ПОЛНЫЙ КУРСЪ

ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ.

Préférez, dans l'enseignement, les méthodes générales; attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles.

LAPLACE, *Écoles norm.* tom. IV, p. 49.

ПОЛНЫЙ КУРСЪ
ЧИСТОЙ
МАТЕМАТИКИ.

СОЧИНЕНІЕ

ФРАНКЕРА.

Переведено съ Французскаго 4-го изданія, исправленнаго и значительно дополненнаго.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Конрада Вингебера.

1838.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлено было въ Цензурный Комитетъ узаконенное число экземпляровъ.

С. Петербургъ, Сентября 9 дня 1838 года.

Цензоръ *А. Никитенко.*

Изданіе книгопродавца А. Смирдина.

ВСЕПРЕСВѢТЛѢЙШЕМУ

ДЕРЖАВНѢЙШЕМУ

ВЕЛИКОМУ ГОСУДАРЮ

ИМПЕРАТОРУ

НИКОЛАЮ ПАВЛОВИЧУ

САМОДЕРЖЦУ ВСЕРОССІЙСКОМУ

ГОСУДАРЮ ВСЕМИЛОСТИВѢЙШЕМУ

всеподданнѣйшее

приношеніе

труда вышедшаго въ переводѣ.

ПРЕДИСЛОВІЕ СОЧИНИТЕЛЯ.

При сочиненіи сего Курса я имѣлъ цѣлію доставить — внимательному и мыслящему читателю, неимѣющему никакихъ предварительныхъ Математическихъ свѣдѣній — способъ понимать всѣ творенія о точныхъ наукахъ. Для сего мнѣ надлежало изложить всѣ истины, составляющія Курсъ чистой Математики, начиная съ первоначальныхъ частей Ариѳметики и Геометріи, до самаго сложнаго Интегральнаго исчисленія, не опуская ни одной изъ общихъ теорій входящихъ въ составъ сего начертанія.

Такое множество предметовъ помѣщены въ двухъ частяхъ, но изъ сего нельзя заключить, что мною пропущены какія-либо полезныя истины, или даже занимательныя подробности. Чтеніе сего творенія убѣдитъ, что оное достаточно полно, и что въ немъ заключается болѣе приложеній, чѣмъ можно

было бы ожидать при шѣхъ предѣлахъ, коими я себя ограничилъ. По принятая мною краткость слога, позволила уменьшить книгу не упуская изъ виду ничего истинно полезнаго, и какъ надѣюсь, не вредя ясности.

Опытъ убѣдилъ меня, что ничто столько не удаляетъ отъ цѣли, которой долженъ достигнуть всякій излагающій какую-нибудь науку, какъ мѣлочныя и упоминательныя разсмотрѣнія каждаго предмета. Сочинитель, передавая всѣ свои мысли, препятствуетъ разсужденію читателя; наставникъ дѣлается необходимымъ для учащагося, который привыкаетъ такимъ образомъ къ недѣятельности разсудка и къ многословію, весьма вреднымъ для успѣховъ; наконецъ, заняшіе подробностями не позволяетъ ему слѣдовать за связью существенныхъ понятій и постигнуть главнѣйшее — совокупность предложеній. Наставнику надлежитъ соразмѣрять степень объясненія предметовъ съ способностями каждаго учащагося. „Для успѣшнаго обученія должно объяснять только то, что учащемуся необходимо.“ (La Harpe, *Cours de Littérature*, 2e part., liv. II chap. III, 2).

Общее мнѣніе кажется одобрило сей способъ ученія, и успѣхи перваго изданія увѣрили мое мнѣніе о преимуществахъ краткости слога. Нѣтъ сомнѣнія, что для меня было бы легче умножить число частей; и Писатели, опытные въ сочиненіяхъ сего рода, могутъ оцѣнить труды, коихъ мнѣ стоило ограниченіе каждаго предмета въ надлежащихъ предѣлахъ. Вниманіе, приложенное по Типографической части, также чрезвычайно способствовало къ умѣньшенію книги.

Взявъ на себя трудъ сравнить сіе изданіе съ первымъ, усмотрятъ, что только порядокъ остался одинъ и тотъ же; самое же сочиненіе передѣлано даже въ подробностяхъ: мѣстами я старался придать болѣе ясности изложенію; въ другихъ, соблюсти болѣе строгости въ доказательствахъ; а гдѣ доставить болѣе или менѣе точности . . .; здѣсь найдутъ цѣлыя статьи, которыхъ прежде недоставало, хотя онѣ принадлежатъ къ полному Курсу чистой Математики. Наконецъ увидятъ, что я употребилъ всѣ старанія, и не пренебрегъ ни однимъ совѣтомъ,

дабы сдѣлать сей Курсъ достойнымъ одобренія ученыхъ и наставниковъ.

Оканчиваю изъявленіемъ моей благодарности Г. Морицу, за превосходные совѣты имъ мнѣ данные, и которыми я умѣлъ воспользоваться.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

КНИГА I-я. АРИѲМЕТИКА.

Глава I. *О цѣлыхъ числахъ.* Предварительныя понятія, стр. 1; нумерація, 4; сложеніе, 8; вычитаніе, 11; умноженіе, 14; дѣленіе, 21; общіе производители, 33; условія дѣлимости, 45; повѣрка четырехъ правилъ 50.

Глава II. *О дробныхъ числахъ.* Свойство и преобразованіе дробей, стр. 53; дѣйствія съ дробями, 60; десятичныя дроби, 64; приближенія и періоды, 70; именованныя и составныя количества, 77.

Глава III. *О степеняхъ и корняхъ.* Составленіе степеней, 90; квадратные корни, 91; кубическіе корни, 100.

Глава IV. *О содержаніяхъ.* Объ Ариѳметическихъ и Геометрическихъ пропорціяхъ, стр. 106; тройныя правила, 110; правило товарищества, 117; правило процентовъ, 118; правило учета, 119; *правило цѣпное*, 120; прогрессіи, 123; логарифмы, 125; составленіе таблицъ, 129; употребленіе таблицъ, 132.

Отношеніе новѣйшихъ Французскихъ мѣръ къ Россійскимъ, стр. 137.

КНИГА II. НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА.

Глава I. *Алгебраическія вычисленія.* Общія понятія стр. 139; сложеніе, вычитаніе, 141; умноженіе, 143; дѣленіе, 147, алгебраическія дроби, 153; нѣкоторыя свойства чиселъ и общіе производители многочленныхъ количествъ, 154.

Глава II. *Объ уравненіяхъ 1-й степени.* Уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, стр. 161; замѣчанія на рѣшенія задачъ, 172; уравненія со многими неизвѣстными, 177; неравенства, 187; неопредѣленныя задачи, 190.

Глава III. *О степеняхъ и корняхъ.* Степени одночленныхъ величинъ, стр. 204; дробные и отрицательные показатели, 208; квадратные и кубическіе корни многочленныхъ количествъ, 214; уравненія 2-й степени, 219.

Глава IV. *О содержаніяхъ.* Пропорціи, стр. 226; ариѳметическія прогрессіи 227; геометрическія прогрессіи, 229, логариѳмы, 230, правило процентовъ, 237; срочныя уплаты долга, 239; правило учета, 241; правило ложнаго положенія, 242.

КНИГА III. НАЧАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Глава I-я. *О линіяхъ.* Измѣреніе линій, угловъ и дугъ стр. 245; перпендикулярныя и косвенныя линіи, 254; параллельныя линіи, 258; прямыя линіи въ кругѣ 263, пересѣченіе круговъ, 266, треугольники, 268; измѣреніе угловъ въ кругѣ, 279; пропорціональныя линіи, 284; подобные треугольники, 287; многоугольники, 300; подобныя многоугольники и окружности 309.

Глава II. *О поверхностяхъ.* Площади многоугольниковъ и круга, стр. 317; сравненіе поверхностей, 327; плоскости и плоскостные углы, 330; шѣлесные углы, 339; поверхности шѣлъ, 343; подобныя и симметричныя шѣла, 352.

Глава III. *О толстотахъ*, стр. 359.

КНИГА IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Глава I-я. *Приложеніе Алгебры къ Геометріи.* Нѣкоторыя задачи о линіяхъ, стр. 373; геометрическія построенія, 379; о знакахъ величинъ въ приложеніи Алгебры къ Геометріи, 391.

Глава II. *Прямолинейная тригонометрія.* О синусахъ, косинусахъ, тангенсахъ и проч., стр. 402, общія формулы, 410; составленіе тригонометрическихъ таблицъ, 416; рѣшеніе треугольниковъ, 419; задачи изъ тригонометріи, 425.

Глава III. *Объ уравненіяхъ прямой линіи и круга.* Уравненія прямой линіи, стр. 430; уравненіе круга, 441; преобразованіе сопряженныхъ, 446.

Глава IV. *Коническія сѣченія*, стр. 451, парабола, 456, эллипсисъ, 458; гипербола, 461; способъ касательныхъ, 463,

ассимптоты, 476; центръ и діаметры, 483; изслѣдованіе уравненій 2-й степени, 496.

Глава V. *Задачи Аналитической Геометріи.* Образованіе кривыхъ линій, стр. 526, задачи превышающія вторую степень, 536; о нѣкоторыхъ другихъ кривыхъ линіяхъ, 541; конхоида, 543, циссоида, 544, логариѳмика, кривая синусовъ, квадратриса, 545; циклоида, 546; спираль, 547.

Таблица хордъ, 550.

ПОЛНЫЙ КУРСЪ
ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ.

КНИГА ПЕРВАЯ.

АРИѲМЕТИКА.

I. О ЦѢЛЫХЪ ЧИСЛАХЪ.

Предварительныя понятія. Система нумераціи.

1. Представимъ себѣ соединеніе подобныхъ предметовъ: чтобъ отличить величину онаго и словесно передать точное о немъ понятіе людямъ, неимѣющимъ никакого объ ономъ познанія, берутъ опредѣленную и совершенно извѣстную, но произвольную его часть, называемую единицею; потомъ означаютъ, сколько разъ она содержится въ вышепомянутомъ соединеніи, т. е. сколько должно взять сихъ единицъ, чтобы произвесть цѣлое, равное тому соединенію. Сіе собраніе единицъ одного рода называется числомъ или количествомъ:

и шакъ, чтобы составить себѣ точное, отвлеченное понятіе о величинѣ какого-нибудь предмета, должно сначала пріобрѣсть понятіе посредствомъ чувствъ объ ея *части* или *единицѣ*, а потомъ о *числѣ* сихъ единицъ въ той величинѣ содержимыхъ.

Различнымъ числамъ дали слѣдующія наименованія: *одинъ*, означаетъ единицу; *два*, представляетъ совокупленіе единицы съ другою; *три*, двухъ единицъ съ единицею, или единицы съ единицею и еще съ единицею, и т. д: Постепенное возрастаніе единицы, при каждомъ разѣ, производитъ числа:

одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять,

и проч. изображаемыя знаками или цыфрами:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Такимъ образомъ, число *семь* на пр., можно понимать какъ *шесть* съ *единицею*, или по вышесказанному, какъ *пять* съ *двумя*, или *четыре* съ *тремя* и пр.

2. Сіе дѣйствіе, совокупляющее многія соединенія въ одно, котораго требуется узнать количество, называется сложеніемъ; оно выражается словомъ *плюсъ (съ)* или знакомъ $+$, называемымъ *положительнымъ* и поставляемымъ между складываемыми цыфрами. *Окончательное выраженіе* (результатъ) сложенія называется *суммою*. И такъ, сложить нѣсколько чиселъ, значитъ совокупить ихъ въ одно, коего отыскиваютъ количество, или выразить, сколько разъ собраніе многихъ соединеній одинаковыхъ предметовъ, содержитъ въ себѣ часть принятую за единицу и служившею мѣрою каждому особенному соединенію. Сложить 2 съ 3 и съ 4, или получить сумму 2-хъ, 3-хъ и 4-хъ, значитъ совокупить три соединенія, изъ коихъ первое заключаетъ въ себѣ 2, другое 3, а послѣднее 4 равныхъ предмета, въ одно, составленное изъ 9 такихъ предметовъ.

Знакъ $=$ поставленный между двумя величинами, означаетъ ихъ равенство; $2+3+4=9$, выговари-

ваютъ: 2 *съ* 3 *съ* 4 *равно* 9; сіе равенство или *уравненіе* выражаетъ предъидущее сложеніе; $2+3+4$ есть первый онаго *членъ*, а 9 второй. Неравенство двухъ количествъ изображается знакомъ $<$ или $>$, коего отверстіе обращаютъ къ большему; какъ на пр. $4<7$, $9>5$, выговариваютъ: 4 *менѣе* 7, 9 *болѣе* 5. Знаки $\not<$, $\not>$ изображаютъ напротивъ, что величины написанныя въ-лѣво *не менѣе* или *не болѣе* написанныхъ *въ-право:* $8\not<6$, $4\not>4$.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что ежели одно изъ слагаемыхъ чиселъ увеличатъ или уменьшатъ, то равномѣрно и сумма увеличится или уменьшится тѣмъ же самымъ количествомъ; сумма не перемѣнится, если одно изъ слагаемыхъ увеличатъ, а другое уменьшатъ одинаковымъ числомъ единицъ. На пр. $4+7$ превышаетъ $4+5$ двумя, потому что 7 превышаетъ 5 двумя; но $4+7=6+5=2+9=3+8=$ и проч.

3. Часто случается, что слагаемыя числа равны между собою, какъ-то: $2+2+2+2=8$; сей частный случай сложенія называется **умноженіемъ**, и говорятъ: 2 *взятое* 4 *раза*, или 4-*жды* 2, или наконецъ 2 *умноженное на* 4; пишутъ же 2.4 или 2×4, числа 2 и 4 называютъ *производителями;* 2 есть *множимое*, 4 *множитель;* окончательное выраженіе 8 *произведеніе.*

4. Сложенію и умноженію соотвѣтствуютъ два обратныя дѣйствія. При сложеніи $5+4=9$ требовалась сумма 9, двухъ данныхъ чиселъ 5 и 4. При вычитаніи же дается сумма 9 и одно изъ слагаемыхъ, на пр. 5, и требуется отыскать другое 4, т. е. число, которое будучи приложено къ 5, дастъ въ суммѣ 9 Сіе дѣйствіе, состоящее въ разложеніи двухъ совокупленій 5 и 4, составлявшихъ одно соединеніе 9, очевидно обращается въ вычитаніе 5 изъ 9, и сіе означаютъ знакомъ —, называемымъ *минусъ*, (*безъ*)

и поставляемымъ между числами передъ вычитаемымъ: $9 - 5 = 4$. Знакъ — называется также *отрицательнымъ*.

Изъ вышесказаннаго при сложеніи, заключимъ, что 1-е, ежели увеличится только вычитаемое одною или нѣсколькими единицами, то окончательное выраженіе столькими же единицами уменьшится; 2-е, оно не перемѣнится, если увеличатъ или уменьшатъ одинакимъ количествомъ оба данныя числа, и 3-е, *окончательное выраженіе вычитанія двухъ чиселъ означаетъ то количество, которымъ одно болше другаго;* а сіе самое заставило назвать оное *разностью, излишкомъ* или *остаткомъ*.

5. При умноженіи даны два производителя, и отыскиваютъ ихъ произведеніе; но если *произведеніе и одинъ изъ производителей извѣстны, и требуется найти другой производитель*, то таковое дѣйствіе называется дѣленіемъ. $2 \times 4 = 8$; 8 есть искомое окончательное выраженіе умноженія 2 на 4. При дѣленіи напротивъ даютъ 8 и 4 и отыскиваютъ 2, т: е: число, которое будучи повторено 4 раза, произведетъ 8. Сіе дѣленіе изображается чрезъ $\frac{8}{4}$ или $8 : 4 = 2$, что выговариваютъ: 8 *раздѣленное на* 4; 8 называютъ *дѣлимымъ*, 4 *дѣлителемъ*, а искомое окончательное выраженіе 2 *частнымъ:* такъ что произведеніе и дѣлимое, суть слова означающія одни и тѣ же числа, также какъ множитель и дѣлитель, частное и множимое, и выборъ выраженій зависитъ отъ разсматриваемаго дѣйствія.

6. Прежде нежели изъяснимъ средства производить сіи четыре дѣйствія надъ данными величинами, должно составить особенный языкъ для выраженія всѣхъ возможныхъ чиселъ, и изобрѣсть знаки, ихъ представляющіе, такъ однако же, чтобы число наименованій и знаковъ было ограничено: ибо и нази-

ваютъ *способомъ счисленія* или *системою нумерации*. И въ самомъ дѣлѣ, легко понять, сколь было бы неудобно давать особенное названіе каждому числу, какъ-то *десяти*, *одинадцати*, *двенадцати* и пр. д: до безконечности, и изображать ихъ особенными знаками.

Дабы не имѣть множества знаковъ, прибѣгнули къ слѣдующему, сколь простому, столь же и остроумному условію: согласились, чтобы *значеніе каждой цыфры, переходя отъ правой руки къ лѣвой на одинъ знакъ, увеличивалось въ десять разъ*. Кромѣ девяти знаковъ 1, 2, 3.....9, употребляютъ еще 0, называемый нулемъ, и который самъ по себѣ не имѣетъ никакой величины. Докажемъ, что *съ помощію сего условія достаточно сихъ десяти знаковъ для изображенія всѣхъ возможныхъ чиселъ*.

Вмѣсто $9+1$, что называютъ *десять*, пишутъ 10; такимъ же образомъ вмѣсто $10+1$ или *одинадцати* пишутъ 11; $11+1$ или *двенадцать* изображаютъ 12; *тринадцать*, *четырнадцать*, *пятнадцать*, *шестнадцать* .... пишутся 13, 14, 15, 16 ..... Въ самомъ дѣлѣ цыфра 1 знаменуетъ *десять*, ибо она поставлена отступя въ лѣво на одинъ знакъ, или на 2-мъ *мѣстѣ*. Такимъ же образомъ $19+1$ пишется 20, потому что 2 поставленное на второмъ мѣстѣ знаменуетъ $10+10$ или $10+9+1=19+1$; также вмѣсто $20+1$ пишутъ 21, 22 вмѣсто $21+1$, 23 вмѣсто $22+1$, и пр. д: наконецъ $29+1$ изображаютъ $20+9+1$, или $20+10$, или $10+10+10$, или 30. Увеличивая постепенно число единицъ, получаемъ 31, 32, 33 . . . 39; по томъ 40, 41, 42 . . . 49; 50, 51 ..... и пр. до 99. Вмѣсто $99+1$, или $90+9+1$ или $90+10$ пишутъ 100, потому что цыфра, поставленная на 3-мъ мѣстѣ съ права, знаменуетъ десять единицъ 2-го мѣста, или $9+1$ на 2-мъ мѣстѣ. Прикладывая ко 100 послѣдовательно единицу, получимъ

101, 102, 103...., 109, 110, 111, 112...., 119, 120...129, 130...., и т: д: до 199, ставя цифру 1 съ-лѣва у всѣхъ предъидущихъ чиселъ, выраженныхъ двумя знаками; послѣ чего получимъ 200, 201....., 299, потомъ 300, 301....399, 400.... и такъ далѣе до 999. Вмѣсто же 999 + 1 пишутъ 1000 и проч.

Изъ сего легко заключить, что дабы увеличить единицею какое-нибудь число, на пр. 557, стоитъ только приложить оную къ первой цифрѣ съ-права; отъ чего получимъ 557 + 1 = 558; также 558 + 1 = 559. Если бы сія первая цифра съ-права была 9, то должно ее замѣнить нулемъ, и приложить 1 къ цифрѣ стоящей на 2-мъ мѣстѣ, на прим. 539 + 1 = 540; ибо 530 + 9 + 1 = 530 + 10 = 540; если же на второмъ мѣстѣ стоящая цифра есть также 9, то и ее должно замѣнить нулемъ, а 1 приложить къ цифрѣ стоящей на 3-мъ мѣстѣ, какъ на прим: 2599 + 1 = 2600; ибо 2500 + 99 + 1 = 2500 + 100, и т: д: Подобно сему 12999 + 1 = 13000; 509 + 1 = 510; 10999 + 1 = 11000. И какъ всякое число происходитъ отъ повторяемаго сложенія единицы, то изъ сего слѣдуетъ, что всѣ числа можно изобразить посредствомъ десяти знаковъ (*).

(*) Основываясь на томъ же началѣ, можно изображать всѣ числа посредствомъ другаго числа знаковъ большаго или меньшаго десяти; на пр. имѣя только четыре знака 0, 1, 2, 3 должно, чтобы значеніе каждой цифры, переходя отъ правой руки къ лѣвой на одинъ знакъ, увеличивалось въ четыре раза. Тогда 10 будутъ изображать четыре, 11 пять, 12 шесть, 13 семь, 20 восемь, 21 девять, 200 тридцать два и проч.

Когда число написано при такомъ предположеніи, то его выговаривать затруднительнѣе, чѣмъ при десятичномъ способѣ счисленія; ибо тутъ болѣе связи въ наименованіяхъ цифръ съ мѣстами, ими занимаемыми. Замѣтимъ, что дабы прочесть на пр. (3120) цифра 2 знаменуетъ 2 × 4 или 8, 1 знаменуетъ 1 × 4 × 4 или 16, 3 знаменуетъ 3 × 4 × 4 × 4 или 192; и такъ (3120) имѣющее *основаніемъ* 4 знаменуетъ 8 + 16 + 192 или 216. Такимъ же обра-

7. Займемся теперь составленіемъ особеннаго языка, для выраженія всѣхъ чиселъ, и сначала сдѣлаемъ сіе для числа составленнаго не болѣе какъ изъ трехъ цыфръ. Согласимся *для числа изображеннаго тремя цыфрами давать каждой изъ оныхъ названіе, означающее занимаемое сю мѣсто.* Въ слѣдствіе чего цыфры стоящія на 3-мъ мѣстѣ именуютъ *сотнями*, отъ слова *сто;* на второмъ мѣстѣ *десятками* отъ названія *десять;* наконецъ на первомъ мѣстѣ *единицы;* и такъ 578 выговариваютъ *пять сотъ семьдесятъ восемь;* 405, 810, 69 выговариваютъ *четыреста три, восемьсотъ десять, шестьдесятъ девять.*

Должно замѣтишь, что вошло въ обыкновеніе, давашь цыфрамъ, представляющимъ десятки, особенныя названія: вмѣсто того, чтобы 20, 30 ..... называшь *два десять, три десять* ....., 20 называютъ *двадцать*, 30 *тридцать*, 40 *сорокъ*, 50 *пять-*

зомъ если основаніе есть 5, т: е: если употребляютъ пять цыфръ 0, 1, 2, 3, и 4, то значеніе всякой цыфры переходя отъ правой руки къ лѣвой на одинъ знакъ, увеличивается въ пять разъ. На пр. число (4123) при семъ предположеніи означаетъ . . . . . 3 + 2 × 5 + 1 × 25 + 4 × 125 или 3 + 10 + 25 + 500, и ли наконецъ 538.

И такъ надлежитъ вообще составить послѣдовательныя степени *основанія*, и умножить цыфру 2-го мѣста на основаніе, 3-го на 2-ю степень основанія, 4-го на 3-ю и т: д: сложивъ сіи произведенія, получимъ величину даннаго количества. Такимъ образомъ 20313) при основаніи 4 = 567, 4010) при основаніи 5 = 505, (35151) при основаніи 6 = 5035 = (6814), при основаніи 9.

Вникнувъ въ предъидущее вычисленіе, увидимъ, что оно также можетъ быть сдѣлано слѣдующимъ образомъ. возьмемъ для примѣра (4123) при основаніи 5; умножимъ цыфру 4 на 5, и придадимъ 1 стоящую съ права, получимъ 21; умножимъ 21 на 5, и придадимъ къ произведенію 2 стоящее на 2-мъ мѣстѣ, получимъ 107; наконецъ умноживъ все сіе на 5 и придавъ 3, получимъ для исковой величины 538. И въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что цыфра 4 была три раза умножена на 5, 1 дважды и 2 одинъ разъ. Сіе дѣйствіе съ предъидущимъ хотя и различно въ порядкѣ, но въ сущности одинаково, и скорѣе приводитъ къ окончательному выраженію.

десять, 60 *шестьдесять*, 70 *семьдесять*, 80 *восемьдесять*, 90 *девяносто;* также вмѣсто того, чтобы называть 11 *десять одинъ*, 12 *десять два* и проч. говорятъ 11 *одинадцать*, 12 *двенадцать*, 13 *тринадцать*, 14 *четырнадцать* и проч.

Зная сіи условія, легко выговаривать всякое число состоящее не болѣе какъ изъ трехъ цыфръ: 345, 205, 43, 374 произносятъ *триста сорокъ пять*, *двѣсти пять*, *сорокъ три*, *триста семьдесять четыре*. Столь же легко выговариваемое трехзначное число, написать цыфрами; ибо для сего стоитъ только поставить каждую цыфру въ надлежащемъ ей мѣстѣ.

Приступимъ теперь къ числамъ, имѣющимъ болѣе трехъ цыфръ. Согласились ихъ раздѣлять на трехзначныя грани, начиная съ-права (*); всякая грань выговаривается особенно и имѣетъ отличительное свое названіе. Во второй грани будутъ *тысяги*, въ третьей *милліоны*, въ четвертой *биллліоны;* далѣе *трилліоны*, *квадралліоны*, ...

Такимъ образомъ 17 337 100 227 должно выговаривать 17 билліоновъ, 337 милліоновъ, 100 тысячь 227; 50 001 001 выговариваютъ 50 милліоновъ, тысяча одинъ. Также числа

10 200 701; 21 546; 1 111; 15 016; 8 004

выговариваютъ 10 милліоновъ 200 тысячь 701; 21 тысяча 546; тысяча 111; 15 тысячь шестнадцать; 8 тысячь четыре.

Слѣдовательно теперь извѣстно, какъ надо выговаривать число написанное цыфрами. Написать выговариваемое число также не затруднительно, ибо наименованія отличаютъ каждую грань; оста-

(*) Можно также составлять грани изъ 2-хъ или 4-хъ цыфръ; но въ первомъ случаѣ было бы много граней, во 2-мъ грани были бы слишкомъ велики. Разсмотрѣвъ предѣлы самыхъ употребительныхъ чиселъ, легко увидимъ, что трехзначныя грани удобнѣе прочихъ.

только написать каждую грань особенно, и поставивши ихъ въ надлежащемъ порядкѣ (*).

О сложеніи.

8. Мы уже видѣли (чл. 2), что для сложенія двухъ чиселъ, на пр. 5 и 4, должно отъ одного изъ сихъ чиселъ отнимать послѣдовательно каждую изъ единицъ, его составляющихъ, и прикладывать ихъ къ другому; дѣйствіе сіе превращается въ слѣдующее:

$$5+4 \quad 6+3=7+2=8+1=9.$$

(*) Разсмотримъ, какими цыфрами выразится число 538, при основаніи 5; для сего положимъ, что искомое окончательное выраженіе извѣстно и равно на пр: (4123). Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что если возьмемъ $4\times5+1=21$, потомъ $21\times5+2=107$ и наконецъ $107\times5+3=538$, то по окончаніи такого вычисленія получимъ предложенное число. Слѣд. ежели 538 раздѣлится на 5, то остатокъ 3 будетъ представлять цыфру перваго мѣста, а частное 107 величину прочихъ цыфръ. Подобно сему раздѣливъ 107 на 5, остатокъ 2 будетъ цыфра 2-го мѣста, а частное 21 величина прочихъ цыфръ и т: д: Очевидно, что сіе есть только разложеніе предъидущихъ дѣйствій.

И такъ вообще: должно дѣлить предложенное число на данное основаніе, и сіе 2-е частное опять на оное и т: д: до тѣхъ поръ, пока получится частное меньшее сего основанія. Рядъ остатковъ будетъ рядъ искомыхъ чиселъ, начиная съ перваго мѣста; послѣднее же частное будетъ цыфра наивысшаго порядка. И такъ чтобы написать 567 посредствомъ 4-хъ знаковъ, дѣлю 567 на 4, получаю въ частномъ 141, а въ остаткѣ 3; дѣлю снова 141 на 4, получаю въ частномъ 35, а 1 въ остаткѣ; $\frac{35}{4}$ даетъ 8 и въ остаткѣ 3, наконецъ $\frac{8}{4}=2$, остатокъ же будетъ 0. Возьмемъ послѣдовательные остатки 3, 1, 3, 0, и послѣднее частное 2, получимъ, что (20313) при основаніи $4=567$.

Такимъ же образомъ увидимъ, что число 5035 при основаніяхъ 6, 9 и 12 будетъ (35151), (6814) и (2 *ab* 7), означая чрезъ *a* и *b* *десять* и *одиннадцать* при основаніи 12. Выгода двенадцатизначнаго способа счисленія надъ десятичнымъ очевидна, по причинѣ большаго числа дѣлителей 12-ти; но ввести оный теперь въ употребленіе весьма затруднительно, ибо для сего надлежало бы измѣнить навыкъ, и даже наименованія, къ коимъ мы привыкли съ дѣтства.

Но очевидно, что таковое дѣйствіе неудобно для чиселъ нѣсколько великихъ; по чему оный и будемъ только употреблять для однозначныхъ чиселъ, и положимъ даже, что навыкъ научилъ насъ узнавать немедленно окончательное выраженіе, $5 + 4 = 9$, $8 + 3 = 11$, и всѣхъ прочихъ такого рода.

Найдемъ теперь сумму двухъ чиселъ 24 и 37: разложимъ оныя, сначала на $20 + 4$ и $30 + 7$; искомая сумма будетъ $20 + 30 + 4 + 7$. По очевидно, что первыя двѣ части равны 2 десяткамъ съ 5 десятками, или 5 десяткамъ; и такъ сумма будетъ $50 + 11$, или $50 + 10 + 1$, или наконецъ $60 + 1 = 61$.

Слѣдственно *должно складывать отдѣльно десятки и единицы данныхъ чиселъ;* сіе правило есть общее.

Возьмемъ на прим: $5731 + 349 + 12487 + 54$; сложивъ отдѣльно единицы, потомъ десятки, сотни и проч., получимъ 15 тысячъ + 14 сотенъ + 20 десятковъ + 21 единица, или $15000 + 1400 + 200 + 21$; поступая такимъ же образомъ съ сими послѣдними числами, получимъ: 16 тысячъ + 6 сотенъ + 2 десятка + 1, или 16621. Сіе дѣйствіе удобнѣе совершается написавъ числа, какъ здѣсь на сторонѣ, одни подъ другими, и наблюдая, чтобы цыфры одинакаго порядка находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Сумма цыфръ каждаго столбца, если не превосходитъ 9, подписывается въ низу; въ противномъ же случаѣ *ставятъ только единицы*, а десятки удерживаютъ, чтобы приложить оные какъ простыя единицы къ цыфрамъ слѣдующаго столбца съ-лѣва; сіе и заставило *начинать сложеніе* съ 1-го столбца *правой руки.*

3 731
349
12 487
54
16 621

Вотъ нѣсколько примѣровъ сложенія:

Для 1-го сдѣлаемъ вычисленіе слѣдующимъ образомъ: $3 + 8$ равно 11, $11 + 7$ составляютъ 18, $18 + 7$ равно 25, т: е: суммѣ единицъ $3 + 8 + 7 + 7$; 5 пишутъ подъ чертою на первомъ мѣстѣ съ-права, а

два десятка прикладываютъ къ слѣдующему столбцу; потомъ говорятъ: 2 съ 8 составляютъ 10, съ 1 будетъ 11, съ 8 составится 19, и съ 2 наконецъ 21; 1 ставятъ, а 2 *удерживаютъ* для присоединенія къ сотнямъ. $2+7=9$, $9+3=12$....., получимъ 26 сотенъ; 6 пишутъ, а 2 удерживаютъ; наконецъ найдемъ 24 для послѣдняго столбца поставимъ 4, а на слѣдующемъ мѣстѣ 2, т: е: напишутъ 24 тысячи. Сумма будетъ 24 615.

5 783	77 756	10 376 786	5 78, 201
4 318	3 388	789 632	749 832
5 987	9 763	589	14 378 539
8 527	90 257	73	20 912 572
24 615	181 164	11 167 080	

О вычитаніи.

9. Достаточно имѣть навыкъ складывать, чтобы находить разность простыхъ чиселъ; на пр: число приложенное къ 3 и производящее въ суммѣ 7 будетъ 4, и такъ $7-3=4$. Можно также достигнуть до окончательнаго выраженія, отнимая изъ 7 столько единицъ, сколько оныхъ находится въ 3; $7-3=6-2=5-1=4$. По сему согласимся, что вычитаніе простыхъ чиселъ извѣстно.

Возьмемъ два сложныхъ числа $695-243$. Очевидно, что если бы извѣстно было число, составляющее съ 243 сумму 695, тогда 3+ единицы того числа, 4+ его десятки, 2+ его сотни, долженствовали бы составить 695; по чему пишутъ предложенныя числа какъ въ сложеніи, поставляя меньшее внизу; потомъ вычитаютъ каждую нижнюю цыфру изъ стоящей надъ оною. Говорятъ $5-3=2$, $9-4=5$, $6-2=4$, и 452 будетъ искомая разность.

695
243

452

Но можетъ случиться, что нижняя цыфра болѣе верхней. Въ приложенномъ здѣсь на сторонѣ примѣрѣ, нельзя вычесть 8 изъ 7. Въ семъ случаѣ какъ 36147 есть сумма 19328 съ искомымъ числомъ, то ясно, что сумма перваго столбца, т: е: 8 съ неизвѣстными единицами, будетъ не 7, но 17, и что десятокъ *удержанъ* для присоединенія къ слѣдующему столбцу. Слѣд: должно говорить не 7 — 8, но 17 — 8 = 9, и писать 9 на мѣстѣ единицъ. Но продолжая дѣйствіе, увидятъ, что слѣдующій столбецъ составленъ изъ удержаннаго десятка, цыфры 2 и искомыхъ десятковъ, ихъ сумма должна дать 4; и такъ не должно говорить 4 — 2, но 4 — 3 = 1, которую и ставятъ на мѣстѣ десятковъ. Такимъ же образомъ для сотенъ вмѣсто 1 — 3, говорятъ 11 — 3 въ остаткѣ 8, которыя и пишутъ, удерживая 1 для слѣдующаго столбца; и такъ 6 — 10 или лучше сказать 16 — 10 = 6 и удержатъ 1; 3 — 2 = 1.

36 147
19 328
16 819

Вообще, *если верхняя цыфра менѣе нижней, то первую увеличатъ* десятью, *потомъ приложатъ* единицу *къ нижней цыфрѣ, стоящей на одинъ знакъ въ-лѣво.* Въ самомъ дѣлѣ, надо замѣтить, что увеличивъ верхнее число 10, увеличиваютъ тѣмъ же и нижнее; отъ чего ихъ разность не перемѣнится. (чл. 4.)

Равномѣрно въ приложенномъ на сторонѣ примѣрѣ должно говорить: 9 — 3 = 6; 2 — 7 не возможно; 12 — 7 = 5, удерживаю 1; 4 — 6 (вмѣсто 4 — 5) не возможно; 14 — 6 = 8 и удерживаю 1; 0 — 9 (вмѣсто 0 — 8) не возможно, 10 — 9 = 1; 0 — 8 не возможно, 10 — 8 = 2 и т: д:

3 000 429
2 578 573
421 856

Вотъ нѣсколько примѣровъ вычитанія:

3 000	6 000	6 000	150 001	3 375 831
1 296	5 999	4 000	76 385	186 943
1 704	1	2 000	73 616	3 188888

10. Если какое-нибудь число надо *отнять отъ* 1, *имѣющей при себѣ столько нулей, сколько въ семъ числѣ находится цыфръ: то должно единицы онаго вычесть изъ* 10, *прочія же цыфры изъ* 9. И такъ, чтобы найти разность между 1000 и 259, говорятъ: $10-9=1$; потомъ для 5 десятковъ $9-5=4$; $9-2=7$ для сотенъ, и получатъ $1000-259=741$. Подобнымъ образомъ $1000\,000-279\,955=720\,047$. Сіе вычисленіе столь просто, что едва можно оное принимать за особенное дѣйствіе; оно употребляется для превращенія всякаго вычитанія въ сложеніе, и вотъ какимъ образомъ:

Пусть требуется разность между 3487 и 259; очевидно, что разложивъ 3487 на $2487+1000$, разность съ 259 не перемѣнится, и будетъ $2487+1000-259$, или $2487+741=3228$. И такъ, вмѣсто того, чтобы 259 вычесть, приложили 741. Слѣдовательно, чтобъ отнять одно число отъ другаго, можно вычесть первое изъ единицы, имѣющей столько нулей, сколько находится въ оном цыфръ, и сію разность приложить ко 2-му данному, отнявъ потомъ единицу непосредственно высшаго порядка, прошивъ вычитаемаго. Для означенія сего послѣдняго вычитанія, ставятъ $\bar{1}$ съ-лѣва у вычитаемаго; по сему предъидущее дѣйствіе превратится въ $3487-259=3487+\bar{1}741$; что совершаютъ, какъ здѣсь означено на сторонѣ. Должно замѣтить, что $\bar{1}741$ приложенное къ числу 259 дастъ нуль или $1741+259=0$. Количество $\bar{1}741$ называется *Ариѳметическимъ дополненіемъ* къ 259. Вообще, чтобы составить *Ариѳметическое дополненіе какого-нибудь числа*, должно вычесть всѣ его цыфры изъ 9, а единицы изъ 10, и потомъ $\bar{1}$ поставить съ-лѣва. *Сіе дополненіе, приложенное къ его числу, даетъ въ суммѣ нуль. Вмѣсто того, чтобъ вычитать число, можно прикладывать его Ариѳметическое дополненіе.*

$$\begin{array}{r} 3\,487 \\ \bar{1}\,741 \\ \hline 3\,228 \end{array}$$

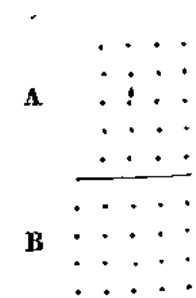
Ариѳметическое дополненіе можетъ быть употреблено съ выгодою, когда надо сдѣлать нѣсколько послѣдовательныхъ сложеній и вычитаній; на прим: $32731+5729-371-4834$, примемъ видъ изображенный на сторонѣ; ибо дополненія къ 371 и 4338 суть 1629 и $\bar{1}5166$. Впрочемъ совѣтуемъ избѣгать употребленія дополненій, а дѣлать сложенія и вычитанія по прежнимъ правиламъ. Такимъ образомъ для сего примѣра сказавъ: $9+1=10$; $4+1=5$, вычтутъ 5 изъ 10 и напишутъ 5 въ осталкѣ на мѣстѣ единицъ; потомъ $3+2=5$; $7+5-10$; $5-10$ не возможно; слѣд. $15-10=5$, которое и поставятъ подъ десятками, удержавъ 1 для присоединенія къ вычитаемымъ сотнямъ, и проч.

32 731	32 731
5 729	5 729
1 629	— 371
$\bar{1}5$ 166	— 4 834
33 235	остат. 33 235

Объ умноженіи.

11. Согласимся писать множимое сначала; по сему $4\times5\times2$ значитъ, что 4 должно повторить пять разъ, и произведеніе 20 взять 2 раза.

Такъ какъ 4×5 значитъ, что $1+1+1+1$ должно повторить пять разъ, слѣд. достаточно взять каждую единицу 5 разъ, или $5+5+5+5$; выраженіе соотвѣтствующее 5 взятымъ 4 раза, и такъ 4-жды 5 равно 5 взятымъ 4 раза, или $4\times5=5\times4$. Сіе разсужденіе можетъ быть представлено въ видѣ 5-ти строкъ, (см. А), изъ коихъ каждая заключаетъ 4 единицы. Очевидно, что число единицъ равняется 4 взятымъ 5 разъ. Но перевернувъ изображеніе (см. В), число единицъ будетъ 5 взятое 4 раза, и какъ число оныхъ необходимо то же въ обоихъ случаяхъ, слѣд. произведеніе 4×5 равняется 5×4.



Пусть также будетъ $5\times4\times2$;
какъ 5 взятыя 4 раза значатъ . . . $5+5+5+5$.
но оставшееся сіе окончательное
выраженіе повторимъ 2 раза: отъ
чего получатъ . . . . . $10+10+10\times10$,
или 10 взятыя 4 раза. И такъ $5\times4\times2=5\times2\times4$.
По сему *можно перемѣнять мѣста двухъ послѣднихъ производителей*, подобно тому, какъ перемѣщали два первыя. И такъ
$5\times4\times2=4\times5\times2=5\times2\times4\ :2\times5\times4=4\times2\times5=2\times4\times5$.
Слѣд. *какъ бы ни измѣнялся порядокъ производителей, произведеніе не перемѣнится.* Но сіе предложеніе надлежитъ доказать для числа производителей бо́льшаго трехъ, на прим. что $4\times5\times3\times2\times9=2\times9\times5\times3\times4$. Докажемъ сначала, что производитель 9, поставленный на послѣднемъ мѣстѣ въ первомъ произведеніи, можетъ также быть написанъ на послѣднемъ мѣстѣ втораго произведенія. Разсматривая только три производителя $2\times9\times5$, мы знаемъ, что можно написать $2\times5\times9$. И такъ второе произведеніе равно $2\times5\times9\times3\times4$; но какъ 10 можетъ замѣнить 2×5, то будетъ $10\times9\times3\times4$. Взявъ подобнымъ образомъ только первые три производителя, можемъ опять написать 9 послѣ 3, что даетъ $10\times3\times9\times4$; но сіе выраженіе соотвѣтствуетъ $30\times9\times4$ или $30\times4\times9$, или наконецъ $2\times5\times3\times4\times9$, написавъ $2\times5\times3$, вмѣсто 30. По сему во второмъ членѣ равенства, требующаго доказательства, производитель 9 можетъ быть поставленъ на послѣднемъ мѣстѣ; и если найдемъ, что $2\times5\times3\times4=4\times5\times3\times2$, то умноживъ на 9 сіи два равныя произведенія, наше предложеніе не будетъ подвержено никакому сомнѣнію.

И такъ доказываемое перемѣщеніе зависитъ отъ одного и того же предложенія, какъ и тотъ случай, когда число перемѣщаемыхъ производителей единицею менѣе; но послѣдній производитель можетъ

сдѣлать опять одинаковымъ въ обоихъ членахъ, и опустивъ оный и проч.; слѣд. наконецъ достигнемъ случая трехъ производителей.

12. Когда какое-нибудь число множится нѣсколько разъ послѣдовательно само на себя, какъ $3\times3\times3\times3$; то говорятъ, что оно возвышено въ *степень*, *величина которой означается числомъ производителей*, и называется *показателемъ*. Здѣсь 3 возвышено въ 4-ю степень, что означается чрезъ 3^4; 4 есть показатель степени. Подобнымъ образомъ $2^3=2\times2\times2=8$. 2-ю степень называютъ также *квадратомъ*, а 3-ю *кубомъ*. 7^2 или $7\times7=49$ есть квадратъ 7; а $7^3=7\times7\times7=343$ есть кубъ 7.

Число множимое такимъ образомъ само на себя, или сопровождаемое показателемъ, называется *корнемъ*; и такъ 7 есть *квадратный* или 2-й степени *корень* 49-ти, *кубичный* или 3-й степени *корень* 343-хъ, четвертой степени корень 2401-го и проч. Сіи корни изображаются знакомъ $\sqrt{}$, въ которомъ ставятъ число означающее его степень.

$7^3=343$, откуда $7=\sqrt[3]{343}$; $5^4=625$, откуда $5=\sqrt[4]{625}$.

Для корня 2-й степени, обыкновенно кореннаго показателя не означаютъ, т: е: вмѣсто $\sqrt[2]{}$ пишутъ просто $\sqrt{}$; $8^2=64$, слѣд. $8=\sqrt{64}$; гдѣ 8 есть корень или квадратный корень 64.

13. Такъ какъ для умноженія числа (чл. 3) достаточно сложить оное столько разъ, сколько въ множителѣ находится единицъ; слѣд: ежели увеличатъ одинъ производитель, то дабы произведеніе не перемѣнилось, другой должно во столько же уменьшить. 1-е, Если одинъ изъ производителей умножатъ на 2, 3, 4, ... то и самое произведеніе умножится на 2, 3, 4, ... Въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто 5×2 возьмемъ 6×5, то каждый разъ складывая 6, берутъ вмѣсто 2-хъ утроенное 2, т: е: удвоеннымъ 2-мя болѣе, и такъ окончательное выраженіе будетъ

составлено изъ произведенія 2×5, увеличеннаго такимъ же двойнымъ, т: е: утроеннаго: по сему 6×5, есть утроенное 2×5, ибо 6 есть утроенное 2. Слѣд., если раздѣлишь одинъ изъ производителей на 2, 3, 4...., то и произведеніе раздѣлится также на 2, 3, 4...., ибо такъ какъ 6×5 есть утроенное 2×5, слѣд. произведеніе 2×5 должно быть утроено, чтобы составить 6×5; подобнымъ образомъ 24×6 есть удвоенное 12×6, утроенное 8×6 или 24×2 и проч.

2-е *Произведеніе не измѣнится, если одинъ изъ производителей умножать, а другой раздѣлять на то же число:* $24 \times 8 = 12 \times 16$, 24 есть удвоенное 12, а 16 удвоенное 8.

3-е. *Если производители оканчиваются съ правой руки нулями, то можно ихъ опускать, приписывая потомъ таковое же число нулей къ произведенію.* И такъ 300×20 обращается въ 3×2, когда опишимъ три нуля, приписываемые въ послѣдствіи къ произведенію 6; отъ чего получимъ $300 \times 20 = 6000$. Въ самомъ дѣлѣ, 3 и 300, сравнительно съ 20 и 3000 повторены 10 разъ (чл. 6); по сему, $300 \times 20 = 3000 \times 2$. Но такъ какъ при сложеніи 3000 самихъ съ собою видѣли, что три нуля остаются въ суммѣ, какъ происходящіе отъ трехъ первыхъ столбцевъ, слѣдующій же даетъ 3×2; слѣд. 6000 есть искомое произведеніе.

14. Остается разсмотрѣть, какъ совершается умноженіе двухъ данныхъ чиселъ; при семъ представляется три случая.

1-й случай. *Когда каждый изъ двухъ производителей состоитъ изъ одной цыфры.* Слѣдующая таблица, изобрѣтенная Пиѳагоромъ, составляется написавъ въ одну горизонтальную строку первыя 9 чиселъ, потомъ каждое изъ нихъ складываютъ послѣдовательно 9 разъ, и пишутъ сіи произведенія въ томъ же вертикальномъ столбцѣ.

Таблица Пивагора.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Желаютъ ли найти произведеніе 7×5? Изъ составленія различныхъ чиселъ сей таблицы слѣдуетъ, что должно искать 7 въ первой строкѣ, по томъ спускаться по соотвѣтственному вертикальному столбцу, до квадрата находящагося въ горизонтальномъ ряду, начальная цыфра коего есть 5. Тамъ заключается 35, слѣд. $7 \times 5 = 35$. Необходимо знать на памятъ всѣ произведенія простыхъ чиселъ, чтобы не справляться каждый разъ съ таблицею, составленною изъ послѣдовательныхъ сложеній.

Если бъ надлежало *складывать множимое столько разъ, сколько во множителѣ содержится единицъ*, какъ того требуетъ опредѣленіе слова множить (чл. 3), то сіе дѣйствіе для большихъ чиселъ было бы неудобоисполнимо. Разсмотримъ, какимъ образомъ можно оное превратить въ умноженіе простыхъ чиселъ.

2-й случай. *Когда множитель состоитъ только изъ одной цифры.* Чтобы помножить 2967 на 4, вообразимъ, что желаютъ въ самомъ дѣлѣ совершить сложеніе 2967 взятыхъ 4 раза, какъ но сдѣлано на сторонѣ. Столбецъ единицъ будетъ заключать только цыфру 7, написанную вертикально 4 раза, и такъ сія сумма будетъ 7×4 или 28; пишутъ 8, и удерживаютъ 2 для присоединенія къ столбцу десятковъ, состоящему изъ цыфры 6, написанной 4 раза. По сему надлежитъ сказать $6 \times 4 = 24$, къ чему придавъ удержанные 2, получимъ 26: ставятъ 6 и удерживаютъ 2, и проч. Слѣдственно сіе *дѣйствіе обращается въ умноженіе каждой цыфры множимаго на множителя, начиная съ права: единицы каждаго произведенія пишутъ подъ цыфрою, изъ произведшею, и удерживаютъ десятки, для приложенія къ слѣдующему произведенію.* Сіе дѣйствіе, въ самомъ дѣлѣ, есть то же сложеніе; различіе въ томъ, что не пишутъ нѣсколько разъ слагаемое число.

2 967
2 967
2 967
2 967
11 868

2 967
4
11 868

3-й случай. *Когда оба производителя составлены изъ нѣсколькихъ цыфръ.* Умножить 2327 на 552 значитъ, 2327 повторить 2 раза, 50 разъ, 500 разъ и взять сумму всего. 1-е. Сначала умножаютъ по вышесказанному 2327 на 2; 2-е. Для составленія произведенія на 30, умножаютъ 2327 на 5, и къ произведенію прибавляютъ съ права нуль, въ слѣдствіе изъясненнаго въ (чл. 13, 5-е); 3-е. Наконецъ, чтобы 2327 повторить 500 разъ, должно умножить на 5, и прибавить къ произведенію два нуля. Изъ сего видно, что дѣйствіе принимаетъ видъ приложеннаго здѣсь примѣра, въ которомъ не писали нулей, зная, что они не произведутъ никакого вліянія на сложеніе; но сему произведеніе на 5

2 327	
552	
4 654	на 2
69 81	на 3
11 635	на 5
1 237 704	

написали отступя на одинъ знакъ въ-лѣво, а произведеніе на 5, отступя на два знака. И такъ: *надлежитъ множить одинъ изъ производителей поперемѣнно на каждую цыфру другаго. Всякое частное произведеніе писать такъ, чтобъ единицы онаго находились подъ цыфрою множителя, ихъ произведшею: по томъ все сложить.*

Такимъ образомъ умноженіе сложныхъ чиселъ зависитъ отъ того случая, когда множитель однозначный; сей же случай въ свою очередь зависитъ отъ умноженія одночленныхъ производителей, т: е: отъ шаблицы Пиѳагора. Такъ какъ необходимо имѣть навыкъ въ дѣйствіяхъ сего рода, то и прилагаются здѣсь нѣсколько примѣровъ:

886 633	53 687	5 554 444
777	908	79 765
6 206 431	429 496	27 772 220
62 064 31	48 318 3	333 266 64
620 643 1	48 747 796	3 888 110 8
688 913 841		49 989 996
		388 811 08
		443 050 225 660

Когда множитель однозначный, то составляютъ частныя произведенія, и ставятъ только ихъ единицы, удерживая десятки для присоединенія къ слѣдующему произведенію. Наконецъ, достигнувъ въ множимомъ наивысшаго порядка, ставятъ произведеніе, которое состоитъ изъ одной или двухъ цыфръ, смотря по тому, болѣе или менѣе оное 9. И такъ полное произведеніе будетъ имѣть столько цыфръ, сколько находится ихъ въ множимомъ, или одною болѣе онаго; чтобы судить, къ которому изъ сихъ случаевъ принадлежитъ данный примѣръ, достаточно взглянуть на цыфру наивысшаго порядка.

Если множитель состоитъ изъ нѣсколькихъ знаковъ, то умножаютъ на каждый отдѣльно, и произведенія

пишутъ отступя на одну цыфру въ-лѣво. Разсматривая только послѣднее произведеніе, т: е: произшедшее отъ наивысшей цыфры множителя, увидимъ, что оно начинается на мѣстѣ того порядка (ordre), къ которому принадлежитъ сія цыфра, и на семъ основано сложеніе различныхъ частныхъ произведеній. Приложивъ къ числу знаковъ послѣдняго произведенія число цыфръ, находящихся въ множителѣ, уменьшенное единицею, найдемъ, изъ скольких знаковъ будетъ состоять окончательное произведеніе. Итакъ *произведеніе двухъ количествъ будетъ имѣть столько цыфръ, сколько находится оныхъ въ множимомъ и въ множителѣ, или одною менѣе.* Одинъ взглядъ на данныя числа объяснитъ, къ какому случаю они принадлежатъ; на пр: для 53687×908, такъ какъ $5 \times 9 = 45$ состоитъ изъ двухъ цыфръ, то произведеніе 53687×9 дастъ 6, а искомое произведеніе 8 цыфръ. Такимъ же образомъ должно разсуждать при 3, 4, 5.... производителяхъ (*).

О дѣленіи.

15 Подобно какъ умноженіе есть не иное что, какъ повторенное сложеніе одного и того же числа, такъ

(*) Пусть α, β, γ... изображаютъ число цыфръ различныхъ производителей, a, b, c . . ., коихъ здѣсь n; очевидно, что $a < 10^{\alpha}$, $b < 10^{\beta}$, $c < 10^{\gamma}$ . . . .; произведеніе оныхъ будетъ $< 10^{\alpha+\beta+\gamma\cdots}$, или $abc \ldots < 10^{m}$, положивъ, что $m = \alpha+\beta+\gamma\ldots$ сверхъ того, $a > 10^{\alpha-1}$, $b > 10^{\beta-1}$, $c > 10^{\gamma-1}$...; откуда $abc \ldots > 10^{\alpha+\beta+\gamma\cdots-n}$ или $abc \ldots > 10^{m-n}$, но сему произведеніе $abc\ldots$ заключается между 10^{m-n} и 10^{m}, т е: не можетъ имѣть болѣе m, и должно состоять болѣе, чѣмъ изъ $m-n$ цыфръ. Изъ сего слѣдуетъ, что *произведеніе не можетъ состоять изъ большаго числа цыфръ, какъ сколько ихъ находится въ данныхъ производителяхъ, разсматривая оныя какъ одно число, но также всегда болѣе сего числа цыфръ, уменьшеннаго числомъ множителей.*

и дѣленіе можно разсматривать какъ повторенное вычитаніе, въ коемъ частное означаетъ, сколько разъ можно отнять дѣлителя отъ дѣлимаго. Для раздѣленія 8 на 2, вычитаютъ сначала 2 изъ 8, потомъ 2 изъ остатка 6, 2 изъ остатка 4, и наконецъ 2 изъ 2, чрезъ что достигнутъ остатка равнаго нулю; и такъ 2 изъ 8 можно было вычесть 4 раза. Слѣдственно 8 можно разсматривать составленнымъ изъ 2 взятыхъ 4 раза, и по сему 4 есть частное (чл. 5). Изъ сего слѣдуетъ, что *частное выражаетъ, сколько разъ содержится дѣлитель въ дѣлимомъ.*

Какъ *частное есть часть дѣлимаго, зависящая отъ дѣлителя*, т: е: такъ какъ дѣлимое содержитъ дѣлителя столько разъ, сколько частное заключаетъ единицъ: по сему желая составить изъ 8 единицъ двѣ равныя части, очевидно, что должно раздѣлить 8 на 2; частное 4 будетъ выражать величину каждой части.

Поелику дѣлимое есть ни что иное, какъ произведеніе, коего дѣлитель и частное суть производители, то изъ опредѣленія и свойствъ уже извѣстныхъ (чл. 15) слѣдуетъ, что:

1-е. *Частное не измѣнится, если дѣлимое и дѣлитель будутъ умножены или раздѣлены на одно число*: 36 : 9 даетъ такое же частное, какъ и 72 : 18 и 12 : 3.

2-е. Ежели дѣлимое и дѣлитель оканчиваются съ-права нулями, то у каждаго можно, не измѣняя частнаго, опустить одинакое число оныхъ; 6000 : 200 и 60 : 2 даютъ то же частное 30, смотр. стр. 17.

3-е. Если умножать только дѣлимое, то частное умножится тѣмъ же числомъ; если умножать дѣлителя, то частное раздѣлится. Пусть требуется на пр: 24 раздѣлить на 3, частное будетъ 8; 24 : 3 = 8; но если удвоить 24, то и частное удвоится, 48 : 3 = 16; если же удвоить 3, то частное уменьшится въ 2 раза,

24 : 6 = 4. Наконецъ 48 : 6 = 8; и : е : частное остается тоже, когда удвоишь дѣлимое и дѣлитель.

4-е. *Когда надлежитъ совершить нѣсколько послѣдовательныхъ дѣленій, то порядокъ исполненія оныхъ произвольный; можно даже обратить все въ одно дѣленіе, принимая за дѣлителя произведеніе всѣхъ дѣлителей.* Если требуется на пр: 24 раздѣлить на 2, потомъ частное 12 на 3, то получимъ для окончательнаго выраженія 4; но еслибъ сперва раздѣлили на 3, потомъ на 2, или еслибъ 24 раздѣлили на 2×3 или на 6, то получили бы тоже частное 4. Сіе происходитъ отъ того, что дѣленіе на 2 и на 3 обращается въ послѣдовательное уничтоженіе производителей 2 и 3 въ 24-хъ, которое есть произведеніе $2 \times 5 \times 4$ или $5 \times 2 \times 4$. По сей же причинѣ $(6 \times 4) : 3 \times 2) = (6 : 3) \times (4 : 2) = (6 : 2 \times 3) \times 4$.

16. Частное $\frac{35}{7}$ есть 5, потому что $35 = 7 \times 5$, но если желаютъ раздѣлить 38 на 7, то разлагаютъ 38 на $35 + 3$, или $38 = 7 \times 5 + 3$; здѣсь дѣленіе въ точности неисполнимо, и 35 есть только наибольшая часть 38-ми, дѣлимая на 7, а 3 есть *остатокъ* сего дѣленія. Если составимъ всѣ послѣдовательныя произведенія какого-нибудь числа на 1, 2, 3 . . . ., то всѣ произшедшія числа будутъ *дѣлимы* на сіе число, или будутъ *кратными* онаго. Такимъ образомъ 35 есть кратное 7 или дѣлимо на 7, между тѣмъ какъ 38 не дѣлится на сіе число.

Слѣдовательно, принимая за дѣлимое и дѣлителя какія-нибудь два числа, должно говорить, что *частное, умноженное на дѣлителя, даетъ такое произведеніе, которое будучи сложено съ остаткомъ, составляетъ дѣлимое.* Остатокъ однако же менѣе дѣлителя, потому, что если бы сей послѣдній еще содержался въ ономъ, то произведеніе частнаго на

дѣлителя не дало бы самое большое кратное дѣлителя, содержимаго въ дѣлимомъ.

Ежели 24 и 34 будутъ такія *два числа, которыя при раздѣленіи на* 5 *дають одинъ и тотъ же остатокъ* 4, *то разность ихъ* 10 *должна быть кратнымъ* 5-ти; потому, что $24 = 4 \times 5 + 4$, $34 = 6 \times 5 + 4$; вычтя сіи два уравненія одно изъ другаго, получимъ $10 = 2 \times 5$.

17. Пиѳагорова таблица служитъ для опредѣленія частнаго, когда оно также какъ и дѣлитель однозначное. Если на пр: требуется 35 раздѣлить на 7, то надлежитъ по вертикальному столбцу числа 7, спустившись до квадрата заключающаго 35, который соотвѣтствуетъ горизонтальной строкѣ, начинающейся 5-ю, такъ что $35 = 7 \times 5$; по сему 5 есть искомый производитель или частное. Дабы раздѣлить 65 на 9, то такъ какъ въ девятомъ столбцѣ находится не 65, а 63 и 72, то и будетъ $65 = 7 \times 9 + 2$: очевидно, что 7 есть частное, а 2 остатокъ. Надо приучиться къ сему роду дѣленій, дабы исполнять опыя не справляясь съ таблицею Пиѳагора.

18. Займемся теперь сложными дѣленіями.

1-й случай. *Когда дѣлитель состоитъ изъ одной только цыфры.* Пусть требуется раздѣлить 40761 на 7, т: е: отыскать такое число, которое будучи умножено на 7, произведетъ 40761. Ежели бы сіе число было извѣстно, то повѣрка совершилась бы, умноживъ оное на 7; единицы онаго дали бы въ произведеніи 1, удерживая десятки для присоединенія къ слѣдующему произведенію; такимъ же образомъ нашли бы 6 десятковъ; произведеніе сошлось бы 7; и наконецъ произведеніе тысячъ, 40. Въ частномъ не заключается десятковъ тысячъ, по тому что $10\,000 \times 7$ даютъ 70000; что превосходитъ 40761. Изъ сего заключимъ, что 40 содержитъ произведеніе 7 на тысячи частнаго, сложенное съ тысячами удер-

жанными отъ сошень. Самое большое крашное 7, заключающееся въ 40, есть 35 или 7 взятое 5 разъ, и какъ 40 содержится между произведеніями 7 на 5 и на 6, то умноживъ 7 на 5000 и на 6000, одно изъ произведеній будетъ менѣе, а другое болѣе 40761: слѣдственно частное заключается между 5000 и 6000,

40761	7
35	5823
57	
56	
16	
14	
21	
21	
—	

т: е: что цыфра тысячъ есть 5, произшедшая отъ *наибольшаго кратнаго* 7, содержимаго въ 40. Вычтя изъ 40 сіе крашное 35, въ остаткѣ 5 будутъ тысячи, удержанныя отъ умноженія сошекъ частнаго на 7. И такъ, ежели къ сему остатку 5 присоединятъ 761 остальныя цыфры дѣлимаго; то 5761 будетъ произведеніе неизвѣстныхъ частей частнаго на 7; чтобы отыскать ихъ, стоитъ только раздѣлить 5761 на 7; задача сходная съ вышепредложенною, а по сему подлежащая тому же разсужденію.

Слѣдовательно должно раздѣлить 57 на 7, или лучше сказать, наибольшее крашное 7-ми, заключающееся въ 57; частное 8 будетъ цыфра сошекъ искомаго частнаго, которую ставятъ съ-права 5, изображающихъ тысячи онаго. Замѣтимъ, что безполезно сносить къ остатку 5 всю остальную часть дѣлимаго 761, а достаточно для составленія отдѣльнаго дѣлимаго 57, снесши къ 5, цыфру сошекъ 7. Умноживъ 8 на 7, и отнявъ изъ 57 произведеніе 56, останокъ 1, будетъ удержанное произведеніе десятковъ, такъ что ежели къ сему остатку снесутъ 61, то 161 будетъ изображать произведеніе 7 на десятки и единицы частнаго; по сему, чтобы отыскать ихъ, должно 161 раздѣлить на 7 и т: д: Изъ сего видно, что дабы найти послѣдовательно каждую цыфру частнаго, *начинаютъ отъ высшаго порядка, сносятъ къ каждому остатку слѣдующую цыфру дѣлимаго, и по томъ берутъ наибольшія кратныя дѣлителя въ оныхъ*

содержащійся. И такъ къ 1 спесутъ 6 и раздѣлишъ 16 на 7; опдѣльное частное 2 будетъ цыфра десятковъ: $2 \times 7 = 14$, вычтя сіе изъ 16, найдемъ въ остаткѣ 2; присоединивъ къ оному единицы дѣлимаго 1, получимъ 21 : 7 = 3 для единицъ частнаго, которое и будетъ 5823.

Привыкнувъ къ сему роду вычисленій, скоро замѣтимъ, что въ столь простомъ дѣйствіи безполезно писать каждое вычитаемое произведеніе; ибо вычитаніе въ слѣдъ за симъ совершается. По сему найдя, что 40 : 7 даетъ цыфру 5 для тысячъ частнаго, то взявъ произведеніе 5 на 7, вычитаютъ 35 изъ 40; остатокъ 5 подписываютъ подъ 0 дѣлимаго, къ которому сносятъ сотни 7 и дѣлятъ 57 на 7 и проч. Въ такомъ случаѣ дѣйствіе принимаетъ видъ приложеннаго на сторонѣ примѣра. Замѣтимъ также, что опое еще можно сокращать, если не будемъ писать каждый остатокъ для присоединенія къ послѣдующей цыфрѣ дѣлимаго: на пр: 40 : 7 даетъ 5, которое и подписываютъ подъ 40; произведеніе 7 на 5 или 35 вычитаютъ изъ 40, и удерживаютъ въ памяти остатокъ 5, для присоединенія къ 7 сотнямъ; 57 : 7 даетъ 8, которыя пишутъ подъ 7-ю сотнями: $7 \times 8 = 56$, что отнявъ изъ 57, получимъ остатокъ 1; присоединя 1 къ 6 десяткамъ, получимъ 16; $16 : 7 = 2$ и проч. Сіе дѣйствіе имѣетъ весьма простой видъ, здѣсь на сторонѣ приложенный.

40761	7
57	5823
16	
21	
0	

40 761	7
5 823	

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ сихъ дѣленій:

12 368	2
6 369	

8 765	9
17	

97 587	7
13 941	

2-й случай. *Когда дѣлитель состоитъ изъ нѣсколькихъ цыфръ.* Пусть требуется раздѣлить 1916 на 329. Такъ какъ, $329 \times 10 = 3290$, болѣе дѣлимаго 1916, то частное необходимо менѣе 10; по сему

частное состоитъ только изъ одной цыфры; положимъ его извѣстнымъ, оно легко опредѣлится составляя послѣдовательныя произведенія изъ 329 на 1, 2, 3 .... покуда не достигнемъ произведенія равнаго 1916, или коего разность съ 1916 менѣе 329. Пусть 5 будетъ сіе частное.

Очевидно, что $1916 = 329 \times 5 +$ ошибкѣ, слѣд. умноживъ на 5 единицы 9, десятки 2, сотни 3, и приложивъ къ сему ошибкѣ, получимъ 1916. Вычисленіе, представленное на сторонѣ, показываетъ, что 19 сотни дѣлимаго составлены, 1-е) изъ 15, т: е: изъ произведенія 3 сотенъ дѣлителя, на предполагаемое частное 5; 2-е) изъ 1 удержанной отъ умноженныхъ десятковъ; 3-е) изъ 3 происходящихъ отъ приложенія ошибки 271.

	329
	5
произвед.	1645
ошибкѣ	271
	1916

Изъ сего слѣдуетъ, что если бы можно было изъ 19 вычесть двѣ послѣднія величины, тогда ошибкѣ 15 изображалъ бы точное произведеніе 3 сотенъ дѣлителя на цыфру частнаго, которая получилась бы раздѣливъ 15 на 3. Но какъ изъ 19 нельзя отнять вышеупомянутыхъ величинъ еще неизвѣстныхъ, то дѣлятъ 19 на 3, принимая такимъ образомъ за дѣлимое, число слишкомъ великое: полученное частное можетъ быть ошибочно, но не иначе какъ больше настоящаго. Въ нашемъ примѣрѣ, 19 : 3 даетъ 6; а какъ $6 \times 329 = 1974 > 1916$, то явно, что предположенное частное слишкомъ велико: если зададимся 5, то произведеніе 5×329 будетъ $1645 < 1916$; сіе доказываетъ, что частное 5 не велико и слѣд. оно будетъ искомое. Отнявъ 1645 изъ 1916, получимъ въ ошибкѣ 271.

Изъ сего заключимъ, что ежели частное < 10, т: е: состоитъ изъ одной только цыфры, то *должно опустя съ правой руки въ дѣлимомъ и дѣлитель одинакое число цыфръ, дѣлить остальныя части; найденное*

частное будетъ или искомое, или болѣе онаго; чему повѣркою послужитъ умноженіе. (*) Вотъ нѣсколько примѣровъ такового дѣленія:

72 320	8 369	386 782	99 887	823 945	82 476
произвед. 66 952	8 части.	299 661	3	742 284	9
осташокъ 5 368		87 121		81 661	

Раздѣлимъ теперь 191688 на 329. Такъ какъ дѣлимое заключается между дѣлителемъ взятымъ 100 и 1000 разъ, т: е: между 32900 и 329000, то частное будетъ между 100 и 1000; и такъ частное состоитъ изъ трехъ цыфръ. Положимъ его извѣстнымъ и равнымъ 582, также какъ и осташокъ 210.

Умноженіе 329 на 582 показываетъ, что произведеніе 329 на 5 должно быть оставлено на двѣ цыфры. Если опустимъ двѣ цыфры 88 съ-права въ дѣлимомъ, то оставшаяся часть 1916 будетъ составлена изъ произведенія 329 на 5, т: е: 1645, сложеннаго съ сотнями, произшедшими отъ совокупленія прочихъ частей. Отыщемъ наибольшее кратное 329, содержащееся въ 1916, раздѣливъ 1916 на 329, по вышеизложеннымъ

А
329
582
658
26 32
164 5
210 остат.
191 688

(*) Особенно трудно угадать частное, когда въ дѣлимомъ 2 я цыфра съ-права болѣе 5, ибо при умноженіи дѣлителя на частное для полученія дѣлимаго, произведеніе 1-й цыфры дѣлителя должно быть прибавлено къ десяткамъ удержаннымъ отъ 2-й цыфры. На пр: для 1435 : 287, если скажутъ 14 : 2 даютъ 7, то сіе число 7 будетъ слишкомъ велико для частнаго, ибо умноживъ 287 на 7, произведеніе сотенъ 2×7 должно быть увеличено удержанными 6 ю сотнями, произшедшими отъ 87×7. Но если предположатъ въ частномъ 5, то такъ какъ отъ 87×5 удерживаютъ 4, и какъ $14 - 4$, раздѣленное на 2 даетъ въ самомъ дѣлѣ 5, то очевидно, что 5 есть искомое частное.

Замѣтимъ, что ежели 287 замѣнять 300-ми, то частное $\frac{1435}{300}$ будетъ слишкомъ мало, ибо увеличенный дѣлитель можетъ содержаться въ дѣлимомъ 1435, меньшее число разъ. Чтобъ избѣжать продолжительныхъ изысканій, когда 2 я цыфра *съ-права въ дѣлителѣ пре-*

правиламъ, $329 \times 5 = 1645$; слѣдственно 5 будетъ цыфра сотенъ искомаго частнаго; ибо если 1916 заключается между 329 взятыми 5 и 6 разъ, то все дѣлимое содержится между 329 взятыми 500 и 600 разъ; посему и частное будетъ между 500 и 600.

Какъ скоро 5, 1-я цыфра частнаго извѣстна, и когда умножатъ дѣлителя 329 на 5, и вычтутъ произведеніе 1645 изъ 1916, то получатъ осташокъ 271, происходящій отъ другихъ частей вышепредложеннаго вычисленія A. Слѣдственно если къ 271 сотнѣ снесутъ остальныя цыфры 88 дѣлимаго, то 27188 будетъ произведеніе 329 на десятки и единицы частнаго, сложенное съ осташкомъ; а по сему ежели раздѣлятъ 27188 на 329, то въ частномъ получатъ искомые десятки и единицы.

	1916.88	329
	1645	582
1-й остат.	2718	
	2632	
2-й остат.	868	
	658	
3-й остат.	210	

Сей вопросъ, подобный предложенному, подлежитъ тому же разсужденію, и ведетъ къ тому же слѣдствію. И такъ отдѣливъ 8, 1-ю цыфру съ-права, увидимъ, что наибольшее кратное 329-ти, содержимое въ 2718, будетъ $8 \times 329 = 2632$. Слѣдственно цыфра десятковъ есть 8; вычтя 2632 изъ отдѣльнаго дѣлимаго 2718, получимъ осташокъ 86, происшедшій отъ произведенія 329 на единицы, сложеннаго съ избыткомъ даннаго дѣлимаго надъ наибольшимъ кратнымъ его числомъ. Наконецъ, если раздѣлятъ 868 на 329,

---

восходитъ 5, то надо прибавлять 1 къ 1-й цыфрѣ онаго, для полученія предположеннаго частнаго; но чтобы въ послѣдствіи повѣрить его умноженіемъ, должно принять прежняго дѣлителя. Случающаяся отъ сего ошибка можетъ только произвести слишкомъ малое частное; что тотчасъ видно по осташку, превосходящему дѣлителя. Въ случаѣ, здѣсь разсматриваемомъ, иногда выгодно удвоить, утроить, ... дѣлимое и дѣлитель, чтобы сдѣлать 2-ю цыфру сего послѣдняго < 5. Частное отъ сего не перемѣнится. (Чл. 15, 1-е.)

то получатъ единицы 2, и останокъ 210. Тоже самое дѣйствіе безпрестанно повторяется и производитъ послѣдовательно различныя цыфры частнаго, основываясь на разсужденіи мало различномъ отъ сдѣланнаго для изысканія однозначнаго частнаго.

Слѣдственно, *дабы совершить дѣленіе, должно отдѣлить съ-лѣва въ дѣлимомъ столько цыфръ, чтобы дѣлитель могъ въ нихъ содержаться, раздѣлить сію часть на дѣлителя; произходящее отъ сего однозначное частное, будетъ* 1-*я изъ цыфръ съ-лѣва искомаго частнаго, и одинакаго порядка съ единицами отдѣльнаго дѣлимаго. Сіе частное умножатъ на дѣлителя; произведеніе вычтутъ изъ отдѣльнаго дѣлимаго; съ-права къ остатку снесутъ слѣдующую цыфру даннаго дѣлимаго, и снова повторятъ сіе дѣйствіе; отъ чего получится* 2-*я цыфра частнаго, одинакаго порядка съ снесенною цыфрою. Сіе вычисленіе будутъ продолжать до тѣхъ поръ, пока снесутъ всѣ цыфры дѣлимаго.*

Если одно изъ отдѣльныхъ дѣлимыхъ не содержитъ въ себѣ дѣлителя, то не должно забывать въ частномъ ставить ноль; послѣ чего сносятъ слѣдующую цыфру дѣлимаго.

Вмѣсто того, чтобы писать каждое произведеніе и потомъ его вычитать, гораздо короче исполнять вдругъ умноженіе и вычитаніе. На пр: если бъ надлежало умножить 329 на 5 и вычесть изъ 1916, то можно бы дѣйствовать слѣдующимъ образомъ: 5×9 45 единицамъ, которыя нельзя отнять изъ 6 единицъ дѣлимаго 1916: но приложивъ 4 десятка къ 6, скажутъ $46-45=1$; что и ставятъ подъ 6. Такъ какъ 1916 увеличилось чрезъ сіе 40, то чтобъ искомая разность не измѣнилась, надлежитъ также прибавить 40 къ вычитаемому, т: е: помнятъ 4 десятка, и присоединяютъ ихъ къ слѣдующему произведенію $2\times3=10$; слѣдственно должно отнять 14 изъ 1 де-

сяшка; для чего вычитаютъ 14 изъ 21, а осташокъ 7 пишутъ подъ 1, и удерживаютъ приложенные 2 десяшка, наконецъ $5 \times 5 + 2 = 17$, $19 - 17 = 2$, и первой осташокъ будетъ 271.

Подобнымъ образомъ, чтобъ опишпь изъ 2718 произведеніе 329×8, говорятъ: $8 \times 9 = 72$; прибавя 70 къ единицамъ, получимъ $78 - 72 = 6$; что и пишутъ подъ единицами, а 7 удерживаютъ. Далѣе $2 \times 8 + 7 = 23$ вычитаютъ изъ 1, или лучше сказапъ изъ 31, останется 8, что спавятъ подъ 1, удержавъ 3: наконецъ $3 \times 8 + 3 = 27$, вычтенное изъ 27, даетъ въ осташкѣ 0, который не пишется, и проч. Таковое дѣйствіе принимаетъ сокращенный видъ, на сторонѣ предспавленный (*).

1916.88	329
2718	582
868	
210 осташ.	

(*) Сей родъ вычисленія служитъ также для повѣрки каждой цыфры частнаго; вышеозначенное дѣйствіе совершается тогда въ обращномъ порядкѣ, т: е. съ-лѣва на-право; и ежели случится, что которое-нибудь изъ вычитаній невозможно, то шагъ болѣе онаго нельзя было бы совершить начиная съ правой руки, ибо тогда вычитаемыя произведенія увеличены удерживаемыми числами. Такимъ образомъ для $\frac{1916}{328}$ получатъ $\frac{19}{3}$, и надлежитъ повѣрить получаемое частное 6. Помножимъ слѣдовательно 328 на 6, произведеніе будетъ < 1916, если частное 6 не слишкомъ велико. Начиная умноженіе съ сотенъ, скажутъ $3 \times 6 = 18$; вычти изъ 19, останется 1, которую присоединя къ слѣдующей цыфрѣ 1, получатъ 11 десятковъ, изъ коихъ нельзя вычесть произведеніе десятковъ 6×2 или 12; и такъ частное 6 слишкомъ велико, по чему и пробуютъ 5.

Замѣтимъ, что ни въ какомъ случаѣ удерживаемое число не можетъ превосходить множителя, коимъ задались; ежели оно есть 5, то надлежитъ, чтобы другой производитель былъ > 10, дабы составленное произведеніе, превосходящее 50, при вычитаніи онаго, требовало приложенія болѣе 5 десятковъ. По сему если совершая по вышесказанному повѣрку, найдутъ, что какой-нибудь изъ осташковъ равенъ принятому частному, то совершая дѣйствіе отъ правой руки къ лѣвой, и достигнувъ сего самаго осташка, нѣтъ сомнѣнія, что вычитаніе будетъ возможно, равно какъ и всѣ послѣдующія. На пр: для $\frac{25643}{3572}$, скажутъ $\frac{25}{3}$ даетъ 8, которое найдемъ

Вотъ нѣсколько примѣровъ дѣленія.

72 312.146	8369	386 782.67	99 887
5 360 1	8640	87 121 6	387
338 74		7 212 07	
3 986		остатокъ ..219 98	
остатокъ . . 3 986			

823 945 687 08.9	8 247 685 671	721.342	491
81 653 976 69 9	99	139 3	2478
остатокъ ..7 424 805 66 0		22 94	
		2 572	
		остатокъ ..244	

700 200.03 1	683 679	25 677.875	2568
16 521 03	1034	2 565 8	9999
2 847 45 1		254 67	
остатокъ . . . 112 73 5		23 555	
		остатокъ . . . 443	

19. Должно замѣтить: что, 1-е. Изъ четырехъ *правилъ*, одно только дѣленіе начинается съ-лѣва.

2-е. Каждый частный остатокъ есть удержанное число, происходящее отъ произведенія прочихъ частей: но остатокъ всегда менѣе дѣлителя; откуда слѣдуетъ, что такъ какъ сіи прочія части для каждаго отдѣльнаго дѣлимаго не могутъ равняться дѣлителю, то цыфра частнаго остается та же, какія бы ни были сіи удержанныя части, и оное частное всегда опредѣлится наибольшимъ краннымъ дѣлителя.

слишкомъ великимъ; по сему испытаемъ 7, что сдѣлаемъ слѣдующимъ образомъ: $3 \times 7 = 21$, вычтя изъ 25 останется 4, присоединивъ же къ 6 сотнямъ, числа 25643, получатъ 46; потомъ $7 \times 5 = 35$, $46 - 35$ даетъ остатокъ > 7; и такъ 7 есть искомое частное. Вообще пробу должно продолжать до невозможнаго вычитанія, или до остатка по крайней мѣрѣ равнаго заданной цыфрѣ. Въ 1-мъ случаѣ сіе частное слишкомъ велико, напротивъ того оно не велико во 2-мъ случаѣ. Рѣдко бываютъ вынуждены, для повѣрки частнаго, продолжать вычисленіе до единицъ; большею частію узнаютъ, годится ли оно при 2-мъ вычитаніи.

Хотя въ самомъ дѣлѣ, при изысканіи опытнымъ сего краинаго, отдѣльное частное можетъ быть ошибочно; но сія погрѣшность происходитъ единственно отъ вышепредписаннаго нами способа (стр. 27); какъ же скоро наибольшее краинее найдено, то можемъ быть увѣрены въ точности частнаго.

3-е. Каждая цыфра, сносимая къ остатку, производитъ въ частномъ цыфру того же порядка, такъ что можно всегда заранѣе опредѣлить число цыфръ частнаго, и означить порядокъ каждой.

4-е. Каждое отдѣльное частное не можетъ превосходить 9, которое есть наибольшее однозначное число. И такъ, для $\frac{170}{19}$, хотя и могутъ сказать, сколько разъ 1 содержится въ 17, но не спавшись 17 въ частномъ, а пробуютъ только 9, здѣсь же и сія цыфра еще слишкомъ велика, и точное частное будетъ 8, которое бы тотчасъ получили, сказавъ $\frac{17}{2}$, вмѣсто $\frac{17}{1}$, какъ то слѣдуетъ изъ замѣчанія, стран. 28.

5-е. Для избѣжанія погрѣшностей, надлежитъ каждую сносимую цыфру дѣлимаго означать точкою.

Разложеніе на первоначальные производители. Свойства дѣлителей общихъ нѣсколькимъ числамъ.

20. Число дѣлимое въ точности только само на себя и на единицу называется *первоначальнымъ*, какъ на пр: 7, 11, 2, 1. Два же числа, неимѣющія никакого другаго общаго дѣлителя, кромѣ единицы, какъ на прим: 21 и 40, называются *первоначальными между собою.*

21. *Если какое-нибудь число дѣлимо на другое, то всѣ кратные перваго, также дѣлимы на второе.*

Если 18 есть кратное 2-хъ, то 3×18, или $18+18+18$, дѣлимо на 2, потому что каждая часть есть кратная 2-хъ.

22. Разсмотримъ, что произойдетъ, когда сосчитавъ произведеніе изъ 293 на 1572, раздѣлимъ сіи три числа на какое-нибудь другое, какъ на пр: на 9 (*); если разложивъ 293 на $9 \times 32+5$, умножимъ оное на 1572, то первая часть будетъ кратная 9-ти, и вышеупомянутое произведеніе, раздѣленное на 9, должно дать одинакій осчитокъ съ 5×1572. Но какъ 1572 разлагается также на $9 \times 174+6$, то умноживъ оное на 5, и раздѣливъ на 9, искомый осчитокъ будетъ тотъ же, что и отъ 6×5; и такъ *остатокъ отъ произведенія равенъ произведенію остатковъ обоихъ производителей, какой бы дѣлитель ни былъ.*

23. *Если каждый изъ двухъ производителей менѣе какого-нибудь первоначальнаго числа, то они не могутъ составить произведенія дѣлимаго на сіе число.* Положимъ на пр: что 20×8 дѣлимо на 23, или $\frac{20 \times 8}{23} =$ *цѣлому;* отъ раздѣленія 23 на 8, число 23 разложится на $2 \times 8+7$; умноживъ на 20, получимъ $23 \times 20 = 2 \times 8 \times 20+7 \times 20$. Раздѣлимъ сіе уравненіе на 23, 1-я часть и 1-й членъ 2-й части суть кратные 23-хъ, что очевидно для 1-го и предположено для 2-го; но сему 2-й членъ $\frac{7 \times 20}{23}$ долженъ быть также

(*) Сіе доказательство можетъ быть изъяснено Алгебраически слѣдующимъ образомъ. если раздѣлимъ два цѣлые производителя F и F′ на какое-нибудь число n, что дѣленіе примемъ видъ, на сторонѣ представленный, въ которомъ q и q' суть цѣлыя частныя, r и r' осчитки. Разсматривая члены произведенія FF′, найдемъ, что всѣ они, выключая rr', содержатъ производитель n. По сему раздѣливъ произведеніе на n, увидимъ, что $\frac{FF'}{n}$ и $\frac{rr'}{n}$ должны дать одинакіе осчитки.

$$\begin{array}{l} F = qn + r \\ F' = q'n + r' \\ \hline FF' = qq'n^2 + q'nr \\ \qquad + qnr' + rr' \end{array}$$

равенѣ *цѣлому*. Повторимъ тоже дѣйствіе для 7 и 20, раздѣлимъ вновь 23 на 7, $23 = 3 \times 7 + 2$. Такимъ же образомъ докажется, что 2×20 должно быть кратнымъ 23. Продолжая дѣлить 23 на получаемый остатокъ и замѣтивъ, что сіи остатки уменьшаются недѣлая первоначальное число 23 дѣлимымъ на-цѣло, достигнутъ остатка 1; отъ чего произойдетъ слѣдующая несообразность 20×1, или 20 дѣлимо на 23.

24. Изъ сего заключимъ, 1-е, *дабы произведеніе было дѣлимо на какое-нибудь первоначальное число, то должно, чтобы сіе послѣднее было однимъ изъ его производителей.* Ибо на пр: если 28×15 дѣлимо на 11, между тѣмъ, какъ ни 28, ни 15 на оное не дѣлимы, но какъ 28 и 15, раздѣленныя на 11, даютъ остатки 6 и 4, и (чл. 22) замѣчено, что произведеніе 28×15, раздѣленное на 11, даетъ тотъ же остатокъ, что и 6×4, слѣдовательно необходимо, чтобы 6×4 было кратнымъ 11; чего невозможность выше доказана.

2-е, Произведеніе двухъ первоначальныхъ чиселъ только ихъ и можетъ имѣть дѣлителями, кромѣ единицы и самаго произведенія.

3-е, Нѣсколько производителей $5 \times 8 \times 9 \times 11$, не могутъ составить произведенія дѣлимаго на первоначальное число 3, если хотя одинъ изъ тѣхъ производителей не дѣлится на 3.

4-е, *Если произведеніе дѣлимо на число непервоначальное, то надлежитъ, чтобы всѣ производители сего послѣдняго находились въ числѣ производителей составляющихъ произведеніе.* И такъ 8 $\times$ 35 дѣлится на 14, ибо 8 дѣлимо на 2, и 35 на 7. Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{35 \times 8}{14}$ даетъ цѣлое частное, то умноживъ оное на 14 или на 2 взятыя 7 разъ, произойдетъ 8×35, величина необходимо дѣлимая на первоначальныя числа 2 и 7; по сему первоначальныя числа 2 и 7 дѣлятъ 8 или 35 (1-е). Но если бы одинъ

изъ производителей дѣлителя не выполнялъ сего условія, тогда произведеніе не раздѣлилось бы на-цѣло. Слѣдственно *если нѣсколько производителей суть первоначальные относительно какого-нибудь числа, то и произведеніе оныхъ будетъ такого же свойства;* а если сіи производители первоначальные между собою, и каждый изъ нихъ дѣлитъ какое-нибудь число на-цѣло, то оно дѣлимо также и на ихъ произведеніе.

5-е. *Изъ первоначальныхъ множителей можно составить только одинъ рядъ, производящій данное число.* На пр: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ не можетъ быть произведеніемъ другаго ряда первоначальныхъ множителей, какъ на пр: $7 \times 11 \times 2$; ибо въ такомъ случаѣ $2^3 \times 3^2 \times 5 = 7 \times 11 \times 2$, откуда 1-я часть была бы кратною 7, что противно вышесказанному (1-е). И такъ первоначальные множители 360 могутъ быть только 2, 3 и 5, и осталося доказать, что сіи множители не могутъ имѣть другаго ряда показателей; н: е: на пр: не можетъ быть, чтобы $360 = 2 \times 3^3 \times 5^2$. Въ самомъ дѣлѣ онъ сего произошло бы $2^3 \times 3^2 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5^2$, или уничтоживъ общихъ производителей $2^2 = 3 \times 5$, что несообразно (1-е).

6-е. Если два числа, каковы 7 и 11, первоначальные между собою, то и степени ихъ, какъ на пр: 7^3 и 11^4, будутъ такого же свойства; ибо еслибъ онѣ имѣли какого-нибудь общаго производителя, то онъ былъ бы также производителемъ 7 и 11.

7-е. Пусть будетъ полный кубъ, на пр: $8000 = 20^3$; если разложить 20 на 4×5, то 8000 будетъ кубомъ 4×5. Но такъ какъ при умноженіи можно измѣнить порядокъ производителей, по сему $8000 = 4^3 \times 5^3$. Слѣдовательно производители $4^3 \times 5^3$ первоначальные между собою, суть также полные кубы. Тоже можно сказать о всякой степени, какіе бы ни были множители первоначальные, или первоначальные между собою. *И такъ если какое-нибудь число есть полная*

степень, то разложивъ оное на первоначальные множители, показатель каждаго изъ нихъ долженъ быть кратнымъ степени.

25. Чтобы *разложить число на его первоначальные производители*, должно сначала раздѣлить оное послѣдовательно на 2, сколько разъ, сколько возможно; тогда предложенное число будетъ произведеніе нѣкоторой степени 2-хъ, на извѣстное частное недѣлимое на 2. Потомъ сіе частное должно дѣлить на 3, сколько возможно, и оное будетъ произведеніемъ нѣкоторой степени 3-хъ, на новое извѣстное частное, недѣлимое на 3. Продолжая такимъ образомъ дѣлить послѣдовательно на первоначальныя числа 5, 7, 11, 13.... найдемъ, что данное число есть произведеніе сихъ различныхъ первоначальныхъ чиселъ, изъ коихъ каждое возведено въ степень означенную числомъ исполненныхъ дѣленій.

На примѣръ для 360 раздѣлимъ оное на 2, потомъ частное 180 на 2, наконецъ 90 на 2; такъ какъ 3-е частное 45 недѣлимо болѣе на 2, то $360 = 2^3 \times 45$, и 45 раздѣлимъ на 3; отъ чего $45 = 3^2 \times 5$, слѣд: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Здѣсь разложеніе оканчивается, ибо 5 есть число первоначальное. Обыкновенно даютъ сему вычисленію видъ, на сторонѣ означенный, дабы яснѣе видѣть рядъ производителей. Подобнымъ образомъ найдется, что $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ (*).

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5.

210	2
105	3
35	5
7	7

(*) Пусть α, β, γ...., будутъ числа, изображающія, сколько разъ могли раздѣлить число N на первоначальныя числа a, b, c...; N будетъ $= a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times$.... Чтобъ отыскать всѣхъ дѣлителей числа N, должно взять члены произведенія

$$(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots a^\alpha) \times (1 + b + b^2 + b^3 + \ldots b^\beta) \times (1 + c + c^2 + c^3 + \ldots c^\gamma) \times \ldots.$$

число членовъ произведенія, или число дѣлителей N, будетъ

$$(1+\alpha)\ (1+\beta)\ (1+\gamma,\ \ldots$$

Такимъ образомъ достигнемъ цѣли ограниченнымъ числомъ дѣленій. Извѣстно впрочемъ, что разложеніе числа на первоначальные производители даетъ одинъ только рядъ (чл. 24, 5-е).

26. Случается иногда, что опыты дѣленія оставаются пищетными, и что не находятъ для предложеннаго числа, или для одного изъ полученныхъ частныхъ, никакого точнаго дѣлителя; въ такомъ случаѣ, сіе число или частное будетъ первоначальное, и нельзя онаго разложить на множители. Но должно замѣтить, что сіи безполезные опыты дѣленія не должно продолжать *далѣе квадратнаго корня дѣлимаго числа.* Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ сіе число есть произведеніе корня самого на себя, и сверхъ того съ приращеніемъ одного производителя другой уменьшается (чл. 13), то очевидно, что ежели сіе дѣлимое имѣетъ одного изъ своихъ множителей болѣе корня, то другой производитель долженъ быть менѣе онаго, а по сему число не можетъ быть дѣлимо на величину превосходящую его квадратный корень, если оно не дѣлится на число меньшее сего корня. И такъ, хотя дѣлали опыты только надъ первоначальными производителями, но увѣрены, что другія непервоначальныя числа не могли бы раздѣлить; чѣмъ и доказывается, что дѣлителя, который былъ бы менѣе корня дѣлимаго, не существуетъ, а слѣдовательно и болѣе сего корня.

Напр: 127 не дѣлится, ни на 2, 3, 5, 7, ни на 11, а тѣмъ болѣе на 4, 6, 8, 9 и 10; а какъ $\sqrt{127}$ содержится между 11 и 12, то увѣрены, что 127 есть число первоначальное. 1524 дѣлимо на 3 и 4, отъ чего $1524 = 2^2 \times 3 \times 127$; откуда видно, что 5, 7 и 11 не дѣлятъ 127 Не продолжая далѣе опыты, усмотримъ, что 127 есть число первоначальное, и что 1524 разложилось на множители.

27. Опыщемъ теперь *всѣхъ дѣлителей* даннаго числа. Для сего разложимъ оное на первоначальные производишели, и сверхъ того извѣстно, что всякое совокупленіе изъ сихъ производишелей по одному, по 2, по 3, ... будетъ его дѣлишелемъ. Но какъ сіе число можетъ быть только дѣлимо на одно изъ сихъ совокупленій (чл. 24, 4-е), и нельзя получить болѣе одного ряда первоначальныхъ производишелей, то сіе доказываетъ, что составя всѣ возможныя совокупленія, не пропустишь ни одного дѣлишеля. Вотъ средство, чтобы незабыть ни одного изъ сихъ совокупленій: возьмемъ прежнее уравненіе $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; составимъ изъ 2^3 сумму $1 + 2 + 2^2 + 2^3$, изъ 3^2 сумму $1 + 3 + 3^2$; наконецъ 5 даетъ $1 + 5$. Во первыхъ каждый членъ есть дѣлишель 360; и ежели умножишь всѣ члены 1-й суммы на всѣ члены 2-й, а сіи выраженія на всѣ члены 3-й, то очевидно, что составятся всѣ возможныя совокупленія. По сему исполнивъ умноженіе $(1 + 2 + 4 + 8) \times (1 + 3 + 9) \times (1 + 5)$, получимъ всѣ искомые дѣлишели, кои суть:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Для $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ составимъ произведеніе изъ $1 + 2$, на $1 + 3$, на $1 + 5$, на $1 + 7$; и получишь

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.

Для $675 = 3^3 \times 5^2$, возьмутъ $(1+3+9+27) \times (1+5+25)$; откуда

1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675.

28. Пусть требуется найти наибольшее число, дѣлящее на-цѣло 312 и 132; такое число называется *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ* сихъ двухъ чиселъ. Разложивъ оба предложенныя числа на ихъ первоначальные производишели чл. 25), найдутъ

$$312 = 2^3 \times 3 \times 13, \quad 132 = 2^2 \times 3 \times 11.$$

Очевидно, что только 2^2 и 3 суть общіе первоначальные производишели, и что ихъ произведеніе

$2^2 \times 3$, или 12, есть искомый наибольшій дѣлитель. Припомнивъ способъ разложенія числа на его первоначальные производители, тотчасъ замѣтимъ, что оный есть только рядъ опытовъ, число коихъ хотя и ограничено, но они ведутъ къ рѣшенію здѣсь предложенной задачи непрямымъ и затруднительнымъ способомъ.

Замѣтимъ, что если бъ 132 дѣлило 312 на-цѣло, тогда 132 было бы общимъ большимъ дѣлителемъ сихъ чиселъ, потому что 132 не можетъ имѣть большаго дѣлителя, какъ сіе самое число; посему раздѣлимъ 312 на 132, частное будетъ 2, остатокъ 48, такъ что

$$312 = 2 \times 132 + 48.$$

Раздѣлимъ всѣ части сего уравненія на какого-нибудь дѣлителя 3, общаго 312 и 132; сіе число 3 раздѣлитъ также и 2×132 (смот: чл. 21); и такъ 1-я часть 312, также какъ и 1-й членъ 2-й части 2×132 будутъ кратными 3; по сему надо, чтобы 48 дѣлилось также на 3; ибо частное, приложенное къ $\frac{2 \times 132}{3}$, должно произвести то же частное какъ и $\frac{312}{3} = 104$. Изъ сего заключимъ, что *всякій дѣлитель общій двумъ числамъ дѣлитъ также и остатокъ ихъ дѣленія.* И такъ общихъ дѣлителей ... 312 и 132 .... А
можно только искать между производителями 48, и слѣдовательно только
между числами дѣлящими въ одно время 48 и 132 .... В

По сей же причинѣ 48 и 132 не могутъ имѣть общаго дѣлителя, недѣлящаго также 312, а слѣд: 312, и 132. По сему не только всѣ общіе дѣлители 1-го ряда А будутъ принадлежать также и 2-му В; но и обратно всѣ общіе дѣлители 2-го ряда В, будутъ дѣлителями 1-го А; такъ что каждый изъ сихъ двухъ рядовъ имѣетъ только общихъ дѣлителей другаго, и имѣетъ ихъ всѣхъ. Наибольшій изъ дѣлителей 312 и 132,

будетъ также наибольшимъ для 48 и 132, который и надлежитъ теперь отыскать.

Предложенное изысканіе сдѣлалось слѣдовательно гораздо проще, потому что $48 < 312$. Такимъ же образомъ докажется, что общій большій дѣлитель 48 и 132, будетъ тотъ же самый, какъ 48 и 36, остатка дѣленія 132 на 48, и тотъ же, что для 12 и 36, продолжая дѣлить дѣлителя на остатокъ, который ставятъ по правую сторону дѣлителя, дабы оный тотчасъ занялъ мѣсто приличное для слѣдующаго дѣленія; отъ чего вычисленіе примѣтъ видъ на сторонѣ приложенный.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} 312 & 132 & 48 & 36 & 12 \\ & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Получивъ дѣлителя 12, найдутъ, что дѣленіе исполнилось и $36 = 3 \times 12$; и такъ 12 есть общій наибольшій дѣлитель 36 и 12, а слѣд. также 48 и 36, 132 и 48, и наконецъ 312 и 132-хъ.

По сему, *чтобъ отыскать наибольшій общій дѣлитель двухъ чиселъ, должно дѣлить одно на другое, потомъ дѣлить на остатокъ и продолжать такимъ образомъ принимая дѣлитель за дѣлимое и остатокъ за дѣлителя, покуда найдется точный дѣлитель; который и будетъ искомымъ наибольшимъ общимъ дѣлителемъ.*

Вотъ еще два примѣра отыскиванія общаго наибольшаго дѣлителя; въ одномъ оный будетъ 47, для 2961 и 799, и 23 въ другомъ, для 115 и 69, (*см.* чл. 38, 3-е)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} 2961 & 799 & 564 & 235 & 94 & 47 \\ & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|} 115 & 69 & 46 & 23 \\ & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

29. Должно замѣтить, что 1-е. Вычисленіе производящее безпрерывно умаляющіеся остатки, необходимо доведетъ до точнаго дѣлителя, хотя бы оный былъ и единица; въ семъ случаѣ два предложенныя числа будутъ первоначальныя между собою, напр. для 50 и 21 общій большой дѣлитель есть 1. Къ сожалѣнію, нельзя узнать сей случай *à priori*, ибо по

совершенiи уже всего вычисленiя достигаютъ безполезнаго дѣлителя.

2-е. Такъ какъ наибольшiй дѣлитель двухъ чиселъ долженъ дѣлить всѣ послѣдовательные остатки, получаемые въ продолженiи вычисленiя, слѣд: ежели бы случилось, что одинъ изъ нихъ есть число первоначальное, и недѣлящее предъидущiй остатокъ, то нѣтъ сомнѣнiя, что вычисленiе кончится единицею, единственнымъ дѣлителемъ предложенныхъ чиселъ; на пр: для 824 и 319, достигнувъ первоначальнаго числа 53, недѣлящаго 133, безполезно продолжать дѣйствiе

$$824 \left\{ \frac{319}{2} \left\{ \frac{186}{1} \left\{ \frac{133}{1} \left\{ \frac{53}{2} \right. \right. \right. \right.$$ число первоначальное.

3-е. Чтобъ отыскать всѣхъ общихъ дѣлителей двухъ чиселъ, надлежитъ только составить всѣхъ дѣлителей общаго наибольшаго дѣлителя. И такъ для 512 и 132 оный есть $12 = 2^2 \times 3$, коего всѣ дѣлители суть 1, 2, 3, 4, 6 и 12, единственные общiе дѣлители 512 и 132. Въ самомъ дѣлѣ видно, что 1, 2, 3, 4, 6 и 12 дѣлители 12, суть производители предложенныхъ чиселъ, неимѣющихъ другихъ потому, что 512 и 132 дѣлятся только на производителей 12-ти (чл. 24, 4-е.)

4-е. Если въ продолженiи вычисленiя замѣтятъ, что какое-нибудь число дѣлитъ два остатка съ ряду, то опустивъ оное въ обоихъ остаткахъ продолжаютъ вычисленiе, и множатъ найденнаго общаго дѣлителя на опущеннаго производителя. Такимъ образомъ опустивъ производителя 10 въ 3720 и 3210, получимъ 372 и 321; послѣ перваго дѣленiя выйдетъ остатокъ 51, крайный 3-хъ, равно какъ и 321; отнявъ общiй производитель 3, останется 107 и 17, коихъ общiй дѣлитель есть 1; слѣд: для двухъ предложенныхъ чиселъ оный будетъ: $1 \times 10 \times 3$ или 30.

Но ежели найдутъ, что въ остаткѣ заключается первоначальный производитель, недѣлящiй предъиду-

щій осшапокъ, що его можно опустишь, неизмѣняя искомаго общаго дѣлишеля. Ошыскивая (стр. 41) наибольшаго общаго дѣлишеля 2961 и 799, достигнушъ осшашка 564, крашнаго 12; при шомъ дѣлишель 799 не дѣлишся ни на 3, ни на 2; по сему опустивъ производишель 12, число 564 замѣнишся 47, которое и будешъ искомымъ числомъ. Сіе слѣдуешъ изъ сказаннаго въ (чл. 28) о *разложеніи чиселъ на общіе первоначальные производители.*

30. Такъ какъ общій наибольшій дѣлишель двухъ чиселъ долженъ дѣлишь всѣ осшашки, произходящіе ошъ помянушаго вычисленія, що ошыщемъ послѣдовашельныя часшныя сихъ дѣленій. Возьмемъ для сего прежній примѣръ: 2961 и 799 и ошыщемъ, сколько разъ 47 содержишся въ ряду дѣлишелей. Очевидно, чшо оно содержимо 1 разъ въ 47, и 2 раза въ 94; по сему поспавляшъ 1 подъ 47 и 2 подъ 94. Но $235 = 2 \times 94 + 47$, ошкуда $\frac{235}{47} = 2 \times \frac{94}{47} + \frac{47}{47} = 2 \times 2 + 1$ или 5, чшо и подпишешъ подъ 235. Сію цыфру 5 получили умноживъ между собою два числа, написанныя подъ 94, и приложивъ къ произведенію 1, находящуюся съ-права въ послѣдней сшрокѣ. Такимъ же образомъ, чшобъ ошыскашь часшное ошъ 564 на 47; $564 = 2 \times 235 + 94$, що $\frac{564}{47} = 2 \times 5 + 2 = 12$, которое и спавяшъ подъ 564. Продолжая умножашь между собою двѣ цыфры написанныя подъ 564, и прикладывая къ произведенію цыфру споящую съ-права, получашъ $1 \times 12 + 5 = 17$, чшо и пишешъ подъ 799; наконецъ $5 \times 17 + 12 = 65$, спавяшъ подъ 2961. И шакъ 47 содержимо 63 раза въ 2961, 17 разъ въ 799, 12 разъ въ 564 и ш: д.

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2
63	17	12	5	2	1

Сіе вычисленіе, въ послѣдствіи весьма полезное, можетъ служишь къ сосшавленію двухъ чиселъ, когда даны, общій дѣлишель ихъ, число необходимыхъ дѣленій для полученія онаго, и часшныя. Написавъ послѣдовашельныя часшныя, сосшавляющія 2-ю сшроку, выведушъ изъ оной вышесказаннымъ вычисленіемъ 3-ю сшроку; наконецъ взявъ два наибольшія изъ произшедшихъ чиселъ, множашъ оныя на данная общаго производишеля.

Вошъ еще два примѣра; одинъ для 115 и 69, въ конхъ общій дѣлишель 23 содержишся 5 и 3 раза; другой для 3085 и 910, содержащихъ 617 и 182 раза общій дѣлишель 5.

$$115 \left\{ \begin{matrix} 69 \\ 1 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 46 \\ 1 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

5 3 2 1

$$3085 \left\{ \begin{matrix} 910 \\ 3 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 355 \\ 2 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 200 \\ 1 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 155 \\ 1 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 45 \\ 3 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 20 \\ 2 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right.$$

617 182 71 40 31 9 4 1

31. Чшобъ оныскашь общаго наибольшаго дѣлишеля чешырехъ чиселъ 150, 90, 40 и 200, должно сначала найши оный для 150 и 90, кошорый будешъ 30; слѣд: искомое число есшь уже одинъ изъ производишелей 30; пошомъ надлежишъ оныскашь наибольшаго общаго дѣлишеля для 30 и 40, кошорый есшь 10, наконецъ для 10 и 200, оный будешъ 10, кошорое и есшь искомое число. Слѣдовашельно общіе дѣлишели данныхъ чешырехъ чиселъ, сушь шолько 1, 2, 5 и 10. Можно упошребишь шоже дѣйсшвіе, сколько бы чиселъ ни было.

32. Дано нѣсколько чиселъ, какъ на пр: 2, 3, 4, 6, 8 и 12. *Отыщемъ наименьшее число дѣлимое на каждое изъ нихъ.* Такъ какъ 2, 3, 4 и 6 содержашся цѣлое число разъ въ 8 или въ 12, шо очевидно, чшо всякое число, дѣлимое на сіи два послѣднія, необходимо дѣлишся и на другія, а по сему безполезно обращашь на оныя вниманіе. Сосшавя число, заключающее всѣ производишели 8 и 12, можно бышь увѣрену, чшо оно дѣлимо на всѣ данныя числа; и ежели

оное сверхъ того содержитъ только производителей 8 и 12, то сіе число будетъ наименьшее дѣлимое на 2, 3, 4.... 12. И такъ очевидно, что $2^3 \times 3$ или 24 есть искомое число. По сему *чтобы получить наименьшее число, дѣлимое на данныя количества, должно, уничтоживъ числа дѣлящія другія на-цѣло, заняться только разложеніемъ сихъ послѣднихъ на ихъ первоначальные производители. Искомое число будетъ произведеніе всѣхъ сихъ производителей, изъ коихъ каждое возвышено въ самую высшую степень, которую они имѣли въ сихъ различныхъ выраженіяхъ.*

Такимъ же образомъ поступимъ для 2, 3, 5, 10, 15, 8, 24, 12 и 6. Какъ 2, 3, 6, 8 и 12 дѣлятъ 24 на цѣло, а 10 дѣлимо на 5, то разложатъ только 10, 15 и 24, или 2×5, 3×5 и $2^3 \times 3$; слѣд. наименьшее число дѣлимое на 2, 3, 5.... 12 и 6 есть $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

Условія дѣлимости чиселъ на 2, 3, 5, 7 ....

33. Число дѣлимое на 2 называется *четнымъ*, на пр: число $476 = 470 + 6 = 47 \times 10 + 6$; 1-я часть 47×10 дѣлима на 2: по сему чтобы предложенное число было крашное 2-хъ, 2-я часть должна также дѣлишься на 2. И такъ *всякое число оканчивающееся четною цыфрою, есть четное или дѣлимое на* 2.

Разложивъ число на двѣ части, такъ чтобы одна изъ оныхъ состояла изъ 2, 3, ... послѣднихъ цыфръ, увидишь, что дабы *оно дѣлилось на* 4, *надлежитъ двумъ послѣднимъ цыфрамъ составлять кратное* 4; *дабы оно дѣлилось на* 8, *должно тремъ послѣднимъ составлять кратное* 8 и проч.

Также: *кратнымъ* 5, *можетъ быть только число оканчивающееся* 0-мъ *или* 5-ю. Число въ щомъ только случаѣ дѣлится на 10, когда оно крашное 2 и 5, т: е: когда оканчивается нулемъ. Такимъ же образомъ найдутъ условія дѣлимости чиселъ на 25, 50 и проч.

34. Раздѣлимъ 10 на данное число, на пр: на 7, осшашокъ будешъ 3; осшашокъ ошъ 100 или 10^2 раздѣленнаго на 7, будешъ квадрашъ 3-хъ (*смот:* чл. 22); или $9 - 7 = 2$. Также осшашокъ ошъ 10^3 или $10^2 \times 10$ будешъ 2×3 или 6; осшашокъ ошъ 10^4 будешъ $6 \times 3 = 18$ или $18 - 14 = 4$ и проч. Такимъ образомъ получашъ послѣдовашельные осшашки 1, 3, 2, 6, 4, 5 ошъ дѣленія 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5; досшигнувъ же 10^6, осшашокъ будешъ $5 \times 3 = 15$, или $15 - 14 = 1$. Какъ скоро получашъ одинъ изъ предъидущихъ осшашковъ, шо изъ самаго вычисленія сихъ послѣдовашельныхъ выраженій слѣдуешъ, чшо оные будушъ выходишь въ *періодическомъ* порядкѣ, шакъ чшо продолжая до безконечносши дѣленіе послѣдовашельныхъ сшепеней 10-ши на 7, найдушъ всегда сіи осшашки въ шомъ же порядкѣ. Рядъ чиселъ (1, 3, 2, 6, 4, 5) безпресшанно возвращающійся, называешся *періодомъ*. Чшобъ узнашь осшашокъ ошъ 10^{29}, должно изъ 29 ошнашь чшо крашное 6; ибо періодъ сосшоишъ изъ 6 членовъ; чрезъ чшо и получашъ шошъ же самый осшашокъ, какъ и ошъ 10^5, ш: е: 5. Осшашокъ ошъ 10^{25}, будешъ шошъ же, чшо и ошъ 10^1 или 3.

Въ сущесшвованіи сего періода можно было увѣришься и прежде; ибо каждый изъ осшашковъ дѣленія на 7 будучи < 7, долженъ бышь непремѣнно однимъ изъ шесши слѣдующихъ осшашковъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, выходящихъ шолько въ иномъ порядкѣ. Такъ какъ дѣленіе неисполнимо въ шочносши, шо въ осшашкѣ не можешъ выйши нуль (чл. 24). Слѣдовашельно не болѣе, какъ послѣ шесши дѣленій, должно получишь одинъ изъ предъидущихъ осшашковъ; ошъ чего въ слѣдующіе самаго дѣйсшвія періодъ долженъ возобновишься. И шакъ, вообще какой бы ни былъ дѣлишель неопредѣленнаго ряда 1, 10, 10^2, 10^3 ..... *послѣдовательные осшашки необходимо составятъ періодъ, число цыфрокоего всегда единицею менье дѣлителя. Ежели дѣли-*

тель число первоначальное, то періодъ начинается съ перваго остатка. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ за дѣлителя 7, и пусть будутъ 10^{18} и 10^{12}, два дѣлимыя производящія одинакой осшашокъ, ихъ разносшь $10^{18} - 10^{12} = 10^{12} \times (10^6 - 1)$, есшь (стр. 28) кратное 7, ш: е: $10^6 - 1$ дѣлимо на 7, ибо 10^{12} не дѣлится на оное чл. 24, 1-е); по сему 10^6 раздѣленное на 7 даешъ въ осшашкѣ 1, составляющую часшь періода съ оной начинающагося.

1-е. Примемъ 9 за дѣлителя, осшашокъ $\frac{10}{9}$ есшь 1, и періодъ будешъ состоять изъ одной цыфры 1; ш: е: *что всякая степень* 10-*ти, раздѣленная на* 9, *даетъ въ остаткѣ* 1. Изъ сего можно заключить (22 что 20, 200...., раздѣленныя на 9, дадутъ 2 въ осшашкѣ; 30, 300, 3000... дадутъ 3; 40, 400... дадутъ 4 и проч. Но всякое число, какъ 8753 можешъ быть разложено на единицы, десяшки...., или на $8000 + 700 + 50 + 3$, що раздѣливъ на 9, осшашки будутъ $8 + 7 + 5 + 5 = 25$; и шакъ *остатокъ отъ дѣленія какого-нибудь числа на* 9, *равенъ остатку происходящему отъ дѣленія суммы его цыфръ, принятыхъ за простыя единицы.* Посему легко опыскашь осшашокъ ошъ дѣленія какого-нибудь числа на 9; на пр: для 8753 осшашокъ будешъ шошъ же, что и ошъ 23 или $2 + 3 = 5$. Изъ сего слѣдуешъ, что *ежели сумма цыфръ будетъ кратная* 9-*ти, то и самое число дѣлимо на* 9.

Когда два числа изображены одинакими цыфрами, но шолько въ различномъ порядкѣ, шогда осшашки ошъ дѣленія на 9 будутъ равны; и слѣд: разносшь оныхъ (чл. 16) будешъ кратнымъ 9-ти. И шакъ, $74029 - 9742 = 64287 = 9 \times 7143$. Прибавя къ одному изъ оныхъ чисель нуль, разносшь опять будешъ кратная 9.

2-е. Очевидно, что сіи свойсшва принадлежашъ шакже числу 3.

3-е. Ежели число, какъ 13 527 542, имѣетъ дѣлителемъ 7, то разложивъ оное на $2 + 40 + 500 + 7000 + \ldots$ остатки сихъ чиселъ, раздѣленныхъ на 7, будутъ равны цыфрамъ періода, взятымъ 2, 4, 5, 7 ... разъ; подписавъ соотвѣтственно цыфры періода подъ послѣдовательными цыфрами предложеннаго количества, т: е: написавъ въ обратномъ порядкѣ цыфры 1, 3, 2, 6, 4, 5, какъ то здѣсь видно на сторонѣ, умножать потомъ каждую изъ оныхъ на соотвѣтствующую верхнюю цыфру. Сумма 105 сихъ произведеній, и предложенное число, раздѣленныя на 7, даютъ тотъ же остатокъ; и какъ оный отъ 105 есть 0, слѣд: оба числа суть кратныя 7-ми.

13 527 542
31 546 231

$1 \times 2 = 2$
$3 \times 4 = 12$
$2 \times 5 = 10$
$6 \times 7 = 42$
и проч.
Сумма = 105.

Замѣтимъ, что настоящія частныя можно замѣнять другими, единицею большими. Можно выражать 10^x чрезъ $7 \times 1428 + 4$ или чрезъ $7 \times 1429 - 3$. И такъ въ числахъ 1, 3, 2, 6, 4, 5, составляющихъ періодъ, можно замѣнять три послѣднія цыфры дополненіями оныхъ до 7, или 1, 3 и 2, которыя будутъ вычитаемыми остатками изъ кратныхъ 7, т: е: *отрицательными* остатками (ч. 4). Отъ чего въ періодѣ останется только три знака 1, 3, 2, а произведенія будутъ, что складываться, то вычитаться. Посему надлежитъ раздѣлить число съ-правой руки на трезначныя грани, и произведенія, произшедшія отъ четныхъ граней, вычитать изъ другихъ. Вычисленіе располагается по вышепредложенному примѣру, въ которомъ черта поставлена подъ множителями, составляющими отрицательныя произведенія. Здѣсь остатокъ отъ дѣленія 13 527 542 на 7, тотъ же, что отъ $30 - 23 = 7$ или нуль.

13 527 542
31 231 231

$1 \times 2 = 2$	
$3 \times 4 = 12$	
$2 \times 5 = 10$	$1 \times 7 = 7$
$1 \times 3 = 3$	$3 \times 2 = 6$
$3 \times 1 = 3$	$2 \times 5 = 10$
30	-23

4-е. Такимъ же образомъ найдя, что при дѣлителѣ 11, періодъ будетъ 1, 10, можно 10 замѣнишь 11 — 10 или 1, и произведеніе должно быть вычтено. И такъ, *если въ предложенномъ числѣ, изъ суммы всѣхъ цыфръ нечетныхъ мѣстъ вычтутъ сумму цыфръ четныхъ мѣстъ, то остатокъ будетъ тотъ же, что и отъ раздѣленія сего числа на* 11. Для 752 951, получашъ $1+9+5=15$, $3+2+7=12$, $15-12$ или 1 будетъ осшашокъ ошъ дѣленія 752 951 на 11. Также для 429180, получашъ $0+1+2-3$; $8+9+4=21$, и шакъ какъ изъ 3 не возможно вычесшь 21, шо должно къ 3 приложишь досшаточное число разъ крашное 11, какъ на прим: 22, и шогда $22+3-21=4$, будетъ искомый осшашокъ; 63613 есшь крашное 11: ибо $3+6+6-1-3=15-4=11$.

5-е. Руководсшвуясь шѣмъ же правиломъ, найдемъ что дѣлишель 37 производишъ періодъ 1, 10 и 26, сосшавленный изъ трехъ шолько чиселъ (*); и шакъ какъ 26 можешъ бышь замѣнено — 11, служащими ему дополненіемъ къ 37; шо періодъ будешъ (1, 10 и — 11). По сему дабы узнашь, будешъ ли 17 538 224 крашнымъ 37, складываюшъ цыфры чрезъ каждыя 3 мѣста, какъ-шо: $4+8+7=19$, $2+3+1=6$, $2+5=7$. Сіи послѣдовашельныя суммы умножаюшъ на 1, 10 и — 11; ошъ чего при дѣленіи предложеннаго числа на 37 получашъ въ осшашкѣ $19+60-77$ или 2. Можно шакже ошнять сошни изъ единицъ и десяшковъ, умноживъ сіи послѣдніе на 10, и сложивъ

$$19-7=12,\quad 6-7=-1,\quad 12-10=2.$$

(*) Когда число членовъ періода, при первоначальномъ дѣлишелѣ, не въ точносши равно сему дѣлишелю безъ единицы, шогда сіе посшѣднее есшь крашное числа членовъ. По сему при 13-ши, періодъ сосшоишъ не изъ 12-ши членовъ, но шолько изъ 6-ши, а 6 дѣлишъ 12. Также при дѣлишелѣ 11, періодъ имѣешъ шолько 2 члена, а 2 есшь производишель $11-1$ или 10; наконецъ при 37-ми, періодъ сосшоишъ изъ 3-хъ шолько чиселъ, а 36 допускаешъ производишелемъ 3. — См. *les Recherches arithm.* de Gauss, n°. 312.

6-е. Ежели раздѣлишь нечетное число на 6, то осшапокъ можешь быть шолько 1, 3 или 5, или 1, 3 и —1, поспавя —1 вмѣсто 5. И шакъ, когда число не дѣлишся на 3, то въ осшапкѣ можешь быть шолько 1 или —1. Изъ сего видно, что ежели число не дѣлишся ни на 2, ни на 3, то осшапокъ ошъ дѣленія онаго на 6 можешъ быть шолько единица положишельная или оприцашельная. (*)

Повѣрки четырехъ правилъ.

35. Поелику при вычисленіи можно ошибишься, то полезно убѣждашься въ шочносши онаго какимъ-нибудь дѣйсшвіемъ, которое бы служило *повѣркою*. Для досшиженія предполагаемой цѣли, надлежишъ повѣркѣ быть легче самаго дѣйсшвія; иначе она будешъ подвержена бо́льшей погрѣшносши. И шакъ, хошя можно повѣрить умноженіе, раздѣливъ произведеніе на одного изъ производишелей, и разсмашривая по шомъ, будешъ ли другой производишель равенъ часшному: однако же легко замѣшишь, что сіе запрудняшельное дѣйсшвіе не можешъ показашь, гдѣ сдѣлали погрѣшносшь, въ умноженіи, или въ дѣленіи.

1-е. По сей причинѣ сложеніе должно повѣрять шолько посредсшвомъ самаго сложенія. Если сіе дѣйсшвіе совершалось съ верху въ низъ, то надлежишъ пересчишашь съ низу въ верхъ, или разбишь сложеніе на нѣсколько другихъ, или приложишь къ даннымъ числамъ какія-нибудь колличесша, которыя по шомъ опнимушъ.

(*) Всѣ первоначальныя числа (выключая 2 и 3) заключаются въ Алгебраической формулѣ $6n \mp 1$, гдѣ n есшь какое-нибудь цѣлое число. Однако же нельзя заключишь обрашно, что всякое число сего вида есшь первоначальное. Еще не нашли шакой формулы, которая бы выражала всѣ первоначальныя числа, и содержала бы шолько оныя.

Можно также повѣрить сіе дѣйствіе начиная со столбца высшаго порядка. И такъ въ предложенномъ примѣрѣ, начавъ со столбца тысячъ, найдемъ въ суммѣ 6; но какъ прежде получили 7, то 7—6 или 1 поставляемая подъ 7, показываетъ, что 1 прибавлена къ сему столбцу, и слѣд: столбецъ сотенъ даетъ не 3, но 13. Сей же столбецъ даетъ только 11, слѣд: 13 — 11 = 2 изображаетъ удержанное отъ десятковъ, составлявшихъ 25 и проч. Въ столбцѣ единицъ разность должна быть нуль.

	2 758
	3 099
	469
	1 029
	7 355
	1 230

2-е. Вычитаніе повѣряютъ сложеніемъ остатка съ вычитаемымъ; въ суммѣ должно получить бо́льшее изъ данныхъ двухъ чиселъ.

3-е. Для повѣрки умноженія, множителя можно перемѣнить на множимое (чл. 11); также можно множить или дѣлить производителей на какія-нибудь произвольныя числа; отъ чего произведеніе, въ слѣдствіе сказаннаго въ чл. 15, измѣнится опредѣленнымъ образомъ, и легко повѣрить, исполнено ли сіе условіе.

4-е. Если умножать частное на дѣлителя, и приложить остатокъ, то въ суммѣ должно получить дѣлимое (чл. 16). Такимъ образомъ легко повѣрить всякое дѣленіе. Повѣрку дѣленія можно также сдѣлать, умноживъ или раздѣливъ дѣлимое и дѣлителя на какое-нибудь число; отъ чего частное не измѣнится (чл. 15, 1-е).

5-е. Можно также повѣрить дѣленіе и умноженіе, раздѣливъ на какое-нибудь число обоихъ производителей и произведеніе; потомъ разсмотрѣвъ, согласны ли, произведеніе остатковъ отъ обоихъ производителей, и остатокъ отъ произведенія съ предложеніемъ (чл. 22); и какъ при дѣлителяхъ 9 и 11 остатки легко отыскиваются (чл. 34, 1-е и 4-е), то оные для сего дѣйствія и употребляются предпочтительнѣе

прочихъ. Возьмемъ сему примѣръ. На стр. 2) найдено, что 53 687 × 908 = 48 747 796. Для повѣрки сего дѣйствія, сложимъ въ каждомъ изъ сихъ трехъ числъ всѣ цыфры, вычитая 9 каждый разъ, когда сумма цыфръ будетъ равняться или превосходить сіе число; получимъ остатки 2, 8, и 7; но 2 × 8 = 16, и 7 есть остатокъ отъ $\frac{16}{9}$, ибо 6 + 1 = 7; слѣд. дѣйствіе вѣрно, если нѣтъ погрѣшностей взаимно уничтожающихся или перемѣщенныхъ цыфръ и проч.

Если возьмутъ дѣлителемъ 11, то должно въ тѣхъ трехъ числахъ вычесть изъ цыфръ нечетнаго порядка цыфры четнаго порядка (чл. 34, 4-е; отъ чего получимъ 18 — 11 = 7, 17 — 0 = 17, или 6; 25 — 27 — — 2, или 9-ти дополненію 2-хъ до 11. Если умноженіе вѣрно, то надлежитъ, чтобы 7 × 6, или 42 раздѣленное на 11, дало остатокъ 9; что и въ самомъ дѣлѣ находимъ.

Раздѣливъ 700 200 031 на 683 679, частное будетъ 1024, а остатокъ 112 735 (стран. 32); сложимъ цыфры составляющія сіи числа, дабы получить остатки происходящіе отъ дѣленія оныхъ на 9; сіи остатки будутъ 4 для дѣлимаго, 3 для дѣлителя, 7 для частнаго, и 1 для остатка; произведеніе 7 × 3, или 21 сложенное съ 1, даетъ 22 или 4: и такъ 4 должно быть остаткомъ отъ дѣленія дѣлимаго на 9, что такъ и есть. Вычисленіе располагается слѣдующимъ образомъ:

множимое 2	16 или 7	*дѣлимое* 4	*дѣлитель* 3	21 + 1
множитель 8		остатокъ 1	частное 7	или 4
произведеніе 7				

II. О ДРОБНЫХЪ ЧИСЛАХЪ.

Свойство и преобразованіе дробей.

36. Мѣряя какую-нибудь величину, значитъ находимъ ея отношеніе къ другой извѣстной, одного съ нею рода, и принимаемой за *единицу*. Если единица содержится въ мѣримой величинѣ цѣлое число разъ, тогда оно принимается за *мѣру;* въ противномъ случаѣ можно взять другую единицу, удовлетворяющую сему условію, ибо она произвольна и независима отъ мѣримой величины, такъ что можно всякую величину изобразить посредствомъ различныхъ чиселъ, смотря по избранной единицѣ.

Дабы избѣгнуть предваритѣльнаго разсмотрѣнія нѣсколькихъ величинъ или единицъ одного рода, дѣлятъ первоначальную единицу на столько равныхъ частей, чтобы одна изъ нихъ содержалась цѣлое число разъ въ мѣримой величинѣ; и сія часть дѣленія принимается за новую единицу. Мѣру въ такомъ случаѣ называютъ дробью, и слѣд: *Дробь есть одна или нѣсколько равныхъ частей единицы.* Когда говорятъ, что какая-нибудь величина есть пять седьмыхъ единицы, то подъ симъ подразумѣвается, что она состоитъ изъ пяти частей единицы, раздѣленной на семь равныхъ частей.

Изъ сего слѣдуетъ, что всякая дробь должна быть выражена двумя числами: одно изъ нихъ означаетъ, на сколько частей раздѣлена единица, и называется *знаменатель;* а другое показываетъ, сколько взято такихъ частей, и именуется *числитель;* въ пяти седьмыхъ, 5 есть числитель, а 7 знаменатель. Чтобъ изобразить дробь, пишутъ знаменателя подъ числителемъ, и раздѣляютъ ихъ чертою $\frac{5}{7}$. Дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, выговариваютъ: половина, треть, четверть. Для всѣхъ

же прочихъ выговариваются обѣ цыфры, прибавляя къ знаменателю окончательную частицу *ыхъ*; $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$, читаютъ: 5 восьмыхъ, 7 одинадцатыхъ.

37. Чтобъ умножить $\frac{5}{7}$ на 7, надо сложить 7 разъ $\frac{5}{7}$; но какъ седьмая доля взятая 7 разъ даетъ единицу, то $\frac{5}{7}$ произведутъ 5 единицъ, или $\frac{5}{7} \times 7 = 5$; и такъ *всякая дробь, умноженная на свой знаменатель, даетъ числитель.*

Го сему, въ слѣдствіе опредѣленія (чл. 5), $\frac{5}{7}$ есть частное отъ 5 раздѣленнаго на 7, т: е: *всякая дробь есть частное дѣленія числителя на знаменатель*, и по сей причинѣ дробь и дѣленіе изображаютъ одинакимъ образомъ. Слѣд. частное отъ 47 раздѣленнаго на 7 есть $6 + \frac{5}{7}$, ибо умноживъ сіе на 7, получимъ $42 + 5$ или 47. По сему *если при какомъ-нибудь дѣленіи, къ цѣлымъ числамъ частнаго, прибавятъ дробь имѣющую числителемъ остатокъ, а знаменателемъ дѣлитель, то получится полное частное:* $\frac{71}{8369}\frac{512}{}\frac{186}{}$ даетъ въ частномъ 8640 и въ осташкѣ 3986; слѣд. полное частное будетъ $8640 + \frac{3986}{8369}$.

И такъ, 1-е. Если числитель равенъ знаменателю, то дробь представляетъ 1, что впрочемъ само по себѣ очевидно: $\frac{11}{11} = \frac{12}{12} = 1$.

2-е. Если числитель болѣе знаменателя, то дробь болѣе единицы и называется *неправильною дробью* или *дробнымъ числомъ*; ибо подъ словомъ *дробь* обыкновенно подразумѣваютъ число < 1. *Цѣлое же число изключается изъ дроби дѣленіемъ числителя на знаменатель:* $\frac{37}{5}$, или 37 раздѣленное на $5 = 7 + \frac{2}{5}$. И въ самомъ дѣлѣ очевидно, что такъ какъ единица раздѣлена на 5 частей, то въ дроби заключится столько единицъ, сколько разъ берется по 5 частей, или сколько разъ 5 содержится въ 37.

Обратно, *чтобъ превратить цѣлыя числа въ дроби, должно ихъ множить на знаменателя;* на пр: чтобы

превращишь 7 въ пятыя доли, множашь 7 на 5 и получашь $7 = \frac{35}{5}$, такжe $8 + \frac{5}{7} = \frac{56}{7} + \frac{5}{7} = \frac{59}{7}$.

3-е. Раздѣлишь число на 7, 9, 11...., значишь брашь 7-ю, 9-ю, 11-ю.... долю онаго.

4-е. Взяшь $\frac{5}{7}$ какого-нибудь числа, значишь раздѣлишь его на 7 равныхъ частей, и взяшь таковыхъ пять. По сему должно раздѣлишь сіе число на 7, и умножишь частное на 5. Изъ сихъ двухъ дѣйствій начинаюшь съ того или съ другаго по произволенію (чл. 15, 4-е.) И такъ, $\frac{5}{7}$ отъ 84, значишь взять 5 разъ $\frac{84}{7} = \frac{5 \times 84}{7} = 60$; $\frac{3}{11}$ отъ 40 значишь $\frac{3 \times 40}{11} = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}$.

58. Съ увеличиваніемъ одного числителя, дробь возрастаешь, ибо заключаешь большее число шѣхъ же частей единицы. Если же увеличится одинъ знаменатель, то дробь уменьшится; ибо единица раздѣлена на большее число частей, слѣд: части менѣе, а число оныхъ остается тоже. И такъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, по первому взгляду можно судишь, которая изъ двухъ дробей болѣе: $\frac{5}{7} > \frac{4}{7}$, $\frac{5}{4} > \frac{5}{5}$, $\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$.

Легко предусмотрѣшь, что увеличивая одинаково оба члена дроби, величина оной не измѣнится; ибо удвоивъ знаменателя 7 дроби $\frac{5}{7}$, каждая часть ея раздѣлится по полам, по тому что единица вмѣсто 7 будешь содержашь 14 частей. Слѣд: для полученія той же величины должно взять двѣ части вмѣсто одной, 4 вмѣсто 2...., наконецъ 10 вмѣсто 5; и $\frac{10}{14}$ будешь $= \frac{5}{7}$. Утроивъ 7 и 5, получимъ такжe $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ и проч. По сему *величина дроби не измѣнится, если умножать, а слѣд. если и раздѣлять оба ея члена на то же число:* $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{300}{400}$; $\frac{90}{120} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Изъ сего заключимъ, что 1-е. Для приведенія дробей $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{5}$ къ одному знаменателю должно умножить оба члена 5 и 7 первой на 4, и оба же члена 3 и 4

второй на 7, отъ чего получимъ $\frac{5\times4}{7\times4}$ и $\frac{3\times7}{4\times7}$ или $\frac{20}{28}$ и $\frac{21}{28}$; очевидно, что сіе дѣйствіе, неизмѣняющее величины дробей, производитъ одинакіе знаменатели $4\times7=7\times4$. Итакъ *двѣ дроби приведутся къ общему знаменателю, если умножать оба члена каждой на знаменателя другой дроби.* По сему легко отличить, которая изъ двухъ данныхъ дробей болѣе: на пр: $\frac{21}{28}>\frac{20}{28}$ соотвѣтствуетъ $\frac{3}{4}>\frac{5}{7}$.

Подобнымъ же разсужденіемъ докажется, что *ежели дано болѣе двухъ дробей, то умноживъ оба члена каждой дроби на произведеніе знаменателей прочихъ, онѣ приведутся къ общему знаменателю*, состоящему изъ произведенія всѣхъ сихъ знаменателей Пусть будутъ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{4}$; умножимъ оба члена $\frac{2}{3}$ на $4\times7=28$; оба члена $\frac{5}{7}$ на $3\times4=12$, и наконецъ $\frac{3}{4}$ на $3\times7=21$, получимъ $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$ и $\frac{63}{84}$; слѣд: $\frac{3}{4}>\frac{5}{7}>\frac{2}{3}$.

Столь же удобно совершается приведеніе дробей къ одному числителю, и оно также можетъ служить къ распознанію наибольшей изъ многихъ дробей.

2-е. Всякая дробь легко превращается въ другую, имѣющую знаменателемъ данное число, кратное знаменателя предложенной дроби. И такъ $\frac{7}{12}$ можетъ имѣть знаменателемъ 60, ибо $60=5\times12$ и умноживъ оба члена дроби на 5, получатъ $\frac{7}{12}=\frac{35}{60}$.

По сему можно приводить дроби къ одному знаменателю сокращеннымъ образомъ, когда знаменатели оныхъ не суть первоначальные между собою. На пр: для $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ съ перваго взгляда видно, что умноживъ на 2 оба члена $\frac{1}{2}$, получатъ дробь $\frac{2}{4}$, имѣющую одного знаменателя съ $\frac{3}{4}$. Подобно $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$ превращаются въ $\frac{4}{6}$ и $\frac{5}{6}$. Для $\frac{7}{12}$ и $\frac{2}{3}$ умножатъ 7 и 12 на 2, по тому 5 и 8 на 3, и получатъ $\frac{14}{24}$ и $\frac{16}{24}$. Вообще найдя (чл. 32) *наименьшее число, дѣлимое на всѣ предложенные знаменатели, можно оное принять за общій знамена-*

тель. На пр. пусть будешь . . . . . $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{12}$
Найдя, что 24 есть наименьшее число дѣлимое на 2, 3, 4, 6, 8 и 12, раздѣлимъ 24 на сіи различныя числа и получимъ частныя 12 8 6 4 3 2
Умноживъ оба члена каждой дроби на соотвѣтствующія имъ частныя, получатъ . . . . . $\frac{12}{24}$ $\frac{16}{24}$ $\frac{18}{24}$ $\frac{4}{24}$ $\frac{9}{24}$ $\frac{10}{24}$

Такимъ образомъ приведеніе дробей къ одному знаменателю получитъ простѣйшій видъ.

3-е. По сему всякую дробь, содержащую въ обоихъ членахъ одинакой множитель, можно опустивъ его выразить *въ простѣйшемъ видѣ*, не измѣняя величины оной. Если дробь превратить въ такую, которой оба члена не имѣютъ болѣе общаго дѣлителя, то оную невозможно уже выразить въ простѣйшемъ видѣ; ибо еслибъ предположили, что $\frac{7}{11}$ можетъ быть представлена проще, напр: чрезъ $\frac{5}{4}$, тогда, какъ 7 и 11 первоначальные между собою, то приведя сіи дроби къ одному знаменателю, получили бы $\frac{7\times4}{44} = \frac{5\times11}{44}$ или $7\times4=5\times11$; что невозможно см. чл. 21, 5-е, ибо 5×11 должно-бы-тоже-то быть дѣлиться на 7. Итакъ, *чтобъ привести данную дробь превратить оную въ самую простѣйшую и несокращаемую, надлежитъ уничтожить всѣхъ произвѣдителей, общихъ обоимъ ея членамъ.*

Для сего разлагаютъ сіи числа на ихъ первоначальные производители, и оставляютъ только тѣ изъ нихъ, которые не суть общіе обоимъ ея членамъ. Для удобности же *находятъ общій наибольшій дѣлитель обоихъ членовъ* (чл. 28) *и дѣлятъ оные на сего дѣлителя.* По сему для $\frac{799}{2961}$, найдутъ, что 47 есть общій наибольшій дѣлитель 799 и 2961; раздѣливъ сіи числа на 47, получимъ $\frac{17}{63}$ для самаго простѣйшаго выраженія $\frac{799}{2961}$. Мы изложили также лег-

кій способъ получашь (чл. 50, искомые члены, изъ ряда частныхъ ведущихъ къ общему дѣлишелю. Вопъ вычисленіе для двухъ дробей $\frac{891}{3429}$ и $\frac{642}{1063}$, обращающихся въ $\frac{33}{127}$ и $\frac{11}{18}$, ибо ихъ общіе наибольшіе дѣлишели сушь 27 и 59.

3429	$\frac{891}{3}$	$\frac{756}{1}$	$\frac{135}{5}$	$\frac{81}{1}$	$\frac{54}{1}$	$\frac{27}{2}$		1063	$\frac{649}{1}$	$\frac{413}{1}$	$\frac{236}{1}$	$\frac{177}{1}$	$\frac{59}{3}$
127	33	28	5	3	2	1		18	11	7	4	3	1

Такъ какъ всякую дробь можно предсшавишь въ безчисленныхъ видахъ, и неизмѣняя величины оной изобразишь посредсшвомъ чиселъ совершенно различныхъ, шо гораздо удобнѣе судишь объ ея величинѣ, когда она предсшавлена въ просшѣйшемъ видѣ (см. чл. 33).

4-е. Прибавимъ 4 къ знаменашелю дроби $\frac{2}{3}$, и опыщемъ, чшо должно прибавишь къ числишелю, дабы величина оной не измѣнилась; ш: е: сколько должно взяшь 7-хъ долей, чшобы сосшавишь $\frac{2}{3}$ единицы. Для сего приведемъ къ одному знаменашелю $\frac{2}{3}$ и сошвѣшсшвующую ей дробь, имѣющую знаменашелемъ 7. Числишель одной обрашишся въ 14, а другой упроишся; шакъ какъ они должны бышь равны, шо числишель 14 долженъ бышь равенъ упроенному искомому числишелю, коюрый по сему равняешся $\frac{14}{3}$ или $4+\frac{2}{3}$; и шакъ $\frac{2}{3}=\frac{4+\frac{2}{3}}{7}$; слѣдсшвенно, чшобы величина дроби $\frac{2}{3}$ не измѣнилась ошъ превращенія знаменашеля 3 въ 7, надлежишъ прибавишь къ данному числишелю $2+\frac{2}{3}$. Изъ сего легко заключишь, чшо *не возможно дроби дати знаменателемъ данное число, которое не есть кратное знаменателя сей дроби*, не прибавляя дробь къ числишелю.

5-е. *Если двѣ дроби равны, то третья, составленная изъ суммы или разности ихъ числителей и знаменателей, равна каждой изъ оныхъ.* Пусшь $\frac{14}{22}=\frac{36}{56}$; сіи дроби имѣюшъ производишеля общаго обоимъ чле-

нашъ 5-е, и соотвѣтствующія $\frac{7}{11}$; числители оныхъ суть крашныя 7-ми, а знаменатели таковые же крашныя 11-ти; но очевидно, что $35+14$ есть также крашное 7, и $55+22$ таковое же крашное 11, слѣд. $\frac{49}{77}=\frac{7}{11}$.

Вычитаніе почленно, повторяемое болѣе и болѣе, сокращаетъ сложную дробь, которая не измѣняя своей величины, обращится наконецъ въ самую простѣйшую, если вычитаемая дробь есть несокращаемая. И въ самомъ дѣлѣ, доколѣ члены 1-й болѣе членовъ 2-й, то вычитаніе еще возможно, и еслибъ наконецъ нельзя было болѣе вычитать, и произшедшая окончательная дробь была бы различна со второю, то она могла бы имѣть дробь ей равную, выраженную меньшими числами; что противно положенію. Слѣд. *если изъ двухъ равныхъ дробей, одна несокращаема, то члены другой суть кратные членовъ первой.*

Величина дроби не измѣнится отъ умноженія или дѣленія членовъ оной на одно и то же число, но всякое другое дѣйствіе необходимо измѣнитъ оную; напримѣръ: если приложимъ къ обоимъ членамъ, или вычтемъ изъ оныхъ какое-нибудь число, величина дроби перемѣнится; ибо взявъ $\frac{5}{7}$ и прибавя 3 къ числителю и къ знаменателю, получимъ $\frac{8}{10}$; но еслибы $\frac{5}{7}$ равнялось $\frac{8}{10}$; то вычтя почленно, получили бы $\frac{5}{7}-\frac{3}{3}=1$, что ложно (*).

---

*) Найдемъ числа x и y, которыя можно придать къ обоимъ членамъ дроби $\frac{a}{b}$, или вычесть изъ оныхъ неизмѣнивъ ея величины, или $\frac{a}{b}=\frac{a\pm x}{b\pm y}$. Приведя къ одному знаменателю, получимъ $ay=bx$, и раздѣливъ на by, $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$. По сему *числа, которыя можно придать къ обоимъ членамъ дроби или вычесть изъ оныхъ, не перемѣняя ея величины, должны составлять дробь, равную данной.* Изъ сего извлекаютъ вышедоказанныя предложенія, и сверхъ того x не можетъ быть $=y$, доколѣ a не $=b$; т. е нельзя приложить къ обоимъ членамъ или вычесть изъ оныхъ одно число, доколѣ дробь не равна 1.

Сложеніе, Вычитаніе, Умноженіе и Дѣленіе.

39. Ничего нѣтъ легче сложенія и вычитанія дробей, имѣющихъ одинаковаго знаменателя; для сего складываютъ или вычитаютъ числителей, оставляя того же знаменателя.

$\frac{7}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9}{12}$ или $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}$ или $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}-\frac{7}{12}$.

Если данныя дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то ихъ должно привесть къ одному знаменателю (чл. 38, 1-е и 2-е). И такъ $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$ или $\frac{21}{28}+\frac{20}{28}=\frac{41}{28}$ или $1+\frac{13}{28}$; $\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{3}{4}$ соотвѣтствующія $\frac{56}{84}+\frac{60}{84}+\frac{63}{84}$ или $\frac{179}{84}=2+\frac{11}{84}$. Для $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{5}+\frac{7}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}$ простѣйшій знаменатель (чл. 32 будетъ 120, числители же обращаются въ $60+80+72+84+56+100-45-50-50$ или въ 527: слѣд: искомое окончательное выраженіе есть $\frac{527}{120}$ или $2+\frac{22}{120}$.

Если при дробяхъ находятся цѣлыя, то должно дѣйствовать съ нѣми и съ другими отдѣльно. Для сложенія $3+\frac{1}{2}$ съ $4+\frac{3}{4}$ складываютъ $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ или $1+\frac{1}{4}$; пишутъ $\frac{1}{4}$ и удерживаютъ 1, которую складываютъ съ 3 и 4; по чему искомая сумма будетъ $8+\frac{1}{4}$. Подобнымъ же образомъ, чтобъ сложить $11+\frac{3}{4}$, $4+\frac{2}{3}$, $2+\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ и $3+\frac{1}{2}$, возмутъ $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{1}{2}=\frac{40}{12}$ или $3+\frac{1}{3}$; напишутъ $\frac{1}{3}$ и складываютъ $3+11+4+2+3=23$; и такъ искомая сумма есть $23+\frac{1}{3}$.

$3\frac{1}{2}$	$11\frac{3}{4}$.... 9
$4\frac{2}{3}$	$4\frac{2}{3}$.... 8
$2\frac{5}{6}$	$2\frac{5}{6}$.... 10
$3\frac{1}{2}$	$0\frac{7}{12}$... 7
	$3\frac{1}{2}$.... 6
	$2\frac{1}{3}$.... 40

Для вычитанія $1+\frac{1}{4}$ изъ $3+\frac{1}{2}$, вычитаютъ $\frac{1}{4}$ изъ $\frac{1}{2}$ и 1 изъ 3; останется будетъ $2+\frac{1}{4}$. Чтобъ изъ $13+\frac{1}{2}$ вычесть $7+\frac{3}{4}$; но какъ нельзя отнять $\frac{3}{4}$ изъ $\frac{1}{2}$, прикладываютъ 1 къ $\frac{1}{2}$ и ищутъ, чему равняется $\frac{3}{4}-\frac{3}{4}$: разность будетъ $\frac{3}{4}$; потомъ прикладываютъ подобнымъ образомъ 1 къ вычитаемому 7 (стр. 12), и говорятъ $13-8=5$; и такъ $5+\frac{3}{4}$ есть искомая разность.

$3\frac{1}{2}$.... 2	$13\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{4}$.... 1	$7\frac{3}{4}$
$2\frac{1}{4}$.... 1	$5\frac{3}{4}$

40. Помножить $\frac{2}{5}$ на 3, значитъ сложить 3 раза $\frac{2}{5}$ или $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$; что обращается въ повтореніе числителя 2 тремъ разъ; $\frac{2}{5}\times 3=\frac{6}{5}$. *Чтобы умножить дробь на цѣлое, должно умножить ея числителя на оное;* можно также *раздѣлить знаменателя*, если оный есть кратное цѣлаго; ибо $\frac{4}{4}\times 2$ дастъ $\frac{4\times 2}{4}=\frac{8}{4}=2$; или опустивъ общаго производителя 2 обоихъ членовъ, дѣйствіе превращается въ дѣленіе знаменателя дроби $\frac{3}{4}$ на 2.

Также найдется, что $\frac{11}{18}\times 36=\frac{11}{1}\times 2=22$, $\frac{12}{21}\times 12=\frac{12}{7}$.

Обратно, *чтобы раздѣлить дробь на цѣлое, должно умножить знаменателя или раздѣлить числителя на оное.* Ибо, если числитель есть кратное дѣлителя, какъ въ $\frac{15}{11}:5$, то частное очевидно будетъ $\frac{3}{11}$, потому что умноживъ $\frac{3}{11}$ на дѣлителя 5, получишь дѣлимое. Но если числитель не есть кратное дѣлителя, какъ на пр: $\frac{6}{7}:5$, то можно легко сдѣлать его кратнымъ 5-ти, умноживъ оба члена на 5, отъ чего получишь $\frac{6\times 5}{7\times 5}$; но сему дѣленіе на 5 доставляетъ $\frac{6}{35}$, выраженіе соотвѣтствующее умноженію знаменателя 7 на 5.

41. Приступимъ наконецъ къ тому случаю, когда множитель и дѣлитель будутъ дроби; возьмемъ на примѣръ $3\times\frac{2}{5}$. Здѣсь нельзя поступать по опредѣленію слова множить (чл. 3.; ибо выраженіе *сложить 3 столько разъ, сколько въ $\frac{2}{5}$ содержится единицъ*, не имѣло бы никакого смысла. По сему принятое опредѣленіе слова *множить* должно измѣнишься, когда множитель есть число дробное. Впредь *умножить на $\frac{2}{5}$ будетъ значить взять $\frac{2}{5}$-хъ множимаго.* (*)

(*) По сему слово *множить*, принимается въ двухъ различныхъ значеніяхъ, смотря по тому, будетъ ли множитель цѣлый или дробный: въ 1-мъ случаѣ оно имѣетъ обыкновенный

Мы видѣли (чл. 37, 4-е), что дабы взять $\frac{3}{5}$ отъ 5-ти, должно 2 умножить на 5, $\frac{2}{5} \times 5 = \frac{5}{5}$, соотвѣтствующій $5 \times \frac{2}{5}$. Также умножить $\frac{3}{4}$ на $\frac{5}{7}$, значитъ взять $\frac{5}{7}$ отъ $\frac{3}{4}$; по сему надобно составить 7-ю долю $\frac{1}{4}$ и повто-

---

смыслъ чл. 3); во 2-мъ вышеизъясненный. Но два значенія, какъ бы они ясны ни были, не могутъ выражать одного и того же слова, если въ послѣдствіяхъ производятъ какое-нибудь противорѣчіе. Дабы узнать, что происходитъ въ настоящемъ случаѣ, разсмотримъ, когда множитель есть въ одно время и цѣлый, и дробный.

1-е. $\frac{5}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$, по правилу чл. 40 го, основанному на первомъ опредѣленіи слова *множить*, но если изобразить 2 цѣлыхъ, въ видѣ $\frac{6}{3}$, то произведеніе $\frac{4}{5} \times \frac{6}{3} = \frac{24}{15}$, по второму опредѣленію, обращается опять въ $\frac{8}{5}$.

2-е. Если множитель есть $2\frac{1}{3}$, то умножать ли на 2 и на $\frac{1}{3}$ и сложить, или умножать на $\frac{7}{3}$, получатъ то же окончательное выраженіе:

$$\frac{4}{5} \times 2\frac{1}{3} = \frac{8}{5} + \frac{4}{15} = \frac{28}{15}; \quad \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15}.$$

Слѣд: поступая сообразно обоимъ опредѣленіямъ слова множить, выходятъ тѣ же окончательныя выраженія въ цѣлыхъ случаяхъ, гдѣ сіе слово можно отнести къ одному и къ другому опредѣленію, что самое и позволяетъ ихъ соединить, можно даже видѣть, что 2-е есть только слѣдствіе 1 го, такъ что они вмѣстѣ составляютъ одно.

Въ самомъ дѣлѣ, при умноженіи $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$, множимое $\frac{3}{4}$, составляетъ $\frac{3}{4}$ единицы, $\frac{15}{28}$ по нашему новому опредѣленію составляетъ также $\frac{3}{7}$ отъ $\frac{5}{7}$; но сему $\frac{15}{28}$ *содержится* въ $\frac{5}{7}$, какъ $\frac{3}{4}$ въ единицѣ; подобнымъ образомъ въ $3 \times 4 = 12$, 12 *содержитъ* 4 столько разъ, сколько единица содержится въ 3-хъ; по сему если бъ условились слову *составлять* дать двоякое значеніе *содержать* и *быть содержиму*, то могли бы *во всякомъ случаѣ* сказать, что *произведеніе составлено изъ множимаго, какъ множитель составленъ изъ единицы*. Такимъ образомъ Г. Лакроа излагаетъ правило умноженія дробей; въ коихъ видно, что онъ предполагаетъ принятыя нами два значенія слова *множить*, опредѣляя, какъ выше сказано, двоякимъ образомъ слово *составлять*.

рить оную 5 разъ или умножить $\frac{3}{4}$ на 5, и произведеніе раздѣлить на 7: первое изъ сихъ дѣйствій производитъ $\frac{15}{4}$, а второе $\frac{15}{28}$.

Слѣдственно 1-е *для умноженія двухъ дробей должно умножить почленно*, т: е: *раздѣлить произведеніе числителей на произведеніе знаменателей.*

2-е. Произведеніе будетъ менѣе множимаго, когда множитель есть дробь < 1.

3-е. Порядокъ производителей можно перемѣнять какъ при умноженіи цѣлыхъ чиселъ (чл. 11).

4-е. Если находятся общіе производители, то надлежитъ ихъ опускать прежде совершенія умноженія; на пр: чтобъ взять $\frac{2}{3}$ отъ $\frac{3}{4}$, отъ $\frac{5}{6}$, отъ $\frac{4}{5}$ единицы, что называютъ брать *дробь отъ дроби*, надлежитъ умножить $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$, или $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 4}{3 \times 4 \times 6 \times 5}$, или наконецъ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, опустивъ производителей 3, 4 и 5.

5-е. Квадратъ, кубъ и вообще всякая степень дроби составляется возвысивъ оба члена оной въ сію степень; на пр: квадратъ дроби $\frac{2}{3}$ есть $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; кубъ оной есть $\frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ и проч. По сему *если предположенная дробь не сокращается, то и степень оной также не сократится* чл. 21, 6-е.

Частное отъ $\frac{3}{4}$ раздѣленныхъ на $\frac{5}{7}$, есть дробь, которая по умноженіи на $\frac{5}{7}$ производитъ $\frac{3}{4}$; очевидно, что достаточно ввести въ $\frac{3}{4}$ производителей 5 и 7, одного въ низу, а другаго въ верху; ибо произведеніе $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$ на $\frac{5}{7}$, по уничтоженіи общихъ производителей даетъ $\frac{3}{4}$. И такъ *чтобъ раздѣлить на дробь, обращаютъ оную и множатъ.*

$$8 : \frac{3}{5} = 8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 15\frac{1}{3}; \quad \frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{5} = \frac{33}{20}.$$

Сверхъ того частное болѣе дѣлимаго, когда дѣлитель менѣе единицы.

Если дроби заключаютъ общихъ производителей, то должно ихъ умножить прежде совершенія дѣйствія, $\frac{2}{5} : \frac{4}{8}$ тоже что $2 : 4 = \frac{2}{4}$ или $\frac{1}{2}$; $\frac{18}{19} : \frac{9}{38} = \frac{2}{1} : \frac{1}{2} = 4$.

42. *Если придробяхъ находятся цѣлыя числа, то ихъ обращаютъ въ дробныя* (чл. 37, 2-е). И такъ

$$3\frac{2}{9} \times 7\frac{1}{3} = \frac{29}{9} \times \frac{22}{3} = \frac{638}{27} = 23\frac{17}{27}$$

$$45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3} = \frac{183}{4} \times \frac{53}{3} = \frac{9699}{12} = 808\frac{1}{4}$$

$$2\frac{1}{8} : 4\frac{3}{4} = \frac{17}{8} : \frac{19}{4} = \frac{17}{8} \times \frac{4}{19} = \frac{28}{57}.$$

Замѣтимъ, что часто удобнѣе исполнять умноженіе по частямъ, а не цѣлымъ складывать. Для $45\frac{3}{4} \times 8$ умножаютъ на 8 сначала $\frac{3}{4}$, потомъ 45; получаютъ $\frac{8}{4}$ или 2 и 24; и такъ произведеніе будетъ 26. Ходъ вычисленія $45\frac{3}{4}$ на $17\frac{2}{3}$ представленъ на сторонѣ; 45 множатъ на 17, $\frac{3}{4}$ на $\frac{2}{3}$, 45 на $\frac{2}{3}$ и 17 на $\frac{3}{4}$; сумма всѣхъ сихъ произведеній равна $808\frac{1}{4}$ искомому произведенію.

$45\frac{3}{4}$
$17\frac{2}{3}$
315
45
$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \ldots\ldots \frac{1}{2}$
$45 \times \frac{2}{3} \ldots 30$
$17 \times \frac{3}{4} \ldots 12\frac{3}{4}$
$808\frac{1}{4}$

Въ дѣленіи можно уничтожить знаменателя дѣлителя, умноживъ на оный оба предложенныя количества; отъ чего искомое частное не перемѣнится (чл. 15, 1-е). Чтобы раздѣлить $2\frac{1}{3}$ на $3\frac{6}{8}$, умножатъ сіи два члена на 6, получатъ 14; остается 14 раздѣлить на 23 или $\frac{14}{23}$. Также $125\frac{1}{3} : 18\frac{3}{4} = 501\frac{1}{3} : 75 = \frac{501}{75} + \frac{1}{225} = 6 + \frac{151}{225}$; $1 : 2\frac{1}{3} = 3 : 7 = \frac{3}{7}$.

О десятичныхъ дробяхъ.

43. Затрудненіе, происходящее въ вычисленіяхъ отъ двухъ членовъ дробей, подало мысль принять постоянный знаменатель, и подразумѣвать оный, отъ чего произошли десятичныя дроби, и составныя количества; но щѣ и другія подлежатъ вышеположеннымъ правиламъ, которыя дѣлаются только проще. Займемся сначала десятичными дробями.

Мы видѣли (чл. 6, что значеніе каждой цыфры, переходящей отъ лѣвой руки къ правой, уменьшается въ 10 разъ; если распространимъ сей законъ на цыфры, стоящія въ-право отъ единицъ, отдѣляя оныя запятою, то очевидно, что 1-я цыфра послѣ единицъ будетъ представлять десятыя, 2-я сотыя, 3-я тысячныя и проч.....; 3,3 изображаетъ 3 цѣлыхъ и $\frac{3}{10}$; 42,05 — 42 и $\frac{5}{100}$; 0,403 — $\frac{4}{10} + \frac{3}{1000} = \frac{403}{1000}$.

По сему цыфры, стоящія послѣ запятой, изображаютъ числителя, а знаменателя писать безполезно, ибо онъ всегда равенъ 1 со столькими нулями, сколько цыфръ послѣ запятой. Слѣд. весьма легко выговаривать написанную десятичную дробь, или обратно писать предлагаемую, ибо выговариваемое есть числитель или часть слѣдующая послѣ запятой, знаменатель же означается порядкомъ послѣдней десятичной цыфры, показывающей, сколько должно написать нулей послѣ запятой. На пр: 8,700203 = 8 и 700203 милліонныхъ; потому что 3 занимая шестое мѣсто, даетъ знаменателя 1000000; также 354,0063 = 354 + 63 десятитысячныхъ. Обратно 3 десятитысячныхъ пишутся 0,0003, потому что десять тысячъ имѣютъ 4 нуля, и послѣдняя десятичная должна быть на 4-мъ мѣстѣ.

Тысяча цѣлыхъ и 4 сотыхъ = 1000,04.

13 тысячъ сто милліонныхъ = 0,00013000.

44. Должно замѣтить, что 1-е, перенося запятую въ-право или въ-лѣво на одинъ, на два, на три... и т: д: знаковъ, число соотвѣтственно увеличивается или уменьшается въ 10, 100, 1000.... и т: д: разъ, потому что каждая цыфра займетъ мѣсто увеличивающее или уменьшающее величину оной въ 10, 100, 1000, ... разъ; и такъ 342,53 въ 10 разъ болѣе 34,253, во 100 разъ 3,4253, въ 1000 разъ 0,34253.

2-е. *Можно неизмѣняя величины десятичной дроби приписать или отнять съ-права сколь* или нѣ-

сколько нулей; ибо тогда множашь или дѣлишь оба члена дроби на 10, 100, 1000...; $0,3 = 0,30 = 0,300\ldots$ соотвѣтствуютъ $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$.

3-е. Двѣ десятичныя дроби, составленныя изъ одинакаго числа цыфръ, имѣютъ одного знаменателя. Дабы привести десятичныя дроби къ одному знаменателю, должно уравнять число ихъ десятичныхъ знаковъ, прибавляя къ одной изъ оныхъ нули.

4-е. Дабы отличить наибольшую изъ двухъ десятичныхъ, надлежитъ обращать вниманіе не на число знаковъ, но на величину цыфръ ближайшихъ къ запятой.

0, 7 > 0,54321, потому что 7 > 5; 0,004 > 0,00078;
0, 687 > 0,6839.

45. Разсмотримъ теперь, что произойдетъ съ правилами сложенія, вычитанія ..., когда вмѣсто простыхъ дробей возьмутъ десятичныя.

Чтобъ сложить или вычесть, уравниваютъ число знаковъ десятичныхъ дробей, дополняя оное нулями съ-правой руки (чл. 44, 3-е; потомъ поступаютъ обыкновеннымъ образомъ, не обращая вниманія на запятую, и не забывая однако же въ окончательномъ выраженіи поставить оную на прежнемъ мѣстѣ. Замѣтимъ, что приписываемые нули въ самомъ дѣлѣ безполезны, и что достаточно поставить каждую цыфру на приличномъ ей мѣстѣ, относительно запятой.

3,02	4 852,791
2,70	4,00745
8,00	2,7
4,69	0,049
18,41	4 859,54745

Вотъ нѣсколько примѣровъ вычитанія:

57,02	4,8274	6,00435	3,842
48,1	2,0139	0,17	1,004554
8,92	2,8135	5,83435	2,837446

46. Для умноженія 43,7 на 3,91 замѣтимъ, что сіи числа соотвѣтствуютъ $\frac{437}{10}$ и $\frac{391}{100}$. Произведеніе числителей (чл. 41) должно быть раздѣлено на произве-

деніе знаменателей или $\frac{437 \times 591}{1000} = \frac{170867}{1000} = 170{,}867$.

По сему, чтобъ *составить произведеніе изъ двухъ десятичныхъ дробей, должно множить оныя необращая вниманія на запятую, и въ произведеніи отдѣлить съ-права столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ находится въ обоихъ производителяхъ.*

Вотъ различные примѣры умноженія:

2,4542	3,7	21,12	0,04
0,0053	4,12	0,100103	0,007
7 3626	74	6396	0,000 28
122 710	37	2132	
0,0130 0726	14,8	2132	
	15,244	2,13419896	

Можно совершить умноженіе начиная съ цыфры высшаго порядка; въ такомъ случаѣ каждое изъ частныхъ произведеній должно выступать на одинъ знакъ въ-право; 1-я строка будетъ та, которую обыкновенно пишутъ послѣднею; предпослѣдняя будетъ второю и т: д:; что можно замѣтить въ примѣрѣ приложенномъ на сторонѣ. Сіе имѣетъ ту выгоду, что тогда получаютъ цыфры высшаго порядка, чѣмъ иногда ограничиваются; на пр: въ 1-мъ произведеніи получили 7 цыфръ, произведенія же прочихъ 4-хъ ощутительныхъ множителей должны быть оставлены на 4 знака, слѣд. все произведеніе состоитъ изъ 7 + 4 цыфръ. Итакъ послѣ 28, начинающихъ 1-ю строку, слѣдуютъ еще 9 цыфръ, и значеніе сего числа будетъ 28 съ 9-ю нулями. см. стран. 21.

	934 525
	34 276
3 . .	2803 575
4 . . .	373 8100
2 . . .	18 69050
7	6 540675
6	560715
	3203 177900

Посему во всякомъ умноженіи можно остановиться на желаемомъ рядѣ, и слѣд. получить въ произведеніи предположенное число цыфръ. Найдемъ на прим: произведеніе 93,4525 на 5,4276 съ 5-ю десятичными знаками; отыскавъ частное произведеніе $93\,4525 \times 3$,

замѣтимъ, что для прочихъ четырехъ цыфръ множителя прибавится четыре знака съ-права, но произведеніе должно дать 8 десятичныхъ, и шакъ 8 — 4 покажетъ мѣсто запятой въ 1-мъ частномъ произведеніи, которое будетъ у 4-й цыфры съ-лѣва, гдѣ и проведена черта. Вообще когда получится 1-е произведеніе, но мѣсто запятой опредѣлится вычтя изъ *числа десятичныхъ знаковъ полнаго произведенія то число цыфръ множителя, которыми еще недѣйствовалъ.*

```
  ...
 93 4575
  3 4776
 280|5575
  37|58100
   1|86905
    65416
     5607
 320,01778
```

Какъ скоро мѣсто единицъ означено, то легко ограничишь дѣйствіе 5-ю десятичными. Съ производителемъ 4 дѣйствуютъ, какъ выше показано; отъ чего получится 5-я десятичная цыфра; потомъ достигнувъ множителя 2, начинаютъ умноженіе со 2-й цыфры 2; но къ 2×2 прикладываютъ удержанный десятокъ, произшедшій отъ 2×5. Произведеніе на множителя 7 начнется съ цыфры 5, прибавивъ къ оному 1, происходящую отъ 7×2. Наконецъ для множителя 6, скажутъ $6 \times 5 = 30$, по чему ничего не пишутъ и удерживаютъ 3; потомъ шакъ какъ $4 \times 6 + 3 = 27$, то поставятъ 7 на 5-мъ мѣстѣ десятичныхъ и удержатъ 2 и проч.

Ясно, что какъ скоро получено требуемое число десятичныхъ знаковъ, то для каждаго частнаго множителя опускаютъ цыфру множимаго, и каждую такову означаютъ для удобности точкою.

Сіе правило особенно полезно, когда производители приближенные; ибо обыкновенный ходъ дѣйствія продолжилъ бы только вычисленіе, достигая излишнее число знаковъ въ произведеніи, между тѣмъ какъ число десятичныхъ знаковъ онаго должно быть оди-

наковаго порядка съ обоими производителями (*). Здѣсь приложено вычисленіе для $4,387 \times 3,756$ съ двумя десятичными знаками въ произведеніи.

	...
	4,387
	3,756
3 ... 13	16
7 ... 3	07
5 ...	22
6 ...	2
	16,47

Получаемая такимъ образомъ послѣдняя десятичная нѣсколько ошибочна, ибо зависитъ отъ удержанныхъ чиселъ опущенныхъ столбцевъ. Для исправленія сей погрѣшности, вычисляютъ лишнюю десятичную прошивъ требуемаго числа оныхъ; и въ послѣдствіи уничтожаютъ, если она менѣе 5, или увеличиваютъ предыдущую цыфру единицею, когда она равна или болѣе 5, какъ то сдѣлано въ послѣднемъ примѣрѣ.

(*) Пусть будутъ a и b два числа цѣлыя и приближенныя, x и y дроби, выражающія погрѣшности; посему произведеніе ab должно быть замѣнено слѣдующимъ:

$$(a+x)(b+y) = ab + ay + bx + xy.$$

И такъ погрѣшность произведенія ab есть $\delta = ay + bx + xy$.

Возьмемъ величины x и y только съ одною десятичною цыфрою, заключающеюся между 1 и 5, (если x равно или болѣе 5-ти, то должно къ a придать 1, но отъ $\frac{1}{10}$ до $\frac{5}{10}$ погрѣшность x отрицательная). И такъ возьмемъ для x и y крайнія величины $\frac{1}{10}$ и $\frac{5}{10}$ и отнимемъ xy, выражающее 100 я; погрѣшность δ будетъ заключаться между $\frac{1}{10}(a+b)$ и $\frac{1}{2}a+b$. Слѣд. *чтобы судить о степени точности произведенія ab, двухъ чиселъ цѣлыхъ и приближенныхъ, должно взять $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{2}$ суммы $(a+b)$ сихъ чиселъ; погрѣшность δ будетъ заключаться между сими окончательными выраженіями.*

Когда a и b, сами приближенныя десятичныя, то перестановка запятой приведетъ къ предъидущему случаю, напр: $4,387 \times 3,756 = 16.477572$; если производители только приближенные, то произведеніе будетъ ошибочно. Отбросимъ запятую, десятая доля и половина суммы производителей будетъ 814 и 4071; слѣд. погрѣшность произведенія заключается между сими числами, и только двѣ первыя десятичныя совершенно точны, потому что послѣдняя четыре могутъ быть ошибочны: и такъ произведеніе $= 16,48$. Сей примѣръ есть вышепредложенный.

47. Чтобы дѣлить количества съ десятичными цыфрами, должно уравнять число десятичныхъ знаковъ, дополняя нулями, и уничтожить потомъ запятыя; чрезъ сіе искомое частное не измѣнится, ибо дѣлимое и дѣлитель увеличатся одинакою степенью 10-ти (чл. 15, 1-е). Пусть требуется раздѣлить 8,447 на 3,22; написавъ 3,220, должно раздѣлить 8447 на 3220, частное будетъ 2, а остатокъ 2007. И такъ $\frac{8,447}{3,22} = 2 + \frac{2007}{3220}$; также $\frac{49,1}{20,074} = \frac{49,100}{20,074}$ или $\frac{49100}{20074} = 2 + \frac{8952}{20074}$.

Сіе правило сокращается, когда дѣлитель цѣлое число; ибо въ семъ случаѣ цѣлыя можно дѣлить отдѣльно; $\frac{6,9345}{3} = 2,3115$. Если въ дѣлимомъ болѣе десятичныхъ знаковъ, чѣмъ въ дѣлителѣ, то сей случай обращаютъ въ послѣдній, переставя въ обоихъ членахъ запятую такъ, чтобы дѣлитель обратился въ цѣлое число; $8,447 : 3,22 = 844,7 : 322 = 2 + \frac{2007}{3220}$ (*).

О Приближеніяхъ и Періодахъ.

48. Погрѣшность происходящая отъ уничтоженія послѣдней цыфры десятичной дроби, тѣмъ менѣе,

(*) Въ дѣленіи можно употребить тоже сокращеніе, какъ въ умноженіи; на пр: дѣля 320,31768 на 93,4525, если въ частномъ желаютъ получить не болѣе 4-хъ десятичныхъ, то найдя, какъ обыкновеняе, первыя двѣ цыфры 3, 4 опустятъ послѣднюю цыфру 5 дѣлителя; отъ чего получивъ отдѣльное частное 2, умножатъ на оное 93452, и вычтутъ изъ 257918, остатокъ будетъ 71013. Опустивъ снова цыфру въ дѣлителѣ, получатъ частное 7 и остатокъ 5597 и проч. Надлежитъ только при каждой опущенной цыфрѣ увеличивать слѣдующее произведеніе десятками, происходящими отъ сей цыфры. Впрочемъ послѣднія цыфры частнаго будутъ не точны. Все сіе легко объясняется.

3203176,8	9 34,25
399601 8	3,4276
25791 8	
7101 3	
559 7	

чѣмъ сія дробь имѣетъ болѣе десятичныхъ знаковъ. Такимъ образомъ если вмѣсто 0,43 возьмутъ 0,4, то погрѣшность будетъ состоять изъ 3 сотыхъ; она будетъ 3 тысячныхъ, если вмѣсто 0,043 возьмутъ 0,04. Когда довольствуются 2 или 3 десятичными знаками пренебрегая прочіе, то полагаютъ, что происходящія отъ сего погрѣшности не заслуживаютъ вниманія по своей незначительности; рѣдко даже случается, чтобы употребляли болѣе 6 или 7 десятичныхъ знаковъ.

Если окончательное выраженіе будетъ 4,837123, то можно принимать вмѣсто сей величины 4,8 или 4,83 или 4,837...; и какъ оное $> 4{,}8$ и $< 4{,}9$, слѣд. очевидно, что сіи два выраженія различествуютъ отъ онаго менѣе чѣмъ на $\frac{1}{10}$, одно недостаткомъ, а другое излишкомъ. Такимъ же образомъ 4,83 и 4,84 разнствуютъ отъ онаго менѣе чѣмъ на $\frac{1}{100}$; и въ семъ случаѣ предпочитительнѣе даже принять 4,84, потому что слѣдующая цыфра есть 7, слѣд. 4,84 ближе чѣмъ 4,83. Вообще, *если первая изъ откидываемыхъ цыфръ равна или болѣе 5, то послѣднюю изъ оставляемыхъ увеличиваютъ единицею.*

49. Случается, что окончательное выраженіе есть несокращаемая сложная дробь; въ такомъ случаѣ довольствуются приближеніемъ, коего степень точности зависитъ отъ свойства вопроса. И такъ положимъ, что вмѣсто $\frac{427}{681}$ требуется простѣйшая дробь, различествующая отъ оной менѣе чѣмъ на $\frac{1}{8}$. Ясно, что еслибъ извѣстны были двѣ дроби, какъ $\frac{5}{8}$ и $\frac{6}{8}$, имѣющихъ знаменателя 8, а разность числителей 1, тогда каждая изъ оныхъ удовлетворила бъ требуемому условію, если бъ дробь $\frac{427}{681}$ заключалась между ними; остается опредѣлить сихъ числителей 5 и 6. Помноживъ сіи три дроби на 8, произведеніе $8 \times \frac{427}{681}$ или $\frac{3416}{681}$, также будетъ содержаться между искомыми числителями; но выключивъ цѣлыя, найдутъ, что $\frac{3416}{681}$

заключается между 5 и 6, которыя и будутъ слѣдовательно искомыми числителями. Въ самомъ дѣлѣ, легко удостовѣриться, что разность между $\frac{5}{8}$ и $\frac{427}{681}$, или $\frac{11}{5448}$, гораздо менѣе $\frac{1}{8}$. Отсюда происходитъ слѣдующее правило (*):

Должно помножить предложенную дробь на данного знаменателя; ближайшее цѣлое сего произведенія (меньшее или большее онаго) будетъ искомый числитель. Такимъ же образомъ, чтобъ найти дробь разнствующую отъ $\frac{54}{57}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{11}$, множатъ данную на 11, и получатъ $\frac{594}{57} = 6$ или 7 въ цѣлыхъ числахъ, слѣд. $\frac{6}{11}$ и $\frac{7}{11}$ суть искомыя дроби. Чтобъ приближиться къ $\frac{54}{7}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{8}$, получаютъ $\frac{54}{7} = 4\frac{6}{7}$; но какъ дробь разнящаяся съ $\frac{6}{7}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{8}$ заключается между $\frac{5}{8}$ и 1, слѣд. $4\frac{5}{8}$ и 5 будутъ искомыя числа.

Приложимъ сіе правило къ десятичнымъ дробямъ. Чтобъ найти дробь разнствующую отъ $\frac{4}{7}$ менѣе чѣмъ на 0,1, умножимъ $\frac{4}{7}$ на 10, получимъ $\frac{40}{7}$ заключающуюся между 5 и 6, и такъ 0,5 и 0,6 суть искомыя дроби; дабы найти дробь разнствующую менѣе чѣмъ на 0,01, надлежитъ умножить на 100, и получатъ $\frac{400}{7}$, заключающуюся между 57 и 58; слѣд. $\frac{4}{7}$ отъ 0,57 и 0,58 разнится менѣе чѣмъ на 0,01. Вообще, *должно сѣлить числитель на знаменатель и прибавлять къ каждому остатку нуль, покуда не получатъ въ частномъ цыфру, одинаковаго порядка съ искомымъ приближеніемъ.*

(*) Дабы найти дробь, разнствующую отъ данной $\frac{a}{b}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{q}$, надобно отыскать x, изъ условія, что $\frac{x}{q} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{q}$, умноживъ все на q, получатъ $x < \frac{aq}{b} < x+1$, т. е. что искомые числители нашихъ дробей суть частныя x и $x+1$, произшедшія отъ aq, раздѣленнаго на b, изъ коихъ одно менѣе, а другое болѣе $\frac{aq}{b}$.

И такъ по сему способу приближенія, $\frac{25}{7}$ обращается въ 3, 5 или въ 3, 57 или въ 3, 571, или въ 3, 5714.. смотря потому, желаешь ли, чтобъ приближенная дробь различествовала отъ данной менѣе чѣмъ на $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.... Такимъ же образомъ исключивъ цѣлое 407 изъ дроби $\frac{147615}{362}$, и продолжая дѣленіе прибавляя по нулю къ каждому остатку, получимъ 407,589....

50. Ежели прибавя достаточное число нулей, въ остаткѣ отъ дѣленія получашь нуль, тогда дробь выразится въ точности посредствомъ десятичныхъ. Какъ на прим. $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{13}{20} = 0,65$. Легко предусмотрѣть, въ какомъ случаѣ сіе произойдешъ; ибо чтобъ совершить дѣленіе, должно множить числителя на 10, 100, 1000.... Но сему если дробь несокращаема, то должно, чтобъ сія степень 10, была дѣлима на знаменателя (чл. 24, 4-е); что происходишъ, когда сей послѣдній имѣешъ первоначальными дѣлителями только 2 и 5. И такъ *чтобъ несокращаемая дробь могла быть превращена въ точную десятичную, необходимо и достаточно, чтобъ знаменатель состоялъ изъ степеней 2-хъ и 5-ти, какой бы впрочемъ числитель ни былъ;* число же десятичныхъ знаковъ равняется высшей степени 2-хъ и 5-ти. Если сей знаменатель есть $2^3 \times 5^2 = 200$, то дробь будешъ состоять изъ 3-хъ знаковъ; на пр. $\frac{147}{200} = 0,735$. При семъ замѣтимъ, что если умножишь $\frac{147}{200}$ на 1000 или на $2^3 \times 5^3$, то уничтоживъ въ обоихъ членахъ общій производитель $2^3 \times 5^2 : 200$, получишь $147 \times 5 = 735$, т. е. числителя десятичной дроби (*). Все сіе согласно съ вышеизъясненнымъ въ чл. 38-мъ, 4-е.

(*) Общій видъ дробей, приводимыхъ въ точныя десятичныя, есть $\frac{a}{2^m \times 5^n}$; число же десятичныхъ знаковъ равняется высшему изъ двухъ показателей m и n, и если разность между m и n есть k, тогда десятичная дробь равна $a \times 5^k$ или $a \times 2^k$, смотря потому $m >$ или $< n$; если $m = n$, тогда десятичная равна a.

51. Во всякомъ же другомъ случаѣ, дробь можетъ быть выражена десятичною только приближенно; но какъ остатки отъ послѣдовательныхъ дѣленій всегда менѣе дѣлителя, и число оныхъ безконечно, то вскорѣ необходимо достигнутъ одного изъ предъидущихъ остатковъ. Тогда въ другой разъ получатъ тоже дѣлимое; отъ чего произойдутъ частное и остатокъ, слѣдующія за прежде найденными, и т: д: посему въ частномъ будутъ выходить *періодически* тѣже цыфры и въ томъ же порядкѣ; и какъ сей періодъ составляется съ возвращеніемъ одного изъ предъидущихъ остатковъ, который менѣе знаменателя, то наибольшее число получаемыхъ различныхъ остатковъ равно сему дѣлителю безъ 1; слѣд. *въ періодѣ всегда менѣе цыфръ, чѣмъ въ знаменателѣ единицъ.* Впредь мы будемъ означать періодъ, заключая его въ скобки:

На пр: $\frac{2}{6} = 0{,}666\ldots = 0{,}(6)$; $\frac{3}{11} = 0{,}27\,27\,27\ldots = 0{,}(27)$; $\frac{38}{111} = 0{,}342\ldots$ $\frac{4}{7} = 0{,}571428)\ldots$; $\frac{5}{6} = 0{,}83333\ldots = 0{,}8\,3)$, $\frac{7}{12} = 0{,}58\,3)\ldots$: періодъ иногда составятъ изъ 1-й, иногда изъ 2-хъ, изъ 3-хъ... цыфръ, и начинается то съ запятой, то со 2-го, 3-го... послѣ нее мѣста.

52. *Періодъ начинается съ запятой, если знаменатель не имѣетъ производителями ни* 2, *ни* 5. Ибо положимъ, что для $\frac{1}{7}$ послѣ 12 и 18 дѣленій получили тотъ же остатокъ, т: е: что 10^{12} и 10^{18} раздѣленныя на 7, даютъ одинъ и тотъ же остатокъ, слѣд. ихъ разность 10^{18} и 10^{12} будетъ чл. 16, кратнымъ 7; и какъ 10^{12} есть производитель сей разности, то сему опустивъ оный (чл. 24, 4-е), увидимъ, что $10^6 - 1$ есть кратное 7-ми; или что 10^6 раздѣленное на 7 даетъ въ остаткѣ 1, т: е: что остатокъ 1, найденный въ 1-мъ дѣленіи, возвращается послѣ 6-го. Для $\frac{5}{7}$, которая $= 5 \times \frac{1}{7}$, послѣ 6-ти дѣленій, получимъ въ остат-

къ 5, т: е: тоже самое дѣлимое, что и въ 1-мъ дѣленіи (см. чл. 34), слѣд. и проч. (*)

Положимъ, что дробь, какъ на пр. $\frac{5}{7}$, даетъ въ періодѣ наибольшее число знаковъ; т: е: равное дѣлителю безъ 1; $\frac{5}{7} = 0,714285$. Въ такомъ случаѣ ошъ послѣдовательныхъ дѣленій надлежало бы получишь остатки 1, 2, 3... до 6-ши; слѣд: для приведенія $\frac{5}{7}$ въ десятичную, безполезно повторять вычисленіе сначала; достаточно начать оное съ того мѣста, гдѣ получили остатокъ 3, а періодъ съ той цыфры, которую получили ошъ $\frac{30}{7}$, т: е: съ 4; по сему $\frac{3}{7} = 0,428571$; очевидно, что здѣсь только двѣ первыя цыфры 71 прежняго періода поставлены въ концѣ онаго. Такимъ же образомъ $\frac{1}{19} = 0,052631578947368421$, а для $\frac{12}{19}$ поставишь первыя шри цыфры 052 въ концѣ, и получишь (631 ... 21052); въ чемъ легко убѣдишься, повторивъ вычисленіе для $\frac{12}{19}$, ибо найдешь, что первыя цыфры суть 63....

Можно тоже самое сдѣлать для дроби, неимѣющей столько знаковъ, сколько находится единицъ въ дѣ-

---

(*) Чтобъ превратишь дробь $\frac{a}{b}$ въ десятичную, должно прибавлять къ каждому остатку по нулю; пусть будутъ $10D$ и $10D'$ два дѣлимыя, производящія тотъ же остатокъ r и частныя q и q', то

$$10D - bq + r;\ 10D' = bq' + r,$$

вычтя одно изъ другаго

$$10(D - D') = b(q - q').$$

И такъ, если b не дѣлится ни на 2, ни на 5, то 10 и b суть первоначальныя между собою; $q - q' < 10$, ибо каждое отдѣльное частное состоитъ изъ одной цыфры; слѣд. сіе уравненіе можетъ существовать только въ томъ случаѣ, когда $q - q' = 0$, откуда $D = D'$; т. е. что тотъ же остатокъ r не прежде повторится, какъ по возвращеніи того же дѣлимаго; и такъ q составляетъ часть періода, потому что оный означится, когда выдетъ одинъ изъ прежнихъ остатковъ; и какъ остатокъ D долженъ также произойти опять прежде употребленнаго дѣлимаго, то изъ сего слѣдуетъ, что должно возвратиться къ первому дѣлимому a, чтобъ получить начало періода, начинающагося слѣд. съ запятой.

лителѣ безъ 1, если числитель 2-й дроби есть одинъ изъ осташковъ, полученныхъ для первой. Посему $\frac{1}{27} = 0,(037$, для $\frac{10}{27}$ получашь $0, 370)$, для $\frac{19}{27}$ будешь $0, (703$; ибо 10 есть первый, а 19 второй осташокъ отъ $\frac{1}{27}$. Для $\frac{2}{27}$ достаточно удвоить частныя и осташки: и шакъ $\frac{2}{27} = 0,(074$, $\frac{20}{27} = 0, 740)$; $\frac{38}{27}$, или лучше сказать $\frac{11}{27} = 0,(407)$. Такимъ же образомъ получимъ умноживъ на 5, что $\frac{5}{27} = 0,(185$, $\frac{25}{27} = 0, 851)$; $\frac{14}{27} = 0,(518$.

Теперь ясно употребленіе различныхъ періодовъ, когда числитель 1, надлежишь только подписашь подъ каждою цыфрою періода происходящій отъ оной осташокъ.

$\frac{1}{3} = 0,(3)$, $\frac{1}{7} = 0,(1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7)$. $\frac{1}{11} = 0,(09)$

осташокъ . . . 1 осташки . . . 1 3 2 6 4 5 осташки . . . 1 10

$\frac{1}{13} = 0,(0\ 7\ 6\ 9\ 2\ 3)$, $\frac{1}{17} = 0,(0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ 5\ 2\ 9\ 4\ 1\ 1\ 7\ 6\ 4\ 7)$.

осташки 1 10 9 12 3 4 осташки 1 10 15 14 4 6 9 5 1 6 7 2 3 13 11 8 12

$\frac{1}{37} = 0,(0\ 2\ 7)$ $\frac{1}{41} = 0,(0\ 2\ 4\ 3\ 9)$, и проч.

осташки . . 1 10 26 осташки . . . 1 10 18 16 37.

33. Легко превращишь десяшичную дробь въ простую ее произведшую. 1-е, Если дробь конечная, какъ на пр: 0,75, то ее изобразишъ чрезъ $\frac{75}{100}$, которую надлежишь помомъ привесши (ч.л. 38, 3-е) въ простѣйшій видъ $\frac{3}{4}$.

2-е, Если десяшичная дробь приближенная, которой періодъ вполнѣ не извѣстенъ, тогда число рѣшеній будешъ не опредѣленно. Такимъ образомъ 0, 75; 0, 756; 0, 755; 0, 7512, и проч. соошвѣшствующъ дробямъ $\frac{3}{4}$, $\frac{189}{250}$, $\frac{151}{200}$ и проч. которыя по приведеніи въ десяшичныя дадушъ 0, 75, для первыхъ цыфръ.

3-е, Если же періодъ извѣстенъ и начинаешся съ заядной, какъ въ $0, 666\ldots$; $0, 2727\ldots$; то замѣтимъ, что $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}\ldots$, обращенныя въ десяшичныя будушъ $0, (1)$; $0, (01$; $0, (001\ \ldots$, по сему можно разсматривашь на пр: $0,(27)$ какъ произведеніе 27-ми на $0,(01) = \frac{1}{99}$; и шакъ $0, (27) = \frac{27}{99}$ или $\frac{3}{11}$. Такимъ же образомъ $0, (6)$ есть произведеніе 6-ти на $0, 1) = \frac{1}{9}$; слѣд. $0,(6) = \frac{6}{9}$ или $\frac{2}{3}$.

И такъ *чтобы періодическую дробь привесть въ простую, должно раздѣлить періодъ на 9 столько разъ написанное, сколько цыфръ находится въ періодѣ*, т: е: на 10 возвышенное въ степень равную числу знаковъ періода и уменьшенное единицею.

Такимъ образомъ найдутъ, что $0,\overline{342} = \frac{342}{999} = \frac{38}{111}$; $0,\overline{571428} = \frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}$; $0,\overline{036} = \frac{36}{999} = \frac{4}{111}$.

4-е. Если періодъ начинается не съ запятой, то можно разложить сію десятичную дробь на двѣ другія, сумма или разность которыхъ составляли бы данную, принимая періодъ съ запятой. И такъ $0,5333\ldots = 0,2 + 0,333\ldots$ или $\frac{2}{10} + \frac{3}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$. Такимъ же образомъ $0,5888\ldots$ соотвѣтствуетъ $0,(8) - 0,5 = \frac{8}{9} - \frac{5}{10} = \frac{55}{90}$.

Замѣтимъ, что всякая десятичная дробь въ семъ случаѣ есть сумма или разность двухъ дробей, изъ коихъ одна имѣетъ знаменателемъ $9999\ldots$, а другая степень 2-*хъ* и 5-*ти*, слѣд. *всякая дробь, коей знаменатель имѣетъ производителемъ степень 2-хъ и 5-ти, производитъ десятичный періодъ, начинающійся отступя отъ запятой на число цыфръ, равное наибольшему показателю степени 2-хъ или 5-ти.* Здѣсь подразумѣвается, что знаменатель по приведеніи въ простѣйшій видъ можетъ и не быть произведеніемъ $999\ldots$ на степень 10-ти, но вышесказанная степень (*) 2-хъ или 5-ти должна быть непремѣнно производителемъ онаго.

Объ именованныхъ и составныхъ количествахъ.

54. До сихъ поръ мы разсматривали числа *отвлеченныя*, т: е: независимыя отъ рода единицы. Но оныя до нѣхъ поръ не даютъ понятія о величинѣ

(*) Замѣтимъ, что ежели при первоначальномъ дѣлителѣ число цыфръ періода менѣе числа единицъ, заключающихся въ семъ дѣлителѣ безъ 1, то ихъ по крайней мѣрѣ столько въ періодѣ, что онѣ служатъ производителемъ *аликвотной доли* сея разности. И такъ $\frac{1}{13}$ имѣетъ въ періодѣ только 6 цыфръ, но 6 есть производитель $13 - 1$. (Смотр. Замѣчаніе. стр. 49).

предметовъ, покуда единица не будетъ опредѣлена и извѣстна. Подъ числомъ 24, разумѣютъ, что мѣримая величина составлена изъ 24 единицъ, предполагаемыхъ извѣстными: но ежели на прим: скажутъ, что сутки состоятъ изъ 24 *часовъ*, то выражаютъ 1-е, что единица времени есть *часъ*, и 2-е, что 24 сихъ единицъ составляютъ *сутки*. Сіи роды чиселъ, составленныя изъ особенной единицы, повторенной столько разъ, какъ велико отвлеченное количество, называются *именованными числами;* они суть произведенія, которыхъ множимое есть единица, а множитель отвлеченное число: выраженіе 24 *рубля* происходитъ отъ *одного рубля* взятаго 24 раза. Мы прежде всего покажемъ названіе различныхъ новѣйшихъ единицъ.

1-е. Единица длины называется *метръ* (mètre), который составляетъ десятимилліонную часть дуги Парижскаго меридіана, заключающейся между полюсомъ и экваторомъ.

2-е. Единица поверхности, называемая *аръ* (are) есть квадратъ, коего бокъ равенъ 10 метрамъ.

3-е. Единица толстоты, называемая *литръ* (litre), есть кубъ, ребро коего составляетъ десятую часть метра. Употребляютъ также кубическій метръ или *стеръ* (stère) для измѣренія дровъ.

4-е. Вѣсъ воды содержащейся въ кубѣ, коего ребро составляетъ сотую часть метра, есть единица вѣса, называемая *граммъ* gramme). Такъ какъ вѣсъ тѣла увеличивается съ плотностію онаго, то надлежитъ брать чистую воду и наибольшей maximum плотности, получаемой при 4-хъ градусахъ сто-граднаго (centigrade термометра, когда ртуть въ барометрѣ достигаетъ 0,76 метра.

5-е. Золото и серебро въ монетахъ должно содержать $\frac{1}{10}$ долю лигатуры, т: е: быть 0,9 *пробы;* еди-

ница денегъ есть *франкъ*, серебряная монета, вѣсомъ въ 5 граммъ.

Но при различныхъ употребленіяхъ сіи единицы или слишкомъ велики или слишкомъ малы. На прим: разстояніе двухъ городовъ и толщина книги, выраженныя въ метрахъ, составятъ для перваго слишкомъ большое число, а для другаго весьма неудобную дробь. По чему для измѣренія значительныхъ величинъ и составили изъ нѣсколькихъ единицъ каждаго рода одну; а для малыхъ количествъ каждую единицу раздѣлили на приличное число частей. Десять метровъ составляютъ *декаметръ;* десять литровъ — *декалитръ;* десять граммъ — *декаграммъ* и проч. Длина ста метровъ есть *гектометръ;* толстота ста литровъ — *гектолитръ;* сто граммъ — *гектограммъ;* сто аръ — *гектаръ* и проч. Тысяча метровъ составляютъ *километръ;* тысяча литровъ — *килолитръ;* тысяча граммъ — *килограммъ* и проч.; десять тысячъ метровъ равняются *міріаметру* и пр. Такимъ образомъ сіи новыя единицы увеличиваются все въ 10 разъ.

Дѣлятъ также метръ, литръ, ... на десять частей: называя *децимет*ромъ 10-ю долю метра, *децилит*ромъ 10-ю часть литра, *децимом*ъ 10-ю часть франка и проч. Каждая изъ сихъ 10-хъ долей дѣлится еще на десять частей: *сантиметръ* есть 100-я часть метра, *сантимъ* 100-я доля франка, *миллиметръ* 1000-я часть метра и проч.

И такъ принявъ десятичный порядокъ, наименованія будутъ заключаться въ шести главныхъ единицахъ, къ которымъ для означенія мѣръ въ десять разъ большихъ присовокупляютъ слова, заимствованныя изъ Греческаго языка: *дека* десять, *гекта* сто, *кило* тысяча, *міріа* десять тысячъ; также для означенія мѣръ въ десять разъ меньшихъ ставятъ слова, заимствованныя изъ Латынскаго языка: *деци* десять,

центи сто, *милли* тысяча; на пр: килограммъ равенъ тысячѣ граммамъ; цептиметръ сотой доли метра и проч. Также 3827,5 граммъ равны 3-мъ килограммамъ, 8-ми гекіограммамъ, 2-мъ декаграммамъ, 7-ми граммамъ и 5-ти децнграммамъ, или 38,275-ти гекіограмма, или 3,8275 килограмма. Выговариваютъ же сіи величины обыкновеннымъ способомъ десятичныхъ дробей; на пр. предпослѣднюю читаютъ: 58 гекіограммъ и $\frac{215}{1000}$.

Рѣдко случается употреблять всѣ роды единицъ, заключающіяся въ семъ изложеніи; тѣ, которыя не въ употребленіи, опускаются. И такъ мы скажемъ, что *метръ составляетъ десятимилліонную часть дуги меридіана, заключающейся между полюсомъ и экваторомъ; аръ есть квадратъ декаметра, литръ кубъ дециметра, стеръ кубъ метра, граммъ вѣсъ кубическаго центиметра перегнанной воды наибольшей плотности; франкъ вѣситъ 5 граммъ серебра* $\frac{9}{10}$ *пробы.*

Простая и вмѣстѣ обширная мысль, произведшая сію систему, основана на томъ разсужденіи, что должно взять изъ природы постоянную величину *метръ*, и составивъ изъ сей мѣры всѣ прочія, такъ что если бъ какой-нибудь непредвидѣнный случай уничтожилъ всѣ наши единицы мѣръ, то оныя бы легко опять отыскались.

Сія чрезвычайная система повстрѣчала затрудненіе, которому хотѣли устунить, допустивъ употребленіе прежнихъ названій; такимъ образомъ гектаръ называютъ десятиною (arpent), килограммъ — фунтомъ (livre) и проч. Неудачная была мысль допустить сіи наименованія; ибо затруднительны не названія, но пріобрѣтенная съ дѣтства привычка, соединившая наши нужды съ мѣрами требующими перемѣнъ. Такимъ образомъ устранили только мнимое зло, а затрудненіе осталось въ прежней силѣ.

55. Наилучшая похвала новѣйшимъ мѣрамъ, есть изложеніе прежнихъ, которыя различны не только во всѣхъ Государствахъ, но часто даже и въ городахъ одной и той же страны.

Единица длины называется *саженью;* и дѣлится на 7 *футовъ*, изъ коихъ въ каждомъ 12 *дюймовъ*, а въ дюймѣ 10 *линій*. Для общежитія же раздѣляютъ сажень на 3 *аршина*, аршинъ на 4 *четверти*, четверть на 4 *вершка*, 500 саженей составляютъ 1 версту.

Единица вѣса есть *пудъ*, который дѣлится на 40 *фунтовъ*, фунтъ на 32 *лота*, а лотъ на 3 *золотника*, 10 пудовъ составляютъ *берковецъ*. Въ Аптекахъ же *фунтъ* (равняющійся 84 $\frac{1}{22}$ *золот:*) дѣлится на 16 *унцій* ℥, унція на 8 *драхмъ* ʒ, изъ коихъ каждая состоитъ изъ 3 *скрупуловъ* ℈, скрупулъ же изъ 20 *гранъ*. Знакъ β означаетъ половину, и такъ вмѣсто 2-хъ драхмъ съ половиною ставятъ ʒiiβ.

Единица мѣры жидкостей есть *ведро* содержащее почти 774 кубич. дюймовъ и дѣлится на 4 части называемыя *четвертями*, четверть на 2 *осьмухи* или *штофа*, 40 же ведръ составляютъ *бочку*, а 3 ведра анкеръ.

Хлѣбная мѣра есть *четверикъ*, равняющ. почти 1599 куб. дюймамъ, дѣлится на 4 *четверки*, четверка на 2 *гарнца*, 4 четверика составляютъ *осьмину*, 2 осьмины составляютъ *четверть*, а 12 четвериковъ *ластъ*.

Единица вѣса драгоцѣнныхъ камней есть *каратъ*, равняющійся четыремъ гранамъ.

Рубль состоитъ изъ 10 *гривенъ*, гривна изъ 10 *копеекъ*, копейка изъ двухъ *денежекъ*, денежка изъ 2-хъ *полушекъ*.

Сутки раздѣляются на 24 *часа*, часъ на 60 *минутъ*, изъ коихъ каждая на 60 *секундъ*.

Стопа бумаги состоитъ изъ 20-ти *дестей*, десть изъ 24-хъ *листовъ*.

Повторимъ вкратцѣ вышеизложенныя мѣры:

саж.	фут.	дюйм.	лин.
1 =	7 =	84 =	840
	1 =	12 =	120
		1 =	10

верс.	саж.	арш.	четв.	верш.
1 =	500 =	1500 =	6000 =	24000
	1 =	3 =	12 =	48
		1 =	4 =	16
			1 =	4

берк.	пуд.	фунт.	лот.	зол.
1 =	10 =	400 =	12800 =	38400
	1 =	40 =	1280 =	3840
		1 =	32 =	96
			1 =	3

фунт.	унц.	драх.	скр.	гран.
1 =	16 =	128 =	384 =	7680
	1 =	8 =	24 =	480
		1 =	3 =	60
			1 =	20

бот.	ведр.	четв.	штоф.	шкал.
1 =	40 =	160 =	320 =	640
	1 =	4 =	8 =	16
		1 =	2 =	4
			1 =	2

лас.	четвт.	осьм.	чтрик.	чтврк.	гарн.
1 =	12 =	24 =	96 =	384 =	1680
	1 =	2 =	8 =	32 =	64
		1 =	4 =	16 =	32
			1 =	4 =	8
				1 =	2

руб.	грив.	коп.	денеж.	получ.
1 =	10 =	100 =	200 =	400
	1 =	10 =	20 =	40
		1 =	2 =	4
			1 =	2

нед.	сут.	час.	минут.	секунд.
1 =	7 =	168 =	10080 =	604800
	1 =	24 =	1440 =	86400
		1 =	60 =	3600
			1 =	60

сток.	десят.	листн.
1 =	20 =	480
	1 =	24

Отношеніе же Французскихъ новыхъ мѣръ къ Россійскимъ помѣщено въ концѣ Ариѳметики.

Остается показать четыре дѣйствія надъ *составными количествами:* такъ называютъ числа составленныя изъ главныхъ единицъ съ ихъ подраздѣленіями. Напрасно говоришь о новѣйшихъ мѣрахъ, ибо оныя подлежатъ правиламъ десятичныхъ дробей, прежде изъясненнымъ (чл. 45, 46 и 47).

56. Чтобы сложить или вычесть составныя количества, пишутъ части одного наименованія одне подъ другими; потомъ надъ каждымъ изъ нихъ со-

вершаютъ дѣйствіе, начиная съ меньшаго. Ежели сумма столбца превосходитъ число, составляющее одну или нѣсколько единицъ высшаго порядка, то оныя удерживаютъ и подписываютъ только осташокъ.

Примѣры сложенія:

саж.	фут.	дюйм.	линіи.
154	3	7	$9\frac{1}{2}$
23	2	8	$1\frac{1}{3}$
132	5	9	$3\frac{5}{6}$
20	2	7	1
3 1	0	8	$5\frac{2}{3}$

фунт.	унц.	драх	скр.	гран
15	3	6	1	10
13	14	7	0	15
114	11	1	2	0
7	1	4	1	5
150	15	4	0	0

сутк.	час.	минут.	секунд.
2	10	42	54
5	9	17	19
0	21	3	48
8	17	4	1

берк.	пуд.	фунт.	лот.	зол
5	4	21	20	2
10	5	30	31	$\frac{1}{2}$
3	7	11	5	$1\frac{2}{3}$
19	7	23	25	$1\frac{1}{6}$

Въ первомъ изъ сихъ примѣровъ сумма линій составляетъ $15\frac{2}{3}$ или 1 дюймъ и $5\frac{2}{3}$ линій; потому что 10 линій знаменуютъ 1 дюймъ; и такъ напишутъ только $5\frac{2}{3}$, а къ столбцу дюймовъ прикладываютъ 1, отъ чего въ суммѣ составится 32, или 2 фута и 8 дюймовъ; поставя 8 удерживаютъ 2 и проч.

Вотъ нѣсколько примѣровъ вычитанія:

фунт.	унц.	драх.	гран.
32	9	2	44
13	12	5	12
19	12	5	32

саж.	фут.	дюйм.	линіи
487	0	0	0
319	4	3	9
167	2	8	1

дни	часы	минут.	секунд.
17	11	47	5
13	18	55	40
3	16	51	25

рубл.	коп.	полуш
349	17	2
127	63	3
221	54	3

Здѣсь видно, что вычтя 12 грановъ изъ 44, переходятъ къ драхмамъ; такъ какъ 2 — 5 не возможно, то къ 2 приложатъ 1 унцію или 8 драхмъ, отъ чего будетъ 10 — 5 = 5. Приложивъ такимъ же образомъ 1 унцію къ 12, вычтутъ оныя изъ 9, потомъ скажутъ 9 — 13 не возможно; приложивъ 1 фунтъ или

16 унцій, будетъ 25 — 13 = 12 и проч. Сіе дѣйствіе основано на тѣхъ же правилахъ, какъ и цѣлыхъ чиселъ.

Декартъ, родился 3-го Апрѣля 1596, умеръ 11 Февраля 1650; Паскаль родился 19-го Іюня 1623, умеръ 19-го Августа 1662; Ньютонъ родился 15-го Декабря 1642, умеръ 18-го Марта 1727. Требуется узнать, сколько лѣтъ жилъ каждый изъ сихъ великихъ Геометровъ.

57. Для умноженія составныхъ количествъ по вышеизложеннымъ правиламъ (чл. 42) дѣйствуютъ надъ цѣлыми и дробями отдѣльно. Замѣтимъ, что множитель долженъ быть всегда *число отвлеченное* (чл. 54, означающее, сколько разъ повторяется множимое. Умножить 12 руб. на 3 арш. значитъ не 12 рублей взятые 3 аршина разъ, но 12 рублей повторенные столько разъ, сколько единицъ содержится въ 3 аршинахъ, т: е: 3 раза. И такъ если оба производителя даны именованными, то вопросъ неправильно предложенъ. Впрочемъ сіе объяснится въ послѣдствіи.

Представляется два случая: когда множитель составное количество, или нѣтъ.

1-й случай: Требуется цѣна 17 $\frac{2}{3}$ арш. матеріи, которой 1 арш. стоитъ 45 руб. 60 коп. 2 пол. Очевидно, что сіе число должно повторить 17 и $\frac{2}{3}$ раза, такъ что множитель 17 $\frac{2}{3}$ не представляетъ болѣе аршинъ, но число *отвлеченное* (чл. 54). Чтобъ повторить 17 разъ 45 руб. 60 коп. и 2 пол. должно умножить на 17, сперва 45 руб. потомъ 60 коп. и наконецъ 2 пол. Первое изъ сихъ дѣйствій не затруднительно. Разложимъ 60 коп. на 50 + 10; такъ какъ 1 руб. взятый 17 разъ даетъ 17 руб., то 50 коп. составляя $\frac{1}{2}$ рубля, должны произвести половину 17-ти руб.; 10 коп. дадутъ 10-ю долю 17-ти, или 5-ю произведенія 50-ти коп.; для 2-хъ полуш. получатъ 20-ю часть произведенія 10-ти коп.; потомъ должно взять 2 трети отъ множимаго, и все сложить.

Вотъ порядокъ сего вычисленія:

45 руб. 60 коп. 2 пол.
17 $\frac{2}{5}$

315 р.
450

8 руб. 50 коп. ..... для 50 ти коп. половина 17-ти руб.
1 — 70 — ..... для 10 ти коп. 10-я часть 17-ти руб.
0 — 8 — 2 пол. для 2 хъ пол. $\frac{1}{20}$ произведенія на 10 коп.
1 — 20 — $\frac{2}{5}$ — для $\frac{1}{3}$, треть множимаго.
15 — 10 — $\frac{2}{3}$ — для $\frac{1}{5}$.

80 руб. 68 коп. $3\frac{1}{5}$ пол.

Все искусство сего рода дѣйствій состоитъ въ разложеніи каждой дроби на другія, имѣющія *числителемъ единицу* (называемыя *аликвотными дробями*, т: е: обращается въ разложеніе числителя на производителей знаменателя. И такъ 95 копѣекъ, или $\frac{95}{100}$ рубли, разложивъ на $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ и $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$; слѣдственно надлежитъ, вмѣсто 95 копеекъ, взять $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ цѣлнаго множителя, принимаемаго за рубль. Также можно взять $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$; $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ и два раза $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Подобнымъ образомъ для $\frac{7}{8}$ возьмутъ $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$; $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ и $\frac{1}{8}$.

По сему видно, что для умноженія составнаго количества, должно, представивъ оное въ видѣ дроби, разложить числителя на части дѣлящія знаменателя, слѣд: дроби составнаго количества обратятся въ другія, коихъ числитель есть 1 на пр: для 10 дюйм. или $\frac{10}{12}$ фута, разложатъ 10 на $6 + 2 + 2$, что по приведеніи составятъ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{6}$; или на $4 + 4 + 2$, составляющія $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ или на $6 + 3 + 1$, производящія $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{12}$. Такимъ же образомъ и въ прочихъ случаяхъ.

Замѣтимъ, что если множитель состоитъ изъ одной цыфры, то удобнѣе дѣйствовать, какъ при сложеніи. Въ приложенномъ на сторонѣ примѣрѣ скажутъ: 18 гранъ, взятые 7 разъ $=$ 126 гр. $=$ 2 драх. 6 гран.; поставятъ 6 и удерживаютъ 2. Перейдя къ произведенію 4 драх. на 7, полу-

фунт.	унц.	драх.	гр.
57	5	4	18
7			
401	6	6	2

чашъ $4 \times 7 + 2 = 30$ драхмамъ, или 3-мъ унціямъ и 6-ти драх. посмавшъ 6 драх. и удержашъ 3 унціи и проч.

2-й случай: Найдемъ цѣну 36-ти пудовъ, 31-го фун. 16-ти лот. какого-нибудь мешалла, полагая пудъ по 60-ти руб. 51 коп. 2 пол. Сначала повторяютъ 60 р. 51 коп. 2 пол. 36 разъ, а потомъ столько разъ, сколько 31 фунтъ 16 лот. содержатся въ пудѣ. Множитель есть число отвлеченное и не означаетъ уже пудовъ. И такъ должно во первыхъ, по вышеозначеннымъ правиламъ умножить 60 руб. 51 коп. 2 пол. на 36, какъ то сдѣлано на сторонѣ. Потомъ на дробь 31 ф. 16 лот.; для 20-ти фунт. возьмутъ половину всего множимаго 60 руб. 51 коп. 2 пол.; ибо 20 ф. составляютъ $\frac{1}{2}$ пуда; для 10 ф. раздѣлятъ сіе произведеніе по полам и проч.

60 руб. 51 кол. 2 пол.
36 пуд. 31 ф. 16 лот.

2160 руб.

для 50 коп.	18		
— 1 коп.	0	36	коп.
— 2 пол.	0	18	
— 20 фун.	30	25	3 пол
— 10 фун.	15	12	$3\frac{1}{2}$
— 1 фун.	1	51	$1\frac{3}{20}$
— 16 лот.	0	75	$\frac{23}{40}$

2226 руб. 10 коп. $2\frac{9}{40}$ п.

Часто случается, что для удобности составляютъ *вспомогательное произведеніе:* на пр: естьбъ вѣсто 51 коп. было 50 к., то надлежало бы составить произведеніе для 1 коп., и уничтожить оное найдя произведеніе для 2-хъ полушекъ.

Вотъ 2 другихъ примѣра:

12 руб. 25 коп 1 пол.
42 саж. 1 арш. 12 вер.

24
480

Для 25 коп.	10	50	коп.	
Вспомогат произвед. — 1 коп.	ø	½	ø	
— 1 пол.	0	10	коп.	2 пол.
— 1 арш.	4	8		$1\frac{2}{3}$
— 8 вер.	2	4		$\frac{5}{6}$
— 4 вер.	1	2		$\frac{5}{12}$

521 руб. 75 коп. $\frac{11}{12}$ полуш

		32 руб.	80 коп.	3 пол.	
		12 час.	40 мин.	15 сек.	
		64			
		320			
Для	50 коп.	6			
—	25 коп.	3			
—	5 коп.	0	60 коп.		
Вспомогат. произвед. —	1 коп.	0	12		
—	2 пол.	0	6		
—	1 пол.	0	3		
—	30 мин.	16	40	$1\frac{1}{2}$	
—	15 мин.	8	20	$\frac{3}{4}$	
—	3 мин.	1	64	$\frac{3}{20}$	
—	1 м.	0	54	$2\frac{53}{60}$	
—	15 сек.	0	13	$2\frac{163}{240}$	
		420 руб.	61 коп.	$3\frac{163}{240}$	

58. Такъ какъ дѣлимое равняется произведенію частнаго на дѣлителя, то дѣленіе должно представлять также два случая, смотря по тому, частное или дѣлитель изображаетъ множитель, принимаемый за число отвлеченное.

1-й случай: Если дѣлитель есть множитель, тогда частное представляетъ множимое, долженствующее быть одного рода съ дѣлимымъ, изображающимъ произведеніе.

Когда дѣлитель есть число несоставное, то дѣлятъ по порядку всѣ роды единицъ дѣлимаго, начиная съ большихъ. И такъ чтобъ раздѣлить 234 р., 15 коп., 2 пол. на 4, берутъ четверть 234-хъ руб. равняющуюся 58 руб. съ остаткомъ 2 руб., который приведутъ въ копейки для присоединенія къ 15 к. дѣлимаго: $200 + 15 = 215$, четверть сего равняется 53 съ остаткомъ 3 коп. или 12 полуш.; $12 + 5 = 15$, четверть 15-ти есть $3\frac{1}{4}$; слѣд. частное будетъ 58 руб. 53 коп. $3\frac{1}{4}$ пол.

Одинъ рабошникъ въ 42 дня выработалъ 152 руб. 35 коп. 2 пол.; чтобъ узнать, сколько онъ получалъ каждый день, должно раздѣлить 152 р. 35 коп. 2 пол. на ошвлеченное число 42. Подробности сего вычисленія представлены на сторонѣ.

152 руб. 35 коп. 2 пол. | 42
26 р. | 3 р. 62 к. 3 п.
2600 коп.
35
2635 коп.
115
31
124 пол.
2
126

Когда дѣлишель однозначный, какъ въ первомъ примѣрѣ, то пѣшъ подробности слѣдовашь всему ходу сего дѣйсшвія; досшаточно писашь шолько часшное; ибо всѣ послѣдовашельные осшашки можно помнишь. Такимъ образомъ посшупали (на стр. 26) и въ примѣрахъ умноженія сосшавныхъ количесшвъ, когда надлежало брашь половину, шрешь, чешвершь . . .

Если дѣлишель число сосшавное, по которое должно разсмашривашь какъ ошвлеченное, то сначала умножаюшъ дробь при ономъ находящуюся: для сего множашъ дѣлимое и дѣлишеля на число, выражающее, сколько единица наименьшаго рода дѣлишеля содержишся въ наибольшей. Сіе дѣйсшвіе не измѣнишъ часшнаго (чл. 15), и какъ каждый родъ дробей дѣлишеля произведешъ единицы цѣлыхъ, то весь дѣлишель выразишся цѣлыми числами. И шакъ ежели шребуешся знашь цѣну одной саженн, когда за 42 саж. 5 фут. 4 дюй. заплачено 554 руб. 75 коп., то должно послѣднее число раздѣлить на первое, принимая оное за число ошвлеченное. Такъ какъ 4 дюйма, или $\frac{1}{3}$ фута, содержашся 21 разъ въ саженн, то надлежишъ оба предложенныя числа умножить на 21. Ошъ сего вопросъ обращаешся въ слѣдующій: узнашь цѣну одной саженн, когда за 898 саж. заплашили 11649 руб. 75 коп., раздѣливъ 11649 руб. и 75 коп., на ошвлечен-

ное число 898, получимъ въ частномъ 12 руб. 97 коп $1\frac{89}{449}$ пол.

2-й случай: Если дѣлитель есть множное, но оный долженъ быть одного рода съ дѣлимымъ, а частное число отвлеченное, показывающее, сколько разъ первый содержится во второмъ. По вышесказанному умноживъ дроби дѣлимаго и дѣлителя, принимаютъ оба числа за отвлеченныя: въ самомъ дѣлѣ, 3 рубля содержатся въ 12 руб. столько разъ, сколько 3 въ 12.

На пр: чтобъ раздѣлить 521 руб. 75 коп. $\frac{11}{12}$ пол. на 12 руб. 25 коп. 1 пол. должно умножить оба числа на $100 \times 4 \times 12$ или на 4800, по тому что 12-я доля полушки содержится 4800 разъ въ рублѣ; слѣд. надлежитъ раздѣлить 2504411 на 58812; отъ чего получится $42\frac{54307}{58812}$. Чтобъ повѣрить умноженіе стр. 86, слѣдуетъ выразить дробь $\frac{54307}{58812}$ въ частяхъ сажени, какъ будетъ изъяснено въ членѣ 59.

Чтобъ узнать, сколько разъ 11 саж. содержатся въ 148 саж. 1 арш. 8 вер, должно умножить на 48, и произведенія 7128 и 528 раздѣлить между собою, найдемъ $13\frac{1}{2}$.

59. Простыя дроби, десятичныя и составныя количества, суть три рода употребляемыхъ дробей. Извѣстно, какъ превращать простыя въ десятичныя и обратно (стр. 72.; разсмотримъ теперь способъ преобразованія оныхъ въ составныя количества и обратно.

Чтобъ превратить дробь въ составное количество, должно дѣлить числителя на знаменателя. И такъ дабы отыскать, какую долю аршина составляетъ $\frac{9}{16}$ саж., дѣлятъ 9 саж. на 16 и получатъ 1 ар. 11 вер.

Обратно, чтобъ составное количество превратить въ простую дробь, должно предоставить оное въ меньшемъ родѣ. И такъ 2 ар. $4\frac{2}{3}$ вер. составляютъ $36\frac{2}{3}$ или $\frac{110}{3}$ вершка; но какъ сажень равна 48 вершкамъ,

що раздѣливъ послѣднюю дробь на 48, получашъ $\frac{110}{144}$ или $\frac{55}{72}$.

Чтобъ ошыскашь число копеекъ и полушекъ, содержащихся въ дроби 0,716 руб. должно сначала умножишь на 100 и получашь 71,6 коп., потомъ умноживъ 0,6 на 4, получашь 2,4 пол. слѣд. 0,716 = 71 2,4. руб. коп. п.

Сошавное количесшво обращаюшъ въ десяшичную дробь, превращивъ оное сначала въ просшую, а сію послѣднюю въ десяшичную (чл. 49).

III. О СТЕПЕНЯХЪ и КОРНЯХЪ.

Составленіе степеней.

60. Помножая число само на себя 1, 2, 3, ... раза, получаемъ 2-ю, 3-ю, 4-ю, ... сшепени онаго. Слѣдующая шаблица предсшавляешъ первыя 9 сшепеней чиселъ ошъ 1 до 9.

1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

квадрашъ $\frac{3}{5}$ (чл. 41, 5-е) есшь $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$; а кубъ $\frac{27}{125}$ ...

Для сосшавленія высшей сшепени можно избѣгашь послѣдовашельнаго перехода ошъ квадрана къ кубу, ошъ куба къ чешвершой сшепени, и проч. Пусшь шребуешся 3^{11}; шакъ какъ 3 должно бышь одинадцашь разъ производишелемъ, то разложимъ 11 на

$5+4+4$; получимъ $3^{11}=3^5\times3^4\times3^4$. Изъ сего видно, что *должно разложить показателя предложенной степени на другіе, которыхъ бы сумма равнялась оному; произшедшія отъ сего степени умножить между собою;* такъ что *въ умноженіи показатели складываются.* Здѣсь $3^5=27$, $3^4=81$; умноживъ сіи степени, найдемъ $3^7=2187$; которую умноживъ снова на 81, получимъ $3^{11}=177147$.

Замѣтимъ, что $3^4\times3^4$ есть квадратъ отъ 3^4, или $81^2=6561$; и такъ умноживъ $(3^4)^2$ или 6561 на $3^5=27$, получимъ также 3^{11}; 12-я степень будетъ $3^4\times3^4\times3^4=$ кубу отъ 3^4 или $(3^4)^3$, найдемъ $3^{12}=81^3=531441$; раздѣливъ на 3, произойдетъ $3^{11}=177147$. Вообще должно *разложить предложенную степень на два производителя, составить степень означаемую общимъ изъ показателей оныхъ; окончательное выраженіе возвысить въ степень другаго показателя;* или иначе, *чтобы возвысить въ степень, должно умножить показателей.* (смотр. чл. 124). На пр: для 5^{17} изобразимъ оное чрезъ $\frac{1}{5}\times5^{18}$. Но какъ $18=2\times3\times3$, то $5^{18}=5^{2\times3\times3}$; по сему составивъ квадратъ 5, возвысимъ оный въ кубъ, потомъ окончательное выраженіе опять въ кубъ, и получимъ 18-ю степень; послѣ чего раздѣлимъ на 5, дабы найти 17-ю степень. Вотъ самое вычисленіе: $5^2=25$; $25^3=5^6=15625$, котораго кубъ есть $5^{18}=3\,814\,697\,265\,625$, наконецъ $5^{17}=762\,939\,453\,125$. Легко замѣтимъ, какъ быстро возрастаютъ степени. 60-я степень 2-хъ есть 115292 послѣдуемое 13-ю другими цыфрами.

Извлеченіе квадратныхъ корней.

61. Квадратъ двузначнаго числа, на пр: 35-ти, составляется умноживъ 35 на 35; сіе дѣйствіе требуетъ четырехъ частныхъ произведеній: 1-е, 5 на 5 или квадрата единицъ, 2-е, 30×5 или произведенія десятковъ

на единицы, 3-е въ другой разъ 30×5; 4-е, 30×30 или квадраша десяшковъ. Слѣдоваиельно квадрашъ двузначнаго числа сосшоишъ *изъ квадрата десятковъ, изъ удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы, и наконецъ изъ квадрата единицъ.* И шакъ $35^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$.

Чшобъ помножишь $7 + 5$ на $7 + 5$, множашъ снача̀ла 7 и 5 на 7, пошомъ на 5, и складываюшъ; ошъ чего получашъ $7^2 + 7 \times 5$, и $7 \times 5 + 5^2$. И шакъ 12^2 будешъ $= 49 + 25 + 2 \times 35 = 144$. посему для сосшавленія квадраша изъ $7 + 5$, недосшашочно одныхъ квадрашовъ 7-ми и 5-ти, но должно еще приложишь двойное произведеніе 7-ми на 5. *Квадратъ двучленнаго числа состоитъ изъ квадратовъ каждаго члена, сложенныхъ съ двойнымъ ихъ произведеніемъ* (смотр. чл. 97, 1-е).

62 Квадраты 10-ти, 100, 1000.. сушь 100, 10000, 1000000, или 1 съ удвоеннымъ числомъ нулей находящихся въ корнѣ; посему квадрашъ каждаго однозначнаго числа, или числа содержащагося между 1 и 10, заключаешся между 1 и 100, ш: е: сосшоишъ изъ 1 или изъ 2 цыфръ: шакимъ же образомъ квадрашъ каждаго двузначнаго числа сосшоишъ изъ 3 или 4 цыфръ и проч. Вообще, *квадратъ имѣетъ вдвое болѣе или вдвое болѣе безъ 1 цыфръ корня* (стр. 21).

Присшупимъ къ извлеченію квадрашныхъ корней: корни однозначныхъ и двузначныхъ чиселъ находящся въ шаблицахъ чл: 14 и 60; оношеишельно прочихъ, должно замѣшишь два случая.

1-й случай: Если предложенное число, какъ на пр: 784, сосшоишъ изъ 3 или 4 цыфръ, шо корень онаго имѣешъ двѣ; и 784 сосшавлено изъ квадраша десяшковъ корня, изъ квадрапа единицъ онаго, и изъ удвоеннаго произведенія десяшковъ на единицы. Но какъ первая изъ сихъ часшей образуешся прибавленіемъ двухъ нулей къ квадрашу цыфры десяшковъ (чл. 13,

3-е ; слѣд: сей квадратъ въ сложеніи означенныхъ трехъ частей занимаетъ мѣсто сотенъ. Посему когда отдѣлишь двѣ цыфры 84, то 7 будетъ заключать квадратъ цыфры десятковъ, разсматриваемой какъ простыя единицы, и еще сотни произходящія отъ другихъ частей квадрата.

Взявъ *корень наибольшаго квадрата* 4-хъ, содержащагося въ 7, получимъ цыфру искомыхъ десятковъ; ибо такъ какъ 7 заключается между квадратами 2-хъ и 3-хъ, то предложенное число 784 содержится между 20^2 и 30^2, слѣд. корень онаго находится между 20 и 30, и 2 будетъ цыфра десятковъ.

Вычтемъ 4 изъ 7: останокъ 3 содержитъ удержанныя сотни, произшедшія отъ квадрата единицъ, и удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы: посему 384 составлено изъ сихъ двухъ частей.

Чтобъ составить удвоенное произведеніе десятковъ на единицы, множатъ удвоенную цыфру десятковъ на единицы, и приписываютъ съ правой руки нуль. И такъ при сложеніи сіе произведеніе занимаетъ мѣсто десятковъ и заключается слѣд. въ 38, отдѣливъ отъ 384 цыфру 4 единицъ: сверхъ того въ 38 содержатся десятки, произшедшіе отъ квадрата единицъ, и разносятъ съ ближайшимъ полнымъ квадратомъ. Если бы сіи десятки были извѣстны, тогда отнявъ оные отъ 38, остатокъ выражалъ бы вышесказанное удвоенное произведеніе; посему раздѣливъ его на 4 удвоенную цыфру десятковъ, получили бы въ частномъ искомыя единицы. И такъ раздѣливъ 38 на 4, дѣлимое будетъ болѣе настоящаго; слѣд. *частное можетъ быть слишкомъ велико;* но оное легко поправить.

Ибо, ежели частное $\frac{38}{4}$, или въ цѣлыхъ числахъ 9, представляетъ въ самомъ дѣлѣ единицы, то поставя 9 возлѣ 4 удвоенной цыфры десятковъ, 49 будутъ удвоенные десятки сложенные съ единицами; 49×9

удвоенное произведеніе десятковъ на единицы, съ квадратомъ единицъ; но $49 \times 9 = 441 > 384$, слѣд. 9 слишкомъ велико. Подобнымъ образомъ зададутся цыфрою 8, и какъ $48 \times 8 = 384$, будучи вычтено изъ осташка, даетъ 0, слѣд. ясно, что 784 есть полный квадратъ 28-ми. Здѣсь представленъ ходъ сего вычисленія, равно какъ $\sqrt{2735}$, равняющагося 52-мъ, съ осташкомъ 31, такъ что 52 есть корень наибольшаго квадрата, содержащагося въ 2735-ти, то есть 2735 — 31 или 2704. Также найдутъ, что $\sqrt{121} = 11$.

7.8 4	28
3 8.4	49 48
3 8 4	9 8
0	441 384

27.3 5	52
2 3.5	102
2 0 4	2
3 1	204

1.2 1	11
2.1	21
2 1	1
0	21

2-й случай: Также должно разсуждать, когда квадратъ имѣетъ болѣе четырехъ цыфръ; ибо хотя въ семъ случаѣ въ корнѣ будетъ болѣе двухъ знаковъ, однако же оный можно разсматривать, какъ составленный изъ десятковъ и единицъ; напр. въ 525-хъ заключается 52 десятка и 3 единицы.

Такимъ же образомъ для 273529, увидимъ, что квадратъ десятковъ, принимаемыхъ за простыя единицы, заключается въ 2735-ти, и что корень наибольшаго квадрата, содержащагося въ 2735-ти, даетъ десятки. Предъ симъ нашли въ корнѣ 52 и осташокъ 31; по чему снеся 29 къ 31-му, получатъ 3129 для удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы, сложеннаго съ квадратомъ единицъ; опустивъ цыфру 9, раздѣлятъ 312 на 104, т. е. на удвоенные десятки 52; найдутъ единицы корня, или число большее оныхъ.

27.3 5.2 9	523
2 3.5	102 1043
2 0 4	2 3
3 1 2.9	204 3129
3 1 2 9	
0	

Наконецъ, посмавя частное 3 съ права 104-хъ, и умноживъ 1043 на 3, вычтутъ произведеніе 3129 изъ осташка 3129; слѣд. 523 есть точный искомый корень.

Сіе разсужденіе можно приложить ко всякому числу; очевидно, что надлежитъ оное разбить на двузначныя грани, начиная съ правой руки; отъ чего если число цыфръ не четное, то въ послѣдней грани останется одна цыфра. Каждая грань даетъ въ корнѣ одну цыфру, получаемую вышеозначеннымъ дѣйствіемъ. Слѣд: весьма легко судить (à priori) о числѣ цыфръ корня даннаго числа. Когда сей корень не точный, то чрезъ вычисленіе получимъ остатокъ; въ слѣдъ за симъ покажемъ, какъ поступать съ симъ остаткомъ, дабы приближиться къ корню.

Замѣтимъ также, что безполезно писать различныя вычитаемыя произведенія, и что можно какъ и въ дѣленіи (стр. 30) дѣлать умноженіе и вычитаніе вдругъ.

11.1 1.0 8.8 8.89	33 333	54.0 0.0 0. 00	7348
21.4	63 663	5 0.0	143 × 3
189	3 3	7 1 0.0	1464 × 4
220.8	189 1989	1 2 4 4 0.0	14688 × 8
1989	6663 66663	ост. . 6896	
2198.8	3 3		
19989	19989 199989		
199898.9			
остат... 0			

Для навыка не худо рѣшить слѣдующіе примѣры: $\sqrt{7\,283\,291}$, $\sqrt{3\,179\,421}$, равные 2698 и 1783.

63. *Соизмѣримыми*, или *раціональными* числами, называются тѣ, которыя имѣютъ общую мѣру съ единицею: на пр: $\frac{2}{5}$, по тому что 5-я доля единицы содержится 5 разъ въ 1, и 2 раза въ $\frac{2}{5}$. Но *всякое цѣлое число, которое не есть точный квадратъ другаго цѣлаго, тѣмъ болѣе не можетъ быть квадратомъ дробнаго числа и слѣд. не соизмѣримо съ единицею.* Ибо если бъ общая мѣра содержалась на пр: 5 разъ въ единицѣ, и 13 разъ въ $\sqrt{7}$, такъ что (чл. 36) корень изъ 7 выразился бы въ точности чрезъ

$\frac{13}{5} = \sqrt{7}$, что возвысивъ въ квадратъ, получили бы $\frac{169}{25} = 7$; что не возможно, ибо сіи двѣ дроби несократимы (чл. 41, 5-е).

Такъ какъ не возможно раздѣлить единицу на равныя части, столь мѣлкія, чтобъ одна изъ оныхъ содержалась цѣлое число разъ въ $\sqrt{7}$, и какъ никакая дробь не выражаетъ въ точности $\sqrt{7}$, то для полученія совершенной мѣры онаго, должно взять другую единицу (чл. 36); иначе надо довольствоваться приближеніемъ, сдѣлавъ части единицы столь малыми, чтобы разность между $\sqrt{7}$ и нѣкоторымъ числомъ сихъ частей могла быть опущена какъ незначительная. На пр: если единица содержитъ 100 частей, и 2 единицы = 64 таковыхъ частей $< \sqrt{7}$, между тѣмъ, какъ 65 $> \sqrt{7}$, т: е: что 7 содержится между квадратами 2,64-хъ и 2,65-хъ: то говорятъ, что $\sqrt{7}$ заключается между сими числами, и что степень вѣрности сего корня доведена менѣе чѣмъ до одной сотой; симъ объясняется выше сказанное, что къ $\sqrt{7}$ можно приближаться по произволенію, хотя оный въ числахъ не существуетъ.

Если потребуютъ, чтобы степень вѣрности простиралась менѣе чѣмъ до 5-й доли единицы, то надлежитъ опыскать, сколько $\sqrt{7}$ содержитъ сихъ 5-хъ долей, т: е: найти двѣ дроби, какъ на пр: $\frac{13}{5}$ и $\frac{14}{5}$, имѣющія 5 знаменателемъ, а разностью числителей единицу, и содержащія между собою $\sqrt{7}$, или 7 между квадратами оныхъ. Чтобы получить сіи числители 13 и 14, возьмемъ квадраты нашихъ дробей и $\sqrt{7}$-ми, умноженные на 25; 25×7 будетъ заключаться между квадратами неизвѣстныхъ числителей, а слѣд. $\sqrt{(25 \times 7)}$ или $\sqrt{175}$ между сими числителями. Такъ какъ $\sqrt{175}$ находится между 13 и 14, слѣд: $\frac{13}{5}$ и $\frac{14}{5}$ суть искомыя дроби, или величины приближенныя къ $\sqrt{7}$ менѣе

чѣмъ на $\frac{1}{5}$, одна недостаткомъ, а другая избыткомъ *).

Такимъ же образомъ, чтобъ получить $\sqrt{3\frac{5}{7}}$) менѣе, чѣмъ до $\frac{1}{11}$ степени вѣрности, множатъ $3\frac{5}{7}$ на 11^2, или на 121; получатъ $449\frac{5}{7}$, изъ котораго надлежитъ извлечь корень *въ цѣлыхъ числахъ*. оный будетъ 21, такъ что $\sqrt{3\frac{5}{7}}$ заключается между $\frac{21}{11}$ и $\frac{22}{11}$ или 2. Замѣтимъ, что въ $119\frac{5}{7}$ отбрасываютъ не только дробь $\frac{5}{7}$, но и весь излишекъ 449-ти надъ квадратомъ 21-го. *Для извлеченія корня изъ какого-нибудь числа до извѣстной степени вѣрности, умножаютъ оное на квадратъ даннаго знаменателя, и изъ произведенія извлекаютъ корень въ цѣлыхъ числахъ: оный будетъ искомый числитель.*

64. Ежели пожребуютъ приблизиться помощію десятичныхъ, т: е: менѣе чѣмъ на 0,1, 0,01..., то множатъ число на квадраты 10, 100..., для чего стоитъ только *переносить запятую въ-право чрезъ два знака столько разъ, сколько желаютъ получить десятичныхъ*, прибавляя, если нужно, приличное число нулей. $\sqrt{0,5}$ менѣе чѣмъ до 0,01 вѣрности, будетъ $\frac{1}{100}\sqrt{5000}$, перенеся запятую чрезъ четыре цифры, или $\frac{1}{100}\times 54 = 0,54$. Также $\sqrt{5,7}$ менѣе чѣмъ до $\frac{1}{100}$ вѣрности будетъ $\frac{1}{100}\sqrt{57000}$, или 2,38.

(*) Если единица раздѣлена на q равныхъ частей, то чтобъ узнать наибольшее число x сихъ частей, содержащихся въ $\sqrt{N}$, т: е: чтобы получить дробь $\frac{x}{q}$, приближенную къ $\sqrt{N}$ менѣе чѣмъ на q-ю часть единицы, должно опредѣлить x такъ, чтобы $\frac{x}{q}$ было $< \sqrt{N} < \frac{x+1}{q}$, но $\sqrt{N} - \frac{q}{q}\sqrt{N} = \frac{\sqrt{(Nq^2)}}{q}$ слѣдовательно: $x < \sqrt{(Nq^2)} < x+1$, т: е: что x есть наибольшее цѣлое, содержащееся въ $\sqrt{(Nq^2)}$.

Чтобы не приписывать къ предлагаемому числу длинный рядъ нулей, достаточно прибавлять по два нуля къ каждому остатку, какъ сіе сдѣлано въ приложенныхъ на сторонѣ вычисленіяхъ $\sqrt{321}$ и $\sqrt{2}$. Очевидно, что для полученія одной десятичной достаточно прибавить два нуля къ остатку 52 или къ 1. Для 2-й десятичной, такимъ же образомъ приписываютъ два нуля къ остатку 59 или къ 4 и проч.... означивъ точечкѣ послѣ сего въ корнѣ мѣсто занятой, продолжаютъ такимъ образомъ вычислять до извѣстной степени вѣрности, прибавляя къ каждому послѣдовательному остатку два нуля.

3.24 | 1,0...
224 | 2
3 20.0 | 349
5 90.0 | 2451
2 31 00.0 | 358 6
16 94 4 и пр.

2 | 1,41421...
19.0 | 24
40.0 | 281
11 90.0 | 2824
60 40.0 | 28283
3 83 600 | 282841
1 00 759 и пр.

Корень произведенія равенъ произведенію корней: и такъ для $144 = 9 \times 16$, получимъ $\sqrt{144} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$. Сіе правило, основанное на вышесказанномъ въ чл. 60-мъ, можетъ служить къ сокращенію извлеченія корней:

$\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2} = 2 \times 1,4142\ldots = 2,82842712.$

65. *Корень дроби получится извлекая оный изъ обоихъ ея членовъ.* Сіе основано на составленіи квадрата (чл. 41, 5-е). $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

Корень неизвлекомъ, когда оба члена не точные квадраты; еслибъ на пр: $\sqrt{\frac{3}{7}}$ могъ равняться другой дроби, какъ $\frac{5}{11}$, то $\frac{3}{7}$ была бы равна $\frac{25}{121}$, что не возможно чл. 58, 3-е. И такъ къ корню можно приближиться только до нѣкоторой степени вѣрности, означенной свойствомъ вопроса; въ такомъ случаѣ поступаютъ, какъ въ (чл. 63). На пр: $\sqrt{\frac{3}{7}}$ менѣе, чѣмъ до $\frac{1}{11}$ вѣрности найдется; помноживъ $\frac{3}{7}$ на $121 = 11^2$, получатъ $\sqrt{\frac{363}{7}} = \sqrt{51\frac{6}{7}}$; и взявъ $\sqrt{51}$ въ цѣлыхъ числахъ найдутъ, что $\sqrt{\frac{3}{7}}$ заключается между $\frac{7}{11}$ и $\frac{8}{11}$.

Замѣтимъ, что $\sqrt{\frac{5}{7}}$ можно принять $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$, ибо помноживъ сіе выраженіе само на себя, получимъ въ произведеніи 5. Но отъ сего двоякаго извлеченія проходятъ двѣ приближенныя величины, и степень приближенія будетъ неопредѣленна. Часто случается, что оныя узнаютъ только при концѣ вычисленія, посему сіе дѣйствіе должно такъ производить, чтобъ степень вѣрности была неограничена. Для сего умножаютъ оба числа подъ радикаломъ на знаменатель, дабы сдѣлать оный извлекомымъ; $\frac{5}{7}$ превратится въ $\frac{35}{49}$, помноживъ оба числа на 7, и $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$; потомъ извлекаютъ $\sqrt{35}$ до требуемой степени вѣрности. На пр. ежели $\sqrt{21}$ взять $= 4{,}582$, то сіе разнствующее менѣе, чѣмъ на 0,001, но 7-я часть онаго или $\sqrt{\frac{5}{7}} = 0{,}654$, величина приближенной менѣе, чѣмъ на одну 7000-ю.

Если бы требовалось извлечь $\sqrt{\frac{5}{7}}$ до $\frac{1}{7}$ вѣрности, то тамъ нашли бы, что $\frac{1}{7}\sqrt{21}$, заключается между $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{7}$. Для $\sqrt{(5\frac{1}{7})}$, напишутъ $\sqrt{\frac{36}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{26 \times 7}$; но $\sqrt{182} = 13{,}1907\ldots$, слѣд: 7-я часть онаго будетъ $\sqrt{(5\frac{1}{7})} = 1{,}9272\ldots$

66 Если неизвлекомые корни входятъ въ вычисленіе, и какъ только приближенныя оныхъ величины могутъ быть полезны, то и надлежитъ ихъ всегда разсматривать въ семъ смыслѣ, смотр. чл. 115. Посему можно судить изъяснить слѣдующія предложенія, какъ и для дробныхъ чиселъ:

$\sqrt{4} \times \sqrt{7} = \sqrt{7 \times 4} = \sqrt{16 \times 7}$; $\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Можно помножить на одно и тоже число оба числа неизвлекомой дроби; на пр:

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{(5.5)}}{\sqrt{(7.5)}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Заключимъ нѣкоторыми замѣчаніями.

*

1-е. Должно всегда пригошовлять числа такимъ образомъ, чтобъ извлекать корень изъ цѣлыхъ чиселъ.

2-е. Число десятичныхъ знаковъ квадрата всегда четное, и вдвое болѣе числа знаковъ корня. Чтобы сіе условіе выполнилось во всякомъ случаѣ, надлежитъ прибавлять нули или умножать десятичныя.

3-е. Такъ какъ каждой грани соотвѣтствуетъ одна цыфра въ корнѣ, то и нельзя задаваться въ ономъ болѣе 9.

4-е. Когда извѣстенъ квадратъ цѣлаго, какъ на пр: 18-ти, то квадратъ слѣдующаго числа 19-ти найдется такимъ образомъ: Поелику $19 = 18 + 1$, то квадратъ онаго будетъ $18^2 + 2.18 + 1$ (чл. 61); посему прибавятъ 37 къ 324, т. е. къ квадрату 18-ти, и получатъ $361 = 19^2$. Вообще, *когда извѣстенъ квадратъ какого-нибудь цѣлаго, то придавъ къ оному сіе удвоенное число и единицу, получится квадратъ слѣдующаго цѣлаго числа.* Изъ сего слѣдуетъ, что осташокъ каждой грани не можетъ быть вдвое болѣе найденнаго корня; ибо въ такомъ случаѣ надлежало бъ прибавить къ оному 1-цу.

5-е. Повѣрка извлеченія совершится, когда возвысятъ корень въ квадратъ; для сего надлежитъ корень умножить самаго на себя, и прибавить къ произведенію осташокъ; въ суммѣ получатъ предложенное число; впрочемъ сей осташокъ долженъ быть менѣе удвоеннаго корня. Можно также повѣрить посредствомъ 9-ти, 11-ти .... какъ то было сказано въ чл. 35-мъ, 5-е.

Извлеченіе кубическихъ корней.

67. Прежде извлеченія кубическаго корня надлежитъ взслѣдовать законъ составленія куба, т. е. произведеніе числа на его квадратъ. Предположивъ сіе число разложеннымъ на двѣ части, увидимъ (чл. 61), что его квадратъ состоитъ изъ квадратовъ первой и

Корни чиселъ <1000 имѣя одну только цыфру, получаются изъ таблицы (стр. 90). Извлеченіе изъ прочихъ чиселъ можно раздѣлить на два случая:

1-й случай: Если корень состоитъ изъ двухъ цыфръ, какъ на пр: корень изъ 21 952, то замѣтимъ, что кубъ искомыхъ десятковъ составится, когда къ кубу цыфры десятковъ припишутъ справа 3 нуля (стр. 17-я). И такъ отдѣливъ отъ предложеннаго числа три цыфры 952, въ 21 будетъ содержаться кубъ десятковъ, разсматриваемыхъ какъ простыя единицы, и цысячи, происходящія отъ прочихъ частей Наибольшій кубъ содержимый въ 21 есть 8, коего корень 2, соотвѣтствуетъ цыфрѣ десятковъ; ибо какъ 21 находится между кубами 2-хъ и 3-хъ, такъ корень 21952-хъ будетъ между 20 и 30.

Вычтемъ 8 изъ 21, останокъ 13952 представляетъ прочія три части куба; но произведеніе утроеннаго квадрата десятковъ на единицы составится, умноживъ единицы на утроенный квадратъ 2-хъ, т: е: на 12 и приписавъ сверхъ того справа два нуля: посему отдѣлимъ двѣ цыфры 52: въ 139 будутъ заключаться единицы взятыя 12 разъ, и сіи, произшедшія отъ двухъ прочихъ частей куба, слѣд. раздѣливъ 139 на 12, частное будетъ искомыя единицы, или число бо́льшее оныхъ, и такъ какъ сія цыфра не болѣе 9, то за частное принимается 9.

Остается повѣрить, не будетъ ли 9 болѣе искомыхъ единицъ. Для сего подъ 1200, изображающими утроенный квадратъ десятковъ, подпишемъ утроенное произведеніе десятковъ на 9 или $3.20.9=540$: потомъ квадратъ 9-ти или 81, и помножимъ сумму 1821 на 9. Если 9 будетъ цыфра единицъ, то произведеніе должно быть равно, о-

21.952	28 *	
8	12	12
13952	54	48
13952	81	6*
0	1821	174
	9	8
	16389	13952

статкѣ или менѣе онаго, ибо такимъ образомъ со-

сказавшіяся причасти содержащіяся въ семъ остаткѣ. Сіе произведеніе болѣе 13952, слѣд. единицы < 9. Посему зададимся 8, и какъ совершивъ нужде повѣрку, найдешь 13952, що очевидно, что 28 есть точный кубическій корень 21952-хъ. Сіе разсужденіе сходно съ изложеннымъ при дѣленіи и при извлеченіи квадратныхъ корней (чл. 18, 62); легко вывесть правило, коему надлежитъ слѣдовать въ семъ родѣ вычисленій.

2-й случай: Если въ корнѣ болѣе 2-хъ знаковъ, какъ для числа 12 305 472 000, що должно разсуждать сходно съ изложеннымъ въ чл. 62, 2-е. Мы найдемъ, что надлежитъ, 1-*е разложить число на трезначныя грани, начиная съ права.*

2-е. *Извлечь кубическій корень изъ послѣдней грани* 12; оный равняется 2-мъ, цыфрѣ тысячъ корня: вычтя 8 кубъ тысячъ изъ 12, остается 4.

3-е. *Снести къ сему остатку* 4, *слѣдующую грань* 305, *отъ которой отдѣлить двѣ цыфры* 05, *и раздѣлить* 43 *на* 12, *т: е: на утроенный квадратъ полученной цыфры.* Частное 3 должно повѣрить по вышесказанному; найдешь 3 сомни, и 138 въ остаткѣ.

4-е. *Снести къ сему остатку грань* 472, отдѣлишь ошъ оной такимъ же образомъ 72, и раздѣлишь 1384 на 1587, ш: е: на утроенный квадратъ 23-хъ; частное нуль напишешь въ корнѣ.

5-е. *Снести къ сему остатку грань* 000, *и раздѣлить* 1384720 *на* 138700.

И ш: д: Вотъ ходъ сего вычисленія:

	12.3 05.4 72.000	2308	корень.
	4 3.05	12	15 870 0
	4 1 67	18	55 20
	1 38 4.72	9	64
	1 38 4 72 0.00	1389	15 92ъ 264
	1 27 4 02 1 12	3	8
остатокъ	11 0 69 8 88	4167	127 402 112

69. Подобно какъ въ чл. 63 докажешь, что 1-е. если цѣлое число, какъ на пр: 5, не есть точный кубъ

второй части, и изъ удвоеннаго произведенія сихъ двухъ частей. Сумму сихъ трехъ количествъ надлежитъ умножить на обѣ части предложеннаго числа. Помноживъ сначала на первую, получимъ:

	$7^2+2\times7\times5+5^2$	вычисл.
	$7+5$	$(7+5)^3$.
1-е. Кубъ 1-й части	7^3	
2-е. Удвоенное произведеніе квадрата 1-й на 2-ю	$2\times7^2\times5$	
3-е. Произведеніе 1-й на квадратъ 2-й	7×5^2	

Такимъ же образомъ умноживъ три части квадрата на 2-ю часть даннаго числа, получимъ.

1-е. Произведеніе квадрата 1-й на 2-ю	$7^2\times5$	
2-е. Удвоенное произведеніе квадрата 2-й на 1-ю	$2\times7\times5^2$	
3-е. Наконецъ кубъ 2-й	5^3	
	$7^3+5\times7^2\times5+3\times7\times5^2+5^3$	

Совокупя сіи шесть произведеній замѣтимъ, что кубъ каждаго двучастнаго числа составленъ изъ четырехъ членовъ (см. чл. 97, 2-е): 1-е. *Изъ куба первой части;* 2-е. *изъ утроеннаго произведенія квадрата первой на вторую;* 3-е. *изъ утроеннаго произведенія квадрата второй на первую;* 4-е. *изъ куба второй части.*

Заключимъ изъ всего, что кубъ всякаго числа, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, равенъ *кубу десятковъ съ утроеннымъ произведеніемъ квадрата десятковъ на единицы, съ утроеннымъ произведеніемъ квадрата единицъ на десятки, и наконецъ съ кубомъ единицъ.*

68. Кубъ 1-цы, 10-ни, 100, 1000 .... составленъ изъ единицы, послѣдуемой утроеннымъ числомъ нулей; посему кубъ двузначнаго числа, т: е: находящагося между 10 и 100, будетъ заключаться между 1000 и 1000000; слѣд. онъ состоитъ изъ 4, 5 или 6 цыфръ. Вообще кубъ каждаго числа имѣетъ число цыфръ вдвое болѣе корня, или вдвое болѣе безъ 1, или вдвое болѣе безъ 2.

другаго цѣлаго, то оное имѣмъ болѣе не можетъ быть кубомъ дробнаго числа; но можно приблизишься къ нему до безконечности. Чтобъ получить $\sqrt[3]{3}$ разнствующій отъ истиннаго менѣе чѣмъ на $\frac{1}{4}$, множишь 3 на кубъ 4-хъ, и получишь 3×64 или 192, котораго кубическій корень въ цѣлыхъ равенъ 5: поэтому $\frac{5}{4}$ есть искомое число, $\sqrt[3]{3}$ содержится между $\frac{5}{4}$ и $\frac{6}{4}$. Такимъ же образомъ $\sqrt[3]{(3\frac{5}{7}}$ менѣе чѣмъ до $\frac{1}{11}$ степени вѣрности, получится, если извлекушъ въ цѣлыхъ изъ $3\frac{5}{7} \times 11^3 = 4943\frac{5}{7}$; оный будетъ равенъ 17; слѣд. $\frac{17}{11}$ разнствуетъ отъ $\sqrt[3]{3\frac{5}{7}}$ менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{11}$.

2-е. *Для приближенія къ корню посредствомъ десятичныхъ, должно перемѣщать запятую въ-право трезъ три знака столько разъ, сколько желаютъ получить десятичныхъ*, прибавляя для сего, если нужно, приличное число нулей. Чтобъ получить $\sqrt[3]{0{,}3}$ менѣе чѣмъ до $\frac{1}{100}$ степени вѣрности, извлекушъ $\sqrt[3]{300\,000}$, равный 67, слѣд. $\sqrt[3]{0{,}3} = 0{,}67$. Такимъ же образомъ $\sqrt[3]{5{,}7}$ менѣе чѣмъ до $\frac{1}{10}$ степени вѣрности, будетъ $\sqrt[3]{5700}$ равный 18, слѣд. искомый есть 1, 8 Наконецъ $\sqrt[3]{5{,}2178}$ менѣе, чѣмъ до $\frac{1}{10}$ будетъ $= \frac{1}{10}\sqrt[3]{3217} = 1, 5$.

3-е. Если предложенное число есть цѣлое, то достаточно къ каждому остатку приписывать по 3 нуля, пока не получится желаемое число десятичныхъ знаковъ.

Вотъ вычисленіе для $\sqrt[3]{477}$:

477		7,81339	
343		147	18252
1340.00		168	234
1315 52		64	1
24 480.00		16444	1827541
18 275 41		8	1
6 204 590.00			

и проч.

Найдушъ $\sqrt[3]{2} = 1{,}259921$, $\sqrt[3]{3} = 1{,}442249$.

4-е. Кубическій корень изъ дроби получится, извлекая оный изъ обоихъ ея членовъ: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$. Но ежели сіи члены не суть оба точные кубы, то докажутъ, какъ въ чл. 63, что корень несоизмѣримъ, и что можно получить только приближенную величину онаго. Ежели степень приближенія дана сначала, то поступаютъ по вышесказанному (*см.* 1-е); $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$ менѣе чѣмъ до $\frac{1}{3}$ степени вѣрности $= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{5} \times 27} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{10\frac{4}{5}}$, величина, содержащаяся между $\frac{2}{3}$ и 1, которыя суть искомыя окончательныя выраженія. Но если степень приближенія произвольна, въ такомъ случаѣ дѣлаютъ знаменателя полнымъ кубомъ, и находятъ приближенный корень числителя. Для $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$, возьмутъ $\frac{1}{7}\sqrt[3]{5 \times 49} = \frac{1}{7}\sqrt[3]{245} = \frac{1}{7} \times 6,2573 = 0,8939$. Также $\sqrt[3]{17\frac{2}{3}}$ или $\sqrt[3]{\frac{53}{3}}$ есть $\frac{1}{3}\sqrt[3]{477} = \frac{1}{3} \times 7,81339 = 2,604463 \ldots\ldots$

Мы здѣсь ничего неупомянемъ объ извлеченіи корней 4-й, 5-й, ... степени, для которыхъ нашли бы способы, сходные съ предыдущими (см. чл. 487); но замѣтимъ, что въ слѣдствіе чл. 60, если коренной показатель есть произведеніе нѣсколькихъ множителей, то оный можетъ разложиться на корни степеней послѣдовательно низшихъ. Посему, какъ $12 = 2 \times 2 \times 3$, то заключимъ, что 12-й степени корень равенъ двумъ квадратнымъ и одному кубическому корнямъ. Для $\sqrt[12]{244\,140\,625}$ извлекутъ сначала кубическій корень, равняющійся 625, потомъ $\sqrt{625}$ равный 25; наконецъ $\sqrt{25} = 5$ искомому 12-й степени корню. Таковое извлеченіе корней, есть дѣйствіе весьма затруднительное, но оно скоро сдѣлается весьма легкимъ, чрезъ изящныя свойства логариѳмовъ (чл. 87).

IV. О СОДЕРЖАНІЯХЪ

Объ Ариѳметическихъ и Геометрическихъ пропорціяхъ.

70. Величины можно сравнивать двоякимъ образомъ: или находя, чѣмъ одна болѣе другой, или сколько разъ одна содержится въ другой. Окончательное выраженіе такового сравненія получается въ первомъ случаѣ чрезъ вычитаніе, а во второмъ посредствомъ дѣленія. *Содержаніемъ* или *отношеніемъ* двухъ чиселъ называютъ частное, получаемое отъ раздѣленія одного на другое. Такимъ образомъ отношеніе 12-ти къ 4 есть 3, ибо 3 есть частное отъ 12 : 4. Можно бы также сказать, что отношеніе 12-ти къ 4 есть $\frac{4}{12}$ или $\frac{1}{3}$, ибо выраженія — что одно число вдвое больше другаго, или сіе послѣднее есть вдвое перваго — тожественны. Согласимся впредь дѣлить первое изъ выговариваемыхъ чиселъ на второе.

Первый членъ содержанія называется *предыдущимъ*, а второй *послѣдующимъ*.

Извѣстно (чл. 4), что разность двухъ чиселъ не измѣнится, если къ обоимъ числамъ придадимъ или изъ нихъ вычтемъ одно и тоже количество, и что содержаніе не перемѣнится (чл. 15), когда помножимъ или раздѣлимъ сіи два члена на тоже число.

$$12 - 5 = 13 - 6 = 11 - 4; \quad \frac{12}{12} = \frac{14}{8} = \frac{7}{2}.$$

Такъ какъ неизвлекомыя количества употребляются въ вычисленіи какъ приближенныя ихъ величины, посему легко составить ясное понятіе объ ихъ отношеніи чл. 66. Впрочемъ, иногда сіе отношеніе можетъ быть сопзмѣримо; на прим:

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{1} = \frac{2}{1}.$$

71. Если разность двухъ чиселъ, на пр: 10 и 8, равна разности другихъ двухъ 7 и 5; то сіи четыре количества составляютъ *Ариѳметическую пропорцію* Equidifference 10 — 8 — 7 — 5. Когда отношеніе двухъ чиселъ равно отношенію другихъ двухъ, тогда сіи четыре количества составляютъ *Геометрическую пропорцію*, произходящую отъ *равенства двухъ содержаній*: отношеніе 20-ти къ 10, равно какъ 14-ти къ 7, есть 2; посему сіи числа составятъ Геом: пропорцію, которая пишется такъ, 20 : 10 :: 14 : 7, и выговаривается: 20 *содержится къ* 10 *какъ* 14 *къ* 7. Можно также оную представить въ слѣдующемъ видѣ: $\frac{20}{10} = \frac{14}{7}$. Употребляя преимущественно сіе послѣднее изображеніе, что чаще случается, выговариваютъ оное по прежнему, т: е: 20 содержится къ 10 какъ 14 къ 7; а не 20 раздѣленныя на 10 равны 14-ти, раздѣленнымъ на 7, хотя оба сіи выраженія равно значительны.

Члены 20 и 7 называются *крайними*, а 10 и 14 *срѣдними*.

Если средніе члены равны между собою, то пропорція называется *непрерывною*, какъ на прим: 16 : 24 :: 24 : 36, которую пишутъ такъ : 16 : 24 : 36. Второй членъ называется *срѣднимъ пропорціональнымъ*.

Очевидно, что самое общее понятіе, какое только можно составить, объ *измѣреніи величинъ* (ч.л. 56), состоитъ *въ отысканіи отношенія оныхъ къ единицѣ одинакаго съ ними рода*. Посему говоря, что такая-то вещь $= \frac{5}{7}$, или равна седьмой долѣ единицы, взятой 5 разъ, надо разумѣть, что отношеніе сей величины къ единицѣ, равно отношенію 5-ти къ 7. Подобнымъ образомъ (ч.л. 63), отношеніе несоизмѣримаго $\sqrt{7}$ къ единицѣ, замѣняютъ отношеніемъ двухъ другихъ чиселъ, какъ на пр: 13 и 5, составляющихъ

хотя не точную, но приближенную Геом: пропорцію $\sqrt{7} : 4 :: 13 : 5$.

72. Равенство или неравенство двухъ разностей $10 - 8$ и $7 - 5$ не измѣнится, если къ обѣимъ приложатъ сумму $8 + 5$ вычитаемыхъ количествъ; чрезъ что получатъ $10 + 5$ и $7 + 8$. Слѣд. въ Ариѳметической пропорціи $10 - 8 = 7 - 5$, *сумма крайнихъ равна суммѣ среднихъ членовъ; и обратно*, если $10 + 5 = 7 + 8$, то и $10 - 8 = 7 - 5$.

Посему легко отыскать по тремъ извѣстнымъ членамъ Ариѳметической пропорціи четвертый членъ: ибо пусть требуется 4-й членъ x, когда 1-е три суть 10, 8 и 7; такъ какъ неизвѣстный x, сложенный съ 10-ю, долженъ быть $= 8 + 7$, слѣд. (чл. 4) $x - 8 + 7 - 10 = 5$; и получится пропорція $10 - 8 = 7 - 5$.

Чтобъ судить о равенствѣ или неравенствѣ двухъ содержаній $\frac{6}{3}$ и $\frac{14}{7}$, надлежитъ привесть ихъ къ одинакому знаменателю; получимъ 6×7 для одного, и 14×3 для другаго. Слѣд. *если произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то существуетъ Геом: пропорція, и обратно.*

Очевидно, что 1-е если даны четыре числа 6, 3, 14 и 7, такового, что произведенія 6×7 и 3×14 равны между собою, то изъ сего заключатъ о равенствѣ ихъ содержаній, или о существованіи Геом: пропорціи $\frac{6}{3} = \frac{14}{7}$ или $6 : 3 :: 14 : 7$. Такъ что всегда можно составлять Геом: пропорцію изъ производителей двухъ равныхъ произведеній.

2-е. Если средніе члены равны, то произведеніе оныхъ составляетъ квадратъ. Посему *средній пропорціональный между двумя числами равенъ квадратному корню изъ ихъ произведенія.* Средній пропорціональный между 3 и 12, есть $\sqrt{(3 \times 12)} = 6$, а именно $\div 3 : 6 : 12$. Обратно, если $6^2 = 3 \times 12$, то составится непрерывная пропорція

$$\div 3 : 6 : 12.$$

3-е. Если Геом: пропорція заключаетъ одинъ неизвѣстный членъ, на пр: $6 : 3 :: 14 : x$; що какъ произведеніе изъ 3 на 14 должно быть равно 6 разъ взятому неизвѣстному, посему оное равно (чл. 5) частному отъ 3×14, или 42-хъ, раздѣленныхъ на 6, или $\frac{42}{6}$. $= 7$; слѣд. $6 : 3 :: 14 : 7$. Вообще, *одинъ изъ крайнихъ членовъ найдется, когда произведеніе среднихъ раздѣлится на извѣстный крайній.* Если бы неизвѣстный былъ однимъ изъ среднихъ, що раздѣливши бы произведеніе крайнихъ на извѣстный средній.

4. Пропорція неуничтожается отъ измѣненія порядка различныхъ членовъ, опую составляющихъ, лишь бы произведеніе крайнихъ членовъ равнялось произведенію среднихъ. Посему для $6 : 3 :: 14 : 7$, дающей $6 \times 7 = 3 \times 4$, можно

I. Перемѣстить средніе или крайніе между собою (*alternando*); и такъ

$$6 : 14 :: 3 : 7$$
$$\text{или } 7 : 3 :: 14 : 6$$
$$\text{или } 7 : 14 :: 3 : 6$$

II. Поставить крайніе на мѣсто среднихъ (*invertendo*)

$$3 : 6 :: 7 : 14.$$

III. Наконецъ умножить или раздѣлить оба предыдущіе или оба послѣдующіе на одно и то же число. чл. 70).

73. Примѣнивъ предложеніе чл. 38-го, 5-е къ Геом: пропорціи $30 : 6 :: 15 : 3$, или $\frac{30}{6} = \frac{15}{3}$, найдемъ, что

$$\frac{30 \pm 15}{6 \pm 5} = \frac{15}{3} \text{ и } \frac{30 + 15}{6 + 3} = \frac{30 - 15}{6 - 3}.$$

Составивъ произведенія изъ среднихъ и крайнихъ членовъ, можно 5×15, общее обѣимъ, уничтожить, и останутся произведенія: 30×3 и 15×6, равныя въ слѣдствіе данной пропорціи. Посему, 1-е. Сумма *или разность предыдущихъ содержится къ суммѣ или разности послѣдующихъ, какъ одинъ предыдущій содержится къ своему послѣдующему.*

2-е. *Сумма предыдущихъ содержится къ ихъ разности, какъ сумма послѣдующихъ къ разности оныхъ.*

3-е. Пусть будетъ рядъ равныхъ содержаній $\frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{30}{15}$, получимъ $\frac{6+10+14+30}{3+5+7+15} = \frac{14}{7} = \frac{30}{15}$; посему *во всякомъ ряду равныхъ содержаній, сумма предыдущихъ содержится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ предыдущій содержится къ своему послѣдующему.*

4-е. Если обратишь данную пропорцію, то получишь $50 : 15 :: 6 : 3$, откуда $\frac{30-6}{15-3} = \frac{6}{3}$. (*Componendo, Dividendo*).

74. *Можно двѣ пропорціи перемножить почленно.* Въ самомъ дѣлѣ $50 : 15 :: 6 : 3$ и $2 : 3 :: 4 : 6$ даютъ равныя дроби $\frac{50}{15} = \frac{6}{3}$ и $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; умноживъ получимъ $50 \times 2 : 15 \times 3 :: 6 \times 4 : 3 \times 6$.

Посему можно пропорцію *возвысить въ квадратъ, въ кубъ*, а слѣд: также *извлечь квадратный, кубическій . . . . . корни.*

О тройныхъ Правилахъ.

75. **Когда данныя величины задачи могутъ составить пропорцію, коей послѣдній членъ есть неизвѣстное, тогда величина онаго опредѣлится простымъ вычисленіемъ (чл. 72, 3-е): сіе называютъ *Тройнымъ правиломъ*. И такъ: 50 рабошниковъ вырыли земли 20 саженъ; сколько выроютъ въ тоже время 21 рабошникъ? Согласимся покуда, что условія сего вопроса выражены пропорціею, $30 : 20 :: 21 : x$, означивъ чрезъ x число искомыхъ саженъ, найдемъ, что сіе неизвѣстное $x = \frac{20\,21}{30} = 14$.**

Чтобы рѣшить предложенный вопросъ, посредствомъ тройнаго правила, необходимо увѣриться, можетъ ли рѣшеніе зависѣть отъ пропорціи; посмѣ чего

остается только числамъ, заключающимся въ вопросѣ, дать приличныя въ оной мѣста.

Рѣшеніе вопроса завненитъ опыт тройнаго правила, когда условія онаго составляютъ два отдѣленія, и если два члена перваго изъ оныхъ соотвѣтственно *однородны* двумъ членамъ другаго, т: е: когда *каждые два одинаковаго свойства;* и если *сіи члены могутъ быть умножены или раздѣлены на тоже число.* И такъ, въ нашей задачѣ, 50 рабошниковъ и 21 рабошникъ суть однородные, и сіи два числа можно множить на 4 или 3..., ничего не измѣняя въ задачѣ. Напротивъ того, такъ какъ время употребляемое для паденія камня неудвоивается отъ удвоенія высоты; изъ тройной бочки вышекаетъ жидкость не въ утроенное время: то сіи количества не могутъ подлежать Тройному правилу.

76. Найдя, что рѣшеніе задачи можетъ быть выражено пропорціею, надлежитъ каждому члену назначить приличное мѣсто. На послѣднемъ и третьемъ мѣстѣ ставятъ неизвѣстный членъ и его однородный, единственный, съ которымъ можно его уравнивать. Основавъ такимъ образомъ второе отношеніе, остается составить первое, заключающее другія два однородныя числа задачи. Но такъ какъ вопросъ показываетъ, которой изъ двухъ данныхъ членовъ, т: е: изъ неизвѣстнаго и его однороднаго, долженъ быть большій; и какъ предыдущіе члены должны быть оба или болѣе, или менѣе своихъ послѣдующихъ, посему легко рѣшить, которой изъ сихъ двухъ однородныхъ, еще непомѣщенныхъ членовъ, долженъ занимать 1-е или 2-е мѣсто.

Такимъ образомъ въ предыдущемъ примѣрѣ, написавъ 20 саженъ : x саженямъ; ясно, что 21 работ. сдѣлаютъ менѣе чѣмъ 50, и что послѣдующій x будетъ < 20; слѣдовательно, изъ двухъ чиселъ 50 и 21, 50 есть первый, и получимъ 50 : 21 :: 20 : x.

Слѣдующіе два примѣра объяснятъ вышесказанное:

Нѣкоторое дѣло окончено въ 5-ть дней 57-ю рабочими; сколько надобно дней для окончанія того же дѣла 19-ю рабочи. Такъ какъ можно взять вдвое или втрое болѣе дней и во столько же разъ менѣе рабочихъ, посему вопросъ зависитъ отъ пропорціи. Напишемъ сначала 5-ть дней : x днямъ; и какъ 19-ти рабочимъ потребно болѣе дней чѣмъ 57 для исполненія того же дѣла, посему x будетъ > 5; слѣдовательно 57 есть послѣдующій членъ перваго отношенія, и получимъ

$$19 \text{ раб} : 57 \text{ раб.} :: 5 \text{ дней} : x \text{ днямъ} = \frac{5 \cdot 57}{19} = 15 \text{ днямъ}.$$

Для обивки мебели, потребно 6 арш. шелковой матеріи, шириною въ $\frac{5}{4}$ арш: сколько пойдетъ оной въ $\frac{2}{3}$ ар. ширины? Хотя здѣсь всѣ четыре члена суть аршины, но ясно, что одни изображаютъ длину, а другіе ширину, и что 6 ар. и неизвѣстное, суть два однородные члена. И такъ, второе отношеніе пропорціи будетъ 6 ар. : x ар. Но широкой матеріи надобно менѣе, и какъ $\frac{5}{4} > \frac{2}{3}$, то получимъ $x > 6$, посему $\frac{2}{3}$ есть предыдущій членъ перваго отношенія, и найдемъ, что $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} :: 6 : x$, *откуда* $x = 6 \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = 6\frac{3}{4}$.

77. Хотя не трудно повторять каждый разъ сіе разсужденіе, но избѣгая онаго, вычисленіе производится скорѣе. Отношенія бываютъ двухъ родовъ: *прямое*, составленное изъ чиселъ вмѣстѣ увеличивающихся или уменьшающихся; и *обратное*, въ коемъ съ возрастаніемъ одного члена уменьшается другой. Въ первомъ вопросѣ 30 работниковъ и 20 сажень находятся въ прямомъ отношеніи; *ибо чѣмъ болѣе* работниковъ, *тѣмъ болѣе* произведется работы. Во второмъ напротивъ, 57 работниковъ и 5 дней находятся въ обратномъ отношеніи, потому что *чѣмъ болѣе* работниковъ, *тѣмъ менѣе* потребно времени для окончанія того же дѣла.

Когда члены вопроса находятся въ прямомъ отношеніи, то они помѣщаются въ пропорціи въ томъ порядкѣ, въ какомъ предложены въ вопросѣ, если только порядокъ однородныхъ членовъ одинаковъ въ обоихъ отдѣленіяхъ. Но если отношенія задачи обратныя, то члены въ пропорціи должны слѣдовать въ обратномъ порядкѣ, такъ чтобы послѣднее изъ чиселъ задачи было первымъ, предпослѣднее вторымъ, и проч..... *неизвѣстное же занимаетъ всегда четвертое мѣсто.* Все сіе происходитъ изъ вышесказаннаго.

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ тройнаго правила:

I. Нѣкто въ 8 дней проѣхалъ 50 верстъ; во сколько проѣдетъ 80 верстъ? Сіе правило прямое, ибо чѣмъ болѣе въ дорогѣ, тѣмъ болѣе проѣдетъ. Но однородные члены представляются въ обоихъ отдѣленіяхъ не въ одинаковомъ порядкѣ, и ошибочно было бы поставивши $8 : 50 :: 80 : x$. Выразимъ вопросъ слѣдующимъ образомъ:

Нѣкто сдѣлалъ 50 вер. въ 8 дней; во сколько дней проѣдетъ 80 верстъ? получимъ $50 : 8 :: 80 : x = 12\frac{4}{5}$.

II. Нѣкто совершилъ извѣстный путь въ 8 дней, употребляя для сего по 7-ми часовъ въ день: во сколько дней окончитъ онъ тотъ же путь, употребляя въ день по 10-ти часовъ? Правило обратное, ибо употребляя въ день болѣе часовъ, менѣе потребно времени для совершенія того же пути; и такъ $10 : 7 :: 8 : x = 5\frac{3}{5}$.

III. Если 10 фун. 23 л. $1\frac{1}{2}$ зол. серебра стоютъ 1117 руб. 5 коп., то что будетъ стоить 7 фун. 10 л. $2\frac{1}{2}$ зол.? Правило прямое; посему

10 фун. 23 лот. $1\frac{1}{2}$ зол. : 1133 р. 55 к. :: 7 фун. 10 лот. $2\frac{1}{2}$ зол. : x руб., или $\frac{2061}{\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}}$ фун. : 1133,55 р. :: $\frac{1409}{192}$ ф. : x руб.

Вычисленіе сократится (ча. 58 и 70), умноживъ предыдущіе члены на 192, и получимъ 2061 ф. : 1133,55 = 1409 : x. Найдемъ, что $x = 774$ руб. 95 коп.

IV. 6 эскадроновъ довольствовались извѣстнымъ запасомъ 54 дня; на сколько дней достало бы того же запаса 9-ти эскадронамъ? Правило обратное; отсюда $9 : 54 :: 6 : x = 36$.

V. На кораблѣ провіанта находился на 10 дней; но корабль долженъ пробыть въ морѣ 15 дней: во что обратятся раціоны? Здѣсь нѣтъ четырехъ членовъ; но очевидно, что одинъ подразумѣвается, и что задачу должно понимать слѣдующимъ образомъ: Каждому человѣку давали бы по 1-цѣ раціона, еслибъ пробыли въ морѣ 10 дней; но какъ должно оставаться 15 дней, то во что обратятся раціонъ? Правило обратное; и такъ $15 : 10 :: 1 : x = \frac{2}{3}$.

VI. Одинъ фонтанъ наполняетъ бассейнъ въ 6 часовъ, другой въ 5 часовъ съ $\frac{1}{4}$, третій наконецъ въ $4\frac{2}{3}$ часа; во сколько времени наполнится тотъ же бассейнъ сими тремя фонтанами вмѣстѣ? Отыщемъ, какую долю наполняетъ 1-й фонтанъ въ 1 часъ: Если въ 6-ть часовъ наполняется цѣлый бассейнъ, то какая доля онаго наполнится въ 1 ч.? Отсюда $6 : 1 :: 1 : x = \frac{1}{6}$. Такимъ же образомъ для двухъ другихъ фонтановъ получимъ $5\frac{1}{4} : 1 :: 1 : x = 1 : 5\frac{1}{4} = \frac{4}{21}$, $4\frac{2}{3} : 1 :: 1 : x = \frac{3}{14}$. И такъ сіи три фонтана вмѣстѣ наполняютъ въ одинъ часъ слѣдующую часть бассейна, $\frac{1}{6} + \frac{4}{21} + \frac{3}{14}$, или $\frac{7}{42} + \frac{8}{42} + \frac{9}{42} = \frac{4}{7}$. Слѣдовательно въ 1 часъ наполняется $\frac{4}{7}$ бассейна; то во сколько часовъ наполнится цѣлый бассейнъ или 1? Произойдетъ $1 : \frac{4}{7}$ или $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$. Посему для наполненія тремя фонтанами бассейна потребенъ 1 часъ и $\frac{3}{4}$. Вообще, должно раздѣлить единицу на сумму дробей бассейна, наполняемыхъ каждымъ фонтаномъ въ 1 ч.

78. *Тройное правило сложное.* Вопросы, заключающіе болѣе трехъ данныхъ членовъ, рѣшаются часто посредствомъ пропорціи. Для сего надобно, чтобы вопросы состояли изъ двухъ опредѣленій, содержащихъ

соотвѣтственно однородныя числа *и пропорціонально измѣняющіяся.* Слѣдуетъ примѣръ:

Если 20 человѣкъ выроютъ 160 саженей земли въ 15 дней, то сколько выроютъ 30 человѣкъ въ 12 дней? Впредь мы будемъ располагать однородные члены попарно, какъ представлено здѣсь на сторонѣ.

чел.	саж.	дн.
20	160	15
30	x	12

Здѣсь могутъ встрѣтиться два случая, смотря потому, въ прямомъ или обратномъ отношеніи, находятся члены несоотвѣтствующіе неизвѣстному. Въ семъ примѣрѣ, 20 человѣкъ и 15 дней въ обратномъ отношеніи: ибо чѣмъ болѣе работниковъ, тѣмъ менѣе потребно времени для исполненія того же дѣла, такъ что неизвѣстная вопроса, можно удвоить, утроить ... одно изъ чиселъ, раздѣливъ другое на 2, 3... Умножимъ 20 человѣкъ на 15, и раздѣлимъ 15 дней на 15; получимъ 300 человѣкъ и 1 день: умножимъ также 30 человѣкъ на 12, произойдетъ 360 человѣкъ и 1 день. Посему вопросъ обратится въ слѣдующій, если 300 человѣкъ вырыли 160 саженъ въ одинъ день, то сколько выроютъ 360 человѣкъ въ одинъ день? *Такъ какъ времена одинаковы*, то безполезно обращать вниманіе на оныя, и (*) получимъ прямое правило 300 : 160 :: 360 : x = 192 саженямъ.

чел.	саж.	дн.
300	160	1
300	x	1

Когда отношеніе прямое, то дѣйствуютъ инымъ образомъ. Напр: если 20 человѣкъ вырыли земли 160 саженъ въ 15 дней, то сколько потребно дней 30-ти человѣкамъ, чтобъ вырыть 192 сажени?

чел.	саж.	дн.
20	160	15
30	192	x

Чѣмъ болѣе дней, тѣмъ болѣе выроютъ; 20 человѣкъ и 160 саженъ, въ прямомъ отношеніи. И такъ

(*) Именно къ равенству сихъ двухъ чиселъ должно стремиться; достаточно было бы раздѣлить 20 и 15 на 5, и 30 и 12 на 4; однимъ словомъ, должно довольствоваться равенствомъ числа дней въ обоихъ случаяхъ.

умноживъ одно изъ сихъ количествъ на 2, 3... должно также умножить и другое на тоже число. Помножимъ 20 человѣкъ и 160 саженъ на 192, а потомъ 30 человѣкъ и 192 сажени умножимъ на 160; очевидно, что въ обоихъ случаяхъ число саженей (*) будетъ 192×160. Посему вопросъ обратится въ слѣдующій: если 20×192 человѣкъ совершили нѣкоторое дѣло въ 15 дней, то во сколько дней окончатъ оное 30×160 человѣкъ. Правило обратное, и получимъ

$$30 \times 160 : 15 :: 20 \times 192 : x = \frac{20 . 192 . 15}{30 . 160},$$

$$x = \frac{2 , 192 , 5}{1 . 160} = \frac{192}{16} = 12.$$

Такимъ образомъ должно разсуждать во всякомъ случаѣ: 2-я изъ сихъ задачъ можетъ служить повѣркою точности 1-го вычисленія, и вообще обративъ вопросъ, повѣряется дѣйствіе. Вотъ еще довольно сложный примѣръ:

Если 40 человѣкъ вырыли земли 300 саженъ въ 8 дней, работая въ день по 7-ми часовъ, то во сколько дней 51 человѣкъ вырoютъ 459 саженъ, работая въ день по 6-ти часовъ.

чел.	саж.	дн.	час.
40	300	8	7
51	459	x	6

Тотчасъ видно, что работники и часы въ обратномъ отношеніи: посему въ первомъ отдѣленіи должно взять 40×7 часовъ, а во второмъ 51×6 часовъ, въ продолженіи одного дня; отъ чего вопросъ обратится въ другой, написанный на сторонѣ, изъясненіе котораго безполезно.

час.	саж.	дн.
40×7	300	8
51×6	459	x

Часы и саженн находятся въ прямомъ отношеніи; посему принявъ 459 за производителя чле-

час.	дн.
$40 \times 7 \times 459$	8
$51 \times 6 \times 300$	x

(*) Можно бы для достиженія сей цѣли взять и простѣйшій производитель, чѣмъ 192; смотри сказанное о приведеніи къ одному знаменателю (стр. 56). Мы приняли здѣсь 192, дабы лучше объяснить происходящее отъ сего слѣдствіе.

новъ перваго отдѣленія, и 300 за множителя членовъ втораго, число сажень произойдетъ равное. Получимъ тройное правило обратное, которое напишемъ такимъ образомъ:

$$51 \times 6 \times 300 : 8 :: 40 \times 7 \times 459 : x = \frac{40 \cdot 7 \cdot 459 \cdot 8}{51 \cdot 6 \cdot 300}.$$

Можно также прежде исполненія вычисленія сократишь производителя 3 въ 300-хъ и 6-ти, потомъ 8 въ 459-ти; откуда

$$x = \frac{40 \times 7 \times 51 \times 8}{51 \times 2 \times 100} = \frac{4 \times 7 \times 4}{10} = 11,2.$$

Можно избѣжать сихъ различныхъ разсужденій; ибо производя оныя надъ каждымъ членомъ, сравниваемымъ съ неизвѣстнымъ, увидимъ, что *когда отношеніе прямое, то членъ онаго съ его однородными должны перемѣститься; когда же они составляютъ обратное отношеніе, то остаются на своихъ мѣстахъ. Наконецъ должно перемножить всѣ числа заключающіяся въ каждой строкѣ, и сравнить между собою произведенія.* И такъ въ послѣднемъ примѣрѣ, работники и дни въ обратномъ отношеніи, также какъ часы и дни; но сажени и дни составляютъ прямое отношеніе: составивъ произведенія изъ чиселъ заключающихся въ каждой строкѣ, и сравнивъ, получимъ $40 \times 459 \times 8 \times 7 = 51 \times 300 \times 6 \times x$; отъ чего получимъ прежденайдемную величину: въ самомъ дѣлѣ неизвѣстное есть частное (чл. 5) отъ $40 \times 459 \times 8 \times 7$ раздѣленныхъ на $51 \times 300 \times 6$.

Сіе дѣйствіе можетъ быть также применено и къ прежнему тройному правилу.

79. *Правило товарищества.* Трое товарищей положили въ торгъ, первый 12000 руб. другой 8000 руб. третій 4000 руб. Получили общаго барыша 5150 руб. Требуется раздѣлить оный соотвѣтственно ихъ вкладамъ.

Вся сумма 24000 руб. принесла барыша 5430 руб. Посему должно составишь слѣдующія три пропорціи,

24000 : 5430 или 2400 : 543 :: 12000 : x = 2715 руб.
2400 : 543 :: 8000 : x = 1810 —
2400 : 543 :: 4000 : x = 905 —

т: е: что *сумма вкладовъ содержится ко всей прибыли, такъ какъ каждый изъ вкладовъ содержится къ соотвѣтствующему барышу.*

Предложимъ еще слѣдующіе примѣры:

Три купца начали торговать; первый положилъ 10000 руб. на 7 мѣсяцовъ, другой 8000 руб. на 5 мѣсяцовъ, третій 4000 руб. на 20 мѣсяцовъ; спрашивается доля каждаго изъ общаго барыша 1500 руб.?

Замѣтимъ, что вклады и времена находятся въ обратномъ содержаніи: посему перемноживъ ихъ взаимно, обратимся къ первому случаю. И такъ пусть одинъ положилъ 70000 руб., другой 40000 р. третій 80000 руб. на равныя времена. По предыдущему правилу найдутъ, что соотвѣтственные ихъ барыши суть 552,63... руб. 315,79... р; 631,58... р.

Если же сначала опредѣлятъ барышъ для вклада во 100 р., то для каждаго частнаго вклада можно составишь слѣдующую пропорцію: ежели 100 р. приносятъ такой-то барышъ, то какъ велико будетъ оный отъ такого-то вклада? Въ семъ тройномъ правилѣ 1-ый членъ или дѣлитель есть 100. Отъ чего всѣ пропорціи рѣшатся скорѣе; что особенно полезно, когда число товарищей велико, ибо для каждаго вклада составляется особенное правило.

80. *Правило процентовъ.* Цѣль онаго состоитъ въ опредѣленіи суммы, платимой за заемъ денегъ, на извѣстныхъ условіяхъ. Сей процентъ находится двоякимъ образомъ: означивъ или процентъ со 100 р., что выражается говоря: *столько-то со ста* (5 со ста изображаютъ 5 со $\frac{0}{0}$), или сумму приносящую одинъ рубль процентовъ.

Отношеніе между сими двоякаго рода процентами опредѣляется изъ пропорціи. Такимъ образомъ сумма 25 руб. приносящая рубль процента, тоже, что 4 со $\frac{0}{0}$, ибо составивъ тройное правило: *съ* 25 р. *процентъ* 1 рубль, *какъ великъ оный со* 100 р, найдутъ 4 рубля. Также 1 р. съ 2-хъ равняется 50-ти со $\frac{0}{0}$; 1 р. съ 20 соотвѣтствуютъ 5-ти со $\frac{0}{0}$.

Для рѣшенія всѣхъ вопросовъ правила процентовъ, достаточно показать рѣшеніе одного примѣра: сыскать проценты за 7 мѣсяцовъ съ 10000 р. по $\frac{1}{4}$ со $\frac{0}{0}$ въ *мѣсяцъ*. *Сей вопросъ* можно выразить такъ: если 100 руб. приносятъ $\frac{1}{4}$ р. въ 1 мѣсяцъ, то что дадутъ 10000 р. въ 7 мѣсяцовъ? Сіе сложное тройное правило рѣшается, какъ сказано въ (чл. 78). Можно оное также рѣшить слѣдующимъ образомъ: $100 : \frac{1}{4} :: 10000 : x = 25$ р., *проценты* съ 10000 р., за одинъ мѣсяцъ; слѣдовательно 7×25 или 175 р. будутъ искомые проценты.

81. *Правило учета.* Когда уплачиваютъ какую-нибудь сумму прежде срока, то получаемый за сіе проценты называется *учетомъ*. И такъ платя 10000 р. за 7 мѣсяцовъ до срока, должно удержать 175 р.; полагая проценты съ сей суммы по $\frac{1}{4}$ со $\frac{0}{0}$ въ мѣсяцъ, по сему останется заплатить 9825 р. Сіе дѣйствіе, называемое *неточнымъ учетомъ*, есть самое употребительное, хотя удерживаютъ проценты съ 10000 р. и платятъ въ самомъ дѣлѣ только 9825 р.

Для точнаго же учета, надлежитъ вычесть проценты только съ уплачиваемой суммы. Сіе дѣлается слѣдующимъ образомъ: за каждый мѣсяцъ должно удерживать по $\frac{1}{4}$ со 100 р.; посему чрезъ 7 мѣсяцовъ, $100 + \frac{7}{4}$ рубля обращаются во 100 р. И такъ должно составить слѣдующую пропорцію: если $101\frac{1}{4}$ обращаются въ 100 р., то во что обратятся 10000 р. Найдутъ $9828\frac{4}{107}$. Въ самомъ дѣлѣ, если прибавить

къ сей суммѣ процентъ съ оной, за 7 мѣсяцовъ по $\frac{1}{6}$ со $\frac{0}{0}$ въ мѣсяцъ, то получатъ 10000 руб.

82. *Правило цѣпное.* Чтобъ объяснить сіе правило, возьмемъ слѣдующій примѣръ: 50 фунт. Парижскихъ равняются 51 ф. Гамбургскимъ, 25 ф. Гамбургскихъ составляютъ 24 Франкфуртскихъ; требуется найти отношеніе Парижскаго фунта къ Франкфуртскому. Означимъ сіи города начальными ихъ буквами: получимъ 50 ф. П. $=$ 51 ф. Г., откуда $\binom{50}{51}$ ф. П. $=$ 1 ф. Г.; такимъ же образомъ 1 ф. Г. $=\binom{24}{25}$ ф. Ф.; слѣд. $\binom{50}{51}$ ф. П. $=\binom{24}{25}$ ф. Ф. или 50×25 ф. П. $=24\times 51$ ф. Ф. есть искомое отношеніе. Посему напишутъ данныя числа въ видѣ уравненій, какъ то представлено на сторонѣ, *такъ чтобъ второй членъ перваго уравненія былъ одного рода съ первымъ членомъ втораго;* оставшется только умножить сіи уравненія почленно, сохраняя въ первомъ членѣ одинакій родъ единицъ съ первымъ уравненіемъ, и во второмъ членѣ съ послѣднимъ.

50 ф. П. $=$ 51 ф. Г.
25 ф. Г. $=$ 24 ф. Ф.

Можно дать бо́льшее число отношеній, зависящихъ одно отъ другаго.

Наприм: какое отношеніе метра къ Россійскому аршину, зная, что 9 аршинъ равняются 7-ми Англ. ярдамъ, и что 1 ярдъ равенъ 0,59144 метра. Для перваго члена цѣпнаго правила берутъ 9 аршинъ, которые съ искомымъ одного рода; и поставятъ 9 арш. $=$ 7 ярд; потомъ напишутъ прочія отношенія, наблюдая выше-предложенное правило; и обращаютъ 1-я два отношенія въ одно . . . . . .

9 аршинъ $=$ 7 ярдъ
1 ярдъ $=$ 0,914391 метр.
1 метр. $=x$ арш.

9×1 арш. $=7\times 0{,}914391$ м.
1 метр. $=x$ арш.

Очевидно также, что $9 \times 1 \times 1$ арш. $= 7 \times 0{,}9145 \times x$ метр. выраженіе, тожественное съ произведеніемъ сихъ трехъ уравненій почленно; посему 9 арш. $= 6{,}400757$ разъ повторенному неизвѣстному x; отку-

да $x = \frac{9}{6{,}4007}$, и наконецъ x или 1,406088 арш. $= 1$ метру.

Замѣтимъ, что какъ первый членъ и послѣдній x одного рода, то произведеніе сихъ двухъ членовъ удовлетворяетъ тому же условію, принимая промежуточные члены отвлеченными числами; посему-что въ оконечательномъ уравненіи оба члена приведены въ единицы одного рода; что всегда необходимо.

Вотъ послѣдняя задача: Сколько составятъ 100 Испанскихъ пистолей, зная, что 1 Испанскій червонецъ равенъ 95-ти Амстерд: грош.; что 34 гроша составляютъ фунтъ стерлинга, и что 32 пфеннинговъ стерлинга равны 3-мъ франкамъ, а одинъ франкъ равенъ 0,93 Россійск. рубля. При томъ извѣстно, что Испанскій пистоль равенъ 1088 Моравидисамъ, которыхъ 375 составляютъ 1 червонецъ; дѣйствіе изображается, какъ представлено на сторонѣ, и получа-

0,93 руб.	=	1 франку.
3 фр.	=	32 пф. стерл.
240 пф. стр.	=	1 фунт. ст.
1 ф. ст.	=	34 шилинг.
1 шилин.	=	12 Амс. грош.
95 Амс. гр.	=	1 червонц.
1 черв.	=	375 маровед.
1088 мар.	=	1 пистоль.
100 пист.	=	x рублей.

ешь $x = \frac{0{,}93 \times 5 \times 240 \times 95 \times 1088 \times 100}{32 \times 34 \times 12 \times 375}$, обращающееся въ $x = 0{,}93 \times 19 \times 4 \times 20$; и такъ 100 пистолей равны 1413,6 рубля. Сіе дѣйствіе извѣстно подъ именемъ *правила для перевода денегъ* (arbitrage); часто употребляется при размѣнахъ.

Чтобы выразить предложенное количество въ частяхъ единицы другаго, должно для сего имѣть отношеніе сихъ двухъ единицъ, и потомъ рѣшить посредствомъ пропорціи или цѣпнаго правила. Може-

сшво сихъ мѣръ недозволяетъ представить ихъ отношенія. Мы ограничимся сравненіемъ Россійскихъ мѣръ съ новыми Французскими, представленными на стр. 156-я. Разсмотримъ употребленіе сей таблицы для выраженія саженъ, четвериковъ, десятинъ .... въ метрахъ, литрахъ, гектарахъ .....

Спрашивается, сколько метровъ составятъ 57 саж. 5 ф. 8 дюйм.? Увидимъ на стр. 156-й, что сажень = 2,1336 метра; поставимъ

1 саж. : 2,1336 мет. :: 57 саж. 5 фут. 8 дюй. : x = 123,5235.

Сколько килограммовъ составятъ 22 фун. 21 лот. 2 зол.? Найдемъ, что 1 фунтъ = 0,409 килограмма; отсюда

1 ф: 0,409 килог. = 22 ф. 21 лот. 2 зол: : x = 9,3851 килог.

для превращенія 44,669 метра въ сажени, напишемъ

1 м. : 0,468696 саж. :: 44,669 метр. : x = 20,9362 саж.

или умноживъ (стр. 89-я) сію дробь на 7, а потомъ на 12, получимъ x = 20 саж. 6 фут. 6 дюйм. 6,4 линій.

Въ сихъ вычисленіяхъ, для легчайшаго умноженія, должно составное количество выражать посредствомъ десятичныхъ частей. Въ таблицѣ (стр. 157-я) представлено кромѣ точныхъ отношеній другія приближенныя величины, коими удобнѣе дѣйствовать и которыя довольно точны (чл. 564). Для сокращенія вычисленій, въ таблицѣ находятся также логарифмы отношеній, коихъ употребленіе увидимъ въ послѣдствіи (стр. 128-я).

Отыскать отношеніе десятины къ гектару? Извѣстно, что десятина равна 2400 квадратнымъ саж., 1 квадр. саж. равна 4,552 квад. метр.

Для квадратнаго декаметра или 1-го ара должно взять 100 квадр. метр.; наконецъ гектаръ равенъ 100 арамъ. Связь сихъ отношеній представлена на сторонѣ, и на-

1 десят.	=	2400 квад. саж.
1 кв. саж.	=	4,552 кв. метр.
100 квад. м.	=	1 ару.
100 аров.	=	1 гектару.
1 гектар.	=	x десят.
100 × 100	=	2400 × 4,552 x

конецъ найдушъ $100 = 109{,}248\ x$; раздѣливъ 100 на 109,248 получимся $x = 0{,}9153$; посему гектаръ равенъ 0,9153 десятины. Посредствомъ шаковыхъ цѣнныхъ правилъ найдена большая часть чиселъ таблицы, изъ величины четверти меридіана равной 4686960 саж. (смотр. стр. 78-я).

О прогрессіяхъ.

83. Рядъ чиселъ послѣдовательно увеличивающихся или уменьшающихся одинакимъ количествомъ, называется *Ариѳметическою прогрессіею:* на примѣръ 1, 4, 7, 10, ... что пишушъ слѣдующимъ образомъ: ÷ 1. 4. 7. 10. 15. 16 .., *разность* сей прогрессіи есшь 3.

Очевидно, что вшорый членъ равенъ первому, сложенному съ разносшію; шрешій равенъ вшорому съ разносшію, т: е: первому съ удвоенною разносшію; шакимъ же образомъ чешвершый составленъ изъ перваго съ упроенною разносшію и проч. Вообще *всякій членъ Ариѳметической прогрессіи составленъ изъ перваго, сложеннаго съ разностію, взятою столько разъ, сколько до него находится членовъ.* И шакъ:

1-е Всякій членъ Ариѳм: прогрессіи можно найши, не вычисляя предыдущихъ. Такимъ образомъ 100-й членъ предложенной прогрессіи равенъ $1 + 3 \times 99$ или 298.

2-е. Чшобъ помѣсшишь между 4 и 32, шесшь среднихъ Ариѳм: пропорціональныхъ, т: е: *дабы сіи два числа сообщить съ 6-ю другими промежуточными, такъ чтобъ всѣ составляли Ариѳм: прогрессію изъ 8-ми членовъ*, должно замѣшишь, что какъ послѣдній членъ прогрессіи 32 равенъ первому 4, сложенному съ разносшію, взяшою 7 разъ, шо 32 — 4 или 28 будешъ искомая разносшь умноженная на 7, слѣд (ч. 5) разносшь прогрессіи $= \frac{28}{7} = 4$, и получашъ прогрессію ÷ 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32.

Вообще, чтобъ помѣстить между двумя данными числами средніе пропорціональные Ариѳметическіе члены, *должно разность данныхъ количествъ раздѣлить на число средніхъ членовъ, увеличенное единицею; частное будетъ разность прогрессіи.*

Такимъ образомъ чтобъ помѣстить 8 среднихъ членовъ между 4 и 11, найдемъ, что разность $= \frac{11-4}{9} = \frac{7}{9}$ и прогрессія будетъ слѣдующая:

$$\div\ 4 . 4\tfrac{7}{9} . 5\tfrac{5}{9} . 6\tfrac{3}{9} . 7\tfrac{1}{9} . 7\tfrac{8}{9} . 8\tfrac{6}{9} . 9\tfrac{4}{9} . 10\tfrac{2}{9} . 11.$$

84. Геометрическою прогрессіею называется рядъ членовъ, послѣдовательно увеличивающихся или уменьшающихся въ одинакое число разъ. Таковый рядъ есть слѣдующій: $\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 \ldots$, гдѣ *частное* или *знаменатель содержанія* есть 2.

Второй членъ равенъ первому, умноженному на знаменателя содержанія, третій второму умноженному на знаменателя содержанія, и слѣд. 1-му на квадратъ знаменателя содержанія; такимъ же образомъ 4-й есть произведеніе перваго на кубъ знаменателя содержанія, и проч.

Вообще, *всякій членъ Геом: прогрессіи равенъ первому, умноженному на знаменателя содержанія, возвышеннаго въ степень, равную числу предыдущихъ членовъ.* Слѣд.

1-е. Можно найти всякій членъ, не вычисляя предыдущихъ. Десятый членъ предложенной прогрессіи есть $3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1536$.

2-е. Чтобы помѣстить средніе Геометр. пропорціональные члены между двумя данными числами, напр: дабы найти восемь среднихъ членовъ между 3-мя и 1536-ми, надлежитъ замѣтить, что какъ послѣдній членъ 1536 прогрессіи равенъ первому 3, умноженному на знаменателя содержанія, возвышеннаго въ 9-ю степень, то раздѣливъ 1536 на 3, частное 512 будетъ 9-я степень знаменателя содержанія, кото-

рый посему равенъ $\sqrt[9]{512} = 2$ (стр. 105-я). Слѣд. *дабы помѣстить средніе пропорціональные члены между двумя данными числами, надлежитъ изъ частнаго оныхъ извлечь корень степени равной числу среднихъ членовъ сложенному съ единицею; сей корень будетъ знаменатель содержанія.*

Чтобъ вставить четыре среднихъ между 8 и 64, должно извлечь 5-й степени корень изъ $\frac{64}{8}$ или $\sqrt[5]{8}$, величина неизвлекомая (чл. 63,; посему числа въ точности не выражаютъ сихъ среднихъ членовъ, но можно приближиться къ онымъ по произволенію. Знаменатель содержанія равенъ $\sqrt[5]{8} = 1{,}5157$; посему искомая прогрессія будетъ

$\div\div 8 : 12{,}1257 : 18{,}3792 : 27{,}8576 : 42{,}2243 : 64.$

Смотри ниже чл. 149, 11-е.

О логариѳмахъ.

85. Замѣтимъ, что задачи рѣшаемыя Ариѳметическими прогрессіями, превращаются въ задачи Геометрическихъ прогрессій, когда вмѣсто сложенія произведутъ умноженіе, вмѣсто вычитанія дѣленіе, вмѣсто умноженія возвышеніе въ степень и вмѣсто дѣленія извлеченіе корня. На семъ замѣчаніи основана ѳеорія логариѳмовъ.

Возьмемъ двѣ прогрессіи, одну Геометрическую, а другую Ариѳметическую, и напишемъ члены второй соотвѣтственно подъ членами первой, какъ на пр:

$\div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 \ldots$. *числа.*

$\div 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 \ldots$. *логариѳмы.*

Каждый членъ второй прогрессіи называется логариѳмомъ соотвѣтствующаго члена первой; 0 есть логариѳмъ 1-цы, 2 лог. 3-хъ; 4 лог. 9-ти; 6 лог. 27-ми и проч. *Посему логариѳмы суть числа Ариѳметической прогрессіи, соотвѣтствующія почленно другимъ числамъ въ Геометрической прогрессіи.*

Такъ какъ логариѳмы полезны только по ихъ свойствамъ, требующимъ, чтобы одна изъ сихъ прогрессій начиналась съ 1, а другая съ 0, то мы будемъ разсматривать одне ихъ, которые выполняютъ сіе условіе.

86. Изъ сказаннаго въ чл. 83 и 84, и изъ того, что одна изъ нашихъ прогрессій начинается единицею, а другая нулемъ, слѣдуетъ, что каждый членъ первой прогрессіи составленъ изъ знаменателя содержанія умноженнаго на самого себя, и каждый членъ второй изъ разности прогрессіи умноженной на число предыдущихъ членовъ. На пр: шестые члены будутъ 243 и 10: въ первой знаменатель содержанія 3 возвышенъ въ 5-ю степень. а во второй разность 2 умножена на 5. И такъ *знаменатель содержанія во всякомъ членѣ первой, входитъ столько разъ производителемъ, сколько разность складывается въ соотвѣтствующемъ членѣ второй.*

Если перемножишь 2 члена геометрической прогрессіи, какъ на пр: 9 на 243, то знаменатель содержанія 3, будетъ входить 7 разъ производителемъ въ произведеніе (стр. 91-я, потому что оный находится 2 раза въ 9-ти, и 5 разъ въ 243-хъ; посему произведеніе 9×243 или 2187 выражаетъ 8-й членъ 1-й прогрессіи. Но ежели сложишь соотвѣтствующіе члены 4 и 10 Ариѳметической прогрессіи, то разность 2 будетъ 7 разъ складываться въ суммѣ 14; слѣд. произведеніе 2187 и сумма 14 будутъ соотвѣтствующіе члены. Сіе выразится, сказавъ: *что сумма логариѳмовъ двухъ чиселъ равна логариѳму ихъ произведенія.* Для умноженія на пр. 9 на 27, надлежитъ сложить 4 и 6, соотвѣтствующія симъ производителямъ, и найти *число* 243, соотвѣтствующее 10-ти находящимся между *логариѳмами;* 243 будетъ искомое произведеніе.

Изъ сего слѣдуетъ, что удвоенный логариѳмъ числа есть логариѳмъ квадрата онаго; утроенный логариѳмъ равенъ логариѳму куба; и вообще *умножая логариѳмъ числа на какой-нибудь производитель, получатъ логариѳмъ степени того числа, имѣющаго показателемъ сей производитель.* Для 9^3 утроишь 4, которое соотвѣтствуетъ 9 и есть логариѳмъ онаго; $3 \times 4 = 12$ соотвѣтствующее $729 = 9^3$.

87. Легко доказать обратныя симъ дѣйствія: ибо какъ логариѳмъ частнаго съ логариѳмомъ дѣлителя равенъ логариѳму дѣлимаго, слѣд. *логариѳмъ частнаго двухъ чиселъ равенъ разности ихъ логариѳмовъ.* Чтобъ раздѣлить 243 на 27, вычтешь 6 изъ 10, разность 4 будетъ логариѳмъ 9-ти, посему 9 есть искомое частное.

Такимъ же образомъ логариѳмъ *корня всякаго числа равенъ логариѳму сего числа, раздѣленному на показателя корня.* $\sqrt[3]{729}$ получится, взявъ треть 12-ти, и найдя 4 между логариѳмами. Число 9 будетъ искомый корень.

88. Сіи свойства также будутъ существовать, если для знаменателя содержанія Геом. прогрессіи, возьмется число гораздо меньшее 3-хъ; въ семъ случаѣ количества оную составляющія будутъ одни къ другимъ ближе, а посредствомъ приближенія, найдутъ числа 1, 2, 3, 4, 5.... И такъ положивъ, что составили прогрессію, имѣющую знаменатель содержанія столь малый, что можно весьма приближенно отыскать всѣ цѣлыя числа, равно какъ и таблицу, заключающую всѣ сіи числа и ихъ логариѳмы, исключая прочіе средніе члены: тогда вышедоказанныя правила будутъ и здѣсь справедливы. Положивъ, что сія таблица составлена, увидимъ, что

1-е. Для умноженія данныхъ цѣлыхъ чиселъ, надлежитъ взять въ таблицѣ ихъ логариѳмы, сложить оные и прiискать въ логариѳмахъ сію сумму: со-

ошвѣтствующее число будетъ искомое (*) произведеніе.

2-е. Для дѣленія двухъ чиселъ вычтутъ изъ логариѳма дѣлимаго лог. дѣлителя; потомъ въ логариѳмахъ отыщутъ сію разность, которой соотвѣтствующее число будетъ искомое частное (**).

3-е. Для совершенія тройнаго правила, сложатъ логариѳмы среднихъ, изъ суммы вычтутъ лог. извѣстнаго крайняго: число соотвѣтствующее сей разности будетъ искомое (***).

4-е. Дабы получить логариѳмъ дроби, вычтутъ логариѳмъ знаменателя, изъ логариѳма числителя остатокъ будетъ искомый логариѳмъ. Въ таблицахъ находятся только логариѳмы цѣлыхъ чиселъ; но сіе предложеніе распространяетъ употребленіе оныхъ и для дробей (чл. 91, I.) (****).

(*) Требуется найти на пр произведеніе 47×863, въ таблицѣ находятся логариѳмы сихъ чиселъ; ихъ сложатъ, какъ то видно на сторонѣ, потомъ отыщутъ въ логариѳмахъ ихъ сумму, и соотвѣтствующее оной въ таблицѣ число 40561, будетъ искомое произведеніе.

лог. 47 = 1,6720979
лог. 863 = 2,9360108
сумма = 4,6081087

(**) Дабы раздѣлить 40561 на 863, возьмутъ въ таблицѣ логариѳмы сихъ чиселъ; вычтя одно изъ другаго, отыщутъ сію разность въ логариѳмахъ; число 47, соотвѣтствующее оной, будетъ искомое частное.

(***) Въ пропорціи 153 : 459 :: 17 : x найдя логариѳмы сихъ трехъ чиселъ, вычтутъ лог. перваго 153-хъ изъ суммы лог. двухъ прочихъ; замѣтимъ, что сіе двойное дѣйствіе можетъ быть совершено въ одно время. Можно также вмѣсто вычитанія лог. 153 приложить Армен. дополненіе онаго смотр. чл. 10), отыскать въ таблицахъ между логариѳмами число 51, соотвѣтствующее сему окончательному выраженію, получимъ 4-й членъ.

лог. 17 = 1,2304489
лог. 459 = 2,6618127
— лог. 153 = 2,1846914
1,7075702

(****) Для отысканія лог. $3\frac{5}{7}$ или $\frac{26}{7}$, вычтутъ лог. 7 изъ лог. 26. Чтобъ получить произведеніе $3\frac{5}{7}$ на $2\frac{2}{13}$, или $\frac{26}{7}$ на $\frac{28}{13}$, надлежитъ сложить логариѳмы сихъ двухъ

лог. 26 = 1,4149734
лог. 28 = 1,4471580
— лог. 7 = 0,8450980
— лог. 13 = 1,1139434
0,9030900

5-е. Для возвышенія числа въ степень множашъ его логариѳмъ на показателя оной степени; сему произведенію пріищутъ въ логариѳмахъ соотвѣтствующее число, которое и будетъ искомая степень (*).

6-е. Для извлеченія корня изъ какого-нибудь числа, раздѣлашъ логариѳмъ сего числа на показателя корня, и сему частному пріищутъ въ логариѳмахъ соотвѣтствующее число, равное искомому корню (**).

Изъ сего видно, что самыя сложныя вычисленія дѣлаются весьма простыми. Умноженія и дѣленія замѣняются сложеніемъ и вычитаніемъ, вмѣсто возвышенія въ степень и извлеченія корня множашъ и дѣлашъ. Сіи отличныя свойства логариѳмовъ доставляютъ столь значительную пользу, что нельзя не чтишъ начина изобрѣтателя оныхъ, *Непера*, знаменитаго Шотландскаго Геометра.

89. *Составленіе таблицъ.* Надлежитъ теперь изъяснишъ способъ составленія логариѳмовъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ. До сихъ поръ брали прогрессіи Ариѳметическую и Геометрическую; посему каждое число имѣло множество логариѳмовъ. Вскорѣ увидимъ причину, побудившую предпочесть слѣдующіе ряды:

∴ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10 000 : ..... *числа.*

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 ..... *логариѳмы.*

0, 1, 2, ... суть логариѳмы 1-цы, 10-ти, 100...., над-

дробей или лог. 26 — лог. 7 + лог 28 — лог. 13 Здѣсь совершено вычитаніе однимъ пріемомъ. Окончательное выраженіе есть лог. 8; слѣд. 8 есть искомое произведеніе, что впрочемъ очевидно.

(*) 5 я степень 17-ти найдется, умноживъ 5 на лог. 17, и пріискавъ въ таблицахъ соотвѣтствующее сему произведенію число, которое и будетъ искомое

лог. 17 = 1,2304489
5
6,1522445

$17^5 = 1419857.$

(**) $\sqrt[5]{1419857}$ получится, раздѣливъ лог. предложеннаго числа на 5 и пріискавъ частное въ логариѳмахъ. Соотвѣтствующее число 17 будетъ искомый корень.

лежитъ сыскать логариѳмы 2-хъ, 3-хъ, 4-хъ..., которые заключаются очевидно между 0 и 1, логариѳмы 11-ти, 12-ти,.... 99-ти содержатся между 1 и 2, и проч. Сіи логариѳмы можно получить только приближенно; обыкновенно довольствуются 7-ю десятичными знаками.

Замѣтимъ, что ежели въ прогрессіи, какъ на пр: ÷ 0.2.4.6.8.10.12....., опустимъ одинъ членъ изъ двухъ послѣдовательныхъ, или 2 изъ 3-хъ, ... то составятся другія прогрессіи ÷ 0.4.8.12... или ÷ 0.6.12.... Можно такимъ же образомъ вообразить, что принятыя нами прогрессіи составляютъ часть двухъ другихъ, имѣющихъ члены болѣе близкіе одинъ къ другому, и въ которыхъ опущено нѣкоторое число членовъ.

И такъ представимъ, что между 1 и 10, помѣстили большое число среднихъ Геометрическихъ пропорціональныхъ членовъ; такъ какъ въ семъ случаѣ между 1 и 10 будутъ находиться числа одно къ другому весьма близкія; то между сихъ среднихъ пропорціональныхъ вопрѣшимъ числа 2, 3, 4.... точныя до 10-ти милліонной части. Послѣ сего, если помѣстимъ такое же число среднихъ Ариѳметическихъ пропорціональныхъ членовъ между 0 и 1, то нѣ изъ сихъ, которые займутъ мѣста, соотвѣтствующіе 2, 3, 4...., будутъ логариѳмами сихъ чиселъ. Таковое же разсужденіе сдѣлаютъ для чиселъ между 10 и 100 и проч.

Чтобъ помѣстить большое число средн. Геометр. пропорціональныхъ членовъ, надлежало бы извлекать корни высшихъ степеней чл. 84; но сіе затрудненіе избѣгаютъ чрезъ послѣдовательное извлеченіе квадратныхъ корней. На пр: найдемъ лог. 3; средній Геометрическій пропорціональный между 1 и 10 будетъ ....3,16227766; а между 0 и 1 средній Ариѳм: пропорціональный 0,5; слѣд: 0,5 есть лог. 3,1622...

число уже близкое къ 3. Поступая такимъ образомъ для 1 и 3,1622.... равно какъ и для 0 и 0,5, найдутъ что 0,25 есть лог. 1,77827941. Также между 1,7782... и 3,1622.... и между 0,25 и 0,5, получатъ средніе пропорціональные 2,37137370 и 0,375. Продолжая сближать сіи предѣлы, найдемъ, что 0,30102999 и 0,47712125 суть логарѳмы 2-хъ и 3-хъ.

Сіи вычисленія весьма затруднительны, хотя они и исполняются только для первоначальныхъ чиселъ, ибо логарѳмы прочихъ выводятся изъ оныхъ. Однако же и сего достаточно чтобъ утомить самое постоянное терпѣніе. Здѣсь предложенъ сей способъ, дабы показать возможность составленія таблицъ. Въ послѣдствіи же объясняются гораздо удобнѣйшія средства (чл. 586).

90. Теперь легко объяснить причину, заставившую предпочесть принятыя двѣ прогрессіи. Всякій логарѳмъ составленъ изъ цѣлаго числа, называемаго *характеристикою* и десятичной дроби или *мантиссы;* и такъ:

1-е. Логарѳмы чиселъ, заключающихся между 1, 10, 100.... содержатся между 0, 1, 2,.... т: е: *что характеристика всякаго числа равна числу цѣлыхъ цыфръ онаго безъ одной;* чрезъ что можно по извѣстной характеристикѣ опредѣлить сіе число цыфръ и обратно. Логарѳмъ числа 545,21 имѣетъ характеристикою 2 единицы, а 5,4771215 есть логарѳмъ числа, имѣющаго въ цѣлыхъ четыре цыфры. Въ большей части таблицъ характеристика не ставится, ибо сіе безполезно.

2-е. Если нужно умножить или раздѣлить число на 10, 100, 1000...., то надлежитъ приложить къ его логарѳму или вычесть изъ онаго 1, 2, 3... единицы; слѣд: увеличить или уменьшить характеристику 1-ю, 2-мя, 3-мя..значитъ умножить или раздѣлить соотвѣтствующее число на 10, 100, 1000...., или приписать или

опустишь 1, 2, 3.... нулей, или наконецъ, перенесть запятую въ-право, или въ-лѣво, на 1, 2, 3.... знака. Логариѳмы чиселъ 3,1578; 34,578; 345,78 имѣютъ одинакую мантиссу, только характеристики соотвѣтственно равны 0, 1, 2...., шлковыя преимущества сего способа заставили Бригга, предпочесть оный при сочиненіи логариѳмическихъ таблицъ. Впередь логариѳмы Бригга будемъ означать чрезъ log; такимъ образомъ, log 5 означаетъ табличный логариѳмъ 5, т: е: логариѳмъ, вычисленный изъ вышепредложенныхъ двухъ прогрессій въ ч. 89-мъ.

91. *Употребленіе таблицъ.* Чтобы понять употребленіе оныхъ, должно имѣть ихъ предъ собою; самыя употребительнѣйшія суть Калета, Борда и Деламбра. Мы не будемъ изъяснять ихъ употребленіе, но разсмотримъ нѣкоторые случаи, имѣющіе связь съ Ѳеоріею.

I. Логариѳмы чиселъ < 1 представляютъ нѣкоторое затрудненіе: вообще (ч. 88, 4-е) чтобъ получить логариѳмъ дроби, надлежитъ вычесть логариѳмъ знаменателя изъ логариѳма числителя; но если они менѣе 1, то вычитаніе невозможно. Напр: для умноженія 5-ти на $\frac{3}{4}$, можно 5 раздѣлить на $\frac{4}{3}$; посему получится одно и то же, если къ $\log \frac{3}{4}$ приложить $\log 5$, или изъ $\log 5$ вычтешь $\log \frac{4}{3}$; обыкновенно предпочитаютъ послѣднее изъ сихъ дѣйствій. Очевидно, что должно вычесть лог. числителя изъ лог. знаменателя, и сей лог. употреблять въ противномъ смыслѣ, т: е: вмѣсто того чтобъ его прикладывать, должно вычитать и обратно. Сіи величины называютъ *отрицательными логариѳмами*, и отличаютъ знакомъ —, поставляемымъ предъ оными.

Для избѣжанія погрѣшностей достаточно небольшаго вниманія. Слѣдующіе примѣры объясняютъ сіи вычисленія.

1-е. $x = \frac{42,21 \times \frac{5}{8}}{6,34}$

$\log 5 =$	0,6989700	$\log 100 =$	2,0000000
$-\log 3 -$	0,4771913	$-\log 4 =$	0,6020600
$\log \frac{5}{3} =$	0,2218487	$\log 0,04 = -$	1,3979400
$\log 42,21 =$	1,6254359		1,4035872
	1,4035872	$\log x =$	2,8015271
		$x =$	633,18

2-е. $x = \sqrt[7]{\frac{5}{7}}$; берутъ половину разности $\log 5$ и $\log 7$. Чтобъ получить число, соотвѣтствующее сему отрицательному логарифму, вычитаютъ оный изъ 1, чрезъ что число увеличивается въ 10 разъ, получатъ $+ 0,9269360$, соотвѣтствующее 8,45154; слѣд: $x = 0,845154$.

$\log 7 =$	0,8450980
$-\log 5 =$	0,6989700
$\log \frac{5}{7} = -$	0,1461280
$\log x = -$	0,0730640
дополн. $=$	0,9269360

3-е. $x = \frac{\sqrt[3]{0,00027}}{32,41}$; берутъ треть $\log 100000 - \log 27$ и проч. Вычитаютъ $\log x$ изъ 3, чрезъ что число увеличивается въ 1000 разъ; получатъ $+ 0,2997756$, соотвѣтствующее 1,9942; слѣд: $x = 0,0019942$.

$\log 100000 =$	5,0000000
$\log 27 =$	1,4313638
$\log 0,00027 = -$	3,5686362
треть $= -$	1,1895454
$\log 32,41 -$	1,5106790
$\log x = -$	2,7002244
дополн. $=$	0,2997756

II. Удобнѣе употреблять логарифмы, имѣющіе *одну только характеристику отрицательную*. Такимъ образомъ во 2-мъ примѣрѣ $\log \frac{5}{7} = \log 5 - \log 7$, вычитаніе сдѣлается возможнымъ, когда прибавятъ 1 къ характеристикѣ $\log 5$: послѣ чего сію приложенную единицу надлежитъ вычесть изъ разности, и получатъ $\log \frac{5}{7} = -1 + 0,8538720$, что изображаютъ чрезъ $1,8538720$.

$1 + \log 5 =$	1,6989700
$\log 7 =$	0,8450980
$\log \frac{5}{7} =$	1,8538720
или $= -2 +$	1,8538720
$\log x =$	1,9269360

Въ семъ случаѣ одна только характеристика отрицательна, и должно какъ въ прежнихъ примѣрахъ, обращать вниманіе на оную въ зависимыхъ отъ нее вычисленіяхъ. Здѣсь, гдѣ можно брать половину, для избѣжанія дробной характеристики $-\frac{1}{2}$, прилады-

ваютъ 1-цу, отъ чего сія характеристика обращается въ — 2, и также 1-цу къ цыфрѣ 8 десятыхъ, обращающейся въ 18; отъ сего при сложеніи единицы положительной и отрицательной, логариѳмъ не измѣнится, и половина онаго, какъ и выше, есть $\log x = \bar{1},9269360$.

И такъ замѣтимъ, что ежели случится дѣлитель логариѳмъ, имѣющій отрицательную характеристику, то должно къ оной прикладывать достаточное число единицъ, чтобы сдѣлать ее краткою дѣлителя, и приложить столько же десятковъ единицъ къ послѣдующей цыфрѣ, т. е: къ цыфрѣ десятыхъ; 1-е и 3-е дѣйствія совершены по симъ правиламъ и легко усмотрѣть, что вычисленія сдѣлались проще и удобоисполнимѣе.

$\log 3 = 0,4771213$
$\log 42,212 = 1,6254359$
$-\log 5 = 0,6989700$
$-\log 0,04 = 2,6020600$
$\log x = 2,8015872$

$\log 0,00027 = \bar{4},4313638$
Чтобъ взять третье, прикладываютъ два къ характеристикѣ . . . . . $= \bar{2},8106546$
$\log 32,41 = 1,5106790$
$\log x = 3,3997756$

4-е. Можно вмѣсто вычитанія логариѳмовъ (ч. 1. 10) прикладывать ихъ Ариѳм. дополненія. Въ первомъ примѣрѣ, для $\log \frac{3}{5}$, приложатъ къ $\log 3$ дополненіе $\log 5$. Происходящая отъ сего удобность почти ничтожна, потому что можно вдругъ совершить всѣ сіи сложенія и вычитанія.

$\log 3 = 0,4771213$
доп. $\log 5 = \bar{1},3010300$
$\log 42,212 = 1,6254359$
доп. $\log 0,04 = 1,3979400$
$\log x = 2,8015272$

5-е. Прежде чѣмъ приступишь къ вычисленію логариѳмами, надлежитъ сокращать данное выраженіе: такимъ образомъ 1-й примѣръ обратится въ

$$x = \tfrac{1}{2} \times 3 \times 422,12 \quad 1,5 \times 422,12.$$

III. Чтобъ получить логариѳмы цѣлыхъ, содержащихся между какими-нибудь двумя числами, какъ на пр: между 10 и 20, должно представить себѣ, что помѣстили довольно большое число среднихъ Геом.

пропорціональныхъ членовъ, весьма мало разнящихся одинъ отъ другаго, дабы нѣкоторыя изъ оныхъ можно было принять приближенно равными 11, 12, 13.... т: е: что сіи средніе члены разнятся отъ 11, 12, 13..., только отбрасываемыми десятичными знаками. Но какъ каждый членъ прогрессіи, получается чрезъ умноженіе предыдущаго на знаменателя содержанія, и какъ одинъ изъ производителей безпрестанно увеличивается, посему между 10 и 11 находится менѣе среднихъ членовъ, чѣмъ между 11 и 12, а тѣмъ паче между 12 и 13.... (стр. 125-я.

Посему логарѳмы или средніе пропорціональные члены Ариѳметической прогрессіи дѣлаются многочисленнѣе и болѣе близкими одинъ къ другому: такъ что, *чѣмъ число болѣе, тѣмъ разность его логарѳма съ послѣдующимъ за нимъ въ таблицахъ менѣе.* Очевидно, что логарѳмы девяти чиселъ между 1 и 10 суть различныя части одной единицы, такожде какъ и логарѳмы 90 чиселъ между 10 и 100, и 900 между 100 и 1000; ибо лог. 1, 10, 100..., суть 0, 1, 2....

Разность между логарѳмами дѣлается вскорѣ даже столь малою, что оная замѣнна только въ 2 или 3 послѣднихъ десятичныхъ, и въ извѣстномъ пространствѣ таблицъ сія разность одинакова. На пр: ограничась только 7-ю знаками, 79 будетъ разность логарѳмовъ всѣхъ чиселъ отъ 54700 почти до 55300. Въ самомъ же дѣлѣ разность неосязаема, и если бы сохраняли большее число десятичныхъ знаковъ; то замѣтили бы безпрестанное измѣненіе оной.

Такимъ образомъ, хотя неправильно говорятъ, что *числы увеличиваются пропорціонально ихъ логарѳмамъ*, однако же очевидно, что можно сіе допустить безъ погрѣшности для большихъ и мало между собою разнящихся чиселъ. И такъ нужно требуется отыскать log числа 5487345, *превышающаго предѣлъ таблицъ*, напр: Каллетовыхъ, которыя простираются

только до 108 тысячъ. Ищутъ log 54875, опускивая 13 найдутъ его равнымъ 7395587 и 79 для разности ошаго съ log 54874; но какъ сіи числа принадлежатъ такъ же логариѳму 5487500, то 79 будетъ разностію между симъ логариѳмомъ и log 5487400, такъ что 100 единицъ разности между чиселъ, соотвѣтствуютъ 79 разности между логариѳмами; посему и составятъ слѣдующую пропорцію:

Ежели 100, *разность между чиселъ, даетъ* 79 *для разности между логариѳмами, то* 43 *разность между чиселъ, такую произведетъ разность между логариѳмами?* или 1 : 79 :: 0, 43 : $x = 34$; и такъ 34 есть избытокъ log 5487543 надъ log 5487500; прибавя къ сему послѣднему 34, получимъ 7395621, остается для отысканія искомаго логариѳма написать приличную характеристикѣ, по мѣсту занимаемому занятою въ предложенномъ числѣ: и такъ чл, 90,

$\log 54{,}87543 = 1{,}7395621$; $\log 0{,}5487543 = \bar{1}{,}7395621 \ldots$

Весполезно замѣчать, что въ предложенной пропорціи 79 и 34 замѣняютъ 0,0000079 и 0,0000034. Впрочемъ въ Калашовыхъ таблицахъ находится для каждой логариѳмической разности, величина соотвѣтствующая 1, 2, 3, 4.... 9 десятыхъ оной, такъ что 4-й членъ пропорціи тотчасъ найдется.

IV. *Чтобъ отыскать число соотвѣтствующее* $\bar{1}{,}7395621$, очевидно, что сей логариѳмъ, разсматриваемый безъ характеристики, соотвѣтствуетъ числу заключающемуся между 5487500 и 5487400, и что разность предложеннаго логариѳма съ log 5487500 есть 34; посему составятъ слѣдующую пропорцію: 79 : 100 :: 34 : $x = \frac{3400}{79}$, обращную вышеупотребленной: найдутъ $x = 43$; слѣдовательно предложенный логариѳмъ соотвѣтствуетъ числу 0,5487543.

Вотъ два примѣра цѣннаго правила, рѣшаемые удобнѣе помощію логариѳмовъ.

Одинъ Англійскій футъ равенъ 0,304797 метра; но одинъ метръ равенъ 0,468696 Росс. саж.; требуется выразить Англ. футъ въ частяхъ саж.

1 Англ. футъ = 0,304797 метра . . . . . log. 1,484107
1 метръ = 0,468696 саж. . . . . log. = $\bar{1}$,6708913
x сажен. = 1 Англ. футу. . . . . .

x = 0,142857 саж. . . . . log. = $\bar{1}$,1549020
или 1 ф. = $\frac{1}{7}$ саж.

Ежели куб. цепнимет. воды вѣсятъ одинъ граммъ, то сколько будетъ фунтовъ въ кубич. футѣ?

35,3157 куб. фута = 1000 куб. деним. . . . . log. = 1,5479682
1 кубич. деним. = 1000 куб. ценним. . . . log. = 3,0000000
1 кубич. ценним. = 1 грамму (стр. 80-я).
1000 грам. = 2,443 фунт. . . . . log. = 0,3882780
x фунт. = 1 куб. футу.

35,3157 × x = 1000 × 2,443 log. x = 1,8403107
x = 69,2376

Отношеніе Французскихъ новѣйшихъ мѣръ къ Россійскимъ.

Метръ = 0,468696 сажени = a . . . . . log. = $\bar{1}$,6708913
Метръ = 3 фут. 3 дюй. 3,3046 лин. = 3,30372 фут. = b log. = 0,5190891
Метръ = 1,406088 аршина . . . . . log. = 0,1481126
Сажень = 2,13379 метра = c . . . . . log. = 0,3291088
Футъ = 0,304797 метра = d . . . . . log = $\bar{1}$,4840107
Дюймъ = 2,539975 центиметра . . . . . log. = $\bar{0}$,4048293
Аршинъ = 28 дюйм. = 0,71113 метра . . . . . log = $\bar{1}$,8519873
M метровъ равно a × M сажень, или b × M футовъ
T сажень равно c × T) метровъ; P футовъ равно d × P метровъ.
Аръ = 21,0676 квадратн. сажень . . . . . log. = 1,3237826
Гектаръ = 0,913516 десятины по 2400 квад. саж.)
Десятина = 1,092518 гектара. . . . . log. = 0,0381794
Квадрат. футъ = 9,29013 квадр. децимет. . . log. = 0,9680214
Квадрат. саж. = 4,55216 квадр. метра . . . . log. = 0,6581775
Стеръ = 0,102961 кубич. сажени . . . . . log. = $\bar{1}$,0128670
Стеръ = 35,31573 кубич. фут. . . . . log. = 1,5479682
Стеръ = 61025,391 кубич. дюйма.
Кубич. футъ = 0,02831 стера.

Литръ = 61,02551 кубич. дюйма . . . . . log. = 1,7855115
Декалитръ = 0,353137 кубич. фута. . . . . log. = 1,5479682
Кубич. дюймъ = 1,63866 центилитра . . . . . log. = 0,2144885
Кубич. футъ = 2,8316 декалитра . . . . . log. = 0,4520318
Четверть (хлѣбн. мѣра) = 2,0972 гектолитромъ (*) log. = 0,3216398
Четверикъ = 2,621 декалитра.
Гарнецъ = 3,277 литра.
Гектолитръ = 3,81461 четверика. . . . . log. = 0,5814502
Литръ = 0,3072 гарнца.
Ведро = 1,269 декалитра (**) . . . . . log. = 0,1034616
Штофъ = 1,586 литра.
Анкеръ = 3,807 декалитра.
Литръ = 0,6303 осьмухи или штофа . . . . . log. = 1,7997010
Фунтъ = 4,08994 гектограмма (***) = h . . . . log. = 0,6117170
Золотн. = 4,26035 грамма . . . . . log. = 0,6294458
Пудъ = 16,38976 килограмма.
Килограммъ = 2,445 фунта . . . . . log. = 0,3882890
Декаграммъ = 2,1472 золотника = l . . . . . log. = 0,3320542
Граммъ = 0,23472 золотника.
M фунтовъ = $(h \times M)$ гектограмма; N декаграммовъ = $(l \times N)$ золотн.

Приближенныя отношенія.

83 метра = 39 саж.	25 метр. = 82 фута.	63 центим. = 25 дюйм.
5 метр. = 7 арш.	8 децимт. = 31½ дюйм.	11 миллим. = 4 линіямъ.
91 гектар. = 83 десят.	141 кв. мт. = 31 кв. саж.	28 кв. децм. = 3 кв. фут.
126 стер. = 13 куб. с.	7 стеровъ = 250 куб. ф.	71 кв. центим. = 1 кв. дюйм.
27 гектол. = 13 чтверт.	17 декалт. = 6½ четвер.	17 литр. = 6½ гарнц.
5 децилит. = 3½ куб. д.	16 декалт. = 12½ ведр.	8 литр. = 5 штоф.
7 килогр. = 17 фунт.	9 декагр. = 21 золотн.	8½ граммъ = 2 золотн.

5 миріаметровъ = 468 верст. и 348 саж. или $468\frac{29}{50}$ верстъ.

(*) Смотри Cambiste Universel.

(**) Смотри Nelkenbrechers allgemeines Taschenbuch, dreizehnte Ausgabe. Berlin. 1820.

(***) Смотри тамъ же.

КНИГА ВТОРАЯ.

НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА.

I. АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ ВЫЧИСЛЕНІЯ.

Общія понятія.

92. Цѣлью Ариѳметики было соединеніе чиселъ между собою по извѣстнымъ правиламъ: въ Алгебрѣ же находятъ не числовое окончательное выраженіе, но какимъ образомъ каждое число входитъ въ вычисленіе. Рѣшеніе всѣхъ задачъ одинаковаго свойства, и отличающихся только заданіями, требуетъ надъ данными величинами однихъ и тѣхъ же вычисленій. На примѣръ: проценты съ какого-нибудь капитала, находятся умноженіемъ онаго на изшекшее время и на 100-ю долю процентовъ приносимыхъ 100 рублями въ единицу времени чл. 130). Алгебра занимается изысканіемъ законовъ вычисленій для каждаго рода вопросовъ; чтобы сего достигнуть, надобно изображать данныя величины буквами a, b, c..., которыя могутъ означать всѣ числа, дабы въ окончательномъ выраженіи не смотря на всѣ приведенія и измѣненія, былъ виденъ весь ходъ вычисленія.

Отыщемъ на пр: число, которое будучи утроено равнялось бы 100 съ половиною сего числа; приложимъ слѣдующія разсужденія.

Утроенное неизвѣстное равно 100 *съ половиною неизвѣстнаго* . . . . . $3x = 100 + \frac{1}{2}x$

отнявъ съ той и другой стороны половину неизвѣстнаго, найдемъ, что

Утроенное неизвѣстное безъ его половины равно 100, ... $3x - \frac{1}{2}x = 100$

или $\frac{5}{2}$ *неизвѣстнаго равно* 100 . . . . . $\frac{5}{2}x = 100$

Наконецъ (чл. 5) раздѣливъ объ части на $\frac{5}{2}$,

Неизвѣстное равно $\frac{2}{5}$ *отъ* 100, или *равно* 40 . . . . . , ... $x = \frac{2}{5}.100 = 40$

Въ Алгебрѣ неизвѣстное предполагаютъ чрезъ x, и выражаютъ сіе разсужденіе помощію знаковъ, какъ то видно на сторонѣ. Поставивъ же a вмѣсто числа 100, получимъ:

$3x = a + \frac{1}{2}x$, $3x - \frac{1}{2}x$ или $\frac{5}{2}x = a$, $x = \frac{2}{5}a$.

И такъ утроенное неизвѣстное равное своей половинѣ, съ какой-нибудь данной величиною, есть $\frac{2}{5}$ сей величины, какая бы она ни была (чл. 106, II).

Алгебраическій способъ доказывать предложенія многимъ еще различается отъ Ариѳметическаго. Въ Ариѳметикѣ для сего берутъ произвольный числовый примѣръ, и поступаютъ такъ, чтобы доказательство предложенія не только относилось къ сему частному примѣру, но и ко всякому другому; то есть дѣлаютъ *общее разсужденіе изъ частнаго примѣра*. Въ Алгебрѣ же напротивъ, взявъ примѣръ составленный изъ общихъ знаковъ изображающихъ всякія числа, можно будешь разсуждать оному только приличнымъ образомъ, и производимыя надъ ними измѣненія будутъ часто совершенно механическія, сіе объяснится въ послѣдствіи (чл. 106).

93. И такъ согласимся изображать извѣстныя количества буквами a, b, c . . . , сіи числа суть данныя,

служащія основаніемъ нашимъ разсужденіямъ, и величиною конхъ въ послѣдствіи можемъ располагать по произволу. Если и s есть сумма четырехъ чиселъ a, b, c и d, то напишемъ $s = a + b + c + d$; $s = a + a + a + a$, обратится въ $s = 4 \times a$, или просто $= 4a$, опуская знакъ умноженія, которой дѣлается безполезнымъ. Цыфра 4 называется предстоящимъ (коэфиціентомъ, (*). Если число a повторено 2, 3, 7 ... i разъ, то пишутъ $2a$, $3a$, $7a \ldots ia$, такожде пишутъ a^2, a^3, a^7, ... a^n, если a было 2, 3, 7 .... n разъ производителемъ, $aa, aaaaa, \ldots$.

Членомъ называютъ всякое количество отдѣленное отъ другаго знакомъ $+$ или $-$; *сочлененное количество:* (биномъ) состоитъ изъ двухъ членовъ, какъ то $a + b$, $ac - 4ab$; *трехчленное количество:* (триномъ) изъ трехъ, какъ $a + b - c$, $ad - 4ab - 2bc$; наконецъ *многочленное количество:* (полиномъ) изъ многихъ членовъ.

Трехчленное количество $a - b - c$ означаетъ, что отнявъ b отъ a, должно изъ остатка еще вычесть c; или все равно, что $a - (b + c)$; очевидно также, что $a - b - b$ равно $a - 2b$, и $a - b - 3b - 2b - a = -6b$.

О Приведеніи, Сложеніи и Вычитаніи.

94. *Приведеніемъ* называютъ алгебраическое дѣйствіе, соединяющее нѣсколько членовъ въ одинъ: но для сего нужно, чтобъ они различались между собою только предстоящими, и состояли бы изъ однѣхъ буквъ съ одинаковыми показателями; $3a - 2ab - b$, $3a^2 - 2a$, $5a^2b^3 - 3b^2$, суть количества неприводимыя. Но очевидно, что

(*) Должно остерегаться, чтобы несмѣшать показателей съ предстоящими, на пр: a^4 съ $4a$; показатели означаютъ повторенное умноженіе количества самого на себя, предстоящіе же выражаютъ сложеніе онаго, $a^4 = aaaa$, $4a = a + a + a + a$, если $a = 5$, то $a^4 = 625$, а $4a = 20$.

$$3abc^2 - abc^2 - bc^3 + 2bc^3 + a^2d^2 = 2abc^2 + bc^3 + a^2d^2,$$
$$2a - 5b + a - c + 5b = 3a - c,$$
$$3b + 2ac - 5b - 3ac + ac + d = d - 2b.$$

Вообще *берутся прежде только два подобные члена, и приведеніе дѣлается надъ ними предстоящими, т. е: складываютъ оные, коей а ихъ знаки одинакіе, и вычитаютъ, когда они разные: потомъ предъ окончательнымъ выраженіемъ ставится общій знакъ въ первомъ случаѣ, и знакъ большаго предстоящаго во второмъ.* Буквы же и показашели оныхъ не перемѣняются. Предстоящій 1 ставится передъ членами, не имѣющими онаго (чл. 54); b и ac замѣняются $1b$ и $1ac$.

Собственно говоря, въ Алгебрѣ нѣтъ ни сложенія, ни вычитанія, но только приведеніе, когда оно возможно; сложеніе же и вычитаніе основается еще исполнить для $a+b$ и $a-b$.

И такъ, чтобы сложить на сторонѣ написанныя количества, стоитъ только сдѣлать приведеніе, поставивъ знакъ — передъ первымъ членомъ каждаго трехчленнаго количества.

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 5bc - 2c^2 \\ 7a^2 - 3bc + 4d \\ a^2 - 4bc + 2c^2 \\ \hline 11a^2 - 2bc + 4d \end{array}$$

95. Положимъ, что надобно вычесть $b-c$ изъ a; извѣстно, что искомая разность не перемѣнится, когда къ обоимъ симъ числамъ придадимъ c; и такъ $b-c$ сдѣлается количествомъ b; a обратится въ $a+c$; вычтя b изъ $a+c$, получимъ

$$a-b-c) = a+c-b.$$

Въ самомъ дѣлѣ (чл. 4), если къ $a+c-b$ придадимъ $b-c$, получимъ a. Посему *чтобы вычесть многочленное количество, должно въ ономъ перемѣнить всѣ знаки, и потомъ сдѣлать, если можно, приведеніе.* На пр:

$4ab - 5bc$	$4ab - 3c^2 + bc$	$5a^2 - 3ac$
$-(2ab - 6bc)$	$-(ab - c^2 - 2bc)$	$-(2a^2 - 3ac)$
$4ab - 3bc$	$4ab - 3c^2 + bc$	$5a^2 - 3ac$
$-2ab + 6bc$	$-ab + c^2 + 2bc$	$-2a^2 + 3ac$
$2ab + 3bc$	$3ab - 2c^2 + 3bc$	$3a^2$

Замѣтимъ, что когда первый членъ не имѣетъ предъ собою никакого знака; то, дабы вышеизъясненное правило могло быть приложено къ сему члену, также какъ и къ прочимъ, предъ нимъ предполагается знакъ $+$. Въ умноженіи и дѣленіи должно руководствоваться симъ же правиломъ.

Объ Умноженіи.

96. Умноженіе одночленныхъ количествъ не представляетъ никакого затрудненія, ибо пусть будетъ $4ab \times 5cd$, перемѣнивъ порядокъ производителей, получимъ $4 . 5 . ab . cd$ или $20abcd$. Если находятся показатели, какъ $a^2 \times a^3$, то основываясь на прежнихъ правилахъ, найдемъ $aa \times aaa$ или $aaaaa = a^5$, т. е. должно сложить показателей 2 и 3; такожде $8a^2b^3 \times 4a^2b^3 = 32a^4b^6$. Вообще, *чтобъ умножить одночленныя количества, должно умножить ихъ престопніе, сложить показателей одинакихъ буквъ, наконецъ разныя буквы написать одну послѣ другой. Буквами, неимѣющими показателей, подразумѣвается* 1.

Умножимъ теперь $a + b$ на $c + d$, что изображаютъ чрезъ $a + b \times c + d$. Очевидно, что для повторенія $a + b$ столько разъ, сколько единицъ содержится въ $c + d$, должно $a + b$ взять c разъ, потомъ d разъ и произведенія сложить. Но также, чтобы $a + b$ взять c разъ, должно отдѣльно помножить a и b на c, такъ что $(a + b) \times c = ac + bc$, $(a + b) \times d = ad + bd$; отъ чего и получимъ произведеніе $ac + bc + ad + bd$.

$$\begin{array}{l} a + b \\ c + d \\ \hline ac + bc \\ + ad + bd \end{array}$$

Умножимъ $a-b$ на c: составивъ произведеніе ac изъ a на c, складывали c разъ букву a; но должно было умножить не a, но $a-b$ на c; слѣдовательно каждый разъ когда складывали a, брали сіе количество числомъ b единицъ слишкомъ много, такъ что произведеніе ac должно быть уменьшено количествомъ b, взятымъ столько разъ, сколько повторили a, или c разъ. Посему слѣдуетъ отъ bc отнять ac, и получимъ

$$a-b \quad \begin{matrix} c \\ \hline ac-bc \end{matrix}$$

$$(a-b)+c=ac-bc.$$

Чтобъ умножить $a-b$ на $c-d$, сдѣлаемъ сначала предыдущее вычисленіе; но вмѣсто того чтобы $a-b$ повторить c разъ, должно было $a-b$ взять только $(c-d$ разъ: и такъ $(a-b$ взято d разъ лишнихъ; посему изъ произведенія $ac-bc$ должно отнять произведеніе $a-b$ на d, или $ad-bd$, отъ чего (чл. 95)

$$a-b \quad \begin{matrix} c-d \\ \hline ac-bc \\ -ad+bd \\ \hline \end{matrix}$$

$$(a-b)\,(c-d)=ab-bc-ad+bd.$$

Умноженіе всякаго многочленнаго количества можетъ быть приведено къ сему послѣднему случаю, изобразивъ чрезъ a и c сумму положительныхъ, а чрезъ b и d сумму отрицательныхъ членовъ каждаго производителя. Изъ вышеобъясненнаго слѣдуетъ, что каждый членъ множимаго былъ отдѣльно умноженъ на каждый членъ множителя: сверхъ того когда два отдѣльные одночленные производителя имѣли разные знаки, то ихъ произведеніе получало знакъ $-$, въ противномъ же случаѣ ставился знакъ $+$.

Изъ сего заключимъ, *что произведеніе двухъ многочленныхъ количествъ найдется, когда каждый членъ одного умножится на всѣ члены другаго, по правиламъ данными для одночленныхъ количествъ; и когда потомъ каждое изъ частныхъ произведеній возьмемъ отрицательно, если ихъ производители имѣли противные знаки, и положительно, когда оные были*

одинаковы и ; оба + или оба —) (*) Предъ первымъ членомъ подразумѣваютъ знакъ +, если оный неимѣетъ никакого, какъ въ чл. 95-мъ.

97. Вотъ нѣсколько примѣровъ для умноженія многочленныхъ количествъ:

$$\begin{array}{r} a+3c-d \\ 2a-d \\ \hline 2a^2+6ac-2ad \\ -ad-3cd+d^2 \\ \hline 2a^2+6ac-3ad \\ -3cd+d^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a+bc-2b^2 \\ 2a-ba+2b^2 \\ \hline 4a^2+2abc-4ab^2 \\ -2abc-b^2c^2+2b^3c \\ +4ab^2+2b^3c-4b^4 \\ \hline 4a^2-b^2c^2+4b^3c-4b^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

Изъ сихъ примѣровъ можно извлечь полезныя замѣчанія.

1-е. Квадратъ отъ $a+b$, есть $a^2+2ab+b^2$, какъ въ чл. 61-мъ.

2-е. Кубъ онаго есть $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, какъ въ чл. 67-мъ.

3-е. Изъ $a+b$ $a-b=a^2-b^2$ заключаемъ, *что сумма двухъ количествъ, умноженная на ихъ раз-*

(*) Обыкновенно говорятъ, что умноженіе имѣетъ 4 правила, для предшедшихъ, букъ, показателей и для знаковъ. Первыя три были объяснены при одночленныхъ количествахъ; четвертое же выражается такъ $+\times+=+$, $+\times-=-$, $-\times+=-$, $-\times-=+$. Для непривычныхъ къ Алгебраическому языку выраженіе $\times-$ дѣлать $+$, покажется страннымъ, ибо несообразно предполагать, что знакъ множится на знакъ. Но сего недолжно разумѣть буквально, здѣсь только для краткости держимся правильнѣйшею. И такъ не a умножается на $-$ и не $-b$ на $-d$, но $a-b$ на $-d$, и по законамъ строжайшей Логики, дойдемъ до вытекающей теоремы. Однимъ словомъ, правило сіе не должно называть *правиломъ знаковъ*, но *правиломъ умноженія многочленныхъ количествъ*.

есть, даетъ разность квадратовъ сихъ количествъ, $(7+5)\times(7-5)=7^2-5^2$, или $12\times 2=49-25=24$.

Раздѣлимъ a на двѣ какія-нибудь части; если $\frac{1}{2}a-x$ означаетъ одну, то другая будетъ $\frac{1}{2}a+x$ и произведеніе $\frac{1}{4}a^2-x^2$ будетъ менѣе $\frac{1}{4}a^2$, покуда x не сдѣлается нулемъ. Посему, *если одна изъ частей числа* a *будетъ возрастать начиная отъ нуля, то другая будетъ уменьшаться, а произведеніе увеличиваться, но когда первая часть сдѣлается* $\frac{1}{2}$a, *тогда произведеніе будетъ квадратъ сей половины, и достигнетъ* наибольшей своей величины, такъ что оно уменьшается когда первая часть продолжаетъ возрастать.

4-е. Изъ сего легко заключить о видѣ произведенія изъ m двучленныхъ производителей $(x+a)(x+b)(x+c\ldots$ въ самомъ дѣлѣ для двухъ или трехъ производителей получимъ

$$\begin{array}{l|l} x^2+ax+ab & x^3+ax^2+abx+abc \\ \quad +bx & \quad +bx^2+acx \\ & \quad +cx^2+bcx. \end{array}$$

И такъ изъ самаго хода произведенія слѣдуетъ, что:

1-е. Различные члены онаго не могутъ быть подвержены приведенію между собою, такъ что буквы a, b, c.... не имѣютъ ни числовыхъ предстоящихъ, ни показателей.

2-е. Первый членъ есть произведеніе всѣхъ первыхъ членовъ, а послѣдній есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ производителей: между сими крайними, показатели x идутъ почленно уменьшаясь единицею, и вообще произведеніе имѣетъ видъ:

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots+abcd\ldots$$

3-е. Всѣ члены должны быть составлены изъ одного и того же числа m производителей, такъ что предстоящій A члена x^{m-1} не долженъ содержать буквъ a, b, c, ... перемноженныхъ между собою; предстоящій B члена x^{m-2} долженъ состоять изъ двойныхъ произведеній сихъ буквъ, или ab, ac, bc...

4-е. Какъ буква a входитъ въ составъ одного изъ предшествующихъ A, B..., такимъ же точно образомъ должны входить въ него и всѣ прочія буквы b, c..., потому что произведенія не должны перемѣниться отъ постановленія a вмѣсто b, и b вмѣсто a и проч. посему (смотр. чл. 479).

A *есть сумма всѣхъ вторыхъ членовъ двучленныхъ количествъ.*

B ..... *ихъ разныхъ двойныхъ произведеній.*

C ..... *ихъ разныхъ тройныхъ произведеній.*

Послѣдній членъ есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ.

Сіи различныя предложенія особенно полезны для сокращенія вычисленій; такъ во второмъ примѣрѣ (чл. 97), легко усмотримъ, что дабы сыскать произведеніе $2a+(bc-2b^2)$ на $2a-(bc-2b^2)$, должно взять разность квадратовъ $2a$ и $(bc-2b^2)$, или $4a^2-(bc-2b^2)^2$, но по первому изъ нашихъ правилъ $(bc-2b^2)^2 = b^2c^2-4b^3c+4b^4$; слѣдовательно искомое произведеніе есть $4a^2-b^2c^2+4b^3c-4b^4$.

Не должно пренебрегать возможными сокращеніями. Такъ, для $(4ab-2ac)(6ab-3ac)$, видно что первый членъ равенъ $2a(2b-c)$, а второй $3a(2b-c)$, посему произведеніе будетъ $6a^2(2b-c)^2$ или $6a^2(4b^2-4bc+c^2)$.

Иногда бываетъ выгодно разлагать произведенія на ихъ производители, (въ дѣленіи мы увидимъ какъ дѣлать сего рода разложенія,); такъ въ количествѣ $3y^2z+3yz^2+py+pz$, находимъ что первые два члена равны $3yz(y+z)$, а другіе два $p(y+z)$; посему оное разлагается на $(3yz+p)(y+z)$.

О Дѣленіи.

98. Пусть a есть дѣлимое, m дѣлитель, q частное и r остатокъ, полагая $r<m$; отъ всякаго дѣленія произойдетъ уравн. (чл. 16).

$$a=mq+r.$$

Такъ какъ можно, не перемѣняя частнаго раздѣлить дѣлимое и дѣлитель на одно число чл. 17 и 15, то для раздѣленія одночленнаго количества на другое, должно *уничтожить ихъ общія буквы, вычесть показатели одинакихъ буквъ, и наконецъ раздѣлить между собою предстоящіе*: Сверхъ сего видно, что сіе правило обратно умноженію (чл. 96.

$$\frac{12a^3b^2c}{3ab} = 4a^2bc; \quad \frac{15a^3b^5}{5a^2b^2} = 3ab^3; \quad \frac{8a^2b^2c}{4ab^2} = 2ac;$$

въ первомъ примѣрѣ b^2 исчезнетъ, потому что оба его члена имѣютъ bb общимъ производителемъ

$$\frac{5abc}{5abc} = \frac{1}{1} = 1; \quad \frac{4ac^5de^3}{8bd^3e} = \frac{ac^5e^2}{2bd^2};$$

здѣсь вычисленіе нельзя продолжать, и остается раздѣлить ac^5e^2 на $2bd^2$; когда будутъ извѣстны числовыя величины a, b, c и d.

Что касается до многочленныхъ количествъ, то они представляютъ болѣе затрудненій. Пусть требуется раздѣлить $20ab^5 + 4a^6 - 25a^2b^4 + 4b^6$ на $2b^3 + 2a^3 - 5ab^2$ Частное умноженное на дѣлителя, должно произвести дѣлимое: и такъ если бы въ произведеніи $20ab^5 + 4a^6 - \ldots$ былъ извѣстенъ одинъ такой членъ, который произошелъ *безъ приведенія* отъ умноженія даннаго члена дѣлителя на членъ частнаго, то простое дѣленіе дало бы намъ сей послѣдній. Но извѣстно, что члены въ коихъ какая-нибудь буква, какъ на пр: a, имѣетъ въ обоихъ производителяхъ наибольшаго показателя, даютъ въ произведеніи такой членъ, который ни съ однимъ изъ прочихъ не сокращается; ибо въ немъ сія же самая буква a получаетъ также наибольшаго показателя.

Посему $4a^6$ есть точное произведеніе члена $2a^3$ на такой членъ частнаго, въ которомъ a имѣетъ наибольшаго показателя. Если весь дѣлитель умножится на $2a^3$, и вычтется изъ дѣлимаго, то останокъ будетъ произведеніе дѣлителя на прочіе члены

частнаго. Слѣдовательно чтобы получить сіи, члены должно раздѣлить сей остатокъ на дѣлителя, для чего нужно повторить предыдущее разсужденіе, приводящее къ тому же слѣдствію.

Для избѣжанія неудобства отыскивать такой членъ дѣлимаго, въ которомъ буква a имѣла бы наибольшаго показателя, также какъ и въ послѣдующихъ остаткахъ, должно дѣлимое и дѣлителя расположить въ надлежащемъ порядкѣ; т: е: поставивъ какъ ниже видно: на первое мѣсто a съ наибольшимъ показателемъ, на второе a съ показателемъ непосредственно нисшимъ и т: д:

$$\begin{array}{l|l} 4a^6 \quad 25a^2b^4 + 20ab^5 - 4b^6 & 2a^3 - 5ab^2 + 3b^3 \\ \underline{4a^6 + 1\ a^4b^2 - \ 4a^3b^3} & \overline{2a^3 + 5ab^2 - 2b^3} \end{array}$$

1 й остатокъ . . . $10a^4b^2 - 25a^2b^3 + 20ab^5 - 4b^6$
$\underline{-10a^4b^2 + 25a^2b^3 \quad -10ab^5}$

2 й остатокъ . . . . . $-4a^3b^3 + 10ab^5 - 4b^6$
$\underline{+4a^3b^3 - 10ab^5 + 4b^6}$

3-й остатокъ 0

Изъ сего видно, что раздѣливъ $4a^6$ на $2a^3$, помножили весь дѣлитель на часть частнаго $2a^3$, и вычли изъ дѣлимаго, отъ чего и произошелъ первый остатокъ. Потомъ дѣлили опять $10a^4b^2$ на $2a^3$, и помноживъ дѣлителя на вторую часть частнаго $5ab^2$, вычитали изъ перваго остатка, отъ чего получили второй остатокъ. Наконецъ $\frac{-4a^3b^3}{2a^3} = -2b^3$ дополнило частное, потому что не вышло остатка.

Если нужно будетъ такъ какъ здѣсь, раздѣлить такіе два члена изъ коихъ одинъ имѣетъ знакъ $+$, а другой $-$, тогда предъ частнымъ ставится знакъ $-$, дабы чрезъ умноженіе, произошелъ опять первый членъ дѣлимаго съ его знакомъ. Если бы должно было раздѣлить два отрицательные члена, то частное имѣло бы знакъ $+$. Сіе должно принимать за простое слѣдствіе вычисленія, не стараясь объяснять, что можетъ значить дѣленіе такихъ двухъ членовъ,

которые не оба положительные; въ самомъ дѣлѣ, здѣсь нужно только отыскать такое собраніе членовъ, которое будучи помножено на дѣлителя по извѣстнымъ правиламъ дало бы дѣлимое.

Заключимъ изъ сего, *что для раздѣленія двухъ многочленныхъ количествъ, должно расположить ихъ по одной и той же буквѣ, раздѣлить первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя, отъ чего получатъ членъ частнаго; помножить оный на дѣлителя, и вычесть изъ дѣлимаго: потомъ съ остаткомъ поступать такимъ же образомъ. Для частныхъ дѣленій слѣдовать правилу знаковъ при умноженіи.* Наконецъ продолжать дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока буква, по коей расположены члены, будетъ имѣть показатель меньшій чѣмъ въ дѣлителѣ.

Разумѣется, что можно также расположить члены по b, или по другой какой буквѣ, общей обоимъ производителямъ, и сказать о наименьшемъ показателѣ тоже, что о наибольшемъ.

99. Вотъ еще два другіе примѣра дѣленія:

$$\begin{array}{r|l} 6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4 & 2a^2+3ab-b^2 \\ \underline{-6a^4-9a^3b+3a^2b^2} & 3a^2-ab-2b^2 \\ -5a^3b-6a^2b^2-3ab^3+2b^4 & \\ \underline{+5a^3b+7a^2b^2-\ \ ab^3} & \\ +a^2b^2-4ab^3+2b^4 & \\ \underline{+\ a^2b^2+\ ab^3-2b^4} & \\ 0 & \end{array}$$

1-й остатокъ

2-й остатокъ

3-й остатокъ 0

$$\begin{array}{r|l} a^5-b^5 & a-b \\ \underline{-a^5+a^4b} & a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\ a^4b-b^5 & \\ \underline{-a^4b+a^3b^2} & \\ a^3b^2-b^5 & \\ \underline{a^3b^2+a^2b^3} & \\ a^2b^3-b^5 & \\ \underline{-a^2b^3+ab^4} & \\ ab^4-b^5 & \\ \underline{-ab^4+b^5} & \\ 0 & \end{array}$$

1-й остат.

2-й остатокъ . . .

3-й остатокъ . . . . . .

4-й остатокъ . . . . . .

5-й остатокъ 0

Слѣдуя внимательно за ходомъ сего послѣдняго вычисленія, видно, что ежели раздѣлимъ $a^m - b^m$ на $a - b$, то показатели буквы a будутъ уменьшаться, показатели же b возрастать въ каждомъ остаткѣ и въ каждомъ частномъ; и что остатки суть двучленныя количества, имѣющія послѣдовательно первыми членами $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$ .... достигнувъ остатка $ab^{m-1} - b^m$, дѣленіе онаго на $(a - b)$ даетъ почное частное b^{m-1}, такъ что $a^m - b^m$ дѣлится безъ остатка на $(a - b)$, и получимъ:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1}.$$

Если $b = 1$, $\frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots + 1$.

Раздѣлимъ a на $1 - x$, дѣйствіе не имѣетъ конца и въ семъ безконечномъ частномъ

$$\frac{a}{1-x} = a(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots);$$

можно слѣдовательно принимать первую часть за сумму членовъ второй, то есть за сумму безконечной геометрической прогрессіи, коей a есть первый членъ, а x знаменатель содержанія. Если будешь напр: такая прогрессія: $\frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81} \ldots$, гдѣ $a = 2$ и $x = \frac{1}{3}$, то сумма сей безконечной строки будетъ $2 : \frac{2}{3}$ или 3. Также $\frac{1}{2}(1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2, \ldots) = \frac{3}{2}$, потому что $a = \frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$. Наконецъ, $\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots) = \frac{4}{5}$, положивъ $a = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$.

Періодическая десятичная дробь $0,54\dot{)}$, обратившися въ $\frac{54}{100} + \frac{54}{10000} + \ldots$ или $\frac{54}{100}(1 + \frac{1}{100} + (\frac{1}{100})^2 \ldots) = \frac{54}{99}$, полагая $a = \frac{54}{100}$, $x = \frac{1}{100}$. Вообще, если p есть періодъ, составленный изъ n цыфръ, то получимъ, какъ въ ч. 53-мъ.

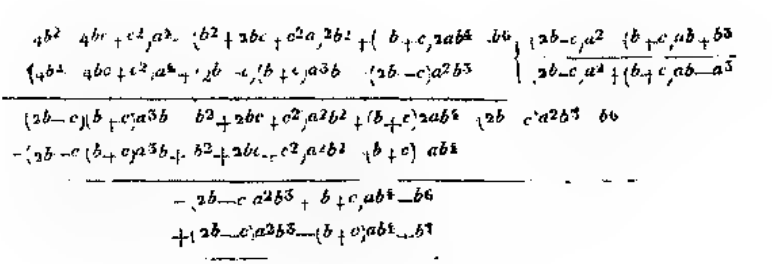
$$\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \ldots = \frac{p}{10^{n-1}} = \frac{p}{999\ldots}.$$

Сдѣлаемъ $a = 1$ и $x = \frac{1}{2}$; будетъ $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ Съ перваго взгляда непонятно кажется, какимъ обра-

зомъ, складывая безпрестанно возрастающіе и положительные члены, получится сумма — 2 Но продолжая дѣленіе a на $1-x$ только до четырехъ членовъ, останокъ будетъ ax^4, такъ что точное частное есть $a\left(1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x}\right)$, сія послѣдняя дробь изображаетъ сумму всѣхъ членовъ до безконечности Но сія дробь обратится въ $-\frac{81}{8}$, полагая $a=1$ и $x=\frac{5}{2}$; и такъ принимая только первые члены, отбрасываемые составятъ отрицательную сумму болѣе той, которая взята: обѣ части, здѣсь соединенныя, суть $1+\frac{5}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}-\frac{81}{8}$, что обратится въ первый членъ — 2. Сей случай происходитъ слѣдовательно отъ того, что первые n членовъ тогда только можно принять за часть большую или меньшую всей суммы, когда $\frac{ax^n}{1-x}$ будетъ безпрестанно уменьшаться, по мѣрѣ возрастанія числа n принимаемыхъ членовъ, т: е: когда x небудетъ <1. Рядъ называется сходящимся, если члены все болѣе и болѣе уменьшаются

100. Встрѣчается одно затрудненіе, о которомъ полезно предупредить; когда въ нѣсколькихъ членахъ буква, по коей располагали, имѣетъ одинъ и тотъ же показатель, по которой изъ нихъ долженъ быть на первомъ мѣстѣ и какая перемѣна послѣдуетъ въ вышеобъясненномъ дѣйствіи? Немного вникнувъ увидимъ, что достаточно въ вышесказанныхъ членахъ поставить букву съ ея показателемъ общимъ производителемъ, и въ скобкахъ количество, которое она множитъ. Тогда сіе совокупленіе принимается за одинъ членъ. Если на пр: будетъ $4a^4b^2-4a^4bc+a^4c^2$, то напишемъ $a^4(4b^2-4bc+c^2)$, что и примемъ за одинъ членъ.

Примѣръ яснѣе покажетъ ходъ дѣйствія; коему должно слѣдовать.



Раздѣлимъ на $(x-a)$ многочленное количество

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \ldots + tx + u,$$

для первыхъ членовъ частнаго найдемъ

$$x^{m-1} + (a+p)\,x^{m-2} + a^2 + pa + q)\,x^{m-3} + \ldots.$$

Замѣтимъ, что отъ каждаго дѣленія на x уменьшается единицею показатель сей буквы въ первомъ членѣ остатка, который такимъ образомъ переходитъ въ частное съ тѣмъ же предстоящимъ. Умноженіе на $(x-a)$ производитъ два члена, изъ коихъ одинъ уничтожаетъ отдѣльное дѣлимое, а другой прибавляется къ слѣдующему члену въ данномъ сложномъ количествѣ, для составленія перваго члена новаго остатка. Ходъ вычисленія показываетъ, что предстоящіе x въ 4-мъ, 5-мъ, ... членахъ частнаго, и наконецъ въ послѣднемъ членѣ, суть

$$a^3 + pa^2 + qa + r,\ a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s, \text{ и проч}$$
$$a^{m-1} + pa^{m-2} + qa^{m-3} + ra^{m-4} + \ldots + t,$$

и остатокъ есть $a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} \ldots + ta + u$, или данное многочленное количество, въ коемъ x замѣнено буквою a. Сіе слѣдствіе легко можно повѣрить, умноживъ сіе частное на $(x-a)$, и приложивъ сей остатокъ найдемъ опять дѣлимое.

О дробяхъ.

101. Все сказанное (стр. 55-я) о числовыхъ дробяхъ должно приложить къ Алгебраическимъ. Такимъ образомъ:

1-е. $\frac{a}{b}$ означаетъ, что единица раздѣлена на b частей, и изъ оной взято a; такъ что произведеніе $\frac{a}{b} \times b$ есть числитель a (чл. 37).

2-е. Какой бы m ни былъ, получимъ $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ (чл. 38).

3-е. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ (чл. 39); $\frac{a}{m} \pm 1 = \frac{a \pm m}{m}$.

Знакъ $\pm$ выговаривается *плюсъ* или *минусъ*; онъ означаетъ что должно брать по желанію въ обоихъ членахъ, верхній или нижній знакъ.

4-е. $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$, $\frac{a}{mb} \times b = \frac{a}{m}$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,

$\left(a + \frac{b}{c}\right)\left(m + \frac{p}{q}\right) = \frac{(ac+b) \times (mq+p)}{cq}$, (чл. 40, 41).

5-е. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$; $\frac{am}{b} : m = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$,

$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(m + \frac{p}{q}\right) = \frac{q(ac+b)}{c(mq+p)}$, (чл. 41, 42.)

Нѣкоторыя свойства чиселъ и производителей многочленныхъ количествъ.

102. I. Пусть будутъ $abc \ldots ghi$ послѣдовательныя цыфры, выражающія число A по системѣ счисленія, коей *основаніе* есть x (смотр. замѣч., чл. 6): какъ значеніе всякой цыфры, переходя отъ правой руки къ лѣвой, увеличивается въ x разъ, то получимъ:

$$A = i + hx + gx^2 + \ldots + bx^{n-2} + ax^{n-1},$$

гдѣ n означаетъ число цыфръ $abc \ldots hi$; слѣдовательно величина A найдется, когда даны сіи цыфры и основаніе. Обратно, для опредѣленія цыфръ выражающихъ данное число A въ системѣ счисленія, коей основаніе x извѣстно, должно раздѣлить A на x; остатокъ i будетъ первая цыфра съ-права; частное $h + gx + \ldots + ax^{n-2}$

будучи опять раздѣлено на x, остатокъ h дастъ вторую цыфру и проч.... (см. чл. 519, II).

II. Разобьемъ данное число N на грани по m цыфръ начиная съ единицъ, послѣдняя грань съ-лѣва можетъ заключать 1, 2, 3.... цыфры: означимъ сіи грани чрезъ A_4, A_3, A_2, A_1; очевидно, что

$$N = A_1 + A_2 10^m + A_3 10^{2m} + A_4 10^{3m} \ldots.$$
$$= A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_2 (10^m - 1) + A_3 (10^{2m} - 1) \ldots.$$
$$+ A_1 + A_3 \ldots) - (A_2 + A_4 \ldots) + A_2 10^m + A_3 (10^{2m} - 1).$$

Раздѣлимъ сіи уравненія на D, число дѣлящее 10^m въ первомъ, $10^m - 1$ во второмъ, $10^m + 1$ въ третьемъ; очевидно что остатокъ дѣленія $\frac{N}{D}$ будетъ, смотря потому, которое изъ уравненій возьмется, тотъ же самый какъ опъ A_1 или опъ $(A_1 + A_2 + A_3 \ldots)$ или наконецъ опъ $(A_1 + A_3 \ldots) - (A_2 + A_4 \ldots)$; $10^{2km} - 1$ будучи дѣлимо на $10^m + 1$: и если одно изъ сихъ трехъ окончательныхъ выраженій есть кратное D, то и N будетъ такое же.

1-е. Возьмемъ грани объ одной цыфрѣ, или $m = 1$, $10^m - 10$, $10^m - 1 = 9$, $10^m + 1 = 11$; посему 2 и 5 дѣлители 10-ти; будутъ всегда дѣлить и A_1, которая есть цыфра съ-права, если N будетъ имѣть производителями 2 или 5. Также N будетъ дѣлиться на 3 или на 9, если $A_1 + A_2 \ldots$ (сумма цыфръ) дѣлится; наконецъ N тогда только дѣлится на 11, когда $(A_1 + A_3 \ldots) - (A_2 + A_4 \ldots)$ дѣлится на сіе число, (см. чл. 34).

2-е. Если $m = 2$, то $10^m = 100$, $10^m - 1 = 99$: и такъ 4 и 25, дѣлители 100, должны дѣлить всякое число N, коего двѣ послѣднія цыфры съ-права составлены изъ кратнаго 4-хъ или 25-ти, также 11, дѣлитель 99-ти, дѣлитъ сумму $A_1 + A_2 \ldots$ двузначныхъ граней.

3-е. Сдѣлаемъ грани въ три цыфры, или $m = 3$, найдемъ, что N дѣлится на 8, когда дѣлится A_1, или число выражаемое 3-мя цыфрами съ-права. Также

$10^m - 1 \quad 999 = 27.37$, слѣдовательно 37 дѣлитъ всякое число, коего сумма трехзначныхъ граней имѣетъ производителемъ 37. Наконецъ будетъ $10^m + 1 = 1001 = 7.11.13$; и такъ N дѣлится на 7, на 11, или на 13, когда разность граней нечетнаго порядка съ гранями четнаго порядка, есть кратное 7-ми, 11-ти, или 13-ти. (См. стр. 48 и 49-я).

Когда N не есть производитель числа D, то остатокъ дѣленія тотъ же, въ каждомъ изъ вышеозначенныхъ случаевъ, какой бы нашли дѣливъ послѣдовательно A_1, или $(A_1 + A_2 + \ldots)$ и проч.

103. Найдемъ *наибольшій общій* дѣлитель D двухъ многочленныхъ количествъ A и B, такъ называется выраженіе въ точности дѣлимое на всѣ дѣлители общіе A и B, и которое само дѣлитъ сіи многочленныя количества.

I. *Если* A *умножится или раздѣлится на количество первоначальное съ* B, *то общій наибольшій дѣлитель неизмѣнится.* Ибо, если A и B имѣютъ видъ $A = Dx$, $B = Dy$, гдѣ x и y суть первоначальныя между собою, то ясно, что D всегда будетъ наибольшимъ общимъ производителемъ, когда опустимъ x или y, или только какой-нибудь изъ ихъ дѣлителей также какъ если бы и умножили A на количество первоначальное съ B.

II. *Если многочленное количество* A, *расположенное по буквѣ* a, *дѣлится на количество* F *независимое отъ* a, *то предстоящіе каждой степени сей буквы должны въ особенности дѣлиться на* F. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ $Ma^m + Na^n + \ldots$, частное отъ A, раздѣленнаго на F; получимъ $A = FMa^m + FNa^n + \ldots$; но такъ какъ F не заключается въ a, посему нельзя сдѣлать приведеніе между членами, и каждый предстоящій сохранитъ производителя F, слѣдовательно и проч.

Приложимъ сіи два замѣчанія къ употребленію Если по нижеизложенному способу будемъ искать наибольшаго общаго дѣлителя, между какими-нибудь предстоящими количества A, потомъ между симъ дѣлителемъ и другимъ предстоящимъ онаго, и такъ далѣе для всѣхъ предстоящихъ, то ясно, что если A имѣетъ производителемъ F, независимый отъ a, и какъ онъ долженъ быть въ каждомъ членѣ въ особенности, слѣдственно оный будетъ общимъ дѣлителемъ независимымъ отъ a, и получимъ $A = FA'$, гдѣ A' выражаетъ извѣстное многочленное количество, неимѣющее уже общаго дѣлителя независимаго отъ a. Таковое же изчисленіе дастъ намъ для B производитель F' независимый отъ a, если оный существуетъ, и получимъ $B = F'B'$.

Сверхъ сего наибольшій дѣлитель K, между F и F', есть *производитель независимый* отъ a, и общій количествамъ A и B: то есть, что если искомый общій наибольшій дѣлитель между A и B, составленъ изъ произведенія QK двухъ производителей, одного Q содержащаго a, другаго K незаключающаго a, то сей послѣдній найдется, и останется только отыскать Q, которой неможетъ имѣть производителя независимаго отъ a. Какъ скоро K извѣстно, то получимъ $F = K\alpha$, $F' = K\beta$, откуда $A = KA'\alpha$, $B = KB'\beta$; отнявъ производителя K, Q будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ между $A'\alpha$ и $B'\beta$, или лучше сказать между A' и B', потому что α и β можно опустить I.

Изъ сего заключимъ, что найдя производителей F и F' независимыхъ отъ a, или общихъ всѣмъ членамъ количествъ A и B, опустимъ сихъ производителей, то отъ сего многочленныя количества сдѣлаются проще, какъ A' и B': но производителя K, общаго F и F', поставимъ особенно; потомъ отыщемъ общаго наибольшаго дѣлителя Q между A' и B' и помножимъ оный на K. тогда KQ будетъ искомый дѣлитель.

Приступимъ теперь къ опредѣленію производителя Q, зависящаго отъ a, и будемъ разсуждать какъ въ Ариѳметикѣ чл. 28. Если A′ дѣлится на B′, то ясно, что B′ будетъ искомый общій наибольшій дѣлитель; но если дѣленіе даетъ остатокъ R, и частное q, то

$$A' = B'q + R, \text{ откуда } \frac{A'}{D} = \frac{B'q}{D} + \frac{R}{D},$$

раздѣливъ все уравненіе на какой-нибудь производитель D количествъ A′ и B′. Изъ сего слѣдуетъ, что R должно дѣлиться на D, такъ что всякой дѣлитель количествъ (A′ и B′) служитъ также дѣлителемъ для (B′ и R). Посему и обратно каждый изъ сихъ количествъ, взявши по два, имѣютъ точно тѣхъ же дѣлителей; такимъ образомъ вопросъ приведенъ къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя количествъ B′ и R. Продолжая далѣе и далѣе сіе разсужденіе, дойдемъ до слѣдствія стр. 40-я.

Какъ частное q должно быть необходимо цѣлымъ, то недостаточно поступать здѣсь такъ какъ съ числами. Расположивъ многочленныя количества, раздѣлимъ первые члены Mx^m и Nx^n количествъ A′ и B′, и если N заключитъ какой нибудь производитель x не дѣлящій M, то частное будетъ дробное. Такъ какъ принято уже, что B′ неимѣетъ общихъ производителей, независимыхъ отъ a, слѣдовательно x не есть дѣлитель количества B′, посему для избѣжанія вышесказаннаго затрудненія, мы можемъ A′ умножить на x: тогда M обратится въ Mx дѣлящееся на N. Изъ сего слѣдуетъ, что первые два члена всегда приведутся въ состояніе дѣлимости, отнявъ отъ N, или введя въ M, производителей, производящихъ точному раздѣленію. Таковое *приуготовительное* дѣйствіе, дабы всѣ частные были цѣлые, должно дѣлать при каждомъ послѣдующемъ дѣленіи, коихъ требуетъ предложеніе.

Пусть будутъ на прим: многочленныя количества $36a^3cd - 120abcd + 100b^2cd$, $36a^3c - 6a^2bc - 90ab^2c$. Общій дѣлитель между $120abcd$ и $100b^2cd$ есть $20bcd$; а между $20bcd$ и $36a^2cd$ оный будетъ $4cd$. Такимъ же образомъ найдемъ, что $6ac$ есть общій производитель всѣхъ членовъ втораго многочленнаго количества. Опустивъ сихъ производителей, данныя количества обратятся въ $9a^2 - 30ab + 25b^2$ и $6a^2 - ab - 15b^2$.

Но какъ $4cd$ и $6ac$ имѣютъ дѣлителемъ $2c$, то сохранимъ оный для умноженія на общаго дѣлителя сокращенныхъ многочленныхъ количествъ; $2c$ есть производитель независимый отъ a. Вотъ остальное вычисленіе:

$$\begin{array}{r|l} 9a^2 - 30ab + 25b^2 & 6a^2 - ab - 15b^2 \\ 18a^2 - 60ab + 50b^2 & \text{1-е частное. } 3 \\ \hline \text{остатокъ } -57ab + 95b^2 & \text{2-й остат. } 9ab - 15b^2 \\ \text{или } -19b(3a - 5b) & \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 3a - 5b \text{ общ. дѣлит.} \\ 2a + 3b \end{array} \right.$$

Дѣленіе $9a^2$ на $6a^2$ какъ видно не могло въ точности быть исполнено, для сего умножили все дѣлимое на 2; потомъ частное 3 произвело остатокъ $-57ab + 95b^2$, и вопросъ обратился въ отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя, между симъ двучленнымъ количествомъ и дѣлителемъ; должно слѣдовательно пріуготовительныя вычисленія повторить надъ тѣмъ и другимъ. И такъ найдемъ, что двучленное количество имѣетъ производителемъ $-19b$, который должно опустить, и какъ дѣленіе на $(3a - 5b)$ исполнимо въ точности, посему искомый общій наибольшій дѣлитель есть $2c(3a - 5b)$ или $6ac - 10bc$.

Пусть требуется приведеніе въ наипростѣйшій видъ дроби $\frac{6a^3 - 6a^2y + 2ay^2 - 2y^3}{12a^2 - 15ay + 3y^2}$; первое изъ сихъ многочленныхъ количествъ имѣетъ производителемъ 2, а второе 3, которые можно упустить неизмѣняя общаго наибольшаго дѣлителя обѣихъ частей: и такъ дѣлитель обратится въ $4a^2 - 5ay + y^2$, а первый членъ

дѣлимаго въ $3a^3$. Чтобы дѣленіе могло исполниться въ цѣлыхъ числахъ, должно умножить дѣлимое на 4 или удвоить числителя; потомъ искать общаго наибольшаго дѣлителя между $12a^3 - 12ay^2 + 4ay^2 - 4y^3$ и $4a^2 - 5ay + y^2$. Первое дѣленіе дастъ частное $3a$ и остатокъ $3a^2y + ay^2 - 4y^3$. Чтобъ опять сдѣлать дѣленіе возможнымъ, умножимъ сей остатокъ на 4, сверхъ сего можно опустить производитель y, и дѣлимое обратится въ $12a^2 + 4ay - 16y^2$.

Второе дѣленіе дастъ остатокъ $19ay - 19y^2$, который долженъ быть принятъ за дѣлителя коднчества $4a^2 - 5ay + y^2$. Опустивъ въ семъ дѣлителѣ производителей 19 и y, оный обратится въ $a - y$, и раздѣлитъ $4a^2 - 5ay + y^2$ безъ остатка. Посему $a - y$ будетъ искомый общій наибольшій дѣлитель, и данная дробь, приведенная въ простѣйшій видъ, будетъ $\frac{4a^2 - 2y^2}{12a - 5y}$.

Вотъ самое вычисленіе:

$$\begin{array}{r|l} 12a^3 - 12a^2y + 4ay^2 - 4y^3 & 4a^2 - 5ay + y^2 \\ 3a^2y + ay^2 - 4y^3 & 3a + 3 \\ 12a^2 + 4ay - 16y^2 & \\ 19ay - 19y^2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 19ay - 19y^2 \\ a - y \text{ общ. дѣл.} \\ 4a - 4y \end{array} \right.$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что общій наибольшій дѣлитель $\frac{4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4}{6a^3 + 4a^2b - 9a^2b^2 - 5ab^3 + 2b^4}$ есть $2a^2 + 2ab - b^2$, и дробь обратится въ $\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{3a^2 - ab - 2b}$.

Для дроби $\frac{54a^2b - 24b^3}{45a^3b + 3a^2b^2 - 9ab^3 + 6b^4}$, общій производитель независимый отъ a, есть $3b$; опустивъ оный въ обоихъ членахъ, также какъ и 2 въ числителѣ, остается отыскать общаго наибольшаго дѣлителя между $9a^2 - 4b^2$ и $15a^3 + a^2b - 3ab^2 + 2b^3$, который будетъ $5a + 2b$; и такъ $3b\ 5a + 2b$, есть искомый

наибольшій общій дѣлитель и дробь обратится въ $\frac{6a-4b}{5a^2-5ab+b^2}$.

Здѣсь также какъ и въ чл. 100-мъ, недолжно забывать, что члены, заключающіе одну и туже степень буквы, по коей располагали, принимаются за одинъ членъ, какъ на пр: въ дроби.

$$\frac{a^2(b^2+c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)}{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)}.$$

Разсмотрѣвъ предѣлящіе $(b+c)$, $(2b^2+bc-c^2)$, (b^2-c^2) и проч., увидимъ, что $(b+c)$ есть общій производитель, независимый отъ a. Опустивъ оный, отыскивающъ общій наибольшій дѣлитель между . . . . $a^2(b-c)-ab(2b-c)+b^3$ и $a^3(b+c)-a^2b(2b+c)+ab^3$, который и будетъ $a-b$, и такъ общій наибольшій дѣлитель обѣихъ частей предложенной дроби есть $a(b+c)-b(b+c)$; и дробь обратится въ $\frac{a(b-c)-b^2}{a^2(b+c)-ab^2}$.

II. УРАВНЕНІЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

Уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

104. Степень уравненія означается наибольшимъ показателемъ неизвѣстнаго, въ оном заключающагося: x, y, z.... будутъ представлять неизвѣстныя; a, b, c.... данныя количества. И такъ $ax+b=cx$ есть уравненіе первой степени; $ax^2+bx=c$ второй; $x^3+qx^2=r$ третьей, и проч.

Для рѣшенія предложенной задачи должно сначала выразить уравненіемъ, отношеніе существующее между данными и неизвѣстными количествами: какъ скоро такимъ образомъ задача будетъ выражена Алгебраическимъ языкомъ, останется *рѣшить* уравне-

ніе, то есть, освободить неизвѣстное отъ всѣхъ количествъ съ нимъ соединенныхъ, и дать ему видъ $x = A$; A будетъ искомая величина.

На пр: Отецъ въ четверо старѣе сына, сумма лѣтъ обоихъ есть 45; сколько лѣтъ каждому? Положимъ, что x выражаетъ лѣта сына, $4x$ будутъ лѣта отца; и такъ $x + 4x$ должны составить 45 лѣтъ, откуда $5x = 45$. Таково будетъ уравненіе, выражающее въ нашей задачѣ отношеніе неизвѣстнаго съ данными количествами 5 и 45. Теперь должно рѣшить оное; что исполнимъ, раздѣливъ произведеніе 45 на 5; частное 9 есть другой производитель (чл. 5); $x = 9$ будутъ лѣта сына, а 36 лѣта отца.

Изъ сего видно, что при всякой задачѣ представляются два затрудненія: 1-е. *составить уравненіе*, 2-е. *рѣшить оное.* Мы разсмотримъ то и другое, начиная со второго.

105. Въ уравненіи первой степени неизвѣстное не иначе можетъ быть сопряжено съ другими количествами, какъ посредствомъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія. Вотъ правила для освобожденія онаго:

1-е. *Если неизвѣстное имѣетъ дробные предстоящіе, то должно умножить все уравненіе на общаго знаменателя* (чл. 58, 1-е и 2). Сіе дѣйствіе, истребляя уравненія, уничтожитъ дѣлителей. И такъ, стоитъ только привести все къ одному знаменателю и уничтожить его. Пусть будетъ, на пр:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x - 20 - \frac{1}{6}x = \frac{3}{4}x - \frac{1}{12}x - 8.$$

Умноживъ все на 12, сіе уравненіе обратится въ

$$8x + 6x - 240 - 2x = 9x - x - 96,$$

по приведеніи будетъ $12x - 240 = 8x - 96$.

II. *Всѣ неизвѣстные члены должно соединить въ одной части уравненія, а извѣстные въ другой, перемѣняя знаки въ противные у членовъ переводимыхъ изъ одной части уравненія въ другую;* сіе на-

зываешся *переносить*. Такимъ образомъ нашъ примѣръ превращится въ $12x - 8x = 240 - 96$, или $4x = 144$. Въ самомъ дѣлѣ, дабы уничтожить 240 въ 1-й части $12x - 240$, отъ чего она обратится въ $12x$, увеличиваютъ оную 240; но чтобы равенство существовало, должно также 240 прибавить и ко второй части. Равномѣрно, уничтожая $8x$, второю часть уменьшаютъ $8x$; слѣдовательно должно $8x$ вычесть и изъ 1-й части.

III. По симъ двумъ правиламъ уравненіе приметъ видъ $ax = b$; b есть произведеніе a на x (чл. 5); посему раздѣливъ b на a, частное будетъ x; и такъ $x = \frac{b}{a}$.

Слѣд., для освобожденія неизвѣстнаго отъ его предстоящаго, должно на оное раздѣлить все уравненіе.

Такимъ образомъ изъ уравненія $4x = 144$, получится $x = \frac{144}{4} = 36$; сіе число рѣшитъ вышепредложенное уравненіе, т. е. обѣ части онаго будутъ равны, когда вездѣ вмѣсто x поставимъ 36.

IV. *Уравненіе первой степени имѣетъ только одно рѣшеніе*, ибо можно оное всегда представить въ видѣ (замѣч: стр. 172-я.) $ax + b = cx + d$; и такъ если бы допустили для x двѣ величины α и β, то получили бы уравненія:

$$a\alpha + b = c\alpha + d,\ a\beta + b = c\beta + d,$$

и вычтя одно изъ другаго, нашли бы, что $a(\alpha - \beta) = c(\alpha - \beta)$, уравненіе, обращающееся въ $a - c)(\alpha - \beta = 0$, и которое не иначе можетъ быть удовлетворено, какъ при положеніи $\alpha = \beta$, потому что a и c даны неравными.

Вотъ нѣсколько примѣровъ для сихъ различныхъ случаевъ:

1-е, $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{f} + m = px + \frac{cx}{f} + n$; сокративъ членъ $\frac{cx}{f}$ общій обѣимъ частямъ, останется $\frac{ax}{b} + m = px + n$;

умноживъ все на b, будетъ $ax + bm = bpx + bn$; перенеся bm и bpx, получимъ $ax - bpx = bn - bm$, или $x(a - bp) = b(n - m)$; раздѣливъ на $a - bp$, найдемъ наконецъ:

$$x = \frac{b(n-m)}{a-bp}.$$

2-е. $\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x - 82$; перенеся будетъ $\frac{6}{5}x + \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}x = 90 - 82$, что обратится въ $\frac{6}{5}x - \frac{2}{5}x = 8$; умноживъ уравненіе на 15, получимъ $18x - 10x = 8.15$ или $8x = 8.15$, и наконецъ $x = 15$.

3-е. $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{7}x - 10$, откуда $9 + 10 = \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}x$, а умноживъ на 21 будетъ $19.21 = 7x - 6x$; посему $x = 19.21 = 399$.

4-е. Наконецъ изъ уравненія $\frac{2}{3}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{1}{5}x$ будетъ $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 100$; умноживши на $9.4.5$, или на 180, получимъ $40x - 45x + 252x = 180.100$, или $247x = 18000$; посему $x = \frac{18000}{247} = 72{,}8745$.

106. Займемся теперь главнѣйшимъ затрудненіемъ, состоящимъ въ составленіи уравненія изъ вопроса. Для сего должно разсмотрѣть со вниманіемъ свойства вопроса, дабы, уразумѣвъ оный и давъ неизвѣстному произвольную величину, сдѣлать надъ нею всѣ вычисленія, необходимыя, чтобъ удостовѣриться, удовлетворяетъ ли она или нѣтъ предложенной задачѣ. Такимъ образомъ найдемъ рядъ дѣйствій, которыя должно исполнить надъ искомою величиною, когда она будетъ найдена для повѣрки, въ самомъ ли дѣлѣ оная соотвѣтствуетъ вопросу. Наконецъ, помощію Алгебраическихъ знаковъ, исполнимъ надъ x, изображающимъ неизвѣстное, всѣ сіи дѣйствія, и уравненіе будетъ составлено.

I. Пусть требуется, на примѣръ, отыскать долгъ нѣкотораго человѣка, который въ первый разъ заплатилъ половину онаго, во 2-й треть и въ послѣдній 12-ю долю; послѣ чего остался еще должнымъ 630 руб.

Положимъ, что сей человѣкъ былъ долженъ 1200 руб.; половина сей суммы есть 600, треть доля 400, 12-я доля 100; посему онъ заплатилъ всего 1100; что съ 630 руб. составитъ всего 1100 + 630, или 1730 руб., а не 1200, руб. какъ предположили. И такъ, положеніе наше ложно, но изъ сего составился рядъ вычисленій, которыя легко привести въ дѣйствіе надъ x, и будетъ

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 630.$$

Окончаніе сей задачи уже нетрудно; умноживъ на 12, получимъ $12x = 6x + 4x + x + 7560 = 11x + 7560$; откуда $x = 7560$ руб.; сіе число есть искомое, въ чемъ легко можно увѣриться.

И такъ наше правило для постановленія вопросовъ въ уравненіе состоитъ въ слѣдующемъ: *должно* x *подвергнуть всѣмъ тѣмъ дѣйствіямъ, которыя надлежитъ произвести надъ искомымъ числомъ, когда найдя его, захотимъ повѣрить, удовлетворяетъ ли оное вопросу.*

Произвольная величина, данная неизвѣстному, служитъ только къ отысканію сихъ вычисленій, что по пріобрѣтеніи навыка сдѣлается уже безполезнымъ. Вотъ нѣкоторыя другія задачи:

II. Найти число, коего треть и четверть вмѣстѣ сложенныя даютъ 63. Назовемъ сіе число x, $\frac{x}{3}$ будетъ его треть, а $\frac{x}{4}$ четверть; посему $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 63$; сіе уравненіе обращается въ $7x = 12 \cdot 63$, откуда $x = \frac{12 \cdot 63}{7} = 12 \cdot 9 = 108$.

Замѣтимъ, что для полученія числа, коего 5-я и 6-я доли вмѣстѣ даютъ 22, должно опять составить уравненіе и разрѣшить оное; отъ чего получимъ $\frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 22$; откуда $11x = 30 \cdot 22$ и $x = 30 \cdot 2 = 60$.

Но если бы желали получить вдругъ рѣшеніе обѣихъ сихъ задачъ, и всѣхъ тѣхъ, которыя отъ нихъ различаются только числовыми величинами, то для сего должно сіи числа замѣнить знаками a, b, c ...., которые могутъ изображать всѣ величины, и потомъ надо рѣшать уже слѣдующій вопросъ: Найти число, которое будучи раздѣлено на a и b, даетъ s для суммы частныхъ? Получимъ

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = s, \text{ откуда } x = \frac{abs}{a+b}$$

Сіе выраженіе, собственно говоря, не есть величина неизвѣстнаго нашихъ задачъ; но оно изображаетъ вычисленіе, которое должно исполнить для опредѣленія онаго. Сія *формула* показываетъ, что неизвѣстное получится, умноживъ три данныя числа и раздѣливъ сіе произведеніе abs на сумму $a+b$ обоихъ дѣлителей; посему наша формула служитъ къ сокращенному выраженію вышесказаннаго. И такъ Алгебра есть особенный языкъ, служащій къ выраженію нашихъ разсужденій; почему и должно умѣть читать и писать на ономъ.

Сія формула представляетъ ту выгоду, что не только самый опытный въ Алгебрѣ, но и всякій выкладчикъ могутъ теперь рѣшить задачу. По сей послѣдній достигнетъ сего по навыку; сверхъ того разные вопросы требуютъ различныхъ формулъ, которыя можетъ составить только одинъ Алгебраистъ. Сіе объясняетъ, почему нѣкоторые люди вычисляютъ часто съ удивительною легкостію, не понимая между прочимъ, что они дѣлаютъ, хотя и находятъ точныя окончательныя выраженія.

III. Сумма лѣтъ двухъ братьевъ есть 57; старшій родился семью годами прежде другаго, требуется опредѣлить лѣта каждаго. Пусть x изображаетъ лѣта младшаго, $x+7$ будетъ возрастъ старшаго; слѣдовательно надобно, чтобы x сложенное съ $x+7$

составляло 57; откуда $2x + 7 = 57$ и $x = 25$; и такъ младшему 25 лѣтъ, а старшему 32 года.

Разсмотрѣвъ сей вопросъ, легко увидимъ, что онъ заключаетъ безполезныя обстоятельства и можетъ быть превращенъ въ отыскание двухъ чиселъ, коихъ сумма есть 57, а разность 7. Вообще слѣдуетъ отдѣлять отъ вопроса все постороннее, затемняющее оный и затрудняющее отыскание связи между количествами. Таковая догадка пріобрѣтается навыкомъ: ни наставникъ, ни книга не могутъ сообщить проворливости, нужной для отдѣленія въ вопросѣ необходимаго отъ безполезнаго.

Для всеобщности предыдущей задачи, отыщемъ *два числа, коихъ сумма есть* s, *а разность* d. Изобразимъ x меньшую часть, $x + d$ будетъ большая, сложивъ ихъ, получимъ $x + x + d) = s$; откуда $2x = s - d$ и $x = \frac{1}{2}(s - d$. Таково есть меньшее изъ искомыхъ чиселъ, большее же есть $x + d$ или $\frac{1}{2}(s - d) + d = \frac{1}{2}(s + d)$. Посему

$$x = \tfrac{1}{2}(s - d),\ x + d = \tfrac{1}{2}(s + d)$$

суть искомыя числа; и такъ *взявъ полсумму и полуразность данныхъ количествъ, получимъ большое число сложивъ сіи двѣ половины; а меньшое, вычтя одну изъ другой.*

Домъ въ два этажа имѣетъ 7 саженъ высоты, второй этажъ выше 1-го одною саженью; спраш: высота каждаго изъ нихъ? Какъ $3\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ суть половины данныхъ чиселъ: посему $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ или 4 саж. есть высота втораго этажа; $3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ или 3 саж., высота перваго.

IV. Раздѣлить число a на двѣ части, которыя бы относились между собою какъ $m : n$? Если одну изъ частей назовемъ x, то для полученія другой составимъ пропорцію $m : n = x : \frac{nx}{m}$; a будучи суммою сихъ частей, найдемъ, что $x + \frac{nx}{m} = a$; откуда $x = \frac{ma}{m+n}$.

Для раздѣленія a на три части, которыя бы относились какъ $m : n : p$, пусть x есть первая, $\frac{nx}{m}$ и $\frac{px}{m}$ будутъ другія двѣ: посему $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$, откуда $x = \frac{ma}{m+n+p}$. (Смотр. правило товарищества, чл. 79).

V. Отцу 40 лѣтъ, сыну его 12; спрашив: чрезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вдвое старѣе сына? Положимъ, что чрезъ x лѣтъ; тогда $40 + x$ будутъ лѣта отца, а $12 + x$ лѣта сына; но $40 + x$ должно равняться утроенному $12 + x$; посему

$$40 + x = 36 + 3x, \text{ откуда } x = 2.$$

VI. Нѣсколько товарищей A, B, C.... получили барышъ, и, согласно съ ихъ условіемъ, A беретъ 10 рублей изъ общей суммы и 6-ю долю остатка; B въ свою очередь, 20 рублей и 6-ю долю остатка; C получаетъ 30 руб. и 6-ю долю остатка и т. д. .... до послѣдняго, который беретъ остальное. По окончаніи раздѣла каждому досталось по-ровну; спраш: барышъ, число товарищей и часть каждаго.

Хотя кажется, что здѣсь три неизвѣстныя количества, но съ нѣкоторымъ вниманіемъ легко усмотрѣть можно, что нашедши барышъ x, и учинивъ раздѣлъ, не трудно получить прочія два: и такъ вопросъ можетъ быть рѣшенъ посредствомъ одного только неизвѣстнаго x.

Такъ какъ A беретъ 10 руб., слѣд. остается $x - 10$, чего 6-я доля есть $\frac{x-10}{6}$; посему его часть будетъ $10 + \frac{x-10}{6}$ или $\frac{x+50}{6}$.

B беретъ 20 руб.; остатокъ будетъ

$$x - \frac{x+50}{6} - 20 = \frac{5x-170}{6},$$

чего шестая доля есть $\frac{5x-170}{36}$; слѣдовательно: часть B будетъ $20+\frac{5x-170}{36}$ или $\frac{5x+550}{36}$. Но какъ сіи двѣ части должны быть равны, то получимъ $\frac{x+50}{6}=\frac{5x+550}{36}$ или $6x+300=5x+550$, откуда $x=250$. И такъ барышъ будетъ равенъ 250 руб.; часть каждаго будетъ $\frac{x+50}{6}$ или 50 руб.; раздѣливъ 250 на 50, найдемъ, что товарищей было 5.

VII. Изъ a каршъ составляютъ b кучекъ, изъ коихъ въ каждой c очковъ; первая каршя каждой кучки считается въ 11 очковъ, если она есть тузъ; въ 10, если фигура или десятка .... и проч.; прочія каршы считаются за 1 очко. Составивъ сіи кучки, и зная число d оставшихся каршъ, требуется опредѣлить сумму x очковъ, составляемую однѣми первыми каршами, коими начинается каждая изъ кучекъ.

Число очковъ каждой кучки, умноженное на число кучекъ или bc, есть полная сумма очковъ, если изъ сего числа вычтутся каршы, считаемыя въ одно очко, осташокъ будетъ x. Но число сихъ каршъ есть $a-d-$ число b каршъ принимаемыхъ болѣе, чѣмъ въ одно очко. Посему $x=bc-(a-d-b)$ или $x=b(c+1)+d-a$. При 32-хъ каршахъ, составивъ три кучки, каждую въ 12 очковъ, получимъ $x=d+7$.

VIII. Получивъ въ какой-нибудь задачѣ выраженіе неизвѣстнаго въ буквахъ и принимая оное за извѣстное, а одну изъ данныхъ величинъ за искомую, достаточно рѣшить тоже уравненіе, относительно сей послѣдней, дабы получить рѣшеніе новой задачи, произшедшей отъ перемѣны неизвѣстнаго. Вообще, *во всякомъ уравненіи можно принимать какую изъ буквъ входящихъ въ оное за неизвѣстное.* И такъ

нѣтъ нужды различать въ задачѣ неизвѣстныя отъ данныхъ: а выражаютъ уравненіемъ отношеніе сихъ различныхъ количествъ и потомъ принимаютъ за неизвѣстную ту изъ сихъ буквъ, которую заблагоразсудятъ. Сіе замѣчаніе способствуетъ рѣшенію такихъ вопросовъ, въ которыхъ неизвѣстное соединено съ извѣстными затруднительнымъ образомъ. Вотъ примѣръ довольно сложный, къ коему сіи замѣчанія могутъ быть приложены.

Извѣстно изъ Механики, что времена качаній двухъ маятниковъ относятся какъ квадратные корни ихъ длины, считая оные съ точки привѣса до центра качанія или $t : t' = \sqrt{l} : \sqrt{l'}$; зная три изъ сихъ количествъ, найдемъ четвертое изъ уравненія $l't^2 = lt'^2$. Но маятникъ тѣмъ болѣе дѣлаетъ качаній, чѣмъ онъ скорѣе идетъ; посему числа n и n' качаній, произведенныхъ въ одно время, будутъ въ обратномъ содержаніи временъ каждаго, $t : t' = n' : n$; слѣдовательно

$$n' : n = \sqrt{l} : \sqrt{l'};\ n'\sqrt{l'} = n\sqrt{l}.$$

n и n' суть числа качаній, совершаемыхъ обоими маятниками въ одно время, какіе бы оные ни были. Но изъ опыта извѣстно, что въ Парижѣ въ безвоздушномъ мѣстѣ длина секуднаго маятника (т. е. такого, который бьетъ 60 разъ въ минуту, или 86400 разъ въ 24 часа средняго времени) есть

$l = 0{,}9938269$ метрамъ, $\log l = 1{,}9973107$

или $l = 39{,}12754$ дюймовъ, $\log l = 1{,}5924826$.

И такъ легко опредѣлить число качаній, произведенныхъ въ данное время извѣстнымъ маятникомъ, или, обратно, отыскать длину l' маятника, когда будетъ извѣстно число n' его качаній въ опредѣленное время. Ибо въ такомъ случаѣ вторая часть нашего уравненія будетъ извѣстна и останется только найти одно изъ чиселъ l' или n'. Логарифмы облегчаютъ сіе вычисленіе.

На пр: опредѣлишь длину маятника, производящаго 100000 качаній въ 24 часа, изъ уравненія $l' = \frac{ln^2}{n'^2}$, въ коемъ $n = 86400$, $n' = 100000$; получимъ по вычисленію, представленному на сторонѣ, l' въ метрахъ, что и будетъ длиною секуднаго маятника, когда день раздѣленъ на 10 час., часъ на 100′, минута на 100″.

$\log n = 4{,}9365137$
удвоен. $= 9{,}8730274$
$\log l = 1{,}9973107$
-10
$\log l' = 1{,}8703381$
мет.
$l' = 0{,}7418875$

IX. A и B начали играть съ одинаковою суммою денегъ; A проигралъ 12 руб., а B 57 руб.; чрезъ что у B осталось въ четверо менѣе нежели у A. Спрашивается: сколько каждый имѣлъ до игры? Отвѣтъ, 72 руб.

X. Нѣкто сказалъ: если бъ удвоили число имѣющихся у меня рублей, то я бы могъ отдать изъ нихъ 5 рублей; его желаніе исполнили три раза послѣдовательно, и у него ничего не осталось? Спраш: число его денегъ? Отвѣтъ $2\frac{5}{8}$.

XI. Найти число, которое, будучи раздѣлено на a и b, даетъ два частныя, коихъ разность есть d? Найдется $x = \frac{abd}{b-a}$.

XII. Найти число, кото бы m равныхъ частей составляли тоже произведеніе, какъ $m+1$ его равныхъ частей, (т. е. чтобы произведеніе трехъ третей, на пр: равнялось бы 4 четвертымъ сего числа), получится $x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$.

XIII. Одинъ охотникъ обѣщалъ другому платить b руб. за каждый промахъ, съ тѣмъ, чтобы тотъ давалъ c руб. за каждый удачный выстрѣлъ. Послѣ n выстрѣловъ нашлось, что или охотники остались недолжными, или первый платитъ второму d руб., или, обратно: требуется составить формулу, кото-

рая бы выражала сіи три случая и опредѣляла бы число промаховъ x. Выигрышь есть число $n - x$ удачныхъ выстрѣловъ, повтореннос c разъ; проигрышь x, взятое b разъ; откуда $bx - c(n - x) = \pm d$.

Найдется $x = \frac{cn \pm d}{b + c}$, d есть нуль въ 1-мъ случаѣ; верхній знакъ принимается для втораго, а нижній для 3-го случая.

XIV. Одинъ фонтанъ наполняетъ бассейнъ въ h, а другой въ h' часовъ; спраш: время, въ которое они вмѣстѣ наполнятъ сей бассейнъ? Отвѣтъ, $x = \frac{hh'}{h + h'}$. Легко рѣшишь сію задачу для большаго числа фонтановъ, полагая даже, что бассейнъ опорожнивается. (Смотр. VI, стр. 114-я).

Замѣчанія на уравненія первой степени.

107. Объ Алгебраическихъ формулахъ тогда только можно имѣть ясное понятіе, когда онѣ изображаютъ рядъ удобоисполнимыхъ числовыхъ вычисленій. И такъ количество $b - a$, взятое отдѣльно, означаетъ нссообразность, когда $a > b$. Посему должно обратишься къ разсмотрѣнію предыдущихъ вычисленій, потому что въ нихъ встрѣчаются иногда таковыя затрудненія.

Всякое уравненіе первой степени можетъ быть превращено въ такое, у коего всѣ знаки положительные, на пр: (*)

$$ax + b = cx + d \quad \ldots\ldots (1).$$

(*) Для сего стоитъ только отрицательные члены сдѣлать положительными; что всегда возможно, ибо ни что не препятствуетъ придать къ обѣимъ частямъ одно и тоже количество. Но не всегда можно произвести вычитаніе; для сего надобно, чтобъ объ части были болѣе вычитаемаго количества.

Вычтемъ изъ обѣихъ частей $cx + b$, получимъ $ax - cx = d - b$; откуда $x = \frac{d-b}{a-c}$ .... (2).

При семъ представляется три случая: 1-е или $d > b$ и $a > c$; 2-е или только одно изъ сихъ условій имѣетъ мѣсто; 3-е или наконецъ $b > d$ и $c > a$. Въ первомъ случаѣ величина 2) рѣшаетъ задачу; въ двухъ послѣднихъ должно разсмотрѣть величину x, ибо она дѣлается непонятною.

Во второмъ случаѣ одно изъ вычитаній $d-b$, $a-c$, невозможно: пусть на пр: $b > d$ и $a > c$; ясно, что предложенное уравненіе 1) ложно, ибо оба члена ax и b первой части соотвѣтственно болѣе членовъ cx и d второй. И такъ въ семъ случаѣ заключаемъ, что задача несообразна; ибо уравненіе ни что иное есть, какъ точное Алгебраическое оной выраженіе.

Въ третьемъ случаѣ, т. е. когда $b > d$ и $c > a$, оба вычитанія не могутъ быть исполнены; но для рѣшенія уравненія (1), мы отнимали $cx + b$ отъ обѣихъ его частей, чего сдѣлать нельзя было, потому что каждая изъ нихъ $< cx + b$. Сіе вычисленіе было ложно, а должно отнять изъ обѣихъ частей $ax + d$, отъ чего $b - d = cx - ax$, откуда

$$x = \frac{b-d}{c-a} \text{ ..... } (3).$$

Сравнивъ сію величину съ (2) увидимъ, что различіе состоитъ только въ перемѣнѣ знаковъ въ числителѣ и знаменателѣ, и что оная въ такомъ видѣ не представляетъ уже несообразности. И такъ если встрѣтится сей 3-й случай, то онъ показываетъ, что вмѣсто перенесенія всѣхъ неизвѣстныхъ членовъ въ первую часть, должно было ихъ перенести во 2-ю: и для поправленія ошибки не нужно передѣлывать вычисленій, а достаточно перемѣнить знаки въ числителѣ и знаменателѣ.

Одна изъ важнѣйшихъ выгодъ, предоставляемыхъ Алгеброю, есть соединеніе формулъ, выражающихъ всѣ случаи одного и того же вопроса, какія бы ни были даны числа, (стр. 166-я). Для достиженія сей цѣли, условились *дѣйствовать отдѣльными отрицательными количествами, предполагая, что они сопровождаются другими какими-нибудь величинами.* На пр: еслибъ имѣли $m+d-b$ и $b>d$, то написали бы $m-(b-d)$; когда бы m не существовало, то согласимся писать также $d-b=-(b-d)$, если b будетъ $>d$.

Величина x во 2-мъ случаѣ обращается въ $x=-\frac{b-d}{a-c}$ и говорятъ, что *всякое отрицательное рѣшеніе означаетъ несообразность.*

Подобнымъ образомъ, чтобы раздѣлить $-a^4+3a^2b^2+$ и проч. на $-a^2+b^2$ и проч., дѣлятъ сначала $-a^4$ на $-a^2$, и частное a^2 будетъ имѣть знакъ $+$ (чл. 98). Тоже скажемъ о сихъ отдѣльныхъ количествахъ $-a^2$, $-a'$; такъ что въ 3-мъ случаѣ величина x будетъ имѣть видъ $\frac{-(b-d}{-(c-a,}$, обращающійся въ $\frac{b-d}{c-a}$, какъ и быть должно (3).

108. И такъ сіе условіе, не производя никакой несообразности, соединяетъ всѣ случаи въ формулѣ (2). Но не должно забывать, что отдѣльныя отрицательныя количества $-k$, $\frac{-m}{-n}$, суть только величины условныя (symboles) сами по себѣ несуществующія, и употребляются какъ дѣйствительныя только потому, что чрезъ сіе достигаютъ надлежащей цѣли, безъ всякой неудобности. Въ самомъ дѣлѣ, одно изъ двухъ, или окончательное выраженіе будетъ имѣть знакъ —; изъ чего заключимъ, что задача несообразна: здѣсь знакъ — есть только выраженіе сей несообраз-

ности; или окончательное выраженіе будетъ имѣть знакъ +, и тогда доказано уже, что оно есть надлежащее, хотя и произошло отъ раздѣленія двухъ отрицательныхъ количествъ. Изъ сего слѣдуетъ, что

1-е. *Можно перемѣнять всѣ знаки уравненія, и умножать оное на отрицательное количество.* Въ самомъ дѣлѣ въ первомъ изъ нашихъ трехъ случаевъ, уравненіе хотя и сдѣлается чрезъ сіе изъ дѣйствительнаго несообразнымъ; но дѣленіе отрицательныхъ количествъ приведетъ опять уравненіе въ первобытное состояніе. Во второмъ случаѣ, несообразность задачи обнаружится опять отрицательною величиною неизвѣстнаго; и наконецъ въ третьемъ случаѣ, перемѣна знаковъ исправитъ погрѣшность вычисленія.

2-е. Несообразность, заключающуюся въ уравненіи и обнаруживающуюся отрицательнымъ рѣшеніемъ, полученнымъ во 2-мъ случаѣ, можно уничтожить вставя $-x$ вмѣсто x, ибо предложенное уравненіе чрезъ сіе обратится въ $-ax+b=-cx+d$, отсюда $x=\frac{b-d}{a-c}$, величина одинаковая со (2), но положительная. И такъ изъявивъ соотвѣтственно сему уравненію смыслъ вопроса, несообразность онаго исчезнетъ, и сіе рѣшеніе будетъ различаться отъ прежняго однимъ только знакомъ.

Выразимъ на пр: задачу V слѣдующимъ образомъ: отцу сорокъ лѣтъ, сыну его 12: *чрезъ сколько лѣтъ* возрасту сына *будетъ* составлять четверть лѣтъ отца? Получимъ $40+x=4(12+x)$, отсюда $x=-\frac{8}{3}$; и такъ сія задача несообразна. Но вставя $-x$ вмѣсто x, уравненіе обратится въ $40-x=4(12-x)$, и соотвѣтствующія оному условія превращаютъ задачу въ слѣдующую: отцу сорокъ лѣтъ, сыну его 12, *сколько прошло лѣтъ* съ того времени, когда сынъ былъ въ четверо моложе отца? Получимъ $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

Найти число x, которое будучи раздѣлено на a, составляло бы съ дѣлимымъ x и дѣлителемъ a сумму s?

Уравненіе будетъ $a+x+\frac{x}{a}=s$, откуда $x=\frac{a(s-a)}{a+1}$. Но если $a>s$, то x сдѣлается отрицательнымъ, а вопросъ несообразнымъ; что впрочемъ можно было предвидѣть, напр: $a=11$, $s=5$, даютъ $x=-5\frac{1}{2}$. Вставя $-x$ вмѣсто x, найдемъ $11-x-\frac{1}{11}x=5$; такъ что $x=5\frac{1}{2}$ есть число, которое будучи сложено съ частнымъ отъ $5\frac{1}{2}:11$, и вычтено изъ 11-ти, даетъ въ остаткѣ 5. Выразивъ такимъ образомъ сію задачу, она перестаетъ быть несообразною.

Найти число, коего треть и 5-я доля вмѣстѣ сложенныя и уменьшенныя 7-ю, даютъ сіе самое число? Получимъ $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x-7=x$; откуда $x=-15$. Вопросъ несообразный; но перемѣнивъ x на $-x$ (или лучше сказать -7 на $+7$) увидимъ, что 15 есть число, коего треть и 5-я доля приложенныя къ 7-ми, составляютъ 15.

109. Уравненіе (2) представляетъ еще два замѣчательные случая. Если $a=c$, то $x=\frac{d-b}{0}$; уравненіе (1) обратится тогда въ $ax+b=ax+d$, гдѣ $b=d$; и такъ покуда b неравно d, задача остается несообразною и не можетъ быть исправлена вышепоказаннымъ способомъ. Уменьшая n, дробь $\frac{m}{n}$ увеличивается, для $n=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, дробь дѣлается въ 2, 100, 1000 разъ болѣе. Предѣлъ сего увеличиванія есть *безконечность*, соотвѣтствующій $n=0$: и такъ *въ задачѣ будетъ заключаться несообразность, когда получится безконечное рѣшеніе;* что изображается знакомъ $x=\infty$.

Но если $a=c$ и $b=d$, тогда $x=\frac{0}{0}$; и уравненіе (1) обратится въ $ax+b=ax+b$; здѣсь величина x совершенно произвольна, ибо какой бы x ни былъ

обѣ части уравненія непереставаютъ быть равными. *Итакъ, задача будетъ неопредѣленная, или будетъ имѣть безконечное число рѣшеній, когда изъ уравненія* (1) *найдемъ, что* $x = \frac{0}{0}$. (См. чл. 141

Уравненія первой степени со многими неизвѣстными.

110. Когда число неизвѣстныхъ равно числу уравненій, тогда величины сихъ неизвѣстныхъ, можно получить слѣдующимъ образомъ:

I. Изъ каждаго уравненія опредѣляется величина одного неизвѣстнаго, принимая всѣ прочія количества за извѣстныя, потомъ сравниваются сіи величины по двѣ, и такимъ образомъ составляется однимъ уравненіемъ меньше противъ даннаго числа: продолжая сіе дѣйствіе, каждый разъ *выключится* одно изъ неизвѣстныхъ; потомъ получивъ величину послѣдняго, постепенно опять будемъ переходить отъ одного уравненія къ другому для опредѣленія прочихъ неизвѣстныхъ.

На пр: для $5x - 3y = 1$, $7y - 4x = 13$, найдемъ

изъ 1-го . . . . $x = \frac{3y + 1}{5}$,

изъ 2-го . . . . $x = \frac{7y - 13}{4}$,

сравнивъ сіи величины, будетъ $\frac{3y + 1}{5} = \frac{7y - 13}{4}$ уравненіе, заключающее только одно неизвѣстное y, изъ коего получимъ $12y + 4 = 35y - 65$; потомъ, $35y - 12y = 65 + 4$ или $23y = 69$; наконецъ $y = 3$: перейдя къ одной изъ величинъ x, найдемъ

$$x = \frac{3.3 + 1}{5} = 2.$$

подобнымъ образомъ $2x + 5y - 3z = 3$,
$3x - 4y + z = 2$,
$5x - y + 2z = 9$,

даютъ $z = \frac{2x+5y-3}{3} = 4y - 3x - 2 = \frac{9+y-5x}{2}$.

Сравнивъ 2-е съ 1-мъ и 3-мъ и уничтоживъ знаменателей, (105, I.) получимъ

$12y - 9x - 6 = 2x + 5y - 3$,
$8y - 6x - 4 = 9 + y - 5x$,

или $7y - 11x = 3$, $7y - x = 15$;

откуда $7y = 3 + 11x = 13 + x$ и $x = 1$; перейдя къ величинамъ y и z, найдемъ наконецъ

$$y = \frac{3+11}{7} = 2, \quad z = \frac{2+5.2-3}{3} = 3.$$

II. Способъ *подстановокъ* состоитъ въ слѣдующемъ: Выводятъ изъ какого-нибудь уравненія величину одного изъ неизвѣстныхъ, и подставляютъ оную въ прочія уравненія; отъ чего число уравненій и неизвѣстныхъ уменьшается однимъ, и сіе дѣйствіе повторяютъ до полученія одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Пусть будутъ $3x+2y=12$, $2z+y=5$, $x+y+3z=8$; изъ второго уравненія найдемъ, что $y = 5 - 2z$, вставя сію величину y въ два другія, они обратятся въ $3x - 4z = 2$, $x + z = 3$.

Послѣднее даетъ $x = 3 - z$, отъ чего предыдущее будетъ $9 - 3z - 4z = 2$; откуда $z = 1$, и слѣд. $x = 3 - z = 2$, $y = 5 - 2z = 3$.

III. Первый способъ хотя проще другихъ, но по медленности своей рѣдко употребляется, 2-й иногда служитъ только, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое изъ уравненій; разсмотримъ нынѣ употребительнѣйшій способъ. Возьмемъ

$$ax + by = c, \; a'x + b'y = c' \ldots . \text{(A)}.$$

Положимъ a и a' равными, вычтя одно уравненіе изъ другаго, x исчезнетъ; если a и a' имѣютъ проти-

ные знаки, что должно сложить уравненія. Но когда a и a' не равны, то для выполненія нашего условія, умножимъ 1-е уравненіе на a', а второе на a, чрезъ что aa' сдѣлается общимъ предѣлителемъ x (*). Посему вычтя получимъ

$$a'by - ab'y = a'c - ac', \text{ откуда } y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Можно бы отыскать x, вставя сію величину въ одномъ изъ данныхъ уравненій, но короче въ свою очередь выключить такимъ же образомъ y. И такъ

$$x = \frac{cb - cb'}{a'b - ab'}, \; y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \ldots . \quad \text{B}.$$

111. Сдѣлавъ тоже съ уравненіями

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \ldots \end{aligned}\right\} \text{(C)},$$

представляющими общій видъ уравненія съ тремя неизвѣстными, опредѣлимъ величины x, y и z. Но не прибѣгнувъ къ особенному способу, нельзя найти закона составленія окончательныхъ выраженій, по чему и выразимъ другимъ образомъ сіи уравненія. Умножимъ 1-е на k, а второе на k', и изъ суммы сихъ произведеній вычтемъ третье уравненіе; получимъ: $(ka+k'a'-a'')x + kb+k'b'-b'' y + kc+k'c'-c'' z = kd+k'd'-d''$. Но какъ числа k и k' суть произвольныя, то можно имъ дать величины, способныя выключить два неизвѣстныя, на пр: y и z. Для сего положимъ, что

$$kb + k'b' = b'', \; kc + k'c' = c'' \ldots . \quad \text{D},$$

сіи уравненія послужатъ къ опредѣленію k и k', и будетъ

$$x = \frac{kd + k'd' - d''}{ka + k'a' - a''} \ldots . \quad \text{(E)}.$$

(*) Если a и a' имѣютъ общаго производителя, то соотвѣтственныя множителями берутся производители, которые не суть общіе ни для a, ни для a', какъ по дѣлали при приведеніи къ одному знаменателю (чл. 38. 1-е и 2-е).

Потомъ должно опредѣлить k и k', и вставивъ здѣсь ихъ величины, но сіе вычисленіе можно сократить. Въ самомъ дѣлѣ числитель величины x получится изъ знаменателя, перемѣнивъ a, a', a'' на d, d', d''; и какъ k и k' независимы отъ сихъ количествъ, то сіе замѣчаніе неизмѣнится и послѣ подстановки величинъ k и k'.

И такъ осталося опредѣлить знаменатель; ибо числитель найдется изъ онаго, перемѣнивъ только a на d...., формулы B примѣненныя къ уравненіямъ D, даютъ

$$k = \frac{b'c'' - c'b''}{cb' - bc'},\ k' = \frac{cb'' - bc''}{cb' - bc'};$$

ошкуда $ka + k'a' - a'' = \frac{a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'')}{cb' - bc'} - a''$.

Приведя къ одному знаменателю и уничтоживъ оный какъ общій обоимъ членамъ дроби E, получимъ для искомаго знаменателя.

$$\text{K} = -a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb').$$

Обративъ вниманіе на способъ составленія сихъ произведеній, увидимъ что вычисленіе состоитъ изъ слѣдующихъ дѣйствій. Должно взять разность $bc - cb$ между двумя перестановками буквъ b и c; потомъ ввести букву a на всѣ мѣста, начиная съ перваго лѣвой рукп, и перемѣняя знакъ при каждой перестановкѣ a, отъ чего bc произведетъ abc, $-bac$ и $+bca$, $-cb$ дастъ $-acb$, $+cab$ и $-cba$. Посему получимъ $abc - bac + bca - acb + cab - cba$. Наконецъ поставивъ одинъ значокъ надъ 2-ю буквою каждаго членя, и два надъ послѣднею, найдется знаменатель

$$\text{K} = ab'c'' - ba'c'' + bc'a'' - ac'b'' + ca'b'' - cb'a''.$$

Для опредѣленія y, должно бы такимъ же образомъ приравнять нулю предположеніе x и z въ вышесказанномъ уравненіи; но тожественный ходъ вычисленія доказываетъ, что достаточно въ величинѣ x перемѣнить b на a, и обратно. Для величины z перемѣнили бы c на a. Изъ сего заключимъ, что 1-е,

знаменатель величинъ x, y и z есть одинъ и тотъ же; 2-е числитель каждой выводится изъ знаменателя, перемѣнивъ предстоящихъ неизвѣстнаго на извѣстные члены.

И такъ $x = \frac{db'c'' - bd'c'' + bc'd'' - dc'b'' + cd'b'' - cb'd''}{K}$,

$y = \frac{ad'c'' - da'c'' + dc'a'' - ac'd'' + ca'd'' - cd'a''}{K}$,

$z = \frac{ab'd'' - ba'd'' + bd'a'' - ad'b'' + da'b'' - d'ba''}{K}$.

Доказанный законъ произшекаетъ изъ самаго свойства вычисленія; такъ что имѣя четыре неизвѣстныя и четыре уравненія $ax + by + cz + dt = t$, $a'x + b'y + c'z + dt = t'$ и проч. достаточно опыскать общаго знаменателя, а изъ него уже выведется каждой числитель, знаменатель же составится по прежнему закону.

Посему взявъ шесть перемѣщеній буквъ abc, составляющихъ вышесказанный знаменатель (опустивъ значки), или $abc - bac + bca -$ и проч. сплавимъ букву d, въ каждой изъ сихъ членовъ на всѣ мѣста, начиная съ 1-го лѣвой руки, помня при каждой перестановки d на слѣдующее мѣсто перемѣнять знакъ, на конецъ пишучи одинъ значокъ надъ 2-ю буквою, два надъ 3-ю, и три надъ послѣднею: отъ чего общій знаменатель будетъ

$da'b''c''' - ad'b''c''' + ab'd''c''' - ab'c''d''' - db'a''c''' + ad'a''c''' -$ и пр.

(См. Laplace, Acad des Sciences, 1772. 2-ю часть).

Слѣдуетъ нѣсколько задачъ.

I. Нѣкто имѣетъ въ рукахъ нѣсколько монетъ, если переложитъ одну изъ правой руки въ лѣвую, то въ обѣихъ рукахъ будетъ поровну; но если изъ лѣвой переложитъ двѣ въ правую, то въ сей послѣдней будетъ вдвое противъ лѣвой: спрашивается число монетъ въ каждой рукѣ. Найдемъ $x - 1 = y + 1$ и $x + 2 = 2(y - 2)$; откуда $x = 10$ и $y = 8$.

II. Найти цѣну трехъ купленныхъ вещей; изъ коихъ цѣна первой съ половинною цѣнъ другихъ двухъ, составляетъ 25 руб.; цѣна второй вещи съ третьею долею цѣнъ 1-й и 3-й даетъ 26 руб.; наконецъ цѣна 3-й съ половиною цѣнъ прочихъ, составляетъ 29 руб., получимъ

$x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=25$, $y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=26$, $z+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=29$;

откуда $x=8$, $y=18$, $z=16$.

III. A, B и C имѣютъ каждый по нѣсколько рублей, A даетъ изъ своихъ B и C столько, сколько каждый изъ нихъ имѣетъ; B въ свою очередь удваиваетъ, что осталось у A и деньги C; наконецъ C такимъ же образомъ удваиваетъ деньги A и B, послѣ сего у каждаго изъ нихъ оказалось по 16 рублей; спраш: сколько каждый имѣлъ сначала. Назвавши x, y и z соотвѣтствующія деньги A, B и C, до сихъ передачъ; получимъ

$x-y-z=4$, $3y-x-z=8$, $7z-x-y=16$,

откуда $x=26$, $y=14$, $z=8$.

112. Случается иногда, что уравненіе не иначе можетъ существовать, какъ удовлетворяя двумъ другимъ изъ онаго происходящимъ; на пр: въ уравненіи $x^2+y^2=0$, должно быть $x=0$ и $y=0$, потому что оба квадрата будучи положительные, взаимно не могутъ уничтожаться и обращать сумму въ нуль. Также $(x-1)^3+(y-2)^2=0$, даетъ $x=1$ и $y=2$; и хотя здѣсь одно только уравненіе, но оное заключаетъ въ себѣ два другія. Тоже скажемъ о слѣдующей задачѣ, имѣющей только одно условіе. Найти такія два числа, что если къ квадрату одного приложится 9 и сія сумма сложится съ 5 разъ взятымъ квадратомъ другаго, то вышло бы произведеніе удвоеннаго втораго числа на удвоенное первое сложенное съ 3-мя. Получимъ

$$5x^2+y^2+9=2x(2y+3),$$

которое обратится въ $4x^2-4xy+y^2+x^2-6x+9=0$,

или $(2x-y)^2+(x-3)^2=0$; посему $2x-y=0$ и $x-3=0$, откуда $x=3$, и $y=6$.

По сей же самой причинѣ уравненіе $x^2+y^2+1=0$ не сообразно.

113. Вотъ одинъ изъ замѣчательныхъ случаевъ въ коемъ уравненіе разлагается на два другія.

Положимъ, что количества составляющія вопросъ, составлены уравненіемъ $A+\alpha=B+\beta$, *что нѣкоторыя изъ сихъ количествъ измѣняются въ одно время, и что по ихъ свойству, уравненіе должно существовать при всѣхъ ихъ возможныхъ величинахъ, и что наконецъ нѣкоторые члены* A, B, *остаются* постоянными, *между тѣмъ какъ другіе* α, β *измѣняются и могутъ умеличатся, въ одно время по произволенію; въ такомъ случаѣ уравненіе сіе разлагается на два: одно* $A=B$ *между постоянными членами; другое* $\alpha=\beta$ *между перемѣнными членами, которое и будетъ имѣть мѣсто при всѣхъ величинахъ допускаемыхъ вопросомъ въ одно время для* α и β. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ что постоянныя A и B не равны, и разность ихъ есть K, или $A-B=+K$, получимъ $\beta-\alpha=\pm K$, ибо $A-B=\beta-\alpha$, посему перемѣнныя β и α сохранили бы между собою постоянную разность K, и не могли бы сдѣлаться менѣе K, что противно положенію.

На семъ по предложеніи основанъ способъ предѣловъ, который въ послѣдствіи часто будетъ употребленъ. *Когда какое-нибудь количество можетъ приближаться къ другой постоянной, такъ чтобы разность между ними была менѣе всякой данной величины, никогда не достигая нуля; то сія постоянная называется предѣломъ перемѣнной.* Впрочемъ, при каждомъ приложеніи сей теоремы, полезно повторять вышесказанное разсужденіе, дабы окончательныя выраженія имѣли надлежащую точность; убѣждаемъ учащихся послѣдовать сему совѣту, коего

пользу они увидятъ въ послѣдствіи. Предлагаются два приложенія, объясняющія ходъ вычисленія и разсужденія.

I. Пусть будутъ $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ два несоизмѣримые корня, z и t ихъ приближенныя величины, x и y разности между сими величинами и корнями; получимъ $z = \sqrt{a} - x$, $t = \sqrt{b} - y$; но извлекомыя произведенія $z \times t$ и $t \times z$ равны; посему $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \pm \alpha = \sqrt{b} \times \sqrt{a} \pm \beta$, изображая чрезъ α и β всѣ члены, въ которые x и y входятъ производителями. Замѣтимъ, что продолжая далѣе приближеніе, погрѣшности x и y будутъ уменьшаться по произволенію, не уничтожая сего уравненія; производители $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ останутся неизмѣнными, α и β уменьшаются до *безконечности*: слѣдовательно уравненіе разлагается на два, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times \sqrt{a}$ и $\alpha = \beta$; т. е. что *порядокъ неизвлекомыхъ производителей можно также перемѣнять какъ и извлекомыхъ.*

II. Пусть требуется величина S десятичной періодической дроби $0,\dot{(}15\dot{)}$, по замѣчанію ч.л. 51. Взявъ только два періода, и изобразивъ чрезъ k величину опробщенныхъ дробей; найдемъ что $S - k = 0{,}5454$; умноживъ на 100, составится уравненіе $100S - 100k = 54{,}54$; и вычтя предыдущее получимъ $99S - 99k = 54 - \frac{54}{10000}$. Но если бы взяли 3 или 4 періода, то сей послѣдній членъ обратился бы въ $\frac{54}{100^3}$, или въ $\frac{54}{100^4}$; и такъ ясно что сей членъ можно уменьшить до *безконечности*, также какъ и погрѣшность k, повторяя періодъ большое число разъ; слѣдовательно уравненію можно дать видъ $99S - \alpha = 54 - \beta$, откуда $99S = 54$, и $S = \frac{54}{99}$, какъ то уже извѣстно. Сверхъ того $\alpha = \beta$, какое бы число періодовъ ни принимали въ самомъ дѣлѣ, если возьмемъ періодъ два раза напр. $k = 0{,}0000\,\dot{(}54\dot{)}$, отъ куда $100^2 k = 0{,}\dot{(}54\dot{)} = \frac{54}{99}$, и $99k = \frac{54}{10000}$, и $\alpha = \beta$.

Пусть $S = 0,(p)$; полагая періодъ p составленнымъ изъ n цыфръ, получимъ $10^n S = p,(p)$, и повышесказанному будетъ $(10^n - 1)S = p$, откуда $S = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\ldots}$, какъ въ чл. 53-мъ, 3-е.

114. Въ выраженіяхъ (B) величинъ неизвѣстныхъ количествъ, представляются нѣкоторые частные случаи, требующіе разсмотрѣнія: пока сіи величины x и y положительныя, рѣшеніе получается изъ сихъ формулъ безъ затрудненія и точность оныхъ не сомнительна; но можетъ случиться иначе, что и ведетъ къ тремъ случаямъ исключенія изъ нашихъ уравненій B).

1-е. x или y можетъ быть отрицательнымъ; тогда вопросъ въ томъ видѣ какъ онъ предложенъ, несообразенъ. И простая поправка сдѣлаетъ оный возможнымъ; должно перемѣнить знакъ неизвѣстнаго въ уравненіяхъ (A): *дѣйствительно посредствомъ* вычисленія задача приведется къ одному неизвѣстному, и получится случай прежде-изъясненный (ч. 107).

2-е. Когда выраженія (B) безконечныя, то предстоящіе имѣютъ такія числовыя величины, что $a'b - ab' = 0$ или $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. Дабы въ семъ случаѣ узнать свойство вопроса, должно ввести сіе условіе въ уравненія (A); посему поставивъ $\frac{ab'}{b}$ вмѣсто a', 2-е уравненіе обратится въ $\frac{ab'}{b}x + b'y = c'$; и такъ дабы настоящій случай имѣлъ мѣсто, должно чтобы предложенныя уравненія были $ax + by = c$, $b'(ax + by) = bc'$. Но они тогда только будутъ существовать, когда $b'c = bc'$, или $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. Сіе отношеніе можетъ удовлетвориться или нѣтъ; въ послѣднемъ случаѣ, *задача несообразна*, ибо условія вопроса противорѣчатъ: что

и выражается *безконечными* величинами x и y. Тогда предѣшоящіе составляютъ пропорцію $a : a' = b : b'$, продолженіемъ которой не можетъ быть отношеніе извѣстныхъ членовъ a и c'.

3-е Но если сверхъ отношенія превращающаго знаменатель въ нуль, или $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, имѣемъ еще $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, тогда два уравненія (A), составляютъ только одно, оба условія вопроса сливаются; и какъ получится только одно уравненіе съ двумя неизвѣстными, то задача *будетъ неопредѣленная* (ч. 117). Сіе случится когда предѣшоящіе уравненія составляютъ три равныхъ между собою отношенія $a : a' = b : b' = c : c'$; и если сверхъ того $a'c = ac'$, сей случай выражается величинами x и y имѣющими видъ $\frac{0}{0}$.

Возьмемъ для примѣра (чер. 1) слѣдующій вопросъ: два курьера отправляются одинъ изъ A, другой изъ B, и ѣдутъ въ одну сторону AC; первый дѣлаетъ n верстъ въ часъ, другой m; начальное разстояніе AB $= d$; опредѣлить мѣсто C ихъ встрѣчи. Положимъ AC $= x =$ числу верстъ, дѣлаемыхъ 1-мъ курьеромъ для достиженія мѣста C; если въ часъ онъ дѣлаетъ n верстъ, то сколько потребно времени для проѣзда x верстъ? $n : 1 = x : \frac{x}{n}$. Положимъ также BC $= y$, $\frac{y}{m}$ будетъ время, употребляемое 2-мъ курьеромъ для достиженія мѣста C, и получимъ $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$: сверхъ того AC $=$ AB $+$ BC или $x = d + y$; посему $mx = ny$ и $x = d + y$: откуда

$$x = \frac{nd}{n - m}, \quad y = \frac{md}{n - m};$$

время прошедшее до встрѣчи будетъ $\frac{x}{n} = \frac{d}{n - m}$.

И такъ, если $n > m$, то x и y будутъ положительныя и въ задачѣ не встрѣчается затрудненія. Но если $n < m$, задача невозможна, ибо x и y дѣлаются

отрицательными: въ самомъ дѣлѣ ясно, что встрѣча невозможна, когда A, находящійся позади B, имѣетъ меньшую скорость.

Перемѣнимъ при x и y знаки въ $mx=ny$ и $x=d+y$; сіе послѣднее уравненіе только измѣнится и превратится въ $y=d+x$, что будетъ относиться къ двумъ задачамъ: 1-е или точка B находится позади A, какъ B′; 2-е, или полагается, что курьеры отправились не изъ A и B, но изъ другаго мѣста и прибыли въ одно время, одинъ въ A, другой въ B; въ семъ случаѣ надобно найти мѣсто C′, въ которомъ они уже встрѣтились прежде; вышесказанныя величины x и y, съ перемѣною знаковъ, суть выраженія разстояній AC′ и BC′.

Если $m=n$, то x и y будутъ безконечныя и задача невозможна; сіе происходитъ отъ того, что курьеры имѣя равныя скорости не могутъ встрѣтиться. Но если и $d=0$, то x и y превратятся въ $\frac{0}{0}$ и число точекъ встрѣчи будетъ безконечное; въ самомъ дѣлѣ тогда оба курьера выѣдутъ изъ одного мѣста и никогда не разлучатся.

Перемѣнивъ знакъ при m, получится случай, когда курьеры ѣдутъ другъ другу на встрѣчу.

Легко также опредѣлить, въ какомъ мѣстѣ курьеры будутъ въ данномъ разстояніи k одинъ отъ другаго.

О неравенствахъ.

115. Выраженія, въ коп входитъ знакъ $>$ для означенія, которое изъ двухъ количествъ болѣе, называются *неравенствами*. Разность не перемѣнится, если къ обоимъ членамъ прибавимъ или изъ обоихъ вычтемъ тоже число, и такъ *можно, не перемѣняя свойства неравенства, прибавлять къ обѣимъ частямъ равныя количества, и слѣдовательно поступать тѣмъ же вычисленіемъ, какъ и уравненія* (ч. 105.); т. е. умножить или дѣлить всѣ члены на одно и тоже

число и переносишь оные, перемѣняя ихъ знаки. Пусть будетъ $3x-7>x+11$; прибавимъ 7 къ обѣимъ частямъ, потомъ вычтемъ изъ каждой x, получимъ $3x-x>11+7$ или $2x>18$, откуда $x>9$. Сей вопросъ: сыскать число, которое бы, упрощенное безъ 7-ми, превосходило сіе число 11-ю, имѣетъ безконечное число рѣшеній, ибо всякое количество >9 удовлетворяетъ оному.

Нѣсколько неравенствъ, заключающихъ неизвѣстное x, даютъ для онаго столько же предѣловъ; но 1-е, если сіи предѣлы одинакаго свойства, какъ $x>9$ и $x>7$, одно изъ неравенствъ заключается въ другомъ; 2-е, если предѣлы различныхъ свойствъ, какъ $x>9$ и $x<15$, то для x могутъ быть взяты только промежуточныя величины. Можетъ даже случиться, что сіи предѣлы взаимно уничтожаются, какъ $x>4$ и $x<3$, тогда задача невозможна и заключаетъ противурѣчащія условія.

Сыскать число болѣе 15-ти и которое, будучи упрощено и сложено съ 1-цею, было бы менѣе суммы его удвоеннаго числа съ 20-ю; и такое наконецъ, что если его уменьшишь единицею и увеличишь 5-мя, то частное отъ сей разности на сію сумму превосходило бы $\frac{1}{5}$? Сіи условія выразятся такъ:

$$x>15,\ 3x+1<2x+20,\ \frac{x-1}{x+5}>\frac{1}{5};$$

откуда получимъ $x>15$, $x<19$ и $x>17$. Ясно, что искомое число должно заключаться между 17 и 19, 1-е же условіе безполезно; и для x можно взять $17\frac{1}{2}$, $17\frac{2}{3}$...., и безконечное число другихъ величинъ. Но если x должно быть цѣлымъ, то задача имѣетъ только одно рѣшеніе $x=18$.

Когда $a<b$ и $a'<b'$, то очевидно, что

$$a+a'<b+b',\ a-b'<b-a',\ aa'<bb',$$
$$a^n<b^n,\ \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b},\ \frac{a}{b'}<\frac{b}{a};$$

посему, *можно складывать, умножать почленно два неравенства одинакового свойства; составлять степени, извлекать корни, сохраняя тѣ же знаки неравенства: можно вычитать или дѣлить почленно два неравенства разныхъ свойствъ*, сохраняя знакъ уменьшаемаго или дѣлимаго неравенства. Когда же знаки неравенства даны иныхъ свойствъ, то сіи дѣйствія можно также производить; но иногда знакъ $>$ въ окончательномъ выраженіи иногда измѣняется; на пр: z и z' будучи избытками количествъ b и b' надъ a и a', получимъ $a=b-z$, $a'=b'-z'$, откуда:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b-z}{b'-z'}=\frac{b}{b'}+\frac{bz'-b'z}{b'(b'-z')}.$$

Сдѣлавъ часть дѣленія; посему $a<b$, $a'<b'$, даетъ $\frac{a}{a'}<$ или $>\frac{b}{b'}$, смотря потому $\frac{b}{b'}<$ или $>\frac{z}{z'}$.

Выраженія $a\gtrless b$, $a'\gtrless b'$, означающія, что a и a' не могутъ быть болѣе b и b', подвержены тѣмъ же вычисленіямъ, какъ и простыя неравенства. На пр: сыскать число, которое, утроенное и уменьшенное 2-мя, не можетъ быть менѣе 7-ми и удесятеренное безъ 1-цы не можетъ превзойти 11-ти, съ 6 разъ взятымъ симъ числомъ? Сіи условія напишутся такъ:

$$3x-2\lessgtr 7,\quad 10x-1\gtrless 11+6x,$$

откуда $3x\lessgtr 7+2$, $10x-6x\gtrless 11+1$:

и такъ $x\lessgtr 3$ и $x\gtrless 5$, или $x=5$.

116. Заключимъ сію статью слѣдующимъ, довольно важнымъ замѣчаніемъ: Въ выраженіи $a-x$ будемъ измѣнять x; по мѣрѣ возрастанія x дабы приближаться къ a, $a-x$, будучи положительное, уменьшается и обратится наконецъ въ нуль, когда $x=a$: если x будетъ продолжать увеличиваться, то $a-x$ сдѣлается отрицательнымъ. Выразимъ сіи случаи, написавъ $a-x>0$, когда $a-x$ положительное и $a-x<0$, когда x превзойдетъ a. Изъ сего не должно заключать, чтобы могли быть въ самомъ дѣлѣ коли-

чества меньшія нуля; но очевидно, что если согласимся дѣйствовать сими неравенствами также какъ и уравненіями, то одно изъ нихъ даетъ $a > x$, а другое $a < x$; что и будетъ только означать, что $a - x$ положительное въ первомъ случаѣ и отрицательное во второмъ. И такъ мы будемъ принимать, *что отрицательныя количества менѣе нуля, а положительныя болѣе;* что въ самомъ дѣлѣ есть только условіе, способствующее вычисленіямъ. Какъ $a - x > 0$ даетъ $-x > -a$ и $a > x$, то изъ сего слѣдуетъ, что въ неравенствѣ нельзя перемѣнять знаки всѣхъ членовъ, неперемѣняя знаковъ $>$ и $<$ одинъ на другой; нельзя также умножить неравенства на отрицательное количество безъ сей же предосторожности, что дѣлаетъ въ вычисленіяхъ важное различіе между дѣйствіями свойственными неравенствамъ и уравненіямъ. 1, 2, 3 .... суть количества возрастающія, а -1, -2, -3.... уменьшающіяся; $4 < 5$, а $-4 > -5$.

О неопредѣленныхъ задачахъ.

117. Когда число уравненій и неизвѣстныхъ неравно, то могутъ встрѣтиться два случая:

1-й случай: *Когда неизвѣстныхъ болѣе, чѣмъ уравненій, то задача неопредѣленная*, ибо нѣсколькимъ неизвѣстнымъ можно дать произвольныя величины, дабы число оставшихся было равно числу уравненій: послѣ чего сіи послѣднія неизвѣстныя опредѣлятся. И такъ число величинъ, удовлетворяющихъ вопросу или уравненіямъ его выражающимъ, будетъ безконечное. Ощыщемъ на прим: два числа x и z, коихъ сумма была бы 70; надо слѣдовательно, чтобы искомыя два количества удовлетворяли одному уравненію $x + z = 70$; откуда $x = 70 - z$. Очевидно, что x невначе опредѣлится какъ когда z будетъ дано, и ставя послѣдовательно 1, 2, $3\frac{1}{2}$.... вмѣсто z, получимъ

что $x = 69,\ 68,\ 66\frac{1}{2}\ldots$, посему 1 и 69, 2 и 68, $3\frac{1}{2}$ и $66\frac{1}{2}\ldots$ выполняютъ требуемое условіе, также какъ и множество другихъ чиселъ цѣлыхъ и дробныхъ.

Отыскать три числа x, y, z, коихъ сумма была бы 105 и разности каждыхъ двухъ были бы равны: получимъ $x+y+z=105$, $x-y=y-z$, т. е. три неизвѣстныхъ и только два уравненія. Сей случай обращается въ предыдущей; ибо для выключенія x вычтемъ сіи уравненія, будетъ $y=35$, отсюда $x+z=70$. И такъ z или x даютъ произвольную величину, другое неизвѣстное опредѣлится по оной и сіи два числа вмѣстѣ съ $y=35$, составятъ одно изъ рѣшеній вопроса, имѣющаго безконечное число другихъ.

Пусть будетъ уравненіе $x^2-ax=y^2-ay$; получимъ $x^2-y^2+ay-ax=0$, и какъ $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, то произойдетъ $(x+y)(x-y)-a(x-y)=0$ или $(x-y)(x+y-a)=0$. Сіе произведеніе не иначе равно нулю, какъ когда одинъ изъ его производителей равенъ оному; посему получимъ одно изъ уравненій $x=y$ или $x=a-y$. Давая y всѣ возможныя величины, получимъ для x другія, которыя только одинъ будутъ удовлетворять вопросу: достаточно, чтобы сіи два неизвѣстныя были равны или чтобы одно изъ нихъ превосходило другое количествомъ a, что можно сдѣлать различными образами.

Правило смѣшенія, относящееся къ сей же Теоріи. 1-е. Положимъ, что смѣшиваются два вещества, неподверженныя химическому сродству; пусть p и q суть цѣны единицъ каждаго изъ нихъ; цѣна всей смѣси будетъ $px+qy$, означая чрезъ x и y число единицъ смѣшиваемыхъ веществъ. Но вся смѣсь составлена изъ $x+y$ единицъ; посему цѣна каждой будетъ

$$z=\frac{px+qy}{x+y}\ldots\ldots(\text{F}).$$

И такъ изъ 8-ми бутылокъ вина по 15-ти руб. каждая, и изъ 12 по 10 руб. составящихся 20 бутылокъ, цѣна коихъ будетъ $8\times15+12\times10=240$; посему цѣна каждой есть $\frac{240}{20}$, или 12 руб.

Данъ слитокъ золота составленный изъ 4 фун. 0,95 пробы (*), и изъ 5-ти фун. 0,86 пробы; требуется опредѣлить пробу смѣси? По вышесказанной формулѣ найдемъ что $\frac{z=4\times0,95+5\times0,86}{4+5}=0,9$.

2-е. Обратно, если спрашивается составъ смѣси, по данной средней цѣнѣ, то опредѣляются x и y, по извѣстнымъ цѣнамъ p, q и z; тогда уравненіе I заключаетъ два неизвѣстныхъ количества, и задача будетъ неопредѣленная. Получимъ $x=\left(\frac{z-q}{p-z}\right)y$; чему удовлетворимъ взявъ

$$x=z-q,\ y=p-z;$$

гдѣ z есть средняя цѣна между p и q. Кромѣ сихъ величинъ, можно отыскать безконечное число другихъ, умножая опыя или дѣля на какое нибудь одно число: чрезъ что получимъ всѣ цѣлыя рѣшенія вопроса, если сіе число есть цѣлое (ч. 117).*

На пр: Хлѣбникъ хочетъ сдѣлать хлѣбъ цѣною по 8-ми коп. фунтъ: онъ имѣетъ двухъ родовъ муку;

(*) Когда золото или серебро заключаетъ 0,1 смѣси, и остальное чистое, то говорятъ что металлъ 0,9 пробы. Прежде степень чистоты оцѣнялась различно: слитокъ золота дѣлился на 24 части называемыя *каратами*, такъ что золото въ 21 каратъ заключало 3 части лигатуры и 21 чистаго золота. Каратъ дѣлился на 32 части или грана (grains) и означали чрезъ 18 К. 20 гр., что чистаго золота $18\frac{20}{32}$ части, а остальное лигатуры. Серебро дѣлилось на 12 частей (deniers), каждая въ 24 *грана*. Итакъ слитокъ означаемый чрезъ 10 ч. 20 гр. заключалъ $10\frac{20}{24}$ чистаго металла и $1\frac{4}{6}$ лигатуры. Въ Россіи золото имѣетъ $91\frac{2}{3}$ части, чистаго золота и $1\frac{1}{3}$ лигатуры, серебро $83\frac{1}{3}$ части чистаго серебра и $12\frac{2}{3}$ лигатуры.

изъ одной, фунтъ хлѣба стоитъ 10 коп. а изъ другой 7 коп. Написавъ сіи три числа, какъ здѣсь показано на сторонѣ, беруть 8 — 7 или 1 и считаютъ противъ 10-ти,

Средняя цѣна 8 { 10...1...дор. мука / 7...2...дешевой.

потомъ 10 — 8 или 2, противъ 7-ми. И такъ на одинъ фунтъ дешевой муки берется 2 фунта дорогой. Можно также взять 2 и 4, или 3 и 6, и проч.

Если бы дано было другое условіе для опредѣленія вопроса, то выразивъ оное алгебраически, вывели бы величины x и y изъ уравн. (F, и сего послѣдняго. И такъ, когда количество смѣси $x+y$ дано $=m$, тогда получимъ: $x+y=m$ и $px+qy=zm$;

ошкуда $x=\frac{m}{p-q}(z-q)$, $y=\frac{m}{p-q}(p-z)$.

Посему отыскавъ вышесказанныя величины, умножили бы оныя на $\frac{m}{p-q}$. Положимъ, что въ данномъ примѣрѣ требуется, чтобы смѣшиваемая мука вѣсила 21 фунтъ; для сего умноживъ найденныя величины 1 и 2 на $\frac{21}{10-7}=7$, получимъ, что 7 фун. муки, цѣною въ 10 коп., смѣшанные съ 14 фунт. муки въ 7 коп., составятъ 21 фун. по 8 коп. каждый.

Пусть требуется также составить 7,54 фун. серебра 0,9 пробы, изъ серебра 0,97 и 0,84 пробы, исполнивъ по вышесказанному, найдемъ, что 1-го должно взять 3,48 фун. и 4,06 фун. 2-го.

0,9 { 0,97...0,6 × 7,54/0,13 = 3,48 / 0,8...0,07 × 7,54/0,13 = 4,06

Легко приложить сію теорію къ тому случаю, когда требуется смѣшать болѣе двухъ веществъ.

2-й случай: Когда уравненій болѣе, чѣмъ неизвѣстныхъ, тогда вопросъ не только что опредѣленный, но кромѣ того опредѣливъ всѣ неизвѣстныя, останется

еще между данными величинами нѣкоторое число уравненій, которымъ они должны удовлетворять, и которыя по сей причинѣ называются *условными уравненіями:* если они не удовлетворяются, то вопросъ невозможенъ; въ противномъ же случаѣ, нѣкоторыя условія входятъ въ другія, сколько неизвѣстныхъ, столько и составится условій, выраженныхъ такимъ же числомъ *отличающихся* между собою уравненій.

Найдемъ два числа x и y, сумма коихъ есть s, разность d и произведеніе p: или $x+y=s$, $x-y=d$ и $xy=p$. Первыя два уравненія даютъ (чл. 106, III), $x=\frac{1}{2}(s+d)$, $y=\frac{1}{2}(s-d)$; которыя вставя въ 3-е, получимъ $4p=s^2-d^2$. Если данныя количества s, d и p не удовлетворяютъ сему отношенію, то задача невозможна; въ противномъ случаѣ, одно изъ данныхъ уравненій будетъ безполезно, какъ выражающіе условіе, самосостоятельное и заключающееся въ другихъ двухъ.

Найти дробь, къ числителю которой если прибавится m, то произойдетъ $\frac{a}{b}$ и которая обращается въ $\frac{a'}{b'}$ отъ прибавленія m' къ ея знаменателю. Означивъ чрезъ x и y оба члена, получимъ

$$\frac{x+m}{y}=\frac{a}{b},\quad \frac{x}{y+m'}=\frac{a'}{b'}.$$

Откуда

$(ab'-a'b)\,x=a'(bm+am')$, $(ab'-a'b)\,y=b(b'm+a'm')$; но такъ какъ x и y должны быть цѣлыя, посему или $ab'-a'b=\pm 1$, или сіе двучленное количество дѣлитъ вторую часть безъ остатка. И такъ получится условіе, безъ коего сія задача невозможна, хотя число уравненій равно числу неизвѣстныхъ и x и y опредѣлены.

118. **Отыщемъ всѣ ряды *цѣлыхъ* величинъ x и y удовлетворяющихъ неопредѣленному уравненію**

$$ax+by=c\ldots.\ (1),$$

въ коемъ a, b, c суть данныя числа, положительныя или отрицательныя, и которыя всегда можно сдѣлать цѣлыми, сверхъ того, a и b *должны быть первоначальныя между собою;* ибо еслибъ онѣ имѣли какого-нибудь общаго производителя d, то раздѣливъ все на d, получили бы $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d}$; и такъ вторая часть должна быть цѣлою, по причинѣ дѣлимости первой, безъ чего задача была бы невозможною; посему c имѣло бы также дѣлителемъ d, который и можно было бъ опустить во всѣхъ членахъ.

Пусть $x = \alpha$, $y = \beta$ есть одно изъ рѣшеній уравн. (1), то есть $a\alpha + b\beta = c$; вычтя оное изъ уравн. (1), получимъ $a(x - \alpha) = -b(y - \beta)$; и какъ a и b суть первоначальныя между собою, то $y - \beta$ должно быть кратнымъ a, или равняться at (ч. 24, 4.), откуда $x - \alpha = -bt$, или:

$$x = \alpha - bt,\ y = \beta + at \ldots . \quad (2).$$

Вставя сіи величины въ уравненіе (1), очевидно, что онѣ удовлетворяютъ оному, какое бы цѣлое число t ни было, положительное или отрицательное. Но сіе свойство принадлежитъ только имъ однѣмъ; ибо допустивши другое рѣшеніе $x = \alpha'$, $y = \beta'$, будетъ $a\alpha' + b\beta' = c$; что вычтя изъ $a\alpha + b\beta = c$, получимъ $a(\alpha' - \alpha) = -b(\beta' - \beta)$, откуда $\beta' - \beta$ есть кратное a или равно at, и такъ $\beta' - \beta = at$, $\alpha' = \alpha - bt$ величины, заключающіяся въ уравненіяхъ (2).

Изъ сего слѣдуетъ, что имѣя одно изъ рѣшеній (α и β), всѣ другія найдутся, полагая $t = -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$.

Вообще, *всѣ величины* x *и* y *составляютъ ариѳметическія прогрессіи, коихъ разности суть соотвѣтствующіе предстоящіе* b *и* a; *одинъ изъ нихъ берется съ противнымъ знакомъ*, (т. е. что прогрессіи будутъ обѣ возрастающія, если a и b имѣютъ разные знаки, и одна будетъ возрастающая, а другая умаляющаяся, въ прошивномъ случаѣ).

119. Остается найти α и β; если $a < b$, то рѣшивъ уравн. (1) относительно x, и выключивъ цѣлыя при раздѣленіи c и b на a, получимъ,

$$x = \frac{c - by}{a} = h - ly + \frac{c' - b'y}{a},$$

полагая c' и b' остатками. Посему вопросъ состоитъ *въ опредѣленіи величины* y, *которыя будучи подставлены обращали бы сію послѣднюю дробь въ цѣлое, или* $c' - b'y$ *въ кратное* a. И такъ если $b' = 1$, то сдѣлавъ $\frac{c' - y}{a} = z$, или $y = c' - az$, можно быть увѣрену, что всякая цѣлая величина z обращала бы x и y въ цѣлыя, и все было бы кончено. Но если b' не равно единицѣ, то положивъ

$$\frac{c' - b'y}{a} = z, \text{ или } az + b'y = c',$$

должно рѣшить въ цѣлыхъ числахъ сіе уравненіе, предшествующіе котораго гораздо проще даннаго. Рѣшивъ оное относительно y, выключивъ цѣлыя, и сравнивъ произшедшую дробь съ какимъ-нибудь новымъ неизвѣстнымъ u, получимъ еще простѣйшее уравненіе, между количествами z и u. Предшествующіе неизвѣстныхъ суть послѣдовательные остатки получаемые при вычисленіи (ч. 28) общаго дѣлителя количествъ a и b; посему неоспоримо, что наконецъ достигнемъ до предшествующаго $= 1$: отъ чего получимъ уравненіе слѣдующаго вида $v + mt = u$, съ которымъ и поступимъ какъ въ случаѣ $b' = 1$. Каждая цѣлая величина t даетъ таковую же для v; посредствомъ которой опредѣлимъ z, y и x, что и будетъ однимъ изъ рѣшеній; всѣ же прочія величины найдутся изъ уравненій (2).

Примѣръ объясненія вышесказанное, $8x - 27y = 7$ даетъ для

$$x = \frac{7 + 27y}{8} = 3y + \frac{3y + 7}{8};$$

положимъ $\frac{3y+7}{8} = z$, ошкуда $y = \frac{8z-7}{3} = 2z - 2 + \frac{2z-1}{3}$;
сдѣлаемъ $\frac{2z-1}{3} = u$, ошкуда $z = \frac{3u+1}{2} = u + \frac{u+1}{2}$; наконецъ приравнявъ сію дробь количеству v, будетъ $u = 2v - 1$. Положимъ на пр: что $v = 1$, получимъ $u = 1$, $z = 2$, $y = 3$, $x = 11$; посему уравненія (2) будутъ $x = 11 + 27t$, $y = 3 + 8t$.

Еслибы взяли вмѣсто v всякую другую цѣлую величину, то нашли бы цѣлое самыя количества, хотя по видимому различныя. Пусть $v = -3$, получимъ $u = -7$, $z = -10$, $y = -29$, $x = -97$; ошкуда $x = -97 + 27t$, $y = -29 + 8t$: но можно вмѣсто t вставить $t + 4$, ошъ чего и найдутся опять цѣлое самыя величины. Дѣлая $t = \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$, получимъ возрастающія ариѳметическія прогрессіи, безконечныя въ обѣ стороны, коихъ разности будутъ 27 и 8, и каждые два соотвѣтствующіе члена оныхъ будутъ рѣшенія данной задачи, и единственныя, которыя можетъ она имѣть:

$$x = \ldots -43, -16, 11, 38, 65, 92 \ldots$$
$$y = \ldots -13, -5, 3, 11, 19, 27 \ldots$$

Какъ сіи вычисленія требуютъ сшольких преобразованій, или вспомогательныхъ неизвѣстныхъ, сколько выходитъ послѣдовательныхъ осшашковъ, при опыскиваніи общаго наибольшаго дѣлишеля между a и b, то очевидно, что сей способъ рѣшенія можетъ быть очень продолжишелень.

Ѳеорія непрерывныхъ дробей доставитъ намъ гораздо удобнѣйшій способъ; до шѣхъ поръ разсмотримъ слѣдующія два сокращенія:

1-е. Если a и c имѣютъ общаго дѣлишеля m, то раздѣливъ на оный уравненіе (1), получимъ $\frac{ax}{m} + \frac{by}{m} = \frac{c}{m}$; второй членъ 1-й части долженъ дѣлишься на m нацѣло, ибо прочіе члены дѣлятся на-цѣло; и шакъ y

дѣлимо на m, первоначальное съ b; посему y имѣетъ видъ $y = my'$: вставивъ сію величину въ уравн. 1) и раздѣливъ на m, останется рѣшить гораздо простѣйшее уравненіе.

Пусть будетъ $12x - 67y = 1000$; сдѣлавъ $y = 4y'$ и раздѣливъ на 4, получимъ $5x - 67y' = 250$, откуда $x = 83 + 22y' + \frac{1+y'}{3}$; очевидно, что можно положить $y' = -1$, отъ чего будетъ $x = 61$, $y = -9$, и наконецъ, $x = 61 + 67t$, $y = -4 + 12t$.

Для $15x + 14y = 385$, какъ $385 = 11 \times 7 \times 5$ и 7 есть производитель 14-ти, а 15 кратное 5-ти, то положивъ $x = 7x'$, $y = 5y'$, и раздѣливъ на 35, получимъ $3x' + 2y' = 11$; откуда $y' = 5 - x' + \frac{1-x'}{2}$; приравнявъ сію дробь z, будетъ $x' = 1 - 2z$ и вычисленіе кончится. $z = 0$ даетъ $x' = 1$, $y' = 4$, откуда $x = 7(1 + 2t$, $y = 5(4 - 3t$.

2-е. Замѣтимъ, что если во всякой Ариѳметической прогрессіи c, $c + b$, $c + 2b$.... раздѣлимъ первые a членовъ на a, то всѣ остатки будутъ разные, полагая a и b первоначальными между собою; въ самомъ дѣлѣ, если бы два числа могли дать одинакіе остатки, то ихъ разность была бы дѣлима на a (ч. 16, что невозможно, ибо она имѣетъ видъ kb, гдѣ $k < a$. Изъ чего заключимъ, что сіе число a неравныхъ остатковъ соотвѣтствуетъ всѣмъ числамъ 0, 1, 2, 3... $(a-1)$, но расположеннымъ другимъ порядкомъ; и такъ одно изъ сихъ дѣлимыхъ $c + lb$ даетъ въ остаткѣ нуль, или есть кратное a и $y = l$ дѣлаетъ $\frac{c+by}{a}$ цѣлымъ числомъ. Но часто случается, что принимая y за 0, 1, 2, 3.... находимъ величину $l < a$ удовлетворяющую сему условію. Посему, дабы (1-й примѣръ, $\frac{5y+7}{8}$ было цѣлое, сдѣлаемъ $y = 0, 1, 2, 3...$ остатки

ошъ $5y+7$, раздѣленнаго на 8, будутъ 7, 2, 5, 0 . . . Сей рядъ осташковъ состашится чрезъ прибавленіе 5-хъ къ предыдущему осташку, и выключая 8 изъ суммы, когда она болѣе 8-ми. Ясно, что $y=3$ есть искомая величина. Впрочемъ, сей приближенный способъ рѣдко бываетъ удобенъ, а большею частію продолжительнѣе вышепредложеннаго общаго способа.

Чтобы сдѣлать цѣлымъ $y-\frac{35+19x}{12}=2+x+\frac{11+7x}{12}$, положимъ $x=0, 1, 2\ldots$; сія послѣдняя дробь даетъ осташки 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5, 0 . . . . , прибавляя безпрестанно 7 и отнимая, когда возможно, 12; и такъ $x=7$ произведетъ точное частное $y=14$; ошкуда $y=14+19t$, $x=7+12t$.

Иногда вопросъ допускаетъ только положительныя рѣшенія; въ такомъ случаѣ нельзя брать въ формулахъ (2) всѣхъ цѣлыхъ величинъ для t; но положивъ по вышесказанному на пр: (1) $\alpha+bt>0$, $\beta+at>0$; сіи неравенства дадутъ предѣлы для t.

1-е. Если сіи предѣлы одинаковаго свойства, то изъ оныхъ получится только одинъ предѣлъ, и вопросъ будетъ имѣть безконечное число рѣшеній, вмѣстѣ возрастающихъ; въ семъ случаѣ a и b должны имѣть разные знаки, иначе $ax+by$ не могло бы постоянно равняться c. Въ первомъ примѣрѣ найдемъ, что $t>-\frac{11}{27}$ и $>-\frac{5}{8}$; и такъ можно полагать $t=0, 1, 2\ldots$, но нельзя дать t никакой отрицательной величины, ибо $t\not<0$. Во второмъ примѣрѣ $t>-\frac{61}{67}$ и $>\frac{4}{12}$; посему $t\not<1$.

2-е. Если сіи предѣлы противныхъ свойствъ, то получимъ, какія можно взять промежуточныя величины для t и число рѣшеній будетъ ограничено: съ возрастаніемъ x уменьшается y; для чего надобно, чтобы a и b имѣли одинакіе знаки. Можетъ даже случиться, что сіи предѣлы взаимно уничтожаются; тогда рѣшеніе вопроса въ цѣлыхъ и положительныхъ

числахъ невозможно. Въ 3-мъ примѣрѣ, гдѣ $1+2t>0$, $4-5t>0$, слѣд: $t>-\frac{1}{2}$ и $<\frac{4}{5}$ или $t=0$ и $t=1$, будемъ имѣть только два рѣшенія.

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ для приложенія сей теоріи:

Раздѣлить 117 на двѣ части, изъ коихъ одна была бы кратною 19-ти, а другая 7-ми; получимъ $19x+7y=117$; откуда $y=\frac{117-19x}{7}$; посему $\frac{5-5x}{7}$ или $\frac{5(1-x}{7}$ есть цѣлое число. Положивъ $x=1$ будетъ $y=14$, также $x=1-7t$ и $y=14+19t$.

Дабы части 117-ти были положительныя, надобно, чтобы $1-7t>0$ и $14+19t>0$, откуда $t<\frac{1}{7}$ и $>-\frac{14}{19}$. Въ такомъ случаѣ вопросъ имѣетъ только одно рѣшеніе; $t=0$ даетъ $x=1$ и $y=14$; такъ что 19 и 98 будутъ искомыя части.

Сколькими образами можно заплатить 2000 руб., имѣя двухъ родовъ монеты, одинъ въ 9 руб., а другія въ 15 рублей. Получимъ $9x+15y=2000$, откуда $x=\frac{2000-15y}{9}$; и такъ надобно, чтобы $\frac{2}{9}\frac{4y}{}$ или $\frac{1-2y}{9}$ было цѣлое число, посему $y=-4$, откуда $x=228$; наконецъ $x=228-15t$, $y=-4+9t$.

Отрицательныя величины y означаютъ, сколько получается монетъ 2-го рода въ замѣнъ 1-го, дабы уплатить 2000 руб. Но если желаемъ x и y имѣть положительными, то должно, чтобы $228-15t>0$ и $-4+9t>0$; откуда $t<18$ и >0. Положивъ $t=1, 2, 3\ldots 17$, получимъ 17 рѣшеній даннаго вопроса, $x=213$, 202, 189 ... 7; $y=5$, 14, 23 ... 149. И такъ 2000 руб. можно заплатить 215 монетами въ 9 руб. и 5-ю въ 15 руб., или и проч.

Какимъ образомъ можно промѣнять монеты 4-хъ руб. на 9-ти-руб., платя при каждомъ разѣ 15 руб. промѣну. Получимъ уравненіе $9y=4x+15$, изъ ко-

шораго $x = \frac{9y-15}{4}$; и такъ $\frac{y-3}{4} = t$, откуда $y = 4t+3$ и $x = 9t+3$. Для положительныхъ величинъ x и y, предѣлы t слѣдующіе, и будетъ $t > -1$; положивъ $t = 0, 1, 2\ldots$, найдемъ безконечное число рѣшеній, заключающееся въ рядахъ $x = 3, 12, 21\ldots$, $y = 3, 7, 11\ldots$, слѣдовательно можно 3 монеты 1-го рода промѣнять на 3 шораго или 12 монетъ 1-го рода на 7 шораго, и проч.

$6x - 12y = 7$ не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ, потому что 7 непремѣнно производителемъ 6 общаго для чиселъ 6 и 12.

Очевидно также, что рѣшеніе уравненія $2x+3y=-10$ невозможно, если x и y должны быть положительныя величины; что доказывается и самымъ вычисленіемъ, по которому получимъ $x = 5t-5$ и $y = -2t$ и противурѣчащіе предѣлы $t > \frac{5}{3}$ и < 0.

Раздѣлимъ дробь $\frac{n}{d}$ на двѣ другія, такъ чтобы знаменатели оныхъ a и b, первоначальные между собою, составляли произведеніе d; и такъ составится уравненіе $\frac{n}{d} = \frac{x}{b} + \frac{y}{a}$ или $ax + by = n$, которое должно рѣшить въ цѣлыхъ числахъ.

На пр: для дроби $\frac{58}{77}$, какъ $77 = 11 \times 7$, то получимъ $11x + 7y = 58$, откуда $x = 7t - 5$, $y = 13 - 11t$, число рѣшеній будетъ безконечное, если дробь $\frac{58}{77}$ должна быть разностію двухъ искомыхъ дробей, если же суммою, то будетъ только одно рѣшеніе, для котораго $t = 1$; и получимъ $\frac{58}{77} = \frac{4}{7} + \frac{2}{11}$.

Составить 50 руб. изъ монетъ въ 2 руб. и въ 15 грив. Положивъ x число 2 руб. монетъ и y число $\frac{1}{2}$ руб. монетъ, получимъ $2x + \frac{1}{2}y = 50$ или $4x + 3y = 100$; откуда $x = 1 - 3t$ и $y = 32 + 4t$; положивъ $t = 0$, -1, -2, до 8, будетъ $x = 1, 4, 7\ldots$, $y = 32, 28, 24\ldots$ Если бы взяли также и отрицательныя величины x

или y, то сіе бы значило, что 2-хъ-руб. монеты мѣняются на 15 грив., такъ чтобы составить разность въ 50 руб.

121. Тотъ же способъ употребляется, когда будетъ 3, 4.... неизвѣстныхъ, а уравненій единицею менѣе противъ числа неизвѣстныхъ. Слѣдуютъ различные примѣры:

Сыскать число N, которое по раздѣленіи на 5 и на 7, даетъ остатки 4 и 2, т. е. обращающіе количества $\frac{N-4}{5}$ и $\frac{N-2}{7}$ въ цѣлыя числа? Означимъ чрезъ x и y соотвѣтствующія частныя, получимъ $N=5x+4$, $N=7y+2$, откуда $7y-5x=2$; рѣшивъ сіе уравненіе по вышеизложенному способу, будетъ $x=7t+1$ и $y=5t+1$, откуда $N=35t+9$. Искомое число есть одно изъ слѣдующихъ: 9, 44, 79.... До сего достигнули бы легчайшимъ образомъ, замѣтивъ, что $N=4$ обращаетъ 1-ю дробь въ цѣлое и что всѣ числа, имѣющія сіе свойство заключаются въ урав: $N=4+5v$; но для z должно брать только тѣ величины, которыя обращаютъ также количество $\frac{N-2}{7}$ или $\frac{5v+2}{7}$ въ цѣлое; изъ чего тотчасъ видно, что $v=1$ или вообще $v=1+7t$; посему вставивъ будетъ $N=9+35t$.

Считая листы нѣкоторой книги по 7-ми, остается 1; по 10-ти, остается 6; наконецъ по 3, ничего не остается; спрашивается число листовъ сей книги? Положивъ, что сіе число N заключается между 100 и 300. Надобно отыскать для N число, обращающее дроби $\frac{N-1}{7}$, $\frac{N-6}{10}$ и $\frac{N}{3}$ въ цѣлыя. Послѣдняя даетъ $N=3z$, отъ чего первыя двѣ будутъ $\frac{3z-1}{7}$, $\frac{3z-6}{10}$; изъ которыхъ для послѣдней надобно, чтобы $z=2+10v$,

и такъ другая обратится въ $\frac{5+30v}{7}$ или $4v+\frac{5+2v}{7}$; посему $v=1+7t$, откуда $z=12+70t$; и наконецъ $N=56+210t$. Полагая $t=0, 1, 2\ldots$ получимъ $N=56$, 246, 456.... Слѣд. книга имѣетъ 246 листовъ.

Отыскать число N, которое, будучи раздѣлено на 2, 3 и 5, даетъ остатки 1, 2 и 3. Найдемъ, что

$$N=30t+23;$$ и такъ $N=23, 53, 83, 113\ldots.$

122. Когда имѣемъ одно только уравненіе съ тремя неизвѣстными, то должно дѣйствовать слѣдующимъ образомъ: Пусть будетъ $5x+8y+7z=50$. Положивъ $50-7z=u$, получимъ $5x+8y=u$; откуда, принимая u за извѣстное, найдемъ по вышеизложенному способу, $x=8t-3u$ и $y=2u-5t$; куда опять вставивъ $50-7z$ вмѣсто u, будетъ

$$x=21z+8t-150,\ y=100-14z-5t,$$

z и t суть какія-нибудь цѣлыя числа. Но если сверхъ того x и y должны быть положительныя, то сему условію удовлетворимъ отдѣльно.

Разложить дробь $\frac{854}{1353}$ на три другія: такъ какъ $1353=41.5.11$, то положивъ $\frac{854}{1353}=\frac{x}{3}+\frac{y}{11}+\frac{z}{41}$, получимъ $854=11.41x+3.41y+55z$; сдѣлавъ $11x+3y=u$, будетъ $854=41u+55z$; откуда 1-е, $x=3t-u$, $y=4u-11t$; 2-е, $u=55t'-17$, $z=47-41t'$; и такъ t и t', будучи какія-нибудь цѣлыя величины,

$$x=17+3t-55t',\ y=152t'-11t-68,\ z=47-41t.$$

Если три искомыя дроби должны быть <1, откуда $x<3$, $y<11$, $z<41$, то предѣлы будутъ

$$t<11t'-4,\ t>12t'-8 \text{ и } t'>0.$$

Но какъ $t'=1$ соотвѣтствуетъ только $t=5$, а $t'=2$ даетъ $t=17$; то нельзя полагать t' равнымъ другимъ величинамъ не впадая въ противорѣчія; и такъ могутъ быть только слѣдующія три разложенія:

$$\frac{854}{1353}=-\frac{1}{3}+\frac{2}{11}+\frac{6}{41}=\frac{2}{3}-\frac{2}{11}+\frac{6}{41}=\frac{2}{3}+\frac{1}{11}-\frac{35}{41}.$$

III. О СТЕПЕНЯХЪ, КОРНЯХЪ и УРАВНЕНІЯХЪ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

О степеняхъ и корняхъ одночленныхъ количествъ.

123. Основываясь на правилѣ (ч. 96), удобнѣе возвышать въ степени, избѣгая повторяемаго умноженія; ибо пусть требуется возвысить a въ степень $m = n + p$; получимъ $a^m = a^n \times a^p$, какъ что составивъ a^n и a^p, произведеніе дастъ a^m. Такимъ же образомъ могли бы разложить m на три части $n+p+q$, откуда $a^m = a^n \times a^p \times a^q$, какъ въ ч. 60 и проч....

124. Изъ правилъ умноженія (ч. 96) слѣдуетъ, что *дабы возвысить одночленное количество въ степень, должно умножить показателя каждой буквы на показателя степени.* И такъ,

$$(2ab^2)^2 = 4a^2b^4; \quad \left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5 = \frac{3^5a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}.$$

Изъ сего получается еще легкой способъ сославленія нѣкоторыхъ степеней изъ чиселъ; понему что a^m, когда $m = np$, обращается въ $a^{np} = a^{n)p}$. Также если $m = npq\ldots$ то возвышаютъ a въ n, потомъ a^n въ p, и наконецъ a^{np} въ q.... Такимъ же образомъ поступаютъ при извлеченіи корней: на пр: $\sqrt[12]{531441}$, какъ $12 = 3.2.2$, то извлекши прежде квадратный корень, получимъ 729; потомъ квадратный корень изъ 729 будетъ 27; наконецъ кубическій корень изъ 27-ми есть $3 = \sqrt[12]{531441}$, Смот. чл. 60.

125. Обратно, *дабы извлечь* m^ая *корень изъ одночленной величины, должно извлечь оный изъ каждаго производителя; что и совершать раздѣливъ каждаго показателя на* m. Въ самомъ дѣлѣ, дабы a^2b^3 было

$\sqrt[3]{a^6b^3}$, должно, чтобы a^2b^3, возвышенное въ кубъ, произвело a^6b^3; что въ самомъ дѣлѣ получимъ, если основываясь на предыдущемъ правилѣ извлеченія корней, раздѣлимъ показателя на 3.

$$\sqrt{(4a^2b^4)} = 2ab^2, \quad \sqrt[5]{\left(\frac{243a^{10}b^5}{c^5d^{10}}\right)} = \frac{3a^2b}{cd^2}.$$

Корень имѣетъ знакъ $\pm$, когда показатель его есть четное число, $\sqrt{9} = \pm 3$. Ибо (ст. 97), говоря языкомъ Алгебраическимъ, дабы m былъ корень 9-ти, надо $m^2 = 9$, что всегда существуетъ, какой бы m ни имѣлъ знакъ $+$ или $-$ (стр. 174-я). Корень имѣетъ тотъ же знакъ, что и степень, если показатель его нечетный.

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \quad \sqrt[5]{+243} = +3.$$

126. Подкоренныя величины принимаютъ иногда сокращенный видъ. На пр:

$$\sqrt{432} = 2\sqrt{54} = 3\sqrt[3]{16} = 6\sqrt[5]{2}; \quad \sqrt{Nq^2} = q\sqrt{N};$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{c^6d^8}{a^5}\right)} = \frac{cd}{a}\sqrt{(cd^3)}; \quad \sqrt{(3a^2 - 6ab + 3b^2)} = (a - b)\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} = 3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b};$$

$$\sqrt[4]{x^2y} - a\sqrt[4]{x^2y} + b\sqrt[4]{x^2y} = (1 - a + b)\sqrt[4]{x^2y}; \quad \sqrt{75} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3};$$

$$\sqrt{75a^3b^2} - \sqrt{3a^5b^2} - ab\sqrt{3a}; \quad \sqrt{27a^3b} - \sqrt{3a^5b^3} = a(3 - b^2)\sqrt{3ab}.$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} + \frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{ag + bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}.$$

127. Мы выше видѣли, что, дабы сыскать корень произведенія, должно извлекать оный изъ каждаго производителя; сіе также справедливо, когда подкоренныя величины неизвлекомы; на пр: $\sqrt{(a^2b)} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b}$, ибо очевидно, что кубъ сего послѣдняго количества составится, возвышая каждый производитель, отчего и будетъ a^2b. И такъ изъ того, что корень всякаго количества есть произведеніе корней всѣхъ его производителей, слѣдуетъ вообще, что $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$. Посему, *дабы умножить или раз-*

дѣлить два количества, имѣющія одинакіе корни, должно, составивъ произведеніе или частное изъ сихъ количествъ, поставить надъ онымъ общій корень. На прим:

$$\sqrt{6} \times \sqrt{8} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3};$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2};\quad \sqrt[n]{5x^2y^4} \times \sqrt[n]{20ax} = \sqrt[n]{100ax^3y^4};$$

$$\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{3}.\sqrt{11}} = \frac{1}{4\sqrt{3}};\quad \sqrt{np} \times \sqrt[n]{-q} = \sqrt[n]{-pq};$$

$$\frac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}} = \sqrt[n]{\frac{a}{by}};\quad a\sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^4b};$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab};$$

$$(a + \sqrt{b})^3 = a^3 + 3a^2\sqrt{b} + 3ab + b\sqrt{b};$$

корень уничтожается, когда $(\sqrt{a^n b^{n-2}} = a^n b^m$.

128. Такъ какъ нѣтъ такого числа, которое бы, умноженное само на себя, составило отрицательное произведеніе $-m$, то невозможно удовлетворить выраженію $\sqrt{-m}$, отъ чего и называется оно *мнимымъ*, а $\sqrt{m}$ *дѣйствительнымъ*. Въ послѣдствіи (чл. 159, 1-е) представится случай замѣтить, что хотя сіи выраженія не имѣютъ смысла, но заслуживаютъ разсмотрѣнія. Складывать, умножать .... подобныя выраженія, суть дѣйствія, въ которыхъ невозможно дать отчета, однако же надлежитъ исполнять сіи вычисленія надъ мнимыми, какъ будто бы надъ дѣйствительными, подвергая ихъ тѣмъ же правиламъ; пользу сего мы увидимъ въ послѣдствіи.

Предыдущее правило должно здѣсь нѣкоторымъ образомъ измѣнишься; на пр: $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, ни что иное есть какъ квадратъ $\sqrt{-a}$; посему оный будетъ $-a$; хотя по вышеизложенному правилу должно было получить $\sqrt{+a^2}$ или a. Но замѣтимъ, что $\sqrt{a^2}$ есть $\pm a$; неизвѣстность знака происходитъ отъ того, что a^2 можетъ имѣть корнемъ $+a$ или $-a$,

но въ настоящемъ случаѣ сіе нескрыто, и за исключеніемъ $+a$, получимъ произведеніе $-a$.

Слѣдовательно $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$. Также $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ все равно, что $\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\sqrt{-1}$, или $-\sqrt{ab}$.

Очевидно также, что 1-я, 2-я, 3-я, 4-я... степени $\sqrt{a}$, будутъ $\sqrt{-a}$, $-a$, $-a\sqrt{-a}$, $+a^2$, $+a^2\sqrt{-a}$, $-a^3$... Степени $-\sqrt{a}$ суть $-a$, $+a\sqrt{-a}$, a^2, $-a^2\sqrt{-a}$... Квадратъ отъ $1+\sqrt{-1}$ есть $2\sqrt{-1}$. Кубъ отъ $-1+\sqrt{-3}$ будетъ 8; $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}\,.\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\,.\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Произведеніе $(x+a+b\sqrt{-1})\times(x+a-b\sqrt{-1})=(x+a)^2+b^2$, величина дѣйствительная.

129. Изъ правила (чл.127) слѣдуетъ, что *дабы возвысить въ степень одночленное количество, находящееся подъ корнемъ, должно возвести въ сію степень каждаго производителя подкоренной величины.* И такъ кубъ отъ $\sqrt{(3a^2b)}$ есть $\sqrt{(27a^6b^3)}$; кубъ отъ $\sqrt{2}$ есть $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Изъ сего заключимъ, что когда изъ одночленнаго количества, находящагося подъ корнемъ, требуется извлечь еще другой корень, тогда надлежитъ, если возможно, извлекать оный изъ подкоренной величины; или въ противномъ случаѣ, умножить показателей корней. И такъ кубическій корень изъ $\sqrt[3]{a^5}$ есть $\sqrt[q]{a^5}$, $\sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})}=\sqrt[pm]{a^n}$, $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2b^3})}=\sqrt[3]{ab^2}$.

130. *Можно слѣдовательно, неизмѣняя величины подкореннаго количества, умножить или раздѣлить на тоже число, показателей подкоренной величины и показателя корня;* ибо сіе значитъ возвысить въ степень и извлечь корень;

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2},\ \sqrt{a^3}=\sqrt[6]{a^9},\ \sqrt{(3a^2b^3)}=\sqrt[6]{9a^4b^6}).$$

Посредствомъ сего легко уже множить и дѣлить такія количества, у коихъ показатели корней различные; ибо сіе значитъ только привесть ихъ къ одному

показателю корня; для сего должно умножить показателей подкоренной величины и показателя корня на такое число, которое найдутся различнымъ, какъ то дѣлали при приведеніи дробей къ одному знаменателю, (чл. 38). На пр:

$$\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^1}\ldots\sqrt[6]{a^3b^1},$$

$$\sqrt[m]{a^p}.\sqrt[n]{b^q}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qm}},\ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}},$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}}:\frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{r}{z}}=\frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^nz^m}{t^ny^{m}}}$$

О дробныхъ и отрицательныхъ показателяхъ.

151. Мы сказали уже, что частное отъ $\frac{a^m}{a^n}$ есть a^{m-n}; но для сего надобно, чтобы m было $>n$; ибо иначе $m-n$ было бы отрицательное количество, какъ на пр. $-p$, и не понимая еще смысла выраженія a^{-p}, не могли бы множить a^{-p} на a^m; слѣдовательно нельзя было бы доказать, что произведеніе изъ $a^n\times a^{m-n}$ есть a^m.

Но замѣтимъ, что выраженіе a^{-p} само собою не имѣетъ никакого смысла, ибо нельзя къ оному примѣнить общаго понятія о показателяхъ (чл. 12). Посему мы въ правѣ означать $\frac{1}{a^p}$ чрезъ a^{-p}, какъ то будемъ дѣлать и впредь. И такъ, вообще можно сказать, что $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; ибо сіе доказано, когда $m>n$, а по нашему предположенію будетъ также справедливо и для случая $m<n$, потому что, раздѣливъ оба члена на a^m, получимъ

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{-p}.$$

Алгебра научаетъ составлять такія формулы, которыя по своей всеобщности принадлежатъ всѣмъ числовымъ величинамъ, выражаемымъ буквами: и такъ польза сихъ формулъ очевидна; ибо не нужно различать въ Алгебраическомъ выраженіи, имѣющемъ видъ $\frac{a^m}{a^n}$, всѣхъ случаевъ могущихъ произойти отъ положенія $m >$ или $< n$, а поставивъ a^{m-n} вмѣсто $\frac{a^m}{a^n}$, формула сія будетъ справедлива при всѣхъ предположеніяхъ (ч. 108).

Должно также обратить вниманіе на случай, когда $m = n$; тогда a^{m-n} превратится въ a^0, выраженіе само собою также неимѣющее смысла, какъ и a^{-p}. И такъ согласимся, что $a^0 = 1$, ибо въ семъ случаѣ $\frac{a^m}{a^n} = 1$. *Выраженіе* a^0 *будетъ тожественное съ единицею.*

Посему, если въ какой-нибудь формулѣ встрѣтятся выраженія a^0 и a^{-p}, то оныя легко понять, обратившись къ ихъ происхожденію; a^0 и a^{-p} могутъ только произойти отъ раздѣленія $\frac{a^m}{a^n}$, гдѣ $m = n$ въ 1-мъ случаѣ, и $n = m + p$ во второмъ. Согласно съ симъ условіемъ, *можно переносить изъ числителя производителей знаменателя, давая показателямъ оныхъ противные знаки;* и такъ

$$a^0 \cdot b^0 = p + q \cdot 0 = \left(\frac{q}{b}\right)^0 = 1,$$

$$(bc)^{-p} = \frac{1}{(bc)^p}, \quad \frac{1}{a} = a^{-1},$$

$$\frac{a^m b^n}{c^p d^q} = a^m b^n c^{-p} d^{-q}, \quad \frac{c}{f} = cf^{-1} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}},$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)^{-1}$$

Такимъ образомъ нулевыя и отрицательныя степени введены въ вычисленіе, на основаніяхъ ни мало не затрудняющихъ. Подобное сему разсужденіе употреблено въ умноженіи дробей (чл. 40), и въ послѣдствіи оно будетъ полезно во многихъ случаяхъ. Разсмотримъ теперь дробныя степени.

132. По найденному правилу для извлеченія корней изъ одночленныхъ количествъ извѣстно, что $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$; но для сего надобно, чтобы n было кратное m, иначе вышелъ бы дробный показатель, коего свойство еще неизвѣстно; и нельзя было бы доказать, что $a^{\frac{n}{m}}$ повторенное m разъ, произведетъ a^n. И такъ здѣсь, какъ и въ случаѣ отрицательныхъ показателей, очевидно, что выраженіе $a^{\frac{n}{m}}$ само собою не имѣетъ никакого смысла, и можно слѣдовательно чрезъ оное означать $\sqrt[m]{a^n}$; чрезъ что вышеприведенное правило будетъ принадлежать всѣмъ случаямъ, хотя бы n было кратное m или нѣтъ; что согласно съ всеобщностію Алгебраическаго языка.

Посему, вмѣсто $a^{\frac{n}{m}}$, не трудно получить объ немъ ясное понятіе, замѣтивъ, что оно могло только произойти отъ извлеченія $m^{го}$ корня изъ a^n. Слѣдовательно вышеизложенное правило, для исполненія сего извлеченія, будетъ общее для всѣхъ случаевъ. И такъ

$$\sqrt{5a} = (5a)^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt{x^2 - y^2} = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$b^{\frac{5}{2}} = \sqrt{b^5},\quad b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b},\quad c^{\frac{4}{5}} p^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{(c^4 p)},$$

$$\sqrt[r]{\left(\frac{a^m b^n}{c^p}\right)} = \frac{a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}}{c^{\frac{p}{r}}},\quad \sqrt[m]{\left(\frac{b^p}{c^n}\right)} = b^{\frac{p}{m}} \times c^{-\frac{n}{m}}.$$

135. a^0, a^{-p}, $a^{\frac{m}{n}}$ суть только условныя величины, выражающія количества 1, $\frac{1}{a^p}$ и $\sqrt[n]{a^m}$. Впрочемъ 0, p и $\frac{m}{n}$ не должно принимать за истинныхъ показателей въ принятомъ для нихъ смыслѣ, хотя сіи величины и снавятся на мѣстѣ оныхъ, потому, что это значило бы во зло употреблять наименованія, если бы сказали безъ доказательства, что $a^m \times a^n = a^{m+n}$, когда m и n не суть оба цѣлыя и положительныя. Сіе также относится къ дѣленію, возвышенію въ степени и извлеченію корней. И такъ докажемъ, что *сіи выраженія подлежатъ тѣмъ же правиламъ, какъ и показатели.*

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^p = a^{mp}, \quad \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}.$$

I. Когда показатели отрицательные, то получимъ:

1-е. $a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^{m-n}$; очевидно также, что $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$;

2-е. $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times a^n = a^{m+n}$; найдемъ также, что $\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-m-n}$ и что $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}$;

3-е. $(a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np}$;

4-е. $\sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{n}{m}}$.

II. При дробныхъ показателяхъ можно прежде оба члена оныхъ умножить на одно число p; ибо (чл. 130) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}}$. Можно слѣд: привести къ одному знаменателю показателей всѣхъ количествъ, кои должно умножить или раздѣлить между собою.

1-е. Пусть $a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n+p}} = a^{\frac{n+p}{m}}$;

2-е. $a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n-p}} = a^{\frac{n-p}{m}}$;

3-е. $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^p = \sqrt[m]{a^n}^p = \sqrt[m]{a^{np}} = a^{\frac{np}{m}}$.

4-е. $\sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[mp]{a^n} = a^{\frac{n}{mp}}$.

Замѣтимъ сверхъ того, что въ вычисленіяхъ съ дробными показателями можно полагать оные также и отрицательными.

III. Разсмотримъ неизвлекомые показатели: пусть будетъ на пр: $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}}$, означимъ чрезъ z и z' приближенныя величины сихъ показателей или $z = \sqrt{2} + h$, $z' = \sqrt{3} + h'$; гдѣ h и h' суть погрѣшности, кои могутъ уменьшаться по произволенію, продолжая далѣе приближеніе. И такъ, принимая приближенныя величины z и z' достаточными, произведеніе также будетъ только приближенное; и означивъ чрезъ α происходящую отъ сего погрѣшность, которая можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины, получимъ точное произведеніе

$$a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}} + \alpha = a^{z+z'} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}+h+h'} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times a^{h+h'};$$

но чѣмъ h и h' будутъ менѣе, тѣмъ $a^{h+h'}$ будетъ ближе подходить къ 1; можно слѣдовательно дать сему второму числу слѣдующій видъ $a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\beta}$, гдѣ β уменьшается до безконечности вмѣстѣ съ α, h и h'. Сравнивъ постоянные члены (чл. 115), получимъ $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Такимъ же образомъ доказали бы, что неизвлекомые показатели подвергаются тѣмъ же правиламъ какъ и цѣлые, при дѣленіи и извлеченіи: что есть слѣдствіе вышедоказаннаго.

IV. Что касается до мнимыхъ показателей, то по ихъ происхожденію (ч. 128), дѣйствія надъ оными производятся по правиламъ употребляемымъ при дѣйствительныхъ величинахъ, хотя *оныя* суть только умственныя выраженія; слѣдовательно въ семъ случаѣ не нужно будетъ никакого доказательства.

Иногда сіи правила облегчаютъ вычисленія; на пр: чтобы раздѣлить $\sqrt[5]{a^5b^4}$ на $\sqrt[7]{a^2b^3}$, напишемъ $a^{\frac{5}{5}}b^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$, и приведя показателей къ одному знаменателю, будетъ

$$a^{\frac{21}{35}}b^{\frac{28}{35}} : a^{\frac{10}{35}}b^{\frac{15}{35}} = a^{\frac{11}{35}}b^{\frac{13}{35}} = \sqrt[35]{a^{11}b^{13}}.$$

Многочленныя количества, заключающія отрицательные и дробные показатели, подлежатъ обыкновеннымъ правиламъ; въ вычисленіяхъ сего рода надобно пріобрѣсти навыкъ. Слѣдующее дѣленіе покажетъ ходъ наблюдаемаго дѣйствія:

$$\begin{array}{l|l} 6a^4 - 22a^3\sqrt{-1} - 13ab^2 + 20 + 22a^{-1}b\sqrt{-1} + 6a^{-2}b^2 & 2a^2 - 5\sqrt{-1} - 3a^{-1}b \\ -6a^4 + 15a^3\sqrt{-1} + 9ab^2 & 3a^2 - 4\sqrt{-1} - 2a^{-1}b \\ \hline 1\text{-й ост.} -8a^3\sqrt{-1} - 4ab^2 - 20 + 22a^{-1}b\sqrt{-1} + 6a^{-2}b^2 & \\ \quad + 8a^3\sqrt{-1} \quad + 20 - 12a^{-1}b\sqrt{-1} & \\ \hline 2\text{-й остатокъ} \quad -4ab^2 \quad + 10a^{-1}b\sqrt{-1} + 6a^{-2}b^2 & \\ 3\text{-й остатокъ} \quad \ldots\ldots\ldots\ 0 & \end{array}$$

Замѣтимъ, что частное a можетъ имѣть отрицательныхъ показателей и между имъ быть почнымъ; и такъ, если дѣленіе исполнимо въ почности, то очевидно, что сумма наименьшихъ показателей при a въ частномъ и дѣлителѣ, должна дать наименьшій показатель въ дѣлимомъ.

И такъ вычтя наименьшіе при a въ сихъ двухъ многочленныхъ количествахъ, получимъ наименьшій показатель въ частномъ, если дѣленіе исполнимо въ почности. Посему можно быть увѣрену въ противномъ, если продолжая дѣленіе, получимъ наконецъ въ частномъ показатель, меньшій сей разности.

Чтобъ отыскать наибольшій общій дѣлитель между $90ab^{\frac{1}{3}} - 195a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 90a^{-2}b^{\frac{1}{3}}$, и $12ab^{\frac{2}{3}} - 56a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}} + 27a^{-2}b^{\frac{1}{3}}$, мы видимъ, что производители ихъ независимые отъ a суть $45b^{\frac{1}{3}}$ и $3b^{\frac{2}{3}}$, которые опустивъ, (не забывая однакоже въ послѣдствіи умножить на $3b^{\frac{1}{3}}$ общаго дѣлителя оставшихся многочленныхъ количествъ, умножимъ все на a^2, дабы уничтожить отрицательные показатели, и получимъ

$$6a^3 - 13a^{\frac{5}{2}} + 6, \text{ и } 4a^3 - 12a^{\frac{5}{2}} + 9.$$

$6a^3 - 13a^{\frac{5}{2}} + 6$	$4a^3 - 12a^{\frac{5}{2}} + 9$	$2a^{\frac{1}{2}} - 3$ общ. дѣлит.
$12a^3 - 26a^{\frac{5}{2}} + 12$	3	$2a^{\frac{1}{2}} - 3$
$12a^3 + 36a^{\frac{5}{2}} - 27$	$-4a^3 + 6a^{\frac{5}{2}}$	
остатокъ $10a^{\frac{5}{2}} - 15$	остат. $-6a^{\frac{5}{2}} + 9$	
или $2a^{\frac{5}{2}} - 3$	остатокъ 0	

И такъ найденный производитель есть $2a^{\frac{5}{2}} - 3$, а искомый общій дѣлитель будетъ $3b^{\frac{1}{3}}(2a^{\frac{5}{2}} - 3)$.

О квадратныхъ и кубическихъ корняхъ многочленныхъ количествъ.

194. 1-е. Всякое число, состоящее изъ n цыфръ, находится между 10^n и 10^{n-1}; слѣд. квадратъ онаго заключается между 10^{2n} и 10^{2n-2}, которыя менѣе чиселъ состоящихъ изъ $2n+1$ и $2n-1$ цыфръ; посему квадратъ будетъ имѣть $2n$ или $2n-1$ цыфръ, какъ было сказано (въ чл. 62).

2-е. Пусть a и $a+1$ суть два послѣдовательныя числа; квадраты ихъ a^2 и a^2+2a+1 разнятся между собою количествомъ $2a+1$; что согласно (съ чл. 66. 4-е).

3-е Когда посредствомъ извлеченія найдется болѣе половины цыфръ квадратнаго корня, то остальныя

опредѣляется простымъ дѣленіемъ; что особенно сокращаетъ приближенное извлеченіе.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется найти корень числа N; полагая, что извѣстная часть сего корня есть a, а искомая x; будетъ $\sqrt{N} = a + x$, откуда $N = a^2 + 2ax + x^2$; перенеся a^2 и раздѣливъ на $2a$, получимъ $\frac{N - a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$. И такъ, если x составлено изъ n цыфръ, то x^2 имѣетъ не болѣе $2n$; по положенію же a состоитъ по крайней мѣрѣ изъ $n+1$ цыфръ, послѣдуемыхъ числомъ n нулей; откуда очевидно, что a будетъ $> x^2$, и слѣдовательно $\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2}$, посему $x = \frac{N - a^2}{2a}$, если желаемъ получить $\sqrt{N}$ только цѣлую часть; что обыкновенно употребляется для приближеннаго извлеченія, и даже для корней изъ дробей (чл. 66, 1-е).

И такъ $N - a^2$, или осшапокъ, который получили найдя a, должно раздѣлить на удвоенное a; для чего и примемъ извѣстную часть корня a за простыя единицы, откинувъ n нулей, которые бы должны находиться съ правой ея стороны, и опустивъ также n цыфръ съ-права отъ N.

Такимъ образомъ $\sqrt{5.57.67.98.17}$; первыя три грани даютъ въ корнѣ 183, а въ осшапкѣ 278; посему если раздѣлимъ 27898 на удвоенное 183 или на 366, то получимъ 76 для осшальныхъ двухъ цыфръ корня, который и будетъ 18376.

Также $\sqrt{2} = 1,4142$, доведя корень только до 10000-хъ частей (чл. 64): для осшысканія же еще четырехъ десятичныхъ знаковъ, какъ осшапокъ есть 3836, то раздѣливъ 38360000 на 2×14142 или на 28284: частное будетъ 1356, слѣдовательно

$$\sqrt{2} = 1,41421356237, \quad \sqrt{3} = 1,7320508076.$$

135. Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ $9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$; изобразимъ сіе многочленное количество чрезъ X, и для краткости назовемъ *наибольшимъ членомъ* тотъ, въ которомъ буква a имѣетъ высшаго показателя. Положимъ, что x есть наибольшій членъ искомаго корня, y сумма прочихъ членовъ; отсюда (чл. 97, 1-е) $X = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; очевидно, что x^2 есть наибольшій членъ квадрата X, и такъ $x^2 = 9a^4$, или $x = 3a^2$ будетъ первый членъ корня, и $X = 9a^4 + 6a^2y + y^2$. Отнявъ $9a^4$ отъ обѣихъ частей, получимъ

$$-12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 = 6a^2y + y^2,$$

гдѣ y и $6a^2y$ суть многочленныя количества; но такъ какъ y заключаетъ только такіе члены, въ коихъ показатель a менѣе 2-хъ, то ясно, что наибольшій членъ выраженія $(6a^2+y)y$, есть произведеніе $6a^2$ на наибольшій членъ y; посему сей членъ будетъ частное отъ $-12a^3b$, раздѣленнаго на $6a^2$ или на удвоенный найденный корень. Отъ чего получимъ, что $-2ab$ есть вторый членъ корня.

Для окончательнаго дѣйствія положимъ, что $3a^2 - 2ab$, или $x = 2ab = x'$, и означимъ чрезъ y' прочіе члены корня. Будетъ $X = x'^2 + 2x'y' + y'^2$; отнимемъ x'^2 отъ обѣихъ частей; но x'^2 составится изъ вычтеннаго уже x^2, и такъ же изъ $-2x \times 2ab + 2ab^2$, или изъ $-2ab(2x - 2ab)$. Слѣдовательно написавъ вторый членъ корня $-2ab$ возлѣ $6a^2$, т. е. удвоеннаго перваго члена, и умноживъ все на $-2ab$, потомъ вычтя сіе произведеніе изъ предыдущаго остатка, получимъ

$$30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 = 2x'y' + y'^2;$$

если y' есть многочленное количество, то очевидно, что наибольшій членъ $30a^2b^2$ будетъ такового для $2x'y'$, т. е. будетъ произведеніе наибольшаго члена $2x'$ на таковой же y'. И такъ раздѣливъ $30a^2b^2$ на $6a^2$, третій членъ корня будетъ $5b^2$.

Положимъ $3a^2 - 2ab + 5b^2$ или $x' + 5b^2 = x''$, и означимъ чрезъ y'' сумму прочихъ членовъ корня; то

$X - x''^2 = 2x''y'' + y''^2$; но дабы вычесть x''^2 изъ X, должно изъ послѣдняго осшашка $30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$, ошнять ещо $2x'.5b^2 + 5b^2{}^2$, или $5b^2.2x' + 5b^2$; ибо x'^2 уже вычшено. И шакъ написавъ $+5b^2$ возлѣ удвоенныхъ $6a^2 - 4ab$ первыхъ членовъ корня, умножимъ все на 3-й членъ $5b^2$; наконецъ вычшемъ сіе произведеніе изъ 2-го осшашка. По какъ произведеніе сіе и осшашокъ равны, шо будешъ $X - x''^2 = 0$, ошкуда $r'' = 0$ и $x'' = \sqrt{X}$. Слѣдовашельно искомый корень есшь $3a^2 - 2ab + 5b^2$.

Вошъ ходъ вычисленія:

$$\begin{array}{l|l}
9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 & 3a^2 - 2ab + 5b^2 \\
-9a^4 & \\
\hline
1\text{-й осшаш.}\quad -12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 & 6a^2 - 2ab \times -2ab \\
+12a^3b - 4a^2b^2 & \\
\hline
2\text{-й осшашокъ}\quad +30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 & 6a^2 - 4ab + 5b^4 \\
3\text{-й осшашокъ} \ldots\ldots\ldots 0 & \times 5b^2
\end{array}$$

Изъ онаго видно, чшо *расположивъ многочленное количество надлежащимъ образомъ, должно взять корень перваго члена и продолжать дѣйсшвіе, какъ при числовомъ извлеченіи* (гл. 62). Слѣдуя шому же ходу вычисленія, найдемъ корни многочленныхъ количествъ, заключающихъ мнимыя величины, или дробные и оприцашельные показашели, на пр:

$$\begin{array}{l|l}
9a^4 - 12a^3\sqrt{-1} - 2a^2(2-3\sqrt{-2}) + 4a\sqrt{2-2} & 3a^2 - 2a\sqrt{-1} + \sqrt{-2} \\
-9a^4 & \\
\hline
1\text{-й осш.}\quad -12a^3\sqrt{-1} - 2a^2(2-3\sqrt{-2}) + 4a\sqrt{2-2} & 6a^2 - 2a\sqrt{-1} \times -2a\sqrt{-1} \\
+12a^3\sqrt{-1} + 4a^2 & \\
\hline
2\text{-й осшашокъ} \ldots\ldots 6a^2\sqrt{-2} + 4a\sqrt{2-2} & 6a^2 - 4a\sqrt{-1} + \sqrt{-2} \\
3\text{-й осшашокъ} \ldots\ldots\ldots 0 & \times +\sqrt{-2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
4a^2 - 12ab^{\frac{1}{2}} + 9b + 12 - 18a^{-1}b^{\frac{1}{2}} + 9a^{-2} & 2a - 3b^{\frac{1}{2}} + 3a^{-1} \\
-4a^2 & \\
\hline
1\text{-й осшаш.}\quad -12ab^{\frac{1}{2}} + 9b + 12 - 18a^{-1}b^{\frac{1}{2}} + 9a^{-2} & (4a - 3b^{\frac{1}{2}}) \times -3b^{\frac{1}{2}} \\
+12ab^{\frac{1}{2}} - 9b & \\
\hline
2\text{-й осшашокъ} \ldots\ldots 12 - 18a^{-1}b^{\frac{1}{2}} + 9a^{-2} & 4a - 6b^{\frac{1}{2}} + 3a^{-1} \\
3\text{-й осшашокъ} \ldots\ldots\ldots 0 & \times +3a^{-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-a^2 & x-\frac{1}{2}a^2x^{-1}-\frac{1}{8}a^4x^{-3}\ \ldots \\ \hline -x^2 & \\ \hline \text{1-й остат. } -a^2 & 2x-\frac{1}{2}a^2x^{-1}\times -\frac{1}{2}a^2x^{-1} \\ \hline +a^2-\frac{1}{4}a^4x^{-2} & 2x-a^2x^{-1}-\frac{1}{8}a^4x^{-3} \\ \text{2-й остаток } -\frac{1}{4}a^4x^{-2} & \times\ -\frac{1}{8}a^4x^{-3} \\ \hline +\frac{1}{4}a^4x^{-2}-\frac{1}{8}a^6x^{-4}-\frac{1}{64}a^8x^{-6} & \\ \text{3-й остаток и проч.} & \end{array}$$

Изъ сего послѣдняго примѣра видно, какъ должно поступать, если извлеченіе въ точности несовершаемо; что узнаютъ, когда получатъ нѣкоторые члены корня, въ коихъ показатель при a менѣе половины самаго низшаго показателя степени. И такъ здѣсь будетъ:

$$\sqrt{(x^2-a^2)} = x-\frac{a^2}{2x}-\frac{a^4}{8x^3}-\frac{a^6}{16x^5}-\text{ и проч.}$$

136. Кубъ сей $x+y$ есть $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (ч. 97, 2-е); пользуясь сею формулою, легко будетъ приложить вышеприведенныя правила къ отысканію кубическаго корня изъ какого-нибудь многочленнаго количества. Ограничимся слѣдующимъ примѣромъ:

$$\begin{array}{r|l} 8a^6-36a^4b^2+54a^2b^4-27b^6 & 2a^2-3b^2 \text{ корень.} \\ \hline -8a^6 & \\ \hline \text{1-й остатокъ } -36a^4b^2+54a^2b^4-27b^6 & 12a^4-18a^2b^2+9b^4 \\ \text{2-й остатокъ } \ldots\ldots\ 0 & \times\ -3b^2 \end{array}$$

Расположивъ надлежащимъ образомъ, отыщемъ кубическій корень перваго члена $8a^6$, который будетъ $2a^2$; вычтя сей членъ, получимъ 1-й остатокъ. Раздѣливъ 1-й членъ онаго $-36a^4b^2$ на $12a^4$, т. е. на утроенный квадратъ $2a^2$; частное $3b^2$ будетъ вторый членъ корня. Возлѣ $12a^4$ напишемъ $-18a^2b^2+9b^4$, или утроенное произведеніе $-3b^2$ на первый членъ $2a^2$, и квадратъ $-3b^2$; умноживъ сіе трехчленное количество на $3b^2$ и произведеніе вычтемъ изъ 1-го остатка. Разность есть нуль; посему $2a^2-3b^2$ будетъ точный кубическій корень: если бы получили 2-й остатокъ, то съ онымъ поступили бы, какъ съ первымъ.

Извлеченіе корней 4-й, 5-й .... степени подлежитъ такимъ же правиламъ; объ оныхъ будетъ сказано ниже, (чл. 489-й.)

Уравненія второй степени.

137. Перенеся всѣ члены въ первую часть уравненія, представя x и x^2 общими множителями, и соединивъ всѣ извѣстные члены въ одинъ, уравненіе второй степени приметъ видъ $Ax^2 + Bx + C = 0$;

сдѣлавъ $$\frac{B}{A} = p, \quad \frac{C}{A} = q,$$

получимъ $$x^2 + px + q = 0 \ldots\ldots (1),$$

уравненіе, которое можетъ изображать всѣ уравненія второй степени, и въ коемъ p и q суть извѣстныя числа, положительныя или отрицательныя.

Раздѣлимъ $x^2 + px + q$ на $x - a$, полагая a произвольнымъ числомъ, частное будетъ $x + a + p$, а осташокъ $a^2 + pa + q$. Сей осташокъ равенъ или неравенъ нулю, смотря потому, будетъ ли a корнемъ даннаго уравненія или нѣтъ, (величины, удовлетворяющія сему уравненію называются *корнями*, потому что оныя получаются посредствомъ извлеченія. И такъ, всякое число a, которое есть корень уравненія второй степени, дастъ дѣлителемъ первой части сего уравненія двучленное количество $(x - a)$; въ такомъ случаѣ уравненіе приметъ видъ:

$$(x - a)(x + a + p) = 0.$$

Такъ какъ требуется опредѣлить всѣ величины, обращающія сіе произведеніе въ нуль, то $x = -a - p$ удовлетворяетъ сему условію точно также, какъ и $x = a$. Посему 1-е. *всякое уравненіе второй степени, имѣющее одинъ корень* a, *допускаетъ еще другой* $-(a + p)$.

2-е. *Сіе уравненіе имѣетъ только два корня;* что будетъ доказано въ послѣдствіи (ч. 492).

3-е. Какъ корни онаго суть $+a$ и $-(a+p)$, то сумма ихъ есть $-p$, а произведеніе $-(a^2+ap)$, или q; ибо $a^2+pa+q=0$; посему, *предстоящій* p *2-го члена съ противнымъ знакомъ есть сумма обоихъ корней, а извѣстный членъ* q *есть ихъ произведеніе.* На пр: въ $x^2-8x+15=0$, гдѣ одинъ изъ корней есть $x=5$; въ чемъ увѣряемся подстановкою; найдемъ, что 1-я часть дѣлима на $x-5$, и частное будетъ $x=5$; посему 5 и 3 суть два искомые корня; сумма ихъ есть 8, а произведеніе 15.

4-е. Легко составить уравненіе 2-й степени, котораго корни k и l даны; взявъ ихъ сумму $k+l$, и произведеніе kl, получимъ $x^2-(k+l)x+kl=0$. Оное составимъ также изъ произведенія $(x-k)(x-l)$. На пр: если 5 и -7 суть данные корни, то умноживъ $x-5$ на $x+7$, или взявъ $5-7=-2$; $5\times-7=-35$, и перемѣнивъ знакъ при суммѣ, искомое уравненіе будетъ $x^2+2x-35=0$.

5-е. Рѣшить уравненіе 1), значитъ найти два числа, коихъ сумма есть $-p$, а произведеніе q.

6-е. Можетъ случиться, что корни k и l равны; въ такомъ случаѣ производящіе $x-k$ и $x-l$ будутъ также равны, и x^2+px+q сдѣлается квадратомъ одного изъ нихъ.

158. Дабы рѣшить уравненіе 1), замѣтимъ, что если бы x^2+px+q было полный квадратъ, то извлекши корень, получили бы уравненіе 1-й степени. Сравнимъ сіе прехчленное количество съ $x+n^2$ или съ $x^2+2nx+n^2$; гдѣ n есть число произвольное: и такъ сдѣлаемъ $n=\frac{1}{2}p$, чтобы первые два члена въ обѣихъ частяхъ были равны.

Посему, если n^2 или $\frac{1}{4}p^2=q$, то x^2+px+q есть квадратъ отъ $x+\frac{1}{2}p$; и такъ сіе прехчленное количество будетъ въ семъ случаѣ только полнымъ квадратомъ. Поставивъ $\frac{B}{A}$ и $\frac{C}{A}$ вмѣсто p и q, найдемъ, что

Дабы $Ax^2 + Bx + C$ *было полнымъ квадратомъ, надобно, чтобы между предстоящими было такое отношеніе* $B^2 - 4AC = 0$.

Когда $\frac{1}{4}p^2 - q$, що предложенное уравненіе обращится въ $(x + \frac{1}{2}p)^2 - 0$, и каждой изъ корней онаго равенъ $-\frac{1}{2}p$.

Но если сіе условіе не существуетъ, що прибавимъ $\frac{1}{4}p^2 - q$ къ обѣимъ частямъ уравн. (1), получимъ

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q,$$

извлекши корень будетъ, $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$,

ошкуда $$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q} \ldots (2).$$

Причина знака $\pm$ объяснена въ чл. 125. И такъ *величина* x *состоитъ изъ половины предстоящаго 2-го члена, взятаго съ противнымъ знакомъ, и соединеннаго плюсомъ или минусомъ съ квадратнымъ корнемъ изъ квадрата сей половины, сложенной съ извѣстнымъ членомъ перенесеннымъ во 2-ю часть.* Такимъ образомъ тотчасъ получится корень всякаго уравненія, если не желаемъ повторить предыдущаго вычисленія, надъ даннымъ прехчленнымъ количествомъ.

Для $x^2 - 8x + 15 = 0$, найдемъ, что

$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15}) = 4 \pm 1$, то есть $x = 5$ и $= 3$.

Также изъ $x^2 + 2x = 35$ получимъ

$x = -1 \pm \sqrt{(35 + 1)} = -1 \pm 6$, или $= 5$ и $= -7$.

139. Выраженіе 2, представляетъ различные случаи. Положимъ для краткости $\frac{1}{4}p^2 - q = m$, ошкуда $q = \frac{1}{4}p^2 - m$; чрезъ что $x^2 + px + q$ обратится въ $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - m$, или $(x + \frac{1}{2}p)^2 - m$;

сіе то количество надлежитъ приводить къ нулю, подставляя различныя числа вмѣсто x.

1-е. *Если* m *отрицательное*, и какъ $\frac{1}{4}p^2$ всегда положительное, то должно, чтобы q было положительное въ 1-й части уравн. (1) и $> \frac{1}{4}p^2$. Но тогда данное уравненіе обратится въ $(x + \frac{1}{2}p)^2 + m = 0$; и такъ надобно, чтобы сумма двухъ положительныхъ

количествъ равнялась нулю: задача очевидно *невозможная;* и какъ $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$, то выраженіе $\sqrt{-m}$, невозможное само собою, будетъ служить къ означенію сего случая. Посему, *задача невозможна если корни мнимые.*

Но и въ семъ случаѣ данное уравненіе имѣетъ два корня, ибо дѣйствуя сими величинами, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$, какъ дѣйствительными, т. е. подставя оныя вмѣсто x въ предложенное уравненіе, оно удовлетворяется; что есть слѣдствіе только Алгебраическихъ дѣйствій. Такимъ же образомъ отрицательныя величины, неимѣющія сами собою никакого смысла, могутъ служить для рѣшенія уравненія (чл. 107), не удовлетворяя однако же задачѣ, если въ оной не сдѣлаютъ нѣкоторыхъ измѣненій.

2-е. *Если* m *есть нуль*, для чего надобно, чтобы q было положительное въ 1-й части даннаго уравненія и $= \frac{1}{4}p^2$, тогда $x^2 + px + q$ сдѣлается квадратомъ отъ $x + \frac{1}{2}p$, и *корни его будутъ равные;* сей случай есть переходъ отъ мнимыхъ корней къ дѣйствительнымъ.

3-е. *Если* m *положительное*, то q въ 1-й части должно быть отрицательное или положительное и $< \frac{1}{4}p^2$; въ семъ случаѣ

$$x + \tfrac{1}{2}p^2 - m = x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{m} \times x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{m};$$

таковы суть производители 1-й части даннаго уравнения (1); корни его будутъ $-\frac{1}{2}p + \sqrt{m}$ и $-\frac{1}{2}p - \sqrt{m}$, коихъ сумма есть $-p$, а произведеніе $\frac{1}{4}p^2 - m$ или q.

4-е. Если m есть полный квадратъ, то корни будутъ извлекомые.

5-е. Если корни дѣйствительные и съ одинаковыми знаками, то должно, чтобы $\frac{1}{2}p$ превосходило корень, имѣющій знакъ $=$; и какъ $\frac{1}{2}p > \sqrt{m}$ или $\frac{1}{4}p^2 > \frac{1}{4}p^2 - q$, или наконецъ $q > 0$. Посему когда q отрицательное, то корни имѣютъ разные знаки, если же q положи-

шельное (и $< \frac{1}{4}p^2$), що знаки ихъ будутъ одинакіе и противные знаку p.

См. чл. 108, 2-е объясненіе отрицательныхъ корней.

6-е. Если $q = 0$, то не прибѣгая къ формулѣ (2), получимъ

$x^2 + px = x(x + p) = 0$, откуда $x = 0$ и $x = -p$.

7-е. Если $p = 0$, то $x^2 + q = 0$, откуда $x = +\sqrt{-q}$, величина дѣйствительная или мнимая, смотря по знаку q.

8-е. Когда данное уравненіе имѣетъ видъ .... $Ax^2 + Bx + C = 0$, то мы сказали уже, что дабы освободить первый членъ отъ его предшествующаго A, мы дѣлимъ на оный все уравненіе; но можно также сей 1-й членъ сдѣлать квадратомъ, умноживъ уравненіе на 4A; получимъ

$$4A^2x^2 + 4ABx + 4AC = 0,$$

и сравнивъ по предыдущему съ квадратомъ отъ $2Ax + n$, явно что должно положить $n = B$, и прибавивъ B^2 для дополненія квадрата; посему

$$(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC, \text{ и } x = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}.$$

Такимъ же образомъ рѣшивъ относительно y уравн.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

получимъ

$$y = \frac{-Bx - D \pm \sqrt{[B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF]}}{2A}.$$

9-е. И такъ $Ax^2 + Bx + C = A[(x + \frac{1}{2}p)^2 - m]$, гдѣ m можетъ быть отрицательное, нуль или положительное, смотря потому, будутъ ли корни мнимые, равные или дѣйствительные. Въ первыхъ двухъ случаяхъ, если A положительное, то какую бы величину ни вставили вмѣсто x въ трехчленное количество, произведеніе или $Ax^2 + Bx + C$, должно имѣть тотъ же знакъ, какой при A. Но если m положительное, то положимъ, что дѣйствительные его корня суть a и b; получимъ $Ax^2 + Bx + C = A(x - a)(x - b)$,

откуда видно, что давая x величины большія или меньшія чѣмъ a и b, знакъ всего выраженія будетъ такой же какъ и при A; разные же знаки будутъ въ томъ случаѣ, когда x заключается между a и b. И такъ знакъ прехчленнаго количества, бывшій до сего постояннымъ, при всѣхъ величинахъ x, перемѣняется теперь два раза, когда перейдетъ онъ величинъ, заключающихся между a и b, въ другія, которыя или $>$ или $<$ a и b.

Полезно рѣшишь слѣдующіе примѣры:

1-й случай: $9x^2 + 12x + 8 = 0 \ldots\ x = -\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{-1}$,

2-й ..... $9x^2 - 12x + 4 = 0 \ldots\ x = +\frac{2}{3}$,

3-й и 4-й .. $\begin{cases} 9x^2 - 12x + 3 = 0 \ldots\ x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \text{ или } x = 1 \text{ и } x = \frac{1}{3}, \\ 2x^2 + 3x + 1 = 0 \ldots\ x = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \text{ или } x = -\frac{1}{2} \text{ и } x = -1, \\ x^3 - x - 2 = 0 \ldots\ x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \text{ или } x = 2 \text{ и } x = -1, \end{cases}$

5-й ..... $x^2 - 5x + 6 = 0 \ldots\ x = 3$ и $x = 2$,

6-й ..... $\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \ldots\ x = 3 \text{ и } x = -3, \\ x^2 + 9 = 0 \ldots\ x = \pm 3\sqrt{-1}. \end{cases}$

140. I. Сыскашь такое число x, отъ квадрата котораго отнявъ 2, осшанокъ былъ бы 1. Получимъ $x^2 - 2 = 1$, откуда $x = +\sqrt{3}$.

II. Раздѣлишь a на такія двѣ части, чтобы m разъ взятая 1-я умноженная на n разъ взятую 2-ю, давала произведеніе p. Получимъ

$$mx.n(a-x) = p, \text{ откуда } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{p}{mn}\right)}.$$

Если требуется раздѣлишь a на двѣ части, коихъ произведеніе p дано, то должно сдѣлашь $m = n = 1$. Такъ какъ корни суть мнимые, когда $p > \frac{1}{4}a^2$, то очевидно, что произведеніе не можетъ превзойши квадрата половины a, т. е. что сей квадратъ отъ $\frac{1}{2}a$ есть наибольшее произведеніе, какое только можно составишь изъ двухъ частей a (чл. 97, 3-е).

III. Дано произведеніе p и разность двухъ чиселъ, отыскашь каждое. Получимъ $xy = p$, $x - y = d$ откуда

$$x = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)}$$

и

$$y = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)}.$$

VI. Сыскать два числа, коихъ сумма есть a, а сумма ихъ кубовъ равна b. Изъ $x+y=a$, $x^3+y^3=b$, будетъ $a^3-3a^2x+3ax^2=b$, и положивъ $b=af$, получимъ

$$x=\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{3}f-\tfrac{1}{12}a^2)}$$
$$x=\tfrac{1}{2}a-\sqrt{(\tfrac{1}{3}f-\tfrac{1}{12}a^2)}$$

V. Сыскать число, коего бы степень p, взятая n разъ, была равна $p+2$ степени, m разъ взятой? $x=+\sqrt[n]{n:m}$.

VI. Нѣсколько человѣкъ должны заплатить 800 руб. за производство судебнаго дѣла; трое изъ нихъ не въ состояніи заплатить своихъ участковъ, почему прочіе и прибавляютъ каждый къ своему участку еще 60 руб.; спрашивается число x людей, платящихъ; падержки судопроизводства. Получимъ $\frac{800}{x+3}=\frac{800}{x}-60$, откуда $x^2+3x=40$ и $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}+40)}=-\frac{3}{2}\pm\frac{13}{2}$ и такъ число участвующихъ въ платежѣ было 5 человѣкъ, вмѣсто 8. Легко объяснить отрицательный корень -8.

VII. Даны двѣ свѣтящіяся точки A и B (чер. 2), одна отъ другой на разстояніи $AB=a$; точка A въ m разъ свѣтлѣе B; требуется опредѣлить мѣсто c, которое было бы обѣими точками равно освѣщено, зная, что ясность свѣта находится въ обратномъ содержаніи квадратовъ разстояній.

Пусть α и β суть степени освѣщенія, сообщаемыя точками A и B на разстояніи $=1$; $\frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{9}$ будутъ степени освѣщенія, которыя приметъ точка c, удаляясь отъ A на разстояніе 1, 2, 3...., посему $\frac{\alpha}{x^2}$ должна соотвѣтствовать пространству $AC=x$; и какъ $BC=a-x$, степень освѣщенія, которую B сообщаетъ c, будетъ $\frac{\beta}{(a-x)^2}$; слѣдовательно полу-

чимъ $\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{a-x^2}$, откуда $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{x}{a-x}\right)^2 = m$ положивъ $\alpha = m\beta$; извлекши корень, найдемъ наконецъ

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}\pm 1} \text{ или } x = \frac{a}{m-1}(m \mp \sqrt{m}).$$

Вообще должно избѣгать двойной неизвлекомости обоихъ членовъ дроби (чл. 65), особенно же неизвлекомости знаменателя. Здѣсь числитель и знаменатель умноженный на $\sqrt{m}\mp 1$, отъ чего (чл. 97, 5-е) и получили для знаменателя $m-1$, а для числителя $a\sqrt{m}(\sqrt{m}\mp 1)$, или $\frac{a}{m-1}(m\mp\sqrt{m})$, что и впредь будемъ дѣлать въ подобныхъ случаяхъ.

VIII. Сыскать число x, которое будучи приложено порознь къ числителю и къ знаменателю данной дроби, давало бы два выраженія, изъ коихъ первое было бы въ k разъ болѣе второго, получимъ

$$\frac{a+x}{b} = \frac{ka}{b+x},\ x^2+(a+b)x = ab(k-1);$$

посему $x = -\frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[a-b)^2+4abk]}$.

IV. ОБЪ ОТНОШЕНІЯХЪ.

О пропорціяхъ.

141. 1-е. Ариѳметическая пропорція $a.b:c.d$ выражается уравненіемъ $a-b=c-d$; изъ коего $a+d=c+b$. Въ непрерывной же пропорціи $\div a.b.d$ будетъ $2b=a+d$. (См. чл. 72).

2-е. Изъ пропорціи $a:b::c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; получимъ $ad=bc$, откуда $d=\frac{bc}{a}$. Если пропорція непрерывная $::a:b:d$, то $b=\sqrt{(ad)}$ (см. чл. 72).

5-е. Изъ урав $a^2-b^2=m-m^2$ или $(a+b)(a-b)=m(1-m)$, будетъ пропорція $\frac{a+b}{m}=\frac{1-m}{a-b}$. Также $1-x^2=a$ даетъ $\frac{1+x}{1}=\frac{a}{1-x}$ (см. чл. 72, 4-е.)

4-е. Придадимъ $\pm m$ къ обѣимъ частямъ уравненія $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; получимъ $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$, ошкуда $\frac{a\pm mb}{c\pm md}=\frac{b}{d}$. Если $m=1$, то будетъ $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$ (см. чл. 73).

5-е. Пусть $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots$ есть рядъ равныхъ отношеній, такъ что $\frac{a}{b}=q$, или $a=bq$, $c=dq$, $e=fq\ldots$

Сложивъ всѣ сіи уравненія, получимъ (чл. 73, 3-е)

$$a+c+e\ldots=q(b+d+f+\ldots);$$

ошкуда $$\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}=q=\frac{a}{b}.$$

6-е. Если $a:b::c:d$, то

$$a^m:b^m::c^m:d^m,\ \sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}.$$

Объ Ариѳметическихъ прогрессіяхъ.

142. Пусть будетъ прогрессія $\div a.b.c\ldots.i.k.l$, коей разность есть d, а число членовъ n; составятся $(n-1)$ уравненій. $b=a+d$, $c=b+d\ldots l=k+d$; которыя сложивъ, получимъ $l=a+d(n-1)$, какъ то извѣстно изъ чл. 83-го. Сіе выраженіе величины $n^{го}$ члена прогрессіи есть *общій видъ каждаго члена;* ибо изображаетъ по очереди всѣ члены, полагая $n=1, 2, 3\ldots$.

Назовемъ s *сумму* прогрессіи, т. е. сумма ея n первыхъ членовъ; получимъ

$$s=a+b+c+\ldots.+i+k+l,$$

или $$s=a+(a+d)+(a+2d)\ldots+a+(n-1)d,$$

и также $$s=l+(l-d)+(l-2d)\ldots+l-(n-1)d,$$

написавъ вторую часть въ обратномъ порядкѣ. Сложимъ сіи уравненія; и какъ соотвѣтствующіе члены производятъ тоже сумму, то очевидно, что $2s$ будетъ равно $a+l$ взятой столько разъ, сколько n содержитъ единицъ; посему $s=\frac{1}{2}n(a+l)$. Вообще замѣтимъ, *что сумма* $a+l$ *крайнихъ членовъ та же, какъ и сумма членовъ равно отстоящихъ отъ оныхъ, и всѣ вое болше средняго члена, когда число членовъ нечетное.*

143. Изъ сихъ двухъ уравненій

$$l=a+d(n-1) \text{ и } s=\tfrac{1}{2}n(a+l)$$

мы можемъ опредѣлить два какія-нибудь изъ пяти количествъ a, l, d, n и s, когда извѣстны три другія.

Вотъ нѣкоторыя задачи для приложенія сей теоріи:

I. Опредѣлить n, когда извѣстны a, d и s? Выключивъ l, получимъ $s=an+\frac{1}{2}dn(n-1)$; отсюда

$$n=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\pm\sqrt{\left\{\frac{2s}{d}+\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\right)^2\right\}}.$$

На пр: всякое, свободно падающее тѣло, въ первую секунду своего паденія пролетаетъ 4,9 метра, во вторую въ-трое болѣе, въ третью въ-пятеро.... Спрашивается: во сколько секундъ пролетитъ оно 400 метровъ (См. *Мех. Фран.* чл. 157). Изъ прогрессіи $\div 4{,}9\,.\,3\times 4{,}9\,.\,5\times 4{,}9\ldots$, въ коей $s=400$; $a=4{,}9$; $d=2a=9{,}8$; получимъ

$n=\sqrt{\frac{s}{a}}=\sqrt{\frac{400}{4{,}9}}$, отсюда $n=9'',03$ и l – почти 83,6 м.

II. Сколько разъ пробьютъ часы въ продолженіи 12-ти часовъ? Если они бьютъ каждый часъ, то будетъ $1+2+3+\ldots+12$; отсюда $s=6\times 13=78$. Если же бьютъ каждые полчаса, то получимъ $2+3+4\ldots+13$ и $s=90$, и проч.

III. Дана куча ядеръ расположенная въ Арѳметической прогрессіи и составленная изъ 18-ти рядовъ, изъ коихъ въ каждомъ двумя ядрами болѣе предыдущаго; спрашивается число ядеръ послѣдняго ряда и

всей кучи, зная, что въ первомъ ряду находящся 3 ядра, $a=3$, $n=18$, $d=2$; посему $l=37$, $s=360$.

IV. Между двумя данными числами a и l вставить m среднихъ Ариѳм. пропорціональныхъ. Поелику $m+2=n$, то

$l=a+d(m+1)$, ошкуда $d=\frac{l-a}{m+1}$, какъ въ чл. 85-мъ.

О Геометрическихъ прогрессіяхъ.

144. Пусть будетъ прогрессія $\div\div a:b:c:d\ldots i:l$, которой знаменатель содержанія есть q; составившся $n-1$ уравненій

$$b=aq,\ c=bq,\ d=cq\ldots l=iq;$$

перемноживъ оныя и уничтоживъ общіе производители, получимъ $l=aq^{n-1}$, какъ въ чл. 84-мъ, что и будетъ *общее выраженіе каждаго члена.* Всякая прогрессія можетъ быть представлена въ видѣ

$$\div\div a:aq:aq^2:aq^3\ldots aq^{n-1};$$

посему цѣлыя и послѣдовательныя степени одного количества q находящся въ Геометрической прогрессіи. Тоже можно сказать о всякомъ рядѣ членовъ, коихъ показатели составляютъ Ариѳм. прогрессію, какъ на пр: рядъ $bx^m+bx^{m+h}+bx^{m+2h}+\ldots$, который обратится въ первый, положивъ $a=bx^m$, $q=x^h$.

Сложивъ наши $n-1$ уравненій, получимъ

$$(b+c+d\ldots+l)=(a+b+c\ldots+i)\,q.$$

И такъ, означивъ чрезъ s сумму членовъ, будетъ

$(b+c+d\ldots+l)=s-a$, $a+b+c\ldots+i=s-l$;

посему $s-a=(s-l)q$ или $s=\frac{lq-a}{q-1}$.

Въ уменьшающейся прогрессіи все вышесказанное справедливо, только $q<1$, но уравненіе существуетъ. По мѣрѣ же продолженія ряда, сумма s принятыхъ членовъ болѣе и болѣе приближается къ суммѣ S всей

прогрессіи: положимъ, что α есть разность $S-s$, которая безконечно уменьшается; послѣдній членъ l въ тоже время сдѣлается произвольно малымъ, и можно означить чрезъ β количество $\frac{lq}{1-q}$; посему $S-\alpha=\frac{a}{1-q}-\beta$ или наконецъ $S=\frac{a}{1-q}$ (чл. 113). И такъ нашли, какъ на стр. 151-й, всю сумму безконечной прогрессіи, которой первой членъ есть a, и знаменатель содержанія $q<1$. Очевидно, что получили бы тоже, положивъ $l=0$, какъ означающее безконечно малое количество.

Посредствомъ уравненій $l=aq^{n-1}$, $s-a=(s-l)q$ можно разрѣшить всѣ задачи, въ которыхъ, по даннымъ тремъ изъ пяти чиселъ a, l, n, q и s, требуется опредѣлить два другія. Впрочемъ надобно замѣтить, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ не иначе можно опредѣлить искомыя количества, какъ посредствомъ особеннаго способа, который будетъ изложенъ ниже сего. На пр: чтобы по даннымъ a, n и s, отыскать q, должно рѣшить $n^{\text{й}}$ степени ураен. $aq^n-sq+s=a$. Сверхъ того, если неизвѣстенъ показатель n, то должно прибѣгнуть къ логариѳмамъ, чл. 147, 3-е.

О логариѳмахъ.

145. Станемъ измѣнять x въ ураен. $y=a^x$, и замѣтимъ соотвѣтствующія измѣненія y.

1-е. Если $a>1$, положивъ $x=0$, получимъ $y=1$; когда $x=1$, то $y=a$. По мѣрѣ возрастанія x отъ 0 до 1 и до безконечности, y будетъ возрастать отъ 1 до a, и потомъ до безконечности; такъ что если x перейдетъ всѣ средніе величины, слѣдуя *закону непрерывности*, то y будетъ тоже возрастать, но съ гораздо большею скоростію. Взявъ для x отрицательныя величины, получимъ $y=a^{-x}$ или (чл. 131.

$y = \frac{1}{a^x}$. И такъ здѣсь чѣмъ болѣе возрастаетъ x, тѣмъ болѣе y уменьшается; такъ что по мѣрѣ оприцательнаго увеличиванія x, y уменьшается отъ 1 до 0, которой соотвѣтствуетъ $x = \infty$.

2-е. Если $a < 1$, то сдѣлавъ $a = \frac{1}{b}$, b будетъ > 1, и получимъ $y = \frac{1}{b^x}$ или $y = b^x$, смотря потому, положительнымъ, или оприцательнымъ возмется x. И такъ возвращаемся къ тому же случаю, съ тою только разностію, что x будетъ положительнымъ, когда $y < 1$, и оприцательнымъ для $y > 1$.

3-е. Если $a = 1$, то и $y = 1$, какой бы x ни былъ.

И такъ когда a не равно единицѣ, то можно сказать, что *для* x *всегда найдется такая величина, которая обращаетъ* a^x *въ какое-нибудь данное число* y. Безпрестанное употребленіе превосходныхъ свойствъ уравненія $y = a^x$ требуетъ, для избѣжанія многосложныхъ выраженій, особенныхъ наименованій его частей. Показатель x называется *логариѳмомъ числа* y, постоянное же число a *основаніемъ*. Посему *логариѳмъ числа есть показатель степени, въ которую должно возвысить основаніе, чтобы произвести сіе число.*

Что касается до основанія a, то оно произвольно, и когда напишемъ $x = \log. y$, для означенія, что x есть логариѳмъ числа y, или что $y = a^x$, тогда основаніе a подразумѣвается; ибо будучи одинъ разъ избрано, оно предполагается постояннымъ. Въ случаѣ же измѣненія, должно означить новое основаніе, т. е. показать *систему логариѳмовъ*. Такимъ образомъ $10^3 = 1000$; $2^5 = 32$, означаютъ, что логариѳмъ 1000 есть 3, а 32-хъ есть 5; но въ первомъ случаѣ принято за основаніе 10, а во второмъ 2.

146. Отсюда извлекаются многія слѣдствія.

1-е. *Во всякой системѣ логариѳмовъ нуль есть логариѳмъ единицы, и логариѳмъ основанія* a *есть единица.*

2-е. *Если основаніе* $a > 1$, *то логариѳмы чиселъ* > 1 *положительные, а прочихъ отрицательные. Противное будетъ, когда* $a < 1$.

3-е. Если основаніе постоянно, то всякое число имѣетъ одинъ только дѣйствительный логариѳмъ; но очевидно, что логариѳмъ сего числа будетъ другой при каждомъ измѣненіи основанія, такъ что *всякое число имѣетъ множество дѣйствительныхъ логариѳмовъ.* На пр: $9^2 = 81$, $3^4 = 81$, здѣсь 2 и 4 суть логариѳмы того же числа 81, смотря потому, будетъ ли основаніе 9 или 3.

4-е. Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствительныхъ логариѳмовъ, ибо въ ряду всѣхъ величинъ x, начиная отъ $-\infty$ до $+\infty$, находимъ для y только положительныя числа отъ 0 до $+\infty$.

Сочиненіе логариѳмическихъ таблицъ состоитъ въ опредѣленіи всѣхъ величинъ x, соотвѣтствующихъ $y = 1, 2, 3 \ldots$ въ уравненіи $y = a^x$. Если положимъ $a^\alpha = m$, то сдѣлавъ

$$x = 0,\quad \alpha,\quad 2\alpha,\quad 3\alpha,\quad 4\alpha,\quad 5\alpha \ldots .$$ *логариѳмы,*

получимъ

$$y = 1,\quad m,\quad m^2,\quad m^3,\quad m^4,\quad m^5 \ldots .$$ *числа;*

и такъ логариѳмы возрастаютъ въ Ариѳметической прогрессіи, числа же въ Геометрической прогрессіи, 0 и 1, суть первые члены; разность и знаменатель содержанія произвольныя α и m. Посему можно разсматривать величины x и y, которыя удовлетворяютъ уравненію $y = a^x$, какъ составляющія сіи двѣ прогрессіи; что согласуетъ оба опредѣленія, данныя логариѳмамъ (чл. 85 и 145).

Въ послѣдствіи знакъ Log будемъ употреблять для значенія логариѳма числа, при какой-нибудь си-

смемъ, а знакъ log (чл. 90) для шабличныхъ или Бриговыхъ логарнѳмовъ.

147. Докажемъ свойство логарнѳмовъ Алгебранчески.

1-е. Пусть x и x' суть логарнѳмы чиселъ y и y' или $x = \text{Log}\, y$, $x' = \text{Log}\, y'$; слѣд: $a^x = y$, $a^{x'} = y'$; перемноживъ и раздѣливъ сіи два уравненія одно на другое, получимъ

$$a^{x+x'} = yy', \quad a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

Но изъ опредѣленія слѣдуетъ, что показатели $x + x'$ и $x - x'$ суть логарнѳмы yy' и $\frac{y}{y'}$.

Посему $$\text{Log}\, y + \text{Log}\, y' = \text{Log}\,(yy'),$$

$$\text{Log}\, y - \text{Log}\, y' = \text{Log}\left(\frac{y}{y'}\right).$$

2-е. Если уравн. $y = a^x$ возвысится въ $m^{\text{ю}}$ степень, или извлечется изъ него $m^{\text{й}}$ степени корень, то будетъ $y^m = a^{mx}$, $\sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}$: а по опредѣленію $mx = \text{Log}(y^m)$, $\frac{x}{m} = \text{Log}\sqrt[m]{y}$; посему

$$\text{Log}\, y^m = m\,\text{Log}\, y, \quad \text{Log}\sqrt[m]{y} = \frac{\text{Log}\, y}{m};$$

все сіе согласно съ предложеннымъ въ чл. 86 и 87.

3-е. Для рѣшенія уравн. $c = a^x$, въ коемъ c и a суть данныя и x неизвѣстное, сравнивъ логарнѳмы обоихъ членовъ, получимъ $\text{Log}\, c = x\,\text{Log}\, a$; откуда

$$x = \frac{\text{Log}\, c}{\text{Log}\, a}.$$

Посему можно *сыскать величину показателя* n въ уравн. $l = aq^{n-1}$ (чл. 144), принадлежащемъ Геометрической прогрессіи.

$\text{Log}\, l = \text{Log}\, a + (n-1)\,\text{Log}\, q$, откуда $n = 1 + \frac{\text{Log}\, l - \text{Log}\, a}{\text{Log}\, q}$.

Въ уравненіи $\text{A}a^x + \text{B}a^{x-b} + \text{C}a^{x-c} \ldots = \text{P}$; гдѣ x есть неизвѣстное, будетъ $a^x\left(\text{A} + \frac{\text{B}}{a^b} + \frac{\text{C}}{a^c} + \ldots\right) = \text{P}$, или $\text{Q}a^x = \text{P}$;

откуда $$x = \frac{\log P - \log Q}{\log a}.$$

Если въ уравненіи $a^z = b$, z зависимо отъ неизвѣстнаго x, и $z = Ax^m + Bx^{m-1}$; то какъ $z = \frac{\log b}{\log a}$ = извѣстному числу K, слѣд. останется рѣшить уравненіе $m^{ой}$ степени, $K = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots$ Пусть будетъ напр.: $4.\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+4} = 9$; откуда $x^2 - 5x + 4 \log\frac{2}{3} = \log\frac{9}{4}$; посему $x^2 - 5x + 4 = -2$, уравненіе второй степени, изъ коего $x = 2$ и $= 3$.

4-е. Пусть будутъ два числа y и $y + m$; разность ихъ логариѳмовъ, взятыхъ по одной какой-нибудь системѣ, есть

$$\mathrm{Log}(y+m) - \mathrm{Log}\,y = \mathrm{Log}\left(\frac{y+m}{y}\right) = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{m}{y}\right);$$

количество, приближающееся къ Log 1 или къ нулю, по мѣрѣ уменьшенія $\frac{m}{y}$ и которое тѣмъ менѣе, чѣмъ y болѣе. Посему, разность между *логариѳмами двухъ чиселъ тѣмъ менѣе, чѣмъ сіи числа болѣе и ближе одно къ другому;* что согласно съ сказаннымъ въ чл. 91-мъ, III.

148 Вычисливъ логарио. таблицы по какому-нибудь основанію a, можно перемѣнить систему логариѳмовъ, и вычислить другія таблицы по новому основанію b. Пусть $c = b^x$, гдѣ x есть логариѳмъ c по основанію b; взявъ логариѳмъ по извѣстному основанію a, будетъ $x = \frac{\log c}{\log b} = \log c \times \left(\frac{1}{\log b}\right)$: и такъ, *логариѳмъ числа* c, *по основанію* b, *есть частное отъ раздѣленія* log c *на* log b, *взятыхъ по извѣстному основанію* a. Посему, чтобы получить x, должно умножить log c на $\frac{1}{\log b}$; сей послѣдній производитель постоянень для всякаго числа c, и называется *модулемъ*; т: е: что раздѣливъ логариѳмы одного и того же числа c, взятыхъ по какимъ-нибудь двумъ

системамъ логарѳмовъ, получимъ неизмѣняемое частное, какое бы c ни было, которое и будетъ модулемъ, или постояннымъ производителемъ, служащимъ для перевода логарѳмовъ съ одного основанія на другое.

Если случится, что найдутъ удобнѣе основанію $= 10$, предпочесть другую систему логарѳмовъ, то легко будетъ съ помощію однѣхъ логарѳ. таблицъ, каковы Бриггсовы, вычислить логарѳмъ всякаго числа по сему новому основанію. На пр: лог. $\frac{2}{3}$ взятой по основанію $\frac{5}{7}$, будетъ $\frac{\text{Log } \frac{2}{3}}{\text{Log } \frac{5}{7}} = \frac{\text{Log } 2 - \text{Log } 3}{\text{Log } 5 - \text{Log } 7}$: гдѣ можно принять всякое число за основаніе, и если возмемъ его $= 10$, то все сдѣлается извѣстнымъ; и получимъ $\frac{-0,17609125}{-0,14612804} = 1,2050476$ для искомаго логарѳма.

Такимъ же образомъ лог. $\frac{2}{3}$, по основанію $\frac{3}{2}$ будетъ $\frac{\log \frac{2}{3}}{\log \frac{3}{2}} = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3 - \log 2}$ или $= -1$, что впрочемъ очевидно; ибо уравненіе $y = a^x$, обращаясь здѣсь въ $\frac{2}{3} = (\frac{3}{2})^{-x} = (\frac{2}{3})^{-x}$ и ясно, что $x = -1$.

149. Полезно пріобрѣсти навыкъ въ употребленіи логарѳмовъ при алгебраическихъ вычисленіяхъ; вотъ различные примѣры:

1-е. $\log(a.b.c.d\ldots) = \log a + \log b + \log c + \log d\ldots,$

2-е. $\log\left(\frac{abc}{de}\right) = \log a + \log b + \log c - \log d - \log e,$

3-е. $\log(a^m.b^n.c^p\ldots) = m\log a + n\log b + p\log c\ldots,$

4-е. $\log\left(\frac{a^m.b^n}{c^p}\right) = m\log a + n\log b - p\log c,$

5-е. $\log(a^2 - x^2) = \log[(a+x)(a-x)] = \log(a+x) + \log(a-x),$

6-е. $\log\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}\log(a+x) + \frac{1}{2}\log(a-x),$

7-е. $\log a^3\sqrt[4]{a^3} = 3\log a + \frac{3}{4}\log a = \frac{15}{4}\log a.$

8-е. $\log \sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n}\log(a-x) + \frac{m}{n}\log(a^2+ax+x^2)$. (стр. 151-я).

Прибавя и вычтя ax изъ шрехчленнаго количества, получимъ $(a+x)^2 - ax$; если положимъ $z^2 = ax$, то z легко опредѣлишь посредствомъ логарнѳмовъ, и найдемъ $(a+x)^2 - z^2$, или $(a+x+z)(a+x-z)$; посему $\log \sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n}[\log(a-x)+\log a+x+z, + \log(a+x-z)]$. Сіе вычисленіе разлагаешъ $(a^3 - x^3)$ на его производишели и позволяешъ употребленіе логарнѳмовъ.

9-е. $\sqrt{(a^2+x^2)}$, положивъ $2ax=z^2$ будешъ $\sqrt{[a+x,^2-z^2]}$,

$$\log \sqrt{(a^2+x^2)} \quad \frac{1}{2}[\log {}'a+x+z) + \log(a+x-z)].$$

10-е. $\log \frac{\sqrt{(a^2 \cdot x^2)}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}[\log(a-x) - 3\log(a+x)]$.

11-е. Чшобы вставишь m среднихъ Геом. членовъ между a и l, должно въ уравненіи $l \quad aq^{n-1}$ (ч. 144), положишь $n-m+2$, ошкуда знаменашель содержанія $q = \sqrt[m+1]{\left(\frac{l}{a}\right)}$ и $\log q = \frac{\log l - \log a}{m+1}$. Логарнѳмы различныхъ членовъ $aq, aq^2 \ldots$ суть $\log a + \log q$, $\log a + 2\log q \ldots$ Посему, чшобы вставишь 11 среднихъ членовъ между 1 и 2, какъ здѣсь $\log a = 0$, то получимъ $\log q = \frac{1}{12} \times \log 2 = 0{,}0250858$ и $q = 1{,}059463$; логарнѳмы послѣдовашельныхъ членовъ суть $2\log q$, $3\log q \ldots$, и прогрессія будешъ (это есшь шакъ называемая *Génération harmonique* de Rameau)

$\div\div 1 : 1{,}059463 : 1{,}122461 : 1{,}189207 : \ldots : 1{,}88774 : 2.$

12-е. Принимая a за основаніе, будешъ $a^{\log z} = z$; ибо по опредѣленію логарнѳмовъ въ уравн. $a^y = z$, y есшь $\log z$.

Также $\quad a^{h\log z} = a^{\log(z^h)} = z^h$.

13-е. Пусшь шребуешся опредѣлишь x въ уравн.

$b^{n-\frac{a}{x}} = c^{mx} \cdot f^{x-p}$, взявъ логарифмы обѣихъ частей, получимъ $\left(n - \frac{a}{x}\right)\log b = mx \cdot \log c + (x-p)\log f$: остается рѣшить уравн. 2-й степени

$$(m\log c + \log f)\,x^2 - (n\log b + p\log f)\,x + a\log b = 0.$$

14-е. $c^{mx} = ab^{nx-1}$ даетъ $x = \dfrac{\log a - \log b}{m\log c - n\log b}$.

15-е. Число жителей нѣкотораго города возрастаетъ ежегодно $\frac{1}{30}$; спраш. сколько въ немъ будетъ жителей по прошествіи вѣка, полагая настоящее число 100 000? Пусть $n = 100\,000$; чрезъ годъ число жителей будетъ $n + \frac{1}{30}n = n \cdot \frac{31}{30} = n'$. Въ концѣ слѣдующаго года n' обратится въ $n' \cdot \frac{31}{30} = n\left(\frac{31}{30}\right)^2 \ldots$. Такимъ образомъ найдемъ, что чрезъ 100 лѣтъ число жителей будетъ

$$n\left(\frac{31}{30}\right)^{100} = x = 2\,654\,874,$$

какъ то явствуетъ изъ вычисленія. Если ежегодное приращеніе числа жителей будетъ $\frac{1}{r}$, то найдемъ также, что первоначальное число n жителей чрезъ 9 лѣтъ, обратится въ $x = n\left(\frac{1+r}{r}\right)^9$. За неизвѣстное можно взять которое-нибудь изъ количествъ x, n, r или q, полагая прочія три данными, и получимъ

$$\log x - \log n + q[\log(1+r) - \log r],\quad \log n - \log x - q[\log(1+r) - \log r],$$

$$q = \frac{\log x - \log n}{\log(1+r) - \log r},\quad \log\left(1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{\log x - \log n}{q}.$$

log 31 = 1,49136169
− log 30 = 1,47712125
0,01424044
взятое 100 разъ 1,424044
log n = 5,000000
log x = 6,424044

Задачи зависящія отъ пропорцій.

150. *Правило процентовъ.* Пусть a есть капиталъ, положенный на t мѣсяцовъ или t лѣтъ; i проценты со 100 руб. въ мѣсяцъ или въ годъ. Какъ капиталъ a в время t находящся въ обращномъ содержаніи (чл. 77), то будетъ слѣдующая задача: если 100 руб. прино-

снимъ i процентовъ въ мѣсяцъ или въ годъ, то что дастъ сумма at въ тоже самое время? посредствомъ прямаго тройнаго правила, получимъ, что искомые проценты x,

$$x = \frac{ati}{100} = \frac{at}{r};$$

гдѣ r (le denier) означаетъ сумму, приносящую 1 руб. процентовъ въ мѣсяцъ или въ годъ (чл. 80). Отношеніе между сими двумя способами опредѣленія числа процентовъ получается изъ урав. $ri = 100$.

По вышенайденной формулѣ можно опредѣлить одно изъ чиселъ a, t, x и i или r, когда извѣстны три прочія. На пр: найдемъ, что 10000 руб., положенные на 7 мѣсяцовъ по $\frac{1}{8}$ со $\frac{0}{0}$ въ мѣсяцъ, дадутъ 233,33 руб. процентовъ и что 8000 руб. должно бы положить на $7\frac{1}{2}$ мѣсяцовъ, чтобы получить 150 руб. процентовъ, полагая по $\frac{1}{4}$ со $\frac{0}{0}$ въ мѣсяцъ.

Когда къ капиталу будутъ прикладываться ежегодные проценты, то произойдетъ слѣдующее: Если r руб. приносятъ 1 руб. въ мѣсяцъ или въ годъ, то капиталъ a возрастетъ количествомъ $\frac{a}{r}$, и обратится въ

$$a' = a + \frac{a}{r} = a\left(1 + \frac{1}{r}\right) = aq,$$

сдѣлавъ для краткости $\frac{1+r}{r} = q$.

Но сей новый капиталъ a' на слѣдующій мѣсяцъ или годъ обратится также въ $a'q$ или aq^2. И такъ, получимъ послѣдовательно aq^3, aq^4 ... и чрезъ t сихъ же временъ, *умножившійся капиталъ съ процентами* будетъ

$$x = aq^t = a\left(\frac{1+r}{r}\right)^t.$$

Изъ сего уравненія найдемъ которое-нибудь изъ четырехъ чиселъ a, t, x и r или q, когда извѣстны

при другія. Если желаемъ опредѣлить проценты, полагая по сколько-то со ста, то сдѣлаемъ $ri = 100$. На пр. нѣкто назначилъ 10000 руб., чтобы заплатить долгъ въ 12000 руб., для чего и отдалъ свой капиталъ по 5-ти процентовъ со ста въ годъ, съ присоединеніемъ къ оному ежегодныхъ процентовъ: спрашивается, чрезъ сколько времени составится желаемая сумма? Какъ $i = 5$, $r = 20$, $q = \frac{21}{20}$, то будетъ

$$12000 = 10000 \times (\tfrac{21}{20})^t, \text{ или } 6 = 5 \times (\tfrac{21}{20})^t,$$

откуда получимъ величину показателя t, по способу чл. 147,3-е; а именно, $t = 3$ годамъ и около 9 мѣсяцовъ.

151. *Срочныя уплаты долга*, (Annuités) такъ называется уплата капитала a съ процентами, такимъ образомъ разчисленная, что платя ежегодно одинаковую сумму x, оною бы уплачивались проценты и часть капитала, который слѣдовательно мало помалу уменьшаясь, обратился бы чрезъ опредѣленное время въ нуль.

Чрезъ годъ капиталъ будетъ aq; уплатя x, останется долгу только $a' = aq - x$. Послѣ второй уплаты x, a' обратится также въ $a'q - x$ или въ $aq^2 - qx - x$: продолжая такимъ образомъ множить на q и вычитать x, дабы получить остающійся долгъ послѣ каждаго изъ послѣдующихъ годовъ, наконецъ найдемъ послѣ t сдѣланныхъ уплатъ въ x рубл., что еще останется уплатить должнику по прошествіи t лѣтъ. (чл. 99, 144).

$$z = aq^t - xq^{t-1} - xq^{t-2} \ldots - x$$

или $z = aq^t - x(q^{t-1} + q^{t-2} \ldots + 1) = aq^t - x\left(\frac{q^t - 1}{q - 1}\right)$,

или $z = (a - xr)\left(\frac{1 + r}{r}\right) + xr$,

полагая, что $qr = 1 + r$. Если должникъ уплатилъ весь долгъ, то $z = 0$ и получимъ

$$x = \frac{aq^t(q-1)}{q^t-1} = \frac{a}{r} \times \frac{(1+r)^t}{(1+r)^t - r^t}.$$

Впрочемъ, здѣсь можно принимать за неизвѣстное которое-нибудь (стр. 169-я, изъ количествъ x, a, q, r и t, полагая прочія данными. Употребленіе логарифмовъ и въ такомъ случаѣ очень удобно, и даже необходимо. Если должно рѣшить уравненіе относительно показателя t, то найдемъ $q^t(x-a-aq) = x$, откуда (чл. 147, 3-е)

$$t = \frac{\log x - \log(x+a-aq)}{\log q} = \frac{\log x + \log r - \log(rx-a)}{\log(1+r) - \log r}$$

Также, принимая за неизвѣстное x или a, положимъ

$$y = \frac{rx-a}{x};$$

откуда $$x = \frac{a}{r-y}, \quad a = x(r-y),$$

уравненія, посредствомъ которыхъ опредѣлится x или a, когда извѣстенъ y. И такъ, вставя въ вышенайденное выраженіе для x его величину, получимъ $(1+r)^t y - r^{t+1}$, откуда

$$\log y = (t+1)\log r - t\log(1+r).$$

На сей теоріи основаны срочныя уплаты занятаго капитала и процентовъ, уничтожающихся по смерти заимодавца, и которыя называются *пожизненными*. Положимъ, что заимодавецъ долженъ еще прожить t лѣтъ, и что онъ отдалъ капиталъ a: спрашивается, какую сумму x надлежитъ ему получать ежегодно, дабы по истеченіи сихъ t лѣтъ онъ не имѣлъ болѣе права ни на какую сумму? Сія уплата опредѣлена вышенайденною величиною x. Если на пр: проценты со 100 руб. есть 5 руб. (5 со 100, или 1 руб. съ 20 руб.), то $r = 20$; и взявъ $a = 100$ руб. за капиталъ, получимъ

$$\log y = 1{,}30105 - t \times 0{,}02119, \quad x = \frac{100}{20-y}.$$

Справедливо, что не возможно предузнать, сколько долженъ еще жить занмодавецъ; однако сіе число лѣтъ около того опредѣляется таблицами о смертности: и хотя сей способъ можетъ быть ошибоченъ, но въ сложности, для большаго числа людей онъ дѣлается точнымъ, ибо именно чѣмъ одни проживутъ болѣе предполагаемаго числа лѣтъ, тѣмъ другіе менѣе. Опытомъ дознано, сколько лѣтъ вѣроятно остается прожить человѣку, коего возрастъ извѣстенъ. Первая строка выражаетъ настоящія лѣта, а вторая число t лѣтъ, которое вѣроятно остается прожить.

1. 5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. 75. 80 лѣтъ
37. 45½. 43. 39. 35½. 32½. 29½. 26. 23. 20. 17. 14. 11. 8⅔. 6½. 5. 3½ года.

На сей-то вѣроятности основано опредѣленіе процентовъ пожизненныхъ уплатъ. И такъ человѣкъ 40 лѣтъ, надѣясь еще на 25 года существованія, долженъ положить капиталъ на всю жизнь по 7,4 процента со ста въ годъ; ибо $t = 25$, даетъ для $\log y = 0{,}81366$, y около 6,5; откуда $x = 7{,}4$. Выгоды различныхъ членовъ общества, извѣстныхъ подъ названіемъ *тонтиновъ* (*tontines*), основаны также на сихъ правилахъ. (См. *l'Annuaire du Bur. des Long.*)

152. *Правило учета.* Пусть будетъ a капиталъ, i проценты со 100 руб. въ мѣсяцъ, r сумма дающая 1 руб. проц., t число мѣсяцовъ, $\frac{ati}{100}$ суть проценты со всего капитала; и такъ, для *неточнаго учета*, по болѣе употребительнаго, сумма, которую должно заплатить вмѣсто капитала a, будетъ

$$x = a\left(1 - \frac{ti}{100}\right) = a\left(1 - \frac{t}{r}\right).$$

Для *точнаго учета* должно послать слѣдующую пропорцію: какъ $100 + ti$ приводится ко 100, то во что обратится a? Откуда получимъ:

$$x = \frac{100\,a}{100 + ti} = \frac{ar}{r + i}$$

Если же сумма S потребуется только чрезъ t мѣсяцевъ и возьмутъ въ счетъ проценты на проценты въ теченіи сего времени, то должно будетъ прибѣгнуть къ формулѣ стр. 258-й и найдемъ, что капиталъ s обратится въ

$$a = S\left(\frac{r}{1+r}\right)^t = \frac{S}{q^t}.$$

153. *Правило ложнаго положенія.* Пусть уравненіе $ax = b$ выражаетъ связь между частями какого-нибудь вопроса; если дадимъ x произвольную величину s и предположимъ, что оная удовлетворяетъ условіямъ задачи, то случайно только можемъ получить $as = b$: и такъ, пусть $as = c$. Раздѣливъ уравненіе $as = c$ на $ax = b$, будетъ $\frac{c}{b} = \frac{s}{x}$: посему *полученная величина относится къ истинной, какъ произвольно взятое число къ искомому.*

Найдемъ число, коего $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ вмѣстѣ взятыя составляютъ 456. Положимъ, что сіе число есть 200; его половина, четверть и пятая доля, дадутъ 190 вмѣсто 456; и такъ 200 не есть искомое число, почему и составимъ пропорцію

$$190 : 456 :: 200 : x, \text{ откуда } x = 480.$$

Сколько потребно времени для наполненія бассейна, посредствомъ четырехъ трубъ, изъ коихъ первая наполняетъ его въ 2 часа, вторая въ 3, третья въ 5 и четвертая въ 6 часовъ. Положимъ, что для сего нужно 1 часъ, то первая наполнила бы въ сіе время половину бассейна, вторая $\frac{1}{3}$, третья $\frac{1}{5}$ и четвертая $\frac{1}{6}$; но какъ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{5}$, вмѣсто 1; посему положеніе 1 часа было ложно; составивъ же пропорцію $\frac{6}{5} : \frac{5}{6} :: 1 : x$, получимъ $x = \frac{5}{6}$ часа = 50-ти минутамъ.

Хотя сей способъ можетъ быть примѣненъ къ правилу товарищества, процентовъ и проч., но посредствомъ онаго нельзя рѣшать всѣхъ задачъ первой степени; ибо общій видъ оныхъ есть $ax+b=cx+d$. Если положеніе $x=s$ не выполняетъ равенства между $as+b$ и $cs+d$, то произойдетъ погрѣшность e, такъ что $as+b-(cs+d)=e$; изъ чего вычтя $ax+b-cx+d=0$, получимъ $(a-c)\,s-x)=e$. Другое положеніе s', вводящее погрѣшность e', дало бы $(a-c)\,s'-x)=e'$: раздѣливъ сіи выраженія, получимъ:

$$\frac{s-x}{s-x}=\frac{e}{e'},\ \text{откуда}\ x=\frac{es'-e's}{e-e'}.$$

Такъ, *должно умножить 1-ю погрѣшность на 2-е положеніе и обратно, вычесть сіи произведенія одно изъ другаго, обращая вниманіе на знаки погрѣшностей, потомъ остатокъ раздѣлить на разность погрѣшностей; частное будетъ искомое число.* Въ семъ состоитъ правило двойнаго ложнаго положенія, которое можетъ быть приложено ко всѣмъ задачамъ первой степени.

Въ послѣднемъ нашемъ вопросѣ, положеніе $x=1$ час. дало $\frac{6}{5}$ и слѣдовательно погрѣшность составила въ $+\frac{1}{5}$. Сдѣлавъ $x=\frac{1}{2}$ ч., получимъ $\frac{3}{5}$ и погрѣшность будетъ $-\frac{2}{5}$; написавъ сіи числа, какъ представлено на сторонѣ, умножимъ ихъ на-крестъ, и произведенія вычтемъ одно изъ другаго, положимъ $\frac{1}{10}+\frac{2}{5}$ или $\frac{1}{2}$; разность погрѣшностей есть $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ или $\frac{3}{5}$; наконецъ раздѣливъ $\frac{1}{2}$ на $\frac{3}{5}$, найдемъ, что $x=\frac{5}{6}$.

Полож.	Погрѣшности.
1 часъ	$+\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$

Отцу 40 лѣтъ, сыну его 12; спрашиваютъ, чрезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вдвое старѣе сына (стр. 168-я)? Положимъ чрезъ 5 лѣтъ: отцу тогда будетъ 45 лѣтъ,

а сыну 17; но утроивъ 17, получимъ вмѣсто 45-ти лѣтъ 51 годъ, слѣдовательно 6-ю годами болѣе. Положивъ 1 годъ, погрѣшность будетъ — 2. Разность взаимныхъ произведеній погрѣшностей на положеніе есть 16, которую раздѣливъ на разность погрѣшностей или на 8, получимъ 2: и такъ чрезъ два года отецъ будетъ втрое старѣе сына.

Полож.	Погрѣшности.
5 лѣтъ	6
1	— 2
6	+ 10
6	+ 2

КНИГА ТРЕТІЯ.

НАЧАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Геометрія есть наука о измѣреніи пространства. Всякое тѣло имѣетъ три протяженія: *длину, ширину и толстоту или глубину:* предѣлы, его ограничивающіе, составляютъ поверхности онаго. Но поверхности тѣла, встрѣчаясь по двѣ, сами ограничиваются *линіями*, предѣлы коихъ суть *точки.* По симъ различнымъ предѣламъ тѣлъ, познается ихъ *фигура.*

Хотя нѣтъ тѣла неимѣющаго трехъ протяженій, но часто разсматривается только одно, или два изъ оныхъ: на пр. говоря о величинѣ пруда или о высотѣ зданія, обращаютъ вниманіе только на поверхность или линію. Для постепеннаго перехода отъ простаго къ сложному, облегчающаго изученіе, раздѣлимъ Геометрію на три части: въ первой разсмотримъ *линіи (лонгиметрія)*, во второй *поверхности (планиметрія)*, въ третьей *тѣла (стереометрія).*

I. О ЛИНІЯХЪ.

Измѣреніе линій и угловъ.

154. Изъ свойства линій слѣдуетъ, что можно ихъ принимать за слѣдъ какой-нибудь точки *A* (чер. 3 и 5),

движущейся къ другой точкѣ B: сей слѣдъ AB называется *прямою линіею*, когда онъ есть *кратчайшій путь отъ* A до B; иначе линія будетъ, или *кривая*, какъ ACB (чер. 3, или ломаная составленная изъ прямыхъ AC, CD, DB (чер. 5). Изъ сего заключимъ, что:

1-е. Настоящая мѣра разстоянія между двумя точками A и B чер 3 должна быть взята на прямой AB.

2-е. Между двумя точками можно провести только одну прямую, и всякая прямая AB, имѣющая двѣ изъ своихъ точекъ общими съ другою, должна сливаться съ нею по всему протяженію AB.

3-е. Должно предполагать, что всякая прямая BB' (чер. 1) продолженная въ обѣ стороны C и C' до безконечности, такъ пришомъ, что если точки C и C' соединятся прямою CC, то она покроетъ AB; ибо въ противномъ случаѣ $C'ABC$ не было бы кратчайшимъ путемъ между C и C'. Двѣ прямыя, имѣющія двѣ общія точки B и B', не только сливаются на протяженіи $B'B$, но и продолженія ихъ въ стороны C и C' также совмѣщаются.

4-е. Двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ: ибо еслибъ онѣ имѣли двѣ общія точки, то совмѣстились бы.

Если прямая, проходящая чрезъ какія-нибудь двѣ точки поверхности, сливается съ оною на всемъ своемъ продолженіи, такова поверхность называется плоскостію.

155. Чтобы сложить двѣ линіи AB и BC (чер. 1), должно нанести одну изъ оныхъ CB на продолженіе другой, и тогда $AC = AB + BC$. Также, чтобы вычесть CB изъ AC, найдутъ $AB = AC - CB$. Легко также складывать или вычитать большее число линій; повторять b разъ какую-нибудь длину, или брать половину, треть....

156. *Измѣрять прямую*, значитъ находить (чл. 36), сколько разъ въ длинѣ оной A, заключается другая извѣстная B, принятая за *единицу;* и получаемое число разъ, или отношеніе $A : B$ будетъ искомая мѣра.

Часто случается, что единица B не содержится въ A точное число разъ; въ такомъ случаѣ отношеніе A къ B, опредѣляется слѣдующимъ образомъ: *Раздѣлимъ* A на B, т. е. найдемъ, сколько разъ B заключается въ A, и остатокъ R. Раздѣлимъ также B на R, потомъ R на новый остатокъ R', и т. д.... сіе то же, что искать *общую мѣру* M между A и B; тогда M будетъ заключаться точное число разъ, на пр: a разъ въ A, b разъ въ B или $A = aM$, $B = bM$, и $\frac{A}{B}$ будетъ равно отношенію $\frac{a}{b}$ (члены 56, 71): и такъ A составитъ $\frac{a}{b}$ долю единицы B, какъ на пр: $\frac{5}{7}$ или $\frac{1}{11}$ B, и линіи A и B будутъ относиться одна къ другой, какъ отвлеченныя числа a и b.

Но если при каждомъ дѣленіи будетъ выходить остатокъ, то дѣйствіе безпредѣльно, и отношеніе $A : B$, невозможное въ точности быть выражено числами, называется *несоизмѣримымъ*. Въ такомъ случаѣ довольствуются приближеніемъ, т. е. отбрасываютъ тотъ изъ послѣдовательныхъ остатковъ, который найдутъ достаточно малымъ (чл. 63).

157. Посему можно найти величину линіи, равную

$$A + B - C - D \ldots, \; nA + mB, \; \frac{A}{m}, \; \frac{A}{B},$$

гдѣ n, m суть числа и A, B, C, D данныя линіи. Вообще, всегда можно линіи изображать отвлеченными числами, составлять изъ нихъ формулы и подвергать обыкновеннымъ правиламъ вычисленій. И такъ чрезъ линію A, мы будемъ понимать то число разъ a цѣлое или дробное, которое сія линія содержитъ

въ себѣ другую B, принятую за единицу, или отношеніе опыхъ $A : B$. Обратно, числа можно изображать линіями.

158. Возьмемъ на плоскости ABC (чер. 4) точку D внутри находящуюся, и проведемъ DB и AD; *путь* AD + DB *короче чѣмъ* AC + CB, *который болѣе отдаленъ отъ прямой* AB. Ибо продолживъ AD до E, какъ $AE < AC + CE$, то приложивъ къ обѣимъ частямъ EB, получимъ $AE + EB < AC + CB$. Такимъ же образомъ изъ чертежа AEB найдемъ, что $AD + DB < AE + EB$: посему и того болѣе $AD + DB < AC + CB$.

159. Обводъ $ACDB$ (чер. 5) называется *выпуклымъ*, когда всякая прямая IK можетъ пересѣкать его только въ двухъ точкахъ I и K. *Изъ двухъ выпуклыхъ путей* ACDB, AEFGB, *ведущихъ отъ* A *до* B, *наружный длиннѣе внутренняго* или $ACDB > AEFGB$; ибо продолживъ EF, очевидно, что $ACDB > AIKB$; и легко будетъ также доказать, что $AIKB > AEFGB$.

160. Тоже самое докажемъ для выпуклыхъ кривыхъ линій; на пр: $ACB < AMB$ (чер. 5,; ибо проведя прямую EF *касающуюся* ACB въ какой-нибудь точкѣ C, получимъ $EF < EMF$; приложивъ къ обѣимъ частямъ $AE + BF$, будетъ $AEkFB < AMB$. Двѣ другія касательныя ik, lm будутъ $AiklmB < AEFB$: и такъ далѣе. Чрезъ что получимъ рядъ ломанныхъ линій, коихъ длина будетъ уменьшаться по мѣрѣ приближенія ихъ обвода къ ACB, и который $> ACB$: тѣмъ болѣе будетъ ACB короче AMB.

161. Въ начальной Геометріи, кромѣ прямой линіи, разсматривается еще *круговая линія*, которой всѣ точки $ABDE$ (чер. 6) находятся въ одной плоскости и въ равномъ разстояніи отъ точки C, называемой *центромъ*. Поверхность, заключающаяся въ *окружности* $ABDE$, называется *кругомъ*; прямыя $CA, CB\ldots$, идущія отъ центра до кривой, суть *радіусы*; *діа-*

метръ AD есть прямая пересѣкающая окружность и проходящая чрезъ центръ; она равна двумъ радіусамъ.

Часть *AFB* окружности есть *дуга*, прямая *AB* есть *хорда*, *стягивающая оную*. Поверхность *AFBC*, заключающаяся между двумя радіусами и дугою, есть *секторъ*; наконецъ поверхность, находящаяся между дугою *AFB* и ея хордою *AB* есть *сегментъ*.

162. Изъ сего заключимъ, что 1-е. *Діаметръ DA* (чер. 6) *есть наибольшая хорда*; ибо $BC + CA$ или $DA > BA$.

2-е. *Діаметръ дѣлитъ кругъ на двѣ равныя части*; ибо перегнувъ чертежъ по *DA*, обѣ части *ABD*, *AED* должны совмѣститься; иначе всѣ точки окружности не были бы въ одинаковомъ разстояніи отъ центра *C*.

3-е. По сей же причинѣ два круга равныхъ радіусовъ должны сливаться, когда совмѣстимъ ихъ центры: двѣ дуги ихъ круговъ должны также сливаться на всемъ ихъ продолженіи, если онѣ равной длины.

4-е. *Равныя дуги* AB, A'B' (чер. 7) *имѣютъ равныя хорды*, ибо совмѣстивъ дуги, хорды также сливаются.

5-е. *Хорда возрастаетъ вмѣстѣ съ дугою*, до достиженія сею послѣднею полуокружности. Пусть $DBF > EGK$ и $< DBA$ (чер. 6); возьмемъ дугу $DB = EGK$, хорды *BD*, *EK* будутъ равны, и остается доказать, что хорда $DF > BD$. Но $IF + IC > CF$ или BC, $IB + ID > BD$; сложивъ сіи неравенства (чл. 115), и уничтоживъ BC съ обѣихъ сторонъ, получимъ $IF + ID$ или $DF > BD$.

6-е. *Двѣ равныя хорды* BD, EK *стягиваютъ равныя дуги*; ибо если хорда $BD = EK$, а дуга $BD > EGK$, то увеличивая 2-ю дугу до тѣхъ поръ, пока она сдѣлается равною 1-й, хорды тогда будутъ равны (4-е); слѣдовательно хорда *EK* необходимо возрастая (5-е) не была $= BD$; что противно положенію.

7-е. Подобнымъ образомъ если хорда $FD > EK$, *то дуга* FD *также* $>$ EK, ибо дуга *FD* не можетъ быть ни $=$, ни $<$ дуги *EK*.

163. *Измѣрить дугу* FBD, значитъ найти отношеніе оной къ другой извѣстной дугѣ BD, того же радіуса (чл. 56, 71): если бы сіи дуги были *выпрямлены*, т: е: вытянуты въ прямую линію, то нанесли бы одну на другую, какъ то было сказано въ чл. 156; но для отысканія сего отношенія выпрямленіе ненужно. Берутъ раствореніе циркуля равное хордѣ BD меньшей дуги, и наносятъ его на другую столько разъ, сколько возможно; чрезъ что и опредѣлится отношеніе дугъ. Если есть остатокъ, то хорду онаго наносятъ на дугу BD, и поступаютъ далѣе какъ при прямыхъ линіяхъ. Однимъ словомъ, все здѣсь дѣлается также, какъ въ чл. 156. И такъ можно складывать и вычитать дуги одинаковыхъ радіусовъ, находить отношеніе оныхъ, множить которую нибудь изъ нихъ на данное число....

164. Когда двѣ неопредѣленныя прямыя AC, BC (чер. 7) пересѣкаются въ C, то количество взаимнаго отклоненія оныхъ называется *угломъ*, C его *вершиною*. Уголъ означаютъ буквою поставляемою при вершинѣ, если она не принадлежитъ нѣсколькимъ угламъ (какъ въ чер. 10); ибо тогда должны выговаривать и тѣ буквы, которыя находятся при сторонахъ угла, ставя всегда буквы вершины въ срединѣ двухъ прочихъ. И такъ уголъ C (чер. 7), означается чрезъ BCA или ACB.

165. Два угла ACB, $A'C'B'$ равны, если при наложеніи одного на другой, они сливаются. И такъ, положимъ сторону $C'B'$ на CB, C на C'; если углы C и C' равны, то сторона $A'C'$ упадетъ на AC. Изъ вершинъ, какъ изъ центровъ, опишемъ произвольнымъ радіусомъ дуги AB, $A'B'$; очевидно, что равенство или неравенство сихъ дугъ зависитъ отъ угловъ. Сверхъ сего, какъ стороны принимаются всегда продолженными неопредѣленно, то явно, что *величина угла не зависитъ отъ длины его сторонъ.*

166. Чтобы сдѣлать уголъ равный данному C (чер. 7), должно провести неопредѣленную линію $C'B'$, потомъ изъ центровъ C и C', произвольнымъ радіусомъ, описать дуги AB, $A'B'$, наконецъ отложивъ раствореніе циркуля равное AB, отъ B' до A', получимъ (чл. 162) хорду $AB = A'B'$, и дугу $AB \equiv A'B'$, и проведемъ $A'C'$. Очевидно, что углы C и C' будутъ равны.

167. Чтобы сложить два угла C и C' (чер. 7), сдѣлаемъ (чер. 9) уголъ BCA равный одному изъ данныхъ, и BCD равный другому углу; тогда уголъ DCA будетъ искомая сумма, $DCA = DCB + BCA$. Также чтобы вычесть уголъ DCB изъ DCA, наложимъ DCB на DCA, соединя ихъ одною сторопою DC, и совмѣстивъ ихъ общую вершину C; отсюда будетъ $BCA = DCA - DCB$. Замѣтимъ, что складывать и вычитать углы все равно, что производить сіи же дѣйствія надъ дугами db, ba, da описанными одинакимъ радіусомъ. Легко будетъ умножить уголъ xOD (чер. 8) на данное число; ибо сіе дѣйствіе произведется надъ его дугою dx; тоже самое скажемъ о дѣленіи угла NOD на 2, 5..., части (члены 464, 256 до 238).

168. *Отношеніе двухъ угловъ* BCA, DON (*чер.* 8) *равно отношенію дугъ* ba, dn *заключающихся между ихъ боками, и описанныхъ изъ ихъ вершинъ, какъ центровъ, тѣмъ же радіусомъ.*

1-е. Если дуга ba, dn сопзмѣримы, то ихъ общая мѣра dx будетъ заключаться на пр: m разъ въ ba, p разъ въ dn, такъ что $\frac{ba}{dn} = \frac{m}{p}$. Чрезъ каждую изъ точекъ дѣленія x, y..., и вершинъ O, C, проведемъ линіи Ox, Oy...; продолженные углы также раздѣлятся на m и p равныхъ угловъ xOd, yOx..; посему

получимъ $\frac{BCA}{DON} = \frac{m}{p}$. Сіи два отношенія будутъ (*).

$$\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn} \ldots\ldots (A).$$

2-е. Если дуги несоизмѣримы, то раздѣлимъ одну изъ нихъ nd на какое-нибудь число p равныхъ частей dx, xy...., которыя и нанесемъ на другую дугу ba; пусть i есть одна изъ точекъ дѣленія, ближайшая къ a; проведемъ CI. И такъ, дуги dn, bi будучи соизмѣримы, дадутъ $\frac{ICB}{DON} = \frac{bi}{dn}$...; но уголъ $ICB = BCA + ICA$, а дуга $bi = ba + ia$; посему

$$\frac{BCA}{DON} + \frac{ICA}{DON} = \frac{ba}{dn} + \frac{ia}{dn}.$$

Какъ ICA и ia измѣняются вмѣстѣ съ числомъ p дѣленій дуги nd и могутъ быть уменьшены по желанію, а прочія количества остаются непремѣнными; посему 2-я и 4-я дробь будутъ уменьшаться до безконечности, и основываясь на предѣлахъ (чл. 113), получимъ $\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn}$.

169. Дабы найти отношеніе двухъ угловъ, не нужно поступать съ ними подобно предложенному о линіяхъ (чл. 156), что было бы затруднительно; но берется вмѣсто нашего отношенія ему равное отношеніе дугъ. Изъ сего заключимъ, что 1-е. отношеніе поверхностей секторовъ равно отношенію дугъ.

2-е. Если дугу dn (чер. 8), заключающуюся между сторонами угла DON, примемъ за единицу, такожъ какъ и самый уголъ DON, то пропорція (A) обратится

(*) Не должно забывать, что равенство двухъ отношеній составляетъ пропорцію (чл. 71). Въ Геометріи употребляется предпочтительнѣе выраженіе, BCA *относится къ* DON, *какъ* ba *относящася къ* dn, нежели ему равно значущее BCA, *раздѣленное на* DON *равно* ba, *раздѣленному на* dn. Вышеозначенное выраженіе будетъ употребляться во всей начальной Геометріи.

въ $BCA = ba$. И такъ (чл. 36, 71) *всякой уголъ измѣряется дугою, заключающеюся между его сторонами и описанною изъ вершины его, какъ центра* (*).

3-е. Если изъ вершины C (чер. 9) угловъ DCA, BCA, опишемъ двѣ дуги abd, $a'b'd'$, то отношеніе $\frac{BCA}{DCA}$ будетъ $= \frac{ab}{ad}$ или $= \frac{a'b'}{a'd'}$. И такъ величина радіуса Cb или Cb' не имѣетъ вліянія на мѣру угла, и какъ $\frac{ab}{a'b'} = \frac{ad}{a'd'}$; посему отношеніе дугъ ab и $a'b'$ равно отношенію цѣлыхъ окружностей. Таковыя дуги называются *подобными*.

170. Углы, начерченные на бумагѣ, измѣряются помощію *транспортира*, состоящаго изъ полукруга, раздѣленнаго на какое-нибудь число равныхъ частей, служащихъ къ опредѣленію *отношенія дугъ къ четверти окружности*, т. е. числа, выражающаго мѣру угловъ или ихъ отношеніе къ прямому углу. Таковой полукругъ, на шпилькѣ и съ алидадою движущеюся на центрѣ, дабы можно было оную направлять на отдаленные предметы, называется *графометромъ*, и служитъ

(*) Сіе предложеніе не должно понимать буквально; ибо уголъ BCA не можетъ быть равенъ дугѣ ba, но въ уравн. $BCA = ba$ входятъ не уголъ и не дуга, а отвлеченныя числа, означающія, сколько разъ въ углѣ и дугѣ содержится единица одинаковаго съ нимъ рода, DON и dn, такъ что $BCA = ba$ въ самомъ дѣлѣ есть выраженіе $\frac{BCA}{DON} = \frac{dn}{ba}$. Сіе должно такъ разумѣть и во всякой формулѣ; буквы въ нихъ входящія суть отвлеченныя числа, выражающія отношенія измѣренныхъ количествъ къ ихъ единицамъ.

Выраженіе, что уголъ измѣряется дугою, также не точно, ибо не возможно найти отношенія между разнородными количествами: но подъ онымъ должно разумѣть, что такъ какъ углы возрастаютъ въ одинаковомъ отношеніи съ дугами, то числа, изображающія мѣру угла (чл. 36), выражаютъ также и мѣру дуги.

также къ измѣренію угловъ въ пространствѣ; впрочемъ для сей цѣли устроены различные инструменты, описаніе которыхъ здѣсь не помѣщаемъ, чтобы не удалиться отъ нашего предмета.

Четверть окружности обыкновенно дѣлятъ на 90 частей или *градусовъ*, каждый градусъ на 60 минутъ и минуту на 60 секундъ; уголъ или дуга въ 18 градусовъ 54 минуты 55 секундъ, пишется такъ: $18^0\ 54'\ 55''$. Таблицы и инструменты были устроены посему раздѣленію; но оному предпочитается новѣйшее раздѣленіе, гораздо удобнѣйшее для вычисленій: оно состоитъ въ раздѣленіи четверти круга на 100 градовъ, града на 100 минутъ, минуты на 100 секундъ. Посему способу раздѣленія $18^{гр.}\ 54'\ 55'' = 18,5455^{града}$, или $= 0,185455$ четверти окружности.

Умѣя измѣрять прямыя линіи, дуги, углы, и имѣя точное понятіе, какимъ образомъ вводить ихъ въ вычисленія, разсмотримъ теперь ихъ взаимныя отношенія, дабы видѣть способъ употребленія оныхъ при составленіи фигуръ и соединяющія ихъ условія.

О перпендикулярныхъ и косвенныхъ линіяхъ.

171. Если BD есть прямая линія и уголъ $ACB = ACD$ (чер. 10), то перегнувъ чертежъ по AC, CB упадетъ на свое продолженіе CD; въ семъ случаѣ AL называется *перпендикулярною* къ DB, а уголъ ACB *прямымъ*. Дуга AB будетъ четверть окружности; уголъ $FCB <$ прямаго угла ACB, называется *острымъ*, а уголъ $LCB > ACB$ *тупымъ*.

172. *Косая линія* EC (чер. 10) *пересѣкаетъ другую* DB, *то сумма смѣжныхъ угловъ* ECB, ECD *равна двумъ прямымъ*; сіе очевидно, ибо линія AC перпендикулярна къ BD.

Обратно, *если сумма двухъ угловъ равна двумъ прямымъ, то приложивъ ихъ одинъ къ другому, такъ,*

чтобъ они имѣли одинъ бокъ и вершину общими, два другіе бока составятъ прямую линію; ибо въ противномъ случаѣ имѣли бы напр: $DCE + FCE = 2$ прямымъ, но какъ $DCE + BCE = 2$ прямымъ, слѣдственно получили бы $FCE = BCE$.

Два угла ECB, ECD, составляющіе въ суммѣ два прямыхъ, называются *дополнительными*, а *пополнительными* тѣ, коихъ сумма равна прямому, напр: FCB и FCA.

Если прямая AL *перпендикулярна* къ BD, т. е. уголъ $ACD = ACB$, то какъ $ACD + DCL = 2$ прямымъ; и уголъ ACD есть прямой, слѣд. и DCL также $= 1$ прямому $= LCB$. Посему четыре угла ACB, ACD, LCB, LCD равны; если перегнемъ чертежъ по BD, то CL должна упасть на CA; BD также перпендикулярна къ AL, и сіи линіи пересѣкаютъ кругъ на четыре равныя части.

173. Очевидно, что (чер. 10) углы $BCF + ECF + DCE = 2$ прямымъ, если они находятся по одну сторону прямой линіи BD. Сколько бы ни было линій KC, BC, EC, IC.... сходящихся въ одной точкѣ C, сумма составляемыхъ ими угловъ, равна 4 прямымъ. Первые углы заключаютъ полуокружность, а послѣдніе цѣлую окружность.

174. Если двѣ прямыя DB, AE (чер. 11) пересѣкаются въ C, то *противоположные при вершинѣ углы* BCE, ACD *равны между собою;* ибо $ACD + ACB = 2$ прямымъ $= BCE + ACB$, откуда $ACD = BCE$. Также докажется, что $ACB = DCE$.

175. *Чрезъ точку* A *къ прямой* DE (чер. 12) *нельзя провести болѣе одной перпендикулярной линіи.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть AH перпендикулярна къ DE, то всякая другая AB не можетъ быть къ ней перпендикулярна; ибо если бы уголъ ABC былъ прямой, то сдѣлавъ $CH = AC$ и проведя BH, перегнемъ чертежъ по DB: точка H упадетъ въ A, и слѣдовательно CBH

на CBA. Посему уголъ CBH былъ бы прямой, какъ и CBA по положенію, и ABH была бы прямая линія (чл. 172), также какъ и AH, чего несообразность очевидна.

Если бы данная точка была въ C на прямой DE, то явно, что нельзя возставить болѣе одного перпендикуляра CA.

176. *Линія* AC *перпендикулярная къ* DB (чер. 12), *короче всякой косвенной* AB; 2-е. *косвенныя* AD *и* AB, *равно отдаленныя отъ перпендикуляра, равны между собою;* 3-е. *косвенная* AE, *болѣе отдаленная отъ перпендикуляра, чѣмъ* AB, *длиннѣе сей послѣдней.*

1-е. Такъ какъ $AH < AB + BH$ или $2AB$, то $AC < AB$. Перпендикуляръ AC измѣряетъ *разстояніе* точки A отъ прямой DE.

2-е. Если $CD = CB$, то перегнувъ чертежъ по AC, точка D упадетъ въ B; посему $AD = AB$. Тоже самое будетъ, когда уголъ CAD данъ $= CAB$.

3-е. Если $CE > CB$, или если уголъ $CAE > CAB$, то проведя EH, получимъ (чл. 158, $AB + BH < AE + EH$: но AB и BH суть равныя косвенныя (2-е), также какъ AE и EH. Посему $2AB < 2AE$ или $AB < AE$.

177. Обратно, линія AC перпендикулярна къ BD, когда она есть кратчайшее разстояніе до BD. Ибо если бы другая линія AD была ей перпендикулярна, то вышло бы $AD < AC$, что противно положенію. Также, если $AB = AD$, то должно быть $DC = BC$, ибо въ противномъ случаѣ AB была бы $>$ или $< AD$, смотря потому, будетъ ли $BC >$ или $< DC$. Наконецъ, если $AE > AB$ или AD, то найдемъ также что CE будетъ $> CB$ или CD.

178. Изъ сего заключимъ, что 1-е отъ одной точки нельзя провесть къ прямой, трехъ равныхъ между собою косвенныхъ.

2-е. Если AH (чер. 13) перпендикулярна въ срединѣ C къ линіи DB, то каждая ея точка F равно удалена отъ B и D.

3-е. Сіе свойство принадлежитъ только точкамъ перпендикуляра AH; ибо взявши точку G внѣ линіи AH, найдемъ, что она ближе къ B, чѣмъ къ D, потому что $GB < GF + FB$ или $< GF + FD$, или наконецъ $GB < GD$.

179. И такъ достаточно (чер. 13 и 14), чтобы прямая AH имѣла двѣ изъ своихъ точекъ, въ равномъ разстояніи отъ другихъ двухъ D и B, дабы изъ сего заключить, что всѣ прочія точки линіи AH равно отстоятъ отъ D и B, и что сія прямая AH перпендикулярна въ срединѣ къ DB; ибо перпендикуляръ есть единственная прямая имѣющая сіе свойство. Посему, не трудно *провести перпендикуляръ къ данной прямой* DB, *чрезъ извѣстную точку* F, взятую внѣ прямой (чер. 13), или на прямой (чер. 14). Изъ центра F, опишемъ какимъ-нибудь радіусомъ, дуги пересѣкающія данную линію въ D и B, потомъ изъ сихъ точекъ, какъ центровъ, такожде произвольнымъ радіусомъ, начертимъ еще двѣ дуги, пересѣкающіяся въ H, прямая FH будетъ требуемый перпендикуляръ; ибо имѣетъ двѣ точки F и H въ равномъ разстояніи отъ D и B. Надобно замѣтить, что радіусы должны быть столь велики, чтобы могли произойти упомянутыя пересѣченія (члены 176 и 192).

180. Можно также *провести перпендикуляръ* AH (*чер.* 15), *въ средину данной прямой* DB. Изъ центровъ D и B, опишемъ дуги пересѣкающіяся въ A и H; радіусы берутся произвольные, но равные; AH будетъ требуемая линія. Симъ способомъ находится также *средина* C *прямой* DB.

Даны точки G и B, и прямая AK (чер. 13), отыскать такую точку F, чтобы прямыя FG, FB были равно наклонены къ AH, или уголъ $GFA = BFH$. Продолживъ GF, уголъ AFG или DFC долженъ быть $= BFC$; и такъ перегнувъ чертежъ по AH, FD должна упасть на FB, т: е: FD, FB будутъ равныя

косвенныя. Посему опустивъ изъ точки B на линію AH перпендикуляръ BD, отложивъ $CD = CB$ и проведя DG, точка F опредѣлится.

Въ углѣ $A'AC$ (чер. 15 *bis*), даны точки B и G, требуется провесши BF, FL, LG такъ, чтобы наклоненія сихъ прямыхъ къ каждой изъ сторонъ угла были взаимно равны, или уголъ $BFC = AFL$ и $ALF = GLA'$. На BD перпендикулярной къ AC, отложимъ $CD = CB$; какъ уголъ $DFC = AFL = BFC$, то должно чтобъ FD была продолженіемъ LF. Опредѣливъ такимъ образомъ точку D, можно будетъ принять оную вмѣсто данной точки B, и задача обратится въ слѣдующую: провесши прямую DL такъ, чтобъ уголъ $ALD = A'LG$, вопросъ предъ симъ рѣшеный. Посему должно изъ точки D, на продолженіе $A'A$ опустивъ перпендикуляръ DK, отложить $IK = ID$, и провесши KG чрезъ что получимъ точку L, потомъ LD, которая опредѣлитъ F, и наконецъ FB.

Дабы провесши, начиная отъ B до G', прямыя GL, LL, LF, FB взаимно равно наклоненныя къ сторонахъ $A'A$, $A'A$, AC, должно такимъ же образомъ замѣстить: 1-е. B точкою D, 2-е. D точкою K, 3-е. K точкою K', повторяя на каждой сторонѣ тоже построеніе. Сей чертежъ вполнѣ рѣшаетъ задачу отраженныхъ ударовъ (*des bricoles*) въ биллiардной игрѣ.

О параллельныхъ линіяхъ.

181. *Параллельными линіями* называются двѣ прямыя, находящіяся на одной и той же плоскости, и на всемъ ихъ безконечномъ продолженіи, не встрѣчающіяся ни въ той, ни въ другой сторонѣ.

1-е. *Двѣ прямыя* CA, BD (чер. 17), *перпендикулярныя къ одной и тойже линіи* KL, *параллельны между собою;* ибо еслибъ онѣ встрѣтились, тогда бы

изъ одной точки на линію KL было опущено два перпендикуляра чл. 175).

2-е. *Двѣ линіи* CA, DB *пересѣченныя третьею* IG *параллельны, если углы* AEF, EFD *равны между собою;* ибо изъ средины I линіи EF, опустимъ перпендикуляръ KL на BD и RR' на KL; потомъ отложивъ $LS = FL$, проведемъ IS: перегнувъ чертежъ по KL, LF закроемъ равную ей SL; посему IF упадетъ на IS. Перегнувъ опять чертежъ по RR'; IK пойдетъ по направленію IL; ибо углы RIK, RIL прямые; и какъ сверхъ сего уголъ $EIK = LIF = LIS$, то EI закроетъ ей равную IS, и точка E упадетъ въ S. Наконецъ по положенію, уголъ $E = F = S$; слѣдственно EK пойдетъ по направленію SL, и K упадетъ въ L. Посему углы L и K суть прямые и линіи CA, DB параллельны (1-е).

Линіи CA, DB *будутъ также параллельны:*

3-е. *Если углы* CEG, BFH *равны;* ибо будучи противоположны при вершинѣ угламъ FEA и DFE сопшавшъ предыдущій случай.

4-е. *Когда уголъ* HFB = FEA, потому что изъ равенства угловъ HFB, DFE, получимъ $DFE = FEA$.

5-е. *Когда углы* EFB + FEA = 2-мъ прямымъ, ибо $EFB + EFD =$ 2-мъ прямымъ, ошкуда $FEA = EFD$.

6-е. *Наконецъ, когда углы* GEA + HFB = 2-мъ прямымъ, потому что $GEA + FEA =$ 2-мъ прямымъ, отсюда $HFB = FEA = EFD$.

Два угла лежащіе съ той и другой стороны пересѣкающей линіи, называются *углами на крестъ* (*alternes*), *внутренними или внѣшними,* смотря потому, будутъ ли они находиться внутри или внѣ параллельныхъ линій. И такъ, углы AEF, EFD (чер. 17) суть внутренніе на-крестъ; GEC, BFH внѣшніе на-крестъ; сверхъ сего углы HFB, FEA называются *соотвѣтственными.* Посему можно сказать, что *двѣ прямыя параллельны, когда пересѣкающая ихъ*

третья, составляетъ углы: внутренніе на-крестъ, или внѣшніе на-крестъ, или соотвѣтственные равные между собою, или когда сумма внутреннихъ или внѣшнихъ по одну сторону пересѣкающей линіи равна двумъ прямымъ.

128. Обратныя симъ предложенія также справед[illegible]:

1-е. *Когда двѣ прямыя* CA, DB (чер. 16) *параллельны, то всякая перпендикулярная* KL *къ одной изъ нихъ, перпендикулярна и къ другой.* Геометры употребили всевозможныя усилія, чтобы доказать сіе предложеніе, но не одинъ изъ нихъ не достигнулъ желаемой цѣли: они только скрыли затрудненіе, не уничтоживъ онаго (*). Легко понять, что если прямая *KI* обращается около *K*, то точка пересѣченія *E* съ линіею *BD* удаляется въ *F*, *D* ..., но все еще остаемся въ сомнѣніи, не получимъ ли линія *KH*, прежде, чѣмъ сольется съ *AC* перпендикулярной къ *KL*, такое положеніе, въ которомъ бы *KH* не встрѣчала *BD*.

Примемъ за очевидное, что всякая прямая кромѣ *KC*, встрѣчается съ *BD*, по-правую или по-лѣвую

(*) „Доказательство сего чрезвычайно простаго предложенія, „не имѣетъ можетъ быть надлежащей точности; но одно изло„женіе онаго совершенно убѣждаетъ въ его справедливости; по„сему при обученіи не должно требовать излишней строгости „въ доказательствахъ, предоставимъ таковое изслѣдованіе Гео„метрамъ, а не метафизикамъ, по крайней мѣрѣ, доколѣ сіи истины „не будутъ такъ объяснены, чтобы начинающій не имѣлъ ни ма„лѣйшаго сомнѣнія. (Laplace, Ecoles normales, t. IV p. 43).

Впрочемъ, вотъ лучшее объясненіе сего предложенія. Назовемъ словомъ *уголъ*, безконечное пространство заключающееся между его продолженными сторонами. Всякой уголъ *BCA* (чер. 18, заключается въ прямомъ углѣ *BCD*, столько разъ сколько дуга *ba* содержится въ дугѣ *bd*; пусть будетъ *n* сіе отношеніе, $\frac{bd}{ba} = n = \frac{BCD}{BCA}$. Отложимъ какія-нибудь равныя части *EC*, *EG*

сторону KL перпендикулярной къ AC, смотря потому находится ли она выше AC, какъ KH, или ниже AC, какъ KH', полагая сіе даже при малѣйшей величинѣ угла HKC, или $H'KC$; или выражаясь иначе, *чрезъ точку* K, *можно провести только одну параллельную къ данной прямой* BD.

2-е. *Если двѣ параллельныя* DB, CA, *пересѣкутся прямою* GH (чер. 17), *то углы внутренніе на-крестъ будутъ равны*, DFE и FEA. Въ самомъ дѣлѣ, изъ средины I прямой EF, опустимъ LK перпендикулярно къ BD, она будетъ также перпендикулярна и къ AC (1-е), потомъ возставимъ къ KL перпендикуляръ RR', отложимъ $LS = LF$, и проведемъ IS. Перегнувъ чертежъ по RR', найдемъ какъ и прежде, что E упадетъ въ S; и какъ изъ точки S, на KL можно опустить только одинъ перпендикуляръ SL (чл. 175), то EK закроетъ SL, посему уголъ S или F равенъ KEI.

3-е. *Углы внѣшніе на-крестъ* GEC, BFH *также равны* какъ противоположные предыдущимъ; 4-е. *углы соотвѣтственные* BFH, AEF *равны*, ибо BFH − EFD = AEF (2-е); 5-е. *углы* FEA, EFB *внутренніе по одну сторону*, *составляютъ вмѣстѣ два прямые*, *также какъ и углы* GEA, HFB *внѣшніе по одну сторону*. Сіе очевидно. Посему:

и проведемъ къ CD перпендикуляры EF, GH..., такимъ образомъ составятся не опредѣленныя пространства $BCEF$, $FEGH$..., всѣ равныя между собою, что докажемъ перегнувъ чертежъ по EF, GH..., хотя бы сихъ пространствъ было n или болѣе, начиная отъ BC, до MN; но какъ цѣлое пространство прямаго угла CBD, превосходитъ поверхность $BCMN$ суммы сихъ не опредѣленныхъ пространствъ, то получимъ

$$BCD > BCMN, \text{ или } n \times bCA < n \times BCEF,$$

откуда $BCA < BCEF$, что только можетъ быть, когда CA встрѣчается съ EF. Посему какъ бы ни былъ малъ уголъ BCA, косвенная CA должна пересѣчь EF перпендикулярную къ CD; ч. и т. д.

Если двѣ параллельныя линіи пересѣкутся прямою, то всѣ углы одинаковаго свойства соотвѣтственно равны, а разнаго свойства (т: е: одинъ острый а другой тупой), служатъ другъ другу дополненіемъ.

183. Изъ сего слѣдуетъ, что 1-е. *Дабы провести чрезъ данную точку* C (чер. 21) *къ прямой* AB *параллельную* CD, можно употребить одно какое-нибудь изъ шести предыдущихъ свойствъ. На пр: изъ центра *C* произвольнымъ радіусомъ *CB*, опишемъ дугу *BI*; потомъ изъ центра *B* дугу *CH*: наконецъ сдѣлавъ дугу $BI = CH$, получимъ линію *CI* параллельную къ *AB*. Ибо проведя *BC*, углы *ABC*, *BCI* равны (чл. 166).

2-е. *Двѣ прямыя AC*, *BD* (чер. 19) *параллельныя третьей* EF, *параллельны между собою;* ибо KI, перпендикулярная къ *EF*, будетъ также перпендикулярна къ ея параллельнымъ *AC* и *BD*, слѣд. сіи линіи ни гдѣ не встрѣчаются (181, 1-е).

3-е. *Два угла* CAB, DEF (чер. 20), *коихъ бока параллельны и отверстія обращены въ одну сторону, равны:* ибо продолживъ *EF* до *G*, по свойству параллельныхъ линій *AC*, *ED*, уголъ $DEF = CGF$ какъ соотвѣтственные: также уголъ $CGF = CAB$, потому что *AB*, *GF* параллельны; слѣдственно $CAB = DEF$. Если продолжимъ бокъ *EF*, то углы *DEI* и *BAC*, коихъ отверстія обращены въ противныя стороны, уже не равны, а служатъ другъ другу дополненіемъ.

4-е. *Двѣ параллельныя* AB, CD чер. 21) *вездѣ равно отстоятъ*, ибо изъ какихъ-нибудь двухъ точекъ *A* и *B*, и изъ средины *E* линіи *AB*, проведемъ къ *AB* перпендикуляры *AC*, *BD*, *EF*, они будутъ также перпендикуляры и къ *CD;* но перегнувъ чертежъ по *EF*, *EB* упадетъ на ей равную *EA;* по равенству же прямыхъ угловъ *EBD* и *EAC*, линія *BD* пойдетъ по

AC, и *FD* закроетъ *FC*. Посему точка *D* совпадетъ съ точкою *C*, откуда $AC = BD$ (см. чл. 200).

О перпендикулярныхъ и параллельныхъ линіяхъ разсматриваемыхъ въ кругѣ, и о касательныхъ.

184. *Всякой радіусъ* CD *перпендикулярный къ хордѣ* AB, *проходитъ чрезъ средину* E *оной, также какъ и чрезъ средину дуги* ADB (чер. 22). Въ самомъ дѣлѣ, изъ равныхъ косвенныхъ *AC*, *CB* заключаемъ, что *E* есть средина линіи *AB* (чл. 177); перегнувъ чертежъ по *CD*, точка *A* упадетъ въ *B*; *AD* закроетъ *DB*, и *D* будетъ серединою дуги *ADB*.

185. Поелику центръ *C*, средина *E* хорды и средина *D* дуги, находящіся на одной прямой линіи, то изъ сего слѣдуетъ, что всякая прямая *CD*, проходящая чрезъ двѣ изъ сихъ точекъ, проходитъ также чрезъ третію и перпендикулярна къ хордѣ *AB*. Сверхъ того, какъ чрезъ точку *C*, *E* или *D*, можно провести къ *AB* только одинъ перпендикуляръ, слѣдственно прямая, проходя чрезъ одну изъ сихъ трехъ точекъ, перпендикулярна къ *AB*, то она должна пройти и чрезъ двѣ другія точки. И такъ, *если изъ сихъ четырехъ условій, быть перпендикулярною къ хордѣ, проходить чрезъ средину оной, чрезъ средину дуги и чрезъ центръ, предположится два, то изъ нихъ необходимо проистекутъ и два остальныя.*

Впрочемъ, можно каждый изъ шести случаевъ, заключающихся въ сей теоремѣ, доказать прямо, поступая съ нимъ также какъ и съ предложеніемъ, служившимъ намъ основаніемъ.

186. *Дабы раздѣлить дугу* ADB (чер. 22), *или уголъ* ACB *на двѣ равныя части* стоитъ только опустить на хорду *AB* перпендикуляръ *CD* (чл. 179). Симъ же

средствомъ, можно снова каждую половину раздѣлить пополамъ, и т. д. Такимъ образомъ дуга или уголъ раздѣлится на 2 4, 8.... 2^n равныхъ частей (см. чл. 201, 4-е).

187. Провести окружность круга, чрезъ три данныя точки N, B и D (чер. 25). Проведемъ NB и BD, потомъ изъ ихъ срединъ E и F возставимъ перпенд. HE, CF. Каждая изъ точекъ HE равно удалена отъ точекъ N и B, и только сіи точки имѣютъ такое свойство: посему центры всѣхъ круговъ проходящихъ чрезъ точки N и B, находятся на перпендикулярѣ HE: тоже самое скажемъ о линіи FI, относительно точекъ B и D. И такъ точка C, гдѣ пересѣкаются HE и FI, равно отстоитъ отъ точекъ N, B и D, и она одна выполняетъ сіе условіе: слѣд. точка C есть центръ *ей единственнаго круга*, проходящаго чрезъ три данныя точки.

Если три точки N, B и D находятся на прямой линіи, то перпендикуляры FI и HE не встрѣтятся (чл. 181, 1-е), и задача будетъ не возможна. Во всякомъ же другомъ случаѣ FI и HE пересѣкаются, ибо если бы FI и HE были параллельны, то AB перпендикулярная къ HE была также бы перпендикулярна и къ FI; уголъ A былъ бы прямой, также какъ и уголъ E; что несправедливо, ибо тогда BF и BA были бы двѣ перпендикулярныя линіи къ AF (чл. 175). Замѣтимъ что перпендикуляръ, возставленный изъ средины хорды ND, проходитъ также чрезъ точку C, ибо она находится въ равномъ разстояніи отъ N и D, такъ что три перпендикуляра сходятся въ C, и для опредѣленія сей точки слѣдовательно достаточно двухъ какихъ-нибудь изъ трехъ хордъ NB, BD, ND.

Посему 1-е два круга не могутъ имѣть трехъ общихъ точекъ несливаясь.

2-е. Легко найти центръ круга или данной дуги: стопитъ только назначить три точки N, B и D, и произвести вышепоказанное строеніе.

188. Прямая можетъ пересѣкать кругъ только въ двухъ точкахъ, ибо еслибы произошли три точки пересѣченія, то проведя къ нимъ радіусы, получили бы три равныя косвенныя (чл. 178).

Линія TG (чер. 24) встрѣчающая окружность въ одной только точкѣ F называется *касательною. Радіусъ* CF *перпендикуляренъ къ касательной въ точкѣ* F; ибо всякая другая точка G сей касательной находясь внѣ круга, CG будетъ $> CE$. CF; посему CF есть кратчайшее разстояніе отъ точки C до TG, т: е: CF перпендикулярна къ TG (чл. 176).

Обратно, если TG *перпендикулярна къ радіусу* CF, *то сія прямая* TG *будетъ касательная къ кругу.* Ибо всякая косвенная $CG > CF$, посему всякая другая точка G линіи TG находится внѣ круга.

И такъ, чтобы чрезъ точку F провести касательную къ кругу CA, должно, проведя радіусъ CF изъ точки F, возставить перпендикуляръ TG (члены 179 и 208, I.)

189. *Даны двѣ точки* (чер. 25), *одна* A *на прямой* AT, *другая* B *внѣ оной, отыскать кругъ* ABI, *проходящій чрезъ точки* A *и* B, *и касательный къ прямой* AT. AB есть хорда, слѣд. центръ C будетъ находиться на EF, перпендикулярной въ срединѣ къ AB; сей центръ находится также на AG, перпендикулярной къ AT, посему оный есть точка сѣченія C. И такъ проведя перпендикуляры GA къ AT и FE изъ средины AB, точка C пересѣченія будетъ центръ, а AC радіусъ.

190. *Дуги* AD, BE (чер. 24), *заключающіяся между двумя параллельными хордами* AB, DE, *равны между собою.* Ибо пусть радіусъ CF перпендикуляренъ къ симъ двумъ хордамъ (чл. 184), дуга $AF = BF$ и $DF = FE$,

вычтя одно уравненіе изъ другаго, получимъ $AD = EB$. Центръ C можетъ также заключаться между двумя хордами, каковы на пр: AB и $D'E'$; тогда $AF = FB$, $D'F' = F'E'$; вычтя сіи два уравненія изъ полуокружности $FAF = FBF'$, получимъ $AD' = BE'$.

Сіе свойство принадлежитъ еще хордѣ AB и касательной TG, ей параллельной; ибо радіусъ FC, проведенный въ точку касанія F, будучи перпендикуляренъ къ касательной, перпендикуляренъ также и къ AB; посему $AF = FB$.

О пересѣченіи круговъ.

191. *Если двѣ окружности* (чер. 27) *имѣютъ общую точку* A *на линіи* CC', *соединяющей центры, то онѣ ни въ какой другой точкѣ не встрѣчаются:* ибо взявъ какую-нибудь точку H одной окружности, проведемъ CH и $C'H$, получимъ CC' или $CA + AC' < CH + HC'$; отнявши равныя CA и CH, останется $AC' < HC'$, посему точка H находится внѣ окружности C'. Если центры C и C'' находятся по одну сторону общей точки A, то будетъ CH или $CA < CC'' + C''H$ и вычтя CC'', останется $C''A < C''H$; слѣд. точка H находится внѣ круга C''. Перпендикуляръ AT, возставленный изъ точки A къ CC', будетъ касательною обѣимъ окружностямъ, касающимся въ точкѣ A.

Но если два круга C *и* C' *имѣютъ общую точку* M (чер. 26), *внѣ линіи соединяющей центры, то сіи круги пересѣкаются.* Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ MN перпендикулярно къ CC', и отложимъ $NI = IM$. Изъ равенства косвенныхъ CM и CN получимъ, что точка N принадлежитъ окружности C; N будетъ также находиться на окружности C', ибо $C'M = C'N$. Посему, сіи окружности имѣютъ другую общую точку N.

И такъ 1-е. *Если окружности имѣютъ одну только общую точку, то она находится на линіи соеди-*

няющей центры, и обратно; сверхъ сего *разстояніе центровъ равно суммѣ или разности радіусовъ;* ибо (чер. 27) $CC' = CA + C'A$ или $CC'' = CA - C''A$, смотря будетъ ли одинъ изъ круговъ внѣ или внутри другаго.

2-е. *Если круги пересѣкаются, то линія соединяющая центры перпендикулярна къ срединѣ къ общей хордѣ.* Сверхъ сего, разстояніе центровъ менѣе суммы радіусовъ и болѣе ихъ разности; ибо очевидно, что (чер. 26, $CC' < CM + C'M$ и $CC' + C'M > CM$ или $CC' > CM - C'M$.

3-е. Наконецъ, *если круги не имѣютъ ни одной общей точки, то разстояніе центровъ менѣе разности радіусовъ или болѣе ихъ суммы,* смотря, будетъ ли одинъ изъ круговъ находиться въ другомъ или нѣтъ; ибо (чер. 28, $CD = DO - CA - AO$ и $CC' = CA + C'B + AB$.

Изъ сего заключаемъ, что если D будетъ разстояніе центровъ, R и r радіусы, то

когда окружности пересѣкаются . . . . . $D < R + r$ и $D > R - r$

касаются { *извнѣ* . . . . . $D = R + r$
касаются { *извнутри* . . . . . $D = R - r$

не имѣютъ ни одной общей точки и одна относительно другой { *внѣшнія* . . . . . $D > R + r$
не имѣютъ ни одной общей точки и одна относительно другой { *внутреннія* . . . . . $D < R - r$

192. Также справедливо и обратное каждому изъ сихъ предложеній. Если напр: въ одно время $D < R + r$ и $> R - r$, то двѣ окружности пересѣкаются; ибо 1-е. еслибъ онѣ касались, то было бы $D = R + r$ или $R - r$; а еслибъ онѣ не имѣли ни одной общей точки, то D было бы $> R + r$ или $< R - r$. Напослѣдокъ, разсматривая только точки K, L и O (чер. 26), въ коихъ сіи окружности пересѣкаютъ CC', увидимъ, что данныя отношенія обращаются въ $CC' < CK + C'L$ и $CC' + C'O$ или $CO > CK$; и такъ 2-я окружность C' имѣетъ точки L внутри и O внѣ 1-й окружности C.

Также, если $D = R + r$, и предположимъ, что круги не касаются извнѣ, то должно будетъ допустить одно изъ четырехъ прочихъ положеній сихъ окружностей. И такъ, 1-е. если онѣ пересѣкаются, то $D < R + r$, что противно положенію; 2-е. если онѣ касаются извнутри, то $D = R - r$, чего опять не можетъ быть, ибо $D = R + r$, и проч. (*)

193. Слѣдовательно, когда извѣстны центры и радіусы двухъ круговъ, то дабы узнать, пересѣкаются ли они или касаются и проч., не нужно описывать окружностей, а достаточно сложить и вычесть радіусы, и сравнить сіи выраженія съ разстояніемъ центровъ, чтобы судить къ которому изъ 5-ти возможныхъ случаевъ долженъ относиться предложенный чертежъ.

Когда даны двѣ точки, одна A (чер. 25), на кругѣ C, другая B, внѣ онаго, то дабы описать окружность, проходящую чрезъ данныя точки и касающуюся сего круга C, въ точкѣ A, должно провести касательную AT, и задача приведется къ случаю чл. 189.

О треугольникахъ.

194. *Треугольникъ* есть пространство ABC (чер. 29 до 35), ограниченное тремя прямыми AB, BC и AC, называемыми его *сторонами;* оный бываетъ *разностороннй*, когда его стороны неравны между собою (чер. 29); *равносторонній*, когда его стороны равны (чер. 30), *равнобедренный*, когда имѣетъ только двѣ стороны равныя (чер. 31). Если онъ имѣетъ

(*) Вообще, когда можно предвидѣть всѣ возможные случаи, какого-нибудь вопроса или линіи, и когда каждый имѣетъ условія, которыя не могутъ существовать при условіяхъ прочихъ случаевъ, тогда обратныя продолженія справедливы, и доказываются по вышесказанному; что мы видѣли уже въ теоріи косвенныхъ линій, чл. 179, и увидимъ также въ чл. 198, и проч.

одинъ прямой уголъ A, то $\triangle^{\text{къ}}$ называется *прямоугольнымъ* чер. 32): сторона BC, противуположная прямому углу *гипотенузою*, а другія два бока *катетами*.

Вершиною треугольника называется которая-нибудь изъ вершинъ его угловъ, на пр: C (чер. 31); *основаніемъ* противоположная сторона AB; а *высотою*, перпендикуляръ CD, опущенной изъ вершины на основаніе.

195. *Сумма трехъ угловъ всякаго треугольника равна двумъ прямымъ.* Въ самомъ дѣлѣ, продолжимъ одну изъ сторонъ AC (чер. 33) треугольника ABC, и проведемъ CD параллельно къ AB; уголъ DCK равенъ соотвѣтственному A и уголъ $BCD = B$, какъ внутренніе на-крестъ. Посему, три угла треугольника суть BCA, BCD, DCK; сумма ихъ равна двумъ прямымъ: очевидно также, что 1-е. *внѣшній уголъ* BCK *равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ* A *и* B, *ему неприлежащихъ*.

2-е. Впредь прямой уголъ будемъ изображать чрезъ D; слѣд. $A + B + C = 2D$. И такъ если сдѣлаемъ (чер. 33 и 34) уголъ $KOL = C$, $LOM = B$, $MON = A$, то линія ON будетъ продолженіе OK. По сему строенію легко отыскать третій уголъ треугольника, когда даны два другіе.

3-е. Два треугольника, имѣющіе по два угла соотвѣтственно равные, суть равноугольные.

4-е. Всѣ углы треугольника могутъ быть острые, но одинъ не можетъ имѣть болѣе одного прямаго или тупаго угла.

5-е. Два острые угла C и B (чер. 32) прямоугольнаго треугольника служатъ другъ другу пополненіемъ или $C + B = D$.

6-е. Когда линія BA' отдаляется отъ перпендикуляра BD (чер. 38) обращаясь около точки B и принимаетъ положенія BC, BI, то уголъ A' превращается

въ C, I и уменьшается болѣе и болѣе; ибо углы CBD, IBD, служащіе имъ пополненіями, безпрестанно увеличиваются.

7-е. Когда въ треугольникѣ CBC' (чер. 38) углы при основаніи C и C' острые, то перпендикуляръ BD падаетъ внутрь; ибо еслибъ онъ падалъ внѣ, какъ на пр: BA, то треугольникъ $BC'A$ имѣлъ бы одинъ прямой уголъ A и одинъ тупой $BC'A$. Ясно также, что въ треугольникѣ $BC'A$, имѣющемъ тупой уголъ C', перпендикуляръ BD падаетъ внѣ.

8-е. *Углы, коихъ стороны взаимно перпендикулярны, равны между собою, если они обѣ никакого свойства, какъ* BAC *и* B'A'C' (чер. 36) *или служатъ другъ другу дополненіемъ, когда одинъ острый, а другой тупой*, каковы на пр: BAC и $C'A'D$; ибо продолживъ $A'B'$ и $A'C'$ до пересѣченія съ сторонами AB, AC къ нимъ перпендикулярными, получимъ прямоугольные треугольники ADF, $A'D'F$, въ коихъ углы A и A' равны, какъ пополнительные равнымъ угламъ F.

9-е. Когда точка пересѣченія B двухъ прямыхъ AB, CB (чер. 63) находится въ дальнемъ разстояніи, то величина угла B опредѣляется, не продолжая сихъ линій до встрѣчи оныхъ, посредствомъ параллельной DE къ BC, чрезъ что получится уголъ $B = ADF$; или если проведя какую-нибудь прямую AC, измѣримъ углы A и C, то дополненіе къ ихъ суммѣ $A + C$ будетъ искомый уголъ. Такимъ образомъ получается величина угла B, когда точка B видима издали, но неприступна.

196. *Два треугольника* ABC, A'B'C' (чер. 37) *равны между собою, когда имѣютъ:* 1-е. *По двѣ соотвѣтственно равныя стороны, заключающія равные углы*, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $A = A'$. Въ самомъ дѣлѣ, наложимъ $A'B'C'$ на ABC, такъ чтобъ $A'B'$ закрыла ей равную AB; по равенству угловъ A и A' сторона $A'C'$ упадетъ на равную ей AC и треугольники совмѣстятся.

2-е. *По равной сторонѣ* $AB = A'B'$ *и по два равныхъ угла одинаково расположенныхъ*, напр: $A = A'$ и $B = B'$ или $A = A'$ и $C = C'$, (въ семъ случаѣ три угла равны каждый каждому, чл. 195, 5-е.) Положивъ опять $A'b'$ на AB, стороны $A'C'$ и $B'C'$ пойдутъ по направленіямъ AC и BC, посему точка C' упадетъ въ C.

197. И такъ треугольникъ опредѣлится, когда даны, 1-е. Двѣ стороны m и n и составляемый ими уголъ k (чер. 29): сдѣлаемъ уголъ $A = k$, и на его неопредѣленныхъ сторонахъ AG и AH, отложимъ $AB = m$ и $AC = n$; наконецъ проведемъ BC.

2-е. Одна сторона n и два угла k и l (чер. 35). Если данные углы не прилежатъ сторонѣ n, то сначала отыщемъ третій уголъ (чл. 195, 2-е), такъ, что извѣстные углы k и l могутъ быть приняты за прилежащіе данной сторонѣ n. На неопредѣленной сторонѣ AH угла $A = k$, отложимъ $AC = n$; потомъ подъ угломъ $C = l$ проведемъ BC; ABC будетъ требуемый треугольникъ.

Посему, два прямоугольные треугольника равны, когда кромѣ равныхъ гипотенузъ, имѣютъ еще по одному равному острому углу.

198. *Если два треугольника имѣютъ по двѣ стороны, соотвѣтственно равныя, то въ имѣющемъ большій между ними боками уголъ и третій бокъ больше соотвѣтственнаго.* Для доказательства сего предложенія, наложимъ одинъ изъ сихъ треугольниковъ на другой, такъ чтобы совмѣстить одну изъ равныхъ сторонъ, напр: AB (чер. 38, 39 и 40); треугольники примутъ положеніе ABC и ABC', гдѣ $BC' = BC$. При семъ можетъ быть три случая:

1-й. Если C' падаетъ на AC (чер. 38), то очевидно, что $AC' < AC$.

2-й. Если C' падаетъ внѣ ABC (чер. 39), то изъ треугольниковъ BIC, AIC' будетъ $BC < BI + IC$, $AC' < C'I + AI$;

сложивъ сіи неравенства, получимъ $BC + AC' < BC' + AC$ или $AC' < AC$, по равенству BC и BC'.

5-й. Наконецъ, если C' падаетъ внутри треугольника ABC (чер. 40), то (чл. 158, $AC' + C'B < AC + CB$; откуда $AC' < AC$.

Обратное сему предложеніе также справедливо; ибо въ треугольникахъ ABC, ABC' (чер. 39), имѣющихъ общую сторону AB, $BC = BC'$ и 3-ю сторону $AC > AC'$, не можетъ быть уголъ $ABC' = ABC$, ибо въ такомъ случаѣ сіи треугольники были бы равны (чл. 196; откуда $AC = AC'$. Также уголъ ABC' не можетъ быть болѣе угла ABC, потому, что въ слѣдствіе прямаго предложенія, получили бы $AC' > AC$. И такъ уголъ $ABC' < ABC$ (См. зам. стр. 268-й).

Для вышесказаннаго не нужно быть увѣрену въ возможности трехъ случаевъ, послѣдовательно нами разсмотрѣнныхъ; можно однако же убѣдиться въ этомъ. Ибо какъ сумма угловъ всякаго треугольника равна двумъ прямымъ, то означимъ чрезъ A, B, C и A', B', C' углы треугольниковъ, получимъ $A + B + C = A' + B' + C'$; по условію, что уголъ $C'BA < CBA$ или $B' < B$, получимъ $A + C < A' + C'$, но изъ сего нельзя еще ничего заключить объ относительной величинѣ угловъ A и A' или C и C'. И такъ если $A = A'$, то составятся треугольники ABC, ABC' (чер. 38), въ коихъ C будетъ $< C'$. Если $A > A'$, то получимъ чер. 40, гдѣ C будетъ также $< C'$, наконецъ, въ чертежѣ 39-мъ, гдѣ $A < A'$, C можетъ быть $=$, $>$ и $< C'$.

199. Изъ сего слѣдуетъ, что, 1-е. *Два треугольника, имѣющіе всѣ стороны соотвѣтственно равныя, равны между собою* чер. 37; ибо, если $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ и если положимъ, что $A >$ или $< A'$, то изъ сего произойдетъ $BC >$ или $< B'C'$.

2-е. Дабы построить треугольникъ по тремъ извѣстнымъ сторонамъ m, n и p, должно (чер. 26) взять $CC' = m$, потомъ изъ центровъ C и C' радіусами

$CM = n$ и $C'M = p$ описавъ круги; пересѣченія оныхъ въ M и N дадутъ два равные треугольника CMC', CNC', рѣшающіе вопросъ. Два круга сіи могда только пересѣкаются, когда одна изъ сторонъ m будетъ $> n - p$ и $< n + p$; безъ сего двоякаго условія треугольникъ не можетъ существовать.

200. *Части двухъ параллельныхъ линій* AB, CD (чер. 41), *заключающіяся между двумя другими параллельными* BD, AC, *равны между собою;* ибо проведя AD получимъ два равные треугольника ABD, ACD (кромѣ общей стороны AD, уголъ $BAD = ADC$, $BDA = DAC$); посему $AB = CD$. Теорема (чл. 183, 4-е) есть только частный случай сего предложенія.

Обратно, если $AB = CD$ и $AC = BD$, то треугольники имѣютъ всѣ три стороны соотвѣтственно равныя, отсюда слѣдуетъ, что уголъ $DAB = ADC$, $ADB = DAC$; посему AB параллельна къ CD и AC къ BD.

Наконецъ если положимъ, что AB равна и параллельна CD, то AC будетъ также равна и параллельна BD, ибо опять докажется равенство треугольниковъ.

201. *Въ треугольникѣ* ABC (чер. 51), *равнымъ сторонамъ* CB, CA *противолежатъ равныя углы* BAC, ABC. Проведемъ CD въ средину AB; получимъ два равные треугольника BDC, DCA, потому что ихъ соотвѣтственныя стороны равны; слѣд. $A = B$.

Обратно, если $A = B$, то $AC = BC$; ибо въ противномъ случаѣ могли бы на $AC > BC$ взять часть $AE = BC$, и поелику $A = ABC$, $AE = BC$ и AB общая, то треугольники ABE, ABC были бы равны (чл. 196); что не сообразно.

1-е. Въ равностороннемъ треугольникѣ (чер. 30), всѣ углы онаго равны между собою, и каждый есть $\frac{2}{3}$ прямаго, или $\frac{1}{3}D$; въ разностороннемъ треугольникѣ углы не равны.

2-е. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (чер. 31), $ACB + 2A = 2D$, откуда $ACD = \frac{1}{2}C = D = A$, и $A = D = \frac{1}{2}C$, принимая D за прямой уголъ, а C за уголъ при вершинѣ.

3-е. *Линія* CD *проведенная изъ вершины равнобедреннаго треугольника въ средину основанія, перпендикулярна къ сему основанію, и дѣлитъ уголъ при вершинѣ по поламъ.*

4-е. На сторонѣ KI (чер. 16) даннаго угла IKC, возмемъ какую-нибудь точку E, и проведемъ ED параллельно KC; отложимъ $EF = KE$, и пропянемъ KF; въ равнобедренномъ треугольникѣ KEF уголъ $EKF = F$; но $F = FKC$ какъ на-крестъ лежащіе; посему KF дѣлитъ уголъ IKC по-поламъ. Отложивъ также $FD = FK$, получимъ уголъ $DKC = \frac{1}{2}FKC = \frac{1}{4}IKC$, и проч. Чрезъ сіе легкое построеніе уголъ IKC раздѣлится на 2, 4, 8 .... 2^n равныхъ частей.

202. *Во всякомъ треугольникѣ* BAC (чер. 43) *большей сторонѣ противолежитъ большій уголъ.* Положимъ что уголъ $BAC > C$; въ углѣ A, составимъ $DAC = C$; изъ равнобедреннаго треугольника DAC, получимъ $DA = DC$, откуда $BA < BD + DA$ или BC.

Обратно, если $BA < BC$, то уголъ $C < BAC$; ибо если бы C былъ $>$ или $=$ BAC, тогда основываясь на прямомъ предложеніи, получили бы $BA >$ или $= BC$, что противно положенію.

203. *Построить треугольникъ* ABC (чер 38) *по извѣстнымъ двумъ сторонамъ* a, c *и углу* K *противолежащему сторонѣ* a. Сдѣлаемъ уголъ $BAC = K$; на одной изъ неопредѣленныхъ сторонъ, отложимъ $AB = c$, и изъ центра B, радіусомъ $BC = a$, опишемъ дугу CC'; точки ея сѣченій C, C' съ линіею AC, опредѣлятъ треугольники ABC, ABC', изъ коихъ каждый удовлетворяетъ вопросу; посему вообще сія задача имѣетъ два рѣшенія, но должно различать слѣдующіе четыре случая:

1-е. Если радіусъ a дуги менѣе перпендикуляра BD, $a < BD$, то дуга не пересѣкаетъ AC, и задача не возможна.

2-е. Если радіусъ равенъ перпендикуляру, $a = BD$, тогда одинъ прямоугольный треугольникъ ABD удовлетворяетъ вопросу. *Посему два прямоугольные треугольника* BID, BAD (чер. 38) *равны, когда гипотенуза и катетъ соотвѣтственно равны.* Прикладывая сіи треугольники равною стороною BD, гипотенузы BI, BA будутъ въ самомъ дѣлѣ равныя косвенныя, откуда $DI = AD$ (чл. 177).

3-е. Если радіусъ $a > BD$ и $< AB = c$, то косвенныя $BC = BC' < AB$, и находятся слѣдовательно по одну сторону AB (чл. 177); треугольники ABC, ABC' удовлетворяющіе условіямъ задачи, суть два рѣшенія оной. Замѣтимъ что C есть дополненіе угла $AC'B$; ибо въ равнобедренномъ треугольникѣ, BCC' уголъ $C = BC'C$, и такъ, одинъ изъ нашихъ двухъ треугольниковъ *остроугольный*, а другой *тупоугольный*. Еслибы знали предварительно, что искомый треугольникъ имѣетъ тупой уголъ или не имѣетъ онаго, то одно изъ сихъ рѣшеній было бы отвергнуто. (См. чер. 176 и 177).

4-е. Если $a > c$, или $BC > BA$, то BC падаетъ по одну сторону AB, а BC' по другую (чер. 44); посему будетъ только одно рѣшеніе ABC.

5-е. До сихъ поръ мы полагали, что данный уголъ $K = A$ есть острый; если оный будетъ прямой или тупой, то употребивъ тоже строеніе чер. 44, получимъ одно только рѣшеніе ABC'; ибо треугольникъ ABC не можетъ удовлетворять вопросу. Замѣтимъ что сторона a, противуположная тупому углу A, должна быть большая, и еслибъ случилось $a < c$, то задача была бы не возможна.

И такъ *два треугольника, имѣющіе по двѣ соотвѣтственно равныя стороны, и по равному углу, про-*

тивоположному одной изъ сихъ сторонъ, тогда только равны, когда они одинаковаго свойства (т: е: оба прямоугольные или остроугольные, или тупоугольные) (*).

204. *Равныя хорды* CD, AB (чер. 45) *равно отстоятъ отъ центра* O. Проведемъ перпендикуляры *OI*, *OK*; прямоугольные треугольники *OCI*, *OAK* равны; ибо *CI* и *AK* суть половины равныхъ хордъ; посему $OI = OK$.

Обратно, если $OI = OK$, то треугольники также равны и $CD = AB$.

205. *Изъ двухъ неравныхъ хордъ* AB, CD (чер. 42), *наибольшая* AB *ближе къ центру* O. Такъ какъ дуга $AEB > CFD$ (чл. 162, 5-е), то отложивъ дугу $AE = CD$, хорда *AE* будетъ $= CD$, и въ равномъ разстояніи отъ центра *O*; откуда $OL = OI$; но *AE* падаетъ внизу хорды *AB*, посему $OI > OG$, и слѣдовательно $> OK$.

Обратно, если $OL > OK$, то хорда $CD < AB$; ибо иначе, получили бы $CD =$ или $> AB$, откуда основываясь на прямомъ предложеніи, заключили бы, что $OL =$ или $< OK$. (Замѣч. чл. 192).

206. Рѣшимъ теперь нѣкоторыя задачи.

Вписать кругъ (чер. 46) *въ треугольникъ* ABC, т. е. *начертить окружность круга, касающуюся трехъ сторонъ*. Сія задача обращается въ отысканіе внутри треугольника *ABC* точки *O*, которая бы равно отстояла отъ трехъ сторонъ онаго; ибо если перпендикуляры *OE*, *OD*, *OF* равны, то кругъ опи-

(*) Всѣ случаи равенства треугольниковъ, можно выразить такъ: *два треугольника равны, когда они имѣютъ по три соотвѣтственно равныя части въ составляющія*; но должно 1-е, включить случай равенства трехъ угловъ; 2-е, если даны два угла, то надобно чтобъ они были расположены одинакимъ образомъ относительно данной стороны; 3-е, наконецъ, когда имѣютъ по двѣ равныя стороны и по равному углу, противолежащему одной изъ нихъ, то треугольники должны быть одинаковаго свойства.

санный изъ центра O, радіусомъ OE, будетъ касательный тремъ сторонамъ (чл. 188).

Опыщемъ сначала точку o, равно отстоящую отъ двухъ сторонъ AC, AB; проведемъ Ao, изъ равностоящихъ перпендикуляровъ oe, of получимъ равные прямоугольные треугольники Aea, Aof (чл. 203, 2-е). Посему Ao дѣлитъ уголъ A на двѣ равныя части.

Обратно, если прямая Ao дѣлитъ уголъ A пополамъ, то всякая точка o сей линіи, дастъ два равные перпендикуляра oe, of.

Посему всѣ точки линіи AOD находятся въ равномъ разстояніи отъ AB и AC, и сіе свойство принадлежитъ только точкамъ этой линіи; такъ что AD есть *мѣсто* всѣхъ центровъ касательныхъ круговъ къ симъ двумъ сторонамъ, и слѣдовательно искомый центръ, есть одна изъ точекъ линіи AO. По той же причинѣ, сей центръ долженъ находиться на прямой OB, дѣлящей уголъ B пополамъ; и такъ онъ есть точка O, ихъ сѣченія, которая равно отстоитъ отъ трехъ сторонъ треугольника, и только ей одной принадлежитъ сіе свойство. Проведемъ прямую OC; она раздѣлитъ уголъ C на двѣ равныя части; ибо прямоугольные треугольники ECO, DCO имѣютъ общую гипотенузу, и по равной сторонѣ $OD = OE$.

Изъ сего заключимъ, 1-е, *что во всякомъ треугольникѣ можно вписать кругъ*; 2-е, *что можно вписать только одинъ кругъ*; 3-е, *что центръ находится на пересѣченіи двухъ линій, дѣлящихъ пополамъ два изъ угловъ треугольника*; 4-е, *что прямая проведенная изъ его центра въ 3-й уголъ, дѣлитъ оный также на двѣ равныя части* (см. чл. 376, IV).

Пусть p будетъ *периметръ* (окружность) треугольника (чер. 46), какъ $AF = AE$, $BF = BD$, $CE = CD$, то $p = 2AF + 2BD + 2CD$ или $p = 2AF + 2BC$, откуда

$$AF = \tfrac{1}{2}p - BC = AE = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Легко слѣдовательно опискать точки F, E, а потомъ и D, ибо $CE = CD$; можно рѣшить сію задачу проведя окружность касательную къ прямъ спорогамъ въ точкахъ D, E, F.

II. Описать кругъ (чер. 22 въ коемъ бы двѣ данныя прямыя $AB = m$, $AD = n$, стягивали дуги изъ коихъ одна была бы въ двое болѣе другой. Какъ треугольникъ ADB долженъ быть равнобедренный, то проведя $AB = m$, опишемъ изъ центровъ A и B, радіусомъ n, дуги опредѣляющія точку D треугольника ABD; осталется только описать около него кругъ.

III. Построить прямоугольный треугольникъ BAC (чер. 47), когда даны AB одинъ изъ катетовъ и периметръ BEP. Какъ $BC + CA = AE$, то возставивъ изъ A перпендикуляръ $AD = AE$, получимъ $BC = CD$, и треугольникъ BCD будетъ равнобедренный; и такъ, CI перпендикулярная въ срединѣ къ BD опредѣлитъ точку C.

IV. Провести въ углѣ BCA (чер. 53) чрезъ точку I прямую AIB, такъ чтобы составился равнобедренный треугольникъ ABC т. е. чтобъ $AC = BC$, и уголъ $A = B$. Такъ какъ внѣшній уголъ $BCK = A + B$ (чл. 195) $= 2A$, то раздѣливъ уголъ BCK линіею CD пополамъ, DCK будетъ $= A$, а CD параллельна AB. Посему, должно провести CD, и чрезъ точку I ей параллельную AIB.

V. Чрезъ точку M (чер. 45), данную внутри или внѣ круга CB, провести хорду CD извѣстной длины l. Отложимъ произвольно по окружности сію длину l на пр. въ AB; потомъ опустимъ перпендикуляръ OK, и опишемъ кругъ IK, хорда CD будетъ касательная къ сему кругу. И такъ осталется только провести сію касательную чл. 208, II; рѣшеніе будетъ двоякое.

VI. Провести чрезъ данную точку M (чер. 45) линію CD такъ, чтобы часть ея dD, заключающаяся между двумя окружностями DB, db была извѣстной длины l. Если искомая прямая есть CD, то всякая

хорда $AB = CD$, будетъ въ равномъ разстояніи отъ центра, или $KO = OI$, $KB = ID$, $Kb = Id$, и наконецъ $Bb = Dd = l$. Отложивъ длину l отъ какой-нибудь точки B до b, между двумя окружностями, проведемъ прямую bB и продолжимъ ее до A, потомъ опишемъ кругъ IK касающійся Ab, онъ будетъ также касательнымъ и къ искомой прямой CD; останется только провести къ сему кругу IK, чрезъ точку M касательную CD, которая и будетъ требуемая прямая.

VII. Построить прямоугольный треугольникъ BAD (чер. 38), когда даны гипотенуза AB, и сумма или разность катетовъ AD, BD. Пусть $CD = BD = C'D$; въ равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольникахъ BCD, $BC'D$, углы C, C' равны половинѣ прямаго (чл. 201). Посему въ треугольникѣ BAC или BAC', кромѣ BA, извѣстны еще уголъ C или C' и сторона AC или AC', проведемъ CB или $C'B$ подъ угломъ равнымъ половинѣ прямаго; изъ центра A, радіусомъ AB, опишемъ кругъ, пересѣкающій CB или $C'B$ въ вершинѣ B (вообще будетъ двѣ точки сѣченія, и слѣдовательно два рѣшенія чл. 203): останется для довершенія построенія требуемаго треугольника ABD, опустить перпендикуляръ BD.

Измѣреніе угловъ въ кругѣ.

207. Мѣра угловъ, имѣющихъ вершину при центрѣ извѣстна (чл. 169); отыщемъ сію мѣру для угла, котораго вершина гдѣ нибудь; и разсмотримъ сначала тотъ случай, когда уголъ составленъ двумя хордами и вершину имѣетъ на окружности; таковый уголъ называется *вписаннымъ и измѣряется половиною дуги, заключающеюся между его сторонами.*

1-е. Если одна изъ сторонъ AD угла CAD (чер. 48), проходитъ чрезъ центръ C, то проведя EF параллельно AG, получимъ $GE = AF$ (чл. 190; и по равен-

ошву уголъ ACF и DCE, будетъ также $ED = AF$: посему E есть средина дуги GD, и уголъ ECD или ему равный GAD чл. 182, 4-е), имѣетъ мѣрою ED или половину дуги GD.

2-е. Если центръ C заключается между сторонами угла BAG, то проведя діаметръ AD, получимъ углы BAD, DAG измѣряющіеся половинами дугъ BD и DG; посему сумма оныхъ или половина дуги BDG, есть мѣра угла BAG.

3-е. Если центръ C находится внѣ угла HAB, то такимъ же образомъ для мѣры угловъ HAD, BAD получимъ $\frac{1}{2}HD$, и $\frac{1}{2}DB$; разность оныхъ или $\frac{1}{2}HB$ есть мѣра угла HAB.

4-е. Наконецъ, если уголъ TAB составленъ изъ касательной AT и хорды AB, то какъ діаметръ AD перпендикуляренъ къ AT, слѣд: уголъ TAD измѣряется четвертью круга или половиною дуги ABD, а уголъ BAD половиною дуги BD, посему разность сихъ дугъ $\frac{1}{2}AHB$, есть мѣра угла TAB.

Обратно, если какой-нибудь уголъ имѣетъ мѣрою $\frac{1}{2}BG$, то вершина его находится на окружности; ибо предположивъ что $\frac{1}{2}BG$ измѣряетъ уголъ BIG, и составя уголъ BAG имѣющій туже мѣру, получили бы $BIG = BAG$, что невозможно (чл. 195, 6-е).

Продолжимъ сторону HA угла HAG до K; половина дуги GAH измѣряетъ уголъ KAG; ибо KAG есть дополненіе угла HAG.

Очевидно, что

Уголъ BAD (чер. 49) *вписанный въ полукругъ, есть прямой*, ибо измѣряется половиною полуокружности.

Всѣ вписанные углы A, C, D.... (чер. 50), опирающіеся на одну дугу BE, имѣя ту же мѣру, равны между собою.

Если уголъ BAE, имѣя постоянную величину, движется такъ, что одна изъ его сторонъ всегда про-

ходишъ чрезъ B, а другая чрезъ E, що вершина онаго принимая послѣдовашельно положенія A, C, D... опишешъ окружность.

208. Посредствомъ сего предложенія рѣшаются различныя задачи.

I. *Возставить перпендикуляръ* AD (чер. 49) *изъ оконечности линіи* BA, *не продолжая оной.* Какъ уголъ A долженъ быть прямой, то всякая линія BD будешъ діаметромъ круга проходящаго чрезъ A. И шакъ опишемъ, изъ какого-нибудь центра C, кругъ проходящій чрезъ A; потомъ чрезъ шочку B, гдѣ сей кругъ пересѣкаешъ AB, проведемъ діаметръ BD, который и опредѣлишъ шочку D; посему AD будешъ искомый перпендикуляръ.

II. *Чрезъ точку* D (чер. 51), *данную внѣ круга, провести къ оному касательную* AD. Какъ уголъ CAD, составленный изъ касашельной и радіуса, долженъ быть прямой, слѣдовашельно оный вписанъ въ полукругѣ, коего діаметръ есть CD. И шакъ опишемъ сію окружность $CADB$; она пересѣчешъ предложенный кругъ въ шочкѣ прикосновенія A. Кромѣ касашельной AD, получишся еще другое рѣшеніе BD, и доказано уже, что только сіи двѣ линіи удовлешворяюшъ вопросу.

III. *Раздѣлить какой-нибудь уголъ* ACB (чер. 52) *на три равныя части.* Изъ вершины C опишемъ кругъ $IFAB$ и положимъ линію AO шакъ проведенною, что уголъ $O = \frac{1}{3} ACB$. Какъ уголъ ACB или $3O$, внѣшній для шреугольника AOC, то $3O = O + OAC$; откуда $OAC = 2O$. Проведя радіусъ FC изъ равнобедреннаго шреугольника FAC, получимъ $OAC = AFC$, углы, коихъ мѣра есть $\frac{1}{2} ABG$, ш. е.

$$OAC = \frac{1}{2} ACB + \frac{1}{2} BCG \text{ или } 2O = \frac{3}{2} O + \frac{1}{2} BCG,$$

или наконецъ $O = BCG - FCO$; и шакъ, шреугольникъ FCO есть равнобедренный и $OF =$ радіусу FC круга.

Посему предложенная задача обращается въ слѣдующую: провести прямую AO такъ, чтобы внѣшняя ея часть OI' равнялась радіусу; тогда уголъ O будетъ третья угла ACB; дуга BG или FI третья дуги AB. По начальная Геометрія не можетъ дать средства проводить сію прямую AO; ибо въ оной разсматриваются только прямая линія и кругъ, слѣд. употребляется одна линейка и циркуль. Въ послѣдствіи увидимъ какимъ образомъ производится *раздѣленіе угла на три равныя части*, здѣсь же должны довольствоваться приближеніемъ.

IV. Описать кругъ, проходящій чрезъ двѣ данныя точки B, E (чер. 53, и чтобъ вписанные въ ономъ углы O равнялись данному углу A; сіе выражается такъ: *на прямой* BE *описать сегментъ, вмѣщающій данный уголъ* A. Касательная въ точкѣ I составляетъ также уголъ $BIK = A = O$ (ст. 207, 4-е); посему, если проведемъ прямую KEI такъ, что уголъ $BEK = A$, то она будетъ касательная. Слѣдовательно вопросъ обращается въ слѣдующій: провести кругъ чрезъ точку B, и который бы касался линіи KI въ точкѣ E. Для сего возставимъ CE перпендикулярно къ KI и изъ средины линіи BE перпендикуляръ CG; точка C будетъ искомый центръ.

Сіе строеніе часто употребляется, особенно когда надобно составить треугольникъ, въ которомъ между прочими его частями, извѣстны сторона и противоположный уголъ, какъ въ слѣдующихъ вопросахъ.

V. Построить треугольникъ BDE (чер. 54), коего извѣстны основаніе b, высота h и уголъ A при вершинѣ. Проведя $BE = b$ и ей параллельную DD', въ разстояніи $HG = h$ отъ BE; опишемъ на BE сегментъ, вмѣщающій данный уголъ A, тогда точки, въ коихъ DD' пересѣкаетъ кругъ, дадутъ два равные треугольника BDE, $BD'E$, удовлетворяющіе вопросу.

VI. Даны три точки B, A, C (чер. 39), опредѣлить на той же плоскости четвертую точку C', когда извѣстны углы $BC'C$ и $BC'A$. Опишемъ на BC сегментъ, вмѣщающій уголъ $BC'C$ и на BA сегментъ, вмѣщающій уголъ $BC'A$: искомая точка C' будетъ на пересѣченіи двухъ окружностей (см. чл. 365, VI). Задача дѣлается неопредѣленною или невозможною, смотря потому, обѣ или одна изъ окружностей проходятъ чрезъ три точки ABC.

VII. Построить треугольникъ ABC (чер. 46), коего извѣстны основаніе AB, противоположный уголъ C и радіусъ OP вписаннаго круга. Поелику OA и OB дѣлятъ по поламъ углы A и B искомаго треугольника ABC, а въ треугольникѣ AOB уголъ O есть дополненіе суммы $OAF + OBF$ или $\frac{1}{2}(A+B)$; посему $O = 2D - \frac{1}{2}(A+B)$; и какъ $A+B = 2D - C$, то получимъ $O = D + \frac{1}{2}C$. Найдя такимъ образомъ уголъ O, опредѣлимъ точку O (задача V), потомъ опишемъ кругъ EDF, который бы касался линіи AB, въ точкѣ F, касательныя AE, BD довершатъ построеніе искомаго треугольника.

VIII. Даны треугольникъ $A'B'C'$ (чер. 55) и двѣ одноцентральныя окружности AO, CO, построить треугольникъ ABC, коего бы двѣ вершины A и B находились на большей окружности, а третья C на меньшей, и который былъ бы равноуголенъ данному, т. е. $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$.

Уголъ A имѣетъ мѣрою $\frac{1}{2}BD$, если изъ A', какъ центра, радіусомъ AO опишемъ дугу HI, то она составитъ половину дуги BD. И такъ, возмемъ гдѣнибудь на большей окружности дугу $BD = 2.HI$; стороны AB и AC пройдутъ чрезъ B и D. Сверхъ того, уголъ BCD, будучи дополненіемъ угла C', опредѣлитъ мѣсто вершины C, когда опишутъ на хордѣ BD сегментъ $BCcD$, вмѣщающій сей уголъ $2D - C'$;

прямая DCA опредѣлитъ точку A и искомый треугольникъ.

Точка c опредѣляетъ другой треугольникъ aBc, удовлетворяющій вопросу; сверхъ того можно хордѣ BD давать безконечное число положеній и для каждаго изъ нихъ получимъ по два рѣшенія.

209. Уголъ BAC, *коего вершина* A *находится гдѣ-нибудь относительно круга* (чер. 56 и 57), *имѣетъ мѣрою половину суммы или разности дугъ* BC, DE, *заключающихся между его сторонами; смотря потому, находятся ли вершина* A *внутри или внѣ окружности, проведемъ* EF *параллельно* DC.

1-е. Если A находится внутри окружности (чер. 56), то мѣра угла $E = BAC$ будетъ

$$\tfrac{1}{2}BF = \tfrac{1}{2}(BC + CF = \tfrac{1}{2}(BC + DE).$$

2-е. Если A находится внѣ круга (чер. 57), то мѣра угла $A = BEF$ будетъ $\tfrac{1}{2}BF = \tfrac{1}{2}CB - CF) = \tfrac{1}{2}(CB - ED)$.

И такъ мѣра угла A будетъ $\tfrac{1}{2}a \pm b$, положивъ $a = BC$, b DE. Сія формула можетъ даже быть общею, ибо b о соотвѣтствуетъ углу, коего вершина на окружности и $b = a$, когда уголъ при центрѣ.

Пропорціональныя линіи. Подобные треугольники.

210. Если изъ двухъ какихъ-нибудь прямыхъ AH, ah (чер. 58), одна раздѣлится на равныя части AB, BC, CD.... и чрезъ точки дѣленія проведутся въ произвольномъ направленіи параллельныя Aa, Bb, Cc... Hh, то части ab, bc, cd...., заключающіяся между сими параллельными по линіи ah будутъ равны между собою. Ибо если проведемъ ai, bl, cm... параллельныя AH, то получимъ треугольники aib, blc, cmd.... равные между собою, потому что $ai = bl = cm$.... $= AB = BC = $....

Изъ сего слѣдуетъ, что AB содержится въ AH столько разъ, сколько ab въ ah, откуда $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$; $AE : EH :: ae : eh$.

211. *Двѣ прямыя* AH *и* ah (чер. 59) *пересѣкаются тремя какими-нибудь параллельными* Aa, Ee, Hh *на части пропорціональныя* $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$; ибо,

1-е. Если части AE, EH соизмѣримы, то нанеся общую мѣру на AH, она будетъ содержаться точное число разъ въ AE и EH: и такъ произойдетъ предыдущій случай; ибо параллельныя къ Aa, проведенныя чрезъ точки дѣленія, раздѣлятъ ah на равныя части.

2-е. Если AE и HE несоизмѣримы, то раздѣлимъ AE на произвольное число равныхъ частей и нанесемъ одну изъ нихъ отъ E до H; пусть I будетъ точка дѣленія, ближайшая къ H; проведемъ Ii параллельно Hh. По причинѣ соизмѣримости линій AE и EI, будетъ $\frac{EI}{EA} = \frac{ei}{ea}$: и какъ $EI = EH - HI$, $ei = eh - hi$; то получимъ $\frac{EH}{EA} - \frac{HI}{EA} = \frac{eh}{ea} - \frac{hi}{ea}$. Но части HI и hi, отъ увеличиванія числа дѣленій линіи AE, могутъ уменьшаться по произволенію, прочіе же члены остаются постоянными; такъ что точки H и h суть предѣлы точекъ I и i, посему вторые члены обѣихъ частей уменьшаются до безконечности; откуда, основываясь на предложеніи чл. 115, получимъ $\frac{EH}{EA} = \frac{eh}{ea}$.

Изъ доказанной пропорціи будетъ (чл. 73) $\frac{AE}{AH} = \frac{ae}{ah}$; и такъ

$$\frac{AH}{ah} = \frac{AE}{ae} = \frac{EH}{eh}.$$

212. *Линія* EB, *параллельная основанію треугольника* HAC (чер. 59), *дѣлитъ его стороны на*

части пропорціональныя; ибо $AB = ae$, $BC = eh$; ошкуда

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{EH}{BC}.$$

Обратно, если $\frac{AE}{AB} = \frac{FH}{BC}$, то EB параллельна HC; ибо въ противномъ случаѣ, проведя HL параллельно EB, получили бы $\frac{AE}{AB} = \frac{FH}{BL}$; посему $BL = BC$.

213. Изъ сего слѣдуетъ, что 1-е. когда даны три линіи m, n, p (чер. 59), то дабы *отыскать четвертую пропорціональную*, т. е. такую линію x, чтобы $\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$, должно взять произвольный уголъ HAC, отложить на его сторонахъ $AE = m$, $AB = n$, $AH = p$, потомъ провести EB и ей параллельную HC, AC будетъ искомая четвертая пропорціональная.

2-е. *Линіи* AB, AC, AD, AE, AF.... (чер. 60), *проведенныя изъ общей точки* A, *раздѣляются параллельными* BF, bf *на части пропорціональныя;* ибо взявъ сначала AB и AC, будетъ $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$; также изъ AC и AD получимъ $\frac{AC}{ac} = \frac{AD}{ad}$ и проч. Соединивъ сіи пропорціи, имѣющія общее содержаніе, найдемъ, что

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{AD}{ad} = \frac{AE}{ae} = \frac{AF}{af} \ldots .$$

3-е. *Дабы раздѣлить данную прямую* AF (чер. 61) *на нѣсколько равныхъ частей*, на пр. на пять, должно провести неопредѣленную линію aF и отложить на ней пять равныхъ произвольныхъ частей Fe $ed - dc \ldots$, потомъ, проведя Aa и ей параллельныя Bb, Cc, Dd, Ee, получимъ $AB = BC = CD = \ldots$.

4-е. Дабы раздѣлить данную линію $a'F$ (чер. 62) на части пропорціональныя частямъ другой данной прямой af, проведемъ неопредѣленную линію AF, на

которой отложимъ $FE = fe$, $ED = ed$, $DC = dc$....; потомъ, проведя Aa' и ей параллельныя Bb'...., получимъ искомыя точки дѣленія e', d', c'....

Если fa есть одно изъ протяженій какой-нибудь фигуры, то желая оное обратить въ Fa', должно части fe, fd... превратить въ Fe', Fd'.... И такъ, полагая fa размѣромъ какого-нибудь чертежа, оный обратится въ Fa'. На семъ-то строеніи основанъ *способъ переводить планы* съ одного размѣра на другой.

214. Два треугольника ABC, $A'B'C'$ (чер. 63), имѣющіе углы соотвѣтственно равные, называются *подобными* или *равноугольными*, а стороны прилежащія равнымъ угламъ, *сходственными*. Полагая $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$; сходственныя стороны будутъ AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$. *Сходственныя стороны отличаются тѣмъ, что они противолежатъ равнымъ угламъ.*

Въ двухъ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціональны. Въ самомъ дѣлѣ, наложимъ треугольникъ $A'B'C'$ на ABC такъ, чтобы сторона $A'C'$ упала на сходственную AC отъ A до E, по равенству угловъ A и A', сторона $A'B'$ пойдетъ по AB отъ A до D. Но уголъ $AED = C' = C$; посему DE параллельна BC (чл. 181, 4-е); и получимъ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Потомъ проведемъ EF параллельно AB, будетъ $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$; и какъ (чл. 200) $BF = DE = B'C'$, то получимъ наконецъ

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Обратно, два треугольника подобны, если ихъ сходственныя стороны пропорціональны. Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, то отложивъ $AD = A'B'$,

и проведя DE параллельно BC, получимъ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$; и по равенству AD и $A'B'$, 1-е отношеніе будетъ общее обѣимъ пропорціямъ; посему прочія отношенія будутъ равны, откуда $A'C' = AE$, $B'C' = DE$. Треугольники ADE, $A'B'C'$ равны, и слѣдственно ABC, $A'B'C'$ равноугольны.

215. *Два треугольника* ABC, A'B'C' (чер. 63) *подобны, если имѣютъ по равному углу* A = A', *заключающемуся между пропорціональными сторонами* $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$. Ибо отложивъ $A'C'$ отъ A до E, $A'B'$ упадетъ на AD и $A'B'C'$ на ADE. Но по положенію, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$; посему DE параллельна BC (чл. 212 и треугольники ABC и ADE или $A'B'C'$ равноугольны.

216. Изъ (чер. 63), 1-е. *Два треугольника подобны, если ихъ стороны соотвѣтственно параллельны.* Сіе очевидно для треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ (чл. 183, 3-е); чтожъ касается до ABC и $C'IH$, то продолживъ стороны въ A' и B' и проведя $A'B'$ параллельно HI или AB, получимъ $I = A'$, $H = B'$, какъ внутреннія на-крестъ. Посему $C'IH$ равноуголенъ съ $A'B'C'$, будетъ такимъ же относительно ABC. *Параллельныя стороны суть сообственныя.*

2-е. *Два треугольника* ABC, A'B'C' (чер. 64 *подобны, если ихъ стороны взаимно перпендикулярны;* ибо, продолживъ стороны $A'C'$, $B'C'$ до встрѣчи ихъ въ F и E съ AC, въ прямоугольныхъ треугольникахъ BCG, $EC'F$, углы C и F, также какъ C' и E суть дополнительные: посему $C = C'$. Такимъ же образомъ докажемъ, что $A = A'$, $B = B'$. *Перпендикулярныя стороны суть сообственныя.*

3-е. *Линіи* AB, AC, AD.... (чер. 60), *проведенныя изъ одной точки* A, *раздѣляютъ всякія двѣ параллельныя* BF, bf *на части пропорціональныя;* ибо

изъ подобныхъ треугольниковъ ABC, Abc, $\frac{AC}{Ac} = \frac{BC}{bc}$; такимъ же образомъ изъ ACD, Acd, получимъ $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{Cd}$; посему $\frac{CD}{cd} = \frac{BC}{bc}$. По той же причинѣ $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$....

4-е. Если параллельныя линіи Aa, Ee, Hh (чер. 59) равно отстоятъ, то E, e суть средины линій AH и ah, и обратно. Сверхъ того, Ee равно полусуммѣ $(Aa+Hh)$, потому что, проведя AC параллельно ah, линія $EB = \frac{1}{2}HC$ и $Be = Aa = Ch = \frac{1}{2}(Aa + Ch)$.

5-е. На сихъ-то началахъ основано строеніе размѣровъ (Echelles). Отложивъ на неопредѣленной прямой CI (чер. 65) какое-нибудь число равныхъ частей, на пр. 5 отъ C до D, возставляютъ изъ точекъ дѣленія перпендикуляры, потомъ на CA откладываютъ также 5 равныхъ произвольныхъ частей Ca, ac....; изъ точекъ a, c, e.... проводятъ неопредѣленныя параллельныя къ CI; наконецъ чертятъ *поперечныя* (transversales) линіи CB, $5F$.... Изъ сего строенія слѣдуетъ, что ab, cd, ef... суть $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$... линіи AB; ибо Ca, Cc, Ce.... составляютъ $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$.... линіи CA; eo будетъ $= ef + fo$ или $(\frac{3}{5} + \frac{15}{5})$ линіи AB или наконецъ $\frac{18}{25}$ CD.

Такимъ образомъ линія CD раздѣлилась на 25 частей; чего по малости оныхъ нельзя было бъ сдѣлать столь явственно другимъ способомъ. Сей размѣръ можно употреблять для раздѣленія какой-нибудь линіи на равныя части: чтобъ найти, сколько содержится частей размѣра въ данной линіи, должно взявъ ей равное раствореніе циркуля, нанести оное на одну изъ неопредѣленныхъ параллельныхъ, такъ чтобъ оно соотвѣтствовало совершенно, или сколько возможно, дѣленіямъ размѣра; если на пр: найдемъ, что данная линія равна разстоянію отъ L до o, то въ ней заключается 57 частей. Чтобъ раздѣлить Lo на 9, то взявъ 9-ю долю 57, равную 6, берутъ столько

частей размѣра, какъ велико число единицъ частнаго, т. е. здѣсь шесть частей.

Сей размѣръ особенно употребляется для уменьшенія линій какого-нибудь чертежа въ данномъ отношеніи: для удобности, обыкновенно дѣлятъ CD и CA на 10 частей, и сходно съ симъ раздѣленіемъ означаютъ части происходящія отъ поперечныхъ линій. Таковый размѣръ называется *десятичнымъ* (см. чер. 65-й bis).

6-е. Вотъ другой достойный замѣчанія способъ дѣленія размѣра на малѣйшія дроби. Если равныя линіи AB, CD (чер. 66) раздѣлятъ одну на 5, а другую на 6 равныхъ частей, въ точкахъ 1, 2, 3..., 11, 12..., то линія $A11$, которую означимъ чрезъ a, будетъ 5-я доля AB, $a = \frac{1}{5} AB$. Но какъ $C1 = \frac{1}{6} AB$, слѣдовательно $A11 - C1 = \frac{1}{5} AB - \frac{1}{6} AB = \frac{1}{30} AB$ или $\frac{1}{6} a$. И такъ приложивъ линейки точками A и C, D и B, точка 11 перейдетъ точку 1 на $\frac{1}{6} a$, 12 перейдетъ точку 2 на $\frac{2}{6} a$, 13 перейдетъ точку 3 на $\frac{3}{6} a$ ....

Посему если найдемъ, что данная линія простирается на размѣрѣ отъ нуля до i, то въ ней заключается 13 частей, и дробь $i13$, которую должно опредѣлить. Приложимъ линейку CD (называемую по имени изобрѣтателя *Нониусомъ*) по AB въ $C'D'$, такъ чтобы точка C' соотвѣтствовала i; разсматривая рядъ дѣленій, найдемъ, что два изъ нихъ сходятся H и 5, и такъ 17 перейдетъ точку 4 на $\frac{1}{6} a$, 16 перейдетъ точку 3 на $\frac{2}{6} a$; наконецъ 13 перейдетъ C' или i, на $\frac{5}{6} a = i13$, которая и будетъ искомая дробь, а $13\frac{5}{6}$ длина данной линіи въ частяхъ единицы a.

Должно стараться дѣлать сколько возможно мѣлкія дѣленія, дабы дроби выходили менѣе, и чтобы быть увѣрену, что два дѣленія всегда чувствительно сойдутся. Если $n - 1$ частей AB соотвѣтствуютъ n дѣленіямъ CD, то нониусъ даетъ $n^{\text{го}}$ долю, одного дѣленія AB; и если соединеніе произойдетъ на k раз-

дѣленій нонiуса, то будетъ $\frac{k}{n}$. И такъ цѣлое опредѣляется линiею AB, а дробь нонiусомъ.

Въ размѣрѣ чер. 66 *bis*, 9 сто частей раздѣлены на нонiусѣ на 10, отъ чего и получаются 10-я доли: здѣсь съ дѣленiемъ размѣра сходится 6-е дѣленiе нонiуса; посему длина отъ o до A будетъ 57,6.

Такимъ же образомъ раздѣляются дуги круга угломѣрныхъ орудiй. Полагая окружность (стр. 254) раздѣленною на 360 равныхъ частей или градусовъ, а каждый градусъ по-поламъ, и если алидадъ, движущiйся около центра, имѣетъ на оконечности своей нонiусъ, коего начало, означенное o, соотвѣтствуетъ оси алидады, и который заключая 29 сихъ полуградусовъ, раздѣленъ на 30 частей, то полуградусы будутъ разнствовать отъ сихъ подраздѣленiй нонiуса на $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$.., отъ чего слѣдовательно получатся 60-я доли градуса или *минуты*. Если поставимъ нуль алидады (чер. 8) въ a, т. е. на o круга, и направимъ алидадъ на предметъ A, поставивъ инструментъ неподвижнымъ въ плоскости точекъ A, C, B, будемъ обращать алидадъ по лимбусу для наведенiя на предметъ B, нуль алидады перейдетъ въ точку b круга, и дуга ab, измѣряющая предложенный уголъ ACB, будетъ составлена, на пр. изъ 53-хъ градусовъ и дроби, которая опредѣлится въ минутахъ посредствомъ нонiуса. Останется только разсмотрѣть, которое изъ дѣленiй нонiуса сходится съ дѣленiемъ круга, щитая порядокъ оныхъ отъ нуля. Для сего дѣленiя нонiуса, означены чрезъ каждыя пять раздѣленiй: такимъ образомъ градусы щитаются по кругу, а минуты по нонiусу.

217. Пусть будетъ треугольникъ ABC (чер. 67) прямоугольный въ A; если на гипотенузу BC опустимъ перпендикуляръ AD, то два отдѣльные треугольника ABD, ADC будутъ подобны между собою,

и треугольнику ABC; ибо уголъ B есть общій треугольникамъ ABD и ABC, а углы BDA и A прямые; посему уголъ C будетъ равенъ BAD, $C = \alpha$. Также треугольники ADC и ABC, кромѣ прямаго угла, имѣютъ уголъ C общій, слѣдовательно $\beta = B$. Сверхъ того стороны треугольниковъ ABD и ADC перпендикулярны. Составивъ изъ сходственныхъ сторонъ пропорціи, найдемъ, что

1-е. *Перпендикуляръ* AD *есть средній пропорціональный между отрѣзками гипотенузы* BC. Ибо изъ треугольниковъ ABD и ADC будетъ $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$, откуда $AD^2 = BD \times DC$.

2-е. *Каждый катетъ* AB *есть средній пропорціональный, между всею гипотенузою* BC *и прилежащимъ отрѣзкомъ* BD. Ибо изъ треугольниковъ ABD, ABC будетъ $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$, или $AB^2 = BD \times BC$; изъ треугол. ADC и ABC получимъ $AC^2 = DC \times BC$.

3-е. *Квадратъ гипотенузы* BC *относится къ квадрату катета* BA, *какъ гипотенуза* BC *къ прилежащему сему катету отрѣзку* BD. Сіе слѣдуетъ изъ уравненія $AB^2 = BD \times BC$, раздѣленнаго на BC^2; ибо получимъ $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC}$.

4-е. *Квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.* Въ самомъ дѣлѣ, сложивъ уравненія $AB^2 = BD \times BC$, $AC^2 = DC \times BC$, найдемъ, что

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC) = BC^2.$$

Означивъ чрезъ a, b, c стороны противоположныя угламъ A, B, C, получимъ

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Посредствомъ сего 47-го Эвклидова предложенія, важнѣйшаго во всей Геометріи, опредѣляется длина одной изъ сторонъ всякаго прямоугольнаго треугольника, когда извѣстны двѣ другія; въ самомъ дѣлѣ

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2)} \text{ и } b = \sqrt{(a^2 - c^2)}.$$

И такъ, опнеся стороны a, b, c къ какой-нибудь единицѣ и измѣривъ двѣ изъ оныхъ (чл. 156), число единицъ третьей опредѣлится простымъ вычисленіемъ. Пусть на пр. $b = 3$, $c = 4$, найдемъ, что $a^2 = 9 + 16 = 25$, откуда $a = 5$.

Обратное сему предложеніе происходитъ изъ слѣдующихъ двухъ. Можно однако же доказать прямо, что если $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (чер. 31), *то треугольникъ* ADC *есть прямоугольный*: ибо проведемъ къ CD перпендикуляръ DB и отложимъ $DB = AD$; треугольникъ DCB будетъ прямоугольный, и получимъ $CB^2 = DB^2 + DC^2$; и такъ $CB^2 = AC^2$, и треугольники ACD, BCD равны. Посему и проч.

218. Если уголъ A (чер. 38) треугольника ABC есть острый, то опустивъ на AC перпендикуляръ BD, составятся два прямоугольные треугольника CBD, ABD и получимъ

$$BD^2 = BC^2 - DC^2; \quad BD^2 = AB^2 - AD^2;$$

откуда $BC^2 = AB^2 + DC^2 - AD^2$, $a^2 = c^2 + DC^2 - x^2$, означивъ чрезъ a, b, c три стороны BC, AC, AB треугольника ABC и положивъ $AD = x$. Но $DC = AC - AD = b - x$; подставивъ будетъ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Если предложенный треугольникъ есть ABC', то $DC' = AD - AC' = x - b$; подставя, найдется тоже самое уравненіе.

Наконецъ въ треугольникѣ CBA' получимъ такожде $a^2 = c^2 + DC^2 - x^2$, но $DC = CA' + A'D = b + x$, посему

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

Таковы суть отношенія между сторонами всякаго треугольника. И такъ, когда даны три стороны треугольника, то легко судить о свойствѣ каждаго изъ его угловъ; составивъ изъ двухъ меньшихъ сторонъ b и c прямой уголъ BAC (чер. 32), проведемъ BC; если BC будетъ $>$, $<$ или $= a$, то уголъ противолежащій большей сторонѣ a, будетъ

тупой, острый или прямой: въ семъ послѣднемъ случаѣ BAC есть искомый треугольникъ. Когда стороны даны въ числахъ, то составивъ изъ нихъ квадраты a^2, b^2 и c^2, сравнимъ большій съ суммою двухъ прочихъ; если онъ будетъ равенъ, менѣе или болѣе сей суммы, то противолежащій уголъ будетъ прямой, острый или тупой.

220. *Если линія* AC (чер. 68), *раздѣляетъ уголъ* A *при вершинѣ треугольника* BAD *пополамъ, то стороны* AB *и* AD *пропорціональны отрѣзкамъ* BC *и* CD *основанія.* Въ самомъ дѣлѣ, продолживъ DA до встрѣчи въ E съ линіею BE, параллельною къ AC, будетъ $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{BC}$: но уголъ $BAC = ABE = CAD$, и уголъ $E = DAC$; слѣдственно $E = ABE$. Треугольникъ EAB будучи равнобедренный, $AE = AB$; посему $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

221. *Части двухъ хордъ* EE, DC (чер. 69), *пересѣкающихся въ точкѣ* A, *составляютъ равныя произведенія* (*) BA × AE = DA × AC. Въ самомъ дѣлѣ, проведя BC и DF, получимъ по равенству вписанныхъ угловъ $E = C$, $B = D$, опирающихся на дуги BD и CE (ч. 207), два подобные треугольника BAC, DAE. Сравнивъ ихъ сходственныя стороны, будетъ $\frac{BA}{AC} = \frac{AD}{AE}$, откуда $BA \times AE = DA \times AC$.

222. Линія AD (чер. 70) перпендикулярная къ діаметру BE, называется *ординатою.*

Ордината AD *есть средняя пропорціональная между отрѣзками* AB, AE *діаметра;* ибо въ предыдущей пропорціи AD будетъ $= AC$. Впрочемъ сіе предло-

(*) Сія и члена 224 теоремы, выражаются обыкновенно такимъ образомъ: *хорды пересѣкаются на части обратно пропорціональныя; пересѣкающіяся обратно пропорціональны внѣшнимъ своимъ отрѣзкамъ.* Мы предпочли вышеупотребленное выраженіе, какъ болѣе легкое и болѣе удобопонятное.

женіе тожественно съ теоремою чл. 217, 1-е, потому что (чер. 67) прямоугольный треуг. ABC можетъ быть вписанъ въ полкругѣ.

И такъ, *чтобъ отыскать среднюю пропорціональную линію* x *между двумя данными* m и n (чер. 70), должно на неопредѣленной линіи отложить $AB = m$, $AE = n$; изъ точки A возставить перпендикуляръ DC, и на діаметрѣ BE описать кругъ $BDEC$; AD будетъ x.

223. Изъ предложенія (чл. 217, 2-е) слѣдуетъ также, что (чер. 67) *хорда* AB *есть средняя пропорціональная между діаметромъ* BC *и прилежащимъ отрѣзкомъ* BD. Посему (чер. 71) $BA^2 = BC \times BD$ и $BE^2 = BC \times BF$, откуда $\frac{BA^2}{BE^2} = \frac{BD}{BF}$: *и такъ квадраты двухъ хордъ, проведенныхъ изъ одной точки окружности, относятся между собою какъ отрѣзки діаметра, проходящаго чрезъ туже точку.*

224. *Всякая перескающая* AE, AC (чер. 72), *умноженная на свой внѣшній отрѣзокъ* AB, AD *даетъ тоже произведеніе* $AB \times AE = AD \times AC$: ибо проведя линіи DE, BC, получимъ подобные треугольники ABC, ADE; потому что уголъ A общій, а уголъ $C = E$ (чл. 207). И такъ будетъ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, откуда $AB \times AE = AD \times AC$.

225. *Касательная* AB (чер. 73) *есть средняя пропорціональная между перескающею* AC *и внѣшнею ея частію* AD. Въ самомъ дѣлѣ проведемъ BD, треугольники ABD, ABC будутъ подобны; ибо уголъ A общій, а уголъ $C = ABD$ (чл. 207); и такъ $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, или $AB^2 = AD \times AC$.

226. Сіи теоремы могутъ быть соединены въ одну; ибо пусть a и b будутъ разстоянія измѣренныя по прямой отъ точки A до окружности AC (чер. 69, 72), или $AD = a$, $AC = b$; положимъ также, что a' и b' означаютъ подобныя же части другой линіи ABE,

или $AB = a'$, $AE = b'$; получимъ $ab = a'b'$, подъ какимъ бы угломъ линіи ни пересѣкались и гдѣ бы ни была точка A. Обращая AE около A, точки B и E перемѣстятся, и когда линія AB сдѣлается касательною, то B и E сольются; и такъ будетъ $a' = b'$, откуда $ab = a'^2$.

227. На сихъ различныхъ предложеніяхъ основано рѣшеніе нижеслѣдующихъ задачъ:

I. *Измѣрить высоту зданія* AB (чер. 74). Поставивъ вертикально коль DE, направляютъ лучь зрѣнія DB на вершину B, и означаютъ точку C пересѣченія онаго съ горизонтомъ; отъ чего получится $\frac{CE}{DE} = \frac{CA}{AB}$, гдѣ все извѣстно, кромѣ 4-го члена AB, который опредѣлится вычисленіемъ (чл. 72, 3-е).

Сіе дѣйствіе удобнѣе исполняется посредствомъ длины тѣней AC и $C'E'$, отбрасываемыхъ на горизонтѣ зданіемъ AB и колемъ $D'E'$.

II. *Провести касательную къ двумъ кругамъ* (чер. 75). Пусть будетъ $AD'D$ сія касательная; соединимъ центры линіею $AC'C$ и проведемъ радіусы CD, $C'D'$; получимъ $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'D'}{CD}$. Но для пересѣкающей AI, подставивъ CI и $C'I'$, вмѣсто CD и $C'D'$, найдемъ, что $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'I'}{CI}$; посему CI параллельна $C'I'$.

И такъ проведя два какіе-нибудь параллельные радіуса CI, $C'I'$, прямая II' пересѣчетъ CC', въ точкѣ A, чрезъ которую проведя касательную къ одному изъ круговъ, она будетъ таковою же и для другаго. Если круги не пересѣкаются, то получимъ другую точку A', удовлетворяющую задачѣ; отъ чего произойдетъ четыре касательныя.

III. *Чрезъ двѣ данныя точки* C и D (чер. 75), *провести окружность, которая бы касалась данной прямой* AB. Сія прямая не проходитъ между точ-

ками C и D, ибо въ такомъ случаѣ она пересѣкла бы хорду CD. Соединимъ C и D прямою продолженною до A, точки встрѣчи съ AB; AD и AC будутъ извѣстны и требуется опредѣлить AB, ибо остается только провести кругъ чрезъ три данныя точки B, C, D чл. 187). Но AB есть касательная, а AC пересѣк. посему (чл. 225) $AB^2 = AC \times AD$: средняя же пропорціональная между AC и AD (чл. 222) легко найдется.

Задача имѣетъ два рѣшенія, ибо длина AB можетъ быть отложена въ противную сторону; см. чл. 329, III. и чер. 163, гдѣ A и B суть данныя точки, а DD' касательная.

Еслибъ касательная была дана параллельною хордѣ, какъ въ чер. 24-мъ, гдѣ A, B суть данныя точки, а TG касательная; то очевидно, что центръ находился бы на FF', перпендикулярной въ срединѣ къ хордѣ AB, и подошва онаго F была бы точкою касанія. Потомъ надлежало бы описать кругъ, проходящій чрезъ A, B и F.

IV. *Описать кругъ* CAB, *проходящій чрезъ данную точку* i (чер. 77) *и касающійся двухъ данныхъ прямыхъ* DA, DB. Извѣстно уже (чл. 206), что центръ сего круга находится на CD, дѣлящей уголъ ADB по-поламъ. Сверхъ того хорда tm, перпендикулярная къ CD, дѣлится въ точкѣ o на двѣ равныя части: и такъ, проведя сію перпендикулярную CD и отложивъ $om = oi$, останется провести кругъ чрезъ i и m, касательной къ DB или DA.

Если данная точка находится въ A на одной изъ прямыхъ, то центръ будетъ точка C пересѣченія линіи DC съ AC перпендикулярною къ DA.

И такъ извѣстно, какъ чертить кругъ, проходящій чрезъ три точки или чрезъ двѣ и касательный къ одной прямой или чрезъ одну точку и касательный къ двумъ прямымъ, или наконецъ касательный къ тремъ даннымъ прямымъ (чл. 206.)

V. *Провести кругъ* BiA (чер. 77), *касательный къ двумъ прямымъ* DA, DB *и къ данному кругу* Km. Центръ C находится на CD, дѣлящей уголъ BDA пополамъ: изъ сего неизвѣстнаго центра C опишемъ кругъ HKG, проходящій чрезъ данный центръ K; перенесемъ сей центръ K въ какую-нибудь точку окружности HKG, кругъ CAm долженъ быть касательный къ сему движущемуся кругу. Разсмотримъ его въ положеніи HA, гдѣ онъ касается AD; касательная LH къ дугѣ HK, перпендикулярна къ радіусу CH и слѣдовательно параллельна DA. Посему прямая LH извѣстна, ибо она параллельна DA и отстоитъ отъ оной въ данномъ разстояніи $Km = HA$. Тоже скажемъ о $L'H'$, параллельной DB. И такъ кругъ $HKGH'$ легко начертить, потому что онъ касается прямыхъ LH, $L'H'$ и проходитъ чрезъ точку K: сей кругъ KG имѣетъ съ искомымъ кругомъ тотъ же центръ; слѣдовательно остается только провести CK, и Cm будетъ требуемый радіусъ.

Какъ параллельныя LH, $L'H'$ могутъ быть проведены въ углѣ D, то задача допускаетъ два рѣшенія.

Во 2-мъ *Прибавленіи къ Начертательной Геометріи* Г-на Гашеша можно найти множество задачъ сего рода.

VI. На окружности ABD (чер. 6) отыскать такую точку D, чтобы хорды BD, AD, проведенныя въ данныя точки A и B сей кривой, имѣли отношеніе $= \frac{m}{n}$. Положимъ, что задача рѣшена; если линія DF дѣлитъ уголъ ADB пополамъ (ч. 220), то будетъ $\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{OB} = \frac{m}{n}$; и такъ взявъ средину F дуги AB, должно раздѣлить хорду AB въ данномъ отношеніи; потомъ провести прямую FO, которую продолживъ, получимъ точку D.

VII. Чрезъ точку B (чер. 78) сѣченія двухъ круговъ, провести прямую CD данной длины M. Положивъ

задачу рѣшенною, проведемъ чрезъ точку B какую-нибудь линію EF и соединимъ A съ E, C, F и D, въ треугольникахъ AEF, ACD, уголъ $E = C$, ибо опираются на одну дугу BIA; также $F = D$: посему $\frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AC}$ и AC есть четвертая пропорціональная къ EF, M и AE. Слѣд. отложивъ $FL = M$, проведемъ LK параллельно AF, AK будетъ $= AC$: останется только описать изъ центра A радіусомъ AK кругъ, который пересѣкаясь, опредѣлитъ точку C или C': такимъ образомъ получимъ два рѣшенія.

VIII. Раздѣлимъ линію CA (чер. 79) на двѣ такія части, чтобы большая BC была среднею пропорціональною, между другою частію AB и цѣлою линіею AC; что выражаютъ такъ: *раздѣлить линію* AC *въ среднемъ и крайнемъ отношеніи*. Условіе $BC^2 = AC \times AB$ заключаетъ два неизвѣстныя BC и AB; но $AB = AC - BC$, слѣд.

$$BC^2 = AC^2 - AC \times BC;$$

откуда $BC^2 + AC \times BC$ или $BC\,(BC + AC) = AC^2$; остается только на AC опредѣлить такую точку B, чтобъ AC была среднею пропорціональною между BC и $BC + AC$; для сего должно построить кругъ, такъ чтобъ AC была касательною, $BC + AC$ цѣлою пересѣкающеюся и BC внѣшнимъ отрѣзкомъ (слѣд. часть AC будетъ заключаться въ кругѣ). И такъ возставивъ изъ точки A перпендикуляръ $AD = \frac{1}{2} AC$, проведемъ гипотенузу DC, получимъ $AC'^2 = CE \times CE' = CE \times (CE + CA)$; посему CE есть искомая длина, которую должно отложить отъ C до B; B будетъ требуемая точка. См. чл. 529, VIII (*).

(*) Можно сіе исполнить еще слѣдующимъ образомъ (чер. 76): Извѣстно, что

$$AC'^2 = BC^2 + AC \times BC = BC \times (BC + AC),$$

но продолживъ линію AC на $CD = CA$, будетъ $AC'^2 = BC.BD$. Если E есть средина DC, то $BC = BE - EC$, $BD = BE + EC$;

IX. *Вписать треугольникъ* def *въ другомъ* *ABC* (чер. 80), т. е. вмѣстить оный подобно *DEF*, такъ чтобъ *d* упала въ *D* на сторонѣ *AC*, и проч. Полагая задачу рѣшенною, и описавъ чрезъ точки *E*, *F*, *B* окружность, такожде какъ и чрезъ *A*, *D*, *F*, увидимъ, что сегментъ *FOE*, вмѣщаетъ данный уголъ *B*, а сегментъ *FOD* уголъ *A* (ч.ч. 208, IV). И такъ опишемъ на *fe* и *fd* сегменты вмѣщающіе углы *B* и *A*. Основаніе *AB* дано, и составляетъ двойную хорду въ обоихъ кругахъ. Посему, если основываясь на задачѣ VII, чрезъ точку *f* проведемъ хорду $ab = AB$, то останется только начертить линіи *ad*, *be* продолжить оныя до *c*, и получится треугольникъ $abc = ABC$; слѣдовательно точки *D*, *E*, *F*, опредѣляются, ибо $BE = be$, и проч. Какъ хорду *ab* можно провести двоякимъ образомъ, то и задача имѣетъ два рѣшенія.

О многоугольникахъ.

228. *Многоугольникомъ* называютъ всякую фигуру *ABCDEF* (чер. 81), ограниченную прямыми линіями. *Четвереугольникъ* имѣетъ 4 стороны, *пятиугольникъ* 5, *шестиугольникъ* 6, и проч. Число угловъ равно числу сторонъ; ибо покуда многоугольникъ не сомкнутъ, каждая проводимая сторона даетъ одинъ уголъ, и фигура имѣетъ сторонъ единицею болѣе чѣмъ угловъ; наконецъ сторона, смыкающая многоугольникъ, составляетъ два угла.

Діагональ есть линія *AD* (чер. 93), проведенная въ многоугольникѣ изъ одного угла въ другой.

перемноживъ сіи уравненія и вставя въ предыдущее, получимъ $AC^2 = BE^2 - EC^2$; и такъ *AC*, *BE*, *EC* суть три стороны прямоугольнаго треугольника *EFC*. Посему возставивъ перпендикуляръ *CF* и сдѣлавъ оный равнымъ *AC*, проведемъ гипотенузу *EF* и отложивъ оную отъ *E* до *B*, получимъ точку *B*. Сіе строеніе удобно можно приложить къ теоремѣ ч.ч. 238.

Діагональ AC отдѣляетъ треугольникъ ABC отъ многоугольника $ABCD\ldots$ въ n сторонъ, и останется многоугольникъ $ACDEF$ имѣющій $n-1$ сторонъ. Каждая діагональ, проведенная изъ точки A, отдѣляетъ также новый треугольникъ, а многоугольникъ уменьшается одною стороною; наконецъ когда останется только четыреугольникъ $ADEF$, то діагональ AE дѣлитъ оный на два треугольника. И такъ, сначала было столько діагоналей, сколько треугольниковъ и сколько уничтоженныхъ сторонъ; но въ четыреугольникѣ одна діагональ даетъ 2 треугольника; посему *число діагоналей, которое можно провести изъ одного угла* A *во всѣ другіе, есть* $n-3$; *а число треугольниковъ есть* $n-2$.

Всѣ углы шестиугольника $ABCD\ldots$ суть *исходящіе;* а уголъ A (чер. 82, есть *входящій* (ч.л. 159).

229. Чтобы построить многоугольникъ, коего всѣ части даны, берутъ на неопредѣленной прямой (чер. 81) часть AB равную одной изъ сторонъ; при A и B составляютъ два угла BAF, ABC равные тѣмъ, которые должны прилежать сторонѣ AB; потомъ на BC и AF откладываютъ данныя величины, и такъ далѣе.

Начертивъ такимъ образомъ стороны FA, AB, BC, CD и DE, сторона FE, долженствующая замкнуть шестиугольникъ, будетъ опредѣлена также какъ и углы E и F. Посему, если n означаетъ число угловъ многоугольника, то $2n$ будетъ число его составныхъ частей, а $2n-3$ число величинъ, достаточное для построенія онаго. И такъ между сими $2n$ частями существуетъ такая связь, что можно опредѣлить двѣ стороны и уголъ, когда извѣстны прочія части. Сія задача, относящаяся къ измѣренію многоугольниковъ (polygonometrie), не можетъ быть рѣшена теперь; но легко опредѣлить отношеніе, существующее между углами (см. ч.л. 365, VI).

230. Означивъ чрезъ n число сторонъ и чрезъ D прямой уголъ, *сумма внутреннихъ угловъ равна* $2D(n-2)$, *или двумъ прямымъ, умноженнымъ на число сторонъ многоугольника безъ двухъ.* Ибо проведя изъ какой-нибудь точки O взятой внутри (чер. 81) линіи OA, OB, OC...., составится столько треугольниковъ OAB, OBC.... сколько сторонъ. Посему сумма всѣхъ угловъ равна двумъ прямымъ, умноженнымъ на число сторонъ, или $2nD$. Но сумма угловъ около точки O равна четыремъ прямымъ: слѣдовательно и получимъ $2nD-4D$. Сіе докажется также изъ того, что сіи углы равны суммѣ угловъ треугольниковъ, коихъ число есть $(n-2)$, на которые посредствомъ діагоналей дѣлится многоугольникъ (чер. 93).

231. Слѣдовательно четыре угла четыреугольника равны четыремъ прямымъ. Если четыреугольникъ имѣетъ двѣ параллельныя стороны Aa, Hh (чер. 59), то его называютъ *трапеціею;* если же и другія двѣ стороны также параллельны (чер. 85) *параллелограммомъ.* Извѣстно сверхъ того (ч. 200), что діагональ BD дѣлитъ всякой параллелограммъ на два равные треугольника ABD, BCD; что противулежащіе углы равны $A=C$, $B=D$; и что противулежащія стороны равны. Обратно, если $AB=DC$ и $AD=BC$, то четыреугольникъ $ABCD$ есть параллелограммъ. Діагонали AC, BD пересѣкаютъ другъ друга по-поламъ; сіе слѣдуетъ изъ равенства треугольниковъ AOD и BOC.

Ромбъ есть равносторонній параллелограммъ (чер. 84). Очевидно, что діагонали AC и BD пересѣкаются подъ прямымъ угломъ; ибо четыре треугольника AOD, AOB, DOC и BOC равны. Обратно, если $AO=OC$ и $DO=OB$, то четыреуг. $ABCD$ есть параллелограммъ, и обращается въ ромбъ, когда AC и BD пересѣкутся подъ прямымъ угломъ.

Наконецъ, если въ параллелограммѣ $ABCD$ (чер. 85) одинъ изъ угловъ A прямой, то противолежащій и равный ему C, будетъ прямой, также какъ и другіе углы B и D, ибо они равны и вмѣстѣ составляютъ два прямыхъ; посему въ четыреугольникѣ всѣ углы будутъ прямые. Таковый параллелограммъ называютъ *прямоугольникомъ*. Діагонали AC, BD равны.

Если $AB = AD$, то прямоугольникъ называютъ *квадратомъ*; посему въ квадратѣ стороны равны и углы прямые.

232. *Сумма внѣшнихъ угловъ* GAB, HBC... (чер. 86), *составленныхъ продолженіемъ въ одну сторону боковъ многоугольника, равна всегда четыремъ прямымъ*. Въ самомъ дѣлѣ, внѣшніе углы служатъ дополненіемъ смежнымъ внутреннимъ: но уголъ AOB есть дополненіе угловъ $OAB + OBA$, также BOC есть дополненіе угловъ $OBC + OCB$ и проч.; посему сумма угловъ при O или четыре прямыхъ, есть сумма дополненій угловъ ABC, BCD... многоугольника: ч. и н. д.

233. *Правильными* многоугольниками называютъ тѣ, коихъ стороны и углы равны. Кругъ касающійся всѣхъ сторонъ многоугольника называется *вписаннымъ*, а *описаннымъ*, когда оный проходитъ чрезъ вершины всѣхъ угловъ.

Около всякаго правильнаго многоугольника ABCDEF (чер. 87) *можно описать и въ немъ вписать кругъ*. 1-е. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлимъ углы A и B, линіями AO и BO по-поламъ, и изъ точки O ихъ встрѣчи проведемъ OC; треугольникъ ABO будетъ $= BOC$; ибо $AB = BC$; сторона OB общая, и уголъ ABC раздѣленъ по-поламъ: посему $OA = OC = OB$. Такимъ же образомъ докажемъ, что $OB = OD = OC$, и проч.

Изъ сего видно, что точка O есть центръ круга описаннаго около многоугольника; что линіи, проведенныя изъ сего центра въ углы, равны между собою, и дѣлятъ сіи углы по-поламъ; что онѣ составя-

лаютъ равнобедренные треугольники AOB, BOC.... Наконецъ что углы *при центрѣ* AOB, BOC... равны между собою.

2-е. Хорды AB, BC.., равно отстоятъ отъ центра O; слѣд. перпендикуляры OG, OI... равны (чл. 204): посему если изъ центра O радіусомъ OG опишемъ окружность, то она коснется всѣхъ сторонъ многоугольника въ ихъ срединахъ G, I....

234. И такъ мы нашли способъ, описывать около даннаго правильнаго многоугольника, и вписывать въ немъ окружность. Обратное предложеніе состоитъ въ томъ, чтобъ около данной окружности описать, или внутри оной вписать правильный многоугольникъ: но для общаго рѣшенія сей задачи потребно многое. Предлагаемъ тѣ случаи, въ которыхъ можно рѣшить оную.

Прежде всего замѣтимъ, что когда многоугольникъ уже вписанъ, то легко описать многоугольникъ того же числа сторонъ, и обратно. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ ABC... (чер. 88), данный вписанный правил. многоугольникъ; проведя къ точкамъ A, B, C.... касательныя ab, bc..., онѣ составятъ требуемый описанный многоугольникъ; ибо треугольники aAB, bBC... суть равные и равнобедренные, потому что основанія AB, BC... равны, и прилежащіе имъ углы имѣютъ тоже мѣру (чл. 207, 4-е); посему $aB = Bb = bC = Cc$..., уголъ $a = b = c$....

Можно также (чер. 87), провести касательныя чрезъ средины g, i, k... дугъ AgB, BiC, CkD..., отъ чего составится требуемый многоугольникъ $abcde$. ибо какъ стороны онаго параллельны сторонамъ вписаннаго многоуг-ка, то углы равны (чл. 185, 5-е: сверхъ сего уголъ GOI линіею OB дѣлится по-поламъ, потому что B есть средина дуги gi. Также треугольникъ $gOb = bOi$ и OB дѣлитъ тотъ же уголъ gOi по-поламъ: посему три точки O, B, b находятся

въ прямой линіи. Тоже скажемъ о точкахъ O, C, c, и O, D, d... Слѣдовательно $\frac{AB}{ab} = \frac{OB}{Ob}$, $\frac{BC}{bc} = \frac{OB}{Ob}$; ошкуда $ab = bc$; ибо $AB = BC$ и т. д.

Сіе двоякое построеніе довольно затруднительно: удобнѣе провести одну изъ сихъ касательныхъ ab (чер. 87, ограничивая оную продолженными радіусами OA, OB, потомъ радіусомъ Oa описать окружность, по коей отложить ab столько разъ, сколько имѣется сторонъ.

Обратно, если данъ описанный многоугольникъ $abcdef$, то должно провести изъ центра O линіи aO, bO..., потомъ чрезъ точки A, B...., гдѣ оныя пересѣкаютъ окружность, начертить хорды AB, BC.....

235. Такъ какъ сумма угловъ при центрѣ равна $4D$, то въ правильномъ многоугольникѣ каждый изъ угловъ будетъ равенъ $\frac{4D}{n}$, гдѣ n означаетъ число сторонъ многоугольника; посему

Уголъ при центрѣ равносторонняго треугольника $= \frac{4}{3}D$,

Въ квадратѣ уголъ при центрѣ $= D$, въ правильномъ пятиугольникѣ $\frac{4}{5}D$,

Въ шестиугольникѣ $\frac{2}{3}D$, въ десятиугольникѣ $\frac{2}{5}D$, и проч....

Сумма угловъ при окружности (чл. 230) равна $2D(n-2)$; слѣд. каждый изъ нихъ равенъ $\frac{2D(n-2)}{n}$. И такъ уголъ квадрата прямой; въ правил. пятиуг. равенъ $\frac{6}{5}D$, въ шестиуг. $\frac{4}{3}D$, въ десятиуг. $\frac{8}{5}D$...

Каждая сторона AB, BC... стягиваетъ дугу $= \frac{C}{n}$, гдѣ C означаетъ окружность.

236. *Сторона* FE *описаннаго правил. шестиуг. равна радіусу* OF (чер. 89); ибо уголъ FOE есть 6-я

доля 4 прямыхъ, или $O = \frac{2}{3} D$; сумма равныхъ угловъ E и F равнобедреннаго треугольника OFE, составляющихъ $2D - \frac{2}{3} D$ или $\frac{4}{3} D$: слѣд. каждый равенъ $\frac{2}{3} D$, и треугольникъ OFE есть равноугольный; ошкуда $FE = OF$.

Соединивъ углы чрезъ одинъ, получимъ вписанный равносторонній треугольникъ BDF: какъ $EO = EI =$ радіусу R, то $ODEF$ есть ромбъ, діагонали пересѣкаются подъ прямымъ угломъ (чл. 231), и $IO = EI = \frac{1}{2} R$; и такъ

$$FI = \sqrt{(FO^2 - IO^2)} = \sqrt{(R^2 - \tfrac{1}{4} R^2)} = R\sqrt{\tfrac{3}{4}};$$

ошкуда $FD = R\sqrt{3}$ = *сторонѣ вписаннаго равносторонняго треугольника.*

Раздѣливъ на 2, 4, 8...., равныхъ частей дуги AB, BC..., получимъ вписанные многоугольники въ 12, 24, 48.... 3×2^n сторонъ.

257. Такъ какъ (чл. 235) въ квадратѣ уголъ при центрѣ (чер. 85) прямой, то чтобы вписать квадратъ въ кругъ $ABCD$, должно провести два взаимно перпендикурные діаметра AC, BD, и соединить ихъ оконечности. Очевидно въ самомъ дѣлѣ, что въ четыреугольникѣ $ABCD$ всѣ углы прямые и стороны равны. Слѣд.

$$AD^2 = DO^2 + AO^2 = 2R^2; \text{ ошкуда } AD = R\sqrt{2}.$$

Такъ какъ $\frac{AD}{R} = \sqrt{2}$, то видно, что *діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороною.*

Посему извѣстно, какимъ образомъ вписать многоугольники въ 4, 8, 16.... 2^n сторонъ.

258. Пусть будетъ AB (чер. 90) сторона вписаннаго правил. десятиугольника, уголъ O при центрѣ равенъ $\frac{2}{5} D$ (чл. 235), сумма равныхъ угловъ OAB, OBA равняется $2D - \frac{2}{5} D$ или $\frac{8}{5} D$; слѣдовательно каждый равенъ $\frac{4}{5} D$, то есть вдвое болѣе угла O. Чтобы найти отношеніе AB къ радіусу AO, раздѣлимъ уголъ B прямою CB пополамъ; по равенству угловъ $ABC = O = CBO$, треугольникъ OBC будетъ равнобедренный, ошкуда

$OC = CB$. Но треугольникъ ACB также равнобедренный, уголъ $C = \frac{1}{5} D = A$; и какъ $CB = AB = OC$. Сверхъ того (чл. 220) $\frac{AC}{OC} = \frac{AB}{OB}$, или $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}$, или сторона AB есть средняя пропорціональная между AC и AO; и какъ CO или $AB < AO$, то и $AC < AB$; слѣдовательно (чл. 227, VIII):

Раздѣливъ радіусъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, большая часть онаго будетъ сторона вписаннаго правильнаго десятиугольника.

Если $AB = BF$, то AF будетъ сторона вписаннаго правил. пятиугольника. Можно также вписать правильные многоугольники въ 20, 40... 5×2^n сторонъ. И какъ стороны шестиугольника и десятиугольника стягиваютъ дуги, составляющія 6-ю и 10-ю доли окружности C, то разность сихъ дугъ, или $\frac{1}{6} C - \frac{1}{10} C = \frac{1}{15} C$, стягивается стороною правильнаго пятнадцатиугольника, откуда найдутся правильные многоугольники въ 30, 60.... 15×2^n сторонъ.

239. Таковы правильные многоугольники, которые мы умѣемъ вписывать; всѣ они могутъ выразиться формулою $a \times 2^n$, гдѣ a означаетъ одно изъ четырехъ чиселъ 3, 4, 5 и 15, а n равно нулю или какому ни есть цѣлому и положительному числу. Что же касается до прочихъ многоугольниковъ, то за неимѣніемъ лучшаго способа, довольствуются приближеннымъ раздѣленіемъ окружности, на требуемое число равныхъ частей. Сію задачу можно также рѣшить, посредствомъ пропорціонал. циркуля и транспортира; но какъ самое устроеніе сихъ инструментовъ приближенно, то и средство сіе нельзя принимать за Геометрическое. Раздѣленіе окружности на равныя части, особенно важно для строенія угломѣрныхъ орудій. (См. *la Géom. du Compas*, par *Mascheroni*). Какъ *раздѣленіе угла на три равныя части* дополнило бы вышесказанное дѣленіе окружности

(чл. 208, III), що долгое время старались найти рѣшеніе сей задачи, но тщетно: нынѣ доказано, что помощію линейки и циркуля *оное невозможно* (чл. 464, I).

240. Заключимъ сію статьею изложеніемъ свойствъ четыреугольниковъ, вписываемыхъ въ кругъ.

1. Въ четыреугольникѣ $ABCO$ (чер. 91), $A+C=2$ прямымъ: ибо углы A и C измѣряются вмѣстѣ половиною окружности (чл. 207), также $B+O=2$ прямымъ. *Слѣдовательно, во всякомъ четыреугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, противоположные углы суть дополнительные.*

Обратно, если $A+C=B+O=2$ прямымъ, то около четыреугольника $ABCO$ можно описать кругъ; ибо если положимъ, что окружность проходитъ чрезъ точки A, O, C, не проходя чрезъ B, то уголъ B не будетъ дополненіемъ угла O (стр. 284).

Посему *около всякаго прямоугольника* ABCD (чер. 85) *можно описать кругъ;* діагонали BD, AC будутъ діаметрами онаго.

II. *Во всякомъ четыреугольникѣ* ABCD (чер. 92), *вписанномъ въ кругъ, произведеніе изъ діагоналей* $AC\times BD$, *равно суммѣ произведеній изъ противолежащихъ сторонъ.* Ибо проведемъ CK подъ угломъ $KCD=BCO$; приложивъ къ обѣимъ частямъ уголъ OCK, получимъ $BCK=OCD$: но уголъ $BAC=BDC$ (чл. 207); посему треугольники BAC и KCD подобны. Также по равенству угловъ $CBK=CAD$, треугольникъ CBK подобенъ CAD; слѣдовательно

$$\frac{KD}{CD}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{BK}{BC}=\frac{AD}{AC}$$

откуда $KD\times AC=AB\times CD$, $BK\times AC=AD\times BC$: наконецъ, сложивъ сіи уравненія, получимъ $AC\times BD=AB\times CD+AD\times BC$.

III. Если изъ точекъ A и B (чер. 83), опустимъ на основаніе DC параллелограмма $ABCD$, перпендику-

ляры AE, BF, то изъ треугольниковъ ADC, BDC получимъ (чл. 218)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times DE,$$
$$BD^2 = BC^2 + DC^2 + 2DC \times CF.$$

И какъ $DE = CF$ и $AB = DC$, то сложивъ сіи уравненія, будемъ

$$BD^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 + AB^2.$$

И такъ, *во всякомъ параллелограммѣ, сумма квадратовъ діагоналей равна суммѣ квадратовъ сторонъ.* Для прямоугольника же сіе предложеніе очевидно (чл. 217, 4-е).

О подобныхъ многоугольникахъ и объ окружности.

241. Два многоугольника (чер. 93) $ABCDFF$, $abcdef$ называются *подобными, когда составлены изъ треугольниковъ* T и t, T′ и t', T″ и t''..., *соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ.*

На данной прямой ab, сходственной съ AB, легко начертишь многоугольникъ $abcd$... подобный $ABCD$... Должно сначала сдѣлать треугольникъ t подобный T, что не трудно (чл 214); потомъ на ac сходственной съ AC, построишь треугольникъ t' подобный T', и проч.

242. *Въ подобныхъ многоугольникахъ углы равны и сообственныя стороны пропорціональны.* Ибо въ подобныхъ треугольникахъ T и t, уголъ $B = b$, также какъ и уголъ $BCA = bca$, сверхъ того (чл. 214), $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$. Въ треугольникахъ T' и t' уголъ $ACD = acd$, откуда видно, что уголъ $BCD = bcd$: между шѣмъ $\frac{AC}{ac} = \frac{DC}{dc}$. Такимъ же образомъ съ помощію треугольниковъ T'' и t'', докажемъ, что уголъ $CDE = cde$, и что $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$, и проч.

Обратно, если въ многоугольникахъ углы соотвѣтственно равны, и $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} =$ и проч. *то многоугольники подобны;* ибо $B = b$, и по положенію стороны, заключающія сіи углы, пропорціональны; ошкуда слѣдуетъ (чл. 215), что T и t подобны, и сверхъ того $\frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$, и уголъ $BCA = bca$. Отнявъ сіи углы отъ $BCD = bcd$, останется уголъ $ACD = acd$, и какъ по положенію $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$, то въ слѣдствіе общаго отношенія $\frac{BC}{bc}$, получимъ $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd}$; чѣмъ доказывается подобіе треугольниковъ T' и t' и ш. д.

1-е Правильные многоугольники подобны, если состоятъ изъ равнаго числа сторонъ; ибо ихъ углы соотвѣтственно равны, также какъ и стороны въ каждомъ изъ нихъ (чл. 233).

2-е. Если изъ угловъ A и a (чер. 94) проведя діагонали, составятся подобные треугольники, то углы будутъ равны, и сходственныя стороны пропорціональны: посему если проведемъ діагонали изъ какого-нибудь другаго угла на пр: E, e, то сіи новые треугольники также будутъ между собою подобны.

3-е. Слѣдственно двѣ какія ни есть сходственныя діагонали BE, be (чер. 94), пропорціональны двумъ какимъ-нибудь сторонамъ CD, cd, т. е. $\frac{BE}{be} = \frac{CD}{cd}$.

4-е. Пусть будутъ два подобные многоугольника $ABC\ldots$, $abc\ldots$. (чер. 94); если возьмемъ двѣ какія-нибудь сходственныя стороны, и изъ ихъ оконечностей проведемъ діагонали во всѣ прочіе углы, то составятся соотвѣтственно подобные треугольники, EDF и edf, EDA и eda, EDB и edb, и проч...., ибо

углы многоугольниковъ равны, и сходственныя діагонали пропорціональны сторонамъ.

3-е. *Снять планъ* съ какого-нибудь мѣста, значитъ построить многоугольникъ подобный тѣмъ, которые составлены на землѣ прямыми, соединяющими точки, коихъ относительное положеніе извѣстно. Для сего измѣряютъ на землѣ надлежащее число частей; потомъ чертятъ на бумагѣ (чл. 214...) треугольники, подобные тѣмъ, изъ коихъ составлены вышеозначенные многоугольники.

243. *Если въ двухъ подобныхъ многоугольникахъ* (чер. 94), *проведемъ двѣ прямыя* GH, gh, *одинаково расположенныя*, т. е. пересѣкающія стороны BC, bc, на части пропорціональныя, также какъ FE и fe, *то прямыя* GH, gh *будутъ относиться какъ стороны*, *или* $\frac{GH}{gh} = \frac{BC}{bc}$, *и составятъ съ ними сторонами равные углы*. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на BC и bc такія точки H и h, чтобы $\frac{HC}{hc} = \frac{CB}{cb} = \frac{CE}{ce}$ и проведемъ HE, he. Треугольники HCE, hce будутъ подобны (чл. 215), ибо уголъ $HCE = hce$. Изъ сего слѣдуетъ, что уголъ $EHC = ehc$ и что $\frac{EH}{eh} = \frac{HC}{hc} = \frac{BC}{bc}$.

Также въ подобныхъ многоугольникахъ $ABHEF$, $abhef$, если точки G и g дѣлятъ стороны FE и fe пропорціонально, то линія GH будетъ имѣть тоже свойство, что и HE. Слѣд. и проч.

244. Изъ какой-нибудь точки O (чер. 95), взятой внутри многоугольника $ABC...$, проведемъ въ вершины A, B, $C...$, линіи OA, $OB...$, возьмемъ на сихъ линіяхъ части имъ пропорціональныя, т. е. такія, чтобы $\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{OE}{Oe} = ...$ Треугольники OAB, Oab подобны, и AB параллельна ab. Сдѣлавъ тоже для треугольниковъ OBC, Obc, и проч. найдемъ, что

многоугольники $ABC\ldots$, $abc\ldots$. имѣютъ стороны параллельныя и пропорціональныя, и слѣдовательно подобны между собою.

Такимъ же образомъ, если на линіи Oa возьмемъ части OK, Ok пропорціональныя сторонамъ ac, AE, потомъ на линіи Ob части OF, of пропорціональныя ab, AB и проч., то многоугольники $KFG\ldots$, $kfg\ldots$ будутъ подобны, какъ составленныя изъ треугольниковъ OKI, Oki, OKF, $Okf\ldots$ соотвѣтственно подобныхъ.

245. *Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ сходственныя стороны;* ибо (чер. 93) $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \ldots$, и по предложенію (чл. 73, 3-е)

$$\frac{AB+BC+CD+\ldots}{ab+bc+cd+\ldots} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \ldots\ldots$$

Примѣнивъ сіе къ правильнымъ многоугольникамъ одинаковаго числа сторонъ, получимъ $\frac{ABCD\ldots}{abcd\ldots} = \frac{AB}{ab} = \frac{OB}{Ob} = \frac{OI}{Oi}$ (чер. 96), ибо по равенству угловъ при центрѣ (чл. 235), треугольники OBI, obi подобны; и такъ *периметры правильныхъ подобныхъ многоугольниковъ, относятся между собою какъ радіусы вписанныхъ и описанныхъ круговъ.*

246. *Окружность есть предѣлъ периметровъ, вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ* (чл. 115). Каждая сторона AB (чер. 97) правильнаго многоугольника короче стягиваемой ею дуги ACB; посему видно, что *выпрямленная* окружность болѣе периметра всякаго правильнаго многоугольника. Сверхъ сего взявъ средину C дуги ACB, хорда AB будетъ $< AC + CB$; изъ сего слѣдуетъ, что съ удвоеніемъ числа сторонъ вписаннаго правильнаго многоугольника, периметръ его болѣе и болѣе приближается къ окружности, никогда впрочемъ недостигая оной.

Съ другой стороны, какъ дуга $CAL < CE + EL$ (чл. 160), то периметръ всякаго описаннаго многоугольника болѣе окружности; касательная AK есть половина стороны описаннаго многоугольника, имѣющаго сторонъ вдвое болѣе (чл. 234; и какъ KA перпендикулярная къ AO менѣе косвенной KE, то $AK + KC < EC$; слѣдственно, съ удвоеніемъ числа сторонъ описаннаго многоугольника, периметръ его безпрестанно приближается къ окружности, не переставая однако же быть болѣе оной.

Полагая P и p периметрами подобныхъ правильныхъ многоугольниковъ, изъ коихъ одинъ описанный, а другой вписанный, а R и r радіусами OC, OI вписанныхъ круговъ (чл. 245); получимъ $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$, откуда (чл. 73, 1-е) $P - p = \frac{P}{R}(R - r)$. Но P уменьшается приближаясь къ окружности $LCB\ldots$; R есть величина постоянная, а $R - r$ или CI безконечно уменьшается, при послѣдовательномъ удвоеніи числа сторонъ многоугольниковъ P и p (чл. 205); слѣд. разность $P - p$ между ихъ периметрами, произвольно приближается къ нулю, т. е. сіи периметры безконечно приближаются къ окружности, всегда между ними содержимой, и никогда въ точности имъ неравной; слѣд. и проч.

247. *Окружности относятся между собою, какъ ихъ радіусы или діаметры.* Въ самомъ дѣлѣ (черт. 96) означивъ чрезъ C и c, окружности коихъ радіусы суть $BO = R$, $bO = r$; чрезъ P и p периметры двухъ вписанныхъ подобныхъ правильныхъ многоугольниковъ $ABC\ldots$, $abc\ldots$, наконецъ чрезъ Z и z разность каждаго периметра съ описанною окружностію, или $C - P = Z$, $c - p = z$. Получимъ

$$\frac{P}{p} \text{ или } \frac{R}{r} = \frac{C - Z}{c - z}, \text{ откуда } \frac{C}{R} - \frac{Z}{R} = \frac{c}{r} - \frac{z}{r};$$

но R, C, r и c суть постоянныя величины, а Z и z измѣняются съ числомъ сторонъ и могутъ сдѣлаться произвольно малыми; слѣд. (чл. 113)

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{r} \text{ или } \frac{C}{c} - \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r}.$$

248. *Сыскать прямую линію равную окружности, коей радіусъ извѣстенъ*, т. е. *спрямить сію кривую.* Возьмемъ двѣ окружности C, c, въ коихъ радіусы R, r: получимъ $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$; и такъ отношеніе всякой окружности къ своему діаметру одно и тоже; означимъ оное чрезъ π. Естьбъ извѣстно было сіе постоянное число π, равное каждому отношенію, то получили бы

$$\text{окружность } R = 2\pi R.$$

Остается *опредѣлить отношеніе* π *окружности къ діаметру.* Пусть будетъ AB (чер. 47) половина стороны правильнаго многоуг., C центръ; на продолженной AC возьмемъ $CD = CB$, въ равнобедренномъ треугольникѣ BCD, уголъ D составитъ половину BCA (чл. 201, 2-е). CI перпендикулярная къ BD и IF къ AD раздѣлятъ сіи линіи въ точкахъ I и F по-поламъ. Такъ какъ $IF = \frac{1}{2}BA$ и $D = \frac{1}{2}BCA$, то IF будетъ *половина стороны правильнаго многоугольника, одинаковаго периметра съ первымъ и коего число сторонъ вдвое болѣе.*

И такъ пусть будутъ радіусы $BC = R$, $AC = r$, описанныхъ и вписанныхъ круговъ въ 1-мъ многоугольникѣ, опыщемъ радіусы $ID = R'$, $FD = r'$ 2-го многоугольника. 1-е. Такъ какъ F есть средина DA, то $DF = \frac{1}{2}(DC + CA)$; 2-е. въ прямоугольномъ треугольникѣ CID, $DI^2 = DF \times DC$; и какъ $DC = BC = R$, то получимъ наконецъ $r' = \frac{1}{2}(R + r)$, $R' = \sqrt{(Rr')}$. Изъ четырехъ радіусовъ r, R, r', R', каждой изъ послѣднихъ выводится изъ двухъ предыдущихъ. Отношеніе радіусовъ r'', R'', новаго многоугольника того же периметра, и имѣющаго сторонъ вдвое болѣе 2-го, къ

радіусамъ r', R', выражается тѣми же уравненіями, и проч..... Слѣдовательно, посредствомъ сихъ вычисленій, составится безконечная строка

$$r,\ R,\ r',\ R',\ r'',\ R'',\ r''',\ R'''.....,$$

въ коей *каждый* r *есть средній Ариѳметическій, а каждый* R *средній Геометрическій членъ, между двумя предыдущими.* Но какъ изъ нашихъ уравненій слѣдуетъ, что $r' > r$ и $R' < R$, т. е. что радіусы r болѣе и болѣе увеличивающіеся, а радіусы R уменьшающіеся; и какъ радіусъ вписаннаго круга всегда менѣе радіуса описаннаго круга, или $r < R$, то ясно, что радіусы r и R стремятся безпрестанно къ равенству. И такъ вычисляя постепенно, послѣдовательные радіусы нашей строки, получимъ радіусы вписанныхъ и описанныхъ круговъ, въ рядѣ многоугольниковъ *одинаковаго периметра, коихъ предѣломъ будетъ окружность того же обѣма:* и наконецъ достигнемъ такихъ величинъ сихъ радіусовъ r и R', которыхъ первые десятичные знаки будутъ одинаковы. Сія общая часть будетъ также принадлежать радіусу α, окружности, служащей предѣломъ, и которая $= 2\pi\alpha$: раздѣливъ сію окружность на 2α, получимъ число π (*).

(*) Радіусы R вычисляются довольно скоро посредствомъ логариѳмовъ; но можно сіе еще сократить. Пусть будутъ A и $A + a$ соотвѣтственныя величины r' и R; извлекши корень (стр. 218 получимъ:

$$R' = \sqrt{(A^2 + Aa)} = A + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8A} + \text{и проч.}$$

Когда общая часть A чиселъ r и R состоитъ въ 4-й половинѣ ихъ цыфръ, какъ на пр. въ выраженіи, замѣченномъ *, то a^2 не можетъ имѣть столько же цыфръ какъ A, откуда $\frac{a^2}{A} < 1$, взявъ 8-ю долю онаго, найдемъ, что 3-й членъ $< \frac{1}{2}$ и слѣд., для сокращаемаго числа десятичныхъ знаковъ, можетъ быть опущенъ;

На пр: сторона вписаннаго шестиугольника равна 1, а периметръ 6; посему $R = 1$, $r = \sqrt{(OB^2 - IB^2)}$ чер. 97, или $r = \sqrt{\frac{3}{4}}$: откуда найдемъ послѣдовательно слѣдующія выраженія:

$r =$	0,866025	0,949469	0,954588	0,954908
$R =$	1,000000	0,957662	0,955100	0,954940
$r' =$	0,933013	0,953566	0,954844	0,954924
$R' =$	0,965925	0,95561	0,954972	0,954932, и проч.

Когда достигнемъ общаго радіуса $\alpha = 0{,}954929$, оный будетъ принадлежать окружности, равной периметру многоугольника или $= 6$, именно $2\pi\alpha = 6$; слѣд. $\pi = 3{,}14159$. Такимъ образомъ можно достигнуть желаемой приближенности. Впрочемъ (въ чл.-хъ 320, 591) будутъ изложены гораздо удовлетворительнѣйшія средства, и найдемъ, что

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279$$

$$\log \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 342.$$

Если въ урав. окр. $R = 2\pi R$, положимъ $R = \frac{1}{2}$ и $= 1$, то получимъ окр. $= \pi$ и $\frac{1}{2}$ окр. $= \pi$; посему *постоянное отношеніе* π *цѣлой окружности къ своему діаметру выражаетъ также окружность, коей діаметръ есть единица, и полуокружность имѣющую радіусомъ единицу.*

Если ограничимся величиною для $\pi = 3{,}142$, то можно положить, что $\pi = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. Сіе простое выраженіе, найденное Архимедомъ, принято для пекусствъ. Адріанъ Меційй, принимая 3,141593, нашелъ $\pi = \frac{355}{113}$, число цѣлымъ замѣчательное, что члены онаго составлены изъ трехъ первыхъ нечетныхъ чиселъ,

---

именно $R' = A + \frac{a}{2}$, или $R' = \frac{1}{2}(r' + R)$. Посему R', такъ какъ и r', будетъ среднимъ Ариѳметическимъ членомъ между двумя предыдущими, какъ скоро дойдетъ до выраженій, коихъ общая часть состоитъ по крайней мѣрѣ въ половинѣ цыфръ. Въ такомъ случаѣ не нужно извлекать корней для опысканія послѣдовательныхъ R-овъ. (См. Annales de Math., tom. VII).

2 раза повторенныхъ: 113, 355. Сіе выраженіе, имѣя 6 точныхъ десятичныхъ знаковъ, не производитъ погрѣшности въ 1 центиметръ для окружности, коей радіусъ 18000 метровъ, 1 линію при радіусѣ въ 2812 саженей).

Вотъ приближенное графическое спрямленіе окружности. Доказано (чл.-ы 236, 237), что сторона вписаннаго квадрата $= R\sqrt{2}$, а сторона равносторонняго треугольника $= R\sqrt{3}$: сумма будетъ $R(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ или $R\times 3{,}14626\ldots$, величина, различествующая отъ спрямленной полуокружности въ полутысячныхъ частяхъ. И такъ, вписавъ въ предложенномъ кругѣ, по извѣстнымъ правиламъ, квадратъ и равносторонній треугольникъ, сложимъ сторону одного съ стороною другаго, и получимъ прямую, весьма мало разнствующую отъ полуокружности.

Полагая дугу ACB (чер. 97) $n^{\text{ою}}$ долею окружности, или уголъ O, $n^{\text{ою}}$ долею четырехъ прямыхъ, α числомъ его градусовъ, получимъ пропорцію $180^0 : \pi R :: \alpha :$ длинѣ z дуги ACB; посему $z = \frac{\pi R\alpha}{180} = \frac{2\pi R}{n} = kR\alpha$, принимая $\log k = \bar{2}{,}24187736$.

II. О ПОВЕРХНОСТЯХЪ.

Площади многоугольниковъ и круга.

249. *Площадь* есть пространство, заключающееся между линіями ограничивающими фигуру. Площади *равновелики*, если онѣ занимаютъ равныя пространства, хотя при наложеніи не сливаются.

Два прямоугольника $AEFD$, $aefd$ (чер. 98) равны, если ихъ основанія и высоты равны, или $AD = ad$ и

$AE = ae$: въ самомъ дѣлѣ видно, что сіи фигуры по наложеніи сливаются. Но если сравнимъ параллелограммъ $ABCD$ съ прямоугольникомъ $AEFD$, то найдемъ, что они только равновелики, ибо треугольникъ $AEB = DFC$.

Параллелограммы ABCD, abcd *равновелики, если ихъ основанія и высоты равны*, ибо они равновелики съ равными прямоугольниками $ADFE$, $adfe$.

Пусть будетъ треугольникъ ABC (чер. 107); проведемъ CD и BD параллельно AB и AC; два треугольника ACB, BCD будутъ равны: и такъ, *всякой треугольникъ есть половина параллелограмма того же основанія и той же высоты;* такъ что всѣ треугольники ACB, AEB, AFB..., имѣющіе одно основаніе AB, а вершины на линіи CF, параллельной AB, равновелики.

250. Сравнимъ теперь какіе-нибудь два параллелограмма.

1-е. *Прямоугольники, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты.* Въ самомъ дѣлѣ, если два прямоугольника $ABCD = R$, $abcd = r$ (чер. 99) имѣютъ основанія AB и ab равныя, и высоты ихъ $AD = H$ и $ad = h$ соизмѣримы, то найдется линія ax, содержащаяся m разъ въ H, и n разъ въ h, и получимъ (чл. 156) $\frac{H}{h} = \frac{m}{n}$. Проведя чрезъ точки дѣленія x, x', y, y'...., линіи параллельныя основаніямъ, прямоугольники R и r раздѣлятся, одинъ на m, а другой на n равныхъ прямоугольниковъ, и будетъ

$$\frac{R}{r} = \frac{m}{n}, \text{ откуда } \frac{R}{r} = \frac{H}{h}.$$

Если высоты несоизмѣримы, то раздѣливъ также AD на равныя части Ax', $x'y'$...., нанесемъ оныя на ad въ ax, xy....; пусть точка дѣленія i будетъ ближайшая къ d; проведя il параллельно dc, по при-

чинѣ соизмѣримости, получимъ $\frac{dl}{R} = \frac{ai}{H}$ или $\frac{r}{R} + \frac{dl}{R} = \frac{h}{H} + \frac{id}{H}$; посему $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$; ибо dl и id могутъ быть произвольно уменьшены, а r, R, h, H суть величины постоянныя (чл. 113).

2-е. *Прямоугольники относятся какъ произведенія ихъ высотъ на основанія:* ибо (чер. 100) пусть будутъ прямоугольники AC, ac, коихъ основанія $AB = B$, $ab = b$: положимъ одну изъ сихъ фигуръ на другую, совмѣстивъ одинъ изъ ихъ прямыхъ угловъ, чрезъ сіе опредѣлятся прямоугольники $AK = r$ и $AH = R'$ одной высоты AI, и послѣдній изъ нихъ съ прямоугольникомъ $AC = R$, имѣетъ одно основаніе AB, слѣд.

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{h}, \quad \frac{R'}{r} = \frac{B}{b}, \text{ ошкуда } \frac{R}{r} = \frac{BH}{bh}.$$

3-е. Сіи предложенія также справедливы и для параллелограммовъ; ибо они равновелики съ прямоугольниками той же высоты и того же основанія. Слѣд. *параллелограммы относятся какъ произведенія ихъ высотъ на основанія.*

251. Измѣрить площадь, значитъ найти, сколько разъ содержится въ ней другая данная площадь. Возмемъ за единицу поверхности прямоугольникъ $abcd$, чтобъ измѣрить прямоугольникъ $ABCD$ (чер. 101; такъ какъ $\frac{R}{r} = \frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$, то основаніе ab полагается на AB, дабы узнать, сколько разъ одно содержится въ другомъ; тоже дѣлается съ высотами ad, AD; потомъ числа, означающія сіи содержанія, множатся; и какъ $3 \times 4 = 12$, то r содержится въ R 12 разъ.

Но какъ отношенія основаній и высотъ могутъ быть не точныя, то говорятъ вообще, что мѣра какой-нибудь площади $ABCD$ (чер. 100) есть ея отношеніе къ другой, взятой за единицу (чл.-ы 56, 71);

сія мѣра равна произведенію отношенія основаній $\frac{B}{b}$, на отношеніе высотъ $\frac{H}{h}$. Тоже скажемъ и о всякомъ параллелограммѣ. Откуда слѣдуетъ, что изобразивъ отвлеченное число $\frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$ чрезъ l, площадь параллелограмма будетъ равна площади, принятой за единицу поверхностей, повторенной l разъ.

Если примемъ за единицу площадей квадратъ *abcd* (чер. 101), коего сторона есть линейная единица, то будетъ $b = h = 1$, откуда $R = BH$; BH есть отвлеченное произведеніе чиселъ, выражающихъ содержаніе линейной единицы въ B и H; положимъ, что сіе произведеніе $BH = l$, тогда уравненіе обратится въ $R = l$ разъ повторенному квадрату, принятому за единицу площадей. И такъ, *площадь параллелограмма равна произведенію чиселъ, означающихъ содержаніе линейной единицы въ его основаніи и высотѣ;* что для краткости, хотя и неправильно, выражаютъ слѣдующимъ образомъ: *площадь параллелограмма равна произведенію его основанія на высоту.*

Мѣра площади равносторонняго прямоугольника *ABCD* (чер. 85) есть $BC \times BC$; слѣд. площадь квадрата есть вторая степень его стороны. По сей-то причинѣ *квадратъ и вторая степень* принимаются за выраженія однозначительныя.

252. Все прежде сказанное о произведеніи линій, выраженныхъ числами, относится также и къ прямоугольникамъ, которыхъ стороны будутъ производителями. На пр: предложеніе (чл. 225) можетъ быть выражено такъ: *квадратъ, построенный на касательной, равенъ прямоугольнику, коего основаніе есть цѣлая пересѣкающая, а высота, внѣшняя ея часть:* такимъ же образомъ и прочія.

Отличительное свойство Геометрическихъ доказательствъ состоитъ въ соединеніи точности раз-

сужденія съ ясностію, какую имѣютъ аксіомы. Въ доказательствахъ никогда не должно терять изъ виду сравниваемыхъ величинъ: и какъ предыдущія предложенія мы получили чрезъ вычисленія, основанныя на теоріи пропорціональныхъ линій, то и докажемъ непосредственно два главныя предложенія, касательно отношенія площадей. Прочія же легко выведутся изъ оныхъ, въ чемъ можно удостовѣриться.

253. I. На линіи $AC = AB + BC$ (чер. 102) построимъ квадраты AF и AI: очевидно, что площадь $AI = AF + FI + EH + CF$, или $= AF + FI + 2CF$; ибо прямоугольники EH и CF равны. Такъ какъ AF есть квадратъ изъ AB, а FI квадратъ изъ BC, то получимъ извѣстное предложеніе:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

гдѣ a и b суть линіи, и a^2, b^2, ab площади.

Также $AF = AI + FI - 2EI$; ибо $BD = BI - FI$ и $EI = BI$: посему

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

254. II. Пусть будетъ какой-нибудь треугольникъ ABC (чер. 103); построимъ квадраты BF, CE, BG; изъ B и C опустимъ на противоположныя стороны перпендикуляры BK и CL; наконецъ проведемъ CF и BE. Треугольники BAE, CAF будутъ равны; ибо уголъ A состоитъ изъ угла BAC и прямаго угла CAE или BAF; сверхъ того стороны, заключающія сей уголъ, суть бока квадратовъ BF, CE. Но треугольникъ BAE есть половина прямоугольника AK, имѣющаго съ онымъ одно основаніе AE и тоже высоту AI; также CAF есть половина AL, посему $AK = AL$, или $AL = CE - CK$. Такимъ же образомъ найдемъ, что $BL = BG - GO$.

И такъ, 1-е. Если уголъ BCA острый, то прямоугольные треугольники CBI, COA подобны, и получимъ $\frac{CI}{CO} = \frac{BC}{CA}$, откуда прямоуг. $CK = GO$: сложивъ

два предыдущія уравненія, будетъ $AL + BL$, или $BF = CE + BG - 2CK$ или $c^2 = b^2 + a^2 - 2b \times CI$, какъ было найдено въ чл. 218-мъ.

2-е. Если уголъ BCA прямой (чер. 104), то BI и AO сливаются съ BC и CA, и получимъ $AL = EC$, $BL = BG$; слѣд. $FB = EC + BG$ или квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ (*).

Прямоугольники AL и BF, имѣя ту же высоту, относятся какъ ихъ основанія AD и AB: и такъ $\frac{CE}{BF} = \frac{AD}{AB}$, сверхъ того будетъ

$$\frac{BG}{BF} = \frac{BD}{BA}, \text{ и } \frac{CE}{BG} = \frac{AD}{BD}.$$

Сіи предложенія тожественны съ теоремами чл. 217, 2-е и 3-е.

3-е. Наконецъ, если уголъ BCA тупой (чер. 106), то сдѣлавъ тоже построеніе, что и для перваго случая, получимъ треугольникъ $BAE = CAF$, откуда $AK = AL$ или $AL = CE + CK$: такжe найдемъ, что $BL = BG + CK$; сложивъ сіи уравненія, будетъ $BF = CE + BG + 2CK$ или $c^2 = b^2 + a^2 + 2b \times CI$, какъ въ чл. 218-мъ.

255. *Сторона квадрата, равновеликаго съ параллелограммомъ, есть средняя пропорціональная между высотою и основаніемъ послѣдняго.* Ибо принявъ B

(*) На сторонахъ AC, BC, AB (чер. 105) построимъ параллелограммы CE, BG, BF, такіе, чтобы продолживъ стороны EC и BG до пересѣченія въ точкѣ O, и проведя OC, было бы $OC = DI$; въ такомъ случаѣ будетъ $BF = CE + BG$. Въ самомъ дѣлѣ, параллелограммы $DAfI$, $CAHO$ равны; ибо имѣютъ основанія и высоты равныя, по сей же причинѣ $DAFL = DAfI$, $CE = CAHO$; посему $CE = DAFL$; такимъ же образомъ, найдемъ, что $BG = BL$. Слѣд. $BF = CE + BG$.

Если треугольникъ BAC прямоугольный (чер. 104) и BG, CE, BF суть квадраты, то очевидно, что предыдущее предложеніе есть другое доказательство 2-й теоремы.

за основаніе, H за высоту параллелограмма и x за сторону равновеликаго квадрата, получимъ $x^2 = BH$. И такъ, чтобы составить квадратъ изъ параллелограмма или найти *квадратуру* онаго (чл. 251), должно на неопредѣленной прямой отложить основаніе онаго отъ B до C и высоту отъ B до D (чер. 67), потомъ принявъ BC за діаметръ, описать полуокружность ABC, которая въ точкѣ A пересѣчетъ перпендикуляръ, возставленный изъ D къ BC: хорда BA будетъ стороною искомаго квадрата (чл. 223). Если данная фигура есть прямоугольникъ BL (чер. 104), то взявъ $BA = DL$, получимъ квадратъ $BG =$ прямоуг. BL.

256. *Площадь треугольника есть половина произведенія его основанія* B *на высоту* H, или $= \frac{1}{2} HB$: сіе слѣдуетъ изъ чл. 249-го.

1-е. Квадратъ равновеликій съ даннымъ треугольникомъ есть $x^2 = \frac{1}{2} BH$; слѣд. квадратура треугольника найдется, отыскавъ среднюю пропорціональную между высотою и половиною основанія, т. е. взявъ (чер. 104) BA равную половинѣ основанія и BD равную высотѣ и окончивъ построеніе по вышесказанному, найдемъ, что BG равновеликъ съ предложеннымъ треугольникомъ.

2-е. *Треугольники* ABF, BIC (чер. 112) *равныхъ высотъ, относятся, какъ ихъ основанія* AF, IC.

Чтобъ линія BF дѣлила треугольникъ ABC на двѣ части въ данномъ отношеніи, стоитъ только раздѣлить (чл. 213, 4-е) основаніе AC въ семъ отношеніи.

257. Пусть будетъ многоугольникъ $ABDE\ldots$ (чер. 108); проведемъ AD и ей параллельную BC, которая встрѣчаетъ продолженную сторону ED въ точкѣ C; наконецъ соединимъ точки A и C. Треугольникъ ABD можетъ быть замѣненъ равновеликимъ треуг. ACD; и такъ шестиугольникъ $ABDEFG$ равновеликъ пятиугольнику $ACEFG$.

Приложивъ опять то же строеніе къ пятиугольнику, превратимъ оный въ четыреугольникъ, потомъ въ треугольникъ и наконецъ, если желаешь, въ квадратъ. И такъ *всякой многоугольникъ можно превратить въ равновеликій ему треугольникъ или въ квадратъ.*

258. Площадь многоугольника найдется, раздѣливъ оный на треугольники и опыскавъ площадь каждаго. *Если многоугольникъ правильный*, какъ *ABCD....* (чер. 87), *то площадь онаго равна периметру, умноженному на половину радіуса* OG *вписаннаго круга*, называемаго *апоѳемою*. Ибо означивъ число сторонъ чрезъ *n*, должно площадь одного изъ треугольниковъ при центрѣ *AOB* повторить *n* разъ, именно:

$$n \times AB \times \tfrac{1}{2}OG = \text{периметру} \times \tfrac{1}{2}OG.$$

259. *Площадь трапеціи* AHba (чер. 59) *равна произведенію высоты оной, на полсумму параллельныхъ ея основаній* или *на линію, проведенную въ равномъ разстояніи отъ каждаго изъ нихъ.* Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ *AC* параллельно *ah*, потомъ *Ee* чрезъ средину линій *AH* и *ah*; *Ee* будетъ параллельна *Hh* (чл. 216, 4-е). Но площадь параллелограмма *AChe* равна произведенію высоты онаго на *Ch* или *Be*: площадь треугольника *AHC* равна произведенію сей же высоты на $\frac{1}{2}HC$ или EB; слѣд. площадь *AHha* равна произведенію общей высоты на *Ee* или на $hC + \frac{1}{2}HC$ или наконецъ на $\frac{1}{2}(Aa + Hh)$.

(*Для площади четыреугольника* см. чл.-ы 318, V; и 565, VI).

260. Площадь (чер. 87) трапеціи $ABba = \frac{1}{2}Gg \times (AB + ab)$. Умноживъ *AB* и *ab* на число сторонъ правильныхъ многоугол. *ABCD....*, *abcd....*, получимъ ихъ периметры *P* и *p*. Посему разность ихъ площадей будетъ $= \frac{1}{2}Gg(P + p)$. Такъ какъ отъ возрастанія числа сторонъ *Gg* безпрестанно приближается къ нулю, а $\frac{1}{2}(P+p)$ къ окружности, то сія разность можетъ быть сдѣ-

лана произвольно малою. Слѣд. *площадь круга есть предѣлъ площадей вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ* (чл. 115).

Площадь C *круга, коего радіусъ есть* R, *равна произведенію половины радіуса на окружность, или квадрата радіуса на отношеніе* π *окружности къ діаметру.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ α избытокъ площади описаннаго многоугольника надъ площадью круга, p окружность, а β избытокъ периметра многоугольника надъ окружностію; слѣд. площадь сего многоугольника или $C+\alpha$ будетъ (чл. 258) $=\frac{1}{2}R(p+\beta)$. Но какъ измѣняемыя α и β безконечно уменьшаются (*), то сравнивъ постоянные члены (чл. 115), получимъ: кругъ $C=\frac{1}{2}pR$ окруж. $\times\frac{1}{2}R=\pi R^2$; ибо $p=2\pi R$ (чл. 248).

Когда площадь круга дана, то радіусъ

$$R=\sqrt{\frac{C}{\pi}}=k.\sqrt{C},\quad k=0{,}56419,\quad \log k=\bar{1}{,}75142506.$$

Прямоугольникъ, коего основаніе есть полуокружность, а высота радіусъ, равенъ кругу; такимъ образомъ найдется приближенное рѣшеніе знаменитой задачи о *квадратурѣ круга.* Для строгаго рѣшенія оной, что почти безполезно, надлежало бы найти точную величину π.

261. *Площадь сектора* AOBI (чер. 109) *равна произведенію половины радіуса* AO *на дугу* AIB. Въ са-

(*) Замѣтимъ, что разсуждая подобнымъ, но неточнымъ образомъ, достигнули бы до того же выраженія, если бы откинули члены α и β, которые въ послѣдствіи должны исчезнуть, что дѣлается въ теоріи безконечно малыхъ количествъ, гдѣ принимаютъ окружность за правильный многоугольникъ безконечнаго числа сторонъ; ибо тогда C будетъ площадью сего многоугольника, а p периметромъ, и найдемъ, что $C=\frac{1}{2}pR$. Но сей способъ можетъ быть принятъ совершенно точнымъ, если докажется à priori, что пренебрегаемые члены суть безконечно малыя количества. Смотри о семъ предметѣ въ Reflexion sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal, par Carnot.

моихъ дѣлъ, извѣстно, что (чл. 168) $\frac{AOBI}{AODI} = \frac{AIB}{AID}$, отсюда $AOBI = \frac{\text{кругу}}{\text{окруж.}} \times AIB$, или $= \frac{1}{2}R \times AIB$.

Длина дуги AIB извѣстна (стр. 317): слѣд. $AOBI = \frac{\pi R^2}{n} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$, полагая AIB, $n^{\text{ую}}$ долею окружности, а α числомъ градусовъ оной.

Площадь сегмента $AEBI$ равна площади сектора безъ треугольника $AOBL$ (чл. 365, VII).

Около подобныхъ и концентрическихъ дугъ ABD, abd (чер. 142), опишемъ части прав. многоугольниковъ; рядъ сихъ трапецій составитъ площадь, предѣломъ коей будетъ $ABDabd$. Изъ чего легко заключить, что площадь $ABDabd$, заключающаяся между концентрическими дугами, равна произведенію взаимнаго разстоянія Aa сихъ дугъ, на половину ихъ суммы или на дугу $a'b'd'$, описанную въ равномъ отъ нихъ разстояніи (чл. 259).

Величину криволинейной площади всегда можно отыскать приближенно, принимая оную за многоугольникъ, коего стороны очень малы, и разбивая ее на треугольники или трапеціи. На пр: для площади $aADd$ (чер. 138) возставимъ къ линіи Aa какой-нибудь перпендикуляръ $a'd'$, проведемъ равноотстоящія параллельныя bB, cC... и означимъ оныя чрезъ p', p''..., $p^{(n)}$: такимъ образомъ поверхность $aADd$ раздѣлится на трапеціи, коихъ площади (чл. 259-й) будутъ $\frac{1}{2}(p' + p'')k$, $\frac{1}{2}(p'' + p''')k$...., гдѣ k есть разстояніе двухъ параллельныхъ. Сумма сихъ трапецій будетъ $aADd = k(\frac{1}{2}p' + p'' + p''' \ldots + \frac{1}{2}p^{(n)})$; и такъ *площадь криволинейная равна произведенію разстоянія k между параллельными, на ихъ сумму уменьшенную половиною двухъ крайнихъ линій.*

Сравненіе поверхностей.

262. Сравнимъ площади подобныхъ многоугольниковъ.

I. *Площади двухъ подобныхъ треугольниковъ* ABC, abc (чер. 110), *относятся какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ.* Ибо изъ подобія данныхъ треугольниковъ слѣдуетъ, что $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$: но перпендикуляры BD и bd, составляющіе также подобные треугольники ABD, abd, опять $\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd}$: посему $\frac{AC}{ac} = \frac{BD}{bd}$ (что согласно съ теоремою чл. 243). Умноживъ объ части на $\frac{BD}{bd}$, получимъ:

$$\frac{AC \times BD}{ac \times bd} = \frac{BD^2}{bd^2} = \frac{AB^2}{ab^2} = \ldots\ldots$$

II. *Площади двухъ подобныхъ многоугольниковъ* ABCD, abcd (чер. 93) *относятся какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ.* Ибо изъ подобія треугольниковъ ABC, abc (чл. 241) слѣдуетъ, что $\frac{T}{t} = \frac{AB^2}{ab^2}$: также $\frac{T'}{t'} = \frac{AC^2}{ac^2} = \frac{AB^2}{ab^2}$ и проч.; соединивъ сіи равныя отношенія, получимъ $\frac{T}{t} = \frac{T'}{t'} = \frac{T''}{t''} = \ldots = \frac{AB^2}{ab^2}$, откуда (чл. 73, 3-е) $\frac{T + T' + T'' \ldots}{t + t' + t' \ldots} = \frac{AB^2}{ab^2} = \frac{ABCD\ldots}{abcd\ldots}$.

263. Изъ сего заключимъ, что 1-е, если построимъ три подобные многоугольника M, N и P (чер. 111), коихъ сходственныя стороны суть бока прямоугольнаго треугол. ABC, то $\frac{M}{AB^2} = \frac{N}{BC^2} = \frac{P}{AC^2}$, откуда $\frac{M}{AB^2} = \frac{N+P}{BC^2+AC^2}$: но $AB^2 = BC^2 + AC^2$; посему $M = N + P$. Симъ распространяется предложеніе о квадратѣ ги-

гипотенузы (чл. 254, 2-е), на всѣ подобные многоугольники, такъ что легко можно построить многоугольникъ, равный суммѣ, или разности другихъ двухъ, или нѣсколькихъ, чтобы только они были всѣ подобные между собою.

2-е. Площади правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ, относятся какъ квадраты радіусовъ вписанныхъ и описанныхъ круговъ.

3-е. Круги C, c относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ R, r или ихъ діаметровъ: ибо пусть α и β предоставляютъ избытки площадей описанныхъ многоугольниковъ надъ площадями круговъ C, c; площади многоугольниковъ будутъ $C+\alpha$, $c+\beta$;

откуда $\frac{C+\alpha}{c+\beta} = \frac{R^2}{r^2}$; или (чл. 113) $\frac{C}{c} = \frac{R^2}{r^2}$.

Сіе также найдется изъ того, что $C = \pi R^2$, $c = \pi r^2$.

4-е. Кругъ, коего діаметръ есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, равенъ слѣдовательно суммѣ другихъ двухъ, которыхъ діаметры суть катеты; такъ что легко построить кругъ, равный суммѣ или разности нѣсколькихъ другихъ.

264. *Два треугольника* ABC, abc (чер. 110), *имѣющіе равный уголъ* A = a, *относятся между собою, какъ прямоугольники изъ сторонъ, заключающихъ сей уголъ.* Въ самомъ дѣлѣ, опустивъ перпендикуляры BD, bd на ихъ основанія, получимъ (чл. 256) $\frac{ABC}{abc} = \frac{BD \times AC}{bd \times ac}$: но изъ подобія треугольниковъ ABD, abd будетъ $\frac{BD}{bd} = \frac{AB}{ab}$;

посему $$\frac{ABC}{abc} = \frac{AB \times AC}{ab \times ac}.$$

Посредствомъ сей теоремы можно рѣшить слѣдующія задачи:

I. *Раздѣлить треугольникъ* ABC (чер. 112) *на три равныя части, прямыми* FD, FE, *сходящимися въ*

данной точкѣ F *на основаніи* AC. Раздѣлимъ основаніе въ точкахъ H и I на три равныя части, какъ треугольникъ CBI составляетъ треть треуг. CBA (чл. 256, 2-с); то неизвѣстная площадь $CDF = CBI$. Но $\frac{CDF}{CBI} = \frac{CD \times CF}{CB \times CI}$, посему $CD \times CF = CB \times CI$, или $\frac{CD}{CB} = \frac{CI}{CF}$, изъ чего заключимъ (чл. 212), что DI параллельна BF, и что должно слѣдовательно провесши BF, потомъ ей параллельныя HE, DI и наконецъ DF, FE.

II. Тоже строеніе можно употребить для раздѣленія площади ABC (чер. 113) на 4, 5.... равныхъ частей, линіями FE, FE', FD', FD: для сего должно основаніе AB раздѣлить на столько же равныхъ частей. Вышесказанное можетъ служить къ раздѣленію извѣстнаго владѣнія ABC, на равные участки, рубежами, сходящимися въ общей точкѣ.

III. Начертить треугольникъ EIK, равновеликой съ ABC (чер. 114) и имѣющій основаніемъ линію EI, а вершиною точку K, находящуюся на данной линіи NK? Положимъ сначала, что два треугольника ABC, ADF равновелики, и какъ

$$\frac{ABC}{ADF} = \frac{AB \times AC}{AD \times AF},$$

то $AB \times AC = AD \times AF$ или $\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC}$.

И такъ BF будетъ параллельна DC (чл. 212). Посему если желаемъ построить треуг. $EGH = ABC$, коего вершина E была бы данная точка, а основаніе GH въ направленіи основанія AH даннаго треугольника, то должно провесть ED параллельно AC, потомъ DC и ей параллельную BF, и получимъ $ADF = ABC$: взявъ въ направленіи AC, $GH = AF$, получимъ треугольникъ $GHE = ABC$, исполняющій требуемое условіе. Замѣтимъ, что употребили бы тоже строеніе, еслибъ вмѣсто вершины E было дано основаніе GH или даже уголъ H: всѣ сіи различныя условія состав-

лаютъ столько же задачъ рѣшающихся однимъ способомъ.

Взявъ EG за основаніе, можно также треугольникъ EGH преобразовать въ равновеликій ему EIL, коего бы вершина находилась въ точкѣ I; для сего превращаютъ треугольникъ ABC въ EIL, по данному сторонѣ EI и углу EIL. Наконецъ линія LK, параллельная EI, пересѣчетъ данную прямую NK въ точкѣ K, и треугольникъ $EIK = EIL = ABC$ будетъ удовлетворять предложенной задачѣ. Точку K можно опредѣлить, по данной IK или углу EKI (чл. 208, V) или всякому другому условію.

О плоскостяхъ и плоскостныхъ углахъ.

265. Изъ опредѣленія *плоскости* (чл. 154) слѣдуетъ, что

1-е. Плоскость есть поверхность неопредѣленной длины и ширины.

2-е. *Три точки, или двѣ пересѣкающіяся прямыя, всегда находятся въ одной плоскости, коей положеніе оныя опредѣляютъ.* Очевидно въ самомъ дѣлѣ, что чрезъ одну изъ данныхъ прямыхъ, или чрезъ линію, соединяющую двѣ изъ данныхъ точекъ, можно провесть безконечное число плоскостей; ибо взявъ одну изъ оныхъ, можно ее обращать около сей линіи какъ на оси. Но движеніе сей плоскости прекратится, если внѣ линіи будетъ дана точка, чрезъ которую плоскость должна проходить.

3-е. Треугольникъ всегда въ одной плоскости.

4-е. Двѣ параллельныя линіи опредѣляютъ положеніе плоскости.

5-е. Двѣ плоскости не могутъ не сливаясь имѣть трехъ общихъ точекъ не въ прямой линіи; и такъ, *сѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.*

266. Когда прямой уголъ PAB (чер. 115) будемъ обращать около AB, до тѣхъ поръ, пока AP съ

третьею линіею AC составимъ прямой уголъ PAC, тогда говорятъ, что AP перпендикулярна къ плоскости двухъ прямыхъ AB, AC.

Если прямая AP *перпендикулярна къ другимъ двумъ* AB, AC, *пересѣкающимся въ* A, *то она перпендикулярна также и ко всякой линіи* AI, *проведенной чрезъ сію точку по плоскости* ABC *первыхъ двухъ линій.* Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлимъ величину угла PAI: для сего сдѣлаемъ $AB = AC$ и взявъ какую-нибудь точку P, соединимъ сіи три точки P, C, B. Линіи PB, PC равны, ибо треугол. $PAC = PAB$. Изъ средины O основанія BC равнобедренныхъ треугольниковъ PBC, ABC, проведемъ PO, AO; онѣ будутъ перпендикулярны къ сему основанію (чл. 201, 3-е); изъ прямоугольныхъ треугольниковъ PCO, ACO, PAC получимъ

$$PO^2 = PC^2 - CO^2,\ AC^2 = CO^2 + AO^2,\ PC^2 = AP^2 + AC^2.$$

Сложивъ сіи уравненія, будемъ $PO^2 = AP^2 + AO^2$; слѣдовательно треугольникъ APO прямоугольный (стр. 293).

Изъ прямоугол. треугол. POI, AOI, APO найдемъ, что $PI^2 = PO^2 + OI^2$, $AO^2 = AI^2 - OI^2$, $PO^2 = AP^2 + AO^2$, сумма сихъ уравненій будетъ $PI^2 = AI^2 + AP^2$; и такъ уголъ PAI прямой; посему PA перпендикулярна ко всякой прямой AI, проведенной въ плоскости MN.

Отсюда заключимъ, что 1-е, *косвенныя* PC, PB (чер. 115) *равно отдаленныя отъ перпендикуляра* AP *равны, и обратно.* Сіе слѣдуетъ изъ треугол. $PAC = PAB$.

Концы B, E, D, C равныхъ косвенныхъ PB, PE... (чер. 116) принадлежатъ окружности, коей центръ есть A; слѣдовательно, *чтобы изъ точки* P *взятой внѣ плоскости* MN *провести къ оной перпендикуляръ*, должно назначить на сей плоскости три точки E, B, C въ равномъ разстояніи отъ P; центръ A

круга проходящаго чрезъ сіи три точки будетъ основаніе перпендикуляра.

2-е. *Если будемъ обращать прямой уголъ* PAB (чер. 116, *около его стороны* AP, *то другая сторона* AB *опишетъ плоскость перпендикулярную къ* AP; ибо если бы плоскость *MN* проведенная чрезъ точку *A* перпендикулярно къ *AP*, не заключала прямую *AB* во всѣхъ ея положеніяхъ, т. е. одна на пр: *AD* была бы внѣ *MN*, то на плоскости *DAP*, пересѣкающей *MN* по линіи *CA* перпендикулярной къ *AP*, составились бы къ линіи *AP* два перпендикуляра *CA*, *DA*.

3-е. *Чрезъ точку* C *или* A (чер. 116), *можно всегда провести плоскость* MN *перпендикулярную къ прямой* AP, *и притомъ только одну*. Ибо пусть *CA* перпендикулярна къ *AP*; обращая прямой уголъ *PAC* около *AP*, *CA* опишетъ требуемую плоскость *NM*.

4-е, *Изъ точки* A *или* P (чер. 116), *нельзя провести болѣе одного перпендикуляра* AP *къ плоскости* MN, *онный есть кратчайшее разстояніе точки* P *отъ плоскости: тѣмъ косвенная болѣе отдаляется отъ* AP, *тѣмъ она длиннѣе*. Ибо равныя косвенныя равно отдалены отъ перпендикуляра, слѣдовательно можно сіи различныя линіи привести въ одну плоскость. Если допустимъ на пр: что $AI > AC$, то отложимъ по плоскости PAI линію $AE = AC$, и какъ $PI > PE = PC$, получимъ $PI > PC$.

5-е. *Двѣ плоскости* MN, *тп* (чер. 117) *перпендикулярныя къ одной прямой* AP, *не могутъ встрѣтиться;* ибо если бъ онѣ были непараллельны, то соединивъ какую-нибудь точку *O* ихъ сѣченія съ концами *A* и *P*, линіи *AO*, *PO* были бы два перпендикуляра опущенные на туже линію *AP* изъ одной точки *O*; что невозможно (чл. 175).

6-е. *Чтобъ опустить изъ точки* P (чер. 115), *перпендикуляръ* PO *на прямую* BC, *находящуюся въ какой-нибудь плоскости* MN, *должно провести къ*

сей плоскости перпендикуляръ PA; потомъ изъ его основанія A, опустивъ на BC перпендикуляръ AO; соединивъ наконецъ точки O и P, PO будетъ требуемый перпендикуляръ. Чтобъ увѣриться, достаточно на BC отложить $OB = OC$, провести AB и AC, потомъ повторить вышепредложенное доказательство.

Замѣтимъ, что плоскость PAO перпендикулярна къ BC; что также доставляетъ способъ *проводить чрезъ данную точку* P *плоскость перпендикулярную къ прямой* BC.

267. *Если двѣ прямыя* PA, QO (чер. 118) *параллельны, и плоскость* MN *перпендикулярна къ одной изъ нихъ* PA, *то она будетъ также перпендикулярна и къ другой* QO; ибо проведя въ плоскости MN прямую AO, и ей перпендикулярную BO, увидимъ, какъ въ чер. 115, что BO будетъ перпендикулярна къ плоскости PAO, и слѣдовательно къ QO, находящейся въ сей плоскости PAO (чл. 266). Сверхъ того уголъ QOA по причинѣ параллельности линій PA, QO равенъ прямому углу PAO, такъ что QO перпендикулярна къ AO и BO, т. е. къ плоскости AOB или MN.

Обратно двѣ прямыя AP, QO, *перпендикулярныя къ одной плоскости* MN, *параллельны между собою;* ибо въ противномъ случаѣ можно бы чрезъ точку A провести кромѣ AP, другую параллельную къ QO, которая была бы также, какъ и AP, перпендикулярна къ плоскости MN; что не возможно (чл. 266, 4-е).

Посему, *двѣ линіи* Aa *и* Bb (чер. 119), *параллельныя третьей* Cc, *параллельны между собою;* ибо проведя плоскость перпендикулярную къ Cc, она будетъ также перпендикулярна къ ея параллельнымъ Aa и Bb, въ силу вышеизложеннаго предложенія: а изъ обратнаго оному слѣдуетъ, что Aa будетъ параллельна Bb.

268. *Сѣченія* KI, ki (чер. 117) *двухъ параллельныхъ плоскостей* MN, mn *третьею* kKI, *параллельны между собою;* ибо сіи сѣченія находятся въ одной плоскости, и не могутъ встрѣтиться.

Посему 1-е, *линія* AP, *перпендикулярная къ плоскости* MN, *перпендикулярна и ко всякой параллельной ей плоскости mn*; ибо проведя чрезъ *AP* какую-нибудь плоскость *BCcb*, сѣченія *BC*, *bc*, будучи параллельны, уголъ *bPA* будетъ прямой. И такъ *AP* перпендикулярна ко всякой линіи *bc* проведенной чрезъ точку *P* въ плоскости *mn*.

2-е. *Параллельныя линіи* Ii, Kk, *заключающіяся между двумя параллельными плоскостями* MN, mn, *равны между собою;* ибо плоскость *IKki* сихъ линій проводящихъ параллельныя *IK*, *ik*; и такъ четыреугольникъ *Ik* будетъ параллелограммъ, откуда *Ii* = *Kk*.

Посему *двѣ параллельныя плоскости всѣдъ равноотстоятъ одна отъ другой.*

269. *Если прямая* Cc (чер. 119) *параллельна линіи* Aa, *то она параллельна и всякой плоскости* AbB *проходящей чрезъ* Aa: ибо *Cc* находясь въ плоскости *Ac* двухъ параллельныхъ, не иначе можетъ встрѣтить плоскость *Ab*, какъ въ одной изъ точекъ линіи *Aa*, которая не была бы слѣдовательно параллельна *Cc*.

Когда даны двѣ прямыя *ab*, *Cc* непараллельныя и непересѣкающіяся, то чрезъ одну изъ нихъ всегда можно провесть плоскость параллельную другой линіи, и только одну; ибо чрезъ какую-нибудь точку *a* или *b*, проведемъ *aA* или *bB* параллельно къ *cC*, плоскость *Ab* будетъ требуемая.

270. Наклоненіе двухъ пересѣкающихся плоскостей *Ab*, *Ac* (чер. 119), т. е. большее или меньшее количество взаимнаго ихъ отклоненія, называется *плоскостнымъ или двуграннымъ угломъ* (dièdre) которой будемъ означать чрезъ *baAc*, ставя буквы

aA, выражающія сѣченіе, между буквами *b*, *c*, принадлежащихъ сторонамъ онаго.

Прямолинейные углы bac, BAC, *происходящіе отъ пересѣченія плоскостнаго угла, двумя какими-нибудь параллельными плоскостями, равны между собою.* Въ самомъ дѣлѣ, *ab* и *AB* параллельны (чл. 268), также какъ *ac* и *AC*; отложивъ на нихъ прямыхъ, равныя части $ab = AB$, $ac = AC$; проведемъ *Cc*, *Bb*, *cb* и *CB*. Въ четыреугольникѣ *Ab* (чл. 200) *Bb* будетъ равна и параллельна *Aa*: также въ четыр. *Ac*, линія *Cc* равна и параллельна *Aa*. И такъ, *Bb* равна и параллельна *Cc*, и четыр. *Cb* есть параллелограммъ. Посему $CB = cb$, а слѣдовательно треугольникъ $bac = BAC$, и наконецъ уголъ $bac = BAC$.

Изъ сего заключимъ, что 1-е. *если два угла* bac, BAC *въ пространствѣ, имѣютъ параллельные бока, и отверстія оныхъ обращены въ одну сторону, то сіи углы равны.* Если отверстія обращены въ противныя стороны, то сіи углы суть дополнительные, какъ въ чл. 183, 3-е.

2-е. *Плоскости сихъ угловъ параллельны.* Въ самомъ дѣлѣ, если возставимъ изъ вершины *a* къ плоскости *bac* перпендикуляръ, и проведемъ чрезъ точку *I* сѣченія онаго съ плоскостію *BAC*, по сей послѣдней *IK*, *IL* параллельныя къ *AB* и *AC*, то онѣ будутъ также параллельны къ *ab* и *ac* (чл. 267). Но какъ углы *Iab*, *Iac* прямые и равны *alK*, *alL*, слѣд. *al* перпендикулярна къ плоскости *KIL* (чл. 266). Посему двѣ плоскости *bac*, *BAC* перпендикулярны къ одной прямой (чл. 266, 5-е).

3-е. Треугольники *bac*, *BAC* образуемые соединеніемъ оконечностей трехъ равныхъ и параллельныхъ прямыхъ въ пространствѣ равны между собою; а ихъ плоскости параллельны.

271. *Пусть два плоскостныхъ угла* BAPC, bapc (чер. 120), *пересѣкутся плоскостями* BAC, bac *перпен-*

дикулярными къ ихъ ребрамъ AP, ap; *плоскостные углы будутъ въ томъ же отношеніи какъ и прямолинейные* BAC, bac, *происходящіе отъ сего сѣченія, и коихъ бока суть перпендикуляры проведенные по каждой сторонѣ изъ одной точки ихъ реберъ* AP, ap.

Въ самомъ дѣлѣ, 1-е. Въ какой бы точкѣ *A* ребра *AP* ни было сдѣлано перпендикулярное сѣченіе, уголъ *BAC* будетъ одинъ и тотъ же (чл. 270).

2-е. Если углы *BAC*, *bac* равны, то плоскостные углы также будутъ равны, ибо оные совмѣщаются при наложеніи угла *BAC* на *bac*.

3-е. Если углы *BAC* и *bac* имѣютъ общую мѣру *CAx*, то нанеся оную на *CAB* и *cab* столько разъ, сколько она можетъ въ нихъ содержаться, и проведя плоскости чрезъ ребра *AP*, *ap* и линіи дѣленій *Ax*, *Ax'* ..., каждый плоскостной уголъ будетъ заключать плоскостной уголъ *CAPx*, столько же разъ, сколько *CAx* содержится въ *CAB* и *cab*. Ошкуда слѣдуетъ, что плоскостные углы относятся между собою какъ *CAB* къ *cab*.

4-е. Если углы *CAB*, *cab* несоизмѣримы, то легко доказать какъ въ чл. 168, 2-е, существованіе сей пропорціи.

Изъ сего заключимъ (чл. 36, 71), *что плоскостной уголъ измѣряется прямолинейнымъ, происходящимъ отъ пересѣченія онаго, плоскостію перпендикулярною къ его ребру:* ибо взявъ *cab* за единицу угловъ, можно плоскостной уголъ *bapc* ему соотвѣтствующій принять за единицу плоскостныхъ угловъ, какъ въ чл. 169, и наконецъ получимъ, что дуги круговъ служатъ также мѣрою плоскостнымъ угламъ.

При пересѣченіи плоскостей, найдемъ тѣ же теоремы какъ и при пересѣченіи линій. И такъ, сумма смежныхъ угловъ двухъ пересѣкающихся плоскостей равна двумъ прямымъ; углы противоположные вершинами равны между собою. Двѣ параллельныя пло-

скости пересѣченныя третьею, составляютъ углы по одну сторону внутренніе или внѣшніе, углы накрестъ внутренніе, и накрестъ внѣшніе, равные между собою; и обратно, и проч....

272. Плоскости называются перпендикулярными, когда ихъ плоскостной уголъ измѣряется прямымъ угломъ.

Если прямая AB (чер. 121) *перпендикулярна къ плоскости* MN, *то всякая плоскость* PQ *проходящая чрезъ сію линію, также перпендикулярна къ* MN; ибо проводя по плоскости *MN* прямую *AC* перпендикулярную къ *RP*, уголъ *BAC* будетъ прямой (чл. 271). Посему 1-е, *чтобы возставить изъ точки* A *къ плоскости* MN *перпендикуляръ* AB, наложимъ на сію плоскость сторону *RP* прямаго угла *PAB*; и будемъ обращать сей уголъ около *PR* до тѣхъ поръ, пока *PQ* сдѣлается перпендикулярною къ *MN*.

2-е. *Чрезъ прямую* PQ *или* AB (чер. 122), *можно провести одну только плоскость, перпендикулярную къ* MN; положеніе сей плоскости *ABQP* опредѣляется перпендикуляромъ *AP* къ *MN*.

3-е. *Проложеніе A* точки *P* на плоскости *MN* есть подошва перпендикуляра *AP*, опущеннаго изъ точки *P* на сію плоскость.

Проложеніе *AB* линіи *PQ* есть рядъ подошвъ всѣхъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ разныхъ точекъ линіи на плоскость. Если сія линія прямая, то рядъ всѣхъ сихъ перпендикуляровъ составитъ плоскость *PABQ*, перпендикулярную къ *MN;* сѣченіе *AB* сихъ двухъ плоскостей есть проложеніе линіи *PQ*, которое и будетъ прямая линія, опредѣляемая проложеніями *A* и *B* двухъ точекъ *P* и *Q*.

Уголъ, составляемый прямою линіею съ ея проложеніемъ на плоскости, называется угломъ наклоненія прямой къ плоскости. Линіи *AB*, *AO*... (чер. 115) суть проложенія на плоскости *MN* прямыхъ *PB*,

PO..., а углы ими составляемые съ сею плоскостію суть *PBA*, *POA*....

273. *Если плоскости* PQ и MN (чер. 121) *взаимно перпендикулярны, и по одной изъ нихъ* PQ, *проведется* AB *перпендикулярная къ ихъ сѣченію* PR, *то она будетъ также перпендикулярна и къ плоскости* MN. Ибо если проведемъ по сей плоскости *MN*, *AC* перпендикулярную къ *PR*, то уголъ *BAC* будетъ прямой, потому что измѣряетъ плоскостной уголъ: и такъ *AB* будетъ перпендикулярна къ *PR* и къ *AC* (чл. 266).

Обратно, если плоскости *PQ* и *MN* взаимно перпендикулярны, и изъ точки *A* ихъ сѣченія *PR*, возставимся перпендикуляръ *AB* къ плоскости *MN*, то оный будетъ находиться въ плоскости *PQ*; ибо въ противномъ случаѣ, проведя по сей плоскости *PQ*, изъ точки *A* къ *PR* перпендикуляръ, получили бы вторый перпендикуляръ въ сей точкѣ къ плоскости *MN*.

Посему, если двѣ плоскости *PQ*, *RS* (чер. 123) перпендикулярны къ третьей *MN*, то и сѣченіе ихъ *AB* перпендикулярно къ *MN*; ибо если изъ точки *A*, возставимъ перпендикуляръ къ сей плоскости *MN*, то оный долженъ находиться въ одно время въ обѣихъ плоскостяхъ *PQ*, *RS*.

274. *Кратчайшее разстояніе* Oo (чер. 119) *двухъ непересѣкающихся прямыхъ* aob, AC, *есть линія перпендикулярная къ обѣимъ.* Ибо проведемъ чрезъ *ab* плоскость *bac* параллельную къ *AC*, и чрезъ *AC* плоскость *BAC* параллельную къ *ab* (чл. 269); очевидно, что искомое кратчайшее разстояніе будетъ разстояніе параллельныхъ плоскостей *bac*, *BAC* (чл. 268, 2-е). Чрезъ *ab*, проведемъ плоскость *baIK* перпендикулярную къ плоскости *BAC*; сѣченіе *IK* встрѣтившися съ *AC* въ точкѣ *O*; наконецъ возставивъ перпендикуляръ *Oo* къ плоскости *BAC*, *Oo* будетъ искомая линія.

275. *Двѣ прямыя* AB, CD (чер. 124), *пересѣкаются тремя параллельными плоскостями* RS, PQ, MN, *на части пропорціональныя.* Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ *AD*, и соединимъ точки *BD*, *EFG*, *AC*; *EF* будетъ параллельна къ *BD* (чл. 268), также какъ и *AC* къ *FG*. Посему получимъ

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD}; \text{ и } \frac{AF}{FD} = \frac{CG}{GD}; \text{ откуда } \frac{AE}{EB} = \frac{CG}{GD}$$

О тѣлесныхъ углахъ.

276. Когда нѣсколько плоскостей (чер. 125), пересѣкаясь, образуютъ прямыя *SA*, *SB*, *SC*..., сходящіяся въ одной точкѣ *S*, то неопредѣленное пространство, заключаемое между сими плоскостями, называется *многограннымъ или тѣлеснымъ угломъ* (Angle polyèdre ou solide). Каждый изъ угловъ *ASB*, *BSC*... его составляющихъ, есть *прямолинейной.*

Когда сіе пространство ограничено плоскостію *ABCDE*, тогда тѣло *SABCDE* называется *пирамидою.*

Если многоугольникъ *ABCDE*, служащій основаніемъ пирамидѣ, есть правильный, и если сверхъ того перпендикуляръ *SH*, опущенный изъ вершины *S*, проходитъ чрезъ центръ *H* многоугольника, то пирамида называется правильною.

Впрочемъ пирамиды различаются, какъ и тѣлесные углы, по числу сторонъ составляющихъ уголъ S: *трегранный* уголъ (trièdre) имѣетъ три стороны; *шестигранный* (hexaèdre) шесть сторонъ и проч.

277. *Линіи* SA, SB... *проведенныя изъ одной точки* S (чер. 125), *пересѣкаются двумя параллельными плоскостями* AC, ac, *на части пропорціональныя; или ребра пирамиды* SAC, *пересѣкаются пропорціонально плоскостію* ac, *параллельною ея основанію.* Ибо линіи *AB*, *ab*, *BC*, *bc*.... параллельны; слѣдовательно:

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{AB}{ab}; \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \frac{BC}{bc};$$ и проч.

и какъ сіи пропорціи соединяются общимъ отношеніемъ, то и получимъ $\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \ldots$

Легко доказать обратное сему.

278. *Многоугольникъ* abc...., *происходящій отъ пересѣченія пирамиды плоскостію* ac *параллельною ея основанію* AC, *подобенъ сему основанію.* Ибо $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \ldots$; и какъ сверхъ того стороны многоугольниковъ $ABC\ldots$, $abc\ldots$ параллельны, то углы A и a, B и $b\ldots$ равны (чл. 270), слѣдовательно сіи многоугольники подобны. *Они относятся какъ квадраты разстояній отъ вершины;* ибо опустивъ перпендикуляръ SH на $ABC\ldots$, онъ пересѣчетъ $abc\ldots$ въ h и получимъ $\frac{AB^2}{ab^2} = \frac{ABCD\ldots}{abcd\ldots}$ (чл. 262); но $\frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SH}{Sh}$, посему....

279. *Во всякомъ трегранномъ углѣ* S (чер. 126), *каждый изъ прямолинейныхъ угловъ менѣе суммы двухъ прочихъ:* сіе предложеніе должно только доказать относительно наибольшаго прямолинейнаго угла ASE. И такъ сдѣлаемъ на сей сторонѣ уголъ $DSE = FSE$; потомъ проведемъ какую-нибудь прямую AB, и отложимъ по ребру SF часть $SC = SD$. Изъ равенства треугольниковъ DSB, CSB будетъ $BD = BC$; и какъ $BA < BC + CA$, то $AD < AC$. Посему въ треугольникахъ ASC, ASD уголъ $ASD < ASC$ (чл. 198), и слѣдовательно уголъ

$$BSA < BSC + CSA.$$

280. *Въ многогранномъ углѣ* S (чер. 128), *сумма прямолинейныхъ угловъ его составляющихъ, менѣе четырехъ прямыхъ.* Въ самомъ дѣлѣ, пересѣкъ плоскостію многогранный уголъ S, получимъ основаніе $ABCDE$, и составившуюся пирамиду SAD. Изъ угловъ

сего основанія проведемъ въ точку O произвольно взятую внутри онаго, линіи OA, OB, OC...: произойдетъ столько треугольниковъ, сколько ихъ входитъ въ составъ угла S; и сумма угловъ какъ тѣхъ, такъ и другихъ треугольниковъ, будетъ одна и таже.

Далѣе, прямолинейный уголъ $ABC < ABS + SBC$: тоже скажемъ и о прочихъ трегранныхъ углахъ C, D...; откуда слѣдуетъ, что сумма угловъ многоугольника ABC..., менѣе суммы угловъ при основаніи въ треугольникахъ SAB, SBC.... Посему для сохраненія равенства, сумма прямолинейныхъ угловъ при S, должна быть менѣе суммы угловъ при O.

И такъ *изъ равныхъ правильныхъ многоугольниковъ нельзя составить болѣе пяти многогранниковъ;* ибо 1-е, каждый уголъ правил. шестиугольника равенъ $\frac{4}{3}$ прямаго (чл. 255), или $\frac{4}{3}D$, три таковые угла составляютъ $4D$; и не могутъ быть употреблены для образованія многограннаго угла; а тѣмъ болѣе нельзя взять для тѣлеснаго угла 4 правил. шестиугольника, или семиугольника и проч.

2-е. Многогранный уголъ не можетъ быть составленъ изъ 4. 5.... правил. пятиугольниковъ, также изъ 4. 5... квадратовъ, или 6. 7... равносторон. треугольниковъ. Ибо соотвѣтственныя величины сихъ угловъ суть $\frac{6}{5}D$, $1D$, $\frac{2}{3}D$.

3-е. И такъ тѣлесные углы правильнаго многогранника могутъ только состоять изъ трехъ правил. пятиугольниковъ, трехъ квадратовъ, и 3, 4, или 5 равносторонних треугольниковъ. (Смотри la Géométrie de M. Legendre, app. aux livres VI et VII: гдѣ доказано, что какимъ образомъ дѣйствительно можно составить правильные многогранники въ 12, 6, 20, 8 и 4 стороны).

281. *Въ двухъ трегранныхъ углахъ* S и *s* (чер. 126), *составленныхъ изъ соотвѣтственно равныхъ прямо-*

линейныхъ угловъ ESF = esf, FSG = fsg, ESG = esg, *плоскостные углы равны.* Ибо сдѣлавъ ребра *SB*, *sb* равными, и проведя къ нимъ перпендикулярныя плоскости *BAC*, *bac*, составятся равные прямоугольные треугольники *SBC* = *sbc* и *SBA* = *sba;* откуда *SC* = *sc*, *SA* = *sa*; посему треугольникъ *SCA* = *sca*, слѣдовательно треуг. *BAC* = *bac.* И такъ уголъ *ABC* = *abc*, или плоскостной уголъ *ABSC* = *absc.* Также докажемъ равенство другихъ плоскостныхъ угловъ.

1-е. *Если равные прямолинейные углы расположены въ одинакомъ порядкѣ*, какъ въ чер. 126, то наложивъ сторону *asb* на равную ей *ASB*, *sbc* упадетъ на *SBC*, *sc* на *SC*, и *bca* на *BCA*; слѣд. *трегранные углы совпадаютъ.*

2-е. Но если прямолинейные углы расположены не въ одинакомъ порядкѣ (чер. 127), *ASB* = *A'S'B'*, *ASC* = *A'S'C'* и *BSC* = *B'S'C'*; тогда плоскостные углы также равны, но не могутъ болѣе совпадать. Чтобы наложить треугольникъ *A'B'C'* на равный ему *ABC*, должно опрокинуть тѣло *S'A'C'B'* и наложить *B'C'* на *BC*, *A'B'* на *AB* и *A'C'* на *AC*; одно изъ тѣлъ будетъ находиться въ верьху основанія *ABC*, а другое въ низу онаго (чер. 129). Таковыя тѣла называются *симметрическими* (см. чл. 300); ибо перпендикуляры *SB*, *S'B* къ общей плоскости основанія *ABC*, равны между собою.

3-е. Очевидно, что трегранные углы *S* и *s* (чер. 126) также совмѣстятся, когда имѣютъ по равному плоскостному углу, заключающемуся между двухъ прямолинейныхъ угловъ, соотвѣтственно равныхъ и одинаково расположенныхъ.

4-е. *Два многогранные угла* S и S' (чер. 125) *равны, если составлены изъ плоскостныхъ и прямолинейныхъ угловъ равныхъ каждой каждому, и расположенныхъ въ одинакомъ порядкѣ.* Ибо проведя плоскости чрезъ одно изъ ребръ *SB* и чрезъ всѣ про-

чія, составятся прегранные углы $ESAB$, $ESBD$.... Сдѣлаемъ тоже въ углѣ S', плоскостной уголъ $ESAB : E'S'A'B'$, посему прямолинейный уголъ $ESB = E'S'B'$, и плоскостной уголъ $AESB = A'E'S'B'$; но по положенію плоскостной уголъ $AESD = A'E'S'D'$; вычтя одно уравненіе изъ другаго, получимъ $BESD = B'E'S'D'$. Слѣдовательно плоскостной уголъ $BESD = B'E'S'D'$; также и для прочихъ.

Поверхности тѣлъ.

282. Прямая линія Aa (чер. 131), двигаясь параллельно самой себѣ, и описывая однимъ концемъ какой-нибудь многоугольникъ $ABCDE$, при постоянной длинѣ Aa оной линіи, образуетъ тѣло называемое *призмою*. Если *ребро* Aa перпендикулярно къ плоскости *основанія* ABC..., то призма *прямая*.

Какъ Aa равна и параллельна Bb, то Ba будетъ параллелограммъ (чер. 200); также какъ и Cb..; посему всѣ *боковыя стороны призмы суть параллелограммы*. Всякая часть Aa' ребра Aa производитъ также параллелограммы Ba', Cb'..., какъ что многоугольникъ $a'b'c'$.., описанный точкою a', имѣетъ стороны равныя и параллельныя сторонамъ основанія ABC.., слѣд. сіи многоугольники равны и ихъ плоскости параллельны (чл. 270, 2-е). И такъ, *всякое сѣченіе, сдѣланное въ призмѣ плоскостію параллельною основанію, равно оному: посему противоположныя основанія* ABC..., abc.... *равны и параллельны*. Разстояніе сихъ основаній есть *высота* призмы.

283. *Поверхность призмы равна произведенію ребра* Aa (чер. 132), *на периметръ перпендикулярнаго къ нему сѣченія* a'b'c'.... Очевидно, что исключая основанія, поверхность призмы есть сумма площадей составляющихъ оную параллелограммовъ. Если призма прямая, то поверхность ея равна произве-

денію перпендикуляра основанія оной на одно изъ ея ребръ. Если разсѣчемъ призму Ac плоскостію $a'b'c'\ldots$, перпендикулярною къ ребру Aa, и приложимъ верхнюю часть $a'c$ къ нижней Ac', такъ чтобы $abc\ldots$, совмѣстилось съ $ABC\ldots$, то призма обратится въ прямую. Слѣд. и проч.

284. Положимъ, что основаніе призмы есть параллелограммъ $ABCD$ (чер. 154); кромѣ равныхъ и параллельныхъ сторонъ AC, ac, сторона Ab также равна и параллельна Dc; ибо бока угловъ aAB, dDC равны и параллельны (чл. 270). Тоже скажемъ о сторонахъ Bc, Ad; по сей то причинѣ призма, коей основаніе есть параллелограммъ, называется *параллелипипедомъ*, ибо изъ *шести сторонъ оной, противоположныя равны и параллельны*, такъ что каждая изъ нихъ можетъ быть принята за основаніе.

Обратно, тѣло составленное изъ шести сторонъ, изъ коихъ каждыя двѣ параллельны, есть параллелипипедъ; ибо плоскости AC, ac будучи параллельны, AB и Aa будутъ параллельны ab и Bb (чл. 268); посему сторона Ab есть параллелограммъ, такде какъ Bc, $Ad\ldots$; слѣд. можно вообразить, что сей многогранникъ произошелъ отъ параллельнаго движенія прямой Aa, по сторонамъ параллелограмма $ABCD$.

Призма опредѣлится, когда даны величина и положеніе основанія $ABC\ldots$ (чер. 152), и производящаго ребра Aa; посему параллелипипедъ опредѣлится (чер. 154), когда извѣстенъ одинъ изъ его трехгранныхъ угловъ A, и длина ребръ Aa, AB и AD содержащихъ оный.

Если ребро Aa перпендикулярно къ основанію (чер. 153), и если сіе основаніе есть прямоугольникъ, то параллелипипедъ будетъ *прямоугольный*: всѣ углы онаго прямые; каждое ребро перпендикулярно къ плоскостямъ его ограничивающимъ; ибо извѣстно, что три прямыя Aa, AD и AB будучи взаимно пер-

перпендикулярны, каждая изъ нихъ перпендикулярна къ плоскости другихъ двухъ (чл. 266), если сверхъ того ребра равны, то призма называется *кубомъ*.

285. Плоскость *DdbB* (чер. 134), проходящая чрезъ два противоположныя ребра, производитъ параллелограммъ, коего *діагонали Db, Bd пересѣкаются пополамъ* (чл. 231; слѣдовательно четыре діагонали *Db*, *Bd*, *Ac* и *aC* пересѣкаются въ одной точкѣ *O*; ибо *Bd* пересѣкаетъ *Db* по-поламъ въ точкѣ *O*, и *Ac* должна также пересѣкать *Db* на двѣ равныя части.

286. Когда какая-нибудь кривая *ACDB* (чер. 144) обращается около оси *AB*, то оная производитъ *поверхность вращенія*. Отличительное свойство сихъ поверхностей состоитъ въ томъ, что какая бы ни была производящая кривая *ACDB*, *всякая плоскость перпендикулярная къ оси, даетъ въ сѣченіи окружность круга*. Ибо прямая *DI* перпендикулярная къ *AB* опишетъ при своемъ обращеніи плоскость, перпендикулярную къ оси (чл. 266, 2-е); сверхъ того точка *D* сохранитъ всегда тоже разстояніе *DI* отъ сей оси.

287. *Цилиндръ* есть тѣло, происходящее отъ движенія неопредѣленной линіи *Aa* (чер. 135) параллельно самой себѣ, по какой-нибудь кривой *ABCD*. Мы будемъ здѣсь разсматривать цилиндръ ограниченнымъ двумя параллельными основаніями *ABCD*, *abcd*; разстояніе между ними есть *высота*.

Впишемъ въ основаніи цилиндра и опишемъ около онаго многоугольники: производящая линія двигаясь по ихъ окружности, опишетъ двѣ призмы, предѣломъ коихъ очевидно будетъ цилиндръ (*); ибо основаніе

(*) Основаніе сего предложенія, подобно изложенному въ чл. 159, и которое по составленному нами понятію о протяженіи поверхностей, считаемъ очевиднымъ: площадь плоскости менѣе площади всякой другой поверхности, ограниченной тѣмъ же обводомъ (contour), а изъ двухъ выпуклыхъ поверхностей, имѣющихъ тотъ же самый обводъ, наибольшая объемлетъ (enveloppe) другую.

онаго есть предѣлъ основаній призмъ. Изъ сего легко заключимъ, что

1-е. Всякое сѣченіе сдѣланное въ цилиндрѣ параллельно основанію, есть кривая равная сему основанію.

2-е. *Поверхность прямаго цилиндра* Ac (чер. 136), *равна произведенію периметра его основанія на высоту*. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ C окружность основанія, α избытокъ периметра описаннаго многоугольника надъ C, такъ что сей периметръ $= C + \alpha$, $Aa = H$; наконецъ S поверхность цилиндра, и β избытокъ поверхности описанной призмы надъ S; получимъ $S + \beta = H(C + \alpha)$, откуда (чл. 113) $S = H.C$.

3-е. Въ косвенномъ цилиндрѣ Ac (чер. 135), сѣченіе $a'b'c'd'$ сдѣланное перпендикулярно къ производящей линіи, составляетъ два тѣла Ac', $a'c$, которыя, будучи соединены ихъ основаніями ac и AC, образуютъ прямой цилиндръ. И такъ, поверхность косвеннаго цилиндра, равна произведенію его производящей Aa на окружность перпендикулярнаго сѣченія $a'b'c'd'$.

4-е. Площадь прямоугольника, коего высота есть производящая линія прямаго цилиндра, а основаніе спрямленная окружность основанія онаго, равна поверхности сего цилиндра. Сіе-то Монжъ называетъ *развертываніемъ* цилиндрической поверхности. Въ косвенномъ цилиндрѣ, сѣченіе, перпендикулярное къ ребру, развертывается по прямой линіи $a'd'$ (чер. 138), къ коей всѣ производящія линіи перпендикулярны. Посему, если возставимъ изъ различныхъ точекъ a', b', c', d' перпендикуляры, по коимъ отложимъ въ верхъ и въ низъ части $a'a$, $a'A$, $b'b$, $b'B$ ...., соотвѣтственно равныя частямъ каждой производящей, находящимся въ верху и въ низу сѣченія $a'b'c'd'$ (чер. 135), то получимъ поверхность aD, ограниченную двумя параллельными кривыми $abcd$, $ABCD$, которая и будетъ развернутая цилиндрическая поверхность.

5-е. Въ начальной Геометріи разсматриваются только тѣ цилиндры, коихъ основанія суть круги: *осью* называется прямая параллельная производящей, и проходящая чрезъ центръ. Посему *прямой цилиндръ* можно принять происходящимъ отъ обращенія прямоугольника $AOoa$ около котораго-нибудь изъ его боковъ Oo. Всякое сѣченіе, сдѣланное параллельно основанію въ семъ тѣлѣ вращенія, есть кругъ (1-е и чл. 286) равный сему основанію. Поверхность $S=2\pi RH$; гдѣ H есть высота, а R радіусъ основанія (чл. 248).

288. Поверхность пирамиды найдется, сложивъ площади треугольниковъ ее составляющихъ: *если пирамида правильная, то поверхность оной равна произведенію периметра ея основанія, на половину перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины на одну изъ сторонъ основанія;* ибо сіи треугольники равны и имѣютъ общею высотою сей перпендикуляръ, называемый *Апофемою.*

289. *Конусъ* есть тѣло образуемое неопредѣленною прямою AS (чер. 139), проходящею чрезъ постоянную точку S, называемою *вершиною*, и движущеюся по какой-нибудь данной кривой $ABCD$. Чрезъ сіе составляются двѣ противоположныя поверхности, соединенныя въ S. Мы разсмотримъ только тѣ конусы, коихъ основанія суть круги: *ось* есть линія проведенная чрезъ вершину S и центръ основанія, а *высота* перпендикуляръ опущенный изъ вершины на основаніе. Когда сей перпендикуляръ сливается съ осью, то конусъ прямой (чер. 140); можно принять, что оный образуется обращеніемъ прямоугольнаго треугольника ASO, около одного изъ катетовъ SO. *Всякое сѣченіе прямаго конуса, параллельное основанію, есть кругъ* (чл. 286).

290. Если въ кругѣ, служащемъ прямому конусу основаніемъ, впишемъ и около онаго опишемъ правильные многоугольники, и проведемъ изъ ихъ угловъ

въ вершину S прямыя линіи, що составляются правильныя пирамиды, одна вписанная, а другая описанная, предѣломъ коихъ очевидно будетъ конусъ. Изъ сего слѣдуетъ, что

1-е. *Поверхность прямаго конуса* SAC *равна произведенію окружности* C *его основанія, на половину производящей линіи* SA. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ α избытокъ периметра описаннаго многоугольника надъ окружностію C; поверхность описанной пирамиды $= \frac{1}{2}A(C+\alpha)$, означивъ чрезъ A апоѳему SA, которая есть производящая. Назовемъ S поверхность конуса, β избытокъ поверхности пирамиды надъ S; получимъ $S+\beta-\frac{1}{2}A(C+\alpha)$, откуда (чл. 115) $S=\frac{1}{2}A.C$; слѣдовательно $S=\pi AR$, полагая R радіусомъ основанія.

2-е. Если радіусомъ SA = производящей A, опишемъ дугу ABD (чер. 142), равной длиною окружности основанія, то площадь сектора ASD будетъ равна поверхности конуса (чл. 261). Сей секторъ есть развернутая коническая поверхность; а производящія линіи суть различные радіусы онаго.

3-е. *Поверхность усѣченнаго конуса* ADda (чер. 141 и 142), *равна произведенію стороны онаго* Aa *на полусумму окружностей* AC, ac *основаній, или на окружность* ad, *проведенную въ равномъ разстояніи отъ сихъ основаній.* Въ самомъ дѣлѣ, сѣченіе ad, $a'd'$ суть круги (чл. 286); поверхность отрѣзка $ADad$ есть разность поверхностей конусовъ SAD, Sad. Если изъ того же центра S (чер. 142) радіусами SA, sa равными производящимъ линіямъ сихъ конусовъ, опишемъ дуги AD, ad; отложимъ ABD равную окружн. AC нижняго основанія, и проведемъ радіусы SA, SD, то дуга abd будетъ равна верхней окружности ac; ибо $\frac{SA}{Sa}=\frac{ABD}{abd}$, или $=\frac{\text{окр. }AC}{abd}$; а изъ чер. 141 полу-

чается тоже отношеніе $\frac{SA}{Sa} = \frac{ABD}{abd} = \frac{\text{окр. } AC}{\text{окр. } ac}$; посему $abd = \text{окр. } ac$. Изъ сего слѣдуетъ, что площади секторовъ $SABD$, $Sabd$ равны поверхностямъ обоихъ конусовъ, и что площадь $AabdDB$ равна поверхности отрѣзка и есть развертываніе онаго. Слѣд. (чл. 261) сія поверхность $= Aa \times a'b'd' = Aa \times \frac{1}{2}(ad + AD)$.

291. *Шаръ* или *сфера* есть тѣло (чер. 143), произходящее отъ обращенія полукруга ABD, около его діаметра AB. При семъ обращеніи, какая-нибудь дуга DF или DE образуетъ *поясъ* (Zone); AD опишетъ *отрѣзокъ* или *поясъ съ однимъ только основаніемъ* (Calotte ou Zone à une Base); секторъ ACD производитъ *шаровой секторъ;* наконецъ ADI произведетъ *шаровой сегментъ.*

Изъ сего слѣдуетъ, что всѣ точки шаровой поверхности равно отстоятъ отъ центра C, и что если обратимъ производящій кругъ $ADEBG$ около другаго какого-нибудь діаметра DH, то произойдетъ тотъ же шаръ. Слѣдовательно, всякая плоскость, проходящая чрезъ центръ шара, образуетъ производящій кругъ, называемый *большимъ кругомъ шара.*

Всякое сѣченіе шара есть кругъ; ибо пусть будетъ DG (чер. 143) плоскость сѣченія; проведя перпендикулярно къ оной діаметръ AB, можно принять его за *ось вращенія* (чл. 286). Діаметръ круга будетъ хорда DG; по сей причинѣ, тѣ круги, кои происходятъ отъ плоскостей непроходящихъ чрезъ центръ, называются *малыми кругами шара.* Основаніе шароваго сегмента есть малый кругъ.

292. Плоскость, имѣющая съ шаромъ одну только общую точку, называется *касательною*: всякая прямая, проведенная изъ центра C (чер. 143) къ сей плоскости, болѣе радіуса CA, проведеннаго въ точку касанія, ибо пересѣкается съ сею плоскостію внѣ шара; слѣдовательно сей радіусъ перпендикуляренъ

къ касательной плоскости (чл. 266, 4-е). Обратно, если линія CA короче всякой другой, проведенной изъ центра къ плоскости, то оная имѣетъ одну только общую точку A съ шаромъ, и будетъ къ нему касательною; ибо всякая другая линія, проведенная изъ центра C, будучи $> CA$, должна выходить изъ шара.

Будемъ обращать какую-нибудь касательную AT, также какъ и кругъ ADB около діаметра AB, AT произведетъ касательную плоскость къ шару.

293. Когда многоугольникъ $ABDI\ldots$ (чер. 145) обращается около оси AO, тогда каждая сторона DI производитъ усѣченный конусъ, косго поверхность (чл. 290, 3-е) равна $DI \times$ окруж. KL; полагая точку K срединою DI, а линію KL перпендикулярною къ оси AO. Посему легко получить поверхность, описанную многоугольникомъ $ABDI\ldots$.

Сія поверхность еще легче найдется, когда многоугольникъ правильный; въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что въ немъ вписанъ кругъ, проведемъ DG параллельно оси вращенія AO и радіусъ KC. Изъ треугольниковъ DIG, LKC, коихъ стороны взаимно перпендикулярны, получимъ $\frac{DI}{DG} = \frac{KC}{KL}$ или $= \frac{\text{окр. } KC}{\text{окр. } KL}$, откуда найдемъ, что поверхность усѣченнаго конуса, образовавшагося отъ $HDIM = DI \times$ окр. $KL = DG \times$ окр. KC; т. е. сія поверхность равна произведенію окружности вписаннаго круга, на высоту DG или HM сего усѣченнаго конуса.

Очевидно, что тоже самое произойдетъ для цилиндра, образуемаго стороною IP параллельною AO. Касательно же конуса, описаннаго линіею BA, то поверхность онаго (чл. 290, 1-е) будетъ $\frac{1}{2} BA \times$ окр. BN, а изъ подобныхъ треугольниковъ ABN, QCA получимъ также, что $QA \times$ окр. $BN = AN \times$ окр. QC. Изъ сего слѣдуетъ, что сумма поверхностей, происходящихъ отъ обращенія нѣсколькихъ сторонъ правильнаго

многоугольника, равна вписанной окружности, умноженной на сумму высотъ.

Для нашего доказательства достаточно, чтобы часть производящаго многоугольника могла быть описана около круга: но какъ поверхность отрѣзка, или сферическаго сегмента, есть очевидно предѣлъ поверхности, описанной соотвѣтствующею частію многоугольника; то изъ сего легко заключить, что 1-е, *поверхность отрѣзка, или сферическаго сегмента, равна произведенію высоты онаго на окружность большаго круга.* Пусть будетъ R радіусъ шара (чер. 143), X высота отрѣзка образуемаго дугою DA, или пояса описаннаго дугою FD или FE, получимъ (чл. 248)

$$\text{поверхность пояса} = 2\pi RX;$$

2-е. И такъ, принявъ за высоту X діаметръ AB, найдемъ, что *поверхность шара равна произведенію его діаметра на окружность большаго круга, или вчетверо болѣе площади онаго;* посему

$$\text{поверхность шара} = 2R \times \text{окр. } R = 4\pi R^2.$$

3-е. Чтобъ отыскать радіусъ шара, коего площадь A дана, найдутъ, что $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 0{,}282095 \times \sqrt{A}$.

4-е. Проведемъ касательныя DE, DG, GF, EF (чер. 146), перпендикулярныя и параллельныя діаметру AB; квадратъ EG, при обращеніи своемъ около AB, произведетъ *цилиндръ описанный около шара.* Поверхность пояса, произшедшаго отъ какой-нибудь дуги $b'f'$, равна поверхности цилиндра $aa''a''$, ибо измѣряются тою же величиною $= dg \times$ окр. AC. Тоже самое будетъ для цѣлаго цилиндра относительно шара, такъ что *поверхность шара равна поверхности описаннаго цилиндра; а если включатся основанія онаго, то поверхность шара составитъ $\frac{2}{3}$ поверхности цилиндра,* потому, что основанія суть большіе круги: посему цѣлая поверхность цилиндра, равна 6-ти такимъ кругамъ, а поверхность шара 4-мъ.

5-е. Равносторонній треугольникъ HIK (чер. 146), обращаясь около HB, произведетъ конусъ, описанный около шара. Прямая IC пересѣкаетъ уголъ HIB пополамъ, который составляетъ $\frac{2}{3}$ прямаго (чл. 201, 1-е); посему дуга Bi есть 6-я доля окружности, а хорда Bi равна боку шестиугольника $= CB = R$; треугольникъ BIi равнобедренный, $Ii = Bi = R$ и $IC = 2R$ (чл. 319). И такъ въ треугольникѣ CIB получимъ $IB^2 = IC^2 - CB^2 = 3R^2$, $IB = R\sqrt{3}$, окр. $IB = 2\pi R\sqrt{3}$ (чл. 248); наконецъ, поверхность конуса (чл. 290) равна $6\pi R^2$, или 6 разъ взятому большому кругу, и вдвое болѣе площади своего основанія, равнаго $3\pi R^2$: цѣлая поверхность конуса будетъ $9\pi R^2$. *Включая основанія*, поверхность цилиндра равна 6-ти большимъ кругамъ, поверхность конуса 9-ти, а поверхность шара 4-мъ; т. е *поверхность цилиндра есть средняя пропорціональная между поверхностями шара и описаннаго конуса.*

Сіе предложеніе справедливо также для конуса и цилиндра, вписанныхъ въ шаръ, или образовавшихся отъ квадрата и равносторонняго треугольника, вписанныхъ въ производящемъ кругѣ; цѣлая поверхность цилиндра $= 3\pi R^2$, поверхность конуса $\frac{9}{4}\pi R^2$, а поверхность шара $4\pi R^2$.

О подобныхъ и симметрическихъ тѣлахъ.

294. Два трегранника называются *подобными*, когда имѣютъ двѣ подобныя стороны, одинаково расположенныя и составляющія равные плоскостные углы. Таковы суть трегранники S и S' (чер. 147), если $S'A'C'$ подобна SAC, $B'S'A'$ подобна BSA и плоскостной уголъ $B'S'C' = BSC$.

Въ подобныхъ трегранникахъ сходственныя ребра пропорціональны, всѣ стороны подобны, плоскостные углы взаимно равны, также какъ и соотвѣтственные трегранные углы. Въ самомъ дѣлѣ, наложимъ треугольникъ $C'S'A'$ на CSA, совмѣстивъ равные углы

S и S' по равенству угловъ $S'AC'$ и SAC, $A'C'$ придетъ въ положеніе ac параллельное AC. Далѣе, по равенству плоскостныхъ угловъ, сторона $B'S'A'$ пойдетъ по BSA; наконецъ, какъ уголъ $B'S'A' = BSA$, но $S'B'$ упадетъ на SB, и $B'A'$ получитъ положеніе ab параллельное AB. И такъ, пирамида S' помѣстится какъ $Sabc$; плоскости ABC, abc будутъ параллельны, а соотвѣтственные плоскостные углы равны (чл. 270). Посему видно:

1-е. Что если пирамида $SABC$ пересѣчется плоскостію abc параллельно одной изъ его сторонъ ABC, то составится пирамида подобная первому.

2-е. Что стороны ABC, abc подобны, ибо плоскость abc параллельна ABC (чл.-ы 277, 270).

3-е. Стороны SBC, Sbc также подобны.

Обратно, если сходственныя ребра двухъ пирамидъ пропорціональны, или если четыре соотвѣтственные треугольника подобны (одно условіе заключается въ другомъ), то по равенству прямолинейныхъ угловъ S и S', плоскостные также будутъ равны (чл. 281); слѣдовательно пирамиды подобны.

295. Если изъ двухъ соотвѣтственныхъ тѣлесныхъ угловъ двухъ многогранниковъ, проведутся во всѣ прочіе углы діагонали, и сіи многогранники раздѣлятся на подобные и одинаково расположенные треугольники, то таковыя тѣла называются подобными.

Велкая пирамида SAC (чер. 125), *разсѣченная плоскостію* ac *параллельно ея основанію, производитъ другую пирамиду* Sac *подобную* SAC; *ребры ихъ пропорціональны, соотвѣтственные плоскостные и тѣлесные углы взаимно равны.* Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія пирамидъ $SABE$, $Sabe$ найдемъ, что треугольники SEB, Seb подобны, и плоскостной уголъ $ASEB = aSeb$; но какъ плоскостной уголъ $ASED = aSed$,

что вычтя, получимъ, что плоскостной уголъ $BESD = beSd$. Посему, шпрегранники $SBED$, $Sbed$ подобны, и проч. (чл.-ы 277, 281).

Обратно: пирамиды S'A'B'C'..., SABC..., *составленныя изъ подобныхъ сторонъ одинаково расположенныхъ, подобны между собою;* ибо шпрегранные углы при основаніяхъ, состоящіе изъ равныхъ прямолинейныхъ угловъ, равны между собою; слѣдовательно соотвѣтственные плоскостные углы также равны (чл. 281). Сверхъ того, по равенству прямолинейныхъ угловъ при S и S', можно совмѣстить $S'A'C'$ съ Sac. Наконецъ ребра будучи пропорціональны по положенію плоскости AC, ac, будутъ параллельны.

296. Пусть пирамида SAC (чер. 125) и тѣло $S'A'C'$, составленныя изъ шпрегранниковъ $S'A'B'E'$, $S'E'B'D'$, $S'B'C'D'$ подобныхъ $SABE$, $SEBD$...; многогранникъ $S'A'C'$ будетъ пирамида подобная SAC; ибо какъ углы AEB, BED, AED находятся въ одной плоскости и равны угламъ $A'E'B'$, $B'E'D'$, $A'E'D'$,

то ..... $A'E'D' = A'E'B' + B'E'D'$,

откуда ..... $A'E'D' < A'E'B' + B'E'D'$;

посему сіи послѣдніе углы находятся также въ одной плоскости; ибо если-бъ они составляли шпрегранный уголъ, то нашли бы (чл. 279), что $A'E'D' < A'E'B' + B'E'D'$. Очевидно, что сія плоскость проходитъ также чрезъ $B'C'D'$.

Изъ сего слѣдуетъ, что 1-е, два подобные многогранника раздѣляются на подобныя пирамиды плоскостями, проходящими по діагоналямъ, проведеннымъ изъ двухъ соотвѣтственныхъ угловъ многогранниковъ во всѣ прочіе углы.

2-е. Если изъ какой-нибудь точки, взятой внутри многогранника, проведутся линіи во всѣ углы, и продолжатся пропорціонально ихъ длинамъ, то плоскости, проведенныя чрезъ окончности сихъ линій, будутъ параллельны сторонамъ предложеннаго

многогранника и составящъ другой оному подобный. Сіе сходно съ теоремою чл. 244.

297. *Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ, стороны взаимно подобны, сходственныя ребра пропорціональны, соотвѣтственные плоскостные углы равны, также какъ и многогранные* Для доказательства, стоитъ только провести изъ двухъ сходственныхъ угловъ діагонали (чер. 148), которыя раздѣлятъ тѣла на подобныя пирамиды; многогранные и плоскостные углы сихъ пирамидъ будутъ равны, и стороны ихъ подобны: а стороны многогранниковъ служатъ основаніями симъ пирамидамъ, коихъ рядъ плоскостныхъ и многогранныхъ угловъ, составляетъ таковые же углы предложенныхъ тѣлъ.

Обратно, если стороны двухъ многогранниковъ подобны и одинаково расположены, и плоскостные углы равны, то они подобны; ибо многогранные углы равны, потому что разлагаются на равные пространные углы (чл. 281). И такъ, совмѣстивъ одинъ изъ сихъ многогранныхъ угловъ съ его соотвѣтственнымъ, прочія стороны будутъ взаимно параллельны. Сверхъ того, по причинѣ подобія сторонъ, сходственныя линіи будутъ пропорціональны; слѣдовательно площади ихъ относятся какъ квадраты сихъ линій; изъ чего видно, что діагонали одного изъ тѣлъ суть продолженія діагоналей другаго (ч. 278): посему сіи тѣла составлены изъ подобныхъ пирамидъ.

298. Линіи, соединяющія четыре сходственные многогранные угла *ABCD*, *abcd* (чер. 148) двухъ подобныхъ тѣлъ, будучи пропорціональны, составляютъ подобные пространники (чл. 294). Изъ сего слѣдуетъ, что если изъ угловъ *ABC*, *abc* соотвѣтственныхъ треугольниковъ, проведутся линіи во всѣ углы *DEF*..., *def*.... двухъ подобныхъ многогранниковъ, то со-

ставшіеся такимъ образомъ пирамидки, будутъ подобны: сіе сходно съ чл. 242, 4-е.

Обратно, два многогранника подобны, когда ихъ углы, соединенные съ тремя сходственными углами A, B, C и a, b, c, составляютъ взаимно подобные пирамидки. Въ самомъ дѣлѣ, если пирамидки $DABC$, $dabc$ подобны, также какъ и $EABC$, $eabc$, то плоскостные углы $DACB$, $EACB$ будутъ равны $dacb$, $eacb$: и такъ плоскостной уголъ $DACE = dace$. Сверхъ того, стороны DAC, dac нашихъ пирамидковъ подобны, также какъ и EAC, eac: посему пирамидки $EACD$, $eacd$ подобны, и получимъ $\frac{DE}{de} = \frac{AC}{ac}$ (чл. 294).

Пусть будутъ F, f, I, i сходственные углы; получимъ также $\frac{FE}{fe} = \frac{AC}{ac}$ и $\frac{DF}{df} = \frac{AC}{ac}$: и такъ, *въ сихъ многогранникахъ сходственныя линіи пропорціональны, и соотвѣтственные треугольники* DFE, dfe *подобны:* далѣе *ихъ плоскостные углы равны;* ибо треугольникъ IDF подобенъ idf, IFE подобенъ ife, откуда уголъ $IFD = ifd$, $IFE = ife$, $DFE = dfe$. Сверхъ того, если точки D, I, F, E находятся въ одной плоскости, то уравненіе $IFE = IFD + DFE$ обратится въ $ife = ifd + dfe$: откуда слѣдуетъ, что такъ какъ точки e, f, i находятся также въ одной плоскости, то *стороны многогранниковъ подобны;* наконецъ *углы многогранниковъ равны,* ибо составлены изъ равныхъ пирамидныхъ угловъ (281, 4-е). И такъ тѣла подобны (чл. 297).

299. Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ, площади ихъ сторонъ, относятся какъ квадраты сходственныхъ линій сихъ многогранниковъ; но какъ сіи линіи пропорціональны, то получимъ рядъ равныхъ отношеній, составленныхъ изъ сходственныхъ сторонъ, откуда заключимъ (какъ въ чл. 262. II, что *цѣлыя поверхности подобныхъ многогранниковъ от-*

поспятся между собою, какъ квадраты ихъ сходственныхъ ребръ.

Очевидно, что поверхности подобныхъ конусовъ или цилиндровъ, т. е. произшедшихъ отъ обращенія двухъ подобныхъ треугольниковъ или прямоугольниковъ, относятся какъ квадраты ихъ производящихъ линій. Въ самомъ дѣлѣ, окружности C и c основаній, пропорціональны производящимъ A и a; поверхности S и s пропорціональны $C \times A$ и $c \times a$ (чл.-ы 287, 5-е; 290, 1-е);

$$\text{отсюда } \frac{S}{s} = \frac{C.A}{c.a}, \quad \frac{C}{c} = \frac{A}{a}, \text{ посему } \frac{S}{s} = \frac{A^2}{a^2}.$$

Также, *поверхности шаровъ, относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ; ибо ихъ поверхности равны четыремъ площадямъ большаго круга.*

300. Когда два многогранника таковы, что одинъ изъ нихъ можно помѣстить вверху, а другой внизу плоскости MN (чер. 149), такъ что вершины каждыхъ двухъ многогранныхъ угловъ $A, a, B, b \ldots$, находятся въ равномъ разстояніи отъ сей плоскости и на одномъ къ ней перпендикулярѣ Aa, $Bb \ldots$, то сіи многогранники называются *симметрическими*. Полагая B многограннымъ угломъ перваго тѣла, проведемъ къ плоскости MN перпендикуляръ BQb, отложивъ $QB = Qb$, точка b будетъ вершина сходственнаго угла втораго многогранника.

Въ симметрическихъ многогранникахъ, всѣ ихъ составляющія части равны. Для доказательства перегнемъ трапецію $ABQP$ по PQ, линіи AP, aP равныя и перпендикулярныя къ MN совмѣстятся, также какъ BQ и bQ; отсюда $AB = ab$: слѣдовательно *сходственныя линіи равны.* Многогранные углы D, d, C, c суть симметрическіе, и мы получимъ $BC = bc$, $AC = ac$; и такъ треугольникъ $ABC = abc$; *посему сходственные треугольники равны.* Сверхъ того

треугольникъ $ADC = adc$, $BDC = bdc$: слѣдственно уголъ $DCB = dcb$, $ACD = acd$, $ACB = acb$. И такъ:

1-е. Если плоскости сихъ треугольниковъ составляютъ при C и c трегранные углы, то оные будутъ равны: *посему плоскостные и трегранные сходственные углы равны. Тоже скажемъ о многогранныхъ углахъ;* ибо оные составлены изъ равныхъ и одинаково расположенныхъ трегранныхъ угловъ.

2-е. Если точки A, B, C, D находятся въ одной плоскости, то уголъ $DCB = ACD + ACB$, слѣдовательно $dcb = acd + acb$; изъ чего заключимъ, что точки a, b, c, d находятся также въ одной плоскости (чл. 279): посему *сходственныя стороны равны;* ибо составлены изъ равныхъ одинаково расположенныхъ треугольниковъ.

301. *Всякой параллелипипедъ* ACc (чер. 150) *составленъ изъ двухъ треугольныхъ симметрическихъ призмъ* ABd, BCd; *противоположные плоскостные углы равны, а противоположные трегранные суть симметрическіе.* Въ самомъ дѣлѣ очевидно, что два тѣла $Aabd$, $Ccbd$ суть призмы (чл. 282); основаніе BDC или bdc одной, равно основанію ABD другой. Соединимъ сіи треугольныя призмы такъ, чтобы bdc совмѣстилось съ ABD, т. е. bc съ AD, и dc съ AB; $Ccbd$ примемъ положеніе $AFHI$. Но перпендикуляры aF, Cf опущенныя на основанія равны (чл. 268, 2-е); сверхъ того $Aa = Cc$, и уголъ $AaF = cCf$; слѣдовательно треугольникъ $AaF = Ccf$, откуда $AF = cf$. По той же причинѣ $fb = DF$; и такъ равные треугольники ADF, bcf совмѣщаются, и точка f упадая въ F, fC пойдетъ по FE продолженію линіи aF. Слѣд. вершина E или C есть симметрическая съ a: тоже найдемъ для вершинъ I или B и d, H или D и b.

III. О ТОЛСТОТАХЪ.

302. *Составить прямую призму равную толстотою косвенной призмѣ* AD (чер. 151), *при той же длинѣ производящей* AC. Продолжимъ ребра *CA*, *DB*, и проведемъ къ нимъ какую-нибудь перпендикулярную плоскость *MN*; наконецъ сдѣлаемъ $Pp = BD$, и проведемъ плоскость *op* параллельную *MN*, такимъ образомъ составится прямая призма *Op*. Наложимъ усѣченную призму *BAOP* на *DCop*, такъ чтобы основаніе *op* упало на равное ему *OP*; по равенству производящихъ линій, перпендикулярныхъ къ основаніямъ (ибо изъ равенства $DB = Pp$ слѣдуетъ, что $PB = pD$, тоже и о прочихъ), призмы совмѣстятся или *oD* будетъ $= OB$. Отнявъ общую часть *Ap*, останется косвенная призма *AD*, равная толстотою прямой призмѣ *Op*.

303. Двѣ симметрическія призмы *AD*, *ad* (чер. 151`, всегда можно расположить относительно плоскости *MN* такъ, чтобы сія плоскость была перпендикулярна къ производящимъ. Продолжимъ ребро *DB* въ сторону *Pd*, отъ точки *P* встрѣчи съ какою-нибудь перпенд. плоскостію *MN*, отложимъ $Pb = PB$, $Pd = PD$, или $BD = bd$. Поступая такимъ же образомъ съ каждымъ ребромъ, составится призма *ad* симметрическая съ *AD*.

Симметрическія призмы *AD*, *ad* толстотою равны. Ибо сдѣлаемъ $Pp = Pp' = BD$, и проведемъ плоскости *op*, *o'p'* параллельныя къ *MN*: призмы *OPop*, *OPo'p'* будутъ прямыя и равныя толстотою съ данными (ч.л. 302). Сверхъ того, онѣ равны между собою; ибо при наложеніи одной на другую такъ, чтобы основаніе *o'p'* упало на равное ему *OP*, произойдетъ совмѣщеніе.

304. *Два параллелипипеда равныхъ основаній и высотъ толстотою равны.* Для доказательства, соединимъ сіи тѣла такъ, чтобъ ихъ нижнія основанія совмѣстились, верхнія будутъ находиться въ одной плоскости: здѣсь представляется два случая.

1-е. Если боковыя стороны *FG*, *IK*, (чер. 152) въ одной плоскости, то равные треугольники *EGH*, *FIK*, служатъ основаніями двумъ совмѣщающимся призмамъ *EHM*, *FIN*. Посему, отнявъ поперемѣнно сіи призмы отъ цѣлаго тѣла *EN*, останутся параллелипипеды *EFIM*, *EHNL* равные толстотою.

2-е. Если стороны расположены какимъ-нибудь инымъ образомъ, то верхнія основанія *AC*, *ac* (чер. 153 будутъ параллелограммы, равные параллелограммамъ нижнихъ основаній, такъ что линіи *AB*, *DC*, *ab*, *dc* равны и параллельны; тоже получимъ для *AD*, *BC*, *ad*, *bc*. Продолживъ сіи линіи, получимъ параллелограмъ *A'C'* равный *AC* и *ac*. И такъ, представимъ себѣ параллелипипедъ имѣющій верхнимъ основаніемъ *A'C'*, а нижнимъ равное съ даннымъ, тогда составившееся тѣло будетъ равно каждому изъ нихъ; ибо оное будетъ имѣть относительно предложенныхъ тѣлъ положеніе вышеразсмотрѣнное. Слѣдовательно данныя призмы толстотою равны.

305. Легко *превратить данный параллелипипедъ въ другой прямоугольный, равный ему толстотою:* изъ каждаго угла нижняго основанія *ABCD* (чер. 154), возставимъ къ плоскости онаго перпендикуляры, получимъ прямой параллелипипедъ *ABEI*, равный толстотою предложенному, который безполезно представлять на чертежѣ. Потомъ проведя въ основаніи *AC* къ линіи *AB* перпендикуляры *AF*, *BG*, составимъ на *AG* прямоугольный параллелипипедъ *ABHK*, равный толстотою *ABEI*, ибо имѣетъ съ нимъ тужде высоту *AF* и тоже основаніе *AM*.

306. *Два прямоугольные параллелипипеда, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты.* Если сіи высоты имѣютъ общую мѣру, то разсѣчемъ цѣла на равные слои, и поступимъ, какъ въ прямоугольникахъ (чл. 250, 1-е. чер. 99.. Сіе предложеніе такимъ же образомъ докажется въ случаѣ несоизмѣримости высотъ.

Прямоугольные параллелипипеды P *и* p, *имѣющіе равныя высоты, относятся какъ ихъ основанія.* Въ самомъ дѣлѣ, расположимъ сіи цѣла такъ, чтобъ одинъ изъ многогранныхъ угловъ и равное ребро ихъ совмѣстились. Основанія примутъ положеніе AC (чер. 100) для P, и AK для p; продолжимъ IK до H; въ параллелипипедѣ Q, построенномъ на основаніи AH и той же высоты, можно принять AI за высоту и сторону AB за основаніе: посему сравнивъ его съ P, получимъ $\frac{P}{Q} = \frac{AD}{AI}$. Но если за основаніе параллелипипедовъ Q и p, возмемъ сторону AI, то высоты ихъ будутъ AB и AL, откуда $\frac{Q}{p} = \frac{AB}{AL}$. Перемноживъ сіи пропорціи, получимъ

$$\frac{P}{p} = \frac{AD \times AB}{AI \times AL} = \frac{AC}{AK}.$$

Наконецъ, *прямоугольные параллелипипеды* P *и* p *относятся между собою, какъ произведенія изъ ихъ основаній на высоты.* Ибо если основанія суть AC и AK, а высоты H и h, то продолжимъ стороны того изъ нихъ, который имѣетъ меньшую высоту, какъ p, до верхняго основанія другаго, получимъ параллелипипедъ R, имѣющій съ однимъ изъ нихъ P равную высоту H, а съ другимъ p равное основаніе AK; посему будетъ $\frac{R}{p} = \frac{H}{h}$ и $\frac{P}{R} = \frac{AC}{AK}$; откуда

$$\frac{P}{p} = \frac{AC \times H}{AK \times h}$$

Означимъ чрезъ H, I, K ребра, составляющія прямой уголъ параллелип. P, и чрезъ h, i, k ребра параллелип. p, получимъ $\frac{P}{p} = \frac{H.I.K}{h.i.k}$. Посему видно, что дабы измѣрить толстоту прямоуг. параллелипип. P, т. е. чтобъ опытскать отношеніе онаго къ другому p, принятому за единицу (чл.-ы 36, 71), должно найти отношенія $\frac{H}{h}$, $\frac{I}{i}$, $\frac{K}{k}$ между соотвѣтственными ребрами, составляющими прямой уголъ, и умножить сіи три числа. Изобразимъ чрезъ l произведеніе сихъ трехъ отношеній; l есть число отвлеченное и толстота параллелипипеда, которую требуется измѣрить, будетъ равна l разъ взятой толстотѣ параллелипипеда, принятаго за единицу.

Толстота параллелипипеда равна произведенію его основанія на высоту, когда за единицу толстоты примемъ кубъ, коего ребро есть линейная единица: ибо h, i, k будутъ = 1, и получимъ $H.I.K$ для толстоты параллелип. P; H, I и K суть отвлеченныя числа, означающія сколько разъ ребра параллелип. P содержатъ въ себѣ линейную единицу; пусть будетъ l ихъ произведеніе $H.I.K$, уравн. $P = H.I.K$ обратится въ $P = l$ разъ взятому кубу, принятому за единицу толстоты.

Если $H = I = K$, то получимъ $P = H^3$; отсюда заимствовано названіе *куба*, данное третьимъ степенямъ.

307. И такъ, *толстота призмы равна произведенію основанія оной на высоту:* ибо 1-е, если призма есть какой-нибудь параллелипипедъ, то толстота онаго равна толстотѣ прямоугольнаго параллелип., той же высоты и равновеликаго основанія (чл. 304).

2-е. Если призма треугольная, какъ $ABDabd$ (чер. 150), то составивъ параллелипипедъ Ac, толстота данной призмы равна толстотѣ ей симметричной призмы

BDCbdc (чл. 303 : слѣдовательно, толстота каждой изъ сихъ призмъ равна произведенію ея высоты на половину основанія *AC*, или на ея основаніе *ABD*.

3-е. Наконецъ, если чрезъ производящую *Aa* (чер. 131) призмы *Ad*, и чрезъ всѣ прочія проведутся плоскости, то оная раздѣлится на треугольныя призмы той же высоты, слѣдовательно сумма ихъ толстотъ будетъ равна произведенію сей высоты на сумму основаній, или на *ABCDE*.

Очевидно также, что толстоты призмъ, имѣющихъ тоже основаніе, относятся какъ высоты, а той же высоты, содержатся какъ ихъ основанія.

308. *Толстота* V *цилиндра, равна произведенію его высоты* H *на площадь* B *основанія*. Въ самомъ дѣлѣ, означимъ чрезъ β избытокъ основанія описанной призмы надъ основаніемъ цилиндра, и чрезъ α избытокъ толстоты сей призмы надъ толстотою *V* цилиндра: $B+\beta$ будетъ основаніе призмы, $V+\alpha$ толстота оной; ошкуда $V+\alpha=(B+\beta)H$; посему $V=BH$, ибо толстота цилиндра есть предѣлъ толстоты призмы (чл. 113).

309. *Пирамиды равныхъ высотъ и равновеликихъ основаній, толстотою равны.* Для доказательства, разсѣчемъ пирамидъ плоскостями, равноотстоящими и параллельными его основанію. Пусть будетъ *ACebaB* (чер 135 одинъ изъ слоевъ: проведемъ чрезъ точки *A*, *C*, *a*, *c* линіи параллельныя ребру *Bb*; составятся двѣ призмы, одна *BDFcba* внутренняя, а другая *BACebi* внѣшняя относительно слоя, разность сихъ призмъ будетъ призма *DCca* той же высоты и коей основаніе *CADF* есть разность между основаніями *ABC*, *abc*.

Поступая такимъ образомъ для каждаго слоя, получимъ рядъ призмъ равной высоты, какъ напр. *De*. Но очевидно, что начиная съ основанія пирамидъ, каждая внутренняя призма *DFbB* равна внѣшней

призмѣ слѣдующаго слоя; и такъ, взявъ разность между всѣми внутренними и внѣшними призмами, оставшуюся только призмы таковыя какъ *Dbea*, начиная съ слоя *MN*. слѣдовательно сія разность равняется призмѣ одинакой высоты съ слоями, и коей основаніе будетъ основаніе *BMN* пирамидника. Чѣмъ число слоевъ становится болѣе, тѣмъ высота дѣлается менѣе; слѣд. разность между внутренними и внѣшними призмами можно сдѣлать произвольно малою, а тѣмъ болѣе между внутренними призмами и пирамидникомъ.

Очевидно, что сіе разсужденіе можетъ быть приложено ко всякой пирамидѣ, имѣющей всякое другое основаніе.

И такъ, возмемъ теперь двѣ пирамиды P и p равныхъ высотъ, коихъ равновеликія основанія находятся на одной плоскости: разсѣчемъ ихъ рядомъ плоскостей равно отстоящихъ и параллельныхъ симъ основаніямъ, потомъ составимъ для каждой, внутреннія призмы. Пусть будутъ α и β избытки пирамидъ надъ суммою внутреннихъ призмъ, коихъ толстоты суть $P-\alpha$ и $p-\beta$. Такъ какъ каждая плоскость, параллельная основаніямъ пирамидъ, производитъ равновеликія сѣченія; ибо сіи сѣченія относятся между собою какъ основанія (чл. 278); слѣдовательно каждыя двѣ внутреннія призмы равны, отнуда $P-\alpha=p-\beta$, и (чл. 113) $P=p$.

Сіе предложеніе также справедливо для двухъ отрѣзковъ, составленныхъ въ сихъ данныхъ пирамидахъ двумя параллельными плоскостями.

310. *Треугольникъ* DABC (чер. 156) *есть треть призмы того же основанія и той же высоты:* ибо составимъ по тремъ ребрамъ призму *AE*, отнявъ пирамидникъ *DABC*, останется четыреугольная пирамида *DACEF*. Плоскость *CDF* составляетъ два пирамидника: одинъ *FDEC*, равный предложенному, потому что имѣетъ туже высоту и основаніе *FDE=ABC*;

другой $DACF - DFCE$, по той же причинѣ, ибо треугольникъ $AFC - EFC$. И такъ сіи три треграннika будучи равны толстотою, каждый изъ нихъ составляетъ треть призмы.

Посему, *толстота всякой пирамиды равна произведенію трети ея основанія на высоту*, ибо можетъ быть разложена на трегранники.

Поелику конусъ есть предѣлъ описанныхъ пирамидъ, то *толстота конуса, равна трети его основанія, умноженной на высоту, или трети цилиндра того же основанія и той же высоты.*

Толстота всякаго многограннika найдется, разложивъ оный на пирамиды.

311. *Толстота усѣченной треугольной призмы* ABEF (чер. 157), *равна произведенію ея основанія на трети высотъ, опущенныхъ изъ трегранныхъ угловъ* F, D, E *верхняго основанія.* Въ самомъ дѣлѣ, сдѣлаемъ тѣже сѣченія въ сей призмѣ $ABEF$, какъ въ чл. 310-мъ, плоскость ADC отдѣлитъ трегранникъ $DABC$; плоскость DCF раздѣлитъ четыреугольную пирамиду $DACEF$ на два трегранника $DFCA$, $DFCE$. Поелику можно, не измѣняя основаній AFC, EFC, перенести вершины оныхъ въ B, ибо DB параллельно плоскости ACE (чл. 269. Слѣдовательно получимъ трегранники $BCAF$, $BCEF$: въ семъ послѣднемъ можно принять за основаніе CEA, потому что треугольники CEF и CEA равновелики. И такъ, усѣченная призма составлена изъ трехъ трегранниковъ $DABC$, $FABC$, $EABC$, имѣющихъ тоже нижнее основаніе ABC, а вершины въ трехъ трегранныхъ углахъ FDE верхняго основанія; слѣд. и проч..... Сіе предложеніе служитъ къ отысканію толстоты усѣченной призмы при всякомъ основаніи.

312. *Толстота всякой параллельно-усѣченной пирамиды, составлена изъ трехъ пирамидъ общей высоты съ нею, и имѣющихъ основаніями, нижнее ея основаніе,*

верхнее, и среднее пропорціональное между сими двумя площадями. Пусть будутъ пирамиды и шпрегранникъ ихъ же высоты и равновеликихъ основаній, находящихся въ одной плоскости, толстоты ихъ будутъ равны. Плоскость параллельная основаніямъ, произведетъ два отсѣка, и въ сѣченіи шпрегранника и пирамиды означимъ треугольникъ и многоугольникъ, равные площадями, ибо оные пропорціональны основаніямъ (чл. 278): слѣд. отсѣкаемые шпрегранникъ и пирамида, будучи равны, остатки также будутъ равны. Остается доказать теорему, относительно отсѣка шпрегранника $ABFE$ (чер. 138.

Плоскость ADC производитъ два тѣла $DABC$ и $DACEF$: плоскость DFC составляетъ шпрегранники $DFEC$ и $DFAC$; но проведя DG параллельно AF, сей послѣдній чрезъ перенесеніе вершины D въ точку G, обратится въ $FAGC$. Сіи три шпрегранника имѣютъ высоту отсѣка; основанія ихъ суть ABC, DFE, AGC. Сверхъ того получимъ (ч. 256, 2-е) $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AB}{AG}$, $\frac{AGC}{FDE} = \frac{AC}{FE}$ (чл. 246): но по причинѣ подобія треугольниковъ FDE, ABC, вторые члены равны; слѣд. $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{FDE}$. Посему и проч.

Пусть будутъ A и B основанія отсѣка пирамиды, H высота оной, получимъ, что толстота равна $\frac{1}{3}H(A + B + \sqrt{AB})$.

Очевидно, что сіе предложеніе справедливо также для усѣченнаго конуса. Пусть будутъ R и r радіусы основаній, $A = \pi R^2$, $B = \pi r^2$, толстота усѣченнаго конуса $= \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$.

513. Проведемъ касательныя AE, EF, FD (чер. 137) къ окончностямъ четвертей круга AB, BD; потомъ IK, ik GH, AD, параллельныя EF; и линіи CE, CF. Площадь круга, коего радіусъ есть гипотенуза Ca, равенъ суммѣ площадей круговъ, имѣющихъ радіусами

стороны ab и bC треугольника abC (чл. 263, 4-е). Сверхъ того $Ca = bI$, $bC = be$, ибо треугольникъ CEB равнобедренный: посему

круг bI = кругу ba + кругъ be.

Если обратимъ чертежъ около оси CB, то оный произведетъ цилиндръ $AEFD$, полушаръ ABD и конусъ CEF, и если на вышесказанныхъ кругахъ построимъ цилиндры, коихъ бы высота была какая-нибудь li, то изъ предыдущаго уравненія получимъ цил. bI = цил. ba + цил. be. Первый изъ сихъ цилиндровъ есть слой цилиндра, описаннаго около шара; второй есть внутренній относительно шароваго слоя; третій есть внѣшній относительно коническаго слоя; и если вообразимъ въ какомъ-нибудь пространствѣ $IKHG$ рядъ равно отстоящихъ плоскостей, то получимъ столько же уравненій, подобныхъ предыдущему, коихъ сумма будетъ: цил. $GIKH$ = *сум. цил. внут. относ. шара* + *сум. цил. внѣш. относ. конуса*.

Послѣ сего примемъ, кромѣ внутреннихъ цилиндровъ шара, еще внѣшніе, какъ то сдѣлали въ пирамидѣ (чл. 309). Употребивъ подобное же разсужденіе, найдемъ, что разность между всѣми внутренними и внѣшними цилиндрами, обратится въ разность между 1-мъ внутреннимъ и послѣднимъ внѣшнимъ, или въ цил. fg — цил. ab, т. е. въ цилиндрическій поясъ, коего основаніе есть разность круговъ, имѣющихъ радіусами fg и ba, а высота линія li; откуда заключимъ, что сія разность можетъ быть сдѣлана безконечно малою, такъ же какъ и разность α между внутренними цилиндрами и соотвѣтствующими шаровыми слоями.

Такимъ же образомъ докажется, что въ конусѣ CEF, разность β между внѣшними цилиндрами конуса и коническимъ слоемъ $ee'l'l$ безконечно уменьшается. И такъ вышеприведенное уравненіе, обратится въ цил. $GIKH$ = слою шара $gaa'h - \alpha +$ отъ ч. кон. $ee'l'l + \beta$;

откуда (чл. 113)

слой шара $gaa'k$ = цил. $GIKH$ — описч. кон $ee'I'I$

Посему, *толстота шароваго слоя, равна толстоть описаннаго цилиндра безъ толстоты конуса, содержащагося между тѣми же параллельными плоскостями:* такъ что *толстота* $Ggal$, *внѣшняя относительно шароваго слоя* $gaa'h$ *и заключающаяся въ описанномъ цилиндрѣ, равна коническому слою* $ee'I'I$.

1-е. Если плоскости составляющъ слои, начиная отъ EF до AD, то явно, что полушаръ ABD = цил. $EFDA$ — кон. CEF. Но сей конусъ есть трешь сего цилиндра (чл. 310); слѣд. полушаръ есть $\frac{2}{3}$ цилиндра, или *шаръ есть двѣ трети описаннаго цилиндра*, или $\frac{2}{3}$ круга $ABD \times 2AE$, или наконецъ *произведеніе трети радіуса на его поверхность*, равняющейся четыремъ большимъ кругамъ. Пусть будетъ R радіусъ AC, D діаметръ AD, поверхность равна $4\pi R^2$, или πD^2, откуда

$$\text{толстота V шара} = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{6}\pi D^3 \ (^*).$$

(*) По важности сей теоріи полезно слѣдующее изложеніе. Обращивъ около діаметра AO (чер. 145), описанный правил. многоуг. $ABDI\ldots$; представимъ себѣ рядъ усѣченныхъ пирамидъ, описанныхъ около каждаго изъ усѣченныхъ конусовъ, составляющихъ многогранникъ описанный около шара. Очевидно, что предѣлъ толстоты сихъ усѣченныхъ пирамидъ, есть толстота конусовъ, и слѣдовательно толстота шара или соотвѣтственнаго шароваго сегмента. Изъ центра C проведемъ линіи къ каждый изъ многогранныхъ угловъ, получимъ другой рядъ пирамидъ, коихъ общая высота будетъ радіусъ KC. Слѣдовательно, цѣлая толстота будетъ равна произведенію трети сего радіуса на поверхность основаній или на поверхность многогранника.

И такъ, пусть будетъ R радіусъ DC чер. 143), α избытокъ площади многогранника надъ площадью A шара или шароваго отрѣзка DAG, β избытокъ толстоты многогранника надъ толстотою V шара или сектора $CDAG$: получимъ $\frac{1}{3}R(A+\alpha)$ для толстоты многогранника; посему $V+\beta=\frac{1}{3}R(A+\alpha)$; откуда (чл. 113) $V=\frac{1}{3}AR$. Слѣд. и проч.

2-е. Радіусъ шара, коего толстота V дана, будетъ

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}6203505\sqrt[3]{V}.$$

3-е. Означивъ чрезъ h' высоту bf шароваго слоя $ghd'a$ (чер. 137), и замѣтивъ, что $BK = BC - R$, $Cb = be$, и $Cf = fl$, толстота (чл. 312) усѣченнаго конуса $ll'c'e$ будетъ $= \frac{1}{3}\pi h \times (Cb^2 + Cf^2 + Cb \times Cf)$. Но bf или $h' = Cb - Cf$, изъ квадрата коего $h'^2 = Cb^2 + Cf^2 - 2Cb \times Cf$, получимъ $Cb \times Cf = \frac{1}{2}(Cb^2 + Cf^2 - h'^2)$: и такъ

усѣч. конусъ $= \frac{1}{2}\pi h'(Cb^2 + Cf^2) - \frac{1}{6}\pi h'^3$.

Вычтя сіе изъ цилиндра $GIKH = h \times \pi BC^2$, толстота шароваго слоя будетъ $\frac{1}{2}\pi h(2BC^2 - Cb^2 - Cf^2) + \frac{1}{6}\pi h'^3$. Но означимъ чрезъ r и r' радіусы fg и ba двухъ основаній, изъ треугольника Cba получимъ $BC^2 - Cb^2 = r'^2$; такимъ же образомъ $BC^2 - Cf^2 = r^2$; слѣд.

толстота шаров. слоя $= \frac{1}{2}h'(r^2 + r'^2) + \frac{1}{6}\pi h'^3$:

или *толстота шароваго слоя равна произведенію высоты онаго на полсумму обоихъ основаній, сло-*

Вообще, такъ какъ толстота всякаго многогранника, описаннаго около шара, равна произведенію трети радіуса на его поверхность, слѣд содержаніе толстотъ многогранника и шара равно содержанію поверхностей. Посему *толстоты двухъ какихъ нибудь описанныхъ многогранниковъ, относятся какъ ихъ поверхности.* Сей способъ преѣдовъ позволяетъ намъ (чл. 113) сдѣлать сію теорему всеобщею, и распространить ее на всякое собраніе кривыхъ и плоскихъ часшей какихъ-нибудь поверхностей, описанныхъ около шара.

Такимъ образомъ *толстота шара составляетъ* $\frac{2}{3}$ *толстоты описаннаго цилиндра*, ибо поверхность одного есть $\frac{2}{3}$ поверхности другаго (чл. 293, 4-е). Впрочемъ, сіе также извлекаетъ изъ того, что толстота шара равна большому кругу, умноженному на $\frac{4}{3}$ радіуса, а толстота цилиндра произведенію большаго круга на діаметръ. Сравнивъ цилиндръ и конусъ, описанные около шара, найдемъ, что первая изъ сихъ толстотъ есть средняя пропорціональная между двумя другими, ибо сіи толстоты относятся какъ ихъ поверхности (чл. 293, 5-е). Тоже скажемъ о сихъ шарахъ вписанныхъ въ шаръ.

женному съ толстотою шара, коего діаметръ есть сія высота.

4-е. Если сегменшъ имѣешъ шолько одно основаніе, шо $r' = 0$, и получимъ $\frac{1}{2}\pi h r^2 + \frac{1}{6}\pi h^3$, замѣнивъ, что въ прeугольникѣ Cab, $r^2 = R^2 - (R - h)^2$, ошкуда $r^2 = 2Rh - h^2$, найдемъ, что

шаровой сегменшъ $= \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$.

5-е. Прибавимъ къ шаровому сегменшу Bab конусъ $Cab = \frac{1}{3}Cb \times$ кругъ ab; но $Cb = R - h$, $ab^2 = Ca^2 - Cb^2 = 2Rh - h^2$; слѣдовашельно

конусъ $Cab = \frac{1}{3}\pi h \times (2R - h)(R - h)$.

ошкуда *шаровой секшоръ* $= \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

Посему толстота шароваго сектора CaBa' *равна произведенію трети радіуса на площадь отрѣзка, служащаго ему основаніемъ:* h означаешъ высошу Bb сего оприѣзка.

314. *Толстоты двухъ пирамидъ, относятся между собою, какъ произведенія изъ высотъ на площади основаній* (чл. 310). Но если сіи пирамиды SAC, Sac (чер. 125) подобны, шо получимъ $\frac{ABC\ldots}{abc\ldots} = \frac{SH^2}{Sh^2}$ (чл. 278); умноживъ обѣ часши на $\frac{SH}{Sh}$, будешъ

$$\frac{SABC\ldots}{Sabc\ldots} = \frac{SH^3}{Sh^3}.$$

Толстоты подобныхъ многогранниковъ, относятся между собою какъ кубы ихъ сходственныхъ линій. Въ самомъ дѣлѣ, шакъ какъ два подобные многогранника P и p разлагаются (чл. 296) на подобныя пирамиды S, s, S', s'...., шо означивъ чрезъ A, a, A', a' сходственныя линіи сихъ пирамидъ, получимъ $\frac{S}{s} = \frac{A^3}{a^3}$, $\frac{S'}{s'} = \frac{A'^3}{a'^3}$... Сверхъ шого, всѣ сіи опношенія равны; ибо по предложенному подобію $\frac{A}{a} = \frac{A'}{a'} = \ldots$.

Посему $\frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''} = \ldots = \frac{A^3}{a^3}$; ошкуда (чл. 73,5-е)

$$\frac{S + S' + S'' + \ldots}{s + s' + s'' + \ldots} = \frac{P}{p} = \frac{A^3}{a^3}.$$

Легко усмотрѣть, что *толстоты шаровъ относятся какъ кубы ихъ радіусовъ;* что толстоты подобныхъ прямыхъ цилиндровъ и конусовъ (т. е. произшедшихъ отъ подобныхъ прямоугольниковъ или прямоугольныхъ треугольниковъ), относятся между собою, какъ кубы ихъ производящихъ линій, или ихъ высотъ, или наконецъ радіусовъ ихъ основаній.

Толстоты симметричныхъ многогранниковъ равны; ибо очевидно, что ихъ можно разложить на симметричные треграннички, имѣющіе равныя основанія и высоты.

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

I. ПРИЛОЖЕНІЕ АЛГЕБРЫ КЪ НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

Нѣкоторыя задачи о линіяхъ.

315. Доколѣ Алгебра и Геометрія разсматривались, какъ науки отдѣльныя, ихъ успѣхи были медленны и употребленіе ограниченно; но соединясь, онѣ сообщили одна другой свои силы и быстро устремились къ совершенству. Декарту обязаны приложеніемъ Алгебры къ Геометріи, которое сдѣлалось источникомъ важнѣйшихъ открытій, во всѣхъ отрасляхъ Математики. (*La Grange*, Ecol. Norm. t. IV, p. 401).

И такъ, введеніемъ въ алгебраическія формулы величинъ, составляющихъ части какой-нибудь фигуры, мы перенесемъ въ Геометрію всѣ пособія Алгебры и легко достигнемъ до заключеній, которыя трудно было бы получить одною Геометріею. Сія послѣдняя имѣетъ то преимущество, что никогда не теряетъ изъ виду главнаго предмета и освѣщаетъ весь путь ведущій отъ первоначальныхъ аксіомъ до окончательныхъ заключеній (см. чл. 252); но Алгебра представляетъ гораздо болѣе средствъ.

Сіи разсужденія заставляютъ предпочитать въ начальной Геометріи прямые способы, независимые ни отъ какихъ посторонннхъ началъ и дозволяющіе, такъ сказать, представлять каждое предложеніе отдѣльно, въ видѣ истины столь же ясной, какъ и аксіома, изъ которой оно выведено. Но въ вопросахъ, болѣе сложныхъ, сей способъ, называемый *Синтезомъ*, теряетъ свое главное достоинство — ясность; и тогда открывается все превосходство *Анализа*, коего изобильное вліяніе доставляетъ всеобщность окончательнымъ выраженіямъ, простоту изслѣдованіямъ, и при искусномъ онаго употребленіи сообщаетъ своимъ пріемамъ изящность и даже ясность, которой по видимому механизмъ вычисленія противится. Слѣдующія задачи послужатъ доказательствомъ сихъ утвержденіямъ:

316. *Измѣрить разстояніе неприступной точки* D *отъ другой точки* A чер. 159). По направленіи линіи AD возьмемъ какую-нибудь часть AC, составимъ произвольный треуг. ABC, и измѣримъ бока $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (*), потомъ взявъ на BC какую-нибудь точку E, направимъ къ D лучь зрѣнія FD; пусть $AD = x$, $EC = g$, $FA = d$. По свойству FG параллельной къ AB, получимъ

1-е. $$\frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CG} = \frac{AB}{EG}, \text{ или } \frac{a}{g} = \frac{b}{CG} = \frac{c}{EG};$$

слѣд. $$CG = \frac{bg}{a}, \quad EG = \frac{cg}{a}.$$

2-е. $$\frac{DA}{FA} = \frac{DG}{EG}, \text{ или } \frac{x}{d} = \frac{DG}{EG};$$

Сверхъ того $DG = DA - GA = AD - (AC - CG)$, или $DG = x - b + \frac{bg}{a}$; раздѣлимъ сіе на величину EG,

(*) Впредь будемъ означать углы треуг.-ка чрезъ A, B, C, а соотвѣтственно противоположные имъ бока чрезъ a, b, c.

найдемъ $$\frac{x}{d} = \frac{ax - ab + bg}{cg};$$

откуда $$x = bd\left(\frac{g - a}{cg - ad}\right).$$

Чтобы получить выраженіе x въ числахъ, остается только подставить вмѣсто a, b, c, d и g, ихъ числовыя величины, или отношенія сихъ линій къ единицѣ, принятой за мѣру.

317. *Сыскать отношеніе между бокали* a, b *и* c *треуг.-ка* ABC (чер. 92), *вписаннаго въ кругъ, коего радіусъ* . R. Проведемъ діаметръ BD и линіи AD, DC; изъ четыреуг. $ABCD$ (чл. 240, II) . . . . . $2Rb = c \times CD + a \times AD$. Изъ прямоугольныхъ же треуг.-въ BCD и BAD, найдется, что $CD = \sqrt{(4R^2 - a^2)}$ и $AD = \sqrt{(4R^2 - c^2)}$; слѣд:

$$2Rb = c\sqrt{(4R^2 - a^2)} + a\sqrt{(4R^2 - c^2)};$$

изъ сего искомаго уравненія можно опредѣлить которую-нибудь изъ четырехъ величинъ a, b, c или R, когда извѣстны три прочія.

I. Если a и c суть данныя хорды двухъ дугъ AB и BC, то опредѣлится b, или хорда AC дуги ABC равной ихъ суммѣ.

Если дуга AB и BC равны, то $a = c$, слѣд.

$$Rb = a\sqrt{(4R^2 - a^2)},$$

сіе уравн. опредѣляетъ b, т. е. хорду какой-нибудь дуги, по извѣстной хордѣ a половинной дуги.

II. *Сыскать радіусъ* R *круга описаннаго около треуг.-ка* ABC. Возвысимъ наше уравн. во вторую степень, одинъ изъ корней пропадетъ; перенесемъ члены, ненаходящіеся подъ корнемъ, въ одну часть уравненія, и возвысимъ оное вторично въ квадратъ, дабы уничтожить остальную подкоренную величину; получимъ

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}.$$

Сіе уравн. не удобно для логариѳмическихъ вычисленій; но подкоренная величина есть разность квадратовъ, которая $= (2ac + a^2 + c^2 - b^2) \times (2ac - a^2 - c^2 + b^2)$ или $[a + c)^2 - b^2] \times [b^2 - (a - c)^2]$; каждый изъ сихъ произведеній можно разбить такимъ же образомъ на множители, отъ чего

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)}}$$

или

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

сдѣлавъ для краткости периметръ $a + b + c = 2p$.

III. *Сыскать площадь треуг.-ка, по даннымъ его тремъ бокамъ* a, b, c. Извѣстно (чл. 218, черт. 176, что отрѣзокъ $AD = x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$; но изъ треуг.-ка ABD, $BD = \sqrt{(c^2 - x^2)}$; $z = \frac{1}{2}b \times BD$, слѣд:

$$z = \tfrac{1}{4}\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]},$$

или

$$z = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

а посему для радіуса R описаннаго круга, $4Rz = abc$.

IV. *Сыскать радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ.* Площади (черт. 46) треуг.-въ AOB, AOC, BOC суть $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}ar$. Сумма оныхъ $z = pr$, откуда (см. чл. 565, VIII),

$$r = \frac{z}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

518. V. *Опредѣлить площадь четыреугольника* ABCC' (чер. 59). Проведемъ діагональ $AC = b$, и примемъ оную за основаніе треугольниковъ ABC и ACC'; пусть ихъ высоты будутъ h и h'; искомая площадь $= \frac{1}{2}b(h + h')$.

Иначе: возьмемъ $ABCD$ (чер. 174); опустимъ перпендикуляры $DE = h$, $CF = h'$ на основаніе $AB = a$; положимъ $AE = b$, $BF = b'$, то (чл. 259) площадь $CFED = \frac{1}{2}(h + h')(a - b - b')$. Сверхъ того $ADE = \frac{1}{2}bh$, $CBF = \frac{1}{2}b'h'$: слѣд. сумма сихъ площадей

$$ABCD = \tfrac{1}{2}(a - b)h' + \tfrac{1}{2}(a - b')h.$$

Сіе уравн. удобное для приложенія, измѣняется, какъ скоро одинъ изъ перпендикуляровъ падаетъ внѣ четыреугольника. Въ такомъ случаѣ (чер. 175) должно перемѣнить b на b и b' на $-b'$ (см. чл. 334 и 365, VI).

VI. *Провести перпендикуляръ* EF *къ основанію* AC *треуг.-ка* ABC (чер. 171), *такъ чтобъ треуг.-ки* AEF, ABC *были въ данномъ отношеніи* m *къ* n. Пусть b и x будутъ основанія AC, AE; h и y высоты BD, EF; слѣд. площади суть $\frac{bh}{2}$, $\frac{xy}{2}$; откуда $\frac{xy}{bh} = \frac{m}{n}$. Сверхъ того изъ подобныхъ треуг.-въ AEF и ABD, $\frac{y}{h} = \frac{x}{k}$, предполагая $AD = k$; посему исключивъ y, $x = \sqrt{\frac{kbm}{n}}$. Если $x > k$ или AD, то точка E должна находиться около H, т. е. за точкою D: и тогда перпендикуляръ къ AC отсѣкаетъ треуг. неимѣющійся въ ABC; сіе случится, когда $bm > kn$,

или $$\frac{m}{n} > \frac{k}{b} = \frac{AD}{AC}.$$

319 По данному (чер. 97) боку $AB = a$, правильнаго вписаннаго многоугольника, сыскать $AC = x$, или бокъ правильнаго многоугольника, имѣющаго сторонъ вдвое болѣе. Чрезъ средину AB проведемъ перпендикуляръ CO, то (чл. 225) $AC^2 = CI \times 2CO$. Назвавъ z радіусъ OI вписаннаго круга въ данномъ многоугольникѣ, получимъ $CI = R - z$ и $OI^2 = AO^2 - AI^2$; слѣд. $x^2 = 2R(R - z)$, и $z^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Положивъ на пр: $a = R$, бокъ вписаннаго двенадцатиугольника $= R\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$. Также если $a = R\sqrt{3}$, то (чл. 256) бокъ шестиугольника $x = R$, и проч.

Такимъ же образомъ можно найти бокъ $EI = y$ правильнаго описаннаго многоугольника, по извѣстному боку $AB = a$, вписаннаго многоугольника того же числа сторонъ. Ибо изъ треуг.-въ AOI, EOC,

$$\frac{OI}{OC} = \frac{AI}{LC}, \text{ или } \frac{z}{R} = \frac{a}{y}.$$

слѣд. $$y = \frac{aR}{z} \text{ и } z^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

Подобно сему, если $a = R\sqrt{2}$, то для бока описаннаго квадрата (чл. 237), $z = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$, и $y = 2R$; если $a = R\sqrt{3}$, то бокъ описаннаго равносторонняго треуг.-ка, $y = 2R\sqrt{3}$, т. е. вдвое болѣе бока треуг.-ка вписаннаго.

320. Изъ сихъ уравненій легко получить *приближенное отношеніе окружности къ діаметру* или полу-окружность къ радіусу круга, коего радіусъ единица (чл. 248). Для сего положимъ $R = 1$ (см. чл. 347), тогда предыдущія уравненія обращаются въ

$$x = \sqrt{2 - 2z}, \; z = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}a^2)}, \; y = \frac{a}{z}.$$

Сдѣлавъ $a = 1$, найдемъ, что бокъ вписаннаго двенадцатиугольника $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517638$. Если вторично сдѣлаемъ $a = 0{,}5176\ldots$, то найдемъ, что бокъ правильнаго 24-хъ-угольника $x = 0{,}261055$; и т. д.

Подобныя четыре дѣйствія дадутъ напр: 0,065438, для бока правильнаго 96-ти-угольника; подставя сію величину въ выраженіе z и y вмѣсто a, найдемъ бокъ подобнаго, описаннаго правильнаго многоугольника, а умноживъ на 48, получимъ для полупериметровъ сихъ многоугольниковъ 3,1392 и 3,1410. Такъ какъ полуокружность π заключается между сими величинами, то взявъ только общія десятичныя, выдемъ $\pi = 3{,}14\ldots$.

Чтобы получить болѣе приближенное выраженіе сей дроби, должно прибѣгнуть къ многоугольникамъ большаго числа сторонъ, ибо чѣмъ число сторонъ многоугольниковъ увеличивается, тѣмъ периметры ихъ ближе подходятъ къ окружности (чл. 246).

Пусть вообще вычисленъ бокъ a вписаннаго, правильнаго многоугольника n числа сторонъ; то полупериметры сего многоугольника и описаннаго подобнаго будутъ

$$\tfrac{1}{2}an \text{ и } \frac{\tfrac{1}{2}an}{\sqrt{[1+\tfrac{1}{2}a\ \ 1-\tfrac{1}{2}a)]}};$$

откуда выводится наконецъ число π, данное на стр. 316.

Геометрическія построенія.

321. Для рѣшенія Геометрическихъ задачъ, какъ можно было замѣтить изъ (чл. 208, 227...), надлежитъ предположивъ ихъ рѣшенными, примѣтить къ чертежу свойства, подобныя уже извѣстнымъ; отыскать такимъ образомъ законъ, коему подлежатъ части уравненія, и вывесть изъ онаго величины неизвѣстныхъ. Сей способъ требуетъ большаго навыка и искуства, и для сихъ соображеній нельзя предписать общихъ правилъ. Употребленіе Алгебры, при искусномъ выборѣ неизвѣстныхъ, часто доводитъ насъ до рѣшеній болѣе изящныхъ; посредствомъ оной удобнѣе опредѣляютъ число неизвѣстныхъ, и легче познаютъ, возможна ли задача или нѣтъ, опредѣленна или неопредѣленна.

Вообразимъ, что послѣ рѣшенія Геометрической задачи, построенъ чертежъ въ должномъ порядкѣ изъ частей оную составляющихъ; что длина различныхъ линій онаго означена буквами, и что по извѣстнымъ правиламъ составили изъ нихъ уравненія; неизвѣстныя изъ оныхъ легко опредѣлятся. Послѣ чего, если всѣ линіи чертежа выразятся числами, то посредствомъ Ариѳметики найдутся числовыя величины неизвѣстныхъ. Но надлежитъ замѣтить, что сіи искомыя длины могутъ опредѣлиться и безъ помощи чиселъ, геометрическими способами, которые нѣмъ изящнѣе, чѣмъ чертежъ менѣе сложенъ. Сіе самое и называется *построеніемъ* величины неизвѣстнаго.

542. Прежде всего замѣтимъ, что упомянутое предъ симъ вычисленіе можетъ быть только основано на отношеніяхъ линій; такъ что линію A не иначе можно ввести въ уравн., какъ обращая вниманіе на отношеніе оной къ другой линіи B, которую можно принять за единицу (чл. 156). Въ такомъ случаѣ $\frac{A}{B}$ представляетъ число отвлеченное, вмѣсто коего можно вставить содержаніе какихъ-нибудь двухъ другихъ величинъ a и b, лишь бы $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$.

Слѣд. вычисленіе можетъ только состоять изъ выраженій $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots$. Но изъ самыхъ правилъ вычисленія слѣдуетъ, что всякое выраженіе произшедшее отъ умноженія, дѣленія, или приведенія къ одному знаменателю сихъ величинъ и проч., должно быть *однороднее*, т. е. такое, *коего члены состоятъ изъ одинакаго числа множителей*. И такъ буквы a, b, c, ... входящія въ уравн. могутъ представлять линіи вмѣсто чиселъ, и члены онаго должны быть однородные. Иначе, которая-нибудь изъ сихъ линій, какъ на пр: r, была принята за единицу, величина коей впрочемъ произвольна и извѣстна (чл. 56). Въ такомъ случаѣ можно множителя r ввести опять во всѣ члены, въ коихъ онъ долженъ былъ изчезнувъ отъ положенія $r = 1$, т. е. *ввести* r *и тѣ тожащія степени онаго въ различные члены, дабы сдѣлать ихъ однородными*. Чтобы величины

$$\frac{2a^4c + ab^3 - d}{b^4 + a^3 - c}, \quad \frac{a-b}{1+ab}, \quad \sqrt{\left(\frac{1+a}{2}\right)}$$

изображали линіи, надлежитъ ихъ обратить въ

$$\frac{2a^4c + ab^3r - dr^4}{b^4 + a^3r - cr^4}, \quad \frac{a-b}{r^2+ab}r^2, \quad \sqrt{\left(\frac{r^2+ar}{2}\right)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, на пр: изъ $x = \sqrt{\left(\frac{1+a}{2}\right)}$, но уни-

чтоженіи корня, получимъ $2x^2 = 1 \pm a$, которое чрезъ подстановку надлежащихъ степеней r обратится въ $2x^2 = r^2 \pm ar$. Въ уравненіи такого вида, можно принять за единицу, вмѣсто r, всякую другую величину и даже невходящую въ оное.

Степень однороднаго уравненія, неимѣющаго знаменателя, узнается по числу множителей котораго-нибудь изъ его членовъ; если же оно дробное, то должно степень знаменателя вычесть изъ степени числителя; наконецъ если оно неизвлекомо, то надлежитъ степень подкоренной величины раздѣлить на показателя корня. Изъ сего заключимъ вообще, что дабы извлекомая дробь представляла линію, т. е. *была бы величина линейная, то надлежитъ, чтобы въ каждомъ членѣ числителя было одинъ множителемъ болѣе противъ знаменателя; если же дробь неизвлекома, то степень подкоренной величины должна быть равна показателю корня*, т. е. квадратной корень долженъ быть извлекаемъ изъ 2-й степени и пр.; формулы *одного измѣренія*, т. е. 1-й степени, могутъ споришься посредствомъ линій, формулы *двухъ измѣреній* посредствомъ площади, и наконецъ формулы *3-хъ измѣреній* представляютъ толстоту; если же онѣ не однородны, то ихъ дѣлаютъ такими, чрезъ введеніе различныхъ степеней линіи r, которая была принята за единицу.

323. Всякая *односложная линейная дробь* не можетъ имѣть инаго вида, какъ: $x = \frac{ab}{c}$, $x = \frac{abc}{de}$, $x = \frac{abcd}{efg}\ldots$; послѣдняя на пр., которую можно изобразить чрезъ $\frac{a}{e} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g} \times d$, показываетъ, что линію d надо взять столько разъ, сколько находится единицъ въ произведеніи отношеній $\frac{a}{e}, \frac{b}{f}, \frac{c}{g}$.

1-е. Построить $x = \frac{ab}{c}$ не трудно; x есть четвертая пропорціональная къ c, a и b. Она найдется, какъ показано въ (чл. 213, чер. 59; для сего можно также употреблять предложенія (чл. 221 и 224).

2-е. Для $x = \frac{abc}{de}$, прежде строимъ $k = \frac{ab}{d}$, и получаемъ $x = \frac{kc}{e}$; и какъ двѣ четвертыя пропорціональныя дадутъ x.

3-е. Такимъ же образомъ строимъ $x = \frac{abcd}{efg}$; положивъ $k = \frac{ab}{e}$, $l = \frac{cd}{f}$, найдемъ $x = \frac{kl}{g}$. Здѣсь нужно три построенія. И т. д.

324. Для *многочленной дроби* $x = \frac{abc + def - ghi}{lm}$, имѣющей одночленный знаменатель, пишемъ $x = \frac{abc}{lm} + \frac{def}{lm} - \frac{ghi}{lm}$, и строимъ каждую дробь особенно; получаемъ три линіи, которыя должно сложить или вычесть.

Но если $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$, то удобнѣе сдѣлать $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, т. е. отыскать 4-ю пропорціональную къ линіямъ c, $a+b$, и $a-b$.

325. Если и знаменатель многочленный, то его дѣлаютъ одночленнымъ, приравнявъ оный одному члену того же измѣренія, коего множители берутся произвольно, исключая одного неизвѣстнаго y, опредѣляемаго по вышесказанному. На пр. $x = \frac{abc + def}{ab + cd}$, сдѣлаютъ $ab + cd = ay$: отсюда $x = \frac{abc}{ay} + \frac{def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}$, и $y = b + \frac{cd}{a}$; сіе послѣднее уравн. опредѣлитъ y, а первое x.

Если $x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$, то дѣлаютъ знаменатели $q^2i - klq + cmd = q^2y$; откуда $y = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2}$; какъ скоро y извѣстенъ, то

$$x = \frac{abc^2}{q^2y} + \frac{qh}{y} - \frac{m^3p}{q^2y}.$$

Искуснымъ выборомъ множителей неизвѣстнаго y, можно достигнуть простѣйшихъ построеній; нѣсколько догадки и упражненія облегчатъ приложеніе общаго правила. Такимъ образомъ $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$, можно превратить въ $x = \frac{m(c-m)}{c+m}$, положивъ $m = \frac{ab}{c}$.

326. *Построенія поскоренныхъ количествъ* обращаются въ построеніе величинъ слѣдующаго вида:

$$\sqrt{(ab)} \text{ или } \sqrt{(a^2 \pm b^2)};$$

$\sqrt{(ab)}$ есть средняя пропорціональная между a и b, и строится, какъ показано въ чл. 222 (чер. 70); можно оную также опредѣлить посредствомъ теоремъ (чл. 223 и 225).

Величина же $\sqrt{(a^2 \pm b^2)}$, есть бокъ прямоугольнаго треуг.-ка; коего другіе два бока суть a и b. Чтобъ построить $\sqrt{a^2 + b^2}$, чер. 67), откладываютъ $AB = a$ $AC = b$, по двумъ неопредѣленнымъ линіямъ AB, AC, пересѣкающимся подъ прямымъ угломъ; гипотенуза BC будетъ $\sqrt{a^2 + b^2}$. Такимъ же образомъ для $\sqrt{a^2 - b^2}$), проведутъ двѣ линіи AB и AC; отложатъ $AB = b$; потомъ изъ точки B какъ центра, радіусомъ $BC = a$ засѣкутъ точку C, $AC =$ будетъ $\sqrt{a^2 - b^2}$). Иначе, на линіи $BC = a$, какъ на діаметрѣ опишутъ полкруга ABC; потомъ изъ центра B радіусомъ $AB = b$, засѣкутъ точку A; AC будетъ $\sqrt{a^2 - b^2}$).

327. Для построенія всякаго другаго квадратнаго корня надлежитъ подкоренную величину приравн-

нить произведенію ay, ибо оная должна быть двухъ измѣреній; a есть количество произвольное, а y неизвѣстное, послѣ чего $x = \sqrt{(ay)}$. Величина y легко опредѣлится; ибо оная равна дроби, коей построеніе изъяснено выше.

Пусть на пр: $x = \sqrt{\left(\frac{ab^2 + cd^2}{b+c}\right)}$; сдѣлаемъ $\frac{ab^2 + cd^2}{b+c} = ay$ откуда $y = \frac{b^2}{b+c} + \frac{cd^2}{a(b+c)}$; y построится посредствомъ одной черты, и двухъ четвертыхъ пропорціональныхъ, наконецъ получимъ $x = \sqrt{ay}$.

Впрочемъ, нѣсколько догадки сокращаютъ общее правило; такимъ образомъ, для $\sqrt{(ac+bd)}$ полагаютъ $bd = ay$, откуда $y = \frac{bd}{a}$ и $x = \sqrt{[a(c+y)]}$. Равномѣрно $x = \sqrt{(ab+bc)}$ можно представить чрезъ $x = \sqrt{[(a+c)b]}$. См. также (чл. 529, V, построеніе $\sqrt{\left(\frac{mk^2}{m}\right)}$, и проч.

528. Хотя симъ способомъ можно построить $x = \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$, но рѣшеніе дѣлается проще посредствомъ строенія прямоугольнаго треугольника; а посему часто стараются подкоренныя величины превращать въ таковой видъ. Такимъ образомъ $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$, обратится въ $x = \sqrt{(a^2 \pm y^2)}$, сдѣлавъ $y^2 = bc$, откуда $y = \sqrt{bc}$.

Равномѣрно $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots)}$, строится слѣдующимъ образомъ. Дѣлаютъ $r = \sqrt{(a^2 + b^2}$; на сторонахъ AB, BC прямаго угла B (чер. 160) откладываютъ $AB = a$, $BC = b$; гипотенуза AC будетъ r. И тогда $x = \sqrt{(r^2 + c^2 + d^2 + \ldots)}$; сдѣлавъ $r' = \sqrt{r^2 + c^2}$: возставляютъ CD перпендикулярно къ AC, откладываютъ $CD = c$, AD будетъ r откуда $x = \sqrt{r^2 + d^2 + \ldots)}$, и т. д.; послѣдняя гипотенуза AF есть искомый x. Подобнымъ образомъ строятъ $\sqrt{n}$, и $\sqrt{\frac{m}{n}}$, чл. 529, IX и V.

Для $x = \sqrt{(ac - fg + mq + rd)}$, дѣлаютъ произвольно: или $ac - fg + mq + rd = ay$,

ошкуда $y = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$, и $x = \sqrt{(ay)}$;

или $ac = y^2$, $fg = z^2$, $mq = t^2$, $rd = u^2$,

отъ чего $x = \sqrt{(y^2 + t^2 + u^2 - z^2)}$; примѣнивъ къ сему предыдущее построеніе, получимъ x.

Наконецъ, если $x = \sqrt{\left(a^2 - f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}\right)}$, то положивъ $y^2 = f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}$, получимъ $x = \sqrt{(a^2 - y^2)}$: останется только опредѣлить y. Для сего дѣлаютъ $c^2 + d^2 = z^2$, и $ab + cd = t^2$; ошкуда легко найдутъ, z и t, послѣ чего $y = \frac{fz}{t}$.

529. Приложимъ сіи правила къ нѣкоторымъ примѣрамъ:

I. *Раздѣлить линію* AC (чер. 161) *на двѣ части* CB, AB, *которыя бы между собою имѣли данное отношеніе* m *къ* n. Пусть $AC = a$, $CB = x$; тогда $AB = a - x$, и по условію задачи $\frac{x}{a - x} = \frac{m}{n}$, ошкуда $x = \frac{am}{m + n}$. Для построенія, проводятъ подъ какимъ-нибудь угломъ линію EC, откладываютъ $CD = m$, $DE = n$, если m и n суть линіи; если же онѣ представляютъ числа, то взявъ произвольное раствореніе циркуля, наносятъ оное m разъ отъ C къ D, и n разъ отъ D къ E. Потомъ проводятъ AE и ей параллельную BD; B будетъ искомая точка.

II. Даны двѣ параллельныя линіи BC, DE (чер. 162) и точка A, провести чрезъ сію точку косвенную AI, такъ, чтобы часть оной IK, заключаемая между параллельными, была данной длины $= c$. Проведемъ AG перпендикулярно къ DE, и сдѣлаемъ $AG = a$, $FG = b$;

неизвѣстное $GI = x$; тогда $\frac{AI}{AG} = \frac{IK}{FG}$ или $\frac{AI}{a} = \frac{c}{b}$; также $AI^2 = a^2 + x^2$; слѣд. $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{c^2 - b^2}$. Изъ сего видно, что задача невозможна, когда $b > c$ или $FG > IK$. Для построенія же x, изъ центра F опишутъ дугу HH' радіусомъ c; откуда $GH = \sqrt{(c^2 - b^2)}$; AI параллельная FH будетъ искомая линія, ибо IG есть 4-я пропорціональная къ b, a и GH.

Двойной знакъ, находящійся при величинѣ x, показываетъ, что задача имѣетъ еще другое рѣшеніе AI'. (См. чл. 338).

III. *Даны двѣ точки* A *и* B (чер. 165); *описать кругъ, проходящій чрезъ сіи точки и касательный къ данной прямой* DD'. Для сего стоитъ только найти точку касанія D. Продолжимъ прямую AB до C и сдѣлаемъ $CD = x$, $CI = a$, $IB = b$; I есть средина AB. По свойству касательной $CD = x$, (чл. 225) $x^2 = CA \times CB = (a - b)(a + b)$, откуда $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

На гипотенузѣ CI начертимъ прямоугольный треуг. IEC, коего катеты суть b и x; для сего опишемъ полукруга CEI и отложимъ $EI = AI$; EC будетъ $x = CD$. Отрицательной величинѣ x соотвѣтствуетъ другое рѣшеніе въ D' (чл. 337).

IV. Даны двѣ параллельныя AE', BF (чер. 164) и къ нимъ перпендикулярная AB; провести пересѣкающую EF такъ, чтобъ AC, половина AB была средняя пропорціональная между отрѣзками AE и BF. Пусть $AE = x$, $BF = y$, $AC = a$; по условію задачи $a^2 = xy$; слѣд. задача *неопредѣленная* (чл. 117) и имѣетъ безконечное число рѣшеній. Между различными средствами получатъ сіи рѣшенія, слѣдующее замѣчательно своею изящностью.

Пусть $CD = r$, полагая, что D есть точка сѣченія искомой EF съ перпендикуляромъ CD, возставленнымъ къ AB изъ ея средины C, H' перпендикулярная

къ CD составивши два равныхъ треуг.-ка EDI, FDF; а посему $y = r + IE$, $x = r - IE$, откуда $x + y = 2r$; исключивъ y изъ $a^2 = xy$, получимъ $x^2 - 2rx = -a^2$; здѣсь r величина произвольная, а $x = r \pm \sqrt{r^2 - a^2}$); посему должно будетъ взять точку D такъ, чтобъ r былъ $> a$, или $CD > AC$: изъ точки D какъ центра описавъ кругъ радіусомъ r, получимъ $EI = \sqrt{(r^2 - a^2)}$; слѣд. точки сѣченія E и F удовлетворяютъ условію, такжe какъ и точки E' и F'; каждый центръ D даетъ два такovыхъ рѣшенія EF, $E'F'$.

V. *Чрезъ точку* A (чер. 165) *провести хорду* BAD, *коей отрѣзки* BA, AD *находились бы въ данномъ отношеніи* $= \frac{m}{n}$. Проведемъ діаметръ HAG; пусть $CH = r$, $CA = b$, $AD = x$: но $HA \times AG = BA \times AD$, откуда $r^2 - b^2 = x \times BA$; но по условію $AB = \frac{mx}{n}$; слѣд. $\frac{mx^2}{n} = r^2 - b^2$. Сдѣлавъ $r^2 - b^2 = k^2$, получимъ $x = \sqrt{\frac{nk^2}{m}}$, что легко построить. Сему выраженію можно дать такой видъ $x = \frac{k}{m}\sqrt{(mn)}$, и тогда надлежитъ отыскать среднюю и 4-ю пропорціональную; но слѣдующій способъ построенія предпочтительнѣе другихъ. Замѣнимъ $\frac{m}{n}$ отношеніемъ двухъ квадратовъ: на неопредѣленной линіи (чер. 166) возьмемъ DF и FE такія, чтобы $\frac{DF}{FE} = \frac{m}{n}$; опишемъ полкруга DAE, возставимъ перпендикуляръ FA къ DE, и проведемъ хорды AD, AE; тогда $\frac{AD^2}{AE^2} = \frac{DF}{FE} = \frac{m}{n}$ (чл. 223); а слѣд. $x = \frac{k \times AE}{AD}$: и такъ на AD, продолженной если нужно, отложимъ $AB = k$ и проведемъ BC параллельно къ DE, AC будетъ искомый x (чл. 213).

VI. *Построить многоугольникъ подобный данному, такъ, чтобъ ихъ площади были въ данномъ отношеніи* m *къ* n. Пусть одинъ изъ боковъ даннаго многоугольника будетъ A, а x соотвѣтствующій ему бокъ искомаго многоугольника; ихъ площади содержатся $::m:n$ и сверхъ того $::A^2:x^2$ (чл. 262), слѣд: $\frac{A^2}{x^2} : \frac{m}{n}$, откуда $x = A\sqrt{\frac{n}{m}}$. Построеніе шаковой величины предъ симъ было показано (чер. 166); и такъ, длина x извѣстна; остается только на сторонѣ x соотвѣтственной боку A, начертить многоугольникъ подобный данному (чл. 241). Таковое же построеніе можно употребить и для круговъ (чл. 263, 3-е); здѣсь m и n представляютъ линіи или данныя числа.

Чтобъ отыскать отношеніе двухъ данныхъ подобныхъ фигуръ ABC..., abc..., (чер. 95) откладываютъ на сторонахъ прямаго угла DAE (чер. 166), части AB, AC равныя двумъ сходственнымъ линіямъ предложенныхъ фигуръ: прямая AG перпендикулярная къ BC, разсѣченъ оную на два отрѣзка BG, CG имѣющіе тоже отношеніе что и данныя фигуры.

VII. *Сыскать многоугольникъ* X *подобный данному* P *и равновеликой съ другимъ данными* Q. Возьмемъ изъ многоугольника P бокъ A; пусть x будетъ неизвѣстный ему соотвѣтственный; то $\frac{P}{X} = \frac{A^2}{x^2}$, откуда $\frac{P}{Q} = \frac{A^2}{x^2}$, ибо $X = Q$. Если назовемъ M и N бока двухъ квадратовъ равновеликихъ съ P и Q (чл. 257) или двухъ квадратовъ M^2 и N^2 имѣющихъ тоже отношеніе что P и Q (чер. 166); то $\frac{M}{N} = \frac{A}{x}$, слѣд. x есть 4-я пропорціональная къ M, N и A.

VIII. *Сыскать двѣ линіи* x *и* y, *которыя бъ относились какъ два данные параллелограмма.* Пусть будутъ ихъ основанія B, b а высоты H, h, по усло-

вію $\frac{x}{y} = \frac{BH}{bh}$. Если y дать, то x опредѣлится весьма простымъ построеніемъ (чл. 323). Но если сіи двѣ линіи неизвѣстны, то одной можно дать величину произвольную; и положивъ $y = b$, получимъ $x = \frac{BH}{h}$; слѣд. x есть 4-я пропорціональная къ h, H и B. Въ такомъ случаѣ задача превращается *въ построеніе прямоугольника* hx, *имѣющаго данную высоту* h, *и площадь равновеликую съ даннымъ прямоугольникомъ* BH.

IX. *Чтобъ построить* $\sqrt{n}$, можно отыскать среднюю пропорціональную между n и 1 (чл. 222). Надо замѣтить (чл. 236, 237), что если въ кругѣ имѣющемъ радіусомъ единицу, впишется квадратъ и равносторонній треуг. то величины ихъ сторонъ будутъ $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Что же касается до $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$..., то они опредѣляются построеніемъ чл. 328; либо отложивъ на бокахъ прямаго угла CBA (чер. 160), $AB = 2$, $CB = 1$, получимъ $AC = \sqrt{5}$. Равномѣрно, если $CD = 1$, то $AD = \sqrt{6}$, и проч.....

330. Въ уравненіи 2-й степени $x^2 + px = q$, предполагается, что линія r принята за единицу (чл. 322); а посему надлежало вмѣсто q подставить qr или m^2, сдѣлавъ $m^2 = qr$. Корни уравненія $x^2 + px = m^2$, суть $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}p^2)}$, которые легко построятся по общимъ правиламъ предъ симъ изложеннымъ; но гораздо удобнѣе поступать слѣдующимъ образомъ:

1-е. Если $x^2 - px = -m^2$, то $m^2 = x(p - x)$, слѣд. m есть средняя пропорціональная между x и $p - x$. Къ $AB = p$ возставляютъ перпендикуляръ (чер. 167) $AD = m$, потомъ на діаметрѣ AB описываютъ полуокружность AEB; DE' параллельная къ AB опредѣлитъ точки E, E', перпендикуляры EF и $E'F'$ изъ сихъ точекъ, будутъ средніе пропорціональные между отрѣзками діаметра; слѣд. корни даннаго уравненія суть $x = AF$ и $x = AF'$.

2-е. Если $x^2 - px = m^2$, гдѣ m есть средняя пропорціональная между x и $x - p$, то радіусомъ $AD = \frac{1}{2}p$ (чер. 79) описываютъ кругъ AEE', потомъ отложивъ по касательной длину $AC = m$, проводятъ чрезъ центръ пересѣкающую CE; откуда $x = CE'$ и $= -CE$, ибо $m^2 = CE \times CE'$.

3-е. Если $x^2 + px = \pm m^2$, то дѣлаютъ тоже построеніе какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, только знаки корней перемѣнятся, ибо поставивъ $-x$ вмѣсто $+x$ получимъ прежнія уравненія.

X. Предположимъ на пр: провести чрезъ точку A, хорду BD (чер. 165) данной длины c. Сохраняя наименованія задачи V, получимъ $r^2 - b^2$, или $k^2 - x \times BA$; но условію же, $BA = c - x$; слѣд. $k^2 = (c - x)\,x$.

XI. Даны двѣ линіи $DC = a$, $AC = b$ (чер. 76); требуется сыскать на линіи AC отрѣзокъ $CB = x$, такой чтобы $CB^2 = AB \times DC$, или $x^2 = a \times AB$. Такъ какъ $AB = b - x$, то $x^2 + ax = ab$. На діаметрѣ AD опишемъ кругъ DFA, и возставимъ перпендикуляръ $FC = m$, получимъ $m^2 = ab$, откуда $x, x + a = m^2$. Слѣд. (чер. 79) должно на $AC = m$, возставивъ перпендикуляръ $AD = \frac{1}{2}a$, изъ центра D описать кругъ EAE' и провести пересѣкающую $E'C$, когда EC будетъ x, а $E'C = x + a$.

Можно также взять средину E линіи DC (чер. 76). Въ такомъ случаѣ

$$BC = x = BE - EC,\ BD = x + a = BE + EC.$$

Произведеніе будетъ $x\,(x+a)$, или $m^2 = BE^2 - EC^2 = FC^2$, сдѣлавъ $EB = EF$.

Если $DC = AC$, тогда предложенное уравн. обратится въ $BC^2 = AB \times AC$, и B разсѣкаетъ AC *въ среднемъ и крайнемъ отношеніи;* сія задача, есть частный случай предыдущей, и ей соотвѣтствуетъ построеніе показанное на стр. 299.

331. *Для построенія выраженій двухъ измѣреній*, превращаютъ ихъ въ выраженія BH о двухъ произ-

водителяхъ (какъ въ чл. 327), одинъ изъ нихъ есть основаніе, а другой высота прямоугольника; величина площади онаго равна предложенному выраженію. Такимъ образомъ для $x = \sqrt{cd(a^2 - b^2)}$, сдѣлаютъ $a^2 - b^2 = B^2$, $cd = H^2$, B и H опредѣлить не трудно и тогда $x = BH$ будетъ извѣстный прямоугольникъ.

Но если потребуютъ, чтобъ искомая площадь была параллелограммъ или треугольникъ...., то какъ основаніе и высота для построенія недостаточны, посему задача имѣетъ безконечное число рѣшеній, и для опредѣленія оной необходимо еще какое-нибудь другое условіе, какъ напр: данный уголъ или отношеніе боковъ и проч.

Чтобъ построить треугольникъ равновеликій кругу, коего радіусъ $R = a\sqrt{\frac{m}{n}}$, возьмутъ R за основаніе, а за высоту прямую h равную полу-окружности, или $h = \pi R = \frac{22}{7} a\sqrt{\frac{m}{n}}$. Сіи величины построятся по чер. 166, послѣ чего останется только начертить треугольникъ, коего одинъ уголъ произвольный.

332. *Всякое выраженіе трехъ измѣреній*, превращается въ выраженіе о трехъ производителяхъ, $x = ABC$, означающихъ измѣренія прямоугольнаго параллелипипеда, коего полсщота есть x. Сіе выраженіе можно также построить посредствомъ куба, что составляетъ *кубатуру* шаль, равномѣрно посредствомъ тетраедровъ, цилиндровъ и проч.

О знакахъ величинъ въ приложеніи Алгебры къ Геометріи.

333. Когда два чертежа различествуютъ одинъ отъ другаго только величиною своихъ частей, расположенныхъ впрочемъ одинаковымъ порядкомъ, то они

называются *прямыми*. Если величины b, c, d.... x, составляющія 1-й чертежъ, соединены уравненіемъ $X=0$, то оно будетъ также принадлежать и 2-му. Но если два чертежа различествуютъ между прочимъ расположеніемъ нѣкоторыхъ частей своихъ, такъ что на пр. въ 1-мъ $x=a-b$, а во 2-мъ $x=b-a$, то они называются *не прямыми* (*). Урав. $X=0$, существующее для одного, можетъ требовать нѣкоторыхъ измѣненій, дабы приличествовать другому: сіе и надлежитъ изслѣдовать.

Назвавъ x отрѣзокъ CD (чер. 176 и 177), составленный перпендикуляромъ BD къ основанію AC треуг.-ка ABC, и изобразивъ чрезъ a, b, c бока, противолежащія угламъ A, B, C найдемъ (стр. 292)
$BD^2=c^2-AD^2=a^2-x^2$, $c^2=a^2+AD^2-x^2$ .... (1).
Подставя вмѣсто AD его величину $AC-CD=b-x$ (чер. 176), или $AC+CD=b+x$ (чер. 177), получимъ
$c^2=a^2+b^2-2bx$, или $c^2=a^2+b^2+2bx$..... (2).
Чертежи 176 и 177 суть не прямые; ибо въ одномъ $x=b-AD$, а въ другомъ $x=AD-b$; каждое изъ выраженій (2) прилично только одному изъ чертежей; но урав. (1) принадлежитъ обоимъ, и разница произошла только отъ знака x при подстановкѣ величины AD; сіе показываетъ, что одно изъ уравненій (2) должно происходить отъ другаго, чрезъ перемѣну x на $-x$.

354. Вообще если между величинами a, b, c.... x, составляющими два непрямые чертежа, существуютъ уравненія $X=0$ для одного, и $X'=0$ для другаго, то надлежитъ, чтобы по крайней мѣрѣ одна линія, какъ на пр: a была въ 1-мъ чертежѣ суммою двухъ

(*) *Карно*, изобрѣтатель сей теоріи, изложенной имъ въ *Géométrie de position*, называетъ прямые чертежи *соотвѣтственно прямыми* (correlatives directes), а не прямыя *соотвѣтственно обращенными* (corrélatives inverse). Справтесь съ симъ превосходнымъ твореніемъ.

другихъ b и x, а во 2-мъ чертежѣ ихъ разностью, такъ чтобы въ одномъ $a = b - x$, а въ другомъ $a = b + x$. Сверхъ сего, всегда можно представить себѣ третіе уравн. $Y = 0$, приличное обоимъ чертежамъ, и изъ котораго можно вывести $X = 0$, или $X' = 0$ смотря потому, что подставлять $b + x$ или $b - x$ вмѣсто a.

Но такъ какъ сіи величины a различествуютъ только знакомъ при x, то X и X' должны выводиться одно изъ другаго, чрезъ перемѣну x на $-x$. Тоже самое надлежитъ сказать о каждой не прямой величинѣ, если ихъ будетъ нѣсколько. Покажемъ средство узнавать сіи величины. Ежели будутъ измѣнять положеніе точекъ 2-го чертежа, чтобы сдѣлать оный прямымъ съ 1-мъ, то сравнивая обѣ величины $x = b - a$ и $a - b$, увидятъ, что a бывшее $< b$ должно сдѣлаться $> b$; и какъ измѣненіе производилось постепенно, то a было равно b, а посему x превращался въ нуль.

На пр. если C (чер. 176) двигаясь къ D перейдетъ сію точку, чтобы сдѣлать чертежъ прямымъ съ 177-мъ; то линія CD или x равнялась нулю, когда C проходило чрезъ D.

x можетъ быть $= \frac{K}{a-b}$ для одного чертежа и $\frac{K}{b-a}$ для другаго; въ такомъ случаѣ x дѣлался безконечнымъ. *Итакъ, свойство непрямыхъ величинъ состоитъ въ томъ, что онѣ чрезъ постепенное движеніе частей одного чертежа, не иначе могутъ сдѣлаться прямыми, какъ превращаясь въ семъ хотъ въ нуль или безконечность.*

Слѣд. чтобъ изъ уравненія $X = 0$, *существующаго между линіями* b, c . . . . x *одного чертежа, получить другое* $X' = 0$, *соотвѣтствующее не прямому чертежу, надлежитъ только перемѣнить знаки не прямыхъ величинъ: онѣ узнаются двигая линіи одного*

чертежа, чтобы сдѣлать его прямымъ относительно другаго; при семъ разсматриваютъ, которыя изъ линій b, c, ...x *превращаясь въ нуль или въ безконечность; только сіи послѣднія могутъ быть непрямыми величинами.*

Но изъ сего отличительнаго свойства, не льзя еще заключить, чтобы таковыя линіи были дѣйствительно не прямыя. Надлежитъ сверхъ того, чтобъ отношенія, извлекаемыя изъ двухъ чертежей посредствомъ извѣстныхъ предложеній, могли сравненіемъ оныхъ служить къ распознанію величинъ не прямыхъ, дабы послѣ перемѣнять у нихъ знаки. Такимъ образомъ узнавъ, что $CD = x$, обращается въ нуль (чер. 176), когда C совмѣщается съ D, должно помочь отыскать величины CD, которыя суть $AC - AD$ (чер. 176) и $AD - AC$ (чер. 177); а сіе показываетъ, что x имѣетъ знакъ противный.

375. Приложимъ сію теорію. Въ треугольникѣ ABC (чер. 172 проведемъ чрезъ данную точку D, прямую DF и отыщемъ отношеніе α двухъ треуг.-въ ABC, AEF; положимъ, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; проведемъ DI параллельно AC, и пусть $AI = d$, $DI = f$, $AF = x$. Отношеніе z будетъ $= \frac{AE \times AF}{AC \times AB}$ (чл. 264). Но изъ подобныхъ треуг.-въ AEF, и DIF, $AE = \frac{fx}{x+d}$ ошкуда

$$\alpha = \frac{fx^2}{bc(x+d)} = fx^2 \ldots\ldots (A).$$

Въ семъ уравненіи предполагается, что точка D находится въ углѣ IAC; но ежели она въ D', т. е. внутри треуг.-ка, то получится чертежъ не прямой относительно 1-го; двигая D къ D', DI обращается въ $D'I'$, между тѣмъ какъ α, b, c и f не обращались въ 0 или въ ∞: одно AI, сдѣлавшееся AI', можетъ быть не прямымъ, и въ самомъ дѣлѣ оно таково, ибо $AI = IB - AB$, а $AI' = AB - I'B$. Слѣд. наше урав.

не иначе можно примѣнишь къ сему случаю, какъ перемѣнивъ d на $-d$, т. е. $\alpha bc(x-d)=fx^2$.

Если D' перейдетъ въ D'', то $D'I'$ превратится въ нуль прежде совмѣщенія съ $D''I''$; послѣ чего увѣришся, что $D'I'$ есть величина непрямая и что знакъ при f должно перемѣнишь, между тѣмъ α, b, c, d остаются по прежнему; посему $\alpha bc(d-x)=fx^2$. Сей случай относительно 1-го, заключалъ двѣ не прямыя d и f, кромѣ $I'F$; но сія линія, не входя въ вычисленіе, не подлежала разсмотрѣнію.

Наконецъ, если прямая DF должна пересѣкать $F'AE'$ (чер. 173), то легко увидишь, что двигая DF, дабы, превративъ оную въ DE', AF обращалась въ нуль прежде совмѣщенія съ AF', и что надлежитъ x перемѣнишь на $-x$ въ уравн. (A), отъ чего оно получитъ видъ предыдущаго.

Впрочемъ не трудно разсматривать каждый случай непосредственно, и достигать соотвѣтствующихъ уравненій: излагаемая нами теорія именно служитъ къ набѣжанію безпрестаннаго повторенія вычисленій, и вмѣстѣ доказательствомъ, что одно изъ уравненій вмѣщаетъ всѣ прочія, которыя изъ онаго могутъ получаться одною перемѣною знаковъ. Слѣд соображно духу Алгебры, одно и тоже уравн. будетъ заключать всѣ случаи; надлежитъ только умѣть понимать сей языкъ, для изслѣдованія всѣхъ частностей, представляющихся въ вопросѣ.

336. Такъ какъ всякое уравн. должно опредѣлять величину одной изъ буквъ въ него входящихъ, то легко можетъ случишься, что именно знакъ сей буквы долженствовалъ измѣниться, дабы оно приличествовало предложенному чертежу, когда величина оной будетъ отрицательная, какъ на пр. $x=-a$, чего смыслъ легко понять. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы получить уравн. $X=0$, должно было предположить, что задача рѣшена, и построить чертежъ по услов-

ному состоянію данныхъ и неизвѣстныхъ. Получаемое отрицательное рѣшеніе показываетъ, что предполагаемый чертежъ не соотвѣтствуетъ вопросу, и что при составленіи чертежа и принимая его за основаніе разсужденій, ввели противорѣчащія условія. Если перемѣнимъ x на $-x$, то урав. $X'=0$ будетъ уже принадлежать только чертежу не прямому; и рѣшеніе $x=a$ соотвѣтствуетъ сему чертежу, а не предложенному. И такъ должно двигать точки сего послѣдняго, доколѣ урави. $X'=0$ будетъ соотвѣтствовать оному, обращая разумѣется при семъ движеніи нѣкоторыя буквы въ нуль или ∞. Сему измѣненному чертежу будетъ тогда принадлежать рѣшеніе $x=a$.

Приложимъ сіе разсужденіе къ различнымъ примѣрамъ:

I. Дана точка D (чер. 172) внѣ треуг.-ка ABC, провести прямую DF, такъ, чтобы два треугольника AEF, ABC были въ данномъ отношеніи a. Предполагая D въ углѣ IAC, нашли урав. (A), стр. 394 дающее два рѣшенія, одно положительное, опредѣляющее точку F; другое отрицательное, соотвѣтствующее чер. 173-му, въ коемъ DF' пересѣкаетъ уголъ $F'AE'$; сіе слѣдуетъ изъ вышеизъясненнаго случая, гдѣ x обращенъ въ $-x$ (*).

Чрезъ точку D *провести* DF, *которая бы въ неограниченномъ углѣ* CAB *отсѣкала треуг.* AEF, *равный данному квадрату* q^2. Проведя какую-нибудь

(*) Вотъ различныя задачи того же рода: *отъ даннаго треуг.-ка* ABC *отдѣлить треуг.* AEF, *который бы относился къ данному какъ извѣстныя величины* m и n: 1-е, *прямою проходящею чрезъ вершину* B *или чрезъ точку* F *основанія*, чер. 112 (смотр. чч. 256 и стр. 328).

2-е. *Прямою параллельною основанію* (см. стр. 388).

3-е. *Прямою* EF, *перпендикулярною къ основанію* AB. (чер. 171, стр. 377).

прямую BC, составившій треугольникъ ABC, коего площадь сдѣлаемъ $= r^2$, извѣстному квадрату (чл. 257); Положимъ $r > q$. По условію q и r даны. Слѣд. извѣстное отношеніе α будетъ $= \frac{q^2}{r^2}$, и задача превратится въ предыдущую (*).

II. Дана хорда AD (чер. 168) провести изъ точки O, конца діаметра OB къ ней перпендикулярнаго, прямую OF, такъ чтобъ часть FE оной, заключающаяся между хордою и дугою, была данной длины m. Пусть $AB = a$, $BO = b$, $FE = m$ и $OF = x$; то $OF \times FE = AF \times FD$, или $mx = (a + BF)(a - BF)$: но $BF^2 = x^2 - b^2$; слѣд. $mx = a^2 + b^2 - x^2$, откуда

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + \tfrac{1}{4}m^2)}.$$

Одно изъ сихъ рѣшеній положительное, не представляетъ ни какого затрудненія и легко строится; чтобъ изъяснить другое, перемѣнимъ x на $-x$, получимъ $mx = x^2 - a^2 - b^2 = BF^2 - a^2$; гдѣ предполагается, что $BF > a$ или BD. И такъ будемъ обращать OF до $F'O$; тогда a, b, x остаются прямыми; но когда OF проходитъ чрезъ D, то FE и FD превращаются въ нуль; кромѣ сего $DF = BD - BF$ и $FD = BF' - BD$: посему $F'D$ есть не прямая относительно FD. Равномѣрно и $F'E' = m$; ибо (чл. 221)

(*) Если чрезъ данную точку *проведутъ* прямую, пересѣкающую како́ нибудь многоугольникъ, и отдѣляющую отъ онаго часть, равную квадрату t^2, то продолживъ два бока, пересѣченные сею прямою до ихъ взаимной встрѣчи, и назвавъ буквою A площадь находящуюся внѣ многоугольника и заключающуюся въ всѣхъ углѣ, площадь отдѣленная отъ сего угла будетъ $t^2 + A$; и такъ если *отъ даннаго многоугольника требуется отрѣзать извѣстную площадь* t, то достаточно продолжить какіе-нибудь два бока, и отдѣлить отъ составляемаго ими угла площадь $t^2 + A$. Поступая такимъ образомъ съ каждыми двумя боками получимъ всѣ рѣшенія, не обращая вниманія на тѣ случаи, когда пересѣкающая встрѣчаетъ не самый бокъ, а продолженіе онаго. Можно также вмѣсто даннаго t^2 *требовать, чтобъ отрѣзанная часть многоугольника имѣла къ его площади данное отношеніе* m *къ* n.

$FE = \frac{AF \times FD}{FO}$, гдѣ FD есть не прямая. Слѣд. рѣшеніе, приличное $F'O$, получится перемѣнивъ здѣсь m на $-m$ или x на $-x$.

Итакъ вопросъ допускаетъ два рѣшенія по правую сторону OB, (а посему два и по лѣвую); изъ коихъ одно выражено положительнымъ, а другое отрицательнымъ корнемъ (*). Впрочемъ можетъ случиться, что предложенный вопросъ не допускаетъ не прямыхъ рѣшеній; сіе бываетъ, когда задача требуетъ, чтобъ FE заключалась въ кругѣ, а не внѣ онаго: тогда отрицательныя рѣшенія не имѣютъ значенія. Примѣръ сему видѣли въ чл. 330-мъ.

337. Есть родъ задачъ относящійся къ сей теоріи и заслуживающій особеннаго вниманія.

Предположимъ, что надлежитъ опредѣлить по даннымъ условіямъ точку B (чер 169, на постоянной линіи CB: для сего берутъ произвольную точку A, называемую *началомъ*, и отыскиваютъ разстояніе $AB = x$ между сими двумя точками. Тогда можетъ случиться, что уравн. $X = 0$, заключающее условіе задачи, допускаетъ отрицательное рѣшеніе $x = -a$; требуется изъяснить значеніе онаго.

Прежде видѣли, что $x = a$ соотвѣтствуетъ предложенной задачѣ, предполагая однако же въ оной, что x дѣлается не прямымъ: и такъ, если точка B двигается къ C, чтобы придти въ B', то AB обратится въ нуль, когда B упадетъ въ A; послѣ чего AB сдѣлается не прямою; ибо $AB = CB - CA$ и $AB' = CA - CB'$. Слѣд., если въ задачѣ ни чѣмъ не означено, чтобъ искомая точка находилась по правую сторону начала

(*) Сей примѣръ доказываетъ, что число рѣшеній вопроса не всегда опредѣляется степенью неизвѣстнаго. Чтобы не пропустить ни одного должно измѣнять чертежъ, сравнивая оный со всѣми его не прямыми, оставляя всегда данныя постоянными.

A, що ясно, что разстояніе $x = a$ отложенное отъ A къ B', т. е. въ-лѣво, удовлетворяетъ задачѣ. Видно даже, что отрицательное рѣшеніе $x = -a$, показываетъ несообразность въ уравненіи $X = 0$, происшедшую отъ того, что для составленія сего уравненія, предположили искомую точку въ B, т. е. въ право отъ начала; положеніе противное вопросу, ибо гадательному чертежу, изъ коего вывели урав. $X = 0$, дали видъ не прямой относительно надлежащаго. Сія погрѣшность исправится поставя B въ лѣво отъ A въ B'.

358. Изъ сего слѣдуетъ заключить, что *всякой разъ, когда задача имѣетъ цѣлью опредѣлить на постоянной линіи, разстояніе неизвѣстной точки отъ начала, то надлежитъ опускать знакъ отрицательныхъ рѣшеній получаемыхъ вычисленіемъ, и откладывать величины въ сторону противную той, гдѣ ихъ помыщали при составленіи уравненія.*

Сіе можно было замѣтить въ задачѣ (чл. 329, II), гдѣ также неизвѣстное GI (чер. 162, отложили отъ G къ I'. Также для задачи III, взяли $CD' = CD$ (чер. 165) и D' была новая точка прикосновенія круга съ прямою DD', и проч.

Рѣшимъ еще слѣдующую задачу:

На линіи AC (чер. 169) сыскать точку B', коей разстоянія отъ постоянныхъ точекъ A и C составляютъ произведеніе, равное данному m^2. Пусть $AC = a$, $CB' = x$; то $AB' = a - x$, откуда

$$x(a-x) = m^2 \text{ и } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - m^2}).$$

Легко построить сіе двоякое рѣшеніе (чл. 350); если $m > \frac{1}{2}a$, то оно будетъ мнимое; но изъ сего не слѣдуетъ, что вопросъ заключаетъ несообразность; ибо ошибка можетъ произойти отъ того, что искомой точкѣ B' дали не то положеніе, которое приличествовало ей. И такъ перенесемъ опую въ B, внѣ AC, тогда если $CB = x$, то $AB = x - a$, потомъ

$x'x - a = m^2$, и $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + m^2)}$.

Посему, 1-е. если вопросъ требуетъ, чтобъ искомая точка находилась внѣ AC, то оный всегда возможенъ и имѣетъ два рѣшенія, одно въ B, а другое въ E, первое происходитъ отъ положительнаго корня, а другое отъ отрицательнаго, или $EC = AB$.

2-е. Если вопросъ требуетъ, чтобы точка заключалась между A и C, то оный несообразенъ, доколѣ m не $< \frac{1}{2} AC$, т. е. что наибольшій прямоугольникъ, составляемый изъ двухъ частей AC, есть квадратъ половины оной (чл. 97, 5-е). Особенно надлежитъ замѣтить, что несообразность выраженная знакомъ минусъ, происходитъ именно отъ ложнаго положенія точки B, подобнаго тому, которое насъ доводило обыкновенно до отрицательныхъ рѣшеній; а сіе чрезвычайно объясняетъ изложенную нами теорію.

3-е. Наконецъ, если вопросъ дозволяетъ искомую точку взять между A и C, или внѣ AC, то оный допускаетъ 2 или 4 рѣшенія, смотря потому $\frac{1}{2}a <$ или $> m$. Въ семъ послѣднемъ случаѣ число рѣшеній не опредѣляется одною Алгеброю, или лучше сказать Алгебра даетъ все то, что она должна была дать, ибо она не производитъ ей не принадлежащаго. Задача II, стр. 397 относится къ сему же случаю.

539. Во всякой Геометрической задачѣ, надлежитъ какъ видно, слѣдовать двумъ правиламъ.

1-е. *Всякое уравн. справедливо только для того чертежа, изъ коего оно извлечено, и должно быть съ онымъ не раздѣльно; чтобы приложить оное къ другому чертежу не прямому относительно 1-го, надлежитъ перемѣнить въ немъ знаки у нѣкоторыхъ буквъ, означающихъ данныя величины.*

2-е. *Когда неизвѣстное* x *отрицательное, то опредѣляющее его уравненіе не сообразно въ приложеніи къ прямому чертежу; въ ономъ должно перемѣнить расположеніе частей такъ, чтобы для* x *получилась*

величина положительная. На пр. если длина x *щитается на постоянной прямой, то оную должно отложить въ противную сторону отъ прежней.*

540. Положеніе какой-нибудь точки M на плоскости (чер. 170, опредѣляютъ обыкновенно слѣдующимъ образомъ: берутъ произвольныя двѣ прямыя Ax и Ay, и чрезъ точку M проводятъ имъ параллельныя MQ, MP. Пусть $MQ = x = AP$, называемой *абсциссою*; $PM = y = AQ$, которая есть *ордината* точки M; если сіи линіи даны, то положеніе точки M опредѣлится. Ибо отложивъ $AP = x$, $AQ = y$, искомая точка должна будетъ находиться на линіяхъ PM и QM, параллельныхъ Ay и Ax, слѣд. она будетъ на ихъ пересѣченіи. Если $y = 0$, то точка находится на Ax; а когда $x = 0$, то на Ay; наконецъ для точки A, x и y равны нулю; Ax и Ay называются *осями*, А *началомъ*, x и y *сопряженными* точки M.

Хотя въ самомъ дѣлѣ, ни что не доказываетъ à priori находится ли точка въ углѣ yAx, или въ углахъ yAx', $y'Ax$, или $y'Ax'$, почему длина x можетъ быть отложена въ AP', равномѣрно какъ и y въ AQ'; знакъ что можно быть въ сомнѣніи между четыремя точками M, N, M', N' одинаково удовлетворяющими даннымъ условіямъ; но изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что 1-е, *если точка неизвѣстна*, то вычисленіе опредѣлитъ сопряженныя оной x и y, и смотря по знакамъ опредѣлятъ положеніе точки. Согласимся впредь положительныя $x^{ы}$ считать отъ A въ право, а положительныя $y^{ки}$ отъ A къ верху. Слѣд. для точекъ находящихся въ

Углѣ yAx, *какъ* M, x *и* y *положительныя.*
Углѣ yAx', *какъ* N', x *отрицат., а* y *положительный.*
Углѣ y'Ax, *какъ* M', x *положит., а* y *отрицательный.*
Углѣ y'Ax' *какъ* N', x *и* y *отрицательныя.*

2-е. *Если точка дана*, то уравн полученное отъ условнаго положенія оной, требуетъ только нѣ-

нія нѣкоторыхъ знаковъ съ перемѣною положенія сей точки; и чтобъ избѣгнуть необходимости сохранять чертежъ, соотвѣтствующій уравненію изъ онаго извлеченному, предполагаютъ обыкновенно, что какая-нибудь данная точка имѣетъ положеніе M въ углѣ yAx, дабы таковый чертежъ представлялся самъ собою; въ послѣдствіи же, когда надо будетъ уравненіе приложить къ примѣру, то легко видѣть, должно ли перемѣнить знаки x и y какой-нибудь данной точки.

Уголъ xAy сопряженныхъ большею частію бываетъ *прямой*; въ такомъ случаѣ x и y перпендикулярны къ осямъ и суть разстоянія точки M отъ сихъ линій, чрезъ что всѣ выраженія дѣлаются проще, и построенія удобнѣе.

II. ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

О Синусахъ, Косинусахъ, Тангенсахъ и проч.

341. До сихъ поръ мы опредѣляли неизвѣстныя болѣе въ линіяхъ, чѣмъ въ числахъ; но всякой посвящаетъ, что вѣрность рѣшеній построеніемъ, зависящая отъ совершенства орудій и отъ искусства употребленія оныхъ, не можетъ имѣть желаемой точности, и по сей причинѣ должно предпочитать числовыя рѣшенія. Такъ какъ всѣ прямолинейныя фигуры разлагаются на треугольники, то самыя сложныя *геодезическія* дѣйствія, обращаются при окончательномъ разсмотрѣніи въ рѣшенія треугольниковъ, т. е. въ отысканіе *числовыхъ* величинъ различныхъ частей оные составляющихъ. *Тригонометрія* есть наука такихъ вычисленій.

Необходимо опредѣлить уравненія, связующія углы треугольника съ его боками, дабы по данныхъ нѣкоторымъ его частямъ, умѣть опредѣлить другія. Введеніе угловъ въ вычисленіе требуетъ нѣкоторыхъ приготовленій, ибо ихъ нельзя отнести къ одной единицѣ съ линіями. Замѣчено, что уголъ BCA (чер. 178) опредѣлится, если извѣстно положеніе одной изъ точекъ бока BC относительно другаго AC. Опишемъ изъ верха C произвольнымъ радіусомъ CK, дугу KG; абсцисса CI и ордината IK, перпендикулярныя сопряженныя точки K, опредѣляютъ положеніе оной, а слѣд. и уголъ C; достаточно и одной изъ сихъ величинъ, ибо радіусъ извѣстенъ.

Абсцисса CD (чер. 179) какой-нибудь точки B окружности, называется *косинусомъ* дуги AB; ордината BD есть *синусъ* оной дуги; сіи линіи имѣютъ слѣдующее опредѣленіе: *синусъ дуги есть перпендикуляръ, опущенный изъ одного конца оной, на радіусъ проходящій чрезъ другой ея конецъ. Косинусъ есть разстояніе подошвы синуса отъ центра.*

342. Если къ CA (чер. 178) проведется перпендикуляръ HG, а посему касательная въ точкѣ G, то одна изъ линій GH или CH опредѣлила бы также уголъ C и дугу AG; HG называется *тангенсомъ*, а CH *секансомъ* сей дуги; онѣ не суть какъ въ Геометріи линіи неограниченныя. *Тангенсъ* AT *дуги* AB (чер. 179) *есть отрѣзокъ касательной, провед енной къ концу сей дуги, и заключающійся между радіусами ограничивающими оную. Секансъ* CT *есть радіусъ продолженный до касательной.*

Когда дуга EB опредѣлена, то и пополненіе оной AB извѣстно; слѣд. дугу AB можно опредѣлить по данному синусу GB, тангенсу EM, или секансу CM пополненія BE; сіи линіи называются *косинусомъ*, *котангенсомъ*, *косекансомъ* дуги AB или синусомъ тангенсомъ и секансомъ дуги пополненія.

343. Если радіусъ данъ, то величина угла или дуги зависитъ отъ величины его синуса, или косинуса, или тангенса, или секанса, или котангенса, или косеканса, которые означаются чрезъ sin, cos, tang, sec, cot, cosec. И такъ можно теперь дуги и углы ввести въ вычисленія употребляя для нихъ тоже единицу, какъ и для прямыхъ линій, что и было нашею цѣлью. Но прежде сего сравнимъ *тригонометрическія линіи* между собою, и отыщемъ соединяющія ихъ уравненія, ибо очевидно, что *отъ одной извѣстной, зависятъ другія.*

Изъ прямоугольнаго треуг.-ка CBD, (чер. 179) $CD^2 + BD^2 = CB^2$, CD есть косинусъ, DB синусъ дуги $AB = a$, CB радіусъ R; слѣд:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = R^2 \quad \ldots\ldots (1).$$

Изъ прямоугольнаго треуг.-ка CAT, $CT^2 = CA^2 + AT^2$

$$\sec^2 a = \tang^2 a + R^2 \quad \ldots\ldots (2).$$

Изъ подобныхъ треуг.-въ CBD, CTA

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AT} \text{ и } \frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CT},$$

или

$$\tang a = \frac{R \sin a}{\cos a} \quad \ldots\ldots (3),$$

$$\sec a = \frac{R^2}{\cos a} \quad \ldots\ldots (4).$$

Изъ сего послѣдняго уравненія видно, что *радіусъ есть средній пропорціональный между косинусомъ и секансомъ:* впрочемъ уравненія (1), (2) и (3) достаточно выражаютъ, что треуг.-ки BCD, CTA суть прямоугольные и подобные, посему 4-е есть слѣдствіе трехъ предыдущихъ. И такъ, сихъ четырехъ отношеній не надлежитъ почитать совершенно различными; такових здѣсь только три. Въ семъ можно также увѣриться не посредственно, выводя изъ другихъ какое-нибудь одно чрезъ выключеніе.

344. Таковыя же уравненія существуютъ между синусомъ, косинусомъ, тангенсомъ и секансомъ дуги

EB, пополненія AB. Слѣд. можно перемѣнить синусъ на косинусъ, тангенсъ на котангенсъ, и проч.; но сіи новыя отношенія получаются непосредственно изъ подобныхъ треуг.-въ CBD (или CBG) и CME:

$$\frac{CG}{CE} = \frac{GB}{EM}, \quad \frac{CG}{CB} = \frac{CE}{CM}; \text{ откуда}$$

$$\cot a = \frac{R\cos a}{\sin a} \ldots (5); \text{ и } \operatorname{cosec} a = \frac{R^2}{\sin a} \ldots\ldots (6),$$

помноживъ уравн. 5 на 5, или сравнивъ два треуг.-ка CTA и CME, найдемъ, что *радіусъ есть средній пропорціональный между тангенсомъ и котангенсомъ* или

$$\operatorname{tang} a \times \cot a = R^2 \ldots . (7).$$

Наконецъ изъ прямоугольнаго треуг.-ка CME

$$CM^2 = CE^2 + EM^2, \text{ или } \operatorname{cosec}^2 a = R^2 + \cot^2 a \ldots (8).$$

345. Сіи 8 уравненій, изъ коихъ только 5 различныхъ, служатъ для опредѣленія $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tang} a$, $\cot a$, $\sec a$. $\operatorname{cosec} a$, по одному изъ нихъ извѣстному. Для выключенія достаточно простаго вычисленія. На пр: изъ (1) опредѣлится синусъ, когда извѣстенъ косинусъ, и обратно; ибо $\sin a = \sqrt{(R^2 - \cos^2 a)}$, и $\cos a = \sqrt{(R^2 - \sin^2 a)}$; также изъ (2) опредѣлится тангенсъ, когда извѣстенъ секансъ, и обратно, и пр.

346. Между сими отношеніями, замѣтимъ слѣдующее весьма полезное. Найдемъ косинусъ по данному тангенсу. Изъ (4) получится $\cos a = \frac{R^2}{\sec a}$; и какъ изъ (2) $\sec a = \sqrt{(R^2 + \operatorname{tang}^2 a)}$, слѣд.

$$\cos a = \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + \operatorname{tang}^2 a)}} \ldots\ldots (9);$$

наконецъ изъ (5), $R\sin a = \cos a \times \operatorname{tang} a$, посему

$$\sin a = \frac{R\operatorname{tang} a}{\sqrt{(R^2 + \operatorname{tang}^2 a)}} \ldots\ldots (10).$$

AD называется *обращеннымъ синусомъ* (sinus-versus) дуги AB, откуда

$$\text{sin-vers. } a = R - \cos a$$

347. Подъ $\sin a$, $\cos a \ldots$, должно подразумѣвать синусъ, косинусъ... дуги, коей длина есть a, при посполитомъ радіусѣ $= R$; посему длина сія зависитъ отъ отношенія дуги a, къ окружности, и опредѣленіе оной по видимому требуетъ вычисленія; но когда употребимъ дуги для измѣреній угловъ, то радіусъ остается совершенно произвольнымъ; и какъ подобныя дуги пропорціональны радіусамъ (чл. 169, 3-е) то въ вычисленія входитъ уже не самая длина a дуги, но отношеніе оной къ радіусу. Для одного и того же угла, синусы возрастаютъ также пропорціонально радіусамъ (чер. 178), ибо $\frac{KI}{CI} = \frac{AB}{CA}$. Отношеніе синуса къ радіусу, называется *натуральнымъ синусомъ*; его величина равна синусу подобной дуги взятому въ кругѣ, коего радіусъ есть *единица*, ибо въ такомъ случаѣ $\sin a$ и $\frac{\sin a}{R}$ одно и тоже. Изъ сего заключимъ 1-е, когда радіусъ произвольный, что большею частію бываетъ, то положимъ $R = 1$ для сокращенія вычисленій; получимъ

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,\ \operatorname{tang}^2 a + 1 = \sec^2 a,\ \operatorname{tang} a \cot a = 1,$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a},\ \sec a = \frac{1}{\cos a},\ \cot a = \frac{\cos a}{\sin a},\ \text{и проч.}$$

2-е. По предположеніе $R = 1$ можетъ быть введено только въ случаѣ произвольнаго радіуса; если же пожелаютъ возвратить формуламъ общій видъ, гдѣ радіусъ R имѣетъ опредѣленную величину, то $\sin a$, $\cos a \ldots$, надлежитъ замѣнить $\frac{\sin a}{R}$, $\frac{\cos a}{R} \ldots$, или ввести R въ приличествующихъ ему степеняхъ, дабы произвести однородность (чл. 322).

3-е. Когда извѣстна числовая величина $\sin a$ синуса дуги a, при радіусѣ R, то синусъ подобной дуги a', въ кругѣ имѣющемъ радіусомъ R', найдется помноживъ величину синуса a на отношеніе радіусовъ; ибо

$$\frac{\sin a}{R} = \frac{\sin a'}{R'}, \text{ слѣд. } \sin a' = \frac{R'}{R} \times \sin a.$$

4-е. *При измѣреніи угловъ, употребляютъ не самыя дуги, но отношеніе ихъ къ четверти круга;* посему подъ $\sin a$, разумѣютъ синусъ дуги, коей число градусовъ есть a. (См. чл. 169, 4-е).

348. Дуга, коей длина есть a, выражается въ градусахъ и десятичныхъ частяхъ чрезъ (a^0), въ минутахъ чрезъ $(a'$, въ секундахъ чрезъ (a''), найдемъ отношенія между сими величинами. Такъ какъ радіусъ равенъ 1, то длина полуокружности (стр. 316).

$$\pi = 3{,}1415926536, \quad \log \pi = 0{,}49714987;$$

π есть длина 180^0, или $10800'$, или $648000''$; слѣд. $180^0 : \pi :: (a^0) : a$, откуда $\pi(a^0) = 180.a$; также..... $\pi a' = 10800.a$, $\pi(a'') = 648000.a$; посему раздѣливъ на π и положивъ

$$r = 57^0{,}29578, \quad \log r = 1{,}75812264,$$
$$r' = 3437',746, \quad \log r' = 3{,}53627589,$$
$$r'' = 206264'',8, \quad \log r'' = 5{,}31442514,$$

получимъ $(a^0) = ra$, $(a') = r'a$, $(a'') = r''a$.

Посредствомъ сихъ уравненій найдется длина а *дуги, коей величина извѣстна въ частяхъ окружности, и обратно.*

Положивъ $a = 1$, получимъ $a^0 = r$; слѣд. *r есть число градусовъ дуги равной радіусу*; r' и r'' суть выраженія сей дуги въ минутахъ и секундахъ; если радіусъ наложится по окружности, то онъ совмѣстится съ дугою, имѣющую (a^0) градусовъ, или $(a'$ минутъ, или (a'') секундъ. Возьмемъ пошомъ дугу одного градуса, или $(a^0) = 1$, получимъ

$r = \frac{1}{\text{дугу } 1^0}$; такимъ же образомъ $r' = \frac{1}{\text{дугу } 1'}$; $r'' = \frac{1}{\text{дугу } 1''}$

Такъ какъ дуга въ $1'$ и въ $1''$ чрезвычайно мала, то можно безъ значительной погрѣшности, замѣнить оную ея синусомъ (чл. 362), посему

$$r' = \frac{1}{\sin 1'}; \; r'' = \frac{1}{\sin 1''}.$$

349. До сихъ поръ принятая дуга AB была $<$ четверти окружности (чер. 179; станемъ двигать точку B отъ A къ $EHAK\ldots$, чтобъ описать оною цѣлую окружность, и изслѣдуемъ измѣненія синуса и косинуса. Въ точкѣ A, синусъ $= 0$, косинусъ $= R$. По мѣрѣ возрастанія дуги AB, синусъ увеличивается; а косинусъ уменьшается до точки E; синусъ четверти окружности AE равенъ R, а косинусъ нулю.

Если дуга болѣе 45^0 приема шестидесятинаго раздѣленія круга, какъ на пр. дуга въ 53^0, коей пополненіе есть 37^0, то синусъ одной изъ сихъ дугъ, есть косинусъ другой: слѣд. имѣя таблицы синусовъ и косинусовъ до 45^0, столбецъ косинусовъ будетъ также принадлежать синусамъ дугъ пополненія, которыя болѣе 45^0. Въ таблицахъ сіи пополненія означаются.

Когда дуга болѣе $AE = 90^0$, то синусы уменьшаются, а косинусы возрастаютъ, на пр. для дуги AH изъ равныхъ треуг.-въ $HIC = BC'D$ видно, что $HI = BD$: слѣд. *синусъ дуги равенъ синусу ея пополненія*. Равномѣрно и для косинуса, ибо $IC = C'D$; только когда дуга $> 90^0$, то косинусъ будетъ отрицательный (чл. 339). Для полуокружности AEA' синусъ $= 0$, косинусъ $= -R$.

Изъ сего видно, что за 90^0, синусы и косинусы получаютъ прежнія величины, такъ что синусъ 137^0 равенъ синусу 43^0 дуги дополненія, который можно далѣе замѣнить равнымъ ему косинусомъ 47^0; $\sin 137^0 = \sin 43^0 = \cos 47^0$; слѣд. *когда дуга болѣе* 90^0, *то достаточно отнять* 9 *отъ десятковъ и синусъ перемѣнить на косинусъ*. Сіе замѣчаніе особенно полезно, когда дуга заключаетъ также минуты и секунды.

$$\cos 137^0\,17'\,32'' = -\sin 47^0\,17'\,32''.$$

Касательно прочихъ тригонометрическихъ линій, можно такимъ же образомъ изслѣдовать на чертежѣ

измѣненія и знаки ихъ; но удобнѣе прибѣгнуть къ уравненіямъ 3, 4, 5, 6, ибо предъ симъ найдены знаки синуса и косинуса. Посему

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = R$, производятъ $\tang 0 = 0$, $\sec 0 = R$, $\cot 0 = \infty$,

$\sin 90^0 = R$, $\cos 90^0 = 0$, ... $\tang 90^0 = \infty = \sec 90^0$, $\cot 90 = 0$.

Въ первой четверти окружности $\tang a$, $\sec a$, возрастаютъ вмѣстѣ съ a; $\cot a$ уменьшается; знаки вездѣ положительные.

Во второй четверти $\tang a$, $\sec a$ уменьшаются, $\cot a$ возрастаетъ вмѣстѣ съ дугою a, $\tang a$ и $\cot a$ отрицательные. Посему, какъ и выше видно, $\tang 137^0 = -\cot 47^0$, $\cot 137^0 = -\tang 47^0$.

Такъ какъ во всѣхъ четырехъ четвертяхъ повторяются тѣже величины синуса и косинуса, слѣд. *всякая дуга болѣе четверти окружности, имѣетъ синусъ, косинусъ, тангенсъ ..... тотъ же самый, какъ и дуга уменьшенная столько разъ* 180^0, *сколько возможно;* надлежитъ только обращать вниманіе на знаки, которые для синуса и косинуса извѣстны, и служатъ для опредѣленія прочихъ. И такъ

$\sin 257^0 = -\sin 77^0$, $\tang 645^0 = -\tang 103^0 = -\cot 13^0$.

Сіи различныя предложенія, выражаются нижеслѣдующимъ образомъ: для дуги

$90^0 + a$ ... $\sin = \cos a$, $\cos = -\sin a$, $\tang = -\cot a$.

$180^0 + a$ ... $\sin = -\sin a$, $\cos = -\cos a$, $\tang = \tang a$.

$270^0 + a$ ... $\sin = -\cos a$, $\cos = \sin a$, $\tang = -\cot a$.

Если дуга болѣе 360^0, то надлежитъ прежде всего вычесть всѣ окружности. Теперь ясно, почему таблицы синусовъ, косинусовъ ..., не простираются не только далѣе четверти окружности, но даже осьмой части оной.

550. Когда дуга извѣстна, то ея синусъ, косинусъ ..., также извѣстны; обратное сему не существуетъ, такимъ образомъ синусъ BD (чер. 179) принадлежитъ не только дугѣ AB, но также и дополненію оной AH, и симъ дугамъ AB и AH сложеннымъ съ какимъ-нибудь

числомъ окружностей. Всѣ сіи дуги производятъ только два угла, служащіе другъ другу дополненіемъ. Тоже самое скажемъ для косинусовъ; и такъ во всякомъ случаѣ, когда вычисленіе опредѣляетъ sin или cos...., должно ожидать въ рѣшеніи два угла; и оставшемся помочь исключить тотъ, который не удовлетворяетъ задачѣ.

351. Полагая, что дуга AF и AB имѣютъ противные знаки, очевидно (стр. 400), что $\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$, $\operatorname{tang}(-a) = -\operatorname{tang} a$....

Общія формулы.

352. Рѣшеніе треугольниковъ заключается въ нѣкоторомъ постоянномъ числѣ уравненій, между боками и углами. Найдемъ сіи уравненія.

Продолживъ BD (чер. 179) получимъ $BD = \frac{1}{2}BF$; слѣд. *синусъ какой-нибудь дуги, равенъ половинѣ хорды двойной дуги.*

Если линія BF равна радіусу, то она будетъ бокъ правильнаго вписаннаго шестиугольника (пл. 236); а BAF шестая часть окружности, и BA третья AE. Слѣд. *синусъ третьей части прямаго угла, равенъ полурадіусу.* Изъ уравненій 1, 3, 5 получимъ

$$\sin\tfrac{1}{3}\text{прям. угла} = \tfrac{1}{2}R,\quad \cos\tfrac{1}{3}\text{прям. угла} = R\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{3}\text{прям. уг.} = \frac{R}{\sqrt{3}},\quad \cot\tfrac{1}{3}\text{прям. уг.} = R\sqrt{3};$$

$\sin\frac{2}{3}$ прямаго угла также извѣстенъ, ибо $\cos\frac{2}{3}$ прямаго угла $= \sin\frac{1}{3}$ прям. угла: ошкуда

$$\sin\tfrac{2}{3}\text{прям. угла} = \tfrac{1}{4}R\sqrt{3},\quad \cos\tfrac{2}{3}\text{прям. угла} = \tfrac{1}{2}R,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{2}{3}\text{прям. угла} = R\sqrt{3},\quad \cot\tfrac{2}{3}\text{прям. угла} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

353. Когда дуга AB (чер. 179) въ 45^0, или равна половинѣ AE, то треуг. CTA равнобедренный; слѣд.

$AT = AC$, или *тангенсъ* 45^0 *равенъ радіусу*. Посему (чл. 346)

$\text{tang } 45^0 = R = \cot 45^0$, $\cos 45^0 = \frac{1}{2}R\sqrt{2} = \sin 45^0$;
$\text{tang } 135^0 = -R = \cot 135^0$, $\sin 135^0 = \frac{1}{2}R\sqrt{2} = -\cos 135^0$.

554. Пусть CAB (чер. 178) будетъ треугольникъ прямоугольный въ A; если изъ вершины острого угла C, радіусомъ $CK = 1$ опишутъ дугу KG и проведутъ синусъ KI и тангенсъ HG, то CI будетъ косинусъ C; но изъ подобныхъ треугольниковъ CKI, CHG, CAB:

$$\frac{CK}{CI} = \frac{CB}{CA}, \quad \frac{CK}{KI} = \frac{CB}{AB}, \text{ и } \frac{CG}{GH} = \frac{CA}{BA};$$

ошкуда $CA = CB \times \cos C$, $BA = CB \times \sin C$
и раздѣливъ 2-е на 1-е получимъ $BA = CA \times \text{tang } C$.

Слѣд., 1-е. *Катетъ равенъ произведенію гипотенузы на косинусъ или составляемаго острого угла ... A).*

2-е. *Катетъ равенъ произведенію тангенса противолежащаго острого угла на другой катетъ ... B).*

Означимъ углы чрезъ A, B, C, а соотвѣтственные противолежащіе имъ бока чрезъ a, b, c. И такъ a, будучи гипотенуза, $A = 90^0$

$$b = a \cos C, \; c = a \cos B = a \sin C \; \ldots \; A,$$
$$c = b \text{ tang } C \; \ldots \; B,$$

555. Если изъ угла B (чер. 176) какого-нибудь треугольника ABC, опустится перпендикуляръ BD, то уголъ B раздѣлится на два угла, служащіе соотвѣтственными пополненіями A и C. Изъ вышенайденныхъ предложеній получимъ $BD = AB \times \sin A$, $BD = BC \times \sin C$, ошкуда $c \sin A = a \sin C$; слѣд.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \; \ldots \; (C);$$

ибо перпендикуляръ можно опустить изъ угла C или A. И такъ, *во всякомъ треугольникѣ, синусы его угловъ пропорціональны противолежащимъ бокамъ.*

Назвавъ x отрѣзокъ DA (чл. 218, получимъ ..... $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$; но изъ прямоуг. треуг.-ка BDA,

$DA = BA \times \cos A$, или $x = c \cdot \cos A$; слѣд.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \ldots\ldots\ldots (D).$$

Если перпендикуляръ BD (чер. 177, падаетъ внѣ треуг.-ка, то $-2bx$ должно перемѣниться на $+2bx$. Но такъ какъ въ семъ случаѣ уг. BCA тупой и косинусъ онаго отрицательный, то знакъ количества $-2bc \cos A$ сдѣлается самъ собою положительнымъ; слѣд. выведенное урав. принадлежитъ всѣмъ случаямъ (чл. 339).

Уравненія A и B служатъ для рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ, а C и D для косоугольныхъ (см. чл. 364).

356. Возьмемъ двѣ дуги (чер. 180) $AB = \alpha$, $BD = \beta$; отыщемъ синусы и косинусы ихъ суммы AD и ихъ разности AK, по извѣстнымъ синусамъ и косинусамъ отъ α и β. Проведемъ для сего хорду DK, въ срединѣ I которой, радіусъ CB перпендикуляренъ. Пошлемъ EI, KH параллельныя AC, и перпендикуляры DP, IG и KO; DP есть синусъ дуги $AD = \alpha + \beta$; AO есть синусъ отъ $AK = \alpha - \beta$; косинусы оныхъ дугъ суть CP и CO; задача состоитъ въ опредѣленіи сихъ четырехъ неизвѣстныхъ величинъ.

Очевидно, что $DE = EH$; слѣд. сумма DE и IG есть $IG + DE$, или. . . . . $DP = \sin(\alpha + \beta)$,
разность $IG - DE = HP$, или . . . . $KO = \sin(\alpha - \beta)$;
и такъ какъ EI есть половина HK,
то $PG = GO = EI$, слѣд. сумма CG
и EI будетъ . . . . . $CO = \cos(\alpha - \beta)$,
а разность ихъ. . . . . $CP = \cos(\alpha + \beta)$;
посему $\sin(\alpha \pm \beta) = IG \pm DE$, $\cos(\alpha + \beta) = CG + EI$.

Для опредѣленія IG, DE, CG, EI остается только урав. A приложить къ прямоугольнымъ треугольникамъ CIG, DEI, гдѣ уголъ $EDI = \alpha$: найдемъ, что $IG = CI \times \sin\alpha$, $DE = DI \cos\alpha$; но $DI = \sin\beta$ и $CI = \cos\beta$; и такъ

$$IG = CI \times \sin\alpha = \sin\alpha \cos\beta,$$
$$DE = DI \times \cos\alpha = \sin\beta \cos\alpha;$$

также $$CG = CI \times \cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta,$$
$$EI = DI \times \sin\alpha = \sin\alpha\sin\beta;$$
ошкуда $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \ldots\ldots (E),$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \ldots\ldots (F).$$

Сіи четыре уравненія весьма часто употребляются. Еслибы радіусъ, вмѣсто 1, былъ $= R$, то надлежало бы только во 2-хъ членахъ поставить R знаменателемъ (чл. 347, 2-е).

357. Положимъ въ сихъ уравненіяхъ $\alpha = \beta$, принимая верхній знакъ, получимъ

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \ldots\ldots\ldots (G),$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ldots\ldots (H).$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

подставя $1 - \cos^2\alpha$, вмѣсто $\sin^2\alpha$. Таковы величины синуса и косинуса двойной дуги α (*).

358. Если въ сихъ уравненіяхъ предположимъ $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ данными, а $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ неизвѣстными, то ихъ должно опредѣлить посредствомъ выключенія. Но чтобы избѣгнуть происходящаго отъ сего сложнаго вычисленія, употребляютъ вмѣсто 1-го уравненія, $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$; тогда, приложивъ къ оному (H) или вычтя, получатъ

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha, \quad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha.$$

Или обративъ 2α въ α, что допускается, найдутъ

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)} \ldots (I),$$

уравненія, опредѣляющія синусы и косинусы половинной дуги. Формула стр. 405 сдѣлается такимъ обра-

---

(*) Чтобъ отыскать синусъ и косинусъ 3α, должно положить $\beta = 2\alpha$, отъ чего $\sin 3\alpha = \sin\alpha.\cos 2\alpha + \sin 2\alpha.\cos\alpha$, $\cos 3\alpha$ и проч.; но подставя вмѣсто $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ ихъ величины, получимъ $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Очевидно, что рѣшивъ сіи уравненія относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, получили бы синусъ и косинусъ трети дуги; такимъ же образомъ опредѣлятся $\sin$ и $\cos$ 4α и четверти α, и проч. Смотри въ-слѣдъ за симъ чл. 358.

зомъ удобнымъ для логариѳмическихъ вычисленій

$$\text{sin-vers. } \alpha \quad 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha.$$

359. Раздѣлимъ уравненія E и F одно на другое, будетъ

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}.$$

Но раздѣливъ оба члена 2-й части на $\cos\alpha\cos\beta$ и замѣнивъ, что $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, получимъ (*)

$$\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha \pm \text{tang}\,\beta}{1 \mp \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta} \quad \ldots\ldots \quad K),$$

т. е. выраженіе тангенса суммы или разности двухъ дугъ. Если $\alpha = \beta$, что для двойной дуги

$$\text{tang}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad L);$$

раздѣливъ уравненія I) одно на другое, получатъ

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots \quad M).$$

360. Сложивъ и вычтя уравненія E, получимъ (**)

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta.$$

(*) Также найдемъ, что $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$.

Если положимъ $\alpha = 45^0$, и какъ $\text{tang}\,45^0 = 1$, то

$$\text{tang}(45^0 \pm \beta) = \frac{1 \pm \text{tang}\,\beta}{1 \mp \text{tang}\,\beta}.$$

Такимъ же образомъ изъ уравненій E и F получимъ

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta};$$

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \mp \beta)} = \frac{\cot\beta \pm \cot\alpha}{\cot\alpha\,\cot\beta \mp 1} = -\frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 \pm \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta};$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta - \text{tang}\,\alpha}{\cot\beta + \text{tang}\,\alpha} = \frac{1 - \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}.$$

(**) Повторивъ тоже вычисленіе надъ уравненіями E и F, соединяя ихъ по два, произойдутъ различныя формулы мало употребляемыя, исключая тотъ случай, когда суммы и разности sin и cos замѣняютъ произведеніями и частными, чтобы приспосо-

Раздѣливъ сіи формулы одну на другую и положивъ для краткости $\alpha+\beta=C$ и $\alpha-\beta=B$, найдемъ, что стр. 167

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(C+B),\quad \beta=\tfrac{1}{2}(C-B);$$

слѣд. $$\frac{\sin C+\sin B}{\sin C-\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\tang\alpha}{\tang\beta}=\frac{\tang\tfrac{1}{2}(C+B)}{\tang\tfrac{1}{2}(C-B)};$$

бавъ вычисленія къ логариѳмамъ. (См. Introduction d'Euler à l'Analyse des inf.)

$$\sin A+\sin B=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B),$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B),$$
$$\cos B-\cos A=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Положивъ въ 1-мъ $A=90^0$, а въ другихъ двухъ $B=0$, получимъ

$$1+\sin B=2\sin(45^0+\tfrac{1}{2}B)\cos(45^0-\tfrac{1}{2}B)=2\sin^2(45^0+\tfrac{1}{2}B);$$
$$1-\sin B=2\cos^2(45^0+\tfrac{1}{2}B)=2\sin^2(45^0-\tfrac{1}{2}B);$$
$$1+\cos A=2\cos^2\tfrac{1}{2}A;\qquad 1-\cos A=2\sin^2\tfrac{1}{2}A.$$

Помноживъ между собою уравненія E и F получимъ по приведеніи,

$$\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A=\sin(A+B)\times\sin(A-B),$$
$$\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\times\cos(A-B).$$

Совершивъ различныя дѣленія, найдемъ

$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\tang\tfrac{1}{2}(A+B);\quad \frac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\tfrac{1}{2}(A+B);$$
$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\tfrac{1}{2}(A-B);\quad \frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=\tang\tfrac{1}{2}(A-B);$$
$$\frac{\cos A+\cos B}{\cos A-\cos B}=-\cot\tfrac{1}{2}(A+B)\cot\tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\frac{1+\sin B}{1-\sin B}=\tang^2(45^0+\tfrac{1}{2}B);\quad \frac{1+\cos A}{1-\cos A}=\cot^2\tfrac{1}{2}A;$$
$$\frac{1+\sin B}{1+\cos A}=\frac{\sin^2(45^0+\tfrac{1}{2}B)}{\cos^2\tfrac{1}{2}A};\quad \frac{1-\sin B}{1-\cos B}=\frac{\sin^2(45^0-\tfrac{1}{2}B)}{\sin^2\tfrac{1}{2}B};$$
$$\tang A\pm\tang B=\frac{\sin A}{\cos A}\pm\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A\cos B\pm\sin B\cos A}{\cos A\cdot\cos B};$$
$$\tang A\pm\tang B=\frac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cdot\cos B};\quad \cot A\pm\cot B=\frac{\sin(B\pm A)}{\sin A\cdot\sin B};$$
$$\tang A\pm\cot B=\frac{\pm\cos(A\mp B)}{\cos A\cdot\sin B};\quad \cot A\pm\tang B=\frac{\cos(A\mp B)}{\sin A\cdot\cos B}.$$

Прежде видѣли (чл. 355, чер. 178), что $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$, ошкуда (чл. 73, 2-е)

$$\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{c + b}{c - b},$$

сверхъ сего, такъ какъ $A + B + C = 180^0$, то $\frac{1}{2}(C + B) = 90^0 - \frac{1}{2}A$, и $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C + B) = \cot\frac{1}{2}A$: слѣд. наконецъ

$$\frac{c + b}{c - b} = \frac{\cot\frac{1}{2}A}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C - B)} \quad \ldots\ (N).$$

Составленіе таблицъ синусовъ, косинусовъ . . .

361. До сихъ поръ мы не дѣлали ни какого употребленія изъ сихъ формулъ; а чтобъ онѣ могли служить къ рѣшенію треугольниковъ, надлежитъ сначала опредѣлить синусы данныхъ угловъ, дабы ввести величины оныхъ въ наши уравненія; или если сіи уравненія опредѣляютъ углы, то надо умѣть находить дугу по данному синусу. Посему, необходимо составить таблицы синусовъ, косинусовъ . . . . , опредѣляющія сіи линіи по извѣстнымъ дугамъ, и обратно.

И такъ представимъ себѣ, что раздѣливъ $\frac{1}{4}$ окружности на градусы, минуты . . . . , а радіусъ на произвольное число равныхъ частей, нашли наконецъ сколько каждый sin, cos . . . . . содержитъ таковыхъ частей или единицъ; и что сіи числа написали противъ соотвѣтствующихъ дугъ; такимъ образомъ составятся таблицы, содержащія въ 1-мъ столбцѣ мѣру дугъ; во 2-мъ синусы, въ 3-мъ косинусы . . . . Изъ уравненій 1, 3, 5 видно, что по извѣстнымъ синусамъ, легко опредѣлить косинусы, тангенсы . . . , а посему и надлежитъ сначала заняться изысканіемъ синусовъ: но извѣстно (чл. 349), что оное должно простираться только до 90^0, ибо далѣе сего тѣже величины повторяются. Слѣд. надлежитъ вычислить синусы и косинусы всѣхъ дугъ $< 45^0$, полагая $\frac{1}{4}$ окружности раздѣленную на градусы, минуты . . . .

Первое урав. чл. 360, найденное чрезъ сложеніе уравненій *b*, превратившись, положивъ $\alpha = mx$, $\beta = x$, въ

$$\sin(m+1)x = 2\cos x \cdot \sin mx - \sin(m-1)x,$$
$$\cos(m+1)x = 2\cos x \cdot \cos mx - \cos(m-1)x.$$

Пусть дуги слѣдуютъ порядку x, $2x$, $3x \ldots (m-1)x$, mx, $(m+1)x \ldots$, и x есть *наименьшая дуга таблицы;* изъ уравненій нашихъ видно, что если z и y суть синусы или косинусы двухъ послѣдовательныхъ дугъ $(m-1)x$ и mx, то sin или cos слѣдующей дуги $(m+1)x$ есть $2py - z$. Слѣд. *каждый членъ въ ряду синусовъ и косинусовъ зависитъ отъ двухъ ему предыдущихъ и получится, помноживъ оные на* $2p$ *и* -1, *и потомъ сложивъ.* Здѣсь p означаетъ $\cos x$. (Смот. чл. 542).

362. Возьмемъ дугу $AC = CB = AL$ (чер. 97), и проведемъ хорду AB и касательныя LE, CE; извѣстно (чл. 160), что

хорда $AB <$ дуги ACB, $LEC >$ дуги LAC;

откуда AI или $\sin AC <$ дуги AC, EC или $\operatorname{tg} AC >$ дуги AC.

Длина дуги $< 90^0$, *заключается между длинами своего синуса и тангенса;* но (см. урав. (3), стр. 404) $\frac{\sin x}{\operatorname{tang} x} = \frac{\cos x}{R}$, и какъ здѣсь 2-я часть съ уменьшеніемъ x, безпрестанно приближается къ единицѣ; слѣд. *предѣлъ 1-й части будетъ также единица;* т. е. *что синусъ, дуга и тангенсъ безпрестанно приближаются къ равенству* и дуга пребываетъ среднею величиною.

Посредствомъ сего правила можно *вычислить синусъ наименьшей дуги въ таблицахъ;* ибо какъ $\operatorname{tang} x$ или $\frac{\sin x}{\cos x} > x$, то $\sin x > x \cdot \cos x$.

Но $1 > \cos x$, слѣд. $\cos x > \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, и тѣмъ болѣе (à fortiori) $\cos x > 1 - x^2$, ибо какъ $\sin x < x$, то и $\sin^2 x < x^2$. Посему, подставя сіе въ 1-е неравенство, найдемъ, что

$$\sin x > x - x^3 \text{ и } < x.$$

Чтобы вычислить величину x, которая есть опредѣленная дробь полуокружности π, а потомъ $x - x^3$, возьмемъ $\pi = 3{,}1415926536$ и $\log \pi = 0{,}49714987$; какъ $\sin x$ заключается между найденными двумя предѣлами, то общія десятичныя, будутъ приближенною величиною синуса x, когда радіусъ $= 1$; и если x взять довольно малымъ, то приближеніе можетъ простираться до желаемой степени, ибо разница между $\sin x$, x и $\operatorname{tang} x$ становится безпрестанно менѣе, $\sin x = a$. Кромѣ сего

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{(1+a)(1-a)} = p;$$

слѣд. производитель $2p$ извѣстенъ; и взявъ сначала $\sin 0 = 0$, $\sin x = a$, и $\cos 0 = 1$, $\cos x = p$, легко по выраженію $2py - z$, вычислить постепенно синусы и косинусы дугъ $2x$, $3x$, $4x$....

На прим: если $x = 30'$, то 180-я часть четверти окружности, или $x = 0{,}008726646$, $x^3 = 0{,}000000665$, $x - x^3 = 0{,}00872598$; такимъ образомъ $\sin 30' = 0{,}008726$. Если таблица вычислена изъ минуты въ минуту до 6-ти десятичныхъ знаковъ, то всѣ синусы дугъ $< 30'$ принимаются равными самой дугѣ; синусы $1'$, $2'$, $3'$ будутъ $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$..., десятичной дроби $0{,}008726$. Касательно же дугъ $> 30'$ найдутъ, что $p = \cos 30' = \sqrt{1{,}008726 \times 0{,}991274}$, или $0{,}999962$. Производитель $2p$ будетъ $2 - 0{,}00008$; посему легко вычислить и прочія числа таблицы.

Вообще, не иначе можно принять $x = \sin x$, какъ когда въ сохраняемыхъ десятичныхъ знакахъ x^3, не находится цыфръ, имѣющихъ значеніе. Если оныхъ на пр. 8, то надлежитъ, чтобы 8-мь 1-хъ цыфръ x^3 были нули; и въ такомъ случаѣ ясно, что не вычисляя x^3 надо будетъ взять дугу въ $10'$.

Впрочемъ число десятичныхъ знаковъ всегда берется болѣе сохраняемаго, дабы избѣгнуть накопляющихся ошибокъ и невѣрности въ послѣднихъ цыфрахъ. Необходимо также при составленіи таблицъ мѣстами

повѣрять получаемыя величины выраженіями $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin 2\alpha$, или вычисляя напередъ тѣмъ же способомъ синусы отъ градуса до градуса, или иначе. Въ послѣдствіи покажемъ скорѣйшія средства находить величины синусовъ, косинусовъ...; но и сей достаточенъ для нашего предмета.

363. Для удобности въ вычисленіяхъ, предпочитаютъ составлять таблицы не изъ величинъ вычисленныхъ такимъ образомъ, но изъ ихъ логарифмовъ; такъ какъ синусы менѣе радіуса, то надлежитъ, для избѣжанія отрицательныхъ логарифмовъ, раздѣлить оный на такое число единицъ, чтобы синусъ наименьшей дуги таблицъ былъ > 1 (чл. 91, I). Въ таблицахъ Каллежа, дуги возрастаютъ $10''$-ми, а логарифмъ радіуса есть 10, ($R = 10$ билліонамъ).

Слѣдственно, вычисляя какое-нибудь алгебраическое выраженіе, въ которомъ радіусъ принятъ $= 1$, должно вводить въ оное степени R, уничтожившагося отъ предположенія $R = 1$ (стр. 406); а потомъ взять таблицы, въ коихъ $R = 10$. Можно также оставлять $R = 1$ и *вычитать* 10 *изъ всѣхъ логарифмовъ, синусовъ, косинусовъ*...., отъ чего войдутъ отрицательныя характеристики. На пр. $\log\sin 10^0 = 1{,}23967\ldots$ вмѣсто $9{,}23967\ldots$; $\log\operatorname{tang} 1^0 = 2{,}2419\ldots$ вмѣсто $8{,}2419\ldots$. Сіи отрицательныя части не имѣютъ никакой неудобности къ употребленію оныхъ легко можно привыкнуть. (См. стр. 154).

Рѣшеніе треугольниковъ.

364. I. Треугольники прямоугольные. Всѣ прямоугольные треугольники можно рѣшить посредствомъ двухъ уравненій (A и B), ибо въ оныхъ заключаются катеты b, c, гипотенуза a и уголъ C; по даннымъ двумъ величинамъ изъ сихъ четырехъ, можно опредѣлить двѣ прочія. Выключивъ C, получаютъ

также урав. $a^2 = b^2 + c^2$, столь часто употребляемое. Положимъ радіусъ $= R$ (чл. 347) въ уравненіяхъ A, ($\log R = 10$).

$$Rb = a \cdot \cos C \ldots\ldots (1),$$
$$Rc = b \cdot \operatorname{tang} C \ldots\ldots (2),$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots (3);$$

при семъ можетъ встрѣтиться только два случая (*):

1-е. *Даны одинъ изъ острыхъ угловъ* C *и бокъ.* Прочіе два угла извѣстны, ибо $A = 90^0$, $B = 90^0 - C$; неизвѣстные бока опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

Когда извѣстна гипотенуза a, то катетъ b опредѣлится изъ уравненія (1).

Когда извѣстенъ катетъ b, то катетъ c опредѣлится изъ (2), а гипотенуза a изъ (1).

Пусть на прим. $C = 33^0\,30'$, $b = 45{,}54$ саж., изъ уравненій (1) и (2) произойдутъ слѣдующія вычисленія:

$\log b =$	1,6583930	. . . . .	1,6583930
$\log R =$	10,0000000	$\log \operatorname{tang} C =$	9,8207829
$-\log C =$	9,9211066	$-\log R =$	10,0000000
$\log a =$	1,7372864	$\log c =$	1,4791759

Слѣд. $a = 54{,}612$ саж. и $c = 50{,}142$ саж.

Сіе вычисленіе можетъ служить къ опредѣленію высоты $AB' = c$, зданія (чер. 181), коего подошва A приступна (**).

Чтобы повѣрить вычисленіе, перемѣняютъ неизвѣстныя смотр. стр. 169).

(*) Для рѣшенія предложеннаго треуг. ка надо поставить при его вершинахъ буквы A, B, C, размѣщая оныя соотвѣтственно названіямъ извѣстныхъ и неизвѣстныхъ частей сего примѣра; a, b, c суть бока соотвѣтственно противолежащіе угламъ A, B, C; и если треуг. прямоугольный, то A означаетъ вершину прямаго угла. Послѣ сего предложенное уравненіе прилагается непосредственно къ чертежу.

(**) *Нивелированіе* или искуство измѣрять возвышенія надъ поверхностью земли, есть задача сего же рода. Атмосфера дѣйствуя на лучи свѣта, измѣняетъ ихъ направленіе, отъ чего предметы кажутся выше дѣйствительнаго ихъ положенія. Такимъ

2-е. *Даны два бока:*

Если извѣстны катеты b и c, то изъ уравненія (2) опредѣлится уголъ C; гипотенуза a получится потомъ изъ уравн. (1). Можно a также опредѣлить изъ уравн. (5), но оно не удобно для логариѳмическихъ дѣйствій.

Если извѣстна гипотенуза a и катетъ b, то уголъ C опредѣлится изъ уравн. (1), а бокъ c изъ уравн. (3), или $c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a+b).(a-b)}$.

II. Косоугольныя треугольники. Здѣсь предстоитъ 4 случая:

1-е. *Даны бокъ* a *и углы* B *и* C, 3-й уголъ A извѣстенъ, а изъ уравн. C, чл. 355.

$$b = \frac{a.\sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a.\sin C}{\sin A} \ldots\ldots (4).$$

Пусть на пр. $a = 28{,}852$ саж., $A = 37^0\,29'$, $C = 72^0\,9'$; отсюда $B = 70^0\,22'$: посему

$\log a = 1{,}4601759$	$1{,}4601759$
$\log \sin B = 9{,}9739873$	$\log \sin C = 9{,}9785741$
$-\log \sin A = 9{,}7842824$	$-9{,}7842824$
$\log b = \overline{1{,}6498808}$	$\log c = \overline{1{,}6544676}$

Слѣд. $b = 44{,}656$ саж. и $c = 45{,}150$ саж. Посредствомъ сего вычисленія можно *опредѣлить* AC, *разстояніе* C *отъ неприступной, но видимой точки* A (чер. 181); оно *опредѣляетъ* также *высоту* AB′ *и разстояніе* AC *зданія, коего подошва неприступна и невидима.* Ибо, измѣривъ горизонтальное основаніе BC и углы $B'CB$ и $BB'C$, составляемые онымъ съ лучами зрѣнія, направленными къ вершинѣ B, можно вычислить $B'C$; послѣ чего въ прямоугольномъ треуг.-кѣ $AB'C$ бу-

---

образомъ измѣряя вертикальный уголъ ACB', надо уменьшить оный отъ шаръ называемаго преломленія лучей (réfraction) и потомъ приложить вышесказанное вычисленіе. Сія теорія не можетъ быть здѣсь разсмотрѣна, ибо удалила бы насъ отъ нашего предмета; она изложена въ *Уранографіи* (Uranographie) *Франкера*, чл. 456 и въ *Геодезіи* (Géodesie) *Пюисана*.

душь извѣстны $B'C$ и уголъ ACB', который можно измѣрить не видя подошвы A, ибо прямая AC горизонтальна. Слѣд. AB' и AC опредѣлятся.

2-е. *Даны два бока* c *и* a, *и уголъ* A, *противолежащій одному изъ оныхъ*, изъ уравн. (4) $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$. Но величина $\sin C$ соотвѣтствуетъ двумъ дополнительнымъ угламъ C, отъ чего произойдетъ два рѣшенія (треугольники ABC, чер. 176 и 177.

Справедливо, что одно изъ нихъ часто допускается, какъ по видѣли (чл. 198); но сей случай изъ вычисленій познается самъ собою, не разсматривая онаго особенно; изъ двухъ величинъ C, найденныхъ вычисленіемъ, составляется сумма $A + C$, имѣя въ виду опредѣленіе дополнительнаго угла B. И такъ:

Если уголъ A тупой, то не льзя допустить $C > 90^0$, ибо тогда $A + C$ было бы $> 180^0$. И такъ будетъ только одно рѣшеніе, и для сего надлежитъ еще, чтобъ a было $> c$, ибо еслибъ a было $< c$, то изъ нашего уравненія получили бы $\sin A < \sin C$; отъ чего острый уголъ дополненія A, былъ бы менѣе остраго угла C, т. е. $180^0 - A < C$, а слѣд. $A + C > 180^0$. Такимъ образомъ несообразность была бы очевидна.

Если уголъ A острый и $a =$ или $> c$, то изъ нашего уравненія $\sin C =$ или $< \sin A$; посему вычисленіе дастъ величину остраго угла $C < A$, коего дополненіе $180^0 - C$ здѣсь допущено быть не можетъ, ибо приложивъ A, сумма $180^0 + A - C > 180^0$. И такъ задача имѣетъ одно только рѣшеніе.

Наконецъ, если уголъ A острый и $a < c$, то въ прямоугольномъ треуг-кѣ ABD перпендикуляръ $BD = p = \frac{c \sin A}{R}$; посему $\sin C = \frac{Rp}{a}$. Но если $a < p$, то $\sin C > R$, что не сообразно; если $a = p$, то $\sin C = R$, $C = 90^0$; и одинъ только прямоугольный треуг. ABD соотвѣтствуетъ рѣшенію; наконецъ если $a > p$, то эти

будетъ *единственный случай, допускающій два рѣшенія.*

Все сіе согласно съ изложеннымъ въ (чл. 198, чер. 38).

3-е. *Даны два бока* b *и* c, *и уголъ между ними* A; положивъ $n = \frac{1}{2}(C - B)$, формула *N* (чл. 360) обратится въ $$\tang n = \frac{c-b}{c+b}\cot\tfrac{1}{2}A \quad \ldots \quad (5);$$

урав. опредѣляющее уголъ $n < 90^0$; но $A + B + C = 180^0$, слѣд. $\frac{1}{2}(C+B) = 90^0 - \frac{1}{2}A$, величина извѣстная: назовемъ оную m; и такъ

$$\tfrac{1}{2}(C+B) = m,\ \tfrac{1}{2}(C-B) = n \quad \ldots \quad (6);$$

ошкуда $C = m + n$, $B = m - n$. Остается только опредѣлить бокъ a по вышеизъясненному способу (1-е).

Впрочемъ сей бокъ можно опредѣлить прямо, не отыскивая предварительно угловъ, и напротивъ можно употребить оный на опредѣленіе сихъ послѣднихъ. Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ формулу (*D*), прибавимъ и вычтемъ $2bc$, потомъ подставимъ вмѣсто $1 - \cos A$ ей равную величину $2\sin^2\frac{1}{2}A$ (чл. 358, I.); отъ чего $$a^2 = (c-b)^2 + 2bc(1-\cos A) = (c-b)^2\left(1 + \frac{4bc\sin^2\frac{1}{2}A}{(c-b)^2}\right).$$

Потомъ опредѣляютъ уголъ φ, коего тангенсъ въ квадратѣ былъ бы $= \frac{4bc\sin^2\frac{1}{2}A}{(c-b)^2}$, что всегда возможно, ибо тангенсы бываютъ всякихъ величинъ: отъ сего a обратится въ $(c-b)\sqrt{(1+\tang^2\varphi)}$ или въ $(c-b)\sec\varphi$, или наконецъ, примѣнивъ формулу къ тому случаю, когда радіусъ есть *R*,

$$a = \frac{R(c-b)}{\cos\varphi},\ \tang\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}A}{c-b}\sqrt{(bc)} \quad \ldots \quad (7).$$

Логариѳмическое вычисленіе не затруднительно; сначала опредѣляютъ $\tang\varphi$, а по оному $\cos\varphi$ и потомъ a. Вотъ примѣръ, къ которому приложимъ оба сіи способа. Пусть $c = 87{,}812$ саж., $b = 71{,}577$ саж., $A = 40^0\,50'$; ошкуда $c + b = 159{,}389$ и $c - b = 16{,}235$.

Первый способъ:

$\log \cot \frac{1}{2}A = 10,4280331$
$\log (c-b) = 1,210,523$
$-\log (c+b) = 2,2024585$
$\log \tang n = 9,4360969$
$m = 69^0\ 32'$
$n = 15^0\ 16'$
$m+n = 84^0\ 48' = C$
$m-n = 54^0\ 16' = B$
$\log c = 1,9435539$
$\log \sin A = 9,8163609$
$-\log \sin C = 9,9982089$
$\log a = 1,7617059$

Слѣд. $a = 57,770$ саж.

Второй способъ:

$\log c = 1,9435539$
$\log b = 1,8547735$
$\log bc = 3,7983274$
половина $= 1,8991637$
$\log 2 = 0,3010300$
$\log \sin \frac{1}{2}A = 9,5436489$
$\log (c-b) = 1,2104523$
$\log \tang \varphi = 10,5333903$
$\varphi = 73^0\ 40' 43''$
$\log R(c-b) = 11,2104523$
$-\log \cos \varphi = 9,4487449$
$\log a = 1,7617072$

4-е. *Даны три бока.* Чтобы получить одинъ изъ угловъ, напр. A, надлежитъ впрочемъ взять урав. D,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Сіе выраженіе также какъ и въ предыдущемъ случаѣ, не удобно для логарифмическихъ дѣйствій. Но если вмѣсто $\cos A$ подставимъ сію величину въ $\sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(1-\cos A)$, то

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc};$$

и какъ числитель есть разность двухъ квадратовъ (ал. 97, 3-е), то вводя радіусъ R, получимъ

$$\sin \tfrac{1}{2}A = R\sqrt{\left(\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}\right)} \quad \ldots \quad (8).$$

Сіе уравн. соотвѣтствуетъ уже нашей цѣли; но оно можетъ быть сдѣлано еще проще, положивъ периметръ треугольника, т. е. $a+b+c = 2p$; ибо тогда (стр. 376) получимъ

$$\sin \tfrac{1}{2}A = R\sqrt{\left(\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\right)} \quad \ldots \quad (9).$$

$\frac{1}{2}A$ должно быть $< 90^0$, слѣд. задача имѣетъ одно только рѣшеніе (ал. 350).

Пусть на пр. $c = 105{,}357$ саж., $b = 106{,}856$ саж., и $a = 142{,}985$ саж.; ошкуда $2p = 353{,}178$ саж. и $p - b = 69{,}755$ саж., $p - c = 73{,}252$ саж., $p - a = 53{,}604$ саж.; Слѣд.

$\log (p-b)$	$= 1{,}8435629$	$\log (p-a)$	$= 1{,}5263910$
$\log (p-c)$	$= 1{,}8647009$	$\log (p-c)$	$= 1{,}8647009$
допол. $\log b$	$= 3{,}9712824$	допол. $\log a$	$= 3{,}8447094$
допол. $\log c$	$= 3{,}9850601$	допол. $\log c$	$= 3{,}9850601$
сумма	$= 1{,}6652063$	сумма	$= 1{,}2214614$

Взявъ половину и приложивъ 10, получимъ

$\log \sin \frac{1}{2}A = 9{,}8326031$ $\log \sin \frac{1}{2}B = 9{,}6107307$.

Слѣд. $A = 85^0\ 43'$ $B = 48^0\ 10'$.

Такимъ же образомъ найдешь $C = 46^0\ 7'$, и вычисленіе повѣрится условіемъ $A + B + C = 180^0$.

III. *Если треугольникъ равнобе́дренный*, то полагая A вершиною угла, a основаніемъ, и сдѣлавъ въ уравненіи (8), $b = c$, получишь

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \frac{aR}{2b} = \frac{(p-b)R}{b} \ldots . (10);$$

урав. опредѣляющее одну изъ трехъ величинъ a, b и A.

Замѣтимъ, что если данъ одинъ изъ угловъ, то и два прочія извѣстны изъ уравненія $B = C = 90^0 - \frac{1}{2}A$ (чл. 201, 2-е).

Задачи изъ Тригонометріи.

365. Большая часть геодезическихъ задачъ обращаются въ рѣшеніе треугольниковъ. Предложимъ здѣсь нѣкоторыя изъ оныхъ, наиболѣе употребительныя.

I. *Сыскать разстояніе* AC (чер. 182) *между двумя неприступными точками.* Надлежишь измѣришь какое-нибудь основаніе BD и углы ABC, CBD, ADC, ADB, онымъ составляемые съ лучами зрѣнія, направленными отъ концевъ B и D къ A и C; потомъ рѣшишь треугольники ABD и CDB (стр. 421-я, 1-е);

чѣмъ и опредѣлятъ *разстоянія* AB, BC, *точки* B *отъ неприступныхъ точекъ* A и C; и какъ въ треугольникѣ *ACB* извѣстны два бока *AB*, *BC* и заключаемый между нимъ уголъ, то наконецъ найдутъ *AC*.

II. *Привести уголъ, точку или разстояніе къ горизонту.* Рѣдко сигналы бываютъ на одной горизонтальной плоскости; а посему на чертежѣ должно означать не тѣ углы, точки и разстоянія, которые наблюдали, но ихъ *горизонтальныя положенія* (чл. 272). И такъ, когда сигналъ видимый изъ *B* и *C* (чер. 181) есть вершина *B'* зданія или горы, то надо замѣнять *B'* чрезъ *A*, уголъ *CBB'* чрезъ *CBA*, уголъ *B'CB* чрезъ *ACB* ....

Положимъ, что по наблюденіямъ, или изъ вычисленій, извѣстны всѣ части треугольника *B'CB*; какъ *CA* горизонтальна, то можно измѣрить уголъ *ACB'* (даже когда точка *A* невидима); потомъ рѣшивъ прямоугольный треуг. *CAB'*, найдутъ *CA* и высоту *AB'*. Сія послѣдняя и гипотенуза *BB'*, могутъ служить къ опредѣленію *AB* въ прямоугольномъ треугольникѣ *BAB'*. И такъ три бока горизонтальнаго треуг-ка *CBA* будутъ извѣстны, а слѣд. и углы его составляющіе и положеніе точки *A*. (См. чл. 611, II).

III. Пусть *BC* (чер. 178) будетъ измѣренная длина покатости; на чертежѣ должно только означить горизонтальное оной проложеніе *AC*, или $a\cos C$; избытокъ *e* гипотенузы надъ горизонтальнымъ катетомъ, или $a - b = e = a - a\cos C$, и какъ (чл. 558), $1 - \cos C = 2\sin^2\frac{1}{2}C$, то найдутъ наконецъ $e = 2a\sin^2\frac{1}{2}C$.

IV. *Данъ треуг.* ABC (чер. 182), *сыскать положеніе точки* D, *когда извѣстны углы* ADC $= \beta$ *и* ADB $= \gamma$. Пусть *a*, *b*, *c* будутъ бока; *A*, *B*, *C* углы даннаго треугольника *ABC*, а неизвѣстные углы *ABD* $= x$ и *ACD* $= y$. Изъ треугольниковъ *ACD* и *ABD* (чл. 555),

$$DA = \frac{b\sin y}{\sin\beta} = \frac{c\sin x}{\sin\gamma}.$$

Положимъ, что опредѣленъ такой уголъ φ, коего тангенсъ $= \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}$; получимъ $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin y}{\sin x}$, ошкуда (чл. 73)

$$\frac{1 + \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang} \varphi} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y},$$

или (чл. 359, 360) $\operatorname{tang} (45^0 + \varphi) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)}$. Для краткости сдѣлаемъ $m = \frac{1}{2}(x+y)$, $n = \frac{1}{2}(x-y)$; m извѣстно, ибо $x+y$ (чл. 231) равенъ 360^0 безъ $A + CDB = A + \beta + \gamma$; слѣд.

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}; \qquad x = m + n$$

$$\operatorname{tang} n = \operatorname{tang} m \cot (45^0 + \varphi), \quad y = m - n.$$

1-е уравненіе опредѣляетъ φ, а 3-е величину n; ошкуда и получаются x, y и положеніе точки D. Можно также вычислить AD, CD, и BD. Когда $\operatorname{tang} n$ отрицательный, то въ величинахъ x и y должно перемѣнить знакъ передъ n. Если точки A, B, C, D не на одной горизонтальной плоскости, то ихъ должно предварительно перевести на оную.

Сія задача была рѣшена черченіемъ (чл. 208, VI).

V. *Сыскать площадь* z *треугольника* ABC (чер. 176), *когда даны* 1-е. *Три бока* См. чл. 317).

2-е. *Два бока и уголъ между ними;* въ треуг.-кѣ BCD, $BD = a \sin C$, слѣд. $z = \frac{1}{2} b \times BD$ обратится въ $z = \frac{1}{2} ab \sin C$.

3-е. *Бокъ* b *и углы;* такъ какъ $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$, то подставя сію величину въ предыдущее уравн., получимъ $z = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin B}$.

VI. *Сыскать площадь четыреугольника* ABDC (чер. 182), *по извѣстнымъ діагоналямъ* AD=D, BC=D', *и составляемому ими углу* AOB = 6. Найдемъ отдѣльно площадь каждаго изъ четырехъ треугольниковъ, изъ

уравненій (2-е): сложивъ и назвавъ a, b, c, d, отрѣзки AO, OD, OB, OC діагоналей, получимъ

$$z = \tfrac{1}{2}(ac + ad + bd + bc)\sin\theta.$$

Но сія четырехъ-членная величина равна $(a+b)(c+d) = D \times D'$; слѣд. $z = \tfrac{1}{2} DD' \sin\theta$.

Изъ сего заключимъ, что *площади двухъ четыреугольниковъ равны, когда ихъ діагонали равны и пересѣкаются подъ одинаковымъ угломъ.* (См. чл.318).

VII. Пусть A будетъ бокъ правильнаго многоугольника (чер. 87), коего число сторонъ есть n, α число градусовъ угла при центрѣ $AOB = 2AOG = \frac{360^0}{n}$; изъ треугольника AGO:

$$OG = AG \operatorname{tang} OAG = \tfrac{1}{2} A \cot(\tfrac{1}{2}\alpha);$$

площадь треугольника $AOB = AG \times GO$; повторивъ оную n разъ, получимъ

площадь правильнаго многоугольника $\tfrac{1}{4} n A^2 \cot(\tfrac{1}{2}\alpha)$.

Площадь треугольника $AOB = R\sin AOG \times R\cos AOG = \tfrac{1}{2} R^2 \sin 2AOG$, или площ. треуг-ка $AOB = \tfrac{1}{2} R^2 \sin\alpha$.

Если изъ площади сектора $AOB = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ (чл. 261), вычтемъ площадь треугольника, то останется

$$\text{площадь сегмента} = \tfrac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha \right).$$

VII. Пусть r будетъ радіусъ OF (чер. 46 круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC, уголъ OAF есть $\frac{1}{2} CAB = A$; $OF = AF \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$, или $r = (p-a)\operatorname{tang}\frac{1}{2} A$, p означаетъ полупериметръ треугольника ABC (чл. 206, I; сія величина проще найденной въ чл 317. Извѣстно, что площадь z треугольника $ABC = pr$; слѣд. $z = p(p-a)\operatorname{tang}\frac{1}{2} A$. Сіи уравненія могутъ служить къ опредѣленію угла и бока треугольника по данному z или r, и проч....

IX. Пусть хорда $AD = k$ (чер. 142); стягивая оную дуга $ABD = a$, R радіусъ SA; изъ прямоугольнаго треугольника SAb', $Ab' = R\sin\frac{1}{2}a$, откуда $k = 2R\sin\frac{1}{2}a$.

Сіе уравненіе опредѣляетъ число градусовъ a *дуги, по извѣстной ей хордѣ* k, *и обратно;* касательно же длины сей дуги см. чл. 348.

Изъ сего уравненія извлекаютъ особенную пользу. Извѣстно, что *транспортиръ* (стр. 253) можетъ только служить для приближеннаго черченія угловъ по данному числу градусовъ. Возьмемъ произвольный радіусъ SA, коего бы длина R была измѣрена по размѣру содержащему весьма мелкія части (стр 289 ; наше уравн. опредѣлитъ число частей содержащихся въ хордѣ k. Слѣд. нанеся на дугу ABD раствореніе циркуля $AD = k$, и проведя линіи SA и SD, получатъ искомый уголъ ASD. Погрѣшность сего построенія заключается только въ толщинѣ линій. Таблица, приложенная въ концѣ сей части, составлена по вышепредложенному уравненію. Легко понять употребленіе оной.

X. Возьмемъ четыреугольникъ $ABCD$ (чер. 174); означимъ чрезъ a, b, c и d бока, и чрезъ (ab), (bc)... углы составленные боками a и b, b и c.... Проложивъ AD, DC и BC на AB, получимъ $AE = d.\cos(ad)$, $EF = c.\cos ac$), $FB = b.\cos(ab)$; и какъ $AB = a = AE + EF + FB$, то

$$a = b.\cos(ab) + c\cos ac + d\cos(ad);$$

также
$$b = a\cos ab) + c\cos bc + d\cos bd),$$
$$c = a\cos ac) + b\cos bc + d\cos cd),$$
$$d = a\cos ad + b\cos bd) + c\cos cd;$$

замѣтивъ, что вычитаемыя произведенія имѣютъ множителями отрицательные косинусы, см. стр. 401 и 409.

Помножимъ сіи уравненія соотвѣтственно на a, b, c, d, потомъ изъ 1-го произведенія вычтемъ сумму прехъ прочихъ; получимъ

$$a^2 - b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc.\cos(cb) + bd.\cos(bd) + cd\cos cd],$$

такимъ же образомъ

$$c^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2[ab.\cos(ab) + ad.\cos(ad) + bd.\cos bd],$$

равномѣрно и для прочихъ боковъ.

Таковое же вычисленіе можно примѣнишь къ пятиугольнику и проч. Вообще *во всякомъ многоугольникѣ, квадратъ одного изъ его боковъ равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ боковъ, безъ удвоеннаго произведенія сихъ боковъ взятыхъ по два, на косинусъ угла ими составляемаго.*

III. УРАВНЕНІЯ ПРЯМОЙ ЛИНІИ И КРУГА.

Уравненіе прямой линіи.

366. *Уравненіемъ линіи* BMZ (чер. 183), *называютъ отношеніе существующее между сопряженными* x *и* y *каждой точки оной;* такъ, что если ординаша PM будешь двигашься параллельно вдоль Ax, и длина оной измѣняшся вмѣсшѣ съ абсциссою, удовлешворяя всегда сему уравненію между x и y, то конецъ M ординаты опишешъ кривую.

Уравн. кривой можно разсматриваш, какъ заключающее два неизвѣсшныхъ x и y, изъ коихъ одно произвольно. Если положимъ, что взявъ для x произвольную всличину a, получили для y дѣйсшвишельное количество b, то шочка имѣющая сопряженными a и b [что означимъ чрезъ шочку a, b], будешь одна изъ шочекъ кривой линіи. Такимъ же образомъ, если $x = a'$, даешъ $y = b'$ и проч.; слѣд. изъ неопредѣленнаго нашего уравненія получимъ безконечное число шочекъ, коихъ рядъ составишъ самую кривую линію; и сей способъ можно употреблять какъ для нахожденія различныхъ шочекъ кривой, шакъ и для изслѣдованія составляемаго ею чершежа, и отличишельныхъ свойсшвъ теченія оной. Сіе увидимъ въ послѣдсшвіи.

Такимъ образомъ ясно, что $y = b$ есть уравн. прямой MN (чер. 170), параллельной оси Ax, когда $AQ = b$; $y = 0$ есть уравн. оси x. Также $x = a$ есть уравненіе PM параллельной оси Ay, когда $AP = a$; и $x = 0$ есть уравн. сей самой оси.

567. Найдемъ уравненіе какой-нибудь прямой.

1-е. Если она проходитъ чрезъ начало, какъ AN (чер. 184), то проведя изъ какой-нибудь точки $D, N\ldots$, ординаты DC, $PN\ldots$, всегда получимъ $\frac{DC}{AC} = \frac{PN}{AP} = \ldots$ И такъ пусть будетъ *a постоянное отношеніе каждой абсциссы къ ей соотвѣтствующей ординатѣ*, уравн. прямой AN будетъ

$$y = ax.$$

Когда сопряженныя прямоугольны, какъ въ какомъ-нибудь одномъ изъ сихъ треугольниковъ, напр. APN (чл. 354), $PN = AP \operatorname{tang} A$; слѣд. *a означаетъ также тангенсъ угла составляемаго прямою съ осью* x. Съ увеличиваніемъ угла NAP и a возрастаетъ; если прямая, какъ AN', дѣлаетъ съ положительною частью оси x уголъ тупой, то a будетъ отрицательное, и уравн. обратится въ $y = -ax$; здѣсь a есть тангенсъ угла $N'AE$. Въ самомъ дѣлѣ видно, что тогда положительныя абсциссы соотвѣтствуютъ отрицательнымъ ординатамъ, и обратно.

Но если уголъ y $4x$ косвенный, то изъ треуг.-ка NAP получимъ $\frac{\sin NAP}{\sin ANP} = \frac{y}{x} = a$; тогда *a есть отношеніе синусовъ угловъ, составленныхъ прямою съ сопряженными осями:* отношеніе, долженствующее имѣть знакъ —, когда прямая придетъ въ положеніе AN'.

2-е. Если прямая какъ BM не проходитъ чрезъ начало, то положивъ $AB = b = ординатѣ\ при\ началѣ$, и проведя AN параллельно BM, ордината PM, или y,

будетъ состоять изъ $MN = b$ и изъ $PN = ax$; слѣд.

$$y = ax + b;$$

b будетъ отрицательное, когда прямая придетъ въ положеніе $B'M'$.

368. Величины x и y, входящія въ уравн. прямой, называются *измѣняемыми* или *перемѣнными*, a и b *постоянными;* но очевидно, что a и b также могутъ измѣняться, и сіе случится, когда прямой BM дадимъ другое положеніе; $y - ax + b$ принадлежитъ всѣмъ прямымъ, различествующимъ между собою величинами a и b.

Изъ самаго общаго вида уравненія 1-й степени, $Ay + Bx + C = 0$, получимъ $y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$, что можно представить чрезъ $y = ax + b$: отложивъ $AB = b$ (чер. 184) и проведя BM такъ, чтобъ a было тангенсомъ угла BEA, найдемъ прямую BM, имѣющую уравненіемъ $y = ax + b$. Слѣд. *всякое уравн.* 1-*й степени принадлежитъ прямой линіи, которой построеніе извѣстно.*

Оную можно также начертить опредѣляя положеніе какихъ-нибудь двухъ ея точекъ.

Такъ какъ для точки B абсцисса нуль, *то положивъ* $x = 0$, *опредѣлятъ ординату при началѣ; также* $y = 0$ *опредѣляетъ точку сѣченія съ осью* x. Вышесказанное относится вообще какъ къ прямымъ, такъ и къ кривымъ линіямъ. Основываясь на семъ предложеніи, легко чертить прямую; положимъ $x = 0$, получимъ $y = b = AB$; также положивъ $y = 0$, найдемъ $x = -\frac{b}{a} = AE$. Прямая проходящая чрезъ найденныя точки E и B будетъ искомая.

Но еслибы сія прямая проходила чрезъ начало, то сей способъ недостаточенъ; въ такомъ случаѣ надлежитъ положить $x = 1 = CA$, и получатъ $y = a = CD$. Весьма полезно заниматься построеніемъ прямыхъ по даннымъ уравненіямъ, какъ на пр. $2y + x = 2$;

$y = -3 + x$, $y = -x - 1$, и проч...., дабы узнавать положеніе прямой, по принадлежащему оной уравненію.

369. *Сыскать уравн. прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.* Пусть (x', y') будетъ 1-я точка, (x'', y'') 2-я; уравн. прямой есть $y = ax + b$; a и b неизвѣстны; но какъ прямая проходитъ чрезъ точку (x', y'), слѣд. положивъ $x = x'$ получатъ $y = y'$, посему

$$y = ax + b \text{ обратится въ } y' = ax' + b;$$

вычтя сіи уравненія, чтобы выключить b, найдутъ

$$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots (1).$$

Сіе уравн. принадлежитъ всѣмъ прямымъ, проходящимъ чрезъ точку (x', y'), и различествующимъ между собою только величиною a, т. е. направленіемъ.

Но наша прямая проходитъ также чрезъ точку (x'', y''); посему $y'' - y' = a(x'' - x')$, откуда

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \text{ и } y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

370. *Сыскать уголъ, составляемый двумя прямыми,* коихъ уравненія даны; $y = ax + b$, $y = a'x + b'$; пусть будетъ BC 1-я прямая чер. 185), а уголъ B, составляемый оною съ осью Ax; уголъ составляемый сею осью со 2-ю линіею DC или параллельною къ ней BE пусть будетъ x', $EBX = x'$; и такъ $a = \text{tang } \alpha$, $a' = \text{tang } \alpha'$; искомый уголъ или $V = \alpha - \alpha'$; но (чл. 359) .... $\text{tang } V = \dfrac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \alpha'}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha'}$; слѣд.

$$\text{tang } V = \frac{a - a'}{1 + aa'} \ldots\ldots (2).$$

Если $a = a'$, то линіи параллельны, ибо $V = 0$, что впрочемъ очевидно. Если $aa' + 1 = 0$, то $\text{tang } V = \infty$; слѣд. уголъ V прямой. И такъ условія параллельности и перпендикулярности двухъ линій, суть

$$a = a' \ldots. 3); \quad aa' + 1 = 0 \ldots. (4).$$

371. *Чрезъ данную точку провести прямую параллельную или перпендикулярную къ другой прямой, или составляющую съ оною данный уголъ.* Пусть будетъ $y = ax + b$ уравн. данной прямой, $y = a'x + b'$ уравненіе искомой линіи; надлежитъ опредѣлить a' и b'. Но какъ сія прямая проходитъ чрезъ данную точку (x', y'), то уравненіе оной есть $y - y' = a'(x - x')$; остается опредѣлить a'.

1-е. Если искомая прямая *параллельна* данной, то $a = a'$; и уравн. 1) есть требуемое.

2-е. Если она *перпендикулярна*, то $aa' + 1 = 0$, отсюда

$$a' = -\frac{1}{a},\ y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \ldots\ (5).$$

3-е. Если прямыя составляютъ уголъ V, коего данный тангенсъ есть m; то положивъ въ уравн. (2), $m = \text{tang}\, V$, получимъ

$$a' = \frac{a - m}{am + 1},\ y - y' = \frac{a - m}{am + 1}(x - x') \ldots\ (6).$$

На пр: если $m = 1$, то уравн. прямой, пересѣкающей данную подъ угломъ 45^0, будетъ

$$(a + 1)(y - y') = (a - 1)(x - x').$$

372. *Сыскать точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.* Пусть будутъ $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ уравненія сихъ прямыхъ; абсцисса x можетъ быть одинакова для сихъ линій на всемъ ихъ продолженіи, но ордината y различна; въ одной только точкѣ пересѣченія, x и y обѣихъ линій одинаковы. И такъ опредѣливъ сіи перемѣнныя выключеніемъ, получимъ сопряженныя точки пересѣченія: сіе вычисленіе весьма легко; изъ онаго

$$x = \frac{b' - b}{a - a'};\quad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

Вообще, чтобъ опредѣлить сопряженныя точкъ пересѣченія двухъ кривыхъ линій, должно изъ уравненій оныхъ исключить перемѣнныя x и y; по сей

причинѣ полагая $y = 0$, или $x = 0$, найдутъ точки пересѣченія линіи съ осью x или y, ибо сіи уравненія принадлежатъ осямъ.

373. *Сыскать разстояніе между двумя данными точками.* Пусть (x', y'), (x'', y'') будутъ сіи двѣ точки, находящіяся въ M и N (чер. 186). Проведемъ MR параллельно Ax; изъ прямоугольнаго треугольника NMR получимъ $MN^2 = MR^2 + NR^2$: но

$NR = NQ - MP = y'' - y'$, $MR = AQ - AP = x'' - x'$,

и такъ, искомое разстояніе MN или

$$\delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \quad \ldots \quad (7);$$

разстояніе AM точки M отъ начала есть

$$\delta = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Если объ точки должны находиться на одной прямой BN, данной уравненіемъ $y = ax + b$, то x', y', x'', y'' долженствовали бы удовлетворять оному; откуда $y' = ax' + b$, $y'' = ax'' + b$; а посему $\delta = (x'' - x')\sqrt{(1 + a^2)}$.

374. *Сыскать разстояніе между точкою и данною линіею.* Пусть будетъ $y = ax + b$ уравненіе прямой BC (чер. 187), M или M' (x', y') данная точка. Надлежитъ 1-е, опустить перпендикуляръ MM' на BC; 2-е, сыскать точку N пересѣченія сихъ линій; 3-е, опредѣлить разстояніе MN или $M'N = \delta$. Совершимъ сіи дѣйствія алгебраически. 1-е, Уравненіе безпредѣльной прямой MM', проходящей чрезъ точку (x', y'), и перпендикулярной къ BC есть (5), чл. 371; 2-е, чрезъ выключеніе x и y изъ уравненій двухъ прямыхъ, получатъ сопряженныя точки N пересѣченія; 3-е, наконецъ подставятъ сіи величины въ уравн. (7).

Но послику ищутъ $x - x'$ и $y - y'$, то вычисленіе обратится въ простѣйшее, когда уравненіе $y = ax + b$ представятъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$y - y' = a(x - x') + b + ax' - y', \quad y - y' = -\frac{1}{a}(x - x');$$

ошкуда $x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}$, $y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}$;

сумма квадратовъ сихъ величинъ есть $\left(\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}\right)^2 (1 + a^2)$,

слѣд. искомое разстояніе, т. е. длина перпендикуляра MN или $M'N$ будетъ

$$\delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ (*)}.$$

375. Вообще задачи относительно прямой линіи бываютъ двухъ родовъ:

1-е. Или на данной прямой опредѣляютъ какую-нибудь ея точку (x', y'), удовлетворяющую требуемому условію; въ такомъ случаѣ въ урав. $y' = ax' + b$; a и b извѣстны; выразивъ же алгебраически условіе, которому точка должна удовлетворять, составится другое урав. между x' и y'; рѣшивъ сіи уравненія, опредѣлятъ искомыя сопряженныя. Если будетъ дано нѣсколько прямыхъ линій и нѣсколько условій, то поступаютъ такимъ же образомъ.

2-е. Или отыскиваютъ прямую, коей положеніе удовлетворяетъ даннымъ условіямъ; тогда въ урави. $y = ax + b$, a и b неизвѣстны, и задача состоитъ въ опредѣленіи оныхъ. Но данныя условія, будучи выражены алгебраически, произведутъ уравненія, опредѣляющія a и b; число ихъ не превышаетъ двухъ, если они не заключаютъ въ себѣ новыхъ неизвѣстныхъ.

376. Вотъ нѣсколько примѣровъ, къ которымъ приложены сіи правила:

(*) $\sqrt{1 + a^2}$ имѣетъ два знака $\pm$, изъ коихъ надлежитъ предпочитать дѣлящій δ положительнымъ (чл. 108). Но какъ ордината y, точки R или R' линіи BC, имѣющей абсциссу x', равна $ax' + b$, то и y' будетъ $>$ или $< ax' + b$, смотря потому, гдѣ находится данная точка въ M или M', т. е. выше или ниже линіи: слѣд. во 2-мъ случаѣ $\delta = \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}}$.

I. *Раздѣлить на двѣ равныя части уголъ, составленный двумя данными прямыми* AB, AC (чер. 188). Проведемъ чрезъ точку A сѣченія сихъ линій, прямоугольныя оси Ax, Ay; уравненія данныхъ прямыхъ будутъ $y = ax$, $y = bx$; a и b извѣстны. Пусть будетъ $y = kx$ уравн. искомой линіи AD; слѣдуетъ опредѣлить k.

Тангенсъ угла $DAB = \frac{a-k}{1+ak}$ (чл. 171); $\operatorname{tang} DAC = \frac{k-b}{1+bk}$; слѣд. $\frac{a-k}{1+ak} = \frac{k-b}{1+bk}$; откуда

$$k^2 - \frac{2(ab-1)}{a+b}k - 1 = 0.$$

Опредѣливъ отсюда величину k, подставляютъ оную въ $y = kx$. Такъ какъ произойдетъ два дѣйствительныхъ корня k' и k'', то послѣдній членъ -1 есть произведеніе оныхъ, или $k'k'' + 1 = 0$, т. е. что найденныя такимъ образомъ прямыя AD и AE составляютъ прямой уголъ (чл. 370).

Если бъ оси не проходили чрезъ начало A, то искомое уравн. было бы $y - y' = k(x - x')$, въ которомъ k имѣетъ вышесказанную величину, а x' и y' представляютъ сопряженныя точки пересѣченія.

Когда одна изъ прямыхъ AC будетъ осью x, то $b = 0$, и тогда $k^2 + \frac{2k}{a} = 1$.

II. Даны прямыя AB, Ax (чер. 189), сыскать такую точку $D(x', y')$, чтобы CD, параллельная Ax, равнялась AC. Возьмемъ A за начало, Ax за ось абсциссъ. Пусть $AI = m$, $y = ax$ уравн. AB; наконецъ проведемъ AD и положимъ, что $y = kx$ есть уравн. оной; a дано; надлежитъ опредѣлить m, x' и y', или x' и k.

$CD = AE - AI = x' - m$, и по условію $AC^2 = m^2 + y'^2 = (x' - m)^2$; слѣд. $y'^2 = x'^2 - 2mx'$; но точка C находится на AB, и D на AD; слѣд. $y' = am$ и $y' = kx'$; чрезъ выключеніе m и y' получимъ $ak^2 + 2k = a$, урав.

доказывающее (задача I.), что AD дѣлитъ уголъ BAE по-поламъ; x' произвольно, ибо не входитъ въ вычисленіе; слѣд. всѣ точки AD удовлетворяютъ задачѣ, имѣющей безчисленное число рѣшеній.

III. Сыскать уравненія перпендикуляровъ AF, CE, BD (чер. 190), опущенныхъ изъ каждаго угла треугольника ABC на противолежащіе имъ бока; принявъ основаніе $AC = b$ за ось x и A за начало, вершина B (x', y') опредѣлитъ треугольникъ.

Уравненіе прямой AB будетъ $y = ax$, и какъ она проходитъ чрезъ B, то $a = \frac{y'}{x'}$. Такимъ же образомъ легко составится уравненіе прямой BC, проходящей чрезъ (x', y') и $C(b, 0)$; слѣд. уравненія линій AB и BC суть

$$y = \frac{y'}{x'}x, \quad y = \frac{y'}{x' - b}(x - b).$$

Кромѣ сего CE проходитъ чрезъ $C(b, 0)$, AF чрезъ начало; слѣд. ихъ уравненія будутъ слѣдующаго вида $y = A(x - b)$, $y = Bx$; и какъ сіи линіи должны быть перпендикулярны къ предыдущимъ, то (чл. 370)

$$\frac{Ay'}{x'} + 1 = 0, \quad \frac{By'}{x' - b} + 1 = 0,$$

посему уравненія перпендикуляровъ суть

$$y = -\frac{x'}{y'}(x - b), \quad y = -\frac{x' - b}{y'}x.$$

Чтобъ опредѣлить точку O ихъ пересѣченія, должно исключить x и y; отъ сего найдутъ $x = x'$ — абсциссѣ AD вершины; слѣд. точка O находится на ординатѣ BD. Итакъ *перпендикуляры, опущенные изъ трехъ угловъ треугольника на противолежащіе имъ бока, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ.* Описавъ на AC полуокружность $AEFC$, и чрезъ точки F, E пересѣченія, проведя AF и CE, наконецъ чрезъ точку O, ихъ сѣченія линію BD, получатъ сіи три перпендикуляра.

IV. *Описать кругъ, касательный къ тремъ бокамъ треугольника* ABC (чер. 190). Найдемъ прежде точку $O(\alpha, \beta)$ равноотстоящую отъ AB и AC; сохранивъ предыдущія названія, уравн. AB будетъ $y = \frac{y'}{x'}x$; слѣд. длина перпендикуляровъ OE и OD (чл. 574) есть

$$OE = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}} = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\pm c}, \quad OD = \beta.$$

$AB = c$, предъ которою ставятъ $\pm$, потому что неизвѣстная точка $O(\alpha, \beta)$ можетъ быть вверху или внизу AB; α и β опредѣляются; ибо $OE = OD$, или $\alpha y' = \beta(x' \pm c)$; другаго уравненія кромѣ сего не будетъ, сіе доказываетъ, что существуетъ множество точекъ O, равноотстоящихъ отъ AB и AC, и что онѣ удовлетворяя уравненію прямой $y = \left(\frac{y'}{x' \pm c}\right)x$, образуютъ двѣ прямыя линіи, проходящія чрезъ верхъ A, и составляютъ съ основаніемъ AC углы, коихъ тангенсы суть $\frac{y'}{x' \pm c}$, произведеніе оныхъ обращается въ -1; ибо $x'^2 + y'^2 = c^2$. Слѣд. сіи двѣ прямыя перпендикулярны между собою: остается опредѣлить положеніе которой-нибудь одной AO (чер. 46).

Какъ $\operatorname{tang} BAC = \frac{y'}{x'}$; слѣд. $\cos A = \frac{x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}} = \frac{x'}{c}$; отсюда $\operatorname{tang} \frac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{c - x'}{c + x'}\right)} = \frac{y'}{x' + c}$, ($M$, чл. 559, и помноживъ числителя и знаменателя на $c + x'$). Посему $OAB = \frac{1}{2}BAC$, что впрочемъ извѣстно (чл. 206). Если проведутъ OA, дѣлящую по-поламъ уголъ BAC, и перпендикуляръ къ сей линіи, разсѣкающей на двѣ равныя части дополненіе сего угла, то искомый центръ будетъ на сихъ двухъ линіяхъ; проведя CO; дѣлящую по-поламъ уголъ C, и возставя перпендикуляръ къ сей линіи, потомъ сдѣлавъ тоже для B, пересѣченія сихъ шести прямыхъ, взятыхъ по двѣ

опредѣлятъ четыре точки, которыя будутъ центрами искомыхъ касательныхъ круговъ: одинъ изъ онихъ будетъ вписанъ въ треугольникѣ, три прочія будутъ внѣ онаго.

Можно не дѣлая трехъ перпендикуляровъ OD, OE, OF равными, искать точку O, которая удовлетворяла бы данному отношенію между сими линейными величинами.

V. Чрезъ точку M (чер. 191) провесши NQ, отсѣкающую отъ угла NBx треуг. BNQ, имѣющій данную площадь. Принявъ Bx и By за оси, данныя величины будутъ $\tan g\, NBx = a$ и точка $M(\alpha, \beta)$; а неизвѣстная $BQ = z$. Уравн. NQ, проходящей чрезъ $Q(z, 0$ есть $y = A(x - z)$; сія прямая проходитъ также чрезъ $M(\alpha, \beta)$; слѣд. $A = \frac{\beta}{\alpha - z}$. Урав. BN есть $y = ax$. Выключивъ x, для опредѣленія y общей точки N, получимъ . . . . $(A - a)y = Aaz$; отсюда

$$y = \frac{Aaz}{A - a} = \frac{\beta az}{\beta - a\alpha + az}.$$

И такъ, проведемъ AM параллельно BN, и сдѣлаемъ $AB = m$. Уравн. AM, проходящей чрезъ $M(\alpha, \beta)$, будетъ $y - \beta = a(x - \alpha)$: для точки A, $y = 0$; слѣд. $am = a\alpha - \beta$. Введя am въ вышенайденное вмѣсто $a\alpha - \beta$, получимъ

$$y = ND = \frac{\beta z}{z - m}.$$

Какая бы данная площадь ни была, можно превратить ее въ прямоугольникъ, имѣющій основаніемъ k, а высоту $PM = \beta$. Слѣд. надлежитъ, чтобы $k\beta = \frac{1}{2}zy$, или $z^2 - 2kz + 2km = 0$; отсюда получимъ два рѣшенія, удобныя къ построенію (чл. 330): второе рѣшеніе принадлежитъ тому случаю, когда прямая NQ пересѣкаетъ дополненіе угла NBQ. См. чл. 335.

Слѣдующіе примѣры могутъ служить для упражненія:

VI. Даны уравненія двухъ прямыхъ AB, AC (чер. 188, отложить равныя части AB, AC, вычислить длину

BD половины хорды BC, и по оной опредѣлишь уголъ BAC. Уравн. должно согласоваться съ (2) чл. 370.

VII. Въ томъ же случаѣ сыскашь уравн. хорды BC, и перпендикулярной къ ней линіи AD, коей направленіе должно согласоваться съ задачею I.

VIII. Перпендикуляры DO, FO, EO (чер. 192), возставленные изъ средины боковъ треуг.-ка ABC, встрѣчаются въ одной и той же точкѣ O. Вообще, если D и F расположены какимъ-нибудь образомъ на бокахъ AB и BC, и притомъ дѣлятъ сіи стороны на части пропорціональныя (прямая DF параллельна AC), то всѣ перпендикуляры DO, FO пересѣкаются въ точкахъ O, находящихся на одной и той же прямой, проходящей чрезъ вершину B.

IX. Сыскашь уравненія прямыхъ CD, AF, BE (чер. 192), проведенныхъ чрезъ средины боковъ треуг.-ка ABC, въ противолежащіе углы; доказашь, что онѣ встрѣчаются въ одной и той же точкѣ G, отстоящей отъ вершинъ угловъ на $\frac{2}{3}$ каждой изъ линій.

Вообще если на двухъ бокахъ AB, BC какого-нибудь треугольника отложимъ произвольныя части AD, CF, пропорціональныя симъ бокамъ, то прямыя CD и AF пересѣкутся въ точкѣ G, находящейся на линіи, проведенной изъ угла B въ средину E противолежащаго бока.

Смотри Recueil des Propositions de M. Puissant.

О кругѣ.

377. Разстояніе R точки $M(x, y)$ отъ начала C (чер. 193) есть $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$; слѣд. уравненіе круга будетъ

$$x^2 + y^2 = R^2 \ldots\ldots (1),$$

ибо для всѣхъ точекъ онаго разстояніе R постоянно.

Также докажется, что

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \ldots\ldots (2),$$

есть уравненіе круга, косго центръ имѣетъ сопряженными α и β. Такъ, что если начало находится на концѣ O діаметра, то $\alpha = R$, $\beta = 0$ и $(x-R)^2+y^2=R^2$ или

$$y^2 = 2Rx - x^2.$$

Если x и y составляютъ уголъ γ, то въ треуг.-кѣ CPM уголъ $P = 180^0 - \gamma$, и постоянное разстояніе $CM = R$ всѣхъ точекъ окружности отъ центра C, принятаго за начало, получится изъ урав. D (ч.ч. 355,): слѣд. въ такомъ случаѣ уравненіе круга будетъ

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma = R^2 \quad \ldots \quad 5).$$

Полезно упражняться въ изслѣдованіи начертанія и свойствъ кривой линіи изъ уравненія оной: хотя все сіе извѣстно уже для круга, но мы воспользуемся столь легкимъ примѣромъ, дабы изъяснить, какимъ образомъ по уравненіямъ кривыхъ достигаютъ сей цѣли.

378. Такъ какъ $y = \pm\sqrt{(R^2 - x^2)}$; слѣд каждой абсциссѣ (чер. 193) соотвѣтствуютъ двѣ равныя ординаты съ противными знаками; такъ что прямая Ox дѣлитъ кривую на двѣ совмѣщающіяся части. Тоже можно сказать и о Dx; положивъ $x = 0$, получимъ $y = \pm R$, и точки кривой y и D; чѣмъ x возрастаетъ, тѣмъ $\sqrt{(R^2 - x^2)}$, или y уменьшается, наконецъ, когда $x = R$, то $y = 0$: и такъ кривая yMA склоняется къ оси x и пересѣкаетъ оную въ A. Кривая не простирается за CA, ибо въ такомъ случаѣ y дѣлается мнимымъ. Изъ сихъ понятій произходитъ начертаніе кривой.

Уравн. всякой прямой OM, проведенной чрезъ точку $O = R, 0)$ есть $y = a'x + R)$; также для $A(+B, 0)$, уравненіе прямой MA будетъ $y = a'(x - R)$; сопряженныя точки M сѣченія сихъ двухъ линій, будутъ

$$x = \frac{a' + a}{a' - a} \cdot R, \quad y = \frac{2aa'R}{a' - a}.$$

Чтобы сія точка находилась на окружности, надлежитъ симъ величинамъ удовлетворить уравненію

$x^2+y^2=R^2$; а посему $aa'(1+aa')=0$ есть условное уравненіе, выражающее пересѣченіе двухъ хордъ на окружности. Откуда $a=0$, или $a'=0$, или наконецъ $1+aa'=0$; два первыя уравненія показываютъ, что условіе выполняется, когда одна изъ хордъ сливается съ діаметромъ, но сіе ни къ чему не служитъ: послѣднее же $1+aa'=0$ означаетъ, что если двѣ хорды между собою перпендикулярны, то онѣ пересѣкаются на окружности.

Изъ уравненія $y^2=R^2-x^2=(R+x)(R-x)$, въ которомъ $R+x=OP$, $R-x=AP$, слѣдуетъ, что PM есть средняя пропорціональная между OP и PA.

Длина хорды MA есть $\sqrt{[y^2+(R-x)^2]}$; слѣд. $AM^2=2R^2-2Rx=2R(R-x)$; и такъ MA есть средняя пропорціональная между AP и діаметромъ AO.

379. Чтобы сыскать точки сѣченія прямой MN съ кругомъ NKI (чер. 194), то изъ уравненій сихъ линій $y=ax+b$ и $x^2+y^2=R^2$, опредѣляютъ x и y; откуда

$$x=\frac{-ab\pm\sqrt{[R^2(1+a^2)-b^2]}}{1+a^2}=-\frac{a\delta\pm\sqrt{(R^2-\delta^2)}}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

положивъ $\delta=\frac{b}{\sqrt{(1+a^2)}}=$ разстоянію Ci прямой отъ центра вышесказаннаго круга (чл. 374. При семъ представляются три случая:

1-е. Когда корень мнимой или $\delta>R$, то прямая не пересѣкается съ кругомъ.

2-е. Когда корень дѣйствителенъ или $\delta<R$, то будутъ двѣ точки сѣченія; и какъ ось x можно сдѣлать параллельною пересѣкающей MN, или $a=0$, то $x=\pm\sqrt{(R^2-b^2)}$. Знакъ $\pm$ доказываетъ, что радіусъ перпендикулярный къ хордѣ, дѣлитъ оную по-поламъ.

3-е. Наконецъ, если корень равенъ нулю, то $\delta=R$ и прямая пересѣкаетъ кругъ только въ одной точкѣ, т. е. касается онаго. Пусть x' и y' будутъ сопряженныя точки T касанія; получимъ:

$$x' = \frac{-ab}{1+a^2}, \quad y' = ax' + b,$$

ошкуда $a = -\frac{x'}{y'}$, $b = \frac{x'^2+y'^2}{y'} = \frac{R^2}{y'}$.

Но уравн. радіуса CT (черт. 194), проведеннаго въ точку касанія $T(x', y')$, есть $y = a'x$, слѣд. $a' = \frac{y'}{x'}$; ошкуда $aa' = -1$: сіе означаетъ (чл. 370), что радіусъ перпендикуляренъ къ касательной; $y = ax + b$ обращается въ

$$yy' + xx' = R^2;$$

это есть урав. касательной къ кругу въ какой-нибудь точкѣ (x', y') окружности.

Если желаютъ провести касательную MT чрезъ точку $M(\alpha, \beta)$, находящуюся внѣ окружности, то надлежитъ опредѣлить сопряженныя x', y' точки T касанія; оныя должны удовлетворять уравненію круга и касательной; слѣд.

$$x'^2 + y'^2 = R^2, \quad \beta y' + \alpha x' = R^2.$$

Чрезъ выключеніе получимъ уравненія 2-й степени въ x' и y', такъ что будетъ двѣ точки касанія T и T', а посему и двѣ касательныя MT и MT', проведенныя чрезъ данную точку M. Вмѣсто того, чтобы рѣшать сказанныя уравненія, замѣтимъ, что оныя существуютъ вмѣстѣ, только для постоянныхъ сопряженныхъ x' и y' точки касанія, такъ что если возьмутъ одно только 2-е уравн., то y' и x' сдѣлаются перемѣнными; сверхъ того $\beta y + \alpha x = R^2$ будетъ уравн. прямой TT', проходящей чрезъ точки касанія; ибо сопряженныя оныхъ x' и y' удовлетворяютъ сему уравненію. Легко начертить сію прямую (чл. 368), и сыскать точки касанія и касательныя.

Положивъ $y = 0$ получимъ абсциссу точки B, гдѣ хорда TT' пересѣкаетъ ось x; $CB = \frac{R^2}{\alpha}$; поелику сія величина независима отъ β или PM, слѣд. если точка

M движется по PM, то положеніе касательныхъ измѣняется, а хорда TT' обращается вокругъ постоянной точки B. (См. чл. 415 и 464, IV).

Можно также построить урав., требующее прежняго геометрическаго построенія (чл. 208, II). Для сего вычтемъ одно уравненіе изъ другаго и разсмотримъ только сію разность: x' и y' суть перемѣнныя количества, и сопряженныя точки касанія T или T', должны удовлетворять урав. $y^2-\beta y+x^2-\alpha x=0$, которое можно представить чрезъ

$$(y-\tfrac{1}{2}\beta)^2+(x-\tfrac{1}{2}\alpha)^2=\tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2).$$

Слѣд. кривая, выраженная симъ уравненіемъ, проходитъ чрезъ обѣ точки касанія; и такъ сія кривая есть кругъ, коего центръ находится въ $m(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$, а радіусъ $=\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{4}\beta^2)}$. Посему, если сдѣлаемъ $Cp=\frac{1}{2}CP$, $pm=\frac{1}{2}PM$, то m будетъ центръ, а Cm радіусъ круга, проходящаго чрезъ искомыя точки касанія T и T'.

380. Возьмемъ два круга C и C' (чер. 26), начало въ C, и $CC'=a$ на оси x; урав. круга C будетъ $x^2+y^2=R^2$; а урав. C', $(x-a)^2+y^2=R'^2$. Опредѣливъ изъ сихъ уравненій x и y получимъ для точекъ пересѣченія:

$$x=\frac{a^2+R^2-R'^2}{2a},\quad y=\pm\frac{\sqrt{[4a^2R^2-(a^2+R^2-R'^2)^2]}}{2a}.$$

Абсцисса имѣетъ одну величину, ординаты двоякую, слѣд. прямая CC', соединяющая центры, перпендикулярна въ срединѣ къ хордѣ MN.

Изъ сихъ уравненій легко найти условія тѣхъ случаевъ, когда круги пересѣкаются или касаются (чл. 191: въ самомъ дѣлѣ, поступая съ корнемъ какъ на стр. 376-й, получимъ, что оный

$$=(a+R+R')(a+R-R')(R+R'-a)(R'+a-R).$$

Допустимъ, что $R=$ или $>R'$; первые два множителя будутъ положительные, и останется только разсмотрѣть случаи, происходящіе отъ множителей $R+R'-a$ и $R'+a-R$.

1-е. Если послѣдніе два множителя имѣютъ знаки одинакіе, то они не могутъ быть съ —, ибо не возможно, чтобы было въ одно время $a > R + R'$ и $< R - R'$; и такъ, если корень дѣйствителенъ, то окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ, и когда $a < R + R'$, и $> R - R'$.

2-е. Если одинъ изъ двухъ множителей равенъ нулю, то $a = R + R'$, или $a = R - R'$; откуда $y = 0$, $x = R$; круги имѣютъ только одну общую точку, находящуюся на прямой, соединяющей ихъ центры; это есть случай касанія.

3-е. Наконецъ, когда знаки противные, т. е.

$$a > R + R' \text{ и } R - R' \text{ или } a < R - R' \text{ и } R + R',$$

то какъ 1-е условіе заключаетъ 2-е, слѣд. круги не имѣютъ ни одной общей точки, когда

$$a > R + R' \text{ или } < R - R'.$$

381. Вотъ нѣсколько другихъ задачъ для рѣшенія:

I. Къ данному кругу провести касательную, параллельную данной прямой.

II. Провести касательную къ двумъ даннымъ кругамъ.

III. Начертить окружность касательную къ данному кругу и къ двумъ даннымъ прямымъ, (центръ находится на прямой, разсѣкающей данный уголъ по поламъ).

Преобразованіе сопряженныхъ.

382. Уравн. кривой иногда столь сложно, что чрезвычайно трудно извлекать изъ онаго ея свойства; но случается, что сія сложность происходитъ отъ сопряженныхъ осей, къ которымъ отнесена кривая. На пр. видѣли, что уравненія круга суть $y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2$, $y^2 = 2Rx - x^2$, $x^2 + y^2 = R^2$; сіе послѣднее отъ того проще другихъ, что начало въ центрѣ, а посему надлежитъ, для сокращенія вы-

водовъ, умѣешь преобразовывать уравн. кривой, относя оную къ другимъ осямъ.

Пусть сопряженныя оси были Ax, Ay (чер. 195), составлявшія какой-нибудь уголъ A, и положимъ, что желаютъ взять другія *оси* A′x′, A′y′, *параллельныя* 1-мъ. Пусть будутъ $AB = a$, $BA' = b$, сопряженныя новаго начала; $AP = x$, $PM = y$, сопряженныя точки M; $A'C = x'$, $CM = y'$ новыя сопряженныя. Получимъ $AP = BP + AB$, $PM = MC + CP$, или
$$x = x' + a,\ y = y' + b \ldots . (A).$$

Подставя сіи величины въ уравненіе кривой, заключающее x и y, получимъ другое между x' и y', и начало перемѣстится въ A' (a, b). Кромѣ сего, знаки при a и b должны завнсѣть отъ положенія новаго начала A', относительно прежняго A; такъ что еслибъ оное находилось въ D, то a было положительное, а b отрицательное, и тогда $x = x' + a$, и $y = y' - b$, и проч.

585. Положимъ, что вмѣсто *первобытныхъ прямоугольныхъ осей* Ax и Ay (чер. 196) желаютъ, неизмѣняя начала A, принять новыя оси Ax' и Ay'. Назовемъ (xx') уголъ xAx', составленный осями x и x', также (xy') уголъ xAy'.... Для какой-нибудь точки M, $AP = x$, $PM = y$, $AL = x'$, $ML = y'$, требуется x и y выразить посредствомъ x' и y' и данныхъ угловъ (xx'), (xy'), опредѣляющихъ положеніе новыхъ осей. Получимъ $x = AK + LI$, и такъ *абсцисса* x *есть проложеніе на оси* x *части многоугольника* ALM; также $y = LK + IM$. Но изъ треуг.-въ AKL, LIM (ч. 354, *A*)
$$AK = x' \cos(xx'),\ KL = x' \sin(xx'),$$
$$LI = y' \cos(xy'),\ MI = y' \sin(xy');$$
слѣд.
$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos(xx') + y' \cos(xy') \\ y &= x' \sin(xx') + y' \sin(xy') \end{aligned}\right\} \ldots . (B).$$

Если новыя оси тоже прямоугольны (чер. 197), то $(xy') = 90^0 + (xx')$; слѣд.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos(xx') - y'\sin(xx') \\ y &= x'\sin(xx') + y'\cos(xx') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (C).$$

Что непосредственно выводится изъ треуг.-въ AKL, LIM; ибо

$$AK = x'\cos(xx'),\ KL = x'\sin(xx'),$$
$$LI = y'\sin(xx'),\ IM = y'\cos(xx'),$$

и сверхъ сего $x = AK - IL$, $y = LK + MI$.

384. Положимъ наконецъ (чер. 196), что *оси* Ах, Ау *имѣютъ какое-нибудь наклоненіе, также какъ и* Ах′, Ау′. Чтобы перейти отъ 1-хъ ко 2-мъ, рѣшимъ косоугольные треуг.-ки ALK, LMI; получимъ (чл. 355)

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin ALK}{\sin AKL},\ \text{откуда}\ AK = \frac{x'\sin(x'y)}{\sin(xy)},$$

$$KL = \frac{x'\sin(xx')}{\sin(xy)},\ LI = \frac{y'\sin(yy')}{\sin(xy)},\ IM = \frac{y'\sin(xy')}{\sin(xy)};$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'\sin(x'y) + y'\sin(yy')}{\sin(xy)} \\ y &= \frac{x'\sin(xx') + y'\sin(xy')}{\sin(xy)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (D).$$

Когда первобытныя оси Ах, Ау *косвенныя, а новыя* Ах′, Ау′ *прямоугольныя* (чер. 197), то достаточно здѣсь положить $(x'y') = 90^0$, или $(x'y)$ пополненіемъ (yy'); отъ чего

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'\sin(x'y) + y'\cos(x'y)}{\sin(xy)} \\ y &= \frac{x'\sin(xx' + y'\cos xx')}{\sin xy)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (E).$$

Мы вездѣ предполагали ось х′ *выше оси* х и проч.; но сіе бываетъ не во всѣхъ случаяхъ, къ коимъ желаютъ приложить сіи формулы; тогда надлежитъ измѣнить знаки sin и cos по правиламъ непрямыхъ чертежей (чл. 339), сравнивая положеніе осей въ дѣлаемомъ примѣненіи съ положеніемъ оныхъ въ черт. 196 и 197. На пр. если ось x' ниже Ax, то должно принять $\sin(xx')$ отрицательнымъ, а $\cos(xx')$ положительнымъ.

585. До сихъ поръ мы опредѣляли положеніе точки, только посредствомъ разстояній оной отъ двухъ осей; но для сего есть много различныхъ способовъ, доставляющихъ столько же родовъ сопряженныхъ. Положимъ на пр., что извѣстны разстоянія r и r' какой-нибудь точки, отъ двухъ другихъ данныхъ; опишемъ изъ оныхъ какъ центровъ окружности радіусами r и r', которыхъ пересѣченіе означитъ сію точку. Таковыя сопряженныя, равно какъ и многія другія, неупотребительны, ибо онѣ производятъ сложныя вычисленія. (См. Géometrie de position, соч. Карно, стр. 425.)

Остановимся на *полярныхъ сопряженныхъ*, которыя часто употребляются, ибо доставляютъ легчайшій анализъ. Положеніе точки M (чер. 199 опредѣляется разстояніемъ оной $AM = r$, отъ постоянной точки A, называемой *полюсомъ*, и угломъ $PAM = \theta$, составляемымъ сею прямою AM съ данною постоянною Ax; AM есть *радіусъ векторъ* точки M.

Полярное урав. кривой есть отношеніе между r и θ, существующее для всѣхъ ея точекъ. Если радіусъ AM обращается около A, и длина онаго измѣняется по мѣрѣ обращенія, т. е. вмѣстѣ съ θ, такъ что урав. между θ и r всегда удовлетворяется, то оконечность M радіуса вектора опишетъ кривую MN.

Изъ прямоугольнаго треуг.-ка AMP, гдѣ $AP = x$, $PM = y$, получимъ

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Итакъ, чтобы перейти отъ сопряженныхъ осей x и y къ полярнымъ r и θ, надлежитъ сначала отнести урав. къ прямоугольнымъ сопряженнымъ, если оныя были косвенныя; принять за начало A, долженствующее быть полюсомъ; наконецъ прямую Ax, отъ которой считаются дуги θ, за ось x. Потомъ подставить $r.\cos\theta$ и $r.\sin\theta$, вмѣсто x и y.

Обратно, если имѣемъ урав. кривой между r и θ,

мо выключивъ изъ онаго сіи перемѣнныя, помощію предыдущихъ отношеній, перейдутъ къ прямоугольнымъ сопряженнымъ x и y.

Возьмемъ на пр. уравн. (2) (чл. 377) круга, коего сопряженныя центра C (чер. 198) суть α и β; вставя величины x и y, оное обратится въ

$$r^2 - 2r(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

1-е. При каждомъ радіусѣ векторѣ r, разстояніе начала A отъ кривой, имѣетъ двѣ величины AM и AN.

2-е. Произведеніе обоихъ корней r есть (чл. 157, 3-е)

$$MA \times AN = \alpha^2 + \beta^2 - R^2,$$

величина не зависимая отъ θ; слѣд. если изъ какой-нибудь постоянной точки A, проведутъ произвольныя прямыя, то произведеніе $AM \times NA$ обоихъ радіусовъ векторовъ, будетъ постоянно для всѣхъ пересѣкающихъ (чл. 221 и 224).

3-е. Возьмемъ полюсъ въ точкѣ B, гдѣ-нибудь на діаметрѣ BCx, $\beta = 0$, отъ чего всеобщность ни мало не потерпитъ, и получимъ

$$r = \alpha\cos\theta \pm \sqrt{(R^2 - \alpha^2\sin^2\theta)};$$

α есть разстояніе BC полюса отъ центра. Разность сихъ корней есть хорда $MN = 2\sqrt{(R^2 - \alpha^2\sin^2\theta)}$, а θ уголъ направленія оной. Посему положеніе хорды, проведенной чрезъ данную точку B, опредѣлится по извѣстной ея длинѣ m, ибо $\alpha\sin\theta = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}m^2)}$.

4-е. Пересѣкающая BM обращается около B; отъ измѣненія θ, радіусъ векторъ здѣлается касательною къ кругу, когда хорда MN будетъ нуль, или $R = \pm\alpha\sin\theta$; тогда $r = \alpha\cos\theta$, откуда $\operatorname{tg}\theta = \frac{R}{r}$; сіе уравн. опредѣляетъ направленіе касательной BT, проведенной чрезъ точку B данную внѣ. Сумма квадратовъ нашихъ уравненій есть $R^2 + r^2 = \alpha^2$, откуда $r^2 = \alpha^2 - R^2 = (\alpha + R)(\alpha - R)$, произведенію двухъ величинъ всякаго другаго радіуса вектора (чл. 225).

5-е. Полагая β, какъ и прежде, равнымъ нулю, и если

послѣдній членъ обратится также въ нуль, или $\alpha^2 - R^2$, то полюсъ будетъ на концѣ I діаметра, и хорда $IL = 2R\cos\theta$; возьмемъ другой кругъ IK, касательный къ 1-му въ полюсѣ; при томъ же радіусѣ векторѣ, хорда $IK = 2R'\cos\theta$; слѣд. $\frac{IL}{IK} = \frac{R}{R'}$ или *хорды содержатся какъ радіусы.*

6-е. Наконецъ, если полюсъ въ центрѣ, то $\alpha = \beta = \theta$, откуда $r = R$, какой бы величина θ ни была, что очевидно.

IV. КОНИЧЕСКІЯ СѢЧЕНІЯ.

Уравненія коническихъ сѣченій.

386. Требуется вывесть урав. кривой AMO (чер. 200), происходящей отъ пересѣченія прямаго конуса IDB съ какою-нибудь плоскостью OA.

Если чрезъ ось BK, къ плоскости сѣченія проведемъ перпендикулярную плоскость BDI, (она будетъ также перпендикулярна и къ основанію, чл. 272), то сѣченіе сихъ плоскостей образуетъ прямую AO, *положеніе оси конуса на плоскости сѣченія;* сію-то линію называютъ *осью* коническаго сѣченія. Чрезъ какую-нибудь точку P сей оси, проведемъ плоскость параллельную основанію DI; сѣченія оной съ конусомъ, и разсѣкающею плоскостію, будутъ кругъ FMG и прямая PM, которая есть ордината, общая обѣимъ кривымъ; ибо она перпендикулярна (чл. 273) къ FG и AO.

И такъ, пусть $AP = x$, $PM = y$; опишемъ отношеніе между x, y и величинами данными въ вопросѣ, которыя суть: уголъ $BAO = \alpha$; уг. $DBI = \beta$ и $AB = c$. Изъ свойствъ круга: $y^2 = FP \times PG$; опредѣлимъ FP и PG.

Изъ треугольниковъ AFP, POG и ABO получимъ (*C*, чл. 555)

$\frac{\sin\alpha}{\sin F} = \frac{PF}{x}$; $\frac{\sin O}{\sin G}$ или $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin F} = \frac{PG}{PO} = \frac{PG}{AO-x}$,

$\frac{\sin O}{AB}$ или $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{c} = \frac{\sin\beta}{AO}$; откуда $AO = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Но въ треуг.-кѣ BHF, уг. F есть пополненіе $\frac{1}{2}\beta$, слѣд.

$$FP = \frac{x\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta},\quad PG = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\beta}\left(\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - x\right),$$

и искомое уравненіе будетъ

$$y^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}[cx\sin\beta - x^2\sin(\alpha+\beta)] \quad \ldots\ (A).$$

Дабы получить всѣ коническія сѣченія, достаточно давать плоскости сѣченія всѣ возможныя положенія, т. е. обращать прямую AO около точки A, и измѣнять также $AB = c$. При семъ представляется три случая.

1-е. Если $\alpha+\beta < 180^0$, то плоскость сѣченія встрѣчается со всѣми образующими прямыми (*génératrices*), по одну сторону вершины; кривая будетъ линія замкнутая и называется *эллипсисомъ*: (A) есть уравн. онаго.

2-е. Когда $\alpha+\beta = 180^0$, то плоскость сѣченія параллельна образующей BI (чер. 201); кривая простирается до безконечности, и называется *параболою*; положивъ въ нашемъ уравненіи $\sin(\alpha+\beta) = 0$, оное обратится (G, чл. 357) (*) въ

$$y^2 = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\cdot cx = 4cx\sin^2\tfrac{1}{2}\beta.$$

3-е. Наконецъ, когда $\alpha+\beta > 180^0$, то плоскость сѣченія встрѣчаетъ обѣ части конической поверх-

---

(*) Здѣсь можно бы повторить предыдущія разсужденія; FP (чер. 201) сохраняетъ вышеозначенную величину, сдѣлавъ въ оной $\sin\alpha = \sin\beta$; слѣд. $FP = \frac{x\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}$; кромѣ сего AL параллельная FG, составляетъ треуг. ABL, изъ коего

$$\frac{\sin\beta}{\sin BAL},\ \text{или}\ \frac{\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{AL}{BL} = \frac{PG}{c},\ \text{и проч.}$$

ности, находящейся по обѣ стороны вершины; слѣд. кривая составлена изъ двухъ вѣтвей $M'AN'$, $LO'Q$ (чер. 200), простирающихся въ противныя стороны до безконечности, и называется *гиперболою*. Какъ скоро $\alpha+\beta>180^0$, то знакъ при синусѣ сего угла перемѣнится, и получимъ

$$y^2=\frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}[cx\sin\beta+x^2\sin(\alpha+\beta)].$$

Впрочемъ, сіи уравненія могутъ сократиться, 1-е, положивъ $p=2c\sin^2\frac{1}{2}\beta$; *уравненіе параболы* будетъ $y^2=2px$.

Если означимъ чрезъ $2a$ *разстояніе* AO *между вершинами*, именуемое длиною *большой оси*, то $2a=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, и *уравненія эллипсиса* и *гиперболы* будутъ

$$y^2=\frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}(2ax\mp x^2) \text{ или } y^2=K(2ax\mp x^2),$$

означая чрезъ K предшедшій 2-го члена.

387. Во всемъ предъ симъ сказанномъ ничего не перемѣнится, когда β и c, т. е. размѣръ конуса и разстояніе AB будутъ измѣняться. Не возможно положить $\beta=0$, или $\beta=180^0$, ибо въ семъ случаѣ конусъ исчезаетъ; также $c=0$ предполагаетъ, что пересѣкающая плоскость проходитъ чрезъ вершину. Тогда сѣченіе будетъ *точка*, если $\alpha+\beta<180^0$; или *прямая*, если $\alpha+\beta=180^0$ (плоскость касается конуса); или наконецъ *двѣ прямыя*, если $\alpha+\beta>180^0$. Сіи три случая заключаются также и въ уравненіи; ибо полагая $c=0$ въ уравн. (A), помнимъ $\sin(\alpha+\beta)$ положительнымъ, нулемъ и отрицательнымъ, получимъ

$$y^2+Kx^2=0,\quad y=0,\quad y^2=Kx^2.$$

1-е уравн. удовлетворяется (чл. 112) тогда только, когда $x=0$ и $y=0$, посему оно изображаетъ *точку*; второе принадлежитъ *прямой*; наконецъ изъ третьяго $y=\pm x\sqrt{K}$, что представляетъ *двѣ прямыя*.

И такъ, для всякаго конуса и при всякомъ положеніи плоскости сѣченія, урав. (A) есть общее всѣмъ *видамъ коническимъ сѣченіямъ*; когда $c = 0$, то получается при сѣченія, проходящія чрезъ вершину, когда же c не равно нулю, то сіе уравн. *представляетъ эллипсисъ, гиперболу* или *параболу, смотря потому, будетъ ли предстоящій при* x^2 *отрицательный, положительный или нуль.*

388. Возьмемъ уравненія сихъ кривыхъ, дабы разсмотрѣть ихъ теченіе. Замѣтимъ, что всякой абсциссѣ соотвѣтствуютъ двѣ равныя величины y, съ противными знаками; слѣд. ось x пересѣкаетъ каждую изъ нашихъ трехъ кривыхъ на части равныя и совмѣщающіяся. Точки, гдѣ сія ось пересѣкаетъ кривую, называются *вершинами.*

1-е. Урав. параболы есть $y^2 = 2px$; но отрицательный x дѣлаетъ y мнимымъ, слѣд. кривая простирается только по правую сторону оси ординатъ Ay (чер. 202); съ возрастаніемъ x, увеличивается и y до безконечности; посему кривая состоитъ только изъ одной вѣтви MAM', безпрестанно расходящейся, и имѣетъ одну только вершину A.

2-е. Урав. эллипсиса (чер. 203) есть $y^2 = K.2ax - x^2$, гдѣ $AO = 2a$; а K есть извѣстная величина, зависящая отъ размѣра конуса и положенія пересѣкающей плоскости; перемѣнный множитель $(2a - x)x$ тогда только положителенъ, т. е. y въ томъ только случаѣ дѣйствителенъ, когда x положительный и $< 2a$; слѣд. кривая не простирается за вершины A и O. На семъ разстояніи AO, ординаты сначала возрастаютъ, и потомъ уменьшаются (чл. 97, 3-е); наибольшая ордината произойдетъ при равенствѣ обоихъ множителей, $x = 2a - x$, или $x = a = AC$, отъ сего $y = \pm a\sqrt{K}$; и такъ наибольшее разстояніе BC находится въ срединѣ AO; означимъ оное чрезъ $b = a\sqrt{K}$; $2a = AO$ есть *большая ось;* $2b = BD$ есть *малая ось.*

Выведя величину K и подставя, найдемъ, что *уравн. эллипсиса, отнесеннаго къ осямъ и къ вершинѣ* A, принятой за начало, будетъ

$$a^2y^2 = b^2(2ax - x^2).$$

Для удобнѣйшаго изслѣдованія теченія кривой отъ A къ O, перенесемъ начало въ средину C большой оси. C есть *центръ* кривой. Сдѣлаемъ $x = x' + a$, получимъ

$$a^2y^2 + b^2x'^2 = a^2b^2;$$

сіе есть уравн. *эллипсиса, отнесеннаго къ осямъ и къ центру*; x' находится только во 2-й степени, слѣд. каждой величинѣ y соотвѣтствуютъ двѣ равныя и противоположныя *абсциссы*; а сіе означаетъ, что обѣ части BAD, BOD совмѣщаются, когда чертежъ перегнутъ по линіи BD.

3-е. Разсмотримъ такимъ же образомъ гиперболу (чер. 204). Уравн. оной есть $y^2 = K(2ax + x^2)$; y возрастаетъ съ увеличиваніемъ x до безконечности, отъ чего произойдетъ вѣтвь MAM', почти также отверстая, какъ въ параболѣ. При отрицательномъ x, перемѣнный множитель $2ax + x^2$ обратится въ $x(x - 2a)$ и y тогда только дѣйствительнъ, когда $x > 2a$, слѣд. кривая не простирается между двухъ вершинъ A и O; наконецъ y возрастаетъ вмѣстѣ съ x, когда абсцисса перейдетъ $2a$, отъ чего произойдетъ другая вѣтвь, противоположная 1-й, и расходящаяся до безконечности.

Перенесемъ начало въ центръ C, служащій срединою 1-й оси AO; сдѣлавъ $x = x' - a$, получимъ $y^2 = K(x'^2 - a^2)$; здѣсь какъ въ эллипсисѣ новая ось BD пересѣкаетъ чертежъ на двѣ совмѣщающіяся части, ибо x находится только во 2-й степени; какъ сіе уравн. различествуетъ отъ уравненія эллипсиса только въ знакѣ, то всѣ предыдущія выводы приличествуютъ равномѣрно и гиперболѣ. Опишемъ нижнюю ординату, соотвѣтствующую центру C, положивъ $x' = 0$;

она будетъ $y = a\sqrt{-K}$; если чрезъ перемѣну знака подъ корнемъ, обращаемъ сію величину въ дѣйствительную, и чрезъ b изобразимъ $a\sqrt{K}$, тогда сія величина b называется *половиною второй оси гиперболы;* она есть *ордината при центрѣ сдѣланная дѣйствительною.* Подставя вмѣсто K его величину, уравн. гиперболы превратится въ

$a^2y^2 = b^2\ 2ax + x^2$, или $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$,

смотря потому, находится ли начало въ вершинѣ или въ центрѣ C.

389. Сравнивъ уравн. эллипсиса и гиперболы, отнесенныхъ къ центру, замѣтимъ, что 1-е обращится во 2-е, когда вмѣсто b поставимъ $b\sqrt{-1}$. Сіе простое средство достаточно, чтобъ алгебраическія окончательныя выраженія, полученныя для одной кривой, превращать въ соотвѣтственныя имъ для другой.

390. Общее уравн. коническихъ сѣченій, когда начало въ вершинѣ, есть $y^2 = mx + nx^2$; оно принадлежитъ:

1-е. Параболѣ, когда $n = 0$, $m = 2p$);

2-е. Эллипсису, когда $n = -\frac{b^2}{a^2}$, и $m = \frac{2b^2}{a}$.

3-е. Наконецъ гиперболѣ, когда $n = \frac{b^2}{a^2}$, $m = \frac{2b^2}{a}$.

О параболѣ.

391. Изъ самаго образованія параболы слѣдуетъ (чл. 386), что сія кривая есть *эллипсисъ, коего большая ось безконечна.*

Возьмемъ двѣ точки (x', y'), (x'', y'') параболы; получимъ $y'^2 = 2px'$; $y''^2 = 2px''$; $\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{x'}{x''}$,

или *квадраты ординатъ содержатся какъ соотвѣтственныя абсциссы.*

Если постоянное $2p$ неизвѣстно, то оно опредѣлится на всякой данной точкѣ кривой линіи; $2p$ есть третья пропорціональная къ абсциссѣ и ординатѣ.

392. Уравн. $y^2 = 2px$ опредѣляетъ произвольное число точекъ кривой, и ведетъ также къ слѣдующему построенію; возьмемъ $AB = 2p$ (чер. 202), и какъ y есть средняя пропорціональная между AB и x, то опишемъ кругъ BCP, проходящій чрезъ B, и имѣющій центръ въ какой-нибудь точкѣ оси AP, ордината AC сего круга, будетъ y, соотвѣтствующій абсциссѣ $AP = x$. Прямыя CM, PM параллельныя x и y, опредѣляютъ точку M кривой. Повторяя сіе построеніе, получатъ другія точки.

393. Возьмемъ произвольную точку (α, β); разстояніе оной δ отъ какой-нибудь точки (x, y) кривой, выражается чрезъ

$$\delta^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2.$$

Опредѣлимъ α и β изъ условія, что δ *раціонально относительно абсциссы всякой точки кривой*; т. е. что x въ выраженіи δ не находится подъ корнемъ. Подставя въ оное $y = \sqrt{(2px)}$ означающее, что точка (x, y) на кривой, замѣтимъ, что δ^2 не будетъ раціональною величиною относительно x, покуда y въ выраженіи δ^2 находится въ первой степени, а тѣмъ болѣе δ не можетъ быть цѣлою; и цѣлъ членъ $2\beta y$ долженъ уничтожиться, отъ чего $\beta = 0$ и

$$\delta^2 = x^2 + 2x(p-\alpha) + \alpha^2;$$

но сіе прехчленное количество тогда только можетъ быть полнымъ квадратомъ (чл. 138), когда

$$\alpha^2 = (p-\alpha)^2 \text{ или } 0 = p^2 - 2p\alpha;$$

слѣд. $$\alpha = \tfrac{1}{2}p, \ \beta = 0, \ \delta = x + \tfrac{1}{2}p.$$

И такъ, если на оси Ax (чер. 205), отложимъ $AF = \frac{1}{2}p$, то $FM = \delta$, выражающее разстояніе точки F отъ всѣхъ точекъ кривой, будетъ раціонально относительно x; сіе есть отличительное свойство сей точки F, называемой *фокусомъ*.

Если въ уравненіи $y^2 = 2px$, положимъ $x = \frac{1}{2}p$, то найдемъ $y = \pm p$, и такъ *удвоенная ордината* GH,

проходящая чрезъ фокусъ и называемая *параметромъ* $= 2p$.

Такъ какъ $FM = AP + \frac{1}{2}p$, то отложивъ $AD = \frac{1}{4}p$ и проведя DQ параллельно оси y, получимъ $QM = FM$; DQ называется *директриссою*; ясно, *что всѣ точки кривой равно отстоятъ отъ фокуса и отъ директриссы*. На семъ основывается простой способъ построенія параболы. Означивъ фокусъ F и точку D (разстоянія сихъ точекъ отъ верха A равно $\frac{1}{2}p$ или четверти параметра), проводятъ не опредѣленную ординату MM', потомъ изъ фокуса F, какъ центра, радіусомъ PD описываютъ дугу, пересѣкающую прямую MM' въ двухъ точкахъ M и M', принадлежащихъ кривой.

394. Легко отыскать полярное уравн. параболы; ибо принявъ фокусъ за полюсъ, и перенеся въ оный начало, величина δ будетъ $= FP + p$; потомъ сдѣлавъ $FP = -\delta\cos\theta$, гдѣ θ означаетъ уг. AFM, получимъ $\delta = \frac{p}{1+\cos\theta}$.

Объ эллипсисѣ.

395. Возьмемъ двѣ точки (x', y'), (x'', y'') эллипсиса, полагая начало въ вершинѣ A (чер. 205); изъ уравн. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, получимъ $\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{(2a-x')x'}{(2a-x'')x''}$; Но когда $AP = x$, то $PO = 2a - x$; слѣд. *квадраты ординатъ, содержатся какъ произведенія разстояній подошвъ сихъ ординатъ отъ двухъ вершинъ*.

Когда начало въ центрѣ, то уравн. будетъ

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

которое, въ случаѣ $a = b$, обращается въ $y^2 + x^2 = a^2$, слѣд. *кругъ есть эллипсисъ, имѣющій равныя оси*.

Принявъ x за y и y за x, уравн. превратится въ $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$; и такъ если возьмутъ за ось

абсциссъ AO или BD, видъ уравненія кривой не измѣнится.

Урави. круга, описаннаго изъ центра C радіусомъ AC, будетъ $Y^2 = a^2 - x^2$, а для эллипсиса $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Сравнивъ ординаты y и Y, соотвѣтствующія въ эллипсѣ и въ кругѣ той же абсциссѣ x, получимъ $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$; и такъ отношеніе сихъ ординатъ постоянно; посему y всегда $< Y$; т. е. что кругъ описанный на большой оси, включаетъ въ себѣ эллипсисъ: а описанный на малой оси BD, заключается въ эллипсѣ.

396. Изъ $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$, извлекается простое построеніе эллипсиса. Начертивъ оси AO и BD (чер. 203) и радіусами a и b два одноцентральные круга, пропятивающъ какой-нибудь радіусъ CN, и чрезъ точки Q и N, сѣченія онаго съ окружностями, проводимъ QM, NP параллельно осямъ: ихъ пересѣченіе M, будетъ точка эллипсиса; въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{PM}{PN} = \frac{CQ}{CN}, \text{ или } \frac{PM}{Y} = \frac{b}{a}, \text{ откуда } PM = y.$$

397. Изслѣдуемъ теперь, имѣетъ ли эллипсисъ *фокусъ*, т. е. точку (α, β), коей *разстояніе* δ *отъ каждой точки кривой было бы раціонально относительно ихъ абсциссъ* x. Такъ какъ $ay = b\sqrt{(a^2 - x^2)}$, то видно также, какъ и въ параболѣ, что y не должно входить въ 1-й степени, въ

$$\delta^2 = (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2,$$

и такъ $\beta = 0$. Подставя $b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ вмѣсто y^2,

$$\delta^2 = b^2 + a^2 - 2\alpha x + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x^2.$$

Сія величина, когда только есть полный квадратъ (ст. 138), когда

$$a^2 = (x^2 + b^2)\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right),$$

откуда $a^2 = a^2 - b^2$, и $\delta = \pm\left(a - \frac{\alpha x}{a}\right)$;

но α и $x < a$, слѣд. $\alpha x < a^2$; и такъ, чтобы δ было положительное, должно предпочесть знакъ $+$, и будетъ

$$\beta = 0,\ \alpha = \pm\sqrt{(a^2 - b^2)},\ \delta = a - \frac{\alpha x}{a}.$$

Двоякая величина абсциссы α показываетъ, что въ *эллипсисѣ два фокуса, находящіеся на большой оси въ равномъ разстояніи отъ центра* C (чер. 206). Положеніе ихъ опредѣлится, когда изъ оконечности B малой оси, описавъ радіусомъ a кругъ, который пересѣчетъ AO въ фокусахъ F и F'; ибо изъ треуг.-ка FBC, получаютъ $FC = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \alpha$. Для F берутъ α положительное, а для F' отрицательное; т. е.

$$FM = \delta = a - \frac{\alpha x}{a},\ F'M = \delta' = a + \frac{\alpha x}{a}.$$

Обратное сему произойдетъ, когда абсцисса точки M, отрицательная. Изъ сего слѣдуетъ, что $\delta + \delta' = 2a$; линіи FM, $F'M$ называются *радіусами векторами*. И такъ *въ эллипсисѣ сумма радіусовъ векторовъ равна большой оси.*

Сіе свойство доставляетъ весьма простый способъ *чертить эллипсисъ:* проведя оси и назначивъ фокусы F и F'; изъ F, какъ центра радіусомъ OK, равнымъ какой-нибудь части большой оси, описываютъ дугу; потомъ изъ другаго фокуса F', остаткомъ AK оси, описываютъ другую дугу, пересѣкающую первую въ M: сія точка принадлежитъ кривой; ибо $FM + F'M = AO$. Описывая дуги по обѣ стороны осей, получимъ вдругъ четыре точки.

Если кривая линія имѣетъ большой размѣръ, то въ фокусахъ F и F' укрѣпляютъ концы нити длиною въ $2a$, потомъ водя остріемъ, натягиваютъ

нить такъ, чтобъ она всегда находилась въ положеніи подобномъ $F'MF$. Остріе M начертитъ кривую.

398. *Эксцентриситетомъ* называютъ разстояніе FC: въ кругѣ оное равно нулю; ибо когда $a = b$, то $\alpha = 0$. Чѣмъ продолговатѣе эллипсисъ, тѣмъ фокусы болѣе расходятся: въ кругѣ они сливаются съ центромъ; δ имѣетъ величину наибольшую (maximum) когда $x = -a$, и наименьшую (minimum) когда $x = +a$; отнуда $\delta = a \pm \alpha$: и такъ изъ всѣхъ точекъ эллипсиса, A есть самая отдаленная, а O самая ближайшая точка отъ фокуса F. Оконечность B малой оси, находится *въ среднемъ разстояніи*, ибо $BF = a$.

Параметромъ называютъ двойную ординату, проходящую чрезъ фокусъ. Чтобъ отыскать оную, должно положить въ уравненіи $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, $x = \alpha$, или $x^2 = a^2 - b^2$, отъ чего получатъ $y = \pm \frac{b^2}{a}$.

Слѣд. параметръ $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$, *есть средняя пропорціональная между большою и малою осью.*

399. Отнесемъ эллипсисъ къ полярнымъ соприложеннымъ, полагая полюсъ въ фокусѣ: уравн. кривой можно бъ отыскать преобразованіемъ соприложенныхъ ч. 385; но удобнѣе взять величину δ, и перенесши начало въ фокусъ F', сдѣлавъ $x = x' + \alpha$, и $x' = \delta \cos \theta$, гдѣ θ означаетъ уг. $MF'O$; получимъ

$$\delta = \frac{a^2 - \alpha^2}{a + \alpha \cos \theta} = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

положивъ $\alpha = ae$, т. е. означивъ буквою e отношеніе *эксцентриситета* къ большой полуоси.

О гиперболѣ.

400. Уравн. гиперболы, когда начало въ вершинѣ A (чер. 204) есть $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$; слѣд. здѣсь какъ

въ эллипсѣ *квадраты ординатъ содержатся какъ произведенія разстояній* $AP = x$, $OP = 2ax + x^2$, подошвы ординатъ отъ двухъ вершинъ. Когда начало въ центрѣ, то урави. будетъ $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Если $a = b$, то гипербола называется *равностороннею*; урави. оной есть $y^2 - x^2 = -a^2$.

Перемѣнивъ x на y, урави. обратится въ $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$: видъ онаго ослался тотъ же кромѣ знака вторей части; въ семъ случаѣ, абсциссы x считаются по DB той изъ двухъ осей, которая не пересѣкаетъ кривой: и такъ это есть урави. гиперболы отнесенной къ 2-й оси (см. чер. 222, гдѣ C есть центръ).

Если на тѣхъ же осяхъ начертятъ эллипсисъ $ABOD$ (чер. 204), то оный будетъ заключатся между вершинами и распространяться въ длину по направленію x или y, смотря потому $a >$ или $< b$: если гипербола равносторонняя, то эллипсисъ обращается въ кругъ. Сіи кривыя имѣютъ общія или сходныя свойства, которыя можно найти въ *Геометріи положеній* Г-на Карно (Géométrie de position, p. 143).

401. Не останавливаясь на вычисленіи фокусовъ гиперболы, перемѣнимъ (стр. 459) b на $b\sqrt{-1}$ (чл. 389), получимъ $\beta = 0$, $\alpha = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}$, $\delta = \pm\left(a - \frac{ax}{a}\right)$.

Слѣд. *гипербола имѣетъ также два фокуса* F и F′ (чер. 207) *на первой оси*: взявъ $AD = b$, CD будетъ $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \alpha$; и такъ чтобы получить фокусы, должно отъ точки C къ F и F', отложить CD. Такъ какъ здѣсь α и $x > a$, то $\alpha x > a^2$, слѣд. дабы δ было положительное, надлежитъ предпочесть знакъ $-$, и для фокуса F получимъ, $FM = \delta = \frac{\alpha x}{a} - a$. Но для a, т. е. другаго фокуса, α отрицательное; слѣд. δ надлежитъ взять на противъ съ знакомъ положительнымъ, такъ что $F'M = \delta' = \frac{\alpha x}{a} + a$. Изъ сего заключимъ,

что $\delta' - \delta = 2a$, или *разность радіусовъ векторовъ равна первой оси.*

Гипербола строится подобно эллипсису: начертивъ оси и назначивъ фокусы, описываютъ изъ F какъ центра, произвольнымъ радіусомъ AG дугу; потомъ изъ F' радіусомъ OG описываютъ другую дугу; точка M сѣченія будетъ на кривой; ибо разность радіусовъ векторовъ или $F'M - FM = AO$. Тѣми же раствореніями циркуля можно опредѣлить четыре точки кривой.

Параметръ сохраняетъ туже величину $p = \frac{2b^2}{a}$.

402. Поступая здѣсь также какъ съ эллипсисомъ, получимъ полярное уравн. полагая полюсъ въ F, уг. $AFM = \theta$ и $\alpha = ae$,

$$\delta = \frac{\alpha^2 - a^2}{a + \alpha\cos\theta} = \frac{a(e^2-1)}{1 + e\cos\theta}.$$

Способъ касательныхъ.

403. Если чрезъ двѣ точки M и Q (чер. 208) какой-нибудь кривой BMQ, проведутъ пересѣкающую SMQ, и станутъ измѣнять положеніе точки Q на кривой, то пересѣкающая будетъ принимать различныя наклоненія. Если Q приближаясь къ M, наконецъ съ оною сольется, то пересѣкающая SQ обратится въ TM; сія прямая называется *касательною; она есть пересѣкающая, коей точки сѣченія слились въ одну.*

Урав. всякой прямой, проходящей чрезъ точку $M(x', y')$, есть $y - y' = A(x - x')$.... (1).

Чтобъ опредѣлить касательную TM, достаточно сыскать для $A = \operatorname{tang} T$, величину соотвѣтствующую наклоненію сей прямой; для сего необходимо выразить аналитически, условія служащія опредѣленіемъ касательной.

Означимъ чрезъ $x'+h$ и $y'+k$ сопряженныя 2-й точки Q, сѣченія линіи SM, полагая $MR=h$, $QR=k$; tang уг. QMR будетъ $\frac{k}{h}=\text{tang } S$. Перемѣнивъ въ уравненіи кривой x' и y' на $x'+h$ и $y'+k$, легко изъ онаго по приведеніи сыскать $\frac{k}{h}$, т. е. величину tang S. Но очевидно, что tang T есть *предѣлъ* tang S, когда точка Q приближается къ M; такъ что ежели положимъ tang T или $A=\text{tang } S+\alpha$, то α можетъ уменьшатся до безконечности. И такъ ежели величина $\frac{k}{h}$ имѣетъ видъ $p-\beta$, гдѣ p есть количество не измѣняемое, а β произвольно малое, то уравн. $A=p-\beta+\alpha$ разложится на два другія (ч.л. 113), изъ коихъ одно $A=p$ опредѣлитъ A. Посему A есть то, во что обращается $p-\beta$, когда β сдѣлается нулемъ, или A *есть то, во что обращается содержаніе* k : h, *при положеніи* k *и* h *равными нулю.*

Изъ сего заключимъ, что *въ уравн. кривой вмѣсто* y′ *и* x′ *надлежитъ подставить* y′ + k *и* x′ + h′, *сыскать изъ онаго содержаніе* k : h, *и потомъ сдѣлать въ ономъ* k *и* h *нулями;* такимъ образомъ опредѣлится предѣлъ сего отношенія или A, а наконецъ и уравн. (1) касательной. См. стр. 481.

Неопредѣленная прямая MN, перпендикулярная къ касательной въ точкѣ M прикосновенія, есть *нормаль;* уравн. оной легко найдется изъ уравненія касательной, ибо сіи прямыя проходятъ чрезъ точку M (x', y'), и сверхъ того взаимно перпендикулярны. Уравн. нормали есть (ч.л. 571)

$$y-y'=-\frac{1}{A}(x-x') \ldots\ldots (2).$$

Длины TP, PN заключающіяся между подошвами T, P и N касательной, ординаты и нормали, называются *под-касательною и под-нормалью.* Положивъ въ 2-хъ

предыдущихъ уравненіяхъ $y = 0$, получимъ абсциссы AT и AN, точекъ T и N.

под-касат. TP или $x' - x = \frac{y'}{A}$ . . . (3.

под-нормал. PN или $x - x' = Ay'$ . . . (4.

Касательная и нормаль могутъ быть иногда расположены не сходно съ нашимъ чертежемъ, такъ что под-касат. сдѣлается $x - x'$, а под-нормаль $x' - x$, но тогда сей случай обнаружится отрицательнымъ знакомъ, который получатъ величины (3) и (4), (чл. 539).

Длины MT и MN называются также: одна *касательною*, а другая *нормалью*.

404. Приложимъ сіи предложенія къ *параболѣ* (чер. 205), коей уравн. есть $y^2 = 2px$; получимъ $y'^2 = 2px'$, $(y' + k)^2 = 2p(x' + h)$; сіе послѣднее по приведеніи обратится въ

$$2ky' + k^2 = 2ph; \text{ ошкуда } \frac{k}{h} = \text{tang } S = \frac{2p}{2y' + k}.$$

Такова будетъ величина A въ уравн. (1) для пересѣкающей: положивъ $k = 0$, получимъ $A = \text{tang } T = \frac{p}{y'}$.

1-е. Урав. *касательной* . . . $yy' = p'x + x'$.

2-е. Урав. *нормали* . . . . . $y - y' + p + (x - x')y' = 0$

3-е. Длина *под-касательной* $TP = 2x'$.

4-е. Длина *под-нормали* . . . $PN = p$.

И такъ *под-касатель. равна удвоенной абсциссѣ*, вершина A находится въ срединѣ TP; подошва T касательной *по лѣвую сторону вершины*, а *под-нормаль постоянна* и *равна полупараметру*, т. е. *удвоенному разстоянію* AF *отъ фокуса*.

норм. $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \sqrt{(y^2 + p^2)} = \sqrt{p(2x + p)}$.

405. Опишемъ ур. $TMF = V$ чер. 205), составленный радіусомъ векторомъ съ касательною: сей радіусъ проходитъ чрезъ точки $M(x', y')$ и $F(\frac{1}{2}p, 0)$. и такъ получимъ урав. $y - y' = A'(x - x')$, изъ коего

$$A' = \frac{-y'}{\frac{1}{2}p - x'}.$$

Взявъ же величину A для касательной TM, найдемъ

$$\operatorname{tang} V = \frac{A' - A}{1 + AA'} = \frac{y'^2 + \frac{1}{2}p^2 - px'}{\frac{1}{2}py' + x'y' - y'} = \frac{p}{y'},$$

ибо $y'^2 = 2px'$ и $\frac{1}{2}p + x'$ умножается, какъ общій множитель. И какъ $\operatorname{tang} V = A$ $\operatorname{tang} T$; слѣд. *треугольникъ* TMF *равнобедренный*. Всѣ лучи звука и свѣта SM, параллельные оси, при ихъ встрѣчѣ M съ кривою, отражаются въ фокусѣ F. Сверхъ сего *касательная* TM *дѣлитъ уголъ* QMF *по-поламъ*, и перпендикулярна въ срединѣ къ QF; наконецъ $MF = TF$; что доставляетъ новый способъ проводить касательную TM.

406. Пусть точка касанія $M(x', y')$ измѣняетъ постепенно свое мѣсто по теченію кривой линіи; разсмотримъ различныя положенія, принимаемыя касательною, зависящія отъ ея уравненія, т. е. отъ наклоненія $\operatorname{tang} T = \frac{p}{y'}$, и отъ ординаты при началѣ, $Ai = \frac{px'}{y'} = \frac{1}{2}y'$. Очевидно, что, 1-е, при вершинѣ A, гдѣ x' и y' равны нулю, ось y есть касательная; 2-е, по мѣрѣ удаленія точки M прикосновенія, x' и y' возрастаютъ также какъ и Ai, которая постоянно равна половинѣ ординаты y', между тѣмъ какъ уголъ T уменьшается.

Касательная принимаетъ всѣ возможныя положенія, а посему *можно всегда провести касательную параллельно всякой данной прямой*. Но чѣмъ уг. T менѣе, тѣмъ точка касанія M и подошва T болѣе удаляются отъ вершины. Чтобы касательная была параллельна оси, надлежитъ точкѣ касанія быть въ безконечномъ разстояніи. Посему, по данному направленію, или A, легко опредѣлится $y' = \frac{p}{A}$ и точка

касанія; на пр. если $A = 1$, то $y' = p$, откуда $x' = \frac{1}{2}p$ Фокусъ F соотвѣтствуетъ во всякой параболѣ точкѣ G, чрезъ которую если проведется касательная, то она составитъ съ осью, уголъ въ 45^0.

407. Урав. $yy' = p'x + x'$ можетъ служить къ проведенію касательной, когда не извѣстна точка M x', y') прикосновенія; но для сего надобно, чтобы даны были нѣкоторыя условія. На пр. если желаютъ провести касательную чрезъ данную точку I (α, β), то наше уравн. обратится въ $\beta y' = p'\alpha + x'$); сравнивъ сіе послѣднее уравн. съ $y'^2 = 2px'$, получимъ x' и y' чрезъ выключеніе, или точку M касанія; здѣсь двѣ касательныя.

Но уравн. $\beta y = p'(\alpha + x)$, удовлетворяемое сопряженными обѣихъ сихъ точекъ, есть урав. хорды ихъ соединяющей. $y = 0$ даетъ абсциссу $x = -\alpha$ точки сѣченія хорды съ осью, и сія точка будетъ общая всѣмъ таковымъ хордамъ, какая бы точка I ни была, лишь бы абсцисса оной α оставалась таже. И такъ, если точка I движется параллельно оси y, то обѣ касательныя, точки соприкосновенія, и соединяющія ихъ хорды измѣняются; одна только точка сѣченія сихъ хордъ съ осью остается таже, и хорда обращается около сей точки, которая будетъ по правую или по лѣвую сторону вершины, смотря потому, съ которой стороны относительно вершины A, находится абсцисса точки I.

Искомая касательная IM должна быть перпендикулярна въ срединѣ къ QF, а посему точка I равно отстоитъ отъ Q и F; кругъ, описанный изъ центра I радіусомъ IF, пройдетъ чрезъ точку Q директрисы, и сія точка такимъ образомъ опредѣлится. QM параллельная оси x означитъ потомъ точку M; иначе: касательная начертится проведя къ срединѣ QF перпендикуляръ IM. Нѣтъ сомнѣнія, что кругъ пересѣчетъ директрису, какъ скоро I внѣ кривой; ибо въ сем:

случай задача возможна, и точка Q необходимо существуетъ, есть также 2-я точка Q и 2-я касательная.

408. Приложимъ тѣже правила къ *эллипсису*. Перемѣнивъ x и y на $x+h$ и $y'+k$ урав. сей кривой обра-

$$a^2(y'+k)^2+b^2(x'+h)^2=a^2b^2;$$

откуда

$$k(2y'+k)a^2+h(2x'+h)b^2=0,\quad \frac{k}{h}=-\frac{b^2}{a^2}\times\frac{2x'+h}{2y'+k}.$$

Это есть величина $\tang S$, для уравненія пересѣкающей въ двухъ данныхъ точкахъ. Для касательной положимъ h и k равными нулю, отъ чего $A=-\frac{b^2x'}{a^2y'}$. Остается только подставить сіе въ уравненія члена 405-го, и получимъ (чер. 210):

1-е. Урав. *касательной*, $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$;

2-е. Урав. *нормали*, $y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$;

3-е. *Под-касатель.*, $TP=\frac{a^2-x'^2}{x'}$;

4-е. *Под-нормаль*, $PN=\frac{b^2x'}{a^2}$.

1-е. Величина A не измѣнится, когда x' и y' примутъ противные знаки; и такъ касательныя при M и M' параллельны между собою (чер. 209).

2-е. Положивъ въ уравненіи касательной $y=0$, получимъ $CT=x=\frac{a^2}{x'}$; поелику $a>x'$, то $CT>a$; CT не зависитъ отъ b; слѣд. для всѣхъ эллипсисовъ, построенныхъ на той же оси AO, касательныя TM, TQ... имѣютъ одну подошву T, когда абсцисса $x'=CP$ остается таже. И такъ, описавъ кругъ AQO на большой оси AO, продолживъ ординату PM до Q, и проведя касательную TQ, найдемъ точку T. Сіе доставляетъ удобное средство проводить касательную къ эллипсису.

3-е. Если въ урав. норм. положимъ $y=0$, то $x=(A-\frac{a^2-b^2}{a^2}x'$ (чер. 210); и такъ N и M находятся по одну сторону Cy.

409. Проведемъ чрезъ точки O и A $(\pm a, 0)$, какія-нибудь прямыя ON, AN (чер. 209); ихъ уравненія будутъ

$$y=\alpha(x-a),\quad y=\alpha'(x+a).$$

А сопряженныя точки N пересѣченія:

$$x=a\cdot\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha-\alpha'},\quad y=\frac{2a\alpha\alpha'}{\alpha-\alpha'};$$

чтобъ опредѣлить сію точку N, надлежитъ знать тангенсы α, α' направленій AN и NO; но если они произвольны, то ихъ можно взять такими, чтобы пересѣченіе N было на эллипсисѣ, и тогда сіи прямыя называются *дополнительными хордами*. Въ такомъ случаѣ, найденныя величины x и y должны удовлетворять уравненію $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, отъ чего $a^2\alpha^2\alpha'^2+b^2\alpha\alpha'=0$ или $\alpha\alpha'(a^2\alpha\alpha'+b^2)=0$; и такъ хорды пересѣкутся на эллипсисѣ, если α или $\alpha'=0$ (что ни чего не выражаетъ), или если $\alpha\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}$. Сей знакъ происходитъ отъ того, что α и α' имѣютъ противные знаки; ибо еслибъ уг. NAO былъ острый, то NOx долженъ быть тупой. Начертимъ кругъ на большой оси; уг. $AN'O$ есть прямой, AMO тупой. Дополнительныя хорды малой оси пересѣкаются подъ острымъ угломъ; въ чемъ можно увѣриться такимъ же образомъ.

Свойства сіи можно также доказать анализомъ слѣдующимъ образомъ. Уголъ $\theta=N$, составляемый двумя дополнительными хордами, опредѣляется изъ

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{\alpha-\alpha'}{1+\alpha\alpha'}=\frac{a^2\alpha^2+b^2}{\alpha(a^2-b^2)},$$

по выключеніи α'. Если $a=b$, $\operatorname{tang}\theta$ есть ∞, или $\theta=90^0$; слѣд. *только въ кругѣ дополнительныя хорды перпендикулярны, и онѣ всѣ таковы въ окомъ.* Когда $a>b$, то α и $\operatorname{tang}\theta$ имѣютъ одинакіе знаки. Слѣд.

углы ANO, NQx, суть оба тупые. Если a и b возрастаютъ пропорціонально, то уг. θ не измѣняется, и знакъ направленія ON, AN постоянны, или *въ эллипсахъ, имѣющихъ одинаковое отношеніе осей, соотвѣтственныя хорды параллельны.*

Если θ данъ, то α опредѣлится изъ уравненія 2-й степени.

$$a^2\alpha^2 - (a^2 - b^2)\,\alpha \tan\theta + b^2 = 0;$$

слѣд. если надо *сыскать дополнительныя хорды, составляющія данный уголъ* θ, *то задача имѣетъ два рѣшенія;* и построеніе сихъ хордъ не затруднительно: объ величины α имѣютъ одинакіе знаки, ибо послѣдній членъ есть $+b^2$. Величины α равны между собою, когда $(a^2 - b^2)^2 \tan^2\theta = 4a^2b^2$, откуда $\tan\theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ потомъ $\alpha = \frac{b}{a}$. Сіе рѣшеніе отдѣляетъ корни дѣйствительные отъ мнимыхъ (чл. 139, 2-е); и такъ, *дополнительныя хорды, проведенныя къ окончности малой оси, пересѣкаются подъ наибольшимъ тупымъ угломъ.* Если AN сливается съ AO, то другая хорда составляетъ прямой уголъ; когда AN будетъ обращаться около A, то уг. N дѣлается тупымъ, и возрастаетъ до прохожденія хордъ чрезъ B; послѣ чего если движеніе AN продолжается, то уг. N начнетъ уменьшаться, принимая прежнія величины въ обращномъ порядкѣ.

Чтобы построить дополнительныя хорды, составляющія данный уголъ, надлежитъ на AO начертить дугу способную вмѣщать сей уголъ; она пересѣчетъ эллипсисъ въ двухъ точкахъ, которыя и будутъ искомыя рѣшенія.

410. Ур-ніе всякой прямой CM, проведенной чрезъ центръ C (чер. 209) есть $y = Ax$; если сверхъ сего она должна проходить чрезъ точку $M(x', y')$, то

$y' = A'x'$; но для касательной при M, $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$; слѣд. $AA' = -\frac{b^2}{a^2} = xx'$. Посему, если проведутъ AN параллельно линіи CM, соединяющей центръ съ точкою касанія, то $A' = A'$, откуда $A = \alpha$; и касательная TM будетъ параллельна дополнительной хордѣ NO, что доставляетъ еще весьма простый способъ проводить касательную къ эллипсису.

411. Пусть точка прикосновенія $M(x', y')$ движется по кривой, и разсмотримъ касательную въ различныхъ ея положеніяхъ. Въ точкѣ O, $x' = a$, $y' = 0$, уравн. TM обращается въ $x = a$; и такъ касательная параллельна оси y. По мѣрѣ возвышенія точки касанія по эллипсису, x' уменьшается, а y' возрастаетъ; слѣд. и $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$ уменьшается, а $CT = \frac{a^2}{x'}$ возрастаетъ; посему точка T безпрестанно удаляется, и уг. MTC уменьшается до точки B, въ коей касательная параллельна большой оси. Симметрическое расположеніе дѣлаетъ безполезнымъ дальнѣйшее изслѣдованіе оной; и такъ, *всякому данному наклоненію соотвѣтствуетъ одна изъ касательныхъ къ эллипсису.*

Точка эллипсиса, въ коей прямая, имѣющая данное наклоненіе, касается онаго, найдется опредѣливъ x' и y по извѣстному A, изъ уравненій

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2; \quad Aa^2y' + b^2x' = 0.$$

Подобнымъ сему анализомъ, можно также рѣшить многія другія задачи относительно касательной.

412. Отыщемъ наклоненія радіусовъ векторовъ къ касательной (чер. 210). Пусть $CF = \alpha$, углы $TMF = V$, $TMF' = V'$. Уравн. всякой прямой, проходящей чрезъ $F(\alpha, 0)$, есть $y = A'(x - \alpha)$; откуда $A' = \frac{y'}{x' - \alpha}$ для радіуса вектора FM, проходящаго чрезъ данную точку

$M(x', y')$. Но для угла наклоненія касательной, $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$; какъ $\alpha^2 = a^2 - b^2$; слѣд. $\text{tang } V = \frac{A - A'}{1 + AA'} \cdot \frac{b^2}{ay'}$. Перемѣнивъ α на $-\alpha$, для $\text{tang } V'$, получимъ тоже самую величину съ противнымъ знакомъ; изъ сего должно заключить, что углы V и V' суть дополненія одинъ другаго (чл. 349). Уг. $F'MT$ есть острый и служитъ дополненіемъ тупому $F'MT$; или лучше сказать: острые углы $F'MI$ и FMT равны.

И такъ, *въ эллипсисѣ радіусы векторы, проведенные въ точку касанія, равно наклонены къ касательной и къ нормали.* Слѣд. всѣ лучи свѣта или звука $F'M$, идущіе изъ фокуса F', отражаются при ихъ встрѣчѣ M съ эллипсисомъ въ другой фокусъ F. Если продолжимъ $F'M$, то касательная TM раздѣлитъ уг. FMG по поламъ, а нормаль уг. $F'MF$.

413. Сіе свойство можетъ служить для проведенія касательной, или нормали, чрезъ данную точку M эллипсиса (чер. 210); ибо если на продолженіи $F'M$, сдѣлаемъ $MG = FM$, то TM будетъ перпендикуляръ на въ срединѣ къ FG.

Чтобы провести касательную TM, чрезъ точку I, данную внѣ эллипсиса, должно опредѣлить точку прикосновенія M. Полагая задачу рѣшенною, точка I будетъ въ равномъ разстояніи отъ F и G: посему кругъ FG, проходящій чрезъ F и имѣющій центромъ I, пройдетъ также чрезъ G; но $F'G = F'M + MF = 2O$; слѣд. точка G находится также на кругѣ, описанномъ изъ центра F' радіусомъ AO.

Какъ скоро сіи два круга начерчены, точка G опредѣлится, и проведя $F'G$ получимъ точку M касанія. Впрочемъ очевидно, что сіи два круга должны пересѣкаться; ибо покуда точка I внѣ эллипсиса, то задача всегда возможна, а слѣд. и точка G необходимо существуетъ; даже есть двѣ точки G, а посему и двѣ касательныя.

Сію задачу можно также разсматривать какъ въ чл. 379, 3-е и въ чл. 407, сопряженныя α и β внѣшней точки A (чер. 251) должны удовлетворять уравненію касательной MK, изъ коего и изъ урав. эллипсиса

$$a^2\beta y' + b^2\alpha x' = a^2b^2, \quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2,$$

посредствомъ выключенія получимъ для x' и y' величины 2-й степени. И такъ, чрезъ точку K, можно провесть двѣ касательныя MK, NK; $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$ есть урав. прямой MN, соединяющей точки касанія, ибо оному удовлетворяютъ $x = x'$ и $y = y'$; слѣд. легко начертишь сію прямую, опредѣлишь точки касанія и наконецъ касательныя; въ чер. 251-мъ оси не предполагаются прямоугольными. (См. чл. 464, IV).

Когда $y = 0$, то $\alpha x = a^2$, уравн. независимое отъ b и β, слѣд. CE постоянно, гдѣ бы ни взяли точку K, лишь бы $CA = \alpha$ и большая ось $2a$ оставались тѣже. Посему, если K движется по BB' параллельной къ оси y, то касательныя и хорды измѣняются, но точка E остается неподвижною, даже при измѣненіи 2-й оси $2b$; такъ что положеніе точки E будетъ тоже, что и въ кругѣ, описанномъ изъ центра C радіусомъ a. Точка E находится внутри или внѣ эллипсиса, смотря потому, будетъ ли $\alpha >$ или $< a$, т. е. пересѣкаетъ ли прямая BB' кривую, или идетъ внѣ оной.

414. *Приступимъ теперь къ гиперболѣ; для оной* можно бы повторить всѣ выводы, сдѣланные при разсматриваніи эллипсиса; но достаточно перемѣнить въ оныхъ b на $b\sqrt{-1}$ (чл. 389). Получимъ слѣдующія выраженія:

1-е. Для наклоненія и уравненія касательной

$$A \ldots \frac{b^2x'}{a^2y'}, \quad a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2.$$

Касательная TM (чер. 207) составляетъ съ осью x уг. острый, и параллельна касательной проведенной чрезъ M'.

Такимъ же образомъ найдемъ урави. нормали.

2-е. $CT = \frac{a^2}{x'}$, точки M и T падаютъ по одну сторону оси Cy; такъ какъ $x' > a$, то T находится между C и вершиною A.

$$под\text{-}касательная = \frac{x'^2 - a^2}{x'}$$

$$под\text{-}нормаль = \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

3-е. Для двухъ дополнительныхъ хордъ MO и AN (чер. 211), получимъ $\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$; слѣд. оба угла ими составляемые съ осью x, суть вмѣстѣ острые или тупые. Урав. AN есть $y = \alpha(x - a)$; какъ сія линія проходитъ чрезъ точку N (x', y'), то для хорды AN, $\alpha = \frac{y'}{x' - a}$; слѣд. α и y' имѣютъ одинакій знакъ, ибо $x' > a$. И такъ дополнительныя хорды съ осью x составляютъ углы острые, когда N имѣетъ положеніе представленное на чертежѣ. Они будутъ тупые для лѣвой верхней части вѣтви, и проч.... Для линіи CM и TM касательной въ M, найдемъ $AA' = \frac{b^2}{a^2}$; посему способъ (чл. 410), проводить касательную къ эллипсису, можно примѣнить и къ гиперболѣ. Чрезъ точку M прикосновенія, проводятъ CM, потомъ хорду ON параллельно CM, и ея дополнительную хорду AN; сія послѣдняя параллельна касательной TM.

Для угла $\theta = ONA$, составляемаго дополнительными хордами, найдутъ, какъ въ чл. 409-мъ, что $\tang\theta = \frac{a^2\alpha^2 - b^2}{\alpha(a^2 + b^2)}$; но $\alpha > \frac{b}{a}$, или $a^2\alpha^2 > b^2$, слѣд. $\tang\theta$ положительный и уголъ θ есть острый (чл. 431). Если оси измѣняются въ одинаковомъ отношеніи, то величина θ остается таже.

Когда θ извѣстно, то для опредѣленія α надлежитъ рѣшить урав. 2-й степени, $a^2\alpha^2 - 2\alpha a + b^2 \tang\theta = b^2$,

коего корни имѣютъ противные знаки, и никогда не будутъ мнимые. Уг. θ не имѣетъ здѣсь предѣловъ какъ въ эллипсѣ. Оба рѣшенія получаются построеніемъ, когда на OA опишутъ дугу вмѣщающую данный уголъ θ, составляемый дополнительными хордами, и соединятъ точки сѣченія съ вершинами. Съ уменьшеніемъ α, т. е. чѣмъ болѣе AN склоняется на Ax, тѣмъ болѣе уг. θ уменьшается, переходя всѣ величины отъ 90^0 до нуля.

4-е. Углы, составленные радіусами векторами съ касательною, сохраняютъ тоже величину $\frac{b^2}{ay}$, и такъ *ихъ наклоненія къ касательной одинаковы также какъ и къ нормали; TM* дѣлитъ $F'MF$ (чер. 207) на двѣ равныя части; слѣд. касательная проводится также какъ въ эллипсѣ (чл. 412).

Если точка дана на кривой въ M, то дѣлаютъ $MG = MF$, и опускаютъ перпендикуляръ MT къ срединѣ FG.

Если точка I дана внѣ кривой, то изъ центра I описываютъ кругъ FG; потомъ изъ центра F' радіусомъ $F'G = F'M - FM = AO$, описываютъ другой кругъ *пересѣкающій* 1-й въ двухъ точкахъ; сіе опредѣлитъ точку G, и $F'G$, продолженная до M, означитъ точку касанія. Впрочемъ слѣдствія члена 413 имѣютъ также и здѣсь мѣсто.

415. Пусть точка M прикосновенія движется по кривой (чер. 212). Въ точкѣ $A\,(x' = a, y' = 0$, урав. касательной обратится въ $x = a$; и такъ DD' касательная при вершинѣ, параллельна оси y. Чтобъ узнать при постепенномъ возвышеніи точки M по кривой, послѣдовательныя положенія касательной, должно опредѣлить подошву T оныхъ, и различныя ихъ наклоненія; но сіи углы изъ урави. $A' = \frac{b^2x'}{a^2y'}$ не

могутъ опредѣлиться; ибо x' и y' возрастаютъ вмѣстѣ. Для избѣжанія сего затрудненія подставимъ вмѣсто величины ay' ей равную $\pm b\sqrt{(x'^2 - a^2)}$, и раздѣлимъ числитель и знаменатель на bx'; отъ чего

$$A = \frac{\pm b}{a\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x'^2}\right)}}, \quad CT = \frac{a^2}{x'}.$$

И такъ, съ возрастаніемъ x', A и CT уменьшаются; такъ что подошва T касательной, безпрестанно приближается къ центру C, никогда онаго не достигая, между тѣмъ какъ уг. T въ тоже время уменьшается. Однако же сіе уменьшеніе угла T не простирается до безконечности; ибо корень болѣе и болѣе приближается къ *единицѣ*, и не можетъ перейти сего предѣла, котораго только достигаетъ, когда $x' = \infty$; въ семъ случаѣ $A = \pm\frac{b}{a}$ и $CT = 0$. Впрочемъ безполезно продолжать движеніе точки M въ другихъ частяхъ кривой, ибо онѣ расположены одинаково.

Для построенія сихъ выраженій, отложимъ отъ вершины A, ординаты $AD = AD' = b$, и проведемъ CD и CD'; уравненія сихъ прямыхъ суть $y = \pm\frac{b}{a}.x$; *онѣ суть предѣлы всѣхъ касательныхъ и встрѣчаютъ кривую только въ безконечности.* Сія кривая совершенно вмѣщается въ углѣ QCQ' и въ углѣ ему противоположномъ.

Касательная составляетъ съ 1-ю осью уголъ заключающійся между DCA и прямымъ; слѣд. къ данной прямой CI, проходящей чрезъ C, тогда только можно провести параллельную касательную, когда CI находится въ углѣ DCH.

416. Когда двѣ кривыя простираются до безконечности, то говорятъ, что одна есть ассимптотъ другой, *если онѣ безпрестанно сближаются, такъ что наконецъ разстояніе между ними можетъ быть*

менѣе всякой данной величины. Урав. гиперболы есть

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a}x\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} - \frac{a^4}{8x^4} \cdots\right),$$

развернувъ $\sqrt{(x^2-a^2)}$ (стр. 218); x во всѣхъ членахъ, исключая 1-го, находится только въ знаменателѣ, и такъ всѣ они безконечно уменьшаются съ увеличиваніемъ x. Слѣд. уравн. $Y = \pm \frac{b}{a}x$ принадлежитъ двумъ прямымъ CQ, CQ' (чер. 212), коихъ ордината $PQ > PM$, даетъ разность MQ произвольно малую. Посему сіи прямыя, которыя, какъ извѣстно, суть *предѣлы касательныхъ*, будутъ также ассимптотами гиперболы.

Если гипербола равносторонняя, $a = b$; то ассимптоты составляютъ прямой уголъ.

417. Изъ уравненій гиперболы и какой-нибудь прямой $y = kx + l$; выключимъ y, чтобъ отыскать точки сѣченія: получимъ

$$(a^2k^2 - b^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 + b^2) = 0.$$

Сіе квадратное урав. обратится въ урав. 1-й степени, когда $a^2k^2 = b^2$; или $k = \pm \frac{b}{a}$; откуда $x = -\frac{l^2 + b^2}{2kl}$. Слѣд. прямая, параллельная ассимптоту, пересѣкаетъ гиперболу только въ одной точкѣ (2-я точка сѣченія будетъ въ безконечности). Для самаго же ассимптота $l = \infty$, и обѣ точки сѣченія будутъ въ безконечности. Вообще

$$x = -\frac{a^2kl + ab\sqrt{(l^2 + b^2 - a^2k^2)}}{a^2k^2 - b^2};$$

и какъ $y = kx + l$, то коренный знакъ будетъ одинаковъ для x и y. Чтобы прямая пересѣкала гиперболу, x и y должны быть дѣйствительные. Здѣсь три случая:

$$a^2k^2 = , < \text{или} > l^2 + b^2.$$

Въ 1-мъ случаѣ, прямая имѣетъ одну только общую точку съ гиперболою; урав. 2-й степени обращается въ полный квадратъ, и прямая касается кривой (см. чл. 424). Изъ сего можно извлечь способъ прово-

дишь касательную чрезъ точку $l\,(x', y'$ (чер. 207) данную внѣ; ибо какъ $y - y' = k\,(x - x'$, должно также выражаться уравн. прямой, то $l = y' - kx'$; сіе уравненіе и $a^2k^2 = l^2 + b^2$ опредѣлишъ k и l.

Во 2-мъ случаѣ, произойдетъ двѣ точки сѣченія. Положимъ

$$a^2k^2 = l^2 + b^2 - \alpha^2;\ \text{отъ чего}\ x = -a\frac{akl + b\alpha}{l^2 - \alpha^2};$$

и если прямая проходишъ чрезъ центръ, то $l = 0$,

$$x = \pm\frac{ab}{\alpha},\ y = \pm\frac{kab}{\alpha}, k = \frac{\sqrt{(b^2 - \alpha^2)}}{a} < \frac{b}{a}$$

Всякая прямая MM' (чер. 207), проходящая чрезъ центръ C, и заключающаяся въ углѣ ассимптотовъ, пересѣкаетъ гиперболу въ двухъ противолежащихъ точкахъ M и M', коихъ абсциссы равны, но имѣютъ противные знаки, также какъ и ординаты CM и CM'.

Въ 3-мъ случаѣ, прямая не пересѣкаетъ кривой. Если $l = 0$, то $ak > b$; т. е. прямая проходишъ чрезъ центръ и находится въ углѣ QCH (чер. 212); она параллельна двумъ касательнымъ; а напротивъ того всякая прямая внѣ сего угла, пересѣкаетъ кривую, и не можетъ быть параллельна ни одной касательной.

418. Отнесемъ гиперболу къ ассимптотамъ Cb', Cb (чер. 213), принявъ ихъ за оси x', y'. Проведемъ MP параллельно Cb; $CP = x'$, $PM = y'$, уг. $x\,Cb = \alpha$, тангенсъ онаго есть $\frac{b}{a}$ (чл. 415); откуда, положивъ для краткости

$$2m = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

получимъ $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{a}{2m}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{b}{2m}$; общія формулы ($B$, чл. 383) обратятся въ

$$2mx = a\,(y' + x'),\ 2my = b\,(y' - x').$$

Въ вершинѣ A, гдѣ $y = 0$; $x' = y'$, $CD = AD$; посему $CBAD$ есть ромбъ; что слѣдуетъ также изъ равен-

сина угловъ $DAC - DCA$. Подставимъ сіи величины x и y въ $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, получимъ $x'y' = m^2$ для искомаго уравненія. Положивъ $x' = y'$, найдемъ $CD = m - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Если положительные x и y считаются по Cb и CH', то уравн. будетъ $xy = -m^2$.

Величина m^2, называется *степенью гиперболы;* въ равносторонней гиперболѣ, $CBAD$ есть квадратъ $= m^2 = \frac{1}{2}a^2$.

Изъ $xy = m^2$ видно, что y уменьшается съ возрастаніемъ x, и обратно; а сіе доказываетъ, что взятыя оси суть дѣйствительно ассимптоты.

Найдено, что $a = 2m\cos\alpha$, $b = 2m\sin\alpha$; сіе опредѣляетъ оси гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ. Діагонали CA, DB ромба $CDAB$, рѣшаютъ также сію задачу; ибо изъ $DL = CD\sin\alpha$, $CA = a$, будетъ $BD = b$.

419. Умножимъ уравн. $xy = m^2$ на $\sin 2\alpha$; получимъ

$$xy\sin bCb' = 2m^2\sin\alpha\cos\alpha;$$

1-я часть (стр. 427, V) выражаетъ *площадь параллелограмма* CPMQ, *которая слѣд. постоянна, гдѣ бы точку* M *на кривой ни взяли;* сверхъ того 2-я часть $= \frac{1}{2}ab$; итакъ, *площадь* CPMQ *равновелика половинѣ прямоугольника изъ полуосей;* сіе слѣдуетъ также изъ того, что $CA = a$, $BD = b$, и $CBAD = CQMP$.

420. Чрезъ подобное же *преобразованіе* можетъ составиться уравн. касательной TM въ точкѣ M (x', y'), отнесенной къ ассимптотамъ; но оное можно сыскать прямо слѣдующимъ образомъ. Уравн. сей прямой (чл. 369) есть

$$y - y' = A(x - x').$$

гдѣ $A = -\frac{\sin STH}{\sin TSC}$: перемѣнимъ въ уравн. $x'y' = m^2$, x' и y' на $x' + h$ и $y' + k$, какъ на стр. 464 получимъ

$$(x' + h)(y' + k) = m^2; \text{ откуда } \frac{k}{h} = -\frac{y' + k}{x'}.$$

Такова величина A для пересѣкающей MN; предѣлъ

оной приличествуетъ касательной, а посему $A = -\frac{y'}{x''}$ слѣд. искомое уравн. есть

$$x'y + y'x = 2m^2.$$

Положивъ $y = 0$, получимъ $x = \frac{2m^2}{y'} = 2x'$, абсциссу CT подошвы T касательной, вдвое большую CP; посему отложивъ $TP = CP$, и проведя TM, найдемъ касательную. Такъ какъ треуг. $SMQ = MTP$, слѣд. точка M прикосновенія находится на срединѣ TS.

Поелику $CT = 2x'$, и $CS = 2y'$, то площадь $CST = 2x'y' \sin 2\alpha$ (стр. 427), или $= ab$; слѣд. *площадь* CST *постоянна, при всякой точкѣ* M; *и равновелика прямоугольнику изъ полуосей;* площади 4-хъ треуг.-въ TMP, CMP, CMQ, QMS равны между собою.

421. Уравн. пересѣкающей bb' есть $y = Kx + L$; положивъ $y = 0$, найдемъ точку b' сѣченія съ ассимптотомъ, $Cb' = -L : K$. Изключивъ же x и y изъ уравненія сей прямой и урав. $xy = m^2$, получимъ точки N, N' сѣченія съ кривою; откуда $Kx^2 + Lx = m^2$. Но (чл. 137, 2-е, $L : K$ есть сумма корней $= Ca' + aN - Cb'$, или $= Ca' + a'b'$; слѣд. $aN = a'b'$, и треуг.-ки Nab, $N'a'b'$ равны; посему $bN = bN'$. *Отрѣзки всякой пересѣкающей, заключающейся между гиперболой и ассимптотами равны.*

Сіе доставляетъ легкой способъ чертить гиперболу, когда даны ассимптоты оной и одна изъ ея точекъ N. *Чрезъ сію точку надлежитъ провести какую-нибудь прямую* bb', *отложить* b'N' = bN, N' *будетъ другая точка кривой.* Повторя сіе построеніе, получашъ желаемое число точекъ.

Рѣшивъ треуг.-ки abN и $bN'O$, гдѣ aN, Ca' суть абсциссы x', x'' точекъ N и N', найдемъ

$$Nb = x' \cdot \frac{\sin a}{\sin b}, \quad N'b = Nb' = x'' \cdot \frac{\sin a}{\sin b};$$

помноживъ сіи уравненія, получимъ

$$bN \times Nb' = x'x'' \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b} = -\frac{m^2}{K} \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b},$$

ибо $m^2 = Kx^2 + Lx$. И такъ сіе произведеніе независимо отъ L, и для всякой параллельной къ нашей пересѣкающей, составится таковое же. Слѣд. *двѣ пересѣкающія составляютъ произведеніе* $bN \times b'N$, *равное квадрату полукасательной* SM, *когда сіи три прямыя параллельны между собою.*

422. Способъ опредѣлять A въ урав. (1), изъясненный въ (чл. 405), можно приложить ко всякому уравненію, какой бы уголъ сопряженныя оси не составляли: разсмотрѣвъ сей способъ внимательно видно, что надлежитъ въ уравненіи кривой перемѣнить x на $x' + h$, y на $y' + k$, отъ чего составятся члены двухъ родовъ; во 1-хъ, не заключающіе ни h, ни k, и которые оставались, когда сіи приращенія сдѣлаются нулями, вновь составляютъ урав. кривой и взаимно уничтожающіеся; во 2-хъ, члены имѣющіе h или k производителями, и служащіе къ опредѣленію отношенія $k:h$, въ коемъ положивъ h и k равными нулю, получатъ наконецъ A.

Но очевидно, что въ семъ отношеніи уничтожаются только тѣ члены, въ которыхъ h и k, находились въ степени выше 1-й. И такъ, оставя разсмотрѣніе, и придерживаясь только къ самому выводу, увидятъ что надлежитъ, во 1-хъ *перемѣнить* x *на* $x' + h$ *и* y *на* $y' + k$, *и развернуть;* во 2-хъ *опустить всѣ члены, гдѣ* h *и* k *выше* 1-й *степени, равно какъ и тѣ гдѣ* h *и* k *не входятъ;* сіи послѣднія вновь составляя урав. кривой, сами взаимно уничтожающіеся; наконецъ, *сдѣлавъ* $k = Ah$ *(h есть общій производитель и изгезаетъ)*, *опредѣлятъ* A. Подставя въ уравненія чл. 405, получатъ уравненія касательной и нормали.

И такъ, для $y^2 + 2xy = 2y + x$ сначала найдемъ

$$2y'k + 2x'k + 2y'h = 2k + h,$$

пошомъ $2y'A + 2x'A + 2y' = 2A + 1$;

ошкуда $A = \frac{-y' + \frac{1}{2}}{y' + x' - 1}$.

На прим. шочка (1, 1) будешъ на кривой, ибо сопри-ложенныя оной, подставленныя вмѣсто x и y, удовле-творяюшъ данному уравненію; получимъ $A = -\frac{1}{2}$ и уравн. касашел. въ сей шочки кривой, будешъ

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, или $2y + x = 3$.

Возьмемъ еще урав. $y^2 = mx + nx^2$, принадлежащее нашимъ шремъ кривымъ, смошря по величинамъ m и n (чл. 390), найдемъ

$$2y'k = mh + 2nhx', \quad 2Ay' = m + 2nx',$$

ошкуда $A = \frac{\frac{1}{2}m + nx'}{y'}$.

423. Когда касашельная параллельна оси x, и какъ скоро вѣшвь кривой находишся вся въ верху или въ низу касашельной, шо ясно, чшо ординаша y шочки прикосновенія $>$ или $<$ ближайшихъ ординашъ. И шакъ, уравн. $A = 0$ даешъ для y *наибольшую* или *наименьшую* величину, коюрая найдешся изключивъ x и y изъ $A = 0$ и изъ уравн. данной кривой. $A = \infty$ опредѣляешъ касашельныя, параллельныя оси y, ш. е. предѣлы кривой въ сшорону $x^{\text{ъъ}}$.

Пусшь будешъ на пр. урав. $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$, изъ коюраго найдемъ, чшо $A = \frac{y - x + 1}{2y - x}$; положивъ $y - x + 1 = 0$ и сравнивъ съ даннымъ уравненіемъ, получимъ $x = 3$ и 1, а $y = 2$ и 0, соприложенныя шочекъ, въ коихъ касашельная параллельна оси x; 2 есшь наибольшая ординаша, 0 наименьшая; кривая не проспираешся внизу оси x, коей она касаешся въ шочкѣ (1, 0); $2y - x = 0$, даешъ $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ соприложенныя предѣловъ кривой, въ сшорону $x^{\text{ъъ}}$. (чл. 454, чер. 250).

424. Если изключашь y изъ $y = ax + b$, и уравненія какой-нибудь кривой 2 й сшепени, шо для x сосша-

вшіся также уравн. 2-й степени, опредѣляющее абсциссы точекъ сѣченія прямой $y = ax + b$ съ кривою. Положимъ величины $x = M \pm \sqrt{N}$; прямая будетъ имѣть двѣ общія точки съ кривою, или совсѣмъ не пересѣчетъ опую, смотря потому дѣйствительные сіи корни или мнимые: но если $N = 0$, т. е. *если корни* x *равны, или уравн. для* x *есть полный квадратъ, то прямая касается кривой.* Въ самомъ дѣлѣ, если a и b не опредѣлены, но съ измѣненіемъ прямой, M и N также измѣняются, и очевидно, что точки сѣченія будутъ сближаться по мѣрѣ уменьшенія N; наконецъ когда N сдѣлается равнымъ нулю, то сіи точки сольются.

Пусть $8y + 3x = 10$, и $4y^2 + x^2 = 4$; опредѣля изъ сихъ уравненій x и y, чтобы сыскать точки сѣченія прямой и кривой, симп уравненіями представляемыхъ, найдемъ $25x^2 - 60x + 36 = 0$, или $(5x - 6)^2 = 0$. И такъ (чер. 209), прямая TM касается эллипсиса ABO въ точкѣ M $(\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$, коего полу-оси суть

$$AC = a = 2, \quad BC = b = 1.$$

Положивъ въ какомъ-нибудь уравн. $y = 0$, если получатъ $(x - x')^2 = 0$, то надлежитъ заключить, что кривая касается оси x въ точкѣ $(x', 0)$. Смот. чер. 226 и 230, чл. 443 и 454.

О центрѣ и діаметрахъ.

425. ***Центръ*** кривой есть точка C (чер. 214 и 215), *служащая срединою всѣмъ хордамъ*, напр. MM', проведеннымъ чрезъ опую. Помѣстимъ начало въ C; проведемъ PM, $P'M'$, параллельно оси Cy; треуг-ки CPM, $CP'M'$ равны; ибо $CM = CM'$; посему $CP = CP'$, $PM = P'M'$. Слѣд. когда начало въ центрѣ кривой, то ординаты и абсциссы взятыя по двѣ равны, и имѣютъ противные знаки. Обратное очевидно.

Здѣсь ух. сопряженныхъ yCx произвольный.

Слѣд. кривая тогда только будетъ имѣть свой центръ въ началѣ, когда ея уравн. не измѣняется отъ перемѣны въ немъ x *на* $-x$, *и* y *на* $-y$.

Приложимъ сіи правила къ общему уравненію 2-й степени

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots\ldots (1).$$

Ясно, что *дабы начало было въ центрѣ кривой, надлежитъ уравненію оной не заключать членовъ* Dy *и* Ex, и его видъ будетъ $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0$. По сей то причинѣ мы предваритльно назвали центромъ, средину оси эллипсиса и гиперболы; теперь доказано, что всякая хорда, проходящая чрезъ сію точку дѣлится въ ней по поламъ.

По кривая можетъ имѣть центръ и не въ началѣ; въ такомъ случаѣ надо умѣть переносить оное въ средоточіе: для сего перемѣнятъ x на $x' + a$, y на $y' + b$ и опредѣлятъ произвольныя сопряженныя a и b новаго начала, такъ чтобъ уничтожились члены нарушающіе нашъ законъ. Исполнимъ сіе вычисленіе для уравн. (1): приравняемъ нулю члены гдѣ x' и y' въ 1-й степени, получимъ

$$Bb + 2Ca + E = 0, \quad Ba + 2Ab + D = 0 \ldots\ldots (2);$$

ошкуда $a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$, $b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$ ..... (3);

и преобразованное урав. будетъ $Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Q = 0$, гдѣ Q означаетъ постоянный членъ. Слѣд. когда сіе вычисленіе возможно, то кривая линія 2-й степени имѣетъ центръ, и *только одинъ;* въ прошивномъ случаѣ сія точка не существуетъ, что бываетъ когда $B^2 - 4AC = 0$; ибо тогда уравненія (2) суть противорѣчащія [ч. 114, 2-е]. Однакоже если въ иное время, одинъ изъ числителей величинъ a или b равенъ нулю, то и другой $= 0$; тогда получится безконечное число центровъ, и уравненія (2) составятъ одно [ч. 114, 3-е].

Вообще, такъ какъ a и b представляютъ перемѣнныя сопряженныя, то уравненія (2) принадлежатъ двумъ прямымъ, коихъ пересѣченіе опредѣляетъ центръ; онѣ параллельны, когда нѣтъ центра, и сливаются если центровъ безконечное число; тогда каждая точка сей прямой будетъ центръ. Сіи частные случаи вскорѣ объяснятся (чл. 458).

Слѣд. *Парабола не имѣетъ центра*, ибо $B^2 - 4AC$ обращается въ $0 - 4 \times 0 = 0$, для урави. $y^2 = 2px$.

426. Если прямая *дѣлитъ по поламъ какой-нибудь рядъ параллельныхъ хордъ*, то она называется *діаметромъ* кривой линіи.

Два діаметра, изъ которыхъ каждый дѣлитъ по поламъ, хорды параллельныя другому, называются *сопряженными поперечниками*. На пр. оси эллипса и гиперболы суть сопряженные поперечники.

427. Пусть хорды параллельны оси y; дабы ось x, была діаметръ, т. е. дѣлила бы ихъ по поламъ, надлежитъ, чтобы каждой абсциссѣ соотвѣтствовали двѣ равныя ординаты съ противными знаками; такимъ образомъ рѣшивъ относительно y уравненія 2-й степени, имѣющія сіе свойство надлежитъ получить $y = \pm \sqrt{K}$, гдѣ K заключаетъ x. Исполнивъ таковое вычисленіе въ уравненіи (1), увидимъ, что оно выполняетъ сіе условіе въ томъ только случаѣ, когда не имѣетъ членовъ Bxy и Dy.

Въ кривой имѣющей центръ, всѣ діаметры проходятъ чрезъ оный, ибо сія точка дѣлитъ по поламъ хорду параллельную оси y, такъже какъ и прочія хорды.

Равнымъ образомъ, дабы ось y дѣлила по поламъ хорды параллельныя оси x, надлежитъ чтобъ урави. кривой не заключало ни Bxy ни Ex; слѣд. оси x и y въ томъ только случаѣ будутъ сопряженными поперечниками, когда урави. не имѣетъ членовъ Bxy, Dy и Ex, т. е. когда оно есть слѣдующаго вида:

$$Ay^2 + Bx^2 \ldots Q \ldots\ldots 4.$$

И такъ, помѣстивъ начало въ центрѣ; *эллипсисъ и гипербола могутъ имѣть сопряженные поперечники, а парабола нѣтъ.* Все сіе не зависитъ отъ угла осей. Слѣд.

1-е. Пусть BB' (чер. 214 и 215) будетъ діаметръ эллипсиса или гиперболы; уже извѣстно, что чл. 408, 1-е и 414, 1-е) касательныя IG и HK въ B и B' параллельны. Кромѣ сего онѣ параллельны также и сопряженному поперечнику Cy, ибо BB' дѣлитъ по полам параллельныя ему хорды, и съ приближеніемъ оныхъ къ B или B', оконечности сихъ хордъ сближаются; наконецъ обѣ точки сѣченія сливаются въ B и двойная ордината обращается въ нуль. И такъ, *чтобы кривая была отнесена къ своимъ сопряженнымъ поперечникамъ, ось* Cy *ординатъ, должна быть параллельна касательной, проведенной въ точкѣ* B *или* B', *гдѣ ось* Cx *абсциссъ пересѣкаетъ кривую.*

2-е. Всякая прямая CB, проведенная чрезъ центръ C, есть діаметръ, коего сопряженный параллелен касательной въ B; сіе доказывается тѣмъ, что урав. кривой отнесенной къ такимъ осямъ, имѣетъ непремѣнно видъ (4). И такъ, *въ эллипсисѣ и въ гиперболѣ, сопряженныхъ поперечниковъ безконечное число.*

3-е. Когда AO (чер. 209, 211 есть 1-я ось эллипсиса или гиперболы, то всегда существуютъ двѣ дополнительныя хорды ON, NA параллельныя сопряженнымъ поперечникамъ Cy и Cx: и отношеніе $a^2 a x' \pm b^2 = 0$, найденное въ (чл. 409, 414) для наклоненія сихъ хордъ къ оси AO, прилично и наклоненію сихъ діаметровъ. Ихъ направленія соотвѣтственно параллельны, во всѣхъ эллипсисахъ или гиперболахъ, имѣющихъ одинаковое отношеніе осей a и b.

4-е. Задача, требующая *сыскать сопряженные поперечники, составляющіе данный уг.* θ была рѣшена

для дополнительныхъ хордъ (чл. 409; 0 имѣетъ предѣлъ. Сей уголъ можетъ быть прямымъ только въ кругѣ, гдѣ всѣ сопряженные поперечники прямоугольны. Предложенная задача обращается въ построеніе треуг-ка ONA, по извѣстному основанію AO и прилежащему углу $N = \theta$; для сего на AO опишутъ дугу вмѣщающую уголъ θ; и двѣ точки сѣченія оной съ кривою, опредѣляютъ положенія вершины N. (См. чл 431, 4-е и чл, 433).

5-е. Если и сопряженный поперечникъ Cy пересѣкаетъ кривую, что бываетъ въ эллипсисѣ (чер. 214), то IK и GH касательныя въ D и D', также параллельны 1-му діаметру BB'. Параллелограмъ $GIKH$ называется *описаннымъ* около кривой. Но Cy (чер. 215) не пересѣкаетъ гиперболу, ибо сія прямая внѣ угла ассимптотъ (чл. 417, 3-й случ.). Слѣд. 1-й діаметръ встрѣчаетъ кривую, а другой нѣтъ.

428 Положимъ что Cx и Cy (чер. 214) суть сопряженные поперечники эллипсиса; длины ихъ суть BB' и DD'. Сдѣлаемъ $CB = a'$, и $CD = b'$. Когда $y = 0$, то $x = a'$, когда же $x = 0$ то $y = b'$; введя сіи условія въ уравн. (4), получимъ

$$Ba'^2 = Q, \quad Ab'^2 = Q; \text{ откуда } B = \frac{Q}{a'^2}, \; A = \frac{Q}{b'^2},$$

отъ чего сіе уравн. обратится въ

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \ldots\ldots (5),$$

которое принадлежитъ эллипсису, отнесенному къ своимъ сопряженнымъ поперечникамъ.

429. Пусть также Cx и Cy (чер. 215) будутъ сопряженные поперечники гиперболы; положивъ $CB = a'$, получимъ $Ba'^2 = Q$; ибо $y = 0$ соотвѣтствуетъ $x = a'$. Кромѣ сего Cy не пересѣкаетъ кривую и еслибъ уравн. оной было извѣстно, относительно діаметровъ Cx и Cy, и пожелали бъ опредѣлить точку, гдѣ Cy пересѣкаетъ кривую, то положивъ $x = 0$,

получили бы для y величину мнимую; но (по тѣмъ же причинамъ какъ въ ч. 388, 3-е) перемѣнивъ знакъ подкоренной величины, она обратится въ дѣйствительную; изобразимъ оную чрезъ b'; тогда $x = 0$ должно дать $y^2 = -b'^2$; отъ чего $-Ab'^2 \cdot Q$, гдѣ b' или *половина второго поперечника есть косвенная ордината, проходящая чрезъ центръ и обращенная въ дѣйствительную.* Изъ уравненій

$$Ba'^2 = Q, \quad -Ab'^2 = Q, \text{ будетъ } B = \frac{Q}{a'^2}, \quad A = -\frac{Q}{b'^2},$$

подставя сіе въ урав. (4), получимъ урав. гиперболы, отнесенной къ ея сопряженнымъ поперечникамъ,

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \quad \ldots \quad (6).$$

Отложивъ $CD = CD' = b'$ и проведя GH, IK параллельно Cx, составится параллелограммъ $GIHK$ *вписанный* въ гиперболѣ.

Урави. (5) и (6) выводятся одно изъ другаго чрезъ подстановку $b'\sqrt{-1}$ вмѣсто b', такого же свойства будутъ и окончательныя выраженія другихъ вычисленій, которыя такимъ образомъ не нужно повторять для обѣихъ кривыхъ.

450. Видъ уравненія эллипсиса сохранится при перемѣнѣ x на y, и y на x; всѣ построенія, совершаемыя на одномъ изъ діаметровъ, могутъ быть сдѣланы и на другомъ. Если x^m будутъ цинаться по 2-му діаметру гиперболы, то урав. обратится въ

$$b'^2y^2 - a'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

451. Урави. эллипсиса и гиперболы, отнесенныхъ къ осямъ и сопряженнымъ поперечникамъ, имѣютъ одинаковой видъ; слѣд. безполезно повторять прежнія вычисленія, сдѣланныя уже при осяхъ, и можно заключить, что

1-е. Квадраты ординатъ PM (чер. 214 и 215) пропорціональны произведеніямъ разстояній PB, PB' подошвъ оныхъ P отъ оконечностей B и B' діаметра (ч. 395 и 400).

2-е. Два эллипсиса, изъ коихъ въ одномъ оси, а въ другомъ сопряженные поперечники, суть $2a'$ и $2b$, имѣютъ одинаковое уравненіе; слѣд. для каждой абсциссы соотвѣтствуютъ двѣ равныя ординаты подъ различными наклоненіями. И такъ, чтобы начертить эллипсисъ, когда извѣстны направленія и длина сопряженныхъ поперечниковъ CB, CD (чер. 216, надлежитъ возставить перпенд. къ BB' и по оному отложить $CA = CK' = CD$; потомъ основываясь на свойствѣ фокусовъ или на какомъ другомъ, описать эллипсисъ $BKB'K'$ на осяхъ BB' и KK'; наконецъ всякой ординатѣ PN дадутъ положеніе PM, параллельное CD. Если $a' = b'$, то $BKB'K'$ есть кругъ.

Очевидно, что сіе построеніе прилично и гиперболѣ, а также и параболѣ, что вскорѣ увидимъ.

3-е. Наклоненіе касательной въ какой-нибудь точкѣ x', y' и уравн. сей линіи суть:

для эллипсиса $A = -\dfrac{b'^2x'}{a'^2y'}$; $a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2$,

для гиперболы $A = \dfrac{b'^2x'}{a'^2y'}$; $a'^2yy' - b'^2xx' = -a'^2b'^2$.

Здѣсь A представляетъ уже не тангенсъ угла, составляемаго касательною съ осью x, но отношеніе синусовъ угловъ, составленныхъ касательною съ двумя сопряженными поперечниками (чл. 367).

4-е. Помнивъ сіе значеніе A, увидимъ, что выводъ сдѣланный (чл. 409) для дополнительныхъ хордъ, можно примѣнить и здѣсь, равномѣрно какъ и извлеченный изъ онаго способъ проводить касательную. И такъ, пусть изъ центра C (чер. 217) проведена въ точку касанія M прямая CM, и ей параллельная $B'N$, касательная TM будетъ параллельна BN.

Когда даны эллипсисъ и точка M касанія, то не трудно начертить касательную, ибо сначала опредѣливъ центръ C, проведя BB чрезъ средину двухъ какихъ-нибудь параллельныхъ хордъ, и раздѣливъ

оную по-поламъ; пошомъ сдѣлаютъ предыдущее построеніе.

5-е. Изъ точки K (чер. 251), внѣ эллипсиса взятой на данной прямой BB', проведемъ касательныя KM, KN, потомъ діаметръ DD', параллельный BB', и его сопряженный CA. Здѣсь можно повторить анализъ чл. 413; и такъ урав. хорды NM, соединяющей точки M и N, есть $a'^2\beta y + b'^2\alpha x = a'^2b'^2$, посредствомъ онаго можно построить сію хорду, опредѣливъ точки M и N, и наконецъ обѣ касательныя. Сверхъ сего, если точка K движется по BB', то хорда MN и касательныя измѣняются, но точка E остается неподвижною: абсцисса оной $x = \frac{a'^2}{\alpha}$ не зависима отъ b' и β.

Всѣ сіи построенія могутъ быть примѣнены и къ гиперболѣ.

432. Найдемъ теперь отношенія между полуосями a, b и сопряженными полу-поперечниками a', b'. Возьмемъ уравненія кривой, отнесенной къ осямъ и къ сопряженнымъ діаметрамъ, и превратимъ одно изъ оныхъ въ другое посредствомъ преобразованія сопряженныхъ. Начнемъ съ эллипсиса.

Положимъ, что кривая отнесена къ косоугольнымъ сопряженнымъ x', y', взятымъ по сопряженнымъ поперечникамъ CB, CD (чер. 214); чтобы перейти къ прямоугольнымъ осямъ AO, $M'M$, извѣстно, что надлежитъ подставить вмѣсто x', y' ихъ величины (E, чл. 384) въ урав.

$$a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2;$$

$$x' = \frac{s'x + c'y}{\sin\theta}, \quad y' = \frac{sx + cy}{\sin\theta};$$

s и s' означаютъ синусы, c и c' косинусы угловъ $\alpha = BCA$, $\alpha' = DCA$ составляемыхъ осями x' и y' съ осью x; θ есть уг. DCB сопряженныхъ поперечниковъ, отнуда $\sin\theta = s'c - sc'$. Чрезъ вычисленіе получимъ

$(a'^2c^2+b'^2c'^2)\,y^2+2xy(a'^2sc+b'^2s'c')+(a'^2s^2+b'^2s'^2)x^2 = a'^2b'^2\sin^2\theta$. Но дабы выразить, что новыя сопряженныя суть оси кривой, должно сему уравненію имѣть видъ одинаковой съ $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, или превратить его въ таковый чрезъ умноженіе на какого-нибудь неизвѣстнаго производителя λ: отъ чего сравнивъ почленно, получимъ

(1) . . . $a'^2c^2+b'^2c'^2=\lambda a^2$, $a'^2sc+b'^2s'c'=0$ . . . . (2),

(3) . . . $a'^2s^2+b'^2s'^2=\lambda b^2$, $a'^2b'^2\sin^2\theta=\lambda a^2b^2$ . . . (4).

Для опредѣленія λ, помножимъ (1) на (3):

$$a'^4c^2s^2+a'^2b'^2(s^2c'^2+s'^2c^2)+b'^4s'^2c'^2=\lambda^2a^2b^2:$$

но $s^2c'^2+s'^2c^2=(sc'-s'c)^2+2ss'cc'=\sin^2\theta+2ss'cc'$;

отъ куда $a'^4c^2s^2+2a'^2b'^2ss'cc'+b'^4s'^2c'^2+a'^2b'^2\sin^2\theta=\lambda^2a^2b^2$. 1-е три члена уничтожаются, ибо они равны квадрату уравненія (2); и такъ $a'^2b'^2\sin^2\theta=\lambda^2a^2b^2=\lambda a^2b^2$, [смотр. урав. 4]; слѣд. $\lambda=1$. Посему урав. (4) есть произведеніе (1 на (3), и наши четыре уравненія обращаются въ три слѣдующія, изъ которыхъ 1-е есть сумма (1)+(3):

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2 \quad . . . . (5),$$

$$a'^2sc+b'^2s'c'=0 \quad . . . . . (6),$$

$$a'b'\sin\theta=ab \quad . . . . . (7).$$

Урав. 5-е доказываетъ, что *въ эллипсисѣ, сумма квадратовъ сопряженныхъ поперечниковъ равна суммѣ квадратовъ осей.*

Такъ какъ $a'b'\sin\theta$ есть (чл. 365, V, 2-е) площадь параллелограмма $CDBK$, то урав. 7) показываетъ, что *площадь параллелограмма, описаннаго около эллипсиса равна прямоугольнику изъ осей;* и такъ площадь $IKHG$ постоянна, при всякомъ положеніи сопряженныхъ поперечниковъ.

Поелику сопряженные поперечники параллельны дополнительнымъ хордамъ, слѣд. (чл. 409)

$$a^2tt'+b^2=0 \quad . . . . . (8),$$

гдѣ t и t' суть тангенсы наклоненій сопряженныхъ поперечниковъ къ большой оси; сіе урав. соотвѣш-

сивуетъ 6-му, въ чемъ увѣрятся исключивъ a' и b' изъ уравненій 5, 6 и 7.

Чтобы сыскать *равные сопряженные поперечники*, положимъ $a'=b'$, въ уравн. (6), получимъ $xx'+yy'=0$, или $\sin 2\alpha = -\sin 2\alpha'$ (*G*, чл. 357); слѣд. сіи поперечники по обѣ стороны малой оси, равно наклонены къ большой. Уравн. (8) обратится въ $-a^2\tan^2\alpha + b^2 = 0$; ошкуда $\tan\alpha = \pm\frac{b}{a} = \frac{BC}{AC}$ (чер. 218).

Слѣд. *въ эллипсисѣ два равные сопряженные поперечника, параллельны дополнительнымъ хордамъ, соединяющимъ оконечности осей.* Сіи діаметры составляютъ наибольшій тупой уголъ. Пусть CM будетъ одинъ изъ нихъ, то изъ треуг.-ка CPM

$$x^2+y^2 = a'^2 = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)$$ (урав. 5):

исключивъ y^2 изъ урав. $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, получимъ $x^2=\frac{1}{2}a^2$: выраженіе не зависящее отъ b. И такъ, *во всѣхъ эллипсисахъ, у коихъ большая ось* $2a$ *есть общая, оконечности равныхъ сопряженныхъ поперечниковъ, имѣютъ туже абсциссу* $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

433. Урав. опредѣляющее положеніе сопряженныхъ поперечниковъ, составляющихъ уголъ θ, было найдено въ чл. 409,

$$a^2t^2-(a^2-b^2)\,t\tan\theta+b^2=0 \quad \ldots\ldots (9).$$

Пять урав. 5, 6, 7, 8 и 9, составляющія только 4 совершенно различныя, между 7-ю величинами a, b, a', b', α, α' и θ, служатъ къ опредѣленію 4-хъ изъ нихъ, когда извѣстны три прочія.

И такъ въ задачѣ: *сыскать оси по даннымъ сопряженнымъ поперечникамъ*, рѣшенной уже въ чл. 427, 4-е, извѣстны a', b' и θ. Помноживъ (7) на ± 2 и сложивъ съ (5) получимъ

$$(a\pm b)^2 = a'^2 \pm 2a'b'\sin\theta + b'^2.$$

Сравнивъ сіе урав. съ *D*, чл. 535, увидимъ, что $a+b$ и $a-b$ составляютъ въ двухъ треуг.-хъ по боку,

коему въ одномъ противолежитъ уголъ въ $90^0+\theta$, а въ другомъ въ $90^0-\theta$, прочіе же два бока суть a' и b.

451. Для гиперболы не нужно повторять сихъ выводовъ, но достаточно перемѣнить b на $b\sqrt{-1}$, и b' на $b'\sqrt{-1}$, отъ чего получимъ

$$a'^2 \quad b'^2 = a^2 - b^2, \quad a'b'\sin\theta = ab,$$
$$a'^2se = b'^2s'c', \text{ или } a^2tt' = b^2,$$
$$a^2t^2 - (a^2+b^2)t\tang\theta = b^2,$$

уравненія, служащія къ тому же употребленію, какъ и въ эллипсѣ. И такъ, *въ гиперболѣ разность квадратовъ сопряженныхъ поперечниковъ, равна разности квадратовъ осей; параллелограммъ, вписанный въ гиперболу постоянно равновеликъ прямоугольнику изъ осей.*

Если $a'=b'$, то $a=b$ и обратно: слѣд. одна только равносторонняя гипербола имѣетъ равные сопряженные поперечники, и въ оной нѣтъ другихъ сопряженныхъ поперечниковъ, какъ равныхъ между собою. Сверхъ сего $tt'=1$: пусть CA (чер. 213) будетъ 1-я ось, CM и Cy' два равные сопряженные поперечника; то $\tang MCA = \cot y'CA = \tang y'Cy$, или $y'Cy = x'Cx$; и какъ ассимптота SC составляетъ уг. SCA въ 45^0; слѣд. $SCM \quad SCy'$: посему *ассимптота дѣлитъ по-поламъ углы всѣхъ сопряженныхъ поперечниковъ равносторонней гиперболы.*

455. Треуг-ки QSM, CMP (чер. 213) равновелики (чл. 420), и площадь $CPMQ = SMC = \frac{1}{2}ab$: но (стр. 427) $CMS = \frac{1}{2}SM.CM.\sin\theta$, гдѣ θ означаетъ уг. CMS сопряженныхъ поперечниковъ, или $ab = a'.SM.\sin\theta = a'b'\sin\theta$ (чл. 434.); слѣд. $SM = b'$. *Какой бы* CM *діаметръ ни былъ; длина и направленіе его сопряженнаго есть* ST. Діагонали HI и GK (чер. 215), вписаннаго параллелограмма, суть ассимптоты.

456. Совершивъ надъ урав.-мъ $a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2$ вычисленіе, какъ въ чл. 416-мъ, получимъ $y = \pm\frac{b'}{a'}x$,

для уравненія ассимптотовъ при сопряженныхъ поперечникахъ. Изъ сего можно получить различныя новыя теоремы.

Сдѣлаемъ $x = a' = CM$ (чер. 213); получимъ $y = b' = MS = MT$; и такъ M есть средина ST (чл. 420 и ассимптоты опредѣляются окончностями S, T сопряженныхъ поперечниковъ (чл. 435).

Когда Cy' параллельно касательной ST, то каждой абсциссѣ соотвѣтствуютъ двѣ равныя и противолежащія ординаты, слѣд. Cx' дѣлитъ по-поламъ bb' и NN'; ошкуда $bN = b'N'$: и какъ направленіе ST произвольно, то всякая хорда имѣетъ сіе свойство (чл. 421).

437. Парабола не имѣетъ сопряженныхъ поперечниковъ; отнесемъ оную къ простымъ ея діаметрамъ. Чтобы перенести начало A въ какую-нибудь точку (a, b), измѣняя кромѣ сего и направленіе сопряженныхъ, надлежитъ (чл. 383) въ уравненіи $y^2 - 2px = 0$ сдѣлать

$$x = a + cx' + c'y', \quad y = b + sx' + s'y',$$

гдѣ s, s', c, c' сохраняютъ прежнія значенія: получимъ $b^2 - 2ap + 2x'(bs - pc) + 2y'(bs' - pc') + 2ss'x'y' + s^2x'^2 + s'^2y'^2 - 0$. Но дабы ось x' была діаметръ относительно оси y', должно (чл. 427), чтобы члены $2ss'x'y'$ и $2y'(bs' - pc')$ уничтожились: слѣд. $ss' = 0$ и $bs' - pc' = 0$. Изъ 1-го уравн. $s = 0$, $c = 1$; а 2-е обратится въ $b \tan\theta = p$, гдѣ θ есть уголъ новыхъ осей x' и y': оно опредѣляетъ сей уголъ или направленіе оси y'; a и b произвольны. Слѣд. *прямыя* QS, *параллельныя оси* Ax, *суть діаметры параболы, и другихъ діаметровъ она не имѣетъ* (чер. 205. Преобразованное уравн. будетъ

$$s'^2y'^2 - 2px' + b^2 - 2pa = 0.$$

Но изъ опредѣленія (чл. 426) слѣдуетъ, что если прямая есть діаметръ относительно другой, то всякая линія, параллельная сей послѣдней, можетъ быть принята за ось y: перенесемъ начало въ точ-

ку M, гдѣ ось x' пересѣкаетъ кривую, получимъ $b^2 - 2pa = 0$; отъ чего

$$y'^2 = \frac{2px'}{\sin^2\theta} = 2p'x',$$

Положивъ $\frac{p}{\sin^2\theta} = p'$. Такъ какъ $\operatorname{tang}\theta = \frac{p}{b}$; слѣд. касательная MT въ началѣ M есть ось y' (чл. 404); $2p'$ называется *параметромъ* діаметра SM; но

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2+b^2)}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(p+2a)}};$$

посему (чл. 395) $2p' = \frac{2p}{\sin^2\theta} = 2(p+2a) = 4MF$.

Итакъ *параметръ въ четверо болѣе разстоянія начала отъ фокуса.* Соединимъ уравненія.

$$b\operatorname{tang}\theta = p,\ p' = p+2a,\ b^2 = 2pa.$$

Очевидно, что по извѣстнымъ двумъ изъ пяти величинъ p, p', a, b и θ, можно опредѣлить при прочія (выключая не возможные случаи выражаемые анализомъ), и построить кривую; ея урав. будетъ $y'^2 = 2p'x'$.

438. Одинакой видъ уравненій при осяхъ, и при діаметрахъ, ведетъ къ слѣдующимъ заключеніямъ.

1-е. Построеніе показанное для эллипсиса (чл. 431, 2-е), можно примѣнить къ параболѣ, когда извѣстны діаметръ и параметръ онаго $2p'$.

2-е. Уравн. касательной въ какой-нибудь точкѣ (x', y') есть $yy' = p'(x+x')$; наклоненіе оной къ діаметру опредѣляется величиною $\frac{p'}{y'}$, выражающею отношеніе синусовъ угловъ составляемыхъ касательною съ осями. Если касательную должно провести чрезъ точку внѣ, що построенія и свойства, изъясненныя въ (чл. 407), приличны и здѣсь.

3-е. Под-касательная, какъ и прежде, вдвое болѣе абсциссы. Посему легко провести касательную въ данной точкѣ по извѣстному діаметру.

Если начерчена парабола MAM' (чер 205), що можно сыскать діаметръ, ось, вершину, касательныя и пр....;

ибо, проведя прямую чрезъ средину какихъ-нибудь двухъ параллельныхъ хордъ, получимъ діаметръ MS: начертивъ потомъ хорду MM' перпендикулярную къ MS, и AN параллельную съ нею чрезъ средину P, найдемъ вершину A....

Замѣтимъ, что $2p' = \frac{y'^2}{x'}$; и такъ, параметръ есть третья пропорціональная къ какой-нибудь абсциссѣ и ея ординатѣ. Посему легко построить параболу, зная наклоненіе какого-нибудь діаметра MS къ Mt, и точку кривой: ибо сопряженныя x' и y' сей точки, опредѣляютъ параметръ $2p'$, такъ что получимъ прежде найденное урав. $y^2 = 2p'x$.

Изслѣдованіе уравненій второй степени.

439. Пусть требуется построить кривыя линіи, коихъ урав. есть

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad \ldots \quad (a);$$

величина и знаки предстоящихъ A, B.... извѣстны. Положимъ сопряженныя прямоугольными, ибо посредствомъ преобразованія всегда можно, не измѣняя степени уравненія, привести оное къ вышеписанному виду (*L*, чл. 384). Такъ какъ кривыя, имѣющія центръ и не имѣющія онаго, весьма различны по образу своему и по свойствамъ, то откличимъ слѣдующія три случая: когда величина $B^2 - 4AC$ есть нуль, отрицательная или положительная. Для краткости положимъ $B^2 - 4AC = m$.

1-й случай, $B^2 - 4AC = m = 0$.

440. Изслѣдываемая здѣсь кривая MDM' (чер. 257) *не имѣетъ центра*; Ax и Ay суть оси. Отнесемъ оную къ другимъ осямъ Ax', Ay', также прямоугольнымъ, и ощыщемъ, можно ли имъ дать такое положеніе, чтобъ урав. имѣло слѣдующій видъ:

$$ay'^2 + dy' + ex' + F = 0 \quad \ldots \quad (b).$$

Оба уравненія (a) и (b), будутъ принадлежать той же кривой MDV' при разныхъ осяхъ, если посредствомъ преобразованія сопряженныхъ можно обращать одно изъ оныхъ въ другое. Положивъ, что уг. осей xAx' есть 0: перейдемъ отъ сопряженныхъ $y'Ax'$ къ yAx, съ помощію уравненій $(C$, чл. 384), въ коихъ θ сдѣлаемъ отрицательнымъ, ибо ось x въ урав. (a) будетъ ниже оси x', къ которой относится урав. (b), временно нами принимаемое, какъ данное. И такъ положимъ въ уравненія (b)

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta,\ x' = y\sin\theta + x\cos\theta \ldots (c).$$

Такъ какъ окончательное выраженіе, получаемое отъ сей подстановки, должно быть тожественное съ (a), и какъ постоянное число F одинаково въ обоихъ уравненіяхъ, то надлежитъ, чтобы предстоящіе были соотвѣтственно равны. И такъ, сравнивъ почленно окончательное выраженіе съ (a), получимъ

$$a\cos^2\theta = A, \qquad a\sin^2\theta = C \ldots (1),$$
$$-2a\sin\theta.\cos\theta = B \ldots (2),$$
$$d.\cos\theta + e\sin\theta = D,\ e\cos\theta - d\sin\theta = E \ldots (3).$$

Такимъ образомъ составилось 5 уравненій, для опредѣленія 4-хъ неизвѣстныхъ a, e, d, θ; но по условію $B^2 = 4AC$, урав. 2) тожественно съ (1), такъ что сіи три уравненія составляютъ только два, опредѣляющія a и θ, и сіе вычисленіе возможно только въ случаѣ $m = 0$. Сложивъ два первыя, получимъ

$$a = A + C;$$

отсюда

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{C}{a}},\ \cos\theta = \sqrt{\frac{A}{a}},\ \operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{C}{A}},\ \sin 2\theta = -\frac{B}{a}.$$

Исключивъ потомъ d и e въ урав.-хъ (3), найдемъ

$$d = D\cos\theta - E\sin\theta,\ e = D\sin\theta + E\cos\theta \ldots (4),$$

или $$d = \frac{D\sqrt{A} - E\sqrt{C}}{\sqrt{a}},\ e = \frac{D\sqrt{C} + E\sqrt{A}}{\sqrt{a}} \ldots (5).$$

По условію $B^2 = 4AC$, при первые члена уравненія (a) составятъ (чл. 138) квадратъ двучленнаго количества, или $(ky + lx)^2$; въ такомъ случаѣ A и C суть положительные квадраты, коихъ корни k и l дѣйствительные. Слѣд. безконечность, или мнимость никогда не можетъ войти въ выраженія 4) и (5 ; посему когда $m = 0$, то всегда можно посредствомъ преобразованія осей данное урав. $(a$ представить въ видѣ (b).

Если A или C есть нуль, то и B обратится въ оный, ибо $B^2 = 4AC$; въ семъ случаѣ данное урав. имѣло бы видъ (b), и не нужно было бы измѣнять осей: когда же и A и C равны нулю, то въ уравненіи (a) при первые члена изчезнутъ и оно будетъ 1-й степени.

И такъ для всякаго даннаго уравненія, въ которомъ $m = 0$, совершать вышеозначенное вычисленіе, или лучше сказать, составлять урав. $b)$ при новыхъ осяхъ, опыскавъ предстоящіе онаго посредствомъ нашихъ уравненій, и построивъ новую ось Ax' (чер. 237) по величинѣ θ, т. е.

$$\text{tang}\,\theta = \sqrt{\frac{C}{A}}, \quad \sin 2\theta = -\frac{B}{A+C} \ldots . \quad (6).$$

$\sin 2\theta$ и B имѣютъ противные знаки; сіе доказываетъ, что если уголъ $2\theta > 180^0$, т. е., что если θ или $x'Ax > 90^0$, то ось Ax' ниже Ax. Отъ сего происходитъ знакъ корня, входящаго въ уравненія (5), гдѣ $\sqrt{a}$ сохраняетъ всегда знакъ $+$. Впрочемъ сложность сихъ предстоящихъ происходитъ отъ неизвлекаемости $\sqrt{a}$.

Положимъ на пр. $2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 - y - 2x + 5 = 0$; помноживъ все на 2, чтобъ обнаружить полный квадратъ, получимъ $A = 4$, $B = -4$, $C = 1$ . . . . ; откуда $a = 5$, $\text{tang}\,\theta = \frac{1}{2}$, $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$. Принявъ положительные корни, найдемъ $d = 0$, $e = -2\sqrt{5}$; откуда $5y'^2 - 2x'\sqrt{5} + 10 = 0$. Таково урав., которое надлежитъ построить, ось же x' составляетъ уголъ xAx', коего $\text{tang} = \frac{1}{2}$ (почему

отложивъ произвольную AE, возставимъ перпендикуляръ iE, равный половинѣ AE, чер. 257).

441. Слѣд. данное урав. (a) посредствомъ предыдущаго вывода примешъ вообще видъ урав. b), которое требуется теперь построить на прямоугольныхъ осяхъ Ax', Ay' (чер. 257). Перенесемъ начало въ точку $(h, k$; сіи двѣ буквы означаютъ величины произвольныя. Перемѣнивъ y' и x' на $y'+k$, и $x'+h$ въ уравненіи b, оно обратится въ

$$ay'^2+(2ak+d)y'+ex'+(ak^2+dk+eh+F)=0.$$

Для опредѣленія h и k, выключимъ членъ заключающій y', и постоянный членъ (новое начало будетъ точка кривой линіи); и такъ положимъ:

$$2ak+d=0,\quad ak^2+dk+eh+F=0;$$

откуда $k=-\frac{d}{2a}$, $h=\frac{d^2-4aF}{4ae}=\frac{ak^2-F}{e}$ . . . . (7).

Таковы сопряженныя новаго начала, которое есть точка кривой (*): преобразованное урав. будетъ $ay'^2+ex'=0$; сравнивъ его съ $y'^2=2px'$, увидимъ, что оно есть урав. параболы, отнесенной къ оси своей (**), и обращенной въ ту или другую сторону, смотря по величинѣ e: положительная ли она, или отрицательная.

Пусть будетъ урав. $2y^2+5y-4x=\frac{1}{8}$; найдемъ, что $k=-\frac{5}{4}$, $h=-1$; когда отложимъ $AB=-1$, $BC=-\frac{5}{4}$ чер. 224); то начало перемѣстится изъ A въ C, и урав. обратится въ $y'^2=2x'$. Вершина параболы будетъ въ C, а параметръ оной 2.

(*) Въ послѣдующихъ чертежахъ, A означаетъ начало прежнихъ сопряженныхъ, а C новыхъ.

(**) Замѣтимъ, что еслибъ урав. (b) было данное, и оси не были прямоугольны, то для приведенія оныхъ въ такое положеніе, не нужно бы дѣлать преобразованія, и можно бы употребить уравненія (7) для перемѣщенія начала; парабола была бы въ семъ случаѣ отнесена только къ одному изъ своихъ діаметровъ, какъ въ чл. 437, и тогда столь же легко можно бы оную построить, какъ и параболу отнесенную къ оси.

Изъ уравненія $y^2-2y+x=0$, составившееся $y'^2=-x$; $AB=BC=1$ (чер. 225), начало перейдетъ изъ A въ C, и парабола открыта въ сторону отрицательныхъ $x^{ов}$.

Возьмемъ наконецъ прежній примѣръ (чл. 440), преобразованный уже въ $5y'^2-2x'\sqrt{5}+10=0$; принимая Ax', Ay' за оси (чер. 237); получимъ $k=0$, $h=\sqrt{5}$, вершина или новое начало будетъ въ точкѣ M'; отложивъ $AM'=\sqrt{5}$, урав. обратится въ $y'^2=2x'\sqrt{\frac{1}{5}}$, а параметръ $=\sqrt{\frac{4}{5}}$.

442. Въ одномъ случаѣ сіе вычисленіе не исполнимо, т. е. когда $e=0$; ибо h не входитъ болѣе въ вычисленіе и остается произвольнымъ, такъ что для опредѣленія одного k будетъ два уравненія. Положивъ только $2ak+d=0$, получимъ

$$ay'^2+ak^2+dk+F=0, \text{ или } 4a^2y'^2=d^2-4aF.$$

Новое начало есть одна изъ точекъ линіи параллельной оси x', имѣющей урав. $y'=k$.

1-е. Если $d^2-4aF>0$, то $2ay'=\pm\sqrt{(d^2-4aF)}$, уравненіе, представляющее *двѣ прямыя параллельныя* оси x' и равно отъ оной отстоящія. Таково на пр. урав. $y'^2+4y'+5=0$.

2-е. Если $d^2-4aF=0$, то $y'=0$: урав. оси x'; слѣд. урав. b) представляетъ *прямую* параллельную оси x'. Урав. $y'^2+4y'+4=0$ относится къ сему случаю.

3-е. Если $d^2-4aF<0$, то предложенное урав. *ничего* не представляетъ; ибо оно обращается въ $y^2+n^2=0$, коего несообразность очевидна. Таково на пр. урав. $y'^2+4y'+5=0$.

Въ случаѣ $e=0$, урав. (b) обращается въ $ay'^2+dy'+F=0$, которое можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$(2ay'+d)^2-d^2+4aF=0.$$

И такъ, сіе урав. болѣе или менѣе полнаго квадрата, или даже равно полному квадрату, смотря потому $4aF>$, $<$ или $=d^2$. Легко можно видѣть, что урав. (a) представляетъ тѣже частныя свойства,

и въ семъ случаѣ приметъ видъ $(ky+lx+c)^2+Q=0$; оно будетъ несообразно, если Q положительное, и 1-й степени, когда $Q=0$; наконецъ если Q отрицательное, то урав. представляетъ двѣ параллельныя. (Смотр. стр. 522).

443. И такъ доказано, что *если* $m=0$, *то урав. 2-й степени принадлежитъ параболѣ;* исключая нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, гдѣ оно изображаетъ *прямую*, *двѣ параллельныя* или даже *ничего*.

Если дано урав. $cx^2+dy+ex+F=0$,
то замѣнимъ, что оно обращается въ (b), чрезъ перемѣну x на y, а y на x; слѣд. оно изображаетъ тоже кривую, отнесенную къ оси y; впрочемъ можно перенести начало по вышесказанному. Напр. урав. $x^2+3y-2x-1$, взявъ $AC=1=h$ (чер. 226) и перенеся начало изъ A въ C, оно обратится въ $x'^2+3y'=0$. Парабола открыта въ сторону отрицательныхъ y^{ax}, и ось y' есть ось кривой.

Посему найдемъ, во 1-хъ, что урав. $x^2-6x+10=0$ ничего не представляетъ; во 2-хъ, $x^2-6x+9=0$ есть урав. прямой параллельной къ оси y; въ 3-хъ, $x^2-8x+7=0$, обращающееся въ $x'=\pm 3$, отъ положенія $h=4$, изображаетъ двѣ линіи параллельныя оси y.

2-й случай: $B^2-4AC=m$ *отрицательному*.

444. Кривая имѣетъ центръ; куда во-первыхъ перенесемъ начало; ибо предложенное урав. нельзя уже привести въ видъ (b). И такъ совершивъ вычисленіе ч. 425-го, урав. (a) превратится въ

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Q=0 \ldots\ldots (f).$$

Постараемся освободить оное отъ члена xy, т. е. преобразовать его въ

$$qy'^2+px'^2+Q=0 \ldots\ldots (g).$$

Подставимъ въ сіе послѣднее вмѣсто y' и x' величины (c) и сравнимъ по-членно окончательное выраженіе съ уравненіемъ (f), чтобы выразить можество; получимъ

$$q\cos^2\theta + p\sin^2\theta = A \quad \ldots (1),$$
$$q\sin^2\theta + p\cos^2\theta = C \quad \ldots (2),$$
$$2\sin\theta.\cos\theta\ (p-q) = B \quad \ldots (3).$$

Сіи три уравненія опредѣляютъ три неизвѣстныя θ, p и q. Сумма двухъ 1-хъ обращается въ $p+q = A+C$; дабы составить помощь $B^2 - 4AC$ или m, возвысимъ въ квадратъ 3-е, и вычтя учетверенное произведеніе двухъ другихъ, получимъ

$m = -4pq\ \sin^2\theta + 2\sin^2\theta.\cos^2\theta + \cos^2\theta) = -4pq(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2$, или $m = -4pq$. Какъ сумма неизвѣстныхъ p и q есть $A+C$, а произведеніе оныхъ $= \frac{1}{4}m$, слѣд. они суть корни уравненія 2-й степени,

$$z^2 - (A+C)z = \tfrac{1}{4}m \quad \ldots (4);$$

ошкуда p и $q = \frac{1}{2}(A+C) \pm \frac{1}{2}\sqrt{B^2 + (A-C)^2}$.

Очевидно, что сіи корни будутъ всегда дѣйствительные.

Разность уравненій (1, и 2) есть

$$(q - p\ \cos^2\theta - \sin^2\theta) = (q - p)\cos 2\theta = A - C;$$

слѣд. прибѣгнувъ къ уравненію 3), получимъ

$$\sin 2\theta = \frac{-B}{q-p},\quad \cos 2\theta = \frac{A-C}{q-p},\quad \text{tang } 2\theta = \frac{-B}{A-C}.$$

Изъ сей послѣдней величины, удобной для построенія, найдемъ 2θ, а потомъ и ут. θ наклоненія оси x' къ оси x: знакъ находящійся при tang 2θ выразитъ, что $2\theta >$ или $< 90^0$; но во всякомъ случаѣ $\theta < 90^0$, и ось x' выше оси x. Сверхъ того $\sin 2\theta$ всегда положительный; слѣд. $p - q$ и B должны имѣть одинакіе знаки: и такъ q *есть наибольшій изъ двухъ корней*, *если* B *отрицательное; и наименьшій, если* B *положительное.* Посредствомъ сего можно видѣть, какой корень должно предпочесть для p и q.

Пусть будетъ на пр. урав. $5y^2 + 2xy + 5x^2 + 2y - 2x = \frac{3}{2}$; перенеся начало въ центръ (чл. 425, коего сопряженныя суть $h = \frac{1}{4}$, $k = -\frac{1}{4}$, предложенное уравн. обратится въ $5y^2 + 2xy + 5x^2 = 2$; помнимъ для урав. (4 получится $z^2 - 10z + 24 = 0$; ошкуда $z = 5 \pm 1$; и

шакъ какъ B положительное, то $q=4$, $p=6$; потомъ $4y'^2+6x'^2=2$, уравн., требующее построенія; оси же x' и y' опредѣляются чрезъ $\tang 2\theta=\infty$, откуда $2\theta=90^0$, т. е. ось x' составляетъ съ находящеюся ниже оной осью x уголъ въ 45^0. Сіи построенія не затруднительны.

445. Сіе вычисленіе не имѣетъ никакихъ исключеній. Надлежитъ замѣтить, что въ настоящемъ случаѣ m отрицательное; т. е. $B^2-4AC=-m$: отъ чего коренный знакъ величины z обращается въ $\sqrt{(A+C)^2-m}$, который $<A+C$. Слѣд. сіи величины p и q имѣютъ знакъ одинакій съ $A+C$, такъ что въ уравненіи (g), которое надлежитъ разсмотрѣть, можно p и q принимать положительными. Мы послѣдовательно разсмотримъ три случая, когда Q нуль, положительное или отрицательное.

1-е. Если $Q=0$, то $qy'^2+px'^2=0$; урав. не иначе существующее, какъ когда $x'=0$ и $y'=0$. Слѣд. имѣютъ *точку*, которая есть начало осей x' и y'. Таково урав. $y^2-4xy+5x^2+2x+1=0$; чрезъ вычисленіе получимъ точку $(-1, -2)$, обращающее предложенное уравн. въ $y^2-4xy+5x^2=0$, потомъ будетъ $z=3\pm 2\sqrt{2}$, $\tang 2\theta=-1$, $2\theta=135^0$, наконецъ $(3+2\sqrt{2})y'^2+(3-2\sqrt{2})x'^2=0$.

2-е. *Если* Q *положительное*, то предложенное урав. *ничего* не представляетъ, ибо тогда уравн. (g) несообразно, потому что сумма трехъ положительныхъ величинъ въ нуль обратиться не можетъ. Сіе случится, если въ предыдущемъ примѣрѣ вмѣсто послѣдняго члена 1, поставимъ величину >1.

3-е. *Если* Q *отрицательное*, то преобразованное урав. (g) обращается въ $qy'^2+px'^2=Q$. Полагая послѣдовательно y' и x' равными нулю, дабы опредѣлить точки сѣченія кривой съ новыми осями, получимъ

$$y'=\sqrt{\frac{Q}{q}}=b,\quad x'=\sqrt{\frac{Q}{p}}=a;$$

откуда $q=\frac{Q}{b^2}$, $p=\frac{Q}{a^2}$, поэтомъ $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$. Кривая есть эллипсисъ, отнесенный къ центру и къ осямъ своимъ $2a$ и $2b$.

Если въ предыдущемъ примѣрѣ, вмѣсто послѣдняго члена поставимъ -1, то во-первыхъ найдемъ $y^2-4xy+5x^2=2$, величины z и θ будутъ тѣже, поэтомъ уравн.

$$(3+2\sqrt{2})y'^2+(3-2\sqrt{2})x'^2=2,$$

принадлежащее эллипсису, коего оси суть $\sqrt{2(3+2\sqrt{2})}$.

446. Изъ сего изслѣдованія заключимъ, что общее уравн. 2-й степени *представляетъ эллипсисъ, если* m *отрицательное;* но при семъ бываютъ два частные случая, изъ коихъ въ одномъ уравненіе не означаетъ *ничего*, а въ другомъ *точку*. Когда $m<0$, то величины z имѣютъ одинакій знакъ; для круга онѣ равны, ибо тогда $p=q$. Вообще при прямоугольныхъ сопряженныхъ, если $p=q$ въ уравненіи (g), то оно обращается въ $y'^2+x'^2=\frac{Q}{p}$, уравн. круга, коего радіусъ есть $\sqrt{\frac{Q}{p}}$; и обратно, *уравн. 2-й степени въ томъ только случаѣ принадлежитъ кругу, когда оно не заключаетъ члена* xy, *и если предстоящіе* x^2 *и* y^2 *равны, полагая оси прямоугольными.* Въ самомъ дѣлѣ, поелику кругъ имѣетъ центръ, то можно въ оный перенести начало, отъ чего урав. получитъ видъ f; при томъ извѣстно, что при всякой оси x сіе урав. должно быть $y^2+x^2=r^2$; и такъ очевидно, что должно быть $B=0$, и $A=C$. Урав. $2y^2+2x^2-4y-4x+1=0$ принадлежитъ кругу, коего радіусъ есть $\sqrt{\frac{3}{4}}$, а центръ въ точкѣ $(1, 1)$.

3-й случай $B^2-4AC=m$ *положительному.*

447. Всѣ вычисленія чл. 444 имѣютъ здѣсь мѣсто, такъ что должно совершить тоже преобразованіе

и получимъ прежнія величины θ и z. Но какъ $B^2 = m + 4AC$, гдѣ m положительное, то корень $> A + C$, и корни z имѣютъ противные знаки; отъ чего въ преобразованномъ уравненіи (g), можно величинѣ q дать знакъ $+$, и $-$ величинѣ p, а именно:

$$qy'^2 - px'^2 + Q = 0 \ldots\ldots (l).$$

Изслѣдуемъ тѣ случаи, когда Q есть нуль, положительное или отрицательное.

1-е. Если $Q = 0$, то $qy'^2 - px'^2$, отсюда $y' = \pm x' \sqrt{\frac{p}{q}}$; что очевидно представляетъ *двѣ прямыя* CD, CE (чер. 220), пересѣкающіяся въ новомъ началѣ; ось x' дѣлитъ по-поламъ уголъ DCE ими составляемый. Ордината $\pm \sqrt{\frac{p}{q}}$, соотвѣтствующая $x' = 1$, служитъ для построенія сихъ прямыхъ; она есть тангенсъ угловъ DCx', ECx'.

На прим: уравн. $y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0$, [когда перенесутъ начало въ точку $(0, -1)$, которая есть центръ], обратится въ $y^2 - 6xy + x^2 = 0$; отъ чего найдемъ $z^2 - 2z = 8$; отсюда $z = 1 \pm 3$, т. е. $q = 4$, $p = -2$, и $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = 0$; посему $y' = \pm x' \sqrt{\frac{1}{2}}$: наконецъ $\theta = 45^0$. Сіи построенія не затруднительны.

2-е. *Если* Q *положительное*, то уравн. (1) обратится въ $qy'^2 - px'^2 = -Q$; положивъ $x' = 0$, получимъ $y' = \sqrt{\frac{Q}{q}} . \sqrt{-1}$; сдѣлавъ $\sqrt{\frac{Q}{q}} = b$; потомъ положивъ $y' = 0$, найдемъ

$$x' = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a, \quad \sqrt{\frac{Q}{q}} = b;$$

сіи суть полу-оси гиперболы, въ чемъ убѣдятся подстановкою величинъ $p = \frac{Q}{a^2}$, $q = \frac{Q}{b^2}$, отъ чего получимъ $a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2$. Примѣръ сего случая составится, когда въ послѣднемъ членѣ предыдущаго

уравненія вмѣсто $+1$ поставимъ 5; величины z, 0 останутся тѣже, и будетъ $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = -1$; оси суть: $b = 1$, $a = \sqrt{2}$.

5-е. *Если Q отрицательное*, то $qy'^2 - px'^2 = Q$; вычисленіе подобное вышеприведенному, или простая перемѣна x на y, и y на x, докажетъ, что уравн. представляетъ гиперболу, коей оси суть обращныя предыдущихъ. Перемѣнивъ $+1$ на -3, въ послѣднемъ членѣ вышеприведеннаго примѣра, получимъ $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = -1$; оси суть: $a = 1$, $b = \sqrt{2}$; кривая пересѣкаетъ 2-ю ось сопряженныхъ (ось y').

448. Будемъ измѣнять Q въ уравненіи l: когда Q положительное, то уравн. представляетъ гиперболу MAN, LOI (чер. 223); и изъ величинъ осей a и b, слѣдуетъ, что если отложимъ $AD = AD' = \sqrt{\frac{p}{q}}$, и абциссу $CA = 1$, (или $AD = b$, и $AC = a$), то прямыя CD и CD' будутъ ассимптоты всѣхъ гиперболъ, получаемыхъ по мѣрѣ возрастанія Q; только вершина A все болѣе и болѣе удаляется, и кривая расходится безпрестанно сильнѣе. Если $Q = 0$, то уравн. представляетъ самые ассимптоты, $qy'^2 - px'^2 = 0$. Наконецъ, когда Q отрицательное, то получатъ гиперболу $M'AN'$, $I'OL'$, начерченную въ тѣхъ же ассимптотахъ, но только въ другихъ углахъ; вершины A', O' удаляются, по мѣрѣ увеличиванія Q.

449. И такъ *общее уравн. 2-й степени принадлежитъ гиперболѣ, всякой разъ, когда m положительное*; исключая одинъ частной случай, гдѣ оно изображаетъ *двѣ пересѣкающіяся прямыя*. Величины z тогда съ противными знаками; и если не взирая на знакъ онѣ равны, $C = -A$, то гипербола равносторонняя. Когда A и C съ противными знаками, то $B^2 - 4AC$ всегда будетъ положительное, и урав. въ семъ случаѣ представляетъ гиперболу, какія бы A, B, C... величины ни были. Тоже самое будетъ если A или

C нуль, т. е. если предложенное уравн. не заключаетъ одного изъ квадратовъ x^2 и y^2, или даже обоихъ сихъ квадратовъ вмѣстѣ. Ходъ вычисленій, для всѣхъ сихъ различныхъ случаевъ всегда одинаковъ; но такъ какъ въ послѣднемъ оный чрезвычайно простъ, то изложимъ его здѣсь. Пусть дано уравн.

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0;$$

перенесемъ начало въ центръ, положивъ $Bk + E = 0$, $Bh + D = 0$; откуда

$$k = -\frac{E}{B},\ h = -\frac{D}{B},\ x'y' = \frac{Q}{B^2},$$

гдѣ $Q = DE - BF$. Сіи выраженія не имѣютъ исключеній. И такъ предложенное уравн. *принадлежитъ гиперболѣ, отнесенной къ осямъ параллельнымъ ассимптотамъ.* Гипербола будетъ равносторонняя, когда оси xy прямоугольны (чл. 416). Если CD' (чер. 223) есть ось x', CD ось y', то кривая начерчена въ углахъ DCD', ECE', когда Q положительное; такъ на прим: гипербола MAN, LOI; она обратится въ $M'A'N$, $I'O'L'$, когда Q отрицательное. Если $Q = 0$, то данное уравн. означаетъ самые ассимптоты.

И такъ, чтобы построить урав. $xy - 2x + y + n = 4$ найдемъ $k = 2$, $h = -1$; отложимъ $AB = 1$ (чер. 227), $BC = 2$; Cx', Cy' будутъ ассимптоты гиперболы $x'y' = 2 - n$, которая есть MN, OP, если $n < 2$; $M'N'$, $O'P'$ если $n > 2$; наконецъ $n = 2$ опредѣлитъ прямыя Cx', Cy'.

450. Надлежитъ замѣтить, что если въ случаѣ $m >$ или < 0, предложенное уравн. не имѣетъ члена xy, то выводъ обращается въ простое перемѣщеніе начала въ центръ. Даже если оси косвенныя, то нѣтъ необходимости преобразовывать ихъ въ прямоугольныя, и тогда уравн. вмѣсто осей отнесено къ сопряженнымъ поперечникамъ. Въ самомъ дѣлѣ пусть дано уравн.

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

центръ будетъ въ точкѣ $\left(-\frac{E}{2C}, -\frac{D}{2A}\right)$ т. е. (*).

$$2Ch+E=0,\ 2Ak+D=0,\ Ay'^2+Cx'^2+Q=0,$$

положивъ $Q=Ak^2+Ch^2+Dk+Eh+F=F-\frac{AE^2+CD^2}{4AC}$.

451. Вотъ различные примѣры сихъ вычисленій.

Уравненія $2y^2+3x^2-3x-2y+2=0$, $4y^2+2x^2-5x+2=0$ ничего не представляютъ; въ 1-мъ найдемъ для центра $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ и оно обратится въ $2y'^2+5x'^2+\frac{3}{4}=0$; во 2-мъ центръ будетъ въ точкѣ $(\frac{3}{4}, 0)$, и произойдетъ $4y'^2+2x'^2+\frac{7}{8}=0$. Уравн. $y^2+2x^2-2y+4x+5=0$ принадлежитъ точкѣ $(-1, 1)$.

Для построенія уравненія $\frac{3}{2}y^2+3x^2-12x+3=0$, найдемъ $h=2$, $k=0$, потомъ $\frac{3}{2}y'^2+3x'^2=9$: полуоси эллипсиса будутъ $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}$; отложивъ $AC=2$ (чер. 219), $BC=\sqrt{3}$, $CO=\sqrt{6}$, начертятъ эллипсисъ $DFEO$. Если сопряженныя косвенныя, то сіи величины принадлежатъ сопряженнымъ поперечникамъ.

$y^2+2x^2-2y=0$, представляетъ эллипсисъ касательный къ оси x, и коего центръ на оси y въ точкѣ $(0, 1)$; при семъ $a=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $b=1$.

Уравн. $y^2-4x^2+4y+12x-5=0$, обращается въ $y'=\pm 2x'$. Отложивъ $AB=\frac{5}{2}$, $BC=-2$ чер. 220, перенесутъ начало изъ A въ C; потомъ берутъ $y'=2$, и $x'=\pm 1$ и проводятъ CD и CE.

Если $2y^2-3x^2-2y-3x+\frac{1}{2}=0$, то центръ въ точкѣ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, и $2y'^2-3x'^2=-\frac{3}{8}$. Отложивъ $AB=\frac{1}{2}=BC$ (чер. 221) начертятъ гиперболу, у которой $a=\frac{1}{4}$, $b=\sqrt{\frac{3}{8}}$ суть оси, или сопряженные поперечники

(*) Сопряженныя центра легко опредѣлятся посредствомъ теоремы (чл. 503), доставляющей способъ уничтожать 2-й членъ многосложнаго количества. Если помножимъ урави. $2Ch+E=0$ и $2Ak+D=0$ соотвѣтственно на h и k, и сложимъ, то получимъ $Ak^2+Ch^2=-\frac{1}{2}(Dk+Eh)$, что служитъ къ сокращенію величины Q, какъ то показано далѣе.

смотря по сопряженнымъ, прямоугольныя онѣ, или косвенныя.

Урав. $y^2-2x^2-2y+9=0$, обратившся въ $y'^2-2x^2+8=0$, выражающее гиперболу, для коей $k=1$, $h=0$, $a=2$, $b=2\sqrt{2}$.

Наконецъ $3y^2-2x^2+2x+3y=\frac{1}{2}$, даетъ $AB=h=\frac{1}{2}$ (чер. 222), $BC=k=-\frac{1}{2}$; откуда $3y'^2-2x'^2=\frac{3}{4}$, урав., которое легко можно примѣнить къ чертежу 221; только кривая находится въ другомъ положеніи.

452. Изъ сего изложенія слѣдуетъ, что общее урав. 2-й степени представляетъ три случая: 1-й, когда $m=0$, произойдетъ *парабола;* исключая три частные случая, представляющіе *прямую, двѣ параллельныя* или *ничего;* 2-й, когда m отрицательное, получится *эллипсисъ*, исключая частные случаи, представляющіе *точку* или *ничего;* 3-й наконецъ, когда m положительное, произойдетъ *гипербола* отнесенная къ 1-й или 2-й оси, исключая случай представляющій *Двѣ пересѣкающіяся прямыя.* Такъ какъ сѣченія конуса съ плоскостью суть именно парабола, эллипсисъ и гипербола; или прямая, точка и двѣ параллельныя линіи, если разсѣкающая плоскость проходитъ чрезъ верхъ конуса, то изъ 8-ми нашихъ случаевъ, шесть даютъ коническія сѣченія: отъ чего и говорятъ, что *всѣ уравненія 2-й степени принадлежатъ сѣченіямъ конуса съ плоскостью.* Плоскость и конусъ не могутъ не пересѣкаться или въ сѣченіи составлять двѣ прямыя параллельныя; по сей причинѣ сія теорема допускаетъ два исключенія.

Если плоскость сѣченія двигаясь параллельно самой себѣ, пройдетъ чрезъ верхъ конуса, то эллипсисъ обратится въ точку, парабола въ прямую, гипербола въ двѣ пересѣкающіяся прямыя; что и заставило разсматривать точку, какъ родъ эллипсиса, коего оси равны нулю; прямую какъ родъ параболы;

двѣ пересѣкающіяся прямыя какъ гиперболу (чл. 387). Сіи разсужденія къ эсоріи не относятся.

Въ изслѣдованіи, объясненномъ въ чл. 444 сказано, что если сопряженныя оси косвенныя, то надлежитъ ихъ сначала преобразовать въ прямоугольныя: но гораздо удобнѣе поступишь съ задачею, какъ ниже слѣдуетъ.

Полагая начало въ центрѣ, уравн. кривой есть

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0.$$

Представимъ себѣ кругъ, коего радіусъ есть r, а центръ въ началѣ, и пусть γ означаетъ уголъ сопряженныхъ, уравн. круга будетъ (чл. 377

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma = r^2.$$

Вообще кругъ пересѣчетъ кривую въ четырехъ точкахъ, и очевидно, что ихъ можно соединить двумя діагоналями, которыя и будутъ его діаметры (чл 427). Пусть $y = Mx$ есть урав. одного изъ оныхъ. Надлежитъ во первыхъ опредѣлить M. Подставя Mx вмѣсто y въ нашихъ уравненіяхъ, потомъ исключивъ между ними x^2 и расположивъ члены относительно M, получимъ

$$(Ar^2 + Q)M^2 + (Br^2 + 2Q\cos\gamma)M + Cr^2 + Q = 0.$$

Если r данъ, то изъ сего уравненія найдутъ обѣ величины M, опредѣляющія наши два діаметра, а слѣд. и четыре точки сѣченія кривой съ кругомъ. Если M имѣетъ корни мнимые, то радіусъ r взятъ или слишкомъ великъ или слишкомъ малъ, для пересѣченія сихъ двухъ кривыхъ; наконецъ, если корни равны, то оба діаметра сольются въ одинъ, каждыя двѣ точки пересѣченія въ одну, и кругъ коснется кривой: случай, заслуживающій особеннаго разсмотрѣнія. Касательная проведенная въ точку прикосновенія, касаясь также круга, перпендикулярна къ радіусу r, свойство принадлежащее только главнымъ діаметрамъ кривой: слѣд. r есть величина каждой изъ сихъ двухъ полуосей, коихъ направленіе опредѣляетъ M, если корни

равны. Но извѣстно (чл. 138), что сіе послѣднее условіе выражается уравненіемъ

$$(\tfrac{1}{2}Br^2 + Q\cos\gamma)^2 - (Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q) = 0$$

или $(B^2 - 4AC)r^4 - 4Qr^2(A + C - B\cos\gamma) = 4Q^2\sin^2\gamma$: наше уравн. въ такомъ случаѣ соотвѣтствуетъ полному квадрату; рѣшивъ оное, корень изчезнетъ и получимъ

$$(Ar^2 + Q)M + \tfrac{1}{2}Br^2 + Q\cos\gamma = 0.$$

Уравн. вышенаписанное и рѣшаемое на подобіе квадратнаго, опредѣляетъ r^2: 1-й членъ никогда въ ономъ не изчезнетъ, ибо по предположенію кривая имѣетъ центръ въ началѣ. Потомъ можно построить уравн. $y = Mx$, гдѣ M извѣстно, чрезъ что и получатъ уравн. каждой оси.

Чтобы сей выводъ примѣнить къ прямоугольнымъ осямъ, стоитъ положить $\cos\gamma = 0$.

Въ примѣрѣ (стр. 502) $5y^2 + 2xy + 5x^2 = 2$, легко найдемъ, что $6r^4 - 5r^2 + 1 = 0$; откуда $r^2 = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ выраженія квадратовъ полуосей; и кромѣ сего $M = -1$ и 1, т. е. сіи прямыя составляютъ съ осью x углы въ 135^0 и 45^0. Все сіе согласно съ тѣмъ, что видѣли прежде.

453. Часто имѣютъ въ виду узнать не столько точное построеніе кривой, коей уравн. извѣстно, какъ свойство и видъ оной; слѣдующій способъ весьма удобно обнаруживаетъ сіи обстоятельства, и не имѣетъ, какъ предыдущій, невыгоды вводить неизвлекомые предстоящіе.

Такъ какъ изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что всѣ линіи, представляемыя общимъ уравненіемъ (*a*) уже извѣстны предварительно, то для взаимнаго ихъ отличія, должно опыскать только свойство принадлежащее каждой въ особенности: сіе свойство получается изъ предѣловъ кривой, которые совершенно различны для эллипсиса, параболы и гиперболы. Чтобъ опыскать сіи предѣлы, рѣшимъ уравн. (*a*) относительно y; выраженіе будетъ слѣдующаго вида:

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{(mx^2 + nx + p)} \quad \ldots \quad (1);$$

α, β, m, n и p суть извѣстныя постоянныя количества смотр. стр. 223). Каждой величинѣ x соотвѣтствуютъ двѣ точки кривой, если корень дѣйствительный; если оный мнимый, то кривая не имѣетъ точки соотвѣтствующей такової абсциссѣ; наконецъ корень равенъ нулю, изображаетъ только одну точку кривой. И такъ корень, переходя изъ дѣйствительнаго въ мнимый, соотвѣтствуетъ пространству, заключающемуся между предѣлами. Когда для x возьмутъ достаточно большую величину, положительную или отрицательную, то трех-членное количество $mx^2 + nx + p$ получитъ знакъ (чл. 139, 2-е) наибольшаго члена mx^2; если m отрицательное, то для сихъ величинъ x^2, корень дѣлается мнимымъ, такъ что кривая въ семъ случаѣ со всѣхъ сторонъ ограничена. Она простирается безпредѣльно, когда m положительное; наконецъ если m есть нуль, то корень обратится въ $\sqrt{(nx + p)}$ и очевидно, что кривая ограничена только съ одной стороны; ибо знакъ nx измѣняется вмѣстѣ съ x.

Слѣд. свойство нашихъ кривыхъ зависитъ отъ знака m, что заставляетъ насъ различать въ семъ общемъ изслѣдованіи три случая, а именно, когда m или $B^2 - 4AC$ отрицательное, положительное или нуль.

Но прежде всего замѣтимъ, что для построенія ординатъ PM, PM' (чер. 228 и 229), соотвѣтствующихъ абсциссѣ $AP = x'$, надлежитъ сначала параллельно оси y (коей направленіе дано и произвольно) отложить $PN = \alpha x' + \beta$; потомъ, чтобы придать и вычесть подкоренную величину $NM = NM' = \sqrt{(mx'^2 + nx' + p)}$, откладываютъ оную съ обѣихъ сторонъ отъ N до M и M', и N будетъ срединою MM'. Слѣд. всѣ точки N, удовлетворяющія уравненію

$$y = \alpha x + \beta \quad \ldots \quad (2),$$

пересѣкаютъ по поламъ хорды параллельныя оси Ay; и такъ, проведушь прямую BN, которая будетъ служишь *діаметромъ* кривой (чл. 426).

Сопряженныя шочки D и D' сѣченія кривой съ своимъ діаметромъ, удовлетворяюшъ (чл. 372) обоимъ уравненіямъ (1) и (2), и сіи шочки опредѣляюшся корнями уравненія

$$mx^2 + nx + p = 0 \quad \ldots \quad (3).$$

Видно шакже, что сообшѣшенныя ординашы ED, $E'D'$, сушь касашельныя кривой, ибо когда подкоренная величина нуль, шо предложенное урав. изображаешь квадрашъ уравненія $y - \alpha x - \beta = 0$; и шакъ шочки пересѣченія сольюшся въ одну, въ шочкахъ D и D' (чл. 423).

1-й случай: *Кривыя со всѣхъ сторонъ ограниченныя*, и *отрицательное*.

454. 1-е. *Если корни уравненія* (3) *дѣйствительные*, но означивъ оные чрезъ a и b, и взявъ $AE = a$, $AE' = b$ чер. 228), получимъ касашельныя и искомыя шочки сѣченія D, D': подкоренная величина въ уравненіи (1) примешъ видъ $\sqrt{[-m(x-a)(x-b)]}$, и будешъ дѣйсшвишельна въ шомъ шолько случаѣ, когда производишели $(x-a)$, $(x-b)$ съ прошивными знаками, шакъ что x должешъ бышь $> a$ и $< b$. Слѣд. кривая проширается шолько между предѣлами EF, $E'F'$, со всѣхъ сшоронъ сомкнуша, и есшь *эллипсисъ*.

Замѣшимъ, что для полученія E, E', мы вывели изъ уравненія (3) корни, имѣющіе видъ $x = h \pm \sqrt{f}$; и ошложили $AK = h$, пошомъ $KE = KE' = \sqrt{f}$. Слѣд. C есшь средина діамешра DD', или центръ эллипсиса (чл. 427): посему, дабы получишь сопряженный поперечникъ, должно найши ординашу CO средоточія, считаемую опъ діамешра; ш. е. величину, въ которую обрашишся $\sqrt{(mx^2 + nx + p)}$, когда положишъ $x = h$. Отнеся кривую къ ея сопряженнымъ поперечникамъ, легко начершишь оную.

На прим. изъ $3y^2 - 6xy + 9x^2 - 2y - 6x + \frac{7}{3} = 0$, выходитъ $y = x + \frac{1}{3} \pm \sqrt{(-2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{3})}$: отложивъ $AB = \frac{1}{3}$ (чер. 228), проводятъ поперечникъ BN, коего урав. есть $y = x + \frac{1}{3}$; когда уголъ yAx прямой, то BN составляетъ съ Ax уголъ въ 45^0. Приравнявъ подкоренную величину нулю, получимъ $x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}$; откуда $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$: слѣд. $AK = \frac{2}{3}$, $KE = KE' = \frac{1}{3}$, посредствомъ сихъ величинъ опредѣлится центръ C, и точки D, D' пересѣченія кривой съ поперечникомъ BN. Кромѣ сего, EF и $E'F'$ будутъ касательныя и служатъ предѣлами, ибо подкоренной величинѣ можно дать видъ $\sqrt{[-2(x-1)(x-\frac{1}{3}]}$; слѣд. y возможенъ въ томъ только случаѣ, когда $x > \frac{1}{3}$ и < 1.

Положивъ $x = \frac{2}{3}$, подкоренная величина обратится въ $\sqrt{\frac{2}{9}} = CO$; это будетъ одинъ изъ сопряженныхъ полупоперечниковъ, а CD другой: посему легко начертишь кривую (чл. 431, 2-е). Для наибольшей и наименьшей ординаты найдемъ выраженіе $y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ (чл. 423).

Равнымъ образомъ $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$, опредѣлишь эллипсисъ $DOD'O'$ (чер. 230); $AK = 2$, $EK = E'K = \sqrt{2}$, $CK = 1$; C есть центръ. Положивъ $y = 0$, получимъ $x^2 - 2x + 1 = 0$, т. е. $x = 1$ въ квадратѣ; слѣд. если возьмемъ $AI = 1$, то кривая въ точкѣ I коснется Ax; $OO' = 2b' = \sqrt{2}$: наибольшая и наименьшая ординаты суть 2 и 0.

Безполезно напоминать, что при построеніяхъ, должно обращать особенное вниманіе на знаки; на прим. изъ уравненія

$$4y^2 + 8xy + 8x^2 + 12x + 8y + 1 = 0,$$

получимъ $y = -x - 1 \pm \sqrt{(-x^2 - x + \frac{3}{4})}$; построимъ поперечникъ BD (чер. 231), коего урав. есть $y = -x - 1$; изъ $x^2 + x = \frac{3}{4}$ будетъ $x = -\frac{1}{2} \pm 1$, почему взявъ $AK = -\frac{1}{2}$, и $KE = KD' = 1$, получимъ касательныя ED, $E'D'$ въ предѣлахъ эллипсиса: C есть центръ онаго, и найдемъ $b' = 1$.

2-е. *Если корни уравненія* (3) *равны*, и ихъ величина есть a, то подкоренная величина равна $\sqrt{-m(x-a)^2}$; и такъ (1) обратится въ $y=\alpha x+\beta\pm(x-a)\sqrt{-m}$: слѣд. y имѣетъ величину дѣйствительную въ томъ только случаѣ, когда $x=a$, откуда $y=a\alpha+\beta$.

И такъ получится только *одна точка;* сопряженныя оной извѣстны.

Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что предложенное уравн. обращается здѣсь въ $(y-\alpha x-\beta)^2+(x-a)^2m=0$; и какъ сумма двухъ положительныхъ количествъ, не иначе можетъ быть нулемъ, какъ когда каждое изъ нихъ въ особенности есть нуль, то предложенное уравн. разлагается на два другія (чл. 112). Урав. $y^2-xy+\frac{5}{4}x^2-2x+1=0$ опредѣляетъ точку, коей сопряженныя суть $x=1$, и $y=\frac{1}{2}$. Урав. $x^2+y^2=0$ выражаетъ начало.

3-е. *Если корни уравненія* (3) *мнимые*, то никакая величина x, не можетъ перемѣнить знакъ 3-хъ-членнаго количества $-mx^2+nx+p$ (чл. 159, 9-е), которое всегда имѣетъ знакъ наибольшаго члена $-mx^2$; поелику $\sqrt{(-mx^2+nx+p)}$ не перестаетъ быть мнимымъ, то предложенное уравн. *ничего не представляетъ*. Въ самомъ дѣлѣ, сіе уравненіе тогда обращается въ $(y-\alpha x-\beta)^2+(mx^2-nx-p)=0$, коего оба члена положительные и взаимно уничтожиться не могутъ; посему несообразно предполагать ихъ сумму $=0$, ибо второй членъ не можетъ быть сдѣланъ нулемъ, какъ прежде.

На прим. въ урав. $y^2-2xy+2x^2-2x+4=0$.

Дабы m или B^2-4AC было отрицательное, надлежитъ, чтобы 1-е три члена предложеннаго уравненія или $Ay^2+Bxy+Cx^2$, составляли величину, превышающую полный квадратъ. Въ 1-мъ примѣрѣ, на стр. 514-й, сіи члены суть

$$3(y^2-2xy+3x^2)=3[(y-x)^2+2x^2].$$

2-й случай. *Кривыя со всѣхъ сторонъ неограниченныя; и положительное.*

455. Здѣсь $Ay^2+Bxy+Cx^2$ менѣе квадрата.

1-е. *Когда корни уравненія* (5) *дѣйствительные*, то $a=AE$, $b=AE'$ (чер. 229), опредѣлимъ, какъ выше сказано, точки D и D' пересѣченія кривой съ поперечникомъ NB, и касательныя EF, $E'F'$; при семъ подкоренная величина принимая видъ $\sqrt{m(x-a)(x-b)}$ возможна въ томъ только случаѣ, когда $x-a$ и $x-b$ имѣютъ одинакіе знаки, т. е. когда $x>b$ или $<a$: слѣд. для x не льзя брать величинъ между $a=AE$ и $b=AE'$, и кривая простирается безконечно по обѣ стороны предѣловъ EF $E'F'$; слѣд. она есть *гипербола*.

Чтобы сыскать сопряженный поперечникъ DD', какъ центръ C по срединѣ DD', то подъ корнемъ сдѣлаютъ $x=AK=h$; и обративъ окончательное выраженіе въ дѣйствительное (чл. 429), получатъ такимъ образомъ b'. Потомъ находятъ положеніе ассимптотовъ (чл. 435). Впрочемъ мы скоро изложимъ (чл. 457) *простѣйшій способъ опредѣленія сихъ прямыхъ*.

Пусть на прим. $y^2-2xy-x^2-2y+8x-3=0$; изъ сего $y=x+1\pm\sqrt{(2x^2-6x+4)}$. Сперва начертимъ поперечникъ BN, $(y=x+1)$; изъ $2x^2-6x+4=0$ найдемъ $x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$ и подкоренная величина обратившися въ $\sqrt{2(x-1)(x-2)}$; взявъ $AK=\frac{3}{2}$, $EK=E'K=\frac{1}{2}$, получимъ касательныя EF, $E'F'$ въ предѣлахъ D и D'; и какъ $x>2$ или <1, то найдется гипербола MM'.

Чтобы сыскать сопряженный поперечникъ DD', то въ $\sqrt{(2x^2-6x+4)}$ сдѣлаемъ $x=AK=\frac{5}{4}$, и обратимъ оный въ дѣйствительный; получимъ $b'=\sqrt{\frac{1}{8}}$. Взявъ $D'F'=D'H=\sqrt{\frac{1}{2}}$, составимъ вписанный параллелограммъ, коего діагонали GF', FH суть ассимптоты нашей кривой.

2-е. *Когда уравн.* mx^2+nx+p *имѣетъ мнимые производители*, то кривая не пересѣкаетъ своего

діаметра BN (чер. 229); сверхъ того, сіе трехчленное количество всегда сохраняетъ знакъ члена $+mx^2$, при всякой величинѣ x (чл. 139, 9-е); слѣд. каждая абсцисса всегда опредѣляетъ ординаты дѣйствительныя; посему кривая простирается въ обѣ стороны до безконечности, и есть *гипербола*, расположенная, какъ видно на чер. 232-мъ.

Касательно сопряженныхъ поперечниковъ, центръ находится на BN, который не пересѣкаетъ кривой; но если бы начало было въ центрѣ, то равныя абсциссы и съ прочивными знаками (чл. 425), соотвѣтствовали бы равнымъ ординатамъ; и такъ, подкоренная величина имѣла бы видъ $V(mx'^2+p)$; слѣд. чтобы перемѣстить начало въ центръ, надлежитъ сдѣлать $x=x'+h$; гдѣ h такова, что 2-й членъ mx^2+nx+p исчезаетъ (чл. 503); h есть абсцисса центра, и найдемъ $h=-\frac{n}{2m}$, величина одинаковая съ прежнею. И такъ, отложивъ $AK=h$, ордината KC опредѣлитъ центръ C: поставивъ въ $V(mx^2+nx+p)$ сдѣлавъ $x=h$, получимъ $DC=a'$. Чтобы найти b', надлежитъ искать точки сѣченія BN съ кривою; взявъ мнимую часть корней уравненія $mx^2+nx+p=0$, и обративъ оную въ дѣйствительную, получимъ $KO=KO'$, для абсциссъ оконечностей EE' сопряженнаго поперечника, считаемыхъ отъ центра.

Какъ параллельныя FH, GI къ поперечнику BN касаются кривой въ D и D', то ординаты $O'F$, IH опредѣляютъ также вписанный параллелограммъ, и ассимптоты IF, GH.

Пусть на прим. $y^2+2xy-2y-x=0$; изъ онаго $y=-x+1\pm V(x^2-x+1)$; уравн. поперечника BN (чер. 232) есть $y=-x+1$; но изъ $x^2-x+1=0$ получимъ $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}V-3$, слѣд. кривая не пересѣкаетъ BN; кромѣ сего, какъ x^2-x+1 всегда положительное, то y всегда величина дѣйствительная, и такимъ

образомъ получится гипербола, изображенная чертежемъ 232-мъ.

Чтобы найти сопряженные поперечники, спроэтъ $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $AK = \frac{1}{2}$, $KO = \frac{1}{2}\sqrt{3} = KO'$, откуда опредѣлятся центръ C, и 2-й діаметръ EE'; кромѣ сего въ $\sqrt{(x^2 - x + 1)}$, положивъ $x = \frac{1}{2}$, получимъ $a' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

3-е. *Если корни уравненія* (3) *равны*, то подкоренная величина обращается въ $\sqrt{m(x-a)^2}$, а урав. (1) въ $y = \alpha x + \beta \pm (x-a)\sqrt{m}$,
т. е. $y = x(\alpha \pm \sqrt{m}) + \beta \mp a\sqrt{m}$;
слѣд. получимъ *двѣ прямыя пересѣкающіяся* на діаметрѣ въ точкѣ, для коей $x = a$: построеніе оныхъ не трудно, ибо ихъ уравненія извѣстны; 2-я точка каждой изъ сихъ линій получится, положивъ $x = 0$, откуда $y = \beta \mp a\sqrt{m}$, т. е. надлежитъ по оси y отложить $a\sqrt{m}$ въ верхъ и въ низъ отъ точки сѣченія сей оси съ діаметромъ.

Ясно, что перемѣстивъ и возвыся въ квадратъ, получимъ

$$(y - \alpha x - \beta)^2 - m(x-a)^2 = 0.$$

И такъ, предложенное урав. разлагается на два множителя 1-й степени, и извлекомые относительно x и y; ихъ можно приравнять нулю независимо одно отъ другаго: таковымъ разложеніемъ уравненія, объясняется, что въ семъ случаѣ будутъ двѣ прямыя.

Пусть, на прим. $4y^2 - 8xy + x^2 + 4y + 2x - 2 = 0$; изъ сего $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3x^2 - 6x + 3)}$; но $3x^2 - 6x + 3 = 0$, почему $x = 1$; слѣд. діаметръ (чер. 233) BN, $(y = x - \frac{1}{2})$ пересѣкается только въ одной точкѣ N, для коей $DA = 1$; и какъ предложенное урав. обращается въ $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3}$, то получимъ двѣ прямыя; $x = 0$ опредѣляетъ $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$; откладываютъ $BE = BE' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ и проводятъ прямыя EN, $E'N$.

Пусть предложенное урав. $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4k^2 = 0$; изъ онаго $y = x \pm 2\sqrt{(x^2 + k^2)}$; $y = x$ опредѣляетъ діаметръ BN (чер. 234); очевидно, что кривая его

не пересѣкаетъ; и что получится гипербола MO, $M'O'$. Центръ въ C; возьмемъ $CO = CO' = 2k$; OO' есть 1-й поперечникъ, потомъ $EC = E'C = k$ опредѣлитъ 2-й DD' и ассимптоты HF, IG. Съ уменьшеніемъ k, кривая приближается къ центру и къ ассимптотамъ, неперемѣняющимся; если $k = 0$, то получимъ сіи самые ассимптоты. Наконецъ, если k^2 приметъ противный знакъ, то гипербола начертится въ другомъ углѣ, между тѣми же ассимптотами, и удалится отъ оныхъ по мѣрѣ увеличиванія k.

456. Когда $A = 0$, то въ предложенномъ уравненіи членъ съ y^2 исчезнетъ, и не льзя уже поступать какъ въ чл. 453; но если перемѣнимъ x на y, и y на x, что производитъ только обращеніе осей, то наши выводы можно будетъ приложить; для сего достаточно перемѣнить C на A, D на E; $B^2 - 4AC$ обратится въ B^2, m будетъ положительное, и найдется опять гипербола. Впрочемъ, чтобъ изслѣдовать урав. неимѣющее члена Ay^2, удобнѣе рѣшить оное относительно x и поступать при оси x подобно тому, какъ дѣлали при оси y.

На пр. изъ уравненія $x^2 - 2xy + 2x - 3y + c = 0$ (чер. 255), получимъ $x = y - 1 \pm \sqrt{(y^2 + y - c + 1)}$; прямая DD' $(y = x + 1)$ есть поперечникъ, т. е. разсѣкаетъ на двѣ равныя части всѣ хорды, параллельныя оси x. Изъ уравненія $y^2 + y = c - 1$ выходитъ $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{c - \frac{3}{4}}$; слѣд. если $c > \frac{3}{4}$, то отложатъ $AK = \frac{1}{2}$, $KE = KE' = \sqrt{c - \frac{3}{4}}$), и получатъ D и D' точки сѣченія гиперболы MD, $M'D'$ съ поперечникомъ DD'. Въ $\sqrt{(y^2 + y - c + 1)}$ положивъ $y = -\frac{1}{2}$ и обративъ оный въ дѣйствительный, получимъ $\sqrt{(c - \frac{3}{4})}$ для сопряженнаго поперечника DD'; что опредѣлитъ ассимптоты $F'G$ и FH, изъ коихъ 2-й параллеленъ оси y.

Если $c = \frac{3}{4}$, то получатся самые ассимптоты; а если $c < \frac{3}{4}$, то опять получится гипербола между тѣми же

ассимптотами, но начерченная какъ AH и $F'A'$ въ другихъ двухъ углахъ.

457. Въ общемъ уравненіи (1) (чл. 455), корень заключаетъ величину $m\left(x^2+\frac{mx}{m}+\frac{p}{m}\right)$; приложивъ и вычтя $\frac{n^2}{4m^2}$, дабы дополнить квадратъ (чл. 138), получимъ $y=\alpha x+\beta\pm\frac{1}{2\sqrt{m}}\sqrt{(2mx+n)^2+4mp-n^2}$; подкоренная величина имѣетъ видъ $\sqrt{(x^2-l)}$; совершивъ извлеченіе (стр. 218) получимъ, какъ въ чл. 416, рядъ членовъ, имѣющихъ знаменателемъ $2mx+n$, и уменьшающихся съ возрастаніемъ x, исключая 1-й членъ. Слѣд. опустивъ l, получимъ уравненія ассимптотовъ нашей гиперболы:

$$Y=\alpha x+\beta\pm\frac{2mx+n}{2\sqrt{m}}\quad\ldots\ldots(4);$$

посему, *чтобы получить урав. ассимптотъ, надлежитъ рѣшить предложенное урав., дополнить подъ корнемъ квадратъ и откинуть постоянные члены.*

Легко построишь сіи уравненія; прямыя пересѣкающіяся въ точкѣ $\left(-\frac{n}{2m},\ \beta-\frac{\alpha n}{2m}\right)$, которая есть центръ; 2-я точка получится, положивъ $x=0$, отъ чего опредѣлится ординаты при началѣ $\beta\pm\frac{n}{2\sqrt{m}}$; отложатъ $\frac{n}{2\sqrt{m}}$ по оси y въ верхъ и въ низъ отъ точки сѣченія сей оси съ діаметромъ.

Въ примѣрѣ, стр. 516, $y=x+1\pm\sqrt{(2x^2-6x+4)}$, приложивъ къ величинѣ подъ корнемъ находящейся, и вычтя изъ оной $\frac{9}{2}$, корень обратится въ $\sqrt{[2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}]}$; откинувъ $\frac{1}{2}$ получимъ для уравненія ассимптотовъ (чер. 229), $Y=x+1\pm(2x-3)\sqrt{\frac{1}{2}}$. Положивъ x равнымъ нулю, найдемъ $Y=1\pm3\sqrt{\frac{1}{2}}$; отложивъ $3\sqrt{\frac{1}{2}}$ отъ B къ i и i'; Ci и Ci' будутъ ассимптоты.

Изъ урави. стр. 518, получимъ $y=x\pm2\sqrt{(x^2+k^2)}$; откинувъ k^2, найдемъ урав. ассимптоты $Y=x\pm2x$.

Если предложенное урав. не имѣетъ члена, заключающаго x^2, $y^2 + Bxy + Dy \ldots = 0$, то $\alpha = -\frac{1}{2}B$, $m = \frac{1}{4}B^2$, предѣлящій величины x въ (4) есть $\alpha \pm \sqrt{m} = -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}B$; какъ одна изъ сихъ величинъ есть нуль, слѣд. ясно, что *если урав. не имѣетъ члена, заключающаго* x^2, *то одинъ изъ ассимптотовъ параллеленъ оси* x. Оный будетъ самою осью x^{ax}, когда центръ на ней. Тоже должно сказать и объ оси y, когда нѣтъ члена съ y^2. (См. чер. 252 и 255).

Если уравненіе не заключаетъ ни x^2, ни y^2, ... $xy + Dy + Ex + F = 0$, то получимъ

$$y = -\frac{Ex + F}{x + D} = -E + \frac{DE + F}{x + D},$$

совершивъ дѣленіе. Если $x = \infty$, то $Y = -E$ есть урав. одного изъ ассимптотовъ, ибо отношеніе y къ Y до безконечности приближается къ 1; урав. другаго ассимптота есть $x + D = 0$, ибо тогда $y = \infty$. Слѣд. сіи двѣ прямыя параллельны осямъ, и положеніе ихъ извѣстно (чл. 449).

3-й случай. *Кривыя съ одной стороны неограниченныя*, $m = 0$.

458. Когда $m = 0$, или $B^2 - 4AC = 0$, то при 1-е члена предложеннаго уравненія, или $Ay^2 + Bxy + Cx^2$, составляющъ квадратъ (чл. 138): подкоренная величина уравненія (1) обращается въ $\sqrt{(nx + p)}$. Начертивъ (чер. 257) поперечникъ BN $(y = \alpha x + \beta)$, найдемъ точку D сѣченія онаго съ кривою и касательною EF, когда положимъ $nx + p = 0$; пусть $x = a =$ корню AE сего уравненія, подкоренная величина обратится въ $\sqrt{n(x - a)}$, и дѣйствительна въ томъ только случаѣ, когда n и $x - a$ съ одинаковыми знаками; слѣд. когда n положительное, то $x > a$, и кривая расположена какъ DM; если n отрицательное, то $x < a$, и тогда получится DM'. Кривая простирающаяся въ одну только сторону до безконечности, есть *парабола*.

Легко вывесть параметръ сего діаметра, посредствомъ одной точки кривой, и въ точности начертить сію послѣднюю (чл. 458).

Пусть будетъ уравн. $y^2-xy+\frac{1}{4}x^2-2y-x+5=0$; изъ онаго $y=\frac{1}{2}x+1\pm\sqrt{(2x-4)}$; возьмемъ $EA=2$ (чер. 237), EF будетъ предѣлъ, и положеніе кривой есть DM.

Для $x^2-xy+\frac{1}{4}x^2-2y+3x-5=0$, найдемъ тотъ же поперечникъ; и какъ подкоренная величина есть $\sqrt{(-2x+4)}$, то получится кривая DM'.

Если n *и* m *и* n *равны нулю вмѣстѣ*, то уравн. обратится въ $y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{p}$.

1-е. Если p положительное, то получимъ *двѣ прямыя параллельныя*, которыя начертимъ (чер. 238), отложивъ $\sqrt{p}=BD=BD'$ по оси y, по обѣ стороны точки B, гдѣ поперечникъ BN пересѣкаетъ сію ось. Изъ $(y+x)^2-2y-2x=1$, получимъ $y=-x+1\pm\sqrt{2}$; откладываютъ $AB=AN=1$, BN будетъ діаметръ; потомъ $BD=BD'=\sqrt{2}=BN$; и проводятъ DE, $D'E'$ параллельно BN.

2-е. Если p нуль, то $y=\alpha x+\beta$; и получится только *одна прямая*. Такъ на примѣръ: уравненіе $(y+x)^2-2y-2x+1=0$ представляетъ BN (чер. 238).

3-е. Если p *отрицательное*, то корень будетъ мнимый и уравн. не *представляетъ никакой линіи*. Такъ на прим. $(y+x)^2-2y-2x+2=0$.

Однимъ словомъ, изъ уравненія $(y+x)^2-2y-2x+1=k$, получимъ $y=-x+1\pm\sqrt{k}$, возьмутъ $AB=AN=1$, и проведутъ BN, потомъ $BD=BD'=\sqrt{k}$; но съ уменьшеніемъ k, параллельныя сближаются съ поперечникомъ BN, и наконецъ сольются съ нимъ, когда $k=0$; если k отрицательное, то урав. ничего не представляетъ.

Какую бы точку G ни взяли на BN (чер. 238), она должна дѣлить по-поламъ часть всякой прямой IM; *BN есть мѣсто безконечнаго числа центровъ* (чл. 425).

Когда m и n равны нулю въ одно время, то предложенное уравн. обращается въ $(y-\alpha x-\beta)^2-p=0$; 1-е, если p положительное, то уравн. есть произведеніе множителей $y-\alpha x-\beta+\sqrt{p}$, $y-\alpha x-\beta-\sqrt{p}$, въ которыхъ x имѣетъ одинакій предзнакъ; урав. удовлетворяется, когда приравняешь каждый множитель въ особенности нулю. 2-е. Если p нуль, то предложенное урав. есть квадратъ отъ $y-\alpha x-\beta$; оба прежніе множители равны. 3-е. Наконецъ когда p отрицательное, то сумма двухъ положительныхъ величинъ должна равняться нулю, между тѣмъ какъ одна изъ оныхъ $+p$ не можетъ быть нуль, слѣд. урав. несообразно. Таковы суть аналитическія заключенія, изъясняющія существованіе нашихъ трехъ частныхъ случаевъ.

459. Изъ сей теоріи слѣдуетъ, что

I. Если m или B^2-4AC отрицательное, то $Ay^2+Byx+Cx^2$ болѣе квадрата, посему C должно быть положительное; кривая со всѣхъ сторонъ ограничена; она есть *эллипсисъ*, или *кругъ*, или *точка* или *ничто*.

II. Если m или B^2-4AC положительное, то $Ay^2+Bxy+Cx^2$ менѣе квадрата; кривая составлена изъ двухъ неограниченныхъ частей; она есть *гипербола*, или *двѣ пересѣкающіяся прямыя*. Сіе случается, когда C отрицательное, также когда нѣтъ x^2 или y^2, а xy остается.

III. Если m или $B^2-4AC=0$, то $Ay^2+Bxy+Cx^2$ есть квадратъ, кривая простирается безконечно въ одну сторону; она есть *парабола*, *прямая*, *двѣ параллельныя* или *ничто*. Сіе можетъ произойти, когда не достаетъ x^2 и yx, или y^2 и xy.

460. Можно по произволенію составить ур. 2-й степени, относящееся къ какому-нибудь изъ сихъ случаевъ. Для сего достаточно взять уравн. (1), и опредѣлить произвольно постоянныя α, β, m, n, p; однако же такъ, чтобы подкоренная величина удов-

лешворяла необходимому числу условій. Такимъ образомъ m будетъ отрицательное для эллипсиса, и ураен. $mx^2+nx+p=0$ имѣетъ корни дѣйствительные; m будетъ положительное для гиперболы, и сія кривая пересѣчетъ или не пересѣчетъ свой діаметръ, смотря потому, дѣйствительные, или мнимые корни имѣютъ предыдущее ураен. и проч. Можно наконецъ предположить условія, опредѣляющія всѣ постоянныя α, β... Приложимъ сію теорію.

Гипербола, означенная точками (чер. 234), имѣетъ начало въ центрѣ C, поперечникъ BN составляетъ съ осью x уголъ въ 45^0; $CE=1$ опредѣляетъ касательную GE въ предѣлахъ кривой; наконецъ сопряженный поперечникъ $CO=\sqrt{2}$: требуется составить ураен. сей гиперболы. Очевидно, что оное будетъ $y=x\pm\sqrt{m(x^2-1)}$; остается опредѣлить m. Но $x=0$, обратитъ корень въ мнимую величину; перемѣнивъ $-$ на $+$ долженъ превратиться оный въ $\sqrt{2}$; слѣд. $\sqrt{m}=\sqrt{2}$ и $y^2-2xy-x^2=-2$ есть искомое ураен.

Если требуется, чтобъ ураен. выражало точку, одну или двѣ прямыя, или ничего, то можно поступать такимъ же образомъ; но удобнѣе по нижеслѣдующему: L и M имѣютъ видъ $ky+lx+g$, слѣд.

1-е. Для точки $L^2+M^2=0$ (стр. 515);

2-е. Для прямой $L^2=0$ (стр. 522);

3-е. Для двухъ прямыхъ $LM=0$ (стр. 518); и если требуется, чтобы сіи линіи были параллельны, то отношеніе постоянныхъ k и l должно быть одинаково для L и M (стр 522).

4-е. Чтобъ ураен. *ничего не представляло*, N должно быть какое-нибудь положительное число въ $L^2+M^2+N=0$ (стр. 515).

461. Изслѣдовавъ ураен. (1) при прямоугольныхъ осяхъ, легко въ точности оное построить, безъ помощи теоріи (ч.л. 430), отнеся кривую къ какимъ-нибудь поперечникамъ. Возьмемъ за ось x' прямую параллель-

ную діаметру $y = \alpha x + \beta$, не измѣняя ни начала, ни оси y. Какъ $\operatorname{tang}(xx') = \alpha$, то $\cos(xx') = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} = k$, $\sin(xx') = \alpha k$, $(xy') = 90^0$, и уравненія B (чл. 383), обращаются въ $x = kx'$, $y = \alpha k x' + y'$; уравн. (1) по преобразованіи будетъ

$$y' = \beta \pm \sqrt{(mk^2x'^2 + nkx' + p)}.$$

1-е. Если кривая имѣетъ центръ, то примемъ оный за начало, и уравн. будучи такимъ образомъ отнесено къ сопряженнымъ поперечникамъ, получитъ видъ (чл. 427) $y = \sqrt{(Q + Cx^2)}$: достаточно уничтожить члены β и nkx'. Положимъ $y' = y'' + \beta$, $x' = x'' - \frac{n}{2km}$. Сіи 2-е члены будутъ x' и y' для центра, и найдемъ

$$y''^2 - mk^2x''^2 = p - \frac{n^2}{4m}.$$

Таково уравн. предложенной кривой, отнесенной къ ея сопряженнымъ поперечникамъ. Ничего нѣтъ легче, какъ построеніе оной.

Для уравненія $y = x + 1 \pm \sqrt{(-2x^2 + 6x - 4)}$, получимъ $\alpha = 1$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $m = -2\ldots$, и преобразованное уравн. будетъ $y''^2 + x''^2 = \frac{1}{2}$; и такъ начертимъ поперечникъ BN, $y = x + 1$ (чер. 228); помѣстя начало въ центрѣ C, какъ показано въ (чл. 454), останется описать эллипсисъ, коего полупоперечники CO, CD равны $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2-е. Если нѣтъ центра, то $m = 0$ и подкоренная величина обратится въ $\sqrt{(nkx' + p)}$: исключивъ постоянные члены β и p, начало будетъ перенесено въ точку сѣченія кривой съ ея діаметромъ, т. е. $y' = y'' + \beta$, $x' = x'' - \frac{p}{kn}$; откуда $y''^2 = nkx''$. Начертивъ поперечникъ $y = \alpha x + \beta$, принявъ точку сѣченія онаго съ параболой за начало, самый поперечникъ за ось x'', и положивъ ось y'' параллельною оси y, легко будетъ начертить кривую (чл. 458).

Для $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{(2x - 4)}$, (чер. 237), получимъ $\alpha = \frac{1}{2}$, $k = \sqrt{\frac{4}{5}}$, DN и DF будучи осями, найдемъ уравн. $y'^2 = 4x'' \sqrt{\frac{1}{5}}$.

V. ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

Образованіе кривыхъ линій.

462. I. Какая кривая произходитъ отъ безпрерывнаго сѣченія двухъ прямыхъ AM, BM (чер. 239), обращающихся около A и B, и составляющихъ всегда прямой уголъ M? Возьмемъ *производящія* линіи въ одномъ какомъ-нибудь положеніи AM, BM: положимъ начало въ C срединѣ AB, и $AC = r$; уравненія прямыхъ AM и BM, проходящихъ одна чрезъ $A(-r, 0)$, а другая чрезъ $B(r, 0)$, будутъ

$$y = a(x + r),\ y = a'(x - r) \ldots\ldots (1);$$

сверхъ того

$$aa' + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (2),$$

ибо оіи прямыя перпендикулярны: величины a и a' неудовлетворяющія сему условію, соотвѣтствуютъ прямымъ AN и BN, которыя не суть производящія. Подставя $-\frac{1}{a}$ вмѣсто a', уравненія (1), принадлежащія всѣмъ прямымъ проходящимъ чрезъ A и B, будутъ принадлежать двумъ производящимъ, коихъ направленія зависятъ отъ произвольной величины a; въ обоихъ уравненіяхъ, x и y будутъ сопряженныя CP, PM, точки сѣченія сихъ двухъ прямыхъ. Если исключимъ a изъ сихъ уравненій, то x и y будутъ сопряженныя точки сѣченія какихъ-нибудь двухъ производящихъ прямыхъ, ибо онѣ различествуютъ только количествомъ a, которое болѣе не входитъ.

И такъ чрезъ выключеніе a и a' изъ уравненій (1) и (2), составившися уравн. искомой кривой: $a=\frac{y}{x+r}$, $a'=\frac{y}{x-r}$, отъ чего уравн. (2) обратится въ $y^2+x^2=r^2$: слѣд. получимъ кругъ, коего поперечникъ есть AB.

II. Если двѣ производящія AM, MB (чер. 240) должны составлять данный уг. AMB, коего tang есть t, то вмѣсто уравн. (2) получили бы $t=\frac{a'-a}{1+a'a}$; а потомъ $(x^2+y^2-r^2)t=2ry$. Изслѣдуя (чл. 450) сіе урав., въ которомъ $AC=CB=r$, увидимъ, что кривая есть кругъ, коего радіусъ $OB=\sqrt{\left(r^2+\frac{r^2}{t^2}\right)}$; $CO=\frac{r}{t}$ опредѣляетъ центръ O.

Вообще, вмѣсто предположенія, что кривая описывается какимъ-нибудь опредѣленнымъ движеніемъ точки, можно воображать, что оная происходитъ отъ безпрестаннаго пересѣченія двухъ данныхъ линій (прямыхъ или кривыхъ), но измѣняющихъ свое положеніе или видъ по извѣстному закону. Взявъ сіи производящія линіи въ одномъ изъ приличныхъ имъ положеній, получатъ ихъ уравненія, какъ на прим: $M=0$, $N=0$: кромѣ сего, измѣненіе, которому подлежатъ сіи линіи, зависитъ отъ перемѣны входящихъ въ нѣ уравненія двухъ постоянныхъ величинъ, долженствующихъ при различныхъ своихъ состояніяхъ удовлетворять данному условію $P=0$. Примѣнивъ къ сему предыдущее разсужденіе, убѣдимся, что исключивъ сіи двѣ постоянныя изъ сихъ трехъ уравненій, получимъ въ окончательномъ выраженіи урав. образуемой кривой.

Если будетъ три постоянныхъ измѣняемыхъ, то кромѣ $P=0$, необходимо имѣть еще другое условное урав. $Q=0$; и надлежало бъ исключить сіи три постоянныя изъ 4-хъ уравненій $M=0$, $N=0$,

$P=0$, $Q=0$, и т. д...., такимъ образомъ, чтобы число уравненій всегда было однимъ болѣе числа исключаемыхъ количествъ.

Если уравненій менѣе надлежащаго, то окончательное урав. также принадлежитъ искомой кривой; но въ такомъ случаѣ будетъ одна или нѣсколько перемѣнныхъ *параметровъ:* задача не опредѣленна и удовлетворяется рядомъ кривыхъ. Когда число уравненій и постоянныхъ одинаково, то для x и y получится безконечное число величинъ, опредѣляющихъ множество точекъ; если же уравненій будетъ еще болѣе, то задача несообразна. Все сіе объяснится примѣрами.

III. Сыскать кривую AM (чер. 205), коей всякая точка M равно отстоитъ отъ неподвижной точки F и отъ данной прямой QQ'. Проведемъ FD перпендикулярно къ QQ'; пусть $DF=p$; примемъ за начало A средину AF; Ax, Ay за оси x и y: очевидно, что A есть точка кривой.

Вообразимъ, что QM движется параллельна Ax, между тѣмъ какъ FM обращается около точки F $(\frac{1}{2}p, 0)$; уравненія сихъ прямыхъ суть $y-b$, $y-a(x-\frac{1}{2}p)$: различныя точки кривой, опредѣляются послѣдовательнымъ сѣченіемъ сихъ линій, когда движеніе оныхъ выполняетъ условіе $QM=FM$. Но исключивъ x и y, т. е. величину PA и PM, найдемъ $QM=AD+x=p+\frac{b}{a}$, $FM^2=PF^2+PM^2=\frac{b^2}{a^2}+b^2$. И такъ, измѣненіе движущихся прямыхъ, подлежитъ условію $b^2=p^2+\frac{2pb}{a}$; но изъ нашихъ уравненій: $a=\frac{y}{x-\frac{1}{2}p}$, $b=y$; слѣд. подставя, дабы исключить перемѣнныя a и b, получимъ $y^2=2px$, урав. *параболы* (чл. 393).

IV. Сыскать такую кривую ABO (чер. 206), чтобы для каждой ея точки M, разстоянія $MF=z$, $MF'=z'$, отъ двухъ данныхъ точекъ F и F' составляли постоянную сумму $AO=2a=z+z'$. Пусть C, средина FF', будетъ начало; CO, CB оси x и y; можно предварительно быть увѣрену, что кривая одинаково расположена по обѣ стороны BC. Вообще надлежитъ стараться избирать самыя удобныя сопряженныя оси, дабы достигать простѣйшихъ уравненій. Пусть $FC=c$, а x и y сопряженныя точки M.

Получимъ $z^2=y^2+(x-c)^2$, $z'^2=y^2+(c+x)^2$, $z+z'=2a$. Съ перемѣною M, измѣняются z и z', но a постоянно; посему изъ сихъ трехъ уравненій надлежитъ исключить z и z'. Вычтя 1-е изъ 2-го, будетъ

$$z'^2-z^2, \text{ или } (z'+z)(z'-z)=4cx;$$

а по свойству 5-го уравненія

$$z'-z=\frac{2cx}{a}; \text{ откуда } z=a-\frac{cx}{a}.$$

Слѣд. если подставить сіе въ 1-е, то искомое урав. будетъ $a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}=y^2+x^2+c^2$. Явно, что ордината при началѣ $BC=b$ такова, что $BF=a$; посему $c^2=a^2-b^2$, и слѣд. урав. кривой будетъ $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$; сіе есть *эллипсисъ* (чл. 597).

V. Если бы требовалось, чтобы разность разстояній $F'M$ и FM (чер. 207) была равна AO, или $z'-z=2a$, то подобнымъ вычисленіемъ достигли бы уравненія $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$ гиперболы, полагая $c^2=a^2+b^2$ (чл. 401).

И такъ главныя свойства, найденныя нами для фокусовъ параболы, эллипсиса, гиперболы, принадлежатъ только симъ кривымъ.

VI. Даны прямыя DN, Dx (чер. 241) и на одной изъ нихъ постоянная точка A, сыскать такую кривую, коей бы всякая точка M, составляла разстояніе AM равное линіи PN, перпендикулярной къ Dx. Вообразимъ, что сія кривая происходитъ отъ безпре-

стаинаго пересѣченія линіи PN, движущейся перпендикулярно къ Dx, съ кругомъ AL, коего центръ неподвиженъ въ A; при чемъ радіусъ и прямая измѣняются такимъ образомъ, что всегда удовлетворяютъ данному условію $AM = PN$.

Пусть начало будетъ въ A, $AM = \alpha$, $AP = \beta$, $AD = p$, $t = \text{tang}\, EDA$; уравненія круга LK и прямой PN суть

$$x^2 + y^2 = \alpha^2;\ x = \beta \quad \ldots\ (1).$$

Уравн. прямой DN, проходящей чрезъ D $(-p, 0)$, есть $y = t(x + p)$; условное уравн. $MA = NP$ обратится въ $\alpha = t(\beta + p)$. Съ перемѣною прямой и круга, измѣняются только α и β; слѣд. ихъ надлежитъ исключить посредствомъ уравненій (1), отъ чего получимъ

$$y^2 + x^2(1 - t^2) - 2t^2px - t^2p^2 = 0.$$

1-е. Если $t = 1$, то данный уголъ будетъ $E'DA = 45^0$ и уравн. обратится въ $y^2 = 2px + p^2$, т. е. въ урав. *параболы* $E'S$, коей начало находится въ фокусѣ A, вершина въ S, $2AS = AE' = p$.

2-е. Если $t < 1$, или уг. $EDA < 45^0$, то получимъ *эллипсисъ*, коего центръ C и оси a и b таковы, что

$$AC = \frac{pt^2}{1 - t^2},\quad a = \frac{pt}{1 - t^2},\quad b = \frac{pt}{\sqrt{(1 - t^2)}}.$$

Если DE параллельна DA, то будетъ *кругъ*; сіе видно изъ образованія кривой, ибо PN постоянна.

3-е. Наконецъ, если $t > 1$, или $EDA > 45^0$, то получится *гипербола*.

Сіе свойство можетъ доставить легкой способъ чертить сіи три кривыя линіи; всѣ онѣ касаются данной прямой DE, DE' ..., въ точкѣ сѣченія оной съ AE (чл. 424).

VII. Вообразимъ, что прямая AB (чер. 242) данной длины движется въ углѣ BCA, такъ что окончности оной A и B всегда оснаются на сторонахъ сего угла: требуется сыскать кривую, описываемую точкою M, данною на сей прямой AB. Пусть будетъ $b = AM$, $a = MB$, AC, CB сопряженныя оси, s синусъ, а c

коснусь угла ACB осями сопоставляемаго; кривую можно представлять какъ происходящую отъ безпрерывнаго сѣченія двухъ движущихся прямыхъ AB, PM, коихъ уравненія суть: $y = \alpha x + \beta$, $x = \gamma$; отсюда $PM = \alpha\gamma + \beta$, $CP = \gamma$. Остается составить условное урав. между α, β и γ. Но положивъ $BP = z$, получимъ изъ треугольника PMB (*D*, чл. 555) $a^2 = z^2 + PM^2 - 2cz.PM$; кромѣ сего, какъ какъ AC и PM параллельны, то $bz = a \times CP$; слѣд.

$$bz = a\gamma, \quad a^2 = z^2 + (\alpha\gamma + \beta)^2 - 2cz(\alpha\gamma + \beta).$$

Остается исключить z, α, β и γ. Подставя y вмѣсто $\alpha\gamma + \beta$, получимъ $a^2 = z^2 + y^2 - 2czy$, $bz = ax$. Наконецъ, исключивъ z, найдемъ, что $a^2b^2 = b^2y^2 + a^2x^2 - 2abcxy$ есть требуемое урав., принадлежащее *эллипсису* (чл. 454), коего C есть центръ.

Когда уголъ ABC прямой, то все вычисленіе дѣлается гораздо проще, и получатъ урав. $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$, принадлежащее эллипсису, описанному къ центру и къ его осямъ $2a$, $2b$. Изъ сего происшекаетъ новый весьма легкій способъ черченія эллипсиса. Проведя подъ прямымъ угломъ неопредѣленныя линіи Cy, Cx, должно нанесши на линейку $M'B$, части равныя полуосямъ $AM = b$, $BM = a$, потомъ прикладывать оную къ прямому углу yCx, такъ, чтобы точки A и B были на сторонахъ сего угла. Въ семъ положеніи, и во всякомъ подобномъ ему, точка M будетъ принадлежать эллипсису; означая сіи различныя точки, начертятъ кривую ихъ соединяющую.

Если движущаяся точка находится въ M', на продолженіи AB, то такимъ же анализомъ найдемъ урав. различествующее отъ прежняго только знакомъ члена $-2abcxy$. И такъ, положивъ $BM' = a$, $AM' = b$, AB будетъ разность полу-осей, вмѣсто ихъ суммы, а построеніе останется тоже.

VIII. Если изъ F' (чер. 210) фокуса эллипсиса опустятъ перпендикуляры на всѣ касательныя,

что требуется узнать, какого свойства будетъ кривая линія, проходящая чрезъ всѣ точки I сѣченія сихъ касательныхъ съ соотвѣтственными перпендикулярами? $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$, есть уравн. касательной въ точкѣ x', y' (чл. 408). Уравн. прямой $F'I$, проходящей чрезъ фокусъ $(-\alpha, 0)$, есть $y = \beta x + \alpha\beta$: чтобы оная была перпендикулярна къ касательной, то β должно (чл. 370) удовлетворять уравненію $b^2x'\beta - a^2y' = 0$: слѣд уравненія производящихъ суть

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2;\ b^2x'y = a^2y'(x + \alpha).$$

Положеніе сихъ линій измѣняется, съ измѣненіемъ точки касанія $M(x', y')$; слѣд. условное урав. будетъ то, которое выражаетъ, что сія точка на эллипсисѣ, $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Остается исключить x' и y' изъ сихъ трехъ уравненій. Опредѣливъ x' и y' изъ 1-хъ и подставя въ 3-е, получимъ:

$$b^2y^2 + a^2(x + \alpha)^2 = [y^2 + x(x + \alpha)]^2.$$

Развернувъ скобки, найдемъ

$$y^4 + y^2[2x(x + \alpha) - b^2] - (x + \alpha)^2(a^2 - x^2) = 0;$$

но, $-b^2 + x^2 = a^2$ (чл. 397), слѣд. 2-й членъ обратится въ $y^2[(x + \alpha)^2 + x^2 - a^2]$; такъ что соединя члены, содержащіе $x^2 - a^2$, получимъ

$$(y^2 + x^2 - a^2)[y^2 + (x + \alpha)^2] = 0.$$

Вторый производитель очевидно не относится къ вопросу (чл. 519), ибо оный опредѣляетъ *фокусъ*, первый же производитель опредѣляетъ *кругъ, описанный около эллипсиса;* оный есть искомая кривая.

1-е. b здѣсь не входитъ, посему кругъ, вписанный въ гиперболѣ, рѣшаетъ предложенную задачу, относительно сей кривой (чл. 589).

2-е. Сей кругъ есть общій всѣмъ эллипсисамъ, начерченнымъ на той же самой большой оси, и имѣетъ оную своимъ діаметромъ.

3-е. Такъ какъ $y^2 + x^2 = a^2$ не зависимо отъ α, то и при другомъ фокусѣ получится тотъ же кругъ.

IX. Для рѣшенія той же задачи относительно параболы чер. 205, очевидно, что надлежитъ исключить x' и y' изъ уравненій

$$yy' = p(x + x'),\ py = -y'x - \tfrac{1}{2}p^2,\ y^2 = 2px'.$$

По приведеніи получимъ $x[y^2 + x - \frac{1}{2}p^2] = 0$. Вторый множитель опредѣляетъ фокусъ, а посему должно его опустить; первый же, $x = 0$ означаетъ ось y; т. е. линію, на коей находятся подошвы всѣхъ перпендикуляровъ (i, чер. 205, стр. 466).

X. Дана парабола NAK (чер. 245), сыскать такую кривую, коей каждая точка M, имѣла бы то свойство, чтобы проведенныя двѣ касательныя NM и KM всегда составляли уголъ равный данному M.

Уравненія касательныхъ къ параболѣ въ точкахъ (x', y'), (x'', y'') суть (чл. 404)

$$yy' = p(x + x'),\ yy'' = p(x + x'').$$

tang угла KMN, составленнаго ими прямыми (чл. 370), будетъ $t = \frac{p(y'' - y')}{y'y'' + p^2}$. Сей уголъ долженъ оставаться тотъ же, при различныхъ положеніяхъ точекъ касанія K и N; t постоянно, но x', y', x'', y'' измѣняются, надлежитъ ихъ исключить, и для сего кромѣ предыдущихъ трехъ уравненій, имѣемъ еще слѣдующія: $y'^2 = 2px'$, $y''^2 = 2px''$, изъ коихъ выведенныя величины x' и x'' обращаютъ два первыя уравненія въ

$$y'^2 - 2yy' + 2px = 0,\ y''^2 - 2yy'' + 2px = 0.$$

И такъ, изъ двухъ корней перваго изъ сихъ уравненій, одинъ есть y', а другой y''; слѣд. $y'y'' = 2px$; откуда $t = \frac{y'' - y'}{2x + p}$: сверхъ того, поелику $y' = y \pm \sqrt{(y^2 - 2px)}$, то $y'' - y' =$ удвоенной подкоренной величинѣ; и такъ, искомое урав. есть

$$y^2 - t^2x^2 - px(2 + t^2) - \tfrac{1}{4}t^2p^2 = 0,$$

оно принадлежитъ гиперболѣ; и какъ t входитъ только во 2-й степени, то одна изъ вѣтвей опишется вершиною M' тупаго угла $K'M'N$, а другая вершиною

M его дополненія NMK. Легко найти центръ C и оси кривой.

Если данный уголъ M прямой, или $t=\infty$, то ч.т. 395) $2x+p=0$; такъ, что если изъ каждой точки директрисы проведутся къ параболѣ двѣ касательныя, то оныя всегда составятъ прямой уголъ.

XI. Часто вмѣсто образованія кривой линіи, даютъ самое урав. оной, или почти выражаютъ его въ опредѣленіи: сіе не заслуживаетъ большаго вниманія. На пр. въ какой кривой линіи, каждая ордината есть средняя пропорціональная между ординатами двухъ данныхъ прямыхъ соотвѣтствующими той же абсциссѣ? Явно, что если $y=ax+b$, $y=a'x+b'$ суть уравненія данныхъ прямыхъ, то урав. кривой есть
$y^2=(ax+b)(a'x+b')$, или $y^2-aa'x^2-x(a'b+ab')=bb'$.

1-е. Если одна изъ прямыхъ параллельна оси x, то $a'=0$ и получимъ $y^2=ab'x+bb'$, урав. принадлежащее параболѣ, которую легко начертить. Когда $a=0$, то $y^2=bb'$, сіе урав. представляетъ двѣ параллельныя, прямую, или ничто, смотря по величинѣ и знакамъ b и b'. Не принимая въ соображеніе знака ординатъ прямыхъ линій, получимъ кромѣ нашей параболы другую ей равную, противолежащую и имѣющую тоже вершину.

2-е. Если a и a' съ противными знаками, то получимъ эллипсисъ; когда $aa'=-1$, то данныя линіи перпендикулярны, и получимъ кругъ, (а иногда точку, или ничто).

3-е. Наконецъ, если a и a' имѣютъ одинакіе знаки, то получится гипербола: когда $a=a'$, то одинъ изъ ассимптотовъ параллеленъ даннымъ прямымъ, а посему легко опредѣлить другой (чл. 450 и 457). Можно также получить двѣ прямыя пересѣкающіяся.

Въ сихъ двухъ послѣднихъ случаяхъ, не обращая вниманія на знаки ординатъ, получимъ вдругъ

эллипсъ и гиперболу, описанные на тѣхъ же осяхъ, какъ въ чер. 218.

Сіи задачи можно измѣнять различнымъ образомъ. Многія изъ оныхъ помѣстилъ Пюисанъ въ своемъ *Recueil de diverses propositions de Géométrie*. Вотъ нѣкоторыя другія.

XII. Дано положеніе двухъ угловъ BAC, BDC, каждый въ 45^0 (чер. 244); будемъ обращать оные около ихъ постоянныхъ вершинъ A и D, такъ чтобы двѣ стороны AB, BD всегда пересѣкались на BE, параллельной AD. Какую кривую опишетъ точка C сѣченія двухъ прочихъ сторонъ AC, DC?

Величина движущихся угловъ и прямая BE могутъ быть произвольны.

XIII. Возьмемъ точку M (чер. 245) такую, чтобы разстоянія оной AM, BM отъ двухъ постоянныхъ точекъ A и B были въ данномъ отношеніи; сыскать кривую, которой бы всѣ точки имѣли сіе свойство.

Въ какой точкѣ сей кривой, линія AM будетъ касательная? Какъ опредѣлить такую точку M, чтобы разстоянія оной MA, MB, MD, отъ трехъ постоянныхъ точекъ A, B, D были въ извѣстномъ отношеніи?

XIV. Сыскать мѣсто центровъ круговъ касательныхъ къ данному кругу и къ данной прямой?

Таже задача для двухъ данныхъ круговъ.

XV. Какую кривую опишетъ вершина прямаго угла, коего стороны движутся по эллипсису или по гиперболѣ, безпрестанно ихъ касаясь? (чер. 245).

Можно также вмѣсто прямаго угла взять всякій другой, какъ въ задачѣ X.

XVI. Двѣ прямыя AF, CD (чер. 192) обращаются около оконечностей A и C, основанія даннаго треуг-ка ABC; сыскать мѣсто BE всѣхъ точекъ G сѣченія, предполагая, что D и F при ихъ движеніи находятся въ одинаковомъ разстояніи отъ основанія. (См. ч. 376, VIII).

Задачи превышающія вторую степень.

463. Мы строили (стр. 589) корни уравненій 2-й степени. Слѣдующій примѣръ изъяснитъ, какъ должно поступать, когда при рѣшеніи опредѣленной задачи достигнемъ уравненія, въ коемъ неизвѣстное возвышено въ степень высшую второй. Пусть будетъ

$$x^4 - pqx^2 + p^2rx + p^2m^2 = 0.$$

Положивъ $x^2 = py$, получимъ $y^2 - qy + rx + m^2 = 0$; предложенное уравн. происходитъ отъ выключенія y изъ сихъ двухъ послѣднихъ; посему, если построятъ соотвѣтственныя имъ коническія сѣченія, то абсциссы точекъ пересѣченія будутъ искомые корни: здѣсь взяты двѣ параболы. Предложенное уравненіе имѣетъ четыре дѣйствительные корня, если сіи кривыя пересѣкаются въ четырехъ точкахъ; если дѣйствительныхъ корней только два, то и точекъ сѣченій будетъ двѣ. Всѣ четыре корня мнимые, когда кривыя не имѣютъ общей точки. Въ случаѣ равенства нѣкоторыхъ корней, двѣ кривыя касаются, и проч.

Но какъ одна изъ двухъ кривыхъ произвольна, то должно предпочтительно употреблять кругъ, какъ удобнѣйшій къ начертанію. Проведя прямоугольныя оси Ax, Ay (чер. 246), опишутъ гиперболу $xy = pm$ между ея асимптотами; исключивъ pm, предложенное урав. обратится въ урав. круга, легко описываемаго,

$$x^2 + y^2 + \frac{pry}{m} = pq.$$

Возьмемъ $AC = \frac{pr}{2m}$; изъ центра C, радіусомъ $= \left(pq + \frac{p^2r^2}{4m^2}\right)$ опишемъ кругъ; оный пересѣчетъ гиперболу въ точкахъ M, M', N, N' коихъ абсциссы AP, AP', AQ, AQ' будутъ 4 искомые корня x; на чертежѣ два изъ оныхъ положительные, а другіе два отрицательные. Иногда не произойдетъ ни одной точки сѣченія, а иногда только двѣ.

Также, для $x^4 - p^2x^2 + p^2qx + p^3r = 0$, положивъ $x^2 = py$, отъ чего $y^2 - py + qx + pr = 0$; приложивъ $x^2 - py = 0$, получимъ

$$y^2 + x^2 - 2py + qx + pr = 0, \quad x^2 = py,$$

уравн. круга и параболы, коихъ построеніе не трудно.

Для $x^3 \pm a^2x - a^2q = 0$, умноживъ оное на x, и положивъ $x^2 = ay$; отъ чего $y^2 \pm ay - qx = 0$; приложивъ предыдущее, получимъ

$$y^2 + x^2 = qx, \text{ или } y^2 + x^2 = 2ay + qx,$$

смотря потому, заключаетъ ли предложенное ур. $+a^2$, или $-a^3$. Построимъ кругъ, изображаемый симъ уравненіемъ; абсциссы точекъ общихъ оному и параболѣ $x^2 = ay$ будутъ искомые корни; $x = 0$ соотвѣтствуетъ вновь введенному корню.

Сдѣлавъ подобное вычисленіе для $x^3 - 5a^2x = 2a^3$, найдемъ, что

$$x^2 = ay, \; y^2 + x^2 = 4ay + 2ax.$$

Опишемъ параболу MA (чер. 247), имѣющую параметромъ a, и кругъ CAM, коего центръ есть C $(a, 2a)$, а радіусъ $AC = a\sqrt{5}$; для точки M сѣченія, абсцисса $x = AP$; это есть единственный дѣйствительный корень.

Симъ же построеніемъ можно получить величину $\sqrt[4]{a}$.

Даны двѣ прямыя a и b, сыскать между ними двѣ среднія пропорціональныя x и y, $\div a : x : y : b$. Такъ какъ $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, то построимъ двѣ параболы, имѣющія параметрами a и b, а начало въ общей вершинѣ, и коихъ бы сопряженныя оси были осями y и x; сопряженныя x и y общей точки ихъ сѣченія, будутъ искомыми линіями.

Но сіи построенія сокращаются посредствомъ круга. Сложивъ наши уравненія, найдемъ, что $x^2+y^2-ay-bx=0$, и получимъ прежній чертежъ 247, гдѣ $bC = \frac{1}{2}a$, $AB = \frac{1}{2}b$.

Когда $b = 2a$, то $x^3 = 2a^3$; сіе рѣшеніе знаменитую задачу *удвоенія куба*. Положивъ $b = \frac{m}{n}a$, получимъ $x^3 = \frac{m}{n}a^3$; слѣд. можно найти кубъ x^3, относящійся къ данному a^3 :: m : n.

Вообще сіи построенія могутъ измѣняться различно; ибо какъ они зависятъ отъ двухъ кривыхъ, коихъ уравненія даны, то умноживъ оныя на неопредѣленныя количества и сложивъ, получимъ различныя кривыя разрѣшающія задачу.

464. Впрочемъ можетъ случиться, что вопросъ, предложенный въ видѣ опредѣленнаго, не имѣетъ сего свойства, (см. чл. 376, II), или можно даже если вопросъ и опредѣленный, дать ему простѣйшее рѣшеніе, сдѣлавъ оное зависимымъ отъ другаго неопредѣленнаго вопроса. Самый анализъ обнаруживаетъ сіи измѣненія; что объяснится слѣдующими задачами.

I. Даны двѣ точки A и B (чер. 248), сыскать такую 3-ю точку M, чтобы проведя AM и MB уголъ MAB, составлялъ половину угла MBA. Сдѣлаемъ $AB = m$; уравненія прямыхъ AM, MB суть $y = ax$, $y = -a'(x - m)$ полагая начало въ A; но a и a' суть тангенсы угловъ, изъ которыхъ одинъ вдвое болѣе другаго; слѣд. $a' = \frac{2a}{1 - a^2}$, (*L*, 359). Исключимъ a и a' изъ сихъ трехъ уравненій, и оставляя безъ разсмотрѣнія урав. $y = 0$, ничего неизъясняющее; получимъ

$$y^2 - 3x^2 + 2mx = 0.$$

Явно, что вопросъ неопредѣленный, и что оный удовлетворяется всякою точкою M гиперболы, коей построеніе есть слѣдующее. Сдѣлаемъ $AC = \frac{1}{3}m = \frac{1}{3}AB$; C будетъ центръ, A и D вершины; асимптоты CG, CH составляютъ съ AB уголъ равный двумъ третямъ прямаго, и косо тангенсъ равенъ $\sqrt{3}$ (ал. 352); сія кривая MD есть требуемая.

Чтобы раздѣлить дугу круга AEB, или уголъ AKB на три равныя части, то взявъ AC треть ея хорды AB, должно построить вышесказанную гиперболу; пересѣченіе оной съ дугою (чл. 208) опредѣлитъ EB треть дуги, или EKB треть угла.

Для *разсѣченія угла на три равныя части*, мы представили сначала сію задачу въ неопредѣленномъ и въ самомъ общемъ видѣ; ибо можно было также сыскать точку дуги эллипсиса AEB, или всякой другой кривой удовлетворяющей подобному условію.

II. Провести прямую DD', $y = ax + b$ (чер. 249), такъ чтобы сумма перпендикуляровъ MD, $M'D'$, опущенныхъ изъ двухъ данныхъ точекъ M и M', равнялась извѣстной длинѣ $= m$. Надлежитъ опредѣлить a и b по извѣстному условію $MD + M'D' = m$.

Разстояніе точки $M(x', y')$ отъ сей линіи (чл. 374) есть $\frac{ax' - y' + b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$; взявъ также разстояніе точки M' (x'', y''), получимъ

$$ax' - y' + b + (ax'' - y'' + b) = m\sqrt{(1 + a^2)} \ldots\ (1).$$

Изъ сего уравненія можно опредѣлить только a или b, слѣд. задача неопредѣленная: подставя $y - ax$ вмѣсто b въ (1) получимъ

$$y - \tfrac{1}{2}(y' + y'') = a[x - \tfrac{1}{2}(x' + x'')] + \tfrac{1}{2}m\sqrt{(1 + a^2)}:$$

сіе есть искомое уравненіе прямой. Перенесемъ начало въ средину MM', т. е. въ C $[\frac{1}{2}(x' + x''), \frac{1}{2}(y' + y'')]$, найдемъ

$$y = ax + \tfrac{1}{2}m\sqrt{(1 + a^2)} \ldots\ (2).$$

Направленіе прямой или a остается произвольнымъ; однако же избравъ оное, увидимъ, что ордината при началѣ есть $\frac{1}{2}m\sqrt{(1 + a^2)}$; и такъ (чл. 374) разстояніе $FC = \frac{1}{2}m$, отъ чего и происходитъ слѣдующее строеніе. Изъ точки C средины линіи MM', какъ изъ центра опишемъ кругъ радіусомъ $\frac{1}{2}m$. Всякая касательная къ сему кругу, удовлетворитъ требуемому условію. Сіе очевидно по

извѣстному свойству трапеціи $MDD'M'$ (чл. 216, 4-е).

Еслибы даны были три точки, то достаточно приложить $ax''' - y''' + b$ къ 1-му члену уравненія (1): вообще, для n точекъ надо въ уравненіи (2), замѣнить $\frac{1}{2}m$ чрезъ $\frac{m}{n}$. Слѣд. сумма перпендикуляровъ проведенныхъ изъ n точекъ на прямую DD' равна m; если DD' касается круга FC описаннаго изъ точки упомянутаго свойства, принятой за центръ C радіусомъ $FC = n^{\text{м}}$ части m.

III. Даны двѣ прямыя AP, AD (чер. 250), сыскать такую точку M, чтобы перпендикуляры MP, MD имѣли данное отношеніе $= n : m$. Возьмемъ AP за ось x, A за начало; $AP = x'$, $PM = y'$; наконецъ урав. AD есть $y = ax$. Перпендикуляръ $MD = \frac{y' - ax'}{\sqrt{(1+a^2)}} = \frac{my'}{n}$ (чл. 374) по условію; откуда

$$y' = \frac{anx'}{n - m\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Слѣд. всѣ точки прямой AM, проходящей чрезъ A, удовлетворяютъ вопросу. Возьмемъ части $AC = m$, $CB = n$ по линіямъ перпендикулярнымъ къ даннымъ прямымъ, и проведемъ параллельно онымъ BM и CM; M будетъ одна изъ точекъ искомой линіи, ибо она удовлетворяетъ условію. Слѣд. сія линія есть AM.

Если бы хотѣли сыскать на кривой MN точки M и N, имѣющія вышеозначенное свойство, то надлежало бы построить прямую AM, и взять точки сѣченія оной M и N съ кривою.

Точка M можетъ находиться внизу AD; тогда $\sqrt{(1+a^2)}$ будетъ имѣть противный знакъ, и надлежитъ взять $AC' = m$ въ сторонѣ противоположной AC, и сѣченіе BM съ $C'x$.

IV. Проведемъ изъ точки K (чер. 251) двѣ касательныя KM, KN къ данному эллипсису CMN, и хор-

ду MN соединяющую точки касанія. Двигая точку K по какой-нибудь данной прямой AB, точки M, N будутъ измѣняться, также какъ и MN; спрашивается: какую кривую опишутъ точки послѣдовательныхъ сѣченій сихъ хордъ MN.

Проведемъ чрезъ центръ C, CD параллельно AB, и CA сопряженный поперечнику CD; пріймемъ сіи прямыя за оси. Разсматривая уравн. касательной къ эллипсису и проходящей чрезъ данную точку $K(\alpha, \beta)$, доказали (чл. 413), что будетъ двѣ таковыхъ касательныхъ, и что урав. хорды MN, соединяющей точки касанія есть $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$. Если точка K перейдетъ въ B, то уравн. новой хорды mn получится перемѣнивъ въ прежнемъ β на β'. Точка сѣченія сихъ хордъ опредѣлится изключеніемъ изъ уравненія оныхъ x и y. Взявъ разность сихъ уравненій, получится $a^2(\beta - \beta') = 0$ или $y = 0$. Сіе доказываетъ, что точка сѣченія находится на оси x, какую бы величину β и β' ни имѣли; изъ чего слѣдуетъ, что всѣ сіи хорды пересѣкаются въ одной точкѣ. Тоже свойство принадлежитъ гиперболѣ и параболѣ. (См. чл. 407, 413).

О нѣкоторыхъ другихъ кривыхъ линіяхъ.

465. Когда дано нѣсколько различныхъ точекъ F, G, V, Z... (чер. 183), то число кривыхъ, соединяющихъ оныя, безконечно; однако же въ числѣ тѣхъ, которыя можно избирать, простѣйшая предпочитается прочимъ, а именно та, которой урав. есть $y = A + Bx + Cx^2 +$ и проч. и называемая *параболою*, по сходству съ кривою, намъ извѣстною подъ симъ наименованіемъ. Проведя оси Ax, Ay и сопряженныя AD, DF, AC, CG..... извѣстныхъ точекъ, должно открыть въ уравненіи столько членовъ, сколько таковыхъ точекъ, и опредѣлить предстоящіе A, B... изъ дан-

ныхъ условій, а именно: 1-е. если ошъ $x = AD = \alpha$, выходишь $y = DF = a$; то $a = A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots$; 2-е. также если при $x = \beta$, имѣемъ $y = b$; то $b = A + B\beta + C\beta^2 \ldots$ и такимъ же образомъ для прочихъ точекъ. Потомъ надлежишъ исключишь неизвѣстныя A, B, C, D.... дабы опредѣлишь ихъ величины.

Сіе вычисленіе можно предложишь простымъ и общимъ образомъ; ибо если ошъ $x = \alpha$ долженъ бышь $y = a$, то величина y имѣешъ слѣдующій видъ $y = Aa + K$, гдѣ A и K такъ составлены, что если $x = \alpha$, то $A = 1$, и $K = 0$: и такъ (чл. 500), $K = (x - \alpha)K'$. Кромѣ сего, когда $x = \beta$, то $y = b$; слѣд. вообще $y = Bb + L$, полагая $L = (x - \beta)L'$; такъ что для соединенія сихъ двухъ условій:

$$y = \frac{x - \beta}{\alpha - \beta} A'a + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} B'b + (x - \alpha)(x - \beta)M';$$

гдѣ A' и $B' = 1$, когда полагаюшъ соошвѣшственно $x = \alpha$, или $= \beta$.

Продолжая такимъ же образомъ разсуждашь, увидимъ, что

$$y = Aa + Bb + Cc + \text{ и проч.}$$

урав., гдѣ $A = \dfrac{(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)\ldots.}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)\ldots.}$;

$$B = \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)(x - \delta)\ldots.}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)\ldots.},$$

принимая для каждаго члена сихъ дробей, множишелей единицею менѣе числа данныхъ точекъ.

Такимъ образомъ сосшавишся приближенное урав. данной кривой, но произвольно начерченной; для сего довольно взяшь досшаточное число точекъ, избирая оныя особенно на главнѣйшихъ изгибахъ кривой, и измѣришь сопряженныя сихъ точекъ α, a, β, b.....

Можно также между ошдѣльными точками F, G, M, Z..., сыскашь другія, подлежащія тому же закону; а равнымъ образомъ, между многими величи-

нами, соединенными извѣстными отношеніями, отыскать законъ, служащій къ приближенному познанію какого-нибудь промежуточнаго обстоятельства. Въ семъ состоитъ *способъ вставленія* (methode d'interpolation), столь часто употребляемый въ естественныхъ явленіяхъ.

Посредствомъ тѣхъ же разсужденій можно провесть кривую извѣстнаго свойства чрезъ рядъ данныхъ точекъ: въ такомъ случаѣ уравн. сей кривой должно заключать столько же произвольныхъ постоянныхъ, сколько такихъ точекъ, безъ чего задача несообразна или неопредѣленна. Такимъ образомъ нельзя требовать, чтобы кругъ проходилъ болѣе какъ чрезъ три данныя точки (α, a'), (β, b), (γ, c); ибо самое общее уравненіе сей кривой есть $\ldots\ldots (x-k)^2+(x-h)^2=r^2$, и постоянныя k, h и r опредѣляются изъ условій

$$(a-k)^2+(\alpha-h)^2=r^2,$$
$$(b-k)^2+(\beta-h)^2=r^2$$
$$(c-k)^2+(\gamma-h)^2=r^2.$$

Если радіусъ r извѣстенъ, то можно дать только двѣ точки и т. д.

Вообще коническое сѣченіе можно провести чрезъ пять точекъ, ибо общее уравн. 2-й степени, освобожденное отъ предстоящаго 1-го члена, заключаетъ пять произвольныхъ величинъ.

466. Какая кривая DM, QE, (чер. 252) образуется отъ безпрестаннаго сѣченія прямой BM, обращающейся около B, съ кругомъ MLQ, коего центръ движется вдоль AC, и всегда находится на BM? Возьмемъ Ax и BD за оси. Пусть $AC=\alpha$, $AB=b$, $CM=AD=a$: уравненія круга, и прямой BM, проходящей чрезъ $B(0, -b)$ и $C(\alpha, 0)$, суть

$$(x-\alpha)^2+y^2=a^2,\ \alpha y=b(x-\alpha);$$

исключивъ α, получимъ

$$x^2y^2=(a^2-y^2)(y+b)^2.$$

Таково уравн. предложенной кривой, которую Никомедъ назвалъ *Конхоидою*. Изъ образованія оной слѣдуетъ, что она состоитъ изъ двухъ вѣтвей, расположенныхъ по обѣ стороны Ax, простирающихся до безконечности, и коихъ Ax есть ассимптота; что наибольшая ширина оной въ DD', когда обращающаяся прямая BM перпендикулярна къ Ax. Если $AB<a$, то въ D' составится *узелъ*, который уничтожится и оставитъ одну только точку *перегиба* (rebroussement), когда $AB=a$. См. чер. 255).

467. Пусть будетъ AFB данный кругъ (чер. 254) и BD касательная къ оному; положимъ, что прямая AD обращается около точки A, и что AM всегда беретъ $=FD$: какую кривую опишутъ точки M? она происходитъ отъ безпересѣчнаго сѣченія AD, съ другимъ кругомъ, коего A есть центръ, а радіусъ R измѣняется не переставая быть $=FD$. Уравненія нашихъ двухъ круговъ, полагая начало въ A, будутъ $x^2+y^2=R^2$, $y^2=2ax-x^2$; уравн. AD есть $y=Ax$; A и R измѣняются, однакожъ всегда $AM=FD$, или $AP=EB$. Но извѣстно (чл. 372, 354), что $AE=\frac{2a}{1+A^2}$, $EB=\frac{2aA^2}{1+A^2}$, $AP=R.\cos MAP=\frac{R}{\sqrt{(1+A^2)}}$: слѣд. . . . $R\sqrt{(1+A^2)}=2aA^2$; это есть условное уравн.

Исключивъ R и A, съ помощію $x^2+y^2=R^2$, $y=Ax$, получимъ искомое уравн.

$$x^3+xy^2=2ay^2;\ \text{откуда}\ y^2=\frac{x^3}{2a-x}.$$

Изъ сего уравненія слѣдуетъ, что 1-е, абсцисса x не можетъ быть ни $>2a$, ни отрицательною: слѣд. кривая заключается между Ay и BD; 2-е, она одинаково расположена по обѣ стороны AB; 3-е, она проходитъ чрезъ начало A (гдѣ имѣетъ перегибъ); 4-е, когда $x=a$, то $y=\pm a$: слѣд. точки H и H', сѣченія кривой съ данною окружностію, дѣлятъ оную на четыре ея

чешверти; 5-е, когда $x = 2a$, то $y = \infty$: BD есть ассимптотъ. Сія кривая называется *Діоклесовою Циссоидою.*

468. Кривая OBM (чер. 255), коей абсциссы AE, AP..., суть логариѳмы соотвѣтствующихъ ординатъ EF, MP..., называется *Логариѳмикою.* Уравн. оной есть $x = \log y$, или $y = a^x$, гдѣ a означаетъ *основаніе* (чл. 145). Легко видѣть, что 1-е, кривая состоитъ только изъ одной вѣтви, простирающейся въ-право и въ-лѣво до безконечности: 2-е, ордината AB при началѣ $= 1$; 3-е, если $AE = 1 = AB$, то $EF = a =$ основанію; 4-е, если $a > 1$, то часть BM кривой, находящейся въ сторонѣ положительныхъ x^{ax}, безпрестанно удаляется отъ Ax. Противное сему будетъ, когда $a < 1$; другая часть FO приближается къ AQ; QAx есть ассимптотъ. 5-е, если возьмемъ послѣдовательныя абсциссы въ ариѳметической прогрессіи, то соотвѣтствующія ординаты составятъ прогрессію геометрическую.

Различные роды логариѳмикъ отличаются между собою основаніемъ a.

469. Составимъ *кривую синусовъ* (чер. 256): урав. оной есть $y = \sin x$. Всякая абсцисса равна выпрямленной дугѣ круга, коей синусъ есть ордината y, полагая радіусъ r. Если дуга равна 0, πr, $2\pi r$..., то синусъ $= 0$: по обѣ стороны начала A отложимъ $AB = BC = AB' = \ldots = \pi r$, точки A, B, B', C, C'.... суть тѣ, гдѣ кривая пересѣкаетъ ось x. Съ увеличиваніемъ дуги отъ нуля до $\frac{1}{2}\pi r = AE$, синусы тоже возрастаютъ до $EF = r$; но далѣе сего, при увеличиваніи x, уменьшается y; слѣд. часть AFB кривой расположена одинаково относительно FE. Когда x болѣе $AB = \pi r$, то синусъ сдѣлается отрицательнымъ; и какъ онъ будетъ имѣть прежнія величины, то другая часть кривой BDC равна первой. Такимъ образомъ продолжается кривая до безконеч-

ности. Сіи кривыя различаются между собою только радіусомъ r.

470. Точка A (чер. 257) движется вдоль CA, между тѣмъ какъ CA обращается около C; когда CA принимаетъ положеніе CM, то A находится въ M, и сверхъ того требуется, чтобъ AC и AP всегда имѣли между собою тоже отношеніе, какъ и четверть круга ac съ описываемою дугою ab. Спрашивается, какую кривую AMB опишетъ A? Она происходитъ отъ безпрестаннаго пересѣченія радіуса CM съ PM перпендикулярною къ CA. Полагая начало въ C, пусть $AC = a$, $ab = \theta$, $CP = x$, уравненія CM и PM суть $y = x \operatorname{tang} \theta$, $x = x$. Но данное условіе $\frac{AP}{AC} = \frac{ab}{ac}$, даетъ $\frac{a-x}{a} = \frac{\theta}{\frac{1}{2}\pi}$; исключивъ x и θ, найдемъ

$$y = x \operatorname{tang}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi(a-x)}{a}\right), \text{ или } y = x.\cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right).$$

Легко видѣть, что 1-е, кривая расположена одинаково по обѣ стороны Cy; 2-е, что для $\pm x > a$ соотвѣтствуетъ y отрицательный; 3-е, что $\pm x = 2a$ опредѣляетъ ассимптоты QN, $Q'N'$. *Диностратъ*, изобрѣтатель сей кривой линіи, назвалъ ее *Квадратриксою*, предполагая извлечь изъ оной пользу для квадратуры круга.

471. Если кругъ CM (чер. 258) катится по прямой AB, то точка M, сначала находившаяся въ точкѣ A, опишетъ дугу AM; новая же точка касанія съ AB будетъ въ D, такъ что AD есть распрямленіе дуги круга MD. Продолжая двигать кругъ, точка M опишетъ кривую $AMFB$, называемую *Циклоидою* (Cycloide, Roulette, Trochoide).

По совершеніи полнаго обращенія, точка M вновь касается прямой AB въ B, которая будетъ точка кривой, полагая AB окружностью производящаго круга: въ E срединѣ AB, діаметръ $FE = 2r$ сего

круга, есть наибольшая ордината; кривая расположена одинаково по обѣ стороны *оси FE*. Циклоида продолжаетъ свое теченіе до безконечности, и составляетъ въ точкахъ *A*, *B* .... перегибы.

Возьмемъ начало въ *A*, $AP = x$, $PM = y$; какъ $AP = AD - PD$, то $x = MD - z$; сдѣлавъ $PD = z$; z есть ордината QM круга CM, полагая DQ абсциссою y; отнѣ сего $z^2 = 2ry - y^2$; но MD есть дуга круга, коего радіусъ r, а синусъ оной есть z; что выражается слѣдующимъ образомъ:

$$MD = \text{дугѣ } (\sin = z);$$

слѣд. $$x = \text{дугѣ } (\sin = z) - z$$

или $$z = \sin(z + x);\ z^2 = 2ry - y^2.$$

Если начало въ *F*, то $FS = x$, $SM = y$, $FK = u$, и $FS - AE - AP = AE - (AD - PD)$

$=$ полу-окруж. $FKE -$ дуг. $MD + MQ - FK + KN$, или $x =$ дуг. $(\sin = z) + z$, $z = \sin(x - z)$, или $x = u + \sin u$.

Труды Ферматна, Декарта, Роберваля, Паскаля, Гугенія..., прославили сію кривую линію; она имѣетъ весьма замѣчательныя геометрическія и механическія свойства, но не здѣсь мѣсто занимашься оными.

Еслибъ искали кривую описываемую движеніемъ точки, *находящейся* не на окружности, а на какой-нибудь другой кругообразной линіи, то получили бъ иного рода циклоиду. Еслибъ катящійся кругъ, сверхъ вышеупомянутаго движенія имѣлъ еще поступательное въ ту или другую сторону, то циклоида вытянулась бы или укоротилась. Наконецъ можно окружность катишь вдоль другой кривой линіи, тогда получили бы такъ называемыя *эпициклоиды*. Но здѣсь мы можемъ только упомянуть о сихъ линіяхъ.

472. *Спиралью* называется кривая, которую всякая *прямая*, проходящая чрезъ неподвижную точку или полюсъ, пересѣкаетъ безконечное число разъ.

Самое образованіе спиралей требуетъ, такъ сказать, полярныхъ сопряженныхъ. Сюда принадлежитъ спираль *Кононова*, называемая *Спиралью Архимеда*, ибо сей знаменитый Геометръ первый открылъ ея свойства. Прямая AI (чер. 259) обращается около A, между тѣмъ какъ точка M движется вдоль AI. Найдемъ урав. кривой $AMNC$, описываемой сею точкою, полагая, что AI находится въ положеніи AC, а движущаяся точка въ A; что по совершеніи цѣлаго обращенія, т. е. когда AI придетъ опять въ положеніе AC, точка M будетъ находиться въ C; и наконецъ, что пространства ею пробѣгаемыя пропорціональны угламъ описываемымъ прямою AI.

Угловая величина 2π, должна соотвѣтствовать $AC = a$; посему

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{gh}{AM} = \frac{\theta}{r}; \text{ слѣд. } 2\pi r = a\theta$$

есть искомое урав. Кривая проходитъ чрезъ A, C...; при послѣдовательныхъ полныхъ обращеніяхъ AI, $\theta = 2\pi, = 4\pi$; откуда $r = a, = 2a \ldots$, такъ что всякій разъ, радіусъ векторъ увеличивается количествомъ a. Такъ какъ послѣ нѣкотораго числа k обращеній, урав.

$$r = \frac{a\theta}{2\pi} \text{ становится } r = ak + \frac{a\theta}{2\pi},$$

гдѣ k есть какое-нибудь цѣлое число; и такъ, всѣ радіусы векторы также увеличиваются количествомъ a.

473. Проведемъ перпендикуляры AC, CD (чер. 260), и опишемъ изъ центра C такія дуги, чтобы PM длиною своею равнялась данной прямой $CD = a$; оконечности M сихъ дугъ опредѣлятъ кривую NM, коей уравн. легко составить; ибо $\frac{Ch}{gh} = \frac{CM}{PM}$; но $PM = a$; слѣд. $r\theta = a$. Сходство сего уравненія съ $xy = m^2$, побудило назвать сію кривую *гиперболическою Спиралью:* очевидно сверхъ того, что DE, параллельная

AC, есть ассимптотъ. Изъ $r = \frac{a}{\theta}$, слѣдуетъ, что r тогда только обращается въ нуль, когда $\theta = \infty$, и какъ для $\theta = 2\pi$, $= 4\pi$.... соотвѣтствующія величины r, постепенно уменьшающіяся, то кривая обращается около полюса, и не прежде достигнетъ онаго, какъ совершивъ безконечное число оборотовъ.

474. Такимъ же образомъ назвали *логарифмическою Спиралью* кривую, коей урав. есть $\theta = \log r$, или $r = a^{\theta}$: θ и r возрастаютъ вмѣстѣ, и теченіе спирали простирается до безконечности; но если θ отрицательное и увеличивается, то r уменьшается; такъ что кривая не прежде достигаетъ полюса, какъ совершивъ безконечное число обращеній. Она, какъ видно, имѣетъ ещъ часпи свойства обѣихъ предыдущихъ.

Урави. *Спирали параболической* есть $r = a \pm \frac{1}{2}(p\theta)$ такъ, что $r - a$ есть средняя пропорціональная между p и θ: легко узнать видъ сей кривой линіи.

КОНЕЦЪ ПЕРВОЙ ЧАСТИ.

Таблица хордъ для радіуса = 1000 (стр. 428).

дуг.	хорды. 0′	20′	40′	разн. для 1′
0°	0	6	12	
1	18	23	29	
2	35	41	47	
3	52	58	64	
4	70	76	81	
5	87	93	99	0,29
6	105	111	116	
7	122	128	134	
8	140	145	151	
9	157	163	169	
10	174	180	186	
11	192	198	203	
12	209	215	221	
13	226	232	238	
14	244	250	255	
15	261	267	273	0,29
16	278	284	290	
17	296	301	307	
18	313	319	324	
19	330	336	342	
20	347	353	359	
21	365	370	376	
22	382	387	393	
23	399	404	410	
24	416	422	427	
25	433	439	444	
26	450	456	461	
27	467	473	478	
28	484	490	495	
29	501	506	512	
30	518	523	529	
31	535	540	546	
32	551	557	562	
33	568	574	579	
34	585	590	596	
35	601	607	613	0,28
36	618	624	629	
37	635	640	646	
38	651	657	662	
39	668	673	679	
40	684	690	695	
41	700	706	711	

Разн. 1 для 2′
2 для 6′
3 для 10′
4 для 14′

дуг.	хорды. 0′	20′	40′	разн. для 1′
42°	717	722	728	
43	733	738	744	
44	749	755	760	
45	765	771	776	
46	782	787	792	
47	798	803	808	0,27
48	814	819	824	
49	829	835	840	
50	845	851	856	
51	861	866	872	
52	877	882	887	
53	892	898	903	
54	908	913	918	
55	924	929	934	
56	939	944	949	
57	954	959	965	0,26
58	970	975	980	
59	985	990	995	
60	1000	1005	1010	
61	1015	1020	1025	
62	1030	1035	1040	
63	1045	1050	1055	
64	1060	1065	1070	
65	1075	1080	1084	0,25
66	1089	1094	1099	
67	1104	1109	1114	
68	1118	1123	1128	
69	1133	1138	1142	
70	1147	1152	1157	
71	1161	1166	1171	
72	1176	1180	1185	
73	1190	1194	1199	
74	1204	1208	1213	
75	1218	1222	1227	
76	1231	1236	1241	
77	1245	1250	1254	0,24
78	1259	1263	1268	
79	1272	1277	1281	
80	1286	1290	1295	
81	1299	1303	1308	
82	1312	1317	1321	
83	1325	1330	1334	0,23

Разн. 1 для 3′
2 для 6′
3 для 10′
4 для 16′

дуг.	хорды. 0′	20′	40′	разн. для 1′
84°	1338	1343	1347	
85	1351	1355	1360	
86	1364	1368	1373	
87	1377	1381	1385	
88	1389	1394	1398	
89	1402	1406	1410	0,21
90	1414	1418	1422	
91	1426	1431	1435	
92	1439	1443	1447	
93	1451	1455	1459	
94	1463	1467	1471	
95	1475	1479	1482	0,20
96	1486	1490	1494	
97	1498	1502	1506	
98	1509	1513	1517	
99	1521	1525	1528	
100	1532	1536	1540	
101	1543	1547	1551	0,19
102	1554	1558	1562	
103	1565	1569	1573	
104	1576	1580	1583	
105	1587	1590	1594	
106	1597	1601	1604	
107	1608	1611	1615	0,18
108	1618	1621	1625	
109	1628	1632	1635	
110	1638	1642	1645	
111	1648	1652	1655	
112	1658	1661	1665	
113	1668	1671	1674	0,17
114	1677	1681	1684	
115	1687	1690	1693	
116	1696	1699	1702	
117	1705	1708	1711	
118	1714	1717	1720	
119	1723	1726	1729	0,16
120	1732	1735	1738	
121	1741	1744	1746	
122	1749	1752	1755	
123	1758	1760	1763	
124	1766	1769	1771	
125	1774	1777	1780	0,15

Разн. 1 для 1′
2 для 10′
3 для 15′

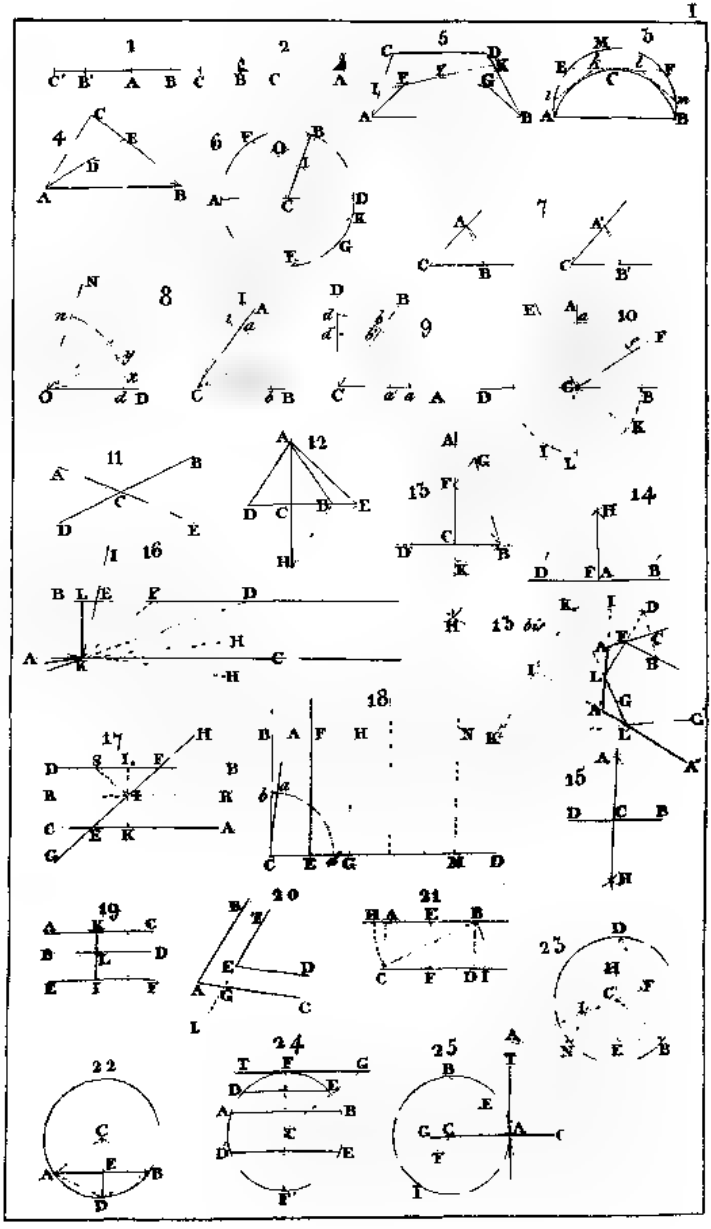
0,14

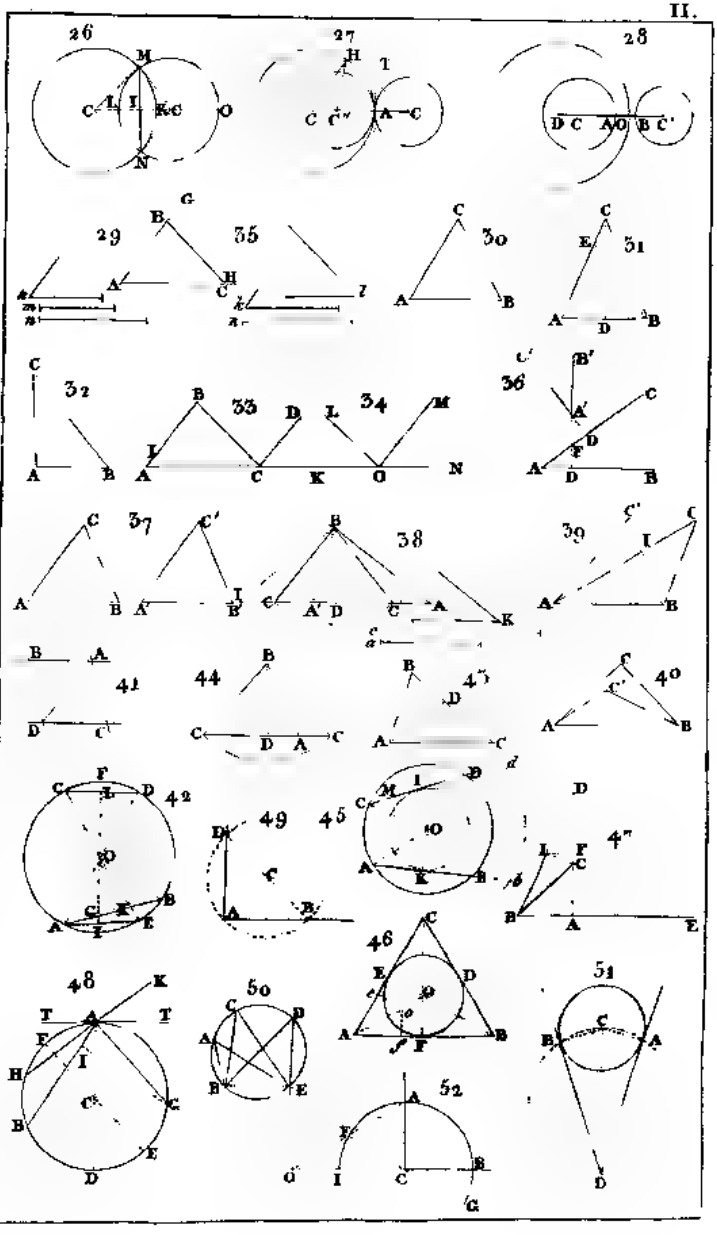
0,13

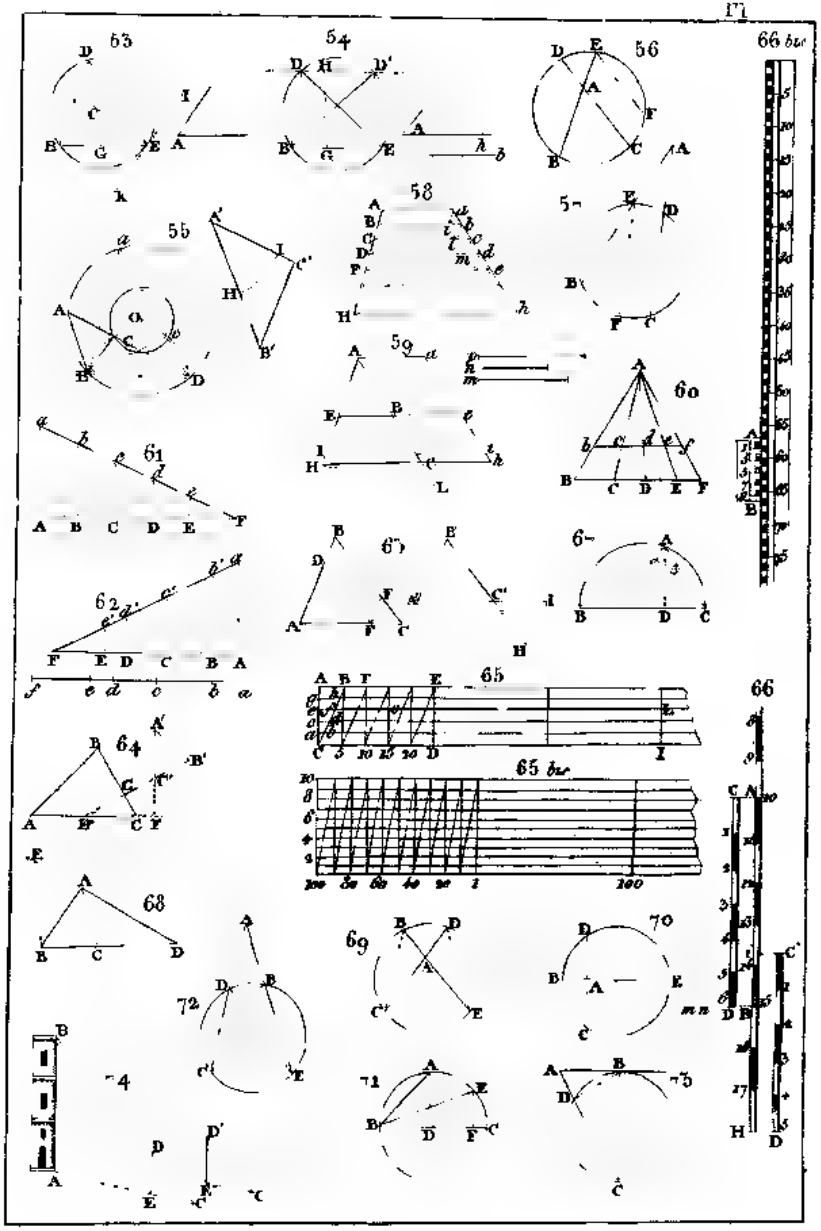
ПОГРѢШНОСТИ.

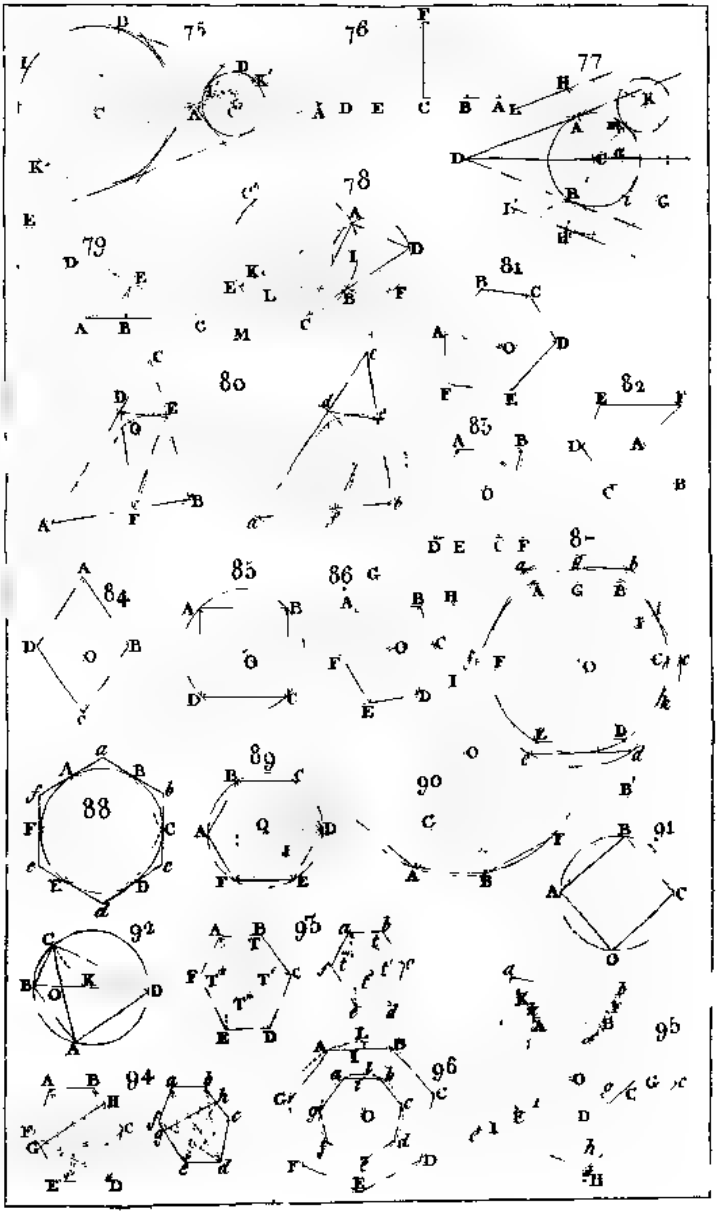
стран.	стр.	Напечатано:	Читай:
10	2	оный	оное
17	3 снизу	складываютъ послѣдовательно	складываютъ само съ собою послѣдовательно
38	14	самого	самаго
46	послѣдн.	*всегда единицею менѣе дѣлителя*	*всегда будетъ менѣе числа единицъ дѣлителя,*
49	6 снизу	сіе послѣднее	сія разность
62	14	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$
81	7	Для общежишія	Въ общежишіи
82	12	1680	768
87	7 снизу	2 пол.	5 пол.
87	4 снизу	$100+15$	$200+15$
108	15	$8+7-10-5$	$8+7-10=5$
128	7 снизу	, опыскать	. Опыскавъ
132	23	$\frac{4}{n}$	$\frac{4}{3}$
147	6	чл. 479	чл. 476
157	29	что найдя	что если найдя
167	22	*большое*	*большее*
—	25	*меньшое*	*меньшее*
178	18	повторяшъ	повторяютъ
179	15	уравненія	уравненій
184	19	$0,(15)$	$0,(54)$
219	5	чл. 489	чл. 487
—	послѣдняя	чл. 492	чл. 501
226	7	умноженный	умножены
233	12	$\mathrm{Log}\left(\frac{x'}{y}\right)$	$\mathrm{Log}\left(\frac{x}{y'}\right)$
243	7 снизу	положимъ	получимъ

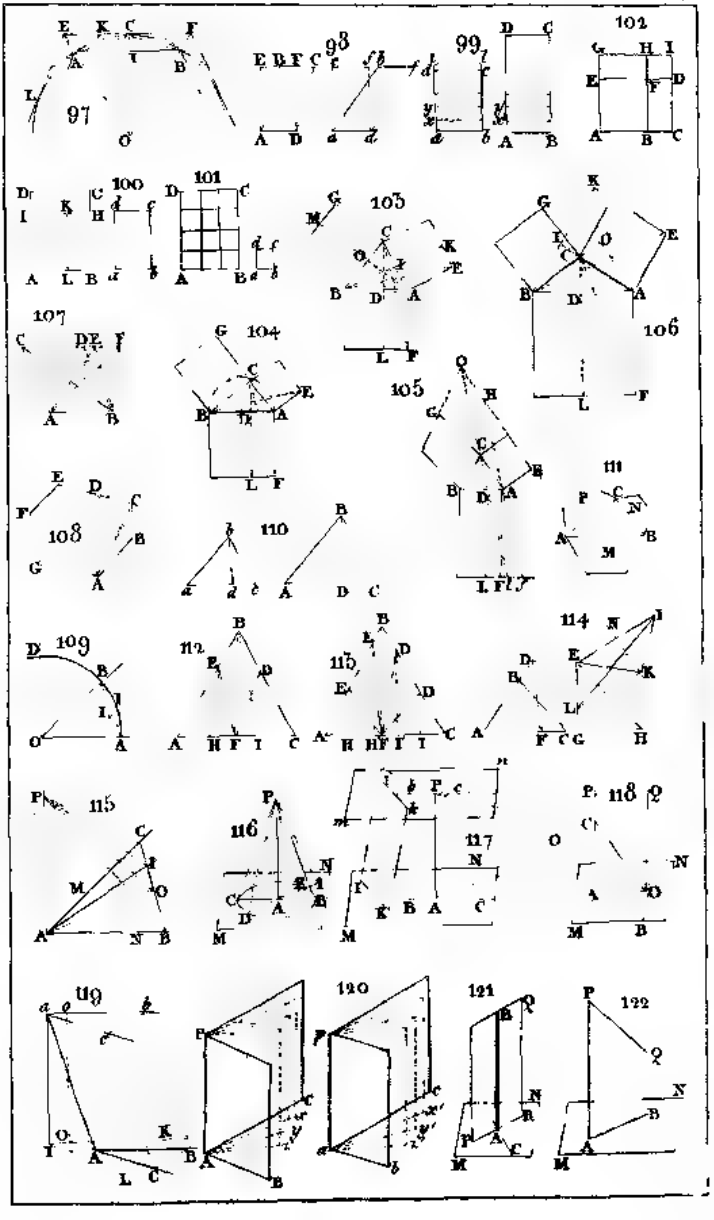
стран.	стр.	Напечатано:	Читай:
253	10 снизу	съ нимъ	съ ними
259	5 снизу	*EED*	*EFD*
268	3	продолженія	предложенія
283	6	VI	IV.
299	6 снизу	чл. 529, VIII	стр. 390, XI.
301	послѣдняя	VI	X.

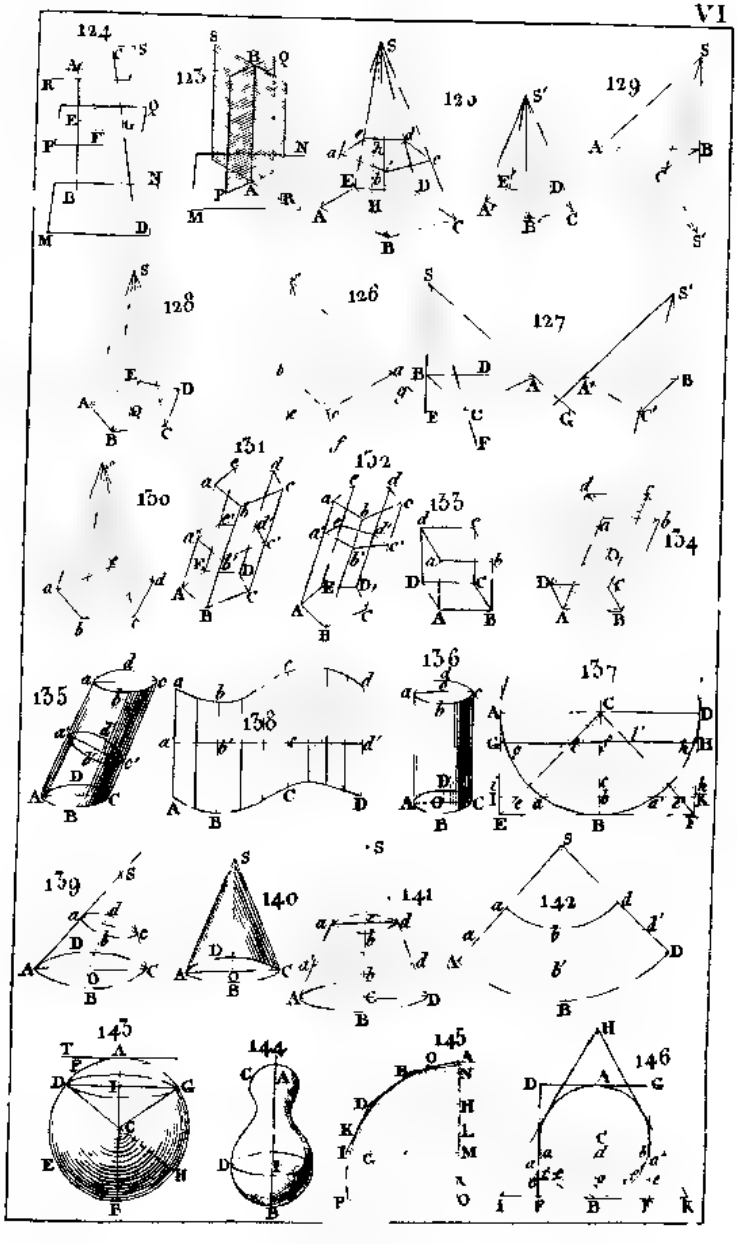

1
2
5
3
4
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
23
22
24
25

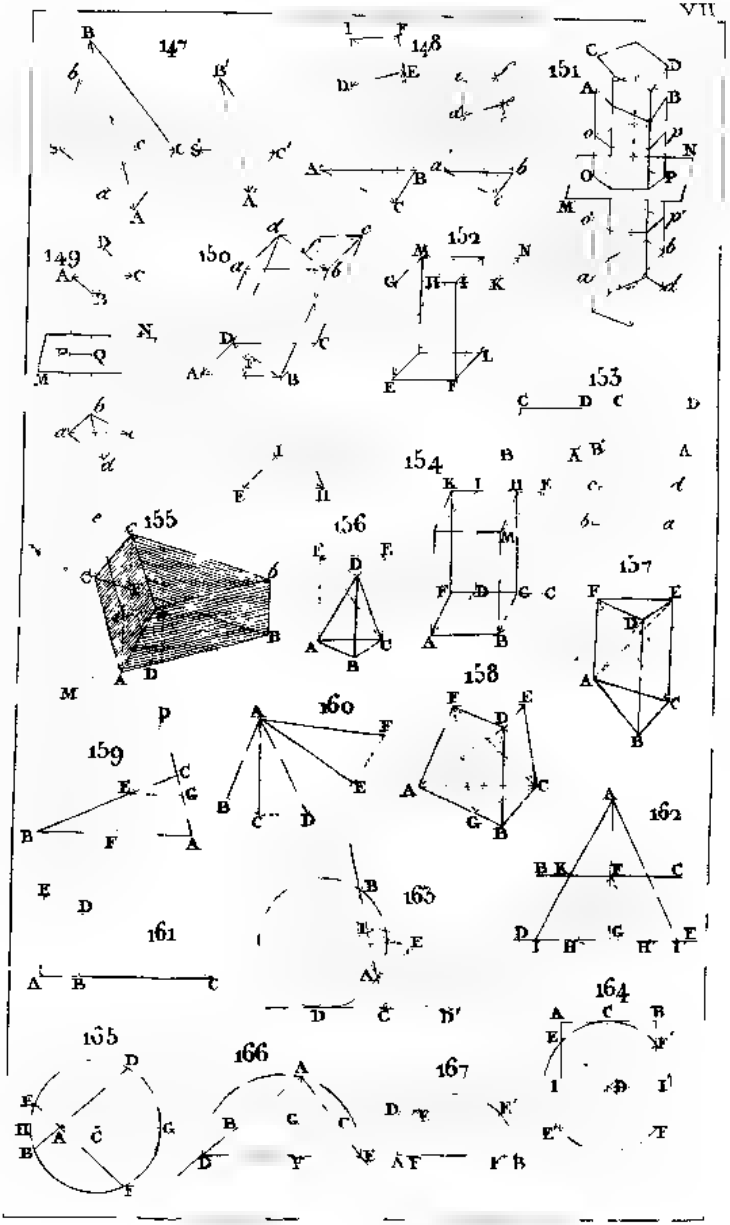

26
27
28
29
35
30
31
32
33
34
36
37
38
39
41
44
45
40
42
49
46
47
48
50
51
52

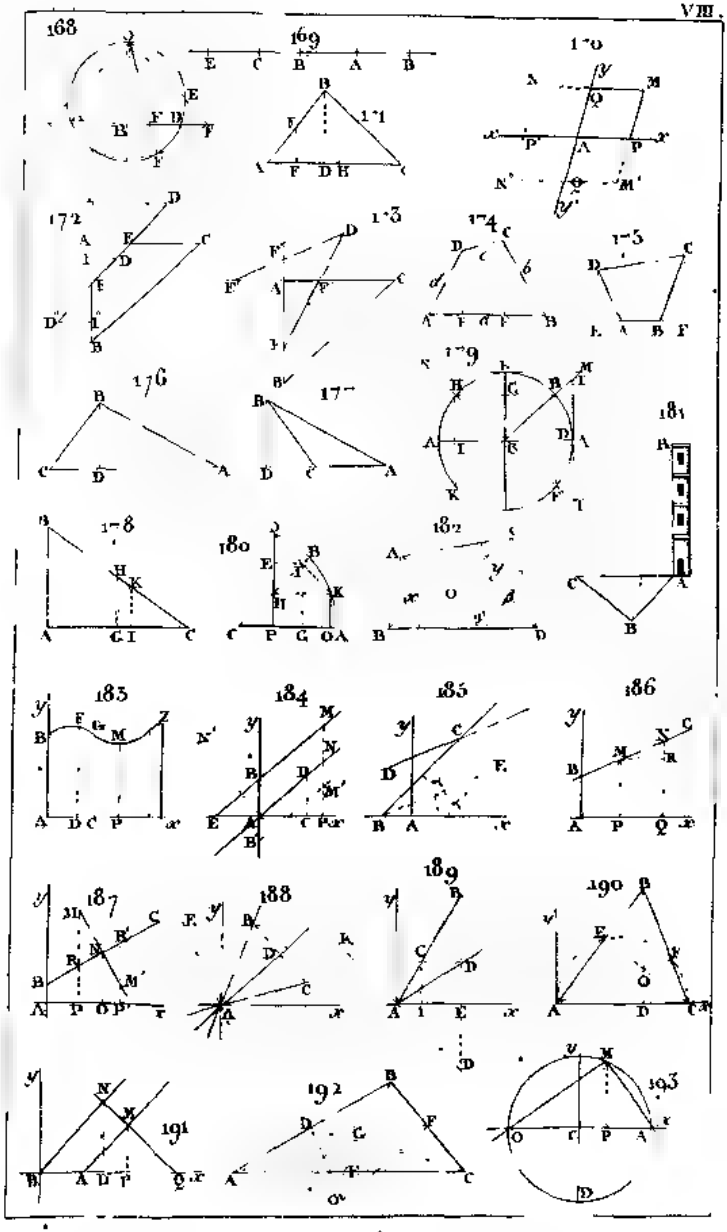

53
54
56
66 bis
55
58
59
60
61
62
63
64
65
65 bis
66
68
69
70
71
72
74
75

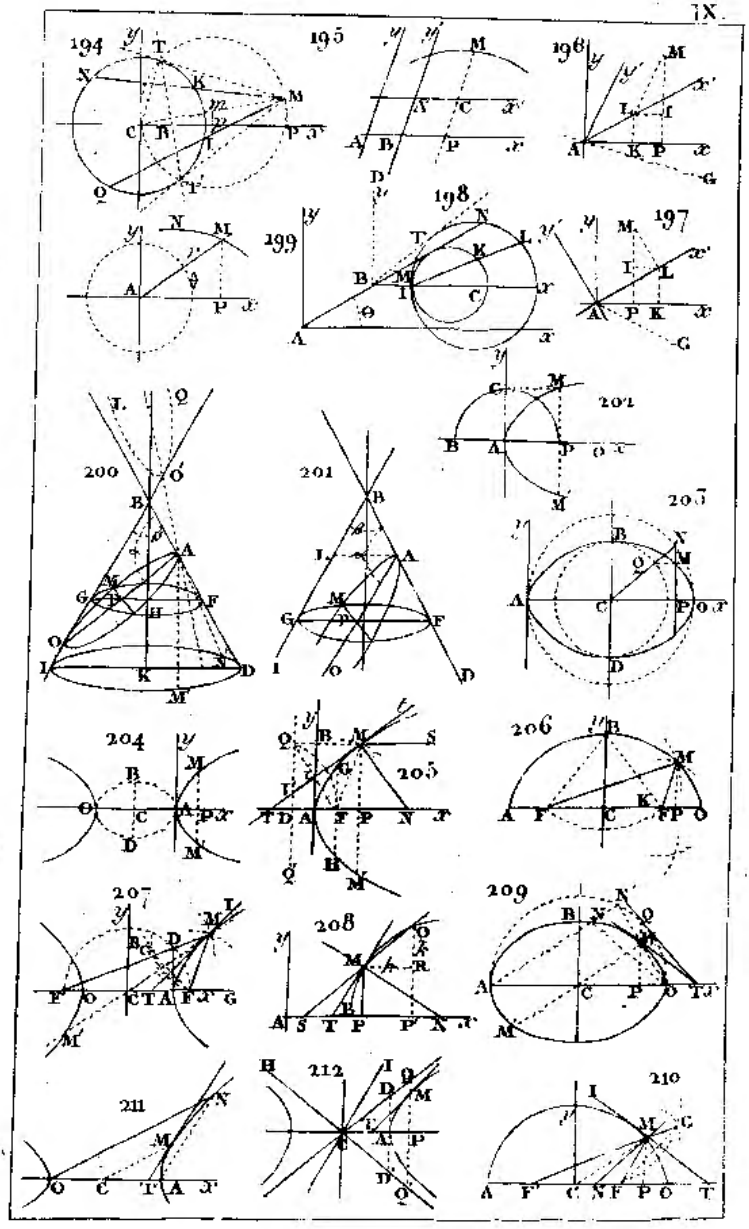

75
76
77
78
79
81
80
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96

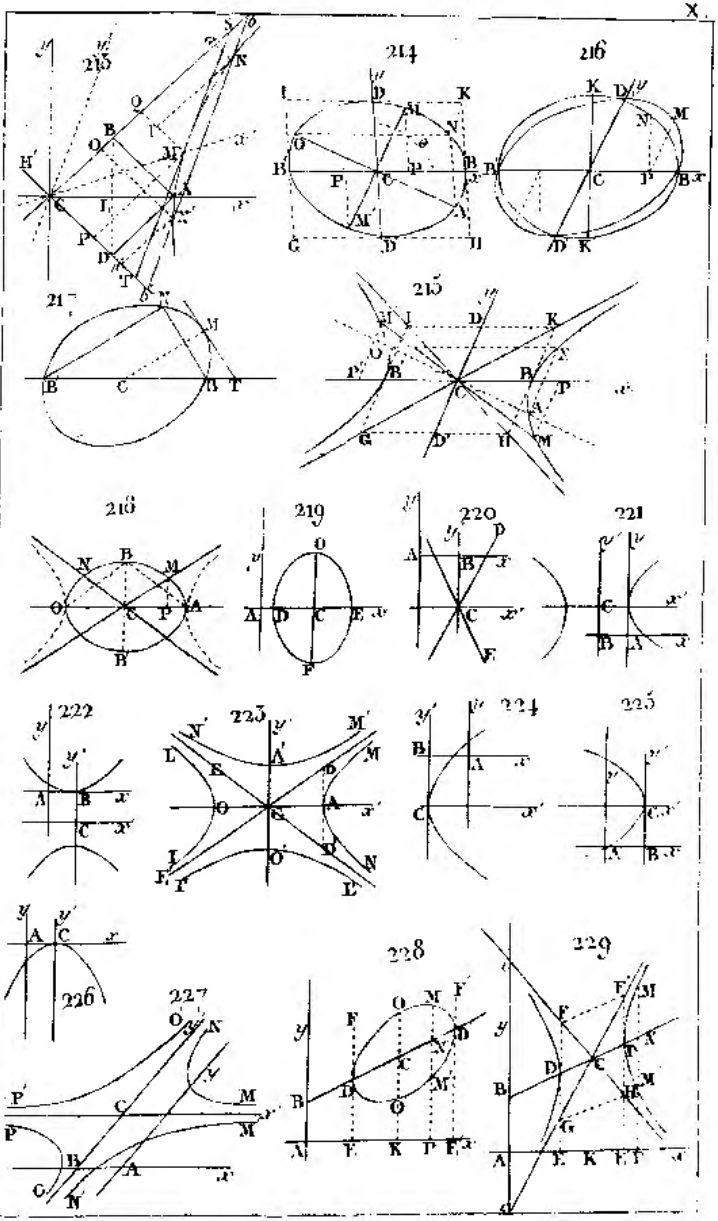

97
98
99
102
100
101
103
106
107
104
105
108
110
111
109
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122

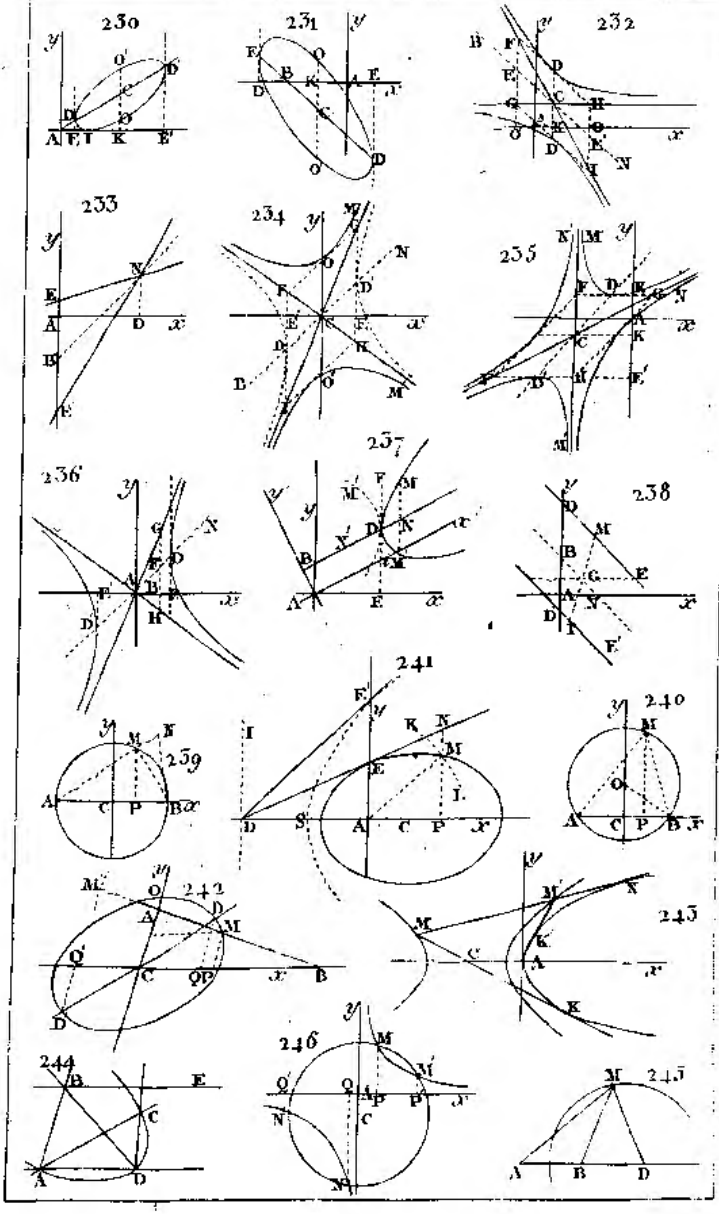

124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146

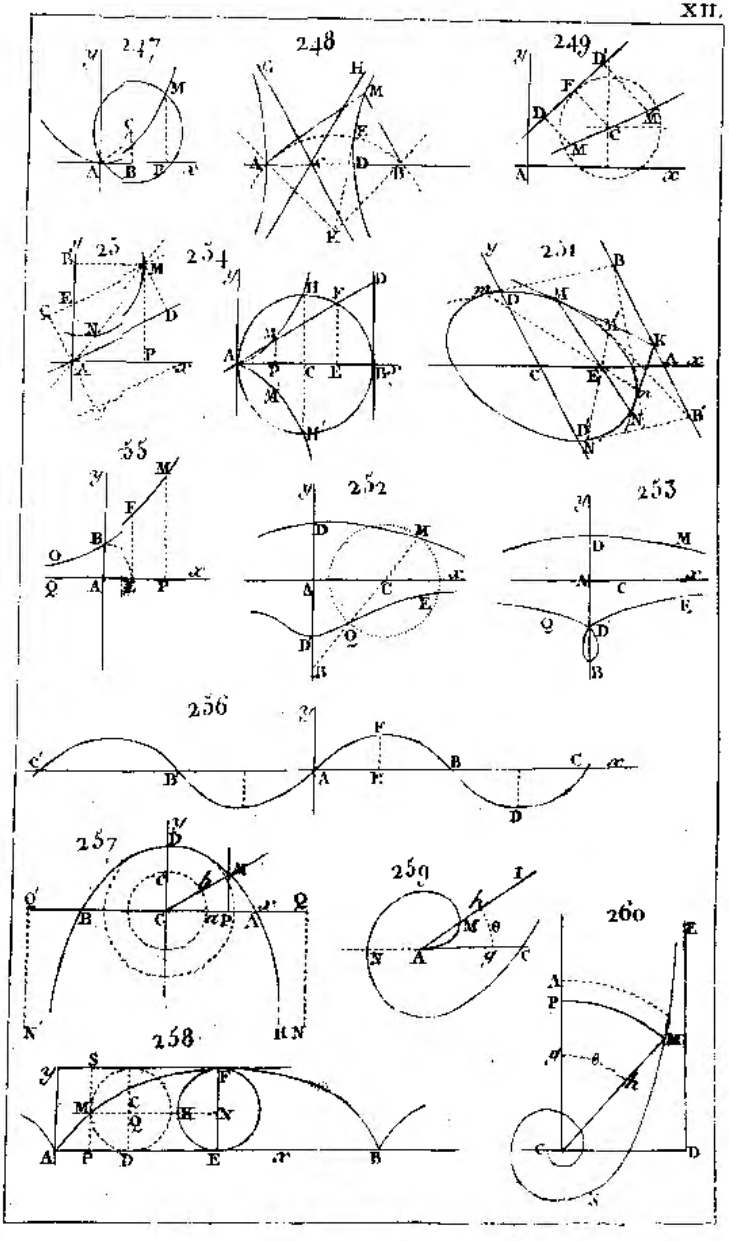

147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167


168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193


194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212


213
214
216
217
215
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229


230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246


247
248
249
25
254
251
55
252
253
256
257
259
260
258