А.В.Гладкий

ЧИСЛА:

НАТУРАЛЬНЫЕ
РАЦИОНАЛЬНЫЕ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ
КОМПЛЕКСНЫЕ

·Вербум-М·

А.В.Гладкий

ЧИСЛА:

НАТУРАЛЬНЫЕ
РАЦИОНАЛЬНЫЕ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ
КОМПЛЕКСНЫЕ

Учебное пособие
для
общеобразовательной
школы

МОСКВА
·Вербум–М·
2000

ББК 22.131+22.141+74.262.21Я.821
Г 52

Гладкий А. В.

Г 52 Числа: натуральные, рациональные, действительные, комплексные: Учебное пособие для общеобразовательной школы. — М.: Вербум-М, 2000. — 144 с.

ISBN 5-8391-0036-6

Книга представляет собой учебное пособие, в котором в форме, доступной учащимся старших классов общеобразовательной школы, излагается теория числовых систем. Доступность достигается за счет подробного разъяснения содержательной стороны рассуждений, тщательности и логичности изложения и точности языка. Большое внимание уделяется истории развития понятия числа.

Книга предназначена для учащихся старших классов и учителей общеобразовательных школ, ее можно использовать для факультативных занятий, а также для самообразования.

ББК 22.131+22.141+74.262.21Я.821

ISBN 5-8391-0036-6

Предисловие для учителя

Эта книга — экспериментальное учебное пособие для старших классов средней школы. Первоначально она была задумана как пособие для школ и классов гуманитарного профиля. Автор был убежден — как убежден и сейчас, — что курс математики в гуманитарной школе вовсе не должен быть урезанным и освобожденным от строгих рассуждений, как полагают те, кто считает, будто «гуманитарию» свойственно «мыслить по преимуществу образами», а не абстрактными понятиями. Подобная идея могла зародиться лишь в головах людей, имеющих весьма смутное представление о гуманитарной сфере человеческой деятельности. Гуманитарные науки сплошь насыщены абстрактными понятиями; юристу, психологу, лингвисту или историку приходится иметь с ними дело несравненно чаще, чем, скажем, инженеру. Попробуйте вообразить себе, например, судью, «мыслящего по преимуществу образами» — какие будет он выносить приговоры? Используемый в юриспруденции метод логического доказательства родственен математическому, и не случайно в течение многих веков юристами становились люди с тем же складом ума, который благоприятствует занятиям математикой. Логическая культура воспитывается в первую очередь именно изучением математики; а в наше время предъявляемые гуманитарными дисциплинами требования к логической культуре и непосредственно к математической подготовке значительно возросли. Социологи, психологи и юристы уже ввели в учебные планы своих факультетов математические дисциплины. Весьма основательная математическая подготовка необходима сейчас лингвисту. А логика вообще стала математической наукой, не перестав при этом быть гуманитарной.

Поэтому в гуманитарных школах и классах курс математики должен быть во всяком случае не меньше по объему, чем в массовой школе, а в отношении логической строгости к нему должны предъявляться не пониженные, а напротив, повышенные требования. Из этой предпосылки необходимо исходить и при написании учебников. Некоторые думают, что если собрать в учебнике математики много разных фактов, относящихся к живописи, архитектуре и т. п., и добавить биографических сведений о знаменитых математиках, то он уже станет «гуманитарным». Но настоящая гуманитарность совсем в другом: в тщательности изложения, в безукоризненной логике, в ясности и выразительности языка, в скрупулезной отделке каждой детали. И еще одна необходимая составляющая «гуманитарного стиля» преподавания математики — внимание к связям ее с естественным языком, от которого она в конечном счете произошла. По словам классика психологической науки Л. С. Выготского, математика есть «мышление, происходящее из языка, но преодолевающее его». А если говорить об исторических экскурсах, то это должна быть история идей, а не собрание исторических анекдотов.

В таком стиле я и решил попытаться написать книгу о числах для школьников старших классов (точнее, для школьников и учителей) и в процессе работы над ней скоро понял, что предназначать ее исключительно или преимущественно для гуманитарных школ и классов было бы неправильно: к «гуманитарному стилю» преподавания математики нужно стремиться в **любой** школе, не исключая и школ с углубленным изучением математики. Такой стиль наилучшим образом отвечает самой природе математики, предмет и метод которой во многом сближают ее с гуманитарными науками*.

Почему я избрал в качестве материала для первого опыта такого пособия числовые системы? Конечно, известную роль сыграли личные вкусы, но далеко не главную. Главным стимулом было стремление заполнить существенный пробел в школьном преподавании математики (не только в «обычной» и гуманитарной, но и в математической школе): числа до сих пор не занимают в нем того места, какого они заслуживают по своему значению для математической и общей культуры и для развития логического мышления. Школьники знакомятся с числами в таком возрасте, когда абстрактные понятия и строгие рассуждения доступны им лишь в очень небольшой степени, а потом у них практически не бывает случая глубже осмыслить основные понятия арифметики, хотя старшеклассникам это уже вполне по силам. А это приводит к тому, что даже образованные люди обычно смотрят на числа как на некий инструмент, который, конечно, полезен, но сам по себе может быть интересен разве что специалисту-математику. Между тем число — одно из удивительнейших и прекраснейших созданий человеческого духа, и понятие числа заслуживает того, чтобы каждый образованный человек имел хотя бы некоторое представление о тех глубинах, которые оно в себе содержит. А в наше время, когда числу стараются подчинить всю человеческую жизнь, такое представление особенно необходимо: ведь без него невозможно понять, что на самом деле подвластно числу и что не подвластно.

Еще одно соображение в пользу изучения в школе теории числовых систем состоит в том, что она дает превосходный материал для выработки культуры строгого логического рассуждения. Сейчас школьники знакомятся с искусством математического доказательства фактически толь-

---

* Один из крупнейших наших ученых в области математической логики, А. А. Марков, любил повторять в свойственной ему полусерьезной, полушутливой манере: «Математика, в сущности, наука гуманитарная, потому что она изучает то, что человек напридумывал». Сейчас представление о математике как гуманитарной науке начинает проникать в школьное преподавание (см. учебники А. Г. Мордковича), и это, безусловно, следует приветствовать.

ко на уроках геометрии, а этого явно недостаточно. Изучение числовых систем позволит им лучше овладеть этим искусством и получить более ясное и более глубокое представление о методе математики.

Впрочем, я далек от мысли призывать к новой реформе школьного курса математики. По моему глубокому убеждению, любые изменения в содержании школьного обучения, равно как и в его методах, должны происходить естественным путем, начинаясь в практике преподавания отдельных учителей и затем постепенно распространяясь дальше. Решающую роль в их распространении должно играть, конечно, появление новых учебников. И эту книгу, возникшую из опыта преподавания в лицее при Российском государственном гуманитарном университете, я написал в надежде, что найдутся учителя, которые захотят и смогут воспользоваться моим опытом либо на обычных уроках, либо на факультативных занятиях и в кружках. Кроме того, интересующиеся математикой старшеклассники могут использовать книгу для самообразования. (Мне представляется также, что для этой цели она может быть полезна и учителям, в том числе учителям начальных классов.)

Помня о слабой арифметической подготовке нынешних школьников, я включил в первую главу книги некоторые разделы, настоящее место которых — в пособиях для младших или средних классов (непозиционные способы записи чисел, позиционная запись в недесятичных системах счисления, краткое приложение, посвященное устному счету).

Предлагаемый курс имеет целью не только дать строгое обоснование основных понятий, связанных с числовыми системами, но и позволить ученикам составить ясное представление об их назначении и познакомиться с историей развития понятия числа. Поэтому изложение ведется не в том порядке, который подсказывается алгебраическими соображениями и общепринят в курсах для студентов — полукольцо целых неотрицательных чисел, затем кольцо целых чисел и поля рациональных, действительных и комплексных чисел, — а в том, в каком появляются числа в традиционном процессе школьного обучения: сначала натуральные, к которым вскоре присоединяется нуль, потом рассматриваются дроби, т. е. неотрицательные рациональные числа, затем отрицательные рациональные числа и далее действительные и комплексные. При таком порядке (близком к историческому: различие только в том, что исторически дроби появились раньше, чем нуль) не возникает иллюзии, будто при введении новых чисел люди прежде всего преследовали цель сделать все операции над ними неограниченно выполнимыми. Натуральные числа я ввожу как мощности конечных множеств (хотя и не пользуюсь теоретико-множественной терминологией). Это дает возможность легко перекинуть мостик от представлений о числе, усвоенных в начальной школе или еще раньше, к «взрослому» понятию натурального числа. От аксиоматического изложения системы натуральных чисел я сознательно отказываюсь. (В «математической» школе могло бы, конечно, найти свое место и такое изложение.)

Идеал, к которому я стремился, состоял в соединении строгости изложения с доступностью. Удалось ли мне сколько-нибудь к нему приблизиться — об этом, само собой, лучше смогут судить другие. Разумеется, в пособии по числовым системам для школьников невозможно и не нужно все доказывать; иногда я опускаю доказательство того или иного факта, потому что оно представляется мне слишком сложным или слишком скучным и утомительным. Но в таких случаях я всегда указываю в явном виде, что данный факт нуждается в доказательстве, которое я не привожу. Некоторые утверждения я доказываю, чтобы избежать громоздких обозначений, на примерах — но только в случаях, когда такое доказательство производится с помощью тех же самых рассуждений, что и в общем виде.

Труднее всего было, разумеется, изложить теорию действительных чисел. Испробовав несколько вариантов, я остановился, как на самом естественном и наглядном, на таком способе изложения, при котором за отправную точку берутся геометрические свойства прямой (аксиомы Архимеда и Кантора) и с использованием этих свойств точкам прямой сопоставляются бесконечные десятичные дроби. При изложении другого трудного вопроса — метода математической индукции — я использовал методические идеи И. С. Рубанова и подобранные им примеры (см. статьи этого автора в журнале «Математика в школе» за ноябрь—декабрь (№ 6) 1995 г. и за январь—февраль (№ 1) 1996 г.).

Работая над книгой, я старался обращать особое внимание на точность и выразительность языка. Я убежден, что ни один учебный предмет не может так помочь школьнику научиться грамотно, ясно и точно выражать свои мысли, как математика, а ее изучение, в свою очередь, значительно облегчается, если учащийся хорошо владеет языком. Поэтому каждый урок математики должен быть одновременно и уроком родного языка.

Рукопись книги была прочитана Ю. Н. Козиоровым и А. М. Шелеховым. Обоим этим коллегам, а также рецензенту книги Ф. Л. Варпаховскому, автор благодарен за ценные замечания.

Автор

Предисловие для ученика

Древнейшей из всех математических наук и из всех наук вообще является арифме́тика — наука о числах. (Название ее происходит от греческого слова ἀριθμός — число.) Но не только по возрасту, а и по важности для людей арифметике по праву принадлежит первое место среди всех наук, потому что без чисел не было бы возможно никакое научное знание. Изучение природы немыслимо без подсчетов и измерений, результаты которых выражаются числами. И даже в гуманитарных исследованиях редко удается обойтись без чисел. (Разве могла бы, например, историческая наука существовать без хронологии?) Как сказал великий математик К. Ф. Гаусс (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855), «математика — царица наук, а арифметика — царица математики».

Понятие о числе и умение считать принадлежат к тем «кирпичам», из которых сложен фундамент духовной культуры человечества, и с давних времен всякое образование начинается с чтения, письма и счета. Арифметика составляет основное содержание начального курса математики, который преподается в школах нашей страны до 6-го класса включительно. В этом курсе Вы познакомились сначала с натуральными числами и нулем, потом с дробями и, наконец, с отрицательными числами. Все эти числа Вы научились складывать, вычитать, умножать и делить, научились решать с помощью арифметических действий простые задачи, приобрели вычислительные навыки, без которых невозможно изучать математику дальше и невозможно изучать многие другие науки. (Да и в повседневной жизни без этих навыков обойтись трудно.) Таким образом, начальный курс арифметики был в основном практическим. Только в конце его появились некоторые элементы теории (простые числа, разложение числа на простые множители, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное), но и там не было строгих доказательств, подобных тем, с которыми Вы встретились потом в геометрии. Между тем строгие доказательства используются во всех математических науках, и арифметика — не исключение. Уже древние греки, которые изобрели искусство математического доказательства, пользовались им не только в геометрии, но и в арифметике.

Сейчас Вы приступаете к изучению теоретического курса арифметики, цель которого — помочь Вам приобрести такой минимум знаний о числах, без какого никто в наше время не может считать себя образованным. Вам предстоит прежде всего пополнить и привести в систему Ваши знания о тех числах, с которыми Вы познакомились в начальном курсе; в книге, которую Вы держите в руках, этому посвящены главы 1 и 2. Многое из того, о чем рассказывается в этих главах, Вы уже знаете. Но теперь

Вы в состоянии понять это гораздо глубже, а такое углубленное понимание необходимо и для выработки общей культуры, и для того, чтобы усвоить содержание глав 3 и 4, посвященных действительным числам, о которых Вы пока что знаете очень мало, и комплексным числам, о которых, скорее всего, еще ничего не знаете.

Теоретический курс арифметики поможет Вам не только расширить и углубить Ваши знания о числах, но и лучше овладеть искусством математического доказательства. В геометрии (точнее, в элементарной геометрии, которая изучается в школе) доказательства иллюстрируются чертежами, облегчающими их понимание. В арифметике подобные иллюстрации возможны лишь в довольно редких случаях, и это отсутствие наглядности имеет не только отрицательную, но и положительную сторону: встретившись с логическим рассуждением «в чистом виде», Вы сможете лучше почувствовать его смысл и лучше оценить его красоту. Научиться чувствовать смысл строгого логического рассуждения и ценить его красоту — одна из главных целей изучения математики, и вряд ли какая-либо математическая наука может помочь достижению этой цели лучше, чем арифметика.

Автор

Глава 1
Натуральные числа и нуль

1.1. Натуральные числа

Числа 1, 2, 3, 4 и т. д. называются, как известно, **натуральными**. В этом названии, происходящем от латинского слова *natura* — природа, отразилось представление, будто целые положительные числа «созданы самой природой» — в отличие от дробей, отрицательных и иррациональных чисел, созданных человеком. Но на самом деле натуральные числа — тоже творение человеческого ума. В природе нет никакого предмета, который можно было бы назвать «число один», «число два», «число пять»; есть только совокупности, состоящие из одного, двух, пяти предметов (например, совокупность пальцев на руке или совокупность лепестков цветка яблони). «Число пять» — это понятие, возникающее в уме человека, когда он отвлекается от различных свойств этих совокупностей и думает только о том, что общего у каждой из них со всеми остальными. Додуматься до такого понятия было очень не просто. Известны языки, в которых нет таких слов, как *один*, *два* и т. д., позволяющих считать любые предметы, а есть различные разряды числительных для счета предметов различного вида*.

Существуют два параллельных ряда натуральных чисел: **количественные**, выражаемые в языке количественными числительными — *один*, *два*, ..., и **порядковые**, выражаемые обычно порядковыми числительными — *первый*, *второй*, ... (Порядковые числа могут выражаться и количественными числительными: говорят, например, «дом десять, квартира шесть».) Количественные числа служат для счета предметов, порядковые — для того, чтобы давать им имена, особенно в тех случаях, когда имеется некоторая совокупность однородных предметов и имя должно указать на место, которое данный предмет занимает среди них. Такое имя помогает отыскать в этой совокупности нужный предмет: мы легко находим, например, нужную страницу в книге, если знаем ее номер. Нас будут интересовать только количественные числа, кроме тех случаев, когда речь пойдет о способах записи чисел.

В следующем разделе мы часто будем, говоря о натуральных числах, опускать для краткости слово «натуральные».

---

* Например, в языке нивхов, обитающих на нижнем Амуре и на Сахалине (старое русское название этого народа — гиляки), имеется около тридцати разрядов количественных числительных: для счета мелких круглых предметов, для счета длинных предметов, для счета лодок, для счета нарт и т. д.

Ряд чисел 1, 2, 3, 4, ... часто называют **натуральным рядом чисел** или просто **натуральным рядом**.

1.2. Арифметические действия

Еще в начальной школе, а может быть, и раньше, Вы познакомились с четырьмя действиями* над натуральными числами: сложением, вычитанием, умножением и делением. Но тогда Вы могли уяснить себе смысл этих действий только на примерах, а теперь мы с Вами в состоянии описать их в общем виде и с точными формулировками.

Итак: что значит сложить два натуральных числа, умножить одно натуральное число на другое, вычесть одно натуральное число из другого, разделить одно натуральное число на другое?

Сложить натуральные числа a и b значит решить задачу, которую можно сформулировать так: имеются две совокупности предметов, причем каждый предмет входит только в одну совокупность (например, два мешка яблок). В одной из них a предметов, в другой — b предметов. Требуется узнать, сколько предметов в обеих совокупностях вместе (сколько будет яблок в большом мешке, если в него ссыпать все яблоки из обоих данных мешков). Получающееся при этом число называется **суммой** чисел a и b (от латинского *summa* — высшая точка, общее количество) и обозначается $a + b$. Точно так же можно определить сложение и сумму трех и более чисел. Числа, которые складываются, называются **слагаемыми**.

Умножить натуральное число a на натуральное число b значит решить следующую задачу. Имеется b совокупностей предметов по a предметов в каждой, причем каждый предмет входит только в одну совокупность (например, b мешков, в каждом из которых a яблок). Требуется узнать, сколько предметов во всех этих совокупностях вместе (сколько яблок будет в большом мешке, если в него ссыпать все яблоки из всех наших мешков). Получающееся при этом число называется **произведением** числа a на число b и обозначается $a \cdot b$ или $a \times b$. Число a (то, которое умножают, т. е. число предметов в каждой совокупности) называется **множимым**, а число b (то, на которое умножают, т. е. число всех совокупностей) — **множителем**. Множимое и множитель называют также **сомножителями**.

Из определения умножения ясно, что умножить a на b — все равно, что сложить b чисел, каждое из которых равно a:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ раз}}.$$

* Эти действия часто называют также **операциями** (от латинского *operatio* — дело, действие).

В частности, произведение a на 1 равно a:

$$a \cdot 1 = a.$$

Вопрос. Правильно ли было бы сказать, что умножить a на b — все равно, что сложить a с самим собой b раз?

Задание. Как Вы знаете, знак умножения часто опускают: пишут, например, ab вместо $a \cdot b$. Можно ли это делать, зависит от того, как записаны сомножители — цифрами или буквами. (Например, в записи $2 \cdot 3$ опустить точку нельзя.) Постарайтесь возможно точнее сформулировать условие, при выполнении которого можно опускать знак умножения.

Вычитание и деление — это операции, обратные сложению и умножению. **Вычесть** число b из числа a значит найти такое число x, что $b + x = a$ (иначе: такое число, которое нужно прибавить к b, чтобы получить a). Это число называется **разностью** между a и b и обозначается $a - b$. Число a (то, из которого вычитают) называется **уменьшаемым**, число b (то, которое вычитают) — **вычитаемым**.

Разделить число a на число b значит найти такое число x, что $b \cdot x = a$ (иначе: такое число, на которое нужно умножить b, чтобы получить a). Число x называется **частным** от деления a на b и обозначается $a : b$ или $\dfrac{a}{b}$. Число a (то, которое делят) называется **делимым**, число b (то, на которое делят) — **делителем**.

Вычитание и деление можно определить и по-другому: вычесть число b из числа a значит узнать, сколько предметов останется в совокупности, содержащей a предметов, если из нее удалить b предметов; разделить число a на число b значит решить следующую задачу, которую мы ради простоты сформулируем только в наглядном виде: допустим, что нам удалось разложить a яблок поровну по b мешкам; сколько яблок в каждом мешке?

В отличие от сложения и умножения, которые **всегда выполнимы**: любые два натуральных числа можно сложить или перемножить — вычитание и деление выполнимы не всегда. Невозможно, например, из десяти вычесть двадцать, восемь разделить на три.

Если нужно выполнить несколько действий подряд, то порядок, в котором их следует производить, указывается с помощью скобок. Сначала выполняют действия, записанные внутри скобок, потом записанные вне. Например, запись $3 + (5 \cdot 7)$ означает, что сначала выполняется умножение, потом сложение, а запись $(3 + 5) \cdot 7$ — что сначала выполняется сложение, потом умножение. Но обычно, чтобы уменьшить число скобок, пользуются таким соглашением: если скобок нет, то сначала выполняется умножение или деление, а затем сложение или вычитание. (Разумеется, это соглашение — просто условность; можно было бы принять и обратный порядок.) Например, $6 + 2 \cdot 9$ означает то же, что $6 + (2 \cdot 9)$, а $42 : 3 - 8$ — то же, что $(42 : 3) - 8$.

Основные свойства сложения и умножения

1. $a+b=b+a$ (**переместительный**, или **коммутативный**, закон для сложения);
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (**сочетательный**, или **ассоциативный**, закон для сложения);
3. $a \cdot b=b \cdot a$ (**переместительный**, или **коммутативный**, закон для умножения);
4. $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ (**сочетательный**, или **ассоциативный**, закон для умножения);
5. $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ (**распределительный**, или **дистрибутивный**, закон).

(Термины «коммутативный», «ассоциативный», «дистрибутивный» происходят от латинских слов *commuto* — «обмениваю, заменяю», *associo* — «присоединяю», *distribuo* — разделяю, распределяю.)

Еще в начальной школе Вы, несомненно, прониклись твердым убеждением, что эти равенства — или, как их часто называют, законы — верны. А как это убеждение возникло? Если Вам удастся это вспомнить, окажется, скорее всего, что, во-первых, они много раз подтверждались на примерах, а во-вторых, Вы просто поверили учителю и учебнику. Но примеров, как бы много их ни было, недостаточно для доказательства общего утверждения, т. е. такого, где речь идет об общих свойствах каких-либо предметов; в истории человеческого знания не раз бывало, что утверждение, верное для многочисленных частных случаев, в общем виде оказывалось все-таки неверным. Что касается веры, то здесь дело обстоит сложнее. Каждый из нас вынужден многие выводы науки принимать на веру, потому что ни один человек не в состоянии лично проверить всю их совокупность. Но **в принципе** все они проверяемы; именно проверяемость результатов и выводов отличает науку от мистики, метафизики и разного рода псевдонаук (вроде астрологии). Научное познание всегда начинается с догадок, гипотез, которые потом проверяются. Все науки выработали свои методы проверки гипотез, и каждый, кто изучает хотя бы начала той или иной науки, должен в какой-то степени овладеть этими методами: иначе наука будет казаться ему скучным собранием фактов, лишенных внутренней связи. Математика имеет два таких метода: доказательство с помощью логических рассуждений и вычисление. Второй из них занимает в математической науке подчиненное место, но первоначальное изучение математики в школе начинается с него, потому что, не научившись вычислять, овладеть искусством математического доказательства невозможно; кроме того, уму младшего школьника отвлеченные математические рассуждения еще не под силу. А на той стадии изучения математики, на которой Вы сейчас находитесь, Вы уже в состоянии с помощью рассуждений доказать основные свойства сложения и умножения натуральных чисел, в справедливости которых Вы до сих пор были убеждены, в сущности, в силу привычки. Итак, мы переходим теперь к доказательству этих свойств.

Доказательство. Свойства 1 и 2 ясны из самого определения сложения.

Чтобы доказать свойство 3, представим себе, что у нас имеется b совокупностей по a предметов в каждой, причем всякий предмет входит только в одну совокупность (b мешков, в каждом из которых a яблок). Удалим из каждой совокупности один предмет и из всех удаленных предметов составим новую совокупность (по одному яблоку из каждого мешка положим в корзину). В этой новой совокупности («корзине») будет, очевидно, b предметов, а в каждой из старых («мешков») останется $a - 1$ предмет. Затем возьмем еще одну корзину и положим в нее по одному яблоку из каждого мешка, и т. д. Повторяя это, пока яблоки не закончатся, мы получим в конце концов a «корзин» по b предметов в каждой. По определению умножения общее число предметов во всех «корзинах» есть $b \cdot a$; но это в точности все те предметы, которые находились раньше в «мешках», а их число, по тому же определению, было равно $a \cdot b$. Следовательно, $a \cdot b = b \cdot a$.

Для доказательства свойства 4 представим себе, что у нас имеется «большой мешок», в нем c «средних мешков», в каждом из них b «маленьких мешков», а в каждом «маленьком мешке» a яблок (рис. 1.1). По определению умножения в каждом «среднем мешке» содержится $a \cdot b$ яблок и, следовательно, по тому же определению число яблок в «большом мешке» равно $(a \cdot b) \cdot c$.

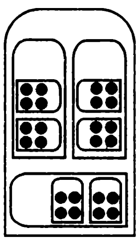


Рис. 1.1

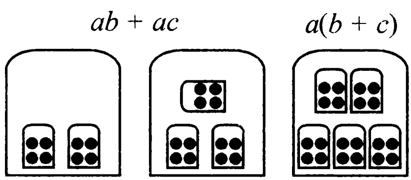


Рис. 1.2

Но если «предметами» будут для нас не яблоки, а «маленькие мешки», то мы увидим — снова по определению умножения — что «большой мешок» содержит $b \cdot c$ «маленьких мешков» и, значит — все по этому же определению! — то же самое число яблок равно $a \cdot (b \cdot c)$. Итак, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Докажем, наконец, свойство 5. Пусть у нас есть два «больших мешка», в одном из них b «маленьких мешков», в другом — c «маленьких мешков», а в каждом «маленьком мешке» — по a яблок (рис. 1.2, левая часть). По определению умножения в первом «большом мешке» будет $a \cdot b$ яблок, во втором $a \cdot c$, а в обоих вместе — по определению сложения — будет $a \cdot b + a \cdot c$. Если теперь сложить все «маленькие мешки» в один «большой мешок» (рис. 1.2, правая часть), то всех их вместе будет $b + c$, и общее число яблок будет по определению умножения равно $a \cdot (b + c)$. А так как общее число яблок в обоих случаях одно и то же, получаем $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$.

Рассмотренные свойства арифметических действий широко используются при вычислениях: коммутативные законы позволяют в необходимых случаях переставлять слагаемые или сомножители, ассоциативные — обходиться без скобок в сложных суммах и произведениях: например, вместо $(a \cdot b) \cdot c$ или $a \cdot (b \cdot c)$ пишут просто $a \cdot b \cdot c$, дистрибутивный — раскрывать скобки или, наоборот, выносить за скобки общий множитель.

Число $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ называется n-й **степенью** числа a и обозначается a^n.

Математики условились также считать, что $a^1 = a$. Запись a^n читается «a в n-й степени» (или «a в степени n»). Вместо «a во второй степени», «a в третьей степени» говорят обычно «a в квадрате», «a в кубе», потому что a^2 есть площадь квадрата со стороной a, a^3 — объем куба с ребром a. Сами числа a^2, a^3 называют «квадратом числа a», «кубом числа a». Например, $5^3 = 125$, так что 125 есть куб числа 5. Вместо «найти n-ю степень числа a» говорят обычно «**возвести** a **в степень** n» (в частности, «возвести в квадрат», «возвести в куб»).

Основные свойства возведения в степень

1. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.
2. $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$.

Доказательство. 1. Правая часть доказываемого равенства представляет собой произведение двух сомножителей, первый из которых есть по определению произведение b сомножителей, равных a, а второй — произведение c сомножителей, также равных a. Выполняя умножение, получаем произведение $b + c$ сомножителей, равных a, а это как раз и есть a^{b+c}.

2. Правая часть доказываемого равенства представляет собой произведение c сомножителей, каждый из которых есть произведение b сомножителей, равных a. Выполняя умножение, получаем произведение $b \cdot c$ сомножителей, равных a, а это как раз и есть $a^{b \cdot c}$.

1.3. Число нуль

Представим себе, что у нас есть ящик с орехами. Достанем оттуда, не глядя, несколько орехов и пересчитаем оставшиеся. Допустим, что осталось n орехов. Но может случиться, что мы забрали все орехи, и ящик теперь пуст. В таком случае будем говорить, что «в ящике осталось нуль орехов». Это значит, что мы добавляем к числам один, два, три и т. д. еще одно число — **нуль**, выражающее «количество предметов в пустой совокупности» (в нашем примере — количество орехов в пустом ящике). Число нуль обозначается знаком 0.

Замечание. В современном русском языке употребляются два варианта этого слова: *нуль* и *ноль*. В математической речи, устной и письменной, обычно используется вариант *нуль*. Вне математики в именительном и винительном падежах единственного числа чаще используется вариант *ноль*. (*Ноль градусов — обычная температура в это время; Поезд отправляется в ноль часов сорок минут*), но все остальные формы берутся по большей части от варианта *нуль* (*Температура установилась на нуле*). О происхождении слова см. раздел 1.6.

Натуральные числа и нуль часто называют **целыми неотрицательными числами**. Вспомнив определение сложения, мы сразу увидим, что

$$n+0=0+n=n,$$

каково бы ни было n (добавляя к совокупности из n предметов «пустую совокупность», получаем ту же самую совокупность из n предметов). Отсюда по определению вычитания следует, что $n-0=n$ (то число, которое нужно прибавить к n, чтобы получить n, есть 0).

Вспоминая определение умножения, видим, что $0\cdot n=0$ (если «высыпать» содержимое n пустых мешков в один мешок, этот мешок останется пустым) и $n\cdot 0=0$ (если в «большом» мешке, в котором мы ожидаем увидеть сколько-то «маленьких мешков» по n яблок в каждом, на самом деле нет ни одного «маленького мешка», то в нем нет ни одного яблока). Отсюда по определению деления следует, что для любого $n\neq 0$ справедливо равенство $\frac{0}{n}=0$ (то число, на которое нужно умножить n, чтобы получить 0, есть 0). В то же время частного от деления n на 0 при $n\neq 0$ *не существует*. В самом деле: допустим, что $n\neq 0$ и существует частное $\frac{n}{0}=x$. Тогда — по определению частного — x есть такое число, что $0\cdot x=n$; но $0\cdot x=0$, в то время как $n\neq 0$. *Определенного* частного от деления нуля на нуль также не существует, поскольку равенство $0\cdot x=0$ справедливо при любом x.

Таким образом, *деление на нуль не имеет смысла*.

Все основные свойства сложения, умножения и возведения в степень при введении нуля остаются в силе. Это легко проверить, подставляя 0 вместо различных букв в соответствующие равенства из раздела 1.2.

1.4. Отношения «больше» и «меньше»

Над числами в арифметике не только производят арифметические действия, их также сравнивают по величине. Легко понять, что значит: «одно натуральное число меньше другого». Мы говорим, что натуральное число a меньше натурального числа b, и пишем $a < b$, если из совокупности, содержащей b предметов, можно удалить a предметов, и при этом хотя бы один предмет останется. Вместо «a меньше b» можно сказать «b больше a»; символически это записывается в виде $b > a$.

Это определение можно распространить на случай, когда $a = 0$. «Удалить 0 предметов» значит ничего не удалить; поэтому для всякого натурального числа b (нуль мы не относим к натуральным числам!) считается по определению, что $0 < b$.

Среди натуральных чисел наименьшим является число 1, за ним следует число 2 (это значит, что $2 > 1$ и не существует натуральных чисел, бóльших, чем 1, но меньших, чем 2), далее следует число 3, и т. д. Выражения «меньше или равно», «больше или равно» записываются символически как $\leqslant$, $\geqslant$. Например, запись $n \leqslant 8$ означает, что $n < 8$ или $n = 8$.

Замечание о чтении математических выражений

При чтении выражений, записанных с помощью математических символов, нужно соблюдать все нормы русского языка. Следует говорить, например, «больше ста сорока трех», «равно пятидесяти одному», «меньше или равно пятистам пятидесяти двум», а не «больше сто сорок три» и т. п. Названия латинских и греческих букв, входящих в математические выражения, не склоняются, за исключением названий букв *икс*, *игрек*, *зет*, которые можно (но не обязательно) склонять. Стоит заметить, что все формы слова *икс* имеют ударение на основе: *и́кса*, *и́ксы* и т. д. (а не *икса́*, *иксы́* и т. п.).

Задание. Проверьте по учебнику русского языка или справочнику, умеете ли Вы правильно склонять количественные числительные. Если нужно, поупражняйтесь в этом.

Если вспомнить определение вычитания, то сразу станет понятно, что вычесть целое неотрицательное число m из целого неотрицательного числа n можно тогда и только тогда, когда $m \leqslant n$.

1.5. Десятичная система счисления

Когда нужно пересчитать много предметов, удобно объединять их в группы. Этнографы, изучающие способы счета у народов, еще не затронутых нашей цивилизацией, обнаружили, что некоторые из них считают парами, некоторые — тройками, четверками, пятерками. У многих народов принят счет двадцатками*. Но чаще всего встречается счет десятками — очевидно, потому, что на руках у человека десять пальцев, а пальцы — очень удобное вспомогательное средство счета. Десятками считали и наши далекие предки: об этом свидетельствует наш язык. Русские числительные подразделяются, как известно, на *простые*, состоящие из одного слова, и *составные*, состоящие из двух и более слов. Названия чисел 1, 2, ..., 20, 30, ..., 100, 200, ..., 1000, 1 000 000, 1 000 000 000 являются простыми количественными числительными. К количественным числительным относятся также слова *оба*, *полтора*, *полтораста*. Из них составляются названия всех остальных натуральных чисел до тысячи миллиардов, причем названия чисел до тысячи образуются по «принципу сложения»: например, *двести сорок два* означает 200 + 40 + 2. А поскольку по тому же принципу образованы простые числительные, обозначающие числа от 11 до 19 включительно (*-дцать* — это сокращенное *десять*), мы можем сказать, что название каждого числа из ряда 1, 2, ..., 999 состоит из слова, обозначающего число укладывающихся в нем сотен, слова, обозначающего число десятков, укладывающихся в оставшейся «неполной сотне», и слова, обозначающего число единиц, укладывающихся в оставшемся «неполном десятке». Одно или два из этих слов могут отсутствовать, как, например, в названиях чисел сорок два, сто пять, триста. Похожим способом образуются и названия чисел, бóльших тысячи, с той разницей, что там, кроме «принципа сложения», используется еще и «принцип умножения»: например, три тысячи означает 3×1000.

Таким образом, в основе нашей системы счета — или, как принято говорить, **системы счисления** — лежит счет десятками: когда нужно пересчитать большое число предметов, мы объединяем их в десятки, а если понадобится — в десятки десятков, т. е. сотни, затем в десятки десятков десятков, т. е. тысячи, и т. д. Такая система счисления называется **десятичной**.

Замечания о названиях больших чисел

1) Слова *тысяча*, *миллион*, *миллиард* часто относят не к числительным, а к существительным. Особенностями «настоящих» числительных

* Раньше он был, видимо, распространен еще более широко. Так считали древние галлы, предки нынешних французов. Следы этой системы счета сохранились в современном французском языке: восемьдесят по-французски *quatre-vingt*, буквально «четыре-двадцать», девяносто — *quatre-vingt-dix*, буквально «четыре-двадцать-десять».

являются, во-первых, отсутствие грамматического числа и «самостоятельного» грамматического рода (числительные *один* и *два* согласуются в роде с существительным, остальные вообще не имеют рода), и, во-вторых, то, что они не влияют на падеж связанного с ними существительного, если этот падеж — не именительный и не винительный (эти два падежа заменяются родительным: *взял книги*, но *взял пять книг*). В то же время слово *тысяча* — женского рода, *миллион* и *миллиард* — мужского, а существительное при них всегда стоит в родительном падеже: *о тысяче книг* — как *о связке книг*. (Слово *тысяча* может и согласовываться с существительным: *о тысяче книгах* и т. п., причем в творительном падеже оно в этом случае имеет форму *тысячью*. Сейчас такое употребление устаревает.)

2) Вместо слова *миллиард* иногда используется слово *биллион*.

3) Существуют также слова, обозначающие числа, бóльшие миллиарда: *триллион* (10^{12}), *квадриллион*, или *квадрильон* (10^{15}), *квинтиллион*, или *квинтильон* (10^{18}), *секстиллион*, или *секстильон* (10^{21}), *септиллион*, или *септильон* (10^{24}), но они употребляются редко. (Впрочем, во время недавней инфляции в газетах, радио- и телевизионных передачах встречались «триллионы рублей».)

4) Стоит заметить, что в некоторых странах (Англия, Германия) биллионом называют число 10^{12}, триллионом — 10^{18}, квадриллионом — 10^{24}, квинтиллионом — 10^{30}, секстиллионом — 10^{36} и септиллионом 10^{42}.

Вопрос. Какие простые количественные числительные русского языка образованы из других по принципу умножения?

Задания. 1) Сравните систему русских количественных числительных с известными Вам системами количественных числительных других языков. Основаны ли они также на десятичной системе счисления? Укажите в них числительные, образующиеся по иному принципу, чем соответствующие числительные русского языка.

2) Попытайтесь выяснить (порывшись в книгах; догадка здесь не поможет, если Вы не знакомы с историей русского языка), почему число 200 называется *двести*, а не «*дваста*», как *триста*, *четыреста*.

1.6. Способы записи натуральных чисел

С незапамятных времен люди пользовались для обозначения чисел не только словами, но и знаками. Задолго до изобретения письменности единицу уже изображали зарубкой или нарисованной на чем-нибудь палочкой, двойку — двумя зарубками или палочками и т. д. Потом появились другие, более удобные способы. Например, древние римляне записывали натуральные числа с помощью семи знаков (теперь мы их называем «римскими цифрами»):

I V X L C D M

1 5 10 50 100 500 1000

Здесь, как мы видим, сохранился первобытный знак для единицы — палочка. C и M — это начальные буквы латинских слов *centum* — сто и *mille* — тысяча*. О происхождении остальных знаков ничего достоверного не известно. Есть предположение, что знак V изображает ладонь с отогнутым в сторону («оттопыренным») большим пальцем, а знак X составлен из двух пятерок.

Числа от 1 до 10 записываются в римской системе так: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X. При этом используются «принцип сложения» (палочка справа означает «+1») и «принцип вычитания» (палочка слева означает «–1»). Точно так же записываются «целые десятки» первой сотни, с той разницей, что вместо знака I пишется знак X, вместо V — L и вместо X — C. Например, XXX означает 30, LXX — 70, XC — 90. Таким же образом записываются «целые сотни» первой тысячи: например, CC означает 200, CD — 400, DCCC — 800. «Целые тысячи» изображаются простым повторением знака M. Остальные натуральные числа (до 5000) записываются по «принципу сложения»: сначала тысячи, справа от них сотни, затем десятки и, наконец, единицы. Например, 1992 записывается в виде MCMXCII; 99 — в виде XCIX; 2504 — в виде MMDIV. Если нужно записать большее число, пользуются способом, который ясен из следующих примеров: 740 000 записывается в виде DCCXL_m, 21 249 — в виде $\mathrm{XXI}_m\mathrm{CCXLIX}$ (*m* от *mille* — тысяча). Употреблялись и другие обозначения: горизонтальная черта сверху, обозначавшая обычно увеличение в 1000 раз, и ломаная линия $|\overline{\;\;}|$ вокруг знаков, означавшая обычно увеличение в 100 000 раз. Например, $|\overline{\mathrm{X}}|\,\overline{\mathrm{XCIV}}\mathrm{DC}$ означает $10 \cdot 100\,000 + 94 \cdot 1000 +$ $+ 600 = 1\,094\,600$.

Римская система записи чисел использовалась и в средние века в странах, где языком науки был латинский. Производить арифметические действия над числами в этой записи очень трудно, и когда европейцы познакомились с «арабской» записью (см. ниже), они перестали пользоваться римскими цифрами для обозначения количественных чисел. Но порядковые числа и сейчас в некоторых случаях записывают римскими цифрами. Они употребляются, например, для нумерации глав в книгах, строф в стихотворениях, повторяющихся мероприятий (конференций, олимпиад и т. п.), для различения монархов одного имени; на старых и новых зданиях иногда можно увидеть римские цифры, обозначающие год, когда они были построены.

---

* Такие начертания знаков для 100 и 1000 появились довольно поздно. Первоначальные начертания были совсем другими.

Замечание. Записывая числа римскими цифрами, необходимо иметь в виду, что:

1) при использовании принципа вычитания меньшая цифра никогда не повторяется;
2) при использовании принципа сложения никакой знак, кроме M, никогда не повторяется больше трех раз;
3) при использовании принципа вычитания перед знаками L и C может стоять только знак X, а перед D и M — только C.

Например, число 80 нельзя записывать в виде XXC, а число 90 — в виде LXXXX; число 49 нужно записывать в виде XLIX (а не IL), число 999 — в виде CMXCIX (а не IM и не XMIX).

В Древней Греции использовались две системы записи чисел — аттическая и ионийская. Аттическая система во многом сходна с римской: в ней были особые знаки для чисел 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000 и 10 000, а остальные числа записывались по принципу сложения. Древнейшие известные надписи с такими обозначениями чисел относятся к VI в. до н. э. В ионийской системе, возникшей не позднее V в. до н. э. в греческих колониях на побережье Малой Азии и впоследствии вытеснившей аттическую, числа первого десятка, «целые десятки» первой сотни и «целые сотни» первой тысячи изображались буквами греческого алфавита. (При этом, кроме двадцати четырех общеизвестных букв, использовались еще три, рано вышедшие из употребления.) Например, буква α обозначала число 1, β — 2, γ — 3, ι — 10, κ — 20, ψ — 700. Тысячи и десятки тысяч изображались теми же буквами с добавлением значка ʹ слева; например, ʹα означало 1000, ʹβ — 2000. Остальные числа записывались по принципу сложения. Над буквами, обозначающими числа, ставили черточки, чтобы отличить их от букв, составляющих слова. Таким образом, число 12 обозначалось $\overline{\iota\beta}$, 723 — $\overline{\psi\kappa\gamma}$, 720 — $\overline{\psi\kappa}$, 702 — $\overline{\psi\beta}$ и т. п.

По образцу греческой (ионийской) системы, использовавшейся и в Византийской империи, были построены системы записи чисел у народов, получивших христианство из Византии. Одной из них была славянская кириллическая* система, употреблявшаяся в нашей стране до эпохи петровских реформ (после которых она сохранялась только в богослужебных книгах). Числовые значения букв в этой системе указаны в таблице (рис. 1.3). Над буквами, обозначающими числа, ставится значок ~ (титло). Если перед буквой стоит дважды перечеркнутая наклонная черта, ее числовое значение умножается на 1000, если она заключена в кружок — на 10 000, если в пунктирный кружок — на 100 000. Например, К̃В̃ означает 22, Ц̃П̃Г̃ — 983.

---

* То есть основанная на кириллице — одной из двух древних славянских азбук, от которой произошел современный русский алфавит. Существовала также глаголическая система, основанная на другой славянской азбуке — глаголице.

Рис. 1.3

Замечания. 1) Обратите внимание, что вторая буква азбуки — «буки» в таблице на рис. 1.3 пропущена. Почему — попробуйте догадаться.

2) Букву *і* вплоть до реформы 1918 г., когда она исчезла из русского алфавита, называли иногда «*і* десятеричное» (а букву *и* — «*и* восьмеричное»).

Все способы записи чисел, о которых мы только что говорили, основаны на десятичной системе счисления. На ней же основан и тот способ, которым мы пользуемся теперь. Но при этом способе, в отличие от прежних, **смысл каждого знака зависит от того, какое место он занимает в записи** — или, как еще говорят, от его **позиции** в ней. Например, знак 2, стоящий на правом конце записи, обозначает число два, но тот же знак, стоящий на втором месте справа, обозначает число двадцать, стоящий на третьем месте — число двести, и т. д. Поэтому такая запись чисел называется **позиционной** (или **поместной**).

Производить арифметические действия над числами в позиционной записи проще, чем в любой непозиционной. Кроме того, она позволяет записывать сколь угодно большие числа. И для этого достаточно десяти знаков — цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, одна из которых — нуль — изображает «ничто», «пустое место». Именно изобретение нуля — знака для пустого места — позволило использовать одни и те же цифры для обозначения числа единиц, числа десятков, числа сотен и т. д.: если бы такого знака не было, мы не могли бы различать, например, числа 2, 20 и 200 и были бы вынуждены иметь для них три разных знака.

Эту простую, изящную и удобную систему изобрели древние индийские ученые. Когда это было сделано, точных сведений нет, но в VIII в. н. э. позиционная система была уже широко распространена в Индии и начала проникать в другие страны Востока. В IX веке (между 813 и 833 гг.) Мухаммад ал-Хорезми — ученый, работавший при дворе багдадских халифов и происходивший, как показывает его имя, из Хорезма — древней страны на территории нынешнего Узбекистана, — написал на арабском языке «Книгу об индийском счете». Благодаря этой книге индийский способ записи чисел стал широко известен в мусульманских странах, где общим языком науки был тогда арабский. В XII в. книга ал-Хорезми была переведена на латинский язык, и с этого времени позиционная система начала распространяться в Европе.

Замечание. В единственной сохранившейся рукописи латинского перевода «Книги об индийском счете» ее автор именуется Algorizmi. Впоследствии книга много раз перерабатывалась, и при этом имя автора искажалось дальше: сначала оно превратилось в Algoritmi, потом в Algorithmus. Слово algorithmus стало затем нарицательным именем — названием правил действий над числами в позиционной записи, а со временем и любых строгих «механических» правил вычисления. Отсюда и произошло всем известное теперь слово *алгоритм* (по-русски говорят также *алгорифм*).

Цифры, которыми мы сейчас пользуемся, принято называть **арабскими**. Это название оправдано лишь отчасти: ведь арабы сами заимствовали их у индийцев. Правда, их начертание они сильно изменили. Позднее в Европе оно продолжало меняться, хотя уже не так значительно.

Но знак нуля за все это время почти не изменился: уже древние индийцы обозначали нуль кружком. На их литературном языке, санскрите, он назывался *шунйа* — буквально «пустой» или «пустота». На арабский язык этот термин был переведен словом *сифр*, означающим то же самое. Латинские переводчики арабских математических книг это слово не перевели, а переписали латинскими буквами, и притом в искаженном виде: *ciffra*. Со временем так стали называть не только нуль, но и другие знаки десятичной позиционной системы (отсюда и наше слово *цифра*), а названием «знака пустоты» стало латинское слово *nullus* — «никакой, несуществующий», от которого произошло и наше *нуль*.

1.7. Позиционная запись чисел в различных системах счисления

Позиционная запись чисел возможна не только на основе десятичной системы. Посмотрим, например, как выглядит позиционная запись чисел, основанная на **пятеричной системе счисления**, т. е. на счете пятерками, пятерками пятерок, пятерками пятерок пятерок и т. д.

Замечание. Обратите внимание на правописание слова *пятеричный* (не *пятиричный*!). Так же пишутся слова *четверичный*, *двенадцатеричный*, *шестидесятеричный* и т. п. Дело в том, что, например, слово *пятеричный* происходит от старого слова *пятерица* — пятерка. (Точно так же от слов *двоица* и *троица* образованы прилагательные *двойчный*, *тройчный*.) Конечно, таких слов, как *двенадцатерица* или *шестидесятитерица*, никогда не существовало; слова *одиннадцатеричный*, *двенадцатеричный* и т. д. образованы по аналогии. Раньше их часто писали через *и*, но теперь ради единообразия и для них принято написание через *е*.

В этой записи используются пять цифр: 0, 1, 2, 3, 4. Крайняя цифра справа обозначает, как и в обычной записи, число единиц, но вторая справа — уже не число десятков, а число пятерок, третья справа — число «двадцатьпятерок» (пятерок пятерок), четвертая — число «стодвадцатьпятерок» (пятерок пятерок пятерок) и т. д. Таким образом, числа один, два, три, четыре записываются так же, как в десятичной системе, число пять записывается в виде 10, число шесть — в виде 11 (т. к. состоит из одной пятерки и одной единицы), числа семь, восемь, девять, десять — в виде 12, 13, 14, 20. Еще несколько примеров: число 24 записывается как 44, 25 — как 100, 75 — как 300, 125 — как 1000, 1000 — как 13 000. Чтобы перевести число n из десятичной записи в пятеричную, нужно прежде всего найти наивысшую содержащуюся в нем степень пятерки — пусть это будет 5^k — и сосчитать, сколько раз она в нем укладывается. Это даст нам первую (слева) цифру пятеричной записи. Затем удалить из числа n все содержащиеся в нем k-е степени пятерки и сосчитать, сколько раз укладывается в оставшемся числе предыдущая степень, т. е. число 5^{k-1}. Это даст нам вторую цифру. Потом удалить все $(k-1)$-е степени, сосчитать, сколько раз укладывается в оставшемся числе число 5^{k-2} — это даст третью цифру, и т. д., пока не дойдем до нулевых степеней пятерки, т. е. до единиц* (число единиц даст последнюю цифру).

Например, для числа 1769 наивысшая содержащаяся в нем степень пятерки есть $5^4 = 625$; она укладывается в этом числе 2 раза (в самом деле, $2 \cdot 625 = 1250 < 1769$, в то время как $3 \cdot 625 = 1875 > 1769$). Таким образом, первая цифра пятеричной записи есть 2. Удаляя содержащиеся в числе 1769 четвертые степени пятерки, получаем $1769 - 2 \cdot 625 = 519$. В этом числе третья степень пятерки ($5^3 = 125$) укладывается 4 раза, так что вторая цифра есть 4. Удаляя из числа 519 содержащиеся в нем третьи степени пятерки, получаем 19. В этом числе вторая степень пятерки ($5^2 = 25$) не укладывается ни разу — иначе говоря, укладывается 0 раз, — так что третья цифра есть 0, а удаление содержащихся в числе 19 вторых степеней пятерки дает снова 19. В этом числе первая степень пятерки уклады-

* Математики условились считать, что $a^0 = 1$ для любого $a \neq 0$.

вается 3 раза, так что четвертая цифра есть 3, и после удаления первых степеней пятерки остается число 4, которое будет пятой и последней цифрой. Итак, пятеричная запись числа 1769 есть 24 034.

Еще пример: для числа 9575 наивысшая содержащаяся в нем степень пятерки есть $5^5 = 3125$; она укладывается в нем 3 раза, так что первая, цифра пятеричной записи есть 3. В оставшемся числе 200 число $5^4 = 625$ не укладывается ни разу, а число $5^3 = 125$ укладывается один раз, так что вторая цифра есть 0, а третья — 1. После этого остается число 75, в котором число $5^2 = 25$ укладывается три раза, так что четвертая цифра есть 3, и после этого остается число 0, в котором числа $5^1 = 5$ и $5^0 = 1$ не укладываются ни разу, так что последние две цифры — нули. В итоге получаем 301 300.

Для «не очень больших» чисел эту процедуру легко выполнять в уме, если помнить несколько степеней пятерки (что и само по себе полезно).

Есть и другой способ перевода чисел из десятичной записи в пятеричную. Сначала данное число делят с остатком на 5. (О делении с остатком см. ниже, раздел 1.9.) Остаток дает последнюю цифру пятеричной записи. Затем частное от деления снова делят на пять; полученный остаток дает предпоследнюю цифру пятеричной записи. Второе частное снова делят на 5, и т. д. — до тех пор, пока не получится частное, меньшее пяти; оно даст первую цифру пятеричной записи.

Эту процедуру удобно записывать в таком виде:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
1769 & \underline{5} & & & \\
26 & 353 & \underline{5} & & \\
19 & & 70 & \underline{5} & \\
4 \quad & 3\;\;20 & 14 & \underline{5} & \\
 & 0 & 4 & 2 &
\end{array}$$

Записывая подряд в обратном порядке цифры, обведенные кружками, получаем 24 034.

Переводить числа из пятеричной записи в десятичную гораздо проще. Как это делать, ясно из примера: число, пятеричная запись которого имеет вид 210 343, равно $3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 25 + 0 \cdot 125 + 1 \cdot 625 + 2 \cdot 3125 = 6973$.

Числа, записанные в пятеричной системе, можно складывать, вычитать и умножать «столбиком» точно так же, как при десятичной записи. Для этого нужно знать суммы и произведения однозначных чисел. В начальной школе произведения однозначных чисел (в десятичной записи) сводят в **таблицу умножения**, которую приходится заучивать наизусть. В такую же **таблицу сложения** можно свести суммы однозначных чисел; обычно этого не делают, потому что их нетрудно запомнить и без того. Для пятеричной системы таблицы сложения и умножения выглядят так:

$$\begin{array}{llll}
1+1=2; & 1+2=3; & 1+3=4; & 1+4=10; \\
 & 2+2=4; & 2+3=10; & 2+4=11; \\
 & & 3+3=11; & 3+4=12; \\
 & & & 4+4=13.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
2\times 2=4; & 2\times 3=11; & 2\times 4=13; \\
 & 3\times 3=14; & 3\times 4=22; \\
 & & 4\times 4=31.
\end{array}$$

П р и м е р ы сложения, вычитания и умножения в пятеричной системе:

$$\begin{array}{r}
314302 \\
+\ \ 42344 \\
\hline
412201
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
403241 \\
-\ 224124 \\
\hline
124112
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2314 \\
\times\ \ 213 \\
\hline
13002 \\
2314 \\
10133 \\
\hline
1104442
\end{array}$$

Нетрудно в этой системе и делить «уголком», например:

$$\begin{array}{l|l}
422302 & 34 \\
\cline{2-2}
34 & 10430 \\
\cline{1-1}
323 & \\
301 & \\
\cline{1-1}
220 & \\
212 & \\
\cline{1-1}
32 &
\end{array}$$

Пятеричную систему счисления мы рассмотрели в качестве примера. Вместо этого можно было бы взять любое натуральное число $N > 1$ и считать группами по N предметов, затем группами по N таких групп и т. д. Такой способ счета называется **системой счисления с основанием** N. В любой такой системе возможна позиционная запись чисел, и все, что было сказано сейчас о переводе чисел из десятичной записи в пятеричную и обратно и о действиях над числами в пятеричной записи, можно повторить, заменив число 5 любым натуральным $N > 1$.

Разумеется, при $N > 10$ нужны дополнительные цифры для изображения чисел 10, 11, ..., $N - 1$. Если мы, например, условимся изображать число 10 греческой буквой α и число 11 буквой β, то мы сможем записывать числа в двенадцатеричной системе. В такой записи число $34 = 2 \times 12 + 10$ изображается как 2α, число $122 = 10 \times 12 + 2$ — как $\alpha 2$, число $143 = 11 \times 12 + 11$ — как $\beta\beta$.

Чем меньше основание системы счисления, тем проще правила выполнения арифметических действий, но сами действия, а также записи чисел, становятся длиннее. Самые длинные записи получаются при двоичной системе, в которой используются только две цифры — 0 и 1. Например, число 13 записывается как 1101, число 19 — как 10011. Зато «таблица умножения» в этой системе состоит из одного равенства $1 \times 1 = 1$.

В наше время двоичная запись нашла применение в вычислительной технике. Если бы мы захотели использовать в быстродействующей вычислительной машине десятичную систему, нам понадобились бы для «записи» цифр физические объекты, способные принимать десять четко различимых состояний и быстро менять любое из них на любое другое. Но таких объектов пока что найти не удалось, между тем как существуют объекты, способные принимать два четко различимых состояния и очень быстро их изменять; они и используются в современных вычислительных машинах.

Задания. 1) Запишите таблицы сложения и умножения для троичной и четверичной систем. Поупражняйтесь в арифметических действиях в этих системах и в переводе из этих систем в десятичную и обратно.

2) (а) Найдите число цифр в двоичной записи числа, записываемого в десятичной системе как 1000, не находя саму эту запись; (б) то же задание для троичной записи.

3) (а) Найдите простой способ перевода из двоичной системы в четверичную и обратно; (б) то же задание для двоичной и восьмеричной систем.

1.8. Деление с остатком

Пусть у нас есть a яблок, и мы пытаемся разложить их поровну по b мешкам. (О мешках с яблоками мы говорим только ради наглядности; вместо этого можно было бы говорить о совокупностях произвольных предметов.) Отсчитав b яблок, кладем по одному в каждый мешок. Затем отсчитываем еще b штук и снова кладем в каждый мешок по одному, и так до тех пор, пока не обнаружим, что у нас осталось меньше b яблок. Обозначим число оставшихся яблок буквой r. Может оказаться, что $r = 0$, т. е. нам удалось разложить **все** a яблок поровну по b мешкам. Тогда согласно определению произведения (см. раздел 2.2) имеем равенство $a = kb$, где k — число яблок в каждом мешке (это равенство можно записать также в виде $a = bk$). Иначе говоря, в этом случае a можно разделить на b, и частное от деления равно k. В общем случае, по-прежнему обозначая буквой k число яблок в каждом мешке, получаем равенство

$$a = bk + r.$$

Действие, с помощью которого по данным a и b находят числа k и r, называется делением a на b с остатком. Мы можем сказать, таким образом, что **разделить** число a на натуральное число b **с остатком** значит найти такие числа k и r, что $a = bk + r$ и при этом $0 \leqslant r < b$. (Обратите внимание, что число b предполагается не равным нулю! Чтобы наша задача имела смысл, у нас должен быть хотя бы один мешок.) Число k называется **неполным частным** от деления a на b, а число r — **остатком** от деления a на b. (Иногда слово «неполное» опускают.) Числа a и b, как и при «настоящем» делении, называются **делимым** и **делителем**.

Деление с остатком, в отличие от «настоящего» деления, всегда выполнимо: любое целое неотрицательное число a можно разделить с остатком на любое натуральное число b. В самом деле: будем умножать b последовательно на числа 0, 1, 2, ... Тогда первое из полученных произведений будет равно нулю и поэтому меньше или равно a, но рано или поздно мы дойдем до такого числа k, что $bk \leqslant a$ и в то же время $b \cdot (k + 1) > a$. Поскольку $bk \leqslant a$, существует разность $a - bk$, а из того, что $a < b \cdot (k + 1) = bk + b$, следует, что разность $a - bk$ меньше b. Обозначив эту разность буквой r, получим: $a = bk + r$, $0 \leqslant r < b$.

Если неполное частное от деления a на b равно нулю, это значит, что $a = b \cdot 0 + r$, т. е. остаток от деления на b равен самому a. Так бывает, очевидно, тогда и только тогда, когда $a < b$.

Если остаток от деления a на b равен нулю, неполное частное становится настоящим («полным») частным.

Чтобы разделить a на b с остатком, можно умножать b последовательно на числа 0, 1, 2, ... и сравнивать произведения с a, пока не дойдем до такого k, что $bk \leqslant a$, но $b(k + 1) > a$. Это k и будет неполным частным, а разность $a - bk$ — остатком. На самом деле так не поступают, но нередко все-таки находят нужное k подбором; если a и b не очень велики, лучше всего пользоваться именно этим способом. Например, если нужно разделить (с остатком) 171 на 12, прикидываем, сколько раз число 12 укладывается в числе 171. «С первого взгляда» может показаться правдоподобным, например, что в числе 171 число 12 укладывается 13 раз. Однако, умножая 12 на 13, получаем 156; это меньше, чем 171, но $171 - 156 = 15 > 12$, так что мы «взяли слишком мало». Увеличив число 13 на единицу, получаем $12 \cdot 14 = 168 < 171$; $171 - 168 = 3 < 12$. Таким образом, неполное частное от деления 171 на 12 равно 14, остаток от деления 171 на 12 равен 3.

Если неполное частное — однозначное число, его **всегда** находят подбором. Например, если нужно разделить 3718 на 745, легко сообразить, что делимое укладывается в делителе либо 4 раза, либо 5 раз. Испытывая число 4, получаем: $745 \cdot 4 = 2980$, $3718 - 2980 = 738$. Таким образом, неполное частное равно 4, остаток равен 738.

В общем случае используется хорошо известный способ деления «уголком», например:

```
-83425 |26
 78    |3208
 --
 -54
  52
  ---
  -225
   208
   ---
    17
```

Попробуем на этом примере понять, на чем основан способ деления «уголком». Возвращаясь к наглядному представлению, мы можем сказать, что нам нужно разложить 83425 яблок поровну по 26 мешкам. Но число 83425 записано в десятичной системе. Это значит, что все яблоки, кроме пяти, «упакованы» в «коробки» по 10 штук в каждой; все эти «коробки», кроме двух, упакованы по 10 в бóльшие коробки, в каждой из которых, таким образом, содержится 100 яблок; эти «сотенные» коробки, кроме четырех, упакованы в «тысячные», а те, кроме трех — в «десятитысячные», которых всего восемь.

Постараемся разложить все яблоки по мешкам так, чтобы распаковать как можно меньше коробок. «Десятитысячные» коробки придется распаковать все, т. к. их меньше, чем мешков. К извлеченным из них восьмидесяти «тысячным» коробкам добавляем еще три «лежащие отдельно», и полученные 83 «тысячные» коробки раскладываем по 26 мешкам — иначе говоря, делим «подбором» 83 на 26. В каждом мешке оказывается три «тысячных» коробки, и пять коробок остается. Эти коробки мы распаковываем, добавляем четыре «сотенные» коробки, «лежащие отдельно», и полученные 54 «сотенные» коробки раскладываем по мешкам. Теперь в каждом мешке 3 «тысячных» и 2 «сотенных» коробки, и еще 2 «сотенных» коробки остались. Распаковывая их и добавляя 2 коробки по десятку, «лежащие отдельно», получаем 22 коробки; таким образом, коробок по десятку меньше, чем мешков, так что их придется распаковать. (При этом в частном нужно записать 0, чтобы показать, что в мешках нет отдельно лежащих коробок по десятку.) Добавляя 5 яблок, «лежащих отдельно», получаем 225 яблок и раскладываем их по мешкам. После этого в каждом мешке будет 3 «тысячных» коробки, 2 «сотенных» и еще 8 яблок, и 17 яблок останется. Это и есть тот способ деления, которому обучают в начальной школе.

1.9. Делимость и ее свойства

В этом и следующих разделах — до конца главы — слово «число» всюду означает целое неотрицательное число.

Говорят, что число a **делится** на число b, если существует такое число k, что $bk = a$. В этом случае говорят также, что число b является **де-**

лителем числа a, или что число a **кратно** числу b. Символически пишут так: $a \vdots b$.

Установим несколько важных свойств делимости.

1-е свойство. Если числа a и b делятся на число c, то их сумма и разность также делятся на c.

Доказательство. Пусть числа a и b делятся на число c. Это значит, что существуют такие числа k и l, что $ck = a$ и $cl = b$. Но тогда: $a + b = ck + cl = c(k + l)$; $a - b = ck - cl = c(k - l)$. Таким образом, существуют числа, которые, будучи умножены на c, дают соответственно $a + b$ и $a - b$. А это значит, что числа $a + b$ и $a - b$ делятся на c.

2-е свойство. Если одно из чисел a и b делится на число c, а другое не делится, то их сумма и разность не делятся на c.

Это свойство мы докажем от противного. Пусть a не делится на c, а b делится. Допустим, что $a + b \vdots c$. Тогда по 1-му свойству число $a = (a + b) - b$ тоже должно делиться на c, а это противоречит условию; следовательно, наше допущение неверно, т. е. $a + b$ не делится на c. Допустим, далее, что $a - b \vdots c$. Тогда опять-таки число $a = (a - b) + b$ должно делиться на c; значит, допущение неверно, т. е. $a - b$ не делится на c.

Пусть теперь a делится на c, а b не делится. Тогда точно так же, как в первом случае, можно доказать, что $a + b$ не делится на c. Если допустить, что $a - b \vdots c$, отсюда по 1-му свойству будет следовать, что b делится на c (потому что $a = (a - b) + b$, и, значит, по определению разности $a - (a - b) = b$), а это противоречит условию. Значит, допущение неверно, т. е. разность $a - b$ не делится на c.

3-е свойство. Если число a делится на число c и b — любое число, то произведение ab также делится на c.

Доказательство. Пусть $a \vdots c$, т. е. существует такое число k, что $ck = a$. Тогда $ab = (c \cdot k) \cdot b = c \cdot (k \cdot b)$. Таким образом, существует число, которое, будучи умножено на c, дает ab; а это значит, что ab делится на c.

4-е свойство. Если a делится на c и b делится на d, то ab делится на cd.

Доказательство. Если $a \vdots c$ и $b \vdots d$, т. е. существуют такие числа k и l, что $a = c \cdot k$, $b = d \cdot l$, то $ab = (c \cdot k) \cdot (d \cdot l) = cd \cdot kl$, так что существует число, которое, будучи умножено на cd, дает ab; это и значит, что $ab \vdots cd$.

5-е свойство. Любое число делится на единицу и на себя.

Это сразу следует из равенства $a \cdot 1 = a$.

6-е свойство. Единица делится только на себя.

Доказательство. Пусть b — делитель единицы, т. е. существует такое число k, что $bk = 1$. Ясно, что ни b, ни k не равны нулю. Допустим, что $b \neq 1$. Тогда $b > 1$ и тем более $bk = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{k \text{ раз}} > 1$, что противоречит условию.

7-е свойство. Никакое число, кроме нуля, не делится на нуль.

Доказательство. Пусть $a \vdots 0$, т. е. существует такое число k, что $0 \cdot k = a$. Тогда, очевидно, $a = 0$.

8-е свойство. Нуль делится на любое число.

В самом деле, для любого числа b существует такое число k, что $bk = 0$: этим числом является нуль.

Введем теперь следующее важное понятие: числа a и b называются **взаимно простыми**, если у них нет общих делителей, кроме единицы.

Например, числа 15 и 28 взаимно просты. То же верно для чисел: 16 и 25; 120 и 77; 20 и 13 (другие примеры придумайте сами).

9-е свойство. Если произведение ab делится на c и при этом b и c взаимно просты, то a делится на c.

Доказательство. Разделим с остатком b на c. Получим: $b = cq_1 + r_1$, где $r_1 < c$. Затем разделим с остатком c на r_1; получим $c = r_1q_2 + r_2$, где $r_2 < r_1$. Далее разделим r_1 на r_2: $r_1 = r_2q_3 + r_3$, где $r_3 < r_2$. Затем будем делить r_2 на r_3, r_3 на r_4 и т. д. до тех пор, пока не получим остаток, равный нулю. (А это когда-нибудь произойдет, т. к. каждый следующий остаток меньше предыдущего.) Напишем полученные равенства:

$$b = cq_1 + r_1$$
$$c = r_1q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{k-3} = r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1}$$
$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$$
$$r_{k-1} = r_kq_{k+1}$$

Из последнего равенства видно, что r_{k-1} делится на r_k. Поэтому в первой части предпоследнего равенства оба слагаемых делятся на r_k; следовательно, на r_k делится и сумма, которая равна r_{k-2}. Значит, и в предыдущем равенстве оба слагаемых правой части делятся на r_k, а потому r_{k-3} также делится на r_k. Поднимаясь таким образом по столбцу равенств, мы установим в конце концов, что числа c и b также делятся на r_k. Но по условию эти числа не имеют общих делителей, кроме единицы. Следовательно, $r_k = 1$.

Умножим теперь наши равенства (кроме последнего, которое нам больше не нужно) почленно на a, учитывая, что $r_k = 1$. Получим:

$$ab = acq_1 + ar_1$$
$$ac = ar_1q_2 + ar_2$$
$$ar_1 = ar_2q_3 + ar_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ar_{k-3} = ar_{k-2}q_{k-1} + ar_{k-1}$$
$$ar_{k-2} = ar_{k-1}q_k + a$$

По этому столбцу мы будем теперь спускаться вниз. В первом равенстве левая часть по условию делится на c, и первое слагаемое правой части также делится на c. Поэтому должно делиться на c и второе слагаемое, т. е. число ar_1: ведь если бы ar_1 не делилось на c, то по второму свойству делимости ab тоже не делилось бы на c. Значит, делится на c и число ar_1q_2 — первое слагаемое правой части второго равенства. А поскольку на c делится и левая часть этого равенства, должно делиться на c и второе слагаемое правой части, т. е. число ar_2. Далее, поскольку в третьем равенстве левая часть и первое слагаемое правой делятся на c, должно делиться на c и второе слагаемое правой части, равное ar_3. Продолжая этот процесс, мы в конце концов убедимся, что на c делится второе слагаемое правой части последнего равенства, т. е. число a, что и требовалось доказать.

10-е свойство. Если числа b и c взаимно просты и число a делится на каждое из них, то оно делится на их произведение.

Доказательство. По условию $a \vdots b$, т. е. существует такое число k, что $a = bk$. А поскольку b и c взаимно просты и $bk \vdots c$, то в силу 9-го свойства делимости $k \vdots c$, т. е. существует такое число l, что $k = cl$. Отсюда $a = b \cdot (cl) = (bc) \cdot l$, значит, $a \vdots bc$.

Следствие. Если числа b и c взаимно просты, то число a делится на произведение $b \cdot c$ в том и только в том случае, когда оно делится на b и на c.

В самом деле, если число делится на bc, то оно, очевидно, делится и на b, и на c. Это верно для любых b и c, а для взаимно простых, как мы только что видели, верно и обратное.

Замечание. Если b и c не взаимно просты, то число, делящееся на b и на c, может, конечно, делиться на bc, но может и не делиться. Например, число 60 делится на 4 и на 10, но не делится на 40.

Задачи. 1) Доказать, что любые два соседних натуральных числа взаимно просты.

2) Доказать, что любые два соседних нечетных числа взаимно просты.

3) Определить, какие общие делители могут быть у чисел n и $n + 10$.

4) Доказать, что нечетное число и половина следующего за ним четного взаимно просты.

5) Доказать, что: (а) если числа $m + n$ и $m - n$ делятся на c, то числа $2m$ и $2n$ также делятся на c; (б) если при этом c нечетно, то m и n делятся на c.

6) (а) Доказать, что если к сумме квадратов трех последовательных натуральных чисел прибавить единицу, то полученное число будет делиться на 3; (б) найти, в каком случае это число делится на 6; (в) доказать, что это число не делится на 12.

7) Доказать, что если a^2 и $a + b$ делятся на c, то b^2 также делится на c.

8) Доказать, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

9) Доказать, что сумма четырех последовательных натуральных чисел не делится на 4.

10) Найти все натуральные n, такие, что $n^2 + 1$ делится на $n + 1$.

11) Найти все натуральные $n > 3$, такие, что $n^2 - 3$ делится на $n - 3$.

(Последние две задачи — из книги польского математика В. Серпинского «Сто задач по теории чисел».)

1.10. Признаки делимости

Десятичная позиционная запись чисел позволяет указать признаки, по которым можно узнать, делится ли число на 2, на 3 и еще на некоторые числа. Сейчас мы выведем несколько таких признаков.

Но сначала постараемся яснее понять, как эта запись устроена.

Рассмотрим какое-нибудь конкретное число, например 37246. Его можно представить в таком виде:

$$37246 = 3 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6$$

или, что то же самое:

$$37246 = 3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6.$$

Обратим внимание на то, что показатель наивысшей степени десятки на единицу меньше числа цифр в записи.

Пусть теперь N — произвольное n-значное число, т. е. такое, что его запись состоит из n цифр, и его последняя цифра есть c_0, предпоследняя — c_1 и т. д. (первая цифра будет тогда обозначаться c_{n-1}). Тогда N представляется в таком виде:

$$N = c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0\,.$$

Т е о р е м а 1. Пусть число b является делителем числа 10^k и a — произвольное число, большее или равное 10^k. Тогда a делится на b в том и только в том случае, когда число, выражаемое последними k цифрами записи числа a, делится на b.

Замечание. Если первая из последних k цифр записи есть 0, то «число, выражаемое последними k цифрами записи» — это число, которое получится, если в последовательности этих цифр отбросить все начальные нули. Если все последние k цифр записи — нули, это число есть 0. Например, число, выражаемое последними пятью цифрами числа 2800130, есть 130; число, выражаемое последними тремя цифрами числа 53000, есть 0.

Доказательство теоремы 1. Представим число a в следующем виде:

$$a = c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0,$$

где $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_2, c_1, c_0$ — цифры, составляющие его десятичную запись. Поскольку $a \geqslant 10^k$, имеем $n > k$ (потому что 10^k — уже $(k + 1)$-значное число). Отделяя в правой части равенства первые $n - k$ и последние k членов, перепишем его так:

$$a = (c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + c_{k+1} \cdot 10^{k+1} + c_k \cdot 10^k) +$$
$$+ (c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + c_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \ldots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0).$$

Первое из двух «больших» слагаемых указанной суммы равно $10^k \cdot (c_{n-1} \cdot 10^{n-1-k} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2-k} + \ldots + c_{k+1} \cdot 10 + c_k)$ и, следовательно, делится на 10^k; поэтому по 3-му свойству делимости (см. раздел 1.9) оно делится также и на b. Между тем второе «большое» слагаемое есть как раз то число, которое выражается последними k цифрами записи числа a. Если это число делится на b, то по 1-му свойству делимости делится на b и сумма, равная a; если же оно на b не делится, то по 2-му свойству делимости сумма также не делится на b. Таким образом, a делится на b тогда и только тогда, когда делится на b число, выражаемое последними k цифрами записи a. Теорема доказана.

Из теоремы 1 получается сразу много признаков делимости. При $k = 1$ оно дает признаки делимости на 2, 5, 10, т. е. на делители числа $10^1 = 10$. Например: *на* 2 *делятся все те и только те числа, у которых число, выражаемое последней цифрой, делится на* 2. Обычно этот признак формулируется иначе, пользуясь тем, что среди однозначных чисел на 2 делятся числа 0, 2, 4, 6, 8, и только они: *на* 2 *делятся все те и только те числа, которые оканчиваются одной из цифр* 0, 2, 4, 6, 8. Признаки делимости на 5 и на 10 формулируются аналогично. (Сделайте это самостоятельно!)

При $k = 2$ получаются признаки делимости на 4, 20, 25, 50, 100 — делители числа $100 = 10^2$. Например, на 4 делятся все те и только те числа, у которых число, выражаемое двумя последними цифрами, делится на 4. Остальные формулируются точно так же.

Задание. Сформулируйте признаки делимости на 8, 40, 125, 200, 250, 500, 1000.

Еще два признака получаются из следующей теоремы.

Теорема 2. Если число b является делителем числа 9 и a — произвольное натуральное число, то число a делится на b в том и только в том случае, когда сумма его цифр делится на b.

Доказательство. Представим число a в виде суммы

$$a = c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10 + c_0,$$

где $c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ — цифры его десятичной записи. Пусть $c_k \cdot 10^k$ — любое из первых $n-1$ слагаемых этой суммы. Его можно представить в виде

$$c_k \cdot 10^k = c_k (10^k - 1) + c_k .$$

Здесь первое слагаемое делится на 9 (потому что $10^k - 1 = 1\underbrace{00...0}_{k \text{ раз}} - 1 = \underbrace{99...9}_{k \text{ раз}}$) и, следовательно, делится на b.

Обозначая это слагаемое для произвольного k через M_k, можно представить число a в виде

$$a = (M_{n-1} + c_{n-1}) + \dots + (M_1 + c_1) + c_0 = (M_{n-1} + \dots + M_1) + (c_{n-1} + \dots + c_1 + c_0) .$$

(Например, при $a = 847$ имеем: $847 = (8 \cdot 99 + 8) + (4 \cdot 9 + 4) + 7 = (8 \cdot 99 + 4 \cdot 9) + (8 + 4 + 7)$.)

В правой части этого равенства первое «большое» слагаемое делится на b, а второе как раз и есть сумма цифр числа a. Если она делится на b, то по 1-му свойству делимости число a также делится на b, а если не делится, то по 2-му свойству делимости a также не делится на b.

Теорема доказана.

Из теоремы 2 немедленно получаются признаки делимости на 3 и на 9: на 3 (на 9) делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 3 (соответственно на 9).

Еще несколько признаков можно получить, используя следствие из 10-го свойства делимости. Например, на 6 делятся те и только те числа, которые делятся на 2 и на 3. Аналогично формулируются признаки делимости на 12, на 15, на 30 (какие еще?).

Нетрудно понять, что теоремы 1 и 2 справедливы не только для десятичной, но и для любой другой позиционной записи; нужно только заменить в теореме 1 число 10^k числом N^k и в теореме 2 число 9 — числом $N-1$, где N — основание системы счисления.

З а д а ч а: Вывести признаки делимости:

на 2, на 4, на 10, на 100 для пятеричной записи;

на 2, на 3, на 5, на 10, на 13, на 20, на 30, на 100 для шестеричной записи.

Примечание. Все числа записаны здесь в соответствующих системах счисления. Например, число, записанное в задании как 13, — это число, записываемое в десятичной системе как 9.

1.11. Метод математической индукции

Когда нужно доказать, что **все** натуральные числа обладают некоторым свойством, часто пользуются так называемым методом математической индукции, основанным на следующем простом соображении. Пусть нам удалось доказать, во-первых, что этим свойством обладает число 1, и, во-вторых, что, **каково бы ни было** натуральное число n, **если** это число обладает данным свойством, **то** им обладает и число $n + 1$. Из этого немедленно будет следовать, что и число $2 = 1 + 1$ обладает данным свойством, а отсюда — что им обладает и число $3 = 2 + 1$; далее таким же образом увидим, что этим свойством обладает число $4 = 3 + 1$, и т. д. Иначе говоря, данным свойством обладают все натуральные числа: ведь все они получаются из числа 1 последовательным прибавлением единицы.

Чтобы понять, как пользоваться этим соображением для доказательства свойств натуральных чисел, рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Квадрат, сторона которого равна 2^n см, разбит на квадраты («клетки») со стороной 1 см. Доказать, что если из него вырезать одну клетку, то полученную фигуру можно составить из «уголков» по три клетки в каждом.

На первый взгляд выбор задачи может показаться странным: она не арифметическая, а геометрическая, речь в ней идет не о свойстве чисел, а о свойстве квадратов. Но утверждение, которое требуется доказать, можно сформулировать и так: «Каждое натуральное число n обладает тем свойством, что если из квадрата со стороной 2^n, разбитого на клетки со стороной 1, вырезать одну клетку, то полученную фигуру можно составить из трехклеточных уголков». («Сантиметры» мы здесь и далее опускаем, т. к. выбор единицы длины не имеет значения.)

Докажем это утверждение. Для этого прежде всего необходимо убедиться, что нужным свойством обладает число 1, т. е. что если вырезать одну клетку из квадрата со стороной $2^1 = 2$, то полученную фигуру можно составить из трехклеточных уголков. Но это, очевидно, верно — ведь такая фигура сама есть трехклеточный уголок (см. рис. 1.4, *а*). Допустим теперь, что для какого-то (все равно, для какого) натурального числа n мы уже доказали, что оно обладает нужным свойством, т. е. что фигуру, полученную из квадрата со стороной 2^n вырезанием одной (любой) клетки, можно составить из трехклеточных уголков, и докажем, что в таком случае число 2^{n+1} также обладает этим свойством — иначе говоря, что из трехклеточных уголков можно составить и фигуру, полученную вырезанием

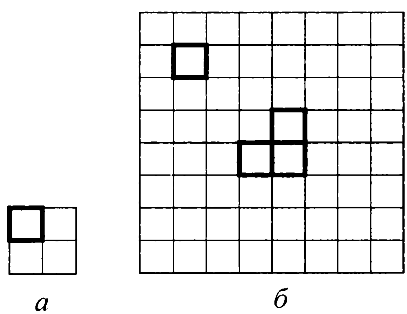


Рис. 1.4

одной клетки из квадрата со стороной 2^{n+1}. Рассмотрим такой квадрат и разобьем его на четыре квадрата со стороной 2^n, а затем вырежем из него одну клетку. Оставшуюся часть того из четырех малых квадратов, в который входила вырезанная клетка, **по нашему допущению** можно составить из трехклеточных уголков. Если мы теперь вырежем уголок из середины большого квадрата так, как показано на рис. 1.4, *б* (где $n = 2$), то каждый из трех остальных малых квадратов потеряет одну клетку, и оставшуюся его часть также можно будет, по тому же допущению, составить из трехклеточных уголков. Значит, из таких уголков можно составить и большой квадрат с вырезанной клеткой.

Итак, мы доказали, что: (а) число 1 обладает требуемым свойством; (б) если этим свойством обладает число n, то им обладает и число $n + 1$. **Тем самым** доказано, что данным свойством обладают **все** натуральные числа: как мы уже говорили, из того, что им обладает число 1, следует теперь, что им обладает и число 2, а отсюда — что им обладает и число 3, и т. д.

По такой же схеме производится и всякое доказательство методом математической индукции. Оно состоит из двух частей: (I) доказательства того факта, что требуемым свойством обладает число 1 и (II) доказательства того факта, что если этим свойством обладает число n, то им обладает и число $n + 1$. Первая часть называется **базисом*** **индукции**, вторая — **индукционным шагом**. Допущение, из которого мы исходим при выполнении индукционного шага — что число n обладает данным свойством, — называется **предположением индукции**.

Замечание. Метод математической индукции не имеет ничего общего (кроме похожего названия) с так называемыми индуктивными умозаключениями, при которых из справедливости некоторого утверждения для ряда частных случаев делается вывод, что оно справедливо и всегда («в общем случае», как часто говорят). Индуктивные умозаключения используются лишь в тех науках, в которых абсолютно достоверные доказательства невозможны. (Далее в этом разделе мы увидим, к чему могут привести попытки пользоваться ими в математике.)

Решим теперь с помощью метода математической индукции еще несколько задач.

Задача 2. Доказать, что число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, где n — произвольное натуральное число, делится на 3^n.

Иначе говоря, требуется доказать, что каждое натуральное число n обладает следующим свойством: число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, делится на 3^n.

Доказательство

Базис. Число, десятичная запись которого состоит из $3^1 = 3$ единиц, есть 111, а оно, очевидно, делится на 3.

---

* От греческого βάσις — основание.

Индукционный шаг. Пусть n — произвольное натуральное число. Обозначим число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, через b, а число, десятичная запись которого состоит из 3^{n+1} единиц, через c. Допустим, что b делится на 3^n, и докажем, что при этом допущении c делится на 3^{n+1}. Но доказать это просто: разделив c на b «уголком», легко убедиться, что $c = b \cdot 100...0100...01$, где всего три единицы и между соседними единицами $3^n - 1$ нулей (это можно также проверить умножением). Но в правой части этого равенства первый сомножитель по предположению индукции делится на 3^n, а второй, очевидно, делится на 3 (вспомним признак делимости). Отсюда по 4-му свойству делимости (раздел 1.9) следует, что произведение делится на $3^n \cdot 3 = 3^{n+1}$. Итак, мы провели базис и индукционный шаг, а они в совокупности составляют доказательство интересующего нас свойства.

Задача 3 (игра «Ханойская башня»). У Вас есть детская пирамидка из n колец (диаметры которых убывают снизу вверх) и два пустых стержня той же высоты. Ход игры состоит в перекладывании верхнего кольца с одного стержня на другой, причем запрещается класть большее кольцо на меньшее. Доказать, что за $2^n - 1$ ходов можно переложить все кольца на один из пустых стержней.

Доказательство

Базис очевиден: в случае одного кольца достаточно одного хода, но $1 = 2^1 - 1$.

Индукционный шаг. Пусть для некоторого натурального числа n (которое может быть каким угодно) уже доказано, что n колец можно переложить за $2^n - 1$ ходов на один из пустых стержней. Нам нужно доказать, что при этом условии таким же свойством обладает и число $n + 1$, т. е. $n + 1$ кольцо можно переложить на один из пустых стержней за $2^{n+1} - 1$ ходов. Это можно сделать так. Если на первом стержне $n + 1$ кольцо, мы по предположению индукции можем, не трогая самого нижнего, за $2^n - 1$ ходов переложить остальные n колец на второй стержень. Затем перекладываем нижнее кольцо (за один ход) на третий стержень и, наконец, еще за $2^n - 1$ ходов перекладываем со второго стержня на третий остальные кольца. Всего потребуется $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = (2^{n+1} - 1)$ ходов. Индукционный шаг окончен, и вместе с ним окончено доказательство.

Иногда бывает нужно доказать, что некоторым свойством обладают не все без исключения натуральные числа, а все, бóльшие или равные некоторому заданному числу N (где $N > 1$). В таких случаях тоже можно пользоваться методом математической индукции, но базисом при этом служит доказательство того, что интересующим нас свойством обладает число N. Примером может служить решение следующей задачи.

Задача 4. В течение нескольких десятилетий в СССР были в обращении банковские билеты достоинством в 3 и 5 рублей. Доказать, что такими билетами можно было выплатить любое целое число рублей, не меньшее восьми.

Иначе говоря, нужно доказать, что каждое натуральное число $n \geqslant 8$ обладает тем свойством, что n рублей можно выплатить трехрублевыми и пятирублевыми банковскими билетами.

Доказательство

Базис. 8 рублей можно выплатить одним пятирублевым и одним трехрублевым билетом.

Индукционный шаг. Пусть для некоторого натурального числа $n \geqslant 8$ уже доказано, что трехрублевыми и пятирублевыми билетами можно выплатить n рублей: докажем, что при этом условии так можно выплатить и $n + 1$ рубль. Доказательство таково: если среди билетов, составивших в сумме n рублей, есть хотя бы один пятирублевый, его можно заменить двумя трехрублевыми, а если n рублей, где $n \geqslant 8$, выплачены одними трехрублевыми билетами, то этих билетов не меньше трех, и мы можем заменить три трехрублевых билета двумя пятирублевыми. Итак, мы доказали, что каждое натуральное число $n \geqslant 8$ обладает требуемым свойством.

З а д а ч а 5. Доказать, что если плоскость разбита на части («области») несколькими прямыми, то эти области можно раскрасить двумя красками так, чтобы любые две соседние области (т. е. имеющие общий *участок границы) были окрашены в разные цвета.*

В условии этой задачи вообще нет речи о числах, но понятно, как ее переформулировать, чтобы можно было решить ее методом математической индукции: «Доказать, что каждое натуральное число n обладает тем свойством, что если плоскость разбита на области n прямыми, то эти области...» и т. д. Обычно подобную переформулировку не производят и вместо этого говорят, например, так: «Докажем данное утверждение индукцией по числу прямых».

Доказательство

Базис очевиден, поскольку в случае одной прямой мы имеем всего две области.

Индукционный шаг. Пусть для некоторого натурального числа n уже доказано, что области, на которые n прямых разбивают плоскость, можно раскрасить требуемым образом. Докажем, что при таком условии это верно и для числа $n + 1$. Пусть на плоскости проведена $n + 1$ прямая. Если одну из них стереть, то возникшие при этом области по предположению индукции можно раскрасить так, как требуется. Остается восстановить стертую прямую и по одну сторону от нее каждую область перекрасить в другой цвет. Доказательство окончено.

Замечание. Методом математической индукции пользуются и тогда, когда нужно доказать, что некоторым свойством обладают все целые неотрицательные числа, т. е. все натуральные числа и нуль. (В этом случае иногда говорят, что «индукция начинается с нуля».) Базисом при этом служит доказательство того, что данным свойством обладает число 0. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 6. Доказать, что для любого целого неотрицательного n число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

Доказательство

Базис очевиден, поскольку при $n = 0$ наше число есть $11^{0+2} + 12^{2\cdot 0+1} = 121 + 12 = 133$.

Индукционный шаг. Допустим, что для некоторого целого числа n уже доказано, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133. Докажем, что при этом условии требуемым свойством обладает также и число $n + 1$, т. е. что число $11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1}$ делится на 133. Вот как это можно сделать: имеем, очевидно, $11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11^{n+2}\cdot 11 + 12^{2n+1}\cdot 144 = (11^{n+2} + 12^{2n+1})\cdot 11 + 12^{2n+1}\cdot 133$. Второе слагаемое здесь делится на 133, но по предположению индукции на 133 делится и первое слагаемое.

Замечание. В задаче 5 мы также могли бы начать индукцию с нуля. Базис при этом не менее очевиден, поскольку, если число прямых равно нулю, то мы имеем одну область; индукционный шаг остается без изменений. Еще одним примером может служить задача 2, где базис при начале индукции с нуля сводится (ввиду равенства $3^0 = 1$) к очевидному замечанию, что число делится на 1.

Задача 7. Сколькими способами можно расположить в ряд n попарно различных* предметов? (Такие способы называют обычно **перестановками из *n* элементов**.)

Условие этой задачи, в отличие от предыдущих, не содержит готовой формулировки утверждения, которое нужно доказать. В ней требуется найти формулу, выражающую число всевозможных перестановок из n элементов. Попробуем сначала догадаться, какой вид может иметь такая формула. (Это самый типичный путь решения математической задачи: сначала догадка, потом строгое доказательство.) Поскольку реальный вид предметов, очевидно, не имеет значения, рассмотрим перестановки из букв русского алфавита. Из двух букв *а*, *б* можно составить две перестановки: *аб*, *ба*, из трех букв *а*, *б*, *в* — шесть перестановок: *абв*, *авб*, *бав*, *бва*, *ваб*, *вба*. Читатель без труда подсчитает, что из четырех букв получается 24 перестановки. Чтобы ни одной перестановки не пропустить, рекомендуется располагать их в том порядке, в котором располагаются слова в словарях. Стоит заметить также, что из одной буквы получается одна перестановка. Обозначая число перестановок из n элементов через P_n, видим, что $P_1 = 1$, $P_2 = P_1\cdot 2 = 1\cdot 2$, $P_3 = P_2\cdot 3 = 1\cdot 2\cdot 3$, $P_4 = P_3\cdot 4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$. Возникает гипотеза, что и в общем случае число перестановок из n элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е. что $P_n = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$. Это и в самом деле так, и доказать это можно методом математической индукции.

---

* То есть таких, любые два из которых различны.

Доказательство

Базис мы уже провели, заметив, что $P_1 = 1$.

Индукционный шаг. Пусть для некоторого натурального числа n уже доказано, что $P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. Докажем, что при этом условии тем же свойством обладает и число $n + 1$, т. е. что $P_{n+1} = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \cdot (n + 1)$. Пусть у нас имеется алфавит из $n + 1$ букв. Выбросим из него одну букву и составим всевозможные перестановки из оставшихся n букв; по предположению индукции их будет $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. Но для каждой из этих перестановок существует $n + 1$ способов вставить в нее выброшенную букву: либо перед первой ее буквой, либо между первой и второй и т. д. и, наконец, после последней. Из каждой «короткой» перестановки получается, таким образом, $n + 1$ «длинных», и притом так можно получить, очевидно, все «длинные» перестановки. Следовательно, «длинных» перестановок имеется в $n + 1$ раз больше, чем «коротких», т. е. $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \cdot (n + 1)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Произведение первых n натуральных чисел часто называют **факториалом** числа n и обозначают $n!$ (читается «n факториал»). Мы доказали, таким образом, что для любого натурального n справедливо равенство $P_n = n!$.

Решение задачи 7 мы начали с рассмотрения частных случаев, которые помогли нам сформулировать гипотезу. Если бы мы после этого стали рассуждать так: «Мы убедились, что равенство $P_n = n!$ справедливо для $n = 1, 2, 3, 4$; значит, оно справедливо для любого натурального n», или проверили бы его, допустим, для всех $n \leqslant 30$ и потом сделали аналогичный вывод, это было бы индуктивное умозаключение (см. выше, с. 36). Но такое рассуждение может привести к ошибке, как видно из следующих примеров:

Пример 1. Как заметил Л. Эйлер (Leonard Euler, 1707–1783), подставляя в выражение $n^2 + n + 41$ последовательно числа $n = 1, 2, ..., 39$, мы будем каждый раз получать простые числа*, но при $n = 40$ получается составное число 41^2.

Пример 2. Непосредственной проверкой легко показать, что наибольшее число областей, на которые могут разбить плоскость n окружностей, равно двум при $n = 1$, четырем при $n = 2$ и восьми при $n = 3$. Кажется естественным предположить, что в общем случае оно равно 2^n. Но это неверно: уже при $n = 4$ получается не 16, а 14. (Читатель, которому это будет интересно, может попытаться доказать — методом математической индукции — что на самом деле это число в общем случае равно $n^2 - n + 2$.)

---

* Понятие простого числа, известное читателю из начального курса арифметики, будет подробно рассмотрено в разделе 1.12.

Можно было бы привести еще ряд подобных примеров, в том числе таких, где гипотеза, возникающая из рассмотрения нескольких первых натуральных чисел, опровергается лишь при довольно далеком продвижении по натуральному ряду. (Среди этих примеров есть известные в истории математики задачи, решение которых было далеко не простым делом.)

Многие задачи, решаемые с помощью метода математической индукции, состоят в доказательстве того, что для всех натуральных чисел (или для всех целых неотрицательных чисел) справедливо некоторое тождество. Рассмотрим две таких задачи.

Задача 8. Доказать, что сумма первых n натуральных чисел равна $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Иначе говоря, требуется доказать, что для всех натуральных чисел справедливо тождество

$$(*) \qquad 1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Доказательство

Базис сводится к замечанию, что при $n = 1$ левая часть равенства (*) есть 1, а правая есть $1 \cdot 2/2$, что также равно 1.

Индукционный шаг. Пусть для некоторого натурального числа n уже доказано, что $1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Докажем, что при этом условии тем же свойством обладает и число $n + 1$, т. е. что $1+2+\ldots+n+(n+1)=$ $=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$. Доказательство состоит в следующем: ввиду предположения индукции $1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)$. Преобразуем правую часть полученного равенства: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)=$ $=\frac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$. Этим завершается индукционный шаг и вместе с ним доказательство тождества (*).

Задача 9. Упростить выражение $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

Подставляя вместо n числа 1, 2, 3, получаем: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$. Отсюда возникает гипотеза, что в общем случае справедливо тождество

$$(**)\qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

И это действительно верно.

Доказательство

Базис мы уже провели, вычислив значение заданного выражения при $n=1$.

Индукционный шаг. Пусть для некоторого натурального числа n уже доказано, что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. Докажем, что при этом условии тем же свойством обладает и число $n+1$, т. е. что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$. Доказательство состоит в следующем: ввиду предположения индукции $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$ $=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$. Преобразуем правую часть полученного равенства:

$$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Этим завершается индукционный шаг и вместе с ним доказательство тождества (**).

Иногда бывает нужно вывести формулу, содержащую не одну, а две переменных. В таких случаях индукция ведется по одной из них, в то время как значение другой остается постоянным (но произвольным).

В качестве примера решим следующую задачу.

Задача 10. Рассмотрим алфавит, состоящий из k букв, и всевозможные конечные последовательности этих букв, которые мы будем называть *словами* в данном алфавите. *Длиной* слова будем называть число входящих в него букв, причем каждая буква считается столько раз, сколько она входит в слово. (Например, слова *абв*, *аба*, *ааа* имеют длину 3.) Сколько существует слов длины n в k-буквенном алфавите?

Чтобы найти нужную нам формулу, попробуем сначала ее угадать. Ради простоты возьмем алфавит из двух букв *а*, *б*. Тогда слов длины 1 будет два, слов длины 2 — четыре: *аа*, *аб*, *ба*, *бб*, слов длины 3 — восемь (читатель легко убедится в этом, выписав их в словарном порядке). Это наводит на мысль, что число слов длины n равно 2^n, а в общем случае k^n. Что это действительно так, мы докажем индукцией по n.

Базис. Однобуквенные слова — это то же, что буквы, так что число их равно k, иначе k^1.

Индукционный шаг. Пусть для некоторого натурального числа n уже доказано, что число слов длины n в k-буквенном алфавите равно k^n. Докажем, что при этом условии тем же свойством обладает и число $n + 1$, т. е. что число слов длины $n + 1$ в том же алфавите равно k^{n+1}. А это очень просто: из каждого слова длины n, приписывая к нему справа еще одну букву, можно получить k различных слов длины $n + 1$, причем ясно, что все слова длины $n + 1$ могут быть получены таким способом; следовательно, общее их число есть $k^n \cdot k = k^{n+1}$. Доказательство окончено.

Бывает и так, что некоторая формула имеет смысл только при тех значениях переменной, которые не превосходят какого-то постоянного числа. В этих случаях также применяется иногда метод математической индукции.

Задача 11. Пусть имеется произвольная конечная совокупность (множество), состоящая из n объектов (элементов) произвольной природы, и пусть k — натуральное число, не превосходящее n. Сколько имеется в данной совокупности частичных совокупностей (подмножеств), состоящих из k элементов?

k-элементные подмножества n-элементного множества принято называть **сочетаниями** из n элементов по k; число таких сочетаний обозначают обычно C_n^k. Нам нужно, таким образом, найти формулу для вычисления числа C_n^k.

Обозначим n-элементное множество через A. Пусть k — натуральное число, меньшее, чем n, и B — k-элементное подмножество множества A. Добавляя к B по одному новому элементу, мы получим, очевидно, $n - k$ подмножеств множества A, состоящих из $k + 1$ элементов. Например, если A состоит из шести букв *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* и B — из двух букв *а*, *б* (это обозначают так: $A = \{а, б, в, г, д, е\}$, $B = \{а, б\}$, причем порядок букв в записи может быть любой), то добавлением к B новой буквы получаем три множества: $\{а, б, г\}$, $\{а, б, д\}$, $\{а, б, е\}$.

Если теперь для каждого k-элементного подмножества множества A взять перечень всех получающихся из него $(k + 1)$-элементных подмножеств и затем свести все такие перечни в один, то в объединенном перечне будет, очевидно, $C_n^k \cdot (n-k)$ подмножеств. Но каждое $(k + 1)$-элементное подмножество повторяется в этом объединенном перечне $k + 1$ раз, так как его можно получить из каждого его k-элементного подмножества, а таких подмножеств у него имеется в точности $k + 1$, поскольку каждое из них получается выбрасыванием одного элемента. (Например, множество $\{а, б, в\}$ можно получить либо из $\{б, в\}$, либо из $\{а, в\}$, либо из $\{а, б\}$.) Следовательно, $C_n^{k+1} = \dfrac{C_n^k \cdot (n-k)}{k+1}$.

Теперь, заметив, что $C_n^1 = n$ (одноэлементных подмножеств столько же, сколько элементов), видим, что $C_n^2 = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$, $C_n^3 = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 3}$

и т. д. Общая формула имеет вид $C_n^k = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$, или иначе

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!},$$

что легко теперь доказать методом математической индукции. В самом деле, базис этой индукции сводится к замечанию, что при $k = 1$ выражение $\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ превращается в $\dfrac{n}{1!} = n$, а индукционный шаг мы фактически уже провели.

Выведенную формулу можно еще преобразовать, умножив числитель и знаменатель ее правой части на $(n-k)!$. Тогда получим:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Из последней формулы, поскольку $n - (n - k) = k$, немедленно получается замечательное соотношение:

$$C_n^{n-k} = C_n^k.$$

Только что рассмотренная задача исторически была первой, для решения которой был использован метод математической индукции. Сделал это великий французский ученый Б. Паскаль (Blaise Pascal, 1623—1662)*.

Выражение «математическая индукция» впервые употребил английский математик А. Де Морган (Augustus De Morgan, 1806—1871).

Замечание. Утверждение, доказываемое в базисе, часто кажется совершенно очевидным, и поэтому может возникнуть соблазн вообще пропустить базис. **Но поступать так ни в коем случае нельзя**, иначе мы рискуем совершить ошибку. Ведь если число 1 не обладает каким-то свойством, то неправильно было бы говорить, что им обладают **все** натуральные числа. Больше того: пропустив базис, мы можем «доказать» даже такое утверждение, которое не является верным ни для одного натурального числа, как показывает следующий пример.

Пример. «Докажем», что для всякого натурального числа n выполняется равенство $n = n + 1$.

«Доказательство». Пусть n — произвольное натуральное число. Допустим, что $n = n + 1$. Тогда, прибавляя к обеим частям равенства единицу, получаем: $n + 1 = n + 2$. Таким образом, если данное число n равно следующему числу, то этим свойством обладает и число $n + 1$. «Доказа-

---

* Паскаль сформулировал правило для вычисления числа сочетаний не символически, а в словесной форме.

тельство» окончено. Но в действительности равенство $n = n + 1$ не может быть верным ни для какого n (хотя бы потому, что, вычитая n из обеих его частей, мы получили бы $0 = 1$, а это заведомо неверно).

Ошибка состояла в том, что мы провели только индукционный шаг, забыв о базисе. Между тем провести базис означало бы доказать равенство $1 = 2$, а это нам, конечно, не удалось бы сделать.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 12. Доказать, что n прямых, проведенных на плоскости через одну точку, разбивают плоскость на $2n$ областей.

Задача 13. Доказать, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2.

Задача 14. Доказать, что сумма квадратов первых n натуральных чисел равна $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Задача 15. Доказать, что сумма квадратов первых n нечетных чисел равна $\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Задача 16. Доказать, что сумма кубов первых n натуральных чисел равна $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Задача 17. Упростить выражение $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Задача 18. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Задача 19. Доказать, что всякая ломаная длиннее отрезка, соединяющего ее концы.

Задача 20. Доказать, что $2^n > n$, каково бы ни было целое неотрицательное число n.

Задача 21. Найти число бесповторных слов (т. е. таких слов, в которых ни одна буква не встречается больше одного раза) длины n в k-буквенном алфавите.

Замечание. В задачах 10 и 21 вместо алфавита можно рассматривать произвольное конечное множество, состоящее из k элементов, и вместо слов — конечные последовательности элементов этого множества. Бесповторные конечные последовательности длины n часто называют в этом случае **размещениями** (или **размещениями без повторений**) из n элементов по k, а произвольные конечные последовательности длины n — **размещениями с повторениями** из n элементов по k. Таким образом, в задаче 21 речь идет о числе размещений без повторений из n элементов по k, а в задаче 10 — о числе размещений с повторениями.

1.12. Простые числа

Натуральное число, большее единицы, называется **простым**, если оно делится только на единицу и на себя.

Натуральное число, большее единицы и не являющееся простым, называется **составным**. Иначе говоря, составное число — это такое натуральное число a, которое можно представить в виде произведения $b \cdot c$, где $1 < b < a$ (и, следовательно, также $1 < c < a$).

Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13 — простые, а 4, 6, 8, 9, 10, 12 — составные.

Если $a > 1$ и p — наименьший отличный от единицы делитель числа a, то p — простое число. В самом деле, если бы число p было составным, т. е. представлялось в виде $p = bc$, где $1 < b < p$, то b тоже было бы делителем числа a, так что p не было бы *наименьшим* делителем a, отличным от единицы. Таким образом, *всякое натуральное число, большее единицы, делится на некоторое простое число.*

Чтобы найти все простые числа, не превосходящие некоторого заданного числа N, можно использовать следующий способ, называемый решетом Эратосфена*.

Прежде всего находим наибольшее натуральное число, квадрат которого не превосходит N; пусть это число есть l. Затем выписываем все натуральные числа от 2 до N включительно и вычеркиваем все числа, кратные двум, кроме самого числа 2 (то есть чи́сла $2 \cdot 2$, $3 \cdot 2$, $4 \cdot 2$ и т. д.). В дальнейшем нам удобно будет обозначать число 2 через p_1. Потом, обозначая через p_2 наименьшее не вычеркнутое число, большее p_1 (очевидно, $p_2 = 3$), вычеркиваем все те не вычеркнутые ранее числа, которые кратны p_2, кроме самого p_2. Далее, обозначая через p_3 наименьшее не вычеркнутое число, большее p_2, вычеркиваем все не вычеркнутые ранее числа, кратные p_3, кроме самого p_3, — и т. д. до тех пор, пока очередное p_k не окажется больше l. Числа, оставшиеся к этому моменту не вычеркнутыми, — это в точности все простые числа, не превосходящие N.

Докажем, что это действительно так. Ясно, что все вычеркнутые числа — составные; поэтому достаточно доказать, что все составные числа вычеркнуты.

Пусть a — составное число, $a \leqslant N$. Тогда существуют такие числа b и c, что $a = bc$, причем $2 \leqslant b < a$, $2 \leqslant c < a$. По крайней мере одно из чисел b и c не превосходит l. (В противном случае число $a = bc$ было бы не меньше $(l + 1)^2$ и, значит, больше N.) Пусть, например, $b \leqslant l$. Тогда, если b — не вычеркнутое число, оно равно одному из чисел p_k; но тогда число

---

* Эратосфен (Ἐρατοσθένης, около 276—194 до н. э.) — греческий математик, географ, грамматик и поэт, работавший в Александрии и заведовавший знаменитой Александрийской библиотекой. Особенно известен тем, что впервые измерил длину дуги меридиана.

$a = p_k \cdot c$ должно быть вычеркнуто как кратное p_k и не равное самому p_k. Если же b — вычеркнутое число, то существует такое p_i, что b кратно ему, но не равно ему, т. е. $b = p_i k$, где $k > 1$. Но тогда число $a = bc = p_i \cdot (k \cdot c)$ тоже должно быть вычеркнуто. Доказательство окончено.

Найдем, например, все простые числа, не превосходящие пятидесяти. Наибольшее натуральное число l, для которого $l^2 \leqslant 50$, равно 7. Выписываем все натуральные числа от 2 до 50 включительно (см. приведенную ниже таблицу) и вычеркиваем все числа, кратные двум, кроме самого числа 2 (в таблице они по техническим причинам вместо вычеркивания заключены в круглые скобки). Затем берем наименьшее не вычеркнутое число, большее двух; это число 3. Вычеркиваем все не вычеркнутые ранее числа, кратные трем, кроме самого числа 3 (в таблице они заключены в квадратные скобки). Далее берем наименьшее не вычеркнутое число, большее трех, т. е. число 5, и вычеркиваем не вычеркнутые ранее числа, кратные пяти, кроме самого числа 5 (таких чисел всего два; в таблице они заключены в фигурные скобки). Затем берем наименьшее не вычеркнутое число, большее пяти, т. е. число 7, и видим, что у нас осталось только одно не вычеркнутое ранее число, кратное семи и отличное от самого числа 7, — это 49. Вычеркнув его (в таблице оно заключено в угловые скобки), мы заканчиваем работу, т. к. $l = 7$.

Таблица имеет следующий вид:

	2	3	(4)	5	(6)	7	(8)	[9]	(10)
11	(12)	13	(14)	[15]	(16)	17	(18)	19	(20)
[21]	(22)	23	(24)	{25}	(26)	[27]	(28)	29	(30)
31	(32)	[33]	(34)	{35}	(36)	37	(38)	[39]	(40)
41	(42)	43	(44)	[45]	(46)	47	(48)	⟨49⟩	(50)

Задание. С помощью решета Эратосфена найдите все простые числа до 200.

Естественно возникает вопрос: существует ли среди простых чисел наибольшее, т. е. такое, что все числа, бóльшие его — составные? Ответ на этот вопрос знали уже древнегреческие математики: такого числа не существует. Иначе говоря, *каково бы ни было простое число p, можно найти простое число, большее, чем p.*

Доказывается это так. Пусть p — произвольное простое число. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ все простые числа, меньшие или равные p (так что $p_n = p$). Перемножим все эти числа и к полученному произведению прибавим единицу. В сумме $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ первое слагаемое делится на каждое из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а второе ни на одно из них не делится. Поэтому — ввиду 2-го свойства делимости — сумма не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_n$. Но, как мы доказали в начале этого раздела, всякое натуральное число, большее единицы, делится на некоторое простое число. В частности, сумма $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ делится на какое-то простое число q. Однако q не может совпадать ни с одним из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$; следовательно, оно больше p.

1.13. Основная теорема арифметики

Следующее утверждение часто называют **основной теоремой арифметики**.

Всякое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых чисел, и притом только одним способом.

Пояснения. 1) Если число само простое, оно тоже считается «произведением», состоящим из одного сомножителя.

2) Представления, отличающиеся друг от друга только порядком сомножителей, не считаются различными. Например, $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2 \cdot 7 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2$.

Доказательство этой теоремы мы проведем методом математической индукции. Нам будет удобно доказывать ее в следующей форме: каково бы ни было число $n \geqslant 2$, каждое число от 2 до n включительно можно представить в виде произведения простых чисел, и притом только одним способом. (Такая формулировка, конечно, сложнее первоначальной, но она облегчит нам проведение индукции.)

Базис. Если $n = 2$, утверждение очевидно, потому что существует только одно число k, удовлетворяющее неравенствам $2 \leqslant k \leqslant n$, — само число 2, а это число простое.

Индукционный шаг. Пусть n — произвольное число $\geqslant 2$. Допустим, что каждое число k, удовлетворяющее неравенствам $2 \leqslant k \leqslant n$, может быть представлено в виде произведения простых чисел, и притом только одним способом. Докажем, что при этом предположении можно представить в таком виде, и притом единственным способом, также и любое число k, удовлетворяющее неравенствам $2 \leqslant k \leqslant n + 1$. А поскольку для всех чисел 2, 3, ..., n это верно по предположению индукции, то достаточно доказать, что это верно для числа $n + 1$. Сейчас мы это докажем.

Если число $n + 1$ — простое, то оно представляется в виде произведения простых чисел (см. пояснение 1) и притом только одним способом, т. к. простое число не может быть равно другому простому числу и не может быть разложено в произведение двух или более простых чисел.

Пусть теперь число $n + 1$ — составное и пусть p — наименьший отличный от единицы делитель этого числа. Число p — простое (это доказано в начале раздела 1.12). Существует такое число t, что $n + 1 = pt$. Очевидно, $t < n + 1$, т. е. $t \leqslant n$; ясно также, что $t > 1$ (поскольку p — простое число, а $n + 1$ — составное), т. е. $t \geqslant 2$. Поэтому по предположению индукции число t можно представить в виде произведения простых чисел, и притом только одним способом. Пусть это представление имеет вид:

$$t = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k.$$

Умножая на p, получаем:

$$n + 1 = pt = pp_1 p_2 \ldots p_k.$$

Таким образом, число $n + 1$ представляется в виде произведения простых чисел. Остается доказать, что существует только одно такое представление.

Допустим, что $n + 1$ представлено в виде произведения простых чисел двумя способами:

$$n+1 = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_l \,.$$

Тогда нетрудно доказать от противного, что одно из чисел q_1, q_2, ..., q_l равно p_1. В самом деле, допустим, что это не так. Тогда p_1 взаимно просто с q_1 (очевидно, любые два различных простых числа взаимно просты), а так как произведение $q_1(q_2q_3...q_l) = n+1$ делится на p_1, то по 9-му свойству делимости число $q_2q_3...q_l$ тоже делится на p_1. Затем точно так же доказываем, что число $q_3...q_l$ делится на p_1, и т. д.; в конце концов оказывается, что q_l делится на p_1, а это противоречит нашему допущению.

Итак, p_1 совпадает с одним из чисел q_1, ..., q_l. Поскольку порядок сомножителей не имеет значения, можно считать для удобства, что $p_1 = q_1$. Теперь мы имеем равенства

$$n+1 = p_1q_2q_3...q_l = p_1p_2...p_k = p_1t.$$

Сокращая на p_1, получаем:

$$q_2q_3...q_l = p_2...p_k = t.$$

Но число t по предположению индукции может быть представлено в виде произведения простых чисел только одним способом. Поэтому представление $q_2q_3...q_l$ совпадает с представлением $p_2p_3...p_k$ и, значит, представление числа $n + 1$ в виде $q_1q_2...q_l = p_1q_2...q_l$ совпадает с представлением в виде $p_1p_2...p_k$.

Доказательство теоремы закончено.

Чтобы разложить число на простые множители, удобнее всего сначала найти наименьшее простое число, на которое оно делится, и разделить на него, затем то же сделать с полученным частным, затем со следующим частным, и т. д. до тех пор, пока очередное частное не окажется равным единице. Записывают это обычно так: проводят вертикальную черту, слева от нее пишут данное число и справа то число, на которое мы его делим; затем под первым числом записывают первое частное и напротив него справа от черты — то число, на которое мы его делим, и т. д. Числа, записанные к концу этой процедуры справа от черты — это как раз те простые множители, на которые разлагается данное число. Например:

15288	2
7644	2
3822	2
1911	3
637	7
91	7
13	13
1	

18275	5
3655	5
731	17
43	43
1	

Таким образом: $15288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13;$

$18275 = 5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 43,$

или короче: $15288 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13;$

$18275 = 5^2 \cdot 17 \cdot 43.$

1.14. Нахождение делителей числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Пусть a и b — натуральные числа, бóльшие единицы. Разложим их на простые множители и запишем разложения в следующем виде:

$$a = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k}; \qquad b = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_k^{d_k},$$

причем, если какое-то p_i входит в разложение только одного числа a или b, то в разложении другого мы записываем его в нулевой степени. Например:

$$2200 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 11^1;$$
$$1125 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11^0.$$

Теперь нетрудно видеть, что a делится на b тогда и только тогда, когда

$$c_1 \geqslant d_1;\ c_2 \geqslant d_2;\ \dots;\ c_k \geqslant d_k.$$

В самом деле: если это условие выполняется, то число a можно представить в виде

$$a = p_1^{c_1} \dots p_k^{c_k} = p_1^{d_1+(c_1-d_1)} \dots p_k^{d_k+(c_k-d_k)} = (p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}) \cdot (p_1^{c_1-d_1} \dots p_k^{c_k-d_k}) = bt,$$

где через t обозначено число $p_1^{c_1-d_1} \dots p_k^{c_k-d_k}$.

Если же условие не выполняется, т. е. какой-то из показателей в разложении числа b больше соответствующего показателя в разложении числа a — например, $d_1 > c_1$, — то a не может делиться на b по следующей причине: если a делится на b, то a делится и на $p_1^{d_1}$; но числа $p_1^{d_1}$ и $p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k}$ взаимно просты, и если произведение $a = p_1^{c_1}(p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k})$ делится на $p_1^{d_1}$, то $p_1^{c_1}$ должно делиться на $p_1^{d_1}$; однако при $d_1 > c_1$ это невозможно.

Итак, делителями числа $p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k}$ являются все те и только те числа, которые имеют вид $p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_k^{d_k}$, где $0 \leqslant d_1 \leqslant c_1$, $0 \leqslant d_2 \leqslant c_2$, …, $0 \leqslant d_k \leqslant c_k$.

(Возможно, в частности, что $d_1 = \dots = d_k = 0$, т. е. $p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k} = 1$.) Например, делителями числа $72 = 2^3 \cdot 3^2$ являются следующие числа: 1; 2; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; 3; $2 \cdot 3 = 6$; $2^2 \cdot 3 = 12$; $2^3 \cdot 3 = 24$; $3^2 = 9$; $2 \cdot 3^2 = 18$; $2^2 \cdot 3^2 = 36$; $2^3 \cdot 3^2 = 72$. Делителями числа $18275 = 5^2 \cdot 17 \cdot 43$ (см. пример в конце предыдущего раздела) являются следующие числа: 1; 5; $5^2 = 25$; 17; $5 \cdot 17 = 85$; $5^2 \cdot 17 = 425$; 43; $5 \cdot 43 = 215$; $5^2 \cdot 43 = 1075$; $17 \cdot 43 = 731$; $5 \cdot 17 \cdot 43 = 3655$; $5^2 \cdot 17 \cdot 43 = 18275$.

Задание. Для каждого из следующих чисел найдите все его делители: 48; 100; 333; 1000; 15288.

Иногда бывает нужно найти **общие делители** двух чисел a и b, т. е. такие числа, которые являются делителями как для a, так и для b. Одним из общих делителей всегда будет единица. Остальные легко найти, разложив a и b на простые множители: очевидно, число $c \neq 1$ будет общим делителем для a и b тогда и только тогда, когда каждый простой множитель, входящий в разложение числа c, входит в разложение **обоих** чисел a и b, и при этом степень, в которой он входит в разложение c, не превышает степеней, в которых он входит в разложение a и b.

Возьмем, например, числа $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ и $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$. Их общими делителями будут, наряду с единицей, все те и только те числа, в разложения которых входят только два простых множителя — 2 и 5, причем 2 только в степенях, не превышающих 3, а 5 в степенях, не превышающих 2. Наибольшее из этих чисел есть $2^3 \cdot 5^2 = 200$, а **все** общие делители чисел 3600 и 7000 (включая единицу) — это в точности все делители числа 200.

Чаще всего требуется найти не все общие делители двух чисел, а их **наибольший общий делитель** (общепринятое сокращение — Н. О. Д.), т. е. наибольшее число, на которое делятся оба данных числа. Общими делителями двух чисел являются те и только те числа, на которые делится их Н. О. Д. Способ нахождения Н. О. Д. двух чисел ясен из предыдущего: чтобы найти Н. О. Д. чисел a и b, нужно взять все те простые числа, которые входят как в разложение a, так и в разложение b, возвести каждое из этих простых чисел в наименьшую из тех степеней, в которых они входят в разложения a и b, и все полученные таким образом числа перемножить. Если в разложениях a и b нет общих множителей, их Н. О. Д. равен 1. Это бывает, очевидно, тогда и только тогда, когда a и b взаимно просты. Например: Н. О. Д. чисел $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ и $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$ равен, как мы уже видели, $2^3 \cdot 5^2 = 200$; Н. О. Д. чисел $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ и $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ равен 7; Н. О. Д. чисел $54 = 2 \cdot 3^3$ и $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ равен $2 \cdot 3^3 = 54$; Н. О. Д. чисел $98 = 2 \cdot 7^2$ и $135 = 3^3 \cdot 5$ равен 1.

Аналогично можно находить **общие кратные** чисел a и b, т. е. такие числа, которые делятся как на a, так и на b. У каждых двух чисел имеется бесконечно много общих кратных; поэтому мы укажем только способ нахождения наименьшего из них — **наименьшего общего кратного** (общепринятое сокращение — Н. О. К.), который совершенно аналогичен способу нахождения Н. О. Д. Именно: чтобы найти Н. О. К. чисел a и b, нужно взять все простые числа, которые входят в разложение *хотя бы одного* из чисел a и b, возвести каждое из этих чисел в *наибольшую* из тех степеней, в которых они входят в разложения a и b, и все полученные таким образом числа перемножить. Например: Н. О. К. чисел $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ и $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$ равно $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 126000$; Н. О. К. чисел $54 = 2 \cdot 3^3$ и $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ равно $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 2700$; Н. О. К. чисел $98 = 2 \cdot 7^2$ и $135 = 3^3 \cdot 5$ равно $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 13230$.

Нетрудно понять, что число m тогда и только тогда является общим кратным двух данных чисел, когда оно делится на их Н. О. К.

Задания. 1) Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то их Н. О. К. равно их произведению.

2) Докажите, что если a делится на b, то их Н. О. Д. равен b, а Н. О. К. равно a.

3) Докажите, что произведение Н. О. Д. и Н. О. К. двух произвольных чисел равно произведению самих этих чисел.

Приложение: об устном счете

Еще в начальной школе Вы научились складывать, вычитать и умножать «столбиком» и делить «уголком». При твердых навыках это можно делать механически, не задумываясь о смысле действий. Кроме того, уже давно были изобретены устройства, позволяющие в самом деле механизировать арифметические действия. Древнейшее из таких устройств — абак — было известно уже в древней Греции и Риме и широко распространено в средневековой Европе. Абак представлял собой доску, разграфленную на столбцы, каждый из которых предназначался для чисел определенного разряда: столбец для единиц, столбец для десятков, столбец для сотен и т. д. (Иногда столбцы разграфлялись еще на клетки, так что получалось нечто вроде шахматной доски.) Единицы каждого разряда изображались камешками или жетонами*. По тому же принципу устроены русские счеты, которыми еще недавно пользовались у нас почти все продавцы и кассиры (некоторые из них пользуются и сейчас). А в наше время широко распространились калькуляторы, на которых не только сложение и вычитание, но и умножение и деление (а также и более сложные операции) производятся простым нажатием клавиш. Они стали незаменимым подспорьем в инженерных, финансовых и других расчетах. Но, привыкая к калькуляторам, люди постепенно разучиваются считать в уме. Между тем навыки устного счета необходимы не только для практических целей: они составляют неотъемлемую часть того, что принято называть грамотностью и общей культурой. Человек, который не может, например, сложить в уме 15 и 23 — это человек без «чувства числа»**; а без такого чувства трудно ориентировать-

---

* Воспоминание о таком способе счета сохранилось в латинских словах *calculare* — считать, *calculatio* — счет (и наших *калькуляция*, *калькулятор*), происходящих от *calculus* — камешек.

** Пример из статьи поэта Н. Коржавина «Не догоняйте Америку» («Московские новости», 5 января 1992 г.): «Кассирша, у которой сломался кассовый аппарат, многотрудно складывает 15 и 23 на бумаге, столбиком».

ся в окружающем нас мире. Конечно, первобытный охотник или пастух, не умея складывать и умножать, все-таки прекрасно ориентировался в мире, но ведь его мир был другой. В мире, где мы живем сейчас, все подчинено числу и строгой мере; если мы не будем **чувствовать** число и меру, мир станет для нас чужим и враждебным. Не «подружившись» с числами, невозможно овладеть алгеброй, геометрией и другими математическими науками, невозможно понять что-нибудь в физике. Да и любая наука непостижима для человека, не умеющего считать. Такому человеку ничего не скажут даже простые хронологические таблицы, без которых невозможно изучение истории. Между тем «внедрение» калькуляторов в школьное преподавание приводит к тому, что школьники теряют простейшие навыки устного счета и даже иногда забывают таблицу умножения. Поэтому *обходитесь без калькуляторов*! Если Вам когда-нибудь понадобится производить громоздкие вычисления, Вы научитесь работать с калькулятором очень быстро, даже если никогда раньше не держали его в руках. А в школе он приносит только вред, особенно на уроках математики. И как можно реже берите в руки при вычислениях бумагу и ручку, старайтесь считать в уме. Складывать и вычитать двузначные и трехзначные числа, умножать двузначные и трехзначные числа на однозначные нужно только в уме.

При этом надо помнить, что в уме считают не так, как на бумаге. Главное различие состоит в том, что при письменных вычислениях сложение, вычитание и умножение начинают с низших разрядов, а при устных — с высших. Например, сумму $875 + 648$ вычисляют так: складывают 800 и 600, к полученному числу 1400 прибавляют сумму $70 + 40 = 110$ и к новой сумме 1510 прибавляют сумму $5 + 8 = 13$; получается 1523. Чтобы умножить 876 на 7, сначала умножают 800 на 7, к полученному числу 5600 прибавляют произведение $70 \cdot 7 = 490$ и к новой сумме 6090 прибавляют произведение $6 \cdot 7 = 42$; получается 6132. Чтобы из 746 вычесть 367, можно поступить так: из 746 вычесть 300, из разности 446 вычесть 60 и из новой разности 386 вычесть 7. Получается 379.

Часто удается упрощать действия, пользуясь какими-нибудь особыми свойствами участвующих в них чисел. Например, если одно из слагаемых немного меньше некоторого «круглого» числа, удобно вычислять так, как в следующем примере: чтобы сложить 763 и 586, складывают 763 и 600 и из полученной суммы 1363 вычитают 14. Аналогично при вычитании: чтобы из 846 вычесть 379, вычитают 400 и к полученной разности 446 прибавляют 21; чтобы вычесть 537 из 793, вычитают 537 из 800, а затем из полученной разности вычитают еще 7.

Напомним еще два простых приема: чтобы умножить число на 5, умножают его на 10 (т. е. приписывают к нему нуль) и полученное число делят на 2; чтобы умножить число на 9, умножают его на 10 и из полученного числа вычитают первоначальное.

Иногда, чтобы умножить или разделить число на 4, бывает удобно два раза умножить или разделить его на 2.

Существуют и другие приемы устного счета; о них можно прочесть, например, в книге Я. И. Перельмана «Занимательная арифметика» и в книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры». Мы упомянем еще только один прием: в некоторых случаях для упрощения умножения удобно пользоваться формулой $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$. Например, произведение $22\cdot 18=396$ вычисляется мгновенно, если вспомнить, что $22\cdot 18 = (20+2)\cdot(20-2)=20^2-2^2$. Точно так же:

$$18\cdot 14=(16+2)(16-2)=16^2-2^2=252;$$
$$29\cdot 21=(25+4)(25-4)=25^2-4^2=609.$$

Разумеется, для этого нужно помнить или уметь быстро вычислять квадраты «не очень больших» натуральных чисел*. Помнить их и вообще очень полезно, так же как степени двойки (хотя бы до десятой включительно), тройки (хотя бы до шестой), пятерки (хотя бы до пятой). А для чисел первой сотни желательно помнить или уметь сразу, не раздумывая, находить разложения на простые множители. (Это особенно полезно для действий с дробями.) Одним словом, общайтесь с числами непосредственно, а не через окошечко калькулятора, дружите с ними, узнавайте их при встрече. Без этого невозможно стать по-настоящему грамотным человеком.

---

* Если Вам понадобилось, например, значение 17^2, а Вы его не помните, но помните, что $16^2=256$, то проще всего воспользоваться тем, что $17^2=(16+1)^2 = 16^2+2\cdot 16+1=256+33$.

Глава 2
Рациональные числа

2.1. Дроби

Изучая натуральные числа, мы рассмотрели четыре арифметических действия. Два из них — сложение и умножение — всегда выполнимы, а два другие не всегда. Поэтому система натуральных чисел (даже с добавлением нуля) выглядит «незавершенной», и возникает желание расширить ее так, чтобы можно было не только сложить и перемножить два любые числа, но и произвести вычитание и деление любых двух чисел. Есть практические задачи, притом весьма важные, решение которых требует неограниченной выполнимости вычитания и деления. О вычитании речь будет впереди (в разделе 2.7), а сейчас займемся делением.

Деление натуральных чисел мы определили в разделе 1.1 двумя способами: как действие, обратное умножению (разделить a на b значит найти такое x, что $bx = a$), и как действие, с помощью которого решается следующая задача: если разделить a яблок поровну между b детьми, то сколько яблок достанется каждому?* При некоторых значениях a и b эта задача легко решается — например, если $a = 6$, $b = 3$, — при других ее нельзя решить с помощью одних только натуральных чисел, например, при $a = 5$, $b = 3$. Но практический способ разделить 5 яблок между тремя детьми все же существует (если только яблоки предназначены для того, чтобы их съесть, а не для того, например, чтобы украсить елку): нужно разрезать каждое яблоко на 3 одинаковые части и дать каждому по одной части от каждого яблока; всего каждый получит 5 таких частей. Такие части называют обычно **долями**. Названиями долей служат порядковые числительные: когда предмет делят на 2 равные части, их называют **вторыми долями**, когда на 3 — **третьими**, и т. д. (Первая доля — это целый предмет.) Указывая, на какие доли разрезать яблоко и сколько долей дать каждому, мы указываем тем самым *пару чисел* a, b, где b — номер доли и a — число долей. В общем случае b есть произвольное натуральное число, a — произвольное натуральное число или нуль (потому что мешок, из которого мы собрались вытаскивать яблоки, может оказаться пустым). Если $b = 1$, каждый получит целое число яблок (а именно a яблок). Такие пары называются, как Вы знаете, **дробями** и записываются обычно в виде $\dfrac{a}{b}$. Названия членов дроби, также хорошо Вам известные, легко объяснимы: a называется **числителем**, т. к. обозначает *число* долей; b называ-

* Ради большей наглядности мы здесь слегка изменили формулировку задачи.

ется **знаменателем**, от древнерусского *знаменати* — поставить знак, указать, отметить, обозначить, поскольку это число служит *обозначением* соответствующей доли*. Способ чтения дробей также естественно связан с их смыслом: например, $\frac{5}{8}$ читается «пять восьмых» — подразумевается «долей». Вторая, третья, четвертая и сотая доли имеют особые названия: половина, треть, четверть, процент (от латинского *pro centum* — на сотню).

Замечание. При чтении дробей $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ желательно пользоваться *только* этими названиями и говорить, например, «две трети», «одна четверть», а не «две третьих», «одна четвертая». Такие выражения, как $\frac{1}{2}a$, лучше читать просто «половина *a*» или «*a* пополам».

Вернемся теперь к задаче о разделе яблок. Обязательно ли, чтобы все яблоки были одинаковые? Вообще говоря, для раздела это не требуется; но если мы хотим, чтобы любую долю можно было заменить на любую другую, а главное — чтобы с дробями можно было обращаться, как с числами, т. е. сравнивать их по величине, складывать, вычитать, умножать и делить, — тогда яблоки должны быть одинаковыми. В этом случае мы имеем дело с некоторой «однородной величиной» — «яблочной массой», которую с помощью дробей можно *измерять*. Точно так же можно измерять с их помощью «настоящие» физические величины — длину, площадь, объем, массу, время, температуру и т. п., с той только разницей, что для них не существует «естественных» единиц измерения, какими являются одно яблоко или одна груша, и единицы приходится выбирать произвольно. Но если единица измерения выбрана — например, в качестве единицы длины выбран метр**, — то для измерения величины можно пользоваться дробями. Измерение величин и есть главная практическая задача, решение которой требует неограниченной выполнимости деления.

---

* Термины *дробь*, *числитель*, *знаменатель* представляют собой кальки латинских *fractio* (от *frango* — ломаю), *numerator* (от *numero* — считаю), *denominator* (от *denomino* — именую, называю). Сравните соответствующие французские, немецкие и английские термины: *fraction*, *numerateur*, *dénominateur*; *Bruch*, *Zähler*, *Nenner* (от *brechen* — ломать, *zählen* — считать, *nennen* — называть); *fraction*, *numerator*, *denominator*. По-русски дроби назывались раньше *ломаными числами* или просто *ломаными* (так в вышедшей в 1703 г. «Арифметике» Магницкого, и так же в «Недоросле» Фонвизина).

** Первоначально метр был определен как одна сорокамиллионная длины парижского меридиана. В настоящее время, согласно определению, принятому в 1983 г. 17-й Генеральной конференцией по мерам и весам, метр считается равным длине пути, проходимого светом в вакууме за 1/299792458 секунды.

2.2. Равенство дробей. Неотрицательные рациональные числа

Если нам нужно разделить 5 яблок между 3 детьми, то разрезать яблоко на 3 части и дать каждому по 5 частей — самый простой способ решения задачи. Вместо этого можно, например, разрезать каждое яблоко на 6 частей и дать по 10 частей каждому, или разрезать на 9 частей и дать каждому по 15. Точно так же, если в некотором отрезке укладывается в точности 5 третьих долей единичного отрезка, то в нем уложится 10 шестых долей или 15 девятых; иначе говоря, если длина отрезка выражается дробью $\frac{5}{3}$, то ее можно выразить и дробью $\frac{10}{6}$ или $\frac{15}{9}$, а также, очевидно, любой дробью вида $\frac{5k}{3k}$, где k — произвольное натуральное число. Поэтому все эти дроби естественно считать равными друг другу.

Чтобы дать строгое определение равенства дробей, нужно сначала рассмотреть операцию **сокращения**. **Сократить** дробь $\frac{a}{b}$ **на** натуральное число k, большее единицы, значит заменить его дробью $\frac{a_1}{b_1}$, где a_1 и b_1 — частные от деления a и b на k (т. е. $a = ka_1$, $b = kb_1$). Например, при сокращении дроби $\frac{40}{24}$ на 4 получается дробь $\frac{10}{6}$; при сокращении дроби $\frac{40}{24}$ на 8. или дроби $\frac{10}{6}$ на 2, или дроби $\frac{15}{9}$ на 3 получается дробь $\frac{5}{3}$. Если дробь невозможно сократить, она называется **несократимой**; такова, например, дробь $\frac{5}{3}$. Очевидно, дробь несократима тогда и только тогда, когда ее числитель и знаменатель взаимно просты.

Если разделить числитель и знаменатель сократимой дроби на их Н. О. Д., получится несократимая дробь, которая называется **несократимым представлением** данной дроби. Например, $\frac{5}{3}$ есть несократимое представление каждой из дробей $\frac{10}{6}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{40}{24}$. Несократимая дробь, как ясно из определения, является несократимым представлением для себя самой.

Теперь можно сформулировать следующее основное определение.

Две дроби называются **равными**, если их несократимые представления совпадают.

Например, дроби $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{40}{24}$ все равны между собой.

Кроме того, дробь со знаменателем 1 считается равной своему числителю. Поэтому всякая дробь, которую можно сократить до дроби со знаменателем 1, равна некоторому целому неотрицательному числу.

Для обозначения равенства дробей пользуются знаком =, например: $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$; $\frac{8}{4}=\frac{2}{1}=2$ и т. п.

Дроби и целые неотрицательные числа мы будем называть в дальнейшем **неотрицательными рациональными числами**. (Происхождение термина «рациональное число» будет объяснено в разделе 3.5.) При этом о равных дробях всегда говорят как об *одном* и *том же числе*. (Говорят, например: «Существует только одно число, являющееся решением уравнения $2x = 3$», хотя это число может быть выражено любой из дробей $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{6}$ и т. д.; иначе говоря, все эти дроби суть разные записи одного и того же числа. Точно так же дроби $\frac{5}{1}$, $\frac{10}{2}$ и т. д. — разные записи *целого* числа 5.)

Теорема. (Необходимое и достаточное условие* равенства дробей.) Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Доказательство. 1) Пусть $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Это значит, что несократимые представления данных дробей совпадают, т. е. существует такая несократимая дробь $\frac{e}{f}$ и такие натуральные числа k, l, что $a = ke$, $b = kf$, $c = le$, $d = lf$. Но тогда $ad = (ke)\cdot(lf) = klef$, $bc = (kf)\cdot(le) = klef$, откуда $ad = bc$.

2) Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — две дроби, такие, что $ad = bc$, и пусть $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{c_1}{d_1}$ — их несократимые представления. Нам нужно доказать, что эти несократимые представления совпадают, т. е. что $a_1 = c_1$, $b_1 = d_1$.

---

* Если A и B — два предложения, такие, что из истинности A следует истинность B, говорят, что A есть **достаточное условие** для B, а B есть **необходимое условие** для A. Например, для того чтобы натуральное число делилось на 6, необходимо (но не достаточно), чтобы оно было четным; чтобы число было четным, достаточно (но не необходимо), чтобы оно делилось на 6. Если A есть необходимое и достаточное условие для B (или, что то же самое, B есть необходимое и достаточное условие для A), это значит, что A и B равносильны. Например, для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Тот факт, что $\frac{a_1}{b_1}$ — несократимое представление дроби $\frac{a}{b}$, означает, что числа a_1 и b_1 взаимно просты и существует такое натуральное число k, что $a = ka_1$, $b = kb_1$. Точно так же c_1 и d_1 взаимно просты и существует такое натуральное l, что $c = lc_1$, $d = ld_1$. Равенство $ad = bc$ можно переписать теперь в виде $(ka_1)\cdot(ld_1) = (kb_1)\cdot(lc_1)$, откуда $a_1d_1 = b_1c_1$. Из этого равенства видно, что произведение a_1d_1 делится на b_1. А отсюда, поскольку a_1 взаимно просто с b_1, по 9-му свойству делимости (см. раздел 1.10) следует, что d_1 делится на b_1. Но из равенства $a_1d_1 = b_1c_1$ видно также, что b_1c_1 делится на d_1, и отсюда, поскольку c_1 взаимно просто с d_1, следует, что b_1 делится на d_1. Таким образом, каждое из двух натуральных чисел b_1 и d_1 делится на другое, а это возможно лишь в том случае, когда они равны. Итак, мы доказали, что $b_1 = d_1$. Но теперь из равенства $a_1d_1 = b_1c_1$ получается $a_1d_1 = d_1c_1$, откуда $a_1 = c_1$. Доказательство окончено.

Следствие. При умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же число получается дробь, равная данной.

В самом деле, если $c = ak$, $d = bk$, то $ad = abk = bak = bc$.

2.3. Приведение к общему знаменателю. Сравнение дробей по величине

В предыдущем разделе мы доказали, что при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же натуральное число получается дробь, равная данной. Это дает возможность любые две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ **привести к общему знаменателю**, т. е. найти соответственно равные им дроби, знаменатели которых совпадают. Для этого нужно найти такие натуральные числа k и l, чтобы kb равнялось ld, и умножить числитель и знаменатель первой дроби на k, а второй на l. Число $kb = ld$ должно быть, таким образом, общим кратным чисел b и d. Числа k и l называют обычно **дополнительными множителями**. Наименьшим общим знаменателем для двух данных дробей будет, очевидно, их Н. О. К.

Например, для дробей $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{10}$ наименьший общий знаменатель есть 60, дополнительные множители равны соответственно 5 и 6, приведение к общему знаменателю дает дроби $\frac{25}{60}$ и $\frac{42}{60}$. Другим возможным общим знаменателем будет 120; дополнительными множителями будут тогда числа 10 и 12, и мы получим дроби $\frac{50}{120}$ и $\frac{84}{120}$. В качестве общего знаменателя для этих дробей можно взять также любое из чисел 180, 240, 300, 360 и т. д.

Таким образом, чтобы привести дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к наименьшему общему знаменателю, нужно найти Н. О. К. чисел b и d (см. раздел 1.14) и взять его в качестве общего знаменателя, а затем умножить a на произведение всех простых сомножителей Н. О. К., не входящих в разложение b, а c — на произведение всех простых сомножителей Н. О. К., не входящих в разложение d.

Пример. Приведем к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{899}{8400}$ и $\frac{3211}{1980}$. Разложим их знаменатели на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 8400 & 2 \\ 4200 & 2 \\ 2100 & 2 \\ 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Таким образом: $8400 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$; $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Н. О. К. этих чисел есть $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 277200$, дополнительные множители равны $3 \cdot 11 = 33$ и $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$. Получаем:

$$\frac{899}{8400} = \frac{899 \cdot 33}{8400 \cdot 33} = \frac{29667}{277200}; \quad \frac{3211}{1980} = \frac{3211 \cdot 140}{1980 \cdot 140} = \frac{449540}{277200}.$$

Разумеется, в более простых случаях эту процедуру или некоторые ее части можно (и нужно) проводить в уме. Заметим также, что: а) если b делится на d, то наименьший общий знаменатель дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равен b, а дополнительные множители равны единице и частному от деления b на d; б) если b и d взаимно просты, то наименьший общий знаменатель дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равен bd, а дополнительные множители равны d и b. Например, приведение к наименьшему общему знаменателю дробей $\frac{16}{21}$ и $\frac{5}{7}$ дает $\frac{16}{21}$ и $\frac{15}{21}$, дробей $\frac{5}{12}$ и $\frac{8}{35}$ — $\frac{175}{420}$ и $\frac{96}{420}$. (Конечно, произведение знаменателей **любых** двух дробей является их общим знаменателем, но не всегда наименьшим.)

Аналогичным образом можно приводить к общему знаменателю три дроби или более. Например, для дробей $\frac{9}{8}$, $\frac{2}{14}$ и $\frac{8}{15}$ наименьший общий знаменатель есть $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$, дополнительные множители равны $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ и $2^3 \cdot 7 = 56$, приведение к наименьшему общему знаменателю дает дроби $\frac{945}{840}$, $\frac{120}{840}$ и $\frac{448}{840}$.

Приведение к общему знаменателю используется, в частности, для сравнения дробей по величине. Какой смысл должны иметь для дробей понятия «больше» и «меньше», легко понять, обратившись к главной практической задаче, решаемой с помощью дробей — измерению. Из двух дробей, выражающих длины отрезков (при одном и том же выборе единицы длины), естественно считать меньшей ту, которая соответствует более короткому отрезку. Если при этом знаменатели дробей совпадают, то более короткому отрезку отвечает та из них, у которой меньше числитель. В самом деле, если длина отрезка P_1Q_1 выражается дробью $\frac{a_1}{b}$, а длина отрезка P_2Q_2 — дробью $\frac{a_2}{b}$, это значит, что число b-тых долей единичного отрезка, укладывающегося в P_1Q_1, равно a_1, а число таких же долей, укладывающих в P_2Q_2, равно a_2, так что если $a_1 < a_2$, то отрезок P_1Q_1 равен некоторой части отрезка P_2Q_2. В общем же случае для того, чтобы узнать, какая из двух дробей больше, нужно привести их к общему знаменателю и сравнить числители. Например, $\frac{9}{22} < \frac{7}{16}$, т. к. приведение этих дробей к (наименьшему) общему знаменателю дает соответственно $\frac{72}{176}$ и $\frac{77}{176}$.

Отсюда следует, между прочим, что всякая правильная дробь меньше единицы, а всякая неправильная больше или равна единице. (Напомним, что дробь называется **правильной**, если ее числитель меньше знаменателя, и **неправильной**, если числитель больше или равен знаменателю.) В самом деле, по определению равенства дроби и натурального числа единице, равны те и только те дроби, несократимым представлением которых служит дробь $\frac{1}{1}$, — иначе говоря, те, у которых числитель равен знаменателю.

2.4. Арифметические действия над дробями

Чтобы уяснить смысл арифметических действий над дробями, мы снова обратимся к задаче измерения.

Сложение

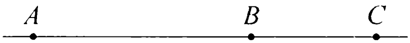


Рис. 2.1

Пусть A, B, C — точки одной прямой, причем точка B расположена между A и C (рис. 2.1). Если длины отрезков AB, BC и AC равны некоторым дробям, то дробь, равную длине AC, естественно считать суммой дробей, равных длинам AB и BC. Способ нахождения такой дроби очевиден в случае, когда знаменатели первых двух дробей совпадают: если длина отрезка AB равна дроби $\frac{a_1}{b}$, а длина отрезка BC — дроби $\frac{a_2}{b}$, т. е. число b-тых долей единичного отрезка, укладывающихся в AB, равно a_1, а число укладывающихся в BC равно a_2, то в отрезке AC укладывается, очевидно, $a_1 + a_2$ таких долей, — иначе говоря, длина отрезка AC равна дроби $\frac{a_1 + a_2}{b}$. А когда знаменатели данных дробей различны, нужно привести их к общему знаменателю и затем сложить числители. Это приводит нас к следующему определению:

Суммой дробей $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ называется дробь $\frac{k_1a_1 + k_2a_2}{b}$, где b — общий знаменатель данных дробей, а k_1 и k_2 — соответствующие дополнительные множители. (Если $b_1 = b_2$, можно положить $b = b_1 = b_2$, $k_1 = k_2 = 1$.)

Подчеркнем, что мы сформулировали сейчас не просто «правило сложения дробей», а именно *определение*. Соображения относительно длин отрезков были нам нужны только для того, чтобы понять, почему сумму дробей естественно определить именно так.

Действие, с помощью которого находят сумму дробей, называется **сложением дробей**. Оно обозначается обычным знаком + (например: $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{12} = \frac{11}{12}$). Дроби, которые складываются, называются **слагаемыми**. Разумеется, при сложении одних и тех же двух дробей могут получаться разные дроби в зависимости от того, к какому общему знаменателю мы приводим слагаемые. Но все эти дроби равны между собой. В самом деле, любой общий знаменатель двух данных дробей является кратным их наименьшего общего знаменателя, т. е. получается из него умножением на некоторое натуральное число l. При этом дополнительные множители тоже умножаются на l. Поэтому если наименьший общий знаменатель дробей $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ есть b и при сложении их получается дробь $\frac{k_1a_1 + k_2a_2}{b}$, то всякая другая дробь, получающаяся при их сложении, имеет вид $\frac{lk_1a_1 + lk_2a_2}{lb}$, где l — некоторое натуральное число. Но дробь $\frac{lk_1a_1 + lk_2a_2}{lb} = \frac{l(k_1a_1 + k_2a_2)}{lb}$ равна дроби $\frac{k_1a_1 + k_2a_2}{b}$.

Необходимо еще убедиться, что если в двух суммах дробей слагаемые соответственно равны, то равны и суммы, т. е. что если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$ и $\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}$, то $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2}$.

Докажем это. Только что мы показали, что результаты сложения дробей не зависят от того, к какому общему знаменателю мы их приводим. Поэтому имеем, в частности:

$$(1) \qquad \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{b_2a_1 + b_1a_2}{b_1b_2}; \qquad \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} = \frac{d_2c_1 + d_1c_2}{d_1d_2}.$$

Но из равенств $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}$ следует, что $a_1d_1 = b_1c_1$, $a_2d_2 = b_2c_2$.

Поэтому $(b_2a_1 + b_1a_2)d_1d_2 = b_2a_1d_1d_2 + b_1a_2d_2d_1 = b_2b_1c_1d_2 + b_1b_2c_2d_1 =$ $= b_1b_2(d_2c_1 + d_1c_2)$. Следовательно, правые части равенств (1) равны.

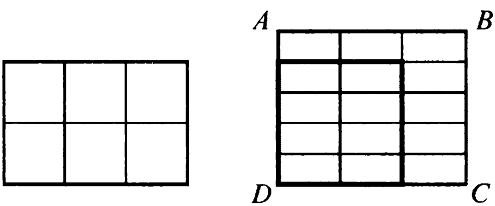
Умножение

Чтобы уяснить себе смысл умножения дробей, мы обратимся к задаче измерения площадей. В общем случае эта задача сложнее измерения длин, т. к. фигуры, площади которых нужно измерять, могут иметь самую разную форму. Но нам достаточно рассмотреть самый простой случай — измерение площадей прямоугольников.

Подобно тому, как длины отрезков измеряются с помощью единичного отрезка, площади прямоугольников измеряются с помощью **единичного квадрата**, т. е. квадрата, стороны которого — единичные отрезки. Если длины сторон — натуральные числа k и l, это значит, что в одной из сторон единичный отрезок укладывается ровно k раз, а в другой ровно l раз. Но тогда в прямоугольнике ровно kl раз укладывается единичный квадрат (см. рис. 2.2, *а*, где $k = 3$, $l = 2$), так что площадь прямоугольника равна kl.

Таким образом, в случае, когда длины сторон прямоугольника — натуральные числа, его площадь равна произведению длин сторон. Поэтому естественно определить произведение дробей так, чтобы это правило сохранилось, т. е. считать произведением двух дробей такую дробь, которая выражает площадь прямоугольника, если данные дроби выражают длины его сторон. Но что значит, что площадь прямоугольника выражается дробью $\frac{a}{b}$? Это значит, что в прямоугольнике ровно a раз укладывается b-тая доля единичного квадрата (т. е. такая фигура — например, прямоугольник, — которая укладывается в единичном квадрате ровно b раз).

Пусть теперь длины сторон AB и CD прямоугольника выражаются дробями $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ (см. рис. 2.2, *б*, где $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $a_2 = 5$, $b_2 = 4$). Найдем дробь, выражающую площадь квадрата. Для этого разделим сторону AB на a_1 равных отрезков длины $\frac{1}{b_1}$ и через точки деления проведем прямые, параллельные AD, а сторону AD разделим на a_2 равных отрезков длины $\frac{1}{b_2}$ и через точки деления проведем прямые, параллельные AB. В результате прямоугольник $ABCD$ разобьется на a_1a_2 маленьких прямоугольников, стороны каждого из которых равны $\frac{1}{b_1}$ и $\frac{1}{b_2}$. Но в единичном квадрате таких маленьких прямоугольников укладывается ровно b_1b_2. (На рис. 2.2, *б* единичный квадрат выделен более жирными линиями.) Таким образом, в прямоугольнике $ABCD$ укладывается ровно a_1a_2 m-тых долей единичного квадрата, где $m = b_1b_2$, иначе говоря, площадь этого прямоугольника выражается дробью $\frac{a_1a_2}{b_1b_2}$. Значит, именно эту дробь естественно считать произведением дробей $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$.



а *б*

Рис. 2.2

Итак, мы пришли к следующему определению.

Произведением дробей $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ называется дробь $\frac{a_1a_2}{b_1b_2}$.

Легко убедиться, что если в двух произведениях сомножители соответственно равны, то равны и произведения. В самом деле, если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$ и $\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}$, то $a_1d_1 = b_1c_1$ и $a_2d_2 = b_2c_2$, а отсюда следует, что $(a_1a_2)(d_1d_2) =$

$= (a_1d_1)(a_2d_2) = (b_1c_1)(b_2c_2) = (b_1b_2)(c_1c_2)$ и поэтому $\dfrac{a_1a_2}{b_1b_2} = \dfrac{c_1c_2}{d_1d_2}$.

Действие, с помощью которого находят произведение дробей, называется **умножением дробей**. Оно обозначается обычным знаком · (или ×). Дроби, которые перемножаются, называются **сомножителями**; первую из них называют также **множимым**, вторую — **множителем**.

Вычитание и деление

Эти действия определяются для дробей точно так же, как для натуральных чисел: как действия, обратные сложению и умножению. **Вычесть** дробь $\dfrac{a_2}{b_2}$ из дроби $\dfrac{a_1}{b_1}$ значит найти такую дробь ξ, что $\dfrac{a_2}{b_2} + \xi = \dfrac{a_1}{b_1}$; **разделить** дробь $\dfrac{a_1}{b_1}$ на дробь $\dfrac{a_2}{b_2}$ значит найти такую дробь ξ, что $\dfrac{a_2}{b_2} \cdot \xi = \dfrac{a_1}{b_1}$. Обозначаются эти действия теми же символами, что и одноименные действия над натуральными числами, и точно так же используются термины **разность**, **уменьшаемое**, **вычитаемое**, **частное**, **делимое**, **делитель**.

Разность двух дробей можно найти по следующему правилу: $\dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{k_1a_1 - k_2a_2}{b}$, где b — общий знаменатель данных дробей, а k_1 и k_2 — соответствующие дополнительные множители. В самом деле, по определению сложения имеем: $\dfrac{a_2}{b_2} + \dfrac{k_1a_1 - k_2a_2}{b} = \dfrac{k_2a_2 + (k_1a_1 - k_2a_2)}{b} = \dfrac{k_1a_1}{b} = \dfrac{k_1a_1}{k_1b_1} = \dfrac{a_1}{b_1}$, так что $\dfrac{k_1a_1 - k_2a_2}{b}$ есть та самая дробь, которая, будучи прибавлена к $\dfrac{a_2}{b_2}$, дает $\dfrac{a_1}{b_2}$. Например: $\dfrac{5}{6} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{4 \cdot 5 - 3 \cdot 3}{24} = \dfrac{11}{24}$.

Частное от деления дроби на дробь вычисляется по такому правилу: $\dfrac{a_1}{b_1} : \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_1b_2}{b_1a_2}$. В самом деле, по определению умножения $\dfrac{a_2}{b_2} \cdot \dfrac{a_1b_2}{b_1a_2} = \dfrac{a_2a_1b_2}{b_2b_1a_2} = \dfrac{a_1}{b_1}$, так что $\dfrac{a_1b_2}{b_1a_2}$ — та самая дробь, на которую нужно умножить $\dfrac{a_2}{b_2}$, чтобы получить $\dfrac{a_1}{b_1}$. Например: $\dfrac{14}{9} : \dfrac{13}{5} = \dfrac{14 \cdot 5}{9 \cdot 13} = \dfrac{70}{117}$.

Подчеркнем, что в отличие от «правил» сложения и умножения дробей, представляющих собой на самом деле определения этих действий, сформулированные только что правила вычитания и деления *выведены* из определений.

Можно доказать, что разность двух дробей единственна с точностью до равенства, т. е. что если $\frac{a_2}{b_2}+\xi=\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}+\xi'=\frac{a_1}{b_1}$, то $\xi=\xi'$; аналогично для частного. (Чтобы это доказать, достаточно установить, что из $\frac{c}{d}<\frac{c'}{d'}$ следует $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<\frac{a}{b}+\frac{c'}{d'}$; аналогично для умножения. В самом деле, если это доказано, то, допустив, что $\frac{a_2}{b_2}+\xi=\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}+\xi'=\frac{a_1}{b_1}$ и $\xi\neq\xi'$, будем иметь либо $\xi<\xi'$, либо $\xi>\xi'$, а отсюда будет следовать $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1}{b_1}$, что невозможно; для частного так же. Читатель может попробовать восстановить пропущенное доказательство.)

Легко видеть, что разность $\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}$ существует тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1}\geqslant\frac{a_2}{b_2}$. Действительно, по правилу вычитания дробей эта разность есть дробь $\frac{k_1a_1-k_2a_2}{b}$, где b — общий знаменатель данных дробей и k_1, k_2 — соответствующие дополнительные множители. Значит, она существует тогда и только тогда, когда существует разность $k_1a_1-k_2a_2$, т. е. когда $k_1a_1\geqslant k_2a_2$. А это и значит, что дробь $\frac{a_1}{b_1}$ больше или равна дроби $\frac{a_2}{b_2}$ (см. раздел 2.3).

Что же касается частного $\frac{a_1}{b_1}:\frac{a_2}{b_2}$, то оно, как видно из правила деления дробей, существует, когда $a_2\neq 0$ — иначе говоря, когда дробь $\frac{a_2}{b_2}$ отлична от нуля. Таким образом, благодаря введению дробей деление действительно становится всегда выполнимым, за единственным исключением деления на нуль, которое остается невозможным. (Чтобы доказать невозможность деления на нуль, достаточно слово в слово повторить рассуждения, проведенные в разделе 3 главы 1 для целых чисел.)

Замечания. 1) Поскольку дробь со знаменателем 1 равна своему числителю, частное от деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b равно частному от деления дроби $\frac{a}{1}$ на дробь $\frac{b}{1}$, а это частное есть дробь $\frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$. Этим оправдывается употребление для обозначения дробей того же знака — горизонтальной черты — что и для деления.

2) Если $\frac{a}{b}$ — произвольная дробь, то, разделив с остатком a на b, получим: $\frac{a}{b} = \frac{bk + r}{b} = \frac{bk}{b} + \frac{r}{b} = \frac{k}{1} + \frac{r}{b} = k + \frac{r}{b}$, где $r < b$. Если данная дробь неправильная, т. е. $a \geqslant b$, то $k > 0$, т. е. k является натуральным числом. Таким образом, всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби. Например, $\frac{38}{5} = 7 + \frac{3}{5}$. Такие суммы иногда называют **смешанными числами**. При записи смешанных чисел знак + часто опускают: например, вместо $7 + \frac{3}{5}$ пишут $7\frac{3}{5}$.

Основные свойства сложения и умножения дробей таковы же, как свойства сложения и умножения натуральных чисел (раздел 1.2):

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$;
2. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$;
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$;
4. $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$;
5. $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$;
6. $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$;
7. $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$;
8. $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$.

Сохраняются и названия свойств: например, свойство 1 называется переместительным, или коммутативным, законом сложения дробей.

Доказательства этих свойств основаны на соответствующих свойствах действий над целыми неотрицательными числами. Все они могут быть проведены по одной схеме: выполняем действия в левой и правой частях доказываемого равенства и убеждаемся, что в обоих случаях получается одна и та же дробь. Например, коммутативный закон для сложения дробей можно доказать так: по определению суммы дробей $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=\frac{k_1a_1+k_2a_2}{b}$ и $\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_1}{b_1}=\frac{k_2a_2+k_1a_1}{b}$, где b — общий знаменатель данных дробей, k_1 и k_2 — дополнительные множители. Но $k_1a_1 + k_2a_2 = k_2a_2 + k_1a_1$ (по коммутативному закону для сложения целых неотрицательных чисел) и поэтому $\frac{k_1a_1+k_2a_2}{b}=\frac{k_2a_2+k_1a_1}{b}$. Остальные свойства доказываются аналогично.

2.5. Десятичные и другие систематические дроби

Дроби со знаменателями $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ и т. д. называются, как Вы знаете, **десятичными**. (Таким образом, целые неотрицательные числа, т. е. дроби со знаменателем $1 = 10^0$ — частный случай десятичных дробей.)

Пусть $\frac{a}{10^k}$ — десятичная дробь со знаменателем, не равным единице (т. е. $k > 0$). В десятичной системе число 10^k записывается как $1\underbrace{0...0}_{k\text{ раз}}$, являясь, таким образом, наименьшим $(k + 1)$-значным числом. Поэтому число цифр в десятичной записи числа a меньше или равно k, если данная дробь правильная (т. е. $a < 10^k$), и больше k, если дробь неправильная. Это дает возможность записывать десятичные дроби следующим очень удобным способом. Если дробь неправильная, то в десятичной записи числа a отделяют k цифр справа, ставят в этом месте запятую, и это выражение служит записью дроби: например, вместо $\frac{43807}{1000}$ пишут 43,807; вместо $\frac{90003}{10000}$ — 9,0003; вместо $\frac{3020}{100}$ — 30,20. Если же дробь правильная, то в случае, когда число цифр в десятичной записи a равно k, перед этой записью пишут нуль и после него ставят запятую, а когда число цифр в записи a меньше k, сразу после запятой добавляют еще столько нулей, чтобы в результате общее число цифр после запятой стало равно k. Например, вместо $\frac{63}{100}$ пишут 0,63; вместо $\frac{72}{100000}$ — 0,00072.

Часто **десятичными дробями** называют лишь дроби, записанные указанным сейчас способом, противопоставляя их **обыкновенным дробям**, т. е. дробям, записанным с помощью горизонтальной черты (так что дроби $\frac{7}{10}$, $\frac{23}{1000}$ и т. п. тоже считаются обыкновенными). Чтобы превратить десятичную дробь (в этом понимании) в обыкновенную, нужно, очевидно, записать в знаменателе единицу со столькими нулями, сколько цифр после запятой, а в числителе — то число, которое получается из данной десятичной дроби отбрасыванием запятой и всех нулей, стоящих левее первой значащей цифры*, если такие нули есть. Если ни одной значащей цифры нет, в числителе пишется 0. Например: $87{,}04 = \frac{8704}{100}$; $0{,}0040 = \frac{40}{10000}$; $0{,}000 = \frac{0}{1000}$.

Решение обратной задачи — превращение обыкновенной дроби в десятичную — столь же просто, если данная дробь уже является десятичной «в широком смысле», т. е. ее знаменатель есть степень числа 10. Как решить эту задачу в общем случае?

Прежде всего легко понять, что для произвольной дроби тогда и только тогда существует равная ей десятичная дробь, когда знаменатель ее несократимого представления не делится ни на какие простые числа, кроме двойки и пятерки.

В самом деле:

а) Если знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ удовлетворяет этому условию, то его разложение на простые множители (см. раздел 1.13) имеет вид $b = 2^k5^l$ ($k, l = 0, 1, 2, \ldots$). Если $k = l$, то $b = 10^k$; если же $k \neq l$, то, умножая числитель и знаменатель на 2^{l-k} (при $l > k$) или на 5^{k-l} (при $k > l$), получаем дробь со знаменателем 10^l или 10^k.

б) Всякая дробь, равная несократимой дроби $\frac{a}{b}$, имеет вид $\frac{ac}{bc}$ (см. определение равенства дробей в разделе 2.2). Поэтому, если b делится на простое число p, отличное от 2 и 5, то и у всякой дроби, равной $\frac{a}{b}$, знаменатель делится на p; но никакое число вида 10^k на p не делится.

Как превратить обыкновенную дробь в десятичную, ясно из только что приведенного рассуждения: нужно полностью сократить данную дробь (если она не является уже несократимой), затем разложить знаменатель на простые множители и, убедившись, что разложение имеет вид 2^k5^l (если это не так — задача неразрешима), умножить числитель и знаменатель на 2^{l-k} (если $k > l$) или на 5^{k-l} (если $k > l$). Например,
$$\frac{63}{120} = \frac{21}{40} = \frac{21}{2^3\cdot 5} = \frac{21\cdot 5^2}{2^3\cdot 5^3} = \frac{525}{10^3} = 0{,}525;\quad \frac{427}{175} = \frac{61}{25} = \frac{61}{5^2} = \frac{61\cdot 2^2}{2^2\cdot 5^2} = \frac{244}{10^2} = 2{,}44.$$

---

* **Значащими цифрами** называют иногда все цифры, отличные от нуля.

Но есть и другой способ превращения обыкновенной дроби в десятичную: умножить числитель на такую степень десяти (т. е. дописать к нему столько нулей), чтобы полученное число делилось без остатка на знаменатель, затем выполнить деление и в частном отделить запятой столько цифр справа, сколько было приписано нулей (что означает деление на ту же степень десяти). Поскольку не всегда легко определить, сколько нулей нужно приписать, обычно поступают так: делят с остатком числитель на знаменатель, затем, если остаток не равен нулю, приписывают к нему нуль и после последней цифры частного ставят запятую; остаток с приписанным к нему нулем делят на знаменатель и записывают частное (это всегда однозначное число, но оно может оказаться равным нулю) после запятой; если новый остаток не равен нулю, к нему снова приписывают нуль и повторяют все снова, и так до тех пор, пока не получится остаток, равный нулю. При этом, очевидно, число цифр после запятой будет равно числу приписанных нулей. Например:

$$\begin{array}{r|l} 137 & \underline{16\quad\;} \\ 90 & 8{,}5625 \\ 100 & \\ 40 & \\ 80 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33 & \underline{32\quad\;} \\ 100 & 1{,}03125 \\ 40 & \\ 80 & \\ 160 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & \underline{625\quad} \\ 70 & 0{,}0112 \\ 700 & \\ 750 & \\ 1250 & \\ 0 & \end{array}$$

В случае, когда числитель меньше знаменателя, процедуру упрощают: сначала дописывают к числителю, поставив после него запятую, столько нулей, чтобы получилось число, большее знаменателя, а в частном записывают нуль, запятую и после нее столько нулей, чтобы вместе с нулем до запятой их было столько же, сколько дописали к числителю; затем продолжают деление, как обычно. Последний пример запишется тогда так:

$$\begin{array}{r|l} 7{,}00 & \underline{625\quad} \\ 750 & 0{,}0112 \\ 1250 & \\ 0 & \end{array}$$

При этом не обязательно предварительно сокращать дробь и не обязательно даже проверять заранее, существует ли для данной дроби равная ей десятичная: если она существует, мы рано или поздно получим остаток, равный нулю. (Что будет, если она не существует, см. ниже, раздел 3.6.)

Запись десятичных дробей с помощью запятой позволяет сильно упростить все действия с ними. Чтобы привести две десятичные дроби к общему знаменателю, достаточно уравнять в них число цифр после запятой, приписав к той, где их меньше, соответствующее число нулей. Например, приводя к общему знаменателю дроби 0,0174 и 3,27, получаем 0,0174 и 3,2700. Поскольку, как уже говорилось, числитель десятичной дроби есть то число, которое получается отбрасыванием запятой (и всех нулей слева от первой значащей цифры, если они есть), а знаменатель — единица в степени, показатель которой равен числу цифр после запятой, очевидны следующие правила:

1) Чтобы сравнить две десятичные дроби по величине, нужно уравнять в них число цифр после запятой и сравнить полученные числа, не обращая внимания на запятые. Например: $5{,}6378 < 5{,}64$; $0{,}0093 < 0{,}012$; $0{,}371 < 0{,}372$.

2) Чтобы сложить две десятичные дроби или вычесть одну десятичную дробь из другой, нужно уравнять в них число цифр после запятой, сложить полученные числа или вычесть одно из другого, не обращая внимания на запятую, и в сумме (разности) отделить запятой столько же цифр справа, сколько было отделено в данных числах после уравнивания. Например:

$$\begin{array}{r} +\ 3{,}079 \\ 18{,}98407 \\ \hline 22{,}06307 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 47{,}81000 \\ 15{,}93562 \\ \hline 31{,}87438 \end{array}$$

В первом примере мы даже не дописали нули к первому слагаемому, т. к. действие легко производить и без этого; важно лишь, чтобы запятые были точно одна под другой.

3) Чтобы перемножить две десятичные дроби, нужно произвести умножение, не обращая внимания на запятые (т. е. перемножить числители), и в произведении отделить запятой столько цифр справа, сколько отделено в обоих сомножителях вместе (т. е. перемножить знаменатели). Если в произведении нет такого числа цифр, нужно дописать соответствующее число нулей слева. Например:

$$\begin{array}{r} \times\ 37{,}2 \\ 0{,}35 \\ \hline 1860 \\ 1116 \\ \hline 13{,}020 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 3{,}18 \\ 74 \\ \hline 1272 \\ 2226 \\ \hline 235{,}32 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 2{,}14 \\ 0{,}0021 \\ \hline 214 \\ 428 \\ \hline 0{,}004494 \end{array}$$

С делением дело обстоит сложнее. Если разделить одну десятичную дробь на другую по общему правилу деления дробей (раздел 2.4), то полученная дробь не обязательно будет десятичной и даже не обязательно будет равна какой-нибудь десятичной дроби, например:

$$0{,}045 : 0{,}4 = \frac{45}{1000} : \frac{4}{10} = \frac{45 \cdot 10}{4 \cdot 1000} = \frac{45}{400} = \frac{9}{80};$$

$$0{,}4 : 0{,}045 = \frac{4}{10} : \frac{45}{1000} = \frac{4 \cdot 1000}{45 \cdot 10} = \frac{400}{45} = \frac{80}{9}.$$

Если частное от деления десятичных дробей равно некоторой десятичной дроби, ее можно найти, пользуясь указанным выше правилом обращения обыкновенной дроби в десятичную. Так, в первом из только что приведенных примеров получаем:

$$
\begin{array}{r|l}
45{,}0 & \underline{400} \\
500 & 0{,}1125 \\
1000 & \\
2000 & \\
0 &
\end{array}
$$

Очень просто производится умножение и деление на натуральные числа 10; 100; 1000, ... и десятичные дроби 0,1; 0,01; 0,001; ... . Чтобы умножить десятичную дробь на $1\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ раз}}$ или разделить на $0,\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{k-1\text{ раз}}1$, достаточно перенести запятую на k цифр вправо, а если в делимом после запятой меньше k цифр, дописать справа недостающее до k число нулей. Чтобы умножить десятичную дробь на $0,\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{k-1\text{ раз}}1$ или разделить на $1\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ раз}}$, достаточно перенести запятую на k цифр влево (дописав слева, если нужно, соответствующее число нулей). Например:

$$4{,}15\cdot 10 = 4{,}15 : 0{,}1 = 41{,}5;$$
$$4{,}15\cdot 100 = 4{,}15 : 0{,}01 = 415;$$
$$4{,}15\cdot 100000 = 4{,}15 : 0{,}00001 = 415000.$$
$$360{,}2\cdot 0{,}1 = 360{,}2 : 10 = 36{,}02;$$
$$360{,}2\cdot 0{,}001 = 360{,}2 : 1000 = 0{,}3602;$$
$$360{,}2\cdot 0{,}00001 = 360{,}2 : 100000 = 0{,}003602.$$

Если бы мы пользовались позиционной записью натуральных чисел, основанной не на десятичной, а на какой-нибудь другой системе счисления (см. раздел 1.7), то было бы удобно пользоваться дробями со знаменателями вида N^k, где N — основание системы счисления. В общем случае для произвольного натурального числа $N > 1$ дроби со знаменателями N^0, N^1, N^2, ..., записанные по способу, описанному в начале этого параграфа для случая $N = 10$, называются **систематическими дробями** с основанием N. Например, дроби, имеющие в обычной (десятичной) записи вид $\frac{19}{25}$, $\frac{7}{125}$, $\frac{68}{5}$, $\frac{15}{625}$, запишутся в виде систематических пятеричных дробей следующим образом: 0,34; 0,012; 23,3; 0,0030. Дроби, имеющие в обычной записи вид $\frac{5}{8}$, $\frac{38}{16}$, $\frac{7}{64}$, в виде двоичных дробей запишутся так: 0,101; 10,0110; 0,000111. Дроби, записываемые обычным способом как $\frac{5}{6}$, $\frac{29}{216}$, $\frac{99}{36}$, $\frac{144}{1296}$, в шестеричной системе получат такой вид: 0,5; 0,045; 2,43; 0,0400.

Нетрудно доказать, что для несократимой дроби тогда и только тогда существует равная ей систематическая дробь с основанием N, когда все простые делители ее знаменателя являются делителями числа N. (Доказательство совершенно аналогично тому, которое было проведено выше для случая $N = 10$. Мы предоставляем его читателю.) В частности, если само N — простое, то несократимую дробь можно представить в виде систематической дроби с основанием N лишь тогда, когда ее знаменатель имеет вид N^k.

Превращение обыкновенных дробей в систематические и действия над систематическими дробями можно производить так же, как в случае десятичных дробей. Например, чтобы превратить дробь $\frac{51234}{43}$, где числитель и знаменатель записаны в шестеричной системе, в шестеричную дробь, выполняем (в шестеричной системе) деление «уголком»:

$$
\begin{array}{l|l}
51234 & 43 \\
\underline{43} & \overline{1055,252} \\
423 & \\
\underline{343} & \\
404 & \\
\underline{343} & \\
210 & \\
\underline{130} & \\
400 & \\
\underline{343} & \\
130 & \\
\underline{130} & \\
0 &
\end{array}
$$

В следующих примерах действия также производятся в шестеричной системе:

$$
\begin{array}{r}
54,123 \\
+\ \underline{243,45} \\
342,013
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
312,25 \\
-\ \underline{54,0544} \\
214,1512
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\ 3,014 \\
\underline{0,0503} \\
13050 \\
\underline{23122} \\
0,2325250
\end{array}
$$

Задания. 1) Проверьте вычисления только что приведенных примеров переводом в десятичную систему. (Шестеричные дроби должны записываться при этом как обыкновенные: например, 1055,252 запишется как $\frac{54320}{216}$ или $251\frac{104}{216}$.)

2) Превратите следующие дроби, записанные в десятичной системе, в двоичные: $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{4}{16}, \frac{15}{16}, \frac{1}{64}, \frac{9}{64}, \frac{33}{64}, \frac{63}{64}$.

3) Превратите следующие двоичные дроби в обыкновенные и запишите в десятичной системе: 1,0011; 0,010101; 0,11011; 0,001101.

2.6. Исторические сведения о дробях

Дроби были известны уже древним египтянам. Они использовали, однако, только дроби с числителем 1 и дробь $\frac{2}{3}$, для которой существовал специальный символ. Остальные дроби представлялись в виде сумм этих «основных» дробей. Например, величина, составляющая 5 шестых долей единицы, представлялась как $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, составляющая две пятых доли — как $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ (а не как $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ — египтяне, как правило, представляли дроби в виде сумм *различных* основных дробей). Разумеется, обозначения были другие.

Существенно более высокого уровня, чем в Египте, достигла математическая культура в древнем Двуречье. Там ученые изобрели позиционную систему записи натуральных чисел, но не десятичную, а шестидесятеричную, а также систематические дроби с основанием 60.

Как Вы, вероятно, знаете, в Двуречье писали на глиняных табличках клинообразными знаками. Такие знаки использовались и для записи чисел. Натуральные числа от 1 до 59 включительно записывались по десятичной непозиционной системе с помощью двух знаков: вертикального клина острием вниз, обозначавшего единицу, и заостренной влево угловой скобки, обозначавшей 10. Например, четыре клина означали 4, три скобки — 30, пять клиньев и две скобки — 52. Однако любая из этих 59 записей могла обозначать также соответствующее число, умноженное или деленное на 60, или на 60^2, или на 60^3 и т. д.; например, запись из двух скобок и одного клина могла служить обозначением любого из чисел 21, $21 \cdot 60 = 1260$, $21 \cdot 60^2 = 75600$, $\frac{21}{60}$, $\frac{21}{3600}$ и т. д. Способ обозначения произвольных натуральных чисел ясен из следующего примера, в котором по техническим причинам клинья заменены вертикальными черточками: запись |||⟨|| | означает $3 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60 + 1 = 11521$. (Пробел между последними двумя клиньями отделяет цифру последнего разряда — единицу — от «цифры» предпоследнего разряда, равной двенадцати; если бы пробела не было, получилось бы число $3 \cdot 60 + 13 = 193$. Между предпоследним разрядом и предшествующим ему пробел не нужен, т. к. здесь недоразумение невозможно.) Эта запись могла, впрочем, обозначать также и любое число, полученное из 11521 умножением или делением на 60 в какой-нибудь степени, и даже такие числа, как $3 \cdot 60^3 + 12 \cdot 60 + 1$ или $3 \cdot 60^5 + 12 \cdot 60^3 + 1$ — ведь нуля в этой системе не было, как не было и знака, отделяющего целую часть от дробной. Содержание задачи часто помогало понять, как правильно читать запись: если говорилось, например, о стене высотой в «две скобки локтей», было ясно, что это означает 20, а не 1200 и не $\frac{20}{60}$. Тем не менее отсутствие нуля создавало серьезные неудобства, особенно в тех случаях, когда был пропущен разряд в середине записи числа. Со временем пропущенные разряды стали отмечать специальным знаком. В вавилонских математических текстах эллинистической эпохи этот знак систематически употребляется для обозначения пустых разрядов в середине записи, а в астрономических текстах того же времени — и на краях записей чисел.

В древнегреческой арифметике, многое заимствовавшей у египтян и вавилонян, использовались три системы дробей: египетские «основные дроби», обыкновенные дроби, по существу такие же, как наши (они были изобретены, по мнению многих исследователей, самими греками), и вавилонские шестидесятеричные. Для обыкновенных дробей употреблялись различные символические обозначения; одно из них было, подобно принятому у нас сейчас, «двухэтажным», с той только разницей, что числитель записывался под знаменателем и между ними не было черты. Стоит также заметить, что словесное выражение обыкновенных дробей в греческом языке совершенно аналогично русскому: например, дробь $\frac{7}{60}$ выражается словами ἑπτὰ ἑξηκοστά — буквально «семь шестидесятых»*.

Шестидесятеричные дроби употреблялись только в тригонометрических вычислениях, производившихся для нужд астрономии. Эти вычисления требовали такой точности, какой затруднительно было бы достичь при пользовании обыкновенными дробями (и тем более египетскими), т. к. при этом пришлось бы производить действия над большими натуральными числами, что при непозиционной записи очень трудно. Поэтому греческие астрономы пользовались вавилонской системой шестидесятеричных дробей, которая, однако, приобрела у них несколько другой вид. В отличие от вавилонян они использовали шестидесятеричную систему только для записи дробей; целые числа они записывали по ионийской системе (см. раздел 1.6).

Греческие астрономы делили окружность на 360 частей (это деление тоже было заимствовано у вавилонян), обозначавшихся символом μ° (от μοῖρα — часть). Шестидесятые доли этих частей назывались λεπτά (мелкие) или просто ἑξηκοστά (шестидесятые), иначе πρῶτα ἑξηκοστά (первые шестидесятые). Далее шли δεύτερα ἑξηκοστά (вторые шестидесятые) и τρίτα ἑξηκοστά (третьи шестидесятые). Первые, вторые и третьи шестидесятые обозначались одним, двумя и тремя штрихами; например, нашей записи $37^\circ4'55''$ отвечала запись $\mu^\circ\overline{\lambda\zeta}\delta'\overline{\nu\varepsilon}''$ ($\delta, \varepsilon, \zeta, \lambda, \nu$ — обозначе-

* Порядковое числительное ἑξηκοστός — шестидесятый — стоит здесь в форме именительного падежа множественного числа среднего рода, т. к. оно согласуется в роде и числе с подразумеваемым существительным μέρη — части, доли.

ния чисел 4, 5, 7, 30, 50 в ионийской нумерации). Эти обозначения сохранились почти без изменений до наших дней — исчезла только буква μ в обозначении градуса. Но греческие астрономы использовали шестидесятеричные дроби не только для измерения углов и дуг: радиус окружности они делили на 60 частей, каждая из которых делилась в свою очередь на первые, вторые и третьи шестидесятые.

Получившие впоследствии распространение в Европе и проникшие в новые европейские языки (в том числе в русский) латинские термины *minuta* (буквально «мелкая» или «уменьшенная»), *secunda*, *tertia* (буквально «вторая», «третья») соответствуют греческим словам λεπτά (мелкая), δεύτερα (вторая), τρίτα (третья) (но переведены, возможно, не прямо с греческого, а с арабского: средневековые европейские ученые со многими достижениями греческой науки знакомились через посредство арабов). Таким образом, принятый у нас сейчас способ измерения дуг и углов (и отчасти также времени) восходит к культуре древнего Двуречья, но дошел до нас сложным путем, как и многое другое из наследия древней культуры.

Десятичные дроби появились значительно позже. В середине XIV в. еврейский ученый Иммануил бен Якоб Бонфис из Тараскона написал трактат «Путь деления», в котором содержался краткий очерк теории десятичных дробей. Однако этот трактат, по-видимому, не получил распространения в то время. (Он был обнаружен в архиве и прочитан лишь в XX в.) С большой полнотой теория десятичных дробей была изложена в книге «Ключ к арифметике» самаркандского астронома и математика Джемшида Гиясэддина ал-Каши (писавшего на арабском языке); эта книга была закончена в 1427 г. Но в Европе она осталась неизвестной, и полтора столетия спустя десятичные дроби были заново изобретены фламандским инженером Симоном Стевином (Simon Stevin, 1548—1620). (Отдельные идеи, связанные с десятичными дробями, встречались в трудах европейских математиков и раньше.) Обозначения Стевина значительно отличались от нынешних и были менее удобны, но уже в конце XVI в. в работах разных авторов использовались обозначения, аналогичные принятым сейчас, а в начале XVII в. шотландский математик Джон Непер (John Napier, или Neper, 1550—1617), известный как изобретатель логарифмов, предложил отделять дробную часть от целой с помощью запятой.

2.7. Отрицательные числа

Сейчас нам предстоит еще раз расширить систему чисел — таким образом, чтобы в новой системе любое число можно было вычесть из любого другого, подобно тому, как после введения дробей любое число можно разделить на любое другое (кроме нуля).

Вычитание натуральных чисел мы определили в разделе 1.1 двумя способами: как действие, обратное сложению (вычесть число b из числа a значит найти такое число x, что $b + x = a$) и как действие, с помощью которого решается следующая задача: сколько предметов останется в совокупности, содержащей a предметов, если удалить из нее b предметов? Эта задача имеет смысл только при $a \geqslant b$; поэтому при $a < b$ вычитание b из a невозможно. Например, если у меня в кармане 10 рублей и я покупаю какую-то вещь, которая стоит 7 рублей, то у меня остается 3 рубля; но я не могу, имея только 10 рублей, купить вещь, стоящую 12 рублей.

Иногда, однако, покупают в долг. Допустим, я купил вещь ценой в 12 рублей, заплатил 10 рублей — все, что у меня было, — и остался должен 2 рубля. Это можно истолковать как «вычитание двенадцати из десяти», в результате которого остается два рубля долга. И если мы будем рассматривать два ряда чисел, понимая числа одного ряда как «имущество», а другого как «долг», мы сможем сделать вычитание всегда выполнимым действием. «Имущественные» числа — это все числа, с которыми мы имели дело до сих пор (неотрицательные рациональные), а «долговые» нужно ввести заново. Посмотрим, как это можно сделать.

Все неотрицательные рациональные числа, кроме нуля, мы будем в дальнейшем называть **положительными рациональными числами**. Каждому положительному рациональному числу мы поставим в соответствие «второй экземпляр» этого числа, который будем обозначать тем же символом, что и данное число, но со знаком – (читается «минус»*) впереди. Например, числу 5 ставится в соответствие число –5, числу $\frac{3}{4}$ ставится в соответствие число $-\frac{3}{4}$. Эти новые числа мы будем называть **отрицательными рациональными числами**. Положительные и отрицательные рациональные числа, а также нуль называются просто **рациональными числами**.

Положительные рациональные числа можно истолковывать как «имущество», отрицательные — как «долг». Существует также простой и наглядный способ изображения положительных и отрицательных чисел на чертеже. На некоторой прямой выбирается произвольная точка, называемая **началом отсчета**; одну из двух полупрямых, на которые эта точка разбивает прямую, называют **положительной**, а другую — **отрицательной**. Выбирается также единица измерения, т. е. некоторый отрезок, длина которого считается равной числу 1. Каждое положительное число a изображается точкой на положительной полупрямой, находящейся на расстоянии a от начала отсчета, и каждое отрицательное число $-a$ изображается точкой на отрицательной полупрямой, находящейся на рас-

* От латинского min*us* — меньше.

стоянии *a* от начала отсчета; само начало отсчета изображает число 0 (рис. 2.3).

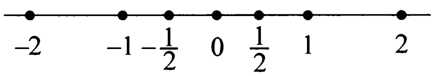


Рис. 2.3

Каждому рациональному числу мы сопоставим теперь неотрицательное рациональное число, называемое его **абсолютной величиной**, или **модулем***, следующим образом:

абсолютная величина неотрицательного рационального числа *a* равна самому числу *a*;

абсолютная величина отрицательного рационального числа $-b$ равна *b*.

Абсолютная величина рационального числа α обозначается $|\alpha|$. Например: $|5| = 5$; $\left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$; $|0| = 0$; $|-1| = 1$; $\left|-\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$.

При только что описанном способе изображения рациональных чисел абсолютная величина числа есть расстояние от изображающей его точки до начала отсчета.

Само число α можно истолковать как перемещение точки на прямой на расстояние $|\alpha|$ вправо, если α положительно, или влево, если α отрицательно. (Число 0 отвечает «нулевому перемещению», при котором точка остается на месте.) Аналогичным образом можно истолковать число α как изменение какой-либо другой величины: «доход» или «расход» в $|\alpha|$ рублей, «потепление» или «похолодание» на $|\alpha|$ градусов и т. п.

Пусть теперь у нас имеются два числа α и β, каждое из которых мы истолковываем как некоторое перемещение точки на прямой (см. рис. 2.4). Если мы выполним перемещение, соответствующее числу α, а затем перемещение, соответствующее числу β, то число, отвечающее «суммарному» перемещению, естественно считать суммой чисел α и β.

Как сдвигается точка при «суммарном» перемещении? Возможны следующие случаи:

1) α и β положительны, т. е. α есть сдвиг вправо на расстояние $|\alpha|$, а β — сдвиг также вправо на расстояние $|\beta|$. «Суммарный» сдвиг в этом случае будет сдвигом вправо на расстояние $|\alpha| + |\beta|$ (рис. 2.4, *а*; на этом и следующих рисунках *A* есть исходное положение точки, A' — ее положение после первого сдвига, A'' — после второго сдвига).

2) α и β отрицательны. В этом случае «суммарный» сдвиг будет сдвигом влево на расстояние $|\alpha| + |\beta|$ (рис. 2.4, *б*).

3) α положительно, β отрицательно. В этом случае: если $|\alpha| > |\beta|$, «суммарный» сдвиг будет сдвигом вправо на расстояние $|\alpha| - |\beta|$ (рис. 2.4, *в*); если

---

* От латинского *modulus* — мера.

$|\alpha| < |\beta|$, он будет сдвигом влево на расстояние $|\beta| - |\alpha|$ (рис. 2.4, *г*); если $|\alpha| = |\beta|$, он будет нулевым сдвигом (рис. 2.4, *д*).

4) α отрицательно, β положительно. Этот случай совершенно аналогичен предыдущему; читатель без труда разберет его сам.

5) Одно из чисел α, β (или оба) равно нулю. Тогда, если, например, $\beta = 0$, «суммарный» сдвиг будет совпадать со сдвигом, соответствующим числу α (рис. 2.4, *е*).

Теперь ясно, что сумму рациональных чисел α и β — для которой сохраняется обычное обозначение $\alpha + \beta$ — естественно определить следующим образом:

1) Если оба числа α и β неотрицательны, т. е. являются дробями, то сумма $\alpha + \beta$ имеет прежний смысл.

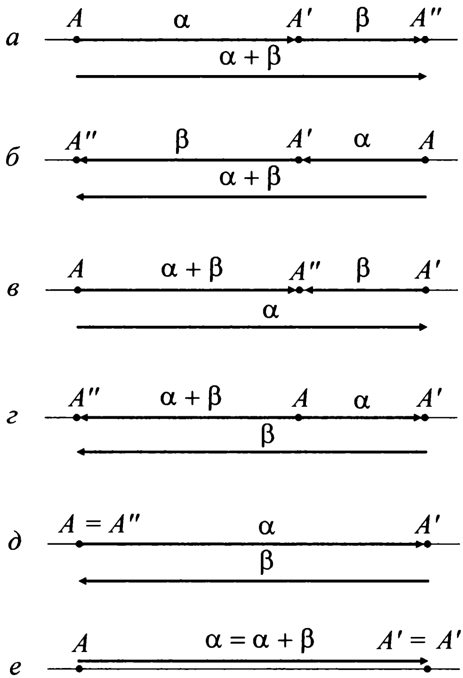


Рис. 2.4

2) Если оба числа α и β отрицательны, то $\alpha + \beta = -(|\alpha| + |\beta|)$.

3) Если α неотрицательно, а β отрицательно, то

$$\alpha + \beta = \begin{cases} |\alpha| - |\beta| & \text{при } |\alpha| > |\beta| \\ -(|\beta| - |\alpha|) & \text{при } |\alpha| < |\beta| \\ 0 & \text{при } |\alpha| = |\beta|. \end{cases}$$

4) Если α отрицательно, а β неотрицательно, то

$$\alpha + \beta = \begin{cases} |\beta| - |\alpha| & \text{при } |\alpha| < |\beta| \\ -(|\alpha| - |\beta|) & \text{при } |\alpha| > |\beta| \\ 0 & \text{при } |\alpha| = |\beta|. \end{cases}$$

Перейдем теперь к определению умножения. Его содержательный смысл лучше всего выясняется, когда сомножители представляют собой величины разной природы. Пусть, например, первый сомножитель есть измеряемая в метрах в секунду скорость движения точки по прямой — положительная, если точка перемещается вправо, и отрицательная, если точка перемещается влево, — а второй сомножитель есть измеряемое в секундах время. Произведение тогда естественно понимать как измеряемое в метрах смещение точки — положительное вправо, отрицательное влево. Пусть теперь в некоторый момент времени T_0 движущаяся точка занимает некоторое положение A_0. Тогда:

произведение $2 \cdot 3$ дает ответ на вопрос: какое положение относительно A_0 займет точка, движущаяся со скоростью 2 м/с вправо, через 3 с после момента T_0?

произведение $(-2) \cdot 3$ дает ответ на вопрос: какое положение относительно A_0 займет точка, движущаяся со скоростью 2 м/с влево, через 3 с после момента T_0?

произведение $2 \cdot (-3)$ дает ответ на вопрос: какое положение относительно A_0 занимала точка, движущаяся со скоростью 2 м/с вправо, за 3 с до момента T_0?

произведение $(-2) \cdot (-3)$ дает ответ на вопрос: какое положение относительно A_0 занимала точка, движущаяся со скоростью 2 м/с влево, за 3 с до момента T_0?

Очевидно, ответы на эти вопросы таковы: на первый — точка будет расположена на 6 м правее A_0; на второй — на 6 м левее A_0; на третий — точка была расположена на 6 м левее A_0; на четвертый — на 6 м правее A_0.

Кроме того, ясно, что если скорость нулевая (точка неподвижна), то положение точки в любой момент T_1 совпадает с ее положением в момент T_0, и то же будет, если момент T_1 совпадает с моментом T_0.

Поэтому умножение естественно определить так:

1) Если числа α и β оба положительны или оба отрицательны, то $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|$.

2) Если одно из чисел α и β положительно, а другое отрицательно, то $\alpha \cdot \beta = -|\alpha| \cdot |\beta|$.

3) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \beta = 0$.

Таким образом, если оба числа α и β неотрицательны, то их произведение имеет прежний смысл.

Вычитание и деление мы определим теперь точно так же, как делали это для натуральных чисел и дробей, а именно: вычесть рациональное число β из рационального числа α значит найти такое рациональное число γ, что $\beta + \gamma = \alpha$; разделить рациональное число α на рациональное число β значит найти такое рациональное число γ, что $\beta \cdot \gamma = \alpha$.

Для операций над рациональными числами используются символы +, · (или ×), –, : (или дробная черта). (Символами + и · мы уже пользовались.) Точно так же, как прежде, употребляются термины **слагаемые**, **сомножители**, **разность** и т. п.

Основные свойства сложения и умножения рациональных чисел

Они аналогичны свойствам сложения и умножения дробей (см. раздел 2.4):

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
3. $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$;
4. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$;
5. $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$;
6. $\alpha+0=\alpha$;
7. $\alpha\cdot 1=\alpha$;
8. $\alpha\cdot 0=0$.

Сохраняются и названия этих свойств.

Чтобы доказать эти свойства, нужно для каждого из них разобрать все возможные случаи, отвечающие различным пунктам определений сложения и умножения. Это довольно утомительно, но не представляет никаких принципиальных трудностей. Мы позволим себе этого не делать; тем из читателей, которые захотят это сделать сами, понадобится большой запас терпения и внимания.

Введем теперь важное понятие **противоположного числа**. Определяется оно так:

1) Числом, противоположным положительному рациональному числу α, называется отрицательное рациональное число $-\alpha$;

2) Числом, противоположным отрицательному рациональному числу $-\beta$, называется положительное рациональное число β;

3) Числом, противоположным нулю, называется само число 0.

Число, противоположное рациональному числу α, мы будем *всегда* обозначать через $-\alpha$. Для случая, когда α — положительное число, это обозначение совпадает с использовавшимся раньше. Но теперь мы будем писать также: $-(-5)=5$, $-0 = 0$ и т. п. Вообще, из определения противоположного числа ясно, что если рациональное число β противоположно рациональному числу α, то число α, в свою очередь, противоположно числу β. Поэтому такие числа α и β называют **взаимно противоположными**. Символически это записывается так:

$$-(-\alpha)=\alpha.$$

Из определения противоположного числа и определения сложения видно, что сумма взаимно противоположных чисел равна нулю:

$$\alpha+(-\alpha)=0.$$

В самом деле: если α положительно, то $-\alpha$ отрицательно, $|\alpha|=|-\alpha|=\alpha$, так что $\alpha+(-\alpha)=0$ по пункту 3 определения сложения; если α отрицательно, то $-\alpha$ положительно, $|\alpha|=|-\alpha|=-\alpha$, так что $\alpha+(-\alpha)=0$ по пункту 4 определения сложения; если $\alpha = 0$, то и $-\alpha = 0$, так что $\alpha+(-\alpha)=0$ по пункту 3 или 4.

Т е о р е м а. Каковы бы ни были рациональные числа α и β, разность $\alpha - \beta$ существует и определяется единственным образом, именно: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Доказательство. Пользуясь коммутативностью и ассоциативностью сложения, получаем: $\beta + (\alpha + (-\beta)) = \beta + ((-\beta) + \alpha) = (\beta + (-\beta)) + \alpha$. Но по только что доказанному $\beta + (-\beta) = 0$, а $0 + \alpha = \alpha$ (см. выше свойство 6). Таким образом, мы доказали, что $\beta + (\alpha + (-\beta)) = \alpha$, т. е. что число $\alpha + (-\beta)$ является разностью $\alpha - \beta$. Остается доказать, что эта разность определяется единственным образом, т. е. что любое число γ, такое, что $\beta + \gamma = \alpha$, равно $\alpha + (-\beta)$. Но это доказывается легко: если $\beta + \gamma = \alpha$, то и $\gamma + \beta = \alpha$; прибавляя к обеим частям последнего равенства $-\beta$, получим $(\gamma + \beta) + (-\beta) = \alpha + (-\beta)$. Но $(\gamma + \beta) + (-\beta) = \gamma + (\beta + (-\beta)) = \gamma + 0 = \gamma$. Итак, $\gamma = \alpha + (-\beta)$.

Из доказанной теоремы вытекает, что для любых двух рациональных чисел α и β существует их разность $\alpha - \beta$. Таким образом, мы достигли цели, поставленной в начале этого раздела: после введения отрицательных чисел вычитание стало неограниченно выполнимым.

Что касается деления, то оно, как и прежде, выполнимо всегда, кроме случая, когда делитель равен нулю. Чтобы это доказать, заметим сначала, что для любого рационального числа α, кроме нуля, существует такое рациональное число α^{-1}, что $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$, т. е. частное от деления единицы на α (число α^{-1} принято называть числом, **обратным** числу α; выбор обозначения будет объяснен ниже). В самом деле: если $\alpha \neq 0$, то либо $\alpha = \frac{a}{b}$, либо $\alpha = -\frac{a}{b}$, где $\frac{a}{b}$ — некоторая дробь (в смысле раздела 2.2), причем $\alpha \neq 0$. В первом случае положим $\alpha^{-1} = \frac{b}{a}$, во втором $\alpha^{-1} = -\frac{b}{a}$. Тогда в обоих случаях по определению умножения рациональных чисел будем иметь $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Теперь, используя свойства умножения рациональных чисел (приведенные выше в этом разделе), легко убедиться, что для любого рационального числа α и любого рационального числа $\beta \neq 0$ число $\alpha \cdot \beta^{-1}$ есть частное от деления α на β. В самом деле, умножая это число на β, получаем: $(\alpha \cdot \beta^{-1}) \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta^{-1} \cdot \beta) = \alpha \cdot (\beta \cdot \beta^{-1}) = \alpha \cdot 1 = \alpha$. Нетрудно доказать также, что частное определяется единственным образом. (Читатель может попытаться сделать это сам аналогично доказательству единственности разности.)

Деление на нуль, как и в предыдущих числовых системах, не имеет смысла.

Подобно тому, как это делается для натуральных чисел (см. конец раздела 1.2 и сноску в разделе 1.7), для любого рационального числа α произведение $\underbrace{\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{n\text{ раз}}$, где *n* — произвольное *натуральное* число, обозначают α^n (причем α^1 считается равным α) и полагают, кроме того, $\alpha^0 = 1$. Но теперь мы введем еще одно соглашение: для любого рационального $\alpha \neq 0$ и любого целого положительного *n* будем полагать $\alpha^{-n} = \dfrac{1}{\alpha^n}$. (Для $n = 1$ мы уже ввели такое соглашение раньше.) При этом равенство $\alpha^{-n} = \dfrac{1}{\alpha^n}$ оказывается верным также и для случая, когда *n* — **целое отрицательное число** (так называются числа, противоположные натуральным) или нуль. В самом деле: если *n* — целое отрицательное число, т. е. $n = -m$, где m — натуральное, то $\alpha^{-n} = \alpha^m = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha^m}} = \dfrac{1}{\alpha^{-m}} = \dfrac{1}{\alpha^n}$; $\alpha^{-0} = \alpha^0 = 1 = \dfrac{1}{\alpha^0}$. (Подчеркнем, что для натурального *n* равенство $\alpha^{-n} = \dfrac{1}{\alpha^n}$ верно по определению, а для двух других случаев оно выводится.)

Во всех случаях в записи α^n число α называется **основанием степени**, число *n* — **показателем степени**, число α^n — *n*-ой **степенью числа** α. Операция нахождения по числу его *n*-ой степени называется **возведением в *n*-ную степень**.

Из определения степени нетрудно вывести следующие два ее свойства (сравните конец раздела 1.2):

1) $\alpha^{m+n} = \alpha^m \cdot \alpha^n$;
2) $\alpha^{m\cdot n} = (\alpha^m)^n$.

Доказать эти свойства нетрудно, хотя и несколько утомительно, т. к. для каждого из них нужно рассмотреть отдельно случаи: $m > 0$, $n > 0$; $m > 0$, $n < 0$; $m < 0$, $n > 0$; $m < 0$, $n < 0$, а также случай, когда одно из чисел m, n (или оба) равно нулю. Если у читателя хватит терпения, пусть он это сделает.

Нам осталось еще научиться сравнивать рациональные числа, т. е. определить для них отношение «меньше» (которое мы будем обозначать знаком <). Для случая, когда α и β оба неотрицательны, отношение $\alpha < \beta$ уже определено. Чтобы понять, как естественным образом определить его для остальных случаев, заметим, что если α и β неотрицательны и $\alpha < \beta$, то точка прямой, изображающая число α, расположена левее точки, изображающей β (при обычном способе изображения, когда положительная полупрямая помещается справа от начала отсчета). Естественно потребовать, чтобы это было верно и в остальных случаях. Но ясно, что это будет верно, если мы примем следующее определение:

(а) Если α и β — отрицательные числа, то α считается меньшим β, когда $|\beta| < |\alpha|$.

(б) Всякое отрицательное число меньше всякого положительного и меньше нуля.

Замечание. Из этого определения следует, что рациональное число тогда и только тогда положительно, когда оно больше нуля, и только тогда отрицательно, когда оно меньше нуля.

Кроме того, теперь ясно, что для любого рационального числа α

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Теорема. Тогда и только тогда $\alpha < \beta$, когда разность $\beta - \alpha$ положительна.

Доказательство. 1) Пусть $\alpha < \beta$. Докажем, что тогда разность $\beta - \alpha$ положительна.

Если при этом оба числа α и β неотрицательны, т. е. являются дробями, то разность $\beta - \alpha$ есть дробь, т. е. неотрицательное рациональное число; но равной нулю она быть не может, т. к. в этом случае было бы $\beta = \alpha + (\beta - \alpha) = \alpha + 0 = \alpha$.

Если α и β отрицательны, то по пункту (а) определения отношения $<$ неравенство $\alpha < \beta$ означает $|\beta| < |\alpha|$. Поскольку $|\alpha|$ и $|\beta|$ — положительные числа, по уже доказанному число $|\alpha| - |\beta|$ положительно. Но в данном случае $|\alpha| - |\beta| = (-\alpha) - (-\beta) = (-\alpha) + (-(-\beta)) = (-\alpha) + \beta = \beta - \alpha$, так что и в этом случае разность $\beta - \alpha$ положительна.

Наконец, если α отрицательно, а β положительно или равно нулю, то разность $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$ есть сумма неотрицательного числа β и положительного числа $-\alpha$; следовательно, она положительна.

2) Пусть разность $\beta - \alpha$ положительна. Нам нужно доказать, что $\alpha < \beta$.

Допустим, что это неверно. Тогда, как ясно из определения отношения «меньше», $\beta \leqslant \alpha$. Но равенство $\beta = \alpha$ невозможно, т. к. в этом случае $\beta - \alpha = 0$. Если же $\beta < \alpha$, то по уже доказанному разность $\alpha - \beta$ положительна. Однако теперь $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$. (В самом деле: $(\alpha - \beta) + (\beta - \alpha) = (\alpha + (-\beta)) + (\beta + (-\alpha)) = (\alpha + (-\alpha)) + (\beta + (-\beta)) = 0 + 0 = 0$.) Поэтому число $\beta - \alpha$ должно быть отрицательным; но одновременно положительным и отрицательным число быть не может.

Исторические сведения

Впервые отрицательные числа появились в трудах математиков древнего Китая, которые пришли к ним, занимаясь решением систем линейных уравнений. Правила действий с отрицательными числами и истолкование их как «долга» или «нехватки» имеются уже в классическом китайском трактате «Математика в девяти книгах», составленном во II в. до н. э. и переработанном в I в. н. э. (Этот трактат — своеобразная математическая энциклопедия — представляет собой обработку более ранних математических текстов.) Позднее отрицательные числа использовались индийскими и арабскими математиками. В средневековой Европе первым, кто ими фактически пользовался, был, видимо, Леонардо Пизанский, известный также под именем Фибоначчи (1180—1240), изучавший математику в арабских странах. Долгое время европейские математики оперировали отрицательными числами весьма неохотно и не считали их «настоящими» числами. М. Штифель (Michael Stifel, 1487—1567) уже производил все действия над отрицательными числами и истолковывал их как числа, меньшие нуля, но называл при этом «абсурдными». И только начиная с XVII в. отрицательные числа рассматриваются как «равноправные» с положительными.

Термины «положительный» и «отрицательный» — переводы латинских *positivus* и *negativus*. Первоначально употреблялись две параллельные пары терминов: *positivus* — *privativus* (от *pono* — «кладу», *privo* — «отнимаю») и *affirmativus* — *negativus* (от *affirmo* — «утверждаю», *nego* — «отрицаю»); впоследствии термины *privativus* и *affirmativus* вышли из употребления.

Глава 3
Действительные числа

3.1. Можно ли обойтись при измерении величин рациональными числами?

В начале главы 2 мы видели, что с помощью дробей, т. е. неотрицательных рациональных чисел, можно измерять *величины* — длины, площади, объемы, скорости, массы и т. п. В некоторых случаях — например, для измерения перемещений, скоростей, температур, — нужны также отрицательные рациональные числа. Но полностью ли решается с помощью этих чисел задача измерения величин? Иначе говоря: когда мы измеряем какую-то величину, всегда ли полученное значение этой величины можно выразить рациональным числом?

Чтобы яснее понять смысл этого вопроса, обратимся к задаче, на примере которой особенно наглядно иллюстрируется все, что связано с измерением величин: задаче измерения отрезков. (Мы уже несколько раз обращались к ней в предыдущей главе.)

Допустим, что мы выбрали единицу длины, т. е. некоторый отрезок E («мерную рейку»), длину которого условились считать равной единице. Будем называть его **единичным отрезком**. Пусть теперь AB — произвольный отрезок. Попытаемся измерить его с помощью нашей «рейки», т. е. проверим, существует ли такое натуральное число m, что рейка укладывается в отрезке AB точно m раз. Если такое число существует, мы говорим, что длина отрезка выражается этим числом (или, иначе, равна ему). Если не существует — попробуем измерить отрезок AB с помощью другой рейки, которая вдвое короче единичного отрезка. Если это нам удалось и «половинная рейка» уложилась в AB точно m раз, мы говорим, что длина отрезка AB выражается дробью $\frac{m}{2}$ (или равна $\frac{m}{2}$). Если не удалось — пытаемся измерить с помощью рейки, которая втрое короче единичного отрезка, и т. д. Если в конце концов найдутся такие m и n, что n-ная доля единичного отрезка уложится в AB точно m раз, мы скажем, что длина отрезка AB выражается дробью $\frac{m}{n}$ (или равна $\frac{m}{n}$). Спрашивается: всегда ли такие m и n найдутся? Иначе говоря: верно ли, что если выбран единичный отрезок, то длина любого отрезка выражается дробью?

Этой задачей заинтересовались еще древнегреческие ученые, и они сумели ее решить. Оказалось, что существуют отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Самый простой пример такого отрезка — диагональ **единичного квадрата**, т. е. квадрата, сторона которого равна единичному отрезку. Справедлива следующая

Теорема. Длина диагонали единичного квадрата не выражается никаким рациональным числом.

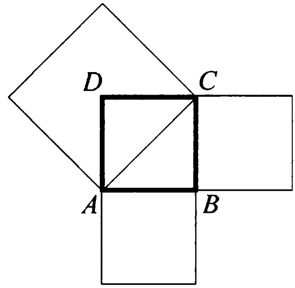


Рис. 3.1

Доказательство. Пусть $ABCD$ — единичный квадрат, и пусть длина его диагонали AC выражается рациональным числом, т. е. дробью $\frac{m}{n}$. Мы можем считать эту дробь несократимой (если она не такова, ее можно сократить до конца). По теореме Пифагора площадь квадрата, построенного на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах AB и CD (рис. 3.1). Но площадь первого из этих квадратов есть $\left(\frac{m}{n}\right)^2$, а второй и третий квадраты — единичные, так что сумма их площадей равна 2. Имеем, таким образом, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, откуда $m^2 = 2n^2$. Из этого равенства следует, что m^2 — четное число, и, значит, число m тоже четно, т. е. может быть представлено в виде $m = 2m_1$, где m_1 — какое-то натуральное число. Таким образом, имеем равенство $(2m_1)^2 = 2n^2$, т. е. $4m_1^2 = 2n^2$. Сокращая на 2, получаем: $2m_1^2 = n^2$. Следовательно, n^2 — четное число, и, значит, n тоже четно. Итак, оба числа m и n — четные. Но это невозможно, т. к. дробь $\frac{m}{n}$ — несократимая. Полученное противоречие завершает доказательство.

Задание. Докажите, что длины следующих отрезков не выражаются рациональными числами: а) диагонали прямоугольника со сторонами 2 и 1; б) диагонали прямоугольника со сторонами 5 и 3; в) меньшей стороны прямоугольника с диагональю 4 и большей стороной 3.

3.2. Две геометрические аксиомы

Рациональные числа, как мы знаем (см. раздел 2.7), удобно изображать точками прямой. Напомним, что делается это следующим образом: выбирается единица длины, на прямой выбирается точка, называемая началом отсчета; одну из двух полупрямых, на которые эта точка разбивает прямую, называют положительной, другую отрицательной; тогда всякое число $a \neq 0$ изображается точкой, находящейся на расстоянии $|a|$ от начала отсчета и лежащей на положительной полупрямой, если $a > 0$, и на отрицательной, если $a < 0$; число 0 изображается самим началом отсчета.

Но всякая ли точка прямой служит изображением некоторого рационального числа? Из теоремы, доказанной в разделе 3.1, сразу следует, что не всякая. В самом деле, если отложить от начала отсчета (в любую сторону) отрезок, равный диагонали единичного квадрата, то другой конец этого отрезка не будет изображать никакого рационального числа: ведь если бы такое число существовало, то его модуль выражал бы длину диагонали единичного квадрата. (На самом деле точек, которым не отвечают никакие рациональные числа, имеется на прямой бесконечно много.)

Мы постараемся теперь ввести новые числа таким образом, чтобы каждой точке прямой отвечало некоторое число (при условии, что выбраны единица измерения, начало отсчета и положительная полупрямая). Тогда и длина каждого отрезка будет выражаться некоторым (новым) числом: если отложить от начала отсчета (обозначим его через O) на положительной полупрямой отрезок OA, равный данному, то число, отвечающее точке A, естественно будет считать длиной данного отрезка. Но для этого нам нужно сначала сформулировать свойства прямой, которые в геометрии обычно принимают за аксиомы.

Аксиома Архимеда*. Каковы бы ни были отрезки AB и CD, существует такое натуральное число n, что если на прямой, на которой находится отрезок AB, отложить от точки A в сторону точки B последовательно n отрезков AE_1, E_1E_2, E_2E_3, ..., $E_{n-1}E_n$, равных отрезку CD, то точка B будет расположена между A и E_n (иначе говоря, точка E_n не будет принадлежать отрезку AB) (рис. 3.2).

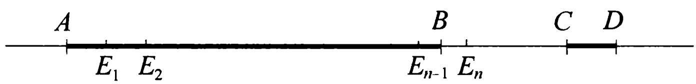


Рис. 3.2

Аксиома Кантора**. Пусть

(1) A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... — последовательность отрезков (рис. 3.3), обладающая следующими двумя свойствами:

* Архимед (Ἀρχιμήδης, 287—212 до н. э.) — величайший математик и физик древности, прославившийся также многочисленными техническими изобретениями.

** Георг Кантор (Georg Cantor, 1845—1918) — немецкий математик, создатель теории множеств — математической дисциплины, образующей фундамент здания современной математики. Он был также одним из создателей теории действительных чисел.

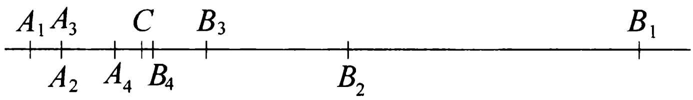


Рис. 3.3

(а) каждый следующий отрезок содержится в предыдущем;

(б) в каждом предыдущем отрезке не менее двух раз укладывается отрезок, равный следующему.

Тогда существует точка C, принадлежащая всем отрезкам последовательности (1), и такая точка только одна.

Замечание. Может случиться, что левый или правый конец следующего отрезка совпадет с соответствующим концом предыдущего. (Например, на нашем рисунке A_3 совпадает с A_2.)

Аксиома Кантора выражает в строгой форме одно из основных свойств прямой — *свойство непрерывности*, состоящее, образно выражаясь, в том, что на ней нет «пустых мест», она «вся заполнена» точками. Поэтому данную аксиому иногда называют **аксиомой непрерывности**.

3.3. Бесконечные десятичные дроби и действительные числа

Пусть рациональным числам поставлены в соответствие изображающие их точки прямой, как описано в разделах 2.7 и 3.2. Возьмем на этой прямой произвольную точку C и постараемся построить для нее нечто такое, что было бы естественно считать «новым числом», отвечающим данной точке. При этом мы не будем обращать внимание на то, является ли число C изображением какого-либо рационального числа или нет.

Рассмотрим сначала случай, когда точка C лежит на положительной полупрямой. Начало отсчета будем, как и прежде, обозначать буквой O.

Будем последовательно откладывать от точки O на положительной полупрямой отрезки OE_1, E_1E_2, E_2E_3 и т. д., равные единичному отрезку. По аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число n, что точка E_n не будет принадлежать отрезку OC. Наименьшее из таких чисел, уменьшенное на единицу, мы обозначим через N. Таким образом, N есть целое неотрицательное число, такое, что точка E_N еще принадлежит отрезку OC (может случиться, в частности, что она совпадет с C), а точка E_{N+1} уже не принадлежит (см. рис. 3.4, *а*, где $N = 3$).

Для дальнейшего нам удобно будет изменить обозначения: точку E_N мы будем обозначать A_0, а точку E_{N+1} — B_0. Запомним, однако, что длина отрезка OA_0 равна N, а отрезок A_0B_0 — единичный. Подчеркнем еще раз, что точка C может в частном случае совпадать с A_0, но ни в каком случае не может совпадать с B_0.

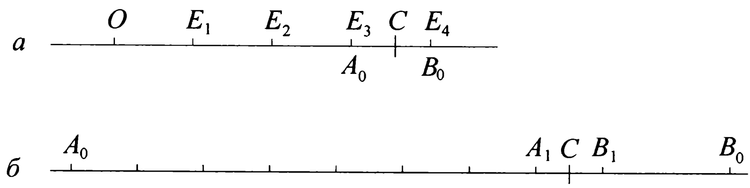


Рис. 3.4

Разделим теперь отрезок A_0B_0 на 10 равных отрезков и последнюю из точек деления, принадлежащих отрезку OC, обозначим A_1, а следующую за ней — B_1. При этом A_0 и B_0 также включаются в число точек деления. Таким образом, точка C может в частном случае совпадать с A_1, но ни в каком случае не может совпадать с B_1. Число десятых долей единичного отрезка A_0B_0, уложившихся в отрезке A_0C, обозначим α_1; очевидно, α_1 есть одно из чисел 0, 1, 2, ..., 9 (см. рис. 3.4, *б*, где масштаб увеличен по сравнению с рис. 3.4, *а* в 10 раз и $\alpha_1 = 7$).

С отрезком A_1B_1 мы поступим теперь так же, как с отрезком A_0B_0: разделим его на 10 равных отрезков и последнюю из точек деления, принадлежащих отрезку OC, обозначим A_2, а следующую за ней — B_2 (причем A_1 и B_1 включаются в число точек деления). (Таким образом, C может в частном случае совпасть с A_2, но ни в каком случае не может совпасть с B_2.) Число десятых долей отрезка A_1B_1 (иначе — сотых долей единичного отрезка), уложившихся в отрезке A_1C, обозначим α_2; ясно, что α_2 есть одно из чисел 0, 1, 2, ..., 9.

Повторив то же самое для отрезка A_2B_2, получим точно таким же образом отрезок A_3B_3 и число α_3 из ряда 0, 1, 2, ..., 9, и т. д. В результате получим последовательность отрезков

(1) $A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$

и последовательность чисел

(2) $N, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Эти последовательности обладают следующими очевидными свойствами:

(а) Точка C принадлежит всем отрезкам последовательности (1) и не совпадает с правым концом ни одного из них.

(б) Каждый следующий отрезок последовательности (1) содержится в предыдущем.

(в) Отрезок A_0B_0 — единичный, и в каждом предыдущем отрезке последовательности (1) ровно 10 раз укладывается отрезок, равный следующему.

(г) N есть целое неотрицательное число; каждое α_i есть одно из чисел 0, 1, ..., 9.

(д) Для каждого $i = 0, 1, 2, \ldots$ расстояние от точки O до точки A_i (иначе — длина отрезка OA_i) выражается десятичной дробью $N, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ (при $i = 0$ — целым числом N).

А теперь рассмотрим последовательность десятичных дробей

$$(3)\quad \begin{cases} N \\ N,\alpha_1 \\ N,\alpha_1\alpha_2 \\ N,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

(Целое число N мы считаем десятичной дробью, у которой число знаков после запятой равно нулю.)

Члены последовательности (3) естественно считать «приближенными значениями» длины отрезка OC. Правда, мы еще не знаем точно, что такое длина отрезка OC, но с нашими наглядными представлениями о длине хорошо согласуется представление, что число N (т. е. длина отрезка OA) есть приближенное значение длины OC с точностью до единицы, число N, α_1 (т. е. длина отрезка OA_1) — приближенное значение с точностью до $\frac{1}{10}$, и т. д.

Вспомним теперь, что на самом деле длины всегда измеряются приближенно; знать точное значение какой-нибудь длины значит уметь измерить ее с любой заданной степенью точности. Разумеется, при практических измерениях точность не может быть сколь угодно большой, но все ограничения точности носят не математический, а физический характер. Оставаясь в рамках математики, мы не можем установить никакой разумной границы для точности и вынуждены допустить абстрактную возможность измерять «сколь угодно точно». С точки зрения математики знать «точное значение» длины отрезка OC означает то же самое, что знать *бесконечную последовательность* ее приближенных значений. Иначе говоря: мы можем считать, что эта последовательность — т. е. наша последовательность (3) — *и есть* точное значение длины OC; и принципиально иного способа определить это точное значение не существует. (Конечно, последовательность приближенных значений мы могли бы построить и как-нибудь иначе.)

Теперь мы можем, наконец, представить себе то «новое число», которое будет отвечать точке C. Поскольку точка C лежит на положительной полупрямой, это «новое число» должно выражать длину отрезка OC, а точным значением этой длины мы считаем последовательность (3). Таким образом, последовательность (3) и будет тем «новым числом», которое нам нужно.

Посмотрим теперь, как устроена эта последовательность. Прежде всего она состоит из десятичных дробей, и каждый следующий ее член является «продолжением» предыдущего. Такие последовательности принято называть бесконечными десятичными дробями.

Точное определение таково: **бесконечной десятичной дробью** (сокращенно б. д. д.) называется последовательность десятичных дробей, первый член которой есть целое неотрицательное число и каждый следующий член получается из предыдущего добавлением одного десятичного знака.

Обычно б. д. д. записывают не в виде (3), а в более короткой форме:

(4) $N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$.

Таким способом записи оправдывается название «бесконечная десятичная дробь». Обычные десятичные дроби мы будем теперь иногда называть **конечными десятичными дробями**.

Таким образом, «новое число», сопоставленное точке C, есть б. д. д. Присмотревшись к этой б. д. д. внимательнее, мы сможем обнаружить одну ее характерную особенность. Чтобы лучше ее понять, сформулируем сначала следующее определение.

Будем говорить, что б. д. д. $N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ **оканчивается девятками**, если существует такое натуральное число i_0, что $\alpha_i = 9$ при любом $i > i_0$. (Попросту говоря: если, начиная с некоторого места, все десятичные знаки данной б. д. д. — девятки.)

(Точно так же можно определить б. д. д., **оканчивающуюся нулями, единицами** и т. п.)

Мы докажем теперь, что та б. д. д., которую мы поставили в соответствие точке C, не оканчивается девятками.

В самом деле: пусть эта дробь есть $N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, и пусть, например, $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \ldots = 9$. Это значит, что для каждого $i \geqslant 3$ отрезок $A_{i+1}B_{i+1}$ — последний («самый правый») из десяти равных отрезков, на которые разбит отрезок A_iB_i, так что правые концы отрезков A_iB_i и $A_{i+1}B_{i+1}$ совпадают. Следовательно, все точки B_4, B_5, B_6, ... совпадают с точкой B_3, и, значит, эта точка принадлежит всем отрезкам A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 и т. д. Отрезкам A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2 она, очевидно, тоже принадлежит. Таким образом, точка B_3 принадлежит всем отрезкам последовательности (1). А поскольку эта последовательность удовлетворяет условиям аксиомы Кантора (ввиду ее свойств (б) и (в) — см. выше), может существовать только одна точка, принадлежащая всем ее отрезкам. Следовательно, точка C совпадает с B_3; но это противоречит свойству (а) последовательности (1).

Замечание. Легко понять, что если $\alpha_3 \neq 9$, то третий десятичный знак той б. д. д., которая должна быть сопоставлена точке B_3, есть $\alpha_3 + 1$, а все следующие — нули. (Если $\alpha_3 = 9$, то эта б. д. д. тоже оканчивается нулями, но они начинаются раньше.)

Итак, «новые числа», сопоставляемые точкам положительной полупрямой, представляют собой бесконечные десятичные дроби, не оканчивающиеся девятками. Докажем теперь, что верно и обратное: *всякая бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся девятками, сопоставляется описанным выше способом некоторой точке положительной полупрямой.*

В самом деле: пусть

(5) $M,\ \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$

— произвольная б. д. д., не оканчивающаяся девятками. Будем обозначать через D_0 и E_0 точки положительной полупрямой, находящиеся от точки O на расстояниях M и $M + 1$ соответственно, через D_1 и E_1 — точки той же полупрямой, находящиеся от O на расстояниях $M,\ \beta_1$ и $M,\ \beta_1 + \dfrac{1}{10}$, через D_2 и E_2 — точки этой полупрямой, удаленные от O на $M,\ \beta_1\beta_2$ и $M,\ \beta_1\beta_2 + \dfrac{1}{10^2}$, и т. д. Последовательность отрезков

(6) $D_0E_0,\ D_1E_1,\ D_2E_2,\ D_3E_3,\ \ldots$

удовлетворяет, очевидно, условиям аксиомы Кантора. Поэтому существует точка C, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности, и притом только одна.

Докажем теперь, что точка C не может совпадать ни с одной из точек $E_0,\ E_1,\ E_2,\ \ldots$. Допустим, что C совпадает, например, с E_3, т. е. с правым концом отрезка D_3E_3. Тогда, поскольку эта точка принадлежит также и отрезку D_4E_4, содержащемуся в D_3E_3, она и для него должна быть правым концом (см. рис. 3.5), т. е. должна совпадать также и с E_4. Отсюда точно так же следует, что она совпадает с E_5, и т. д. Поэтому все точки E_i при $i \geqslant 3$ совпадают между собой.

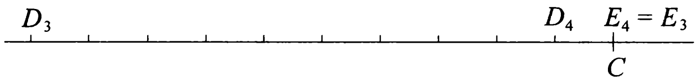


Рис. 3.5

Но совпадение точек E_3 и E_4 означает, что

$$M,\ \beta_1\beta_2\beta_3 + \frac{1}{10^3} = M,\ \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 + \frac{1}{10^4}.$$

А отсюда, поскольку $M,\ \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 = M,\ \beta_1\beta_2\beta_3 + \dfrac{\beta_4}{10^4}$, получаем равенство $\dfrac{\beta_4 + 1}{10^4} = \dfrac{1}{10^3}$, откуда $\beta_4 + 1 = 10$, так что $\beta_4 = 9$. Точно так же из совпадения точек E_4 и E_5 следует, что $\beta_5 = 9$, и т. д. Мы получили противоречие, т. к. по условию б. д. д. $M,\ \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ не оканчивается девятками.

А теперь построим для точки C последовательности (1) и (2) с помощью процедуры, описанной в начале этого параграфа, сравним их с последовательностью (6) и последовательностью десятичных знаков бесконечной десятичной дроби (5).

Прежде всего, N есть наибольшее число единичных отрезков, укладывающихся в отрезке OC (если откладывать их последовательно от точки O). Но это значит, что $N = M$: ведь отрезок OD_0, содержащийся в OC, равен M-кратному единичному отрезку, в то время как $(M + 1)$-кратный единичный отрезок в OC уже не укладывается. А отсюда ясно также, что отрезок A_0B_0 совпадает с D_0E_0.

Далее, α_1 есть наибольшее число отрезков длины $\frac{1}{10}$, укладывающихся в отрезке A_0C (если откладывать их последовательно от A_0). Но в отрезке D_0C, совпадающем с A_0C, укладывается β_1 отрезков длины $\frac{1}{10}$ и не укладывается $\beta_1 + 1$ таких отрезков. Следовательно, $a_1 = \beta_1$, а отсюда ясно, что отрезок A_1B_1 совпадает с D_1E_1. Затем точно так же докажем, что $\alpha_2 = \beta_2$ и отрезок A_2B_2 совпадает с D_2E_2, и т. д.

Итак, последовательность (1) совпадает с последовательностью (6), а б. д. д. (4) — с б. д. д. (5). Иначе говоря: данная б. д. д. (5) есть та самая б. д. д., которая сопоставляется точке C. Таким образом, для произвольной б. д. д., не оканчивающейся девятками, мы нашли точку, которой описанным выше способом сопоставляется именно эта б. д. д. Заметим еще, что мы исключили из рассмотрения случай, когда данная б. д. д. имеет вид 0,000... . Легко понять, что в этом случае все точки $A_0, A_1, A_2, \ldots$ будут совпадать с точкой O и, следовательно, точка C также совпадет с точкой O (началом отсчета).

Теперь у нас есть все, что нужно для строгого определения новых чисел, которые мы будем называть действительными. Это определение мы сформулируем, исходя из бесконечных десятичных дробей, в точности так же, как в разделе 2.7 сформулировали определение рациональных чисел, исходя из обыкновенных дробей. А именно, бесконечные десятичные дроби, не оканчивающиеся девятками, мы будем называть теперь **неотрицательными действительными числами**, а все неотрицательные действительные числа, кроме 0,00... — **положительными действительными числами**. Каждому положительному действительному числу мы поставим в соответствие его «второй экземпляр», который будем обозначать тем же символом, что и это число, со знаком «минус» впереди (например, –0,333...). Такие «вторые экземпляры» мы будем называть **отрицательными действительными числами**. Неотрицательные и отрицательные действительные числа мы будем называть просто **действительными числами***.

* Иногда вместо «действительные» говорят «вещественные». Происхождение обоих терминов будет объяснено в разделе 4.1.

Выше было описано соответствие между точками положительной полупрямой и положительными действительными числами. Это соответствие легко теперь дополнить до соответствия между всеми точками прямой и всеми действительными числами.

Именно: отрицательному действительному числу $-\alpha$, где α — некоторая б. д. д., ставим в соответствие точку отрицательной полупрямой, симметричную относительно начала отсчета той точке положительной полупрямой, которая отвечает числу α; числу 0,000... будет отвечать само начало отсчета. Ясно, что при этом каждой точке прямой будет отвечать некоторое действительное число, и притом только одно.

Теперь мы можем выразить длину всякого отрезка некоторым положительным действительным числом. Для этого достаточно отложить от начала отсчета на положительной полупрямой отрезок OC, равный данному. То действительное число, которое отвечает точке C, и будет длиной данного отрезка.

Замечание. Для дальнейшего полезно отметить следующий очевидный факт. Если б. д. д. $N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ выражает длину некоторого отрезка, то число укладывающихся в нем единичных отрезков равно N, число укладывающихся в нем отрезков длины $\frac{1}{10}$ равно $N, \alpha_1 \cdot 10$, отрезков длины $\frac{1}{100}$ — $N, \alpha_1\alpha_2 \cdot 100$ и т. д. Иными словами, для любого $s = 0, 1, 2, \ldots$ число отрезков длины $\frac{1}{10^s}$, укладывающихся в данном отрезке, равно $N, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s \cdot 10^s$.

Рассмотрим теперь три примера.

Пример 1. Отложим от начала отсчета на положительной полупрямой отрезок OC, равный диагонали единичного квадрата.

Если мы построим для этого отрезка последовательности (1) и (2) с помощью процедуры, описанной в начале этого параграфа, то для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ квадрат со стороной OA_n будет, очевидно, содержаться в квадрате со стороной OC, а этот последний будет содержаться в квадрате со стороной OB_n (рис. 3.6). Площади этих квадратов равны соответственно:

$$(N, \alpha_1\ldots\alpha_n)^2;\ 2;\ \left(N, \alpha_1\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)^2.$$

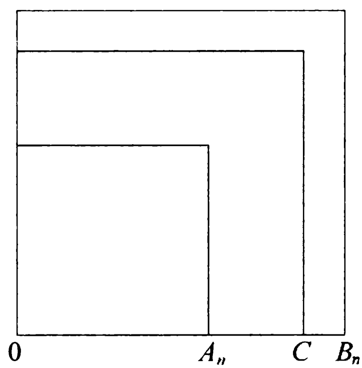


Рис. 3.6

Поэтому

$$(N, \alpha_1 \ldots \alpha_n)^2 < 2 < \left(N, \alpha_1 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$$

(равенство здесь невозможно ввиду теоремы из раздела 3.1). Иначе говоря, $N, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ есть наибольшая десятичная дробь с n знаками после запятой, квадрат которой меньше двух. Зная это, можно вычислить сколько угодно членов последовательности (3). Например:

$N = 1$ (т. к. $1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$);
$N, \alpha_1 = 1{,}4$ (т. к. $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$);
$N, \alpha_1\alpha_2 = 1{,}41$ (т. к. $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2$)

и т. д.

Таким образом, длина диагонали единичного квадрата выражается бесконечной десятичной дробью 1,41... .

Пример 2. Отложим от начала отсчета на положительной полупрямой отрезок OC, который втрое короче единичного, т. е. укладывается в единичном ровно три раза.

Поскольку единичный отрезок не умещается в OC ни разу, $N = 0$ и точка A_0 совпадает с O, так что OA_0 есть «вырожденный отрезок», состоящий из одной точки. На следующем шаге, разбивая единичный отрезок A_0B_0 на 10 равных частей, мы видим, что в OC укладывается три таких части, так что $\alpha_1 = 3$, а оставшийся отрезок A_1C равен одной трети отрезка A_1B_1 (рис. 3.7). (В самом деле: поскольку в A_0B_0 укладывается

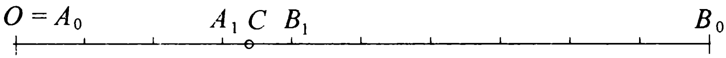


Рис. 3.7

точно три отрезка, равных OC, на долю каждого из них приходится $3\frac{1}{3}$ десятых частей A_0B_0.) Затем разбиваем A_1B_1 на 10 равных частей и точно так же видим, что в A_1C укладывается три таких части, так что $\alpha_2 = 3$, а оставшийся отрезок A_2C равен одной трети отрезка A_2B_2. То же самое будет повторяться на всех следующих шагах. Таким образом, длина отрезка, равного одной трети единичного, выражается бесконечной десятичной дробью 0,333... .

Пример 3. Отложим от начала отсчета на положительной полупрямой отрезок OC, который в пять раз короче единичного (рис. 3.8).

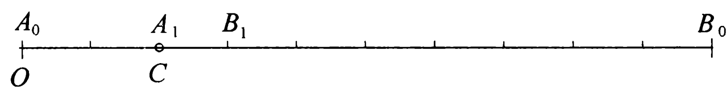


Рис. 3.8

Подобно предыдущему примеру видим, что $N = 0$ и точка A_0 совпадает с O. Но одна десятая единичного отрезка A_0B_0 укладывается теперь в OC точно два раза, так что $\alpha_1 = 2$ и точка A_1 совпадает с C. На следующем шаге мы разбиваем отрезок A_1B_1 на 10 равных частей и ищем последнюю из точек деления, принадлежащих отрезку OC. Очевидно, эта точка (которую мы должны обозначить A_2) совпадает с C или, что то же самое, с A_1, так что $\alpha_2 = 0$. Затем, разбивая отрезок $A_2B_2 = C_2B_2$ на 10 равных частей, точно так же видим, что точка A_3 совпадает с C и $\alpha_3 = 0$, и то же самое будет повторяться на всех дальнейших шагах. Таким образом, длина отрезка, равного одной пятой единичного, выражается бесконечной десятичной дробью 0,2000... .

3.4. Рациональные и иррациональные числа

Для некоторых отрезков мы имеем теперь два способа измерения длины: с помощью долей единичного отрезка, т. е. обыкновенных дробей, и с помощью последовательностей приближенных значений, т. е. бесконечных десятичных дробей. Например, длину отрезка, укладывающегося в единичном три раза, можно выразить обыкновенной дробью $\frac{1}{3}$ (или $\frac{2}{6}$, или $\frac{3}{9}$ и т. д.) или бесконечной десятичной дробью 0,333... (пример 2 из раздела 3.3); длину отрезка, укладывающегося в единичном пять раз — обыкновенной дробью $\frac{1}{5}$ (или $\frac{2}{10}$, или $\frac{3}{15}$ и т. д.) или бесконечной десятичной дробью 0,2000... . На измерении отрезков основано изображение чисел точками прямой; изображение рациональных чисел точками прямой было описано в разделе 2.7, действительных — в разделе 3.3. При этом некоторые точки можно изображать и рациональными, и действительными числами. Например, точка отрицательной полупрямой, удаленная от начала отсчета на расстояние, втрое меньшее длины единичного отрезка, изображается рациональным числом $-\frac{1}{3}$ или действительным числом —0, 333... .

Мы будем теперь *отождествлять* каждое рациональное число с тем действительным числом, которое изображается той же самой точкой. Иначе говоря, мы будем считать, что рациональное число и действительное число, изображаемые одной и той же точкой, **равны между собой**. Например: $\frac{1}{3} = 0{,}333...$; $-\frac{1}{3} = -0{,}333...$. В частности, всякая б. д. д., оканчивающаяся нулями, равна конечной десятичной дроби, получающейся из нее отбрасыванием нулей. Например: $0{,}2000... = 0{,}2 = \frac{1}{5}$ (пример 3 из § 3); 15,000... = 15; 0,000... = 0. То же верно, разумеется, для чисел, противоположных таким б. д. д.; например, –0,2000... = –0, 2.

Таким образом, рациональные числа становятся теперь частным случаем действительных чисел. Некоторые действительные числа, например 0; 1; –1; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$, являются рациональными, другие не являются. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются **иррациональными**. Примером иррационального числа может служить б. д. д. 1,41..., выражающая длину диагонали единичного квадрата. Термины **рациональный** и **иррациональный** происходят от латинских *rationalis*, *irrationalis*. *Irrationalis* — это перевод греческого слова ἄλογος (буквально означающего «не имеющий отношения»). Древнегреческие математики называли «не имеющими отношения» — ἄλογοι — геометрические величины, отношение которых не может быть выражено в целых числах (например, сторону квадрата и его диагональ). Для того же понятия употреблялись и другие термины: ἀσύμμετροι (несоизмеримые), ἄρρητα (невыразимые), противопоставлявшиеся терминам σύμμετροι (соизмеримые), ῥητά (выразимые). Впоследствии, в V в. н. э., слово ἄλογος было переведено на латинский язык как *irrationalis*; затем так же стали переводить и синонимичное ему слово ἀσύμμετρος, а для передачи термина σύμμετρος стали пользоваться словом *rationalis*. Употреблялись, впрочем, и другие термины; в частности, одним из синонимов слова *irrationalis* было *surdus* — буквально «глухой», т. е. «неясный». Первоначально все эти термины относились не к числам, а к геометрическим величинам. (Античные математики вообще рассматривали только натуральные числа; дроби они трактовали не как числа, а как отношения величин.) Представление об иррациональных величинах как особых числах впервые возникло у средневековых математиков Востока и от них было воспринято европейской наукой. Строгая теория действительных чисел была построена лишь во второй половине XIX в. Р. Дедекиндом (Richard Dedekind, 1831—1916), К. Вейерштрассом (Karl Weierstrass, 1815—1897), Г. Кантором и Ш. Мере (Charles Méray, 1835—1911).

3.5. Сравнение действительных чисел по величине и арифметические действия над ними

Займемся сначала неотрицательными действительными числами, т. е. бесконечными десятичными дробями, не оканчивающимися девятками.

Сравнение по величине

Из двух б. д. д. $a = M, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$

и

$$b = N, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$$

естественно считать меньшей ту, которая выражает длину более короткого отрезка. Если отложить на положительной полупрямой от начала отсчета отрезок OC_1, длину которого выражает б. д. д. a, и отрезок OC_2, длину которого выражает б. д. д. b, то первый из них будет короче второго в случае, когда точка C_1 лежит между O и C_2 (рис. 3.9). Тогда, очевид-

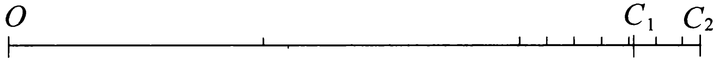


Рис. 3.9

но, единичный отрезок укладывается в OC_1 либо меньшее число раз, чем в OC_2, либо столько же, т. е. $M \leqslant N$. Если при этом $M = N$ (именно этот случай изображен на рис. 3.9; здесь $M = N = 2$), то в оставшейся части отрезка OC_1 десятая доля единичного отрезка укладывается либо меньшее число раз, чем в оставшейся части OC_2, либо столько же, т. е. $\alpha_1 \leqslant \beta_1$ (на рис. 3.9 $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 6$); если при этом $\alpha_1 = \beta_1$, то точно так же ясно, что $\alpha_2 \leqslant \beta_2$, и т. д. А поскольку невозможно, чтобы было $\alpha_n = \beta_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ (в этом случае дроби a и b были бы равны), мы приходим к выводу, что если отрезок OC_1 короче отрезка OC_2, то либо $M < N$, либо $M = N$ и найдется такое целое неотрицательное n, что $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$, $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$ (иначе говоря: конечные десятичные дроби $M, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ и $N, \beta_1 \ldots \beta_n$ равны между собой, а $(n + 1)$-й десятичный знак дроби a меньше $(n + 1)$-го десятичного знака дроби b).

Теперь будет понятно следующее **определение**.

Если

$$a = N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

и

$$b = M, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$$

— две б. д. д., то б. д. д. a считается меньше б. д. д. b (обозначение: $a < b$), если либо $N < M$, либо существует такое целое неотрицательное n, что

$$M, \alpha_1\ldots\alpha_n = N, \beta_1\ldots\beta_n \text{ и } \alpha_{n+1} < \beta_{n+1}.$$

(Если $n = 0$, это значит, что $M = N$ и $\alpha_1 < \beta_1$.)

Например, 3,656... < 3,675... (при этом не имеет значения, какие десятичные знаки стоят на следующих местах!); 1,0000... < 1,0010...; 2,873... < 3,791... .

Замечания. 1) Мы упорядочили бесконечные десятичные дроби в точности тем же способом, с помощью которого упорядочивают слова в словарях. Если мы хотим узнать, которое из двух слов находится ближе к началу словаря (или, как часто говорят, которое из них **предшествует** другому), мы смотрим сначала на их первые буквы. Если они различны, предшествующим является то слово, первая буква которого предшествует в алфавите первой букве другого (например, слово *вода* предшествует слову *лето*). Если первые буквы совпадают, смотрим на вторые буквы; если они различны, предшествующим является то слово, вторая буква которого предшествует второй букве другого (например, слово *гора* предшествует слову *гусь*). Если вторые буквы совпадают, смотрим на третьи буквы, и т. д.

Точно так же мы упорядочиваем бесконечные десятичные дроби. При этом мы рассматриваем каждую б. д. д. как «бесконечное слово», у которого первая «буква» берется из бесконечного «алфавита» 0, 1, 2, ..., а остальные — из конечного «алфавита» 0, 1, ..., 9.

Такое упорядочение называется **лексикографическим** (от греческого λεξικόν — словарь; слово «лексикографический» означает, собственно, «относящийся к составлению словарей»).

2) В лексикографическое упорядочение естественным образом включаются все б. д. д., в том числе и оканчивающиеся девятками, т. е. не являющиеся действительными числами.

Сложение и умножение

Пусть

$$a = M,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

и

$$b = N,\ \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$$

— неотрицательные действительные числа, т. е. б. д. д., не оканчивающиеся девятками. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ положим $a_n = M,\ \alpha_1\ldots\alpha_n$; $b_n = N,\ \beta_1\ldots\beta_n$ (в частности: $a_0 = M$; $b_0 = N$), $a'_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$; $b'_n = b_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Числа a_n и a'_n — это, очевидно, приближенные значения a с недостатком и с избытком с точностью до $\dfrac{1}{10^n}$. Аналогичное верно для b_n и b'_n.

Положим, далее:

$$c_n = a_n + b_n;\ c'_n = a'_n + b'_n;\ d_n = a_n \cdot b_n;\ d'_n = a'_n \cdot b'_n.$$

Точки прямой, отвечающие числам c_n, c'_n, d_n и d'_n будем обозначать соответственно C_n, C'_n, D_n, D'_n.

Очевидно, для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$c_n \leqslant c_{n+1} < c'_{n+1} \leqslant c'_n;\ d_n \leqslant d_{n+1} < d'_{n+1} \leqslant d'_n,$$

так что отрезок $C_{n+1}C'_{n+1}$ содержится в $C_nC'_n$, и то же верно для отрезков $D_{n+1}D'_{n+1}$ и $D_nD'_n$. Таким образом, последовательности отрезков

(1) $C_0C'_0$, $C_1C'_1$, $C_2C'_2$, ...

и

(2) $D_0D'_0$, $D_1D'_1$, $D_2D'_2$, ...

удовлетворяют первому условию аксиомы Кантора.

Но легко понять, что последовательность (1) удовлетворяет и второму ее условию: ведь длина отрезка $C_nC'_n$ равна

$$c'_n - c_n = (a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) = \left(a_n + \frac{1}{10^n} + b_n + \frac{1}{10^n}\right) - (a_n + b_n) = \frac{2}{10^n},$$

а длина отрезка $C_{n+1}C'_{n+1}$ равна $\frac{2}{10^{n+1}}$, так что второй из этих отрезков укладывается в первом ровно 10 раз. Поэтому существует точка C, принадлежащая всем отрезкам последовательности (1), и притом только одна. Число c, отвечающее точке C, будем называть **суммой** чисел a и b.

Содержательный смысл этого определения очевиден: суммой чисел a и b мы считаем число, лежащее между всеми суммами приближенных значений a и b с недостатком и всеми суммами их приближенных значений с избытком.

Аналогично, хотя и сложнее технически, можно доказать, что и последовательность (2) удовлетворяет второму условию аксиомы Кантора*, так что существует точка D, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности, и притом только одна. Число, отвечающее точке D, будем называть **произведением** чисел a и b.

Замечание. В общем случае нет регулярных способов, позволяющих вычислять по двум заданным б. д. д. их сумму и произведение. Но можно было бы доказать (мы не будем этого делать), что:

(а) Если одно из слагаемых есть конечная десятичная дробь $N, \alpha_1 \ldots \alpha_k$, а другое — б. д. д. $M, \beta_1\beta_2 \ldots$, то сумма есть б. д. д., получающаяся из суммы *конечных* десятичных дробей $N, \alpha_1 \ldots \alpha_k$ и $M, \beta_1 \ldots \beta_k$ приписыванием справа цифр β_{k+1}, β_{k+2} и т. д.

---

* Вот это доказательство. Легко подсчитать, что $d'_n - d_n = \frac{1}{10^n}\left(a_n + b_n + \frac{1}{10^n}\right)$.

В то же время $a_{n+1} < a_n + \frac{1}{10^n}$, $b_{n+1} < b_n + \frac{1}{10^n}$. Поэтому

$$\begin{aligned} d'_{n+1} - d_{n+1} &= \frac{1}{10^{n+1}}\left(a_{n+1} + b_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}\right) < \\ &< \frac{1}{10^{n+1}}\left(\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right) + \left(b_n + \frac{1}{10^n}\right) + \frac{1}{10^{n+1}}\right) < \\ &< \frac{1}{10^{n+1}}\left(\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right) + \left(b_n + \frac{1}{10^n}\right) + \frac{1}{10^n}\right) < \\ &< \frac{1}{10^{n+1}}\left(3a_n + 3b_n + \frac{3}{10^n}\right) = \frac{3}{10^{n+1}}\left(a_n + b_n + \frac{1}{10^n}\right) = \frac{3}{10}(d'_n - d_n). \end{aligned}$$

Следовательно, отрезок $D_{n+1}D'_{n+1}$ укладывается в $D_nD'_n$ во всяком случае больше трех раз.

(б) Произведение любой б. д. д. на число 10^k получается переносом запятой вправо на k знаков.

Итак, мы рассмотрели сложение, умножение и сравнение по величине неотрицательных действительных чисел. Распространить эти понятия на отрицательные действительные числа можно точно так же, как это было сделано в разделе 2.7 для отрицательных рациональных чисел, слово в слово повторив все приведенные там построения и рассуждения. В частности, точно так же вводится понятие **абсолютной величины** (или **модуля**) действительного числа; тот же смысл имеет и понятие противоположного числа. Сохраняют силу все свойства сложения и умножения, перечисленные в разделе 2.7. (Но доказательства этих свойств здесь значительно сложнее; мы их приводить не будем.) Точно так же вводятся вычитание и деление, причем вычитание всегда выполнимо, а деление — всегда, за исключением случая, когда делитель равен нулю. (Это мы тоже не будем доказывать.) Мы будем также пользоваться для действительных чисел всеми обозначениями, введенными в разделе 2.7. В частности, число, противоположное α, будем обозначать $-\alpha$.

Возведение в степень и извлечение корня

Степени действительных чисел с произвольными целыми показателями определяются так же, как для рациональных чисел (см. раздел 2.7), причем сохраняется то же обозначение, а также все связанные с этим понятием термины. Свойства степени, указанные в разделе 2.7, остаются верными (и доказываются так же).

Легко заметить, что: $(-\alpha)^2 = \alpha^2$; $(-\alpha)^3 = -\alpha^3$. Вообще, если n четно, то $(-\alpha)^n = \alpha^n$; если n нечетно, то $(-\alpha)^n = -\alpha^n$. (Для натуральных n это доказывается методом математической индукции; затем легко распространить утверждение на случай отрицательного n.) Отсюда ясно, что: четная степень всякого действительного числа неотрицательна; нечетная степень отрицательного числа отрицательна.

Корнем степени *n* из *a*, где a — действительное число, называется действительное число x, такое, что $x^n = a$. Корни степени 2 называются **квадратными**, степени 3 — **кубическими**. Действие нахождения корня называется **извлечением** корня. Корень степени n из a обозначается $\sqrt[n]{a}$; вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут, как правило, просто $\sqrt{a}$.

В отличие от других действий над числами, которые мы до сих пор рассматривали, извлечение корня не всегда дает единственный результат. Например, квадратный корень из числа 4 имеет два значения: 2 и –2, поскольку $2^2 = (-2)^2 = 4$.

Можно доказать (хотя это не просто, и мы это делать не будем), что для любого натурального n и любого положительного действительного числа α существует единственное положительное действительное число x, такое, что $x^n = \alpha$. Иначе говоря, для любого положительного α существует положительный корень степени n, и притом только один. Если при этом n четно, то, обозначая положительный корень степени n из α через β, легко видим, что число $-\beta$ также есть корень степени n из α. В самом деле, полагая $n = 2k$, имеем

$$(-\beta)^n = (-\beta)^{2k} = \left((-\beta)^2\right)^k = (\beta^2)^k = \beta^{2k} = \beta^n = \alpha .$$

Нетрудно было бы показать также — мы делать этого не будем — что других отрицательных корней степени n из a не существует. Таким образом, при положительном α и четном n существуют точно два корня степени n из α, совпадающие по абсолютной величине и различающиеся знаком. (Число 0 не может быть корнем из α, т. к. $0^n = 0$.)

Далее, если α положительно, а n нечетно, то никакое отрицательное число не может быть корнем степени n из α, поскольку всякое отрицательное число в нечетной степени отрицательно (см. выше). Следовательно, при положительном α и нечетном n существует единственный корень степени n из α (также положительный). Если α отрицательно и n четно, то корня степени n из α не существует, т. к. всякое действительное число в четной степени неотрицательно. Если, наконец, α отрицательно и n нечетно, то, обозначая через β положительный корень степени n из $|\alpha|$, легко видим, что $-\beta$ есть корень степени n из α. В самом деле, полагая $n = 2k + 1$, имеем:

$$(-\beta)^n = (-\beta)^{2k+1} = (-\beta)^{2k} \cdot (-\beta) .$$

Но $(-\beta)^{2k} = \beta^{2k}$ (см. выше), поэтому

$$(-\beta)^n = \beta^{2k} \cdot (-\beta) = -(\beta^{2k} \cdot \beta) = -\beta^{2k+1} = -\beta^n = -|\alpha| = \alpha .$$

Нетрудно было бы доказать также (мы этого делать не будем), что других корней степени n из α в этом случае не существует.

Ясно также, что при любом n существует единственный корень степени n из 0, тоже равный 0 (поскольку никакое число, отличное от 0, ни в какой степени не равно 0.)

Итак: если n нечетно, то для каждого действительного числа существует единственный корень степени n; если n четно, то для всякого положительного числа существуют два корня степени n, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку, а для отрицательных чисел корней степени n не существует.

Замечание. Во избежание двусмысленности для любого неотрицательного a символом $\sqrt[n]{a}$ всегда обозначают *неотрицательный* корень степени n из a. Например, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

Неотрицательный корень степени n из неотрицательного числа a иногда называют **арифметическим корнем** степени n.

3.6. Периодические дроби

Всякое рациональное число мы можем теперь представить в двух видах: в виде обыкновенной дроби и в виде бесконечной десятичной дроби, как любое действительное число (для отрицательных чисел к обоим представлениям добавляется знак «минус»). Оказывается, однако, что те б. д. д., которые представляют рациональные числа, обладают простым характеристическим свойством*: они являются периодическими, т. е. десятичные знаки в них повторяются через равные промежутки. Дадим точное определение этого понятия.

Определение. Бесконечная десятичная дробь

$$a = N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

называется **периодической**, если существуют такое целое неотрицательное число s и такое натуральное число t, что для всякого натурального $k > s$ справедливо равенство $\alpha_{k+t} = \alpha_k$. Если при этом $s = 0$ (точнее: если наименьшее s, для которого это верно, равно 0), то данную периодическую б. д. д. называют **чистой**, если $s > 0$ — **смешанной**. (Таким образом, для чистой периодической б. д. д. равенство $\alpha_{k+t} = \alpha_k$ справедливо при любом k.)

Вместо «периодическая бесконечная десятичная дробь» обычно говорят короче: **периодическая дробь**.

Последовательность цифр $\alpha_{s+1}\alpha_{s+2}\ldots\alpha_{s+t}$ называется **периодом** данной периодической дроби, число t — **длиной периода**.

Примеры периодических дробей: 0, 333... ($s = 0$; $t = 1$); 15,731731731... ($s = 0$; $t = 3$); 0,4666... ($s = 1$; $t = 1$); 5,25001000100010... ($s = 2$; $t = 4$); 10,88885888... ($s = 5$; $t = 1$); 3,25000... ($s = 2$; $t = 1$). Первые две из них — чистые, остальные — смешанные. Их периоды: 3; 731; 6; 0010; 8; 0.

Примером непериодической б. д. д. может служить 0,1010010001..., где между каждыми следующими двумя единицами стоит на один нуль больше, чем между предыдущими.

Замечания. 1) Число s есть, очевидно, число цифр от запятой до первого периода.

2) Строго говоря, каждая периодическая дробь имеет бесконечно много периодов. Например, первая из приведенных только что дробей имеет также периоды: 33; 333; 3333 и т. д., вторая — 731731; 731731731 и т. д., и, кроме того: 317; 317317 и т. д.; 173; 173173 и т. д. Но обычно

* Характеристическим свойством «вещей» какого-нибудь вида называется свойство, присущее всем «вещам» этого вида и только им.

числа α существует единственное положительное действительное число x, такое, что $x^n = \alpha$. Иначе говоря, для любого положительного α существует положительный корень степени n, и притом только один. Если при этом n четно, то, обозначая положительный корень степени n из α через β, легко видим, что число $-\beta$ также есть корень степени n из α. В самом деле, полагая $n = 2k$, имеем

$$(-\beta)^n = (-\beta)^{2k} = \left((-\beta)^2\right)^k = (\beta^2)^k = \beta^{2k} = \beta^n = \alpha .$$

Нетрудно было бы показать также — мы делать этого не будем — что других отрицательных корней степени n из a не существует. Таким образом, при положительном α и четном n существуют точно два корня степени n из α, совпадающие по абсолютной величине и различающиеся знаком. (Число 0 не может быть корнем из α, т. к. $0^n = 0$.)

Далее, если α положительно, а n нечетно, то никакое отрицательное число не может быть корнем степени n из α, поскольку всякое отрицательное число в нечетной степени отрицательно (см. выше). Следовательно, при положительном α и нечетном n существует единственный корень степени n из α (также положительный). Если α отрицательно и n четно, то корня степени n из α не существует, т. к. всякое действительное число в четной степени неотрицательно. Если, наконец, α отрицательно и n нечетно, то, обозначая через β положительный корень степени n из $|\alpha|$, легко видим, что $-\beta$ есть корень степени n из α. В самом деле, полагая $n = 2k + 1$, имеем:

$$(-\beta)^n = (-\beta)^{2k+1} = (-\beta)^{2k} \cdot (-\beta) .$$

Но $(-\beta)^{2k} = \beta^{2k}$ (см. выше), поэтому

$$(-\beta)^n = \beta^{2k} \cdot (-\beta) = -(\beta^{2k} \cdot \beta) = -\beta^{2k+1} = -\beta^n = -|\alpha| = \alpha .$$

Нетрудно было бы доказать также (мы этого делать не будем), что других корней степени n из α в этом случае не существует.

Ясно также, что при любом n существует единственный корень степени n из 0, тоже равный 0 (поскольку никакое число, отличное от 0, ни в какой степени не равно 0.)

Итак: если n нечетно, то для каждого действительного числа существует единственный корень степени n; если n четно, то для всякого положительного числа существуют два корня степени n, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку, а для отрицательных чисел корней степени n не существует.

Замечание. Во избежание двусмысленности для любого неотрицательного a символом $\sqrt[n]{a}$ всегда обозначают *неотрицательный* корень степени n из a. Например, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

подразумевается тот период, который отвечает **наименьшим** возможным значениям чисел s и t.

Для периодических дробей принят следующий удобный способ записи: сначала записывают целую часть, после нее ставят запятую, затем записывают цифры, предшествующие периоду (если они есть) и, наконец, период, заключив его в скобки. Например, только что приведенные дроби записываются так: 0,(3); 15,(731); 0,4(6); 5,25(0010); 10,88885(8); 3,25(0). Это читается: «ноль целых, три в периоде»; «пятнадцать целых, семьсот тридцать один в периоде»; «ноль целых, две десятых и шесть в периоде» и т. п.

Теорема 1. Если б. д. д., не оканчивающаяся девятками (т. е. неотрицательное действительное число), равна некоторой обыкновенной дроби (т. е. является рациональным числом), то эта б. д. д. — периодическая.

Для доказательства этой теоремы докажем сначала лемму*.

Лемма. Пусть б. д. д.

$$N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

равна обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. Тогда для любого натурального k конечную десятичную дробь $N, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ можно получить, приписав к числу m справа k нулей, разделив полученное число с остатком на n и в частном отделив запятой k цифр справа.

Доказательство леммы. Пусть AB — некоторый отрезок, для длины которого данная б. д. д. a служит последовательностью приближенных значений. По условию отрезок AB может быть измерен также с помощью обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, т. е. в нем укладывается точно m раз n-ная доля единичного отрезка. Дробь $\frac{m}{n}$ можно считать несократимой, поскольку отрезок, измеряемый некоторой дробью, измеряется также и всеми равными ей дробями, а среди них всегда есть несократимая.

Умножив числитель дроби $\frac{m}{n}$ на 10^k, получим дробь $\frac{m\cdot 10^k}{n}$, измеряющую отрезок, в 10^k раз более длинный, чем AB (мы будем обозначать его CD). Разделив число $m \cdot 10^k$ с остатком на n, получим:

$$m\cdot 10^k = nl + r,$$

где l — неполное частное и r — остаток, $0 \leqslant r < n$. Отсюда

---

* **Леммой** называется вспомогательное утверждение, необходимое для доказательства некоторой теоремы.

$$\frac{m \cdot 10^k}{n} = l + \frac{r}{n},$$

где l и r — целые неотрицательные числа и $0 \leqslant \frac{r}{n} < 1$. А это значит, что в отрезке CD, длина которого равна $\frac{m \cdot 10^k}{n}$, l раз укладывается единичный отрезок. Следовательно, в отрезке AB, в 10^k раз более коротком, столько же раз укладывается отрезок длины $\frac{1}{10^k}$. Но мы видели (см. замечание перед примером 1 в разделе 3.3), что число отрезков длины $\frac{1}{10^k}$, укладывающихся в отрезке, измеряемом бесконечной десятичной дробью $N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, равно $N, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \cdot 10^k$. Таким образом, $l = N, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \cdot 10^k$, откуда

$$N, \alpha_1\ldots\alpha_k = \frac{l}{10^k}.$$

Итак, чтобы получить десятичную дробь $N, \alpha_1\ldots\alpha_k$, нужно умножить число m на 10^k (т. е. приписать к нему k нулей справа), разделить полученное число с остатком на n и частное разделить на 10^k (т. е. отделить в нем запятой k цифр справа). Лемма доказана.

Эта лемма дает нам способ по данной обыкновенной дроби находить «начало» равной ей б. д. д. с любым заданным числом знаков после запятой. Покажем на примере, как это делается.

Пусть данная дробь есть $\frac{33}{14}$. Найдем «начало» равной ей б. д. д. с девятью знаками после запятой. Для этого припишем к числу 33 справа девять нулей и разделим полученное число «уголком» на 14:

```
33000000000 |14
 50         |2357142857
  80
  100
    20
     60
      40
      120
        80
        100
          2
```

Отделив в частном девять цифр справа, получаем 2,357142857.

То же самое можно сделать проще: не приписывать нули к делителю, а к каждому остатку, если «из делимого уже нечего сносить», приписывать нуль, в частном поставить запятую перед тем, как впервые будет приписан нуль к остатку (иначе говоря, как только «кончатся все цифры делимого»), и прекратить этот процесс, когда в частном будет нужное число цифр. Запись примет тогда следующий вид:

```
33          |14
 50         |2,357142857
  80
  100
    20
     60
      40
      120
        80
        100
          2
```

Доказательство теоремы 1. Ввиду доказанной леммы нам достаточно показать, что при делении числа $m \cdot 10^k$ на n цифры частного, начиная с некоторого места, повторяются, если только k достаточно велико. Но нетрудно видеть, что это действительно так. В самом деле, при описанной только что процедуре деления «уголком» каждая цифра после запятой есть частное от деления на n очередного остатка, умноженного на 10. Но любой из этих остатков есть одно из чисел $0, 1, ..., n - 1$, так что среди них может встретиться не более n различных. И если продолжать деление достаточно долго, то непременно получится остаток, который уже был на одном из предыдущих шагов. Но раз на шагах с номерами p и $p + t$ получились одинаковые остатки, то на шагах с номерами $p + 1$ и $p + t + 1$ в частном будут одинаковые цифры, и остатки на этих шагах тоже совпадут, а потому и следующие цифры частного будут одинаковы, и следующие остатки тоже, и т. д. Следовательно, б. д. д. $N, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ — периодическая, что и требовалось доказать.

В нашем примере на первом и седьмом шагах (первым шагом мы считаем тот, **перед которым** к остатку впервые был приписан нуль) получился один и тот же остаток 8. Поэтому на втором и восьмом шагах получается одна и та же цифра 5 в частном и один и тот же остаток 10, на третьем и девятом — одна и та же цифра 7 и один и тот же остаток 2, и т. д. В итоге получается периодическая дробь 2,3(571428).

Замечание. Если на некотором шаге остаток оказался равным нулю, то цифра частного, полученная при делении этого остатка, тоже будет нулем, и на всех следующих шагах в остатке и в частном будут получаться нули. Данная обыкновенная дробь равна в этом случае некоторой периодической дроби с периодом нуль, т. е. конечной десятичной дроби.

Докажем теперь, что справедлива и обратная теорема.

Теорема 2. Всякая периодическая б. д. д., не оканчивающаяся девятками (т. е. являющаяся действительным числом), равна некоторой обыкновенной дроби (т. е. некоторому рациональному числу).

Доказательство. Нам нужно доказать, что всякий отрезок, измеряемый периодической дробью, может быть измерен также некоторой обыкновенной дробью. При этом мы можем ограничиться случаем, когда период отличен от нуля, поскольку периодическая дробь с периодом 0 равна, как мы уже видели, некоторой конечной десятичной дроби, т. е. некоторой обыкновенной дроби со знаменателем вида 10^k.

Пусть сначала данная периодическая дробь — чистая. Чтобы не усложнять изложение, проведем его на примере, на котором, однако, будет ясно виден ход рассуждения в общем случае.

Рассмотрим сначала случай, когда отрезок AB измеряется периодической дробью $a = 0,(642) = 0,642642642...$. Эту дробь можно представить в виде суммы конечной десятичной дроби $b = 0,642$ и бесконечной десятичной дроби $c = 0,000642642... = 0,000(642)$ (см. замечание в разделе 3.5 после определений суммы и произведения). Иначе говоря, отрезок AB можно разбить на два отрезка AC и CB, первый из которых измеряется дробью b, второй — дробью c (см. рис. 3.10). В отрезке CB столько же раз укладывается десятитысячная доля единичного отрезка, сколько в отрезке AB десятая доля; в оставшейся части CB столько же раз укладывается стотысячная доля единичного отрезка, сколько в оставшейся части AB — сотая, и т. д. Поэтому отрезок CB равен $\frac{1}{1000}$ отрезка AB. Следовательно, отрезок AC равен $\frac{999}{1000}$ отрезка AB. Но тот же отрезок AC измеряется дробью 0,642 и, значит, равен $\frac{642}{1000}$ единичного отрезка. Итак: $\frac{999}{1000}$ отрезка AB равны $\frac{642}{1000}$ единичного отрезка; следовательно, взятый 999 раз отрезок AB равен единичному отрезку, взятому 642 раза. Значит, сам отрезок AB равен 999-й доле единичного отрезка, взятой 642 раза, т. е. этот отрезок измеряется дробью $\frac{642}{999}$.

Рис. 3.10

В рассмотренном примере целая часть дроби была равна нулю. Но если отрезок измеряется, например, периодической дробью 8, (642), то его можно разбить на два отрезка, один из которых измеряется натуральным числом 8, а другой — периодической дробью 0, (642). Второй из этих отрезков, как мы видели, измеряется также обыкновенной дробью $\frac{642}{999}$; следовательно, исходный отрезок измеряется обыкновенной дробью $8 + \frac{642}{999} = \frac{8634}{999}$.

Обратимся теперь к случаю смешанной периодической дроби. Доказательство проведем также на примере. Пусть отрезок AB измеряется периодической дробью

$$0,27(642) = 0,27642642\ldots .$$

Разобьем его на два отрезка: AC, измеряемый конечной десятичной дробью 0,27, и CB, измеряемый периодической дробью (также смешанной!)

$$0,00(642) = 0,00642642\ldots .$$

Легко понять, что отрезок CB в 100 раз короче отрезка, измеряемого чистой периодической дробью $0,(642) = 0,642642\ldots$. (Мы уже установили аналогичный факт для отрезка, измеряемого периодической дробью 0,000(642).) Но мы видели, что отрезок, измеряемый периодической дробью $0,(642)$, измеряется также и обыкновенной дробью $\frac{642}{999}$ — иначе говоря, в нем точно 642 раза укладывается 999-я доля единичного отрезка. Поэтому в отрезке CB, в 100 раз более коротком, 642 раза уложится 99900-я доля единичного отрезка (т. е. отрезок, в 100 раз более короткий, чем 999-я доля). Иначе говоря, отрезок CB измеряется обыкновенной дробью $\frac{642}{99900}$. Следовательно, отрезок AB измеряется обыкновенной дробью $\frac{27}{100}+\frac{642}{99900}=\frac{27\cdot 999+642}{99900}=\frac{27615}{99900}=\frac{1841}{6660}$.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Объединяя теоремы 1 и 2, получаем следующую теорему.

Теорема 3. Неотрицательное действительное число тогда и только тогда рационально, когда представляющая его б. д. д. — периодическая.

Доказательства теорем 1 и 2 дают нам способы *обращать* обыкновенные дроби в периодические и обратно, т. е. находить для любой обыкновенной дроби равную ей периодическую и для любой периодической равную ей обыкновенную. Способы эти ясны из приведенных рассуждений и примеров, но полезно сформулировать их в виде отдельных правил.

Правило обращения обыкновенной дроби в периодическую

Делим «уголком» числитель на знаменатель. Если деление выполняется без остатка, данная дробь равна полученному частному N (т. е. периодической дроби $N,(0)$). Если остаток не равен нулю, ставим после последней цифры частного запятую, приписываем к остатку нуль и продолжаем деление. Если следующий остаток тоже не равен нулю, приписываем к нему нуль и продолжаем деление, и т. д. При этом возможны два случая:

1) На каком-нибудь шаге получится остаток, равный нулю. Тогда деление заканчивается; данная обыкновенная дробь равна в таком случае конечной десятичной дроби, стоящей в частном после этого шага.

2) На каком-нибудь шаге получится ненулевой остаток, совпадающий с одним из остатков, полученных ранее. Пусть p и $p + t$ — номера

первых двух одинаковых остатков. (При этом остатком с номером 1 считается тот, к которому впервые был приписан нуль; остатки, полученные до этого, в расчет не принимаются.) Тогда после получения остатка с номером $p + t$ деление прекращается и последние t цифр частного заключаются в скобки. (Всего в частном после запятой должно быть к этому моменту $p + t - 1$ цифр.) Полученная периодическая дробь и есть та, которая равна данной обыкновенной дроби.

В следующих примерах мы будем остаток с номером i обозначать r_i.

Пример 1. Дана дробь $\frac{279}{11}$.

$$\begin{array}{r|l} 279 & \underline{11} \\ 59 & 25,(36) \\ 40 & \\ 70 & \\ 4 & \end{array}$$

Результат: $\frac{279}{11} = 25,(36)$. Здесь: $p = 1$; $t = 2$; $r_1 = r_3 = 4$.

Пример 2. Дана дробь $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{r|l} 10 & \underline{3} \\ 1 & 0,(3) \end{array}$$

Результат: $\frac{1}{3} = 0,(3)$. Здесь: $p = 1$; $t = 1$; $r_1 = r_2 = 1$. Обратите внимание, что в этом примере нуль приписывается уже к самому делимому, и поэтому оно считается первым остатком. Так, очевидно, будет всегда, когда данная дробь — правильная, т. е. ее числитель меньше знаменателя.

Пример 3. Дана дробь $\frac{41}{26}$.

$$\begin{array}{r|l} 41 & \underline{26} \\ 150 & 1,5(769230) \\ 200 & \\ 180 & \\ 240 & \\ 60 & \\ 80 & \\ 20 & \end{array}$$

Результат: $\frac{41}{26} = 1,5(769230)$. Здесь: $p = 2$; $t = 6$; $r_2 = r_8 = 20$. В последней строке записаны сразу *два остатка*: $r_7 = 2$ и $r_8 = 20$. (Так всегда пишут при делении «уголком», если увеличенный в десять раз остаток меньше делителя.)

Пример 4. Дана дробь $\dfrac{359}{10100}$.

$$\begin{array}{l|l} 35900 & \underline{10100} \\ \;\;56000 & 0{,}03(5544) \\ \;\;\;\;55000 & \\ \;\;\;\;\;\;45000 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;46000 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5600 & \end{array}$$

Результат: $\dfrac{359}{10100} = 0{,}03(5544)$. Здесь: $p = 3$; $t = 4$; $r_3 = r_7 = 5600$. В первой строке записаны сразу два остатка (сравните с примером 3): r_1, равный самому делимому (сравните с примером 2), и $r_2 = 3590$. На этом примере видно также, что в частном может получиться ранее встречавшаяся цифра еще до того, как начнут повторяться остатки, и в этом случае заканчивать деление нельзя.

Правило обращения периодической дроби в обыкновенную

1) Чистая периодическая дробь равна сумме своей целой части и обыкновенной дроби, у которой в числителе записан период, а в знаменателе столько девяток, сколько цифр в периоде.

2) Смешанная периодическая дробь равна сумме своей целой части и двух обыкновенных дробей, у одной из которых в числителе записаны цифры, стоящие после запятой до периода, а в знаменателе единица со столькими нулями, сколько цифр после запятой до периода, у другой — в числителе период, а в знаменателе столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр после запятой до периода.

Примечание. Нули в начале числителя отбрасываются.

Пример 1. $2,(540) = 2 + \dfrac{540}{999} = 2\dfrac{20}{37} = \dfrac{94}{37}$.

Пример 2. $0,(0066) = \dfrac{66}{9999} = \dfrac{2}{303}$.

Пример 3. $3{,}042(72) = 3 + \dfrac{42}{1000} + \dfrac{72}{99000} = 3 + \dfrac{42 \cdot 99 + 72}{99000} = 3\dfrac{4230}{99000} =$
$= 3\dfrac{47}{1100} = \dfrac{3347}{1100}$.

Пример 4. $0{,}00(66) = \dfrac{66}{9900} = \dfrac{1}{150}$. (Сравните с примером 2.)

Нам остается теперь выяснить, какие обыкновенные дроби обращаются в чистые периодические и какие — в смешанные. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4. Несократимая обыкновенная дробь обращается в чистую периодическую дробь тогда и только тогда, когда ее знаменатель не делится ни на 2, ни на 5.

Доказательство. 1) Пусть несократимая дробь $\frac{m}{n}$ получена в результате обращения чистой периодической дроби $M,(\alpha_1...\alpha_t)$. Если период этой дроби есть нуль, то она равна целому числу M, т. е. $m = M$, $n = 1$, а единица не делится ни на 2, ни на 5. Если же период не равен нулю, то при обращении этой периодической дроби в обыкновенную получается (см. правило обращения) дробь со знаменателем $\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ раз}}$, и $\frac{m}{n}$ есть несократимое представление этой дроби. Но при сокращении дроби со знаменателем 99...9 не может получиться дробь, знаменатель которой делится на 2 или на 5.

2) Пусть несократимая дробь $\frac{m}{n}$ получена в результате обращения смешанной периодической дроби $M,\beta_1...\beta_s(\alpha_1...\alpha_t)$, где $s > 0$. Мы будем считать, что s — наименьшее число, при котором такая запись возможна*.

Условимся обозначать через $M\beta_1...\beta_s$ натуральное число, десятичная запись которого получается приписыванием справа к десятичной записи числа M цифр $\beta_1, ..., \beta_s$. (Если $M = 0$, это будет число с десятичной записью $\beta_1...\beta_s$, а если при этом также и $\beta_1 = ... = \beta_s = 0$, то $M\beta_1...\beta_s = 0$.) Аналогичный смысл будет иметь запись $M\beta_1...\beta_s\alpha_1...\alpha_t$. По правилу обращения периодической дроби в обыкновенную получаем:

$$M,\beta_1...\beta_s(\alpha_1...\alpha_t) = M + \frac{\beta_1...\beta_s}{10^s} + \frac{\alpha_1...\alpha_t}{\underbrace{9...9}_{t\text{ раз}}\cdot 10^s} = M + \frac{\beta_1...\beta_s}{10^s} + \frac{\alpha_1...\alpha_t}{(10^t-1)\cdot 10^s} =$$

$$= \frac{M\cdot 10^s\cdot(10^t-1) + \beta_1...\beta_s\cdot(10^t-1) + \alpha_1...\alpha_t}{(10^t-1)\cdot 10^s} = \frac{(10^t-1)\cdot M\beta_1...\beta_s + \alpha_1...\alpha_t}{(10^t-1)\cdot 10^s} =$$

$$= \frac{(10^t\cdot M\beta_1...\beta_s + \alpha_1...\alpha_t) - M\beta_1...\beta_s}{(10^t-1)\cdot 10^s} = \frac{M\beta_1...\beta_s\alpha_1...\alpha_t - M\beta_1...\beta_s}{(10^t-1)\cdot 10^s}.$$

Легко видеть, что числитель полученной дроби не делится на 10. В самом деле, если бы он делился на 10, то последние цифры уменьшаемого и вычитаемого совпадали бы, т. е. было бы $\alpha_t = \beta_s$; но тогда данную периодическую дробь можно было бы записать в виде $M,\beta_1...\beta_{s-1}(\alpha_t\alpha_1...\alpha_{t-1})$, что противоречит условию минимальности числа s. В то же время знаме-

* Например, если данная периодическая дробь есть 1,23714714714..., мы записываем ее в виде 1,23(714), а не 1,237(147), или 1,2371(471), или 1,23714(714) и т. п. (сравни с замечанием 2 на с. 104).

натель этой дроби делится на 10, и поэтому при любом ее сокращении получится дробь, у которой знаменатель делится на 2 или на 5.

Замечание. Сформулированное выше правило обращения периодической дроби в обыкновенную применимо к периодической дроби $M,\beta_1...\beta_p(\alpha_1...\alpha_t)$ также и в том случае, когда числа p и t (или одно из них) не являются наименьшими, при которых такая запись возможна. Но это всегда ведет к усложнению вычислений.

Задания. 1) Обратите периодическую дробь $0,(57)$ в обыкновенную. Затем сделайте то же самое, записав ее в виде $0,(5757)$, в виде 0,57(57) и в виде 0,5(75).

2) То же для периодической дроби 1,45(351), записанной сначала в указанном виде, а затем как 1,453(513) и как 1,4535(135).

3) Обратите следующие обыкновенные дроби в периодические:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{18}{7}$; в) $\frac{40}{33}$; г) $\frac{15}{37}$; д) $\frac{20}{21}$; е) $\frac{53}{18}$; ж) $\frac{2}{450}$; з) $\frac{155}{176}$.

4) Обратите следующие периодические дроби в обыкновенные:

а) $0,(1)$; б) $0,(5)$; в) $0,(01)$; г) $0,(010)$; д) $2,(814)$; е) 1,1(2); ж) 2,31(52); з) 0,0(1); и) 0,0(10).

5) Какие знаменатели могут иметь обыкновенные дроби, получаемые обращением чистых периодических дробей, длина периода которых равна двум, трем, четырем?

3.7. Сечения

Пусть множество всех действительных чисел разбито на два непустых подмножества A и B таким образом, что всякое число, принадлежащее A, меньше всякого числа, принадлежащего B. В этом случае говорят, что множества A и B образуют **сечение** множества действительных чисел. Множество A называется **нижним классом** сечения, множество B — его **верхним классом**.

Говоря о сечениях множества действительных чисел, мы ради краткости слова «множества действительных чисел» будем опускать.

Ясно, что если множества A и B образуют сечение и a — произвольное число, принадлежащее A (нижнему классу), то всякое число a', меньшее a, тоже принадлежит A. В самом деле, если $a' \notin A$, то $a' \in B$, откуда по определению сечения следует, что $a < a'$. Точно так же ясно, что если b — произвольное число, принадлежащее B, то всякое число, большее b, тоже принадлежит B. Получается простая наглядная картина (рис. 3.11).

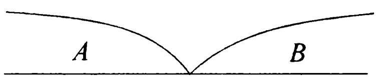


Рис. 3.11

Примеры. 1) Пусть A_1 — множество всех отрицательных действительных чисел, B_1 — множество всех неотрицательных чисел. Поскольку всякое действительное число либо отрицательно, либо неотрицательно, и всякое отрицательное число меньше всякого неотрицательного, множества A_1 и B_1 образуют сечение.

2) Пусть A_2 — множество всех неположительных чисел, B_2 — множество всех положительных чисел. Точно так же видим, что A_2 и B_2 образуют сечение.

Заметим, что в примере 1 в верхнем классе существует наименьшее число (им является 0), в то время как в нижнем нет наибольшего: каково бы ни было отрицательное число a, найдется другое отрицательное число a', которое больше a (рис. 3.12). В примере 2, наоборот, в нижнем классе есть наибольшее число (это опять-таки 0), а в верхнем классе нет наименьшего.

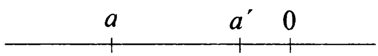


Рис. 3.12

Может ли случиться так, что у какого-нибудь сечения в нижнем классе есть наибольшее число и в то же время в верхнем есть наименьшее? Легко понять, что так быть не может. Действительно: пусть множества A и B образуют сечение и пусть a — наибольшее из чисел, принадлежащих A, а b — наименьшее из чисел, принадлежащих B. Поскольку $a \in A$ и $b \in B$, имеем $a < b$. Возьмем теперь число $\frac{a+b}{2}$. Очевидно, $a < \frac{a+b}{2} < b$. Но отсюда следует, что $\frac{a+b}{2} \notin A$ (т. к. a — **наибольшее** из чисел, принадлежащих A), и $\frac{a+b}{2} \notin B$ (т. к. b — **наименьшее** из чисел, принадлежащих B) (рис. 3.13). А это противоречит определению сечения, согласно которому **все** множество действительных чисел разбивается на два множества A и B, т. е. **любое** действительное число принадлежит одному (и только одному) из этих множеств.

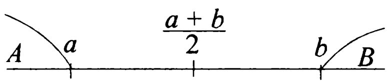


Рис. 3.13

А может ли случиться, что у какого-нибудь сечения нет ни наибольшего числа в нижнем классе, ни наименьшего в верхнем? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. Каково бы ни было сечение, либо в его нижнем классе есть наибольшее число, либо в верхнем есть наименьшее.

Это утверждение фактически представляет собой еще одну формулировку принципа непрерывности (см. раздел 3.2).

Доказательство. Пусть множества A и B образуют сечение (A — нижний класс, B — верхний). Возьмем из A произвольное число a_1 и из B

произвольное число b_1. Из определения сечения следует, что $a_1 < b_1$. Обозначим через α_1 и β_1 точки прямой, отвечающие числам a_1 и b_1. Разобьем отрезок $\alpha_1\beta_1$ на два равных отрезка точкой γ_1. Пусть c_1 — число, отвечающее этой точке. (Очевидно, $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.) Определим числа a_2 и b_2 следующим образом: если $c_1 \in A$, то $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$; в противном случае $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$. В обоих случаях, очевидно, $a_2 \in A$, $b_2 \in B$. Точки, отвечающие этим числам, обозначим α_2 и β_2. Отрезок $\alpha_2\beta_2$ точно так же разобьем на два равных отрезка и определим числа a_3 и b_3 и точки α_3 и β_3 точно так же, как определялись a_2, b_2, α_2, β_2. Затем таким же способом построим числа a_4, b_4 и точки α_4, β_4, и т. д. В результате мы получим последовательность отрезков

$$(1)\ \alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2,\ \alpha_3\beta_3,\ \ldots,$$

такую, что все числа a_1, a_2, a_3, …, отвечающие их левым концам, принадлежат нижнему классу нашего сечения, а все числа b_1, b_2, b_3, ..., отвечающие правым концам, принадлежат верхнему классу. Ясно также, что последовательность (1) удовлетворяет обоим условиям аксиомы Кантора. Поэтому существует точка δ, и притом только одна, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности. Обозначим через d число, отвечающее этой точке. Как и всякое действительное число, d принадлежит либо классу A, либо классу B. А теперь нетрудно доказать, что в первом случае оно является наибольшим числом в A, во втором — наименьшим в B.

Пусть $d \in A$. Допустим, что d — не наибольшее число в A. Тогда существует такое число $d' \in A$, что $d' > d$. Обозначим точку, отвечающую этому числу, через δ'. В последовательности (1) найдется такой отрезок $\alpha_n\beta_n$, длина которого меньше длины отрезка $\delta\delta'$ (т. е. числа́ $d' - d$). Но в таком случае точка β_n должна лежать левее δ' (рис. 3.14), а это значит, что $b_n < d'$. А поскольку $d' \in A$, число b_n тоже должно принадлежать A, тогда как по построению все числа b_n принадлежат B. Следовательно, d — наибольшее число в A.

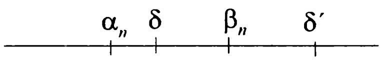


Рис. 3.14

Случай, когда $d \in B$, рассматривается аналогично. Доказательство закончено.

3.8. Как расположены рациональные и иррациональные числа

В этом разделе мы докажем, что как рациональные, так и иррациональные числа расположены в множестве действительных чисел **всюду**

плотно. Это значит, что между любыми двумя различными действительными числами найдется и рациональное и иррациональное число.

Пусть a и b — произвольные различные действительные числа. Одно из них меньше другого; пусть для определенности $a < b$. Рассмотрим сначала случай, когда $a \geqslant 0$ и, следовательно, $b > 0$. Тогда a и b суть б. д. д., не оканчивающиеся девятками:

$$a = N,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots;$$
$$b = P,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots .$$

Неравенство $a < b$ означает, что либо $N < P$, либо найдется такое целое неотрицательное k, что $N,\alpha_1\ldots\alpha_k = P,\beta_1\ldots\beta_k$ и $\alpha_{k+1} < \beta_{k+1}$. Обозначим через l в первом случае наименьшее натуральное число, для которого $\alpha_l \neq 9$, во втором — наименьшее из натуральных чисел, бо́льших $k + 1$, для которого $\alpha_l \neq 9$. (Например: если $a = 5{,}9943\ldots$, и $b = 6{,}7042\ldots$, то $l = 3$; если $\alpha = 1{,}9509927\ldots$ и $b = 1{,}9522385\ldots$, то $l = 6$.) Если мы теперь возьмем *любую* б. д. д., начинающуюся конечной десятичной дробью $N,\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\gamma$, где $\gamma = \alpha_l + 1$ (в первом нашем примере эта конечная десятичная дробь есть 5,995, во втором — 1,950993), то эта б. д. д. есть число, большее a и меньшее b. Но среди таких чисел есть и рациональные, и иррациональные. Рациональным числом является, например, сама конечная десятичная дробь $N,\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\gamma$; иррациональным — б. д. д. $N,\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}\gamma1010010001\ldots$ (сравните с примером непериодической б. д. д. в разделе 3.6).

Обратимся теперь к случаю, когда $a < 0$. Если при этом $b > 0$, то по предыдущему между числами 0 и b найдется и рациональное и иррациональное число; но эти числа расположены также и между a и b. Если же $b \leqslant 0$, то $0 \leqslant -b \leqslant -a$, и по предыдущему между $-b$ и $-a$ имеются рациональное число c и иррациональное число d. Очевидно, числа $-c$ и $-d$ расположены между a и b, причем первое из них рационально, а второе иррационально.

Из доказанного утверждения следует, между прочим, что между любыми двумя различными действительными числами имеется бесконечно много как рациональных, так и иррациональных. В самом деле: если a и b — два различных действительных числа, то между ними найдется рациональное число c_1, а между a и c_1 в свою очередь найдется рациональное число c_2, между a и c_2 — рациональное число c_3 и т. д. до бесконечности. Аналогично для иррациональных чисел.

Глава 4
Комплексные числа

4.1. Первоначальные сведения о мнимых и комплексных числах

Теперь нам нужно оглянуться назад. Начав с натуральных чисел и нуля, мы затем трижды расширяли систему чисел. Благодаря первым двум расширениям — введению дробей и отрицательных чисел — стали неограниченно выполнимы деление (за исключением деления на нуль) и вычитание. Иначе говоря, стало возможным решение уравнений вида $ax = b$ и $a + x = b$, а тем самым и любых линейных уравнений.

В то же время квадратные уравнения и уравнения высших степеней, даже если все коэффициенты — целые числа, не всегда имеют рациональные корни. В начале предыдущей главы мы видели, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум, т. е. что уравнение $x^2 = 2$ не имеет рациональных корней. Затем мы ввели действительные числа, после чего это уравнение стало разрешимым. Однако столь же простое уравнение $x^2 = -1$ осталось неразрешимым и после введения действительных чисел: ведь по правилу умножения действительных чисел любых знаков (совпадающему с правилом умножения рациональных чисел: см. разделы 2.7 и 3.5) квадрат действительного числа, т. е. произведение его на себя, всегда положителен или равен нулю.

Но математики заметили, что если ввести в рассмотрение «воображаемые» числа, квадраты которых отрицательны, и чисто формально складывать и перемножать их между собой и с «настоящими» числами, группируя и переставляя слагаемые и сомножители и раскрывая скобки по обычным правилам, то все квадратные уравнения можно будет формально решать одним и тем же способом.

Напомним, в чем состоит этот способ. Рассмотрим квадратное уравнение

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$ (при $a = 0$ уравнение было бы не квадратным, а линейным).

Произведем над его левой частью преобразование, известное под названием «выделение полного квадрата»:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x\right) + c = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Таким образом, уравнение (1) равносильно уравнению

$$(2) \qquad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0.$$

Перенося свободный член в правую часть и деля обе части на a, получаем

$$(3) \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

или иначе, обозначая число b^2-4ac через D:

$$(3') \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}.$$

Отсюда ясно, что если $D \geqslant 0$, то $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$, откуда

$$(4) \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$

а если $D<0$, то равенство (3) невозможно ни при каком x и, значит, уравнение (1) не имеет корней. Но если ввести в рассмотрение «воображаемые» квадратные корни из отрицательных чисел, то формула (4) станет пригодной и для случая $D<0$. Например, для уравнения

$$25x^2+6x+1=0,$$

для которого $D=6^2-4\cdot25\cdot1=36-100=-64$, корнями будут «воображаемые числа» $\frac{-6+\sqrt{-64}}{50}$ и $\frac{-6-\sqrt{-64}}{50}$.

Далее, если мы условимся считать (чисто формально!), что равенство $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ справедливо при любых знаках чисел a и b, то для любого отрицательного числа a получим:

$$\sqrt{a}=\sqrt{-|a|}=\sqrt{|a|\cdot(-1)}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{-1},$$

где $\sqrt{|a|}$ — «настоящее» число. Тогда при $D<0$ из формулы (4) получится следующее выражение для корней уравнения (1):

$$(5) \qquad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{|D|}}{2a}\cdot\sqrt{-1}.$$

Например, корни приведенного выше уравнения будут иметь вид:

$$x=\frac{-6\pm8\cdot\sqrt{-1}}{50}=\frac{-3\pm4\cdot\sqrt{-1}}{25}.$$

Таким образом, чтобы иметь возможность формально решать любые квадратные уравнения, достаточно добавить к «настоящим» числам одно-единственное «воображаемое» число $\sqrt{-1}$. При этом корни квадратных уравнений всегда имеют вид $a+b\sqrt{-1}$, где a и b — «настоящие» числа. (В частности, если корень — «настоящее» число a, его можно представить в виде $a+0\cdot\sqrt{-1}$.)

Легко заметить также, что (формальные!) суммы, разности, произведения и частные «воображаемых чисел» вида $a+b\sqrt{-1}$, где a и b — «настоящие» числа, тоже могут быть представлены в таком виде. В самом деле:

$$(a+b\sqrt{-1})\pm(c+d\sqrt{-1})=(a\pm c)+(b\pm d)\cdot\sqrt{-1}; \tag{6}$$

$$(a+b\sqrt{-1})\cdot(c+d\sqrt{-1})=ac+ad\sqrt{-1}+bc\sqrt{-1}+bd\cdot(-1)= \tag{7}$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot\sqrt{-1}.$$

Если здесь a, b, c, d — «настоящие» числа, то $a\pm c$, $b\pm d$, $ac-bd$, $ad+bc$ — тоже «настоящие» числа.

Несколько сложнее доказать аналогичный факт для частного. Для этого заметим сначала, что в силу (7)

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=(a^2+b^2)+(ab-ab)\cdot\sqrt{-1}=a^2+b^2.$$

Поэтому, если в частном $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}$ формально умножить делимое и делитель на $c-d\sqrt{-1}$, получим:

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})\cdot(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\cdot\sqrt{-1}}{c^2+d^2}= \tag{8}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot\sqrt{-1}.$$

Итак, если делимое и делитель представляются в виде суммы «настоящего» числа с произведением «настоящего» числа и $\sqrt{-1}$, то и частное представляется в таком виде.

«Воображаемый» квадратный корень из –1 принято называть **мнимой единицей** и обозначать буквой i (от латинского *imaginarius* — «воображаемый, мнимый»). После того как вошли в употребление «воображаемые числа» вида $a + bi$ (в русской терминологической системе принят термин **мнимые числа**), «настоящие» числа стали называть **действительными** (соответствующий латинский термин — *realis*, буквально «вещественный, существующий в действительности» — происходит от *res* — «дело, вещь»; отсюда же русское слово *реальный*). (Параллельный русский термин — **вещественное число**; здесь слово «вещественное» — просто другой перевод латинского *realis*.)

В настоящее время **мнимыми числами** называют только такие числа вида $a + bi$ (a и b — действительные числа), у которых $b\neq 0$, а произвольные числа вида $a + bi$, где a и b — любые действительные числа, называют **комплéксными числами*** (т. е. «составными», от латинского *complexus* — «связь, сочетание»). Числа вида bi, где b — действительное число, называют иногда **чисто мнимыми**.

Сейчас термины «мнимое число» и «действительное число» используются только по традиции: математики давно уже не смотрят на мнимые и комплексные числа как на «воображаемые» и считают их не менее «настоящими» числами, чем действительные. Такой взгляд установился с тех пор, как был найден простой и наглядный способ геометрического изображения комплексных чисел.

Способ этот состоит в следующем. На плоскости выбирается декартова прямоугольная система координат, и каждое комплексное число $a + bi$ изображается точкой на плоскости, абсцисса которой равна a и ордината равна b (рис. 4.1). Таким образом, каждому комплексному числу отвечает единственная точка плоскости и каждой точке плоскости отвечает единственное комплексное число.

Плоскость, используемую для изображения комплексных чисел, часто называют **комплексной плоскостью**; ось абсцисс обычно называют при этом **действительной осью**, а ось ординат — **мнимой осью**. (Впрочем, комплексные числа часто отождествляют с изображающими их точками, так что выражение «комплексная плоскость» может означать и само множество комплексных чисел.) На рис. 4.2 показаны точки, служащие изображениями комплексных чисел: $1 + i$; $-2 - 3i$; 0; 1; 2; -1; i; $3i$; $-i$; $-2i$. Действительные числа, т. е. числа вида $a + 0i$, изображаются точками действительной оси. Число $0 = 0 + 0i$ изображается началом координат.

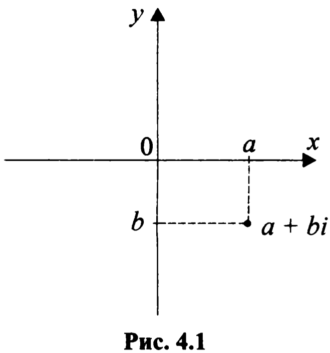


Рис. 4.1

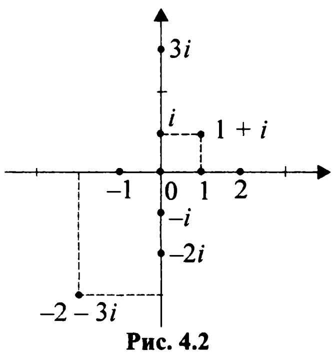


Рис. 4.2

Задание. Изобразите на чертеже числа: $0{,}5i$; $2 + i$; $-2 + i$; $1 - 2i$; $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

---

* Обратите внимание на ударение! В нетерминологическом значении русское слово *комплексный* произносится с ударением на первом слоге, а в составе математического термина *комплексное число* — на втором.

4.2. Строгие определения

Геометрическое изображение комплексных чисел, благодаря которому они становятся простыми и понятными объектами — точками плоскости, основано на том, что всякая точка плоскости задается парой действительных чисел, и всякое комплексное число $a + bi$ также задается парой действительных чисел a и b. Это наводит на мысль определять комплексные числа просто как пары действительных чисел, над которыми по некоторым правилам производятся арифметические действия (подобно тому, как дроби определяются как пары целых неотрицательных чисел). Именно такой способ определения комплексных чисел принят в современной математике. Определения формулируются следующим образом.

1. **Комплексным числом** называется пара (точнее — *упорядоченная пара*) действительных чисел (a, b). Число a называется **действительной частью** комплексного числа (a, b), число b — его **мнимой частью**.

Таким образом, действительная часть комплексного числа — это абсцисса изображающей его точки, а мнимая — ордината.

2. Комплексное число, мнимая часть которого равна нулю, считается равным своей действительной части. Иначе говоря, мы полагаем $(a, 0) = a$ для всякого действительного числа a.

В частности: $(0, 0) = 0$; $(1, 0) = 1$.

Смысл этого соглашения станет понятным, если мы вспомним, что на комплексной плоскости действительные числа изображаются точками, лежащими на действительной оси (т. е. на оси абсцисс), иначе говоря, точками, ординаты которых равны нулю.

3. Комплексное число $(0, 1)$ называется **мнимой единицей** и обозначается буквой i.

Это определение тоже станет понятным, если вспомнить, что число i, введенное ранее нестрого, изображается как раз точкой с координатами $(0, 1)$ (см. рис. 4.2).

4. Комплексные числа, действительные части которых равны нулю, называются **чисто мнимыми числами**.

Таким образом, мнимая единица есть одно из чисто мнимых чисел.

5. **Суммой** комплексных чисел (a, b) и (c, d) называется комплексное число $(a + c, b + d)$.

Здесь знак + обозначает сложение действительных чисел. Но и для обозначения суммы комплексных чисел используется тот же символ: пишут

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d). \tag{1}$$

Например: $(2, 3) + (4, 7) = (6, 10)$; $(3, 7) + (0, -8) = (3, -1)$.

Равенство (1) есть символическая запись определения суммы комплексных чисел.

6. **Произведением** комплексных чисел (a, b) и (c, d) называется комплексное число $(ac - bd, ad + bc)$.

Здесь $ac - bd$, $ad + bc$ обозначают результаты действий над действительными числами; но для обозначения произведения комплексных чисел пользуются тем же символом, что и в случае действительных чисел (точкой, которая часто опускается): пишут

(2) $$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Например: $(2, 3) \cdot (4, 7) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 7, 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4) = (-13, 26)$;
$(3, 7) \cdot (0, -8) = (3 \cdot 0 - 7 \cdot (-8), 3 \cdot (-8) + 7 \cdot 0) = (56, -24)$.

Равенство (2) есть символическая запись определения произведения комплексных чисел.

7. **Степень** комплексного числа с произвольным целым показателем определяется так же, как для рациональных и действительных чисел (см. разделы 2.7 и 3.5).

Из определения произведения немедленно следует, что $i^2 = -1$. В самом деле:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 .$$

Итак, мы *доказали*, что i есть квадратный корень из -1!

А теперь возьмем произвольное *действительное* число b и умножим его на i. Получим:

(3) $$bi = (b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b) .$$

Из равенства (3) и определения сложения вытекает следующий замечательный факт:

Всякое комплексное число (a, b) может быть представлено в виде

(4) $$(a, b) = a + bi.$$

В самом деле, если a и b — произвольные действительные числа, то $a + bi = (a, 0) + (0, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, b)$.

Итак, суммы вида $a + bi$ больше не являются для нас «воображаемыми»: теперь это просто пары действительных чисел, настолько же реальные, насколько реальны сами действительные числа.

Замечание. Мы договорились считать комплексное число с нулевой мнимой частью равным своей действительной части, а затем сформулировали определения суммы и произведения комплексных чисел. Может возникнуть вопрос: если по правилам сложения и умножения комплексных чисел складывать и перемножать действительные числа, рассматриваемые как комплексные с нулевыми мнимыми частями, получим ли мы то же самое, что и при «обычном» сложении и умножении действительных чисел? Ответ на этот вопрос положительный. В самом деле:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0);$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (a \cdot b, 0).$$

4.3. Основные свойства сложения и умножения

Основные свойства сложения и умножения комплексных чисел таковы же, как для предыдущих числовых систем:

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (**коммутативность** сложения);
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (**ассоциативность** сложения);
3. $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ (**коммутативность** умножения);
4. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ (**ассоциативность** умножения);
5. $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ (**дистрибутивность** умножения по отношению к сложению);
6. $\alpha+0=\alpha$;
7. $\alpha\cdot 1=\alpha$;
8. $\alpha\cdot 0=0$.

Каждое из этих равенств легко доказать непосредственной проверкой, исходя из определений сложения и умножения. Докажем, например, свойство 3. Пусть $\alpha=(a, b)$, $\beta=(c, d)$. Тогда

$$\alpha\cdot\beta=(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc);$$
$$\beta\cdot\alpha=(c, d)\cdot(a, b)=(ca-db, cb+da).$$

Но ввиду уже известных нам свойств операций над *действительными* числами имеем:

$$ac-bd=ca-db;$$
$$ad+bc=cb+da.$$

Поэтому $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$.

Приведем еще доказательство свойства 7.

Пусть $\alpha=(a, b)$. Тогда

$$\alpha\cdot 1=(a, b)\cdot(1, 0)=(a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1)=(a, b)=\alpha.$$

Остальные свойства доказываются аналогично.

Таким образом, в суммах и произведениях комплексных чисел можно группировать и переставлять слагаемые и множители и раскрывать скобки точно так же, как это делается для действительных чисел.

Сохраняются и свойства возведения в степень с целым показателем (см. разделы 2.7 и 3.5), и доказываются они так же, как для рациональных и действительных чисел.

4.4. Вычитание и деление

Разность и частное определяются для комплексных чисел как обычно.

Разностью между комплексным числом α и комплексным числом β называется комплексное число γ, удовлетворяющее условию $\beta+\gamma=\alpha$ (обозначение: $\gamma=\alpha-\beta$).

Частным от деления комплексного числа α на комплексное число β называется комплексное число δ, удовлетворяющее условию $\beta\cdot\delta=\alpha$

(обозначение: $\delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$ или $\delta = \alpha : \beta$).

Разность между α и β существует и единственна; ее можно найти по следующему правилу:

(1) $$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Частное от деления α на β существует и единственно всегда, когда $\beta \neq 0$; его можно найти по следующему правилу:

(2) $$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-d}{c^2+d^2}\cdot i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

В самом деле: если $\xi = u + vi$, то уравнения

$$(c+di)+\xi = a+bi\text{, иначе } (c + di) + (u + vi) = a + bi,$$
$$(c+di)\cdot\xi = a+bi\text{, иначе } (c + di)\cdot(u + vi) = a + bi$$

равносильны соответственно системам уравнений

$$\begin{cases} c+u=a \\ d+v=b, \end{cases} \qquad \begin{cases} cu-dv=a \\ du+cv=b. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем:

$$u = a - c, \qquad v = b - d.$$

Решая вторую систему при $c^2 + d^2 \neq 0$ (т. е. при $c + di \neq 0$), получаем:

$$u = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \qquad v = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

При этом решения обеих систем единственны.

Ниже (раздел 4.6) мы увидим, что правило деления, на первый взгляд сложное и искусственное, в действительности имеет простой, наглядный смысл и может быть выражено в легко запоминающейся форме.

Если $\beta = 0$, то при $\alpha \neq 0$ частного от деления α на β не существует, а при $\alpha = 0$ частное неопределенно. Доказывается это так же, как для всех предыдущих числовых систем.

Итак, мы определили сумму, произведение, разность и частное комплексных чисел. Все термины, связанные с этими понятиями — **слагаемые**, **сомножители**, **уменьшаемое**, **сложение**, **вычитание** и т. п., — употребляются так же, как прежде.

Пусть теперь $\alpha = a + bi$ — произвольное комплексное число. Комплексное число $(-a) + (-b)\cdot i$ мы будем обозначать $-\alpha$ и называть числом, **противоположным** для α. Имеем, очевидно:

(3) $$\alpha + (-\alpha) = (a+bi) + ((-a)+(-b)\cdot i) =$$
$$= (a+(-a)) + (b+(-b))\cdot i = 0 + 0i = 0.$$

В частности, при $a = 0$ получаем: $-bi = (-b)\cdot i$.

Вместо $(-a) + (-b)\cdot i$ можно писать $-a - bi$.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что:

(4) $$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta);$$
(5) $$\alpha \cdot (-\beta) = (-\alpha) \cdot \beta = -\alpha \cdot \beta;$$
(6) $$(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha\beta.$$

Таким образом, для умножения комплексных чисел справедливо обычное правило знаков.

Установленные в предыдущем разделе свойства сложения и умножения вместе с соотношениями (3)—(6) позволяют обращаться с выражениями, составленными из комплексных чисел с помощью знаков сложения, умножения, вычитания и деления, точно так же, как с аналогичными выражениями, составленными из действительных чисел. В частности, комплексные числа, записанные в виде $a + bi$, можно складывать и перемножать, как обычные двучлены (учитывая, разумеется, что $i^2 = -1$). Это и есть строгое обоснование того, что мы делали в разделе 4.1.

Замечания. 1) Для предыдущих числовых систем мы вводили, кроме арифметических операций, также отношение «меньше». Можно было бы показать, что в случае комплексных чисел сделать это каким-либо естественным способом невозможно.

2) Мы можем теперь доказать, что комплексное число может быть представлено в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа, только одним способом. В самом деле, если $a_1 + b_1i = a_2 + b_2i$, то разность $(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i)$ равна нулю. Но в то же время эта разность равна $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, так что $a_1 - a_2$ и $b_1 - b_2$ — действительная и мнимая части комплексного числа 0. (Вспомним, что a_1, b_1, a_2, b_2 — действительные числа.) А поскольку действительная и мнимая части комплексного числа 0 равны нулю, имеем $a_1 - a_2 = 0$, $b_1 - b_2 = 0$, откуда $a_1 = a_2$, $b_1 - b_2 = 0$.

Стоит сравнить полученный только что результат с тем положением, которое имеет место для неотрицательных рациональных чисел, т. е. дробей (см. раздел 2.2). Дроби — это тоже пары, но всякое неотрицательное рациональное число равно бесконечно многим дробям. Причина этого различия в том, что равенство комплексных чисел определено не так, как равенство дробей: две дроби считаются равными, если совпадают их несократимые представления, а два комплексных числа — только тогда, когда они сами совпадают.

4.5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть $\alpha = a + bi$ — произвольное комплексное число, изображаемое на комплексной плоскости точкой с координатами a, b. В дальнейшем мы чаще всего не будем различать комплексное число и изображающую его точку и будем писать, например: «точка $a + bi$». Рассмотрим вектор A с началом в точке $0 = (0, 0)$ и концом в точке $\alpha = a + bi$ (рис. 4.3). Координатами этого вектора будут числа a и b.

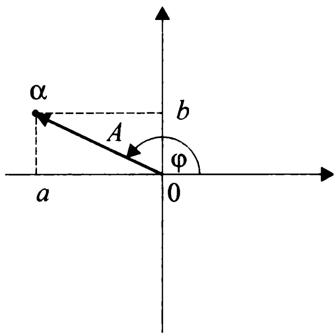


Рис. 4.3

Длину вектора A называют **модулем** комплексного числа α и обозначают $|\alpha|$. Угол φ, на который нужно повернуть положительную полуось, чтобы ее направление совместилось с направлением вектора A, называется **аргументом** комплексного числа α и обозначается $\operatorname{Arg}\alpha$. При этом угол поворота считается положительным, если положительная действительная полуось приближается к положительной мнимой полуоси по кратчайшему пути. (При обычном способе изображения координатных осей на чертеже это поворот против часовой стрелки.)

Аргумент комплексного числа, не равного 0, определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. Например, если для совмещения направления положительной действительной полуоси с направлением вектора A ее нужно повернуть на угол $\frac{\pi}{3}$, то такой же результат получится при повороте на угол $\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7}{3}\pi$, или $\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{13}{3}\pi$, или $\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5}{3}\pi$ и т. д., так что все значения аргумента соответствующего числа α получатся по формуле $\operatorname{Arg}\alpha=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где n — произвольное целое число.

То из значений аргумента комплексного числа α, которое больше или равно нулю, но меньше 2π, называется **главным** и обозначается $\arg\alpha$. (Символическая запись: $0 \leqslant \arg\alpha < 2\pi$.) Все значения аргумента получаются из главного по формуле:

(1) $$\operatorname{Arg}\alpha = \arg\alpha + 2\pi n,$$

где n — произвольное целое число.

Значением аргумента комплексного числа 0 естественно считать любое действительное число.

Зная действительную и мнимую части комплексного числа $\alpha = a + bi$, легко найти его модуль. В самом деле, если $\alpha \neq 0$, то $|\alpha|$ есть длина гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны $|a|$ и $|b|$*, так что по теореме Пифагора

(2) $$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

(Символом $\sqrt{}$ здесь обозначается, как обычно, *арифметический*

* $|a|$ и $|b|$ — модули *действительных* чисел. Понятие модуля действительного числа было введено выше (см. раздел 3.5).

корень — см. замечание в конце раздела 3.5.) При $\alpha = 0$ формула (2) тоже справедлива, т. к. в этом случае $a = b = 0$.

Далее, действительная и мнимая части комплексного числа $\alpha = a + bi$ суть проекции вектора A на действительную и мнимую оси соответственно. Поэтому

$$(3)\qquad \begin{cases} a = |\alpha|\cos\operatorname{Arg}\alpha \\ b = |\alpha|\sin\operatorname{Arg}\alpha. \end{cases}$$

Формулы (3) верны также и при $\alpha = 0$.

Из (2) и (3) при $\alpha \neq 0$ получаем

$$(4)\qquad \cos\operatorname{Arg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \qquad \sin\operatorname{Arg}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Например, для числа $1 + i$ (см. рис. 4.4) имеем:

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};$$

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\operatorname{Arg}\alpha \\ 1 = \sqrt{2}\sin\operatorname{Arg}\alpha, \end{cases}$$

откуда

$$\cos\operatorname{Arg}(1+i) = \sin\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, аргументом числа $1 + i$ служит любой угол, косинус и синус которого равны $\frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. любой угол вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ (n = 0, ±1, ±2, ...). Главное значение аргумента $(1 + i)$ равно $\frac{\pi}{4}$. (Символически: $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.)

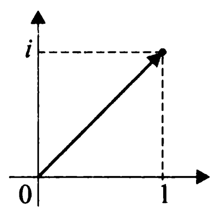


Рис. 4.4

Для любого действительного числа $a = a + 0i$ имеем, очевидно, $|a| = \sqrt{a^2+0} = \sqrt{a^2}$. Но число $\sqrt{a^2}$ равно *модулю действительного числа a* в том смысле, в каком это понятие употреблялось раньше. Таким образом, для действительных чисел новое понятие модуля совпадает со старым.

Задания. 1) По образцу рис. 4.3 изобразите на чертеже векторы, отвечающие комплексным числам: 2; –3; i; $-2i$; $-1 + i$, $\sqrt{3}+i$, $3-i\sqrt{3}$. Для каждого из этих чисел найдите модуль и главное значение аргумента.

2) Чему равны главные значения аргументов положительных действительных чисел? отрицательных действительных чисел? чисел вида ai, где $a > 0$? чисел вида $-a - ai$, где $a > 0$?

3) Чему равен модуль чисто мнимого числа bi?

4) Найдите геометрические места точек комплексной плоскости, отвечающих комплексным числам: (а) с заданным модулем $r_0 > 0$; (б) с заданным главным значением аргумента φ_0.

Пусть теперь $\alpha = a + bi$ — произвольное комплексное число, не равное нулю. Положим $|\alpha| = r$ и обозначим через φ произвольное значение аргумента α. В силу (3) имеем

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

и, следовательно,

$$\alpha = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi).$$

Итак, мы получили следующее представление произвольного комплексного числа, отличного от нуля:

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi). \tag{5}$$

Правая часть равенства (5) называется **тригонометрической формой** комплексного числа α.

(Запись комплексного числа в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа, иногда называют его **алгебраической формой**.)

Чтобы перевести комплексное число $a + bi$ в тригонометрическую форму, нужно по формуле (2) найти его модуль и затем найти число φ, косинус и синус которого равны соответственно $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. формулы (4)). (Для этого следует сначала найти угол в первой четверти, синус которого равен $\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а потом, учитывая знаки, «переместить» его в нужную четверть.)

Примеры: $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $1 = 1 + 0\cdot i = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$; $i = 0 + 1\cdot i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$.

Задания. 1) Переведите в тригонометрическую форму числа: -3; $-2i$; $-1 + i$; $\sqrt{3} + i$; $3 - i\sqrt{3}$.

2) Переведите в алгебраическую форму числа: $5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

$1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; $4(\cos 7\pi+i\sin 7\pi)$; $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7}{2}\pi+i\sin\frac{7}{2}\pi\right)$;
$2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Тригонометрическая форма очень удобна для умножения и деления комплексных чисел. В самом деле, если

$$\alpha_1=r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ \alpha_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

— два комплексных числа в тригонометрической форме, то

$$\alpha_1\alpha_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-$$
$$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)\cdot i)=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+$$
$$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Мы получили следующий замечательный результат:

(6) $$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Словами это можно выразить так.

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Пример. Пусть $\alpha=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\beta=\sqrt{3}+i$. Переводя эти числа в тригонометрическую форму, получаем:

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);\qquad \beta=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Перемножая α и β по формуле (6), имеем:

$$\alpha\beta=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=0+i\cdot 1=i.$$

Читателю предоставляется проверить этот результат, перемножив данные числа в алгебраической форме.

Из правила (6) очевидным образом следует правило деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

(7) $$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Пример. $\frac{1+i}{1-i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}=\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=i$.

4.6. Геометрический смысл арифметических действий. Сопряженные числа

«Векторное» изображение комплексных чисел (см. начало предыдущего параграфа) позволяет представить арифметические действия над этими числами как простые и наглядные геометрические операции.

Пусть $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ — произвольные комплексные числа и A, B — соответствующие им векторы. Вектор A имеет координаты a, b, вектор B — c, d. Сумме $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$ соответствует вектор с координатами $a + c$, $b + d$. Но это как раз тот вектор, который получается при сложении векторов A и B.

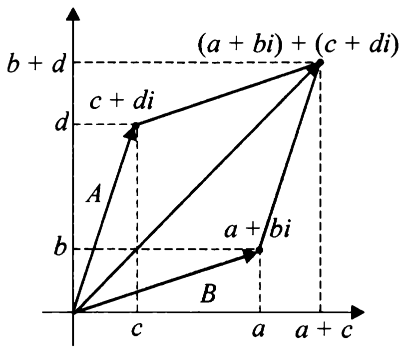


Рис. 4.5

Таким образом, сложение комплексных чисел можно производить по правилу параллелограмма (рис. 4.5) или по правилу треугольника. А отсюда немедленно следует, что и вычитание комплексных чисел можно понимать как вычитание векторов.

Геометрический смысл умножения комплексных чисел ясен из правила, сформулированного в конце предыдущего раздела. Согласно этому правилу, чтобы умножить α на β, нужно модуль α умножить на модуль β, а к аргументу α прибавить аргумент β. Иначе говоря, вектор, соответствующий числу α, нужно растянуть в $|\beta|$ раз и повернуть на угол, равный какому-нибудь значению аргумента β, причем поворот производится против часовой стрелки, если это значение положительно, и по часовой стрелке, если оно отрицательно.

Например, умножая число

$$\alpha = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

на число

$$\beta = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(см. пример в конце предыдущего раздела), мы растягиваем вектор, соответствующий числу α, в 2 раза и поворачиваем его на угол $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ (рис. 4.6).

Отсюда ясен и геометрический смысл деления: чтобы разделить α на β, нужно «сжать» вектор, соответствующий α, в $|\beta|$ раз (или, если угодно, «растянуть» в $\frac{1}{|\beta|}$ раз) и повернуть его на угол, отвечающий какому-нибудь значению аргумента β, по часовой стрелке, если это значение положительно, и против часовой стрелки, если оно отрицательно.

Теперь постараемся уяснить себе наглядный смысл правила деления, выведенного в разделе 4.4 (правило (2)). Для этого введем новое понятие, важное и само по себе.

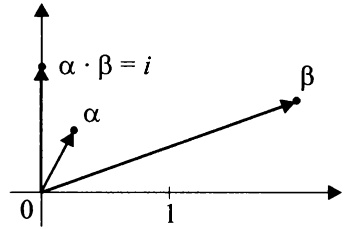


Рис. 4.6

Пусть $\alpha = a + bi$ (a и b — действительные числа) — произвольное комплексное число. Тогда число $a - bi$ называется **сопряженным** с числом α и обозначается $\overline{\alpha}$.

Ясно, что число, сопряженное с $a - bi$, есть $a + bi$; иначе говоря, $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$. Поэтому числа α и $\overline{\alpha}$ часто называют **взаимно сопряженными** (или просто **сопряженными**). Имеем, очевидно:

$$|\overline{\alpha}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|;$$

$$\cos \operatorname{Arg} \overline{\alpha} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \operatorname{Arg} \alpha = \cos(-\operatorname{Arg} \alpha);$$

$$\sin \operatorname{Arg} \overline{\alpha} = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\sin \operatorname{Arg} \alpha = \sin(-\operatorname{Arg} \alpha).$$

Из последних двух равенств следует, что $\operatorname{Arg} \overline{\alpha} = -\operatorname{Arg} \alpha$. (Это значит, что значениями $\operatorname{Arg} \overline{\alpha}$ будут все те и только те числа, которые противоположны значениям $\operatorname{Arg} \alpha$.)

Итак: модули взаимно сопряженных чисел равны; аргументы взаимно сопряженных чисел равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Отсюда видно, в частности, что если число α представлено в тригонометрической форме:

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

то тригонометрическая форма числа $\overline{\alpha}$ имеет вид

$$\overline{\alpha} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

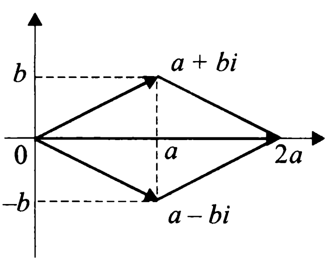


Рис. 4.7

Из определения ясно, что точки комплексной плоскости, отвечающие взаимно сопряженным числам, симметричны относительно действительной оси (рис. 4.7).

Сумма взаимно сопряженных чисел $\alpha = a + bi$ и $\overline{\alpha} = a - bi$ равна действительному числу $2a$. Геометрический смысл этого факта ясен из рис. 4.7.

Произведение взаимно сопряженных

чисел $\alpha = a + bi$ и $\overline{\alpha} = a - bi$ равно неотрицательному действительному числу $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$. (В самом деле: $(a+bi)\cdot(a-bi) = (a^2+b^2) + {}$ $+(-ab+ba)i = a^2+b^2$.) Геометрический смысл этого факта состоит в том, что при умножении α на $\overline{\alpha}$ вектор, образующий с положительным направлением действительной оси угол $\varphi = \operatorname{Arg}\alpha$, поворачивается на угол $-\varphi$ и, следовательно, совмещается с этим направлением; одновременно этот вектор растягивается в $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$ раз.

Пусть теперь $\alpha = a + bi$ — произвольное комплексное число, *отличное от нуля*. Разделив равенство $\alpha\cdot\overline{\alpha} = |\alpha|^2$ почленно на $|\alpha|^2$, получим:

$$\alpha\cdot\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2} = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что для произвольного комплексного числа $\alpha \neq 0$ существует обратное число α^{-1}, равное $\dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}$. (Определение обратного числа см. в разделе 2.7.) Иначе: если $\alpha = a + bi \neq 0$, то

$$\alpha^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

А теперь ясно, что правило деления из раздела 4.4 означает простонапросто, что частное от деления α на β равно произведению α на β^{-1}. Иначе это правило можно сформулировать так: чтобы разделить α на β, нужно умножить α на число, сопряженное с β, и разделить на квадрат модуля β.

То же правило можно обосновать следующим образом. Деля число α, которому отвечает вектор A, на число $\beta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, мы поворачиваем вектор A на угол $-\varphi$ и *сжимаем* его в r раз. А при умножении α на $\overline{\beta}$ вектор A поворачивается на тот же угол $-\varphi$ и *растягивается* в r раз. Поэтому, если сжать вектор, отвечающий произведению $\alpha\overline{\beta}$, в r^2 раз, то получится вектор, отвечающий частному $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Замечание. Легко устанавливаются следующие свойства модуля:

(а) $|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$; (б) $|\alpha-\beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$;

(в) $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$; (г) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$.

Именно: свойства (а) и (б) вытекают из геометрической теоремы, по которой каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности; свойство (в) содержится в правиле умножения комплексных чисел в тригонометрической форме (при умножении комплексных чисел их модули перемножаются); свойство (г) немедленно следует из свойства (в).

Задание. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы неравенства (а) и (б) превращались в равенства.

4.7. Возведение в степень и извлечение корня

Из правила умножения комплексных чисел в тригонометрической форме (см. (6) в разделе 4.5) легко получается следующее правило возведения в степень: для любого комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и любого натурального n справедливо равенство

$$(1) \qquad [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,.$$

Иначе говоря: при возведении комплексного числа в степень n его модуль также возводится в степень n, а аргумент умножается на n.

Строгое доказательство этой формулы проводится методом математической индукции. (Базис очевиден; индукционный шаг основан на соотношении (6) из раздела 4.5; подробное доказательство предоставляется читателю.)

Равенство (1) называется **формулой Муавра***.

Замечание. Для комплексных чисел, как и для действительных, принято считать, что $\alpha^0 = 1$. При этом соглашении формула Муавра верна, очевидно, и для $n = 0$.

Обратимся теперь к извлечению корня.

Корнем степени n из комплексного числа α называется всякое комплексное число β, которое, будучи возведено в степень n, дает α (иначе говоря, такое, что $\beta^n = \alpha$)**. Для корня степени n из α используется обычное обозначение $\sqrt[n]{\alpha}$.

Корни степени 2 называются, как обычно, **квадратными**, степени 3 — **кубическими**.

Например, число i есть квадратный корень из -1 (см. раздел 4.2). Но и число $-i$ также есть квадратный корень из -1, т. к. по формуле (6) раздела 4.4 $(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = i\cdot i = i^2 = -1$.

Чтобы найти все корни степени n из числа α, будем рассуждать следующим образом. Пусть α — произвольное комплексное число, отличное от 0, и β — какой-либо корень степени n из α. Представим α и β в тригонометрической форме:

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

$$\beta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)\,,$$

где $r = |\alpha|$, $\rho = |\beta|$, φ и ψ — некоторые значения $\operatorname{Arg}\alpha$ и $\operatorname{Arg}\beta$.

---

* Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre, 1667—1754) — английский математик.

** Сравните с определением корня из действительного числа в разделе 3.5.

Поскольку $\beta^n = \alpha$, ввиду формулы (1) имеем $\rho^n = r$, откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$. ($\sqrt[n]{r}$ означает арифметический корень степени n из r.)

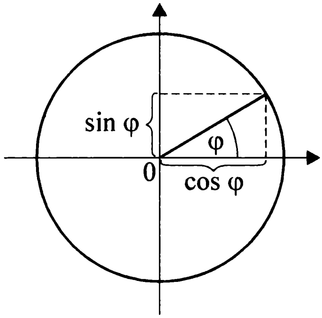


Рис. 4.8

Далее, ввиду той же формулы (1) должно быть:

$$\cos\varphi = \cos n\psi\ ;\ \sin\varphi = \sin n\psi\ .$$

Значения косинуса и синуса двух углов совпадают только тогда, когда эти углы отличаются друг от друга на слагаемое, кратное 2π (в частном случае совпадают; см. рис. 4.8). Но если $n\psi$ отличается от φ на кратное числа 2π, т. е. $n\psi = \varphi + 2\pi k$, то

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\cdot\frac{k}{n}\ (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Получаем, таким образом:

$$(2)\qquad \beta = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right)\ (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

так что каждому целому k отвечает некоторый корень степени n из α, вычисляемый по формуле (2). Однако среди этих корней имеется всего n различных: корни, отвечающие числам k_1 и k_2, различны тогда и только тогда, когда эти числа отличаются друг от друга на слагаемое, кратное n — иначе говоря, когда их разность делится на n. Докажем это. Пусть разность $k_2 - k_1$ делится на n, т. е. $k_2 = k_1 + ln$, где l — целое число. Тогда

$$\frac{\varphi}{n} + 2\pi\cdot\frac{k_2}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\cdot\frac{k_1 + ln}{n} = \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\cdot\frac{k_1}{n}\right) + 2\pi l\,,$$

и поэтому значения косинуса и синуса углов $\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k_1}{n}$ и $\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k_2}{n}$ совпадают. С другой стороны, если разность $k_2 - k_1$ не делится на n, то разность $\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k_2}{n}\right) - \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k_1}{n}\right) = 2\pi\frac{k_2 - k_1}{n}$ не является числом, кратным 2π, и, следовательно, углы $\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k_1}{n}$ и $\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k_2}{n}$ не могут иметь одинаковых значений косинуса и синуса.

Различные корни получатся, например, при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, поскольку ни при каких различных значениях k из этого ряда углы не будут отличаться друг от друга на кратное 2π.

Итак: для каждого комплексного числа $\alpha \neq 0$ и для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ существует точно n корней степени n из α: $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$, и эти корни могут быть вычислены по формуле

(3) $$\beta_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\cdot\frac{k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\cdot\frac{k}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

П р и м е р 1. Найдем корни четвертой степени из числа

$$\alpha = -2+2\sqrt{3}\cdot i = 4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Обозначая эти корни β_0, β_1, β_2, β_3, имеем:

$$\beta_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot\frac{k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot\frac{k}{4}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Имеем, таким образом:

$$\beta_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\beta_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\beta_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\beta_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

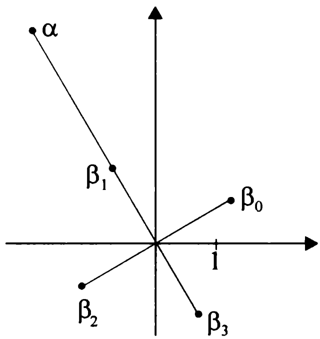


Рис. 4.9

Числа α, β_0, β_1, β_2, β_3 изображены на рис. 4.9 (число 1 отмечено для указания масштаба).

П р и м е р 2. Поскольку $1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$, *все корни степени n из единицы* — мы будем их обозначать ε_0, ε_1, ..., ε_{n-1} — *можно найти по формуле*

(4) $$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Например, корнями второй степени служат числа

$$\cos\frac{2\pi\cdot 0}{2}+i\sin\frac{2\pi\cdot 0}{2} = 1 \quad \text{и} \quad \cos\frac{2\pi\cdot 1}{2}+i\sin\frac{2\pi\cdot 1}{2} = -1,$$

корнями третьей степени — числа

$$\varepsilon_0 = \cos\frac{2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{2\pi\cdot 0}{3} = 1;$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{2\pi\cdot 1}{3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{2\pi\cdot 2}{3} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

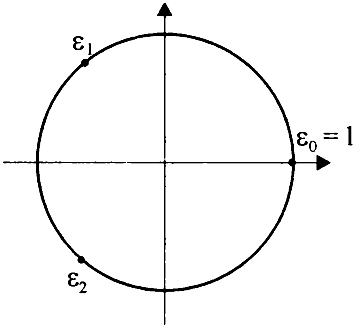


Рис. 4.10

Легко понять, что геометрически корни степени n из единицы представляют собой точки окружности радиуса 1 с центром в начале координат, делящие ее на n равных частей, причем одной из них всегда является точка $1 = (1, 0)$.

Корни третьей степени из единицы изображены на рис. 4.10.

Пример 3. Найдем квадратные корни из действительного числа. При этом возможны следующие случаи:

1) $\alpha > 0$. Тогда $|a| = a$, $\arg a = 0$. Обозначая арифметический квадратный корень из a, как обычно, через $\sqrt{a}$, видим, что корнями будут числа

$$\sqrt{a}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt{a} \text{ и } \sqrt{a}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt{a}.$$

2) $a < 0$. Тогда $|a| = -a$, $\arg a = \pi$. Корнями будут числа

$$\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{|a|}\cdot i = \sqrt{-a}\cdot i$$

и

$$\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{|a|}\cdot i = -\sqrt{-a}\cdot i.$$

3) $a = 0$. В этом случае единственным квадратным корнем из a является 0.

Задание. Запишите в тригонометрической и алгебраической форме и изобразите на чертеже все корни из единицы: а) четвертой степени; б) шестой степени; в) восьмой степени.

Квадратные корни нетрудно находить и в случае, когда число записано в алгебраической форме. В самом деле, пусть

$$\alpha = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

— комплексное число, записанное в алгебраической и тригонометрической форме. Квадратными корнями из α будут числа

$$\beta_0 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\beta_1 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right) = \sqrt{r}\left(-\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = -\beta_0.$$

Пользуясь известными формулами для синуса и косинуса половинного угла и формулами (2) и (4) из раздела 4.5, получаем:

$$\beta_0 = \sqrt{r}\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

где знаки перед корнями выбираются в зависимости от того, какой четверти принадлежит угол φ. Именно если φ принадлежит первой или второй четверти, т. е. при $b > 0$, то угол $\frac{\varphi}{2}$ принадлежит первой четверти, так что действительная и мнимая части числа β_0 положительны; если же φ принадлежит третьей или четвертой четверти, т. е. при $b < 0$, то угол $\frac{\varphi}{2}$ принадлежит второй четверти, так что действительная часть числа β_0 отрицательна, а мнимая положительна. Окончательно получаем, что квадратными корнями из $\alpha = a + bi$ являются числа

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \text{ при } b > 0$$

и

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \text{ при } b < 0.$$

(При $b = 0$ верны обе формулы.)

Тот же результат можно получить и без посредства тригонометрической формы: если $\beta = x + yi$ — какой-нибудь квадратный корень из α, то из равенства $(x + yi)^2 = a + bi$ непосредственным возведением в квадрат получаем:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Из этой системы нетрудно найти x и y. Покажем на примере, как это делается. (Практически обычно удобнее находить квадратный корень именно так.)

Пример. Найдем $\sqrt{-21-20i}$. Возведя в квадрат обе части равенства

$$(x + yi)^2 = -21 - 20i,$$

получаем систему уравнений

(*) $$\begin{cases} x^2 - y^2 = -21 \\ 2xy = -20. \end{cases}$$

Возведя оба уравнения в квадрат и почленно сложив их, получим:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 841,$$

или иначе

$$(x^2 + y^2)^2 = 841;$$

откуда

(**) $$x^2 + y^2 = \sqrt{841} = 29.$$

(Корень должен быть здесь положительным, поскольку сумма квадратов двух действительных чисел не может быть отрицательной.)

Решая совместно уравнение (**) и первое уравнение системы (*), получим:

$$x^2 = 4, \; y^2 = 25,$$

откуда $x = \pm 2$, $y = \pm 5$. При этом числа x и y должны иметь разные знаки, поскольку их произведение отрицательно (см. второе уравнение системы (*)). Следовательно, искомыми корнями будут числа $2 - 5i$ и $-2 + 5i$. В общем виде можно записать: $\sqrt{-21-20i} = \pm(2-5i)$.

Упражнение. Вычислить: а) $\sqrt{i}$; $\sqrt{-i}$; б) $\sqrt{5+12i}$; $\sqrt{5-12i}$; $\sqrt{-5+12i}$; $\sqrt{-5-12i}$.

4.8. Квадратные уравнения

Мы начали главу 4 с решения квадратных уравнений, для чего нам пришлось прибегнуть к нестрогим соображениям. Но именно эти соображения привели нас к вполне строгому понятию комплексного числа. Располагая таким понятием, мы можем теперь заново рассмотреть квадратные уравнения уже с полной строгостью — и притом уравнения не только с действительными, но и с произвольными комплексными коэффициентами.

Итак: пусть у нас имеется уравнение

(1) $$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — произвольные комплексные числа, причем $a \neq 0$. Преобразуя левую часть (см. раздел 4.1), получаем равносильное уравнение

(2) $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0,$$

из которого находим:

(3) $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

и далее

(4) $$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Здесь $\sqrt{b^2-4ac}$ обозначает *любое* число, квадрат которого равен b^2-4ac. Таких чисел имеется два, если $b^2-4ac\neq 0$ (см. предыдущий параграф) и одно (равное нулю), если $b^2-4ac=0$. Таким образом, уравнение (1) имеет два различных корня при $b^2-4ac\neq 0$ и один при $b^2-4ac=0$; во всех случаях корни можно находить по формуле (4).

Число b^2-4ac называется **дискриминантом** уравнения (1).

Особо следует остановиться на случае, когда коэффициенты уравнения (1) — *действительные числа*. Тогда b^2-4ac — также действительное число.

Если при этом $b^2-4ac>0$, то уравнение (1) имеет два различных **действительных** корня

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

где $\sqrt{b^2-4ac}$ обозначает *арифметический* корень из b^2-4ac. (Обычно пишут короче: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.)

Если $b^2-4ac=0$, уравнение (1) имеет единственный (действительный) корень $x=-\frac{b}{2a}$.

Наконец, если $b^2-4ac<0$, то квадратными корнями из b^2-4ac будут числа $\sqrt{4ac-b^2}\cdot i$ и $-\sqrt{4ac-b^2}\cdot i$, где $\sqrt{4ac-b^2}$ — арифметический корень (см. пример (3) в разделе 4.7). Поэтому корнями уравнения (1) будут сопряженные комплексные числа

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

(Более короткая запись: $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.)

Таким образом, от знака дискриминанта зависит, какими будут корни уравнения: действительными различными, действительными совпадающими или комплексными сопряженными. Отсюда и термин «дискриминант» — «различающий» (от латинского *discrimino* — «отделяю», «разделяю»).

Предметный указатель

Оглавление

Учебное издание

Гладкий Алексей Всеволодович

ЧИСЛА:
НАТУРАЛЬНЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ,
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ, КОМПЛЕКСНЫЕ

Учебное пособие для средней общеобразовательной школы

Редактор *Е. Б. Егорова*
Дизайн обложки *Н. А. Груздев*
Компьютерная верстка и макет *С. Ч. Соколовский*

Издательство «Вербум-М»
111024, Москва, 5-я Кабельная ул., д. 2Б.
Тел. 273-57-85, тел./факс 273-76-42
Издательская лицензия ЛР № 066334 от 23.02.99

Гигиенический сертификат
№ 77.99.2.953.П.9482.3.00 от 13.03.2000.

Сдано в набор 15.04.2000. Подписано в печать 10.07.2000.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 9.
Тираж 5000 экз. Заказ №2792.

Заказ предоставлен издательством на электронных носителях.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового
Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства
Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций.
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Книга представляет собой учебное пособие, в котором в форме, доступной учащимся старших классов общеобразовательной школы, излагается теория числовых систем. Доступность достигается за счет подробного разъяснения содержательной стороны рассуждений, тщательности и логичности изложения и точности языка. Большое внимание уделяется истории развития понятия числа.

Книга предназначена для учащихся старших классов и учителей общеобразовательных школ, ее можно использовать для факультативных занятий, а также для самообразования.

ISBN 5-8391-0036-6

9 785839 100367

·Вербум–М·