждения очевидны.

5. Камеры и базисы системы корней

При любом $\alpha \in R$ пусть L_α — гиперплоскость пространства V, состоящая из точек, инвариантных относительно s_α. Камеры, определенные в V множеством гиперплоскостей L_α (гл. 5, § 1, n°3), называются *камерами системы* R. Биективное отображение $V \to V^*$, определенное скалярным произведением $(x\,|\,y)$, переводит $\alpha \in R$ в $\dfrac{2\alpha^\vee}{(\alpha^\vee\,|\,\alpha^\vee)}$ и, следовательно, L_α в $L_{\alpha^\vee}$, а камеры системы R в камеры дуальной системы $R^\vee$. Если C — камера системы R, то соответствующая камера системы $R^\vee$ будет обозначаться символом $C^\vee$. Согласно предложению 7 n°2, $C^\vee$ однозначно определяется камерой C и не зависит от выбора $(x\,|\,y)$.

Теорема 2. (i) *Группа $W(R)$ действует на множестве камер просто транзитивным образом.*

(ii) *Пусть C — камера. Тогда $\bar{C}$ будет фундаментальной областью для $W(R)$.*

(iii) *C является открытым симплициальным конусом* (гл. V, § 1, n°6).

(iv) *Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_l$ — стенки камеры C. Для любого i существует единственный неделимый корень α_i, такой, что $L_i = L_{\alpha_i}$, причем α_i будет с той же стороны от L_i, что и C.*

(v) *Множество* $B(C)=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *является базисом пространства* V.

(vi) C *совпадает с множеством тех* $x \in V$, *для которых* $\langle \alpha_i^\vee, x \rangle > 0$ *при всех* i (*или, что равносильно, с множеством* $x \in V$, *таких, что* $(x \mid \alpha_i) > 0$ *при всех* i).

(vii) *Пусть* S — *множество отражений* s_{α_i}. *Пара* $(W(R), S)$ *является системой Кокстера* (гл. IV, § 1, n° 3).

Утверждения (i) и (vii) следуют из теоремы 1 гл. V, § 3, n° 2, а утверждение (ii) — из теоремы 2 гл. V, § 3, n° 3. Утверждение (iv) очевидно. Корень α_i ортогонален к гиперплоскости L_i, а $\alpha_i^\vee$ отождествляется с $2\alpha_i/(\alpha_i \mid \alpha_i)$. Так как группа $W(R)$ существенна (n° 1, замечание 3, то утверждения (iii), (v) и (vi) вытекают из предложения 7 гл. V, § 3, n° 9.

Замечания. 1) Утверждение (vii) показывает, в частности, что $W(R)$ *порождается* отражениями s_{α_i}.

2) Если $x, y \in C$, то $(x \mid y) > 0$ (гл. V, § 3, n° 5, лемма 6); другими словами, угол $(\widehat{x, y})$ острый.

3) Пусть $m(\alpha, \beta)$ — порядок элемента $s_\alpha s_\beta$ ($\alpha, \beta \in B(C)$). Матрица $(m(\alpha, \beta))$ совпадает с *матрицей Кокстера* (гл. IV, § 1, n° 9) системы (W, S). Если $\alpha \neq \beta$, то, как показывает предложение 3 гл. V, § 3, n° 4, угол $(\widehat{\alpha, \beta})$ равен $\pi - \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$, так что этот угол тупой или прямой, и $(\alpha \mid \beta) \leqslant 0$. Просматривая список из n° 3, мы видим, что порядок $m(\alpha, \beta)$ равен 2, 3, 4 или 6.

Определение 2. *Подмножество* B *системы корней* R *называется базисом в* R, *если существует камера* C *системы* R, *такая, что* $B = B(C)$. *Если* C — *камера, то* $B(C)$ *называется базисом системы* R, *определенным посредством* C.

Замечания. 4) Утверждение (vi) теоремы 2 показывает, что $C \mapsto B(C)$ является *биективным отображением* множества камер на множество базисов. Следовательно, $W(R)$ действует *просто транзитивно* на множестве базисов.

5) Пусть C — камера системы R и B — соответствующий базис. Если $\alpha \in B$, то положим $\varphi(\alpha) = \alpha^\vee$ при $2\alpha \notin R$ и $\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^\vee$ в случае $2\alpha \in R$. Тогда $\varphi(B)$ будет базисом дуальной системы $R^\vee$, *определенным посредством* $C^\vee$; это следует из того, что стенками камеры $C^\vee$ будут $L_{\alpha^\vee}$, где $\alpha \in B$.

Определение 3. *Пусть* B — *базис системы* R. *Матрицей Картана системы* R (*относительно* B) *называется матрица* $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$.

Мы знаем, что $n(\alpha, \alpha) = 2$ для всех $\alpha \in B$. Для $\alpha, \beta \in B$ имеем

$$n(\alpha, \beta) = 2\frac{(\alpha \mid \beta)}{(\beta \mid \beta)} = -2\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\cos\frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}, \tag{11}$$

где, как и прежде, $m(\alpha, \beta)$ — порядок элемента $s_\alpha s_\beta$. Если $\alpha \neq \beta$, то $n(\alpha, \beta) = 0, -1, -2, -3$ (см. n°3).

Замечания. 6) Не следует смешивать матрицу Картана $(n(\alpha, \beta))$ с матрицей Кокстера $(m(\alpha, \beta))$. Отметим вдобавок, что матрица Картана не обязана быть симметрической.

7) *Канонические индексации.* Если B и B' — два базиса системы R, то существует единственный элемент $w \in W$, такой, что $w(B) = B'$. По определению,

$$n(w(\alpha), w(\beta)) = n(\alpha, \beta) \quad \text{и} \quad m(w(\alpha), w(\beta)) = m(\alpha, \beta)$$

для $\alpha, \beta \in B$. Следовательно, матрицы Картана и Кокстера, ассоциированные с B, получаются из соответствующих матриц, ассоциированных с B', композицией с биективным отображением

$$\alpha \longmapsto w(\alpha)$$

B на B'.

Впрочем можно определить матрицы Картана и Кокстера *канонически* следующим образом. Пусть X — множество пар (B, α), где B — базис системы R и $\alpha \in B$. Группа W действует очевидным образом на X, и ее орбита в X пересекает каждое из множеств $\{B\} \times B$ в точности в одной точке. Если, таким образом, I — множество указанных орбит, то каждый базис B допускает *каноническую индексацию* $(\alpha_i)_{i \in I}$. Далее, существует единственная матрица $N = (n_{ij})$ (соотв. $M = (m_{ij})$) типа $I \times I$, такая, что матрица Картана (соотв. Кокстера), ассоциированная с произвольным базисом B, будет получаться из N (соотв. M) композицией с канонической индексацией B; будем называть эту матрицу *канонической матрицей Картана* (соотв. *Кокстера*) системы R.

Предложение 15. *Пусть B — базис системы R и α — неделимый корень. Существуют $\beta \in B$ и $w \in W(R)$, такие, что $\alpha = w(\beta)$.*

Допустим, что базис $B = B(C)$ определяется камерой C. Гиперплоскость L_α является стенкой некоторой камеры C' системы R, и существует элемент группы $W(R)$, переводящий C' в C. Можно, следовательно, ограничиться случаем, когда L_α — стенка камеры C. Тогда α пропорционален некоторому элементу β из B. Так как α и β неделимы, то $\alpha = \pm\beta$. Если $\alpha = -\beta$, то $\alpha = S_\beta(\beta)$, что и доказывает предложение.

Следствие. *Пусть* R_1 *и* R_2 — *две приведенные системы корней в векторных пространствах* V_1 *и* V_2, *а* B_1 *и* B_2 — *их базисы. Пусть, далее,* $f\colon B_1 \to B_2$ — *биективное отображение, переводящее матрицу Картана системы* R_1 *в матрицу Картана системы* R_2. *Тогда существует изоморфизм* $F\colon V_1 \to V_2$, *переводящий* R_1 *в* R_2 *и* α *в* $f(\alpha)$ *для всякого* $\alpha \in B_1$.

Пусть F — изоморфизм V_1 на V_2, который переводит α в $f(\alpha)$ для всякого $\alpha \in B_1$. Тогда F переводит s_α в $s_{f(\alpha)}$ и, следовательно, $W(R_1)$ в $W(R_2)$ (теорема 2), а значит, R_1 в R_2 (предложение 15).

Предложение 16. *Пусть* B — *базис системы* R *и* G — *подгруппа в* $A(R)$, *состоящая из элементов, которые оставляют* B *устойчивым. Тогда* $W(R)$ — *нормальная подгруппа в* $A(R)$ *и группа* $A(R)$ — *полупрямое произведение своих подгрупп* G *и* $W(R)$.

Если $\alpha \in R$ и $t \in A(R)$, то $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$; поскольку $W(R)$ порождена всеми отражениями s_α, ясно, что $W(R)$ — нормальная подгруппа в $A(R)$. С помощью перенесения структуры $A(R)$ переводит один базис системы R в некоторый другой базис той же системы. Но $W(R)$ действует просто транзитивным образом на множестве базисов, поэтому произвольный элемент из $A(R)$ однозначно записывается в виде g_1g_2, где $g_1 \in W(R)$ и $g_2 \in G$.

Замечание 8). Пусть $R_1, \ldots, R_p$ — системы корней в векторных пространствах $V_1, \ldots, V_p$, R — прямая сумма R_i в $V = \prod_i V_i$, C_i — камера системы R_i, $B_i = B(C_i)$. Очевидно, что $C = \prod_i C_i$ будет камерой системы R и что $B(C) = \bigcup_i B_i$. Как следует из теоремы 2, все камеры и базисы системы R получаются указанным способом.

6. Положительные корни

Пусть C — камера системы R, а $B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — соответствующий базис. *Отношением порядка, определенным камерой* C в V (соотв. V^*), называется согласованное со структурой векторного пространства на V (соотв. V^*) отношение порядка, при котором элементами $\geqslant 0$ будут линейные комбинации корней α_i (соотв. $\alpha_i^\vee$) с коэффициентами $\geqslant 0$. Элемент, положительный относительно одного из указанных отношений порядка, называется еще *положительным относительно* C или *положительным относительно базиса* $B(C)$. Эти отношения порядка будут также определяться дуальной камерой $C^\vee$, что вполне понятно, если отождествить V с V^* при помощи скалярного произведения, инвариантного относительно $W(R)$. По теореме 2 n°5 элемент из V^* будет $\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда его значения на C будут $\geqslant 0$. Элемент x пространства V будет $\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда его значения на $C^\vee$ будут $\geqslant 0$, или, что то же самое, когда $(x|y) \geqslant 0$ для всех $y \in C$.

Элементы из $\overline{C}$ будут $\geqslant 0$ относительно C, как это следует из леммы 6 гл. V, § 3, n°5. Но, вообще говоря, множество элементов, которые $\geqslant 0$ относительно C, отлично от $\overline{C}$ (табл. X, системы A_2, B_2, G_2).

Теорема 3. *Любой корень является линейной комбинацией с целыми коэффициентами одного и того же знака элементов базиса $B(C)$. В частности, любой корень либо положителен, либо отрицателен относительно C.*

Ядро $L_{\alpha^\vee}$ элемента $\alpha \in R$ не пересекает $C^\vee$, поэтому α на $C^\vee$ будет либо > 0, либо всюду < 0, откуда и следует второе утверждение. Остается доказать, что α содержится в подгруппе $P \subset V$, порожденной множеством $B(C)$; при этом α можно предполагать неделимым. Но группа P, очевидно, устойчива относительно s_γ при всех $\gamma \in B(C)$, а по теореме 2 она должна быть устойчивой и относительно $W(R)$. Так как α имеет вид $w(\beta)$, где $w \in W(R)$ и $\beta \in B(C)$ (предложение 15), то $\alpha \in P$. Тем самым теорема доказана.

Обозначим символом $R_+(C)$ множество положительных относительно C корней. Таким образом,

$$R = R_+(C) \cup (-R_+(C))$$

— разбиение системы R.

Следствие. *Пусть γ — линейная комбинация корней с целыми коэффициентами и α — неделимый корень. Если γ пропорциональна корню α, то $\gamma \in \mathbf{Z}\alpha$.*

Ввиду предложения 15 n°5 можно выбрать такую камеру C, что $\alpha \in B(C)$. По теореме 3 имеем

$$\gamma = \sum_{\beta \in B(C)} n_\beta \beta \quad \text{с} \quad n_\beta \in \mathbf{Z}.$$

Если теперь комбинация γ пропорциональна α, то $\gamma = n_\alpha \alpha$, чем и доказано следствие.

Пусть, далее, S — множество отражений s_α для $\alpha \in B(C)$, и пусть T — объединение множеств, сопряженных с S в W. При произвольных $\alpha \in B(C)$ и $w \in W$ элемент $t = w s_\alpha w^{-1}$ будет ортогональным отражением s_β, ассоциированным с корнем $\beta = w(\alpha)$; обратно, каков бы ни был неделимый корень β, найдется элемент $w \in W$, такой, что $\alpha = w^{-1}(\beta) \in B(C)$ (предложение 15), и $s_\beta = w s_\alpha w^{-1} \in T$. В результате мы получаем *биективное отображение* ψ множества неделимых корней на произведение $\{\pm 1\} \times T$, сопоставляя неделимому корню β пару (ε, s_β), где $\varepsilon = +1$, если корень β положительный, и $\varepsilon = -1$, если он отрицательный.

С другой стороны, (W, S) является системой Кокстера (теорема 2) и к ней можно применить результаты гл. IV, § 1, n°4. Мы видим в данном случае, что для любого элемента $w \in W$ длины q (относительно S) в T существует подмножество T_w из q элементов, такое, что если $w = s_1 \ldots s_q$ с $s_i \in S$ и если положить

$$t_i = s_1 \ldots s_{i-1} s_i s_{i-1} \ldots s_1$$

(для $1 \leqslant i \leqslant q$), то $T_w = \{t_1, \ldots, t_q\}$. Напомним, что в n°4 § 1 гл. IV определено также число $\eta(w, t)$ (для $w \in W$ и $t \in T$), равное $+1$, если $t \notin T$, и -1, если $t \in T$. Напомним, наконец, что если определить отображение U_w множества $\{\pm 1\} \times T$ в себя формулой

$$U_w(\varepsilon, t) = (\varepsilon \eta(w^{-1}, t),\ w t w^{-1}),$$

то отображение $w \longmapsto U_w$ будет *гомоморфизмом* W в группу перестановок множества $\{\pm 1\} \times T$ (гл. IV, § 1, n°4, лемма 1).

Предложение 17. *Пусть* $w \in W$ и $\alpha \in R$, *где* R — *приведенная система.*

(i) *Справедливо равенство* $\psi(w(\alpha)) = U_w(\psi(\alpha))$.

(ii) *Предположим, что* α — *положительный корень. Корень* $w(\alpha)$ *будет отрицательным тогда и только тогда, когда*

$$\eta(w^{-1}, s_\alpha) = -1,$$

или, другими словами, когда $s_\alpha \in T_{w^{-1}}$.

(iii) $\eta(w, s_\alpha) = -1$ *в том и только том случае, когда камеры* C *и* $w(C)$ *находятся по разные стороны от гиперплоскости* L_α. *Другими словами, множество* T_w *состоит из отражений относительно стенок, разделяющих* C *и* $w(C)$.

Пусть $\beta \in B(C)$; положим $s = s_\beta$. Очевидно, что $T_s = \{s\}$ и, следовательно,

$$U_s(\varepsilon, t) = \begin{cases} (\varepsilon, s t s^{-1}), & \text{если } t \neq s, \\ (-\varepsilon, s), & \text{если } t = s. \end{cases} \tag{12}$$

Далее, пусть $\rho = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma(\rho)\gamma$ — положительный корень. Положим

$$s(\rho) = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma(s(\rho))\gamma.$$

Если $\rho \neq \beta$, то найдется элемент $\gamma \in B(C)$, $\gamma \neq \beta$, такой, что $n_\gamma(\rho) > 0$. Тогда и $n_\gamma(s(\rho)) = n_\gamma(\rho) > 0$ (n° 1, формула (5)). Следовательно, $s(\rho)$ — *положительный* корень. Сразу же получаем

$$\psi(s(\varepsilon \cdot \rho)) = \begin{cases} (\varepsilon,\ ss_\rho s^{-1}), & \text{если} \quad \rho \neq \beta, \\ (-\varepsilon,\ s), & \text{если} \quad \rho = \beta. \end{cases} \tag{13}$$

Сравнение (12) с (13) показывает тогда, что $U_s(\psi(\gamma)) = \psi(s(\gamma))$ для любого корня γ и любого $s \in S$. Отсюда получается (i), поскольку S порождает W.

С другой стороны, сказать, что $w(\alpha)$ отрицателен, эквивалентно тому, чтобы сказать, что $\psi(w(\alpha)) = (-1,\ ws_\alpha w^{-1})$, или же ввиду (i) что $U_w(\psi(\alpha)) = (-1,\ ws_\alpha w^{-1})$. Если, кроме того, α — положительный корень, то $\psi(\alpha) = (+1, s_\alpha)$ и $U_w(\psi(\alpha)) = (\eta(w^{-1}, s_\alpha),\ ws_\alpha w^{-1})$, откуда вытекает (ii).

Наконец, согласно (ii), $\eta(w, s_\alpha) = -1$ в том и только том случае, когда один из корней α, $w^{-1}(\alpha)$ положительный, а другой отрицательный. Это равносильно тому, что $(\alpha|x) \cdot (w^{-1}(\alpha)|x) = (\alpha|x) \cdot (\alpha|w(x)) < 0$ для всех $x \in C$, откуда следует первое утверждение в (iii). Второе утверждение в (iii) получается непосредственно.

Следствие 1. *Пусть $\beta \in B(C)$. Отражение s_β переставляет между собой положительные корни, не пропорциональные β.*

Тотчас же получается свед́ение к случаю, когда R — приведенная система, а тогда наше утверждение следует из (ii) и из того, что $T_{s_\beta} = \{s_\beta\}$.

Следствие 2. *Предположим, что система R — приведенная. Пусть w — элемент из W длины q относительно S* (гл. IV, § 1, n° 1) *и $w = s_1 \ldots s_q$ — некоторое его приведенное разложение. Пусть, далее, $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ — элементы из $B(C)$, соответствующие отражениям $s_1, \ldots, s_q$. Положим*

$$\theta_i = s_q s_{q-1} \ldots s_{i+1}(\alpha_i), \qquad i = 1, \ldots, q.$$

Корни θ_i все > 0 и попарно различны, причем $w(\theta_i) < 0$, и всякий корень $\alpha > 0$, для которого $w(\alpha) < 0$, равен одному из θ_i.

Пусть X — множество корней $\alpha > 0$, таких, что $w(\alpha) < 0$. В соответствии с (ii) имеем

$$\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(T_{w^{-1}}) = l(w^{-1}) = l(w) = q.$$

С другой стороны, для любого $\alpha \in X$ найдется индекс $i \in [1, q]$, такой, что

$$s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) > 0 \quad \text{и} \quad s_i s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) < 0.$$

По следствию 1 это влечет $s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) = \alpha_i$, откуда $\alpha = \theta_i$. Таким образом, множество X содержится в множестве корней θ_i. Так как $\mathrm{Card}(X) = q$, то X совпадает с этим множеством, а θ_i обязаны быть попарно различными, что и требовалось установить.

Следствие 3. *Предположим, что система R — приведенная. В W существует единственный элемент w_0 наибольшей длины. Его длина равна числу положительных корней; элемент w_0 переводит камеру C в $-C$. Далее, $w_0^2 = 1$ и $l(ww_0) = l(w_0) - l(w)$ для всех $w \in W$.*

Ясно, что $-C$ — камера. Найдется поэтому единственный элемент $w_0 \in W$, переводящий C в $-C$. Тогда $w_0(\alpha) < 0$ для всякого положительного корня α, и первые два утверждения следствия 3 непосредственно вытекают из следствия 2. Далее, $w_0^2(C) = C$, откуда $w_0^2 = 1$. Наконец, если $w \in W$, то длина $l(w)$ (соответственно $l(ww_0)$) равна ввиду предложения 17 (iii) числу стенок, разделяющих C и $w(C)$ (соотв. $ww_0(C) = -w(C)$). Так как $w(C)$ и $-w(C)$ находятся по разные стороны от какой бы то ни было стенки, то сумма $l(w) + l(ww_0)$ равна общему числу стенок, т. е. длине $l(w_0)$.

Предложение 18. *Пусть $x \in V$. Три следующих свойства эквивалентны:*

(i) *$x \in \bar{C}$.*

(ii) *$x \geqslant s_\alpha(x)$ для всех $\alpha \in B(C)$* (в смысле отношения порядка, определенного посредством C).

(iii) *$x \geqslant w(x)$ для всех $w \in W$.*

Поскольку $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$, а $\bar{C}$ является множеством элементов $x \in V$, таких, что $\langle x, \alpha^\vee \rangle \geqslant 0$ для всех $\alpha \in B(C)$, эквивалентность утверждений (i) и (ii) очевидна. С другой стороны, ясно, что (iii) $\Rightarrow$ (ii). Покажем, что (i) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $x \in \bar{C}$, и пусть $w \in W$. Проведем индукцию по длине $l(w)$ элемента w. Случай $l(w) = 0$ тривиален. Если $l(w) \geqslant 1$, то w

можно записать в виде $w = w' s_\alpha$, где $\alpha \in B(C)$ и $l(w') = l(w) - 1$. Тогда

$$x - w(x) = x - w'(x) + w'(x - s_\alpha(x)).$$

Из предположения индукции следует, что элемент $x - w'(x)$ положительный. С другой стороны,

$$w'(x - s_\alpha(x)) = w(s_\alpha(x) - x) = -\langle x, \alpha^\vee \rangle w(\alpha).$$

Но $s_\alpha \in T_{w^{-1}}$, и предложение 17, (ii) гарантирует нам, что $w(\alpha) < 0$. Это дает нужный результат.

Следствие. *Для того чтобы $x \in C$, необходимо и достаточно, чтобы было $x > w(x)$ для всех неединичных элементов $w \in W$.*

Предложение 19. *Пусть $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — последовательность корней, положительных относительно некоторой камеры C и таких, что $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$ — корень. Тогда существует такая перестановка $\pi \in \mathfrak{S}_n$, что $\beta_{\pi(1)} + \beta_{\pi(2)} + \ldots + \beta_{\pi(i)}$ будет корнем для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Учитывая, что предложение очевидно при $n \leqslant 2$, рассуждаем по индукции относительно n. Положим $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Имеем $\sum_{i=1}^{n} (\beta|\beta_i) = (\beta|\beta) > 0$, поэтому найдется индекс k, для которого $(\beta|\beta_k) > 0$. Если $\beta = \beta_k$, то $n = 1$, поскольку $\beta_i > 0$ для всех i. Если же это не так, то $\beta - \beta_k$ является корнем (n°3, следствие теоремы 1); в таком случае достаточно применить к $\beta - \beta_k = \sum_{i \neq k} \beta_i$ предположение индукции.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in R_+(C)$. Для того чтобы $\alpha \notin B(C)$, необходимо и достаточно, чтобы корень α был суммой двух положительных корней.*

Если α — сумма двух положительных корней, то по теореме 3 $\alpha \in B(C)$. Если $\alpha \notin B(C)$, то снова по теореме 3 $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$ с $\beta_k \in B(C)$ для всех k и $n \geqslant 2$. Переставляя β_k, можно добиться того, что $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$ будет корнем (предложение 19) и, следовательно, α будет суммой положительных корней $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$ и β_n.

Следствие 2. *Пусть φ — отображение R в коммутативную группу Γ, обладающее следующими свойствами:*

1) $\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$ *для* $\alpha \in R$;

2) *если* $\alpha \in R$, $\beta \in R$ *таковы, что* $\alpha + \beta \in R$, *то* $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$.

Пусть Q — *подгруппа в* V, *порожденная системой* R. *Тогда* φ *можно продолжить до гомоморфизма* Q *в* Γ.

Пусть B — какой-нибудь базис системы R, и пусть ψ — единственный гомоморфизм Q в Γ, совпадающий с φ на B. Достаточно доказать, что $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ для любого корня α, положительного относительно B. Имеем $\alpha = \beta_1 + \ldots + \beta_m$ с $\beta_i \in B$ для всех i и $\beta_1 + \ldots + \beta_h \in R$ для любого h (предложение 19). Индукцией по m докажем, что $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$. Это очевидно, если $m = 1$. Предположение индукции дает

$$\psi(\beta_1 + \ldots + \beta_{m-1}) = \varphi(\beta_1 + \ldots + \beta_{m-1})$$

и $\psi(\beta_m) = \varphi(\beta_m)$, откуда $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$, чем и доказано следствие.

Для любого корня $\alpha = \sum_{\beta \in B(C)} n_\beta \beta$ системы R обозначим через $Y(\alpha)$ множество тех $\beta \in B(C)$, для которых $n_\beta \neq 0$. Заметим, далее, что $B(C)$ отождествляется со множеством вершин *графа* системы Кокстера, состоящей из $W(R)$ и образующих s_{α_i} (гл. IV, § 1, n°9, и гл. V, § 3, n°2).

Следствие 3. а) *Пусть* $\alpha \in R$. *Тогда* $Y(\alpha)$ *является связным подмножеством в* $B(C)$ (гл. IV, Дополнение).

б) *Пусть* Y — *непустое связное подмножество в* $B(C)$. *Тогда* $\sum_{\beta \in Y} \beta$ *принадлежит* R.

При доказательстве а) можно предполагать α положительным. Утверждение тривиально, если $\operatorname{Card}(Y(\alpha)) = 1$, поэтому далее рассуждаем по индукции относительно $\operatorname{Card}(Y(\alpha))$. Ввиду предложения 19 существует $\beta \in B(C)$, для которого $\alpha - \beta \in R$. Пусть p — наибольшее целое число $\geqslant 0$, для которого $\gamma = \alpha - p\beta \in R$. Так как $\gamma - \beta \notin R$, а $\gamma + p\beta \in R$, то $(\gamma | \beta) \neq 0$ (предложение 9); следовательно, β соединено по крайней мере с одним элементом множества $Y(\gamma)$. Но $Y(\alpha) = Y(\gamma) \cup \{\beta\}$ и $Y(\gamma)$ связно по предположению индукции. Поэтому $Y(\alpha)$ связно, чем и доказано а).

Пусть теперь Y — непустое связное подмножество в $B(C)$; докажем индукцией по $\operatorname{Card}(Y)$, что $\sum_{\beta \in Y} \beta$ — корень. Случай, когда $\operatorname{Card}(Y) \leqslant 1$, тривиален. Предположим, что $\operatorname{Card}(Y) \geqslant 2$. Так как $(W(R), S)$ — лес (гл. V, § 4, n°8, предложение 8), то Y — *дерево*, обладающее концевой вершиной β (гл. IV, Дополнение). Множество $Y - \{\beta\}$ связно, и его элементы соединены с β. По предположению индукции $\alpha = \sum_{\gamma \in Y - \{\beta\}} \gamma \in R$, и так как $(\alpha | \beta) < 0$, то имеем $\alpha + \beta \in R$ (теорема 1). Ч. Т. Д.

7. *Замкнутые множества корней*

Определение 4. *Пусть P — подмножество в R.*

(i) *P называется замкнутым, если условия $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $\alpha + \beta \in R$ влекут $\alpha + \beta \in P$.*

(ii) *P называется параболическим, если P замкнуто и $P \cup (-P) = R$.*

(iii) *P называется симметричным, если $P = -P$.*

Лемма 3. *Пусть C — камера системы R и P — замкнутое подмножество в R, содержащее $R_+(C)$* (обозначения n° 6). *Пусть, далее, $\Sigma = B(C) \cap (-P)$ и Q — множество корней, записываемых в виде линейных комбинаций с целыми коэффициентами $\leqslant 0$ элементов из Σ. Тогда $P = R_+(C) \cup Q$.*

Нужно доказать, что $P \cap (-R_+(C)) = Q$. Пусть $-\alpha \in Q$. Тогда α будет суммой n элементов из Σ. Индукцией по n убедимся в том, что $-\alpha \in P$. Это очевидно, если $n = 1$. При $n > 1$, пользуясь предложением 19, n° 6, можно записать $\alpha = \beta + \gamma$, где $\gamma \in \Sigma$ и β — сумма $n - 1$ элементов из Σ. По предположению индукции $-\beta \in P$; так как $-\gamma \in P$ и P замкнуто, то и $-\alpha \in P$. Поэтому $Q \subset P \cap (-R_+(C))$. Обратно, пусть $-\alpha \in P \cup (-R_+(C))$. Тогда α — сумма p элементов из $B(C)$. Индукцией по p убедимся в том, что $-\alpha \in Q$. Это очевидно при $p = 1$, а при $p > 1$, пользуясь предложением 19, можно записать $\alpha = \beta + \gamma$, где $\gamma \in B(C)$ и β — корень, являющийся суммой $p - 1$ элементов из $B(C)$. Так как $-\gamma = \beta + (-\alpha)$ и P замкнуто, то $-\gamma \in P$ и, следовательно, $\gamma \in \Sigma$. С другой стороны, $-\beta = \gamma + (-\alpha)$, следовательно, $-\beta \in P$, поскольку P замкнуто. По предположению индукции $-\beta \in Q$, поэтому $-\alpha = -\beta - \gamma \in Q$, так что $P \cap (-R_+(C)) \subset Q$.

Предложение 20. *Пусть P — подмножество в R. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *P параболично;*

(ii) *P замкнуто, и $P \supset R_+(C)$ для некоторой камеры C системы R;*

(iii) *существуют камера C системы R и подмножество $\Sigma \subset B(C)$, такие, что P будет объединением $R_+(C)$ и множества Q корней, являющихся линейными комбинациями с целыми коэффициентами $\leqslant 0$ элементов из Σ.*

(ii) $\Rightarrow$ (iii). По лемме 3.

(iii)$\Rightarrow$(i). Примем условия и обозначения условия (iii). Ясно, что $P \cup (-P) = R$. Пусть α, β — элементы из P, для которых $\alpha + \beta \in R$; докажем, что $\alpha + \beta \in P$. Это очевидно, если корень $\alpha + \beta$ положительный. Предполагая теперь $\alpha + \beta$ отрицательным, мы запишем $\alpha + \beta = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma \gamma$ с $n_\gamma \leqslant 0$. Но в α и β коэффициент при любом элементе $\gamma \in B(C) - \Sigma$ будет $\geqslant 0$; если, следовательно, $\gamma \in B(C) - \Sigma$, то $n_\gamma = 0$, откуда $\alpha + \beta \in Q \subset P$.

(i)$\Rightarrow$(ii). Предполагая множество P параболическим, выберем камеру C, для которой $\mathrm{Card}(P \cap R_+(C))$ принимает наибольшее возможное значение. Пусть $\alpha \in B(C)$ и $\alpha \notin P$, так что $-\alpha \in P$. Никакой элемент $\beta \in P \cap R_+(C)$ не пропорционален α (ибо из $\beta = 2\alpha$ в силу замкнутости P следовало бы $\alpha = 2\alpha + (-\alpha) \in P$). Поэтому $s_\alpha(\beta) \in R_+(C)$ (n°6, следствие 1 предложения 17). Стало быть, положив $C' = s_\alpha(C)$, получаем $\beta = s_\alpha(s_\alpha(\beta)) \in s_\alpha(R_+(C)) = R_+(C')$. Таким образом, $P \cap R_+(C) \subset P \cap R_+(C')$. Кроме того, $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in s_\alpha(R_+(C)) = R_+(C')$, следовательно, $-\alpha \in P \cap R_+(C')$ и поэтому $\mathrm{Card}(P \cap R_+(C')) > \mathrm{Card}(P \cap R_+(C))$. Так как это исключено, то $\alpha \in P$, т. е. $B(C) \subset P$ и, значит, $R_+(C) \subset P$ согласно предложению 19 и тому факту, что P замкнуто.

Следствие 1. *Пусть P — подмножество в R. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует камера C, для которой $P = R_+(C)$;*

(ii) *P замкнуто, и $\{P, -P\}$ есть разбиение системы R. При этом камера C, для которой $P = R_+(C)$, единственна.*

(i)$\Rightarrow$(ii). По теореме 3 (n°6).

(ii)$\Rightarrow$(i). Это следствие импликации (i)$\Rightarrow$(ii) предложения 20.

Если $P = R_+(C)$, то $C^\vee$ — это множество таких элементов $x^* \in V^*$, что $\langle x^*, x \rangle > 0$ для всех $x \in P$, откуда и вытекает единственность C.

Следствие 2. *Предположим, что V снабжено такой структурой упорядоченного векторного пространства, что всякий элемент из R будет положительным или отрицательным. Пусть P — множество корней, положительных относительно этой структуры. Тогда существует, и притом единственная, камера C системы R, для которой $P = R_+(C)$.*

В самом деле, P удовлетворяет условию (ii) следствия 1.

Это следствие применимо, в частности, тогда, когда рассматриваемый порядок — совершенный; условие на R будет тогда выполняться автоматически. Напомним, что можно получить пример такого порядка, выбрав какой-нибудь базис $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ в V и взяв на V *лексикографический* порядок: $x = \sum_i \xi_i e_i \geqslant 0$, если все $\xi_i = 0$, или же $\xi_i > 0$ для наименьшего индекса i, такого, что $\xi_i \neq 0$.

Следствие 3. *Для того чтобы подмножество B системы R было базисом в R, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(i) *элементы множества B линейно независимы;*

(ii) *любой корень из R записывается в виде линейной комбинации элементов из B с коэффициентами, которые все $\geqslant 0$ или все $\leqslant 0$;*

(iii) *все корни из B неделимы.*

Уже известно, что эти условия необходимы (n°5, теорема 2, и n°6, теорема 3). Предположим теперь, что условия (i), (ii), (iii) выполняются. Пусть P — множество корней, которые являются линейными комбинациями с коэффициентами $\geqslant 0$ элементов из B. Поскольку P удовлетворяет условию (ii) следствия 1, существует камера C, для которой $P = R_+(C)$; пусть $B' = B(C)$, и пусть X и X' — выпуклые конусы, порожденные множествами B и B'. Очевидно,

$$B \subset P \subset X \quad \text{и} \quad B' \subset P \subset X',$$

а это означает, что как X, так и X' порождаются множеством P и, следовательно, совпадают. Но полупрямые, порожденные элементами из B (соотв. B'), будут экстремальными образующими конуса X (соотв. X'); так как такая полупрямая содержит не более одного неделимого корня, то $B = B'$.

Следствие 4. *Пусть B — базис системы R, B' — подмножество в B, V' — векторное подпространство в V, порожденное B', и $R' = R \cap V'$. Тогда B' будет базисом системы корней R'.*

Это прямо вытекает из следствия 3 и из следствия предложения 4.

Говорят, что R' — система корней, *порожденная* подмножеством B'.

Следствие 5. *Пусть B—базис системы R, $A_1, A_2, \ldots, A_r$— попарно ортогональные подмножества в B и $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_r$. Тогда любой корень α, являющийся линейной комбинацией элементов из A, будет на самом деле линейной комбинацией элементов одного из множеств A_i. В частности,* *если система R неприводима, то не существует разбиения $B(C)$ на два ортогональных множества.*

Пусть $E_1, \ldots, E_r, E$ — векторные подпространства в V, порожденные соответственно множествами $A_1, \ldots, A_r, A$. Ввиду следствия 4 можно предполагать, что $E=V$. Тогда по теореме 2, (vii), n°5, E_i будут устойчивы относительно $W(R)$, так что R — объединение систем $R \cap E_i$ (n°2, предложение 5).

Следствие 6. *В условиях и обозначениях предложения 20 пусть V_1 — векторное подпространство в V, порожденное множеством Σ. Тогда $P \cap (-P) = Q \cup (-Q) = V_1 \cap R$ будет системой корней в V_1 с базисом Σ.*

Имеем $P \cap (-P) = (R_+(C) \cup Q) \cap ((-R_+(C)) \cup (-Q)) = Q \cup \cup (-Q)$. Теорема 3 показывает, что $Q \cup (-Q) = V_1 \cap R$. Наконец, согласно следствию 4, Σ — базис системы корней $V_1 \cap R$.

Предложение 21. *Пусть C (соотв. C') — камера системы R, Σ (соотв. Σ') — подмножество в $B(C)$ (соотв. $B(C')$), Q (соотв. Q') — множество корней, являющихся линейными комбинациями с целыми отрицательными коэффициентами элементов из Σ (соотв. Σ'), и $P = Q \cup R_+(C)$ (соотв. $P' = Q' \cup R_+(C')$). Если существует элемент группы Вейля, переводящий P в P', то существует и элемент группы Вейля, переводящий C в C' и Σ в Σ'.*

Тотчас же получается редукция к случаю, когда $P = P'$. Пусть V_1 — векторное подпространство в V, порожденное $P \cap (-P)$. Тогда Σ и Σ' будут двумя базисами системы корней $R_1 = P \cap (-P)$ в V_1 (следствие 6 предложения 20). Поэтому найдется $g_1 \in W(R_1)$, для которого $g_1(\Sigma) = \Sigma'$. Ясно, что g_1 индуцируется элементом $g \in W(R)$, который является произведением отражений s_σ с $\sigma \in \Sigma$. Пусть $\gamma = \sum_{\beta \in B(C)} c_\beta \beta$ — элемент множества $P - R_1$. Хотя бы для одного $\beta \in B(C) - \Sigma$ будет $c_\beta > 0$. С другой стороны, если $\sigma \in \Sigma$, то $s_\sigma(\gamma) - \gamma \in V_1$, поэтому у $s_\sigma(\gamma)$ по крайней мере одна координата относительно $B(C)$ будет > 0 (n° 1, формула (5)), откуда $s_\sigma(\gamma) \in \in R_+(C)$ и в конечном счете $s_\sigma(\gamma) \in P - R_1$. Получается, что $P - R_1$ устойчиво относительно s_σ, $\sigma \in \Sigma$, а поэтому и относительно g, и $g(P) = P$. Таким образом, остается доказать предложение при $P = P'$ и $\Sigma = \Sigma'$. В этом случае $Q = Q'$, следовательно, $R_+(C) = P - Q = P - Q' = R_+(C')$ и поэтому $C = C'$ (следствие 1 предложения 20).

Следствие. *Пусть P, P' — два параболических подмножества системы R, переводящиеся друг в друга некоторым элементом группы Вейля. Если существует камера C системы R, такая, что $R_+(C) \subset P$ и $R_+(C) \subset P'$, то $P = P'$.*

Это вытекает из леммы 3 и предложения 21, поскольку единственным элементом в $W(R)$, переводящим C в C, является 1 (см. n° 5, теорема 2).

Предложение 22. *Пусть P — замкнутое подмножество в R, такое, что $P \cap (-P) = \varnothing$. Тогда существует камера C системы R, для которой $P \subset R_+(C)$.*

1) Согласно следствию теоремы 1 n° 3, условия $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $(\alpha | \beta) < 0$ влекут $\alpha + \beta \in P$.

2) Докажем, что никакая сумма $\alpha_1 + \ldots + \alpha_q$ $(q \geqslant 1)$ элементов множества P не равна нулю. Утверждение очевидно для $q = 1$, поэтому, рассуждая по индукции относительно q, считаем $q \geqslant 2$. Если $\alpha_1 + \ldots + \alpha_q = 0$, то

$$-\alpha_1 = \alpha_2 + \ldots + \alpha_q,$$

поэтому $(-\alpha_1 | \alpha_2 + \ldots + \alpha_q) > 0$, откуда заключаем о существовании такого $j \in [2, q]$, что $(\alpha_1 | \alpha_j) < 0$. Ввиду части 1) доказательства $\alpha_1 + \alpha_j \in P$, и соотношение $(\alpha_1 + \alpha_j) + \sum_{i \neq 1, j} \alpha_i = 0$ противоречит предположению индукции.

3) Докажем, что в V найдется такой отличный от нуля элемент γ, что $(\gamma | \alpha) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in P$. В противном случае результат части 1) обеспечивал бы существование бесконечной последовательности таких элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ множества P, что

$$\beta_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_i \in P$$

для всех i; найдутся, однако, два различных целых числа i, j, для которых $\beta_i = \beta_j$, что противоречит выводам части 2).

4) Чтобы закончить доказательство предложения, достаточно (следствие 2 предложения 20) убедиться в существовании базиса $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant l}$ пространства V, такого, что относительно лексикографического порядка, определенного этим базисом, всякий элемент из P будет > 0. Применим индукцию по $l = \dim V$, считая предложение установленным для размерностей $< l$. Пусть $\gamma \in V$, $\gamma \neq 0$ и $(\gamma | \alpha) \geqslant 0$ для любого $\alpha \in P$ (см. 3)). Пусть, далее, L — гиперплоскость, ортогональная к γ, и V' — подпространство в V, порожденное $R \cap L$. Тогда $R \cap L$ будет системой корней в V' с замкнутым подмножеством $P \cap L$. По предположению индукции суще-

ствует такой базис $(\beta_1, \ldots, \beta_{l'})$ пространства V', что относительно определенного им лексикографического порядка элементы из $P \cap L$ будут > 0. В таком случае любой базис пространства V, первыми $l' + 1$ элементами в котором служат $\gamma, \beta_1, \ldots, \beta_{l'}$, а остальные элементы лежат в L, будет обладать требуемым свойством.

Предложение 23. *Пусть P — подмножество в R и V_1 (соотв. Γ) — векторное подпространство (соотв. подгруппа) в V, порожденное P. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *P замкнуто и симметрично;*

(ii) *P замкнуто и является системой корней в V_1;*

(iii) $\Gamma \cap R = P$.

Предположим, что эти условия выполнены. Для любого $\alpha \in P$ пусть $\alpha_1^\vee$ — сужение $\alpha^\vee$ на V_1. Тогда $\alpha \mapsto \alpha_1^\vee$ будет каноническим биективным отображением системы корней P на $P^\vee$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Очевидно.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что P замкнуто и симметрично. Прежде всего P удовлетворяет условию (СК$_\mathrm{I}$) в V_1. Докажем, что $s_\alpha(\beta) \in P$, каковы бы ни были $\alpha, \beta \in P$. Это очевидно, если α и β пропорциональны. Если же это не так, то $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$ и $\beta - p\alpha \in R$ для любого целого рационального числа p, заключенного между 0 и $n(\beta, \alpha)$ (предложение 9, n° 3); следовательно,

$$\beta - n(\beta, \alpha)\alpha \in P,$$

поскольку P замкнуто и симметрично. Таким образом, $s_{\alpha, \alpha_1^\vee}(P) = P$, и P удовлетворяет (СК$_\mathrm{II}$). Ясно, что P удовлетворяет (СК$_\mathrm{III}$). Поэтому P удовлетворяет (ii), и одновременно доказано последнее утверждение предложения.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Считая выполненным условие (ii), докажем, что $\Gamma \cap R = P$. Ясно, что $P \subset \Gamma \cap R$. Пусть $\beta \in \Gamma \cap R$. Поскольку $\beta \in \Gamma$ и $P = -P$, имеем $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ с $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in P$. Докажем, что $\beta \in P$. Это очевидно при $k = 1$. Применим индукцию по k. Так как

$$0 < (\beta \mid \beta) = \sum_{i=1}^{k} (\beta \mid \alpha_i),$$

то $(\beta \mid \alpha_i) > 0$ для некоторого индекса i. Если $\beta = \alpha_i$, то $\beta \in P$. В противном случае $\beta - \alpha_i \in R$ (следствие теоремы 1, n° 3), поэтому по предположению индукции $\beta - \alpha_i \in P$, откуда $\beta \in P$, поскольку P замкнуто.

Условия предложения 23 могут реализоваться и тогда, когда $V_1 = V$, но тем не менее $P \neq R$. Этого можно добиться, например, взяв за R систему типа G_2, а за P систему типа A_2; см табл. X.

Предложение 24. *Пусть пересечение R' системы R с некоторым векторным подпространством пространства V таково, что R' является системой корней в порожденном им векторном подпространстве V'* (см. следствие предложения 4, n° 1). *Пусть B' — базис системы R'.*

(i) *Существует базис системы R, содержащий B'.*

(ii) *R' есть множество элементов из R, которые являются линейными комбинациями элементов базиса B'.*

Утверждение (ii) очевидно. Докажем (i). Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l)$ — такой базис пространства V, что $B' = (\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_l)$. Лексикографический порядок на V, соответствующий этому базису, определяет некоторую камеру C системы R. Ясно, что всякий элемент из B' минимален в $R_+(C)$. Следовательно, $B' \subset B(C)$.

8. Максимальный корень

Предложение 25. *Предположим, что система R неприводима. Пусть C — камера системы R и $B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — соответствующий базис.*

(i) *Существует такой корень $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$, что для любого корня $\sum_{i=1}^{l} p_i \alpha_i$ будут выполняться неравенства $n_1 \geqslant p_1$, $n_2 \geqslant p_2, \ldots, n_l \geqslant p_l$. Другими словами, R обладает наибольшим элементом $\tilde{\alpha}$ относительно порядка, определенного камерой C.*

(ii) $\tilde{\alpha} \in \overline{C}$.

(iii) $(\tilde{\alpha} | \tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha' | \alpha')$ *для произвольного корня α'.*

(iv) *Для любого положительного корня α', не пропорционального $\tilde{\alpha}$, будет $n(\alpha', \tilde{\alpha}) = 0$ или* 1.

1) Пусть $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^{l} p_i \alpha_i$ — два максимальных корня относительно порядка, определенного C. Докажем, что $\alpha = \beta$, чем и будет установлено утверждение (i).

2) Если бы оказалось, что $(\alpha | \alpha_i) < 0$ для какого-то индекса i, то мы получили бы, что либо $\alpha + \alpha_i \in R$, либо $\alpha = -\alpha_i$ (следствие теоремы 1, n° 3), но обе эти возможности исключены ввиду максимальности α. Поэтому $(\alpha | \alpha_i) \geqslant 0$ для всех i.

3) Из $\alpha < 0$ следовало бы $\alpha < -\alpha$, что невозможно. Поэтому $n_i \geqslant 0$ для всех i. Пусть J — множество i, для которых $n_i > 0$, и J' — дополнение к J в $\{1, 2, \ldots, l\}$. Имеем $J \neq \varnothing$. Если бы J' было непустым, то существовали бы $i \in J$ и $i' \in J'$, такие, что $(\alpha_i \mid \alpha_{i'}) < 0$ (следствие 5 предложения 20 n° 7); в таком случае

$$(\alpha \mid \alpha_{i'}) = \sum_{i \in J} n_i (\alpha_i \mid \alpha_{i'}) < 0,$$

поскольку $(\alpha_j \mid \alpha_k) \leqslant 0$, каковы бы ни были различные j и k. Но это противоречит 2), так что $J' = \varnothing$ и $n_i > 0$ для всех i.

4) Согласно 2), $(\beta \mid \alpha_i) \geqslant 0$ для всех i. Не может быть $(\beta \mid \alpha_i) = 0$ для всех i, поскольку $\beta \neq 0$. В соответствии с 3) заключаем, что

$$(\beta \mid \alpha) = \sum_i n_i (\beta \mid \alpha_i) > 0.$$

Если $\gamma = \alpha - \beta \in R$, то $\alpha > \beta$ или $\beta > \alpha$ (теорема 3 n° 6), что противоречит максимальности α и β. Стало быть, $\alpha = \beta$ (следствие теоремы 1 n° 3).

5) Ввиду 2) $\tilde{\alpha} \in \overline{C}$. Пусть $\alpha' \in R$. Докажем, что $(\alpha' \mid \alpha') \leqslant (\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha})$. Поскольку $\overline{C}$ — фундаментальная область для $W(R)$, можно предполагать, что $\alpha' \in \overline{C}$. По условию $\tilde{\alpha} - \alpha' \geqslant 0$, поэтому $(\tilde{\alpha} - \alpha' \mid x) \geqslant 0$ для всех $x \in \overline{C}$. В частности, $(\tilde{\alpha} - \alpha' \mid \tilde{\alpha}) \geqslant 0$ и $(\tilde{\alpha} - \alpha' \mid \alpha') \geqslant 0$, откуда $(\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha' \mid \tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha' \mid \alpha')$. Значит, $n(\alpha', \tilde{\alpha})$ может равняться либо 0, либо 1, либо -1 (предложение 8 n° 3), если α' не пропорционален $\tilde{\alpha}$. Если $\alpha' \geqslant 0$, то, согласно 2), $(\tilde{\alpha} \mid \alpha') \geqslant 0$, стало быть, $n(\alpha', \tilde{\alpha}) \geqslant 0$ и потому $n(\alpha', \tilde{\alpha})$ равно 0 или 1. Ч. Т. Д.

Замечание. Корень

$$\tilde{\alpha} = \sum_i n_i \alpha_i$$

из утверждения (i) называется *максимальным* (или *наибольшим*) *корнем системы* R (по отношению к C). Заметим, что, согласно (i), $n_i \geqslant 1$ для всех i.

9. Веса, радикальные веса

Пусть $l = \dim V$. Обозначим через $Q(R)$ подгруппу в V, порожденную R; элементы $Q(R)$ называются *радикальными весами* системы R. По теореме 3 n° 6 $Q(R)$ является дискретной подгруппой ранга l в V, и любой базис системы R суть базис группы $Q(R)$.

Аналогично группа $Q(R^\vee)$ является дискретной подгруппой ранга l в V^*.

Предложение 26. *Множество элементов $x \in V$, таких, что $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ для всех $y^* \in Q(R^\vee)$ (или, что то же самое, для всех $y^* \in R^\vee$), составляет дискретную подгруппу $G \subset V$, содержащую $Q(R)$. Если B' — базис системы $R^\vee$, то дуальный к B' базис в V будет базисом группы G.*

Пусть $x \in V$. Следующие три свойства эквивалентны:

(i) $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ для всех $y^* \in Q(R^\vee)$;

(ii) $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ для всех $y^* \in B'$;

(iii) координаты элемента x относительно базиса, дуального к B', принадлежат $\mathbf{Z}$.

Мы делаем вывод, что дуальный к B' базис служит базисом G. С другой стороны, (СК_{III}) показывает, что $R \subset G$, откуда $Q(R) \subset G$.

Группу G из предложения 26 мы обозначим символом $P(R)$; ее элементы называются *весами* системы R. Можно также рассмотреть группу $P(R^\vee)$ весов системы $R^\vee$.

Согласно *Алг.*, гл. VII, 2-е изд., § 4, n° 8, группы

$$P(R)/Q(R), \quad P(R^\vee)/Q(R^\vee)$$

суть конечные группы, находящиеся в двойственности над $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, и потому изоморфные. Общий порядок этих двух групп называется *индексом связности* системы R (или системы $R^\vee$).

Если R есть прямая сумма систем корней R_i, то группа $Q(R)$ (соотв. $P(R)$) канонически отождествляется с прямой суммой групп $Q(R_i)$ (соотв. $P(R_i)$).

Предложение 27. *Пусть R_1 — подмножество в R, Q_1 — подгруппа в $Q(R)$, порожденная R_1, и W_1 — подгруппа в $W(R)$, порожденная отражениями s_α ($\alpha \in R_1$). Если $p \in P(R)$ и $w \in W_1$, то $p - w(p) \in Q_1$.*

Если $w = s_\alpha$ с $\alpha \in R_1$, то

$$p - w(p) = \langle p, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \mathbf{Z}\alpha \subset Q_1.$$

Индукция по r показывает, что также $p - w(p) \in Q_1$, если $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_r}$ с $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in R_1$.

Группа $A(R)$ оставляет инвариантными $P(R)$ и $Q(R)$, действуя, следовательно, на факторгруппе $P(R)/Q(R)$. Ввиду предложения 27 группа $W(R)$ действует тривиально на $P(R)/Q(R)$. Факторизуя, мы видим, что *факторгруппа $A(R)/W(R)$* (предложение 16, n° 5) *действует канонически на $P(R)/Q(R)$.*

10. Фундаментальные веса, старшие веса

Предположим, что система R — *приведенная*. Пусть C — камера системы R и B — соответствующий базис. Поскольку система R — приведенная, $B^\vee = \{\alpha^\vee\}_{\alpha \in B}$ будет базисом $R^\vee$. *Дуальный к* $B^\vee$ *базис* $(\bar{\omega}_\alpha)_{\alpha \in B}$ будет, следовательно, базисом группы весов; его элементы называются *фундаментальными весами* (относительно B или C); в случае когда элементы базиса B занумерованы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, соответствующие фундаментальные веса обозначим через $(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l)$.

Пусть $x \in V$. Элемент x принадлежит C тогда и только тогда, когда $\langle x, \alpha^\vee \rangle > 0$ для всех $\alpha \in B$. Отсюда следует, что C есть множество линейных комбинаций с коэффициентами > 0 весов $\bar{\omega}_\alpha$, а $\overline{C}$ — множество линейных комбинаций $\bar{\omega}_\alpha$ с коэффициентами $\geqslant 0$.

При фиксированном α элементы $n(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ матрицы Картана будут координатами α относительно базиса $(\bar{\omega}_\beta)_{\beta \in B}$:

$$\alpha = \sum_{\beta \in B} n(\alpha, \beta)\, \bar{\omega}_\beta. \tag{14}$$

Таким образом, относительно базисов B и $(\bar{\omega}_\alpha)_{\alpha \in B}$ $\mathbf{Z}$-модулей $Q(R)$ и $P(R)$ матрица Картана является транспонированной к матрице канонического вложения

$$Q(R) \to P(R).$$

Вес $\bar{\omega}$ называется *старшим* (или *доминатным*), если он принадлежит $\overline{C}$, т. е. если его координаты относительно $(\bar{\omega}_\alpha)_{\alpha \in B}$ являются целыми числами $\geqslant 0$, или, еще, если $g(\bar{\omega}) \leqslant \bar{\omega}$ для всех $g \in W(R)$ (n° 6, предложение 18). Поскольку $\overline{C}$ — фундаментальная область для $W(R)$ (теорема 2), для любого веса $\bar{\omega}$ существует, и притом только один, старший вес $\bar{\omega}'$, являющийся образом веса $\bar{\omega}$ относительно $W(R)$.

Каковы бы ни были элементы $\alpha, \beta \in B$, имеет место соотношение

$$\langle \bar{\omega}_\alpha, \beta^\vee \rangle = \left(\bar{\omega}_\alpha \,\middle|\, \frac{2\beta}{(\beta \mid \beta)} \right) = \delta_{\alpha\beta}$$

($\delta_{\alpha\beta}$ обозначает символ Кронекера), откуда

$$s_\beta(\bar{\omega}_\alpha) = \bar{\omega}_\alpha - \delta_{\alpha\beta}\beta \quad \text{и} \quad (\bar{\omega}_\alpha \mid \beta) = \frac{1}{2}(\beta \mid \beta)\, \delta_{\alpha\beta}. \tag{15}$$

Другими словами, $\bar{\omega}_\alpha$ ортогонален к β для $\beta \neq \alpha$, и его ортогональной проекцией на $\mathbf{R}_\alpha$ является $\frac{1}{2}\alpha$. Так как $\bar{\omega}_\alpha \in \overline{C}$, то $(\bar{\omega}_\alpha \mid \bar{\omega}_\beta) \geqslant 0$ для $\alpha, \beta \in B$, т. е. угол $(\widehat{\bar{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\beta})$ — либо острый, либо прямой. Старшими весами являются элементы $\bar{\omega} \in V$, для которых $2(\bar{\omega} \mid \alpha)/(\alpha \mid \alpha)$ при всех $\alpha \in B$ суть целые числа $\geqslant 0$.

Предложение 28. *Пусть B — базис системы R, B' — подмножество в B, V' — векторное подпространство в V, порожденное B', $R' = R \cap V'$ (это система корней в V'), $R'^{\vee}$ — дуальная система корней (отождествляемая с каноническим образом R' в $R^{\vee}$), V_1 — подпространство в V, ортогональное к $R'^{\vee}$, и p — проектирование V на V' параллельно V_1. Тогда $Q(R') = Q(R) \cap V'$, $P(R') = p(P(R))$. Множество старших весов системы R' является образом при проектировании p множества старших весов системы R.*

В самом деле, $Q(R)$ есть подгруппа в V с базисом B, $Q(R')$ — подгруппа в V с базисом B' (n° 7, следствие 4 предложения 20), откуда немедленно получаем $Q(R') = Q(R) \cap V'$. Если $\bar{\omega} \in P(R)$ и $\alpha \in R'$, то $\langle p(\bar{\omega}), \alpha^{\vee} \rangle = \langle \bar{\omega}, \alpha' \rangle \in \mathbf{Z}$, следовательно, $p(\bar{\omega}) \in P(R')$ и потому $p(P(R)) \subset P(R')$. Если $\bar{\omega}' \in P(R')$, то $\bar{\omega}'$ продолжается до некоторой линейной формы $\bar{\omega}$ на V^*, обращающейся в нуль на $(B - B')^{\vee}$; при этом $\langle \bar{\omega}, \alpha^{\vee} \rangle \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in B$, стало быть, $\bar{\omega} \in P(R)$ и $\bar{\omega}' = p(\bar{\omega})$; поэтому $P(R') \subset p(P(R))$. Таким образом, $P(R') = p(P(R))$, а утверждение относительно старших весов доказывается аналогичным образом.

Предложение 29. *Пусть ρ — полусумма корней > 0.*

(i) $\rho = \sum\limits_{\alpha \in B} \bar{\omega}_\alpha$ *есть элемент из C.*

(ii) $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ *для всех $\alpha \in B$.*

(iii) $(2\rho \mid \alpha) = (\alpha \mid \alpha)$ *для всех $\alpha \in B$.*

Так как система R — приведенная, то $s_\alpha(R_+(C) - \{\alpha\}) = R_+(C) - \{\alpha\}$ и $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ для $\alpha \in B$ (n° 6, следствие 1 предложения 17), откуда $s_\alpha(2\rho) = 2\rho - 2\alpha$. Далее,

$$\langle \rho, \alpha^{\vee} \rangle = 1 = \Big\langle \sum_{\beta \in B} \bar{\omega}_\beta, \alpha^{\vee} \Big\rangle,$$

поскольку $s_\alpha(\rho) = \rho - \langle \rho, \alpha^{\vee} \rangle \alpha$. Отсюда $\rho = \sum\limits_{\beta} \bar{\omega}_\beta$ и, следовательно, $\rho \in C$. Наконец, (iii) эквивалентно равенству $\langle \rho, \alpha^{\vee} \rangle = 1$.

Следствие. *Пусть σ — полусумма элементов > 0 системы $R^{\vee}$ (относительно $B^{\vee}$). Сумма координат любого элемента $\alpha \in V$ относительно базиса B равна $\langle \alpha, \sigma \rangle$. Если $\alpha \in R$, то эта сумма равна также* $\frac{1}{2} \sum\limits_{\beta \in R_+(C)} n(\alpha, \beta)$.

Поменяв ролями R и $R^{\vee}$ в предыдущих рассуждениях, получим при любом $\alpha \in B$ соотношение $\langle \alpha, \sigma \rangle = 1$, эквивалентное нашему следствию.

11. *Преобразование Кокстера*

Пусть C — камера системы R, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — соответствующий базис в R, и пусть $c = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_l}$. Элемент $c \in W$ называется *преобразованием Кокстера* группы W, определенным камерой C и биективным отображением $i \longmapsto \alpha_i$ (гл. V, § 6, n° 1). Его порядок h называется *числом Кокстера* группы W (или системы R).

Предложение 30. *Предположим, что система R неприводима. Пусть m — целое число, заключенное между* 1 *и* $h-1$ *и взаимно простое с h. Тогда* $\exp\left(\frac{2i\pi m}{h}\right)$ *является собственным значением преобразования c кратности* 1.

(В частности, m — один из *показателей* группы W; ср. гл. V, § 6, n° 2.)

Докажем сначала одну лемму.

Лемма 4. *Характеристический многочлен любого элемента $w \in W$ имеет целые рациональные коэффициенты.*

Известно (n° 6, теорема 3), что подгруппа $Q(R) \subset V$ порождена базисными элементами $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ системы R. Так как w оставляет устойчивой $Q(R)$, то его матрица относительно $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ будет иметь целые коэффициенты; стало быть, тем же свойством обладает и характеристический многочлен.

Пусть P — характеристический многочлен элемента c. Только что приведенная лемма показывает, что коэффициенты P целые. В соответствии с следствием 2 предложения 3, гл. V, § 6, n° 2 примитивный корень h-й степени из единицы $z = \exp\left(\frac{2i\pi}{h}\right)$ будет простым корнем многочлена P. Все *сопряженные* с z над $\mathbf{Q}$ будут также простыми корнями P. Но известно[1]), что все примитивные корни h-й степени из единицы сопряжены над $\mathbf{Q}$. Поэтому они все являются простыми корнями многочлена P, чем и доказано предложение.

Предложение 31. *Предположим, что система R — неприводимая и приведенная, и пусть $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$ — ее максимальный корень* (см. n° 8). *Тогда* $n_1 + \ldots + n_l = h - 1$.

---

[1]) См., например, С. Ленг, Алгебра, „Мир", 1968, гл. VIII, § 3. — *Прим. ред.*

Пусть R_+ — множество корней, положительных относительно C. Имеем (n° 10, следствие предложения 29)

$$n_1 + \ldots + n_l = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} n(\beta, \alpha) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} n(\beta, \alpha) = $$
$$= 1 + \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} \frac{(\alpha \mid \beta)}{(\alpha \mid \alpha)}.$$

Ввиду предложения 25, (iv), n° 8, $n(\alpha, \beta) = 0$ или 1 для $\alpha \in R_+$ и $\alpha \neq \beta$, поэтому $n(\alpha, \beta)^2 = n(\alpha, \beta)$, т. е. $\frac{4(\alpha \mid \beta)^2}{(\beta \mid \beta)^2} = \frac{2(\alpha \mid \beta)}{(\beta \mid \beta)}$. Отсюда

$$n_1 + \ldots + n_l + 1 = 2 + 2 \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} \frac{(\alpha \mid \beta)^2}{(\beta \mid \beta)(\alpha \mid \alpha)} =$$
$$= 2 \sum_{\alpha \in R_+} \frac{(\alpha \mid \beta)^2}{(\beta \mid \beta)(\alpha \mid \alpha)} = (\beta \mid \beta)^{-1} \sum_{\alpha \in R} \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \middle| \beta \right)^2.$$

Согласно следствию теоремы 1 из гл. V, § 6, n° 2,

$$\sum_{\alpha \in R} \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \middle| \beta \right)^2 = h(\beta \mid \beta),$$

откуда $n_1 + \ldots + n_l + 1 = h$.

Предложение 32. *Предположим, что система R неприводима и что все корни имеют одну и ту же длину. Пусть $\alpha \in R$. Тогда число элементов системы R, не ортогональных α, равно $4h - 6$.*

Пусть R' — множество корней, не пропорциональных и не ортогональных α. Согласно следствию теоремы 1 из гл. V, § 6, n° 2,

$$(\alpha \mid \alpha)^2 + (\alpha \mid -\alpha)^2 + \sum_{\beta \in R'} (\alpha \mid \beta)^2 = h(\alpha \mid \alpha)^2,$$

т. е.

$$\sum_{\beta \in R'} (\alpha \mid \beta)^2 = (h - 2)(\alpha \mid \alpha)^2.$$

Как показывает список из n° 3, $(\alpha \mid \beta) = \pm \frac{1}{2}(\alpha \mid \alpha)$ для $\beta \in R'$. Следовательно,

$$\frac{1}{4} \operatorname{Card} R' = h - 2, \quad \operatorname{Card} R' = 4h - 8,$$

и число корней, не ортогональных α, равно $\operatorname{Card} R' + 2 = 4h - 6$.

Предложение 33. *Допустим, что система R — неприводимая и приведенная. Положим $s_{\alpha_i} = s_i$ и обозначим через* Γ *подгруппу в* W, *порожденную элементом* $c = s_1 \ldots s_l$.

(i) *Пусть* $\theta_i = s_l s_{l-1} \ldots s_{i+1}(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, l)$. *Тогда* $\theta_i > 0$, $c(\theta_i) < 0$.

(ii) *Если* α — *корень* > 0, *для которого* $c(\alpha) < 0$, *то* α *совпадает с одним из* θ_i.

(iii) *Семейство* $(\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ *есть базис группы* $Q(R)$.

(iv) *Пусть* Ω_i — *орбита элемента* θ_i *относительно* Γ. *Множества* Ω_i *попарно не пересекаются и исчерпывают все орбиты* Γ *в* R; *в каждой из них* h *элементов.*

Заметим сначала, что $(s_1, \ldots, s_l)$ — *приведенное разложение* элемента c (гл. 4, § 1, n° 1) относительно множества S отражений s_i. Действительно, в противном случае нашлось бы подмножество $X = S - \{j\}$ из $l - 1$ элементов, такое, что $c \in W_X$; но тогда было бы $s_j \in W_X$, что противоречит следствию 2 предложения 7 из гл. IV, § 1, n° 8.

Применяя к $c = s_1 \ldots s_l$ следствие 2 предложения 17, n° 6, получаем утверждения (i) и (ii).

Пусть Q_i — подгруппа в $Q(R)$, порожденная корнями α_j, $j > i$. Немедленно проверяется, что Q_i инвариантна относительно s_j, $j > i$, и что $s_j(\alpha_i) \equiv \alpha_i \bmod Q_i$ для $j > i$. Следовательно,

$$\theta_i = s_l \ldots s_{i+1}(\alpha_i) \equiv \alpha_i \bmod Q_i.$$

Другими словами, существуют целые числа c_{ij}, такие, что

$$\theta_i = \alpha_i + \sum_{j > i} c_{ij}\alpha_j,$$

а это не что иное, как утверждение (iii).

Наконец, пусть α — корень. Элемент $\sum_{k=0}^{h-1} c^k(\alpha)$ инвариантен относительно c и, следовательно, равен нулю (гл. V, § 6, n° 2). Значит $c^k(\alpha)$ не могут быть все одного и того же знака, и найдется такой индекс k, что $c^k(\alpha) > 0$, а $c^{k+1}(\alpha) < 0$. Согласно (ii), $c^k(\alpha)$ совпадает с одним из θ_i. Стало быть, любая орбита подгруппы Γ в R будет одной из Ω_i. Продолжим, далее, $(x|y)$ до эрмитовой формы на $V \otimes \mathbf{C}$. В соответствии с *замечанием* из гл. V, § 6, n° 2, существует такой элемент $z \in V \otimes \mathbf{C}$, что $c(z) = \exp\left(\frac{2i\pi}{h}\right)z$, причем $(\gamma|z) \neq 0$ для всех $\gamma \in R$. Если $c^p(\alpha) = \alpha$, то

$$(z|\alpha) = (z|c^p(\alpha)) = (c^{-p}(z)|\alpha) = \exp\left(\frac{-2i\pi p}{h}\right)(z|\alpha),$$

откуда $\exp\left(\frac{-2i\pi p}{h}\right)=1$, и $p\equiv 0 \bmod h$. Это показывает, что орбита элемента α содержит h элементов. По теореме 1, (ii) гл. V, § 6, n° 2, общее число орбит Γ в R будет, таким образом, равно $\frac{hl}{h}=l$. В итоге получаем, что Ω_i попарно не пересекаются. Тем самым доказательство (iv) закончено.

12. Каноническая билинейная форма

Как мы уже знаем (n° 1, предложение 3), симметрическая билинейная форма

$$(x, y)\longmapsto B_R(x, y)=\sum_{\alpha\in R}\langle\alpha^\vee, x\rangle\langle\alpha^\vee, y\rangle$$

на V является невырожденной и инвариантной относительно $A(R)$. Поменяв ролями R и $R^\vee$, мы видим, что симметрическая билинейная форма $(x^*, y^*)\longmapsto B_{R^\vee}(x^*, y^*)=\sum\limits_{\alpha\in R}\langle\alpha, x^*\rangle\langle\alpha, y^*\rangle$ на V^* тоже является невырожденной и инвариантной относительно $A(R)$.

Обратная форма для $B_{R^\vee}$ (соотв. B_R) на V (соотв. V^*) называется *канонической билинейной формой* на V (соотв. V^*) и обозначается через Φ_R (соотв. $\Phi_{R^\vee}$). Она невырождена и инвариантна относительно $A(R)$. Пусть σ — изоморфизм V на V^*, определенный формой $B_{R^\vee}$. Для $x, y\in V$ справедливо соотношение

$$\Phi_R(x, y)=B_{R^\vee}(\sigma(x), \sigma(y))=\sum_{\alpha\in R}\langle\alpha, \sigma(x)\rangle\langle\alpha, \sigma(y)\rangle.$$

Но $\langle\alpha, \sigma(x)\rangle=B_{R^\vee}(\sigma(\alpha), \sigma(x))=\Phi_R(\alpha, x)$ Отсюда

$$\Phi_R(x, y)=\sum_{\alpha\in R}\Phi_R(\alpha, x)\,\Phi_R(\alpha, y). \tag{16}$$

Учитывая предложение 7, n° 2, мы приходим к заключению, что Φ_R — единственная ненулевая симметрическая билинейная форма, инвариантная относительно $W(R)$ и удовлетворяющая тождеству (16). Для $\beta\in R$ формула (16) дает

$$\Phi_R(\beta, \beta)=\sum_{\alpha\in R}\Phi_R(\alpha, \beta)^2=\frac{1}{4}\Phi_R(\beta, \beta)^2\sum_{\alpha\in R}n(\alpha, \beta)^2,$$

откуда

$$4\Phi_R(\beta, \beta)^{-1}=\sum_{\alpha\in R}n(\alpha, \beta)^2. \tag{17}$$

В то же время по лемме 2, n° 1, для $x, y\in V$ имеем

$$B_R(x, y)=\sum_{\alpha\in R}\Phi_R\left(\frac{2\alpha}{\Phi_R(\alpha, \alpha)}, x\right)\Phi_R\left(\frac{2\alpha}{\Phi_R(\alpha, \alpha)}, y\right)=$$

$$=4\sum_{\alpha\in R}\Phi_R(\alpha, x)\,\Phi_R(\alpha, y)\,\Phi_R(\alpha, \alpha)^{-2}.$$

Стало быть, если система R *неприводима*, то найдется такая константа $\gamma(R)>0$, что

$$\sum_{\alpha\in R}\Phi_R(\alpha, x)\Phi_R(\alpha, y)\Phi_R(\alpha, \alpha)^{-2}=\gamma(R)\Phi_R(x, y). \qquad (18)$$

По определению $\gamma(R)$ имеем $B_R(x, y)=4\gamma(R)\Phi_R(x, y)$, поэтому

$$\Phi_{R^\vee}(x^*, y^*)=(4\gamma(R))^{-1}B_{R^\vee}(x^*, y^*)$$

для $x^*, y^*\in V^*$. Этим доказано прежде всего, что $\gamma(R)=\gamma(R^\vee)$. Далее, для $\beta\in R$ получается

$$\Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee)=(4\gamma(R))^{-1}\sum_{\alpha\in R}\langle\beta^\vee, \alpha\rangle^2=\gamma(R)^{-1}\sum_{\alpha\in R}\frac{\Phi_R(\alpha, \beta)^2}{\Phi_R(\beta, \beta)^2}$$

или ввиду (16)

$$\Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee)=\gamma(R)^{-1}\Phi_R(\beta, \beta)^{-2}\Phi_R(\beta, \beta);$$

окончательно

$$\Phi_R(\beta, \beta)\Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee)=\gamma(R)^{-1}. \qquad (19)$$

Если сверх того все корни системы R одной и той же длины λ относительно Φ_R, то формулы (16) и (18) показывают, что

$$\gamma(R)=\lambda^{-4}. \qquad (20)$$

Если, далее, h — число Кокстера группы W, то, как утверждает следствие теоремы 1 из гл. V, § 6, n° 2,

$$h\Phi_R(x, x)=\sum_{\alpha\in R}\Phi_R\left(x, \frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \quad \text{для всех } x\in V.$$

Сравнивая это с формулой (16), видим, что

$$\lambda=h^{-1/2} \text{ и } \gamma(R)=h^2. \qquad (21)$$

Наконец, из формулы (19) следует, что корни системы $R^\vee$ будут также длины λ относительно $\Phi_{R^\vee}$.

§ 2. Аффинная группа Вейля

В этом параграфе (за исключением n° 5) через R обозначается приведенная система корней в вещественном векторном пространстве V. Группу Вейля системы R обозначим символом W; отождествим ее с некоторой группой автоморфизмов дуального к V пространства V^* (§ 1, n° 1) и снабдим V^* скалярным произведением, инвариантным относительно W. Пусть E — аффинное пространство, ассоциированное с V^*; обозначим через $t(v)$, $v\in V^*$, перенос пространства E на вектор v. Наконец, через P (соотв. Q) обозначим группу переносов, векторы которых принадлежат группе весов $P(R^\vee)$ (соотв. группе радикальных весов $Q(R^\vee)$) системы корней $R^\vee$, дуальной к R.

1. Аффинная группа Вейля

Для $\alpha \in R$ и $k \in \mathbf{Z}$ пусть $L_{\alpha, k}$ — гиперплоскость в E:

$$L_{\alpha, k} = \{x \in E \mid \langle \alpha, x \rangle = k\},$$

и пусть $s_{\alpha, k}$ — ортогональное отражение относительно $L_{\alpha, k}$. По определению,

$$s_{\alpha, k}(x) = x - (\langle \alpha, x \rangle - k)\alpha^{\vee} = s_{\alpha, 0}(x) + k\alpha^{\vee}$$

для всех $x \in E$. Иными словами,

$$s_{\alpha, k} = t(k\alpha^{\vee}) \circ s_{\alpha}, \qquad (1)$$

где s_{α} — ортогональное отражение относительно гиперплоскости $L_{\alpha} = L_{\alpha, 0}$, т. е. отражение, ассоциированное с корнем α.

Формула (1) показывает, что $s_{\alpha, k}$ не зависит от выбранного скалярного произведения.

Определение 1. *Назовем аффинной группой Вейля системы корней R и обозначим символом $W_a(R)$ (или просто W_a) группу аффинных преобразований пространства E, порожденную отражениями $s_{\alpha, k}$ для $\alpha \in R$ и $k \in \mathbf{Z}$.*

Предложение 1. *Группа W_a является полупрямым произведением W на Q.*

Поскольку группа W порождается отражениями s_{α}, она содержится в W_a. Далее, $t(\alpha^{\vee}) = s_{\alpha, 1} \circ s_{\alpha}$, если $\alpha \in R$, а это и доказывает, что $Q \subset W_a$.

Поскольку W оставляет устойчивой $Q(R^{\vee})$ (§ 1, n° 9), группа аффинных преобразований G, порожденная W и Q, является полупрямым произведением W на Q. По только что сказанному $G \subset W_a$ и согласно (1) $s_{\alpha, k} \in G$, каковы бы ни были $\alpha \in R$ и $k \in \mathbf{Z}$. Приходим к выводу, что $W_a = G$.

Предложение 2. *Группа W_a, снабженная дискретной топологией, действует собственно разрывно на E и переставляет между собой гиперплоскости $L_{\alpha, k}$ (для $\alpha \in R$ и $k \in \mathbf{Z}$).*

Поскольку $Q(R^{\vee})$ есть дискретная подгруппа в V^*, группа Q действует собственно разрывно на E. Стало быть, то же самое относится и к $W_a = W \cdot Q$, поскольку W конечна. Далее, при $\alpha, \beta \in R$ и $k \in \mathbf{Z}$ имеем

$$s_{\beta}(L_{\alpha, k}) = L_{\gamma, k} \quad \text{с} \quad \gamma = s_{\beta}(\alpha) \in R,$$

$$t(\beta^{\vee})(L_{\alpha, k}) = L_{\alpha, k+n(\alpha, \beta)},$$

где $n(\alpha, \beta) = \langle \beta^{\vee}, \alpha \rangle$ — целое, откуда следует второе утверждение.

Итак, к W_a как к группе, действующей на E, можно применять результаты гл. V, § 3. Чтобы избежать смешения с камерами группы Вейля W в V^*, мы будем называть *альковами* камеры, определенные системой гиперплоскостей $L_{\alpha, k}$ (для $\alpha \in R$ и $k \in \mathbf{Z}$) в E. Значит, *группа W_a действует просто транзитивным образом на множестве альковов и замыкание любого алькова является фундаментальной областью для W_a в E* (гл. V, § 3, n° 2, теорема 1; n° 3, теорема 2). Ясно, что группа Вейля отождествляется с каноническим образом $U(W_a)$ группы W_a в ортогональной группе пространства V^* (гл. V, § 3, n° 6). Получаем в итоге, что группа W_a *существенна* (гл. V, § 3, n° 7) и что W_a *неприводима* тогда и только тогда, когда таковой является система корней R (§ 1, n° 2, следствие предложения 5). Если R неприводима, то каждый альков будет открытым симплексом (гл. V, § 3, n° 9, предложение 8). В общем случае каноническое разложение аффинного пространства E в произведение (гл. V, § 3, n° 8) соответствует разложению R на неприводимые компоненты. В частности, альков будет произведением открытых симплексов.

Заметим еще, что, как показывает следствие теоремы 1 из гл. V, § 3, n° 2, $s_{\alpha, k}$ будут единственными отражениями, содержащимися в W_a.

2. Веса и специальные точки

Предложение 3. *Специальными точками* (гл. V, § 3, n° 10, определение 1) *для W_a являются веса системы $R^\vee$.*

Пусть $x_0 \in E$ и $\alpha \in R$. Гиперплоскость L, параллельная ядру $\operatorname{Ker} \alpha$ и проходящая через x_0, задается уравнением $\langle \alpha, x \rangle = \langle \alpha, x_0 \rangle$. Чтобы она совпадала с $L_{\beta, k}$, нужно, с одной стороны, чтобы α и β были пропорциональны, или ввиду приведенности R чтобы $\beta = \pm \alpha$, и, с другой стороны, чтобы $\langle \alpha, x_0 \rangle$ было целым. Тотчас получаем, что x_0 является специальной точкой для W_a тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, x_0 \rangle \in \mathbf{Z}$ при всех $\alpha \in R$, т. е. в точности тогда, когда $x_0 \in P(R^\vee)$ (§ 1, n° 9).

Следствие. (i) *Если $\bar{\omega} \in P(R^\vee)$, то существует такой альков C, что $\bar{\omega}$ будет экстремальной точкой замыкания $\overline{C}$.*

(ii) *Если C — какой-нибудь альков, то пересечение $\overline{C} \cap Q(R^\vee)$ состоит из одной точки, которая является экстремальной точкой замыкания $\overline{C}$.*

Это вытекает из предложения 3, если принять во внимание следствие предложения 11 из гл. V, § 3, n° 10, и предложение 12 оттуда же.

Предложение 4. *Пусть C' — камера система $R^\vee$.*

(i) *Существует, и притом только один, альков C, содержащийся в C' и такой, что $0 \in \overline{C}$.*

(ii) *Объединение $w(\overline{C})$ по $w \in W$ есть окрестность нуля в E.*

(iii) *Любая стенка камеры C' является стенкой алькова C.*

Это непосредственное следствие предложения 11 из гл. V, § 3, n° 10.

Предположим теперь, что система R неприводима. Пусть $(\alpha_i)_{i \in I}$ — ее базис (§ 1, n° 5, определение 2), и пусть $(\bar{\omega}_i)_{i \in I}$ — дуальный базис. Все $\bar{\omega}_i$ будут фундаментальными весами системы $R^\vee$ относительно камеры C', соответствующей базису (α_i). Пусть $\tilde{\alpha} = \sum\limits_{i \in I} n_i \alpha_i$ — максимальный корень системы R (§ 1, n° 8), и пусть J — множество тех $i \in J$, для которых $n_i = 1$.

Предложение 5. *Пусть C — альков, который содержится в C' и замыканию которого принадлежит* 0 (предложение 4).

(i) *C есть множество $x \in E$, таких, что $\langle \alpha_i, x \rangle > 0$ для всех $i \in I$, причем $\langle \tilde{\alpha}, x \rangle < 1$.*

(ii) *Множество $\overline{C} \cap P(R^\vee)$ состоит из 0 и весов $\bar{\omega}_i$ для $i \in J$.*

Пусть D — множество $x \in E$, для которых $\langle \tilde{\alpha}, x \rangle < 1$; положим $C_1 = C' \cap D$. Так как $0 \in \overline{C}$, то $C \subset D$, откуда $C \subset C_1$. Докажем теперь, что при всех $\alpha \in R$ и $k \in \mathbf{Z}$ множества C и C_1 будут лежать по одну сторону от гиперплоскости $L_{\alpha, k}$. Это покажет, что $C_1 \subset C$, и установит справедливость утверждения (i). Если $k = 0$, то камера C' целиком находится по одну сторону от $L_{\alpha, 0}$, что и дает нужное утверждение в этом случае. Если же $k \neq 0$, то можно, заменив, если нужно, α на $-\alpha$, считать, что $k > 0$. Тогда $\langle \alpha, x \rangle < k$ на C, поскольку $0 \in \overline{C}$. С другой стороны, $\tilde{\alpha} - \alpha$ положителен относительно C' (§ 1, n° 8, предложение 25). Стало быть, $\langle \alpha, y \rangle \leqslant \langle \tilde{\alpha}, y \rangle < 1 \leqslant k$ для $y \in C_1$, а это и означает, что C и C_1 находятся по одну и ту же сторону от $L_{\alpha, k}$.

Пусть теперь $\bar{\omega} \in P(R^\vee)$. Как мы знаем (§ 1, n° 10), $\bar{\omega} = \sum\limits_i p_i \bar{\omega}_i$ с $p_i \in \mathbf{Z}$. Включение $\bar{\omega} \in \overline{C'}$ имеет место тогда и только тогда, когда целые числа p_i все *положительны.* Если $\bar{\omega} \in \overline{C'}$, то $\bar{\omega} \in \overline{C}$ в том и только том случае, когда $\langle \tilde{\alpha}, \bar{\omega} \rangle = \sum\limits_i n_i p_i$ будет $\leqslant 1$, а это и дает (ii).

Следствие. *Альков C является открытым симплексом с вершинами 0 и $\bar{\omega}_i/n_i$, $i \in I$.*

Это вытекает из утверждения (i).

3. Нормализатор группы W_a

В этом n° мы предположим, что на V выбрано скалярное произведение, инвариантное не только относительно W, но и *относительно всей группы* $A(R)$. Группы $A(R)$ и $A(R^\vee)$ мы отождествим.

Пусть G — нормализатор группы W_a в группе перемещений евклидова аффинного пространства E. Если g — некоторое перемещение E и s — ортогональное отражение относительно гиперплоскости L, то перемещение gsg^{-1} будет ортогональным отражением относительно гиперплоскости $g(L)$. В итоге получаем, что G является множеством перемещений пространства E, которые переставляют между собой гиперплоскости $L_{\alpha, k}$ (для $\alpha \in R$ и $k \in \mathbf{Z}$).

Но группа автоморфизмов пространства E является полупрямым произведением ортогональной группы U пространства V^* и группы T переносов. При действии $g = u \circ t(v)$, где $u \in U$ и $v \in V^*$, гиперплоскость $L_{\alpha, k}$ переходит в гиперплоскость, определяемую уравнением

$$\langle {}^t u^{-1}(\alpha), x \rangle = k + \langle \alpha, v \rangle.$$

Следовательно, $g \in G$ тогда и только тогда, когда, во-первых, ${}^t u$ переставляет между собой корни, т. е. принадлежит $A(R)$, и, во-вторых, $\langle \alpha, v \rangle \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in R$, т. е. $v \in P(R^\vee)$. Иными словами, *группа G является полупрямым произведением $A(R)$ на P*. Поскольку $Q \subset P$ и $W \subset A(R)$, *факторгруппа G/W_a является полупрямым произведением $A(R)/W$ на $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$*; соответствующее действие $A(R)/W$ на $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ будет каноническим (§ 1, n° 9), в чем легко убедиться непосредственно.

Обозначим символом W'_a подгруппу в G, являющуюся полупрямым произведением W на P. Она будет нормальной подгруппой в G, и G/W'_a канонически изоморфна группе $A(R)/W$; кроме того, каноническое отображение $P(R^\vee)$ в W'_a/W_a дает при факторизации изоморфизм группы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ на W'_a/W_a.

Пусть теперь C — альков в E, и пусть G_C — подгруппа, состоящая из элементов $g \in G$, для которых $g(C) = C$. Так как W_a просто транзитивна на альковах, то *группа G есть полупрямое произведение подгрупп G_C и W_a*. Соответствующий изоморфизм факторгруппы G/W_a на G_C доставляет, в частности, канонический изоморфизм $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ на группу $\Gamma_C = G_C \cap W'_a$.

Предположим, что система R неприводима, и воспользуемся обозначениями предложения 5 из n° 2. Положим $R_0 = R$, а через R_i $(i \in I)$ обозначим систему корней, порожденную корнями α_j для $j \neq i$. При $i = 0$ (соотв. $i \in I$) пусть w_i — единственный элемент группы $W(R_i)$ (отождествляемой с некоторой подгруппой в W), который переводит корни системы R_i, положительные относительно базиса $(\alpha_j)_{j \neq i}$, в отрицательные корни (§ 1, n° 6, следствие 3 предложения 17).

Предложение 6. *При любом $i \in J$ элемент $\gamma_i = t(\bar\omega_i)\, w_i w_0$ принадлежит Γ_C и отображение $i \mapsto \gamma_i$ является биекцией J на $\Gamma_C - \{1\}$.*

С самого начала отметим, что корень $w_i(\tilde\alpha)$ имеет вид

$$n_i\alpha + \sum_{j \neq i} b_{ij}\alpha_j$$

и является, следовательно, *положительным*.

Докажем, что если $i \in J$, то $\gamma_i \in \Gamma_C$. В самом деле, пусть $a \in C$ и $b = \gamma_i(a)$. При $1 \leqslant j \leqslant l$ и $j \neq i$ справедливо соотношение

$$\langle b, \alpha_j\rangle = \langle \bar\omega_i + w_i w_0(a), \alpha_j\rangle = \langle w_0(a), w_i(\alpha_j)\rangle > 0, \tag{2}$$

поскольку $w_0(a) \in -C'$ и корень $w_i(\alpha_j)$ отрицательный. С другой стороны,

$$\langle b, \alpha_i\rangle = 1 + \langle w_0(a), w_i(\alpha_i)\rangle \geqslant 1 + \langle w_0(a), \tilde\alpha\rangle > 0, \tag{3}$$

поскольку $w_0(a) \in -C'$, $\tilde\alpha - w_i(\alpha_i)$ принимает отрицательные значения на $-C'$ и $\langle w_0(a), \tilde\alpha\rangle > -1$. Наконец,

$$\langle b, \tilde\alpha\rangle = n_i + \langle w_0(a), w_i(\tilde\alpha)\rangle = 1 + \langle w_0(a), w_i(\tilde\alpha)\rangle < 1, \tag{4}$$

поскольку $w_0(a) \in -C'$ и $w_i(\tilde\alpha)$ — положительный корень. Из соотношений (2) — (4) вытекает, что $b \in C$, откуда $\gamma_i \in \Gamma_C$. Ясно, что отображение $i \mapsto \gamma_i$ *инъективно*, поскольку $\gamma_i(0) = \bar\omega_i$. Наконец, пусть $\gamma \in \Gamma_C$, $\gamma \neq 1$; положим $\gamma = pw$, где $p \in P$ и $w \in W$. Так как $\Gamma_C \cap W = \{1\}$, то $p \neq 1$. Далее, $p(0) = \gamma(0) \in \bar C \cap P(R^\vee)$, и предложение 5 влечет существование такого $i \in J$, что $p(0) = \bar\omega_i$. В таком случае $\gamma_i^{-1}\gamma(0) = 0$, откуда $\gamma = \gamma_i$, поскольку $\Gamma_C \cap W = \{1\}$. Этим завершается доказательство.

Следствие. *Веса $(\bar\omega_i)_{i \in J}$ образуют систему представителей в $P(R^\vee)$ отличных от нуля элементов факторгруппы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$.*

В самом деле, если отождествить Γ_C с $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$, то элемент γ_i соответствует как раз классу $\bar\omega_i \bmod Q(R^\vee)$.

Замечания. 1) Отображение $\gamma \mapsto \gamma(0)$ является биекцией Γ_C на $\bar{C} \cap P(R^\vee)$.

2) Группа G совпадает также с нормализатором группы W_a в группе автоморфизмов пространства E, наделенного лишь аффинной структурой (упражнение 3).

4. Применение: порядок группы Вейля

Лемма 1. *Пусть X — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, G — дискретная группа, действующая непрерывно и собственно разрывно в X, μ — мера $\geqslant 0$ на X, инвариантная относительно G, G' — подгруппа в G, U и U' — два открытых подмножества в X, каждое конечной меры $\neq 0$. Предположим, что множества sU при $s \in G$ (соотв. $s'U'$ при $s' \in G'$) попарно не пересекаются и что их объединение обладает пренебрежимым дополнением. Тогда G' будет конечного индекса в G и $(G: G') = \mu(U')/\mu(U)$.*

Пусть $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство представителей правых (смежных) классов G по G'. Пусть U_1 — объединение множеств $s_\lambda U$. Тогда множества $s'U_1$ с $s' \in G'$ попарно не пересекаются и их объединением будет $M = \bigcup\limits_{s \in G} sU$. Пусть $M' = \bigcup\limits_{s' \in G'} s'U'$. Объединение U' (соотв. U_1) и надлежащего подмножества в $X - M'$ (соотв. $X - M$) будет фундаментальной и, очевидно, μ-измеримой областью для G'. Согласно следствию теоремы 4 из *Интегр.*, гл. VII, § 2, n° 10, $\mu(U') = \mu(U_1)$. Этим доказано, что индекс $\operatorname{Card} \Lambda = (G : G')$ конечен и что $\mu(U') = (\operatorname{Card} \Lambda)\, \mu(U)$.

Предложение 7. *Предположим, что система R неприводима. Пусть $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — базис системы R, f — ее индекс связности (§ 1, n° 9) и $\tilde{\alpha} = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$ — максимальный корень (относительно порядка, определенного базисом B). Тогда порядок группы W равен*

$$(l\,!)\, n_1 n_2 \ldots n_l f.$$

Пусть $(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l)$ — базис системы $P(R^\vee)$, дуальный к B. Ввиду следствия предложения 5 открытый симплекс C с вершинами $0, n_1^{-1}\bar{\omega}_1, \ldots, n_l^{-1}\bar{\omega}_l$ является альковом в E. Выберем меру Хаара μ на аддитивной группе V^*. Пусть A — множество элементов в V^* вида $\xi_1\bar{\omega}_1 + \ldots + \xi_l\bar{\omega}_l$ с $0 < \xi_1 < 1$ для $i = 1, \ldots, l$. Согласно следствию 2 предложения 15 из *Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 10,

$$\mu(A)/\mu(C) = (l\,!)\, n_1 n_2 \ldots n_l. \tag{5}$$

Пусть, с другой стороны, A' — множество элементов из V^* вида

$$\xi_1\alpha_1^\vee + \ldots + \xi_l\alpha_l^\vee$$

с $0 < \xi_i < 1$ для $i = 1, \ldots, l$. Поскольку $(\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee)$ — базис $\mathbf{Z}$-модуля $Q(R^\vee)$, можно применить лемму 1 с $X = V^*$, $G = W_a$, $G' = Q$, $U = C$ и $U' = A'$. Получим

$$\mu(A')/\mu(C) = (W_a : Q) = \operatorname{Card} W. \tag{6}$$

Наконец, можно еще раз применить лемму 1, полагая $X = V^*$, $G = P$, $G' = Q$, $U = A$ и $U' = A'$. Получим

$$\mu(A')/\mu(A) = (P : Q) = (P(R^\vee) : Q(R^\vee)) = f. \tag{7}$$

Предложение следует теперь из сравнения формул (5), (6) и (7).

5. *Системы корней и группы, порожденные отражениями*

Предложение 8. *Пусть F — вещественное гильбертово пространство конечной размерности l, $\mathfrak{H}$ — множество аффинных гиперплоскостей в F и G — группа, порожденная ортогональными отражениями s_H относительно гиперплоскостей $H \in \mathfrak{H}$. Предположим, что выполнены условия гл.* V, § 3 *(т. е. что $g(H) \in \mathfrak{H}$ для всех $H \in \mathfrak{H}$ и $g \in G$ и что G действует в F собственно разрывно). Предположим сверх того, что 0 — специальная точка для G и что группа переносов T, содержащаяся в G, имеет ранг l. Тогда существует, и притом только одна, приведенная система корней R в $V = F^*$, такая, что канонический изоморфизм F на V^* отображает G в аффинную группу Вейля W_a системы R.*

Заметим с самого начала, что условие, наложенное на T, влечет *существенность* группы G: в противном случае аффинное пространство F разлагалось бы в произведение $F_0 \times F_1$ с $\dim F_1 < l$, группа G отождествлялась бы с группой перемещений, действующей собственно разрывно в F (гл. V, § 3, n° 8, предложение 6), и T не была бы группой ранга l.

Пусть $\mathfrak{H}_0$ — множество тех $H \in \mathfrak{H}$, для которых $0 \in H$. Для $H \in \mathfrak{H}_0$ пусть $\mathfrak{H}_H$ — множество элементов в $\mathfrak{H}$, параллельных H. Поскольку 0 — специальная точка, $\mathfrak{H}$ будет объединением множеств $\mathfrak{H}_H$ с $H \in \mathfrak{H}_0$. Пусть $H \in \mathfrak{H}_0$. Так как T-группа ранга l, найдется $v \in F$, для которого перенос на вектор v принадлежит T, а $v \notin H$. Гиперплоскости $H + kv$ для $k \in \mathbf{Z}$ попарно различны и принадлежат множеству $\mathfrak{H}_H$. Пусть теперь a — унитарный вектор из F, ортогональный к H; тогда $H + (v \mid a)\, a \in \mathfrak{H}_H$, и, поскольку $\mathfrak{H}$ локально конечно (гл. V, § 3, n° 1, лемма 1), существует наименьшее вещественное число $\lambda > 0$, для которого $H + \lambda a \in \mathfrak{H}_H$. Мы докажем, что $\mathfrak{H}_H$ есть множество гиперплоскостей $H + k\lambda a$, где $k \in \mathbf{Z}$. В самом деле,

$$H' = H + \lambda a \in \mathfrak{H}_H,$$

и элемент $s_{H'} \circ s_H$ группы G будет переносом на вектор $2\lambda a$ (гл. V, § 2, n° 4, предложение 5). Следовательно, $H + 2n\lambda a = (s_{H'}s_H)^n (H)$ и $H + (2n + 1)\lambda a = (s_{H'}s_H)^n (H')$ принадлежат $\mathfrak{H}_H$. С другой стороны, если $L \in \mathfrak{H}_H$, то существует $\xi \in \mathbf{R}$, такое, что $L = H + \xi\lambda a$, и найдется целое число n, для которого

$$\text{либо} \quad 2n < \xi \leqslant 2n + 1, \quad \text{либо} \quad 2n - 1 < \xi \leqslant 2n.$$

В первом случае $(s_H s_{H'})^n (L) = H + (\xi - 2n)\lambda a$, где

$$0 < (\xi - 2n)\lambda \leqslant \lambda,$$

и из определения числа λ вытекает, что $\xi = 2n + 1$. Во втором случае

$$s_H (s_H s_{H'})^n (L) = H + (2n - \xi)\lambda a \quad \text{с} \quad 0 \leqslant (2n - \xi)\lambda < \lambda,$$

и из определения λ следует, что $\xi = 2n$.

В итоге получаем, что если α_H — линейная форма на F, для которой

$$H' = \{x \in F \mid \langle \alpha_H, x \rangle = 1\},$$

то *множество* $\mathfrak{H}_H$ *есть множество гиперплоскостей* $L_{\alpha_H, k} = \{x \in F \mid \langle \alpha_H, x \rangle = k\}$ *с* $k \in \mathbf{Z}$, причем α_H и $-\alpha_H$ будут единственными линейными формами, обладающими этим свойством.

Таким образом, предложение будет доказано, коль скоро мы установим, что *множество R элементов из F вида $\pm \alpha_H$ является приведенной системой корней в V.*

а) Докажем, что выполнено условие ($СК_I$). Ясно, что R конечно (поскольку $\mathfrak{H}_0$ конечно) и не содержит 0. Далее, R порождает V. В самом деле, если вектор $x \in F$ ортогонален к R, то $x \in H$ для всех $H \in \mathfrak{H}_0$ и перенос на вектор x коммутирует с произвольным элементом группы G. Поскольку G существенна, это влечет $x = 0$.

б) Докажем ($СК_{II}$). Как и ранее, для $v \in V$ и $r \in \mathbf{R}$ положим $L_{v, r} = \{x \in F \mid \langle v, x \rangle = r\}$; в случае $\alpha \in R$ положим $H_\alpha = L_{\alpha, 0}$ и обозначим через s_α отображение, сопряженное к s_{H_α}. Существует однозначно определенный элемент $\alpha^\vee \in F$, ортогональный к H_α и такой, что $\langle\alpha^\vee, \alpha\rangle = 2$. Тогда $s_{H_\alpha} = s_{\alpha^\vee, \alpha}$ и $s_\alpha = s_{\alpha, \alpha^\vee}$. Для $\beta \in R$ имеем

$$L_{s_\alpha(\beta), 1} = s_{H_\alpha}(L_{\beta, 1}) \in \mathfrak{H},$$

и найдутся $\gamma \in R$ и $n \in \mathbf{N}^*$, такие, что $L_{s_\alpha(\beta), 1} = L_{\gamma, n}$. Значит,

$$s_{H_\alpha}(L_{\gamma, 1}) = L_{\beta, 1/n}$$

и, следовательно, $1/n \in \mathbf{Z}$. Поэтому $n = 1$ и $s_\alpha(\beta) = \gamma \in R$. Это доказывает (СК$_{\text{II}}$).

в) Докажем (СК$_{\text{III}}$). Для $\alpha \in R$ положим $H'_\alpha = L_{\alpha, 1}$, так что

$$H'_\alpha = H_\alpha + (^1/_2)\alpha^\vee.$$

Перенос $t(\alpha^\vee)$ на вектор $\alpha^\vee$, будучи произведением $s_{H'_\alpha} s_{H_\alpha}$ (гл. V, § 2, n° 4, предложение 5), принадлежит подгруппе T, и $\alpha^\vee = t(\alpha^\vee)(0)$ является *специальной точкой* для G. Итак, для любого $\beta \in R$ существует проходящая через $\alpha^\vee$ гиперплоскость $L_{\beta, k}$ с целым k, а это и доказывает, что $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \in \mathbf{Z}$, т. е. условие (СК$_{\text{III}}$) выполняется.

г) Наконец, очевидно, что R — *приведенная* система, поскольку из $H, H' \in \mathfrak{H}_0$, $H \neq H'$, вытекает непропорциональность линейных форм α_H и $\alpha_{H'}$.

Замечание 1). Условие, что подгруппа T — ранга l, выполняется, в частности, когда G *неприводима и бесконечна*. Действительно, векторное пространство, порожденное векторами переносов из T, инвариантно относительно канонического образа группы G в линейной группе пространства F. Оно отлично от $\{0\}$, если G бесконечна, и, стало быть, совпадает со всем F, если G бесконечна и неприводима.

Конечная группа, порожденная отражениями, не всегда будет группой Вейля какой-нибудь системы корней. Более точно:

Предложение 9. *Пусть V — вещественное векторное пространство конечной размерности l, и пусть G — конечная подгруппа в* $\mathbf{GL}(V)$, *порожденная отражениями и существенная. Снабдим V скалярным произведением, инвариантным относительно G. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *в V существует дискретная подгруппа ранга l, устойчивая относительно G;*

(ii) *на V существует* $\mathbf{Q}$-*структура* (Alg., chap. II, 3$^{\text{e}}$ éd., § 8, n° 1, определение 1), *инвариантная относительно G;*

(iii) *в V существует система корней, группой Вейля которой является G;*

(iv) *существует дискретная группа G' перемещений пространства V, действующая собственно разрывно в V, порожденная отражениями и такая, что G' будет полупрямым произведением G и некоторой группы переносов ранга l.*

(ii)$\Rightarrow$(i). Пусть $V' \subset V$ — некоторая Q-структура на V, инвариантная относительно G, A — конечное подмножество в V', порождающее векторное $\mathbf{Q}$-пространство V'. Заменяя A на $\bigcup_{s \in G} s(A)$, можно предполагать A устойчивым относительно G. Пусть B — подгруппа в V, порожденная A. Очевидно, B устойчива относительно G, конечного типа и без кручения; она допускает, следовательно, базис над $\mathbf{Z}$, который будет одновременно базисом V' над $\mathbf{Q}$ и, стало быть, базисом V над $\mathbf{R}$.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Это вытекает, скажем, из предложения 1, § 1, n° 1.

(iv)$\Rightarrow$(iii). Пусть G' — группа, удовлетворяющая условию (iv). Подгруппа переносов в G' имеет ранг l, а 0 является специальной точкой для G', как это следует из предложения 9 гл. V, § 3, n° 10. Предложение 8 утверждает, что существует приведенная система корней R_0 в V^*, такая, что G' отождествляется с $W_a(R_0)$; группа G будет тогда группой Вейля системы корней, дуальной к R_0.

(i)$\Rightarrow$(iv). Предположим, что G оставляет устойчивой дискретную подгруппу $M \subset V$ ранга l. Для любого отражения $s \in G$ включение $s(x) - x \in M$ справедливо, каково бы ни было $x \in M$, поэтому прямая D_s, ортогональная к H_s, пересекает M. Пусть α_s, $-\alpha_s$ — образующие циклической группы $D_s \cap M$. Множество A всех α_s и $-\alpha_s$ устойчиво относительно G и, следовательно, порождает подгруппу $M' \subset M$, устойчивую относительно G; дискретная группа M' будет ранга l, потому что G существенна. Пусть G' — группа аффинных преобразований V, являющаяся полупрямым произведением G и группы переносов на векторы, принадлежащие M'. Обозначим через G'_1 подгруппу в G', порожденную отражениями из G'. Доказательство будет завершено, коль скоро мы установим, что $G'_1 = G'$. Прежде всего $G'_1 \supset G$, поскольку группа G порождена отражениями. Далее, для любого отражения $s \subset G$ пусть t_s — перенос на вектор α_s. Преобразование $s \circ t_s$ будет отражением и $s \circ t_s \in G'$; стало быть, t_s есть произведение двух отражений из G'. Будучи справедливым для любого отражения $s \subset G$, это замечание показывает, что все переносы на векторы, принадлежащие M', содержатся в G'_1.

Определение 2. *Группа G, удовлетворяющая эквивалентным условиям предложения* 9, *называется кристаллографической группой.*

Замечание 2). Пусть G — конечная группа, порожденная отражениями и существенная. Для того чтобы G была кристаллографической группой, необходимо и достаточно, чтобы *любой элемент ее матрицы Кокстера был равен одному из чисел* 1, 2, 3, 4, 6. В самом деле, в соответствии с *замечанием* 3) из § 1, n°5, это условие необходимо. Достаточность условия вытекает из классификации конечных групп Кокстера, которая будет приведена в § 4 (непосредственное доказательство см. в гл. V, § 4, упражнение 6).

§ 3. Экспоненциальные инварианты

В этом параграфе буквой A обозначается коммутативное кольцо, не сводящееся к 0 и обладающее единичным элементом.

1. Алгебра свободной коммутативной группы

Пусть P — свободный $\mathbf{Z}$-модуль конечного ранга l. Обозначим через $A[P]$ (групповую) алгебру над A аддитивной группы P (*Alg.*, chap. III, 3[e] éd., § 2, n°6). Для любого $p \in P$ обозначим символом e^p соответствующий элемент алгебры $A[P]$. Тогда $(e^p)_{p \in P}$ будет *базисом* A-модуля $A[P]$ и при любых $p,\ p' \in P$ будут выполняться соотношения

$$e^p e^{p'} = e^{p+p'}, \qquad (e^p)^{-1} = e^{-p}, \qquad e^0 = 1.$$

Лемма 1. *Допустим, что кольцо A факториально* (*Ком. алг.*, гл. VII, § 3, n° 1, определение 1).

(i) *Кольцо $A[P]$ факториально.*

(ii) *Если u, v — непропорциональные элементы из P, то элементы $1 - e^u$, $1 - e^v$ алгебры $A[P]$ взаимно просты.*

Пусть $(p_1, p_2, \ldots, p_l)$ — базис группы P и $X_1, X_2, \ldots, X_l$ — переменные. Тогда A-линейное отображение кольца $A[X_1, \ldots$ $\ldots, X_l, X_1^{-1}, \ldots, X_l^{-1}]$ на $A[P]$, переводящее $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_l^{n_l}$ (где $n_1, n_2, \ldots, n_l \in \mathbf{Z}$) в $e^{n_1 p_1 + \ldots + n_l p_l}$, является изоморфизмом колец. Но $A[X_1, \ldots, X_l]$ — факториальное кольцо (*Комм. алг.*, гл. VII, § 3, n° 5), а так как $A\left[X_1, \ldots, X_l, X_1^{-1}, \ldots, X_l^{-1}\right]$ — кольцо отношений (дробей) кольца $A[X_1, \ldots, X_l]$, то и оно факториально.

Пусть P' (соотв. P'') — множество элементов из P, кратные которых принадлежат $\mathbf{Z}u + \mathbf{Z}v$ (соотв. $\mathbf{Z}u$). Тогда P/P'

и P'/P'' будут группами без кручения, так что существуют некоторое дополнение к P'' в P' и некоторое дополнение к P' в P. Существуют, следовательно, базис $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ $\mathbf{Z}$-модуля P и целые рациональные числа j, m, n, для которых $u = jz_1$, $v = mz_1 + nz_2$, $j > 0$, $n > 0$. Положив $X_i = e^{z_i}$ для $1 \leqslant i \leqslant l$, будем иметь $1 - e^u = 1 - X_1^j$, $1 - e^v = 1 - X_1^m X_2^n$. Пусть K — алгебраическое замыкание поля частных кольца A, так что $A[P]$ отождествляется с некоторым подкольцом кольца $B = K[X_1, \ldots, X_l, X_1^{-1}, \ldots, X_l^{-1}]$. Для любого корня j-й степени из единицы z элемент $1 - zX_1$ экстремален в $K[X_1, \ldots, X_l]$; кроме того, идеал, порожденный $1 - zX_1$, не содержит ни одного одночлена от переменных X_i. Мы делаем заключение, что идеал $(1 - zX_1)B$ кольца B есть простой идеал высоты 1 (*Комм. алг.*, гл. VII, § 1, n°6), значит, элемент $1 - zX_1$ экстремален в B. Поэтому экстремальные множители в B элемента $1 - X_1^j$ имеют вид $1 - zX_1$. Но ни один из этих множителей не делит $1 - X_1^m X_2^n$ в B (ибо гомоморфизм f: $B \to B$, для которого $f(X_1) = z^{-1}$, $f(X_i) = X_i$ при $i \geqslant 2$, удовлетворяет соотношениям

$$f(1 - zX_1) = 0 \quad \text{и} \quad f(1 - X_1^m X_2^n) = 1 - z^{-m} X_2^n \neq 0).$$

Итак, $1 - X_1^j$ и $1 - X_1^m X_2^n$ взаимно просты в B. Стало быть, общий делитель в $A[P]$ элементов $1 - X_1^j$ и $1 - X_1^m X_2^n$ обратим в B, т. е. с точностью до умножения на элемент вида $X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_l^{k_l}$ равен некоторому элементу $a \in A$; вдобавок a — делитель 1 в A и, значит, обратим в A. В конечном счете $1 - X_1^j$ и $1 - X_1^m X_2^n$ оказываются взаимно простыми в $A[P]$.

2. *Случай группы весов; максимальные члены*

Сохраняя обозначения предыдущего пункта, мы рассмотрим *приведенную* систему корней R в вещественном векторном пространстве V. В этом параграфе в качестве P будет взята группа *весов* системы R (§ 1, n° 9). Группа $W = W(R)$ действует на P, а поэтому также и на алгебре $A[P]$; именно, $w(e^p) = e^{w(p)}$ для $w \in W$ и $p \in P$.

Пусть C — какая-то камера системы R (§ 1, n° 5) и $B = (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — соответствующий базис. Введем на V (а следовательно, и на P) структуру порядка, определяемую камерой C. Соотношение $p \geqslant p'$ для элементов p, $p' \in P$ справедливо тогда и только тогда, когда $p - p'$ есть линейная комбинация с положительными коэффициентами корней α_i.

Определение 1. *Пусть* $x = \sum_{p \in P} x_p e^p$ — *элемент алгебры* $A[P]$. *Множество* S *тех* $p \in P$, *для которых* $x_p \neq 0$, *называется* носителем *элемента* x, *а множество* X *максимальных элементов из* S — *его* максимальным носителем. *Говорят еще, что* $x_p e^p$ *для* $p \in X$ *есть* максимальный член *элемента* x.

Лемма 2. *Пусть* $x \in A[P]$, *и пусть* $(x_p e^p)_{p \in X}$ — *семейство максимальных членов элемента* x. *При данном* $q \in P$ *пусть* y — *элемент из* $A[P]$, *для которого* e^q — *единственный максимальный член. Тогда семейством максимальных членов произведения* xy *будет* $(x_p e^{p+q})_{p \in X}$.

Положим $x = \sum_p x_p e^p$, $y = \sum_r y_r e^r$ и $xy = \sum_t z_t e^t$. По условию $r \leqslant q$ для всех $r \in P$, таких, что $y_r \neq 0$, и $z_t = \sum_{p+r=t} x_p y_r$.

Если $t = p + q = p' + r$ с $p \in X$ и $x_{p'} y_r \neq 0$, то $r \leqslant q$, откуда $p' \geqslant p$ и, следовательно, $p' = p$. Поэтому $z_{p+q} = x_p y_q = x_p \neq 0$. Это показывает, что $X + q$ содержится в носителе произведения xy.

С другой стороны, если $t = p' + r$ с $x_{p'} y_r \neq 0$, то найдется элемент $p \in X$, такой, что $p' \leqslant p$, и $t \leqslant p + q$. Значит, максимальный носитель произведения xy содержится в $X + q$. Так как два элемента из $X + q$ не сравнимы, то получается, что $X + q$ есть в точности максимальный носитель произведения xy. Но, как мы уже видели выше, $z_{p+q} = x_p$ для $p \in X$, чем и завершается доказательство леммы.

Замечание. Так как максимальный носитель элемента $x \neq 0$ не пуст, то лемма 2 показывает, что $x \neq 0$ влечет $xy \neq 0$ всякий раз, когда y обладает единственным максимальным членом вида e^q.

3. *Антиинвариантные элементы*

Сохраняя обозначения предыдущего пункта, будем обозначать через $\varepsilon(w)$ определитель элемента $w \in W$. Имеем

$$\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)},$$

где длина $l(w)$ берется относительно семейства отражений s_{α_i}.

Определение 2. *Элемент* $x \in A[P]$ *называется антиинвариантным относительно* W, *если*

$$w(x) = \varepsilon(w) \cdot x$$

для всех $w \in W$.

Антиинвариантные элементы алгебры $A[P]$ образуют A-подмодуль в $A[P]$. Для любого $x \in A[P]$ положим

$$J(x) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \cdot w(x). \tag{1}$$

Каковы бы ни были $x \in A[P]$ и $w \in W$, имеем

$$w(J(x)) = \sum_{v \in W} \varepsilon(v) \cdot wv(x) = \varepsilon(w) \sum_{v \in W} \varepsilon(v) \cdot v(x) = \varepsilon(w) \cdot J(x),$$

так что $J(x)$ — антиинвариантный элемент. С другой стороны, пусть $q = \mathrm{Card}(W)$. Для любого антиинвариантного элемента $x \in A[P]$ справедливо соотношение $J(x) = q \cdot x$. Отсюда следует, что при q, обратимом в A, отображение $q^{-1}J$ является *проектированием* $A[P]$ на подмодуль антиинвариантных элементов.

Пусть $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l$ — фундаментальные веса, соответствующие камере C. Элементами из $P \cap \bar{C}$ (соотв. $P \cap C$) будут веса вида $n_1\bar{\omega}_1 + \ldots + n_l\bar{\omega}_l$, где $n_i \geqslant 0$ (соотв. $n_i > 0$) для $1 \leqslant i \leqslant l$ (§ 1, n° 10). Далее,

$$\rho = \bar{\omega}_1 + \ldots + \bar{\omega}_l$$

есть полусумма положительных корней (*там же*), и элементами пересечения $P \cap C$ будут также веса вида $\rho + p$ с $p \in P \cap \bar{C}$. Наконец, если $p \in P \cap C$, то $w(p) < p$ для всех $w \neq 1$ (§ 1, n° 6, следствие предложения 18) и, следовательно, e^p — единственный максимальный член элемента $J(e^p)$.

Предложение 1. *Если 2 не является делителем нуля в A, то элементы $J(e^p)$ для $p \in P \cap C$ образуют базис модуля антиинвариантных элементов алгебры $A[P]$.*

При $w \in W$ и $p \in P \cap C$ веса $w(p)$ попарно различны. Отсюда следует, что элементы $J(e^p)$ для $p \in P \cap C$ линейно независимы.

Пусть теперь $x = \sum_p x_p e^p$ — антиинвариантный элемент алгебры $A[P]$. Если вес p_0 принадлежит какой-нибудь стенке, то он инвариантен относительно некоторого отражения $s \in W$ и

$$x = \sum_p x_p e^p = -s(x) = -\sum_p x_p e^{s(p)}.$$

Получаем $2x_{p_0} = 0$, откуда $x_{p_0} = 0$. Любой элемент, не принадлежащий ни одной стенке, записывается однозначным образом в виде $w(p)$ с $w \in W$ и $p \in P \cap C$. Следовательно,

$$x = \sum_{p \in P \cap C} \sum_{w \in W} x_{w(p)} e^{w(p)}. \tag{2}$$

Так как $w(x) = \sum_p x_p e^{w(p)} = \varepsilon(w) \sum_p x_p e^p$, то $x_{w(p)} = \varepsilon(w) x_p$, и из (2) видно, что

$$x = \sum_{p \in P \cap C} x_p J(e^p);$$

тем самым доказательство завершено.

Рассмотрим теперь элемент d алгебры $A\left[\frac{1}{2}P\right]$, определенный соотношением

$$\begin{aligned} d &= \prod_{\alpha \in R,\ \alpha > 0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \\ &= e^{\rho} \cdot \prod_{\alpha \in R,\ \alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) = \\ &= e^{-\rho} \cdot \prod_{\alpha \in R,\ \alpha > 0} (e^{\alpha} - 1). \end{aligned} \tag{3}$$

Так как $\rho \in P$, то $d \in A[P]$.

Предложение 2. (i) *Элемент d, определенный соотношением* (3), *есть антиинвариантный элемент алгебры $A[P]$; его единственным максимальным членом* (n° 2, определение 1) *является e^{ρ}, и $d = J(e^{\rho})$.*

(ii) *При любом $p \in P$ элемент $J(e^p)$ однозначно делится на d и дробь $J(e^p)/d$ является элементом алгебры $A[P]$, инвариантным относительно W.*

(iii) *Если 2 не является делителем нуля в A, то умножение на d будет биективным отображением множества элементов из $A[P]$, инвариантных относительно W, на множество антиинвариантных элементов алгебры $A[P]$.*

Известно, что при $1 \leqslant i \leqslant l$ отражение $s_i = s_{\alpha_i}$ оставляет устойчивым множество положительных корней, отличных от α_i, и что $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ (§ 1, n° 6, следствие 1 предложения 17). Поэтому

$$\begin{aligned} s_i(d) &= \left(e^{-\alpha_i/2} - e^{\alpha_i/2}\right) \cdot \sum_{\alpha \in R,\ \alpha > 0,\ \alpha \neq \alpha_i} \left(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right) = \\ &= -d = \varepsilon(s_i) \cdot d. \end{aligned}$$

Так как s_i порождают W, то этим доказано первое утверждение в (i). Второе утверждение в (i) немедленно вытекает из (3) и леммы 2 с учетом того факта, что 1 — единственный максимальный член элемента $1 - e^{-\alpha}$ при $\alpha \in R$, $\alpha > 0$.

Предположим на время, что $A = \mathbf{Z}$. Ввиду предложения 1 имеем

$$d = \sum_{p \in P \cap C} c_p J(e^p) \text{ с } c_p \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$d = e^{\rho} + \sum_{q<\rho} c'_q e^q. \tag{5}$$

Если $p \in P \cap C$ с $p \neq \rho$, то $p > \rho$, и коэффициент при e^p в d будет равен нулю, как это явствует из (5). Поэтому $c_p = 0$. Далее, сравнение коэффициентов при e^{ρ} в (4) и (5) показывает, что $c_{\rho} = 1$ и, следовательно, $d = J(e^{\rho})$.

По-прежнему мы предполагаем, что $A = \mathbf{Z}$. Пусть $p \in P$, $\alpha \in R$ и M—система представителей правых классов группы W по подгруппе $\{1, s_{\alpha}\}$. Имеем

$$J(e^p) = \sum_{w \in M} \varepsilon(w) e^{w(p)} + \sum_{w \in M} \varepsilon(s_{\alpha} w) e^{s_{\alpha} w(p)}.$$

Но $s_{\alpha} w(p) = w(p) - \langle \alpha^{\vee}, w(p) \rangle \alpha = w(p) + n_w \alpha$, где $n_w \in \mathbf{Z}$. Значит,

$$J(e^p) = \sum_{w \in M} \varepsilon(w) e^{w(p)} (1 - e^{n_w \alpha}).$$

Ясно, что $1 - e^{n_w \alpha}$ при $n_w \geqslant 0$ делится на $1 - e^{\alpha}$; то же самое верно и при $n_w < 0$, поскольку $1 - e^{n_w \alpha} = -e^{n_w \alpha}(1 - e^{-n_w \alpha})$. Следовательно, $J(e^p)$ делится в $\mathbf{Z}[P]$ на $1 - e^{\alpha}$.

По лемме 1 кольцо $\mathbf{Z}[P]$ факториально, а элементы $1 - e^{\alpha}$ при $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, попарно взаимно просты. Отсюда следует, что $J(e^p)$ делится в $\mathbf{Z}[P]$ на произведение $\prod_{\alpha > 0} (1 - e^{\alpha})$ и, стало быть, на $d = e^{-\rho} \prod_{\alpha > 0} (e^{\alpha} - 1)$.

Обратимся теперь к общему случаю. Расширяя кольцо скаляров с $\mathbf{Z}$ до A, мы получаем из предыдущего, что $d = J(e^{\rho})$ и что всякий элемент $J(e^p)$ делится на d. Поскольку d допускает e^{ρ} в качестве единственного максимального члена, *замечание* из n° 2 показывает, что существует лишь один элемент $y \in A[P]$, для которого $J(e^p) = dy$. Отсюда тотчас получается, что y инвариантен относительно W, поскольку d и $J(e^p)$ антиинвариантны. Этим доказаны (i) и (ii).

Наконец, если 2 не является делителем нуля в A, то *замечание* из n° 2 и предложение 1 влекут (iii).

Замечания. 1) Если 2 не является делителем нуля в A, то, как легко проверить, d — единственный антиинвариантный элемент кольца $A[P]$, допускающий e^{ρ} в качестве максимального члена.

2) Лемма 2, n° 2, показывает, что единственным максимальным членом дроби $J(e^p)/d$ (для $p \in P \cap C$) будет $e^{p-\rho}$.

4. Инвариантные элементы

Пусть $A[P]^W$ — подалгебра в $A[P]$, состоящая из элементов, инвариантных относительно W. Обозначим через $W \cdot p$ орбиту точки $p \in P$ относительно W, а через $S(e^p) = \sum_{q \in W \cdot p} e^q$ сумму различных образов элемента e^p при действии W; это будет инвариантный элемент. Если $p \in P \cap \overline{C}$, то $w(p) \leqslant p$ для всех $w \in W$ (§ 1, n° 6, предложение 18) и e^p — единственный максимальный член суммы $S(e^p)$.

Пусть $x = \sum_p x_p e^p \in A[P]^W$; очевидно, $x_{w(p)} = x_p$ при всех $p \in P$ и всех $w \in W$. С другой стороны, любая орбита группы W в P пересекает $P \cap \overline{C}$ в одной и только одной точке (§ 1, n° 5, теорема 2). Следовательно,

$$x = \sum_{p \in P \cap \overline{C}} x_p S(e^p). \tag{6}$$

Получается

Лемма 3. *A-модуль $A[P]^W$ допускает в качестве базиса семейство сумм $S(e^p)$ для $p \in P \cap \overline{C}$.*

Более общо, справедливо

Предложение 3. *Для любого $p \in P \cap \overline{C}$ обозначим через x_p элемент из $A[P]^W$, обладающий единственным максимальным членом e^p. Семейство $(x_p)_{p \in P \cap \overline{C}}$ будет базисом A-модуля $A[P]^W$.*

Докажем сначала одну лемму.

Лемма 4. *Пусть I — упорядоченное множество, удовлетворяющее следующему условию:*

(МИН) *Всякое непустое подмножество в I содержит минимальный элемент.*

Пусть E — A-модуль, $(e_i)_{i \in I}$ — его некоторый базис и $(x_i)_{i \in I}$ — такое семейство элементов из E, что

$$x_i = e_i + \sum_{j < i} a_{ij} e_j$$

для всех $i \in I$ (с $a_{ij} \in A$ и с конечным носителем семейства (a_{ij}) при всех i). Тогда $(x_i)_{i \in I}$ будет базисом A-модуля E.

Для любого подмножества $J \subset I$ пусть E_J будет подмодулем в E с базисом $(e_i)_{i \in J}$. Пусть, далее, $\mathfrak{S}$ — множество подмножеств $J \subset I$, обладающих двумя следующими свойствами:

(а) если $i' \leqslant i$ и $i \in J$, то $i' \in J$;
(б) $(x_i)_{i \in J}$ — базис подмодуля E_J.

Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{S}$ упорядочено по включению, индуктивно и непусто. Следовательно, оно обладает максимальным элементом J. В случае $J \neq I$ возьмем за i_0 минимальный элемент в $I - J$ и положим $J' = J \cup \{i_0\}$. Всякий элемент $i \in I$, такой, что $i < i_0$, принадлежит тогда J; отсюда заключаем, что J' удовлетворяет условию (а). Далее, J' удовлетворяет условию (б), ибо

$$e_{i_0} = x_{i_0} - \sum_{j < i_0} a_{i_0 j} e_j.$$

Следовательно, $J' \in \mathfrak{S}$, и мы получили противоречие. Значит, $J = I$, а это и доказывает лемму.

Докажем теперь предложение 3. Применим лемму 4 к множеству $I = P \cap \bar{C}$. Пусть $q \in I$, и пусть I_q — множество $p \in I$, таких, что $p \leqslant q$. Если $p \in I_q$, то соотношения

$$q - p \geqslant 0, \quad p \in \bar{C}, \quad q \in \bar{C}$$

влекут

$$(q - p \mid p) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad (q - p \mid q) \geqslant 0,$$

откуда

$$(p \mid p) \leqslant (p \mid q) \leqslant (q \mid q).$$

Следовательно, множество I_q *ограничено*. Поскольку I дискретно, это значит, что I_q *конечно*, и ясно, что I удовлетворяет условию (МИН). С другой стороны, при всех $p \in I$ справедливо соотношение

$$x_p = e^p + \sum_{q < p} c_{pq} e^q,$$

откуда с учетом (6) имеем также

$$x_p = S(e^p) + \sum_{q < p,\, q \in I} c_{pq} S(e^q).$$

Предложение вытекает теперь из лемм 3 и 4.

Теорема 1. *Пусть $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l$ — фундаментальные веса, соответствующие камере C, и при $1 \leqslant i \leqslant l$ пусть x_i — элемент из $A[P]^W$, допускающий $e^{\bar{\omega}_i}$ в качестве единственного максимального члена. Пусть*

$$\varphi\colon A[X_1, \ldots, X_l] \to A[P]^W$$

— гомоморфизм алгебры многочленов $A[X_1, \ldots, X_l]$ в $A[P]^W$, переводящий X_i в x_i. Отображение φ является изоморфизмом.

Из леммы 2 следует, что образом одночлена $X_1^{n_1} \ldots X_l^{n_l}$ при отображении φ будет элемент, допускающий в качестве единственного максимального члена $e^{n_1\bar{\omega}_1+\cdots+n_l\bar{\omega}_l}$. Поскольку произвольный элемент из $P \cap \overline{C}$ однозначно записывается в виде $n_1\bar{\omega}_1 + \ldots + n_l\bar{\omega}_l$, предложение 3 показывает, что образы одночленов $X_1^{n_1} \ldots X_l^{n_l}$ при отображении φ образуют базис A-модуля $A[P]^W$, откуда и вытекает теорема.

Примеры. 1) Можно взять $x_i = S(e^{\bar{\omega}_i})$.

2) Ввиду замечания 2 в n° 3 можно взять $x_i = J(e^{\rho+\bar{\omega}_i})/d$ (в обозначениях n° 3).

§ 4. Классификация систем корней

1. Конечные группы Коксера

В этом параграфе мы собираемся описать с точностью до изоморфизма все системы корней и, следовательно, все кристаллографические группы (§ 2, n° 5). Более общим образом мы начнем сейчас с описания всех конечных групп, порожденных отражениями в вещественных векторных пространствах конечной размерности; оно сводится (гл. V, § 4, n° 8) к описанию всех конечных групп Коксера или же (*там же*, теорема 2) всех матриц Коксера конечного порядка, с которыми ассоциирована невырожденная положительная билинейная форма.

Пусть $M = (m_{ij})_{i,\, j \in I}$ — матрица Коксера конечного порядка l. Положим

$$q_{ij} = -\cos(\pi/m_{ij}).$$

Напомним, что $q_{ii} = 1$ и что $q_{ij} = q_{ji}$ равно нулю или $\leqslant -1/2$ при $i \neq j$. Положим $E = \mathbf{R}^I$ и выберем канонический базис $(e_i)_{i \in I}$ в E. Обозначим через $(x \mid y)$ билинейную форму на E, ассоциированную с M (гл. V, § 4, n° 1), а через q квадратичную форму $x \longmapsto (x \mid x)$ на E. Для $x = \sum\limits_{i \in I} \xi_i e_i \in E$ имеем

$$\| x \|^2 = q(x) = \sum_{i,\, j \in I} q_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Символом (X, f) обозначим *граф Коксера* матрицы M (гл. IV, § 1, n° 9). Если a — ребро графа X, то будем говорить, что $f(a)$ — *порядок* ребра a.

На всем протяжении этого пункта мы будем предполагать, что группа Коксера $W(M)$, определенная матрицей M

(гл. V, § 4, n° 3), *конечна*, так что форма q невырождена и положительна, а X есть *лес* (гл. V, § 4, n° 8, предложение 8). Предположим сверх того, что граф X — *связный* (другими словами, что группа Кокстера $W(M)$ *неприводима*), так что X есть *дерево*.

Выражая тот факт, что форма q невырождена и положительна, мы получим условия на m_{ij}, которые позволяют составить список возможностей для соответствующих графов Кокстера; затем остается лишь убедиться в том, что эти возможности действительно реализуются, т. е. что соответствующие группы $W(M)$ будут конечны.

Лемма 1. *При всех i справедливо неравенство* $\sum_{j \neq i} q_{ij}^2 < 1$.

Пусть J — множество тех $j \in I$, отличных от i, для которых $q_{ij} \neq 0$, т. е. для которых $\{i, j\}$ будет ребром графа X. Если $j, j' \in J$ и $j \neq j'$, то $\{j, j'\}$ не будет ребром (в противном случае i, j, j' составляли бы цикл), поэтому $(e_j \mid e_{j'}) = 0$. Пусть $F = \sum_{j \in J} \mathbf{R} e_j$. Тогда $(e_j)_{j \in J}$ будет ортонормальным базисом подпространства F. Расстояние d от e_i до F выражается формулой $d^2 = 1 - \sum_{j \in J} (e_i \mid e_j)^2 = 1 - \sum_{j \in J} q_{ij}^2 = 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}^2$, из которой и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Вершина графа X не может принадлежать более чем трем ребрам.*

В самом деле, если вершина i соединена с h другими вершинами, то соотношения $q_{ij}^2 \geqslant \frac{1}{4}$ для этих других вершин влекут по лемме 1 неравенство $\frac{h}{4} < 1$, поэтому $h \leqslant 3$.

Лемма 3. *Если i принадлежит трем ребрам, то это будут ребра порядка* 3.

В противном случае, учитывая соотношение $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, мы имели бы

$$\sum_{j \neq i} q_{ij}^2 \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1,$$

что невозможно (лемма 1).

Лемма 4. *Если существует ребро порядка* $\geqslant 6$, *то* $l = 2$.

В самом деле, пусть таким ребром является $\{i, j\}$. В случае $l > 2$ одна из вершин i, j (например, i) была бы соединена с какой-нибудь третьей вершиной j', поскольку граф X—связный. Учитывая соотношение $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, мы имели бы

$$\sum_{k\neq i} q_{ik}^2 \geqslant \frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1,$$

что невозможно (лемма 1).

Лемма 5. *Никакая вершина графа X не может принадлежать двум различным ребрам порядка $\geqslant 4$.*

Если бы i была такой вершиной, то выполнялось бы соотношение

$$\sum_{j\neq i} q_{ij}^2 \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1,$$

а это невозможно (лемма 1).

Пусть $\{i, j\}$ — ребро графа X. Мы определим новый граф Кокстера, о котором говорят, что он получается из графа матрицы M *отождествлением* i *и* j. Множеством I' его вершин будет фактормножество множества I, получающееся при отождествлении i и j. Пара $p=\{i, j\}$ является элементом в I'; отождествим элементы множества I, отличные от i и j, с их каноническими образами в I'. Пусть k, k' — два различных элемента из I'. Тогда $\{k, k'\}$ будет ребром нового графа в следующих случаях:

1) k и k' отличны от p, и $\{k, k'\}$ является ребром X; в этом случае порядок нового ребра полагаем равным $m_{kk'}$;

2) $k=p$, и одно из множеств $\{i, k'\}$, $\{j, k'\}$ является ребром графа X; полагаем порядок ребра $\{p, k'\}$ равным $m_{ik'}$, если $\{i, k'\}$ — ребро X, и $m_{jk'}$, если ребром X является $\{j, k'\}$ (обе возможности не могут встретиться одновременно, поскольку X — дерево).

Пусть $M'=(m'_{ij})_{i,\,j\in I'}$—определенная таким образом новая матрица Кокстера; положим $q'_{ij}=-\cos\frac{\pi}{m'_{i,j}}$. При $k\neq p$ имеем $q'_{pk}=q_{ik}+q_{jk}$. Следовательно, если $(\xi_i)\in \mathbf{R}^{I'}$, то

$$\sum_{k,\,k'\in I'} q'_{kk'}\xi_k\xi_{k'}=\sum_{k,\,k'\in I-\{i,\,j\}} q_{kk'}\xi_k\xi_{k'}+2\sum_{k\in I-\{i,\,j\}}(q_{ik}+q_{jk})\xi_k\xi_p+\xi_p^2.$$

Полагая $\xi_i=\xi_j=\xi_p$, получаем

$$\sum_{k,\,k'\in I'} q'_{kk'}\xi_k\xi_{k'}=\sum_{k,\,k'\in I} q_{kk'}\xi_k\xi_{k'}+\xi_p^2-\xi_i^2-\xi_j^2-2q_{ij}\xi_i\xi_j=$$
$$=\sum_{k,\,k'\in I} q_{kk'}\xi_k\xi_{k'}-(1+2q_{ij})\xi_p^2. \qquad (1)$$

Лемма 6. *Если ребро $\{i, j\}$ порядка* 3, *то* $W(M')$ — *конечная группа Коксетера.*

В самом деле, $q_{ij} = -\frac{1}{2}$, поэтому соотношение (1) принимает вид

$$\sum_{k,\, k' \in I'} q'_{kk'} \xi_k \xi_{k'} = \sum_{k,\, k' \in I} q_{kk'} \xi_k \xi_{k'} \tag{2}$$

и, стало быть, $(\xi_k)_{k \in I'} \mapsto \sum_{k,\, k' \in I'} q'_{kk'} \xi_k \xi_{k'}$ — невырожденная положительная квадратичная форма. Поэтому достаточно применить теорему 2 из гл. V, § 4, n° 8.

Лемма 7. *Имеет место следующая альтернатива*:

а) X *обладает точкой ветвления* (гл. IV, Дополнение, n° 1), *причем только одной, и все ребра X имеют порядок* 3.

б) X *является цепью и обладает не более чем одним ребром порядка* $\geqslant 4$.

Рассуждаем по индукции относительно l.

а) Предположим, что X обладает точкой ветвления i. Тогда i принадлежит трем ребрам порядка 3: $\{i, k_1\}$, $\{i, k_2\}$, $\{i, k_3\}$ (леммы 2 и 3). Если $l = 4$, то лемма доказана. Если же $l > 4$, то одна из вершин, например k_1, принадлежит ребру, отличному от предыдущих, поскольку граф X — связный. Отождествим i и k_1 в графе Коксетера матрицы M. Получим новый граф, к которому по лемме 6 можно применить предположение индукции. Но образ p точки i будет точкой ветвления нового графа X'. Поэтому у графа X' нет других точек ветвления, а все его ребра имеют порядок 3. Значит, и у X все ребра будут порядка 3, и никакая точка, отличная от i и k_1, не будет точкой ветвления. Если бы k_1 была точкой ветвления в X, то p принадлежала бы по крайней мере четырем ребрам в X', вопреки лемме 2.

б) Предположим, что X не обладает ни одной точкой ветвления. Тогда X является цепью (гл. IV, Дополнение, n° 3, предложение 3). Пусть $\{i, j\}$ — ребро порядка $\geqslant 4$. Если $l = 2$, то лемма тривиальна. Если же это не так, то, скажем, вершина i принадлежит ребру $\{i, k\}$ с $k \neq j$ (из-за связности X). Это ребро будет порядка 3 (лемма 5). Отождествим i и k в графе Коксетера матрицы M. Ввиду леммы 6 можно применить предположение индукции. Пусть p — образ точки i в новом графе X'. Ребро $\{p, j\}$ в X' имеет порядок $\geqslant 4$, поэтому в X' нет других ребер порядка $\geqslant 4$ и, стало быть, $\{i, j\}$ — единственное ребро порядка $\geqslant 4$ в X.

Лемма 8. *Пусть вершины $i_1, i_2, \ldots, i_p$ графа X таковы, что $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{p-1} i_p\}$ будут ребрами порядка 3. Тогда*

$$q\left(\sum_{r=1}^{p} r e_{i_r}\right) = \frac{1}{2} p(p+1).$$

Имеем $(e_{i_r} | e_{i_r}) = 1$, $(e_{i_r} | e_{i_{r+1}}) = -\frac{1}{2}$ и $(e_{i_r} | e_{i_s}) = 0$ при $s > r+1$. Следовательно,

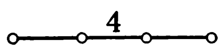
$$q\left(\sum_{r=1}^{p} r e_{i_r}\right) = \sum_{r=1}^{p} r^2 - 2 \cdot \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{2} r(r+1) = p^2 - \sum_{r=1}^{p-1} r.$$

Согласно следствию предложения 14 из *Теор. множ.*, гл. III, § 5, n° 8, это равно

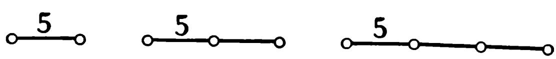
$$p^2 - \frac{1}{2} p(p-1) = \frac{1}{2} p(p+1).$$

Лемма 9. *Предположим, что X — цепь с вершинами 1, 2, ..., l и с ребрами $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{l-1, l\}$.*

(i) *Если одно из ребер $\{2, 3\}, \{3, 4\}, \ldots, \{l-2, l-1\}$ имеет порядок $\geqslant 4$, то это ребро будет на самом деле порядка 4, а граф будет следующим:*



(ii) *Если ребро $\{1, 2\}$ имеет порядок 5, то граф будет одним из следующих:*



Можно считать $l > 2$ (лемма 4). Допустим, что ребро $\{i, i+1\}$ с $1 \leqslant i \leqslant l-1$ имеет порядок $\geqslant 4$. Положим

$$x = e_1 + 2e_2 + \ldots + i e_i,$$

$$y = e_l + 2e_{l-1} + \ldots + (l-i) e_{i+1} \quad \text{и} \quad j = l - i.$$

По лемме 8 будет $\|x\|^2 = \frac{1}{2} i(i+1)$, $\|y\|^2 = \frac{1}{2} j(j+1)$. С другой стороны, $(x | y) = ij (e_i | e_{i+1}) = -ij \cos\frac{\pi}{m}$ с $m = 4$ или 5 (лемма 4). Имеем

$$(x | y)^2 < \|x\|^2 \|y\|^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{4} ij(i+1)(j+1) > i^2 j^2 \cos^2 \frac{\pi}{m},$$

откуда

$$(i+1)(j+1) > 4ij \cos^2 \frac{\pi}{m} \geqslant 2ij. \qquad (3)$$

Это дает $ij - i - j - 1 < 0$, или $(i-1)(j-1) < 2$. Если

$$1 < i < l - 1,$$

то и $1 < j < l - 1$, поэтому $i = j = 2$ и, кроме того,

$$9 > 16 \cos^2 \frac{\pi}{m}, \quad \text{следовательно,} \quad \cos^2 \frac{\pi}{m} < \cos^2 \frac{\pi}{5}\ ^{1)},$$

так что $m = 4$. Этим доказано (i). Если $i = 1$ и $m = 5$, то, согласно (3), $2j + 2 > 4j \frac{3+\sqrt{5}}{8}$, или $j \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 2$, $j < \sqrt{5} + 1 < 4$ и, стало быть, $l = j + 1 \leqslant 4$. Тем самым доказано утверждение (ii).

Лемма 10. *Если X допускает точку ветвления i, то целый подграф $X - \{i\}$ является одъединением трех цепей, и если $p - 1$, $q - 1$, $r - 1$ — длины этих цепей, то тройка (p, q, r) с точностью до перестановки совпадает с одной из троек $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 1, m)$ (для какого-нибудь $m \geqslant 1$).*

Вершина i принадлежит трем ребрам (лемма 2) и не существует никакой другой точки ветвления (лемма 7), поэтому целый подграф $X - \{i\}$ состоит из трех цепей X_1, X_2, X_3, концевые вершины которых (по одной в каждом X_i) соединены с i в X. Пусть $\{i_1, i_2\}$, $\{i_2, i_3\}$, ..., $\{i_{p-1}, i_p\}$ — ребра цепи X_1, $\{j_1, j_2\}$, ..., $\{j_{q-1}, j_q\}$ — ребра в X_2, $\{k_1, k_2\}$, ..., $\{k_{r-1}, k_r\}$ —

---

[1]) Корни 5-й степени из 1, отличные от 1, являются решениями уравнения $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. При подстановке $x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ это уравнение принимает вид $(2x)^2 - 2 + 2x + 1 = 0$, или $4x^2 + 2x - 1 = 0$, или $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Отсюда

$$2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos^2 \frac{\pi}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{5}{8} > \frac{9}{16},$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

ребра в X_3, где i_1, j_1, k_1 соединены с i в X. Можно предполагать $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 1$. Положим

$$x = e_{i_p} + 2e_{i_{p-1}} + \ldots + pe_{i_1},$$

$$y = e_{j_q} + 2e_{j_{q-1}} + \ldots + qe_{j_1},$$

$$z = e_{k_r} + 2e_{k_{r-1}} + \ldots + re_{k_1}.$$

Поскольку все ребра в X порядка 3 (лемма 7), лемма 8 дает $\|x\|^2 = \frac{1}{2}p(p+1)$, $\|y\|^2 = \frac{1}{2}q(q+1)$, $\|z\|^2 = \frac{1}{2}r(r+1)$. Далее, e_i ортогонален к e_{i_2}, e_{i_3}, ..., e_{i_p}, откуда $(e_i \mid x) = p(e_i \mid e_{i_1}) = -\frac{1}{2}p$. Аналогично $(e_i \mid y) = -\frac{1}{2}q$, $(e_i \mid z) = -\frac{1}{2}r$. Векторы $\|x\|^{-1}x$, $\|y\|^{-1}y$, $\|z\|^{-1}z$ являются единичными и попарно ортогональными, и e_i не принадлежит порожденному этими единичными векторами подпространству F. Квадрат расстояния от e_i до F равен

$$1 - \left(e_i \left| \frac{x}{\|x\|}\right.\right)^2 - \left(e_i \left| \frac{y}{\|y\|}\right.\right)^2 - \left(e_i \left| \frac{z}{\|z\|}\right.\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2}\frac{r}{r+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{r+1}.$$

Выражая тот факт, что эта величина > 0, приходим к неравенству

$$(p+1)^{-1} + (q+1)^{-1} + (r+1)^{-1} > 1. \tag{4}$$

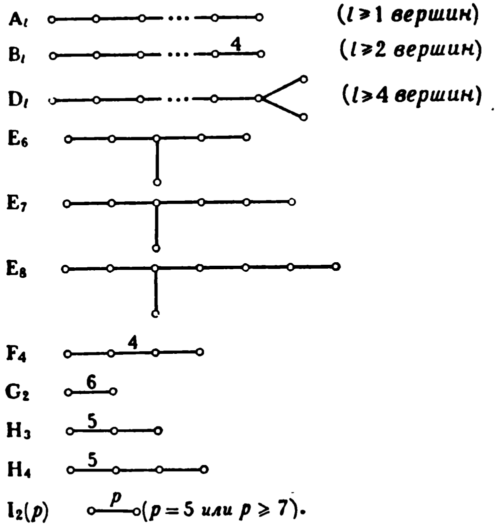
Таким образом, $3(r+1)^{-1} > 1$, откуда $r < 2$ и, наконец, $r = 1$. Поэтому (4) дает

$$(p+1)^{-1} + (q+1)^{-1} > \frac{1}{2}, \tag{5}$$

так что $2(q+1)^{-1} > \frac{1}{2}$, откуда $q \leqslant 2$. Наконец, если $q = 2$, то (5) приводит к

$$(p+1)^{-1} > \frac{1}{6}, \quad \text{откуда} \quad p \leqslant 4.$$

Теорема 1. *Если (W, S) — неприводимая конечная система Кокстера, то ее граф Кокстера изоморфен одному из следующих графов*:



Эти графы Кокстера попарно неизоморфны.

В самом деле, пусть $M = (m_{ij})$ — матрица Кокстера системы (W, S), и пусть $l = \operatorname{Card}(S)$. Если одно из чисел m_{ij} будет $\geqslant 6$, то $l = 2$ (лемма 4), и граф Кокстера системы (W, S) должен иметь тип G_2 или $I_2(p)$ с $p \geqslant 7$. Предположим теперь, что все $m_{ij} \leqslant 5$.

а) Если не все m_{ij} равны 3, то графом X системы (W, S) будет цепь, и лишь одно из m_{ij} будет равно 4 или 5 (лемма 7). Если одно из m_{ij} равно 5, то, как показывает лемма 9, возможны лишь типы H_3, H_4 или $I_2(5)$. Если одно из чисел m_{ij} равно 4, то снова по лемме 9 возможен лишь один из типов B_l, F_4.

б) Предположим, что все m_{ij} равны 3. Если X является цепью, то наш граф Кокстера имеет тип A_l. В противном случае на основании леммы 10 заключаем, что он имеет тип E_6, E_7, E_8 или D_l.

Попарная неизоморфность перечисленных графов Кокстера очевидна.

Обратно, имеет место

Теорема 2. *Группы Кокстера, определенные графами Кокстера A_l, B_l, ..., $I_2(p)$ из теоремы* 1, *конечны.*

Это очевидно в случае $I_2(p)$, когда соответствующая группа будет диэдральной группой порядка $2p$ (гл. IV, § 1, n° 9).

Для H_4 соответствующей квадратичной формой является

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2-\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_3-2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)\xi_3\xi_4=$$
$$=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2-\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_3-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\xi_3\xi_4=$$
$$=\left(\xi_2-\frac{\xi_1+\xi_3}{2}\right)^2+\left(\xi_4-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\xi_3\right)^2+$$
$$+\frac{3}{4}\left(\xi_1-\frac{1}{3}\xi_3\right)^2+\frac{7-3\sqrt{5}}{24}\xi_3^2.$$

Так как $7-3\sqrt{5}>0$, то эта форма невырождена и положительна, а соответствующая группа Кокстера конечна. То же самое относится и к группе H_3, поскольку она изоморфна некоторой подгруппе предыдущей группы (гл. IV, § 1, n° 8).

Для типов A_l, B_l, ..., G_2 мы построим в n° 5—13 системы корней, группы Вейля которых будут как раз искомыми группами. Тем самым будет установлено, что эти группы являются не просто конечными, но и *кристаллографическими* (§ 2, n° 5).

2. *Графы Дынкина*

Допуская вольность речи, мы назовем *нормированным графом* пару (Γ, f), обладающую следующими свойствами:

1) Γ является графом (именуемым графом, *подчиненным* паре (Γ, f));

2) если E обозначает множество пар (i, j), таких, что $\{i, j\}$ будет ребром графа Γ, то f является отображением E в $\mathbf{R}$, для которого $f(i, j)f(j, i)=1$, какова бы ни была пара $(i, j)\in E$.

Очевидным образом определяется изоморфизм нормированных графов.

Пусть R — приведенная система корней в вещественном векторном пространстве V. Сопоставим ей некий нормированный граф (X, f), называемый *графом Дынкина* системы R. Вершинами в X будут элементы множества I орбит группы $W(R)$ в объединении множеств $\{B\}\times B$ (с B, пробегающим множество базисов системы R). Если $N=(n_{ij})_{i,\,j\in I}$ (соотв. $M=(m_{ij})_{i,\,j\in I}$) — каноническая матрица Картана (соотв. матрица Кокстера) системы R (§ 1, n° 5, замечание 7), то две вершины i и j в X будут соединены тогда и только тогда, когда $n_{ij}\neq 0$. В таком случае положим

$$f(i, j)=\frac{n_{ij}}{n_{ji}}.$$

Поскольку $n_{ij}=0$ влечет $n_{ji}=0$, тем самым вполне определен нормированный граф (X, f).

Пусть $(x|y)$ — скалярное произведение на V, инвариантное относительно $W(R)$, и $B=(\alpha_i)_{i\in I}$ — базис в R с канонической индексацией. Формулы (7) и (9) из § 1, n° 1, показывают, что вершины i и j графа X будут соединены тогда и только тогда, когда

$$(\alpha_i|\alpha_j)\neq 0,$$

и в таком случае

$$f(i, j)=\frac{(\alpha_i|\alpha_i)}{(\alpha_j|\alpha_j)}.$$

Принимая во внимание результаты § 1, n° 3 и 5, мы видим, что с точностью до перестановки i и j имеются лишь следующие возможности:

1) i и j не соединены; $n_{ij}=n_{ji}=0$; $m_{ij}=2$;
2) $f(i, j)=f(j, i)=1$; $n_{ij}=n_{ji}=-1$; $m_{ij}=3$; .
3) $f(i, j)=2$, $f(j, i)={}^1/_2$; $n_{ij}=-2$, $n_{ji}=-1$; $m_{ij}=4$;
4) $f(i, j)=3$, $f(j, i)={}^1/_3$; $n_{ij}=-3$, $n_{ji}=-1$; $m_{ij}=6$.

Это означает, следовательно, что знание графа Дынкина системы R определяет ее матрицу Картана и матрицу Кокстера, а стало быть, определяет с точностью до изоморфизма и саму систему R. Более точным образом из следствия предложения 15 § 1, n° 5, вытекает следующий результат:

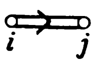
Предложение 1. *Пусть R_1 и R_2 — две приведенные системы корней в вещественных векторных пространствах V_1 и V_2; $B_1=(\alpha_i)_{i\in I_1}$ и $B_2=(\alpha_i)_{i\in I_2}$ — базисы в R_1 и R_2 с каноническими индексациями; λ — изоморфизм графа Дынкина системы R_1 на граф Дынкина системы R_2. Тогда существует единственный изоморфизм V_1 на V_2, переводящий R_1 в R_2 и α_i в $\alpha_{\lambda(i)}$ для всех $i\in I_1$.*

Ясно, что автоморфизм системы R определяет автоморфизм графа Дынкина системы R, что приводит к гомоморфизму φ группы $A(R)$ в группу автоморфизмов соответствующего графа Дынкина.

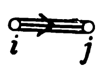
Следствие. *Гомоморфизм φ определяет при факторизации изоморфизм группы $A(R)/W(R)$ на группу автоморфизмов графа Дынкина системы R.*

Очевидно, что $\varphi(g)=\mathrm{Id}$ для всех $g\in W(R)$. С другой стороны, предложение 1 показывает, что существует изоморфизм ψ группы автоморфизмов графа Дынкина системы R на подгруппу E элементов в $A(R)$, оставляющих неподвижным данный базис B системы R, причем $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$. Следствие вытекает теперь из того факта, что $A(R)$ является полупрямым произведением E и $W(R)$ (§ 1, n°5, предложение 16).

На практике граф Дынкина (X, f) изображают схемой (или диаграммой), составленной из точек и отрезков следующим образом. Точки соответствуют вершинам графа X; две точки, соответствующие двум различным вершинам i и j, соединяются 0, 1, 2 или 3 отрезками сообразно тому, какой из указанных выше случаев: 1), 2), 3) или 4) — имеет место (с точностью до перестановки i и j). Кроме того, в случаях 3) и 4), т. е. в случае, когда $f(i, j) > 1$, или, что эквивалентно, когда корни α_i и α_j не ортогональны и не одной и той же длины, поместим на двух или трех отрезках, которые связывают точки, соответствующие вершинам i и j, знак неравенства $>$, ориентированный в сторону точки, соответствующей вершине j (т. е. корню меньшей длины):



(при $f(i, j) = 2$),

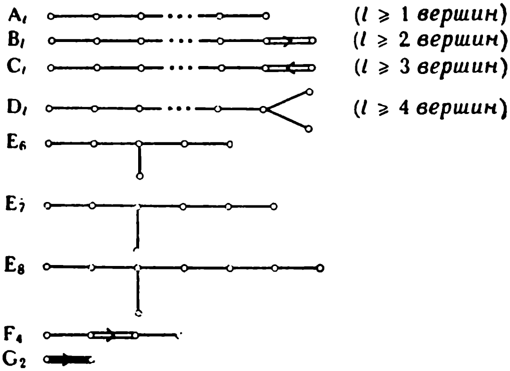


(при $f(i, j) = 3$).

Ясно, что задание этой схемы позволяет восстановить граф Дынкина (X, f).

Заметим, что схема, ассоциированная с графом Кокстера группы $W(R)$, получается из схемы, ассоциированной с графом Дынкина системы R, путем сохранения точек и простых отрезков при одновременной замене двойных отрезков (соотв. тройных отрезков) отрезками с приписанным к ним числом 4 (соотв. 6). Обратно, если знать граф Кокстера группы $W(R)$, то противоположная операция позволяет восстановить схему, ассоциированную с графом Дынкина системы R, за исключением знаков неравенства на двойных и тройных отрезках. Коль скоро это так, теорема 1 непосредственно приводит к списку возможных графов Дынкина. А именно имеет место

Теорема 3. *Если R — приведенная и неприводимая система корней, то ее граф Дынкина изоморфен одному из* *графов, представленных следующими схемами:*



Эти графы Дынкина попарно неизоморфны, и для каждого из них существует приведенная и неприводимая система корней, допускающая его (с точностью до изоморфизма) в качестве графа Дынкина.

С учетом предыдущих замечаний первое утверждение немедленно вытекает из теоремы 1, из того факта, что группы Кокстера с графами H_3, H_4 и $I_2(p)$ (для $p=5$ или $p \geqslant 7$) не являются кристаллографическими, и, наконец, из того, что два возможных знака неравенства при двойном (соотв. тройном) отрезке графа Дынкина, ассоциированного с графом Коксгера F_4 (соотв. G_2), приводят к изоморфным графам Дынкина. Второе утверждение очевидно, а третье вытекает из явного построения приведенной и неприводимой системы корней для каждого типа в отдельности — построения, которое будет осуществлено в n° 5—13.

Замечания. 1) Граф A_1 сводится к единственной вершине; его обозначают также символом B_1 или C_1. Граф B_2 обозначается и символом C_2, а для графа A_3 используется также обозначение D_3. Наконец, обозначим через D_2 граф, составленный из двух несоединенных вершин. (Эти соглашения приняты с учетом свойств соответствующих систем корней; см. n° 5—8.)

2) Если (X, f) — граф Дынкина приведенной системы корней R, то граф Дынкина дуальной системы отождествляется с (X, f^{-1}). Иными словами, схема, ассоциированная с графом Дынкина системы $R^\vee$, получается из схемы, ассоциированной с графом Дынкина системы R, обращением знаков неравенства. Если система R неприводима, то, очевидно, она изоморфна $R^\vee$, за исключением систем R типа B_l или C_l, когда $R^\vee$ будет соответственно типа C_l или B_l.

3. Аффинная группа Вейля и пополненный граф Дынкина

Пусть R — приведенная и неприводимая система корней с графом Дынкина (X, f). Мы собираемся определить другой нормированный граф $(\tilde{X}, \tilde{f})$, который назовем *пополненным* (или *аффинным*) *графом Дынкина* системы R. Множество $\tilde{I}$ вершин графа $\tilde{X}$ состоит из множества I вершин графа X и одной вершины, обозначаемой символом 0, которая не принадлежит к I. Чтобы определить $\tilde{f}$, выберем базис $B=(\alpha_i)_{i\in I}$ системы R и скалярное произведение $(x\,|\,y)$, инвариантное относительно $W(R)$. Пусть α_0 — корень, *противоположный максимальному корню* по отношению порядка, определенному базисом B. Две различные вершины $i, j \in \tilde{I}$ соединяются тогда и только тогда, когда $(\alpha_i\,|\,\alpha_j)\neq 0$. В этом случае положим

$$\tilde{f}(i, j)=\frac{(\alpha_i\,|\,\alpha_i)}{(\alpha_j\,|\,\alpha_j)}.$$

Тотчас проверяется, что граф $\tilde{X}$ и отображение $\tilde{f}$, определенные таким образом, не зависят ни от выбора B, ни от выбора скалярного произведения.

Если ранг l системы R равен 1, то $I=\{i\}$ и $\alpha_0=-\alpha_i$, так что $\tilde{f}(0, i)=1$. При $l\geqslant 2$ корень α_0 не пропорционален ни одному из α_i и $(\alpha_0\,|\,\alpha_i)$ будет $\leqslant 0$ (§ 1, n°8, предложение 25). Для произвольной пары (i, j) различных элементов из $\tilde{I}$ все допустимые возможности — это 1), 2), 3), 4) из предыдущего пункта (например, при всех $i\in I$, $n_{0i}=n(\alpha_0, \alpha_i)$ и m_{0i} — порядок произведения $s_{\alpha_0}s_{\alpha_i}$).

В случае $l\geqslant 2$ мы изображаем пополненный граф Дынкина схемой с теми же соглашениями, что и в предыдущем пункте, используя иногда пунктир для отрезков, связывающих вершину 0 с другими вершинами. Заметим, что знак неравенства $>$, помещенный на таком отрезке, если он имеется, всегда направлен в сторону вершины, отличной от 0, поскольку α_0 — корень наибольшей возможной длины (§ 1, n°8, предложение 25). Отождествим (X, f) с подграфом графа $(\tilde{X}, \tilde{f})$, получающимся удалением вершины 0.

Действие группы $A(R)$ на (X, f) продолжается до действия на $(\tilde{X}, \tilde{f})$, оставляющего вершину 0 неподвижной; $W(R)$ действует на $(\tilde{X}, \tilde{f})$ тривиально.

Вернемся к обозначениям § 2. Предложение 5 § 2, n°2, вместе с теоремой 1 гл. V, § 3, n°2, показывают, что граф Коксвтера Σ аффинной группы Вейля $W_a(R)$ получается из

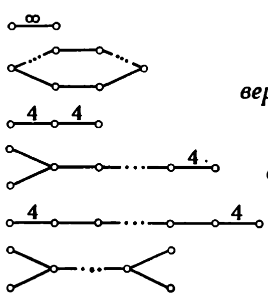
$(\tilde{X}, \tilde{f})$ по тем же правилам, что использовались при переходе от (X, f) к графу Кокстера группы $W(R)$. Далее, пусть G — нормализатор группы $W_a(R)$ (§ 2, n° 3). Всякому элементу $g \in G$ соответствует автоморфизм $\varphi(g)$ системы Σ и $\varphi(g) = \mathrm{Id}$, когда $g \in W_a(R)$. Обратно, всякому автоморфизму λ системы Σ по предложению 11 гл. V, § 4, n° 9, соответствует однозначно определенный элемент $g = \psi(\lambda)$, сохраняющий данный альков C и такой, что $\varphi(g) = \lambda$. Так как G является полупрямым произведением подгруппы G_C элементов, сохраняющих C, и группы $W_a(R)$ (§ 2, n° 3), то мы приходим к заключению, что при факторизации φ дает *изоморфизм группы* G/W_a (или G_C) *на* $\mathrm{Aut}(\Sigma)$. Немедленно проверяется, что композиция этого изоморфизма с каноническим отображением $A(R)/W(R)$ в G/W_a совпадает с гомоморфизмом $A(R)/W(R)$ в $\mathrm{Aut}(\Sigma)$, порождаемым гомоморфизмом $A(R)/W(R)$ в $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, \tilde{f})$, определенным выше. В соответствии с § 2, n° 3, группа $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ изоморфна полупрямому произведению $A(R)/W(R)$ на $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$, а $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ изоморфна группе $\Gamma_C = G_C \cap W'_a$ (в обозначениях § 2, n° 3); элемент группы $\mathrm{Aut}(\Sigma)$, соответствующий элементу $\gamma_i \in \Gamma_C$, переводит вершину 0 в вершину i системы Σ.

Замечание. Можно показать, что каноническое отображение

$$\mathrm{Aut}(\tilde{X}, \tilde{f}) \to \mathrm{Aut}(\Sigma)$$

является изоморфизмом.

Теорема 4. *Пусть* (W, S) — *неприводимая система Кокстера с конечным множеством* S. *Для того чтобы ассоциированная квадратичная форма* (гл. V, § 4, n° 1) *была положительной и вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы граф Кокстера системы* (W, S) *был изоморфен одному из следующих графов*:



$\tilde{A}_1$

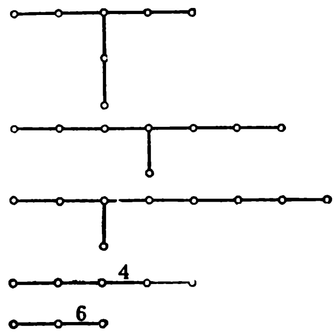
$\tilde{A}_l$ $(l \geqslant 2)$ *(цикл с $l+1$ вершинами)*

$\tilde{B}_2$

$\tilde{B}_l$ $(l \geqslant 3)$ *($l+1$ вершин)*

$\tilde{C}_l$ $(l \geqslant 3)$ *($l+1$ вершин)*

$\tilde{D}_l$ $(l \geqslant 4)$ *($l+1$ вершин)*



Эти графы Кокстера попарно неизоморфны.

Согласно сказанному в гл. V, § 4, n°9, и предложению 8 из § 2, n°5, системами Кокстера, квадратичная форма которых положительна и вырождена, будут те системы, которые соответствуют аффинным группам Вейля приведенных и неприводимых систем корней. Поэтому теорема вытекает из описания пополненных графов Дынкина, приводимого в n°5 — 13.

4. *Предварительная подготовка к построению систем корней*

Пусть V — вещественное векторное пространство размерности $l \geqslant 1$, снабженное скалярным произведением $(x \mid y)$, L — дискретная подгруппа в V, Λ — конечное множество чисел >0 и R — множество таких $\alpha \in L$, для которых $(\alpha \mid \alpha) \in \Lambda$. Предположим, что R порождает V и что для любой пары (α, β) точек из R число $2\frac{(\alpha \mid \beta)}{(\alpha \mid \alpha)}$ будет целым. Тогда R — *система корней в* V. В самом деле, R, очевидно, удовлетворяет условию ($СК_{I}$). Пусть $\alpha \in R$, и пусть s_α — ортогональное отражение $x \mapsto x - 2\frac{(x \mid \alpha)}{(\alpha \mid \alpha)}\alpha$. Тогда при $\beta \in R$ имеем $2\frac{(\beta \mid \alpha)}{(\alpha \mid \alpha)} \in \mathbf{Z}$, так что $s_\alpha(\beta) \in L$; в то же время $\| s_\alpha(\beta) \| = \| \beta \|$, поэтому $s_\alpha(\beta) \in R$. Стало быть, система R удовлетворяет условиям ($СК_{II}$) и ($СК_{III}$). Она является приведенной, если Λ не содержит двух чисел вида λ и 4λ.

Возьмем за V подпространство в $E = \mathbf{R}^n$. Пусть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — канонический базис пространства E. Снабдим E скалярным произведением, для которого этот базис будет ортонормальным, и отождествим E^* с E (соотв. V^* с V) при помощи выбранного скалярного произведения. Определим в E подгруппы L_0, L_1, L_2, L_3 следующим образом:

1) L_0 есть $\mathbf{Z}$-модуль с базисом (ε_i). Имеем $(\alpha|\beta)\in\mathbf{Z}$ при $\alpha,\ \beta\in L_0$. Векторы $\alpha\in L_0$, для которых $(\alpha|\alpha)=1$, совпадают с $\pm\varepsilon_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, а те векторы, для которых $(\alpha|\alpha)=2$, совпадают с $\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j$ при $i<j$ (оба знака $\pm$ в $\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j$ выбираются независимо от друга; примем аналогичное соглашение вплоть до конца этого параграфа).

2) L_1 есть $\mathbf{Z}$-подмодуль модуля L_0, состоящий из $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varepsilon_i\in L_0$, для которых сумма $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ будет четной; поскольку ξ_i и ξ_i^2 одинаковой четности, то это сводится к требованию, чтобы $(x|x)$ было четным. Пусть L_1' — подмодуль в L_1, порожденный векторами $\varepsilon_i\pm\varepsilon_j$. Имеем $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varepsilon_i\equiv\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\varepsilon_n\ (\mathrm{mod}\ L_1')$, а поскольку $2\varepsilon_n=(\varepsilon_1+\varepsilon_n)-(\varepsilon_1-\varepsilon_n)\in L_1'$, видно, что $L_1'=L_1$. Так как L_1 и ε_1 порождают L_0, то фактормодуль L_0/L_1 изоморфен $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

3) $L_2=L_0+\mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right)$. Ясно, что элемент $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varepsilon_i$ пространства V содержится в L_2 тогда и только тогда, когда

$$2\xi_i\in\mathbf{Z},\ \xi_i-\xi_j\in\mathbf{Z},\ \text{каковы бы ни были } i \text{ и } j. \tag{6}$$

Так как $\left(\varepsilon_k\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right.\right)=\frac{1}{2}$ при всех k и так как $\left\|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right\|^2=\frac{n}{4}$, то $(\alpha|\beta)\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ для $\alpha,\ \beta\in L_2$, когда n четно. Группа L_2/L_0 изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

4) $L_3=L_1+\mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right)$. Если n кратно 4, то L_3 будет множеством элементов $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varepsilon_i$, которые удовлетворяют условию (6) и, кроме того, условию $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\in 2\mathbf{Z}$. В этом случае $(\alpha|\beta)\in\mathbf{Z}$, каковы бы ни были $\alpha,\ \beta\in L_3$.

Совершенно очевидно, что подгруппа в E, ассоциированная с L_0 (соотв. L_1, L_2), есть L_0 (соотв. L_2, L_1). Подгруппой в E, ассоциированной с L_3, будет множество элементов

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varepsilon_i\in L_2,$$

для которых $\left(x \,\middle|\, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) \in \mathbf{Z}$, т. е. таких, что $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \in 2\mathbf{Z}$. Следовательно, при $n \equiv 0 \pmod 4$ эта ассоциированная подгруппа совпадает с L_3.

Коммутативная группа L_2/L_1 имеет порядок 4 и поэтому изоморфна $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ или $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (*Алг.*, гл. VII, § 4, n°6, теорема 3). Если n нечетно, то

$$p\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) \in L_1 \Leftrightarrow p \equiv 0 \pmod 4,$$

поэтому группа L_2/L_1 будет циклической порядка 4. Если же n четно, то

$$p\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) \in L_1 \Leftrightarrow p \equiv 0 \pmod 2,$$

и поэтому группа L_2/L_1, содержащая два различных элемента порядка 2, изоморфна $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Мы используем эти обозначения в девяти следующих пунктах и в таблицах. Для каждого типа графа Дынкина из теоремы 3 будут явно указаны:

(I) Система корней R и число корней.

(II) Базис B системы R и соответствующие положительные корни. Базис B будет нумероваться целыми числами $1, \ldots, l$.

(III) Число Коксгера h (§ 1, n° 11).

(IV) Максимальный корень $\tilde{\alpha}$ (относительно порядка, определенного базисом B) и пополненный граф Дынкина (n° 3). Под каждой вершиной будет выписан соответствующий корень из B.

(V) Дуальная система $R^\vee$, каноническая билинейная форма и постоянная $\gamma(R)$ (§ 1, n° 12).

(VI) Фундаментальные веса относительно B (§ 1, n° 10).

(VII) Сумма положительных корней.

(VIII) Группы $P(R)$, $Q(R)$, $P(R)/Q(R)$ и индекс связности (§ 1, n° 9).

(IX) Показатели группы $W(R)$ (гл. V, § 6, n° 2, определение 2). В случаях A_l, B_l, C_l и D_l будут указаны симметрические инварианты.

(X) Порядок группы $W(R)$ (а иногда и ее строение).

(XI) Группа $A(R)/W(R)$, ее действие на граф Дынкина и элемент $w_0 \in W(R)$, переводящий B в $-B$.

(XII) Действие $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ на пополненный граф Дынкина и действие $A(R)/W(R)$ на $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$. Для каждого графа Дынкина из теоремы 3 все эти данные объединены в таблицы I — IX и упорядочены единым образом по указанному выше образцу. Кроме того, там добавлен еще пункт

(XIII) Матрица Картана, способ получения которой из графа Дынкина был разъяснен в n° 2.

5. *Системы типа B_l ($l \geqslant 2$)*

(I) Рассмотрим в $V = \mathbf{R}^l$ группу L_0 (n° 4). Пусть R — множество всех $\alpha \in L_0$, для которых $(\alpha|\alpha) = 1$ или $(\alpha|\alpha) = 2$, т. е. множество векторов $\pm\varepsilon_i$ ($1 \leqslant i \leqslant l$) и $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l$). Ясно, что R порождает V и что $2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha) \in \mathbf{Z}$, каковы бы ни были $\alpha, \beta \in R$. Стало быть, R — приведенная система корней в V (n° 4). Число корней $n = 2l + 4\frac{l(l-1)}{2} = 2l^2$.

(II) Положим

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l,\ \alpha_l = \varepsilon_l.$$

Тогда

$$\varepsilon_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_l \quad (1 \leqslant i \leqslant l),$$

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = (\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_l) + (\alpha_j + \alpha_{j+1} + \ldots + \alpha_l)$$

$$(1 \leqslant i < j \leqslant l),$$

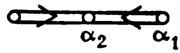
$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{j-1} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant l).$$

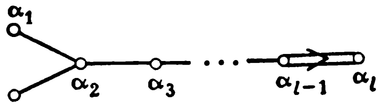
Следовательно, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ является базисом в R (§ 1, n° 7, следствие 3 предложения 20). Сверх того $\|\alpha_i\|^2 = 2$ при $i < l$, $\|\alpha_l\|^2 = 1$, $(\alpha_i|\alpha_{i+1}) = -1$ при $1 \leqslant i \leqslant l-1$, $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ при $j > i+1$. Граф Дынкина системы R имеет, следовательно, тип B_l, а это показывает, что R неприводима. Положительными корнями будут ε_i и $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($i < j$).

(III) По теореме 1, (ii) гл. V, § 6, n° 2,

$$h = n/l = 2l.$$

(IV) Пусть $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_l$; это, очевидно, — корень. Сумма его координат относительно базиса (α_i) равна $2l - 1 = h - 1$. Ввиду предложения 31 из § 1, n° 11, $\tilde{\alpha}$ является максимальным корнем системы R. Имеем $(\tilde{\alpha}|\alpha_i) = 0$ при $i \neq 2$ и $(\tilde{\alpha}|\alpha_2) = 1$. Так как α_2 имеет длину 1 (соотв. $\sqrt{2}$), когда $l = 2$ (соотв. $l \geqslant 3$), то приходим к заключению, что пополненным графом Дынкина системы R будет

при $l=2$ 

при $l\geqslant 3$ 

(V) Формула $\alpha^\vee=\frac{2\alpha}{(\alpha\mid\alpha)}$ дает для $R^\vee$ множество векторов $\pm 2\varepsilon_i$ $(1\leqslant i\leqslant l)$, $\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j$ $(1\leqslant i<j\leqslant l)$. Граф Дынкина дуальной системы $R^\vee$ получается из графа Дынкина системы R способом, изложенным в n° 2, и сразу видно, что $R^\vee$ имеет тип C_l.

Корнями, не ортогональными к $\beta=\varepsilon_1$, будут $\pm\varepsilon_1$ и $\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_j$ при $2\leqslant j\leqslant l$; их общее количество равно $4l-2$. Для каждого из этих корней α имеем $n(\alpha,\beta)=\pm 2$. Формула (17) из § 1, n° 12, показывает, что по отношению к Φ_R квадратом длины корня β является $(4l-2)^{-1}$. Стало быть, $\Phi_R(x, y)=(x\mid y)/(4l-2)$. Применим формулу (18) из § 1, n° 12, с $x=y=\beta$. Получим

$$2+\frac{1}{4}(4l-4)=\gamma(R)\frac{1}{4l-2},$$

откуда $\gamma(R)=(l+1)(4l-2)$.

(VI) Без труда вычисляются фундаментальные веса $\bar\omega_i$ $(1\leqslant i\leqslant l)$, для которых $(\bar\omega_i\mid\alpha_j^\vee)=\delta_{ij}$:

$$\bar\omega_i=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_i=$$
$$=\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(i-1)\alpha_{i-1}+i(\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_l)\quad(i<l),$$

$$\bar\omega_l=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_l)=\frac{1}{2}(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+l\alpha_l).$$

(VII) Суммой положительных корней будет

$$2\rho=(2l-1)\varepsilon_1+(2l-3)\varepsilon_2+\ldots+3\varepsilon_{l-1}+\varepsilon_l=$$
$$=(2l-1)\alpha_1+2(2l-2)\alpha_2+\ldots+i(2l-i)\alpha_i+\ldots+l^2\alpha_l.$$

(VIII) $Q(R)=L_0$ (n° 4), а группа $P(R)$ порождена подгруппой $Q(R)$ и весом $\bar\omega_l$ и совпадает поэтому с L_2 (n° 4). Следовательно, факторгруппа $P(R)/Q(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, а индекс связности равен 2.

(IX) и (X) Ортогональное отражение $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ $(i \neq j)$ переставляет ε_i и ε_j и оставляет инвариантными ε_k с индексами k, отличными от i и j. Отражения $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ порождают группу G_1, изоморфную симметрической группе $\mathfrak{S}_l$. Ортогональное отражение s_{ε_i} переводит ε_i в $-\varepsilon_i$ и оставляет инвариантными ε_k с индексами k, отличными от i. Отражения s_{ε_i} порождают группу G_2, изоморфную $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$. Группа Вейля $W(R)$ порождается G_1 и G_2, причем группа G_2 нормальна в $W(R)$, так что группа $W(R)$ изоморфна полупрямому произведению $\mathfrak{S}_l$ на $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$. Ее порядок, следовательно, равен $2^l \cdot l!$.

Симметрическая алгебра $S(\mathbf{R}^l)$ канонически отождествляется с алгеброй полиномиальных функций $P(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ на $\mathbf{R}^l$. Для того чтобы такой многочлен был инвариантен относительно $W(R)$, надо прежде всего, чтобы

$$p(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l) = p(\pm \xi_1, \pm \xi_2, \ldots, \pm \xi_l),$$

каковы бы ни были l знаков в правой части, т. е. чтобы

$$P(\xi_1, \ldots, \xi_l) = Q(\xi_1^2, \ldots \xi_l^2),$$

где Q — многочлен; затем необходимо, чтобы Q задавал симметрическую полиномиальную функцию; эти условия являются уже достаточными. Следовательно (*Алг.*, гл. V, приложение 1), $S(\mathbf{R}^l)^{W(R)}$ есть алгебра, порожденная l полиномиальными функциями

$$t_i = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_l} \xi^2_{\tau(1)} \xi^2_{\tau(2)} \ldots \xi^2_{\tau(i)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant l).$$

Кроме того, степень трансцендентности над $\mathbf{R}$ поля отношений алгебры $S(\mathbf{R}^l)^{W(R)}$ равна l, поэтому t_i алгебраически независимы. Так как t_i — многочлены степеней $2, 4, \ldots, 2l$, то мы приходим к заключению, что показателями группы $W(R)$ будут (гл. V, § 6, п° 2, предложение 3)

$$1, 3, 5, \ldots, 2l-1.$$

(XI) Единственным автоморфизмом графа Дынкина является тождественное отображение. Поэтому $A(R) = W(R)$ и $-1 \in W(R)$. Поскольку -1 переводит B в $-B$, мы приходим к выводу, что $w_0 = -1$.

(XII) Группа $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ дуальна к $P(R)/Q(R)$ и, стало быть, изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ее нетривиальный элемент переставляет вершины, соответствующие α_0 и α_1, и оставляет неподвижными другие вершины.

6. Системы типа C_l $(l \geqslant 2)$

(I) Существование систем корней типа C_l было доказано в n° 5, поскольку, как мы видели, система, дуальная к системе типа B_l, имеет тип C_l. Система корней R типа C_l получается, таким образом, при выборе в $\mathbf{R}^l$ векторов $\pm 2\varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ и $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$. Число корней равно $2l^2$.

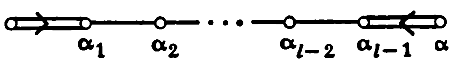
(II) Построим базис в R, взяв образ при отображении $\alpha \mapsto \dfrac{2\alpha}{(\alpha \mid \alpha)}$ базиса системы, рассмотренной в n° 5. Получим

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ \ldots, \ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \quad \alpha_l = 2\varepsilon_l.$$

Положительными корнями являются $2\varepsilon_i$ и $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$.

(III) Число Кокстера то же самое, что и у дуальной системы: $h = 2l$.

(IV) Пусть $\tilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$ — линейная комбинация, являющаяся корнем. Сумма координат этого корня относительно (α_i) равна $2l - 1 = h - 1$. Поэтому $\tilde{\alpha}$ — максимальный корень. Имеем $(\tilde{\alpha} \mid \alpha_i) = 0$ при $i \neq 1$, $(\tilde{\alpha} \mid \alpha_1) = 2$. Отсюда получается пополненный граф Дынкина:



(V) Система $R^\vee$, имеющая тип B_l, уже определена. По формуле (19) из § 1, n° 12, и в соответствии с n° 5, (V) квадрат длины корня $2\varepsilon_i$ относительно Φ_R равен

$$((l+1)(4l-2))^{-1}((4l-2)^{-1})^{-1} = (l+1)^{-1};$$

поэтому $\Phi_R(x, y) = (x \mid y)/4(l+1)$.

Получаем $\gamma(R) = \gamma(R^\vee) = (l+1)(4l-2)$.

(VI) Без труда находятся фундаментальные веса:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i = \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (i-1)\alpha_{i-1} + i\left(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \frac{1}{2}\alpha_l\right) \\ &\qquad (i \leqslant l).\end{aligned}$$

(VII) Суммой положительных корней будет

$$\begin{aligned}2\rho &= 2l\varepsilon_1 + (2l-2)\varepsilon_2 + \ldots + 4\varepsilon_{l-1} + 2\varepsilon_l = \\ &= 2l\alpha_1 + 2(2l-1)\alpha_2 + \ldots + i(2l-i+1)\alpha_i + \ldots + \\ &\quad + (l-1)(l+2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}l(l+1)\alpha_l.\end{aligned}$$

(VIII) В соответствии с n° 4 и n° 5, (VIII) $Q(R) = L_1$, $P(R) = L_0$; факторгруппа $P(R)/Q(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, а индекс связности равен 2.

(IX) и (X) Эти вопросы относятся только к $W(R)$, поэтому результаты будут теми же, что и для типа B_l.

(XI) Такое же рассуждение, как в n°5, показывает, что $A(R)=W(R)$ и $w_0=-1$.

(XII) Единственным неединичным элементом группы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ задается однозначно определенный нетривиальный автоморфизм пополненного графа Дынкина; этот автоморфизм переставляет вершины, соответствующие корням α_j и α_{l-j} при $0\leqslant j\leqslant l$.

7. *Системы типа A_l ($l\geqslant 1$)*

(I) и (II) Пусть V — гиперплоскость в $E=\mathbf{R}^{l+1}$, определяемая уравнением $\sum\limits_{i=1}^{l+1}\xi_i=0$. Заменяя l на $l+1$ в n°5, получаем систему R' типа B_{l+1} в E, допускающую базис

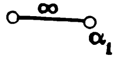
$$\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\quad \alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_l=\varepsilon_l-\varepsilon_{l+1},\quad \alpha_{l+1}=\varepsilon_{l+1}.$$

Так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ порождают V, то $R=R'\cap V$ будет системой корней в V с базисом $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ (§ 1, n°7, следствие 4 предложения 20). Из проведенных в n°5 вычислений скалярных произведений непосредственно следует, что R имеет тип A_l. Элементами системы R будут $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ ($i\neq j$, $1\leqslant i\leqslant l+1$, $1\leqslant j\leqslant l+1$). Их общее число равно $n=l(l+1)$. Положительными корнями будут $\varepsilon_i-\varepsilon_j$, где $i<j$.

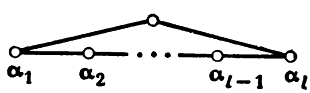
(III) Имеем $h=\frac{n}{l}=l+1$.

(IV) Линейная комбинация $\tilde\alpha=\varepsilon_1-\varepsilon_{l+1}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_l$ является корнем. Сумма координат относительно (α_i) равна $l=h-1$. Поэтому $\tilde\alpha$ — максимальный корень.

При $l=1$ имеем $\tilde\alpha=\alpha_1$, откуда $(\tilde\alpha\,|\,\alpha_1)=2$; графом Кокстера группы $W_a(R)$ будет



При $l\geqslant 2$ выполнены соотношения $(\tilde\alpha\,|\,\alpha_i)=0$ для $0<i<l$ и $(\tilde\alpha\,|\,\alpha_1)=(\tilde\alpha\,|\,\alpha_l)=1$, так что пополненным графом Дынкина будет



(V) Отождествив пространство V с дуальным к нему при помощи скалярного произведения, получим $\alpha^\vee=\frac{2\alpha}{(\alpha\,|\,\alpha)}=\alpha$ для всех $\alpha\in R$, так что $R^\vee=R$.

Относительно формы Φ_R длина корней равна $h^{-1/2}=(l+1)^{-1/2}$ (§ 1, n° 12); стало быть, $\Phi_R(x, y)=(x\,|\,y)/2(l+1)$.

Получаем $\gamma(R)=(l+1)^2$ (§ 1, n° 12, формула (20)).

(VI) Пусть $(\bar{\omega}_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ — семейство фундаментальных весов. Положим

$$\bar{\omega}_i=\sum_{j=1}^{l+1}\xi_{ij}\varepsilon_j, \quad \text{где} \quad \xi_{i,j}\in\mathbf{R}.$$

Выражая тот факт, что $(\bar{\omega}_i\,|\,\alpha_j^\vee)=\delta_{ij}$ и $\bar{\omega}_i\in V$, получаем

$$\xi_{ii}-\xi_{i,i+1}=1, \quad \xi_{i,j}-\xi_{i,j+1}=0 \quad \text{при} \quad j\neq i, \quad \sum_{j=1}^{l+1}\xi_{i,j}=0,$$

а это непосредственно дает

$$\bar{\omega}_i=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_i-\frac{i}{l+1}(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{l+1})=$$
$$=\frac{1}{l+1}[(l-i+1)(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(i-1)\alpha_{i-1})+$$
$$+i((l-i+1)\alpha_i+(l-i)\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_l)].$$

(VII) Сумма положительных корней такова:

$$2\rho=l\varepsilon_1+(l-2)\varepsilon_2+(l-4)\varepsilon_3+\ldots-(l-2)\varepsilon_l-l\varepsilon_{l+1}=$$
$$=l\alpha_1+2(l-1)\alpha_2+\ldots+i(l-i+1)\alpha_i+\ldots+l\alpha_l.$$

(VIII) Введем в $E=\mathbf{R}^{l+1}$ подгруппу L_0 из n° 4. Пусть p — ортогональное проектирование E на V. В соответствии с предложением 28 § 1, n° 10,

$$Q(R)=Q(R')\cap V=L_0\cap V \quad \text{и} \quad P(R)=p(P(R'));$$

принимая во внимание тот факт, что последний фундаментальный вес в R' ортогонален к V, получаем $P(R)=p(Q(R'))=$ $=p(L_0)$. Таким образом, $P(R)$ есть группа, порожденная корнями $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ и весом $p(\varepsilon_1)=\varepsilon_1-(l+1)^{-1}\sum_{i=1}^{l+1}\varepsilon_i$, т. е.

$$P(R)=Q(R)+\mathbf{Z}\left(\varepsilon_1-(l+1)^{-1}\sum_{i=1}^{l+1}\varepsilon_i\right).$$

Но $l+1$ является наименьшим целым числом $m>0$, для которого $mp(\varepsilon_1)\in Q(R)$. Поэтому факторгруппа $P(R)/Q(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/(l+1)\mathbf{Z}$, а индекс связности равен $l+1$.

(IX) и (X) Для всякого автоморфизма g гиперплоскости V обозначим через $\varphi(g)$ автоморфизм пространства E, который продолжает g и оставляет инвариантным $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_l$. Если взять в качестве g ортогональное отражение $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}|V$, то $\varphi(g)$ будет равно $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ и, следовательно, будет переставлять ε_i и ε_j, оставляя неподвижными ε_k с индексами k, отличными от i и j. Пусть

$$X = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+1}\}.$$

Тогда отображение $g \mapsto \varphi(g) | X$ будет изоморфизмом группы $W(R)$ на симметрическую группу множества X. Таким образом, $W(R)$ изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_{l+1}$ и, стало быть, имеет порядок $(l+1)!$.

Симметрическая алгебра $\mathsf{S}(E)$ канонически отождествляется с алгеброй полиномиальных функций $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{l+1})$ на E. Пусть $G = \varphi(W(R))$. Из сказанного выше следует, что множество $\mathsf{S}(E)^G$ инвариантных относительно G элементов в $\mathsf{S}(E)$ является множеством симметрических многочленов (*Алг.*, гл. V, приложение I) и, следовательно (*там же*), $\mathsf{S}(E)^G$ есть алгебра, порожденная функциями

$$s'_i = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{l+1}} \xi_{\tau(1)} \xi_{\tau(2)} \ldots \xi_{\tau(i)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant l+1).$$

Алгебра $\mathsf{S}(V)$ отождествляется с алгеброй сужений на V полиномиальных функций на E. Сужение функции $P \in S(E)^G$ на V, очевидно, инвариантно относительно $W(R)$. Обратно, если $Q \in \mathsf{S}(V)^{W(R)}$, то существует функция $P \in S(E)$, продолжающая Q; заменяя P функцией $((l+1)!)^{-1} \sum_{g \in G} g(P)$ с тем же сужением на V, что и у P, мы видим, что можно предполагать $P \in \mathsf{S}(E)^G$. Таким образом, $\mathsf{S}(V)^{W(R)}$ порождается функциями $s_i = s'_i | V$. Но $s_1 = 0$. Сверх того степень трансцендентности над $\mathbf{R}$ поля отношений алгебры $S(V)^{W(R)}$ равна l. Стало быть, s_i $(2 \leqslant i \leqslant l+1)$ алгебраически независимы, а поскольку их степени суть $2, 3, \ldots, l+1$, показателями группы $W(R)$ будут

$$1, 2, 3, \ldots, l.$$

(XI) При $l = 1$ имеем $A(R) = W(R) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и $w_0 = -1$. При $l \geqslant 2$ обозначим через ε автоморфизм из $A(R)$, который переводит α_i в α_{l+1-i}. Ясно, что автоморфизм графа Дынкина, индуцированный ε, является единственным нетривиальным автоморфизмом этого графа. Группа $A(R)/W(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Так как -1 есть элемент группы $A(R)$, который в соответствии с (IX) и (X) не принадлежит $W(R)$, то мы видим, что группа $A(R)$ изоморфна прямому произведению $W(R) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Получаем $w_0 = -\varepsilon$.

(XII) Группа $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$, будучи циклической порядка $l+1$, действует на пополненном графе Дынкина циклическими перестановками. При $l \geqslant 2$ единственный неединичный элемент группы $A(R)/W(R)$ действует на $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ как автоморфизм $x \mapsto -x$.

8. Системы типа D_l ($l \geqslant 3$)

(I) Рассмотрим в $V = \mathbf{R}^l$ группу L_0 (n° 4). Множество тех $\alpha \in L_0$, для которых $(\alpha|\alpha) = 2$, состоит из векторов $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$. Ясно, что R порождает V и что $2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha) \in \mathbf{Z}$, каковы бы ни были α, $\beta \in R$. Поэтому R является приведенной системой корней в V (n° 4). Число корней $n = 2l(l-1)$.

(II) Положим

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ \ldots, \ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \quad \alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l.$$

Немедленно приходим к формулам

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{j-1} \qquad (i < j),$$

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \ldots$$
$$\ldots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l \qquad (i < j \leqslant l-2),$$

$$\varepsilon_i + \varepsilon_{l-1} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_l \qquad (i < l-1),$$

$$\varepsilon_i + \varepsilon_l = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{l-2} + \alpha_l \qquad (i < l-1),$$

$$\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l = \alpha_l,$$

которые показывают, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ есть базис системы R (§ 1, n° 7, следствие 3 предложения 20). Кроме того $\|\alpha_i\|^2 = 2$ при всех i; $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ при $i+1 < j$, за исключением случая $i = l-2, j = l$, когда $(\alpha_{l-2}|\alpha_l) = -1$; $(\alpha_i|\alpha_{i+1}) = -1$ при $i \leqslant l-2$ и, наконец, $(\alpha_{l-1}|\alpha_l) = 0$; граф Дынкина системы R имеет, следовательно, тип D_l. Положительными корнями будут $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ для $i < j$.

(III) Имеем $h = \frac{n}{l} = 2(l-1)$.

(IV) Линейная комбинация $\tilde\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots$ $\ldots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$ является корнем. Сумма координат относительно (α_i) равна

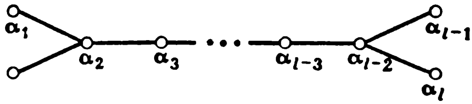
$$2l - 3 = h - 1.$$

Стало быть, $\tilde\alpha$ — максимальный корень.

При $l = 3$ имеем

$$(\tilde\alpha|\alpha_1) = 0, \quad (\tilde\alpha|\alpha_2) = (\tilde\alpha|\alpha_3) = 1.$$

При $l \geqslant 4$ имеем $(\tilde{\alpha} \mid \alpha_i) = 0$ для $i \neq 2$ и $(\tilde{\alpha} \mid \alpha_2) = 1$, так что пополненным графом Дынкина будет



(V) Так как $(\alpha \mid \alpha) = 2$ для всех $\alpha \in R$, то $R^\vee = R$. Длина корней по отношению к Φ_R равна $h^{-1/2} = (2l-2)^{-1/2}$. Получаем отсюда

$$\Phi_R(x, y) = (x \mid y)/(4l-4) \quad \text{и} \quad \gamma(R) = 4(l-1)^2.$$

(VI) Вычисления, аналогичные проведенным в n°7, дают фундаментальные веса:

$$\bar{\omega}_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i =$$
$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (i-1)\alpha_{i-1} +$$
$$+ i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{l-2}) + \frac{1}{2} i(\alpha_{l-1} + \alpha_l)$$

при $i < l-1$;

$$\bar{\omega}_{l-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2} l\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_l\right);$$
$$\bar{\omega}_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2} l\alpha_l\right).$$

(VII) Сумма положительных корней равна

$$2\rho = 2(l-1)\varepsilon_1 + 2(l-2)\varepsilon_2 + \ldots + 2\varepsilon_{l-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{l-2} 2\left(il - \frac{i(i+1)}{2}\right)\alpha_i + \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l).$$

(VIII) Корни $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ порождают L_1 (n° 4), поэтому $Q(R) = L_1$. Значит, $Q(R^\vee) = L_1$ и, следовательно, $P(R) = L_2$ (n° 4). Согласно n° 4, группа $P(R)/Q(R)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ при нечетном l и группе $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ при четном l. В первом случае $P(R)/Q(R)$ порождена каноническим образом веса $\bar{\omega}_l$ (а также образом веса $\bar{\omega}_{l-1}$). Во втором случае $P(R)/Q(R)$ порождена каноническими образами весов $\bar{\omega}_{l-1}$ и $\bar{\omega}_l$. В обоих случаях индекс связности равен 4.

(IX) и (X) Ортогональное отражение $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ $(i \neq j)$ в $\mathbf{R}^l$ переставляет местами ε_i и ε_j и оставляет инвариантными ε_k

с индексами k, отличными от i и j. Отражения $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ порождают группу G_1, изоморфную симметрической группе $\mathfrak{S}_l$. С другой стороны, $s_{ij}=s_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}s_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}$ переводит ε_i в $-\varepsilon_i$, ε_j в $-\varepsilon_j$ и оставляет инвариантными ε_k с индексами k, отличными от i и j. Элементы s_{ij} порождают группу G_2 — множество автоморфизмов u векторного пространства $\mathbf{R}^l$, для которых $u(\varepsilon_i)=(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i$ с $\prod\limits_{i=1}^{l}(-1)^{\nu_i}=1$. Группа G_2 изоморфна $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}$ и нормальна в $W(R)$, так что группа $W(R)$ изоморфна полупрямому произведению $\mathfrak{S}_l$ на $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}$. Ее порядок, следовательно, равен $2^{l-1}.l!$.

Полиномиальные функции t_i из n°5 инвариантны относительно $W(R)$, так же как и функция $t=\xi_1\xi_2\ldots\xi_l$; кроме того, $t_l=t^2$. Пусть, далее, $P(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ — полиномиальная функция, инвариантная относительно $W(R)$. Пусть $\xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2}\ldots$ $\ldots\ \xi_l^{\nu_l}$ — входящий в P одночлен, для которого ν_i нечетно; тогда ν_j нечетно при всех j, потому что в $s_{ij}(P)$ входит одночлен $(-1)^{\nu_i+\nu_j}\xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2}\ldots\xi_l^{\nu_l}$, откуда $\nu_i+\nu_j\equiv 0 \pmod 2$, и $\nu_j\equiv 1 \pmod 2$. Стало быть, $P=P_1+tP_2$, где все одночлены, входящие в P_1 и P_2, обладают только четными показателями. Так как P инвариантен относительно перестановок переменных ξ_i, то P_1 и P_2 обладают тем же свойством и, значит, записываются в виде многочленов от $t_1, t_2, \ldots, t_l$. Тем самым доказано, что алгебра $S(\mathbf{R}^l)^{W(R)}$ порождена функциями $t_1, t_2, \ldots, t_{l-1}, t$. Кроме того, степень трансцендентности поля отношений алгебры $S(\mathbf{R}^l)^{W(R)}$ есть l, так что $t_1, t_2, \ldots, t_{l-1}, t$ алгебраически независимы. Приходим к заключению, что последовательностью показателей, надлежащим образом упорядоченной, будет

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2l-5,\ 2l-3,\ l-1.$$

Заметим, что $l-1$ появляется здесь дважды, когда l четно, и один раз, когда l нечетно.

(XI) Автоморфизмы графа Дынкина будут автоморфизмами подчиненного ему графа. Поэтому

1) Если $l=3$, то группа $A(R)/W(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

2) Если $l=4$, то всякая перестановка концевых вершин определяет некоторый автоморфизм графа, так что группа $A(R)/W(R)$ изоморфна $\mathfrak{S}_3$.

3) Если $l\geqslant 5$, то цепи, выходящие из точки ветвления α_{l-2}, будут иметь длины 1, 1 и $l-3\geqslant 2$. Следовательно, единственный автоморфизм графа, отличный от тождественного,

соответствует автоморфизму $\varepsilon \in A(R)$, который переставляет α_{l-1} и α_l, оставляя неподвижными α_i при $1 \leqslant i \leqslant l-2$. Стало быть, группа $A(R)/W(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; более того, группа $A(R)$ является полупрямым произведением группы $G_1 \cong \mathfrak{S}_l$, определенной в (IX), на группу G_3, состоящую из автоморфизмов u пространства $\mathbf{R}^l$, таких, что $u(\varepsilon_i) = \pm \varepsilon_i$ при всех i.

Если l четно, то $-1 \in W(R)$, откуда $w_0 = -1$. Если же l нечетно, то $-1 \notin W(R)$, откуда $A(R) = W(R) \times \{1, -1\}$ и $w_0 = -\varepsilon$.

(XII) При четном l в $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ имеется три элемента порядка 2: ω_1, ω_{l-1} и ω_l. Поскольку ω_l (соотв. ω_{l-1}) переставляет вершины, отвечающие корням α_0 и α_l (соотв. α_{l-1}), он переставляет вершины, отвечающие корням α_1 и α_{l-1} (соотв. α_l), а также вершины, отвечающие корням α_j и α_{l-j} для

$$2 \leqslant j \leqslant l-2.$$

Получаем $\omega_1 = \omega_l \omega_{l-1}$.

При нечетном l в $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ имеется два элемента ω_{l-1} и ω_l порядка 4 и один элемент порядка 2, а именно ω_1. В самом деле, ω_1 меняет местами вершины, отвечающие корням α_0 и α_1, поэтому он оставляет неподвижными вершины, отвечающие корням α_j для $2 \leqslant j \leqslant l-2$, и необходимым образом имеет порядок 2. Следовательно, ω_l имеет порядок 4 и переводит вершину, отвечающую корню α_0 (соотв. α_l, α_1, α_{l-1}), в вершину, отвечающую корню α_l (соотв. α_1, α_{l-1}, α_0), а вершины, отвечающие корням α_j и α_{l-j} для $2 \leqslant j \leqslant l-2$, меняет местами. Получаем $\omega_1 = \omega_l^2$ и $\omega_{l-1} = \omega_l^3$.

При $l \neq 4$ неединичный элемент группы $A(R)/W(R)$ меняет местами вершины, отвечающие корням α_{l-1} и α_l, и, следовательно, переставляет элементы ω_{l-1} и ω_l группы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$. При нечетном l получающийся таким образом автоморфизм группы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ совпадает с отображением $x \mapsto -x$.

При $l = 4$ группа $A(R)/W(R)$ отождествляется с группой перестановок множества $\{1, 2, 3\}$ и действует перестановкой индексов на $\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$.

9. *Система типа F_4*

(I) Рассмотрим в $\mathbf{R}^4$ группу L_2 (n°4). Пусть R — множество тех $\alpha \in L_2$, для которых $(\alpha|\alpha) = 1$ или $(\alpha|\alpha) = 2$; оно содержит векторы

$$\pm \varepsilon_i, \quad \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (i < j), \quad \frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Обратно, если $\alpha \in R$, то координаты вектора α принимают лишь значения $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ $\left(\text{потому что } \left(\frac{3}{2}\right)^2 > 2\right)$; эти координаты будут либо все целыми, что приводит к векторам $\pm\varepsilon_i$, $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, либо все равными $\pm\frac{1}{2}$, что приводит к векторам $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$.

Покажем, что $2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha) \in \mathbf{Z}$ для любых $\alpha, \beta \in R$. Если $\alpha = \pm\varepsilon_i$ или $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$, то $(\alpha|\alpha) = 1$, а в n°4 мы видели, что $(\alpha|\beta) \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, поскольку $\alpha, \beta \in L_2$. Если же $\alpha = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, то $(\alpha|\alpha) = 2$, и опять-таки на основании n°4 мы заключаем, что $(\alpha|\beta) \in \mathbf{Z}$, поскольку $\alpha \in L_1$ и $\beta \in L_2$. Стало быть, R является приведенной системой корней в $\mathbf{R}^4$ (n°4). Число корней $n = 8 + \binom{4}{2}4 + 2^4 = 48$.

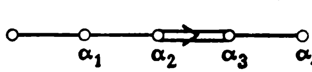
(II) Снабдим $\mathbf{R}^4$ лексикографическим порядком, определенным при помощи базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ (§ 1, n°7). В частности, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \varepsilon_4$. Положительными корнями будут

$$\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (i < j), \quad \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Наименьшим является корень $\alpha_3 = \varepsilon_4$. Среди положительных корней, содержащихся в $\mathbf{R}\varepsilon_3 + \mathbf{R}\varepsilon_4$, но не в $\mathbf{R}\varepsilon_4$, наименьшим будет $\alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$. Среди положительных корней, содержащихся в $\mathbf{R}\varepsilon_2 + \mathbf{R}\varepsilon_3 + \mathbf{R}\varepsilon_4$, но не в $\mathbf{R}\varepsilon_3 + \mathbf{R}\varepsilon_4$, наименьшим будет $\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$. Наконец, среди положительных корней, не содержащихся в $\mathbf{R}\varepsilon_2 + \mathbf{R}\varepsilon_3 + \mathbf{R}\varepsilon_4$, наименьшим будет $\alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$. Ни один из α_i не является суммой двух положительных корней. Поэтому $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ есть базис системы R (§ 1, n°6, следствие 1 предложения 19). Имеем $\|\alpha_1\|^2 = \|\alpha_2\|^2 = 2$, $\|\alpha_3\|^2 = \|\alpha_4\|^2 = 1$, $(\alpha_1|\alpha_2) = (\alpha_2|\alpha_3) = -1$, $(\alpha_3|\alpha_4) = -\frac{1}{2}$, $(\alpha_1|\alpha_3) = (\alpha_1|\alpha_4) = (\alpha_2|\alpha_4) = 0$. Мы видим, что система R соответствует графу Дынкина типа F_4 и, стало быть, является неприводимой.

(III) Имеет место равенство $h = \frac{n}{l} = 12$.

(IV) Пусть $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$. Сумма координат вектора $\tilde{\alpha}$ относительно (α_i) равна $11 = h - 1$, поэтому $\tilde{\alpha}$ — максимальный корень. Так как $(\tilde{\alpha}|\alpha_1) = 1$, $(\tilde{\alpha}|\alpha_2) = (\tilde{\alpha}|\alpha_3) = (\tilde{\alpha}|\alpha_4) = 0$, то пополненным графом Дынкина будет



(V) Как видно из формулы $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha\,|\,\alpha)}$, $R^\vee$ совпадает с множеством векторов $\pm 2\varepsilon_i$, $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$. Граф Дынкина системы $R^\vee$ получается из графа Дынкина системы способом, описанным в n° 2, и непосредственно видно, что $R^\vee$ имеет тип F_4.

Корнями, не ортогональными к $\beta = \varepsilon_1$, будут $\pm\varepsilon$, $\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$ ($j \geqslant 2$) и $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$; число $n(\alpha, \beta) = 2(\alpha\,|\,\beta)$ равно ± 2 для первых 14 этих корней и ± 1 для 16 остальных; значит, квадрат длины корня β относительно Φ_R равен $4(14 \cdot 4 + 16 \cdot 1)^{-1} = \frac{1}{18}$ и поэтому

$$\Phi_R(x, y) = (x\,|\,y)/18.$$

Применяя теперь формулу (18) из § 1, n° 12, с $x = y = \beta$, получаем

$$2 + 12 \cdot \frac{1}{4} + 16\,\frac{1/4}{1} = \gamma(R) \cdot \frac{1}{18},$$

откуда

$$\gamma(R) = 2 \cdot 3^4.$$

(VI) Вычисление фундаментальных весов здесь дает

$$\bar\omega_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = \tilde\alpha,$$

$$\bar\omega_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4\alpha_4,$$

$$\bar\omega_3 = \frac{1}{2}(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4,$$

$$\bar\omega_4 = \varepsilon_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

(VII) Сумма положительных корней равна

$$2\rho = 11\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 16\alpha_1 + 30\alpha_2 + 42\alpha_3 + 22\alpha_4.$$

(VIII) Справедливо равенство $Q(R) = L_2$ (n° 4), и, согласно (VI), $P(R) = Q(R)$. Поэтому индекс связности равен 1.

(IX) Семейство показателей состоит из 4 членов, а поскольку $h = 12$, целые числа 1, 5, 7, 11, взаимно простые с 12, должны входить в это семейство (§ 1, n° 11, предложение 30); ими исчерпываются, следовательно, все показатели группы $W(R)$.

(X) и (XI) Единственным автоморфизмом графа Дынкина является тождественное отображение, поэтому $A(R) = W(R)$ и $w_0 = -1$. Пусть R' — множество элементов в R наибольшей длины, т. е. $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$; R' есть система корней типа D_4, построенная в n° 8. Всякий элемент группы $A(R)$ будет, очевидно, элементом группы $A(R')$. Обратно, элемент из $A(R')$

оставляет устойчивым модуль L_1 (который порождается системой R'), а также ассоциированный с ним модуль L_2 и, следовательно, R. Получаем отсюда $W(R) = A(R) = A(R')$. Поэтому, согласно n° 8, $W(R)$ является полупрямым произведением $\mathfrak{S}_3$ и $W(R')$, а $W(R')$ в свою очередь является полупрямым произведением $\mathfrak{S}_4$ и $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$. Порядок группы $W(R)$ равен $3!4!2^3 = 2^7 \cdot 3^2$.

10. Система типа E_8

(I) Рассмотрим в $\mathbf{R}^8$ группу L_3 (n° 4). Пусть R — множество тех $\alpha \in L_3$, для которых $(\alpha|\alpha) = 2$; оно содержит векторы

$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (i < j), \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i \quad \left(\text{сумма } \sum_{i=1}^{8}\nu(i) \text{ — четная}\right).$$

Обратно, если $(\alpha|\alpha) = 2$ для какого-то элемента $\alpha \in L_3$, то его координаты могут принимать лишь значения $0, \pm\frac{1}{2}$, ± 1; согласно n° 4, эти координаты будут либо все целыми, что приводит к векторам $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, либо все равными $\pm\frac{1}{2}$ и с четной суммой, что приводит к векторам

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i$$

с четной суммой $\sum_{i=1}^{8}\nu(i)$.

Мы видели (n° 4), что $(\alpha|\beta) \in \mathbf{Z}$, каковы бы ни были $\alpha, \beta \in L_3$. Поэтому R является приведенной системой корней. Число корней $n = \binom{8}{2}\cdot 4 + 2^7 = 240$.

(II) Пусть ρ — вектор $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 23)$ из L_3. Ни один элемент в R не ортогонален к ρ (это ясно для $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$; если бы вектор $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i$ был ортогонален к ρ, то имело бы место равенство $\sum_{i=1}^{6} i(-1)^{\nu(i+1)} + 23(-1)^{\nu(8)} = 0$, что невозможно, поскольку $\sum_{i=1}^{6} i < 23$). Значит (§ 1, n° 7, следствие 2 предложения 20), векторы $\alpha \in R$, для которых $(\alpha|\rho) > 0$, будут положительными корнями относительно некоторой камеры. К этим корням относятся $\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(i < j)$ и

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{7} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\right)$$

с четной суммой $\sum\limits_{i=1}^{7} \nu(i)$. Имеем $(\alpha|\rho) \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in R$ (n° 4), причем $(\alpha|\rho)$ равно 1 для следующих корней:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7),$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \quad \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3,$$

$$\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \quad \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5, \quad \alpha_8 = \varepsilon_7 - \varepsilon_6,$$

и эти восемь корней образуют базис в $\mathbf{R}^8$. В соответствии с следствием 1 предложения 19 § 1, n° 6, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8)$ — базис системы R, для которого положительными корнями будут как раз определенные выше корни. Так как

$$(\alpha_4|\alpha_5) = (\alpha_5|\alpha_6) = (\alpha_6|\alpha_7) = (\alpha_7|\alpha_8) = (\alpha_4|\alpha_2) = \\ = (\alpha_4|\alpha_3) = (\alpha_3|\alpha_1) = -1$$

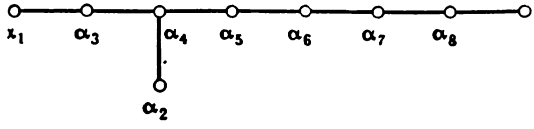
и $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ для других пар индексов, то граф Дынкина системы R имеет тип E_8, а система R является неприводимой.

(III) Имеем $h = \frac{n}{8} = 30$.

(IV) Линейная комбинация

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$$

является корнем. Сумма координат относительно (α_i) равна $29 = h - 1$, так что $\tilde{\alpha}$ есть максимальный корень. Он ортогонален ко всем α_i, за исключением α_8, причем $(\tilde{\alpha}|\alpha_8) = 1$. Отсюда заключаем, что пополненным графом Дынкина будет



(V) Так как $(\alpha|\alpha) = 2$ для всех $\alpha \in R$, то $R^\vee = R$.

По отношению к Φ_R квадрат длины корней равен $\frac{1}{30}$ (§ 1, n° 12). Поэтому $\Phi_R(x, y) = (x|y)/60$ и $\gamma(R) = 900$ (§ 1, n° 12, формула (20)).

(VI) Вычисление фундаментальных весов дает

$$\bar{\omega}_1 = 2\varepsilon_8 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 10\alpha_4 + 8\alpha_5 + 6\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 5\varepsilon_8) =$$
$$= 5\alpha_1 + 8\alpha_2 + 10\alpha_3 + 15\alpha_4 + 12\alpha_5 + 9\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_3 = \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 7\varepsilon_8) =$$
$$= 7\alpha_1 + 10\alpha_2 + 14\alpha_3 + 20\alpha_4 + 16\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 5\varepsilon_8 =$$
$$= 10\alpha_1 + 15\alpha_2 + 20\alpha_3 + 30\alpha_4 + 24\alpha_5 + 18\alpha_6 + 12\alpha_7 + 6\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_5 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 4\varepsilon_8 =$$
$$= 8\alpha_1 + 12\alpha_2 + 16\alpha_3 + 24\alpha_4 + 20\alpha_5 + 15\alpha_6 + 10\alpha_7 + 5\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_6 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 3\varepsilon_8 =$$
$$= 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_7 = \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 2\varepsilon_8 =$$
$$4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 8\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_8 = \varepsilon_7 + \varepsilon_8 =$$
$$= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 = \tilde{\alpha}.$$

(VII) Полусумма положительных корней совпадает с суммой фундаментальных весов (§ 1, n° 10, предложение 29) и, следовательно, равна

$$\rho = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 5\varepsilon_6 + 6\varepsilon_7 + 23\varepsilon_8 =$$
$$= 46\alpha_1 + 68\alpha_2 + 91\alpha_3 + 135\alpha_4 + 110\alpha_5 + 84\alpha_6 + 57\alpha_7 + 29\alpha_8.$$

(VIII) Группа $Q(R)$ порождается корнями $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ и $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i$ и совпадает с L_3 (n° 4). Поэтому группа $P(R)$, которая ассоциирована с $Q(R^\vee) = Q(R) = L_3$, тоже есть L_3 (n° 4). Индекс связности равен 1.

(IX) Семейство показателей состоит из восьми членов, а поскольку $h = 30$, целые числа 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, взаимно простые с 30, должны входить в это семейство; это будет, следовательно, полная совокупность показателей группы $W(R)$.

(X) Из (IX) и из следствия 1 предложения 3 гл. V, § 6, n° 2, выводим, что порядок группы $W(R)$ равен

$$2.8.12.14.18.20.24.30 = 2^{14}.3^{5}.5^{2}.7.$$

(XI) Единственным автоморфизмом графа Дынкина является тождественный, поскольку три цепи, исходящие из точки ветвления, имеют различные длины. Стало быть, $A(R) = W(R)$ и $w_0 = -1$.

11. Система типа E_7

(I) и (II) Пусть $E = \mathbf{R}^8$, и пусть R_8 — система корней в E, построенная в n° 10. Пусть V — гиперплоскость в E, порожденная корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$ системы R_8; она ортогональна к восьмому фундаментальному весу $\omega = \varepsilon_7 + \varepsilon_8$ системы R_8.

Пусть $R = R_8 \cap V$. Тогда R будет приведенной системой корней с базисом $(\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$ (см. следствие 4 предложения 20 § 1, n° 7); значит, эта система имеет тип E_7. Ее элементами являются

$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 6), \qquad \pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8),$$

$$\pm \frac{1}{2}\left(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\right) \text{ с нечетной суммой } \sum_{i=1}^{6} \nu(i).$$

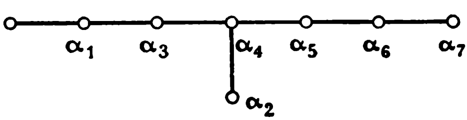
Число корней $n = 2 + \binom{6}{2} . 4 + 2^6 = 126$. Положительными корнями являются

$$\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 6), \qquad -\varepsilon_7 + \varepsilon_8,$$

$$\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_7 + \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\right) \text{ с нечетной суммой } \sum_{i=1}^{6} \nu(i).$$

(III) Имеем $h = \frac{n}{l} = 18$.

(IV) Линейная комбинация $\tilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$ является корнем. Сумма координат относительно (α_i) равна $17 = h - 1$, так что $\tilde{\alpha}$ есть максимальный корень. Он ортогонален к α_i при $2 \leqslant i \leqslant 7$, а $(\tilde{\alpha} | \alpha_1) = 1$, поэтому пополненным графом Дынкина будет



(V) Так как $(\alpha | \alpha) = 2$ для всех $\alpha \in R$, то $R^\vee = R$.

По отношению к Φ_R квадрат длины корней равен 1/18, поэтому

$$\Phi_R(x, y) = (x | y)/36 \text{ и } \gamma(R) = 2^2 . 3^4$$

(§ 1, n° 12 формула (20)).

(VI) Вычисление фундаментальных весов дает

$$\bar{\omega}_1 = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 = \tilde{\alpha},$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 2\varepsilon_7 + 2\varepsilon_8) =$$

$$= \frac{1}{2}(4\alpha_1 + 7\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 8\alpha_6 + 3\alpha_7),$$

$$\bar{\omega}_3 = \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 3\varepsilon_7 + 3\varepsilon_8) =$$

$$= 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7,$$

$$\bar{\omega}_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + 2(\varepsilon_8 - \varepsilon_7) =$$

$$= 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7,$$

$$\bar{\omega}_5 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \frac{3}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7) =$$

$$= \frac{1}{2}(6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 10\alpha_6 + 5\alpha_7),$$

$$\bar{\omega}_6 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8 =$$

$$= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7,$$

$$\bar{\omega}_7 = \varepsilon_6 + \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7) =$$

$$= \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7).$$

(VII) Сумма 2ρ положительных корней равна $2\sum_{i=1}^{7}\bar{\omega}_i$ (§ 1, n° 10, предложение 29), откуда

$$2\rho = 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 8\varepsilon_5 + 10\varepsilon_6 - 17\varepsilon_7 + 17\varepsilon_8 =$$

$$= 34\alpha_1 + 49\alpha_2 + 66\alpha_3 + 96\alpha_4 + 75\alpha_5 + 52\alpha_6 + 27\alpha_7.$$

(VIII) Согласно n° 10, (VIII) и предложению 28 § 1, n° 10,

$$Q(R) = Q(R_8) \cap V = L_3 \cap V \quad \text{и} \quad P(R) = p(P(R_8)) = p(L_3),$$

где p обозначает ортогональное проектирование E на V. Группа $Q(R)$ обладает базисом $(\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$; группа $P(R)$ порождается группой $Q(R)$ и элементом

$$p(\alpha_8) = \alpha_8 - \frac{1}{2}\omega.$$

Имеем $\omega \in P(R_8)$, $\frac{1}{2}\omega \notin P(R_8)$, поэтому $2p(\alpha_8) \in Q(R)$, а $p(\alpha_8) \notin Q(R)$. Получаем, таким образом, что группа $P(R)/Q(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и порождена, например, образом веса $\bar{\omega}_7$.

Индекс связности равен 2.

(IX) Последовательность показателей группы $W(R)$ состоит из семи членов. Числа 1, 5, 7, 11, 13, 17, взаимно простые с $h=18$, входят в эту последовательность. Последний показатель m, следовательно, должен быть таким, чтобы $m+m=18$ (гл. V, § 6, n° 2, формула (2)). Стало быть, полная последовательность показателей такова:

$$1,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 17.$$

(X) Из (IX) и из следствия 1 предложения 3 гл. V, § 6, n° 2, выводим, что порядок группы $W(R)$ равен

$$2\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 14=2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7.$$

(XI) Единственным автоморфизмом графа Дынкина является тождественное отображение, поэтому $A(R)=W(R)$ и $w_0=-1$.

(XII) Группа $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ обладает единственным неединичным элементом. Он переставляет вершины, отвечающие корням α_0 и α_7, α_1 и α_6, α_3 и α_5, оставляя неподвижными α_2 и α_4.

12. *Система типа E_6*

(I) и (II) Пусть $E=\mathbf{R}^8$, и пусть R_8 — система корней в E, построенная в n° 10. Пусть V — векторное подпространство в E, порожденное корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ системы R_8; оно ортогонально к плоскости, порожденной двумя последними фундаментальными весами $\omega=\varepsilon_7+\varepsilon_8$ и $\pi=\varepsilon_6+\varepsilon_7+2\varepsilon_8$ системы R_8.

Пусть $R=R_8\cap V$. Это приведенная система корней с базисом $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$, имеющая, следовательно, тип E_6. Ее элементами являются

$$\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j \qquad (1\leqslant i<j\leqslant 5),$$

$$\pm\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6+\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \text{ с четной суммой } \sum_{i=1}^{5}\nu(i).$$

Число корней $n=\binom{5}{2}\cdot 4+2^5=72$. Положительными корнями будут

$$\pm\varepsilon_i+\varepsilon_j \qquad (1\leqslant i<j\leqslant 5),$$

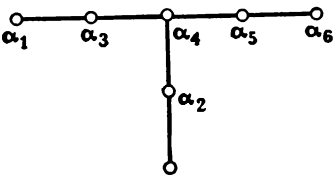
$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6+\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \text{ с четной суммой } \sum_{i=1}^{5}\nu(i).$$

(III) Имеем $h=\dfrac{n}{6}=12.$

(IV) Линейная комбинация

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8) = \\ = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$$

является корнем. Сумма координат относительно (α_i) равна $11 = h - 1$, поэтому $\tilde{\alpha}$ — максимальный корень. Он ортогонален к α_1, α_3, α_4, α_5, α_6, а $(\tilde{\alpha}\,|\,\alpha_2) = 1$. Пополненный граф Дынкина имеет вид



(V) Так как $(\alpha\,|\,\alpha) = 2$ для всех $\alpha \in R$, то $R^\vee = R$. По отношению к Φ_R квадрат длины корней равен $^1/_{12}$, так что

$$\Phi_R(x,\ y) = (x\,|\,y)/24 \quad \text{и} \quad \gamma(R) = 144.$$

(VI) Вычисление фундаментальных весов дает

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) = \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6),$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8) = \\ = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 = \tilde{\alpha},$$

$$\bar{\omega}_3 = \frac{5}{6}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5) = \\ = \frac{1}{3}(5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 10\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6),$$

$$\bar{\omega}_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8 = \\ = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6,$$

$$\bar{\omega}_5 = \frac{2}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = \\ = \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 5\alpha_6),$$

$$\bar{\omega}_6 = \frac{1}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \varepsilon_5 = \\ = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6).$$

(VII) Полусумма ρ положительных корней совпадает с $\sum_{i=1} \bar{\omega}_i$, откуда

$$\rho = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 4(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) =$$
$$= 8\alpha_1 + 11\alpha_2 + 15\alpha_3 + 21\alpha_4 + 15\alpha_5 + 8\alpha_6.$$

(VIII) Согласно n° 10, (VIII) и предложению 28 § 1, n° 10,

$$Q(R) = Q(R_8) \cap V = L_3 \cap V \quad \text{и} \quad P(R) = p(P(R_8)) = p(L_3),$$

где p обозначает ортогональное проектирование E на V. Имеем

$$p(\alpha_7) = \alpha_7 - \frac{2}{3}\pi + \omega, \quad p(\alpha_8) = \alpha_8 + \pi - 2\omega.$$

Группа $Q(R)$ обладает базисом $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$. Группа $P(R)$ порождена группой $Q(R)$ и элементом $p(\alpha_7)$, потому что $p(\alpha_8) \in P(R_8) \cap V = Q(R_8) \cap V = Q(R)$. Так как $3p(\alpha_7) \in Q(R)$, а $p(\alpha_7) \notin Q(R)$, то группа $P(R)/Q(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$; она порождается, например, образом веса $\bar{\omega}_6$.

Индекс связности равен 3.

(IX) и (X) В соответствии с предложением 7 § 2, n° 4, порядок группы Вейля равен $6!\,1.2.2.3.2.1.3 = 2^7.3^4.5$. Последовательность показателей из шести членов заключена между 1 и 11 и имеет в своем составе целые числа 1, 5, 7, 11, взаимно простые с 12. Другими показателями m, m' будут целые числа, такие, что

$$m + m' = 12,$$
$$(m+1)(m'+1)(1+1)(5+1)(7+1)(11+1) = 2^7.3^4.5,$$

как это утверждают формула (2) и следствие 1 предложения 3 гл. V, § 6, n° 2. Второе соотношение дает $(m+1)\times(m'+1) = 45$, а так как $m + m' + 2 = 14$, то получаем $m = 4$, $m' = 8$. Стало быть, полная последовательность показателей есть

$$1,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11.$$

(XI) и (XII) Поскольку все корни одной и той же длины, автоморфизмами графа Дынкина будут автоморфизмы подчиненного графа. Кроме тождественного, имеется еще один автоморфизм ε, который переводит α_1, α_3, α_4, α_5, α_6, α_2 соответственно в α_6, α_5, α_4, α_3, α_1, α_2. Следовательно, группа $A(R)/W(R)$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; так как $-1 \notin W(R)$ (гл. V, § 6, n° 2, следствие 3 предложения 3), то группа $A(R)$ изоморфна $W(R) \times \{1, -1\}$, а w_0 отождествляется с $-\varepsilon$. Отсюда следует, что неединичный элемент из $A(R)/W(R)$ определяет автоморфизм $x \mapsto -x$ группы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$.

Далее, в $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ имеется два неединичных элемента порядка 3. Оба они определяют по одному автоморфизму порядка 3 пополненного графа Дынкина.

13. Система типа G_2

(I) Пусть V — гиперплоскость в $E = \mathbf{R}^3$, определенная уравнением

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0.$$

Пусть R — множество тех $\alpha \in L_0 \cap V$, для которых $(\alpha|\alpha) = 2$ или $(\alpha|\alpha) = 6$. Элементами множества R являются

$$\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3),$$
$$\pm(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Поэтому R порождает V и $\frac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} \in \mathbf{Z}$, каковы бы ни были $\alpha, \beta \in R$; это очевидно, когда $\beta = \pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ с $i \neq j$; если же, например, $\beta = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, то $(\alpha|\beta) \in 3\mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in R$, что, конечно, влечет наше утверждение. Поэтому R есть приведенная система корней в V. Число корней $n = 12$.

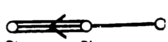
(II) Положим $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Корни тогда принимают вид

$$\pm\alpha_1, \quad \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm\alpha_2,$$
$$\pm(3\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Следовательно, (α_1, α_2) — базис системы R. Так как $\|\alpha_1\|^2 = 2$, $\|\alpha_2\|^2 = 6$, $(\alpha_1|\alpha_2) = -3$, то R — система типа G_2. Положительными корнями являются α_1, $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, α_2, $3\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

(III) Имеем $h = \frac{n}{2} = 6$.

(IV) Максимальным корнем будет $\tilde\alpha = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$. Поскольку $(\tilde\alpha|\alpha_1) = 0$, $(\tilde\alpha|\alpha_2) = 3$, пополненным графом Дынкина будет



α_1 α_2

(V) Дуальная система $R^\vee$ совпадает с множеством следующих векторов:

$$\pm\alpha_1, \quad \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm\frac{1}{3}\alpha_2,$$
$$\pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Существует 10 корней, не ортогональных к α_1; имеем $n(\beta, \alpha_1) = \pm 1$ для 4 из этих корней, $n(\beta, \alpha_1) = \pm 3$ для 4 других и $n(\beta, \alpha_1) = \pm 2$ для $\beta = \pm \alpha_1$. Поэтому квадрат длины корня α_1 относительно Φ_R равен $4(4.1 + 4.9 + 2.4)^{-1} = {}^1/_{12}$, и $\Phi_R(x, y) = (x \mid y)/24$. Применяя теперь формулу (18) из § 1, n° 12, с $x = y = \alpha_1$, получаем

$$2 + 4 . \frac{1}{4} + 4 . \frac{1}{4} = \gamma(R) . \frac{1}{12},$$

откуда $\gamma(R) = 48$.

(VI) и (VII) Полусумма положительных корней равна

$$\rho = 5\alpha_1 + 3\alpha_2.$$

Фундаментальные веса $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, ортогональные к α_2 и α_1, пропорциональны соответственно $2\alpha_1 + \alpha_2$ и $3\alpha_1 + 2\alpha_2$. Имеем

$$\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \rho = 5\alpha_1 + 3\alpha_2 = (2\alpha_1 + \alpha_2) + (3\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Следовательно,

$$\bar{\omega}_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \bar{\omega}_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \tilde{\alpha}.$$

(VIII) $Q(R)$ порождается, например, корнями $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$. В силу (VI) и (VII) $P(R) = Q(R)$. Индекс связности равен 1.

(IX) Семейство показателей состоит из двух членов; так как 1 и $h - 1$ — показатели, то ими все и исчерпывается.

(X) Поскольку $(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \frac{5\pi}{6}$, группа $W(R)$ изоморфна диэдральной группе порядка 12.

(XI) Единственным автоморфизмом графа Дынкина является тождественное отображение, так что $A(R) = W(R)$ и $w_0 = -1$.

14. Неприводимые системы корней, не являющиеся приведенными

Неприводимые системы корней, не являющиеся приведенными, получаются из неприводимых приведенных систем по образцу, описанному в предложениях 13 и 14 § 1, n° 4. Для каждого целого числа $l \geqslant 1$ существует с точностью до изоморфизма единственная неприводимая и неприведенная система корней ранга l. Именно пусть R — система корней типа B_l, A — множество корней наименьшей длины в R; возьмем объединение множеств R и $2A$. Получим, в обозначениях n° 5, векторы

$$\pm \varepsilon_i, \quad \pm 2\varepsilon_i, \quad \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \qquad (i < j)$$

в количестве $2l(l + 1)$.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1.

Все рассматриваемые ниже системы корней связаны с *вещественными* векторными пространствами. Через $(x \mid y)$ обозначается скалярное произведение, инвариантное относительно группы Вейля (n° 3).

1) Пусть R — система корней, $R = R_1 \cup R_2$ — ее разбиение. Предположим, что если x, y — два элемента из R_i и $x + y$ (соотв. $x - y$) — корень, то и $x + y \in R_i$ (соотв. $x - y \in R_i$), причем это верно для $i = 1, 2$. Тогда R будет прямой суммой систем R_1 и R_2. (Показать, используя следствие теоремы 1, n° 3, что если $x \in R_1$, а $y \in R_2$, то $(x \mid y) = 0$.)

2) Пусть R — система корней, α и β — два корня. Если t — такой скаляр, что $\beta + t\alpha \in R$, то $2t \in \mathbf{Z}$. (Ибо $n(\beta + t\alpha, \alpha) = n(\beta, \alpha) + 2t$.) Если корень α неделим, то $t \in \mathbf{Z}$. (В противном случае, используя предложение 9, показать, что найдется ортогональный к α корень γ, для которого $\gamma + \frac{1}{2}\alpha \in R$; тогда $\left(\gamma + \frac{1}{2}\alpha \mid \alpha\right) > 0$, откуда $\frac{1}{2}\alpha \in R$.)

3) Пусть R — система корней в V, неприводимая и неприведенная. Существует невырожденная симметрическая билинейная форма Φ на V, такая, что если отождествить V с V^* при помощи Φ, то $R = R^\vee$. (Использовать предложение 13.)

4) Пусть Γ — свободный $\mathbf{Z}$-модуль конечного ранга l, Γ^* — дуальный $\mathbf{Z}$-модуль, I — конечное множество индексов, $(x_i, x_i^*)_{i \in I}$ — семейство элементов из $\Gamma \times \Gamma^*$, для которых $\langle x_i, x_i^* \rangle = 2$ при всех $i \in I$, $s_i = s_{x_i, x_i^*}$. Пусть V — вещественное векторное пространство, дуальное к которому пространство V^* отождествляется с $\Gamma^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Обозначим также через s_i отражение $s_i \otimes 1$ в V. Пусть R (соотв. R') — множество элементов x_i (соотв. x_i^*). Пусть E (соотв. E') — подпространство в V (соотв. V^*), порожденное множеством R (соотв. R'). Предположим, что $s_i(R) = R$ при всех i. Тогда R является системой корней в E, E' канонически отождествляется с дуальным к E пространством, а x_i^* — с $x_i^\vee$ при всех i. Если F (соотв. F') — подпространство в V (соотв. V^*), состоящее из инвариантных относительно всех s_i (соотв. ${}^t s_i$) точек, то $\Gamma \cap F$ (соотв. $\Gamma^* \cap F'$) порождает F (соотв. F'). Положив $\Gamma_1 = (\Gamma \cap E) \oplus (\Gamma \cap F)$ (соотв. $\Gamma_1^* = (\Gamma^* \cap E') \oplus (\Gamma^* \cap F')$), придем к изоморфным конечным группам Γ/Γ_1 и Γ^*/Γ_1^*.

5) Пусть R — неприводимая система корней. При любом $\beta \in R$ справедливо соотношение

$$16\gamma(R) = \left(\sum_{\alpha \in R} n(\alpha, \beta)^2\right)\left(\sum_{\alpha \in R} n(\beta, \alpha)^2\right)$$

и, следовательно, $\gamma(\lambda R) = \gamma(R)$ для произвольного ненулевого скаляра λ. (Использовать формулы (17) и (19) n° 12.)

6) а) Пусть A — коммутативная группа конечного типа и T — конечное подмножество в A, не содержащее 0. Существует подгруппа H конечного индекса в A, такая, что $H \cap T = \varnothing$. (Пусть $t \in T$. Используя строение коммутативных групп конечного типа, построить подгруппу конечного индекса в A, не содержащую t. Затем применить индукцию по Card T.)

б) Пусть R — система корней, P — замкнутое симметричное подмножество в R. Существует такая подгруппа H конечного индекса в $Q(R)$, что $P = H \cap R$. (Перейти к факторгруппе по подгруппе в $Q(R)$, порожденной множеством P, а затем использовать а) и предложение 23.)

7) Индекс связности системы корней равен определителю ее матрицы Картана. (Использовать формулу (14), n° 10. Показать, с другой стороны, что в вещественном векторном пространстве, снабженным скалярным произведением, два базиса $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$, для которых $(\varepsilon_i \mid \varepsilon'_j) = \delta_{ij}$, удовлетворяют условию $\det_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n) > 0$.)

8) Пусть R — приведенная система корней, C — камера, 2σ — сумма элементов >0 в $R^\vee$, $P'(R)$ — множество $x \in P(R)$, для которых $\langle x, \sigma\rangle \in \mathbf{Z}$. Справедливы включения $Q(R) \subset P'(R) \subset P(R)$, причем $P(R)/P'(R)$ будет порядка 1 или 2. Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ — базис в $R^\vee$, соответствующий камере C. Положим $2\sigma = n_1\beta_1 + \ldots + n_l\beta_l$, где n_i — целые числа >0. Для того чтобы $P'(R) = P(R)$, необходимо и достаточно, чтобы все n_i были четными.

¶ 9) Пусть R — система корней, C — камера. Положим $B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$,

$$R_+(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_s\}$$

(все α_i попарно различны) и $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$.

а) Пусть $\alpha^* = \varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_s\alpha_s$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ при $i = 1, 2, \ldots, s$. Если $(\alpha^* \mid \alpha_i) > 0$ при $i = 1, \ldots, l$, то $\alpha^* = \alpha$ и $\varepsilon_i = 1$ при всех i. (Пусть γ (соотв. δ) — сумма α_i, для которых $\varepsilon_i = 1$ (соотв. -1). Имеем $(\gamma \mid \alpha_i) - (\delta \mid \alpha_i) > 0$, $(\gamma \mid \alpha_i) + (\delta \mid \alpha_i) = (\alpha_i \mid \alpha_i)$, откуда

$$2(\gamma \mid \alpha_i) > (\alpha_i \mid \alpha_i);$$

так как $2(\gamma \mid \alpha_i)/(\alpha_i \mid \alpha_i) \in \mathbf{Z}$, то $(\gamma \mid \alpha_i) \geqslant (\alpha_i \mid \alpha_i) = (\alpha \mid \alpha_i)$, откуда $\gamma - \alpha \in \overline{C}$, $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma = \alpha$ и $\delta = 0$.)

б) Для $i = 1, 2, \ldots, s$ пусть $\varepsilon_i = \pm 1$. Для того чтобы множество всех $\varepsilon_i\alpha_i$ было множеством корней >0 относительно какой-нибудь камеры, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\alpha^* = \sum_i \varepsilon_i\alpha_i$ принадлежал некоторой камере. (Что касается достаточности, то следует взять $\mu_i = \pm 1$, такие, что $(\alpha^* \mid \mu_i\alpha_i) > 0$. Существует элемент $w \in W(R)$, который переводит множество векторов $\mu_i\alpha_i$ в множество векторов α_i, и, стало быть, α^* — в $\alpha^{**} = \sum_i \varepsilon_i\mu_i\alpha_{\sigma(i)}$, где $\sigma \in \mathfrak{S}_s$. Применяя а), показать, что $\alpha^{**} = \alpha$, откуда $\mu_i\varepsilon_i = 1$.)

10) Пусть α — максимальный корень приведенной неприводимой системы R относительно некоторого базиса. Для максимальности корня $\alpha^\vee$ необходимо и достаточно, чтобы все корни были одной и той же длины.

11) В обозначениях предложения 33 из n° 11 показать, что $\theta_i + \theta_j$ не является корнем ни для одной пары пары (i, j).

12) Пусть R — система корней в V ранга $\geqslant 3$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — базис в R, V' (соотв. V'') — подпространство в V, порожденное корнями α_i для $i \geqslant 2$ (соотв. $i \geqslant 3$), $R' = R \cap V'$, $R'' = R \cap V''$. Пусть d (соотв. d', d'') — определитель матрицы Картана системы R (соотв. R', R''). Предположим, что α_1 ортогонален ко всем α_i, за исключением α_2, и что $\|\alpha_1\| = \|\alpha_2\|$. Показать, что $d = 2d' - d''$.

13) Пусть R — приведенная система корней, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — базис в R и $\alpha = c_1\alpha_1 + \ldots + c_l\alpha_l$ — некоторый корень. Тогда $\dfrac{c_i(\alpha_i \mid \alpha_i)}{(\alpha \mid \alpha)} \in \mathbf{Z}$ для всех i. (Рассмотреть дуальную систему.)

14) Пусть R — неприводимая система корней, λ — наибольшая из длин корней, S — множество подмножеств в R, состоящих из попарно ортогональных корней длины λ. Тогда два максимальных элемента в S будут переводиться друг в друга группой $W(R)$. (Использовать предложение 11 и предложение 1 из гл. V, § 3, n° 3.)

¶ 15) Пусть R — система корней ранга l.

а) Для справедливости включения $-1 \in W(R)$ необходимо и достаточно, чтобы система R содержала l строго попарно ортогональных корней. (Для доказательства необходимости провести индукцию по l, используя предложение 1 гл. V, § 3, n° 3.)

б) Для каждого элемента $w \in W(R)$ порядка 2 существует такое множество S строго попарно ортогональных корней, что w будет произведением отражений s_α $(\alpha \in S)$.

16) Пусть R — система корней, B — базис в R, R_+ — множество положительных относительно этого базиса корней. Для $w \in W(R)$ положим $F_w = R_+ \cap w(-R_+)$. Показать, что отображение $w \longmapsto F_w$ является биекцией $W(R)$ на множество подмножеств $F \subset R_+$, таких, что F и $R_+ - F$ замкнуты. (Применить к подмножеству $P = (R_+ - F) \cup (-F)$ следствие 1 предложения 20.)

¶ 17) Пусть R — приведенная система корней и B — ее базис. Для любого подмножества $J \subset B$ пусть W_J — подгруппа в $W(R)$, порожденная отражениями s_α с $\alpha \in J$, и w_J — элемент наибольшей длины в W_J. Пусть Φ — множество всех w_J.

а) Показать, что для того чтобы элемент $w \in W(R)$ принадлежал Φ, необходимо и достаточно, чтобы

$$w(B) \subset R_+(B) \cup (-B).$$

(Для доказательства достаточности этого условия обозначим через J_1 множество $\alpha \in B$, для которых $w(\alpha) \in -B$, и положим $J = -w(J_1)$. Если $\alpha \in J_1$, то $w(\alpha) \in -J$ и $w_J w(\alpha) \in B$; если же $\alpha \in B - J_1$, то $w_J w(\alpha) \in R_+$; в противном случае $w(\alpha)$ был бы положительным, а $w_J w(\alpha)$ — отрицательным, из чего следовало бы, что $w(\alpha)$ принадлежит подсистеме, порожденной корнями $\beta \in J$, и что α принадлежит подсистеме, порожденной корнями $\beta \in J_1$, а это не так. Вывести отсюда, что $w_J w = 1$.)

б) Показать, что элемент $w \in W(R)$ имеет порядок 2 тогда и только тогда, когда он сопряжен с одним из w_J. (Для доказательства необходимости этого условия заметить, что элемент w порядка 2 в $W(R)$

является отражением относительно подпространства, порожденного некоторой ячейкой F. С точностью до замены w на сопряженный элемент можно предполагать, что $F \subset \overline{C}$, где C — камера, определенная базисом B. Ячейка F в таком случае будет пересечением гиперплоскостей L_α с α, пробегающим некоторое подмножество $J \subset B$, и $w = w_J$.)

18) Пусть R — система корней, и пусть P — параболическое подмножество в R. Показать, что дополнение к P в R замкнуто.

19) Пусть R — система корней, и пусть x — ненулевой элемент в $Q(R)$ минимальной длины. Показать, что $x \in R$.

¶ 20) Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — базис приведенной и неприводимой системы корней R. Пусть r и p — два целых числа $p \geqslant 2$, таких, что

$$(\alpha_1 \mid \alpha_1) = \ldots = (\alpha_r \mid \alpha_r) = p \,.\, (\alpha_{r+1} \mid \alpha_{r+1}) = \ldots = p \,.\, (\alpha_l \mid \alpha_l).$$

а) Пусть $\alpha = c_1\alpha_1 + \ldots + c_l\alpha_l$ — корень. Показать, что $(\alpha \mid \alpha) = (\alpha_1 \mid \alpha_1)$ (иными словами, что α есть длинный корень) тогда и только тогда, когда p делит $c_{r+1}, \ldots, c_l$.

б) Пусть h — число Кокстера группы $W(R)$. Показать, что число корней в R наибольшей (соотв. наименьшей) длины равно hr (соотв. $h(l-r)$).

21) Пусть R — система корней и B — ее базис. Пусть $\alpha, \beta \in B$ и $w \in W(R)$ таковы, что $\beta = w(\alpha)$. Показать, что существуют последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ элементов системы R и последовательность $w_1, \ldots, w_{n-1}$ элементов группы $W(R)$, такие, что

(i) $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$;
(ii) $w = w_{n-1} \ldots w_1$;
(iii) $w_i(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$;

(iv) для любого $i \in (1, n-1)$ существует такой корень $\beta_i \in B$, что w_i будет принадлежать подгруппе в W, порожденной отражениями s_{α_i} и s_{β_i}.

¶ 22) При тех же условиях и обозначениях, что и в предложении 33 из n° 11, обозначим еще через $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l$ фундаментальные веса системы R.

а) Показать, что $c^{-1}(\bar{\omega}_i) = \bar{\omega}_i - \theta_i$. Вывести отсюда, что $1 - c$ отображает $P(R)$ на $Q(R)$.

б) Пусть f — индекс связности системы R, и пусть $m_1, \ldots, m_l$ — показатели группы $W(R)$. Показать, что

$$f = \det(1 - c) = \prod_{j=1}^{l} \left(1 - w^{m_j}\right) = 2^l \prod_{j=1}^{l} \sin(m_j\pi/h),$$

где $w = e^{2\pi i/h}$.

в) Пусть p — простое число. Запишем h в виде $h = p^a H$ с H, не делящимся на p. Показать, что для того чтобы p делило f, необходимо и достаточно, чтобы H делило одно из чисел m_j.[1])

23) Пусть R — приведенная система корней, и пусть X — подмножество группы $P(R)$. Говорят, что X *насыщено*, если выполнено следующее условие:

---

[1]) Этот результат, пока нигде не опубликованный, был сообщен нам Р. Стейнбергом.

(H) Каковы бы ни были $p \in X$, $\alpha \in R$ и $i \in \mathbf{Z}$, такие, что i заключено между 0 и $\langle p, \alpha^\vee \rangle$, справедливо включение $p - i\alpha \in X$.

а) Показать, что всякое насыщенное подмножество устойчиво относительно группы Вейля W системы R.

б) Показать, что для любого подмножества $A \subset P(R)$ существует наименьшее насыщенное подмножество $S(A) \subset P(R)$, содержащее A.

в) Пусть C — камера в R, и пусть $p \in P(R) \cap \overline{C}$ — старший вес. Пусть $S(p)$ — наименьшее насыщенное подмножество в $P(R)$, содержащее p. Пусть, наконец, $\Sigma(p)$ — множество таких элементов $p' \in P(R)$, что

(i) $p' \equiv p \bmod Q(R)$;

(ii) для любого $w \in W$ выполнено неравенство $w(p') \leqslant p$ (в смысле отношения порядка, определенного камерой C).

Показать, что $\Sigma(p)$ конечно, содержит p и насыщено. Сделать вывод, что $S(p)$ содержится в $\Sigma(p)$.

г) Показать, что если α — элемент из R максимальной длины, то $S(\alpha) = R \cup \{0\}$.

24) Сохраняются обозначения и условия предыдущего упражнения.

а) Пусть $p \in P(R)$, и пусть $W.p$ — орбита p относительно W. Показать, что эквивалентны следующие условия:

(i) $S(p) = W.p$;

(ii) $\langle p, \alpha^\vee \rangle = 0$, 1 или -1 при всех $\alpha \in R$.

(Если (ii) не выполнено, то строится элемент $q \in S(p)$, такой, что $(q \mid q) < (p \mid p)$, откуда $q \notin W.p$.)

б) Пусть X — непустое насыщенное подмножество в $P(R)$. Показать, что X содержит элемент p, удовлетворяющий указанным выше условиям (i) и (ii). (Взять в качестве p элемент из X минимальной длины.)

в) Система R предполагается здесь неприводимой. Пусть C — камера в R, $B = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ — соответствующий базис и

$$\gamma^* = \sum_i n_i \alpha_i^\vee$$

— максимальный корень дуальной системы $R^\vee$. Пусть J — множество тех $i \in I$, для которых $n_i = 1$. Пусть p — старший вес $\neq 0$. Показать, что условия (i) и (ii) из а) эквивалентны каждому из следующих условий:

(iii) $\langle p, \gamma^* \rangle = 1$;

(iv) существует такой индекс $i \in J$, что p равен соответствующему фундаментальному весу $\bar{\omega}_i$.

Вес p, удовлетворяющий этим условиям, называется *микровесом*. Показать, что всякое непустое насыщенное подмножество в $P(R)$ содержит либо 0, либо микровес.

§ 2.

Через R обозначается приведенная система корней в вещественном векторном пространстве V.

1) Пусть $x \in V$, и пусть $W(x)$ — подгруппа в $W(R)$, состоящая из элементов w, для которых

$$w(x) - x \in Q(R).$$

Показать, что $W(x)$ порождается отражениями. (Использовать аффинную группу Вейля дуальной системы $R^\vee$.)

2) Предположим, что система R неприводима. Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — базис, $\tilde{\alpha} = \sum n_i \alpha_i$ — максимальный корень и f — индекс связности си-

стемы R. Показать, что $f-1$ равно числу индексов i, для которых $n_i=1$.

3) При тех же обозначениях и условиях, что и в n° 3, пусть u — автоморфизм аффинного пространства E, который переставляет между собой гиперплоскости $L_{\alpha, k}$ ($\alpha \in R$, $k \in \mathbf{Z}$). Показать, что u является перемещением. (Показывается, что отображение, сопряженное к линейному отображению u_0, ассоциированному с u, оставляет устойчивой R и, стало быть, принадлежит группе $A(R)$.) Вывести отсюда, что G — нормализатор группы W_a в группе автоморфизмов аффинного пространства E.

4) Пусть C' — камера относительно $W(R)$ в V^*, и пусть C — альков с вершиной 0, содержащийся в C'. Пусть S_a (соотв. S) — множество отражений относительно стенок алькова C (соотв. камеры C'). Пары (W_a, S_a) и (W, S) являются системами Кокстера, и $S \subset S_a$. Показать, что для $(S, \varnothing)$-приведенности (гл. IV, § 1, упражнение 3) элемента $w \in W_a$ необходимо и достаточно, чтобы $w(C) \subset C'$.

¶ 5) Предположим, что система R неприводима, и выберем какую-нибудь камеру C системы R в V; обозначим через B соответствующий базис в R.

а) Показать, что микровеса (§ 1, упражнение 24) системы R образуют систему представителей в $P(R)$ ненулевых элементов фактор-группы $P(R)/Q(R)$. (Применить к $R^\vee$ следствие предложения 6.)

б) Пусть X — насыщенное подмножество (§ 1, упражнение 23) группы $Q(R)$. Предположим, что X непусто и не сводится к $\{0\}$. Пусть p — отличный от нуля элемент из X минимальной длины. Показать, что $p \in R$. (Ввиду а) p не удовлетворяет условию (ii) упражнения 24 к § 1; поэтому существует $\alpha \in R$, для которого $\langle p, \alpha^\vee \rangle \geqslant 2$, откуда $p-\alpha \in X$. Так как $p-\alpha$ имеет строго меньшую длину, чем p, то $p-\alpha=0$, откуда $p \in R$.)

в) Пусть p — старший вес, не принадлежащий $Q(R)$. Показать, что насыщение $S(p)$ веса p (см. § 1, упражнение 23) содержит микровес, и притом только один. (Заметить, что $S(p)$ содержится в нетривиальном классе по модулю $Q(R)$; сделать нужный вывод, применив а) и упражнение 24, в) к § 1.)

г) Пусть p — старший вес, не принадлежащий $Q(R)$. Доказать эквивалентность двух следующих свойств:

(i) p есть микровес;

(v) не существует старшего веса $q \neq p$, такого, что $p-q$ было бы линейной комбинацией с целыми коэффициентами $\geqslant 0$ элементов базиса B.

(Если q удовлетворяет условиям свойства (v), то рассмотрим микровес p_1, принадлежащий $S(q)$. Имеем $p_1 \equiv p \bmod Q(R)$, $p_1 < p$, и а) показывает, что p не является микровесом. Следовательно, (i) $\Rightarrow$ (v). Обратно, если p не является микровесом, то рассмотрим $q \in S(p) - W \cdot p$; с точностью до преобразования q при помощи W можно предполагать, что $q \in \bar{C}$; в соответствии с упражнением 23 к § 1, $q < p$, $q \neq p$ и $q \equiv p \bmod Q(R)$. Поэтому (v) $\Rightarrow$ (i).)

§ 3.

Обозначения и условия те же, что и в n° 2—4.

1) а) Показать, что для любого i, заключенного между 1 и l, существует, и притом только одно, дифференцирование D_i кольца $A[P]$, удовлетворяющее следующим условиям:

a$_1$) D_i A-линейно;

a$_2$) $D_i\left(e^{\bar{\omega}_j}\right)=\delta_{ij} e^{\bar{\omega}_j}$ (δ_{ij} — символ Кронекера).

б) Пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — семейство элементов из $A[P]^W$, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Показать, что

$$\det(D_i(x_j)) = d.$$

(Доказать, что $\det(D_i(x_j))$ является антиинвариантным элементом с максимальным членом e^ρ, откуда и вытекает нужный результат, в случае, когда 2 — не делитель нуля в A. В общем случае воспользоваться принципом продолжения алгебраических тождеств.) [1]

2) Пусть P' — подгруппа в $P(R)$, содержащая $Q(R)$. Показать, что P' устойчива относительно W. Построить пример, когда алгебра $A[P']^W$ не изоморфна алгебре многочленов (взять в качестве R произведение двух систем ранга 1).

§ 4.

Символом $W^+(R)$, где R — система корней, обозначается множество элементов в $W(R)$ с определителем 1.

¶ 1) Пусть R — система корней типа E_8.

а) Показать, что если $\alpha, \beta \in R$ сравнимы по модулю $2Q(R)$, то $\beta = \pm\alpha$.

б) Вывести из а), что если $w \in W(R)$ действует в $Q(R)/2Q(R)$, то $w = \pm 1$.

в) В обозначениях n° 10 показать, что квадратичная форма $\frac{1}{2}(x \mid x)$ на $Q(R)$ определяет при факторизации невырожденную квадратичную форму q_8 на векторном $\mathbf{F}_2$-пространстве $Q(R)/2Q(R)$. Показать, что псевдодискриминант формы q_8 (*Алг.*, гл. IX, § 9, упражнение 9) равен нулю и что q_8 имеет индекс 4.

г) Пусть $\mathbf{O}(q_8)$ — ортогональная группа на $Q(R)/2Q(R)$ относительно этой формы. Определить при помощи факторизации гомоморфизм

$$h\colon W(R) \to \mathbf{O}(q_8).$$

Показать (сравнив порядки), что последовательность

$$1 \to \{1, -1\} \to W(R) \xrightarrow{h} \mathbf{O}(q_8) \to 1$$

точная.

д) Показать, что образом при h группы $W^+(R)$ является подгруппа $\mathbf{O}^+(q_8)$ группы $\mathbf{O}(q_8)$, определенная в *Алг.*, гл. IX, § 9, n° 5. Вывести отсюда, что $W^+(R)/\{1, -1\}$ является некоммутативной простой группой.

¶ 2) Пусть R — система корней типа E_6.

а) Положим $E = Q(R)/3P(R)$. Это — векторное $\mathbf{F}_3$-пространство размерности 5. В обозначениях n° 12 показать, что скалярное произведение $(x \mid y)$ определяет на E невырожденную симметрическую билинейную форму φ. Показать, что образы в E двух различных элементов системы R различны.

б) Пусть $\mathbf{O}(\varphi)$ — ортогональная группа формы φ. Справедливо равенство $\mathbf{O}(\varphi) = \{1, -1\} \times \mathbf{SO}(\varphi)$. Спинорная форма определяет сюръективный гомоморфизм группы $\mathbf{SO}(\varphi)$ на $\{1, -1\}$, ядро которого обозначается символом $\mathbf{SO}^+(\varphi)$. Группа $\mathbf{SO}^+(\varphi)$ — простая, порядка 25920

[1] Этот результат, пока нигде не опубликованный, был сообщен нам Р. Стейнбергом.

Факторгруппа $\mathbf{O}(\varphi)/\mathbf{SO}^+(\varphi)$ имеет тип (2, 2). Вывести отсюда, что $\mathbf{O}(\varphi)$ содержит единственную подгруппу $\Omega(\varphi)$ индекса 2, отличную от $\mathbf{SO}(\varphi)$ и не содержащую -1.

в) Всякий элемент группы $A(R)$ определяет при факторизации элемент группы $\mathbf{O}(\varphi)$. Показать (сравнив порядки), что при этом получается изоморфизм $A(R)$ на $\mathbf{O}(\varphi)$. Образом группы $W(R)$ при этом изоморфизме будет $\Omega(\varphi)$, а образом группы $W^+(R)$—$\mathbf{SO}^+(\varphi)$. Следовательно, $W(R)$ является расширением $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ при помощи простой группы порядка 25920.

г) Пусть $F=Q(R)/2Q(R)$. Это—векторное $\mathbf{F}_2$-пространство размерности 6. Показать, что квадратичная форма $\frac{1}{2}(x\,|\,x)$ определяет при факторизации невырожденную квадратичную форму q_6 на F с псевдодискриминантом, равным 1. Пусть $\mathbf{O}(q_6)$ обозначает соответствующую ортогональную группу. Определить при помощи факторизации гомоморфизм

$$h\colon W(R)\to \mathbf{O}(q_6).$$

Показать, что гомоморфизм h инъективен (обратить внимание, что $-1\notin W(R)$), а затем, что он является изоморфизмом (сравнить порядки). Получить отсюда изоморфизм $W^+(R)$ на $\mathbf{O}^+(q_6)$ (ср. *Алг.*, гл. IX, § 9, n° 5).

д) Сравнив в) с г), показать [1]), что группа $\mathbf{SO}^+(\varphi)$ изоморфна группе $\mathbf{O}^+(q_6)$.

¶ 3) Пусть R — система корней типа E_7.

а) Положим $E=Q(R)/2P(R)$. Это—векторное $\mathbf{F}_2$-пространство размерности 6. В обозначениях n° 11 показать, что скалярное произведение $(x\,|\,y)$ определяет на E невырожденную знакопеременную билинейную форму.

б) Вывести из а) существование точной последовательности

$$1\to\{1,\ -1\}\to W(R)\xrightarrow{h}\mathbf{Sp}(6,\ \mathbf{F}_2)\to 1.$$

(Использовать тот факт, что $\mathbf{Sp}(6,\mathbf{F}_2)$ имеет порядок $2^9.3^4.5.7$.)

в) Показать, что сужение h на $W^+(R)$ является изоморфизмом $W^+(R)$ на $\mathbf{Sp}(6,\ \mathbf{F}_2)$.

г) Используя квадратичную форму q_7 на векторном $\mathbf{F}_2$-пространстве $Q(R)/2Q(R)$, получающуюся из $\frac{1}{2}(x\,|\,x)$ при факторизации, дать другое доказательство утверждения б), а также установить изоморфизм

$$\mathbf{O}(q_7)\to\mathbf{Sp}(6,\ \mathbf{F}_2).$$

¶ 4) Пусть R — приведенная и неприводимая система корней в V, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$ — базис в R, $\tilde{\alpha}$—максимальный корень. Положим $\tilde{\alpha}=n_1\alpha_1+\ldots$ $\ldots+n_l\alpha_l$. Предлагается дать описание симметричных и замкнутых подмножеств в R, отличных от R и максимальных относительно этих свойств.

а) Пусть $i\in\{1,2,\ldots,l\}$, и пусть R_i — множество корней $\alpha\in R$, являющихся линейными комбинациями α_j для $j\neq i$. Показать, что R_i максимально тогда и только тогда, когда $n_i=1$.

---

[1]) М. Кнезер показал, что аналогичный метод позволяет получить все „исключительные" изоморфизмы между классическими группами конечного порядка; см. M. K n e s e r, Über die Ausnahme-Isomorphismen zwischen endlichen klassischen Gruppen, *Hamburger Abh.*, 31 (1967), 136—140.

б) Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$; предположим, что $n_i > 1$. Пусть S_i — множество корней $\sum_{j=1}^{l} m_j \alpha_j$ с $m_i \equiv 0 \pmod{n_i}$. Показать, что S_i максимально тогда и только тогда, когда n_i — простое число. (Если $n_i = ab$, где $a > 1$, $b > 1$, то рассмотреть подмножество $S' \subset R$, состоящее из корней $\sum_j m_j \alpha_j$ с $m_i \equiv 0 \pmod{a}$, и показать, что S' строго содержит S_i.) Показать, что корни $-\tilde{\alpha}$, α_j $(j \neq i)$ образуют базис в S_i (ранга l). Получить отсюда граф Дынкина системы S_i.

в) Всякое замкнутое, симметричное и максимальное в R подмножество переводится каким-нибудь элементом группы $W(R)$ в одно из подмножеств, описанных в а) или б). (Пусть Σ — такое подмножество. Тогда $\Sigma = R \cap H$, где H — подгруппа конечного индекса в $Q(R)$ (§ 1, упражнение 6, б)); можно предполагать, что $Q(R)/H$ — циклическая группа. Существует, следовательно, такой вектор $u^* \in V^*$, что Σ будет множеством корней $\alpha \in R$, для которых $\langle u^*, \alpha \rangle \in \mathbf{Z}$. Множество Σ не изменится, если добавить к u^* элемент из $Q(R^\vee)$. Используя $W_a(R)$, показать, что u^* можно взять таким, чтобы $\langle u^*, \alpha_i \rangle \geqslant 0$, $\langle u^*, \tilde{\alpha} \rangle \leqslant 1$. Пусть $u_i = \langle u^*, \alpha_i \rangle$. Если два из u_i будут $\neq 0$, то Σ не максимально.)

г) Перечислить максимальные симметричные замкнутые подмножества в R для различных типов приведенных неприводимых систем корней.

5) Пусть R — система корней и $P'(R)$ — подгруппа в $P(R)$, введенная в упражнении 8 к § 1. Показать, что $P'(R) = P(R)$, если R имеет тип A_l с четным l, или тип B_l с $l \equiv 0, 3 \pmod 4$, или D_l с $l \equiv 0, 1 \pmod 4$, или G_2, или F_4, или E_6, или E_8. Показать, что $P'(R) = Q(R)$, если R имеет тип C_l, или B_l с $l \equiv 1, 2 \pmod 4$, или E_7, или A_1. Если R имеет тип A_l с нечетным $l > 1$, то $P'(R)/Q(R)$ является единственной подгруппой индекса 2 циклической группы $P(R)/Q(R)$. Если, наконец, R имеет тип D_l с $l \equiv 2, 3 \pmod 4$, то $P'(R)/Q(R)$ является единственной подгруппой порядка 2 в $P(R)/Q(R)$, устойчивой относительно $A(R)$.

¶ 6) Пусть R — приведенная и неприводимая система корней, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — базис в R, $p_1 \alpha_1 + \ldots + p_l \alpha_l$ — максимальный корень, $a_1 \alpha_1 + \ldots + a_l \alpha_l$ — сумма положительных корней, $m_1, \ldots, m_l$ — показатели группы $W(R)$, g — ее порядок, f — индекс связности системы R.

а) Проверить в каждом случае, что

$$l! p_1 p_2 \ldots p_l m_1 \ldots m_l = a_1 a_2 \ldots a_l.$$

б) Показать, что

$$g \cdot m_1 m_2 \ldots m_l = f \cdot a_1 a_2 \ldots a_l.$$

(Использовать а) и предложение 7 из § 2, n° 4.)

в) Для любого положительного корня $\alpha = \sum_i c_i \alpha_i$ пусть $e(\alpha) = \sum_i c_i$. Вычислить в каждом случае многочлен

$$P(t) = \sum_{\alpha > 0} t^{e(\alpha)}.$$

Проверить, что $P(t) = t\sum_{i=1}^{l}\left(1+t+\ldots+t^{m_i-1}\right)$ [1].

7) Пусть R — приведенная и неприводимая система корней.

а) Проверить, что канонический гомоморфизм $A(R)/W(R)$ в группу автоморфизмов группы $P(R)/Q(R)$ инъективен.

б) Вывести отсюда, что -1 принадлежит $W(R)$ тогда и только тогда, когда $Q(R) \supset 2P(R)$.

8) Пусть R_1 и R_2 — две приведенные и неприводимые системы корней. Показать, что если группы $W(R_1)$ и $W(R_2)$ одного и того же порядка, то система R_1 изоморфна R_2 или $R_2^{\vee}$. (Использовать классификацию.) Продолжает ли этот результат оставаться верным, если не предполагать, что система R_1 неприводима?

9) Пусть R — система корней ранга l, и пусть p — простое число, делящее порядок группы $A(R)$. Показать, что $p \leqslant l+1$. (Свести к неприводимому случаю и использовать классификацию.)

10) а) Пусть (W, S) — неприводимая конечная система Кокстера. Положим

$$W(t) = \sum_{w \in W} t^{l(w)} \quad \text{(гл. IV, § 1, упражнение 26).}$$

Пусть $m_1, \ldots, m_l$ — показатели группы W (гл. V, § 6, n°2). Проверить для небольших значений l формулу

$$W(t) = \prod_{i=1}^{l}\left(1+t+\ldots+t^{m_i}\right)$$

(использовать теорему 1 и упражнение 26 к гл. IV, § 1). [2]

б) Пусть R — приведенная неприводимая система корней и W (соотв. W_a) — группа Вейля (соотв. аффинная группа Вейля) системы R, наделенная структурой группы Кокстера (соответствующей выбору некоторого алькова). Как и выше, определяются $W(t)$ и показатели m_i; положим также

$$W_a(t) = \sum_{w \in W_a} t^{l(w)}.$$

Проверить при небольших значениях l формулу

$$W_a(t) = W(t)\prod_{i=1}^{l}\frac{1}{1-t^{m_i}} = \prod_{i=1}^{l}\frac{1+t+\ldots+t^{m_i}}{1-t^{m_i}}$$

---

[1]) Доказательство, не использующее классификацию, см. в статье: B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 973—1032.

[2]) Доказательство этой формулы, не использующее классификацию и верное при всех значениях l, см. в статье: L. Solomon, The orders of the finite Chevalley groups, *J. of Algebra*, 3 (1966), 376—393.

(использовать теорему 2 и упражнение 26 к гл. IV, § 1). [1])

¶ 11) Пусть (W, S) — система Коксстера типа H_3 (см. теорему 1).

а) В тех же обозначениях, что и при доказательстве леммы 2 в гл. V, § 6, n° 2, показать, что $(\widehat{z', z''}) = \pi/5$; вывести отсюда, что число Коксстера h группы W равно 10 и что показателями группы W будут 1, 5 и 9.

б) Используя а), показать, что $\operatorname{Card}(W) = 120$ и что число отражений группы W равно 15.

в) Вновь установить формулу $\operatorname{Card}(W) = 120$, применив упражнение 5 к гл. V, § 3.

г) Пусть $\mathfrak{A}_5$ — знакопеременная группа множества $\{1, \ldots, 5\}$; для различных a, b, c, d из множества $\{1, \ldots, 5\}$ обозначим через (ab) транспозицию элементов a и b, а через $(ab)(cd)$ произведение транспозиций (ab) и (cd). Пусть

$$r_1 = (14)(23), \quad r_2 = (12)(45), \quad r_3 = (12)(34).$$

Показать, что $(r_1r_2)^5 = (r_2r_3)^3 = (r_1r_3)^2 = 1$. Вывести отсюда существование гомоморфизма $f: W \to \mathfrak{A}_5$, отображающего S на $\{r_1, r_2, r_3\}$; показать, что f сюрьективен.

д) Пусть $\varepsilon: W \to \{\pm 1\}$ — гомоморфизм $w \longmapsto (-1)^{l(w)}$. Показать, что

$$(f, \varepsilon): W \to \mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$$

есть изоморфизм. (Использовать тот факт, что обе рассматриваемые группы имеют один и тот же порядок.)

¶ 12) Пусть $(1, i, j, k)$ — канонический базис тела кватернионов $\mathbf{H}$, при помощи которого отождествляются $\mathbf{H}$ и $\mathbf{R}^4$. На $\mathbf{H}$ вводится скалярное произведение $\frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$. Пусть Γ — мультипликативная группа кватернионов с нормой 1.

а) Если $a \in \Gamma$, то ортогональное отражение s_a в $\mathbf{H}$, которое переводит a в $-a$, совпадает с отображением $x \longmapsto -a\bar{x}a$.

б) Пусть $q = \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}i + \left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)j \in \Gamma$ и $r = \frac{1}{2}(1 + i + j + k) \in \Gamma$. Пусть Q — множество кватернионов, получающихся из 1, q, r четными перестановками координат и изменением знаков некоторых координат. Тогда Q является подгруппой в Γ порядка 120.

в) Пусть W — подгруппа в $\mathbf{GL}(\mathbf{H})$, порожденная отражениями s_a с $a \in Q$. Показать, что W оставляет устойчивой Q, является конечной, неприводимой, но не является кристаллографической; вывести отсюда, что W имеет тип H_4 (см. теорему 1).

г) Показать, что W действует на Q транзитивно. (Использовать предложение 3 гл. IV, § 1.)

д) Пусть $a_0 \in Q$, V — векторное подпространство в $\mathbf{H}$, ортогональное к a_0, и пусть W_0 — стабилизатор вектора a_0 в W. Показать, что сужение W_0 на V есть неприводимая группа, порожденная отражениями (гл. V, § 3, n° 3), но не являющаяся кристаллографической. Вывести отсюда, что W_0 — группа Коксстера типа H_3.

---

[1]) Доказательство этой формулы, не использующее классификацию и верное при всех значениях l, см. в статьях:

R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 251—281;

N. Iwahori, H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups, *Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci.*, № 25 (1965), 5—48.

е) Показать, что $\mathrm{Card}(W) = 2^6 . 3^2 . 5^2$ (использовать г), д) и упражнение 11).

ё) Показать, что число Кокстера группы W равно 30 и что ее показателями будут 1, 11, 19, 29.

13) Пусть V — гиперплоскость в $\mathbf{R}^9$, определенная уравнением $x_1 + \ldots \ldots + x_9 = 0$, и R — подмножество в V, состоящее из точек

$$(2, 2, 2, -1, -1, -1, -1, -1, -1), \quad (-2, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$
$$(3, -3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

и из точек, которые получаются перестановками координат этих трех точек. Показать, что R является системой корней в V типа E_8.

14) В обозначениях n° 7 показать, что автоморфизм пространства $\mathbf{R}^{l+1}$, который переводит ε_1 в ε_2, ε_2 в ε_3, $\ldots$, ε_l в ε_{l+1} и ε_{l+1} в ε_1, индуцирует преобразование Кокстера системы R типа A_l.

15) Дать описание микровесов (§ 1, упражнение 24) для каждого типа неприводимой приведенной системы корней. (Находятся фундаментальные веса $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l$ для A_l, вес $\bar{\omega}_l$ для B_l, вес $\bar{\omega}_1$ для C_l, веса $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_{l-1}$, $\bar{\omega}_l$ для D_l, веса $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_6$ для E_6, вес $\bar{\omega}_7$ для E_7; для E_8, F_4 и G_2 ничего находить не нужно.)

¶ 16) Пусть (W, S) — конечная неприводимая система Кокстера, и пусть $n = \mathrm{Card}(S)$.

а) Показать, что если (W, S) — не типа F_4, то существует подмножество $X \subset S$ из $n-1$ элементов, такое, что (W_X, X) будет типа A_{n-1}.

б) При помощи канонического представления (гл. V, § 4) W отождествляется с подгруппой группы $\mathbf{GL}(\mathbf{R}^S)$. Показать, что существует такой базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbf{R}^S$, что при любой перестановке $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ автоморфизм пространства $\mathbf{R}^S$, переводящий e_i в $e_{\sigma(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, принадлежит группе W („теорема Бернсайда“). (В случае когда тип системы (W, S) отличен от F_4, использовать а); в случае же типа F_4 заметить, что W содержит подгруппу типа D_4 (см. n° 9), а это сводит задачу к предыдущей.)

в) Пусть E — какая-то подгруппа группы автоморфизмов системы (W, S). Показать, что полупрямое произведение $E \cdot W$ группы E на W погружается каноническим образом в $\mathbf{GL}(\mathbf{R}^S)$. Показать, что определенная таким образом подгруппа в $\mathbf{GL}(\mathbf{R}^S)$ порождается отражениями, за исключением следующих четырех случаев:

(i) (W, S) — типа A_n, $n \geqslant 4$; группа E — порядка 2;
(ii) (W, S) — типа D_4; группа E — порядка 3;
(iii) (W, S) — типа F_4; группа E — порядка 2;
(iv) (W, S) — типа E_6; группа E — порядка 2.

Показать, что в случаях (i) и (iv) будет $E \cdot W = \{\pm 1\} \times W$. Показать, что в случае (iii) группа $E \cdot W$ не оставляет устойчивой никакой решетки в $\mathbf{R}^S$.

г) Пусть W_1 — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, порожденная отражениями, неприводимая и существенная, и пусть G — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, содержащая W_1. Показать, что G либо порождается отражениями, либо имеет вид $E \cdot W$, где E и W принадлежат к одному из типов (i) — (iv) упражнения в). (Пусть W — группа, порожденная отражениями, которые содержатся в G. Группа G переставляет между собой камеры относительно W. Как и в § 2, n° 3, вывести, что G имеет указанный вид $E \cdot W$.)

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВАМ IV—VI

(N. B. Римские цифры в скобках отсылают к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Группы, изучавшиеся в этих главах, возникали в связи с различными вопросами геометрии, анализа и теории групп Ли то в виде групп перестановок, то в виде групп перемещений в евклидовой или гиперболической геометрии, но вплоть до недавнего времени эти разные подходы не были согласованы друг с другом.

Исторически возникновение теории намного предшествовало введению понятия группы: фактически она берет начало в исследовании свойств „регулярности" или „симметрии" геометрических фигур и особенно в описании правильных многоугольников и многогранников (восходящем, без сомнения, к пифагорейцам), которое увенчивает „Начала" Евклида и является одним из наиболее блистательных творений греческого гения. Позднее, а именно у арабских авторов конца средних веков и затем у Кеплера, появились зачатки математической теории правильных „покрытий" плоскости или сферы попарно конгруэнтными (но не обязательно правильными) многоугольниками; происхождение этой теории, несомненно, связано с различными типами орнаментов, изобретенными античной и арабской цивилизациями (что можно с полным правом рассматривать как подлинную часть математики, созданной этими цивилизациями [XII]).

В 1830—1840 г. исследования по кристаллографии (Гессель, Бравэ, Мёбиус) привели к изучению проблемы, которая в точности совпадает с проблемой описания конечных групп перемещений в евклидовом пространстве трех измерений, хотя упомянутые авторы и не пользовались еще языком теории групп; последний входит в употребление лишь около 1860 г., и именно занимаясь классификацией групп, Жордан в 1869 г. [VI] описал дискретные подгруппы сохраняющих ориентацию перемещений пространства $\mathbf{R}^3$ (и, более общим образом, все *замкнутые* подгруппы групп перемещений, сохраняющих ориентацию).

Этот цикл идей развивался в XIX веке в нескольких направлениях, из которых отметим наиболее яркие.

1° В соответствии с тенденцией, проявившейся в теории конечных групп с самых ранних пор, старались „задавать“ конечные группы перемещений образующими и соотношениями возможно более простого типа. Так, в 1856 г. Гамильтон [V] доказал, что конечные группы вращений в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ порождаются двумя образующими S, T, связанными соотношениями $S^p = T^q = (SP)^3 = 1$, при надлежащих значениях p и q.

2° Дискретные группы перемещений могут содержать и могут не содержать *отражений*. Начиная с 1852 г. Мёбиус описал, по существу, *порожденные отражениями* конечные группы перемещений в сферической геометрии (что эквивалентно той же задаче для конечных групп евклидовых перемещений в $\mathbf{R}^3$); он нашел [III], что, за исключением циклических групп, фундаментальной областью такой группы служит сферический треугольник с углами вида π/p, π/q, π/r, где p, q, r — три целых числа >1, для которых $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ (см. гл. V, § 4, упражнение 4). Он установил также, что эти группы содержат в качестве подгрупп все конечные группы перемещений.

3° Этот последний круг идей получил новый стимул к развитию, когда вслед за работами Римана и Шварца по гипергеометрическим функциям и конформным представлениям началось изучение „покрытий“ комплексной плоскости или полуплоскости фигурами, которые ограничены дугами окружностей; Клейн и Пуанкаре заложили здесь основы теории „автоморфных функций“ и рассмотрели (для случая дуг окружностей, ортогональных к фиксированной прямой) проблему, эквивалентную проблеме нахождения дискретных подгрупп группы перемещений гиперболической неевклидовой плоскости (отождествляемой с „полуплоскостью Пуанкаре“) [X].

4° В работе, которая восходит приблизительно к 1850 г., но была опубликована много позднее и оставалась долгое время в забвении, Шлефли [IV] распространил понятия правильного многогранника и покрытия пространства $\mathbf{R}^3$ такими многогранниками на все евклидовы пространства $\mathbf{R}^n$. Он полностью описал правильные „политопы“ в каждом $\mathbf{R}^n$, группу перемещений, оставляющих инвариантным один из таких политопов, и фундаментальную область этой группы; как и в случае $n=3$, изученном Мёбиусом, эта область является „камерой“, след которой на сфере $\mathbf{S}_{n-1}$ представляет собой сферический симплекс. Однако он не стал заниматься обратной задачей нахождения конечных групп перемещений, порожденных отражениями в $\mathbf{R}^n$; эта задача была решена лишь много позднее Гурса [VII] для $n=4$, а для произвольного n ее решение должно было ждать работ Э. Картана [IX, $\mathfrak{f}$)] и Коксетера [XIV], на которых мы остановимся ниже.

* * *

Примерно к 1890 г., с первыми работами Киллинга и Э. Картана по группам Ли, оформился новый цикл идей, который долгое время развивался без связи с предыдущим. При изучении строения комплексных полупростых алгебр Ли Киллинг [VIII] и Картан [IX, a)] сразу же осознали первостепенную роль некоторых линейных форм ω_α на „подалгебре Картана“ $\mathfrak{h}$ такой алгебры Ли $\mathfrak{g}$; это не что иное как „корни“ относительно $\mathfrak{h}$, названные так потому, что у Киллинга они появились как корни характеристического уравнения $\det(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(x)-T)=0$, левая часть которого рассматривается как функция от $x\in\mathfrak{h}$. Свойства этих „корней“, установленные Киллингом и Картаном, можно выразить на геометрическом языке гл. VI, сказав, что они образуют „приведенную систему корней“ (см. гл. VI, § 1, n° 4); далее, ими было показано, что классификация комплексных полупростых алгебр Ли сводится к классификации ассоциированных „систем корней“, которая в свою очередь сводится к описанию некоторых матриц с целыми коэффициентами (названных впоследствии „матрицами Картана“; см. гл. VI, § 1, n° 5). Киллинг и Картан доказали также существование для любого корня ω_α инволютивной перестановки S_α множества корней [1]); они использовали существенным образом преобразование $C=S_{\alpha_1}S_{\alpha_2}\ldots S_{\alpha_l}$ — произведение перестановок, ассоциированных с l корнями фундаментальной системы (ныне оно называется „преобразованием Коксетера“); они же продолжили указанную перестановку до линейного преобразования векторного пространства, порожденного фундаментальными корнями ω_{α_i} $(1\leqslant i\leqslant l)$, и изучили его собственные значения ([VIII, II)], стр. 20; [IX, a)], стр. 58). Но ни Киллинг, ни (на первых порах) Картан не догадывались рассмотреть группу $\mathscr{G}'$, порожденную всеми S_α; и когда несколько позднее Картан [IX, b)] описывал группу Галуа $\mathscr{G}$ характеристического уравнения

$$\det(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(x)-T)=0$$

с „общим элементом“ $x\in\mathfrak{h}$, отображения S_α им сначала не вводились в игру; 30 лет спустя, уже под влиянием работ

[1]) Обозначения ω_α и S_α соответствуют нашим обозначениям α и s_α из гл. VI, § 1.

Г. Вейля, он показал [IX, c)], что $\mathscr{G}'$ есть нормальная подгруппа группы $\mathscr{G}$, и описал во всех случаях строение факторгруппы $\mathscr{G}/\mathscr{G}'$, которая (для простой алгебры $\mathfrak{g}$) имеет порядок 1 или 2, за исключением случая D_4, когда она изоморфна группе $\mathfrak{S}_3$; именно в этой связи он интерпретировал также $\mathscr{G}'$ как группу, индуцируемую внутренними автоморфизмами комплексной полупростой алгебры Ли, оставляющими устойчивой подалгебру Картана [1]).

В работах Г. Вейля, о которых мы только что упомянули, была впервые введена геометрическая интерпретация группы $\mathscr{G}'$ (названной впоследствии „группой Вейля" алгебры $\mathfrak{g}$); в то время как Киллинг и Картан работали с преобразованием C, он высказал идею рассматривать все S_α как отражения в векторном пространстве линейных форм на $\mathfrak{h}$. В мемуаре Г. Вейля [XIII] впервые появилась также фундаментальная область „аффинной группы Вейля" (впрочем, связь ее с „группой Вейля" $\mathscr{G}'$ не была ясно указана); Вейль использовал ее для того, чтобы установить конечность фундаментальной группы полупростой компактной группы, что было, в свою очередь, основным моментом в его доказательстве полной приводимости линейных представлений комплексной полупростой алгебры Ли. Вскоре Э. Картан осуществил синтез глобальной точки зрения Г. Вейля, своей собственной теории вещественных или комплексных полупростых алгебр Ли и теории симметрических римановых пространств, которую он в то время строил. В мемуаре [IX, d)] он завершил описание фундаментальных политопов группы Вейля, обычной и аффинной, и ввел решетки весов и радикальных весов (гл. VI, § 1, n° 9); в [IX, e)] он распространил этот подход на симметрические пространства и таким именно образом столкнулся с первыми примерами неприведенных систем корней (гл. VI, § 4, n° 1). Наконец, в статье [IX, f)] дано первое доказательство того факта, что всякая конечная группа, порожденная отражениями в $\mathbf{R}^n$ и являющаяся неприводимой, обладает фундаментальной областью со сферическим симплексом в качестве следа на $\mathbf{S}_{n-1}$; в этой работе Картан установил также геометрическими средствами единственность максимального корня (относительно произвольного лексикографического порядка на системе корней).

Спустя некоторое время Ван дер Варден [XVI], опираясь на результаты мемуара Г. Вейля, показал, что классификация комплексных полупростых алгебр Ли эквивалентна классификации приведенных систем корней, каковую он и

---

[1]) Обозначения $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}'$ соответствуют нашим обозначениям $A(R)$ и $W(R)$ из гл. VI, § 1, n° 1.

осуществил при помощи элементарных геометрических соображений (тогда как у Киллинга и Картана эта классификация следовала из сложных вычислений определителей). Почти в то же время Кокстер описал в явном виде все неприводимые конечные группы евклидовых перемещений, которые порождаются отражениями [XIV, c)]; он дополнил тем самым результаты Э. Картана [IX, d)], который описал лишь „кристаллографические“ группы (т. е. группы, ассоциированные с системами корней, или, еще, допускающие вложения в бесконечную дискретную группу перемещений). В следующем году Кокстер показал [XIV, d)], что конечные группы, порожденные отражениями, суть единственные (с точностью до изоморфизма) конечные группы, допускающие задание инволютивными образующими R_i и определяющими соотношениями вида $(R_iR_j)^{m_{ij}}=1$ (m_{ij}—целые числа); отсюда и название „группы Кокстера“, присвоенное потом группам (конечным или бесконечным), допускающим такое задание.

* * *

Первые связи между двумя циклами исследований, описанными нами выше, были отмечены впервые, по-видимому, Кокстером [XIV bis], а затем — Виттом [XVII]. Они установили, что бесконечные неприводимые группы евклидовых перемещений, порожденные отражениями, взаимно однозначно (с точностью до изоморфизма) соответствуют комплексным простым алгебрам Ли. Витт дал новое описание дискретных групп этого типа и, кроме того, обобщил упомянутую выше теорему Кокстера из [XIV, d)], охарактеризовав подобным образом группы Кокстера, изоморфные бесконечным дискретным группам евклидовых перемещений. Этот результат и тот факт, что аналогичные группы в гиперболической геометрии также являются группами Кокстера [1]), привели к тому, что стали самостоятельно изучать эти последние группы, сначала (ср. гл. V, § 4) с упором на геометрическую реализацию ([XV], [XXV]), а затем, вслед за Ж. Титсом [XXV], в чисто алгебраическом аспекте, принятом и в настоящем трактате (гл. IV, § 1).

Начиная с работ Витта, теория полупростых групп Ли и теория дискретных групп, порожденных отражениями, не прекращают воздействовать друг на друга исключительно плодотворным образом. В 1941 г. Штифель [XVIII] заметил, что группы Вейля суть в точности конечные группы, поро-

---

[1]) Эти группы, досконально изученные в случае размерности 2, не рассматривались, между прочим, в размерностях $\geqslant 3$ вплоть до последних лет.

жденные отражениями и оставляющие инвариантной некоторую решетку. Шевалле [XIX, a)] и Хариш—Чандра [XX, a)] дали в 1948—1951 г. *априорные* доказательства взаимно однозначного соответствия между „кристаллографическими" группами и комплексными полупростыми алгебрами Ли; до тех пор могли только проверять наличие этого соответствия отдельно для каждого типа простых алгебр Ли.

Далее, к 1950 г. было замечено, что многочлены, инвариантные относительно группы Вейля, играют важную роль в теории линейных представлений бесконечной размерности [XX, a)] и в топологии групп Ли. Со своей стороны, Кокстер [XIV, f)], возобновив изучение преобразования C — произведения фундаментальных отражений конечной группы W, порожденной отражениями, — установил (проводя отдельное исследование для каждого типа), что алгебра многочленов, инвариантных относительно W, порождается алгебраически независимыми элементами, степени которых простым образом связаны с собственными значениями преобразования C (см. гл. V, § 5 и 6). *Априорные* доказательства этих результатов были впоследствии даны сначала Шевалле [XIX, b)], а затем Колеманом [XXIII] и Стейнбергом [XXIV].

* * *

С работы А. Бореля по линейным алгебраическим группам [XXII] начался новый этап в развитии теории групп Ли, который должен был привести к значительному ее расширению. А. Борель продемонстрировал важность максимальных связных разрешимых подгрупп (названных потом „подгруппами Бореля") в группе Ли и сделал их основным рабочим инструментом, позволяющим перенести обширную часть классической теории на случай алгебраических групп над произвольным алгебраически замкнутым полем (но не позволяющим, однако, получить классификацию простых алгебраических групп [1])). Подгруппы Бореля (в случае комплексных или вещественных классических групп) встречались уже несколькими годами раньше в работах Гельфанда и Наймарка по представлениям бесконечной размерности; а в 1954 г. Ф. Брюа открыл тот замечательный факт, что в случае классических простых групп разложение группы на

[1]) Алгебраическая группа размерности >0 называется *простой* (в смысле алгебраической геометрии), если она не содержит алгебраической нормальной подгруппы размерности >0, отличной от самой себя. Группа называется *полупростой*, если она изогенна произведению некоммутативных простых групп.

двойные смежные классы по подгруппе Бореля каноническим образом параметризуется группой Вейля [XXI]. Хариш-Чандра [XX, b)] перенес затем этот результат на все комплексные и вещественные полупростые группы.

С другой стороны, в 1955 г. Шевалле [XIX, c)] удалось сопоставить каждой комплексной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и *каждому* коммутативному полю k матричную группу с коэффициентами в k, обладающую разложением Брюа; этот факт он использовал для доказательства того, что, за небольшим числом исключительных случаев, определенная таким образом группа будет простой (в смысле теории абстрактных групп). Тем самым он „объяснил" совпадение, замеченное еще во времена Жордана и Ли, простых групп Ли (в смысле теории групп Ли) типов A, B, C, D и классических простых групп, определенных чисто алгебраическим способом над произвольным полем (совпадение, которое до той поры удалось распространить лишь на исключительные типы G_2 и E_6 Диксону [XI, b) и c)]. В частности, для всех типов комплексных простых алгебр Ли в случае *конечного* поля k конструкция Шевалле приводит к семействам *конечных* простых групп, содержащим большую часть известных тогда конечных простых групп, а также к четырем новым сериям (соответствующим простым алгебрам Ли типов F_4, E_6, E_7 и E_8). Чуть позднее, используя различные модификации методов Шевалле, ряд авторов (Херциг, Судзуки, Ри, Стейнберг и Титс), с одной стороны, показали, что аналогичным образом можно получить остальные конечные простые группы, известные к тому времени, за исключением знакопеременных групп и групп Матье, а с другой стороны, построили новые серии конечных простых групп (см. [XXIX]).

Почти в то же самое время Шевалле [XIX, d)], применяя по-прежнему технику разложений Брюа, в сочетании с одним ключевым результатом о нормализаторе подгруппы Бореля, продолжил изучение алгебраических линейных групп и пришел к результату, что над *алгебраически замкнутым* полем k *произвольной* характеристики теория полупростых алгебраических линейных групп [1]) приводит по существу к тем же типам, что и в классификации Киллинга—Картана для $k=\mathbf{C}$. Впоследствии Ж. Титс [XXV, a) и b)], анализируя методы Шевалле, нашел аксиоматический вариант разложений Брюа („BN-пары"), в замечательно гибкой форме, с привлечением одной лишь структуры группы; именно это понятие под

[1]) Существование большого числа „патологических" простых алгебр Ли над полями характеристики $p>0$ могло бы вызвать сомнение в универсальном характере классификации Киллинга — Картана.

названием „системы Титса“ было изложено в гл. IV, § 2. Все простые группы (в различных смыслах слова), о которых шла речь выше, канонически наделены системами Титса, и Титс сам [XXV, c)] доказал, что наличие такой системы в абстрактной группе G, вместе с некоторыми дополнительными чисто теоретико-групповыми свойствами, позволяет утверждать *простоту* группы G. Эта теорема покрыла большинство доказательств простоты, данных ранее для рассматриваемых групп (ср. гл. IV, § 2, n°6). Далее, в сотрудничестве с А. Борелем он обобщил результаты Шевалле [XIX, d)], установив существование систем Титса в группе рациональных точек полупростой линейной алгебраической группы над *произвольным* полем [XXVII].

Все системы Титса, встречавшиеся в этих вопросах, обладали конечной группой Вейля. Другая категория примеров была открыта Ивахори и Мацумотой [XXVI]; они показали, что если в конструкции Шевалле [XIX, c)] в качестве k взять p-адическое поле, то получаемая группа обладает системой Титса, группой Вейля которой будет *аффинная* группа Вейля исходной комплексной полупростой алгебры Ли. Совсем недавно Брюа и Титс [XXVIII] перенесли этот результат на все полупростые алгебраические группы над локальным полем.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) J. Hessel, Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie (1830, repr. dans Ostwald's Klassiker, № 88 et 89, Leipzig (Teubner), 1897).

(II) A. Bravais, Mémoires sur les polyèdres de forme symétrique, *Journal de Math.*, (1), **14** (1849), 141—180.

(III) A. Möbius: a) Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetze auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme, *J. de Grelle*, **43** (1852), 365—374 (=Gesammelte Werke, t. II, Leipzig (Hirzel), 1886, p. 349—360); b) Theorie der symmetrischen Figuren, Gesammelte Werke, t. II, Leipzig (Hirzel), 1886, 561—708.

(IV) L. Schläfli, Theorie der vielfachen Kontinuität, Denkschr. der Schweiz. naturforsch. Gesellschaft, **38** (1901), 1—237 (=Ges. math. Abhandlungen, t. I, Basel (Birkhäuser), 1950, 167—387).

(V) W. R. Hamilton, Memorandum respecting a new system of roots of unity, *Phil. Mag.* (4) **12** (1856), 446.

(VI) C. Jordan, Mémoire sur les groupes de mouvements, *Ann. di Mat.*, **2** (1868—1869), 167—215 et 322—345 (=Œuvres, t. IV, Paris (Gauthier-Villars), 1964, 231—302).

(VII) E. Goursat, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3) **6** (1889), 9—102.

(VIII) W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen: I) *Math. Ann.*, **31** (1888), 252—290; II) *там же*, **33** (1889), 1—48; III) *там же*, **34** (1889), 57—122; IV) *там же*, **36** (1890), 161—189.

(IX) E. Cartan: a) Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse), Paris (Nony), 1894 (=Œuvres complètes, Paris (Gauthier-Villars), 1952, t. I_1, 137—287); b) Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu, *Amer. J. Math.*, **18** (1896), 1—46 (=Œuvres complètes, t. I_1, 293—353); c) Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples, *Bull. Sci. Math.*, **49** (1925), 361—374 (=Œuvres complètes, t. I_1, 555—568); d) La géométrie des groupes simples, *Ann. di Math.* (4), **4** (1927), 209—256 (=Œuvres complètes, t. I_2, 793—840); e) Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), **44** (1927), 345—467 (=Œuvres complètes, t. I_2, 867—989); f) Complément au mémoire «Sur la géométrie des groupes simples», *Ann. di Math.* (4) **5** (1928), 253—260 (=Œuvres complètes, t. I_2, 1003—1010).

(X) R. Fricke und F. Klein, Theorie der automorphen Funktionen, Leipzig (Teubner), 1897.

(XI) L. E. Dickson: a) Theory of linear groups in an arbitrary field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **2** (1901), 363—394; b) A new system of simple groups, *Math. Ann.*, **40** (1905), 137—150; c) A class of groups in an arbitrary realm connected with the configuration of the 27 lines on a cubic surface, *Quarte J. Math.*, **33** (1901), 145—173; **39** (1908), 205—209.

(XII) A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin (Springer), 1924.

(XIII) H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen, *Math. Zeitschr.*, **23** (1925), 271—309, **24** (1926), 328—395, 789—791 (=Selecta, Basel-Stuttgart (Birkhäuser), 1956, 262—366).

(XIV) H. S. M. Coxeter: a) Groups whose fundamental regions are simplexes, *J. Lond. Math. Soc.*, **6** (1931), 132—136; b) The polytopes with regular prismatic figures, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **34** (1932), 126—189; c) Discrete groups generated by reflections, *Ann. Math.* (2), **35** (1934), 588—621; d) The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_i \cdot R_j)^{k_{ij}} = 1$, *J. Lond. Math. Soc.*, **10** (1935), 21—25; e) Regular polytopes, New York (Macmillan), 1948 (2e éd., 1963); f) The product of generators of a finite group generated by reflections, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 765—782.

(XIV bis) H. S. M. Coxeter in H. Weyl, The structure and representations of continuous groups (Inst. for Adv. Study, notes miméographiées par N. Jacobson et R. Brauer, 1934—1935): Appendix.

(XV) H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, Generators and relations for discrete groups, Ergeb. der Math., Neue Folge, Bd. 14, Berlin (Springer), 1957 (2e éd., 1965).

(XVI) B. L. van der Waerden, Die Klassification der einfachen Lieschen Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **37** (1933), 446—462.

(XVII) E. Witt, Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, *Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, **14** (1941), 289—322.

(XVIII) E. Stiefel, Ueber eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'sche Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lie'schen Gruppen, *Comm. Math. Helv.*, **14** (1941—1942), 350—380.

(XIX) C. Chevalley: a) Sur la classification des algèbres de Lie simples et de leurs représentations, C. R., **227** (1948), 1136—1138; b) Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. J. Math.*, 77 (1955), 778—782; c) Sur certains groups simples, *Tohôku Math. J.* (2), **7** (1955), 14—66. [Есть русский перевод: К. Шевалле, О некоторых простых группах, *Математика*, **2** : 1 (1958), 3—57]; d) Classification des groupes de Lie algébriques, 2 vol., Paris (Inst. H. Poincaré), 1956—1958.

(XX) Harish Chandra: a) On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 28—96; b) On a lemma of Bruhat, *J. de Math.* (9), **35** (1956), 203—210.

(XXI) F. Bruhat, Représentations induites des groupes de Lie semisimples complexes, *C. R.*, **238** (1954), 437—439.

(XXII) A. Borel, Groupes linéaires algébriques, *Ann. Math.* (2), **64** (1956), 20—80. [Есть русский перевод: А. Борель, Линейные алгебраические группы, «Мир», 1972.]

(XXIII) A. J. Coleman, The Betti numbers of the simple groups, *Can. J. Math.*, **10** (1958), 349—356.

(XXIV) R. Steinberg, Finite reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **91** (1959), 493—504.

(XXV) J. Tits: a) Groupes simples et géométries associées, *Proc. Int. Congress Math.*, Stockholm, 1962, 197—221; b) Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C. R.*, 254 (1962), 2910—2912; c) Algebraic and abstract simple groups, *Ann. Math.* (2), 80 (1964), 313—329.

(XXVI) N. Iwahori and H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups, *Publ. Math. I. H. E. S.*, № 25 (1965), 5—48.

(XXVII) A. Borel et J. Tits, Groups réductifs, *Publ. Math. I. H. E. S.*, № 27 (1965), 55—150. [Есть русский перевод: А. Борель, Ж. Титс, Редуктивные группы, *Математика,* **11** : 1 (1967), 43—111; **11** : 2 (1967), 3—31.]

(XXVIII) F. Bruhat et J. Tits, Groupes algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. on Local Fields*, p. 23—36, Berlin (Springer), 1967.

(XXIX) R. Carter, Simple groups and simple Lie algebras, *J. Lond. Math. Soc.*, **40** (1965), 193—240. [Есть русский перевод: Р. Картер, Простые группы и простые алгебры Ли, *Математика*, **10** : 5 (1966), 5—47.]

(XXX) [1]) I. G. Macdonald, Affine root systems and Dedekind's η-function, *Inventiones Math.*, **15** (1972), 91—143. [Есть русский перевод: И. Г. Макдональд, Аффинные системы корней и η-функция Дедекинда, *Математика*, **16** : 4 (1972), 3—49.]

[1]) Добавлено при переводе. — *Прим. ред.*

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Цифры в ссылках указывают последовательно главу, параграф и пункт

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Цифры в ссылках указывают последовательно главу, параграф и пункт (или упражнение)

ТАБЛИЦА I

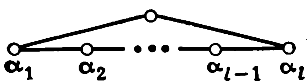
Системы типа A_l ($l \geqslant 1$)

(I) V — гиперплоскость пространства $E = \mathbf{R}^{l+1}$, состоящая из точек, сумма координат которых равна нулю.
Корни: $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ ($i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant l+1$, $1 \leqslant j \leqslant l+1$).
Число корней: $n = l(l+1)$.

(II) Базис: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, ..., $\alpha_l = \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}$.
Положительные корни: $\varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l+1$).

(III) Число Кокстера: $h = l + 1$.

(IV) Максимальный корень: $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_l$.
Пополненный граф Дынкина ($l \geqslant 2$):



При $l = 1$ графом Кокстера аффинной группы Вейля будет

(V) $R^\vee = R$,

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{2(l+1)}, \quad \gamma(R) = (l+1)^2.$$

(VI) Фундаментальные веса:

$$\bar{\omega}_i = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i) - \frac{i}{l+1} \sum_{j=1}^{l+1} \varepsilon_j =$$

$$= \frac{1}{l+1} \left[(l-i+1)\alpha_1 + 2(l-i+1)\alpha_2 + \ldots (i-1)(l-i+1)\alpha_{i-1} + \right.$$
$$\left. + i(l-i+1)\alpha_i + i(l-i)\alpha_{i+1} + \ldots + i\alpha_l \right].$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$2\rho = l\varepsilon_1 + (l-2)\varepsilon_2 + (l-4)\varepsilon_3 + \ldots - (l-2)\varepsilon_l - l\varepsilon_{l+1} =$$
$$= l\alpha_1 + 2(l-1)\alpha_2 + \ldots + i(l-i+1)\alpha_i + \ldots + l\alpha_l.$$

(VIII) $Q(R)$: множество векторов с нулевой суммой целочисленных координат.
$P(R)$: порождена группой $Q(R)$ и вектором $\varepsilon_1 - (l+1)^{-1} \times (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{l+1})$.
$P(R)/Q(R)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/(l+1)\mathbf{Z}$.
Индекс связности: $l + 1$.

(IX) Показатели: 1, 2, ..., l.

(X) $W(R) = \mathfrak{S}_{l+1}$, отождествляется с группой перестановок векторов ε_i. Порядок группы $W(R)$: $(l+1)!$.

(XI) $l = 1$: $A(R) = W(R)$; $w_0 = -1$.
$l \geqslant 2$: $A(R) = W(R) \times \{1, -1\}$ и w_0 переводит α_i в $-\alpha_{l+1-i}$.

(XII) Группа $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ есть циклическая группа порядка $l+1$; на пополненном графе Дынкина она действует циклическими перестановками. При $l \geqslant 2$ единственный неединичный элемент группы $A(R)/W(R)$ действует на $P(R)/Q(R)$ как автоморфизм $x \longmapsto -x$.

(XIII) Матрица Картана ($l \times l$):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ТАБЛИЦА II

Системы типа B_l ($l \geqslant 2$)

(I) $V = E = \mathbf{R}^l$.
Корни: $\pm \varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$.
Число корней: $n = 2l^2$.

(II) Базис:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ \ldots, \ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \quad \alpha_l = \varepsilon_l.$$

Положительные корни:
$$\begin{cases} \varepsilon_i = \sum\limits_{i \leqslant k \leqslant l} \alpha_k \quad (1 \leqslant i \leqslant l), \\ \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k \quad (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum\limits_{j \leqslant k \leqslant l} \alpha_k \\ \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant l). \end{cases}$$

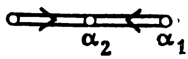
(III) Число Кокстера: $h = 2l$.

(IV) Максимальный корень:

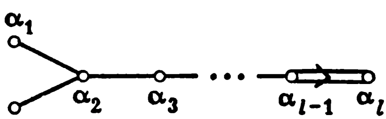
$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_l.$$

$\tilde{\alpha} = 2\bar{\omega}_2$ при $l = 2$, $\tilde{\alpha} = \bar{\omega}_2$ при $l \geqslant 3$.
Пополненный граф Дынкина:

при $l = 2$



при $l \geqslant 3$



(V) $R^\vee$ — множество векторов:

$$\pm 2\varepsilon_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l), \qquad \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant l).$$

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{4l - 2}, \qquad \gamma(R) = (l + 1)(4l - 2).$$

(VI) Фундаментальные веса:

$$\bar{\omega}_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i \quad (1 \leqslant i < l) =$$
$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_l),$$

$$\bar{\omega}_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_l) =$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + l\alpha_l).$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$2\rho = (2l-1)\,\varepsilon_1 + (2l-3)\,\varepsilon_2 + \ldots + 3\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l =$$
$$= (2l-1)\,\alpha_1 + 2\,(2l-2)\,\alpha_2 + \ldots + i\,(2l-i)\,\alpha_i + \ldots + l^2\alpha_l.$$

(VIII) $Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\varepsilon_i, \quad P(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\varepsilon_i + \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i\right).$

$P(R)/Q(R)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и порождена образом веса $\bar{\omega}_l$. Индекс связности: 2.

(IX) Показатели: 1, 3, 5, ..., $2l-1$.

(X) $W(R)$ есть полупрямое произведение группы $\mathfrak{S}_l$, действующей перестановками на корнях ε_i, и группы $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$ отображений $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i\,\varepsilon_i$. Ее порядок равен $2^l \cdot l!$.

(XI) $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

(XII) Единственный нееединичный элемент группы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ определяет единственный нетривиальный автоморфизм пополненного графа Дынкина.

(XIII) Матрица Картана ($l \times l$):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ТАБЛИЦА III

Системы типа C_l $(l \geqslant 2)$

(I) $V = E = \mathbf{R}^l$.
Корни: $\pm 2\varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$.
Число корней: $n = 2l^2$.

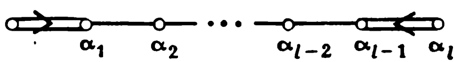
(II) Базис:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l,\quad \alpha_l = 2\varepsilon_l.$$

Положительные корни:
$$\begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k \quad (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum\limits_{j \leqslant k < l} \alpha_k + \alpha_l \\ \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ 2\varepsilon_i = 2 \sum\limits_{i \leqslant k < l} \alpha_k + \alpha_l \quad (1 \leqslant i \leqslant l). \end{cases}$$

(III) Число Кокстера: $h = 2l$.

(IV) Максимальный корень: $\tilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$.
Пополненный граф Дынкина:



(V) $R^\vee$ есть множество векторов $\pm \varepsilon_i$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{4(l+1)},\quad \gamma(R) = (l+1)(4l-2).$$

(VI) Фундаментальные веса:

$$\bar{\omega}_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l)$$
$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (i-1)\alpha_{i-1} + i\left(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{l-1} + \frac{1}{2}\alpha_l\right).$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$2\rho = 2l\varepsilon_1 + (2l-2)\varepsilon_2 + \ldots + 4\varepsilon_{l-1} + 2\varepsilon_l =$$
$$= 2l\alpha_1 + 2(2l-1)\alpha_2 + \ldots + i(2l-i+1)\alpha_i + \ldots$$
$$\ldots + (l-1)(l+2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}l(l+1)\alpha_l.$$

(VIII) $Q(R)$: множество точек с четной суммой целочисленных координат.

$$P(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\varepsilon_i.$$

$P(R)/Q(R)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и порождена образом веса $\tilde{\omega}_1$. Индекс связности: 2.

(IX) Показатели: 1, 3, 5, ..., $2l-1$.

(X) $W(R)$ есть полупрямое произведение группы $\mathfrak{S}_l$, действующей перестановками на векторах ε_i, и группы $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$ отображений $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i \varepsilon_i$. Ее порядок равен $2^l \cdot l!$.

(XI) $A(R) = W(R)$; $w_0 = -1$.

(XII) Единственный неединичный элемент группы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ определяет единственный нетривиальный автоморфизм пополненного графа Дынкина.

(XIII) Матрица Картана ($l \times l$):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ТАБЛИЦА IV

Системы типа D_l ($l \geqslant 3$)

(I) $V = E = \mathbf{R}^l$.

Корни: $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l$: (ε_i) — канонический базис в $\mathbf{R}^l$).

Число корней; $n = 2l(l-1)$.

(II) Базис:

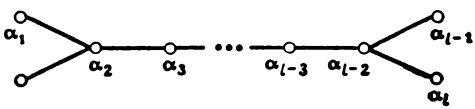
$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$, $\alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l$.

Положительные корни:
$$\begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k \quad (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_l = \left(\sum\limits_{i \leqslant k \leqslant l-2} \alpha_k\right) + \alpha_l \quad (1 \leqslant i < l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2\sum\limits_{j \leqslant k < l-1} \alpha_k + \alpha_{l-1} + \alpha_l \\ \qquad (1 \leqslant i < j < l). \end{cases}$$

(III) Число Кокстера: $h = 2l - 2$.

(IV) Максимальный корень:
$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l.$$

$\tilde{\alpha} = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$ при $l = 3$ и $\tilde{\alpha} = \bar{\omega}_2$ при $l \geqslant 4$. Пополненный граф Дынкина ($l \geqslant 4$):



(V) $R^\vee = R$.
$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{4(l-1)}, \quad \gamma(R) = 4(l-1)^2.$$

(VI) Фундаментальные веса:
$$\bar{\omega}_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i = \qquad (1 \leqslant i \leqslant l-2)$$
$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (i-1)\alpha_{i-1} +$$
$$+ i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{l-2}) + \frac{1}{2} i(\alpha_{l-1} + \alpha_l),$$
$$\bar{\omega}_{l-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2} l\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_l\right),$$
$$\bar{\omega}_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2} l\alpha_l\right).$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$2\rho = 2(l-1)\varepsilon_1 + 2(l-2)\varepsilon_2 + \ldots + 2\varepsilon_{l-1} =$$
$$= 2(l-1)\alpha_1 + 2(2l-3)\alpha_2 + \ldots$$
$$\ldots + 2\left(il - \frac{i(i+1)}{2}\right)\alpha_i + \ldots + \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l).$$

(VIII) $Q(R)$: множество точек с четной суммой целочисленных координат

$$P(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\varepsilon_i + \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i\right).$$

l нечетно: $P(R)/Q(R)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ и порождена образом веса $\bar{\omega}_l$; при этом $\bar{\omega}_1 \equiv 2\bar{\omega}_l$ и $\bar{\omega}_{l-1} \equiv 3\bar{\omega}_l \bmod Q(R)$.

l четно: $P(R)/Q(R)$ изоморфна группе $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$: три элемента порядка 2 являются образами весов $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_{l-1}$ и $\bar{\omega}_l$.

Индекс связности: 4.

(IX) Показатели: 1, 3, 5, ... $2l-5$, $2l-3$, $l-1$ (последний показатель появляется дважды при четном l и один раз при нечетном l).

(X) $W(R)$ есть полупрямое произведение группы $\mathfrak{S}_l$, действующей перестановками на векторах ε_i, и группы $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}$ отображений $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i \varepsilon_i$ с $\prod_i (\pm 1)_i = 1$. Ее порядок равен $2^{l-1} \cdot l!$.

(XI) $l \neq 4$: $A(R)/W(R) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, действует на графе Дынкина транспозицией вершин α_{l-1} и α_l.

$l = 4$: $A(R)/W(R) \cong \mathfrak{S}_3$, действует на графе Дынкина перестановками вершин α_1, α_3 и α_4.

$w_0 = -1$, если l четно; $w_0 = -\varepsilon$, если l нечетно; здесь ε — автоморфизм, который переставляет α_{l-1} и α_l, оставляя неподвижными все другие α_i.

(XII) Действие $P(R^\vee)/Q(R^\vee) = P(R)/Q(R)$ на пополненный граф Дынкина:

l нечетно: ω_l переводит α_0 в α_l, α_l в α_1, α_1 в α_{l-1} и α_{l-1} в α_0; при $2 \leqslant j \leqslant l-2$ он переставляет местами α_j и α_{l-j}.

l четно: ω_l (соотв. ω_{l-1}) переставляет α_0 и α_l (соотв. α_0 и α_{l-1}), α_1 и α_{l-1} (соотв. α_1 и α_l), а при $2 \leqslant j \leqslant l-2$ переставляет α_j и α_{l-j}.

(XIII) Матрица Картана ($l \times l$):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Система типа E_6

(I) V — подпространство в $E = \mathbf{R}^8$, состоящее из точек, координаты (ξ_i) которых таковы, что $\xi_6 = \xi_7 = -\xi_8$.

Корни: $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$,

$$\pm\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \text{ с четной суммой } \sum_{i=1}^{5}\nu(i).$$

Число корней: $n = 72$.

(II) Базис:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7), \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \quad \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3, \quad \alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4.$$

Положительные корни:

$$\pm\varepsilon_i + \varepsilon_j \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant 5),$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right) \text{ с четной суммой } \sum_{i=1}^{5}\nu(i).$$

Положительные корни, обладающие хотя бы одним коэффициентом $\geqslant 2$ [1]) (символом $\substack{acdef\\b}$ обозначается корень $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6$):

$$\substack{01210\\1} \quad \substack{11210\\1} \quad \substack{01211\\1} \quad \substack{12210\\1} \quad \substack{11211\\1} \quad \substack{01221\\1} \quad \substack{12211\\2},$$

$$\substack{11221\\1} \quad \substack{12221\\1} \quad \substack{12321\\1} \quad \substack{12321\\2}.$$

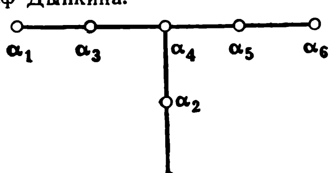
(III) Число Кокстера: $h = 12$.

(IV) Максимальный корень:

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8) =$$

$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 = \bar{\omega}_2.$$

Пополненный граф Дынкина:



[1]) Остальные положительные корни получатся, если применить следствие 3 предложения 19 гл. VI, § 1, n° 6.

(V) $R = R^\vee$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{24}, \quad \gamma(R) = 144.$$

(VI) Фундаментальные веса:

$$\begin{aligned}
\bar\omega_1 &= \frac{2}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) = \\
&= \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6), \\
\bar\omega_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8) = \\
&= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \\
\bar\omega_3 &= \frac{5}{6}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5) = \\
&= \frac{1}{3}(5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 10\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6), \\
\bar\omega_4 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8 = \\
&= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6, \\
\bar\omega_5 &= \frac{2}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = \\
&= \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 5\alpha_6), \\
\bar\omega_6 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \varepsilon_5 = \\
&= \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6).
\end{aligned}$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$\begin{aligned}
2\rho &= 2(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 4(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6)) = \\
&= 2(8\alpha_1 + 11\alpha_2 + 15\alpha_3 + 21\alpha_4 + 15\alpha_5 + 8\alpha_6).
\end{aligned}$$

(VIII) $P(R)/Q(R)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.
Индекс связности: 3.

(IX) Показатели: 1, 4, 5, 7, 8, 11.

(X) Порядок группы $W(R)$: $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$.

(XI) $A(R) = W(R) \times \{1, -1\}$; w_0 переводит $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ соответственно в $-\alpha_6, -\alpha_2, -\alpha_5, -\alpha_4, -\alpha_3, -\alpha_1$.

(XII) Неединичный элемент группы $A(R)/W(R)$ определяет автоморфизм $x \longmapsto -x$ группы $P(R)/Q(R)$.
Группа автоморфизмов пополненного графа Дынкина изоморфна $\mathfrak{S}_3$; ее элементы порядка 3 индуцируются двумя неединичными элементами группы $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$.

(XIII) Матрица Картана:

$$\begin{pmatrix}
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}$$

ТАБЛИЦА VI

Система типа E_7

(I) V — гиперплоскость пространства $E = \mathbf{R}^8$, ортогональная к $\varepsilon_7 + \varepsilon_8$.

Корни: $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 6)$, $\quad \pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)$, $\quad \pm\frac{1}{2}\left(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\right)$ с нечетной суммой $\sum_{i=1}^{6} \nu(i)$.

Число корней: $n = 126$.

(II) Базис:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7), \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \ \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \ \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3, \ \alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \ \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5.$$

Положительные корни:

$$\pm\varepsilon_i + \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 6), \quad \varepsilon_8 - \varepsilon_7,$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\right) \text{ с нечетной суммой } \sum_{i=1}^{6} \nu(i).$$

Положительные корни, содержащие α_7 и обладающие хотя бы одним коэффициентом $\geqslant 2$ [1]) (символом $\begin{smallmatrix} acdefg \\ b \end{smallmatrix}$ обозначается корень $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6 + g\alpha_7$):

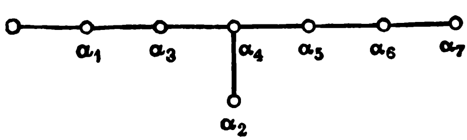
$\begin{matrix}012111\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}112111\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}012211\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}122111\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}112211\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}012221\\1\end{matrix}$
$\begin{matrix}122211\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}112221\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}122221\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}123211\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}123221\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}123211\\2\end{matrix}$
$\begin{matrix}123321\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}123221\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}123321\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}124321\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}134321\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}234321\\2\end{matrix}$

(III) Число Коксетера: $h = 18$.

(IV) Максимальный корень:

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 = \bar{\omega}_1.$$

Пополненный граф Дынкина:



---

[1]) Положительные корни, не содержащие α_7, принадлежат E_6. Положительные корни, все коэффициенты которых $\leqslant 1$, получатся, если применить следствие 3 предложения 19 гл. VI, § 1, n° 6.

(V) $R^\vee = R$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{36}, \quad \gamma(R) = 324.$$

(VI) Фундаментальные веса:

$$\bar\omega_1 = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 =$$
$$= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7,$$
$$\bar\omega_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + 2(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)) =$$
$$= \frac{1}{4}(4\alpha_1 + 7\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7),$$
$$\bar\omega_3 = \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + 3(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)) =$$
$$= 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7,$$
$$\bar\omega_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + 2(\varepsilon_8 - \varepsilon_7) =$$
$$= 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7,$$
$$\bar\omega_5 = \frac{1}{2}(2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_5 + 2\varepsilon_6 + 3(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)) =$$
$$= \frac{1}{2}(6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 10\alpha_6 + 5\alpha_7),$$
$$\bar\omega_6 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8 =$$
$$= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7;$$
$$\bar\omega_7 = \varepsilon_6 + \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7) =$$
$$= \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7).$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$2\rho = 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 8\varepsilon_5 + 10\varepsilon_6 - 17\varepsilon_7 + 17\varepsilon_8 =$$
$$= 34\alpha_1 + 49\alpha_2 + 66\alpha_3 + 96\alpha_4 + 75\alpha_5 + 52\alpha_6 + 27\alpha_7.$$

(VIII) $P(R)/Q(R)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
Индекс связности: 2.

(IX) Показатели: 1, 5, 7 9, 11, 13, 17.

(X) Порядок группы $W(R)$: $2^{10}. 3^4. 5.7$.

(XI) $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

(XII) $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ обладает одним неединичным элементом; он определяет единственный нетривиальный автоморфизм пополненного графа Дынкина.

(XIII) Матрица Картана:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ТАБЛИЦА VII

Система типа E_8

(I) $V = E = \mathbf{R}^8$.

Корни: $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$, $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i$ с четной суммой $\sum_{i=1}^{8} \nu(i)$. Число корней: $n = 240$.

(II) Базис:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7), \ \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$
$$\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \ \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \ \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3,$$
$$\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \ \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5, \ \alpha_8 = \varepsilon_7 - \varepsilon_6.$$

Положительные корни:

$\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(i < j)$,

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{7} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\right) \text{ с четной суммой } \sum_{i=1}^{7} \nu(i).$$

Положительные корни, содержащие α_8 и обладающие хотя бы одним коэффициентом $\geqslant 2$ [1]) (символом $\begin{smallmatrix} acdefgh \\ b \end{smallmatrix}$ обозначается корень $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6 + g\alpha_7 + h\alpha_8$):

0121111 1	0122111 1	1121111 1	0122211 1	1221111 1	1122111 1
1222111 1	1122211 1	0122221 1	1232111 1	1222211 1	1122221 1
1232111 2	1232211 1	1222221 1	1232211 2	1233211 1	1232221 1
1233211 2	1232221 2	1233221 1	1243211 2	1233221 2	1233321 1
1343211 2	1243221 2	1233321 2	2343211 2	1343221 2	1243321 2
2343221 2	1343321 2	1244321 2	2343321 2	1344321 2	1354321 2
2344321 2	1354321 3	2354321 2	2354321 3	2454321 2	2454321 3
2464321 3	2465321 3	2465421 3	2465431 3	2465432 3	

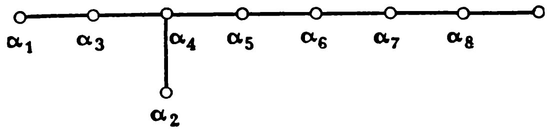
[1]) Положительные корни, не содержащие α_8, принадлежат E_7. Положительные корни, все коэффициенты которых $\leqslant 1$, получатся, если применить следствие 3 предложения 19 гл. VI, § 1, n°6.

(III) Число Кокстера: $h = 30$

(IV) Максимальный корень:

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 = \bar{\omega}_8.$$

Пополненный граф Дынкина:



(V) $R^{\vee} = R$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{60}, \quad \gamma(R) = 900.$$

(VI) Фундаментальные веса:

$$\bar{\omega}_1 = 2\varepsilon_8 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 10\alpha_4 + 8\alpha_5 + 6\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 5\varepsilon_8) = 5\alpha_1 + 8\alpha_2 + 10\alpha_3 + 15\alpha_4 + 12\alpha_5 + 9\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_3 = \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 7\varepsilon_8) = 7\alpha_1 + 10\alpha_2 + 14\alpha_3 + 20\alpha_4 + 16\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 5\varepsilon_8 = 10\alpha_1 + 15\alpha_2 + 20\alpha_3 + 30\alpha_4 + 24\alpha_5 + 18\alpha_6 + 12\alpha_7 + 6\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_5 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 4\varepsilon_8 = 8\alpha_1 + 12\alpha_2 + 16\alpha_3 + 24\alpha_4 + 20\alpha_5 + 15\alpha_6 + 10\alpha_7 + 5\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_6 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 3\varepsilon_8 = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_7 = \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 2\varepsilon_8 = 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 8\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$

$$\bar{\omega}_8 = \varepsilon_7 + \varepsilon_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8.$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$2\rho = 2(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 5\varepsilon_6 + 6\varepsilon_7 + 23\varepsilon_8 = 2(46\alpha_1 + 68\alpha_2 + 91\alpha_3 + 135\alpha_4 + 110\alpha_5 + 84\alpha_6 + 57\alpha_7 + 29\alpha_8)$$

(VIII) $Q(R)$: множество точек с такими координатами ξ_i, что

$$2\xi_i \in \mathbf{Z}, \ \xi_i - \xi_j \in \mathbf{Z}, \ \sum_{i=1}^{8} \xi_i \in 2\mathbf{Z}.$$

$P(R) = Q(R)$.

Индекс связности: 1.

(IX) Показатели: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

(X) Порядок группы $W(R)$: 2^{14}. 3^5. 5^2. 7.

(XI) и (XII) $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$

(XIII) Матрица Картана:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Система типа F_4

(I) $V = E = \mathbf{R}^4$.

Корни:

$$\pm \varepsilon_i \ (1 \leqslant i \leqslant 4), \quad \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant 4),$$
$$\frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Число корней: $n = 48$.

(II) Базис:

$$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \ \alpha_3 = \varepsilon_4, \ \alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

Положительные корни:

$$\varepsilon_i \ (1 \leqslant i \leqslant 4), \ \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant 4), \ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Положительные корни, обладающие хотя бы одним коэффициентом $\geqslant 2$ [1]) (символом $abcd$ обозначается корень $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4$):

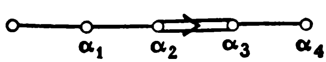
0120 1120 0121 1220 1121 0122 1221

1122 1231 1222 1232 1242 1342 2342.

(III) Число Кокстера: $h = 12$.

(IV) Максимальный корень: $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = \tilde{\omega}_1$.

Пополненный граф Дынкина:



(V) $R^\vee$ есть множество векторов $\pm 2\varepsilon_i$, $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{18}, \quad \gamma(R) = 162.$$

(VI) Фундаментальные веса:

$$\tilde{\omega}_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4,$$

---

[1]) Остальные положительные корни получатся, если применить следствие 3 предложения 19 гл. VI, § 1, n° 6.

$$\bar{\omega}_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4\alpha_4,$$

$$\bar{\omega}_3 = \frac{1}{2}(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4,$$

$$\bar{\omega}_4 = \varepsilon_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$2\rho = 11\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 16\alpha_1 + 30\alpha_2 + 42\alpha_3 + 22\alpha_4.$$

(VIII) $$Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbf{Z}\varepsilon_i + \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i\right).$$

$$P(R) = Q(R).$$

Индекс связности: 1.

(IX) Показатели: 1, 5, 7, 11.

(X) $W(R)$ есть полупрямое произведение $\mathfrak{S}_3$ на группу, которая в свою очередь является полупрямым произведением $\mathfrak{S}_4$ на $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$.

Порядок группы $W(R)$: $2^7 \cdot 3^2$.

(XI) и (XII) $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

(XIII) Матрица Картана:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ТАБЛИЦА IX

Система типа G_2

(I) V — гиперплоскость пространства $E = \mathbf{R}^3$, определенная уравнением $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$.

Корни:

$$\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3),$$
$$\pm(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Число корней: 12.

(II) Базис: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Положительные корни: α_1, α_2, $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

(III) Число Кокстера: $h = 6$.

(IV) Максимальный корень: $\tilde{\alpha} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \bar{\omega}_2$.

Пополненный граф Дынкина:

(V) $R^\vee$ есть множество векторов $\pm\alpha_1$, $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pm(2\alpha_1 + \alpha_2)$,
$\pm\frac{1}{3}\alpha_2$, $\pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + 2\alpha_2)$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x \mid y)}{24}, \qquad \gamma(R) = 48.$$

(VI) Фундаментальные веса:

$$\bar{\omega}_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \bar{\omega}_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

(VII) Сумма положительных корней:

$$2\rho = 2(5\alpha_1 + 3\alpha_2).$$

(VIII) $P(R) = Q(R)$.

Индекс связности: 1.

(IX) Показатели: 1, 5.

(X) $W(R)$: диэдральная группа порядка 12.

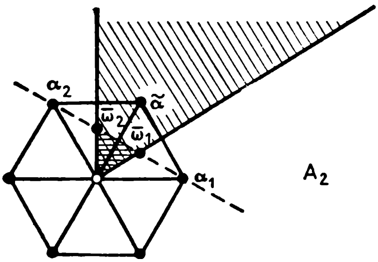
(XI) и (XII) $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

(XIII) Матрица Картана:

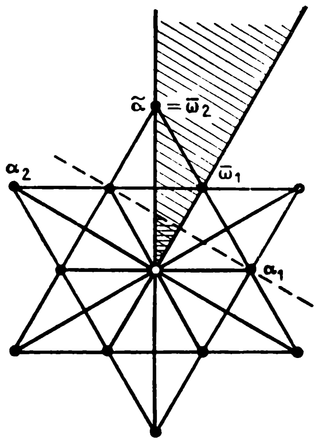
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ТАБЛИЦА X

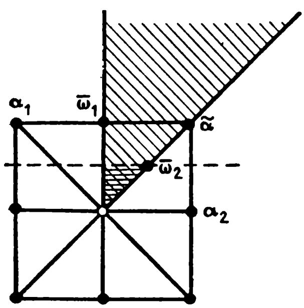
Неприводимые системы ранга 2



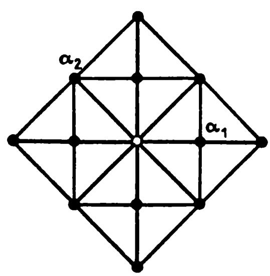
A_2



G_2



B_2



BC_2

На первых трех рисунках представлены системы корней R типа A_2, B_2 и G_2. Заштрнхованная область изображает камеру C, соответствующую базису (α_1, α_2). Штриховая линия — это прямая $(x \mid \beta) = 1$, где β — максимальный корень дуальной системы $R^\vee$; дважды заштрихованная область изображает альков системы $R^\vee$ с вершиной 0, содержащийся в C.

На последнем рисунке представлена единственная неприводимая система корней ранга 2, *не являющаяся приведенной*.

СВОДКА ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМ КОРНЕЙ

(В этой сводке мы ограничимся случаем поля вещественных чисел и приведенными системами корней.)

1) Пусть V — вещественное векторное пространство. *Приведенной системой корней* (или *корневой системой*) *в* V называется подмножество $R \subset V$, которое обладает следующими свойствами:

(i) R конечно и порождает V;

(ii) для любого $\alpha \in R$ существует вектор $\alpha^\vee \in V^*$, такой, что $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ и эндоморфизм

$$S_\alpha\colon x \longmapsto x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

пространства V переводит R в R;

(iii) $\alpha^\vee(R) \subset \mathbf{Z}$ при всех $\alpha \in R$;

(iv) если $\alpha \in R$, то $2\alpha \notin R$.

С учетом (i) элемент $\alpha^\vee$, существование которого утверждается свойством (ii), единствен; это придает смысл свойству (iii). Отображение s_α является отражением, оставляющим неподвижными точки гиперплоскости $L_\alpha = \operatorname{Ker}(\alpha^\vee)$ и переводящим α в $-\alpha$.

Элементы системы R называются *корнями*. Размерность пространства V называется *рангом* системы корней.

2) Группа автоморфизмов пространства V, оставляющая устойчивой R, обозначается символом $A(R)$. Отражения s_α $(\alpha \in R)$ порождают подгруппу $W(R)$ в $A(R)$, называемую *группой Вейля* системы R; эта подгруппа нормальна в $A(R)$. Единственными отражениями, принадлежащими $W(R)$, будут s_α, $\alpha \in R$.

3) Множество $R^\vee$ векторов $\alpha^\vee$ (для $\alpha \in R$) является приведенной системой корней в V^*, называемой системой, *дуальной* (или *обратной*) к R. Отображение $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ есть биекция R на $R^\vee$, которую называют канонической. Поскольку $(R^\vee)^\vee = R$, канонические биекции $R \to R^\vee$, $R^\vee \to R$ взаимно обратны. Отображение $u \to {}^t u^{-1}$ определяет изоморфизм $W(R)$ на $W(R^\vee)$, при помощи которого эти группы отождествляются.

4) Пусть вещественное векторное пространство V есть прямая сумма векторных подпространств $V_1, \ldots, V_r$. Для любого i пусть R_i — приведенная система корней в V_i. Тогда объединение R всех R_i будет системой корней в V, называемой *прямой суммой систем* R_i. Группа $W(R)$ отождествляется с произведением групп $W(R_i)$. Система R называется *неприводимой*, если $R \neq \varnothing$ и если R не разложима в прямую сумму двух непустых систем корней. Это эквивалентно тому, что $W(R)$ является неприводимой группой. Всякая приведенная система корней R разлагается в прямую сумму приведенных неприводимых систем корней, определенных однозначно с точностью до перестановки и называемых *неприводимыми компонентами* системы R.

5) Пусть R — приведенная система корней в V. В V существуют скалярные произведения, инвариантные относительно $W(R)$. Всюду в дальнейшем символом $(x|y)$ обозначается какое-нибудь одно такое фиксированное скалярное произведение. Если отождествить V^* с V при помощи $(x|y)$, то $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$. Отражение s_α есть ортогональное отражение, которое переводит α в $-\alpha$. Группа Вейля транзитивна на множестве корней одной и той же длины. Если система R неприводима, то с точностью до умножения на константу скалярное произведение $(x|y)$ определено однозначно.

6) Пусть R — приведенная система корней. Для $\alpha, \beta \in R$ вводится обозначение

$$\langle\alpha, \beta^\vee\rangle = n(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}.$$

Справедливы соотношения

$$n(\alpha, \alpha) = 2,$$
$$s_\beta(\alpha) = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta,$$
$$n(\alpha, \beta) = \frac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}.$$

С точностью до перемены местами α и β все возможности исчерпываются следующими:

$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 0$; $\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{\pi}{2}$; $s_\alpha s_\beta$ — порядка 2;

$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 1$; $\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{\pi}{3}$; $\|\alpha\| = \|\beta\|$; $s_\alpha s_\beta$ — порядка 3;

$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -1$; $\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{2\pi}{3}$; $\|\alpha\| = \|\beta\|$; $s_\alpha s_\beta$ — порядка 3;

$n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 2; \quad \widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{\pi}{4}; \quad \|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|;$ $s_\alpha s_\beta$ — порядка 4;

$n(\alpha, \beta) = -1, \quad n(\beta, \alpha) = -2; \quad \widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{3\pi}{4}; \quad \|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|;$ $s_\alpha s_\beta$ — порядка 4;

$n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 3; \quad \widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{\pi}{6}; \quad \|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|;$ $s_\alpha s_\beta$ — порядка 6;

$n(\alpha, \beta) = -1, \quad n(\beta, \alpha) = -3; \quad \widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{5\pi}{6}; \quad \|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|;$ $s_\alpha s_\beta$ — порядка 6;

$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 2; \quad \alpha = \beta;$

$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -2; \quad \alpha = -\beta.$

7) Пусть $\alpha, \beta \in R$. При $(\alpha|\beta) > 0$ разность $\alpha - \beta$ будет корнем, за исключением случая $\alpha = \beta$. Если $(\alpha|\beta) < 0$, то $\alpha + \beta$ будет корнем, за исключением случая $\alpha = -\beta$.

8) Пусть α, β — два непропорциональных корня. Множество I тех $j \in \mathbf{Z}$, для которых $\beta + j\alpha \in R$, есть интервал $[-q, p]$ в $\mathbf{Z}$, содержащий 0. Имеют место соотношения

$$p - q = -n(\beta, \alpha), \quad \frac{q+1}{p} = \frac{(\beta + \alpha \mid \beta + \alpha)}{(\beta \mid \beta)}.$$

Пусть S — множество корней $\beta + j\alpha$ с $j \in I$. Тогда $s_\alpha(S) = S$ и $s_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha$. Говорят, что S есть *α-серия* корней, содержащая β; $\beta - q\alpha$ называется *началом* серии, $\beta + p\alpha$ — ее *концом*, а $p + q$ — *длиной*.

Если T — α-серия с началом γ, то длиной T будет $-n(\gamma, \alpha)$.

9) Пусть X — объединение гиперплоскостей $\operatorname{Ker} \alpha^\vee$ $(\alpha \in R)$. Связные компоненты множества $V - X$ называются *камерами* системы R в V. Они представляют собой открытые симплициальные конусы. Группа Вейля действует просто транзитивным образом на множестве камер. Замыкание $\overline{C}$ камеры C является фундаментальной областью для $W(R)$. Имеем $(x \mid y) > 0$ для $x, y \in C$. Биекция V на V^*, соответствующая $(x \mid y)$, определяет биекцию множества камер системы R в V на множество камер дуальной системы $R^\vee$ в V^*. Символом $C^\vee$ обозначается образ камеры C при этой биекции.

10) Пусть C — камера системы R и $L_1, L_2, \ldots, L_l$ — стенки камеры C. Для любого i существует, и притом только один, корень α_i, такой, что $L_i = L_{\alpha_i}$, причем α_i лежит по ту же сторону от L_i, что и C. Семейство $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ есть базис пространства V, а C совпадает с множеством тех $x \in V$,

для которых $\langle \alpha_i^\vee, x\rangle > 0$ при всех i, или, что равносильно, $(\alpha_i \mid x) > 0$ при всех i. Говорят еще, что $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ есть *базис* $B(C)$ *системы* R, *определенный камерой* C. Имеем $(\alpha_i \mid \alpha_j) \leqslant 0$ при $i \neq j$. Группа $W(R)$ действует просто транзитивным образом на множестве базисов. Всякий корень переводится каким-нибудь элементом группы $W(R)$ в элемент базиса $B(C)$. Далее, $\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee\} = B(C^\vee)$.

11) Полагая $s_{\alpha_i} = s_i$, обозначим через S множество всех s_i, а через m_{ij} порядок произведения $s_i s_j$. Пара $(W(R), S)$ есть *система Кокстера* с матрицей (m_{ij}); другими словами, группа $W(R)$ определена семейством образующих $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant}$ и соотношениями $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$. Для того чтобы s_i и s_j были сопряжены в $W(R)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ с $i_1 = i$, $i_q = j$, а каждое из чисел $m_{i_t i_{t+1}}$ было равно 3.

12) Пусть $n_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j)$. Матрица $(n_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant l}$ называется *матрицей Картана* системы R. Она не зависит (с точностью до перестановки индексов $1, 2, \ldots, l$) от выбора C. Справедливы соотношения $n_{ii} = 2$, $n_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ для $i \neq j$. Две системы корней с одинаковыми матрицами Картана изоморфны.

13) Пусть G — подгруппа в $A(R)$, оставляющая устойчивым $B(C)$. Тогда $A(R)$ является полупрямым произведением G и $W(R)$.

14) *Отношением порядка, определенным камерой* C в V (соотв. в V^*), называется согласованное со структурой векторного пространства на V (соотв. V^*) отношение порядка, при котором элементами $\geqslant 0$ будут линейные комбинации корней α_i (соотв. $\alpha_i^\vee$) с коэффициентами $\geqslant 0$. Эти элементы называются *положительными* относительно C или относительно $B(C)$. Указанные отношения порядка определяются также дуальной камерой $C^\vee$. Элемент из V будет $\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда его значения на $C^\vee$ будут $\geqslant 0$. Множество элементов $\geqslant 0$ относительно C содержит $\bar{C}$, но, вообще говоря, отлично от $\bar{C}$. Пусть $x \in V$. Для того чтобы $x \in \bar{C}$, необходимо и достаточно, чтобы было $x \geqslant w(x)$ при всех $w \in W(R)$. Для того чтобы $x \in C$, необходимо и достаточно, чтобы было $x > w(x)$ при всех $w \in W(R)$, отличных от 1.

15) Любой корень либо положителен, либо отрицателен относительно C. Символом $R_+(C)$ обозначается множество положительных относительно C корней, так что $R = R_+(C) \cup$

$\bigcup(-R_+(C))$ есть разбиение системы R. Отражение s_i переводит α_i в $-\alpha_i$ и переставляет между собой элементы из $R_+(C)$, отличные от α_i.

16) Пусть B — базис системы R. Любой положительный (соотв. отрицательный) относительно B корень является линейной комбинацией элементов из B с целыми коэффициентами $\geqslant 0$ (соотв. $\leqslant 0$).

17) Пусть $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — такая последовательность положительных относительно C корней, что $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$ будет корнем. Существует перестановка $\pi \in \mathfrak{S}_n$, для которой $\beta_{\pi(1)}+$ $+\beta_{\pi(2)}+\ldots+\beta_{\pi(i)}$ будет корнем при любом $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

18) Пусть $\alpha \in R_+(C)$. Для того чтобы $\alpha \in B(C)$, необходимо и достаточно, чтобы α нельзя было записать в виде суммы двух положительных корней.

19) Пусть C — камера, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ — соответствующий базис. Для любого подмножества $J \subset I = \{1, 2, \ldots, l\}$ обозначим символом W_J подгруппу в $W(R)$, порожденную отражениями s_i с $i \in J$. Пусть C_J — множество линейных комбинаций с коэффициентами >0 корней α_j для $j \notin J$, так что C_J — ячейка камеры C.

Пусть $J \subset I$, $g \in W(R)$. Следующие условия эквивалентны:

а) g оставляет инвариантной некоторую точку ячейки C_J;
б) g оставляет инвариантной любую точку ячейки C_J;
в) g оставляет инвариантной любую точку замыкания $\overline{C}_J$;
г) $g(C_J)=C_J$;
д) $g(\overline{C}_J)=\overline{C}_J$;
е) $g \in W_J$.

Пусть $J, J' \subset \{1, 2, \ldots, l\}$ и $g, g' \in W(R)$. Следующие условия эквивалентны:

а) $g(C_J)=g'(C_{J'})$;
б) $g(C_J) \cap g'(C_{J'}) \neq \varnothing$;
в) $gW_J = g'W_{J'}$;
г) $J = J'$ и $g' \in gW_J$.

Пусть $J_1, J_2, \ldots, J_r \subset I$ и $J = J_1 \cap \ldots \cap J_r$. Тогда $W_J =$ $= W_{J_1} \cap \ldots \cap W_{J_r}$. Для любого $g \in W(R)$ существует $J \subset I$, такое, что $\overline{C} \cap g(\overline{C}) = \overline{C}_J$ и $g \in W_J$.

20) Пусть P — подмножество системы R. Говорят, что P *замкнуто*, если условия $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $\alpha+\beta \in R$ влекут $\alpha+\beta \in P$. Подмножество P называется *параболическим*, если P замкнуто и $P \cup (-P) = R$. Следующие условия эквивалентны:

а) P параболично;

б) P замкнуто, и существует такая камера C, что $P \supset R_+(C)$;

в) существуют камера C и подмножество $\Sigma \subset B(C)$, такие, что P будет объединением $R_+(C)$ и множества Q корней, являющихся линейными комбинациями с целыми коэффициентами $\leqslant 0$ элементов из Σ.

Предположим, что эти условия выполнены, и рассмотрим векторное подпространство $V_1 \subset V$, порожденное множеством Σ. Имеем

$$P \cap (-P) = Q \cup (-Q) = V_1 \cap R,$$

и $P \cap (-P)$ есть система корней в V_1 с базисом Σ.

Пусть P', C', Σ' обладают аналогичными свойствами. Если существует элемент из $W(R)$, переводящий P в P', то в $W(R)$ существует элемент, переводящий C в C', Σ в Σ' и P в P'.

21) Пусть P — подмножество в R. Следующие условия эквивалентны:

а) существует камера C, для которой $P = R_+(C)$;

б) P замкнуто, и $\{P, -P\}$ есть разбиение системы R.

Камера C определена тогда однозначно.

Предположим, что V наделено такой структурой упорядоченного векторного пространства, что каждый корень будет либо положительным, либо отрицательным. Пусть R_+ — множество положительных корней относительно этой структуры. Существует однозначно определенная камера C, для которой $R_+ = R_+(C)$.

22) Для того чтобы подмножество $B \subset R$ было базисом системы R, необходимо и достаточно, чтобы элементы из B были линейно независимы и чтобы любой корень был линейной комбинацией элементов из B с коэффициентами, которые одновременно $\geqslant 0$ или $\leqslant 0$.

23) Пусть P — замкнутое подмножество в R, для которого $P \cap (-P) = \varnothing$. Существует такая камера C, что $P \subset R_+(C)$.

24) Подмножество $P \subset R$ называется *симметричным*, если $P = -P$. Пусть P — какое-то подмножество в R и V_1 (соотв. Γ) — векторное подпространство (соотв. аддитивная подгруппа) в V, порожденное P. Следующие условия эквивалентны:

а) P замкнуто и симметрично;

б) P замкнуто и является системой корней в V_1;

в) $\Gamma \cap R = P$.

25) Предположим, что система R неприводима. Пусть C — камера; положим

$$B(C)=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}.$$

В R существует *максимальный* (или *наибольший*) элемент (относительно порядка, определенного посредством C), т. е. такой элемент $\tilde{\alpha}=n_1\alpha_1+\ldots+n_l\alpha_l$, что для любого корня

$$p_1\alpha_1+\ldots+p_l\alpha_l$$

справедливы неравенства $n_1 \geqslant p_1, \ldots, n_l \geqslant p_l$. При этом $\tilde{\alpha} \in \overline{C}$ и $\|\tilde{\alpha}\| \geqslant \|\alpha\|$ для любого корня α.

26) Символом $Q(R)$ обозначается подгруппа в V, порожденная системой R; элементы группы $Q(R)$ называются *радикальными весами* системы R. Группа $Q(R)$ есть дискретная подгруппа в V ранга $l=\dim V$. Всякий базис в R является базисом в $Q(R)$.

Символом $P(R)$ обозначается подгруппа в V, ассоциированная с $Q(R^\vee)$; элементы из $P(R)$ называются *весами* системы R. Группа $P(R)$ является дискретной подгруппой в V ранга l, содержащей $Q(R)$. Группы $P(R)/Q(R)$, $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ конечны и изоморфны; их порядок f называется *индексом связности* системы R. В обозначениях 25) порядок группы $W(R)$ равен $l!\ n_1n_2 \ldots n_lf$.

Группа $A(R)$ оставляет устойчивыми $P(R)$, $Q(R)$ и поэтому действует в $P(R)/Q(R)$. Группа $W(R)$ действует тривиально в $P(R)/Q(R)$, так что $A(R)/W(R)$ действует в $P(R)/Q(R)$.

27) Пусть C — камера, $B=(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — соответствующий базис системы R. Базис $(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l)$, дуальный к $(\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee)$, есть базис группы $P(R)$. Элементы $\bar{\omega}_i$ называются *фундаментальными весами* (относительно C или относительно B). Множество линейных комбинаций весов $\bar{\omega}_i$ с коэффициентами >0 (соотв. $\geqslant 0$) совпадает с C (соотв. $\overline{C}$). Линейные комбинации весов $\bar{\omega}_i$ с целыми коэффициентами $\geqslant 0$ называются *старшими* (или *доминантными*) *весами*. Любой элемент из $P(R)$ переводится группой $W(R)$ в один, и только один, из старших весов. Старшими весами являются элементы $\bar{\omega} \in V$, для которых $\dfrac{2(\bar{\omega} \mid \alpha_i)}{(\alpha_i \mid \alpha_i)}$ будет целым $\geqslant 0$ при всех i.

28) Пусть $\rho=\frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha \in R_+(C)} \alpha$. Имеет место равенство $\rho=$ $=\bar{\omega}_1+\ldots+\bar{\omega}_l \in C$.

29) Пусть T — группа переносов пространства V^*, векторы которой принадлежат $Q(R^\vee)$. Группа аффинных преобразо-

ваний пространства V^*, порожденная группами T и $W(R)$, есть полупрямое произведение $W(R)$ и T. Эта группа называется *аффинной группой Вейля* системы R и обозначается символом $W_a(R)$. Она действует в V^* собственно разрывно. Для $\alpha \in R$ и $\lambda \in \mathbf{Z}$ пусть $s_{\alpha, \lambda}$ — отображение $x^* \mapsto x^* - \langle x^*, \alpha\rangle \alpha^\vee + \lambda\alpha^\vee$; это — аффинное отражение, и множество $L_{\alpha, \lambda}$ его инвариантных точек определяется уравнением $\langle x^*, \alpha\rangle = \lambda$; имеем $L_{\alpha, \lambda} = L_\alpha + \frac{1}{2}\lambda\alpha^\vee$. Аффинными отражениями, принадлежащими $W_a(R)$ и порождающими группу $W_a(R)$, будут как раз $s_{\alpha, \lambda}$.

30) Пусть E — объединение гиперплоскостей $L_{\alpha, \lambda}$ для $\alpha \in R$ и $\lambda \in \mathbf{Z}$. Связные компоненты множества $V^* - E$ называются *альковами* системы R. В случае неприводимой системы R каждый альков является открытым симплексом; в общем случае альков является произведением открытых симплексов. Группа $W_a(R)$ действует просто транзитивным образом на множестве альковов. Если C — альков, то $\overline{C}$ будет фундаментальной областью для $W_a(R)$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ — отражения группы $W_a(R)$, соответствующие стенкам алькова C; пусть μ_{ij} — порядок произведения $\sigma_i\sigma_j$. Тогда $W_a(R)$ определяется образующими σ_i и соотношениями $(\sigma_i\sigma_j)^{\mu_{ij}} = 1$.

31) Если $p \in P(R^\vee)$, то существует такой альков C, что p будет экстремальной точкой замыкания $\overline{C}$. Для каждого алькова C' существует, и притом только один, радикальный вес, являющийся экстремальной точкой его замыкания $\overline{C'}$.

Пусть $x^* \in V^*$; следующие условия эквивалентны:

а) $x^* \in P(R^\vee)$;

б) при любом $\alpha \in R$ гиперплоскостью, параллельной L_α и проходящей через x^*, является $L_{\alpha, \lambda}$.

Пусть C' — камера в $R^\vee$. Существует, и только один, альков C, содержащийся в C' и такой, что $0 \in \overline{C}$. Пусть система R неприводима, и пусть β — ее максимальный корень (относительно C'); тогда C совпадает с множеством тех $x^* \in C'$, для которых $\langle x^*, \beta\rangle < 1$.

32) Пусть S — симметрическая алгебра пространства V, S^W — ее подалгебра, состоящая из инвариантных относительно $W = W(R)$ элементов, g—порядок группы W, $l = \dim V$. Существуют однородные алгебраически независимые элементы $I_1, I_2, \ldots, I_l \in S^W$, которые порождают S^W; S^W-модуль S допускает базис, состоящий из g однородных элементов. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в S, порожденный однородными элементами подалгебры S^W степени > 0; представление

группы W в $S/\mathfrak{a}$, получающееся при факторизации представления W в S, изоморфно регулярному представлению группы W (над $\mathbf{R}$).

33) Пусть $I_1, I_2, \ldots, I_l$ — элементы подалгебры S^W, однородные, алгебраически независимые и порождающие S^W. Их степени $k_1, k_2, \ldots, k_l$ определяются единственным образом (с точностью до порядка) системой R. При этом $g = k_1 k_2 \ldots k_l$. Число корней равно $2\sum_{i=1}^{l}(k_i - 1)$.

34) Элемент A алгебры S называется *антиинвариантным* относительно W, если $w(A) = \det(w)\cdot A$ при всех $w \in W$. Пусть $R = R_1 \cup (-R_1)$ — разбиение R. Положим $\pi = \prod_{\alpha \in R_1} \alpha$; элемент $\pi \in S$ антиинвариантен; антиинвариантными элементами алгебры S будут элементы вида πI, где $I \in S^W$.

35) Пусть E — (групповая) алгебра $\mathbf{Z}[P]$ группы весов P системы R. При $p \in P$ символом e^p обозначается соответствующий элемент из E. По определению $e^p e^{p'} = e^{p+p'}$ и e^p образуют базис алгебры E. Группа W действует в E таким образом, что $w(e^p) = e^{w(p)}$ $(w \in W,\ p \in P)$. Элемент $z \in E$ называется *антиинвариантным*, если $w(z) = \det(w)\cdot z$ при всех $w \in W$. Для $z \in E$ положим $J(z) = \sum_{w \in W} \det(w)\cdot w(z)$. Пусть C — какая-то камера. Элементы $J(e^p)$, где $p \in P \cap C$, образуют базис группы антиинвариантных элементов в E. Если ρ — полусумма положительных корней, то

$$J(e^\rho) = e^\rho \prod_{\alpha > 0}(1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha > 0}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}),$$

где произведения берутся по множеству корней > 0.

36) В обозначениях 35) положим

$$z_p = J(e^{p+\rho})/J(e^\rho) \quad \text{для} \quad p \in P.$$

Элементы z_p для $p \in P \cap \overline{C}$ образуют базис группы E^W элементов алгебры E, инвариантных относительно W. Если $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l$ — фундаментальные веса системы R, то элементы $z_{\bar{\omega}_i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, алгебраически независимы и порождают кольцо E^W.

37) Пусть C — камера системы R, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — соответствующий базис. Элемент $c = s_1 s_2 \ldots s_l$ группы W называется *преобразованием Кокстера* системы R. Класс сопряженности элемента c в W не зависит ни от C, ни от нумерации корней α_i. Порядок h элемента c называется *числом Кокстера*

системы R. Собственные значения преобразования c имеют вид $\exp\frac{2i\pi m_j}{h}$, где целые числа $m_1, m_2, \ldots, m_l$ (называемые *показателями* системы R или группы W) таковы, что $1 \leqslant m_1 \leqslant \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_l \leqslant h \quad 1$.

Предположим, что система R неприводима. Тогда

$$m_1 = 1, \quad m_l = h - 1;$$

$$m_j + m_{l+1-j} = h \qquad (1 \leqslant j \leqslant l);$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_l = \frac{1}{2} lh = \frac{1}{2}\operatorname{Card}(R).$$

Любое $m \in \{1, 2, \ldots, h-1\}$, взаимно простое с h, равно одному, и только одному, из m_j. Целые числа $m_1 + 1$, $m_2 + 1, \ldots, m_l + 1$ с точностью до порядка совпадают с целыми числами $k_1, k_2, \ldots, k_l$ из 33). В обозначениях 25) $n_1 + \ldots + n_l = h - 1$. В R имеется l орбит множества $\{1, c, c^2, \ldots, c^{h-1}\}$, и все они состоят из h элементов.

Если h четно, то $c^{h/2}$ переводит C в $-C$. Для того чтобы $-1 \in W$, необходимо и достаточно, чтобы все показатели группы W были нечетными; в случае когда это так, h четно и $c^{h/2} = -1$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим сообщать по адресу: 129820, Москва, И-110 ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Н. БУРБАКИ

Группы и алгебры Ли

Редактор *В. И. Авербух*
Художник *А. Г. Антонова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Л. П. Бирюкова*
Корректор *О. Ф. Иванова*

Сдано в набор 27/I 1972 г.
Подписано к печати 8/IX 1972 г.
Бумага № 1 $60 \times 90^1/_{16}$ = 10,5 бум. л. 21 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 19,52. Изд. № 1/6275
Цена 1 р. 70 к. Заказ № 61

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ