В. Д. ЧИСТЯКОВ

БЕСЕДЫ
о геометрии
Лобачевского

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
МИНСК 1973

ПРЕДИСЛОВИЕ

Занимаясь популяризацией математических знаний, мне довольно часто приходится выступать с беседами о Н. И. Лобачевском и его геометрии. Эти материалы, накопленные за большой период времени, я и собрал в небольшую книгу «Беседы о геометрии Лобачевского». Она адресована в первую очередь нашей пытливой молодежи, причем, от читателя не требуется какой-то особой подготовки, кроме той, которую он получил в школе.

Многолетний опыт показывает, что геометрия Лобачевского усваивается и воспринимается лучше, если рассказать об истории ее развития. Первые восемь бесед и посвящены этому вопросу. В этих беседах выясняется, что геометрия Лобачевского — результат длительной эволюции геометрической мысли и непрерывной борьбы новых представлений со старыми.

Основные положения геометрии Лобачевского разъясняются в популярной и наглядной форме с использованием большого количества чертежей и конкретных истолкований (интерпретаций).

Конечно, книгу рекомендуется читать очень вдумчиво и все выкладки брать «на карандаш», обращая самое серьезное внимание не столько на наглядность чертежа, сколько на логическую сторону доказательств. После такого изучения геометрии Лобачевского и ее истории читателю откроется «новый мир», значительно расширяющий геометрические представления и позволяющий вместе с тем лучше уяснить евклидову геометрию.

В заключение считаю своим долгом поблагодарить Н. Д. Беспамятных, А. М. Комиссарука и Н. А. Черникова за ценные советы.

Отзывы и пожелания на эту книгу прошу направлять по адресам: 210026, г. Витебск, ул. Кирова, 21/30, кв. 43, Чистякову Василию Дмитриевичу; 220600, г. Минск, ул Кирова, 24, издательство «Вышэйшая школа».

Автор

Беседа первая

○

АВТОРЫ ПЕРВЫХ ТЕОРЕМ

Слово «геометрия» в переводе с греческого означает «землемерие». И это в свое время соответствовало действительности. Первые геометры были землемерами и строителями.

Геометрия возникла в глубокой древности и особенно успешно развивалась в Древнем Египте, Вавилоне, Греции, Индии и Китае.

В далеком прошлом египтяне применяли геометрию при установлении новых границ участков, когда старые смывались водами Нила, выходящего во время разлива из берегов. После каждого такого разлива земля в долине Нила, обогащенная плодородным илом, давала большие урожаи и ценилась на вес золота. Вот почему границы земельных участков восстанавливались с особой тщательностью и охранялись со всей строгостью тогдашних законов.

Но одна долина вдоль многоводного Нила не могла прокормить весь Египет. Египтянам пришлось осваивать другие земли, налаживая их искусственное орошение. И здесь потребовалась изобретательская выдумка и помощь геометров. Знания геометров нужны были также и при сооружении пирамид, каменных сфинксов, храмов и жилищ.

Геометры-землемеры и строители держали свои знания в секрете и почитались чуть ли не за богов.

В те далекие времена ученые не пользовались словами «аксиома» и «теорема» и не прибегали к логическим доказательствам, а довольствовались готовыми правилами, полученными опытным, практическим путем и передававшимися от одного поколения к другому.

Авторами первых теорем были древние греки. В VI в. до н. э. в Греции жил ученый Фалес. Ему и его ученикам и принадлежат первые теоремы геометрии. Не будет ошибкой, если мы отнесем к «теоремам Фалеса» теорему о равенстве вертикальных углов; теорему о равенстве прямому углу угла, вписанного в полуокружность; теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. Фалес первым в истории астрономии дал вычислительный способ предсказания солнечных затмений. Солнечное затмение, предсказанное им, произошло в указанный срок в указанном месте. Древние историки утверждают, что Фалес мог вычислить высоту мачты и расстояние от берега до корабля, стоящего на якоре в море, исходя из геометрических соображений, не прибегая к непосредственным измерениям.

В выработке методов доказательства первых геометрических теорем огромную роль сыграли Платон и Аристотель. Оба ученых жили в IV в. до н. э. Для своих последователей Платон организовал в Афинах школу под названием «Академия». Для первой в мире «Академии» Платон выбрал роскошный сад, ставший излюбленным местом отдыха и научных споров ученых. А так как основой всех наук Платон считал геометрию, то у входа в «Академию» была высечена надпись: «Пусть никто не входит сюда, если он не знает геометрии». Платон требовал от ученых, чтобы при выводе геометрических правил они не довольствовались только опытными соображениями, а доказывали их, исходя из принятых и ранее доказанных предпосылок, руководствуясь методами анализа и синтеза, разработанными и предложенными математикам самим Платоном.

Известно, что каждая задача в математике состоит из данных величин и искомых, и нужно путем рассуждений по первым найти вторые. Если задача сложная, то ее приходится разбивать на ряд более мелких задач, т. е. решать «по вопросам», причем, чтобы найти правильный путь решения, приходится исходить из того, что надо найти, и идти от неизвестных величин к известным. Вот этот путь отыскания решения, основанный на переходе от неизвестного к известному, от того, что надо найти, к тому, что дано в условиях задачи, Платон и назвал анализом. После того как анализ выполнен, не представляет большого труда завершить решение путем обратного перехода от условий задачи к ее искомым величинам. Этот познавательный метод, основанный на переходе от известного к неизвестному, дающий окончательный результат, со времен Платона и называется синтезом. Само собой разумеется, анализ предшествует синтезу, и вместе они составляют аналитико-синтетический метод решения задач, причем, этот метод широко применяется не только в геометрии, но и во всех других разделах элементарной математики.

Потребность в доказательствах возникла очень давно. Например, за 2000 лет до н. э., т. е.

больше 4000 лет тому назад, индийцы старались вывести геометрические правила, нужные для землемерия и строительных работ, исходя из наглядных представлений. Доказать какое-нибудь геометрическое утверждение по индийскому способу — значило усмотреть его выполнимость из наглядности чертежа.

Но хорошо известно, что нашему зрению не всегда можно доверять. В жизни встречается множество иллюзий (ошибок) зрения, когда, например, равные отрезки кажутся неравными, параллельные линии вследствие влияния фона кажутся непараллельными (изогнутыми) и т. д.[1] Вот почему наглядные представления чертежа иногда приводят к неверным выводам. Отсюда ясно, что в геометрии чертежи должны играть вспомогательную роль и правильность их должна проверяться логически. Древние греки считали: чтобы доказать какой-нибудь новый геометрический факт, мало усмотреть его из чертежа, надо получить этот факт путем рассуждений по определенным законам логики[2] как следствие из достоверных истин (аксиом)[3], правильность которых устанавливается на основании многовекового опыта человечества и ранее доказанных фактов. Но для этого надо хорошо знать законы логики. Вот эту логику во времена Платона и разработал Аристотель.

В основе геометрии, по его мнению, должны лежать аксиомы, справедливость которых не вызывает сомнения, их должно быть конечное чис-

---

[1] См. И. Д. Артамонов. Иллюзии зрения. М., 1969, стр. 63.

[2] Логика — наука о законах и правилах верных рассуждений.

[3] «Аксиома» в дословном переводе с греческого означает «бесспорное», «достойное доверия».

ло, а все остальные геометрические предложения должны относиться к теоремам.[1] Аксиомы не доказываются, а теоремы доказываются при помощи аксиом. Доказать какую-нибудь теорему, по Аристотелю,— это значит получить ее путем логических рассуждений как следствие из ранее установленных аксиом и ранее доказанных теорем. Свой метод, основанный на переходе от аксиом к теоремам, т. е. от общих истин к частным, Аристотель назвал дедуктивным. Следовательно, по требованию Аристотеля геометрия должна строиться на дедуктивных основах и составлять дедуктивную математическую дисциплину, какой она в настоящее время и является.

Беседа вторая

В ГЕОМЕТРИИ НЕТ «ЦАРСКИХ ПУТЕЙ»

Это было в Греции более двух тысяч лет тому назад. Вызвал к себе царь старого геометра Евклида, написавшего тринадцать книг по геометрии под общим названием «Начала», и говорит ему:

— Слушай, разве подобает мне, царю, сушить мозги, изучая все эти тринадцать книг?[2] Как царь, я должен знать геометрию, но твой путь очень длинен для меня. Я повелеваю тебе указать в изучении геометрии «царский путь», более короткий, для меня.

На это смелый старец ответил:

— К сожалению, в науке нет «царских пу-

---

[1] «Теорема» — дословно с греческого — «представление», «зрелище».

[2] Говоря о 13 книгах «Начал» Евклида, следует заметить, что это не книги в современном смысле, а большие главы или разделы единого сочинения.

тей». Как все смертные, царь, если он хочет постичь геометрию, должен пройти весь длинный путь, указанный в моих «Началах».

Вот этому удивительному ученому, жившему в III в. до н. э.,— геометру Евклиду — и посвящается настоящая беседа.

О жизни Евклида сохранились очень скудные сведения. Известно, что он жил при царе Птолемее и преподавал математику в Александрии. К этому времени трудами многих древнегреческих ученых, предшественников и современников Евклида, было накоплено немало разрозненного геометрического материала. И этот разрозненный материал надо было соединить в единое целое, чтобы получилось стройное здание, имя которому «Геометрия». Такое «архитектурное» оформление геометрии как науки и выполнил Евклид в своих знаменитых «Началах». Кроме «Начал», он писал научные сочинения под названиями «Данные», «О делении фигур», «Оптика», «Конические сечения» (последнее до нас не дошло). Евклид занимался также астрономией и оставил после себя астрономический трактат.

Все 13 книг «Начал» Евклида построены по единому плану на основе дедуктивного метода изложения. Хотя «Начала» написаны как научный трактат, в течение ряда веков они были чуть ли не единственным руководством, по которому училась молодежь. И это получилось не потому, что не было других книг по геометрии. Были, например, «Начала» таких древнегреческих авторов как Леон, Февдий Магнезийский. Но они, как правило, не могли конкурировать с «Началами» Евклида, так как значительно уступали им в доходчивости и простоте изложения, и, естественно, рано или поздно были забыты. О колоссальном авторитете «Начал» Евклида можно судить по тому факту, что слова «Евклид» и «геометрия» стали чуть ли не синонимами. В течение ряда веков, когда произносили слово «Евклид», подразумевали слово «геометрия».

Все, что излагается в «Началах» Евклида, в настоящее время называется «евклидовой геометрией». В школе также изучается евклидова геометрия. Насколько большую славу снискали «Начала» Евклида, можно судить хотя бы по тому, что в Англии до XX в. считалось «модой» изучать геометрию по первоисточнику, т. е. по некоторым книгам «Начал» Евклида. Больше того, все современные учебники чуть ли не дословно копируют Евклида или написаны под большим его влиянием. Это влияние в той или иной степени чувствуется и в наших школьных учебниках геометрии.

Было бы неверно утверждать, что «Начала» Евклида содержат все, что знали древние греки по геометрии. Их знания по геометрии простирались значительно дальше. «Начала» Евклида, выражаясь современной терминологией, содержат материал, относящийся только к элементарной геометрии, и совершенно не содержат материала высшей геометрии. Например, учение о конических сечениях Евклид не включил в свои «Начала», а написал на эту тему специальный трактат.

Остановимся коротко на содержании «Начал» Евклида.

В первой книге излагаются условия равенства треугольников, теории параллельных линий, соотношения между сторонами и углами треугольников, учение о площадях треугольников и параллелограммов, доказывается теорема Пифагора в ее геометрической формулировке.

Во второй книге — геометрическая алгебра, состоящая из целого ряда алгебраических тождеств, доказываемых геометрическим способом. Заканчивается книга геометрической теорией решения квадратных уравнений.

В третьей — учение о круге и окружности, о секущих и касательных и об углах, образуемых ими, а также о степени точки относительно окружности.

В четвертой — учение о вписанных и описанных многоугольниках, а также построение правильных многоугольников (четырехугольника, пятиугольника и пятнадцатиугольника).

В пятой — в геометрической форме излагается теория рациональных и иррациональных чисел, включая и основные действия над ними, а также дается геометрическая теория пропорций по Евдоксу, которой древние греки владели в совершенстве.

В шестой — учение о подобных фигурах и решение на отыскание пропорциональных величин, расширение геометрической алгебры, применение теории пропорций, изложенной в пятой книге.

В седьмой, восьмой и девятой книгах — геометрическая теория чисел, содержащая учение о наибольшем общем делителе и наименьшем кратном (седьмая книга), а также учение о непрерывных пропорциях, относимых к числам, и учение о соотношении между вторыми и третьими степенями чисел (восьмая и девятая книги). В этих книгах представлена известная теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел, доказываемая методом от противного, а также теорема о четных совершенных числах.

В десятой книге — дальнейшее изложение геометрической алгебры, включающей в себя учение о несоизмеримых величинах, и квадратичные иррациональности.

В одиннадцатой, двенадцатой и тринадцатой книгах — стереометрия, состоящая из рассмотрения задач на определение отношения площадей кругов, объемов пирамид и других тел, причем, при решении этих вопросов используется метод исчерпывания Евдокса (одиннадцатая и двенадцатая книги). «Начала» Евклида заканчиваются изучением правильных многогранников, к которым относятся четырехгранник (тетраэдр), ограниченный четырьмя правильными треугольниками; восьмигранник (октаэдр), ограниченный восьмью правильными треугольниками; двадцатигранник (икосаэдр), ограниченный двадцатью правильными треугольниками; шестигранник (гексаэдр), ограниченный шестью квадратами (куб); двенадцатигранник (додекаэдр), ограниченный двенадцатью правильными пятиугольниками.

Беседа третья

И НА СОЛНЦЕ ЕСТЬ ПЯТНА

«Начала» Евклида более двух тысяч лет считались идеалом построения всякой научной теории. Действительно, их простота и стройность вызывают изумление. Это замечательное творение начинается с перечисления постулатов и аксиом, принимаемых без доказательства (их всего 14) и являющихся основой всякого доказательства, причем, чертежи и рисунки, по замыслу Евклида, должны были играть исключительно вспомогательную роль. Вопрос решает не чертеж, а логика дедуктивного доказательства. Всякое геометрическое предложение, как бы оно просто ни выглядело, должно быть доказано, т. е. выведено дедуктивным путем как следствие из ранее предпосланного списка аксиом и постулатов, которых, как указывалось выше, 14.

Какая же разница между понятиями «постулат» и «аксиома»? С современной точки зрения существенной разницы между этими понятиями нет. Между теми и другими можно смело поставить знак тождества, так как постулаты и аксиомы — суть геометрические предложения, принимаемые без доказательства. Несущественную разницу можно обнаружить, если внимательно рассмотреть те и другие. Ниже для сравнения приводим список постулатов и аксиом «Начал» Евклида.

Постулаты:

I. Требуется, чтобы от точки до точки можно было провести прямую линию.

II. Требуется, чтобы прямолинейный отрезок можно было продолжать в обе стороны бесконечно.

III. Требуется, чтобы из каждой точки плоскости, как из центра, произвольным радиусом в этой плоскости можно было описать окружность.

IV. Требуется, чтобы все прямые углы были равны друг другу.

V. Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы:

I. Две величины, порознь равные третьей, равны между собой.

II. Если к равным прибавить равные, то и результаты будут равны.

III. Если от равных отнять равные, то и результаты будут равны.

IV. Если к неравным прибавить равные, то и результаты будут не равны (смысл неравенства не изменится).

V. Если удвоим равные, то и результаты будут равны.

VI. И половины равных равны между собой.

VII. Совмещающиеся фигуры равны между собой.

VIII. Целое больше своей части.

IX. Две прямые линии не могут заключать (замкнутого) пространства.

Из сопоставления постулатов и аксиом можно сделать заключение, что постулаты — это те же аксиомы, но только геометрического содержания, и обслуживают только геометрию, тогда как большинство аксиом выходит за пределы геометрии и имеет приложение в других областях математики и даже вне ее (например, физика). Действительно, аксиома «Целое больше своей части» одинаково применима и в геометрии и в других областях знаний.

Во времена Евклида разница между постулатами и аксиомами ощущалась значительней.

Дело в том, что в Древней Греции ученые пользовались только рукописными книгами, которые за неимением бумаги (бумага еще не была изобретена) писались на пергаменте,[1] а поэтому стоили очень дорого и были явлением очень редким. Вот почему основной формой общения среди ученых того времени были научные диспуты. Обычно один ученый предлагал друго-

---

[1] Пергамент — особым образом обработанная кожа животных (телят, ягнят, козлят).

му помериться силами. Кто победит — тому честь и слава и денежное вознаграждение. Эти диспуты проходили в торжественной обстановке при большом стечении публики и обязательно в присутствии судей (нотариусов), следивших за правильностью хода дебатов. Распространенной темой диспутов были и математические проблемы, ждавшие своего разрешения и доказательств.

Вообразите, что Евклида вызвал на диспут другой ученый и предложил ему, скажем, решить десять задач на построение. В свою очередь Евклид тоже предлагает этому ученому десять задач, тоже по геометрии и на тех же условиях. Для знакомства с задачами дается определенное время, после чего оба ученых договариваются, какими аксиомами и постулатами будут пользоваться. Обычно список аксиом обеими сторонами принимался безоговорочно и, как правило, был для них общим. Труднее обстояло дело, когда утверждался список постулатов, имеющих отношение только к геометрии, т. е. непосредственно к решению задач. В этом случае Евклид, принявший вызов противной стороны, обязывался решить публично все 10 задач, если, во-первых, ему разрешат пользоваться такими-то и такими-то аксиомами, справедливость которых, как правило, не вызывала сомнения (ведь ими будет пользоваться и противник), во-вторых, он дополнительно требовал, чтобы ему разрешили пользоваться без доказательства еще другими геометрическими предложениями, не носящими общего характера и справедливыми только в рамках геометрии. Вот эти дополнительные требования для решения геометрических задач с той поры и стали называться постулатами («постулат» в буквальном переводе — требование). Вполне понятно, почему каждый постулат начинается словами «Требуется, чтобы...» Если противник соглашается со всеми выставленными постулатами и разрешает ими пользоваться, то Евклид (или другой ученый на его месте) дает согласие на участие в диспуте. Если же противная сторона не соглашалась хотя бы с одним из постулатов, то диспут откладывался.

Поскольку между постулатами и аксиомами, как это указывалось выше, нет принципиальной разницы, то в дальнейшем под словом аксиомы будем понимать и постулаты. Все они составляют **систему аксиом** «Начал» Евклида (аксиоматику Евклида).

Выше отмечалось, что «Начала» Евклида в течение ряда столетий считались вершиной научной строгости. Недаром Евклид имел так много подражателей, которые переписывали его «Начала» на разные языки и решались только комментировать их и делать пояснения, не подвергая форму и содержание сколько-нибудь принципиальной критике.

Нашлись философы, которые возвели «Начала» Евклида в абсолют, т. е. в непогрешимое учение о свойствах окружающего нас реального пространства. «Начала» Евклида внимательно изучал Исаак Ньютон (1643—1727) и на основе их построил свою механику, которую принято теперь называть классической. «Начала» Евклида хорошо изучил и Лобачевский, признав их совершенно верными и правильно отражающими реальное пространство, но далеко не полными и в известном смысле произвольными. Немецкий философ Иммануил Кант (1724—1804) считал, что аксиомы «Начал» Евклида носят чисто априорный (внеопытный) характер, т. е. не зависят от опыта людей и развития человеческого общества. Когда голландский ученый Бенедикт

Спиноза (1632—1677) писал свою «Этику», то форму изложения он заимствовал у Евклида. Подобно автору «Начал», он вводит этические аксиомы и постулаты как твердый и надежный фундамент своего научного трактата, развертывающегося в виде теорем, следующих друг за другом с их дедуктивным доказательством, опирающимся на предпосланную систему аксиом и ранее доказанные теоремы. Одним словом, все, как у Евклида...[1]

Но, как говорят, и на солнце есть пятна... Жизнь показала, что и это гениальное творение имеет «весьма существенные недостатки». Вот на этих недостатках и остановимся. Правда, здесь сразу же требуется сделать оговорку. Все недостатки «Начал» ни в коем случае не умаляют достоинств Евклида и не снижают его авторитета. Дело в том, что большинство принципиальных недостатков, которыми страдают «Начала», объясняется уровнем развития науки того времени.

Чтобы лучше уяснить эти изъяны в «Началах» Евклида, познакомимся с современным аксиоматическим методом, поставившим «все точки над i».

Беседа четвертая

ЕВКЛИД, ОЧИЩЕННЫЙ ОТ ВСЕХ ПЯТЕН

Читатель этой книги, конечно, знаком с геометрией хотя бы по школьному курсу. Но есть существенная разница между школьным изло-

[1] Дедуктивный способ изложения был характерен не только для сочинений Спинозы. Одно время он считался в Европе чуть ли не единственным методом изложения всех наук.

Евклид (апокрифический портрет)

жением геометрии и ее изложением в научных трактатах. В школе геометрия изучается как учебный предмет, а в трактатах она предстает как научная дисциплина. И не надо смешивать геометрию как учебный предмет с геометрией — наукой, основанной на современном аксиоматическом методе, который является дальнейшим развитием и обобщением дедуктивного метода, примененного Евклидом в его «Началах».

Суть современного аксиоматического метода заключается в следующем.

Во-первых, выделяются основные понятия геометрии. В обычном изложении ими будут: «точка», «прямая», «плоскость» и отношения между ними, выраженные словами: «точка лежит на прямой» или «точка лежит между двумя другими точками». Основные понятия не определяются, так как все их свойства, нужные для построения геометрии, четко перечисляются в аксиомах.

Во-вторых, составляется список конечного числа аксиом (см. «Приложение» в конце книги), которым должны подчиняться указанные выше основные понятия (в остальном природа основных понятий безразлична).

Заметим, что система аксиом должна удовлетворять следующим требованиям:

1) требованию непротиворечивости, или совместности: ни одна из аксиом не должна противоречить другим аксиомам этой системы, следовательно, и следствия из них не должны приводить к противоречиям;

2) требованию независимости: ни одна из аксиом рассматриваемой системы не может быть следствием других;

3) требованию полноты: список аксиом должен быть полным в том смысле, чтобы в процес-

се дальнейшего построения геометрии не было нужды пополнять его новыми аксиомами, которых нет в предпосланном списке.

Требование полноты непротиворечивой системы аксиом геометрии, таким образом, заключается в том, что она позволяет, не опираясь на наши наглядные представления и опыт, без добавочных соглашений, исключительно логическим путем решить вопрос о доказуемости или недоказуемости любого геометрического предложения (теоремы), т. е. на основе полной системы аксиом из всяких двух взаимно противоречащих геометрических предложений A и не — A одно всегда может быть доказано, а другое — опровергнуто.

В-третьих, после того как выделены основные понятия и дана система аксиом, дальнейшее построение «этажей» геометрического «здания» ведется исходя из двух требований:

1) всякое геометрическое понятие (термин, слово), если оно не основное, определяется через указание ближайшего родового понятия и необходимых видовых признаков. Определить какое-нибудь геометрическое понятие — это значит раскрыть его содержание путем сведения к основным понятиям или ранее определенным;

2) всякое геометрическое предложение (теорема, лемма, следствие), каким бы простым оно ни казалось, доказывается логическим путем. Доказать какое-нибудь предложение логическим путем (аксиоматически) — это значит получить его дедуктивными рассуждениями как следствие из ранее предпосланной системы аксиом или ранее доказанных теорем (если это, конечно, не первая теорема). Роль чертежей в этих рассуждениях исключительно вспомогательная. Вопрос решает логика дедуктивных рассуждений, а ин-

туиция и пояснительные чертежи допускаются только с совещательным голосом. Выходит, что в строгом аксиоматическом построении основ геометрии чертежи вовсе не обязательны.

Геометрия как учебный предмет строится на дедуктивном методе Евклида, основанном, как увидим далее, на заведомо неполном списке аксиом, где чертежи иногда выступают не только с «совещательным», но сплошь и рядом с «решающим голосом», т. е. подменяют доказательство некоторых теорем. Это как раз случается в тех местах, где вследствие неполноты системы аксиом для доказательства не хватает некоторых явно выраженных аксиом.

Геометрия-наука в отличие от геометрии-предмета оперирует полной системой аксиом и не нуждается в неявно выраженных аксиомах, выступающих в виде чертежей или каких-нибудь интуитивных соображений.

В дальнейшем будем помнить, что вершиной строгого доказательства какой-нибудь теоремы является доказательство, выполненное в духе современного аксиоматического метода и основанное на заведомо полном списке аксиом.

Таким образом, строгость дедуктивного доказательства, реализованного в «Началах» Евклида, значительно уступает той неукоснительной строгости, которой пользуется современный аксиоматический метод.

Теперь остановимся на «пятнах», т. е. на отрицательных сторонах «Начал» Евклида, подвергнув их справедливой критике с точки зрения современного аксиоматического метода, с которым читатель только что ознакомился.

Самым слабым местом в «Началах» являются определения геометрических понятий, списком которых начинается каждая из тринадцати книг.

Так, в первой книге «Начал» дается 23 определения. В первом Евклид пытается определить «точку»: «Точка есть то, что не имеет частей». В четвертом определении раскрывает содержание прямой: «Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно всех своих точек». В седьмом дается определение «плоскости»: «Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых», причем, «поверхность», согласно пятому требованию, «есть то, что имеет только длину и ширину». Дальнейшими определениями Евклид вводит «угол», «границу», «фигуру», «круг», «полукруг», «треугольник», «четырехсторонники» и двадцать третьим определением дает понятие параллельных прямых: «Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолженными в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не пересекаются».

Сразу же бросается в глаза, что Евклид не выделяет основных понятий, как это требуется современным аксиоматическим методом. Поэтому создается впечатление, что он пытается определить буквально все геометрические понятия, с которыми ему приходится иметь дело в первой книге, даже «точку», «прямую» и «плоскость», что при аксиоматическом построении геометрии принято считать основными понятиями (по Гильберту — основные объекты).

Прежде всего заметим, что принципиально невозможно определить буквально все геометрические понятия, не выделяя основных. В самом деле, пусть мы хотим, скажем, определить «треугольник». Для этого надо высказать хотя бы пару геометрических понятий, указывающих на род и вид, а для определения этих двух понятий потребуется теперь уже, по крайней мере, четыре геометрических понятия (соответственно два родовых понятия и два видовых признака); в свою очередь для этих четырех потребуется не менее восьми понятий (соответственно четыре родовых понятия и четыре видовых признака) и т. д. до бесконечности. Следовательно, если с самого начала не ввести основных понятий, не требующих для себя определений, то для определения треугольника, а также и всякого другого понятия, потребовалось бы бесчисленное множество геометрических понятий (терминов), что фактически оставляет понятие без определения. Мы провалились бы в «логическую бездну». Таким образом, отказавшись от основных понятий, мы не смогли бы дать удовлетворительным образом ни одного геометрического понятия. Ведь как указывалось выше, определить какое-нибудь понятие — это значит свести его к основным или ранее определенным. Вот почему такие понятия как «точка», «прямая», «плоскость», которые должны сводиться к основным понятиям, остаются у Евклида в «воздухе», так как он вообще не вводит никаких основных понятий, а, следовательно, и не может к ним сводить.[1]

Евклидовы определения точки, прямой и плоскости не являются логически правильными. Рассмотрим с этой стороны хотя бы определение точки: «Точка есть то, что не имеет частей». Здесь имеется видимость (подчеркиваем,— только видимость!) прямого определения. Логика

---

[1] Определяя новые понятия, мы опираемся на другие понятия, которые уже известны. Давая самое первое определение, мы тоже опираемся на некоторые понятия, но эти понятия не были определены. Значит, определить решительно все невозможно: некоторые понятия надо выделить как первичные, основные, не подлежащие определению.

правильных определений требует, чтобы геометрическое понятие определялось через ближайшее геометрическое родовое понятие. Геометрическое понятие «точка» Евклид старается определить через очень широкое понятие «то», выходящее далеко за пределы геометрии, так как под словом «то» можно понимать все, что угодно, например корову, телеграфный столб и проч. Следовательно, слово «то» никак нельзя считать родовым понятием слова «точка». Примерно то же можно сказать относительно видового признака «часть». Что это — основное понятие? Нет. Евклид, как мы знаем, вообще не выделял основных понятий. Однако это слово «часть» Евклид и не определяет. Выходит, что Евклид неизвестное определяет через неизвестное, которое само требует для себя определения.

Примерно те же рассуждения о логической несостоятельности можно повторить и для евклидовых определений прямой и плоскости. Относительно «определений» последних двух геометрических понятий надо еще добавить, что они двусмысленны, т. е. далеко не однозначны. Например, в определении прямой говорится: «Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно всех своих точек». Но разве окружность не удовлетворяет этому условию? Вообще под это определение подходит любая линия постоянной кривизны. А логически правильное определение никак не может быть двусмысленным.

Вторым большим недостатком «Начал» Евклида является неполнота его аксиоматики. Евклид, как указывалось выше, сформулировал 14 аксиом (включая и постулаты). Этот список, как показывает анализ доказательства уже самой первой теоремы первой книги «Начал», далеко не полный. Первой теоремой Евклид пыта-

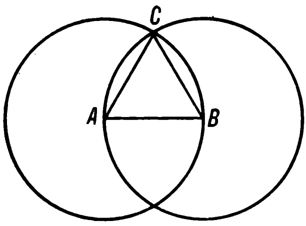


Рис. 1

ется доказать существование равностороннего треугольника, который можно построить на данном отрезке. Эту задачу он решает так. Пусть AB — данный прямолинейный отрезок и на этом отрезке надо построить равносторонний треугольник, т. е. треугольник со сторонами, равными данному отрезку. Из точки А, как из центра, радиусом, равным длине отрезка AB, опишем окружность (III постулат) и тем же радиусом проводим окружность, приняв за центр точку B (III постулат). Одну из точек пересечения этих двух окружностей обозначим через C. Соединим точки A, B, C прямолинейными отрезками (I постулат). Полученный треугольник ABC (рис. 1) и будет искомым.

Действительно, $AC=AB$, как радиусы одной и той же окружности с центром в точке A; $BC=BA$, как радиусы одной и той же окружности с центром в точке B. Поскольку $AC=AB$, $BC=BA$, причем, $BA=AB$, то по аксиоме транзитивности (I аксиома) $AC=AB$. Выходит, что все стороны треугольника равны данному отрезку. Что и нужно построить. Таким образом Евклид доказал существование равностороннего треугольника с любой наперед заданной стороной.

Однако эта «теорема существования» с точки зрения современного аксиоматического метода Евклидом не доказана. Возникает вопрос: на основании какой из аксиом полученные окружности равных радиусов и проходящие каждая через центр другой пересекаются в точке C? Существование точки C аксиоматически не подтверждается (такой аксиомы нет). Таким образом, в рассуждении Евклида одно звено (существование точки C) не является логически обоснованным, и, следовательно, все рассуждение зиждется на песке, т. е. с точки зрения современного аксиоматического метода доказательство несостоятельно, так как имеет «логический провал» как раз в том месте, где не хватает нужной аксиомы. Для безупречного доказательства Евклиду не хватает аксиомы непрерывности, которую заменяет ему наглядность чертежа. И это у него наблюдается довольно часто. Каждую нехватку в системе аксиом он старается пополнить молчаливой ссылкой на наглядность чертежа, т. е. на нашу интуицию, что неминуемо ведет к логическим изъянам.

Но раз имеется логическая нестрогость при доказательстве первой теоремы, то эта нестрогость будет передана и другим теоремам, в доказательствах которых имеется ссылка на первую. Следовательно, при строгом подходе доказательства и этих теорем имеют логический порок.

В «Началах» без аксиоматического обоснования, исходя из интуитивных соображений, основанных на наглядности чертежа, Евклид пользуется понятиями «движение», «между». А это ведет к тому, что у него остаются без определения такие понятия как «лежать по одну сторону», «лежать внутри», «лежать вне». Короче, у Евклида не хватает аксиом движения и аксиом порядка или расположения. Все это ведет к еще большей нестрогости «Начал» Евклида.

Общий вывод таков:

«Начала» Евклида являлись непревзойденным образцом научной строгости для своего времени.

«Начала» остаются и теперь образцом научной строгости в школьном преподавании, где мы, учитывая возрастные особенности учащихся, вынуждены довольствоваться дедуктивным методом Евклида, а не современным аксиоматическим методом.

С точки зрения современного аксиоматического метода «Начала» не являются образцом логической строгости и, как мы видели выше, имеют весьма серьезные изъяны в виде целого ряда «логических провалов», продиктованных отсутствием основных понятий и неполнотой аксиоматики.

Беседа пятая

КАК ЛЮДИ ПЫТАЛИСЬ ДОКАЗАТЬ НЕДОКАЗУЕМОЕ

(Из истории V постулата)

Люди науки в течение более двух тысяч лет пытались доказать V постулат, как теорему.

Почему именно V постулат стал объектом пристального изучения? Это объясняется, видимо, следующими двумя причинами. Во-первых, V постулат более сложен и непосредственно менее очевиден, чем остальные, так как содержит идею бесконечного. Во-вторых, сам Евклид использует его в первой книге «Начал» не сразу, а с некоторым опозданием, при доказательстве двадцать девятого предложения, тогда как первые двадцать восемь предложений доказаны без его участия. Создается впечатление, что Евклид неохотно ввел этот постулат, пытался обойти его, видимо, даже доказывал его. Но все попытки обойти V постулат или доказать его остались напрасными, и Евклид, «скрепя сердце», ввел его как аксиому.

Еще комментаторы древности считали V постулат недоказанной теоремой и старались исправить «ошибку» Евклида, поместившего его в число недоказуемых предложений. Так возникла многовековая проблема: доказать V постулат, как теорему. Сколько было потрачено сил и времени для решения этой проблемы, трудно себе представить.

Если собрать всю литературу, посвященную доказательству V постулата, то она составила бы огромную библиотеку. Нет ни одного крупного геометра от Евклида до Лобачевского (XIX в.), который не занимался бы проблемой V постулата. Все эти доказательства, как бы искусно ни велись, оказывались ошибочными. Несостоятельность их кроется либо в допущении явной грубой ошибки, либо в использовании равносильных V постулату утверждений (эквивалентов).

В чем же причина неудач, связанных с попытками доказать V постулат?

Оказалось, что V постулат недоказуем при помощи остальных аксиом евклидовой геометрии (если, конечно, не прибегать к эквивалентам V постулата). Первым, кто показал (но еще не доказал) недоказуемость V постулата, был наш соотечественник, великий геометр Н. И. Лобачевский. Он рассуждал примерно так: если V постулат не доказывается, то, отрицая его, с помощью остальных аксиом «Начал» Евклида, высказанных явно или неявно, никогда не придем к противоречию. Таким образом, на базе только что указанной аксиоматики возможна другая геометрия, геометрия в неевклидовом смысле. И Лобачевский построил эту геометрию, которая в честь ее создателя стала называться геометрией Лобачевского (см. беседу восьмую). Вполне строго доказал недоказуемость V постулата немецкий ученый лауреат премии имени Н. И. Лобачевского Д. Гильберт (1862—1943).

Но труд ученых, стремившихся доказать недоказуемое, не пропал даром. Своей работой они расчистили путь к новой геометрии и взрыхлили почву для прорастания ее идей. Хотя V постулат и не был доказан, но зато были четко выделены аксиомы и теоремы, не зависящие от него. Они-то и составили так называемую абсолютную геометрию, первые теоремы которой в чистом виде были даны еще в первой книге «Начал» Евклида (первые 23 теоремы были доказаны Евклидом без помощи V постулата).

Ниже приводим список основных теорем абсолютной геометрии на плоскости.

1. Любой отрезок (угол) можно единственным образом разделить пополам.

2. Из каждой точки, взятой вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и притом единственный.

3. Из каждой точки прямой можно восставить перпендикуляр к этой прямой, и притом единственный.

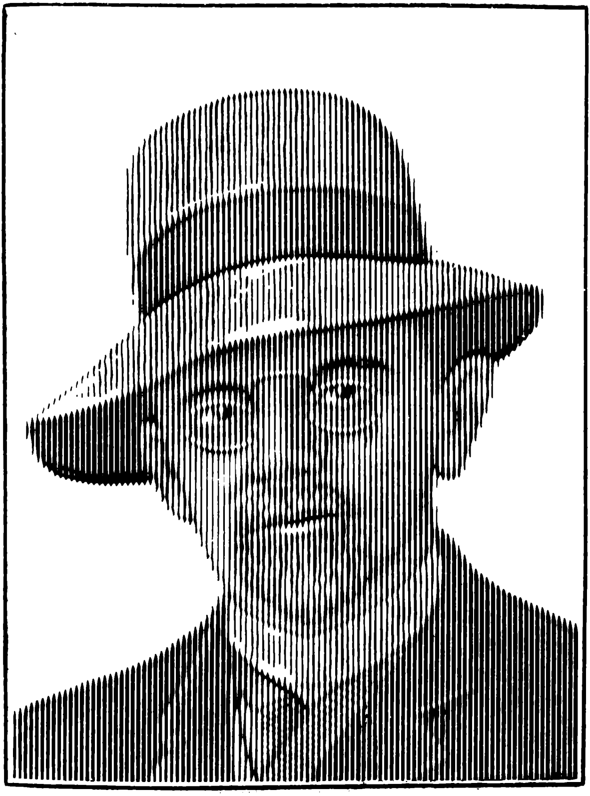
4. Сумма смежных двух углов равняется двум прямым.

5. Вертикальные углы равны.

6. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

7. Имеют место известные теоремы о сравнении перпендикуляров, наклонных и их проекций, в частности, что перпендикуляр короче наклонной.

8. Внешний угол треугольника всегда больше любого внутреннего, с ним не смежного.



Давид Гильберт

9. Во всяком треугольнике не может быть больше одного прямого или тупого угла.

10. В каждом треугольнике против большей стороны лежит и больший угол и наоборот.

11. В любом прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.

12. Сумма любых двух сторон треугольника всегда больше третьей.

13. Если две прямые, будучи пересечены третьей, образуют с ней равные соответственные углы, или равные накрестлежащие углы, или сумму односторонних углов, равную $2d$, то данные прямые не пересекаются.

14. Три признака равенства треугольников.

15. Два перпендикуляра к одной и той же прямой не пересекаются.

16. Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, проходит по крайней мере одна прямая, не пересекающая данной.

17. Сумма внутренних углов любого треугольника не более $2d$ (теорема Лежандра).

18. Все три биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, расположенной внутри треугольника.

19. В любой треугольник можно вписать окружность, и притом единственную.

20. Прямая пересекает окружность не более чем в двух точках.

21. Равные дуги окружности стягиваются равными хордами и наоборот.

22. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой.

Вместе с тем были вскрыты теоремы, зависящие от V постулата и являющиеся его эквивалентами.[1] Ниже приводим список основных эквивалентов V постулата на плоскости.

1. Через любую точку, взятую вне прямой, в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, проходит одна и только одна прямая, параллельная данной (аксиома Плейфера, XVIII в.).

2. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой и расположенных по одну сторону от нее, на плоскости есть прямая линия (постулат Посидония, I в. до н. э.).

3. Расстояние между двумя параллельными прямыми есть величина постоянная (постулат Прокла, V в.).

4. Существуют хотя бы два подобных, но не равных треугольника (постулат Валлиса, XVII в.).

5. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно всегда провести окружность (постулат Фаркаша Больяй, XIX в.).

6. Через любую точку, взятую внутри острого угла, можно провести всегда по крайней мере одну прямую, пересекающую обе стороны этого угла (постулат Лежандра, XVIII в.).

7. Если прямая пересекает одну из двух непересекающихся прямых и лежит с ними в одной плоскости, то она пересекает и другую прямую.

---

[1] Уточним понятие эквивалентности аксиом. Пусть некоторая дедуктивная теория основана на системе аксиом $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и пусть M и N — две новые аксиомы, связанные между собой так, что если мы к данной основной системе аксиом добавим одну из аксиом M или N, то из системы аксиом $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, M\}$ можно вывести N как теорему, а из системы аксиом $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, N\}$ можно вывести M как теорему; тогда говорят, что предложения M и N эквивалентны друг другу относительно системы аксиом $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. (См. Я. Л. Трайнин. Основания геометрии. М., 1961, стр. 45.)

8. Сторона вписанного в круг правильного шестиугольника равна радиусу этого круга.

9. Сумма внутренних углов прямолинейного треугольника равняется двум прямым.

10. Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются.

11. Существует треугольник с произвольно большой площадью.

12. Высоты треугольника всегда пересекаются.

13. Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Любое из этих тринадцати предложений можно принять за аксиому, тогда V постулат и все зависящие от него предложения «Начал» Евклида будут доказаны, как теоремы.

В заключение беседы приведем три ложных доказательства V постулата Евклида, принадлежащие Проклу, Валлису и Луи Бертрану.

Доказательство Прокла. В комментариях на I книгу «Начал» Евклида Прокл (410—485) приводит свое доказательство V постулата, который он дает в форме: «Если прямая пересекает одну из параллельных прямых и лежит с ними в одной плоскости, то она пересекает и другую параллельную прямую».

Само доказательство он проводит так.

Пусть a и b — параллельные прямые и пусть прямая c, находясь в одной плоскости с прямыми a и b, пересекает прямую b в точке M (рис. 2). Докажем, что при данных условиях прямая c пересечет прямую a.

Такое пересечение действительно возможно, так как расстояние переменной точки луча Mc от прямой b возрастает неограниченно, если эта

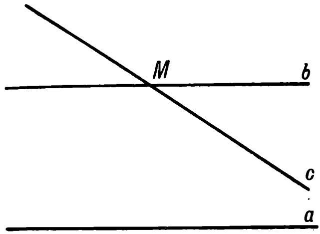


Рис. 2

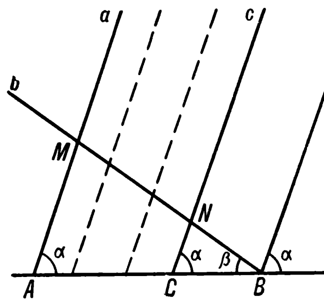


Рис. 3

точка неограниченно удаляется от точки M, тогда как расстояние между двумя параллельными прямыми есть всегда величина постоянная.

Рассуждение Прокла основано на использовании эквивалента V постулата. Этим эквивалентом является утверждение, что расстояние между двумя любыми параллельными прямыми есть величина постоянная (постулат Прокла). Утверждение Прокла о расходимости пересекающихся прямых можно доказать. Теперь оно доказывается на основании предложений, не зависящих от постулата параллельности. Таким образом, доказательство Прокла не лишено известного «порочного круга» и терпит неудачу.

Доказательство Валлиса. 11 июля 1663 г. английский математик Джон Валлис (1616—1703), занимавший кафедру Евклида в Оксфордском университете, прочитал лекцию по теории параллельных линий. Он полагал, что в этой лекции ему удалось строго доказать V постулат Евклида. В своих рассуждениях Валлис исходил из предложения о существовании подобных треугольников различной величины (постулат Валлиса).

Суть доказательства Валлиса коротко можно изложить следующим образом. Пусть прямые a и b (рис. 3) пересечены третьей AB и образуют с ней внутренние односторонние углы α и β, сумма которых меньше двух прямых углов, т. е. $\alpha + \beta < 2d$. Докажем, что в этом случае a и b обязательно пересекутся в некоторой точке M. Чтобы в этом убедиться, будем перемещать прямую a непрерывно от A к B так, чтобы она с прямой AB сохраняла один и тот же угол α. В таком случае те точки прямой a, которые лежат внутри угла β, должны по пути обязательно пройти через прямую b, так как в положении b' все они лежат вне этого угла. Пусть N будет одна из точек прямой a (прямая a в новом положении на рисунке обозначена через c), попавшая на прямую b. Тогда получается $\triangle CNB$ с углами α и β при основании CB, где C — точка пересечения прямой c с прямой AB, эти прямые образуют угол α. Теперь на отрезке AB построим $\triangle AMB$, подобный $\triangle CNB$, что возможно согласно постулату Валлиса. Поскольку $\angle MAB = \alpha$ и $\angle MBA = \beta$, прямая a пойдет по стороне AM, а прямая b — по стороне BM и, следовательно, прямые a и b пересекутся в точке M. Факт пересечения прямых a и b установлен.

Казалось бы, постулат Валлиса позволил доказать V постулат Евклида. Однако Евклид в своих «Началах» показал, что из V постулата вытекает следствие о существовании подобных, но не равных треугольников. Следовательно, приведенное доказательство Валлиса тоже не лишено порочного «логического круга».

Доказательство Бертрана. Швейцарский математик из Женевы Луи Бертран (1731—1812) в своем сочинении «Новое построение элементарной части математики», опубликованном в 1778 и 1812 гг., под влиянием распространявшихся идей математического анализа предпринял попытку нового доказательства V постулата Евклида. Вольно обращаясь с понятием «бесконечно малая величина», он в своих рассуждениях допустил ошибку, и поэтому его доказательство оказалось ложным.

Суть доказательства, предложенного Бертраном, заключается в следующем. Прежде всего несложными рассуждениями Бертран устанавливает, что так как две прямые a_1 и a_2, расположенные в плоскости, пересечены третьей прямой b и образуют с ней внутренние односторонние углы α и β (рис. 4), сумма которых равна $2d$, то часть плоскости, заключенная между прямыми a_1 и a_2, столь мала по отношению ко всей плоскости, что содержится в ней бесконечное число раз. Действительно, как рассуждает Бертран, если полосу плоскости, заключенную между прямыми a_1 и a_2, передвигать вдоль прямой b так, чтобы точка A_2 совпала с точкой A_3, где A_2 и A_3 — точки пересечения прямых a_2 и a_3 с прямой b, то она совпадет с полосой, заключенной между прямыми a_2 и a_3, так как совмещают-

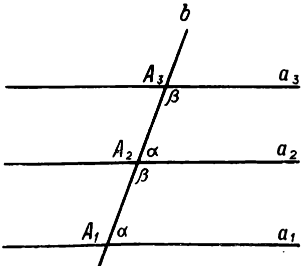


Рис. 4

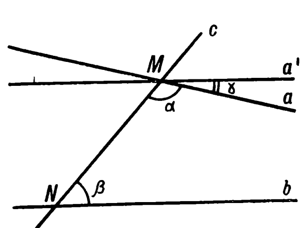


Рис. 5

ся равные углы и соответственно совмещаются равные отрезки A_1A_2 и A_2A_3. Рассматривая на прямой b отрезки

$$A_3A_4=A_4A_5=\ldots=A_{n-1}A_n=\ldots A_1A_2,$$

на плоскости получим бесконечное множество равных полос, каждая из которых по отношению ко всей плоскости, по Бертрану, считается как угодно малой. Теперь легко доказывается и сам V постулат. Пусть прямые a и b пересечены третьей прямой c и пусть сумма внутренних односторонних углов α и β, образованных этими прямыми (рис. 5), меньше двух прямых углов, т. е. $\alpha+\beta<2d$. Докажем, что в этом случае прямые a и b пересекаются. Для доказательства через точку M (точка пересечения прямых a и c) проведем прямую a' так, чтобы прямая c с этой прямой a' и прямой b образовала внутренние односторонние углы, сумма которых равна $2d$. Обозначим угол aMa через γ, которой во всей плоскости содержится $^{2\pi}/_{\gamma}$ раз, т. е. конечное число раз. Тогда a пересекает b. В противном случае, если бы прямая a не пересекала прямой b, угол γ, образованный прямыми a' и a, содержался бы целиком внутри полосы, образованной прямыми a' и b, но это невозможно, так как γ укладывается в плоскости конечное число раз, а вмещающая его полоса может быть уложена в плоскости сколько угодно раз.

Ошибка в рассуждениях Бертрана заключается в том, что ни всю плоскость, ни часть ее, содержащуюся между сторонами угла, нельзя рассматривать как величину, допускающую точное количественное определение, а поэтому их нельзя сравнивать и применять к ним обычные арифметические отношения.

Беседа шестая

УЧЕНЫЕ, ПРИОТКРЫВШИЕ ДВЕРЬ В НОВЫЙ МИР

(Саккери, Ламберт, Швейкарт, Тауринус)

Еще в XVIII в. созрели необходимые предпосылки для возникновения новых идей, связанных с геометрией Лобачевского, отрицающей V постулат и все его эквиваленты. Нашлись ученые, которые были близки к этим идеям. Но, скованные старыми традициями, воспитанные на «Началах» Евклида и уверенные, что V постулат рано или поздно все же будет доказан (на основании аксиом абсолютной геометрии), они слегка приоткрывали дверь в новую геометрию, даже заглядывали в этот новый мир, но тут же, пораженные его необычностью и несоответствием своим наглядным представлениям, шарахались в сторону от этой двери, и она наглухо закрывалась перед ними.

К этим ученым принадлежали итальянский математик Саккери (1667—1733) и швейцарский ученый Ламберт (1728—1777). Оба они — стихийные предшественники открытия Лобачевского. Они владели первыми теоремами неевклидовой геометрии, но шли этим путем не для утверждения новых идей, а чтобы похоронить эти идеи и доказать вместе с V постулатом незыблемость «Начал» Евклида, как единственно возможной геометрии. Будь они смелее и дальновиднее, они бы шире распахнули приоткрывшуюся им дверь, перешагнули бы через ее порог и тогда, за 100 лет до Лобачевского, предвосхитили бы открытие неевклидовой геометрии. Но, увы, этого они не сделали. В то время в геометрических представлениях старое было куда сильнее нового. Математика ждала иных борцов за новое, более сильных и последовательных.

Посмотрим теперь, как упомянутые выше ученые приоткрыли дверь в мир новых идей, имя которым «геометрия Лобачевского».

Начнем с Саккери. Этот трудолюбивый монах, принадлежавший к ордену иезуитов, все свободное время отдавал изучению «Начал» Евклида и их критическому разбору. Он, как и многие его предшественники, обратил внимание на сложность и особое положение (используется не сразу) V постулата и стал на путь сторонников его доказуемости. Он верил, что рано или поздно V постулат будет доказан и одно из самых «темных пятен» «Начал» Евклида будет ликвидировано. Именно побуждаемый этими благими намерениями, он пишет трактат под характерным названием «Евклид, очищенный от всех пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии».

Для доказательства V постулата Саккери строил четырехугольник $ABCD$, у которого углы A и B при нижнем основании прямые, а боковые стороны AD и BC равны (рис. 6). Такие четырехугольники принято называть четырехугольниками Саккери. Специальной теоремой Саккери доказывает, что углы C и D при верхнем основании равны. Поэтому имеем полное право каждый из этих углов обозначать через α. Теперь от-

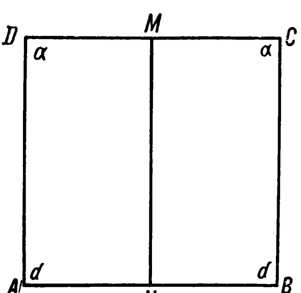


Рис. 6

носительно величины угла α без всякой предвзятости Саккери устанавливает три гипотезы:

1) гипотезу тупого угла, согласно которой угол α тупой;

2) гипотезу прямого угла, согласно которой угол α прямой;

3) гипотезу острого угла, согласно которой угол α острый.

Согласно интуиции, в основе которой лежит V постулат, нам кажется, что α обязательно есть прямой угол и, следовательно, две другие гипотезы (первая и третья) просто невозможны. Но это так только с точки зрения V постулата. Интуиция правильно подсказывает, что гипотеза прямого угла есть эквивалент V постулата. И Саккери в этом отношении отдает себе полный отчет и правильно понимает это. Для доказательства V постулата он старается, не прибегая к его эквивалентам, логически установить, что угол α — прямой, т. е. из трех гипотез имеет место только одна, а именно — вторая.

Он без особого труда доказывает, что первая гипотеза ведет к логическому противоречию и, следовательно, на плоскости не имеет места. Теперь ему остается так же «расправиться» с третьей гипотезой — гипотезой острого угла. Тогда право на существование имела бы только вторая гипотеза, а от нее «рукой подать» до самого V постулата, который и был бы доказан.

Но на пути опровержения третьей гипотезы Саккери встретил непреодолимые трудности, что было вполне естественно.

Все «опровержения», к которым приходит пытливый ум Саккери, не удовлетворяют его, и он сокрушенно пишет: «При гипотезе тупого угла дело ясно, как свет божий... Между тем опровергнуть гипотезу острого угла мне не удается иначе, как доказав, что длина эквидистанты[1] равна длине ее прямолинейного базиса...» Определяя длину кривой методом бесконечно малых, Саккери допустил ошибку, приведшую его к неверному заключению о том, что длина дуги эквидистанты равняется ее проекции на ось, или, как он выражается, «длина эквидистанты равна длине ее прямолинейного базиса».

Встав на путь опровержения третьей гипотезы и рассуждая методом от противного: «предположим, что третья гипотеза имеет место», Саккери получает своеобразную геометрию гипотезы острого угла. Вместо ожидаемого противоречия он получает целый ряд необычных с точки зрения евклидовых представлений теорем, не имеющих, однако, при самом придирчивом отношении к ним никаких внутренних логических противоречий типа A и не $-A$ одновременно. Вот это и напугало Саккери. Находясь в плену старых представлений, основанных на вере в доказуемость V постулата, Саккери не знал, что он фактически встал на путь новой неевклидовой геометрии, которая через столетие найдет развитие в трудах гениального математика Н. И. Лобачевского. Убежденный в безупречности евклидовой геометрии, Саккери, сам того не сознавая, получил следующие результаты неевклидовой геометрии на плоскости:

1. Если в одном четырехугольнике Саккери угол α острый, то и во всяком четырехугольнике Саккери этот угол острый.

2. Сумма внутренних углов любого четырехугольника меньше $4d$.

[1] Эквидистанта — плоская кривая равных расстояний, представляющая геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой,— оси эквидистанты, и расположенных по одну сторону от нее.

3. Сумма внутренних углов любого треугольника меньше $2d$.

4. Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой могут и не пересекаться.

5. Два перпендикуляра к одной и той же прямой, расположенные в одной плоскости, безгранично расходятся один относительно другого.

6. Существуют прямые, которые, взятые по две, в одну сторону безгранично расходятся, а в другую — асимптотически сближаются (как увидим далее, такие прямые Лобачевский назвал параллельными).

7. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой и расположенных по одну сторону от нее, на плоскости есть кривая (эквидистанта), имеющая с прямой не более двух общих точек.

В шестом и седьмом предложении Саккери и усмотрел противоречие. О «противоречии» в седьмом предложении было сказано выше. Что касается шестого предложения, то рассуждения Саккери сводились к следующему. Раз существуют две прямые, безгранично расходящиеся друг от друга в одну сторону и асимптотически сближающиеся в другую, то на стороне их асимптотического сближения, по его мнению, в бесконечности найдется точка, общая этим прямым, и в этой точке рассматриваемые прямые будут иметь общий перпендикуляр, что, как полагает Саккери, «противно нашему разуму».

Однако, если отбросить искусственное построение «бессодержательного» общего перпендикуляра в бесконечно удаленных точках прямых, здесь никакого логического противоречия нет. То, что увидел Саккери, было, конечно, необычным и шло вразрез с традиционными представлениями. Но необычное не есть еще логическое противоречие. То обстоятельство, что он необычное принял за невозможное, и погубило в нем ученого, прокладывавшего новые пути в геометрии.

Намного дальше Саккери и более смело пошел по «дороге открытий» швейцарский ученый-самоучка, сын бедного ремесленника, достигший при жизни большой славы исследователя в области математики, астрономии, геодезии и фотометрии, член Берлинской академии наук Ламберт. Его можно считать непосредственным продолжателем идей Саккери.

Свои исследования Ламберт изложил в работе «Теория параллельных линий», написанной, как полагают, в 1766 г. и опубликованной стараниями Бернулли и Гинденбурга в 1786 г.

Работу Ламберта можно разделить на три части. В первой части автор пытается решить вопрос, можно ли V постулат получить как простое следствие из предшествующих постулатов или же для этого потребуются другие, более очевидные дополнительные постулаты. Во второй части даются различные попытки доказательства V постулата при помощи дополнительных постулатов, которые, являясь эквивалентами, сами должны быть доказаны. В третьей, наиболее интересной части излагаются, по существу, элементы неевклидовой геометрии в том случае, когда наряду с аксиомами абсолютной геометрии имеет место «третья гипотеза». На этой третьей части работы Ламберта и остановимся несколько подробнее.

В своих рассуждениях Ламберт исходит из четырехугольника $ABCD$, у которого три угла A, B и C заведомо прямые. Этот четырехугольник принято называть четырехугольником Ламберта. Строится он так. Из концов произвольного отрезка AB восставляем перпендикуляры. На одном из них берем точку D (рис. 7) и из нее опускаем на другой перпендикуляр DC. Полученный четырехугольник и будет искомым. Углы A, B, C будут прямые по построению. Величину угла D обозначим через α. Относительно величины α Ламберт, как и Саккери для своего четырехугольника, строит три гипотезы:

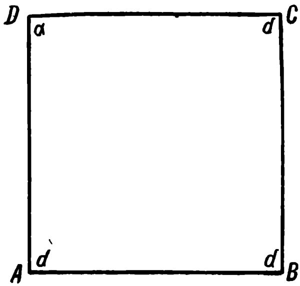


Рис. 7

1) гипотезу тупого угла, согласно которой $\alpha > d$;

2) гипотезу прямого угла, согласно которой $\alpha = d$;

3) гипотезу острого угла, согласно которой $\alpha < d$.

Обосновывая V постулат, Ламберт, как и Саккери, стремится логически доказать, что первая и третья гипотезы не имеют места, ну, а тогда будет справедлива вторая гипотеза, т. е. $\alpha = d$, а это есть утверждение, эквивалентное V постулату, и V постулат был бы доказан.

Идя таким путем, Ламберт, как и следовало ожидать, легко «расправился» с первой гипотезой, совершенно строго доказав, что упомянутая гипотеза на плоскости не имеет места. Однако третья гипотеза — гипотеза острого угла — оказалась тем «крепким орешком», который он как ни старался, разгрызть не мог. Вот тут-то у него и возник вопрос: «В чем же дело?» Почему несостоятельность первой гипотезы устанавливается сразу же, а третья гипотеза этому не поддается? Он даже высказывает для того времени «еретическую» мысль. «Я почти принужден заключить, — пишет Ламберт, — что третья гипотеза (острого угла) находит себе применение на некоторой мнимой сфере». Эти слова оказались пророческими. Действительно, много позднее Лобачевский показал, что все формулы неевклидовой геометрии получаются из формул сферической тригонометрии, если радиус R основной сферы, на которой строится тригонометрия, заменить мнимым радиусом Ri, где $i = \sqrt{-1}$.

Ламберт сформулировал (но не доказал) теорему, что при наличии гипотезы острого угла площадь треугольника ABC пропорциональна его угловому дефекту, причем, под последним он понимал разность между двумя прямыми углами и суммой внутренних углов треугольника. Так что по Ламберту

$$S_\Delta = \rho^2 \delta,$$

где S_Δ — площадь прямоугольного треугольника; ρ^2 — положительный множитель пропорциональности; δ — угловой дефект ($\delta = 2d - \angle A - \angle B - \angle C$).

Так как дефект треугольника не может быть отрицательным, то из полученной формулы Ламберта как следствие вытекает, что площадь треугольника не может возрастать беспредельно. Получается весьма интересно. Мы привыкли к тому, что если увеличить стороны треугольника, то площадь его возрастает беспредельно. А тут? Как бы ни увеличивали мы стороны треугольника, раздвигая его вершины, площадь треугольника всегда будет оставаться меньше некоторой постоянной величины (константы).

Здесь налицо полная аналогия со сферической геометрией (и тригонометрией), где роль прямых играют дуги больших кругов основной сферы, т. е. тех кругов, центры которых находятся в центре сферы. Как известно, формула площади сферического треугольника ABC имеет вид

$$S_\Delta = \rho^2(\angle A + \angle B + \angle C - 2d).$$

Если в этой формуле радиус сферы ρ заменить через ρi, то получим формулу Ламберта, справедливую при господстве гипотезы острого угла, т. е.

$$S_\Delta = \rho^2(2d - \angle A - \angle B - \angle C)$$

или

$$S_\Delta = \rho^2 \delta.$$

Нас, конечно, не удивляет, что в сферической геометрии площадь сферического треугольника всегда ограничена сверху и не может возрастать беспредельно, она, например, не может стать больше поверхности всего шара, так пусть же нас не удивляет и тот факт, к которому пришел Ламберт, что при наличии гипотезы острого угла площадь треугольника не может возрастать беспредельно и всегда остается меньше некоторой величины.

Во всех этих тонкостях Ламберт хорошо разбирался и не в пример Саккери, несмотря на необычность полученных результатов, не спешил выносить несправедливый «смертный приговор» третьей гипотезе.

В своих рассуждениях Ламберт зашел настолько «далеко», что, приняв гипотезу острого угла, пришел к выводу, что должна существовать некоторая длина, характерная для нашего пространства (абсолютная единица длины). Этот результат 60 лет спустя был заново открыт Н. И. Лобачевским.

Но доказуем ли V постулат?

На этот вопрос Ламберт не дал определенного ответа. Он больше, чем кто-либо другой, понимал серьезность проблемы V постулата и все существовавшие его доказательства считал логически несостоятельными. Ламберт показал, что доказательства V постулата заходят столь далеко, что остается, по-видимому, ничтожная мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат.

Первыми, кто вполне сознательно подошел к построению исходных теорем неевклидовой геометрии до Лобачевского, были немецкие ученые Швейкарт и Тауринус.

Профессор из Магдебурга Швейкарт (1780—1859) был юристом. Высот математики достиг самообразованием, находя в занятиях геометрией отдохновение от всех трудов и высшее удовлетворение. Изучая историю неудачных попыток доказать V постулат и подходя к этому вопросу без всякой ученой предвзятости, он приходит к выводу, что наряду с обыкновенной евклидовой геометрией существует другая, неевклидова геометрия, названная им «астральной» (звездной) геометрией. Однако свои замечательные идеи, посвященные разработке звездной геометрии, Швейкарт не опубликовал. О прямолинейном и смелом высказывании этих идей можно судить по письму, написанному им в 1818 г. великому немецкому математику Гауссу, непререкаемому авторитету в вопросах геометрии, носившему в то время почетный титул «короля математиков».

В этом письме говорится: «Существует двоякая геометрия: геометрия в узком смысле слова — евклидова — и звездное (astralische) учение о величинах. Треугольники последней геометрии имеют ту особенность, что сумма трех углов не равна двум прямым. Принимая это, можно строжайшим образом доказать следующее:

а) что сумма трех углов в треугольнике меньше двух прямых;

б) что сумма эта тем меньше, чем больше площадь треугольника;

в) что высота прямоугольного равнобедренного треугольника, постоянно возрастая с возрастанием боковых сторон, не может превзойти некоторую линию, которую я называю константой».

Далее Швейкарт пишет, что евклидова геометрия будет иметь место в предположении, что постоянная бесконечно велика. Только тогда оказывается справедливым, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Это легко доказать, лишь только мы примем, что постоянная бесконечно велика.

Письмо было послано, но нужной поддержки в печати от Гаусса Швейкарт так и не получил, хотя тот разделял взгляды Швейкарта и сам был склонен когда-нибудь заняться этим вопросом. Как потом выяснилось, «король математиков» в вопросах неевклидовой геометрии был более чем осторожен; вынашивая их в голове, он не спешил с их письменным оформлением и тем более с их публикацией. Он просто боялся быть непонятым и поставить под удар свой научный престиж.

Не найдя поддержки со стороны Гаусса, Швейкарт, не имевший к тому же специального математического образования, стал, по-видимому, сомневаться в своих результатах. Пыл к астральной геометрии пропал, занятия ею были заброшены, и он к ним больше не возвращался.[1]

---

[1] Свои результаты по астральной геометрии Швейкарт получил в Харькове, где он состоял профессором права с 1812 по 1817 г. Свою заметку он послал Гауссу не прямо, а через своего товарища проф. Герлинга. В ответ Гаусс написал Герлингу: «Заметка проф. Швейкарта доставила мне чрезвычайно много удовольствия, и я прошу передать от меня по этому поводу самый лучший отзыв». Но, видимо, не только этого ожидал Швейкарт от Гаусса.

Дальнейшей разработкой идей Швейкарта занялся его племянник Тауринус (1794—1874). В 1825 г. он выпустил работу «Теория параллельных линий». В этой работе он опровергает гипотезу тупого угла четырехугольника Саккери и сознательно развивает геометрию, вытекающую из гипотезы острого угла этого четырехугольника. В другой своей работе (1826) Тауринус намечает формальные пути построения неевклидовой геометрии.

Признавая логическую непротиворечивость неевклидовой геометрии, Тауринус, однако, считал ее непригодной для реальной действительности и поэтому не имеющей никакого интереса.

Обращался ли Тауринус со своими результатами к Гауссу? Да, обращался. И даже получил от Гаусса письмо, датированное 8 ноября 1824 г. К сожалению, в этом письме Гаусс больше говорит о своих собственных результатах в области неевклидовой геометрии, чем о результатах Тауринуса, считая их для себя пройденным этапом, и не только не побуждает молодого ученого к новым исследованиям и дерзаниям, а, наоборот, расхолаживает его. Письмо Гаусса заканчивается следующими характерными словами: «Относительно человека, который обнаружил глубокий математический ум, я не опасаюсь, что дурно поймет изложенное выше (а выше изложены программные вопросы неевклидовой геометрии); но во всяком случае вы должны смотреть на это, как на частное сообщение, которое отнюдь не должно быть опубликовано».

Тауринус, однако, решил, что следует заниматься теорией параллельных линий и не держать новое открытие под спудом. Именно это заставило его опубликовать упомянутые работы одну за другой. И когда в предисловии к последней своей брошюре он осторожно высказал пожелание, чтобы Гаусс опубликовал свое мнение по этому вопросу, «король математиков» не на шутку рассердился и порвал всякие связи с Тауринусом. После этого все письма Тауринуса к Гауссу оставались без ответа... В обстановке полного непризнания своих научных работ ученый впал в болезненное состояние, приведшее его к потере душевного равновесия. Он сжег свои брошюры и навсегда отошел от науки.

Беседа седьмая

ХОЗЯЕВА ИДЕЙ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

(Лобачевский, Гаусс, Больяй)

Истинными творцами первой в мире неевклидовой геометрии были три крупнейших математика мира — русский Николай Лобачевский, немец Карл Гаусс и венгер Янош Больяй, причем, приоритет наиболее полного освещения и публикации в печати принадлежит нашему соотечественнику, именем которого эта геометрия и называется.

Хотя Лобачевский по своей значимости и стоит на первом месте, тем не менее лучше начать не с Лобачевского, а с Гаусса.

Если неевклидову геометрию представить в виде большого дерева, то исследования Гаусса относятся скорее к корням этого дерева, исследования Больяй — к ветвям, исследования Лобачевского — ко всему дереву в целом.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — крупнейший немецкий математик — вошел в историю развития неевклидовой геометрии как один из первых ее зачинателей, видевший горизонты этой науки. Но, к сожалению, дальше общих соображений, высказанных в частных письмах к отдельным ученым, и то под большим запретом их обнародования, он не шел. Всякую публикацию в этом направлении Гаусс считал преждевременной, так как ученый мир, по его мнению, еще не подготовлен к восприятию новых идей, а их необычность может истолковываться отнюдь не в пользу тех смелых авторов, которые выскажут свою точку зрения до конца. Гаусс не только боялся публикации своих идей по новой геометрии, но страшился публично поддерживать тех, кто занимался этим вопросом и обращался к нему за помощью и советом. Во всех этих случаях Гаусс предпочитал хранить «гордое молчание».

Видимо, и у Гаусса дело не обошлось без попыток доказать V постулат. В 1792 г. Гаусс приходит к правильному выводу о невозможности доказать V постулат. По этому поводу в одном из своих писем Гаусс говорил: «Допущение, что сумма углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной, совершенно отличной от нашей (евклидовой) геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя (für mich selbst) совершенно удовлетворительно».

В 1817 г. в письме к Ольберсу Гаусс писал: «...Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере человеческим рассудком и для человеческого рассудка».

В 1819 г. в письме к Герлингу Гаусс писал уже о своих достижениях в области неевклидовой геометрии: «Я развил астральную геометрию так далеко, что могу решить все задачи, как только мне будет дана константа $=C$». Эта постоянная

С, оказывается, действительно существует, и ее позднее установил Лобачевский.

После смерти Гаусса в 60-х годах прошлого столетия было опубликовано эпистолярное наследство великого ученого, куда вошла и его переписка, посвященная неевклидовой геометрии. Гаусс дает высокую оценку Швейкарту, Тауринусу, Больяй и Лобачевскому, в особенности двум последним, за их смелую и серьезную работу в этом направлении. Насчет Лобачевского в письме к Шумахеру (1846 г.) Гаусс писал: «Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о которых не хочу здесь упоминать; таким образом я не нашел для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шел я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение («Геометрическое исследование по теории параллельных линий», написанное Лобачевским на немецком языке и изданное в Берлине в 1840 г.— **В. Ч.**), которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».

Однако, как увидим далее, и по отношению к Лобачевскому Гаусс остался «молчаливым сфинксом» и не осчастливил его положительным отзывом, который, несомненно, был бы большой поддержкой в неравной борьбе против рутины и косности в науке за признание новых идей геометрии.

Вообще Гаусс не торопился поддерживать новые идеи. Когда бывший ученик и друг его Христиан Герлинг, перерабатывая учебник математики Лоренца, встретил неясность и логическую несостоятельность в учении о параллельных линиях, то обратился к Гауссу за советом. В письме от 2 июля 1818 г. он пишет Гауссу: «Я считаю правильным, что излагать это, т. е. учение о параллельных линиях, нужно по методу Евклида, однако указывая его недостаточность. Но как это сделать, мне не ясно. Я считаю, что было бы лучше привести в качестве аксиомы предложение: «Через точку вне прямой можно провести к ней только одну параллельную ей прямую линию (аксиома Плейфера — **В. Ч.**); в примечании же нужно указать, что доказательства этого предложения до сих пор найти не удалось, поэтому необходимо принять это предложение за аксиому, пока кто-либо не найдет его доказательства *или не обнаружит его неправильность»*.

Гаусс в послании своего друга усмотрел «крамолу» и в ответном письме от 25 сентября 1818 г. предостерег его в следующих выражениях: «Я очень рад, что Вы имеете мужество высказаться так, как будто Вы признаете возможным, что наша теория параллельных линий, а следовательно, и наша геометрия, ложна. Но осы, гнездо которых Вы разрушаете, подымутся над Вашей головой».

Общественного мнения маститый ученый боялся, он не хотел будоражить «осиные гнезда», предпочитая жить, сообразуясь с обстоятельствами. В то время, когда Лобачевский опубликовал развернутое учение о неевклидовой геометрии, Гаусс все еще медлил и боялся перенести на бумагу свои мысли. В январе 1829 г. он писал Бесселю: «Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, что я не решусь на это всю свою жизнь, потому что я боюсь крика беотийцев [1], который

[1] Обитатели Беотийской области (Древняя Греция) отличались грубостью, невежеством и тупой непримиримостью.

поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком».

«Крика беотийцев» Гаусс избежал, но тем самым в какой-то мере явился тормозом в развитии неевклидовой геометрии.

А что было бы, если бы «король математиков» в свое время открыто, через печать, поддержал идеи, высказанные Лобачевским и его предшественниками? Что было бы, если сам Гаусс опубликовал бы свои исследования по неевклидовой геометрии? Трудно, конечно, судить. Но верно одно, что день рождения неевклидовой геометрии наступил бы не 23 февраля 1826 г., а гораздо раньше и, главное, признание неевклидовой геометрии произошло бы тоже раньше, во всяком случае, еще при жизни Гаусса, Лобачевского и Больяй.

Но, к сожалению, этого не случилось.

Если в истории развития неевклидовой геометрии Гаусс играл пассивную и сдерживающую роль, то другой точки зрения придерживался венгерский ученый Янош Больяй (1802—1860), сын профессора Фаркаша Больяй, близкого друга Гаусса. Отец Яноша учился вместе с Гауссом в Геттингенском университете, там они вместе увлекались теорией параллельных линий и под сводами «alma mater» поклялись в вечной, нерушимой дружбе, девизом которой было: «Не бросай друга в беде и приходи в нужную минуту ему на помощь». Письменная связь и информация о себе были непременным условием этой дружбы. Жизнь внесла свои коррективы во взаимоотношения Гаусса и Больяй-отца, когда они оба стали учеными: один — научной звездой первой величины, профессором того университета, в котором учился, другой — рядовым профессором коллегии небольшого венгерского городка Марош-Вашаргеля. Со временем узы их дружбы значительно ослабли. Если в первое время переписка между Больяй и Гауссом была оживленной, то позднее она пошла на спад и в конце концов стала вестись от случая к случаю, с перерывами, исчисляемыми годами.

Гаусс стал уравновешенным ученым, устами которого говорила сама мудрость, целиком и полностью посвятил себя служению математической науке и бывал очень недоволен, когда какие-нибудь причины мешали ему это делать. Он даже тяготился лекциями, которые ему приходилось читать студентам, так как они отвлекали его от основного, а именно: мешали заниматься научной работой.

Что же касается Фаркаша Больяй, то он попрежнему расточал свое время: интересовался различными сторонами жизни, много времени уделял студентам, составлению математического пособия для юношества и только иногда занимался научными исследованиями, которые были связаны главным образом с проблемой V постулата. Больяй-отец увлекался также поэзией и одно время писал драматические произведения. Порой он переключался на музыку, очень любил заниматься сельским хозяйством. Ясно, что математике он отводил не очень много времени и, естественно, на научном поприще далеко отстал от своего геттингенского друга.

Детство и юность Яноша Больяй прошли в доме отца. Образование он получил в коллегии, где отец был профессором математики. Математические способности молодой Янош унаследовал от отца, а непоседливость и экспансивный характер — от матери, отличавшейся повышенной нервозностью и вспыльчивостью.

Кроме математики, Янош любил еще музыку. К игре на скрипке он пристрастился с раннего детства и не расставался с этим инструментом в течение всей жизни, находя в его мелодиях, то грустных, то веселых, смотря по настроению, утешение, которое ему было так необходимо.

Когда Янош подрос и закончил коллегию, перед отцом встала проблема — куда определить сына на дальнейшую учебу. И тут Фаркаш Больяй вспомнил Гаусса. Он написал Гауссу письмо с просьбой, чтобы тот взял его сына в свою семью и определил для продолжения образования в Геттингенский университет, конечно, за денежное вознаграждение. На этот раз Гаусс впервые нарушил «святая святых» юношеской клятвы о нерушимой дружбе. Гаусс без всякого объяснения посчитал нужным отделаться молчанием. Пришлось определить молодого Яноша в военно-инженерную академию в Вене, тем более что отец чувствовал стесненность в деньгах, а там образование давалось за казенный счет. А как быть с математикой, которой увлекался Янош? Отец успокоил сына: в программах военно-инженерной академии математика занимает солидное место, кроме того, недостатки в математической подготовке можно восполнить самостоятельной работой, были бы интерес и увлеченность предметом. Итак, Янош стал слушателем военно-инженерной академии. И тут выяснилось, как он любил математику и как был равнодушен к офицерской карьере. Нет, не могла академия из прирожденного математика сделать офицера. Увлеченный математическими проблемами, он сторонился своих коллег, отвергал их дружбу и предпочитал уединение, снискав славу неуживчивого эгоиста с тяжелым и вздорным характером. Наступил 1823 год. Янош Больяй произведен в лейтенанты. Однако это не сделало из математика офицера. Он по-прежнему пренебрегал правилами и обычаями офицерской жизни. Это приводило к конфликтам с сослуживцами. Дело доходило до ссор, которые разрешались дуэлями. Был случай, когда в один день Больяй получил двенадцать вызовов. Янош принял вызовы с тем условием, чтобы после каждого поединка вместо передышки ему была предоставлена возможность поиграть на скрипке. Во всех схватках он победил.

До отца дошли известия, что сын неуживчив в коллективе и ведет опасную игру с жизнью. Но не это встревожило Больяй-отца. Его испугало то, что сын под влиянием давних разговоров с отцом стал заниматься проблемой V постулата, которая многим стоила жизни, а ему, профессору, принесла полное разочарование. Ему вспомнилось, как много он потратил сил для решения этой проклятой проблемы и как мало преуспел. И он решил оградить сына от этой напасти.

Фаркаш Больяй пишет письмо, в котором не только просит, но буквально молит сына не повторять ошибок отца, за которые приходится расплачиваться потерей здоровья и полной неудовлетворенностью. Вот содержание этого письма:

«Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий на этом пути; я знаю этот путь, я проделал его до конца, я пережил эту беспросветную ночь и всякий светоч, всякую радость моей жизни я в ней похоронил. Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; ты должен его страшиться, как чувственных увлечений; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя — оно погубит всю радость жизни. Эта беспросветная мгла может поглотить тысячу ньютоновых башен и никогда на земле не прояснится; никогда несчастный род человеческий не достигнет совершенной истины,— даже в геометрии. Да хранит тебя бог от этого увлечения, которое тобой овладело. Оно лишит тебя радости не только в геометрии, но и во всей жизни. Я был готов сделаться мучеником этой истины, чтобы только очистить геометрию от этого пятна, чтобы передать роду человеческому безукоризненную науку. Я проделал ужасную, гигантскую работу; я достиг много лучшего, нежели то, что было получено до меня; но совершенного удовлетворения не получил!» [1]

Но запретный плод сладок. Янош решает доказать отцу и Гауссу, на что он способен. Если они не могли осилить V постулат, то он решит эту проблему. Янош вспомнил слова Сенеки: «Почитай мужей, много дерзающих, даже если они терпят крушение». Дерзать, так дерзать! — и Больяй-сын с головой уходит в дебри теории параллельных линий.

В 1820 г. Янош писал отцу о своих попытках одолеть теорию параллельных линий не иначе, как доказав V постулат, чем привел отца в отчаяние, а через пять лет он сообщил отцу, что овладел началами новой геометрии и дело остается за оформлением работы и доведением до конца отдельных деталей. Янош знал, что отец готовит для печати двухтомное сочинение «Тентамен», и торопился оформить полученные результаты к этому сроку, чтобы опубликовать их в качестве приложения к первому тому этого сочинения.

Отец пошел навстречу сыну. Было решено, что исследование появится отдельным приложением к первому тому названного выше сочинения. Поскольку «Тентамен» (в переводе «Опыт») издавался на латинском языке, то и работа Яноша была написана тоже на латинском языке и получила название «Аппендикс», что в переводе означает «приложение».

---

[1] Янош Больяй. Аппендикс. М.— Л., стр. 18—19.

В 1832 г. первый том «Тентамена» был опубликован, а вместе с ним увидел свет и «Аппендикс».

Хотя отец Яноша Больяй всю жизнь занимался теорией параллельных линий, он так и не смог понять работы сына, кстати сказать, написанной им очень сжато, без единого лишнего слова и с минимумом пояснительных чертежей. Одни формулы и совсем немного текста.

Если критики с большей или меньшей похвалой отнеслись к «Тентамену», то «Аппендикс» они обошли молчанием. И это вполне понятно — просто они не поняли работу Яноша, новизна идей и стиль изложения которой им были недоступны. Тогда решили послать работу Гауссу. Он-то уж разберется в новых идеях, а его мнение дороже мнения всех ученых Европы, взятых вместе.

Больяй немедленно послал отдельный оттиск «Аппендикса» в Геттинген, но посылка, как на грех, затерялась в дороге. Пришлось подготовить новую. На этот раз посылалась вся книга вместе с приложением. В сопроводительном письме Фаркаш Больяй просил старого друга ознакомиться с его работой и особенно внимательно проанализировать работу сына. Гаусс получил книгу, но с ответом не спешил.

Только через шесть месяцев был получен долгожданный ответ. Можно представить себе, с каким волнением был вскрыт конверт с геттингенским штемпелем... Добрая половина письма была посвящена дружеским излияниям и разного рода новостям. И вот наконец долгожданное: «Теперь кое-что о работе твоего сына... Если я начну с того, что я эту работу не должен хвалить, то ты, конечно, на минуту поразишься: но иначе я не могу; хвалить ее, значило бы хвалить самого себя: все содержание сочинения, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими собственными достижениями, которые частично имеют уже давность в 35 лет. Я, действительно, этим в высшей степени поражен. Моим намерением было о моей собственной работе, которая, впрочем, до настоящего времени очень мало нанесена на бумагу, при жизни ничего не публиковать. Большинство людей не имеют правильных воззрений на те вопросы, о которых здесь идет речь; я нашел лишь мало людей, которые с особым интересом отнеслись к тому, что я им сообщил по этому предмету. Чтобы быть в состоянии это усвоить, нужно прежде всего весьма живо прочувствовать то, чего здесь собственно не хватает, а это большинству людей совершенно не ясно. Однако я имел намерение со временем изложить все это на бумаге в такой форме, чтобы эти идеи, по крайней мере, не погибли со мной. Таким образом, я чрезвычайно поражен тем, что эта работа с меня снимается, и я в высшей степени рад, что именно сын моего старого друга предупредил меня таким замечательным образом».

Растроганный отец радовался: его сын решил проблему, которая, быть может, посильна одному Гауссу. И кто об этом говорит — сам Гаусс. Но сын не разделял радости отца. Заподозрив Гаусса в недоброжелательности и зависти, Янош решил, что Гаусс хочет вырвать приоритет открытия из его рук. Если Гаусс действительно давно владеет открытием, так почему же он не публиковал его до сего времени? Боится, что его не поймут? Эти доводы показались Яношу совершенно неубедительными. Разве в этом назначение ученого? Его назначение — искать истину и всемерно помогать тем, кто к этому стремится. Нельзя науку оставлять в летаргии потому только, что среди ученых есть недалекие люди и невежды. Умонастроение Гаусса и ему подобных Янош назвал противоестественным и совершенно бессмысленным. По его мнению, дело чести — поддерживать каждую свежую мысль, от кого бы она ни исходила. Особенно нуждаются в этой поддержке молодые ученые, которые на стезях науки делают первые шаги. Надо радоваться успехам, а не гасить эту радость. Надо давать широкую дорогу смелым начинаниям, а не строить им преграды боязливым сожалением по поводу недостаточного образования людей.

Письмо Гаусса нарушило былые взаимоотношения Яноша с отцом. Отец пытался оправдать Гаусса, и Янош навсегда покинул родной дом.

Но судьба готовила Яношу новый удар. 17 октября 1848 г. он получил от отца трактат Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий», написанный, как указывалось выше, на немецком языке и изданный в 1840 г. в Берлине. Сначала Янош заподозрил, что под именем Лобачевского скрывается «геттингенский колосс» Гаусс, обработавший его теорию на свой лад и опубликовавший ее под вымышленным именем. Однако, читая трактат, он понял, как далеко вперед шагнул автор и как отличен путь Лобачевского от его собственного. Работа восхитила Яноша, он даже составил свои замечания, в которых дал подробный критический разбор необыкновенного сочинения, не скупясь на возгласы одобрения и восклицательные знаки.

Жизнь шла своим чередом. Отрешившись от всего света, Янош стал болезненно мнительным и целиком ушел в себя. Он весь как-то осунулся, постарел, тяжелые переживания и недуги подорвали и без того слабое здоровье. Янош Больяй

Янош Больяй

умер в 1860 г., пережив отца всего на три года. Умер в полной безвестности. Слава к нему не торопилась.

Через 36 лет на могиле Яноша Больяй в Марош-Вашаргеле появился памятник. В 1902 г. по инициативе Венгерской академии наук был отпразднован 100-летний юбилей со дня рождения Яноша Больяй и установлена международная премия его имени. По решению Совета Мира 17 января 1960 г. отмечалось 100-летие со дня смерти великого геометра. Теперь имя Яноша Больяй известно всему ученому миру. Его замечательный труд «Аппендикс» переведен почти на все европейские языки.[1]

До всеобщего признания своих идей Янош Больяй не дожил каких-нибудь шесть лет. Ему тогда было бы всего 64 года.

Чтобы сколько-нибудь судить о содержании работы Яноша Больяй, остановимся на следующих, весьма беглых замечаниях. Прежде всего — полное название «Аппендикса» такое: «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве, независимо от правильности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда не может быть решено), с добавлением геометрической квадратуры круга для случая ложности аксиомы».

Как показывает само название, исследование Яноша Больяй посвящено изложению основ «абсолютной геометрии», первые начала которой заложил еще Евклид. Но Янош Больяй пошел гораздо дальше Евклида и вторгся в такие широкие области, где V постулат уже не имеет места.

В частности, в своей работе он показал, что

---

[1] На русский язык «Аппендикс» переведен проф. В. Ф. Каганом.

вся сферическая геометрия и тригонометрия абсолютны, т. е. могут быть развиты без помощи V постулата; что в неевклидовой геометрии разрешима обычными средствами квадратура круга, т. е. всегда при помощи циркуля и линейки можно построить четырехугольник, равновеликий наперед заданному кругу. Все теоремы Яноша Больяй носят обобщенный характер, из них можно получить утверждения, годные для евклидовой геометрии, смотря по тому, имеет ли место V постулат.

Так, например, «абсолютная» теорема Пифагора у Яноша Больяй имеет вид

$$[Oa]^2[E(a)+E(b)E(c)]+[Ob]^2[E(b)+ \\ +E(c)E(a)]=[Oc]^2[E(c)+E(a)E(b)],$$

где a, b — катеты прямоугольного треугольника; c — гипотенуза; Oa, Ob, Oc — длины окружностей с соответствующими радиусами a, b, c; $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ — отношения длины дуги «линии равных расстояний» (эквидистанты) к ее проекции на ось, если расстояние эквидистанты до ее оси соответственно равняется a, b, c.

В евклидовой геометрии, где имеет место V постулат, эквидистанта — прямая линия, параллельная своей оси, и тогда

$$E(a)=E(b)=E(c)=1.$$

В неевклидовой геометрии, где V постулат не имеет места, $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ не равны единице.

Рассмотрим евклидову плоскость, в которой наряду с аксиомами абсолютной геометрии выполняется еще V постулат, тогда в этом частном случае написанная выше формула значительно упростится и примет обычный вид:

$$a^2+b^2=c^2,$$

так как

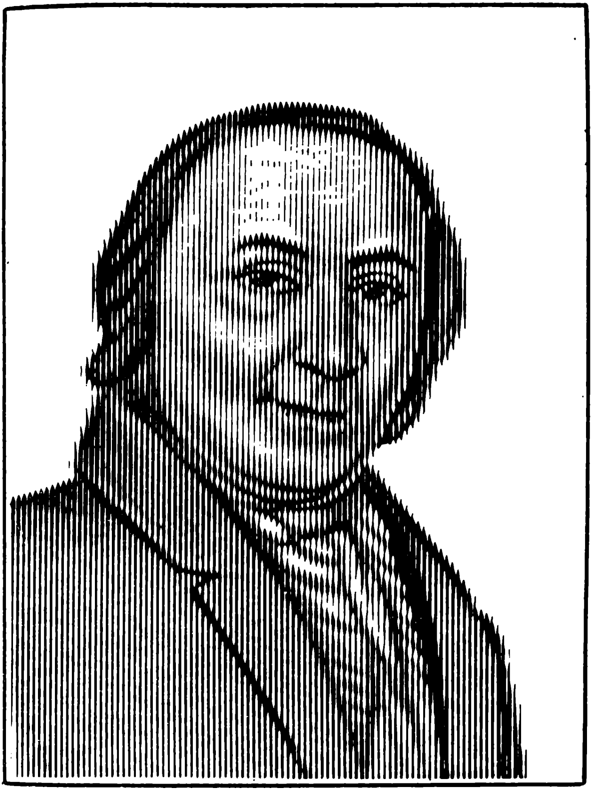
$$Oa=2\pi a,\ Ob=2\pi b,\ Oc=2\pi c,$$
$$E(a)=E(b)=E(c)=1.$$

Теперь перейдем к Лобачевскому. Лобачевский не только первым опубликовал основы неевклидовой геометрии, но и раздвинул ее границы по всем направлениям. Указав ее приложимость в анализе и механике, он также подчеркнул, какое значение она может иметь во всем естествознании.

К сожалению, мы почти ничего не знаем о детских годах Н. И. Лобачевского (1792—1856). Известно только, что он родился в Нижнем Новгороде (теперь г. Горький) в семье бедного чиновника-землемера. Рано лишился отца. Стараниями матери в 10 лет поступил учиться в Казанскую гимназию.

Еще в гимназии юный Лобачевский пристрастился к математике и по этому предмету выделялся среди своих сверстников. Этому, видимо, немало способствовало то обстоятельство, что математику в гимназии преподавал замечательный педагог Григорий Иванович Карташевский. Влюбленный в свой предмет, Карташевский вел преподавание на высоком уровне и свою горячую привязанность к науке умел передавать ученикам. На занятиях он рассказывал гимназистам о великих ученых-математиках, которые служение науке почитали целью своей жизни. Через пять лет, 14 февраля 1807 г., Лобачевский был зачислен в университет, организованный на базе гимназии. Там и прошли его юные годы. Учился он на казенный счет.

Итак, Лобачевский — студент университета. Его жажда знаний безгранична. Все он хочет знать, все ему кажется интересным. И только



М. Ф. Бартельс

лекции по математике его не привлекают: любимого Карташевского здесь нет, а новые преподаватели излагают материал, давно известный... Теперь он увлечен медициной. Вот чем нужно заниматься. Каждая лекция раскрывает столько нового и интересного. А в перспективе — врач: всегда с народом и для народа. Как это хорошо — жить и приносить пользу. И, вероятно, Лобачевский променял бы математику на медицину, но...

Молодой университет испытывал недостаток в высококвалифицированных кадрах, в особенности по точным наукам. Доморощенные «профессора» из числа преподавателей гимназии не могли удовлетворять повышенные запросы, так как сами в лучшем случае разбирались лишь в основах читаемых дисциплин. Это заставило министерство искать преподавателей за границей. В те времена знатоками точных наук слыли немецкие профессора. И вот оттуда молодой университет ждал помощи. Эта помощь пришла. В 1808 г. в университет приезжает профессор Мартин Федорович Бартельс — ученый с европейской известностью, старый друг Гаусса. Он познакомился с Гауссом в молодые годы, когда был помощником учителя в той школе, где учился Гаусс. При случае он расскажет студентам, как на свой скудный заработок покупал математические книги и по ним обучал десятилетнего Гаусса. «О да,— скажет Бартельс,— и моя капля труда вложена в воспитание гения».

И вот этот «первый учитель гения» будет вести математику в университете. На его первую лекцию собралось много студентов, в их числе был и Лобачевский. На кафедру поднялся человек не старше 40 лет, с открытым лицом и ясными лучистыми глазами. Он часто улыбался, и эта

И. А. Литтров

улыбка делала его добрым и щедрым, каким он и был на самом деле.

Профессор говорил о предмете математики. Словами своего друга Гаусса он сказал, что «математика — царица наук, а арифметика — царица математики». В этой лекции он показал безграничность сферы приложения математики и подчеркнул, что та отрасль знаний может почитаться подлинной наукой, в которой пребывает математика. Дальше он перешел к истории математики, еще раз вспомнил Гаусса, рассказал о проблемах математики и механики, связанных с именами Лапласа, Лагранжа и многих других ученых.

Лекция читалась на немецком языке. Лобачевский, в совершенстве владевший немецким языком, был просто зачарован. Былое увлечение математикой вспыхнуло с новой силой. Медицина оттеснена на задний план и вскоре совсем забыта. Любимым профессором стал Бартельс.

Вскоре профессор Бартельс заметил, что один из студентов на лекциях не сводит с него глаз, а в перерывах задает весьма глубокомысленные вопросы, на которые без предварительной подготовки было трудно ответить. Бартельс полюбопытствовал и спросил фамилию студента. Это имя — Николай Лобачевский — профессор Бартельс запомнил на всю жизнь.

Однажды Бартельс сообщил студентам труднейшую задачу теоретической механики о кругообращении, изложение которой по Лагранжу заняло у него 4 лекции. Каково же было удивление Бартельса и академика Вишневского, присутствовавшего в то время на занятии, когда к концу последней лекции студент Лобачевский передал профессору решение этой столь запутанной задачи всего на нескольких страничках, вырванных из тетради. Оказывается, пока профессор весьма длинно и туманно излагал задачу по Лагранжу, Лобачевский экспромтом дал совершенно новое и удивительно короткое решение. Уже здесь сказались черты будущего гения.

Еще до этого случая Бартельс приблизил к себе талантливого юношу и стал заниматься с ним отдельно на дому. С немецкой аккуратностью, два раза в неделю, в тиши домашнего кабинета, сплошь заставленного книгами, ведутся длинные беседы о судьбах еще нерешенных проблем. Здесь, у себя на квартире, Бартельс читает и комментирует своему любимому ученику теорию чисел Гаусса и «Небесную механику» Лапласа. Результаты этих бесед уже стали сказываться. В этом убедился не только Бартельс, но и высокопоставленный гость академик Вишневский. Вот совсем недавно профессор предложил Лобачевскому написать сочинение на тему «Теория эллиптического движения небесных тел». Результаты превзошли все ожидания Бартельса. В восторге он рапортовал высшему начальству, что студент Лобачевский «проявил такие признаки отличнейшего математического дарования, что, наверное, составит себе славное имя».

Вслед за Бартельсом в Казань приехали еще три профессора — астроном Литтров, физик Броннер и механик Реннер. И эти три профессора оказали благотворное влияние на Лобачевского. Литтров приохотил к занятиям по астрономии, а Броннер и Реннер увлекли физикой и теоретической механикой. Много позднее по этим предметам Лобачевский сделал собственный вклад в науку. Если Бартельс и Литтров нравились ему как ученые, с которых можно было брать пример бескорыстного служения науке, то Броннер интересовал его больше иными своими качествами.

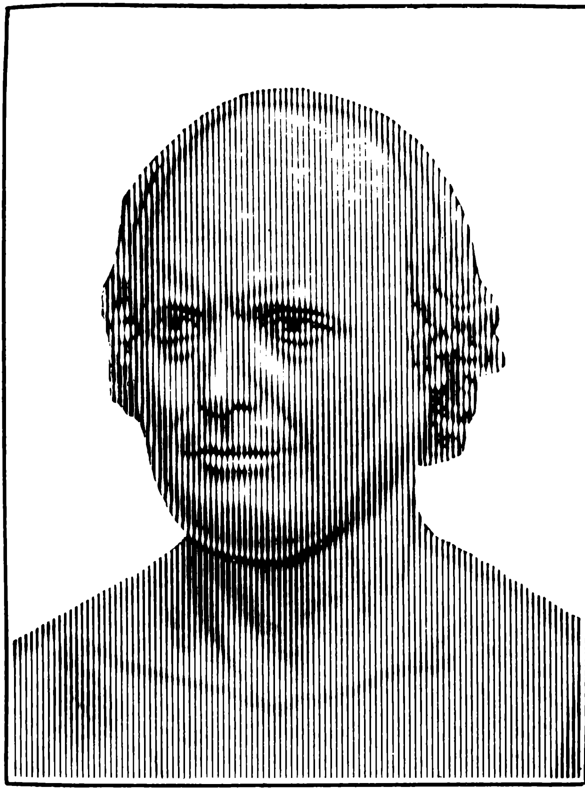
Броннер был энциклопедической личностью: не только физик, но и философ, увлекавшийся проповедью Руссо; не только поэт, но и политик, сочувствовавший идеям французской революции. В разговорах Броннера на свободные темы впечатлительный студент слышал решительную поступь мятежного века и дыхание его передовых идей...

Благодаря Реннеру, Лобачевский хорошо овладел теоретической механикой, которую впоследствии сам преподавал.

На редкость живой и подвижный студент Лобачевский органически не выносил затхлой атмосферы университетских порядков. Так, правила требовали, чтобы студент не посещал вечеров-маскарадов,— он их посещал; правила требовали, чтобы студент не чинил ничего предосудительного,— он делал и это. Однажды второкурсник Лобачевский в 11 часов вечера из слухового окна студенческого общежития запустил ракету собственного изготовления. Ракета с шипением и треском пронеслась над университетским кварталом, не на шутку перепугав суеверных жителей Казани. Люди выбежали на улицу, а дежурный пожарной каланчи с перепугу ударил в колокол. За эти проказы Лобачевский отделался карцером.

Таких «шуток» и «проказ» накопилось немало. Университетские блюстители порядка подсчитали, что за сравнительно небольшой период времени студент Лобачевский тридцать три раза нарушил правила поведения, за что записан в штрафном журнале (кондуите) с пребыванием в карцере или лишением отпуска.

Тут много постарался субинспектор по студенческим делам Кондырев, придирчивый и мелочный формалист, подхалим и беспринципный чело-



К. И. Броннер

век, возненавидевший Лобачевского за насмешливый нрав и острословие, чаще всего направленное в его адрес. Кондырев вел строгий счет всем прегрешениям ненавистного ему студента. Он даже состряпал рапорт на Лобачевского, где подробнейшим образом перечислял его «преступления», характеризуя его как неисправимого упрямца, нераскаявшегося ослушника, много думающего о самом себе.

Чтобы расправиться с неугодным студентом наверняка, Кондырев вскоре подает дополнительный материал, пытаясь придать проступкам Лобачевского политическую окраску. В этом рапорте он писал: «Лобачевский в значительной степени явил признаки «безбожия» и «имеет ложные понятия».

Эти материалы были направлены на рассмотрение совета университета для принятия самых крайних мер.

Расчет Кондырева был прост: подвести «дело» студента Лобачевского под статьи недавно вышедшего «высочайшего повеления», согласно которому студентов-разночинцев, уличенных в «развратном поведении и важных преступлениях», предписывалось исключать из университета и отсылать на военную службу, т. е. сдавать в рекруты. Кроме того, Кондырев втайне рассчитывал таким образом снискать славу верного стража царя-батюшки и расчистить себе дорогу к чинам и наградам.

Но Кондырев не учел одного. Если он, Кондырев, ненавидел Лобачевского, то это не значило, что члены совета тоже ненавидели его. Наоборот, некоторые профессора искренне любили Лобачевского и считали его талант украшением университета. На проделки Лобачевского они смотрели сквозь пальцы, считая, что это просто следствие

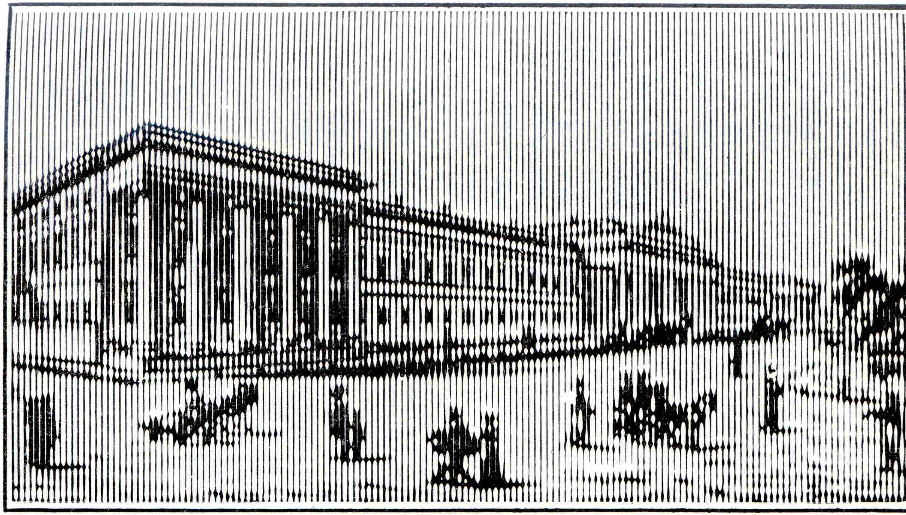
Н. И. Лобачевский

молодости и избытка сил. И когда на совете университета заговорили об исключении Лобачевского, профессора встали на защиту своего любимца. Особенно горячо отстаивали Лобачевского Бартельс, Литтров и Броннер. И отстояли. И не только отстояли, но и потребовали присвоения ему, студенту последнего курса, степени магистра за «чрезвычайные успехи и такие же дарования в физико-математических науках».

По решению совета Лобачевскому за проступки сделали внушение и потребовали от него чистосердечного раскаяния. Лобачевский остался заканчивать университет. По вопросу о присуждении Лобачевскому степени магистра согласились с тем, что неудобно студенту, которого только что хотели исключить, присваивать столь почетную степень. Эта степень была присуждена ему через четыре дня на внеочередном заседании.

Так, на двадцатом году жизни, минуя низшую степень кандидата, Лобачевский получил степень магистра математики и стал помощником профессора.

А Кондырев не сдавался. Он сообщил решение совета попечителю Казанского учебного округа с последней надеждой, что тот посмотрит на дело другими глазами. Но попечитель округа Степан Яковлевич Румовский согласился с решением совета и лишь слегка пожурил талантливого Лобачевского. Мог ли он поднять руку на Лобачевского, когда сам был влюблен в математику? Ему ли, лично знавшему Эйлера и написавшему перевод его книги «Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе...», предавать анафеме юношу, который в будущем может принести славу отечеству? Он ограничился следующей отпиской: «А студенту Николаю Лобачевскому, зани-



Казанский университет

мающему первое место по худому поведению, объявить мое сожаление о том, что он отличные свои способности помрачает несоответственным поведением и для того, чтобы он постарался переменить и исправить оное; в противном случае, если он советом моим не захочет воспользоваться и опять принесена будет жалоба на то, тогда я принужден буду довести о том до сведения господина министра просвещения».

Лобачевский оправдал надежды Бартельса. В 19 лет — он магистр, в 22 года — адъюнкт чистой математики. В 24 года он удостаивается ученого звания профессора и становится заведующим кафедрой математики Казанского университета.

С 1820 г. Лобачевский — декан физико-математического факультета, а с 1827 до 1846 г.— бессменный ректор Казанского университета. Кроме того, Лобачевский в течение ряда лет был заместителем попечителя Учебного округа. Длительное время он исполнял обязанности библиотекаря университета, члена, а затем и председателя университетского строительного комитета, по своим чертежам вел строительство учебного корпуса и подсобных учреждений, разъезжал по учебному округу с инспектированием школ и школьных заведений.

За время своей профессорской деятельности Лобачевский перечитал буквально все университетские курсы по всем разделам математики, физики, теоретической механики и астрономии. Одно время он заменял сразу нескольких профессоров. Те, кто слушали лекции профессора Лобачевского, были в восторге от них и часто потом копировали его в своей преподавательской деятельности. Лекции Лобачевского отличались ясным языком и четким изложением материала. Записи — последовательные, аккуратные и весьма красивые. Чертежи делались четко и понятно, никакой небрежности в них не допускалось. Лекции он читал по заранее написанным конспектам, но слепо им не следовал. Часто на доске приводил новые доказательства, придуманные тут же, на лекции.

Экзаменатором Лобачевский был весьма своеправным. Его интересовали не только знания студентов, но и то, как эти знания получены и усвоены. Он был весьма доволен, когда убеждался, что студент умеет добывать знания и проявляет известную смелость и дерзание. Таких студентов он обычно долго не держал и охотно ставил им высший балл. Лобачевского считали весьма строгим экзаменатором, неподкупно честным и справедливым. Он даже раз «провалил» собственного сына на экзамене по дифференциальному исчислению.

За ум, доброту, честность, справедливость любили студенты строгого профессора и взыскательного ректора. Он никогда не кричал на студентов, но после его спокойного разговора провинившийся студент выходил из кабинета сам не свой и давал себе зарок никогда больше не делать глупостей. Зато как были довольны те, которых добрым словом отмечал ректор.

Лобачевский был бесконечно добр к выходцам из простого народа. Посещая время от времени нотный магазин в Казани, он обратил внимание на мальчика-продавца, читавшего математические книги. Лобачевский упросил хозяина отпустить мальчика учиться и устроил его в гимназию, а потом и в университет. Из него впоследствии вышел крупный физик. Это был профессор Больцани.

И такие случаи проявления им душевной доброты не единичны.

Он внимательно присматривался к молодежи, выискивал одаренных и талантливых и с большой охотой устраивал их учиться.

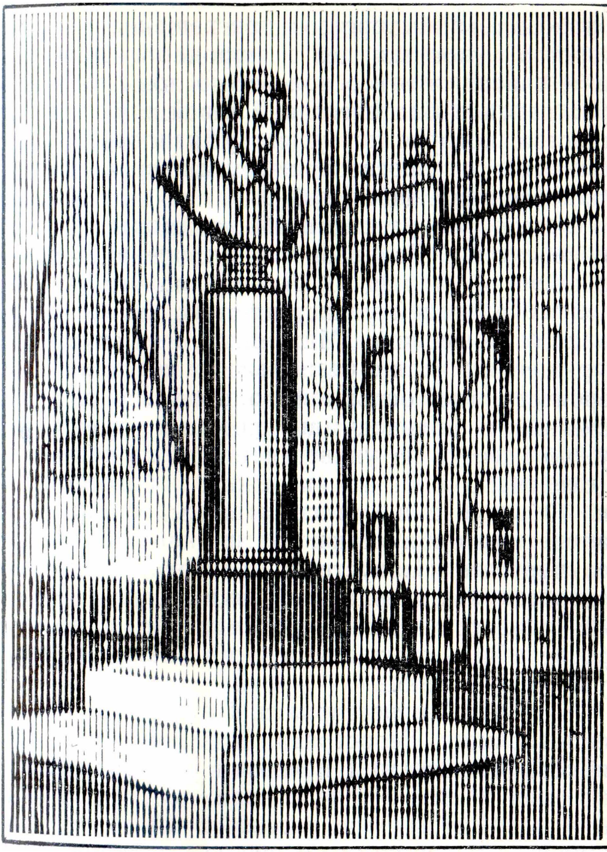
Большим авторитетом пользовался Лобачевский и среди профессоров. Недаром Лобачевский 19 лет был бессменным ректором. Он 6 раз переизбирался на эту должность. Подобного еще не было в истории университета.

«Если бы он,— говорит академик П. С. Александров,— не написал ни одной строчки самостоятельных научных исследований, мы должны были бы вспомнить о нем, как о замечательнейшем нашем университетском деятеле, как о человеке, который высокому званию ректора университета дал такую полноту содержания, которой ему не придавал, по-видимому, никто другой из лиц, носивших это звание до, во время или после Лобачевского».

Лобачевский сделал бы гораздо больше полезного, если бы не склоки и интриги. Вечные подсиживания и борьба за власть, зависть и злоба, подхалимство и стремление выслужиться перед начальством — вот та атмосфера, которая окружала молодого ученого. Все это осложнялось сложившейся политической обстановкой. Вся творческая деятельность Лобачевского проходила в крайне неблагоприятных условиях — в царствование Александра I, а с 1825 г. и Николая I — душителей прогресса.

Александр I, начавший свое царствование с либеральной политики, круто повернул к политике кнута. Разговоры о просвещении сменились издевательством не только над просвещением, но и над человеческим достоинством. Дух реакции проник во все учреждения, исключением не были и университеты.

Наступление на просвещение началось с того, что Александр I специальным манифестом пре-



Памятник Н. И. Лобачевскому в Казани

образовал министерство просвещения в «министерство духовных дел и народного просвещения», считая, что в основе всего должно лежать христианское благочестие. Главой нового министерства, которое по существу явилось душителем всякого просвещения, стал реакционер и мракобес князь Голицын.

Считая, что рассадниками крамолы являются университеты, Голицын послал члена Главного управления училищ М. Л. Магницкого[1] с ревизией в Казанский университет. В наспех составленном донесениии Магницкий, не скупясь на выражения, писал о безнадежном состоянии университета, где большинство профессоров — безбожники и вольнодумцы, которых давно уже нужно изгнать из университета, а студенты, как и следовало ожидать, невежды и богоотступники. Обследованию подвергались лаборатории, кабинеты и библиотека. Магницкий и здесь увидел мерзость и запустение, а в библиотеке — недозволенную литературу. Общий вывод: Казанский университет, как очаг «опасного и ложного просвещения», закрыть, а само здание подвергнуть разрушению.

Магницкий перестарался. Царь не поддержал новоявленного Герострата. На донесении Магницкого Александр I начертал резолюцию: «Зачем уничтожать, лучше исправить». И царь распорядился, чтобы «исправление» было поручено тому же Магницкому, назначив его попечителем Казанского учебного округа.

«Исправление» началось с того, что Магницкий ввел в Казанском университете курс богопо-

---

[1] Не надо смешивать с однофамильцем Л. Ф. Магницким (1669—1739), известным прогрессивным деятелем петровского времени, составителем знаменитой «Арифметики» (1703).

знания и христианского учения и потребовал, чтобы преподавание всех дисциплин велось на основе церковной морали. Так наступила черная полоса в жизни Казанского университета, известная под названием «эпохи Магницкого», длившаяся с 1819 по 1826 г.

В эту пору процветали клевета, наушничество и подхалимство. С благословения царя Магницкий распоясался. Он взял на учет всех неблагонадежных профессоров и повел курс на их замену. Одних он увольнял, другие уходили по «собственному желанию». Приказом Магницкого Лобачевский лишился кафедры чистой математики, ему вменялось в обязанность читать курсы физики и астрономии. Кафедра была передана профессору прикладной математики Никольскому. Это он в угоду Магницкому в программе по механике писал, что Адаму не нужно было учиться, подобно нам: свои знания он получил прямо от бога и был превосходным богословом, философом и математиком. Это он, Никольский, на лекциях елейным голосом поучал: «Гипотенуза в прямоугольном треугольнике есть символ сретения правды и мира, правосудия и любви через ходатая бога и человека, соединение горнего с дольним, земного с божественным... Как без единицы не может быть числа, так и мир не может быть без единого творца». И эта чистейшая белиберда выдавалась за науку. Большего надругания над математическими знаниями нельзя было и придумать.

Вполне понятно, почему профессор Никольский пришелся по душе Магницкому. Вскоре по приказу Магницкого Никольский стал ректором Казанского университета. Старый ректор профессор Солнцев, по специальности правовед, был смещен со своей должности. Магницкий учинил над Солнцевым настоящую судебную расправу, обвинив его в том, что его деятельность противна «духу святому господню и власти общественной». Магницкий требовал от суда, чтобы Солнцеву запретили всякую педагогическую деятельность.

И вот в этих условиях Лобачевскому приходилось жить, а самое страшное — работать и вести научные исследования...

«Исправлению» подвергались и студенты, которые в короткое время были превращены чуть ли не в монахов. Любое дело они должны были начинать с молитвы и являть образец христианского послушания. Была выработана система «исправления» ослушников. Не для наказания, а для «исправления» сажали виновника в карцер, называемый теперь «комнатой уединения», на хлеб и воду. Студенческую форму на время пребывания в карцере заменяли армяком и лаптями, и в этом одеянии ослушник должен был по инструкции, устремив свой взор к богу, предаваться искреннему раскаянию.

За Лобачевским Магницкий вел негласный надзор. Ему не нравился этот независимый профессор. Лобачевский не заискивал перед Магницким и не позорил науку, подобно Никольскому. И, наверное, плохо пришлось бы Лобачевскому, если бы внезапно не наступил конец карьеры Магницкого. Во-первых, с кончиною Александра I Магницкий лишился высокого покровительства, во-вторых, ревизия Казанского университета выявила неблаговидное лицо попечителя, присвоившего большую сумму государственных денег. Магницкий был отстранен от должности и выслан из Казани.

Здесь уместно заметить поистине замечательное совпадение. В тот самый год, когда закончилось семилетнее «диктаторство» Магницкого, Лобачевский подготовил письменное сообщение о неевклидовой геометрии. Этот 1826 г. вошел в историю как год рождения геометрии Лобачевского.

Рукопись была написана на французском языке. В сопроводительной записке в отделение физико-математических наук говорилось: «Препровождаю сочинение мое под названием «Краткое изложение принципов геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Желаю знать мнение о сем ученых моих сотоварищей, и если оно будет выгодно, то прошу покорнейше представленное мною сочинение принять в составление Ученых записок физико-математического отделения. Профессор Лобачевский».

Внизу имеется пометка от 11 февраля 1826 г.: «Поручить рассмотрение господам профессорам Симонову, Купферу и адъюнкту Брашману и мнение свое сообщить отделению».

К своему открытию Лобачевский пришел не сразу. Сначала он наиболее полно разработал абсолютную геометрию, что нашло выражение в рукописном учебном руководстве для студентов Казанского университета, написанном в 1823 г. под названием «Геометрия» и опубликованном после смерти автора (1909). Первая часть этой книги посвящается абсолютной геометрии на плоскости и в пространстве. Во второй дается собственно евклидова геометрия. Для полноты картины не хватало третьей части, а именно — той геометрии, которую можно развить на базе абсолютной геометрии, если к ней присоединить отрицание V постулата в той форме, в какой позднее это сделал Лобачевский («через точку, взятую вне прямой, на плоскости можно провести более одной прямой, не пересекающей данную»).

Следовательно, первая работа Лобачевского по геометрии явилась трамплином для прыжка в неевклидову геометрию. Этот прыжок он и сделал в упомянутом докладе, представленном факультету. Но тут на пути Лобачевского глухой стеной встали другие препятствия, требовавшие больших сил, воли и напряжения. Этой стеной оказались равнодушие, косность, рутина и невежество. Началась длительная, изнуряющая идеологическая война за признание новых идей. Лобачевскому предстояло буквально прошибить эту стену и доказать ученому миру, что новая геометрия не есть плод необузданной больной фантазии, что ее выводы имеют прямое отношение к реальному пространству и рано или поздно найдут свое признание и ценителей.

В печатном виде неевклидова геометрия появилась впервые в 1829 г. в журнале «Казанский вестник». Она называлась «О началах геометрии». Затем появились новые работы Лобачевского. Цель их — всесторонне осветить неевклидову геометрию, показать ее непротиворечивость и убедить ученый мир в ее правоте, а главное — изложить ее так, чтобы она была ясна, понятна и доступна широкому кругу читателей. Руководствуясь этими соображениями, Лобачевский в 1835 г. на страницах Казанского журнала публикует мемуар «Воображаемая геометрия» на французском языке, считавшемся тогда международным языком ученых; в 1836 г. — мемуар «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам». Далее, в том же журнале публикуются «Новые начала геометрии и с полной теорией параллельных». Здесь Лобачевский наиболее подробно развивает неевклидову геометрию и тем самым пытается склонить ученых на свою сторону. В 1840 г. Лобачевский издает в Берлине на немецком языке «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Наконец в 1885 г. за год до смерти он публикует работу «Пангеометрия», в которой еще и еще раз старается показать, что его геометрия есть логическое обобщение употребительной (евклидовой) геометрии, результаты которой получаются из более общей геометрии как простой предельный случай.

Идеи Лобачевского опередили свой век и были настолько необычны, что ученые того времени не могли разобраться в их сущности. Его первый доклад, представленный факультету еще в феврале 1826 г., не был напечатан: профессора Симонов, Купфер и адъюнкт Брашман, видимо, не поняли работу своего коллеги и, конечно, никакого отзыва о ней не дали. И Петербургская академия наук, куда в 1832 г. Лобачевский послал свой мемуар «О началах геометрии», тоже не разобралась в его идеях. Академик Остроградский, которому академия поручила высказать свои соображения по поводу работы Лобачевского, дал резко отрицательный отзыв. В своей рецензии он делает вывод, «что книга г-на ректора Лобачевского опорочена ошибкой, что она небрежно изложена, и что, следовательно, она не заслуживает внимания Академии».

Рецензия Остроградского послужила поводом для насмешек и глумления над Лобачевским и его геометрией. Нашлись писаки, которые за вымышленной подписью «С. С.» (полагают, что их было двое), пользуясь материалами рецензии Остроградского, в 1834 г. в журнале «Сын отечества» (№ 41) поместили фельетон, порочивший новое открытие и самого Лобачевского. Они определили геометрию Лобачевского как плод уродливой фантазии, согласно которой черное представляется белым, круглое — четырехугольным и т. п. Они объявили, что сочинение Лобачевского не имеет ни учености, ни здравого смысла, ни таланта. «Почему бы,— зубоскалили они,— вместо заглавия «О началах геометрии» не написать, например, «Сатира на геометрии», «Карикатура на геометрии» и что-нибудь подобное? Тогда бы всякий с первого взгляда видел, что это за книга, и автор избежал бы множества невыгодных для него толков и суждений».[1]

Удар был сильный и рассчитан на то, чтобы развенчать Лобачевского как ученого и подорвать его авторитет как университетского деятеля.

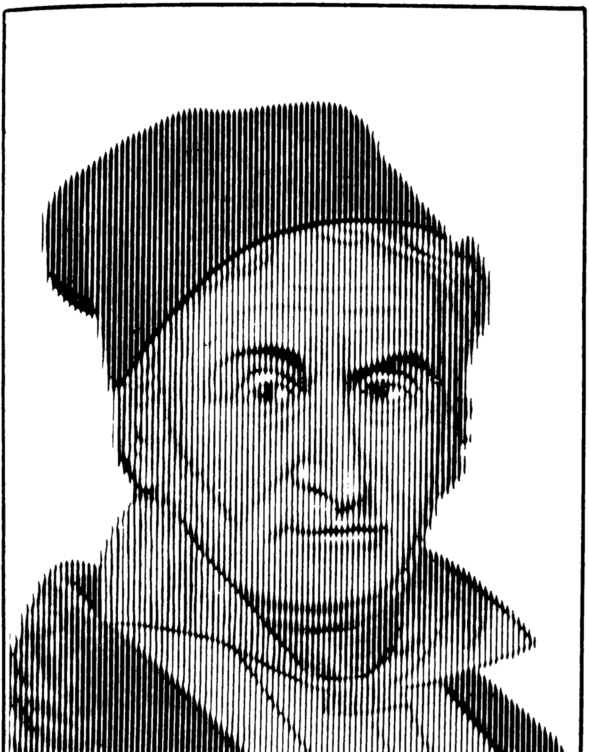
Приходится удивляться душевной силе и стойкости Лобачевского: с удвоенной энергией он продолжал отстаивать свои взгляды.

В 1835 г. ректор Лобачевский организовал издание «Ученых записок Казанского университета» и в первом же томе опубликовал опровержение, подготовленное для «Сына отечества», но там не напечатанное. В нем есть такие, исполненные горечи слова: «В № 14 журнала «Сын отечества» 1834 года напечатана критика, весьма оскорбительная для меня и, надеюсь, совершенно несправедливая... В ноябре месяце прошедшего года послал я к издателю ответ, который, однако, не знаю почему, до сих пор, в продолжение пяти месяцев, еще не напечатан».

Глухой к геометрии Лобачевского осталась и Германия. В лейпцигском реферативном журнале, правда, появилась небольшая анонимная ре-

---

[1] Связь между статьей в «Сыне отечества» и отзывом Остроградского видна хотя бы из того, что оба рецензента единодушно отмечают наличие двух интегралов, из которых «один находится легчайшим образом, другой совершенно неверен». В. Ф. Каган. Лобачевский. Изд. 2-е. М.— Л., 1948, стр. 252.



Карл Гаусс

цензия, в которой автор «с ученым видом знатока» бесцеремонно объявил геометрию Лобачевского несостоятельной и отказался давать ей подробный анализ.

Своеобразно откликнулся Гаусс. Однажды в Казань на имя Лобачевского пришло письмо из Геттингена. В письме сообщалось, что по предложению Гаусса профессор Лобачевский избран членом-корреспондентом Геттингенского ученого общества. Скупой на похвалу и очень осторожный, Гаусс косвенно давал понять, что идеи Лобачевского сродни его идеям и что он весьма ценит русского ученого. Но не это нужно было Лобачевскому, который боролся и верил, что звезда его впереди...

А неприятности следовали одна за другой: пришли в расстройство хозяйственные дела, отстранили от работы в связи с выходом на пенсию, неравная борьба за признание своих идей подточила здоровье. Лобачевский одряхлел и стал быстро терять зрение. За год до смерти, совершенно ослепший, он продиктовал сочинение «Пангеометрия», посвященное все той же теме. Это была его последняя работа.

Лобачевский скончался в возрасте 63 лет. Всю свою жизнь, не колеблясь и не сомневаясь, он отдал неевклидовой геометрии. Признание и слава пришли к Лобачевскому с опозданием.

Примерно через десять лет после смерти Гаусса почитатели его таланта издали переписку прославленного ученого с друзьями. В этих письмах были лестные отзывы и в адрес Лобачевского и его геометрии. Ученые заинтересовались геометрией Лобачевского. Этот интерес был подогрет еще работами Миндинга и Бельтрами. Последний нашел поверхность постоянной отрицательной кривизны (она известна была еще профессору Дерптского университета Миндингу), на которой выполняется планиметрия Лобачевского.

Отовсюду — от ученых и научных учреждений — посыпались в далекую и доселе малоизвестную Казань запросы любой ценой прислать труды Лобачевского. Пришлось поднять архивы. Залежалые оттиски работ быстро разошлись. А ученый мир все требовал и требовал новые. Пришлось Казанскому университету предпринять издание трудов Лобачевского. Идеи Лобачевского восторжествовали.

В 1895 г. была учреждена международная премия имени Лобачевского за выдающиеся открытия в области геометрии. Первыми лауретами этой премии были немецкие ученые — Давид Гильберт и Феликс Клейн, поднявшие идеи Лобачевского на еще более высокую ступень и обогатившие науку собственными весьма важными открытиями в области обоснования евклидовой и неевклидовой геометрий. А в 1896 г. на средства, собранные по международной подписке, на площади вблизи здания Казанского университета Лобачевскому воздвигли памятник.

Значение геометрии Лобачевского для современной науки трудно переоценить, недаром Лобачевского назвали «Коперником геометрии».

«Я беру на себя смелость утверждать,— сказал проф. Каган,— что было легче остановить Солнце, что легче было двинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расхождение». Геометрия Лобачевского расчистила путь для создания современного аксиоматического метода сначала в геометрии, а затем и в других математических дисциплинах (теоретическая арифметика, теория групп, теория вероятностей и т. д.).

Открытие Н. И. Лобачевского расширило геометрические представления. Наряду с евклидовым ученые стали рассматривать и неевклидовы пространства. Геометрия Лобачевского послужила примером для построения эллиптической геометрии Римана, недезарговой геометрии и т. д.

Геометрия Лобачевского составляет в настоящее время одну из основ современной математической культуры. Теперь стало азбучной истиной, что нельзя правильно и глубоко понять евклидову геометрию без сопоставления ее с геометрией Лобачевского.

Академик А. Н. Колмогоров пишет: «...Создание геометрии Лобачевского явилось поворотным пунктом, определившим в значительной мере весь стиль математического мышления XIX века, столь противоположный стилю мышления математиков предыдущего XVIII века».

Опираясь на результаты и идеи Римана, которые в свою очередь были дальнейшим развитием идей Лобачевского и следующим этапом развития геометрии, крупнейший физик современности Альберт Эйнштейн (1879—1955) построил свою знаменитую теорию относительности, в основе которой, как известно, лежит тесная взаимосвязь пространства, времени и материи.[1]

---

[1] Весьма популярное изложение специальной и общей теории относительности читатель найдет, например, в книге М. Гарднера «Теория относительности для миллионов». (М., 1965.)

Здесь уместно отметить, что теория относительности имеет своим объектом четырехмерное пространственно-временное многообразие Минковского. Специальная теория относительности — это в некотором смысле псевдоевклидова геометрия пространства Минковского (преобразование Лоренца — это формулы движения в этом пространстве), а общая теория относительности есть риманова геометрия общего

Истоки современной теоретической физики, ее промышленное применение тесно связаны с геометрией Лобачевского. По этому поводу наши крупнейшие ученые академики С. А. Христианович, М. А. Лаврентьев и А. С. Лебедев в газете «Правда» от 14 февраля 1956 г. писали: «Геометрия Лобачевского (названная автором воображаемой) послужила основой для открытий, приведших к теории относительности и методам расчета процессов внутри атомного ядра. Исследования строения атомного ядра с невероятной быстротой привели к созданию атомной промышленности».

Геометрия Лобачевского находит теперь непосредственное и важное применение в теории функций комплексного переменного, которая в свою очередь является математической основой современной гидродинамики, аэродинамики и теории упругости.

Еще Лобачевский установил, что его неевклидова геометрия имеет прямое отношение к изучению космических пространств. В рамках обычных земных масштабов во всех расчетах люди пользуются евклидовой геометрией как наиболее

вида. Только после работ Минковского было замечено, что в пространстве Минковского существуют такие (действительные) поверхности — они называются сферами мнимого радиуса, на которых имеет место геометрия Лобачевского. Что касается римановой геометрии общего вида, то она является геометрией n-мерного пространства (многообразия), в котором определенным образом задана метрика. Заданием метрики определяется и кривизна пространства. Кривизна, вообще говоря, есть переменная величина. Тремя простейшими частными случаями римановой геометрии общего вида являются евклидова (параболическая) геометрия, неевклидова геометрия Лобачевского (гиперболическая) и неевклидова геометрия Римана (эллиптическая). Эти три геометрии — это геометрии дву- и трехмерных римановых пространств постоянной кривизны.

простой и верно отражающей реальную действительность. Дело коренным образом меняется, если мы переходим от земных к сверхбольшим масштабам макромира или сверхмалым масштабам микромира. Считать, что и здесь господствует евклидова геометрия, было бы более чем рискованно. Достижения физики последних лет говорят о том, что физические пространства сверхбольших масштабов ведут себя как неевклидовы пространства. Для их изучения нужны неевклидовы геометрии. Одна из них — геометрия Лобачевского.

Характеристика Лобачевского будет неполной, если мы не отметим широкий диапазон его научных интересов. После себя он оставил работы по математическому анализу, алгебре, механике, физике и астрономии.

В математическом анализе он дал более общее определение понятия функции, чем то, которым пользовались ученые до него. Для некоторых бесконечных рядов предложил свой критерий сходимости. Открыл целый ряд новых определенных интегралов и предложил свой метод их вычисления.

В алгебре дал метод численного решения уравнений высших степеней (метод Лобачевского). В механике — исследование о движении твердых систем и предвосхитил некоторые вопросы теории относительности. В физике — работы о резонансе воздушного столба и природе света. В астрономии, основываясь на личных наблюдениях солнечного затмения, проведенных 24 июня 1842 г. в Пензе, высказал оригинальные соображения о строении солнечной короны.

Лобачевский выработал целую систему педагогических взглядов. Он является автором учебных руководств по геометрии и алгебре, наделавших в свое время много шума новизной идей, опередивших свой век.

Н. И. Лобачевский не только величайший геометр, он также выдающийся философ-материалист. Через все его работы проходит идея материальности мира и возможности познания его. Лобачевский выступал против произвольных допущений в математических науках и попыток вывести науку из одних лишь построений чистого разума. Он был противником кантианской трансцендентальной философии, рассматривавшей истины геометрии не как результат опыта человечества, а как врожденные (априорные) формы человеческого знания.

Беседа восьмая

ЧТО НАС ОЖИДАЕТ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Анализируя многовековые безуспешные попытки доказать V постулат, Лобачевский делает вывод, что V постулат нельзя доказать на основании остальных аксиом геометрии.

В качестве «основы основ» своей геометрии Лобачевский взял все аксиомы и теоремы абсолютной геометрии плюс аксиому, являющуюся отрицанием V постулата в формулировке Плейфера: «Через точку, взятую вне прямой на плоскости, в этой плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данную».

Аксиома Лобачевского формулируется так: *«Через точку, взятую вне прямой на плоскости, в этой плоскости можно провести более одной прямой, не пересекающей данную». Или: «Через точку, взятую вне прямой, в плоскости, опреде-*

ляемой ими, можно провести по крайней мере две, а следовательно, и бесчисленное множество, прямых, не пересекающих данную».

Система аксиом абсолютной геометрии, если к ней прибавить аксиому Лобачевского, и составляет аксиоматику геометрии Лобачевского. Еще раньше мы дали список основных теорем абсолютной геометрии, которые в одинаковой мере справедливы как для геометрии Евклида, так и для геометрии Лобачевского. В дальнейшем мы будем пользоваться ими для построения геометрии Лобачевского на плоскости (планиметрии), их доказательство известно читателю из курса геометрии средней школы. Доказать какую-нибудь теорему Лобачевского — это значит вывести ее как следствие в конечном счете из аксиоматики геометрии Лобачевского и теорем абсолютной геометрии.

Напомним, что плоскость и пространство, где вместе с аксиомами абсолютной геометрии выполняется аксиома Лобачевского, будут соответственно называться *плоскость Лобачевского* и *пространство Лобачевского.*

Введем понятие параллельных прямых по Лобачевскому. Для этой цели в плоскости Лобачевского возьмем прямую $a'a$ и вне ее произвольную точку M (рис. 8). Согласно аксиоме Лобачевского, через точку M проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающих данную. Возникает вопрос, какие из указанных прямых Лобачевский называет параллельными относительно данной. Для выяснения этого вопро-

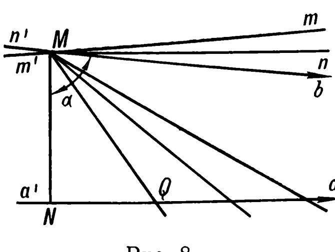


Рис. 8

са из точки M на прямую $a'a$ опустим перпендикуляр MN, где N — основание перпендикуляра. Далее, в точке M к прямой MN построим перпендикулярную прямую $m'm$, что возможно на основании аксиом абсолютной геометрии. Прямая $m'm$ не пересекает прямой $a'a$, так как она с прямой $a'a$ имеет общий перпендикуляр MN.

Рассмотрим теперь все прямые, заполняющие прямой угол mMN, т. е. все прямые, которые проходят через точку M и идут внутри угла mMN или являются его сторонами. Разобьем все эти прямые на два класса. К первому классу отнесем те прямые, которые пересекают $a'a$. К этому классу, в частности, относятся прямая MN и все прямые MQ, где Q — произвольная точка прямой $a'a$, взятая правее точки N. Ко второму классу относятся прямая $m'm$ и все прямые, которые существуют на основании аксиомы Лобачевского, согласно которой через точку M в рассматриваемой плоскости проходит бесчисленное множество прямых $n'n$, не пересекающих $a'a$. Легко сообразить (подумайте, как это доказать!), что в области прямого угла mMN все прямые первого класса расположены ниже прямых второго класса (подумайте и докажите!).

Если теперь прямую MQ, принадлежащую к первому классу, непрерывно вращать вокруг точки M (для нашего чертежа против хода часовой стрелки), то точка Q (точка пересечения этой прямой с прямой $a'a$) в процессе вращения прямой удаляется вправо по прямой $a'a$ все дальше и дальше, и, наконец, наступает такой момент, когда вращающаяся прямая MQ «оторвется» от прямой $a'a$ и перейдет от прямых первого класса в прямые второго класса. Вот эту граничную прямую, которая является первой непересекающей $a'a$ прямой (на чертеже она обозначена че-

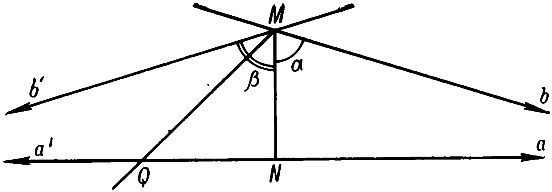


Рис. 9

рез Mb), Лобачевский и назвал прямой, параллельной относительно прямой $a'a$ в точке M в направлении $a'a$, т. е. в направлении слева направо. Коротко записывается так: $b \| a$ в точке M в направлении $a'a$.

Перпендикуляр MN будем называть стрелкой, а угол bMN — углом параллельности. Обозначим его через α, причем, в соответствии с аксиомой Лобачевского угол α всегда является острым углом.

Взяв теперь точку Q слева от N на прямой $a'a$ и заставив Q перемещаться по прямой $a'a$ в направлении aa', получим еще одну параллельную прямую Mb', которая, по определению, будет параллельной в смысле Лобачевского в точке M относительно прямой $a'a$ в направлении aa' (рис. 9.) Коротко это запишем так: $b' \| a'$ в точке M в направлении aa'. Здесь угол параллельности будет $b'MN$, обозначим его через β.

Теперь докажем, что угол β равен углу α, т. е. что углы параллельности, имеющие общую стрелку, равны.

Чтобы в этом убедиться, достаточно перегнуть плоскость чертежа вдоль прямой MN с таким расчетом, чтобы луч Na' пошел по лучу Na, тогда лучи Mb' и Mb расположатся по одну сторону от прямой MN (рис. 10).

Покажем, что луч Mb' совпадает с лучом Mb.

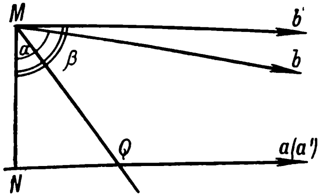


Рис. 10

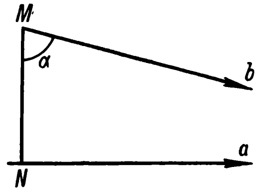


Рис. 11

Если бы Mb' не совпадал с Mb, секущая MQ в направлении $a'a$ имела бы два различных предельных положения, чего быть не может. Отсюда $\angle b'MN = \angle bMN$, т. е. $\alpha = \beta$, что и требовалось доказать.

Из рассмотренного выше получаются следующие результаты:

1. Через точку M, взятую вне прямой $a'a$, можно провести одну и только одну прямую b, параллельную относительно a в точке M в указанном направлении (направление параллелизма на рисунке отмечается стрелками; рис. 11).

2. Через точку M, взятую вне прямой $a'a$, можно всегда провести две различные прямые b и b', параллельные прямой $a'a$, одну в направлении $a'a$, а другую в направлении aa' (рис. 12).

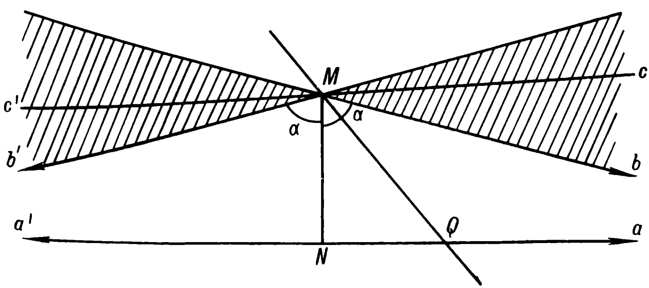


Рис. 12

3. Все прямые, проходящие через точку M, относительно прямой $a'a$ (рис. 12) можно разделить на три категории. К первой категории относятся прямые b и b', параллельные относительно прямой $a'a$, одна в одном направлении, другая — в другом. Их всего две. Ко второй категории относятся все прямые MQ, пересекающие прямую $a'a$ и заполняющие два вертикальных угла, образованных параллельными прямыми относительно прямой $a'a$, каждый из которых равен 2α. Таких прямых бесчисленное множество. Эти прямые относительно прямой $a'a$ называются сходящимися прямыми. К третьей категории отнесем все остальные прямые, заполняющие остальные два вертикальных угла (на рис. 12 эти углы отмечены косой штриховкой). Таких прямых бесчисленное множество. Эти прямые относительно прямой $a'a$ принято называть расходящимися или сверхпараллельными прямыми. Мы же в дальнейшем будем придерживаться первого термина. Значит, расходящимися относительно прямой $a'a$ называются прямые, которые находятся в одной плоскости с прямой $a'a$, не пересекают ее и не являются относительно нее параллельными.

Нужно заметить, что в плоскости Евклида, где через точку M проходит только одна прямая, параллельная относительно $a'a$, расходящихся прямых нет вовсе.

Две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, на плоскости Лобачевского не будут параллельными, как в евклидовой геометрии, а будут расходящимися (рис. 13).

Для дальнейшего изложения определение параллельных прямых в плоскости Лобачевского дадим в следующей форме: прямая b называется параллельной a в указанном направлении в точке M, принадлежащей b, если, во-первых, b и a

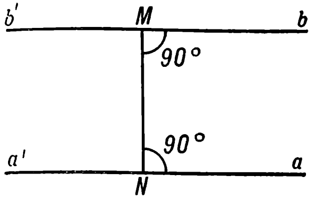


Рис. 13

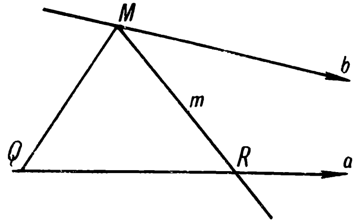


Рис. 14

лежат в одной плоскости; во-вторых, b не пересекает a; в-третьих, любая прямая m (рис. 14), проходящая через точку M и идущая внутри угла bMQ, где Q — любая точка прямой a, пересекает a в некоторой точке R.

Необходимо обратить внимание на то, что определение параллельности одной прямой относительно другой на плоскости Лобачевского дается локально, для одной точки в указанном направлении. Невольно возникает вопрос: если одна прямая параллельна другой в одной точке, будет ли она параллельна ей во всякой другой своей точке? В евклидовой плоскости такой вопрос не возникал: там это свойство вытекает из самого определения.

Для решения поставленного вопроса нам потребуется одна аксиома абсолютной геометрии (аксиома Паша): «Если прямая не проходит через вершины треугольника, лежит в его плоскости и пересекает одну из сторон треугольника, то она пересекает еще одну сторону этого треугольника (рис. 15).

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если прямая b параллельна прямой a в какой-нибудь одной своей точке M в одном направлении, то она параллельна ей в том же направлении и во всякой другой своей точке.*

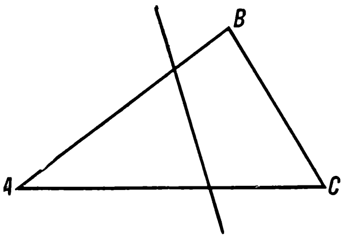


Рис. 15

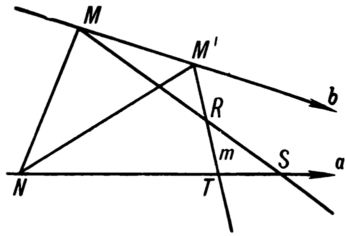


Рис. 16

Доказательство. Доказательство этой теоремы разобьем на две части. В первой докажем справедливость теоремы для всех точек прямой b, расположенных правее точки M, а во второй — для всех точек прямой b, расположенных левее точки M.

Начнем доказательство с первой части. Пусть M' — произвольная точка прямой b, расположенная правее M (рис. 16). Докажем, что $b \parallel a$ в точке M' в том же направлении. Для этого на прямой a возьмем произвольную точку N и соединим ее прямыми с точками M и M'. Возьмем теперь произвольную прямую m, проходящую через точку M' и идущую внутри угла $bM'N$. Докажем, что эта прямая m обязательно пересечет прямую a в некоторой точке T. Для этого на прямой m внутри полосы параллелизма возьмем произвольную точку R и соединим ее прямой с точкой M. Прямая MR пересечет a в какой-то точке S, так как $b \parallel a$ в точке M. Тогда, по аксиоме Паша, прямая m, пересекая сторону MS треугольника MNS, должна пересечь и еще одну сторону этого треугольника. Сторону MN она пересечь не может, значит, она пересечет сторону NS в точке T. Следовательно, m пересекает a.

Итак, b и a лежат в одной плоскости, b и a не пересекаются и, как только что доказано, m пересекает a. Следовательно, $b \parallel a$ в любой точке M', взятой справа от M. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь вторую часть. Пусть M'' — любая точка b, взятая левее M (рис. 17). Соединим прямолинейным отрезком точку N с точкой M''. Далее возьмем произвольную прямую n, проходящую через точку M'' и идущую внутри угла $bM''N$. Докажем, что прямая n пересекает прямую a. Для этого на прямой n выше M'' возьмем произвольную точку P и соединим ее прямой с точкой M. Прямая PM пересекает a в некоторой точке L, так как $b \parallel a$ в точке M в указанном направлении. По теореме абсолютной геометрии прямая n пересечет отрезок MN. Теперь к прямой n и треугольнику MNL применим аксиому Паша, согласно которой прямая n пересечет сторону NL, а следовательно, и прямую a, что и требовалось доказать.

Согласно доказанной теореме, мы будем говорить просто «прямая b параллельна другой прямой a в указанном направлении».

В евклидовой плоскости известно, что если прямая a параллельна прямой b, то и обратно — прямая b параллельна a. Это так называемое свойство взаимности в евклидовой плоскости вытекает из определения параллельных прямых и особого доказательства не требует. Будет ли свойство взаимности выполняться в плоскости Лобачевского? Оказывается, будет.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если прямая b параллельна прямой a в каком-нибудь направлении, то и обратно — прямая a параллельна b в этом же направлении.*

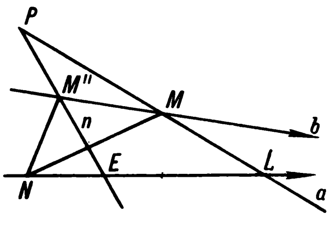


Рис. 17

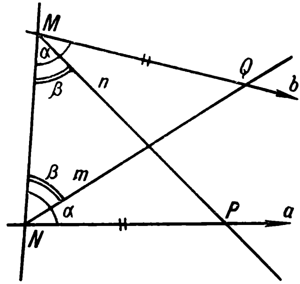


Рис. 18

Доказательство. На прямой b (рис. 18) возьмем произвольную точку M и через нее проведем относительно прямых a и b секущую MN равного наклона, т. е. такую секущую, которая образует с прямыми a и b равные внутренние односторонние углы aNM и bMN.[1] Обозначим эти углы через α. Возьмем теперь произвольную прямую m, проходящую через точку N и идущую внутри угла aNM. Докажем, что m пересекает b. Обозначим угол MNm через β. По построению $\beta < \alpha$. Теперь построим угол NMn, равный углу β. Ясно, что n, проходя через M, расположится ниже b и, следовательно, поскольку $b \parallel a$, пересечет a в некоторой точке P. Далее, на прямой b от точки M вправо отложим отрезок MQ, равный отрезку NP. Соединив точку N с точкой Q прямой, получим два треугольника MNP и NMQ, которые равны между собой, т. е. $\triangle MNP = \triangle NMQ$. Действительно, они имеют по две равных стороны (MN — общая, а $NP = MQ$ по построению) и по равному углу α между ними. Но известно, что в равных треугольниках против рав-

[1] Существование секущей равного наклона доказывается в абсолютной геометрии. Этот факт берется нами без доказательства.

ных сторон лежат и равные углы, следовательно, $\angle MNQ = \angle NMP = \beta$. Откуда прямая m совпадает с прямой NQ и, следовательно, пересечет b в точке Q.

Итак, a и b лежат в одной плоскости; a не пересекает b; всякая прямая m, проходящая через N и идущая внутри угла aNM, пересекает b, следовательно, $a \parallel b$ в точке N, а значит и в любой своей точке. Что и требовалось доказать.

В евклидовой плоскости выполняется свойство транзитивности параллельных прямых: если $a \parallel b$, а $b \parallel c$, то $a \parallel c$. Будет ли это свойство выполняться в плоскости Лобачевского?

Теорема 3. *Если три прямых a, b и c лежат в одной плоскости и если a параллельна b, а b параллельна c, то a параллельна c, причем, направление параллелизма берется в одну сторону.*

Доказательство. Рассмотрим два случая. Первый, когда a и c находятся по одну сторону от b, и второй,— когда a и c находятся по разные стороны от b.

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть a и c находятся по одну сторону от b (рис. 19). Здесь возможны два варианта: c лежит между a и b (этот вариант и дан на рис. 19) и a лежит между c и b. Оба эти варианта с логической стороны равноценны. Доказав один, получим доказательство второго. Для определенности положим, что a и c расположены по одну сторону от b, причем, c располагается между a и b (направление параллельности указано стрелками).

Возьмем на прямых a и b соответственно по произвольной точке A и B. Поскольку прямые a и b находятся по разные стороны от прямой c, то точки A и B также располагаются по разные стороны от прямой c, и прямолинейный отрезок AB, соединяющий точки A и B, пересечет

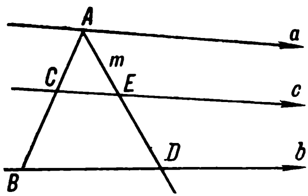


Рис. 19

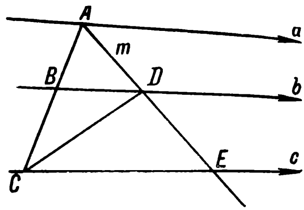


Рис. 20

прямую c в некоторой точке C. Чтобы доказать, что a параллельна c, достаточно показать, что a параллельна c в точке A. А для этого надо установить, что, во-первых, a и c не пересекаются; во-вторых, всякая прямая m, проходящая через точку A и идущая внутри угла aAC, пересекает c в некоторой точке E.

Действительно, a не может пересекать c. Если бы a пересекала c в некоторой точке, тогда получилось бы, что через эту точку относительно прямой b в указанном направлении проходило бы две параллельных прямых a и c (так как по условию и теореме взаимности $a \parallel b$ и $c \parallel b$), а этого быть не может.

Рассмотрим теперь произвольную прямую m, проходящую через точку A и идущую внутри угла aAB. Эта прямая, поскольку $a \parallel b$, обязательно пересечет прямую b в некоторой точке D, а следовательно, и прямую c в некоторой точке E, так как точки A и D лежат по разные стороны от прямой c.

Значит, $a \parallel c$, и теорема в первом случае доказана.

Рассмотрим теперь второй случай. Прямые a и c находятся по разные стороны от прямой $в$ (рис. 20).

Возьмем на прямых a и c соответственно по произвольной точке A и C и соединим их прямолинейным отрезком AC. Так как a и c находятся по разные стороны от b, то и точки A и C тоже будут находиться по разные стороны прямой b, а значит, прямолинейный отрезок AC обязательно пересечет прямую b в некоторой точке B.

Докажем, что $a \| c$ в точке A. Для этого надо доказать, что 1) a не пересекает c; 2) всякая прямая m, проходящая через точку A и идущая внутри угла aAC, пересекает прямую c в некоторой точке E.

Если бы a пересекала c в некоторой точке, то по аксиоме Паша и ее следствию, прямая b, пересекая AC, обязательно пересекала бы, по крайней мере, одну из прямых a или c, чего быть не может, так как по условию $a \| b$ и $b \| c$.

Далее, прямая m обязательно пересечет c в некоторой точке E. В самом деле, поскольку $a \| b$, то m пересечет b в некоторой точке D. Соединим прямолинейным отрезком полученную точку D с точкой C. Так как $b \| c$, то m, проходящая через точку D и идущая внутри угла bDC, обязательно пересечет прямую c в некоторой точке E. В итоге m пересекает c. Отсюда и во втором случае $a \| c$, что и требовалось доказать.

В евклидовой плоскости расстояние между параллельными прямыми есть величина постоянная. Это свойство в плоскости Лобачевского не сохраняется. Там указанное расстояние не является величиной постоянной. В плоскости Лобачевского имеет место такая теорема.

Теорема 4. *Две параллельные прямые асимптотически сближаются в сторону их параллельности, т. е. расстояние точки, лежащей на одной из параллельных прямых, до другой прямой неограниченно убывает, если указанную точку пере-*

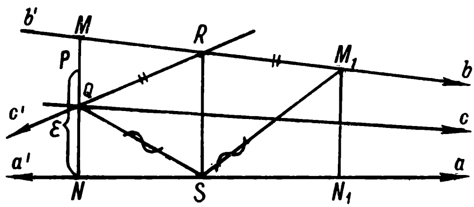


Рис. 21

мещать по первой прямой в сторону параллельности, и неограниченно возрастает в противоположном направлении.

Доказательство. Даны две параллельные прямые $a'a$ и $b'b$ (направление параллельности указано стрелками, рис. 21). Докажем, что в направлении параллельности эти прямые асимптотически сближаюся, т. е. длина стрелки MN когда M перемещается в сторону параллельности, стремится к нулю. Для этого достаточно доказать, что для любого как угодно малого отрезка ε найдется такая стрелка $M_1 N_1$ правее MN, для которой выполняется неравенство

$$M_1N_1 < \varepsilon.$$

Возьмем на прямой $b'b$ произвольную точку M и опустим из нее на прямую $a'a$ перпендикуляр MN, где N — основание перпендикуляра. Тогда MN будет стрелкой для параллельных прямых $a'a$ и $b'b$. На этой стрелке отложим ε — произвольно малый отрезок, полагая, что $MN > \varepsilon$ (в противном случае теорема в первой своей части выполнялась бы). Пусть этим отрезком будет отрезок PN, т. е. $PN = \varepsilon$. Ясно, что P располагается между M и N. Теперь между точками P и N на отрезке PN возьмем произвольную точку Q и через эту точку относительно прямой $a'a$ проведем две различные параллельные прямые c' и c, одну в направлении aa', другую в направлении $a'a$. На основании свойства транзитивности все три прямые a, b, и c будут параллельны между собой. Далее, прямая c' обязательно пересечет прямую $b'b$ в некоторой точке R, так как $c \parallel b$ в точке Q. Теперь на прямой $b'b$ от точки R вправо отложим отрезок RM_1, равный отрезку QR, и из точек R и M_1 на прямую $a'a$ опустим перпендикуляры RS и M_1N_1. Соединим точку S прямолинейными отрезками с точками Q и M_1. Тогда $\triangle QRS = \triangle M_1RS$, так как эти треугольники имеют по две равные стороны ($QR = RM_1$ по построению, RS — общая) и по равному углу, заключенному между этими сторонами ($\angle QRS = \angle M_1RS$, как углы параллельности, имеющие общую стрелку). Известно, что в равных треугольниках против равных углов лежат и равные стороны, поэтому $QS = SM_1$. А тогда прямоугольные треугольники QNS и $M_1N_1S_1$ тоже будут равны между собой, так как они имеют по равной гипотенузе ($QS = SM_1$, как только что доказано) и по равному острому углу ($\angle NSQ = \angle N_1SM_1$ как углы, дополняющие равные углы QSR и RSM_1 до прямых углов). Отсюда $M_1N_1 = QN$ как катеты двух равных прямоугольных треугольников, лежащие против равных углов. Но $QN < \varepsilon$, следовательно, $M_1N_1 < \varepsilon$ и асимптотическое сближение параллельных прямых $a'a$ и $b'b$ в сторону параллельности доказано.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим полупрямые b' и c', выходящие из их общей точки R. Эти полупрямые безгранично расходятся одна относительно другой, тогда прямые b' и a' будут тоже расходиться. Следовательно, $b'b$ и $a'a$ в сторону, противоположную параллельности, безгранично расходятся. Теорема доказана.

В евклидовой плоскости две параллельные прямые могут иметь сколько угодно общих перпендикуляров. В плоскости Лобачевского две прямые не могут иметь больше одного общего перпендикуляра. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5. *В плоскости Лобачевского две прямые не могут иметь больше одного перпендикуляра, причем сходящиеся и параллельные прямые не имеют общего перпендикуляра, а расходящиеся прямые могут иметь, и притом единственный.*[1]

Доказательство. Возьмем произвольную прямую $a'a$ и на ней произвольную точку M (рис. 22). В точке M к прямой $a'a$ восставим перпендикуляр MN. Теперь в точке N к прямой MN восставим перпендикуляр Nb. Продолжив Nb влево, получим прямую $b'b$. Прямые $a'a$ и $b'b$ имеют по построению общий перпендикуляр MN. Другого общего перпендикуляра M_1N_1, отличного от MN, прямые $a'a$ и $b'b$ иметь не могут, так как в противном случае получился бы четырехугольник MNN_1M_1, сумма внутренних углов которого равнялась бы четырем прямым, а это есть утверждение, эквивалентное V постулату и, следовательно, на плоскости Лобачевского никакого другого общего перпендикуляра M_1N_1, отличного от MN, прямые $a'a$ и $b'b$ иметь не могут.

Теперь ответим на вопрос, какие прямые могут иметь общий перпендикуляр. На плоскости Лобачевского это могут быть только расходящиеся прямые. В самом деле, сходящимися эти прямые быть не могут, так как тогда существовал бы треугольник с двумя прямыми углами, что противо-

[1] Можно доказать, что любые две расходящиеся прямые обязательно имеют общий перпендикуляр. Это будет доказано несколько позднее, когда будет рассматриваться взаимное расположение двух расходящихся прямых.

речит абсолютной геометрии. Параллельными они также быть не могут. В противном случае общий перпендикуляр был бы стрелкой, и угол параллельности был бы прямой, чего быть не может, так как в геометрии Лобачевского угол параллельности для стрелки, отличной от нуля, есть всегда угол острый. Остается сделать только один вывод, что прямые, имеющие общий перпендикуляр, есть расходящиеся прямые.

Итак, общий перпендикуляр и притом единственный могут иметь только расходящиеся прямые. Теорема доказана.

В евклидовой геометрии, как известно, устанавливаются достаточные признаки параллельности прямых. Так, согласно одному из них, две прямые обязательно будут параллельными, если они, будучи пересечены третьей, образуют с ней равные накрестлежащие углы. В плоскости Лобачевского эти признаки не годятся. Оказывается, то, что в плоскости Евклида является достаточным признаком параллельности прямых, в плоскости Лобачевского будет достаточным признаком расходимости прямых. Это можно усмотреть из следующей теоремы.

Теорема 6. *Для того чтобы две прямые были расходящимися, необходимо и достаточно, чтобы*

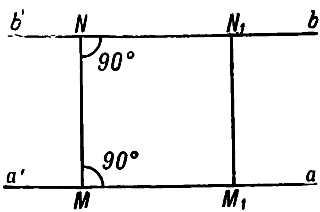


Рис. 22

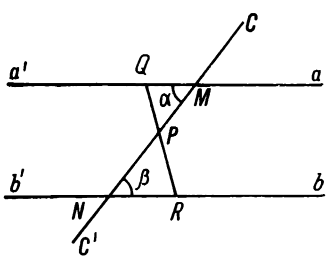


Рис. 23

существовала хотя бы одна прямая, которая, пересекая данные две, образовывала бы с ними равные накрестлежащие углы.

Доказательство. Пусть даны прямые $a'a$ и $b'b$ и пусть эти прямые пересечены третьей прямой $c'c$; накрестлежащие углы α и β, образованные этой прямой с данными, равны, т. е. $\alpha=\beta$ (рис. 23).

Докажем, что прямые $a'a$ и $b'b$ обязательно будут расходящимися, т. е. они не пересекаются и не являются параллельными.

Разделим отрезок MN прямой $c'c$, заключенный между прямыми $a'a$ и $b'b$, пополам точкой P и из этой точки на прямые $a'a$ и $b'b$ опустим перпендикуляры PQ и PR. Полученные прямоугольные треугольники PQM и PRN будут равны, т. е. $\triangle PQM = \triangle PRN$, так как они имеют по равной гипотенузе ($PM = PN$ по построению) и по равному острому углу (по условию $\alpha = \beta$). Отсюда получаем, что $\angle QPM = \angle RPN$. По законам абсолютной геометрии последние два угла будут вертикальными. Следовательно, QPR есть прямая линия. Выходит, что прямые $a'a$ и $b'b$ имеют общий перпендикуляр QR, а общий перпендикуляр могут иметь только расходящиеся прямые. Следовательно, данные две прямые $a'a$ и $b'b$ являются расходящимися, что и требовалось доказать.

Теперь не представляет большого труда доказать, что каждое из следующих условий:

1) равенство внешних накрестлежащих углов;

2) равенство соответственных углов;

3) равенство $2d$ суммы внутренних односторонних углов;

4) равенство $2d$ суммы внешних односторонних углов является также достаточным признаком расходимости двух прямых (пусть читатель это сделает самостоятельно).

В частности, на плоскости Лобачевского выполняется теорема 7.

Теорема 7. *Если две параллельные прямые пересечь третьей, то в сторону параллельности от этой прямой сумма внутренних односторонних углов всегда меньше двух прямых.*

Доказательство. Пусть $a'a \parallel b'b$, а $c'c$ пересекает их в точках M и N и пусть $\angle aMN = \alpha$ и $\angle bNM = \beta$ (рис. 24). Докажем, что $\alpha + \beta < 2d$.

Доказательство ведется методом от противного. Предположим, что $\alpha+\beta$ не меньше $2d$, тогда одно из двух: или $\alpha+\beta = 2d$, или $\alpha+\beta > 2d$. Покажем, что и то и другое приводит к логическому противоречию.

Если $\alpha + \beta = 2d$, то на основании предыдущего a и b расходящиеся прямые, тогда как по условию $a \parallel b$ (противоречие!). Пусть теперь $\alpha + \beta > 2d$. Проведем через точку N прямую $d'd$ так, чтобы она с прямой $c'c$ образовала угол $cNd = \gamma$, причем, $\alpha + \gamma = 2d$. Из соотношений $\alpha + \beta > 2d$ и $\alpha + \gamma = 2d$ вытекает, что $\beta > \gamma$, т. е. угол γ составляет часть угла β и, следовательно, полупрямая Nd пойдет выше полупрямой b. Выходит, что $d'd$ и $a'a$ — расходящиеся прямые (для них внутренние односторонние углы α и γ в сумме дают $2d$). С другой стороны, $b \parallel a$ в точке N (вытекает из условия $a \parallel b$), следовательно, полупрямая d пересекает a, т. е. $d'd$ и $a'a$ — сходящиеся прямые. Итак, прямые $d'd$ и $a'a$ одновременно расходящиеся и сходящиеся (логическое противоречие). Следовательно, $\alpha + \beta$ не больше $2d$. Остается верным одно, что $\alpha + \beta < 2d$, что и требовалось доказать.

В евклидовой плоскости угол параллельности есть всегда величина постоянная, равная прямому углу. В плоскости Лобачевского угол параллель-

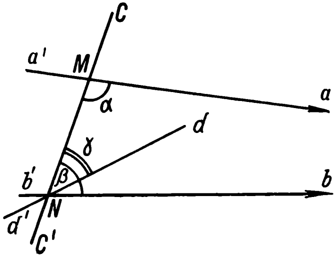


Рис. 24

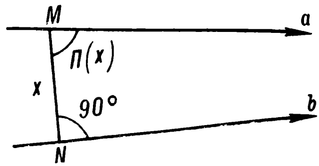


Рис. 25

ности есть функция стрелки, причем, как это исследовал еще сам Лобачевский, эта функция монотонно убывает, а именно: с возрастанием стрелки угол параллельности убывает и, обратно, с убыванием стрелки угол параллельности возрастает. Если величину стрелки обозначим через x (рис. 25), то угол параллельности будет некоторой функцией $\pi(x)$.

Теорема 8. *Угол параллельности* $\pi(x)$ есть *монотонно убывающая функция стрелки x, т. е. с возрастанием стрелки x угол параллельности $\pi(x)$ убывает и, обратно, с убыванием стрелки угол параллельности возрастает; причем каждому значению стрелки x соответствует вполне определенное значение угла параллельности $\pi(x)$ и областью существования этой функции является интервал от 0 до $+\infty$, т. е. $0<x<+\infty$.*

Доказательство. Доказательство теоремы разобьем на две части. В первой части докажем, что с увеличением стрелки угол параллельности строго убывает, а с уменьшением стрелки угол параллельности строго возрастает. Во второй части убедимся, что каждому значению стрелки в интервале от 0 до $+\infty$ соответствует вполне определенное значение угла параллельности, заключенное в интервале от 0 до $\pi/2$.

Начнем с доказательства первой части. Возьмем произвольную прямую $a'a$ и на ней произвольную точку M, в которой относительно этой прямой восставим перпендикуляр (рис. 26). На этом перпендикуляре вверх от точки M отложим два отрезка $MM_1 = x_1$ и $MM_2 = x_2$. Через точки M_1 и M_2 проведем соответственно прямые a'_1a_1 и a'_2a_2, параллельные $a'a$ в указанном направлении. Будем считать $x_1 < x_2$. Теперь остается показать, что $\pi(x_1) > \pi(x_2)$, т. е. с ростом стрелки угол параллельности уменьшается. Доказательство ведется методом от противного.

Предположим, что $\Pi(x_1) \leqslant \Pi(x_2)$, тогда обязательно придем к логическому противоречию. Пусть сначала $\Pi(x_1) = \Pi(x_2)$, тогда прямые a'_1a_1 и a'_2a_2 расходящиеся. С другой стороны, $a'_1a_1 \parallel a'a$ и $a'_2a_2 \parallel a'a$, следовательно, $a'_1a_1 \parallel a'_2a_2$ (направление параллельности берется в одну сторону). Получили явное логическое противоречие. Откуда $\Pi(x_1) \neq \neq \Pi(x_2)$.

Положим теперь, что $\Pi(x_1) < \Pi(x_2)$ (рис. 27).

Построим угол MM_2b с вершиной в точке M_2 и стороной M_2M, равный углу $\Pi(x_1)$, причем другая его сторона M_2b расположится ниже M_2a_2. Полупрямые b и a_1 расходящиеся, так как соответственные углы, образованные этими полупря-

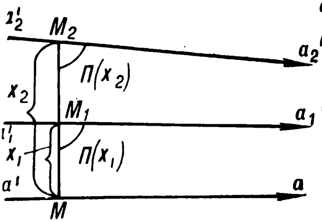


Рис. 26

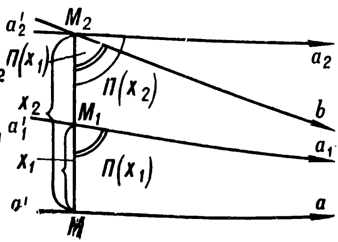


Рис. 27

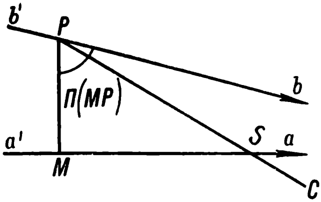


Рис. 28

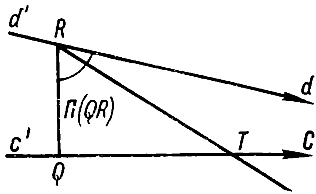


Рис. 29

мыми с секущей M_1M_2, равны между собой. С другой стороны, эти полупрямые b и a_1 — сходящиеся (пересекаются), так как $a_2 \parallel a_1$ в точке M_2. Получается логическое противоречие. Откуда $\Pi(x_1)$ не $< \Pi(x_2)$.

Итак, $\Pi(x_1) \neq \Pi(x_2)$ и $\Pi(x_1)$ не $< \Pi(x_2)$. Следовательно, $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$, что и требовалось доказать.

Теперь переходим ко второй части. Докажем, что значение угла параллельности зависит только от величины стрелки и не зависит от положения прямой $a'a$ и точки M на ней (рис. 28).

Возьмем какую-нибудь прямую $c'c$, отличную от $a'a$, и произвольную точку Q на ней (рис. 29); в этой точке к рассматриваемой прямой восставим перпендикуляр. На этом перпендикуляре вверх от точки Q отложим отрезок QR, равный отрезку MP на рис. 28, т. е. $QR = MP$. Через точку R проведем прямую $d'd$, параллельную $c'c$. Тогда $\angle dRQ = \Pi(QR)$. Докажем, что $\Pi(QR) = \Pi(MP)$. Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что $\Pi(QR) \neq \Pi(MP)$. Тогда одно из двух: либо $\Pi(QR) < \Pi(MP)$, либо $\Pi(QR) > \Pi(MP)$. Покажем, что и то и другое приводит к логическому противоречию типа A и не-A одновременно.

Пусть $\Pi(QR) < \Pi(MP)$. Проведем через точку P в сторону параллельности полупрямую Pc, которая с прямой MP образовала бы угол cPM, равный углу $\Pi(QR)$. Поскольку $\Pi(QR) < \Pi(MR)$, то полупрямая Pc расположится ниже полупрямой Pb. Но тогда Pc пересечет $a'a$ в некоторой точке S (в противном случае $b'b$ не была бы параллельна $a'a$ в указанном направлении). Теперь на рис. 29 от точки Q вправо отложим отрезок QT, равный отрезку MS, т. е. $QT = MS$. Полученные $\triangle RQT$ (на рис. 29) и $\triangle PMS$ (на рис. 28) равны между собой, т. е. $\triangle RQT = \triangle PMS$, так как их катеты равны по построению ($RQ = PM$ и $QT = MS$). Как известно, в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Следовательно, $\angle QRT = \angle MPS = \Pi(QR)$. Но тогда прямая $d'd$ совпадает с прямой RT, пересекающей прямую $c'c$ в точке T, откуда $d'd$ и $c'c$ — сходящиеся прямые, тогда как по условию они должны быть параллельными. Получили логическое противоречие — прямые $d'd$ и $c'c$ одновременно и параллельны (по условию) и непараллельны (по доказанному).

Следовательно, $\Pi(QR)$ не меньше $\Pi(MP)$.

Аналогично доказывается, что $\Pi(QR)$ не больше $\Pi(MP)$. Проведите это рассуждение самостоятельно.

Следовательно, $\Pi(QR) = \Pi(MP)$, что и требовалось доказать.

Далее можно было бы доказать, что всякий острый угол, как бы мал он ни был, всегда можно рассматривать как угол параллельности, соответствующий некоторой стрелке (на доказательстве этой теоремы для краткости останавливаться не будем). Любой острый угол имеет свою стрелку.

Другими словами, если α — произвольный острый угол (он может быть взят как угодно малым), то всегда найдется отрезок h, который можно принять за стрелку, для которой угол α будет углом параллельности, т. е. $\alpha = \Pi(h)$.

Функция $\Pi(x)$ называется функцией Лобачевского. На основании предыдущего эта функция обладает следующими свойствами:

1) $\Pi(x)$ определена для всех положительных значений x;

2) $\Pi(x)$ монотонно убывающая функция, принимающая все промежуточные значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \Pi(x) = 0$.

Для $\Pi(x)$ Лобачевский нашел аналитическое выражение, согласно которому

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{k}},$$

где x — величина стрелки, k — некоторая константа.

Легко проверить, что аналитическое выражение функции Лобачевского удовлетворяет всем трем указанным выше свойствам (сделайте это самостоятельно).

«Воображаемую геометрию» в своем предсмертном сочинении Лобачевский назвал «Пангеометрией», т. е. «всеобщей геометрией», имея при этом в виду, что евклидова геометрия вытекает из его «воображаемой» геометрии как частный (вернее, предельный) случай.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию Лобачевского

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{k}{x}}.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\lim_{x \to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $\Pi(x) \approx \pi/2$, если x — достаточно малая величина. Отсюда делаем вывод: пространство Лобачевского, где наряду со всеми аксиомами абсолютной геометрии выполняется аксиома Лобачевского, для достаточно малых областей как угодно мало отличается от евклидова пространства, где наряду со всеми аксиомами абсолютной геометрии выполняется V постулат Евклида.

Таким образом, евклидову геометрию мы можем рассматривать как предельный случай геометрии Лобачевского, когда стрелка по величине стремится к нулю.

Есть еще один случай, когда пространство Лобачевского превращается в евклидово пространство. Рассмотрим постоянную Лобачевского k в формуле $\Pi(x) = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{-\frac{x}{k}}$.

Эта постоянная может принимать любые положительные значения между 0 и ∞, и для каждого такого значения будет существовать свое пространство Лобачевского. Эти пространства не одинаковы. Они будут отличаться друг от друга степенью отклонения от евклидова пространства; причем, чем меньше значение k, тем больше пространство Лобачевского отличается от евклидова пространства, и, обратно, чем больше k, тем меньше пространство Лобачевского отличается от евклидова.

Действительно, заставим в формуле $\Pi(x) = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{-\frac{x}{k}}$ постоянную Лобачевского k стремиться к бесконечности, тогда в пределе получим

$$\Pi(x) = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{-\frac{x}{\infty}} = 2\,\mathrm{arctg}\, 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Выходит, что если постоянная Лобачевского $k=\infty$, то $\Pi(x)=\pi/2$, и пространство Лобачевского будет вести себя как евклидово пространство (в этом пространстве угол параллельности всегда равен прямому).

Выше было доказано, что общий перпендикуляр, и притом единственный, могут иметь только расходящиеся прямые. Но всякие ли две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр — это еще надо доказать. На плоскости Лобачевского имеет место следующее взаимное расположение прямых.

Теорема 9. *Две расходящиеся прямые всегда имеют общий перпендикуляр, и притом единственный, от которого они безгранично расходятся одна относительно другой в обе стороны, т. е. расстояние точки, взятой на одной из расходящихся прямых, до другой прямой по мере удаления ее от общего перпендикуляра неограниченно возрастает.*

Доказательство. Раньше было доказано, что любые две прямые в плоскости не могут иметь больше одного общего перпендикуляра. Следовательно, этому требованию подчиняются расходящиеся прямые. Таким образом, доказательство теоремы состоит из двух частей. В первой части доказывается существование общего перпендикуляра для расходящихся прямых, а во второй — расходимость расходящихся прямых одна относительно другой в ту и другую сторону от их общего перпендикуляра.

Доказательство первой части. Пусть $a'a$ и $b'b$ — данные расходящиеся прямые. Возьмем на одной из них, например, на прямой $a'a$, произвольную точку M и через нее проведем прямую c, параллельную b в направлении $b'b$ (слева направо) и прямую c', параллельную b' в направлении bb'

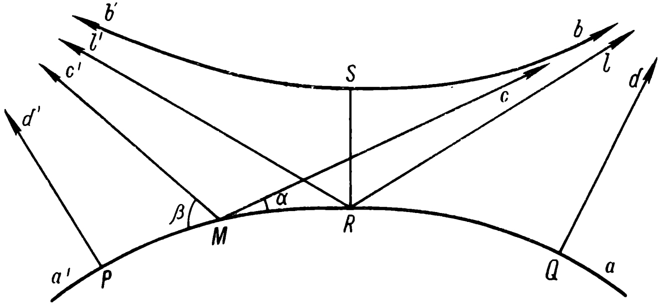


Рис. 30

(рис. 30), т. е. $c \parallel b$ и $c' \parallel b'$ (направление параллелизма указано стрелками).

Обозначим углы cMa и $c'Ma'$ соответственно через α и β. Сумма этих углов по построению не может равняться развернутому углу или превосходить его, т. е. $\alpha+\beta<2d$.

Для углов α и β возможны три случая: 1) оба угла острые; 2) один острый, другой прямой; 3) один острый, другой тупой. Другие случаи отпадают. Например, оба эти угла не могут, скажем, быть одновременно прямыми или тупыми, так как в этих случаях $\alpha+\beta \geqslant 2d$, чего быть не может.

Будем считать, как показано на рисунке (рис. 30), что углы α и β — оба острые и не равны друг другу (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Для определенности положим, что $\alpha<\beta$. Как известно (об этом говорится выше), всякий острый угол можно рассматривать как угол параллельности некоторой существующей стрелки. Обозначим стрелку угла α через h_1, а стрелку угла β через h_2, тогда будем иметь $\alpha=\Pi(h_1)$ и $\beta=\Pi(h_2)$.

Поскольку угол параллельности есть монотонно убывающая функция стрелки, то из соотношения $\alpha < \beta$ вытекает, что $h_1 > h_2$. Отложим на прямой $a'a$ вправо и влево от точки M отрезки $MQ = h_1$ и $MP = h_2$. Теперь в точках Q и P к прямой $a'a$ восставим перпендикуляры d и d'. Тогда по построению $d \parallel c$ и $d' \parallel c'$.

Далее, из точки R, которая является серединой отрезка PQ, опустим на прямую $b'b$ перпендикуляр RS, где S — основание перпендикуляра. Проведем через точку R прямые l и l', параллельные прямым b (в направлении $b'b$) и b' (в направлении bb'), т. е. $l \parallel b$ и $l' \parallel b'$. Докажем, что прямая RS, будучи перпендикулярной к прямой $b'b$, перпендикулярна и к прямой $a'a$. Для этого рассмотрим углы с общей вершиной в точке R. Оказывается, они равны, т. е. $\angle lRa = \angle l'Ra'$ и $\angle lRS = \angle l'RS$. Тогда смежные углы SRa и SRa', как равносоставленные, равны между собой, т. е. $\angle SRa = \angle SRa'$. Следовательно, эти углы прямые. Таким образом, RS является общим перпендикуляром для расходящихся прямых a и a', что и требовалось доказать.

Доказательство второй части. Остается, наконец, доказать, что расходящиеся прямые безгранично расходятся одна относительно другой вправо и влево от своего единственного перпендикуляра.

Через точку R — основание общего перпендикуляра — проведем луч c, параллельный лучу b (рис. 31). Лучи a и c сходящиеся, так как имеют общую точку R. Следовательно, в сторону острого угла cRa они безгранично расходятся один относительно другого. Но луч c, будучи параллелен лучу b, не может пересекать b, а значит, лучи a и b тем более будут безгранично расходиться один относительно другого. Действительно, если мы из точки M, взятой справа от S на луче b, опустим на прямую $a'a$ перпендикуляр MN, то он пересечет луч c в точке Q. Ясно, что точка Q находится между M и N. Так как при перемещении точки M вправо по лучу b отрезок NQ растет безгранично, то отрезок NM, который всегда больше NQ, тем более будет расти неограниченно. Теорема доказана.

Известно, что в евклидовой плоскости сумма внутренних углов треугольника есть величина постоянная и всегда равна $2d$. А какова эта сумма в плоскости Лобачевского? Докажем теорему.

Теорема 10. *Сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского есть величина переменная (зависит от длины сторон) и всегда меньше $2d$.*

Доказательство. Из абсолютной геометрии известно, что сумма внутренних углов треугольника не может быть больше $2d$ (это доказано французским математиком Лежандром). Далее, сумма внутренних углов треугольника не может равняться $2d$, так как отсюда сразу вытекал бы V постулат, чего на плоскости Лобачевского быть не может. Следовательно, сумма внутренних углов треугольника меньше $2d$.

Докажем теперь, что на плоскости Лобачевского эта сумма есть величина переменная, т. е. разные треугольники имеют, вообще говоря, и разные суммы углов.

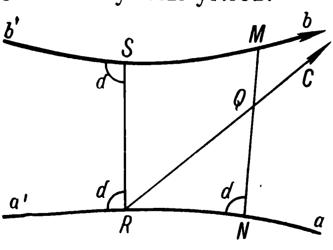


Рис. 31

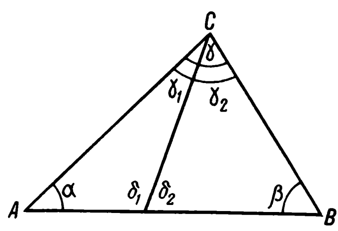


Рис. 32

Будем доказывать это методом от противного. Предположим, что сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского есть величина постоянная. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 32). Обозначим величины его углов через α, β и γ. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=m$, где m — величина, постоянная для всех треугольников.

Возьмем на стороне AB, между A и B, произвольную точку D и соединим ее прямолинейным отрезком с точкой C. Данный треугольник ABC разобьется на два треугольника ADC и CDB. Обозначим углы этих треугольников через γ_1, δ_1, γ_2, δ_2, причем, как видно из рис. 32, $\gamma_1+\gamma_2=\gamma$ и $\delta_1+\delta_2=2d$. Далее получим

$$\alpha+\delta_1+\gamma_1=m,\ \beta+\delta_2+\gamma_2=m.$$

Сложив эти равенства, найдем

$$\alpha+\delta_1+\gamma_1+\beta+\delta_2+\gamma_2=2m$$

или

$$\alpha+\beta+(\gamma_1+\gamma_2)+(\delta_1+\delta_2)=2m,$$

откуда

$$\alpha+\beta+\gamma+2d=2m.$$

Но

$$\alpha+\beta+\gamma=m.$$

Следовательно,

$$m+2d=2m$$

или

$$m=2d.$$

Таким образом,

$$\alpha+\beta+\gamma=2d,$$

чего на плоскости Лобачевского быть не может. Значит, на плоскости Лобачевского сумма внутренних углов треугольника является величиной переменной. Теорема доказана.

Из только что доказанной теоремы, как следствие, вытекает теорема 11.

Теорема 11. *Сумма внутренних углов любого четырехугольника на плоскости Лобачевского меньше $4d$.*

Рассмотрим произвольный (выпуклый) четырехугольник $ABCD$ (рис. 33), разобьем его диагональю AC на два треугольника ACD и ABC. Тогда для введенных обозначений углов будем иметь

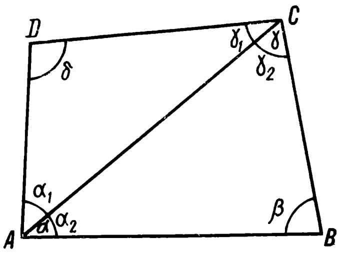


Рис. 33

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha_1+\gamma_1+\delta)+(\beta+\alpha_2+\gamma_2)<$$
$$<2d+2d=4d.$$

Следовательно,

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta<4d,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. На плоскости Лобачевского не существует прямоугольников, а следовательно, и квадратов.

Из школьного курса геометрии нам известно, что в евклидовой плоскости существуют подобные фигуры разной величины. Оказывается, на плоскости Лобачевского подобных фигур разной величины не существует. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 12. *На плоскости Лобачевского не существует подобных треугольников с коэффициентом подобия, отличным от единицы.*

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что имеется два подобных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ разной величины (рис. 34). Для опреде-

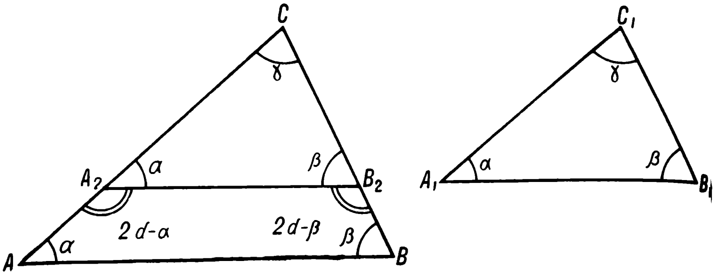


Рис. 34

ленности положим, что первый треугольник больше второго.

Так как $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то углы у них соответственно равны, обозначим их через α, β и γ. Теперь на стороне AC вниз от точки C отложим отрезок $CA_2 = C_1A_1$. Через A_2 проведем прямую A_2B_2, образующую со стороной AC угол α. После этого построения $\angle CA_2B_2 = \alpha$. По аксиоме Паша прямая A_2B_2, пересекая сторону AC треугольника ACB, обязательно пересечет еще одну сторону этого треугольника. Пересечь сторону AB прямая A_2B_2 не может, так как она расходится относительно ее. Следовательно, прямая A_2B_2 пересекает сторону BC в точке B_2.

Полученный треугольник A_2B_2C равен треугольнику $A_1B_1C_1$, так как они имеют равные стороны ($CA_2 = C_1A_1$ по построению) и равные прилежащие к этим сторонам углы ($\angle CA_2B_2 = \angle C_1A_1B_1 = \alpha$ по построению и $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = \gamma$ по условию). В равных треугольниках против равных сторон лежат и равные углы, следовательно, $\angle CB_2A_2 = \angle C_1B_1A_1 = \beta$ (так как $CA_2 = C_1A_1$).

Рассмотрим теперь образовавшийся четырехугольник ABB_2A_2. Подсчитаем сумму его внутренних углов:

$$\alpha+\beta+(2d-\beta)+(2d-\alpha)=4d.$$

Получилось, что сумма внутренних углов четырехугольника ABB_2A_2 равняется $4d$, чего на плоскости Лобачевского быть не может. Получили логическое противоречие, которое показывает, что на плоскости Лобачевского не может быть подобных треугольников различной величины.

Из доказанной теоремы как простое следствие вытекает, что на плоскости Лобачевского треугольник вполне определяется тремя его углами. Или: если на плоскости Лобачевского три угла одного треугольника равны соответственно трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

На евклидовой плоскости, как известно, через любые три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность. Так ли обстоит дело на плоскости Лобачевского? Нет, далеко не так. Об этом можно судить на основании теоремы.

Теорема 13. *На плоскости Лобачевского существуют треугольники, вокруг которых нельзя описать окружность.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно построить хотя бы один треугольник ABC, вокруг которого нельзя описать окружность. На рис. 35 дается построение такого треугольника. Рассмотрим на плоскости Лобачевского две параллельные прямые $a'a$ и $b'b$. Из произвольной точки M, взятой на прямой $b'b$, опустим на прямую $a'a$ перпендикуляр MN, тогда $\angle bMN = \Pi(MN)$, т. е. является углом параллельности, соответствующим стрелке MN. Теперь на стрелке MN между точками M и N возьмем произвольную точку A и для нее построим симметричные точки B и C, приняв за оси симметрии соответственно

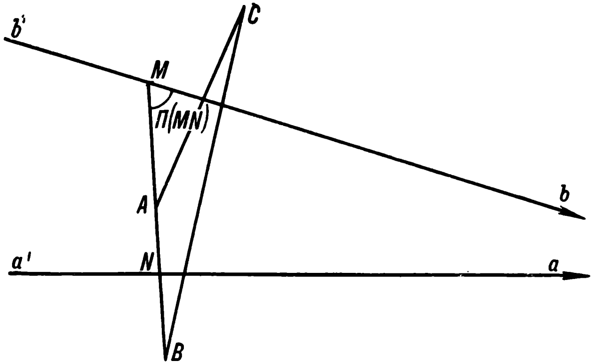


Рис. 35

прямые $a'a$ и $b'b$. Соединив точки A, B и C прямолинейными отрезками, получим треугольник ABC, вокруг которого нельзя описать окружность. Действительно, центр окружности, описанной вокруг треугольника, должен лежать на пересечении перпендикуляров, восставленных к серединам каких-нибудь двух сторон треугольника. Но для построенного треугольника ABC прямые $a'a$ и $b'b$, являясь перпендикулярами к сторонам AB и AC в их серединах, не пересекаются между собой ($a'a \parallel b'b$). Таким образом, центра описанной окружности не существует и, следовательно, не существует и самой окружности. Теорема доказана.

На плоскости Лобачевского можно построить треугольник, у которого два перпендикуляра к двум сторонам его, проходящие через середины этих сторон, будут расходящимися прямыми (постройте самостоятельно). Вокруг такого треугольника также нельзя описать окружность.

Читателю в порядке упражнения не мешает также построить на плоскости Лобачевского треугольник, вокруг которого можно было бы описать окружность. Для этого треугольник надо построить так, чтобы два перпендикуляра, выходящие из середины двух каких-нибудь его сторон, были заведомо сходящимися прямыми.

В евклидовой плоскости, как известно, эквидистанта[1] есть прямая линия. В плоскости же Лобачевского эквидистанта есть всегда кривая линия. Это подтверждает следующая теорема.

Теорема 14. *На плоскости Лобачевского эквидистанта есть линия, имеющая с прямой не больше двух общих точек.*

Доказательство. Пусть на плоскости Лобачевского дана прямая $a'a$ и относительно нее как оси построена эквидистанта (рис. 36).

Доказательство будем вести методом от противного. Предположим, что эквидистанта $l'l$ с некоторой прямой $b'b$ имеет более двух общих точек. Рассмотрим три из них: P, M и N. Опустим из этих точек на ось эквидистанты $a'a$ перпендикуляры PP_1, MM_1 и MN_1. Ясно, что $PP_1=MM_1=$ $=NN_1$ (так как все точки эквидистанты равноудалены от своей оси). Получили два четырехугольника Саккери PP_1M_1M и MM_1N_1N: углы при нижнем основании у них прямые, а боковые

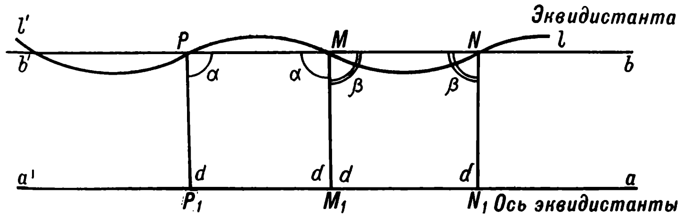


Рис. 36

[1] См. сноску на стр. 42.

стороны одинаковы. Но, как еще установил сам Саккери, углы при верхнем основании любого его четырехугольника острые и равные. Пусть углы при верхнем основании первого четырехугольника будут равны α, а второго — β. Тогда, с одной стороны, $\alpha+\beta<2d$, как сумма двух острых углов. С другой стороны, α и β образуют развернутый угол с вершиной в точке M и, следовательно, $\alpha+\beta=2d$.

Итак, одна и та же сумма двух углов α и β и равна $2d$ и не равна ей. Логическое противоречие. Следовательно, эквидистанта ни с какой прямой не может иметь больше двух общих точек, что и требовалось доказать.

Получается любопытная картина. Если бы на плоскости Лобачевского устанавливали рельсы со шпалами одинаковой длины и если бы ось одного рельса была прямой линией, то ось другого рельса должна была бы быть эквидистантой, т. е. кривой линией.

В евклидовой плоскости сторона равностороннего вписанного в круг шестиугольника равняется радиусу. Какова же она будет в плоскости Лобачевского? Положим, что в плоскости Лобачевского сторона вписанного шестиугольника равняется радиусу, т. е. $a_6=R$ (рис. 37). Тогда треугольник OAB будет равносторонний и по абсолютной геометрии все три угла его должны быть одинаковы, но $\angle AOB$ равняется $^1/_6$ части окружности, т. е. $\pi/_3$, а тогда сумма внутренних углов треугольника AOB будет равна $2d$,

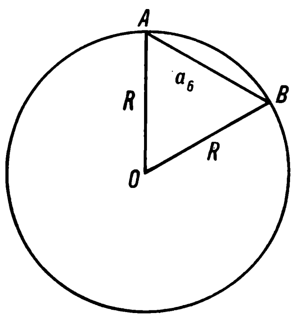


Рис. 37

чего в плоскости Лобачевского быть не может. Следовательно, в плоскости Лобачевского хорда одной шестой части окружности не равняется радиусу.

Полученные результаты в свое время толкали ученых на опытную проверку геометрии Лобачевского. Например, чтобы ответить на вопрос, какая двухмерная геометрия (евклидова или Лобачевского) выполняется на хорошо отполированной материальной плоскости, надо начертить окружность и раствором циркуля, равным радиусу, сделать на ней шесть засечек. Если хорда, соединяющая первую засечку с шестой, равна радиусу, то плоскость будет евклидовой, если же эта хорда не будет равна радиусу, то плоскость будет неевклидовой плоскостью Лобачевского.

Однако такого рода экспериментальные «доказательства» выходят за рамки геометрии и с точки зрения логики оставляют вопрос открытым.

В геометрии изучаются линии постоянной кривизны, т. е. такие линии, которые скользят сами по себе без изгибания (деформации). В евклидовой плоскости, как известно, такими линиями являются прямая и окружность. В плоскости же Лобачевского таких линий больше. Кроме прямой и окружности, там имеются *орицикл* и *эквидистанта*, каждая из которых является кривой линией, причем линией постоянной кривизны.

Рассмотрим в плоскости Лобачевского так называемый эллиптический пучок прямых (пучок сходящихся прямых), т. е. совокупность прямых плоскости, проходящих через одну и ту же точку O, называемую центром пучка. Теперь на произвольной прямой (оси) пучка возьмем произвольную точку M, лишь бы она не совпадала с точкой O, и из нее ко всем прямым пучка будем

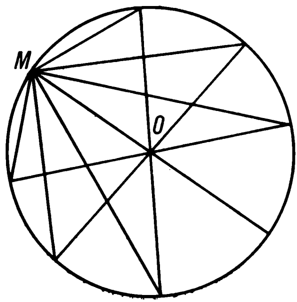


Рис. 38

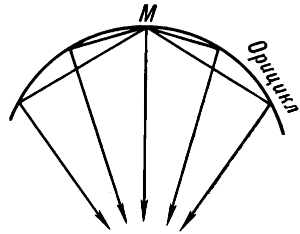


Рис. 39

проводить прямые равного наклона (рис. 38). Тогда, по определению, геометрическим местом точек пересечения прямых равного наклона, выходящих из точки M, с прямыми эллиптического пучка O и будет окружность с центром в точке O. Эта окружность, оказывается, обладает следующими свойствами (докажите их самостоятельно).

1. Окружность можно рассматривать как перпендикулярное сечение эллиптического пучка O (O — центр пучка), т. е. каждая прямая пучка O является перпендикуляром к окружности с центром в точке O.

2. Прямая с окружностью может иметь не больше двух общих точек.

3. Окружность есть замкнутая линия.

4. Все окружности одного и того же радиуса при наложении всеми точками совпадают между собой, причем радиусом называется длина отрезка от точки O до любой точки, взятой на окружности.

5. Окружность можно рассматривать как геометрическое место точек, равноудаленных от центра соответствующего эллиптического пучка.

который по отношению к окружности называется центром окружности.

6. Окружность может скользить сама по себе без изгибания (деформации), т. е. является линией постоянной кривизны.

Для построения орицикла рассмотрим параболический пучок прямых, т. е. совокупность параллельных между собой прямых (с общим направлением параллелизма). Одну из этих прямых примем за ось. Из произвольной точки M этой оси по отношению ко всем прямым данного параболического пучка будем проводить прямые равного наклона (рис. 39). Геометрическое место точек пересечения прямых равного наклона, выходящих из точки M, с прямыми параболического пучка составит некоторую линию, которая по определению и будет называться орициклом.

Ниже без доказательства даются некоторые основные свойства орицикла (докажите самостоятельно).

1. Орицикл можно рассматривать как перпендикулярное сечение параболического пучка, т. е. каждая прямая пучка является перпендикуляром к орициклу.

2. Всякая прямая с орициклом может иметь не более двух общих точек.

3. Орицикл есть замкнутая линия.

4. Все орициклы при наложении друг на друга совпадают.

5. Орицикл может скользить сам по себе без изгибания (деформации), т. е. является линией постоянной кривизны.

Возьмем теперь гиперболический пучок прямых, т. е. совокупность всех прямых, расположенных в одной плоскости и перпендикулярных одной и той же прямой, называемой *базой пучка*. Это будет пучок расходящихся прямых (прямые, имеющие общий перпендикуляр, расходятся).

Если теперь из произвольной точки M, взятой на произвольной прямой (оси) гиперболического пучка, будем проводить прямые равного наклона относительно всех прямых рассматриваемого пучка, то геометрическое место точек пересечения прямых равного наклона с прямыми гиперболического пучка образует некоторую линию, которую принято называть эквидистантой (рис. 40).

Можно было бы доказать следующие свойства эквидистанты (докажите самостоятельно).

1. Эквидистанту можно рассматривать как перпендикулярное сечение гиперболического пучка, т. е. каждая прямая пучка является перпендикуляром к эквидистанте.

2. Всякая прямая с эквидистантой может иметь не более двух общих точек.

3. Эквидистанта есть незамкнутая линия.

4. Эквидистанту можно рассматривать как геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от некоторой прямой (базы) и равноудаленных от нее.

Окружность и эквидистанта являются, как говорят, однопараметрическими кривыми, так как их кривизна и свойство быть совмещенными (конгруэнтными) связаны с одним параметром.

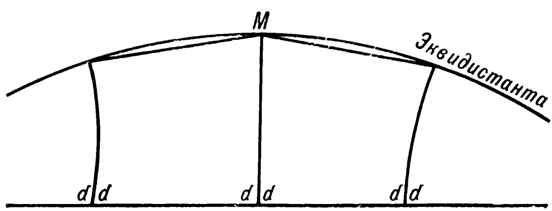


Рис. 40

Для окружности этим параметром является радиус, а для эквидистанты — длина перпендикуляра, опущенного из любой точки эквидистанты на ее базу. Орицикл напоминает прямую. Орициклы, как и прямые, не связаны параметрами, и все они, как и прямые, при совмещении сливаются друг с другом.

В плоскости Евклида прямую можно рассматривать как предельное положение окружности, если ее центр удалять по нормали в бесконечность. В плоскости Лобачевского предельным положением окружности является орицикл, т. е. рассмотренная выше кривая, имеющая с прямой не более двух общих точек.

Выше говорилось, что существуют треугольники, вокруг которых нельзя описать окружность. Но можно было бы доказать (сделайте это самостоятельно), что в этих случаях вокруг треугольника можно описать или орицикл или эквидистанту. Таким образом, на плоскости Лобачевского имеет место следующая теорема, которую мы дадим без доказательства.

Теорема 15. *Вокруг любого треугольника можно всегда описать линию постоянной кривизны — либо окружность, либо орицикл, либо эквидистанту.*

Беседа девятая

В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В этой беседе мы познакомим читателя с пространством Лобачевского. Для этой цели изложим несколько теорем геометрии Лобачевского в пространстве (стереометрии). При доказательстве мы будем ссылаться на некоторые теоремы абсолютной геометрии (как планиметрии, так и стереометрии), причем на доказательстве их останавливаться не будем (они известны читателю из курса средней школы).

Ниже приводим несколько стереометрических теорем абсолютной геометрии (планиметрические теоремы приводились раньше).

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

2. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

3. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

4. Из каждой точки пространства, расположенной вне данной плоскости, на эту плоскость можно опустить перпендикуляр, и притом единственный.

5. К плоскости в каждой ее точке можно восставить перпендикуляр, и притом единственный.

6. Две плоскости перпендикулярны между собой, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

7. Через любую точку пространства можно провести одну и только одну плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

8. Через прямую, не перпендикулярную плоскости, можно провести плоскость, и притом единственную, перпендикулярную данной плоскости.

9. Если к прямой пересечения двух перпендикулярных плоскостей в какой-нибудь ее точке восставить перпендикуляр к одной из плоскостей, то он будет лежать в другой плоскости.

10. Теорема о трех перпендикулярах: прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции, перпен-

дикулярна и к самой наклонной, и, обратно, прямая, проведенная в плоскости перпендикулярно к наклонной, перпендикулярна и к ее проекции.

11. Через прямую и точку, взятую вне этой прямой, можно всегда провести плоскость, и притом единственную.

12. Через две пересекающиеся прямые можно всегда провести плоскость, и притом единственную.

Начнем изучение пространства Лобачевского с изучения взаимного расположения прямых в этом пространстве. Если возьмем произвольную пару прямых в пространстве Лобачевского, то эти прямые или лежат в одной плоскости, или не лежат.

Если они не лежат в одной плоскости, то они носят название скрещивающихся прямых. Если же указанные прямые лежат в одной плоскости, то они, как уже известно, или сходятся (пересекаются), или параллельны, или расходятся.

Приступая к изучению параллельных прямых в пространстве Лобачевского, надо твердо помнить, что первым условием параллельности является принадлежность их к одной плоскости. Чтобы доказать параллельность двух прямых в пространстве Лобачевского, надо сначала решить вопрос о принадлежности их к одной плоскости, а дальнейшее исследование «на параллельность» не отличается от исследования в планиметрии, т. е. если одна прямая параллельна другой в какой-нибудь точке, то она параллельна ей и во всякой другой своей точке, и если одна прямая параллельна другой, то и обратно, другая параллельна первой, причем параллельность берется в одну сторону. Что же касается свойства транзитивности параллельных прямых в пространстве, указанного нами в планиметрии, то в пространстве оно требует дополнительного доказательства. Докажем прежде одну вспомогательную теорему.

Теорема 16. *Если через каждую из двух параллельных прямых пространства Лобачевского проведем по одной плоскости и если эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения обязательно будет параллельной данным двум прямым.*

Доказательство. Пусть α и β — плоскости, соответственно проходящие через прямые $a'a$ и $b'b$, а прямая $c'c$ — линия пересечения этих плоскостей (рис. 41). Надо доказать, что $c'c \parallel a'a$ и $c'c \parallel b'b$, причем направление параллельности берется в одну сторону. Возьмем на каждой из прямых $a'a$, $b'b$ и $c'c$ по произвольной точке P, Q, M и соединим их прямолинейными отрезками PM, MQ, PQ. Докажем сначала, что $c'c \parallel a'a$. Для этого достаточно показать, что $c'c \parallel a'a$ в точке M. Чтобы убедиться в последнем, надо установить, что:

1) $c'c$ и $a'a$ лежат в одной плоскости;

2) $c'c$ и $a'a$ не пересекаются;

3) любая прямая m, проходящая через точку M и идущая внутри угла cMP, пересекает $a'a$.

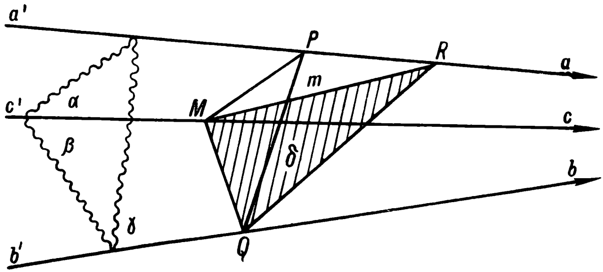


Рис. 41

Все эти вопросы решаются положительно. Действительно, $c'c$ и $a'a$ лежат в одной плоскости α (по условию), $c'c$ и $a'a$ не пересекаются. В самом деле, если бы $c'c$ и $a'a$ пересекались, то через точку пересечения проходило бы и $b'b$ (докажите самостоятельно), а тогда $a'a$ и $b'b$ пересекались бы, а это невозможно по условию. Теперь убедимся в выполнимости третьего условия. Через пересекающиеся прямые Mm и MQ проведем плоскость δ, а плоскость, проходящую через параллельные прямые $a'a$ и $b'b$, обозначим через γ. Плоскости γ и δ, имея общую точку Q по построению, обязательно пересекутся по некоторой прямой QR, которая пересечет прямую $a'a$ в некоторой точке R, так как $b'b \| a'a$ в точке Q (по условию $a'a \| b'b$). Покажем теперь, что прямая Mm проходит через точку R и пересекает прямую a^1a. Действительно, точка R, являясь точкой пересечения прямых QR и $a'a$, одновременно будет общей точкой плоскостей α и δ, а следовательно, принадлежит прямой пересечения этих плоскостей, которой является прямая Mm. Выходит, что прямая Mm пересекает прямую $a'a$. Итак, $c'c \| a'a$. Аналогично доказывается, что $c'c \| b'b$. Тем самым теорема доказывается полностью.

Теперь не представляет большой трудности доказать свойство транзитивности параллельных прямых в пространстве в том случае, если данные три прямые не лежат в одной плоскости.

Теорема 17. *Если в пространстве Лобачевского одна прямая параллельна другой, а та в свою очередь параллельна третьей прямой, то первая прямая параллельна третьей прямой, причем направление параллельности берется в одну сторону.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве Лобачевского три прямые $a'a$, $b'b$ и $c'c$,

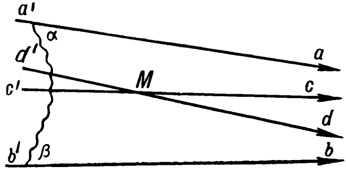


Рис. 42

причем $a'a \| b'b$ и $b'b \| c'c$. Докажем, что $a'a \| c'c$ в том же направлении.

Будем полагать, что данные три прямые одновременно не лежат в одной плоскости (случай, когда все три прямые лежат в одной плоскости, рассматривался в планиметрии).

Возьмем на прямой $c'c$ произвольную точку M и проведем через нее две различные плоскости α и β, из которых первая проходит через прямую $a'a$, а вторая — через прямую $b'b$. Эти две плоскости, имея общую точку M по построению, пересекутся на некоторой прямой $d'd$, проходящей через точку M. По предыдущей теореме $d'd \| a'a$ и $d'd \| b'b$. По условию $b'b \| c'c$, а следовательно, и обратно $c'c \| b'b$. Выходит, что через точку M в плоскости, определяемой точкой M и прямой $b'b$, относительно прямой $b'b$ в одном и том же направлении (рис. 42) проходят две параллельные прямые $c'c$ и $d'd$, что в плоскости Лобачевского невозможно. Чтобы выйти из создавшегося логического противоречия, надо считать, что прямая $d'd$ совпадает с прямой $c'c$. Поскольку $d'd \| a'a$ и $d'd \| b'b$, то и $c'c$ обладает этим свойством, т. е. $c'c \| a'a$ и $c'c \| b'b$. Отсюда $a'a \| c'c$, и теорема доказана.

Переходим теперь к рассмотрению взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве Лобачевского. Если прямая не лежит в плоскости, то здесь возможны два случая: или прямая пересекает плоскость, тогда прямая называется сходящейся относительно этой плоскости; или прямая не пересекает плоскость, тогда прямая относительно плоскости будет или параллельной, или расходящейся, в зависимости от того, будет ли прямая параллельной или расходящейся относительно своей ортогональной (прямоугольной) проекции на эту плоскость.

Итак, согласно определению, прямая называется параллельной плоскости, если она параллельна своей ортогональной проекции на эту плоскость.

Теперь можно будет установить некоторые достаточные признаки параллельности прямой и плоскости в пространстве Лобачевского.

Теорема 18. *Прямая, не лежащая в плоскости, будет параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в этой плоскости.*

Доказательство. Пусть прямая $a'a$ не лежит в плоскости α и параллельна прямой $b'b$, расположенной в плоскости α (рис. 43). Докажем, что $a'a \parallel \alpha$.

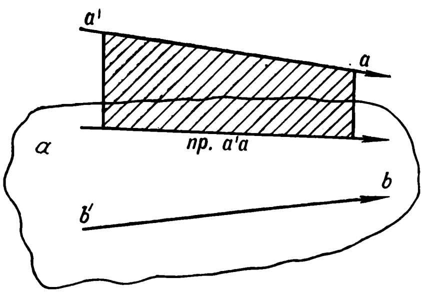


Рис. 43

Обозначим ортогональную проекцию $a'a$ на плоскость α через пр. $a'a$. Тогда на основании предыдущего пр. $a'a$ будет параллельно относительно $a'a$ и $b'b$, так как на пр. $a'a$ можно смотреть как на прямую пересечения двух плоскостей, из которых одна проходит через $a'a$ (ортогонально проектирующая плоскость), другая (плоскость α) проходит через $b'b$, причем $a'a \| b'b$. Итак, $a'a \| b'b$ (по условию) и $b'b \|$пр. $a'a$ (по доказанному пр. $a'a \| b'b$). Следовательно, на основании свойства транзитивности параллельных прямых $a'a \|$пр. $a'a$. Откуда $a'a \| \alpha$, что и требовалось доказать.

Теорема 19. *Прямая, не лежащая в плоскости, параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, параллельной этой плоскости.*

Доказательство. Пусть прямая $a'a$ параллельна прямой $b'b$, а прямая $b'b$ в свою очередь параллельна плоскости α. Докажем, что прямая $a'a$ параллельна плоскости α.

Обозначим ортогональную проекцию прямой $b'b$ на плоскость α через пр. $b'b$ (рис. 44). Согласно определению, если $b'b \| \alpha$, то $b'b \|$пр. $b'b$. Но тогда, на основании свойства транзитивности

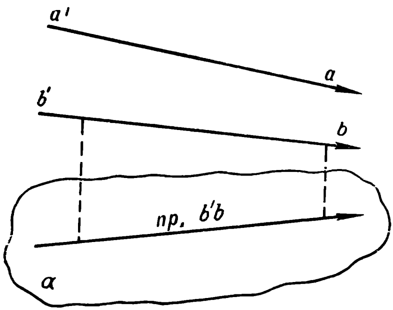


Рис. 44

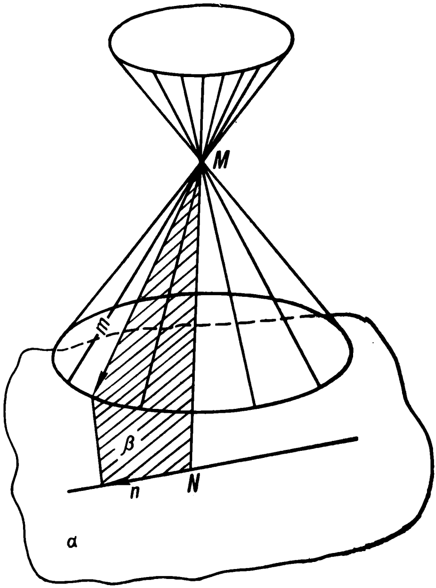


Рис. 45

параллельных прямых, поскольку $a'a \| b'b$, то $b'b \|$ $\|$пр. $b'b$ заключаем, что $a'a \|$пр. $b'b$. Отсюда по предыдущей теореме $a'a \| \alpha$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь в пространстве Лобачевского произвольную плоскость α и произвольную точку M вне ее (рис. 45). Из точки M на плоскость α опустим перпендикуляр MN, где N — основание перпендикуляра. Затем через точку N в плоскости α проведем прямую Nn и в плоскости β, определяемой пересекающимися прямыми MN и Nn, через точку M построим прямую Mm, параллельную прямой Nn (направление параллельности показано стрелками). Теперь будем вращать плоскость β вокруг прямой MN как оси, тогда прямая Nn опишет плоскость α, а прямая Mm опишет поверхность кругового конуса, образующие которого будут всегда параллельны своей ортогональной проекции, а следовательно, будут параллельны и плоскости α. Этот конус, образующие которого параллельны плоскости α, носит название конуса параллельности в точке M относительно плоскости α. Точка M, для которой построен конус параллельности относительно плоскости α, называется вершиной конуса, а длина перпендикуляра MN, опущенного из вершины конуса M на плоскость α, носит название высоты конуса параллельности.

Назовем совокупность всех прямых пространства Лобачевского, проходящих через точку M этого пространства, эллиптической связкой с центром в точке M (или просто связкой M).

Если вершину M конуса параллельности относительно плоскости α будем рассматривать как центр эллиптической связки, то все прямые этой связки разобьются на три категории. К первой отнесем те прямые связки M, которые являются образующими конуса параллельности и, следовательно, будут параллельными плоскости α. Отсюда вывод: через любую точку пространства Лобачевского относительно какой-нибудь плоскости, не проходящей через эту точку, можно провести сколько угодно параллельных прямых, являющихся образующими конуса параллельности.

Ко второй категории относятся те прямые связки M, которые проходят внутри конуса параллельности. Ясно, что эти прямые будут пересекать плоскость α, т. е. являться сходящимися прямыми относительно плоскости α. Таких прямых тоже бесчисленное множество.

К третьей категории относятся все остальные прямые связки M, не вошедшие ни в первую, ни во вторую категорию. Это все прямые связки M, расположенные вне конуса параллельности, они называются расходящимися относительно плоскости α. Их также бесчисленное множество.

Так как угол параллельности есть монотонно убывающая функция стрелки, то конус параллельности, имеющий форму обыкновенного зонта, с ростом высоты MN будет «свертываться» (угол параллельности $\Pi(MN)$ прямых Mm и Nn уменьшается), а с уменьшением высоты MN конус параллельности будет «раскрываться» (угол параллельности $\Pi(MN)$ прямых Mm и Nn увеличивается), и когда высота MN обратится в нуль, конус параллельности превратится в плоскость, совпадающую с плоскостью α. Следовательно, для малых высот MN конус параллельности мало отличается от плоскости, и в этом случае пространство Лобачевского ведет себя как евклидово пространство, так как только в этом пространстве конус параллельности вырождается в плоскость. Следовательно, евклидово пространство можно всегда считать предельным случаем пространства Лобачевского.

Рассмотрим теперь взаимное расположение двух плоскостей в пространстве Лобачевского. Две плоскости в пространстве Лобачевского могут или пересекаться или не пересекаться друг с другом. В первом случае плоскости называются сходящимися. Во втором случае они будут параллельными или расходящимися.

Совокупность плоскостей пространства Лобачевского, проходящих через какую-нибудь одну точку M, называется *эллиптической связкой плоскостей с центром в точке M*. Такую связку мы будем впредь называть *связкой M*.

Возьмем в пространстве Лобачевского произвольную плоскость α и произвольную точку M вне ее. Теперь в точке M относительно плоскости α построим конус параллельности. Вершину M конуса параллельности примем за центр эллиптической связки плоскостей. Тогда все плоскости связки M относительно плоскости α разбиваются на три категории. К первой относятся те плоскости, которые пересекают конус параллельности по двум образующим. Каждая из таких плоскостей содержит прямые, проходящие через точку M и расположенные внутри конуса параллельности (эти прямые заполняют плоский угол, образованный образующими конуса параллельности, по которым плоскость пересекает этот конус). Эти прямые, принадлежащие к категории сходящихся прямых, обязательно пересекут плоскость α. Следовательно, каждая плоскость, пересекающая конус параллельности по двум образующим, пересечет плоскость α. Такие плоскости называются сходящимися относительно плоскости α.

Таким образом, первую категорию плоскостей связки M относительно плоскости α составляют сходящиеся плоскости.

Ко второй категории плоскостей связки M относятся те плоскости, которые касаются конуса параллельности по образующей. Эти плоскости не содержат прямых внутри конуса параллельности и, следовательно, они не могут пересекать плоскость α. Каждая из таких плоскостей называется параллельной относительно плоскости α.

Вторая категория плоскостей связки M состоит из параллельных плоскостей относительно α. Ясно, что через любую точку, взятую вне плоскости, можно по отношению к ней провести сколько угодно параллельных плоскостей (все они будут касательными плоскостями конуса параллельности в этой точке).

Наконец, к третьей категории плоскостей относятся все остальные плоскости связки M, не вошедшие ни в первую, ни во вторую категорию, т. е. все плоскости, расположенные вне конуса параллельности. Эти плоскости не пересекают плоскость α и не являются параллельными ей. Каждую из таких плоскостей относительно плоскости α принято называть расходящейся плоскостью.

Значит, к третьей категории относятся плоскости связки M, расходящиеся относительно плоскости α. В пространстве Лобачевского через точку, расположенную вне плоскости, можно провести сколько угодно плоскостей, расходящихся относительно данной.

Исходя из соображений, высказанных выше, легко прийти к следующим весьма замечательным результатам.

1. Для того чтобы две плоскости были сходящимися (пересекались по некоторой прямой), необходимо и достаточно, чтобы через произвольную точку, взятую на одной из них, проходили бы две прямые, параллельные другой плоскости.

2. Для того чтобы две плоскости были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы через произвольную точку, взятую на одной из них, проходила одна и только одна прямая, параллельная другой плоскости.

3. Для того чтобы две плоскости были расходящимися, необходимо и достаточно, чтобы через произвольную точку, взятую на одной из них, не проходило ни одной прямой, параллельной другой плоскости.

Необходимо заметить, что две параллельные плоскости в сторону параллельности (направление образующей, по которой одна плоскость касается конуса параллельности, построенного относительно другой плоскости) асимптотически сближаются, а в противоположную сторону безгранично расходятся. Каждая из двух параллельных плоскостей содержит прямую, параллельную другой плоскости.

Если две плоскости расходящиеся, то ни одна из них не содержит ни одной прямой, параллельной другой плоскости. Далее, для расходящихся плоскостей имеет место следующее.

Теорема 20. *Если две плоскости α и β расходящиеся, то они обязательно имеют общий перпендикуляр, и притом единственный, от которого безгранично расходятся во все стороны одна относительно другой.*

Доказательство. Докажем сначала существование общего перпендикуляра для расходящихся плоскостей α и β. Для этой цели из произвольной точки M плоскости α на плоскость β опустим перпендикуляр MN (рис. 46), где точка N — основание перпендикуляра. Будем считать, что прямая MN не является общим перпендикуляром плоскостей α и β, в противном случае теорема выполнялась бы. Тогда из точки N, расположенной в плоскости β, на плоскость α в свою очередь опустим перпендикуляр NP. Через пересекающиеся прямые MN и NP проведем плоскость γ. Плоскость γ по абсолютной геометрии будет общей перпендикулярной плоскостью к плоскостям α и β. Плоскость γ, имеющая с плоскостями α и β по одной общей точке M и N, пересечет эти плоскости соответственно по прямым a и b. Эти прямые расходящиеся, так как находятся в расходящихся плоскостях α и β. Как доказано выше, любые две расходящиеся прямые

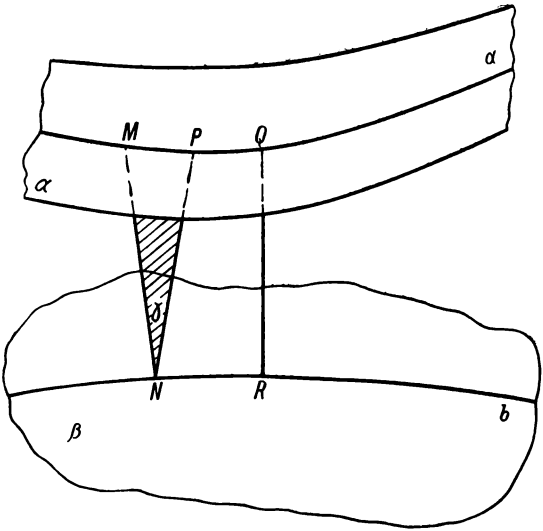


Рис. 46

имеют единственный общий перпендикуляр. Пусть для прямых a и b таким общим перпендикуляром будет QR, который, кстати сказать, будет также общим перпендикуляром плоскостей α и β, так как находится в плоскости γ, перпендикулярной α и β. Итак, расходящиеся плоскости α и β имеют по крайней мере один общий перпендикуляр QR.

Докажем единственность общего перпендикуляра для плоскостей α и β. Будем доказывать методом от противного. Предположим, что, кроме общего перпендикуляра QR, плоскости α и β имеют еще один общий перпендикуляр $Q'R'$ (на рисунке не обозначен). Соединив прямыми точку Q с точкой Q' и точку R с точкой R', получим в плоскости γ прямоугольник $QRR'Q'$, чего в пространстве Лобачевского быть не может (в геометрии Лобачевского прямоугольников не существует).

Остается теперь доказать расходимость расходящихся плоскостей α и β от их общего перпендикуляра QR. Для этой цели рассмотрим расходящиеся прямые a и b, расположенные в расходящихся плоскостях α и β. Поскольку расходящиеся прямые a и b расходятся в обе стороны от их единственного общего перпендикуляра QR, то и плоскости α и β, в которых они лежат, также будут расходиться в этих направлениях от QR. Если плоскость γ вращать вокруг общего перпендикуляра QR, то будут менять свое направление и расходящиеся прямые a и b, которые являются линиями пересечения плоскости γ с плоскостями α и β. Прямые a и b и в новых своих положениях будут расходиться одна относительно другой от их общего перпендикуляра QR. Во всех этих направлениях, которые можно брать во все стороны от QR, расходящиеся плоскости α и β будут безгранично расходиться одна относительно другой. Теорема доказана.

Докажем еще одну теорему, которая понадобится в дальнейшем.

Теорема 21. *Через прямую, параллельную плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной плоскости.*

Доказательство. Пусть прямая a параллельна плоскости α. Докажем, что через прямую a проходит единственная плоскость β, параллельная плоскости α. Для доказательства на прямой a возьмем произвольную точку M и построим конус параллельности относительно плоскости α с вершиной в точке M (рис. 47). Проведем через прямую a плоскость β, которая касалась бы конуса параллельности по образующей a. Пло-

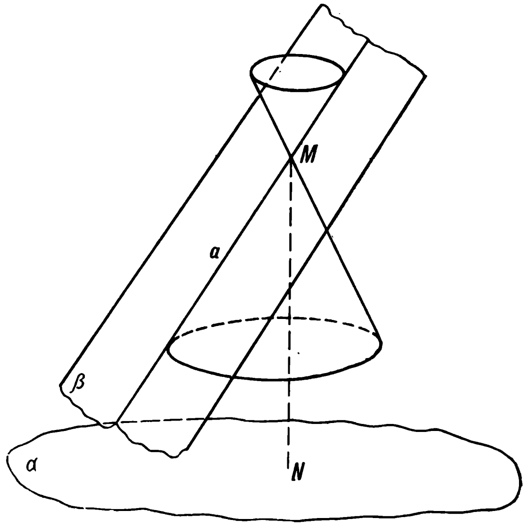


Рис. 47

скость β будет единственной плоскостью, которая, проходя через прямую a, будет параллельной плоскости α, что и требовалось доказать.

В пространстве Евклида имеют место две поверхности постоянной кривизны: плоскость и сфера. В пространстве же Лобачевского таких поверхностей больше. Там, кроме плоскости и сферы, имеются такие поверхности, как орисфера и эквидистантная поверхность.

Начнем рассмотрение со сферы. Для построения сферы в пространстве Лобачевского рассмотрим эллиптическую связку прямых, т. е. совокупность прямых пространства, проходящих через какую-нибудь фиксированную точку O, называемую центром связки. Такая связка в дальнейшем для краткости будет называться связкой O. На какой-нибудь прямой a (оси) связки O возьмем произвольную точку A (начало) и из нее относительно всех других прямых связки O будем проводить прямые равного наклона (рис. 48). Тогда геометрическое место точек пересечения прямых равного наклона, выходящих из точки A, с прямыми эллиптической связки O и образуют, по определению, сферу, которая, в частности, обладает следующими свойствами (даются без доказательства).

1. Сферу можно рассматривать как перпендикулярное (ортогональное) сечение связки O, т. е. каждая прямая связки O является нормалью (перпендикуляром) к поверхности сферы.

2. Прямая пересекает сферу не более чем в двух точках.

3. Плоскость со сферой может или не иметь общих точек, или иметь одну общую точку (касательная плоскость), или пересекать сферу по окружности (секущая плоскость).

4. Плоскость, проходящая через ось сферы (диаметральная плоскость), пересекает сферу по большой окружности, центр которой находится в центре сферы, которым является центр связки O.

5. Сферу можно рассматривать как поверхность вращения окружности вокруг своей оси (диаметра).

6. Сферу можно рассматривать как геометрическое место точек, равноудаленных от ее центра (центр связки O).

7. Все сферы одного и того же радиуса при наложении сливаются между собой (конгруэнтны), причем радиусом (или параметром) сферы называется расстояние любой точки сферы от ее центра.

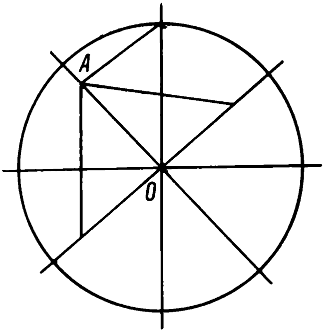


Рис. 48

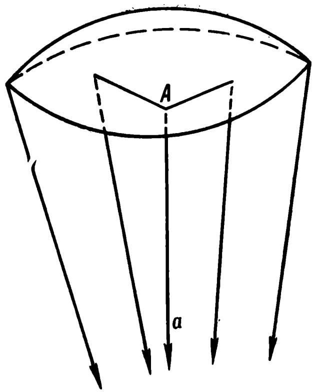


Рис. 49.

8. Сфера есть поверхность постоянной кривизны, так как ее можно без изгибания (деформации) передвигать самое по себе так, чтобы каждая точка сферы совмещалась с любой другой ее точкой и чтобы направление любой касательной к сфере в первой точке совместилось с направлением любой касательной во второй точке.

На сфере геодезическими линиями являются дуги больших кругов, центры которых находятся в центре сферы, совпадающем с центром связки *O*. Если под «прямыми» будем понимать геодезические линии (большие окружности) сферы, то на этой поверхности в системе больших окружностей будет выполняться простейшая модель неевклидовой (эллиптической) геометрии Римана (вернее, ее планиметрии), о которой подробнее будет рассказано в одиннадцатой беседе. В этой геометрии все прямые, взятые попарно, пересекаются, т. е. параллельных прямых не существует.

В основе эллиптической геометрии Римана лежит аксиома: «Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести ни одной прямой, лежащей в одной плоскости с данными точкой и прямой и не пересекающей данную прямую».

Для построения орисферы возьмем параболическую связку прямых, т. е. совокупность всех прямых пространства, параллельных одной и той же прямой (ось связки) в одном из ее направлений (связка параллельных между собой прямых). Теперь из какой-нибудь точки A какой-нибудь прямой a (оси) рассматриваемой связки будем проводить прямые равного наклона относительно всех других прямых связки (рис. 49). Тогда геометрическое место пересечения прямых равного наклона с прямыми параболической связки и дает нам, по определению, орисферу, обладающую следующими свойствами (даются без доказательства).

1. Орисферу можно рассматривать как ортогональное сечение параболической связки, т. е. каждая прямая параболической связки является перпендикуляром (нормалью) к поверхности орисферы.

2. Прямая с орисферой может иметь не более двух общих точек.

3. Плоскость, не проходящая через ось орисферы, может не иметь общих точек с орисферой, или касаться ее в точке, или пересекать ее по окружности.

4. Плоскость, проходящая через ось орисферы, пересекает орисферу по орициклу.

5. Плоскость не осевого сечения пересекает орисферу по некоторой окружности.

6. Орисферу можно рассматривать как поверхность вращения орицикла вокруг любой своей оси.

7. Все орисферы при совмещении сливаются между собой (конгруэнтны).

8. Орисфера есть поверхность постоянной кривизны, так как ее можно без изгибания (деформации) передвигать самое по себе так, чтобы каждая точка орисферы совмещалась с любой ее точкой и чтобы направление любой касательной к орисфере в первой точке совместилось с направлением любой касательной во второй точке.

На орисфере в системе геодезических линий, которыми являются орициклы, выполняется модель евклидовой геометрии (планиметрия). В самом деле, на орисфере выполняются все плоские аксиомы абсолютной геометрии, в частности:

1. Через любые две точки орисферы проходит один и только один орицикл.

2. Дугу орицикла можно неограниченно продолжать в обе стороны.

3. Из каждой точки орисферы любым геодезическим радиусом можно описать окружность.

Выполнимость всех этих и других плоских аксиом геометрии проверяется. Далее, на орисфере в системе орициклов (геодезических линий) выполняется евклидов постулат о параллельных линиях. Докажем это.

Теорема 22. *Через точку M, взятую вне орицикла AB, на орисфере, где они расположены, можно провести один и только один орицикл, не пересекающий данный.*

Доказательство. Через точки A, B и M, взятые на орисфере, проведем соответственно ее оси a, b и m. Тогда $a \| b \| m$, так как они принадлежат одной и той же параболической связке (рис. 50). Плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b, обозначим через α. Заметим, что $m \| \alpha$, так как прямая m параллельна прямым

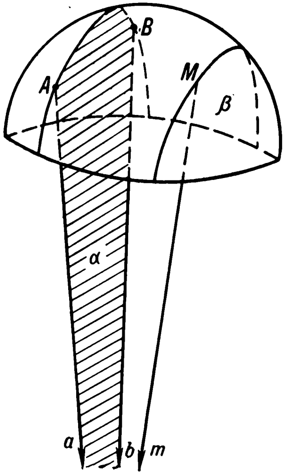


Рис. 50

a и b, расположенным в плоскости α. На основании ранее доказанной теоремы через m проходит одна единственная плоскость β, параллельная плоскости α. Эта плоскость β, как плоскость осевого сечения, пересекает данную орисферу по орициклу, проходящему через точку M и не пересекающему орицикла AB. Всякий другой орицикл, проходящий через точку M, будет уже пересекать орицикл AB, так как в противном случае через ось M относительно плоскости α проходила бы еще одна плоскость, не пересекающая эту плоскость, чего, как известно, быть не может. Выходит, что через любую точку орисферы, расположенную вне орицикла этой же орисферы, можно провести единственный орицикл, не пересекающий данный, что и требовалось доказать.

Познакомимся теперь с эквидистантной поверхностью. Для ее построения рассмотрим гиперболическую связку прямых, т. е. совокупность всех прямых пространства, перпендикулярных одной и той же плоскости α, называемой базой связки. Такую связку для краткости будем называть связкой α. Теперь из какой-нибудь точки A какой-нибудь оси a, приняв за ось a произвольную прямую связки α, будем проводить прямые равного наклона ко всем другим прямым связки α (рис. 51). Тогда геометрическое место точек пересечения с прямыми связки α составит некоторую поверхность, которая, по определению, и называется эквидистантной поверхностью. Эта эквидистантная поверхность обладает следующими свойствами (даются без доказательства).

1. Эквидистантная поверхность есть ортогональное (перпендикулярное) сечение гиперболической связки, т. е. каждая прямая гиперболической связки является нормалью (перпендикуляром) к эквидистантной поверхности.

2. Прямая с эквидистантной поверхностью может иметь не больше двух общих точек.

3. Плоскость, не проходящая через ось эквидистантной поверхности, может с ней или совсем не иметь общих точек, или иметь одну общую точку (касательную плоскость), или пересекать эквидистантную поверхность по окружности (секущая плоскость).

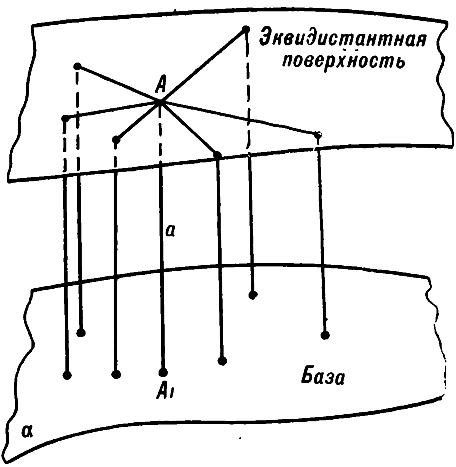


Рис. 51

4. Плоскость, проходящая через ось эквидистантной поверхности (она же и ось гиперболической связки), пересекает эквидистантную поверхность по эквидистанте.

5. Эквидистантную поверхность можно рассматривать как поверхность вращения эквидистанты вокруг любой ее оси.

6. Эквидистантную поверхность можно рассматривать, как геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же плоскости (базы гиперболической связки) и расположенных по одну сторону от нее.

7. Эквидистантные поверхности одного и того же параметра при совмещении сливаются (конгруэнтны) друг с другом, причем параметром эквидистантной поверхности называется длина перпендикуляра, опущенного из любой точки эквидистантной поверхности до базисной плоскости.

8. Эквидистантная поверхность есть поверхность постоянной кривизны, так как ее можно без изгибания (деформации) передвигать самое по себе так, чтобы каждая точка эквидистантной поверхности совмещалась с любой ее точкой и чтобы направление любой касательной к эквидистантной поверхности в первой точке совпадало с направлением любой касательной во второй точке.

На эквидистантной поверхности геодезическими линиями являются дуги эквидистант. Оказывается, в системе эквидистант (геодезических линий) на эквидистантной поверхности выполняется модель планиметрии Лобачевского. Проверкой установлено, что в указанной системе выполняются все планиметрические аксиомы абсолютной геометрии и, в частности, такие:

1. Через любые две точки эквидистантной поверхности проходит на этой поверхности одна и только одна эквидистанта.

2. Дугу эквидистанты на эквидистантной поверхности можно неограниченно продолжать в обе стороны.

3. Из каждой точки эквидистантной поверхности геодезическим радиусом можно описать окружность.

Чтобы сказать, что вышеуказанная система действительно составляет модель геометрии Лобачевского (точнее, ее планиметрии), надо доказать выполнимость для этой системы аксиомы Лобачевского о параллельных прямых.

Теорема 23. *Через точку M, взятую вне эквидистанты AB, на эквидистантной поверхности, где они расположены, можно провести более одной эквидистанты, не пересекающей данной.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что между эквидистантной поверхностью и ее базой путем ортогонального проектирования устанавливается взаимно однозначное соответствие, согласно которому всякой точке эквидистантной поверхности соответствует единственная точка базисной плоскости, и обратно, причем в том и другом случае различным точкам эквидистантной поверхности соответствуют различные точки базы. Такое же соответствие имеет место между эквидистантами эквидистантной поверхности и прямыми базисной плоскости, т. е. всякой эквидистанте эквидистантной поверхности соответствует прямая базы, и обратно, причем разным эквидистантам эквидистантной поверхности соответствуют разные прямые базы и обратно.

Теперь докажем, что через точку M, взятую вне эквидистанты AB, на эквидистантной поверхности проходит более одной эквидистанты, не пересекающей данную. Обозначим через M' и $A'B'$ проекции M и AB на базу (рис. 52). Через точку M' относительно прямой $A'B'$ проведем

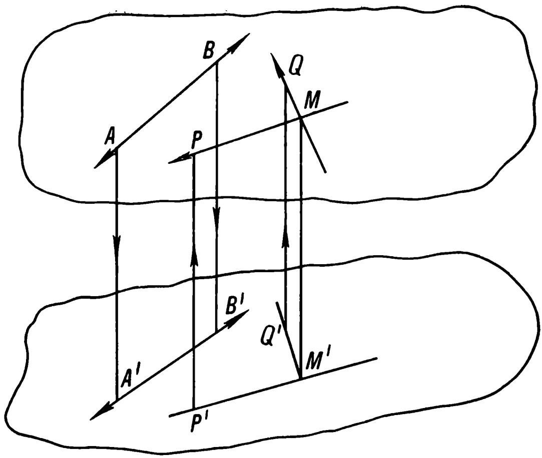


Рис. 52

параллельные прямые $M'P'$ и $M'Q'$, так как база есть плоскость Лобачевского, а, следовательно, в ней выполняется параллельность в смысле Лобачевского. Выходит, что $M'P' \| B'A'$ и $M'O' \| A'B'$ (направление параллельности указано стрелками). Спроектируем теперь прямые $M'Q'$ *и* $M'P'$ на эквидистантную поверхность, получим эквидистанты MQ и MP, причем та и другая не пересекает AB. Следовательно, в эквидистантной поверхности через точку M, взятую вне эквидистанты AB, проходит более одной эквидистанты (по крайней мере две: MP и MQ), не пересекающей данную, что и требовалось доказать.

Итак, на основных поверхностях постоянной кривизны пространства Лобачевского (сфера, орисфера, эквидистантная поверхность) в системе геодезических линий выполняются все три геометрии: эллиптическая геометрия Римана на сфере, геометрия Евклида на орисфере и геометрия Лобачевского на эквидистантной поверхности. Обратим внимание, что Лобачевский, отрицая геометрию Евклида на плоскости, не мог освободиться от нее совсем. Она, по меткому выражению профессора В. Ф. Кагана, с плоскости «переселилась» на поверхность орисферы.

Из того, что в пространстве Лобачевского на орисфере выполняется планиметрия Евклида, вытекает утверждение: если геометрия Лобачевского не имеет противоречий, то не может их иметь и планиметрия Евклида, т. е. вопрос о непротиворечивости планиметрии сводится таким образом к вопросу о непротиворечивости геометрии Лобачевского.

Перед учеными вполне естественно встал вопрос: нельзя ли, наоборот, непротиворечивость геометрии Лобачевского свести к непротиворечивости геометрии Евклида. Нет ли в пространстве Евклида такой поверхности постоянной кривизны, на которой, хотя бы в ограниченной части, выполнялась, скажем, планиметрия Лобачевского? Оказывается, такая поверхность есть. Это поверхность псевдосферы, получаемая вращением трактрисы вокруг своей оси. С этой поверхностью мы уже познакомились раньше. На ней, как мы видели, в системе геодезических линий выполняется геометрия Лобачевского (ее планиметрия).

Беседа десятая

РЕАЛЬНА ЛИ ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО?

Как уже говорилось, открытие Лобачевского официальной наукой, представляемой Петербургской академией, и отдельными учеными было воспринято неприязненно. Этому способствовал тот факт, что евклидова геометрия очень проста и удобна в применении, а, главное, не расходится с опытными данными. Она оказалась очень удобной для построения классической механики и других теорий. Евклидовой геометрией мы пользуемся на каждом шагу. Когда нам требуется измерить какой-нибудь участок, мы, не задумываясь, делаем это по формулам евклидовой геометрии, полагая, что существуют прямоугольники и квадраты и что площадь прямоугольника равняется произведению длины на ширину.

А в геометрии Лобачевского прямоугольников и квадратов не существует и площадь плоских фигур там вычисляется по совершенно иным формулам. Вот это необычное для многих ученых в свое время казалось просто невозможным. Но выше говорилось, что необычное нельзя отождествлять с невозможным. Всякое подлинно новое открытие потому и ново, что несет в себе много необычного, расширяющего знания и представления об окружающей нас реальной действительности.

Консерватизм ученых, воспитанный многовековыми традициями евклидовой геометрии, заставлял ученых-геометров смотреть только в одну сторону и не замечать новых идей, разрушающих старые представления и расширяющих геометрический кругозор. Верно говорится, что старое никогда не сдается без сопротивления и борьбы. Вот почему при жизни Лобачевского его геометрия была встречена «в штыки», причем даже таким крупным математиком, как академик Остроградский, а самого Лобачевского современники называли «чудаком-геометром».

Это лишний раз подтверждает, что Лобачевский был далеко впереди своего века и его идеи были слишком новы и необычны даже для ученых с мировой известностью.[1]

Вот почему многие геометры — современники Лобачевского — считали, что геометрия Лобачевского — это грандиозное доказательство V постулата методом от противного, что дальнейшее ее развитие рано или поздно должно привести к логическому противоречию.

Мы склонны признать геометрию Лобачевского,— говорили его противники,— если бы кому-нибудь удалось доказать, что ее дальнейшее развитие никогда не приведет к противоречию и что она подтверждается, как и евклидова геометрия, непосредственными измерениями.

Сам Лобачевский на поставленные вопросы дал косвенные ответы. Прямой ответ был получен итальянским геометром Евгением Бельтрами (1835—1900) в 1868 г., через 12 лет после смерти Лобачевского. Занимаясь вопросами картографии, Бельтрами решал задачи, связанные с отображением одной поверхности на другую с таким расчетом, чтобы геодезические линии одной поверхности переходили в геодезические линии другой, причем под геодезическими линиями надо понимать линии наикратчайших расстояний между точками этой поверхности (на плоскости — прямые линии, на сфере — круги, центры которых находятся в центре сферы и т. п.). Решение этих задач и привело итальянского ученого к открытию обширного класса поверхностей постоянной отрицательной кривизны, названных им псевдо-

---

[1] Говоря о причинах непризнания геометрии Лобачевского, нельзя умолчать о том, что большинство работ Лобачевского написано крайне сжатым языком, причем, значительная часть выкладок опущена. Неудивительно, что в то время, пожалуй, только два человека — Гаусс и Янош Больяй — смогли разобраться в его выкладках.

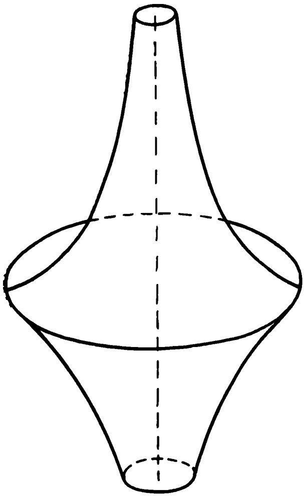


Рис. 53

сферами, на которых, как он показал, и реализуется двумерная геометрия Лобачевского.

Простейшая из псевдосфер (рис. 53) получается вращением трактрисы вокруг своей оси. (*Трактрисой* называется кривая (рис. 54), в каждой точке которой длина касательной от точки касания до точки пересечения касательной с некоторой прямой (осью трактрисы) есть величина постоянная). Термин «трактриса» впервые был введен в употребление немецким математиком Лейбницем (1646—1716), в переводе на русский язык он означает «влекомая». Это указывает на то, что трактриса получается механическим путем. Действительно, трактрису всегда описывает материальная точка, влекомая нитью постоянной длины, если свободный конец нити в натянутом положении перемещать вдоль некоторой

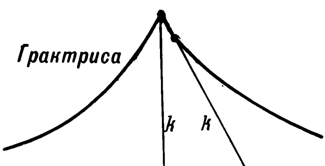


Рис. 54

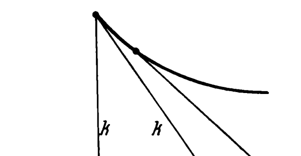


Рис. 55

прямой, служащей осью трактрисы. На рис. 55 показана траектория круглой гирьки, которую тянут по горизонтальной плоскости вдоль прямой в направлении стрелки за свободный конец нерастяжимой нити (длины k), привязанной к ушку этой гирьки.

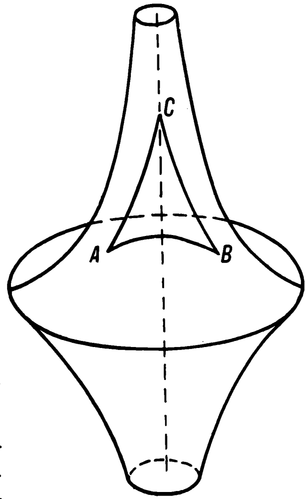


Рис. 56

На модели псевдосферы (рис. 56) отметим три произвольные точки A, B и C, не лежащие на одной геодезической линии, далее возьмем нерастяжимую нить (для этой цели можно использовать суровые нитки) и покроем ее мелом. Если теперь закрепить нить в натянутом положении между точками A и B и, оттянув ее немного, ударить о поверхность, то на ней появится белый отпечаток геодезической линии, соединяющей точки A и B. Так можно построить геодезические линии, проходящие через точки A и C, C и B и получить геодезический треугольник ABC. Из чисто наглядных соображений можно заключить, что сумма внутренних углов этого треугольника меньше $2d$. В этом можно убедиться и вычислением.

Итак, в евклидовом пространстве существует поверхность, называемая псевдосферой (ее даже можно смоделировать), на которой в системе геодезических линий выполняется геометрия Лобачевского.

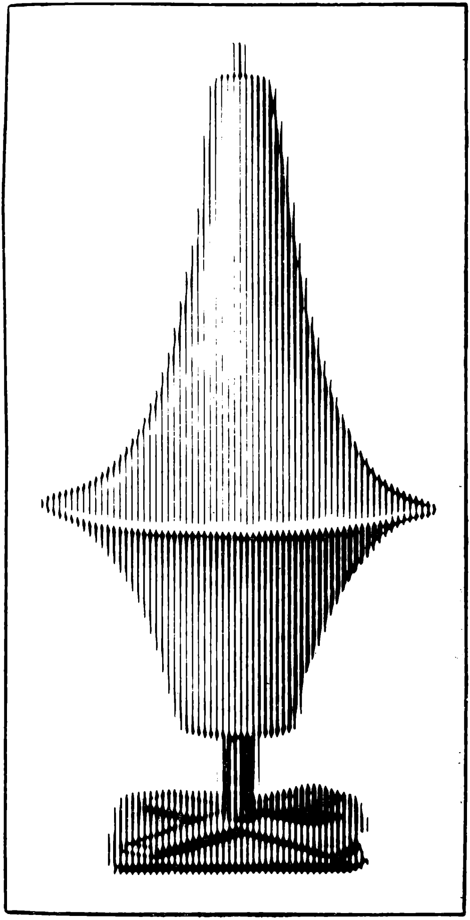
После открытия Бельтрами, изложенного им в работе «Опыт толкования неевклидовой геометрии» (1868), стало совершенно ясно, что:

во-первых, «воображаемая геометрия» Лобачевского, по крайней мере ее планиметрия, нашла свое реальное истолкование на вполне конкретных образах евклидовой геометрии. Геометрия Лобачевского из сферы беспочвенной фантазии, как ее представляли противники, стала прикладной наукой. Тригонометрические формулы Лобачевского получили вполне практическое применение хотя бы для решения геодезических треугольников псевдосферических поверхностей евклидова пространства;

во-вторых, если считать, что евклидова двумерная геометрия не имеет логических противоречий, то их не может иметь и двумерная геометрия Лобачевского. В самом деле, если бы двумерная геометрия Лобачевского имела какое-нибудь логическое противоречие типа A и не-A одновременно, то это противоречие обнаружилось бы и на псевдосфере, т. е. оно просочилось бы в евклидово пространство, и евклидова геометрия имела бы тогда противоречие. Следовательно, тот, кто считает геометрию Лобачевского противоречивой, должен признать противоречивой и евклидову геометрию;

в-третьих, V постулат недоказуем при помощи плоских (планиметрических) аксиом абсолютной геометрии. Если бы его можно было доказать, то он выполнялся бы на псевдосфере в системе геодезических линий, а этого, как мы знаем, быть не может (на псевдосфере выполняется аксиома Лобачевского);

в-четвертых, открытие Бельтрами продемонстрировало новый метод геометрических исследований — метод истолкования (интерпретаций) одной геометрии при помощи другой.



Модель псевдосферы

Работа Бельтрами буквально открыла глаза всем ученым, скептически настроенным против геометрии Лобачевского, и убедила их в логическом равноправии двух геометрических систем — евклидовой и неевклидовой. Работа Бельтрами возбудила интерес к геометрии Лобачевского и явилась одним из важнейших стимулов ее признания.

Однако и после исследования Бельтрами оставалось все же много неясного. Выяснилось, что на псевдосфере, какого бы типа она ни была, планиметрия Лобачевского выполняется только частично (локально), так как на любой из псевдосфер имеется острое ребро, состоящее из *особых точек*. На тех частях псевдосферы, где нет особых точек, геометрия Лобачевского выполняется, но на всей поверхности в целом геометрия Лобачевского не выполняется. Далее, на псевдосфере выполняется (и то локально) только планиметрия Лобачевского, а не вся его геометрия в целом, включая планиметрию и стереометрию.

Невольно возник вопрос: нельзя ли в евклидовом пространстве найти такую поверхность постоянной отрицательной кривизны, не содержащую особых точек, на которой бы двумерная геометрия Лобачевского выполнялась во всех точках? [1]

---

[1] Поверхность имеет постоянную кривизну, если любую фигуру, которая целиком лежит на этой поверхности, можно поворачивать вокруг любой ее точки на любой угол, не выводя ее за пределы поверхности (плоскость и сфера). Такое вращение может сопровождаться непрерывным изгибанием (например, при вращении листа бумаги на поверхности цилиндра или конуса). Всякая поверхность постоянной кривизны (или кусок такой поверхности) может быть наложена либо на плоскость, либо на некоторую сферу, либо на некоторую псевдосферу; в первом случае кривизна поверхности равна нулю, во втором случае она положительна, в третьем — отрицательна.

Немецкий ученый Гильберт доказал, что таких поверхностей не существует.

Бельтрами пытался дать реальное истолкование стереометрии Лобачевского, но положительных результатов не добился и сделал неверный для себя вывод, что такое истолкование невозможно.

В 1871 г. немецкий математик Клейн (1849—1925) предложил весьма оригинальное истолкование геометрии Лобачевского на обычных образах евклидовой геометрии и не только для всей планиметрии, но и для всей стереометрии. Работа Клейна оказалась величайшим триумфом в деле окончательного признания геометрии Лобачевского как логически стройной геометрической системы. И на вопрос, реальна ли геометрия Лобачевского, уже без всяких колебаний давался утвердительный ответ: да, реальна. Во всяком случае реальна постольку, поскольку реальна евклидова геометрия.

В чем же заключается суть интерпретации геометрии Лобачевского по Клейну? Основная идея этой интерпретации принадлежит английскому математику Артуру Кэли (1821—1895) и была высказана им в связи с изучением проективной геометрии. Эту идею подхватил Клейн и положил в основу своей интерпретации геометрии Лобачевского на плоскости и в пространстве.

Рассмотрим в евклидовом пространстве произвольный шар. Под пространством Лобачевского будем понимать часть евклидова пространства, заключенную внутри взятого шара, причем точки, расположенные на поверхности шара, пространству Лобачевского не принадлежат. Далее, точки пространства Лобачевского будем называть точками Лобачевского. Под прямыми Лобачевского будем понимать всякую хорду, соединяющую любые две точки поверхности рассматриваемого шара, причем концы хорд исключаются; и под плоскостью Лобачевского — всякое плоское сечение шара, т. е. круги, причем рассматриваются точки, расположенные внутри этих кругов (точки Лобачевского), а точки, расположенные на окружности этих кругов, исключаются.

Две прямые Лобачевского пересекаются, если, являясь хордами шара, пересекаются внутри этого шара, в противном случае они пересекаться не будут. На рис. 57 прямая Лобачевского a пересекает плоскость Лобачевского α в точке Лобачевского M; две прямые Лобачевского b и c не пересекаются, так как точка N пространству Лобачевского не принадлежит (точка N не является точкой Лобачевского).

Для всех точек, прямых и плоскостей Лобачевского выполняются все аксиомы абсолютной геометрии. Так, две точки Лобачевского вполне определяют прямую Лобачевского, через них проходящую (т. е. две точки, взятые внутри шара, вполне определяют хорду, через них проходящую); прямолинейный отрезок Лобачевского можно неограниченно продолжать в обе стороны

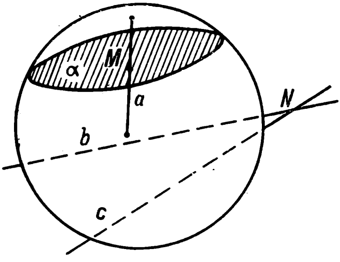


Рис. 57

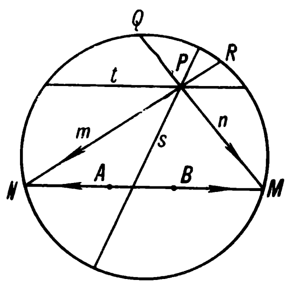


Рис. 58

(концы хорд выполняют роль бесконечно удаленных точек) [1]; три точки Лобачевского, не расположенные на одной прямой Лобачевского, вполне определяют плоскость Лобачевского и т. д.

Покажем, что в интерпретации Клейна выполняется аксиома Лобачевского. Для этой цели рассмотрим отдельно какую-нибудь плоскость Лобачевского, т. е. круг, являющийся плоским сечением шара (рис. 58). Рассмотрим прямую Лобачевского AB (отрезок хорды MN) и точку Лобачевского P вне этой прямой (в дальнейшем точки и прямые Лобачевского будем называть «точками» и «прямыми» в кавычках). Через эту «точку» проведем «прямые» Pm и Pn, которые будут параллельными относительно «прямой» AB, одна — в одном направлении, другая — в другом. Действительно, всякая «прямая» s, идущая внутри вертикальных углов MPN и RPQ, пересекает AB, а всякая «прямая» t, идущая внутри вертикальных углов MPR и NRQ, не пересекает AB. «Прямые» s образуют множество сходящихся «прямых» относительно AB, а «прямые» t — множество расходящихся «прямых» относительно AB. «Прямые» Pm и Pn — предельные прямые относительно «прямой» AB. Каждая из них не пересекает AB (точки M и N не являются точками Лобачевского) и отделяют расходящиеся «прямые» от сходящихся. Значит, «прямые» Pm и Pn параллельны относительно прямой AB, одна в направлении NM, другая в направлении MN.

Таким образом, интерпретация Клейна есть интерпретация геометрии Лобачевского не только на плоскости, но и в пространстве.

---

[1] Для понимания указанного факта надо ознакомиться с неевклидовой метрикой, понятие которой дается на стр. 172—175 настоящей книги.

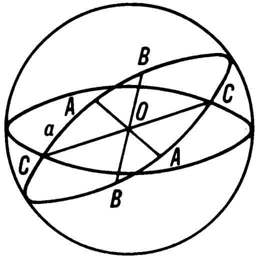


Рис. 59

Здесь возникает неясность: как измерять «отрезки» «прямых», чтобы предельный отрезок AB, когда один или оба его конца будут точками сферы, имел бы бесконечную длину. Здесь мы должны исходить из следующих соображений.

1. Под «длиной отрезка» будем понимать неотрицательное вещественное число.

2. Два «отрезка» будут называться «равными», если им соответствует одно и то же вещественное число.

3. «Отрезок», у которого концы совпадают, имеет «длину», равную нулю.

4. Если «длину» отрезка AB в новом понимании обозначим через (AB), то $(AB)=(AC)+$ $+(CB)$, где C — любая «точка» внутри «отрезка» AB, т. е. расположенная между A и B.

Согласно определению, под неевклидовой длиной или просто «длиной отрезка» AB (рис. 59) будем понимать вещественное, число, получаемое по формуле

$$(AB)=\frac{k}{2}\ln\left(\frac{AM}{MB}:\frac{AN}{NB}\right),$$

где (AB) — неевклидова длина отрезка AB; AM, MB, AN, NB — евклидовы длины отрезков AM, MB, AN и NB; k — постоянный положительный множитель; $\ln$ — натуральный логарифм. Выражение, стоящее в круглых скобках, носит название ангармонического отношения четырех точек A, B, M и N.

Только что определенная формальным образом неевклидова «длина» удовлетворяет всем четырем требованиям, высказанным выше.

1. (AB) — всегда число вещественное. Точки M и N делят отрезок AB внешним образом, т. е. M и N находятся вне отрезка AB, тогда ангармоническое отношение рассматриваемых четырех точек есть всегда неотрицательное число. Логарифм этого неотрицательного числа существует и может быть любым вещественным числом, положительным или отрицательным, в зависимости от расположения.[1]

2. Два отрезка AB и CD называются «равными», если $(AB)=(CD)$.

3. Если «точки» A и B сливаются в одну «точку» C, то $(CC)=0$. В самом деле,

$$(CC)=\frac{k}{2}\ln\left(\frac{CM}{MC}:\frac{CN}{NC}\right)=\frac{k}{2}\ln 1=0.$$

4. Если «точка» C лежит на «прямой» между «точками» A и B, то

$$|AB|=|AC|+|CB|.$$

Действительно,

$$|AC|+|CB|=\frac{k}{2}\ln\left(\frac{AM}{MC}:\frac{AN}{NC}\right)+$$
$$+\frac{k}{2}\ln\left(\frac{CM}{MB}:\frac{CN}{NB}\right)=\frac{k}{2}\ln\left(\frac{AM}{MC}:\frac{AN}{NC}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{CM}{MB}:\frac{CN}{NB}\right)=\frac{k}{2}\ln\left(\frac{AM}{MB}:\frac{AN}{NB}\right)=|AB|.$$

[1] Здесь доказано, что число (AB) может быть положительным или отрицательным. Но длина, согласно условию, должна быть неотрицательным числом, т. е. $(AB)\geqslant 0$. Этого можно добиться, если условиться обозначать «точки» M и N так, чтобы «отрезки» AB и MN были всегда противоположного направления (как на рис. 58). Тогда будет — $AM:MB>1$,— $AN:NB<1$, значит, сложное отношение $(ABMN)>1$ и $(AB)>0$.

Прямолинейный «отрезок» AB можно продолжить в обе стороны до бесконечности, т. е.

$$\lim_{B\to M}|AB| = \infty \text{ и } \lim_{A\to N}|AB| = \infty.$$

В самом деле,

$$\lim_{B\to M}|AB| = |AM| = \frac{k}{2}\ln\left(\frac{AM}{MM} : \frac{AN}{NM}\right) =$$
$$= \frac{k}{2}\ln\infty = \frac{k}{2}\cdot\infty = \infty;$$

$$\lim_{A\to N}|AB| = |NB| = \frac{k}{2}\ln\left(\frac{NM}{MB} : \frac{NN}{NB}\right) = \frac{k}{2}\ln\infty =$$
$$= \frac{k}{2}\cdot\infty = \infty.$$

Далее Клейн специальной формулой устанавливает «равенство» углов и в своей интерпретации выводит знаменитую функцию Лобачевского

$$\Pi(x) = 2\operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{k}},$$

причем постоянная Лобачевского k, оказывается, совпадает с той постоянной k, которая входит в формулу для вычисления неевклидовых длин прямолинейных «отрезков».

В итоге в рамках евклидовой геометрии на ее знакомых образах можно построить всю геометрию Лобачевского.

Интерпретация Клейна навеки связала геометрию Лобачевского с геометрией Евклида нерушимыми логическими узами, согласно которым ни одна из этих геометрических систем не имеет логического преимущества перед другой: или они обе непротиворечивы, или обе противоречивы. И если евклидову геометрию будем считать непротиворечивой и в этом смысле законной, то, хотим мы этого или не хотим, надо признать, что и геометрия Лобачевского непротиворечива и законна.

Если в интерпретации Бельтрами были некоторые изъяны, дававшие некоторым ученым пищу для скептицизма, то интерпретация Клейна этот скептицизм рассеяла. Во-первых, стало совершенно ясно, что нельзя доказать V постулат при помощи аксиом абсолютной геометрии. Во-вторых, геометрия Лобачевского не может иметь логических противоречий, поскольку мы считаем, что евклидова геометрия лишена этих противоречий. В-третьих, геометрия Лобачевского не лишена и своего практического приложения, хотя бы как геометрия точек, хорд и плоских сечений шара евклидова пространства.

Как было выяснено выше, непротиворечивость геометрии Лобачевского сводится к непротиворечивости евклидовой геометрии. А какова гарантия того, что геометрия Евклида непротиворечива? К рассмотрению этого вопроса мы сейчас и переходим.

Прежде всего надо договориться, что́ выбрать за эталон непротиворечивости. Обычно этим эталоном служит арифметика вещественных чисел. Уверенность в непротиворечивости аксиом арифметики, а, следовательно, и всей арифметики вещественных чисел, люди черпают из многовековой практики. На протяжении всей истории человеческого общества люди пользуются арифметикой вещественных чисел (сначала целых, потом дробных) и ни разу не пришли к логическому противоречию внутри этой математической дисциплины. Кроме того, в результате основополагающих работ главным образом немецких математиков Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора арифметика достигла тех безупречных высот логической строгости и абстракции, которым может позавидовать любая абстрактная область человеческого мышления.

Возникает вопрос: нельзя ли перекинуть «мостик» от евклидовой геометрии к арифметике вевещественных чисел, который навеки соединил бы эти две математические дисциплины, причем так соединил, чтобы из непротиворечивости арифметики вещественных чисел вытекала непротиворечивость евклидовой геометрии?

Оказывается, такой «мостик» создать можно. Этим «мостиком» в настоящее время служит аналитическая интерпретация евклидовой геометрии. Суть этой интерпретации в следующем. Введем в рассмотрение необычные точки, прямые и плоскости, которые будем называть «точками», «прямыми» и «плоскостями» (в кавычках). Под «точкой» будем понимать любую тройку вещественных чисел (x, y, z), взятых в определенном порядке; под «плоскостью» — совокупность всех «точек», удовлетворяющих одному уравнению первой степени с вещественными коэффициентами

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

под «прямой» — пересечение двух «плоскостей», т. е. совокупностью всех «точек», удовлетворяющих одновременно двум уравнениям первой степени с вещественными коэффициентами

$$Ax+By+Cz+D=0;$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Далее также в порядке определения дается необычное толкование «длины», «угла», «тригонометрических функций» и т. д.

Можно проверить, что в этой аналитической интерпретации выполняются все аксиомы евклидовой геометрии (на плоскости и в пространстве), в частности, конечно, и V постулат Евклида.

Отсюда делается основной вывод: в евклидовой геометрии нет и не может быть логического противоречия ни в аксиомах, ни в теоремах, вытекающих из этих аксиом, так как в противном случае через аналитическую интерпретацию это логическое противоречие проникло бы в учение о вещественных числах, и арифметика вещественных чисел была бы противоречивой системой, а этого быть не может на основании ранее сказанного.

Итак, геометрия Лобачевского непротиворечива постольку, поскольку непротиворечива евклидова геометрия, а та в свою очередь непротиворечива постольку, поскольку непротиворечива арифметика вещественных чисел; непротиворечивость последней продиктована многовековой практикой человеческого общества в самом широком смысле этого слова.

Беседа одиннадцатая

ВОЗМОЖНА ЛИ ГЕОМЕТРИЯ БЕЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ?

На вопрос, поставленный в заголовке настоящей беседы, надо дать утвердительный ответ. Да, в настоящее время есть такая геометрия, в которой нет параллельных линий. Впервые такую геометрию открыл выдающийся немецкий математик Георг Бернхард Риман (1826—1866). В основе геометрии Римана[1] лежит его аксиома:

[1] Здесь и дальше, если нет оговорки, под термином «геометрия Римана» (или «Риманова геометрия») имеется в виду геометрия Римана в «узком смысле», или «эллиптиче-

«Любые две прямые, расположенные в одной плоскости, пересекаются». Следовательно, в геометрии Римана параллельных линий не существует.

Геометрия Римана, поскольку она отрицает V постулат, является неевклидовой геометрией, а так как она отрицает и аксиому Лобачевского, она не может совпадать и с геометрией Лобачевского.

В геометрии Римана прямые мыслятся как замкнутые линии, имеющие всегда одну и ту же длину. Двумерная геометрия Римана в простейшем случае напоминает геометрию сферы, причем для простоты радиус сферы считается равным единице. В этой двумерной геометрии Римана, в частности, имеют место следующие теоремы.

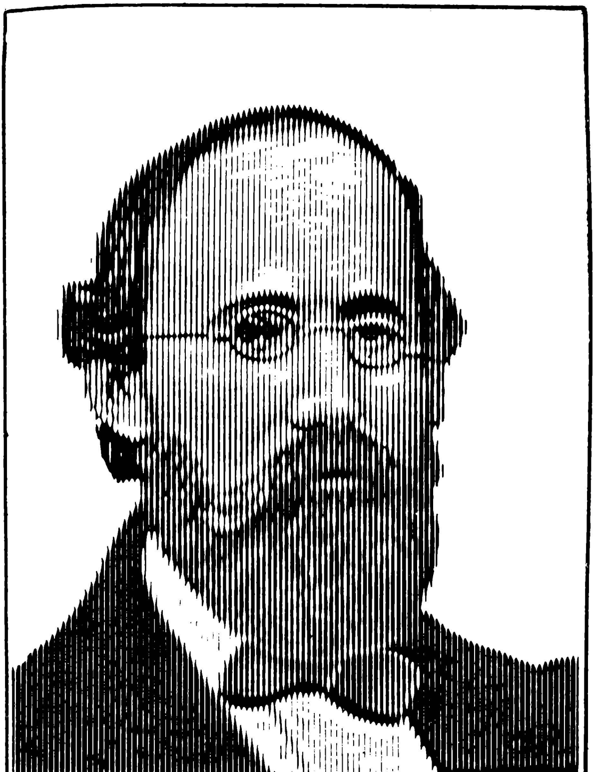
1. Сумма внутренних углов треугольника всегда больше $2d$. Существуют треугольники с двумя и с тремя прямыми углами.

2. Внешний угол треугольника не всегда больше внутреннего, не смежного с ним. Здесь возможны все три случая: или этот внешний угол больше внутреннего, не смежного с ним, или равен ему, или даже меньше его.

3. Длина всякой прямой конечна и равна числу π.

ская геометрия Римана», в отличие от геометрии Римана в «широком смысле», которая является в известном смысле дальнейшим обобщением всех трех геометрий (евклидовой геометрии, геометрии Лобачевского и геометрии Римана в «узком смысле»).

Новые идеи по геометрии Риман изложил в мемуаре «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии», опубликованном посмертно в 1868 г. Впервые свои идеи Риман высказал на публичной лекции в 1854 г., на которой присутствовал Гаусс. На русском языке мемуар Римана появился в 1893 г. в сборнике, посвященном столетию со дня рождения Лобачевского. Издателем этого сборника является Казанское физико-математическое общество.



Георг Риман

4. Периметр любого треугольника не может превосходить число 2π.

5. Площадь любого треугольника вычисляется по формуле

$$S_{\Delta}=\alpha+\beta+\gamma-\pi,$$

где α, β, γ — три угла треугольника.

6. Площадь всей плоскости конечна и равна числу 2π.

7. Эквидистанта, построенная для любой прямой, есть окружность.

Все перечисленные теоремы получают наглядное истолкование, если под основной «плоскостью», на которой строится планиметрия Римана, будем понимать сферу единичного радиуса евклидова пространства (рис. 59). «Точкой» будем называть оба конца любого диаметра этой сферы, а «прямой» — окружность любого большого круга той же сферы.

Из этой интерпретации геометрии Римана с большой очевидностью вытекает, что любая «прямая» конечна, замкнута и имеет длину π; далее, площадь «основной плоскости» равняется 2π (площади полусферы). Совершенно ясно, что любые две прямые a и b пересекаются в одной точке (на рис. 59 — «точка» C).

Таким образом, геометрию Римана можно рассматривать как геометрию многообразия (термин самого Римана) конечных размеров, конечного пространства.

Поскольку геометрия Римана интерпретируется на знакомых образах евклидовой геометрии, то она не может иметь противоречий без того, чтобы этих противоречий не было в евклидовой геометрии. Следовательно, и геометрия Римана непротиворечива и законна постольку, поскольку непротиворечива и законна евклидова геометрия.

Рассматривая пространство как многообразия, в каждом из которых устанавливается своя метрика и кривизна, Риман пришел к выводу, что геометрия пространства постоянной нулевой кривизны есть геометрия Евклида; геометрия пространства постоянной отрицательной кривизны есть геометрия Лобачевского, и, наконец, геометрия постоянной положительной кривизны есть геометрия Римана (в узком смысле или эллиптическая).

Все три геометрии, каждая по-своему, позволяют человеку проникать в глубины и тайны реального пространства и в разных масштабах изучать окружающий мир.

Неевклидовы геометрии помогли физикам расширить рамки наших представлений о реальном пространстве. Оказывается, как показал Эйнштейн, нельзя реальное пространство рассматривать как пустое вместилище, не связанное с распределением материальных масс. А если учитывать распределение тяготеющих масс в пространстве и времени, то для изучения реального пространства мало одной евклидовой геометрии, а нужны еще и неевклидовы геометрии. Теория относительности использовала риманову геометрию (в широком смысле) и в свою очередь послужила стимулом к ее дальнейшему развитию.

В своей теории относительности Эйнштейн вывел формулы, без которых невозможны современное освоение космоса, современная атомная и ядерная физика и химия. Знаменитая формула теории относительности $W=Mc^2$, связывающая функциональной зависимостью энергию W с массой M, где c — скорость света в вакууме, взята на вооружение современной наукой.

«Без этих формул (формул теории относительности) невозможно было бы понять ни расщепление ядра атома, ни процессы, происходящие в космических лучах, ни рассчитать и сконструировать современные мощные ускорители элементарных частиц — циклотрон, бетатрон, синхротрон, фазосинхротрон и, значит, нельзя было бы и мечтать об использовании атомной энергии, о том величайшем техническом перевороте, в эпоху которого вступило в наши дни человечество».[1]

[1] Э. Кольман. Великий русский мыслитель Н. И. Лобачевский. М., 1956, стр. 81.

Приложение

СИСТЕМА АКСИОМ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ
(по акад. А. Д. Александрову)

В системе аксиом евклидовой геометрии за основные понятия приняты следующие: точка, прямая, плоскость, движение и следующие отношения: точка лежит на прямой или на плоскости, точка лежит между двумя другими. Эта система аксиом состоит из пяти групп I—V. Заметим, что теперь никаких определений основных понятий не дают, так как все их свойства, нужные для построения геометрии, явно формулируются в аксиомах.

I. Аксиомы сочетания

1. Через каждые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

2. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой.

3. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

4. На каждой плоскости есть по крайней мере три точки, и сущест-

вуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

5. Если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости.

6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще одну общую точку (и, следовательно, общую прямую).

II. Аксиомы порядка

1. Если точка B лежит между точками A и C, то все три лежат на одной прямой.

2. Для каждых двух точек A, B существует такая точка C, что B лежит между A и C.

3. Из трех точек прямой только одна лежит между двумя другими.

4. Если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она пересекает еще другую его сторону или проходит через вершину (отрезок AB определяется как множество точек, лежащих между A и B; соответственно определяются стороны треугольника).

III. Аксиомы движения

1. Движение ставит в соответствие точкам точки, прямым прямые, плоскостям плоскости, сохраняя принадлежность точек прямым и плоскостям.

2. Два последовательных движения дают опять движение, и для всякого движения есть обратное.

3. Если даны точки A, A' исходящие из них полупрямые a, a' и полуплоскости α, α', ими ограниченные, то существует движение, и притом

единственное, переводящее A, a, α в A', a' α' (полупрямая и полуплоскость легко определяются на основе понятий сочетания и порядка).

IV. Аксиомы непрерывности

1. *Аксиома Архимеда.* Всякий отрезок можно перекрыть любым отрезком, откладывая его на первом достаточное число раз (откладывание отрезка осуществляется движением).

2. *Аксиома Кантора.* Если дана последовательность отрезков, вложенных один в другой, то все они имеют хотя бы одну общую точку.

V. Аксиома параллельности

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более чем одну прямую, параллельную данной.

Замечание. Аксиоматика геометрии Лобачевского получается простой заменой аксиомы параллельности на противоположную: «через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не одну, а по крайней мере две параллельные ей прямые». Это и есть аксиома Лобачевского.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С. Что такое неевклидова геометрия. М., 1950.

Александров П. С. Николай Иванович Лобачевский. Краткий очерк его жизни и деятельности. В кн.: «Н. И. Лобачевский. Избранные труды по геометрии». М., 1956.

Вахтин Б. М. Великий русский математик Н. И. Лобачевский. М., 1956.

Гуль И. М. Геометрия Лобачевского. М.— Л., 1947.

Заботин М. С. Лобачевский. Казань, 1954.

Каган В. Ф. Лобачевский. Изд. 2-е, М.— Л., 1948.

Колесников М. С. Лобачевский М., 1965.

Кольман Э. Великий русский мыслитель Н. И. Лобачевский. М., 1956.

Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. М., 1955.

Лямин А. А. Физико-математическая хрестоматия, т. III. Геометрия, книга 2-я. М., 1914.

Модзалевский Л. Б. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.— Л., 1948.

Молодший В. Н. Истинна ли геометрия Лобачевского? «Математика и физика в школе», 1936, № 1.

Молодший В. Н. Очерки по вопросам обоснования математики. М., 1958.

Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., 1953.

Смогоржевский А. С. О геометрии Лобачевского. М., 1957.

Трайнин Я. Л. Основания геометрии. М., 1961.

Фетисов А. И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии. М., 1965.

Холодковский Вл. Николай Иванович Лобачевский. Под ред. проф. Н. А. Глаголева. М., 1945.

Чистяков В. Д. Математические вечера в средней школе. Изд. 2-е. М., 1958.

Чистяков В. Д. Основания геометрии. Минск, 1961.

Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М., 1935.

Яновская С. А. Передовые идеи Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике. М.— Л., 1950.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Александров А. Д. 183
Александров П. С. 80
Александр I 80, 82, 84
Аристотель 6—9
Архимед 185

Б

Бартельс М. Ф. 67—68, 70—71, 76, 78
Бельтрами 90, 163, 165—166, 168—169, 175
Бернулли 44
Бертран Луи 34, 36—38
Бессель 54
Больцани 79
Больяй Фаркаш 33, 55—62
Больяй Янош 31, 53, 55—65
Брашман 85, 87
Броннер 71—73, 76

В

Валлис Джон 33—36
Вейерштрасс 175
Вишневский 70—71

Г

Гаусс Карл 48—57, 59—62, 70—71, 89—90, 163, 178
Герлинг Христиан 49, 52—53
Герострат 82
Гильберт Давид 23, 30, 91, 169
Гинденбург 44
Голицын 82

Д

Дедекинд 175

Е

Евдокс 12—13, 65
Евклид 9—20, 22—30, 34—35, 39—40, 42, 48, 54, 64, 93, 96, 100, 111, 151, 155, 160—162, 174—175

К

Каган В. Ф. 64, 91, 161
Кант 17
Кантор 175, 185
Карташевский Г. И. 66, 68
Клейн Феликс 91, 169, 171, 174—175
Колмогоров А. Н. 92
Кондырев 72, 74, 76
Купфер 85, 87
Кэли Артур 169

Л

Лаврентьев М. А. 93
Лагранж 70—71
Ламберт 39, 44—47
Лаплас 70—71
Лебедев А. С. 93
Лежандр 32—33, 123
Лейбниц 164
Леон 10
Литтров 69, 71, 76
Лобачевский 17, 29—30, 39—40, 42—43, 46—48, 51, 53—

55, 62, 66, 68, 70—72, 74—76, 78—80, 81, 83—88, 90—96, 98, 100—101, 103, 105—106, 110—111, 113—114, 118—120, 123—125, 127—131, 135, 137—141, 143—147, 150—151, 158—166, 168—171, 174—175, 177—178, 181—182, 185
Лоренц 53, 92

М

Магницкий М. Л. 82—84
Миндинг 90—91
Минковский 92—93

Н

Николай I 80
Никольский 83—84
Ньютон Исаак 17

О

Ольберс 52
Остроградский 87, 162

П

Паш 101—103, 107, 126
Пифагор 11, 34
Платон 6—8
Плейфер 33, 54, 95
Посидоний 33
Прокл 33—35
Птолемей 10

Р

Реннер 71—72
Риман 92—93, 153—154, 160, 177—181
Румовский С. Я. 76
Руссо 72

С

Саккери 39—45, 47, 50, 129—130
Сенека 59
Симонов 85, 87
Солнцев 83—84
Спиноза Бенедикт 18

Т

Тауринус 39—48, 50—51, 53

Ф

Фалес 6
Февдий Магнезийский 10

Х

Християнович С. А. 93

Ш

Швейкарт 39, 48—50, 53
Шумахер 53

Э

Эйлер 76
Эйнштейн Альберт 92, 181

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Беседа первая. Авторы первых теорем	5
Беседа вторая. В геометрии нет царских путей	9
Беседа третья. И на солнце есть пятна	13
Беседа четвертая. Евклид, очищенный от всех пятен	18
Беседа пятая. Как люди пытались доказать недоказуемое (из истории V постулата)	28
Беседа шестая. Ученые, приоткрывшие дверь в новый мир (Саккери, Ламберт, Швейкарт, Тауринус)	39
Беседа седьмая. Хозяева идей неевклидовой геометрии (Лобачевский, Гаусс, Больяй)	51
Беседа восьмая. Что нас ожидает на плоскости Лобачевского	95
Беседа девятая. В пространстве Лобачевского	135
Беседа десятая. Реальна ли геометрия Лобачевского?	161
Беседа одиннадцатая. Возможна ли геометрия без параллельных линий?	177
Приложение. Система аксиом евклидовой геометрии (по акад. А. Д. Александрову)	183
Рекомендуемая литература	187
Именной указатель	189

Василий Дмитриевич Чистяков

БЕСЕДЫ О ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Редактор А. Белянкина
Худож. редактор В. Валентович
Обложка художника Л. Бетанова
Техн. редактор П. Фрайман
Корректор С. Вернова

АТ 12365. Сдано в набор 10/VIII 1972 г. Подписано к печати 29/XII 1972 г. Бумага $70 \times 90^1/_{32}$ типогр. № 1. Печ. л. 6(7,02). Уч.-изд. л. 8,25. Изд. № 69-09. Тип. зак. 1472. Тираж 20 000 экз. Цена 41 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы по естествознанию и математике. Минск, ул. Кирова, 24.

Полиграфический комбинат им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Минск, ул. Красная, 23.

Чистяков В. Д.
Ч68 Беседы о геометрии Лобачевского. Мн., «Вышэйш. школа», 1973.
192 с. с илл.

Книга в популярной и доступной форме знакомит массового читателя с историческим путем развития первой неевклидовой геометрии — геометрии Лобачевского. Показывает, в чем суть открытия Лобачевского и его геометрии. Может служить учебным пособием как для преподавателей средних школ, так и для самих учеников, а также для студентов, специализирующихся в области точных наук.

$\frac{2\text{-}2\text{-}1}{62\text{-}72}$ **517.5**