Н. Б. АЛФУТОВА
А. В. УСТИНОВ

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Сборник задач для математических школ

Издание 3-е, исправленное и дополненное

Москва
МЦНМО
2009

УДК 51
ББК 21.1
А45

Рецензент: доктор физико-математических наук,
профессор Ю. П. Соловьев.

Алфутова Н. Б. Устинов А. В.

А45 Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2009. — 336 с.

ISBN 978-5-94057-550-4

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по математике, предназначенный прежде всего для учеников старших классов с углубленным изучением математики, интересующихся точными науками. Он также будет полезен преподавателям математики и студентам, изучающим математику в высших учебных заведениях. Значительная часть материала может быть использована для подготовки к письменным и устным вступительным экзаменам в ВУЗы.

Основу сборника составляют задачи к курсу алгебры, который читался в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова при МГУ им. М. В. Ломоносова в 1995—2000 годах.

Предыдущее издание книги вышло в 2005 г.

ББК 21.1

ISBN 978-5-94057-550-4

Оглавление

Предисловие

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по математике, предназначенный прежде всего для учеников старших классов, интересующихся точными науками. Он также будет полезен преподавателям математики и студентам, изучающим математику в высших учебных заведениях. Значительная часть материала может быть использована для подготовки к письменным и устным вступительным экзаменам в ВУЗы.

Основу сборника составляют задачи к курсу алгебры, который в 1995—2000 годах читался О. А. Чалых, Н. Б. Алфутовой и А. В. Устиновым в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова при МГУ. В приложении А приведена программа этого курса. Для того, чтобы сделать содержание книги более широким и целостным, авторы включили в нее дополнительный материал, собрав и упорядочив задачи из других источников.

Математические курсы, читаемые в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова, традиционно содержат разделы, которые можно назвать смежными. Они находятся на стыке алгебры с комбинаторикой, геометрией, теорией чисел и математическим анализом. Поэтому некоторые задачи из книги имеют к алгебре лишь косвенное отношение. Эти задачи призваны подчеркнуть связь различных разделов математики и проиллюстрировать многообразие методов.

В каждой главе кратко излагается теоретический материал, необходимый для понимания задач. В конце задачи иногда даются ссылки на задачи или литературу, которые непосредственно связаны с данным материалом. Близкий по духу теоретический материал можно найти в книгах [15] и [23], которые также написаны по материалам курсов, читавшихся в школе им. А. Н. Колмогорова.

При подготовке пособия использовались различные учебники и монографии, сборники олимпиадных и конкурсных задач, существенная часть упражнений была почерпнута из многочисленных публикаций журнала «Квант». В результате работы над книгой был создан своеобразный путеводитель, помещенный в приложение В. В нем по каждой из тем задачника даны ссылки на соответствующие публикации. К сожалению, в настоящий момент не представляется возможным указать авторов всех задач, вошедших в книгу, и перечислить все оригинальные источники. Часть материала встречается сразу в нескольких сборниках. Со многими задачами авторы познакомились еще за время своего обучения в школе-интернате. Некоторые упражнения рождались в разговорах с коллегами по кафедре математики.

В книге также встречаются более сложные задачи, не соответствующие школьному уровню. Они составлены по материалам спецкурсов и спецсеминаров, которые второй из авторов вел на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

Авторы приносят глубокую благодарность педагогам и математикам, работавшим в разное время в ФМШ № 18 при МГУ (позднее в школе им. А. Н. Колмогорова), опыт которых отражен в этой книге. Авторы благодарят В. В. Вавилова, А. А. Егорова, которые взяли на себя труд прочесть предварительные варианты первого издания книги, за их многочисленные добавления, исправления и полезные советы. Особая благодарность И. Д. Кану, который участвовал в подготовке как первого, так и второго издания книги. Отдельное спасибо О. А. Соловьеву за неизменную TeX-ническую поддержку.

Авторы будут благодарны читателям за отзывы, критические замечания, предложения и новые задачи.

Н. Б. Алфутова
`iam.khv.ru`
А. В. Устинов
`ustinov@mech.math.msu.su`

Обозначения

В списке указаны страницы, на которых введены эти обозначения.

Обозначение	*Смысл*	*Стр.*
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел	
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел	
$\mathbb{Q}$	множество рациональных чисел	90
$[x]$	целая часть числа x (наибольшее целое, не превосходящее x)	
$\{x\}$	дробная часть числа x: $\{x\} = x - [x]$	
$n!$	факториал: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$	9
$\{x_n\}$	последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$	
$b \mid a$	b делит a	10
$a \vdots b$	a кратно b	10
$a \equiv b \pmod{m}$	a сравнимо с b по модулю m	70
$\bar{a}$	класс вычетов по модулю m	70
$(a_k \ldots a_0)_q$	запись числа в q-ичной системе счисления	8
$(a_1, \ldots, a_n)$	наибольший общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_n$	34
$[a_1, \ldots, a_n]$	наименьшее общее кратное чисел $a_1, \ldots, a_n$	38
$[a_0; a_1, \ldots, a_n]$	цепная дробь	53
$\varphi(n)$	функция Эйлера	78
$\tau(n)$	количество положительных делителей числа n	41
$\sigma(n)$	сумма положительных делителей числа n	41
F_n	числа Фибоначчи	45
i	мнимая единица $i = \sqrt{-1}$	124
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел	124
$\overline{z}$	комплексно сопряженное число к числу z	124
$\arg z$	аргумент комплексного числа z	124
$\|z\|$	модуль комплексного числа z	124
π	отношение длины окружности к диаметру	
e	основание натуральных логарифмов	94
φ	$\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$ — число Фидия	47
Δ	оператор конечной разности	185
$\bar{A}_n^k$	число k-размещений с повторениями из n элементов	20
A_n^k	число k-размещений без повторений из n элементов	20
P_n	число перестановок из n элементов	20
$\overline{C}_n^k$	число k-сочетаний с повторениями из n элементов	21
C_n^k	число k-сочетаний без повторений из n элементов	21
T_n^k	$C_n^k + C_{n-1}^{k-1}$	26
C_n	числа Каталана	30
$\operatorname{ord}_p m$	показатель, с которым простое p входит в разложение целого числа m	43
E_n	репьюнит порядка n: $E_n = \underbrace{11\ldots1}_{n}$	95

Глава 1
Метод математической индукции

1.1. Тождества, неравенства и делимость

Аксиома индукции. Если известно, что некоторое утверждение верно для 1, и из предположения, что утверждение верно для некоторого n, вытекает его справедливость для $n+1$, то это утверждение верно для всех натуральных чисел.

1.1. Деление с остатком. Докажите, что если a и b — целые числа и $b \neq 0$, то существует единственная пара чисел q и r таких, что

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < |b|.$$

1.2. Позиционная система счисления. Докажите, что при целом $q \geqslant 2$ каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_1 q + a_0,$$

где $0 \leqslant a_0, \ldots, a_k < q$. (См. также 3.159, 11.87.)

Определение. Если $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ — цифры числа n в q-ичной системе счисления, то используется запись $n = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_q$.

Для записи числа в десятичной системе счисления используется также запись $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_{10} = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$.

1.3. Пусть $\{a_n\} = a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — периодическая последовательность, то есть для некоторого натурального T

$$a_{n+T} = a_n \quad (n \geqslant 0).$$

Докажите, что среди всех периодов этой последовательности существует период наименьшей длины t, причем T делится на t без остатка.

1.4. Аксиомы индукции. Докажите, что аксиома индукции равносильна любому из следующих утверждений. (См. также 12.1.)

1) Всякое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьшее число.

2) Всякое конечное непустое подмножество натуральных чисел содержит наибольшее число.

3) Если некоторое множество натуральных чисел содержит 1 и вместе с каждым натуральным числом содержит следующее за ним, то оно содержит все натуральные числа.

4) Если известно, что некоторое утверждение верно для некоторого a, и из предположения, что утверждение верно для всех натуральных чисел k, таких, что $a \leqslant k < n$ вытекает его справедливость для n, то это утверждение верно для всех натуральных чисел $k \geqslant a$.

5) (Обратная индукция.) Если известно, что некоторое утверждение верно для 1 и 2, и из предположения, что утверждение верно для некоторого $n > 1$, вытекает его справедливость для $2n$ и $n-1$, то это утверждение верно для всех натуральных чисел.

1.5. Число x таково, что число $x + \dfrac{1}{x}$ — целое. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ также является целым. (См. также 7.49.)

1.6. Даны натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что число

$$(1 + x_1^2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n^2)$$

можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. (См. также 7.14.)

1.7.* Числовая последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ определена равенствами

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -1, \quad A_n = -A_{n-1} - 2A_{n-2} \quad (n \geqslant 3).$$

Докажите, что при $n \geqslant 1$ число $2^{n+2} - 7A_n^2$ является полным квадратом.

Определение. Через $n!$ (читается «*n факториал*») обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Для удобства считается, что $0! = 1$.

В задачах 1.8—1.14 докажите тождества.

1.8. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

1.9. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.10. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

1.11. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

1.12. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

1.13. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

1.14. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

1.15. Факториальная система счисления. Докажите, что каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+a_3\cdot 3!+\ldots,$$

где $0\leqslant a_1\leqslant 1$, $0\leqslant a_2\leqslant 2$, $0\leqslant a_3\leqslant 3$, ...

1.16. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ определены следующим образом:

$$a_0=2,\quad a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}\quad (n\geqslant 2).$$

Найдите и докажите формулу для этих чисел.

Определение. Пусть a — целое и b — натуральное числа. Число b называется делителем a, если существует целое q такое, что $a=bq$. В этом случае q называется частным от деления a на b.

Соотношение «b делит a», записывается в виде $b\mid a$, причем такая запись всегда включает в себя предположение, что b — натуральное число.

Если b не является делителем a, то будем писать $b\nmid a$.

Существует также соотношение $a \,\vdots\, b$ («a кратно b»), которое означает, что $b=qa$ для некоторого целого q. В этом случае число a может быть отрицательным и даже нулевым (ноль кратен нулю, но ноль не делит ноль).

Докажите, что в задачах 1.17—1.24, указанные соотношения выполняются для любого натурального n.

1.17. $10^n+18n-1 \,\vdots\, 27$.

1.18. $11^{n+2}+12^{2n+1} \,\vdots\, 133$.

1.19. $2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2} \,\vdots\, 17$.

1.20. $n^3+5n \,\vdots\, 6$.

1.21. $6^{2n+1}+1 \,\vdots\, 7$.

1.22. $3^{2n+2}+8n-9 \,\vdots\, 16$.

1.23. $4^n+15n-1 \,\vdots\, 9$.

1.24. $2^{3^n}+1 \,\vdots\, 3^{n+1}$.

1.25. Докажите, что для всех натуральных n число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.

1.26.* Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое. (См. также 2.36, 3.35.)

1.27. Решите уравнение

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}=0.$$

В задачах 1.28—1.36 докажите справедливость неравенств для натуральных n.

1.28. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$. (См. также 7.85.)

1.29. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n}$.

1.30. $\frac{(2n)!}{(n!)^2}>\frac{4^n}{n+1}$.

1.31. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}\quad(n>1)$.

1.32. Неравенство Бернулли. $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ при любом $x>-1$.

1.33. $2^n>n$.

1.34. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

1.35. $n^{n+1}>(n+1)^n\quad(n>2)$.

1.36. $|x_1+\ldots+x_n|\leqslant|x_1|+\ldots+|x_n|$, где $x_1,\ldots,x_n$ — произвольные числа.

1.37*. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — положительные числа и $x_1x_2\ldots x_n=1$. Докажите, что $x_1+\ldots+x_n\geqslant n$ и выведите отсюда неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}. \tag{1.1}$$

1.38. Обратная индукция. Другое доказательство неравенства (13.1) можно получить с помощью «обратной индукции» (см. задачу 1.4). Для этого сначала проверьте, что неравенство выполняется для всех n вида $n=2^k$. Затем докажите, что из справедливости неравенства для некоторого n следует его справедливость и для $n-1$.

1.39. Докажите неравенство $2^{m+n-2}\geqslant mn$, где m и n — натуральные числа.

1.40. Для каких n выполняются неравенства:
а) $n!>2^n$; б) $2^n>n^2$?

1.41. Вычислите произведение

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\quad(n\geqslant 2).$$

1.2. Индукция в геометрии и комбинаторике

1.42. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трех клеток.

1.43. Ханойская башня I. Головоломка «Ханойская башня» представляет собой 8 дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.

Докажите, что эта головоломка имеет решение. Какой способ решения головоломки будет оптимальным (по числу перемещений)? (См. также 5.89.)

1.44. Ханойская башня II. Занумеруем колышки в задаче о Ханойской башне числами 1, 2, 3. Предположим, что требуется переместить диски с 1-го колышка на 3-й. Сколько понадобится перекладываний, если прямое перемещение диска с 1-го колышка на 3-й запрещено? (Каждое перекладывание должно производится через 2-й колышек. Как и раньше, больший диск нельзя класть на меньший.)

1.45. Ханойская башня III. Сколько понадобится перекладываний, если в условии задачи 1.43 добавить дополнительное требование: первый диск нельзя класть на второй колышек?

1.46. Ханойская башня IV. На шахматной доске размерами $3 \times n$ (3 столбца и n строк) в первом столбце расположены фишки с номерами от 1 до n (нумерация сверху вниз). Перемещать фишки можно по правилам головоломки Ханойская башня; роль стержней играют три вертикальных столбца, роль дисков — пронумерованные фишки. К правилам добавим ещё два: нельзя делать обратный ход, и цвет поля под каждой из фишек должен сохраняться.

Докажите, что в каждой возникающей позиции будет не более одного хода, причём перемещения станут невозможны, когда все фишки займут третий столбец, то есть головоломка будет решена. Сколько ходов будет при этом сделано?

1.47. Докажите, что квадрат можно разрезать на n квадратов для любого n, начиная с шести.

1.48. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого n, начиная с шести.

1.49. Золотая цепочка. а) На постоялом дворе остановился путешественник, и хозяин согласился в качестве уплаты за проживание брать кольца золотой цепочки, которую тот носил на руке. Но при этом он поставил условие, чтобы оплата была ежедневной: каждый день должно быть отдано (в сумме) ровно на одно кольцо больше, чем в предыдущий день. Замкнутая в кольцо цепочка содержала 11 колец, а путешественник собирался прожить ровно 11 дней, поэтому он согласился. Какое наименьшее число колец он должен распилить, чтобы иметь возможность платить хозяину?

б) Из скольких колец должна состоять цепочка, чтобы путешественник мог прожить на постоялом дворе наибольшее число дней при условии, что он может распилить только n колец?

1.50. Банк имеет неограниченное количество трех- и пятирублевых купюр. Докажите, что он может выдать ими без сдачи любое число рублей, начиная с восьми. (См. также 3.86.)

1.51*. Гениальные математики. а) Каждому из двух гениальных математиков сообщили по натуральному числу, причем им известно, что эти числа отличаются на единицу. Они поочередно спрашивают друг друга: «Известно ли тебе мое число?» Докажите, что рано или поздно кто-то из них ответит «да». Сколько вопросов они зададут друг другу? (Математики предполагаются правдивыми и бессмертными.)

б) Как изменится число заданных вопросов, если с самого начала известно, что данные числа не превосходят 1000?

1.52. На сколько частей делят плоскость n прямых «общего положения», то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

1.53. На плоскости проведены n окружностей так, что любые две из них пересекаются в паре точек, и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей делят плоскость эти окружности?

1.54. На сколько частей делят пространство n плоскостей, проходящих через одну точку, если никакие три не имеют общей прямой? (См. также 8.2.)

1.55*. На сколько частей делят пространство n плоскостей «общего положения»? И что это за «общее положение»?

1.56. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были окрашены в разные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы.)

1.57. Выпуклая оболочка. Докажите, что для любого числа точек плоскости найдется выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из них, содержащий внутри себя все остальные точки.

1.58. Сумма углов n-угольника. Докажите, что произвольный n-угольник (не обязательно выпуклый) можно разрезать на треугольники непересекающимися диагоналями. Выведите отсюда, что сумма углов в произвольном n-угольнике равна $(n-2)\pi$.

1.59. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета так, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

1.60. Имеется k ящиков. В некоторых из них лежат еще k ящиков. В некоторых из последних лежат еще ящики (снова k штук) и т. д. Сколько всего ящиков, если заполненных m?

1.61. Теорема Эйлера. Докажите, что для любого выпуклого многогранника имеет место соотношение

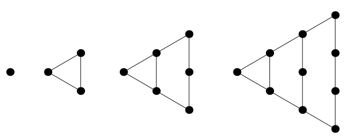
$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2,$$

где В — число его вершин, Р — число ребер, Г — число граней.

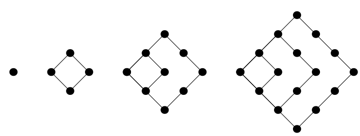
1.62*. Задача Сильвестра. На плоскости взяты несколько точек так, что на каждой прямой, соединяющей любые две из них, лежит по крайней мере еще одна точка. Докажите, что все точки лежат на одной прямой.

1.63. Сколько существует (невырожденных) треугольников периметра 100 с целыми длинами сторон?

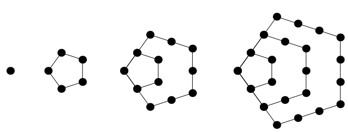
1.64. Многоугольные числа. Для нахождения m-угольных чисел $P_m(n)$ шары укладываются в виде правильных m-угольников со стороной n как показано на рисунках:



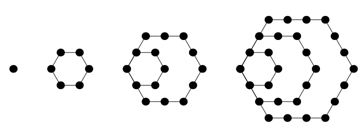
$P_3(n) = 1, 3, 6, 10, \ldots$



$P_4(n) = 1, 4, 9, 16, \ldots$



$P_5(n) = 1, 5, 12, 22, \ldots$



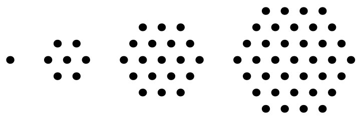
$P_6(n) = 1, 6, 15, 28, \ldots$

Докажите, что для произвольного $m \geqslant 3$

$$P_m(n) = \frac{n((m-2)n - (m-4))}{2}.$$

1.65. Проверьте следующие свойства многоугольных чисел:
а) $P_3(n) + P_3(n-1) = P_4(n)$;
б) $3P_5(n) = P_3(3n-1)$;
в) $P_m(n) = (m-2)P_3(n-1) + n$.
Дайте алгебраические и геометрические доказательства этих фактов.

1.66. Гексы. Иногда шестиугольными называют также числа $X(n)$, которые получаются, если шары укладывать в правильные шестиугольники со стороной n без пустот:



$X(n) = 1, 7, 19, 37$

Чтобы избежать путаницы, М. Гарднер назвал такие числа «гексами». Проверьте следующие свойства чисел $X(n)$:
а) $X(n) = 6P_3(n-1) + 1$;
б) $X(1) + X(2) + \ldots + X(n) = n^3$.
Как и в задаче 1.65, найдите алгебраические и геометрические доказательства этих формул.

1.67. Тетраэдральные числа. Пусть шары сложены в виде тетраэдра, у которого каждое ребро состоит из n шаров. Обозначим через Y_n количество шаров в таком тетраэдре. Проверьте следующие свойства тетраэдральных чисел Y_n:
а) $Y_n = Y_{n-1} + P_3(n)$;
б) $Y_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$;
в) $Y_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + n \cdot 1$.

1.68.* Теорема Холла о свадьбах. Пусть имеется m юношей, каждый из которых знаком с несколькими девушками. Докажите, что всех юношей можно женить на знакомых им девушках в том и только том случае, когда любые k юношей из данного множества знакомы по меньшей мере с k девушками ($1 \leqslant k \leqslant m$).

Глава 2

Комбинаторика

2.1. Сложить или умножить?

2.1. а) В Стране Чудес есть три города A, B и C. Из города A в город B ведет 6 дорог, а из города B в город C — 4 дороги. Сколькими способами можно проехать от A до C?

б) В Стране Чудес построили еще один город D и несколько новых дорог — две из A в D и две из D в C. Сколькими способами можно теперь добраться из города A в город C?

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от выбора элемента a) — n способами, то выбор «a или b» можно сделать $m + n$ способами.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от выбора элемента a) — n способами, то выбор «a и b» можно сделать $m \cdot n$ способами.

2.2. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров (считается, что номер начинаться с нуля не может)?

2.3. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (30 букв) и трех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?

2.4. В некоторой школе каждый школьник знаком с 32 школьницами, а каждая школьница — с 29 школьниками. Кого в школе больше: школьников или школьниц и во сколько раз?

2.5. В языке одного древнего племени было 6 гласных и 8 согласных, причем при составлении слов гласные и согласные непременно чередовались. Сколько слов из девяти букв могло быть в этом языке?

2.6. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из четырех букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? (См. также 12.10.)

2.7. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5?

2.8. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

2.9. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

2.10. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?

2.11. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру? (Числа 23 и 37 можно увидеть и в числе 237.)

2.12. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких как 54345, 17071)?

2.13. Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых четна?

2.14. Сколькими способами можно разложить 7 монет различного достоинства по трем карманам?

2.15. Назовем натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует четырехзначных «симпатичных» чисел?

2.16.* На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или по горизонтали клетку. (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретится все возможные варианты расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

2.2. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле (принцип ящиков). При любом распределении $nk+1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее чем $k+1$ предмет.

2.17. Докажите, что среди москвичей есть два человека с равным числом волос, если известно, что у любого человека на голове менее одного миллиона волос.

2.18. Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении

а) $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$; б) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{300}$?

2.19. В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 желтых, остальные — черные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 10-ти шаров одного цвета?

2.20. Некоторые точки из данного конечного множества соединены отрезками. Докажите, что найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков.

2.21. Имеется $2k+1$ карточек, занумерованных числами от 1 до $2k+1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

2.22. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

2.23. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое из мужчин сидят друг напротив друга.

2.24. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

2.25. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

2.26. Из чисел от 1 до 100 выбрано 52 числа. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, разность между которыми равна 3.

2.27.* Дано 51 различных двузначных чисел (однозначные числа считаем двузначными с первой цифрой 0). Докажите, что из них можно выбрать 6 таких чисел, что никакие 2 из них не имеют одинаковых цифр ни в одном разряде.

2.28. Числа от 1 до 101 выписаны в произвольном порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 чисел так, что оставшиеся 11 чисел будут следовать одно за другим в порядке возрастания или убывания.

2.29. Имеется 2000 точек. Какое максимальное число троек можно из них выбрать так, чтобы каждые две тройки имели ровно одну общую точку?

2.30. Даны 1002 различных числа, не превосходящих 2000. Докажите, что из них можно выбрать три таких числа, что сумма двух из них равна третьему. Останется ли это утверждение справедливым, если число 1002 заменить на 1001?

2.31.* Дана прямоугольная таблица, в каждой клетке которой написано вещественное число, причем в каждой строке таблицы числа расположены в порядке возрастания. Докажите, что если расположить числа в каждом столбце таблицы в порядке возрастания, то в строках полученной таблицы числа по-прежнему будут располагаться в порядке возрастания.

2.32. В волейбольном турнире команды играют друг с другом по одному матчу. За победу дается одно очко, за поражение — ноль. Известно, что в один из моментов турнира все команды имели разное количество очков. Сколько очков набрала в конце турнира предпоследняя команда и как она сыграла с победителем?

2.33. Бесконечная клетчатая доска раскрашена в три цвета (каждая клеточка — в один из цветов). Докажите, что найдутся четыре клеточки одного цвета, расположенные в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными стороне одной клеточки.

2.34. Докажите, что из 11 различных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

2.35. На плоскости даны 6 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая пара точек соединена отрезком синего или красного цвета. Докажите, что среди данных точек можно выбрать такие три, что все стороны образованного ими треугольника будут окрашены в один цвет. (См. также 5.47.)

2.36. Докажите утверждение задачи 1.26 при помощи принципа Дирихле.

2.37. Теорема Дирихле. Докажите, что для любого действительного α и натурального τ существуют такие целые a и b, что

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b\tau}, \quad 1 \leqslant b \leqslant \tau.$$

2.38. Докажите, что для любого иррационального α неравенство

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$$

имеет бесконечно много решений в рациональных дробях a/b.

2.39. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа и τ — натуральное. Докажите, что существуют рациональные дроби $a_1/b, \ldots, a_n/b$ такие, что

$$\left|\alpha_1 - \frac{a_1}{b}\right| < \frac{1}{b\tau}, \ldots, \left|\alpha_n - \frac{a_n}{b}\right| < \frac{1}{b\tau}, \quad b \leqslant \tau^n.$$

2.40. Совместные приближения. С помощью предыдущей задачи докажите, что для действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ система неравенств

$$\left|\alpha_1 - \frac{a_1}{b}\right| < \frac{1}{b^{1+1/n}}, \ldots, \left|\alpha_n - \frac{a_n}{b}\right| < \frac{1}{b^{1+1/n}}$$

имеет бесконечно много решений в рациональных дробях $a_1/b, \ldots, a_n/b$.

2.3. Размещения, перестановки и сочетания

Определение. Пусть $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество из n элементов. Наборы вида $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ будем называть *k-размещениями*. Два k-размещения считаются различными, если они отличаются друг от друга входящими в них элементами или порядком элементов.

Если в размещениях элементы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ попарно различны, то это *размещения без повторений*. Если же среди элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, могут попадаться одинаковые, то такие наборы называются *размещениями с повторениями*.

Количества размещений без повторений и с повторениями обозначаются A_n^k и $\bar{A}_n^k$ соответственно.

2.41. Докажите равенства:

а) $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$; б) $\bar{A}_n^k = n^k$.

2.42. В пассажирском поезде 17 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 17 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

Определение. *Перестановками* называются n-размещения без повторений элементов множества $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Количество перестановок множества из n элементов обозначается P_n.

2.43. Докажите равенство $P_n = n!$.

2.44. Сколько существует способов расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

2.45. Семнадцать девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

2.46. Сколько существует ожерелий, составленных из 17 различных бусинок?

2.47. Найдите сумму всех 7-значных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр 1, ..., 7.

2.48. а) Сколькими способами 28 учеников могут выстроиться в очередь в столовую?

б) Как изменится это число, если Петю Иванова и Колю Васина нельзя ставить друг за другом?

2.49. Сколькими способами можно выбрать четырех человек на четыре различные должности, если имеется девять кандидатов на эти должности?

2.50. Из класса, в котором учатся 28 человек, назначаются на дежурство в столовую 4 человека. Сколькими способами это можно сделать? Сколько существует способов набрать команду дежурных, в которую попадет ученик этого класса Коля Васин?

Определение. Пусть $M=\{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество из n элементов. Наборы $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$, в которых порядок считается несущественным называются *k-сочетаниями.* То есть два k-сочетания считаются различными, если они отличаются друг от друга входящими в них элементами, но не порядком элементов.

Аналогично размещениям сочетания бывают без повторений и с повторениями.

Количества сочетаний без повторений и с повторениями обозначаются C_n^k и $\overline{C}_n^k$ соответственно.

2.51. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в нее должен входить хотя бы один математик?

2.52. На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

2.53. На плоскости проведено n прямых «общего положения». Найдите количество точек пересечения этих прямых. Сколько треугольников образуют эти прямые?

2.54. На двух параллельных прямых a и b выбраны точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно. Сколько будет точек пересечения, если провести все отрезки вида A_iB_j $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, при условии, что никакие три из этих отрезков в одной точке не пересекаются?

2.55.* Ключи от сейфа. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии?

Рассмотрите задачу также в том случае, когда комиссия состоит из n человек, а сейф можно открыть при наличии m членов комиссии $(m \leqslant n)$.

2.56. У Нины 7 разных шоколадных конфет, у Коли 9 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом пятью конфетами?

2.57. Докажите равенства

а) $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ б) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$; в) $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$.

2.58. Докажите, что биномиальный коэффициент C_n^k можно определить как количество способов выбрать k-элементное подмножество в множестве из n элементов. Какой комбинаторный смысл можно придать равенству б) из предыдущей задачи?

2.59. Бином Ньютона. Докажите справедливость формулы

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^n y^n.$$

Числа C_n^k называются биномиальными коэффициентами, поскольку они возникают при возведении в степень бинома $x+y$.

2.60.* Докажите, что для любого натурального a найдется такое натуральное n, что все числа $n+1$, n^n+1, $n^{n^n}+1$, $\ldots$ делятся на a.

2.61. Сколько диагоналей имеет выпуклый:

а) 10-угольник; б) k-угольник $(k>3)$?

2.62. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на выпуклые многоугольники. Возьмем среди них многоугольник с самым большим числом сторон. Сколько сторон он может иметь?

2.63. Анаграммы. Анаграммой называется произвольное слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слов: а) точка; б) прямая; в) перешеек; г) биссектриса; д) абракадабра; е) комбинаторика?

Сколько анаграмм получится из слова, в котором всего n букв, из которых m различных, причем первая буква встречается k_1 раз, вторая — k_2 раз, …, последняя k_m раз?

Некоторые комбинаторные вопросы решаются, если условие удается переформулировать в терминах слов и анаграмм. Примером может служить следующая задача.

2.64. Шахматный город. Рассмотрим прямоугольную сетку квадратов размерами $m \times n$ — шахматный город, состоящий из «кварталов», разделенных $n-1$ горизонтальными и $m-1$ вертикальными «улицами». Каково число различных кратчайших путей на этой сетке, ведущих из левого нижнего угла (точка $(0;0)$) в правый верхний угол (точку $(m;n)$)? (См. также 2.83.)

2.65. Имеется куб размером $10 \times 10 \times 10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причем так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

2.66. Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Докажите, что число различных ее маршрутов равно $(C_{2n}^n)^2$.

2.67. Параллелограмм пересекается двумя рядами прямых, параллельных его сторонам; каждый ряд состоит из m прямых. Сколько параллелограммов можно выделить в образовавшейся сетке?

2.68. Сколькими способами можно разделить на команды по 6 человек для игры в волейбол группу:

а) из 12; б) из 24 спортсменов?

2.69. Имеется множество C, состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы

а) множества A и B не пересекались;

б) множество A содержалось бы в множестве B?

2.70. Полиномиальная теорема. Докажите, что в равенстве

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} C(k_1, \ldots, k_m) x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$$

коэффициенты $C(k_1, \ldots, k_m)$ могут быть найдены по формуле

$$C(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}\,.$$

Числа $C(k_1, \ldots, k_m)$называются полиномиальными коэффициентами.

2.71. При игре в преферанс каждому из трех игроков раздают по 10 карт, а две карты кладут в прикуп. Сколько различных раскладов возможно в этой игре? (См. также 2.102.)

2.72. Сколько существует 6-значных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

2.73. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом? (См. также 3.163, 11.107.)

2.74. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Сколькими способами можно разложить n одинаковых шаров по m $(n>m)$ пронумерованным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

2.75. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

2.76. Сколько решений имеет уравнение

$$x_1+x_2+x_3=1000$$

а) в натуральных; б) в целых неотрицательных числах? (См. также 11.86.)

2.77. Сколькими способами можно составить букет из 17 цветков, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?

Определение. Биномиальные коэффициенты удобно располагать в виде таблицы, которая называется *треугольником Паскаля*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Он обладает самыми разнообразными свойствами (см. задачи 2.82, 2.83).

2.78. Почему равенства $11^2=121$ и $11^3=1331$ похожи на строчки треугольника Паскаля? Чему равно 11^4?

2.79. Сколькими способами двигаясь по следующей таблице от буквы к букве

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \text{к} & & & & & & \\
 & & & & & \text{в} & & \text{в} & & & & & \\
 & & & & \text{а} & & \text{а} & & \text{а} & & & & \\
 & & & \text{д} & & \text{д} & & \text{д} & & \text{д} & & & \\
 & & \text{р} & & \text{р} & & \text{р} & & \text{р} & & \text{р} & & \\
 & \text{а} & & \text{а} & & \text{а} & & \text{а} & & \text{а} & & \text{а} & \\
\text{т} & & \text{т} & & \text{т} & & \text{т} & & \text{т} & & \text{т} & & \text{т}
\end{array}$$

можно прочитать слово «квадрат»?

2.80. Придумайте какой-нибудь способ достроить треугольник Паскаля вверх.

2.81. При каких значениях n все коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(a+b)^n$ нечетны?

2.82. Вычислите суммы:
а) $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \ldots + 2^5C_5^5$;
б) $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^nC_n^n$;
в) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

2.83. Докажите тождества:
а) $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$;
б) $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$;
в) $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$;
г) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.
Попробуйте доказать эти тождества тремя разными способами: пользуясь тем, что C_n^k — это количество k-элементных подмножеств в множестве из n элементов; исходя из того, что C_n^k — это коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$; пользуясь «шахматным городом» из задачи 2.64.

2.84. Свойство шестиугольника. Докажите равенство

$$C_{n-1}^{k-1} \cdot C_n^{k+1} \cdot C_{n+1}^k = C_{n-1}^k \cdot C_{n+1}^{k+1} \cdot C_n^{k-1}.$$

2.85. В разложении $(x+y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член оказался равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x, y и n.

2.86. Биномиальная система счисления. Покажите, что любое целое неотрицательное число n может быть представлено в виде

$$n = C_x^1 + C_y^2 + C_z^3,$$

где x, y, z — целые числа такие, что $0 \leqslant x < y < z$.

2.87. В компании из 10 человек произошло 14 попарных ссор. Докажите, что все равно можно составить компанию из трех друзей.

2.88. Найдите m и n зная, что

$$C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3.$$

2.89. Какое слагаемое в разложении $(1+\sqrt{3})^{100}$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

2.90. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4 и 5, если:
а) никакая цифра не повторяется более одного раза;
б) повторения цифр допустимы;

в) числа должны быть нечетными и повторений цифр быть не должно?

2.91. Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10-ю креслами так, чтобы юноши и девушки чередовались?

2.92*. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. Обозначим через T_n число точек, в которых пересекаются диагонали, и через K_n — количество частей, на которые многоугольник делится диагоналями:

$$\{T_1, T_2, \dots\} = \{0, 0, 0, 1, 5, 15, 35, \dots\},$$
$$\{K_1, K_2, \dots\} = \{0, 0, 1, 4, 11, 25, 50, \dots\}.$$

Найдите и докажите формулы для величин T_n и K_n.

2.93. (1, 2)-треугольник Паскаля (треугольник Люка). В некоторых комбинаторных задачах вместо биномиальных коэффициентов оказывается удобнее рассматривать числа T_n^k, которые при $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$ определяются формулой

$$(x+y)^{n-1}(2x+y) = \sum_{k=0}^{n} T_n^k\, x^k y^{n-k}.$$

Коэффициент T_0^0 можно считать равным 1 или 2 в зависимости от ситуации. Как и биномиальные коэффициенты, числа T_n^k удобно располагать в виде треугольника:

$$\begin{array}{ccccccc} & & T_1^0 & & T_1^1 & & \\ & T_2^0 & & T_2^1 & & T_2^2 & \\ T_3^0 & & T_3^1 & & T_3^2 & & T_3^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 2 & & \\ & 1 & & 3 & & 2 & \\ 1 & & 4 & & 5 & & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

а) Докажите, что, как и в треугольнике Паскаля, в таблице с коэффициентами T_n^k каждый элемент равен сумме двух других, расположенных над ним:

$$T_n^k = T_{n-1}^{k-1} + T_{n-1}^k.$$

б) Докажите, что числа T_n^k связаны с биномиальными коэффициентами формулами

$$T_n^k = C_n^k + C_{n-1}^{k-1}, \quad T_n^k + T_{n-1}^{k-1} = C_{n-2}^k + 4C_{n-1}^{k-1}.$$

в) Вычислите суммы

$$T_n^0 + T_n^1 + \dots + T_n^n \quad \text{и} \quad T_n^0 - T_n^1 + \dots + (-1)^n T_n^n.$$

2.94. Докажите тождества:

а) $T_n^k = C_n^k\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ $(n \geqslant 1,\ 0 \leqslant k \leqslant n)$;

б) $T_n^k + T_n^{n-k} = 3C_n^k$ $(n \geqslant 1,\ 0 \leqslant k \leqslant n)$;

в) $T_n^k = T_{n-1}^{k-1} + T_{n-2}^{k-1} + \ldots + T_{k-1}^{k-1}$ $(n \geqslant 2,\ 2 \leqslant k \leqslant n)$;

г) $T_n^k = T_{n-1}^k + T_{n-2}^{k-1} + \ldots + T_{n-k-1}^0$ $(n \geqslant 2,\ 0 \leqslant k \leqslant n-2)$.

д) $C_n^0 T_m^k + C_n^1 T_m^{k-1} + \ldots + C_n^k T_m^0 = T_{m+n}^k$ $\quad (n \geqslant 0,\ m \geqslant 1)$. (См. также 3.174 и 3.175.)

2.95. Гармонический треугольник Лейбница.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Здесь изображен фрагмент таблицы, которая называется треугольником Лейбница. Его свойства «аналогичны в смысле противоположности» свойствам треугольника Паскаля. Числа на границе треугольника обратны последовательным натуральным числам. Каждое число внутри равно сумме двух чисел, стоящих под ним. Найдите формулу, которая связывает числа из треугольников Паскаля и Лейбница.

2.96. Докажите равенства:

а) $\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} + \ldots$;

б) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{105} + \ldots$;

в) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{140} + \dfrac{1}{280} + \ldots$

2.97. Найдите сумму

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \ldots$$

и обобщите полученный результат.

2.98. Найдите суммы рядов

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \ldots$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$;

в) $\dfrac{0!}{r!} + \dfrac{1!}{(r-1)!} + \dfrac{2!}{(r-2)!} + \dfrac{3!}{(r-3)!} + \ldots \qquad (r \geqslant 2)$.

Определение. *Вероятностью* наступления какого-либо события называется отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов, предполагаемых равновероятными. (См. [10].)

2.99. В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара. Какова вероятность того, что все вынутые шары будут белыми?

2.100. Пишется наудачу некоторое двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 5?

2.101. Имеется три ящика, в каждом из которых лежат шары с номерами от 0 до 9. Из каждого ящика вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что

а) вынуты три единицы; б) вынуты три равных числа?

2.102. У игрока в преферанс оказалось 4 козыря, а еще 4 находятся на руках у двух его противников. Какова вероятность того, что козыри лягут а) $2:2$; б) $3:1$; в) $4:0$? (См. также 2.71.)

2.4. Формула включений и исключений

2.103. Зоопарки. Во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и носороги, нет жирафов. Во всех зоопарках, где есть носороги и нет жирафов, есть гиппопотамы. Наконец, во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и жирафы, есть и носороги. Может ли существовать такой зоопарк, в котором есть гиппопотамы, но нет ни жирафов, ни носорогов?

2.104. Двоечники. В классе имеется a_1 учеников, получивших в течение года хотя бы одну двойку, a_2 учеников, получивших не менее двух двоек, и т. д., a_k учеников, получивших не менее k двоек. Сколько всего двоек в этом классе? (Предполагается, что ни у кого нет более k двоек.)

2.105. Из 100 студентов университета английский язык знают 28 студентов, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

2.106. Сколько существует целых чисел от 1 до 16 500, которые

а) не делятся на 5;

б) не делятся ни на 5 ни на 3;

в) не делятся ни на 5 ни на 3, ни на 11?

2.107. Сколько существует целых чисел от 1 до 33 000, которые не делятся ни на 3 ни на 5, но делятся на 11?

2.108. Сколько существует целых чисел от 1 до 1 000 000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

2.109. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

2.110. Пусть имеется n подмножеств $A_1, \ldots, A_n$ конечного множества E и $\chi_j(x)$ — характеристические функции этих множеств, то есть

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_j, \\ 0, & x \in E \setminus A_j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Докажите, что при этом $\chi(x)$ — характеристическая функция множества $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, связана с функциями $\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x)$ формулой

$$1 - \chi(x) = (1 - \chi_1(x)) \ldots (1 - \chi_n(x)).$$

2.111. Формула включений и исключений. Докажите справедливость равенства

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots$$
$$\ldots - |A_{n-1} \cap A_n| + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|,$$

где через $|A|$ обозначено количество элементов множества A. (См. также 4.158.)

2.112. Обозначим через S_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ сумму, которая получится, если правую часть формулы включений и исключений оборвать перед k-й сменой знака:

$$S_k = |A_1| + \ldots + |A_n| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| + (-1)^{k-1}|A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n|.$$

Каким неравенством связаны величины S_k и $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$.

2.113. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

2.114. Беспорядки. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

2.115. В комнате площадью 6 м^2 постелили три ковра произвольной формы площадью 3 м^2 каждый. Докажите, что какие-либо два из них перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2.

2.116. В прямоугольнике площади 5 расположено 9 фигур площади 1 каждая. Докажите, что найдутся две фигуры, площадь общей части которых не меньше 1/9.

2.117*. В прямоугольнике площади 1 расположено 5 фигур площади 1/2 каждая.

а) Докажите, что найдутся две фигуры, площадь общей части которых не меньше 3/20.

б) Докажите, что найдутся две фигуры, площадь общей части которых не меньше 1/5.

в) Докажите, что найдутся три фигуры, площадь общей части которых не меньше 1/20.

2.118. Докажите, что в условии задач 2.117 б) и в) числа 1/5 и 1/20 нельзя заменить большими величинами.

2.5. Числа Каталана

Во многих комбинаторных задачах решением является последовательность чисел Каталана

$$\{C_n\} = \{C_0, C_1, C_2, \ldots\} = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\}.$$

Определение. Пусть имеется $n+1$ переменная $x_0, x_1, \ldots, x_n$, и мы хотим вычислить их произведение при помощи n умножений. Определим число C_n как количество способов расставить скобки в произведении $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ так, чтобы порядок умножений был полностью определен. Например, при $n=2$ существует два способа: $x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)$, $(x_0 \cdot x_1) \cdot x_2$, а при $n=3$ уже 5:

$$x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)), \quad x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3), \quad (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3),$$
$$(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3, \quad ((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3.$$

2.119. Сколько последовательностей $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$, состоящих из $+1$ и -1, обладают тем свойством, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 0$, а все их частичные суммы

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}$$

неотрицательны?

2.120. Сколько существует способов разрезать выпуклый $(n+2)$-угольник диагоналями на треугольники?

2.121. Маршруты ладьи. Рассмотрим шахматные доски со сторонами 2, 3, 4, … Требуется провести ладью из левого нижнего угла в правый верхний. Двигаться можно только вверх и вправо, не заходя при этом на клетки диагонали, соединяющей начальную и конечную клетки, и ниже нее. (Ладья оказывается на этой диагонали только в начальный и в конечный моменты времени.) Сколько существует таких маршрутов?

2.122. Очередь в кассу. Билеты стоят 50 центов, и $2n$ покупателей стоят в очереди в кассу. Половина из них имеет по одному доллару, остальные — по 50 центов. Кассир начинает продажу билетов, не имея денег. Сколько существует различных порядков в очереди, таких, что кассир всегда может дать сдачу?

2.123. На кольцевой дороге стоят бензоколонки, причем бензина во всех бензоколонках хватит, чтобы автомобиль проехал полный круг. Докажите, что существует бензоколонка, начав от которой автомобиль с пустым баком сможет проехать весь круг, заправляясь по дороге.

2.124. Формула для чисел Каталана. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — последовательность целых чисел, сумма которых равна 1. Докажите, что ровно у одного из ее циклических сдвигов

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad \{a_2, \ldots, a_n, a_1\}, \quad \ldots, \quad \{a_n, a_1 \ldots, a_{n-1}\},$$

все частичные суммы положительны. Выведите отсюда равенства:

$$C_n = C_{2n+1}^n \frac{1}{2n+1} = C_{2n}^n \frac{1}{n+1} = \frac{(4n-2)!!!!}{(n+1)!},$$

где $(4n-2)!!!! = 2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n-2)$ — произведение, в котором участвует каждое четвертое число. (См. также 3.131.)

2.125. Рекуррентное соотношение для чисел Каталана. Докажите, что числа Каталана удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0.$$

(См. также 11.115.)

Глава 3
Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики

3.1. Простые числа

Определение. Натуральное число p называется *простым*, если $p > 1$ и p не имеет положительных делителей, отличных от 1 и p. По соглашению, 1 не является простым числом. Остальные числа, имеющие три и более делителей, называются составными.

3.1. Теорема Евклида. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

3.2. Найдите все простые числа, которые отличаются на 17.

3.3. Для каких p числа p, $p+2$ и $p+4$ одновременно являются простыми?

3.4. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 — простое число.

3.5. Пусть $n > 2$. Докажите, что между n и $n!$ есть по крайней мере одно простое число.

3.6. Найдите все такие простые числа p и q, для которых выполняется равенство $p^2 = 2q^2 + 1$.

3.7. Для каких простых p и q возможно равенство $p = 2q^2 + 1$?

3.8. Докажите, что если число $n! + 1$ делится на $n+1$, то $n+1$ — простое число.

3.9. Докажите, что множество простых чисел вида $p = 4k + 3$ бесконечно. (См. также 4.142.)

3.10. Докажите, что множество простых чисел вида $p = 6k + 5$ бесконечно. (См. также 4.143.)

3.11. Докажите, что составное число n всегда имеет делитель $d \leqslant \sqrt{n}$.

3.12. Когда натуральное число n имеет нечетное количество делителей?

3.13. Разложите на простые множители числа 111, 1111, 11111, 111111, 1111111. (См. также 4.26.)

3.14. Докажите, что существуют 1000 подряд идущих составных чисел.

3.15. Докажите, что для любого натурального n найдутся n подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно одно простое.

3.16. Существуют ли а) 5; б) 6 простых чисел, образующих арифметическую прогрессию?

3.17. Существуют ли арифметическая прогрессия, состоящая лишь из простых чисел?

3.18. Предположим, что нашлись 15 простых чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью d. Докажите, что $d > 30000$.

Определение. Два простых числа, отличающиеся на 2 называются *простыми числами-близнецами*.

3.19. Докажите, что 3, 5 и 7 являются единственной тройкой простых чисел-близнецов.

3.20. Найдите все простые числа, которые равны сумме двух простых чисел и разности двух простых чисел.

3.21. Докажите, что при $n > 2$ числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ не могут быть простыми одновременно.

3.22. При каких целых n число $n^4 + 4$ — составное?

3.23. Верно ли, что многочлен $P(n) = n^2 + n + 41$ при всех n принимает только простые значения?

3.24. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность простых чисел ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...). Докажите, что $p_n > 2n$ при $n \geqslant 5$. При каких n будет выполняться неравенство $p_n > 3n$?

3.25. Докажите неравенства а) $p_{n+1} < p_1 p_2 \ldots p_n$; б) $p_n < 2^{2^n}$.

3.26. Верно ли, что все числа вида $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ являются простыми?

3.27. Числа Евклида. Евклидово доказательство бесконечности множества простых чисел наводит на мысль определить рекуррентно *числа Евклида*:

$$e_1 = 2, \quad e_n = e_1 e_2 \ldots e_{n-1} + 1 \quad (n \geqslant 2).$$

Все ли числа e_n являются простыми? (См. также 4.81.)

3.28. Числа Ферма. Докажите, что если число a^n+1 простое, то $a \vdots 2$ и $n = 2^k$. (Простые числа вида $f_k = 2^{2^k}+1$ называются *числами Ферма.*

3.29. Докажите, что f_n делит $2^{f_n}-2$.

3.30. Докажите, что числа Ферма f_n при $n > 1$ не представимы в виде суммы двух простых чисел.

3.31. Числа Мерсенна. Докажите, что если число a^n-1 простое, то $a = 2$ и n — простое.

Простые числа вида $q = 2^p-1$ называются *числами Мерсенна.*

3.32. Пусть $P_n(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами ($n \geqslant 1,\ a_n \neq 0$). Может ли быть так, что при $x = 0, 1, 2, \ldots$ все числа $P_n(x)$ — простые?

3.2. Алгоритм Евклида

Определение. *Наибольшим общим делителем* (НОД) целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется такой положительный общий делитель $a_1, \ldots, a_n$, который делится на любой другой общий делитель этих чисел. НОД чисел $a_1, \ldots, a_n$ обозначается $(a_1, \ldots, a_n)$.

Если наибольший общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_n$ равен 1, то эти числа называются *взаимно простыми.*

3.33. Докажите, что если в наборе целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ хотя бы одно отлично от 0, то они имеют наибольший общий делитель.

3.34. В прямоугольнике с целыми сторонами m и n, нарисованном на клетчатой бумаге, проведена диагональ. Через какое число узлов она проходит? На сколько частей эта диагональ делится линиями сетки?

3.35. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два взаимно простых. (См. также 1.26.)

3.36. Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{2}{p}, \quad \ldots, \quad \frac{p-1}{p}, \quad \frac{1}{q}, \quad \frac{2}{q}, \quad \ldots, \quad \frac{q-1}{q}.$$

3.37. С 1 сентября четыре школьника начали посещать кинотеатр. Первый бывал в нем каждый четвертый день, второй — каждый пятый, третий — каждый шестой и четвертый — каждый девятый. Когда второй раз все школьники встретятся в кинотеатре?

3.38. В задаче 1.1 доказана возможность деления с остатком произвольного целого числа a на натуральное число b. Докажите, что из равенства $a = bq + r$ следует соотношение $(a, b) = (b, r)$.

3.39. Алгоритм Евклида. Пусть m_0 и m_1 — целые числа, $m_1 > 0$ и $m_1 \nmid m_0$. Докажите, что при некотором $k > 1$ существуют целые числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ и $m_2, \ldots, m_k$ такие, что $m_1 > m_2 > m_3 > \ldots > m_k > 0$, $a_k > 1$,

$$\begin{cases} m_0 = m_1 \cdot a_0 + m_2, \\ m_1 = m_2 \cdot a_1 + m_3, \\ m_2 = m_3 \cdot a_2 + m_4, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{k-2} = m_{k-1} \cdot a_{k-1} + m_k, \\ m_{k-1} = m_k \cdot a_k, \end{cases}$$

и $(m_0, m_1) = m_k$.

3.40. Докажите, что для любого s от $k-1$ до 0 существуют числа u_s, v_s такие, что $u_s m_s + m_{s+1} v_s = d$, где $d = (m_0, m_1)$. В частности, для некоторых u и v выполняется равенство:

$$m_0 u + m_1 v = d.$$

(См. также 6.70.)

3.41. Пусть $(a, b) = 1$ и $a \mid bc$. Докажите, что $a \mid c$.

3.42. Известно, что $ab = c^n$ и $(a, b) = 1$. Докажите, что для некоторых x и y будут выполнены равенства $a = x^n$ и $b = y^n$.

3.43. Найдите $(\underbrace{1\ldots1}_{m}, \underbrace{1\ldots1}_{n})$.

3.44. Пусть $\{a_k\}$ $(k \geqslant 1)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, такая что при всех $1 \leqslant n < m$ найдётся номер l (вообще говоря, зависящий от n и m), такой, что $a_m - a_n = a_l$. Докажите, что $a_k = k a_1$.

3.45. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $a \cdot b = 600$?

3.46. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{49}$ удовлетворяют равенству

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{49} = 540.$$

Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

3.47. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол 19° на 19 равных частей?

3.48. Числа от 1 до 1000 выписаны подряд по кругу. Начиная с первого, вычеркивается каждое 15-е число: 1, 16, 31, ..., причем при повторных оборотах, зачеркнутые числа считаются снова. Число оборотов не ограничено. Сколько чисел останутся незачеркнутыми?

3.49. Докажите, что если $(a, b) = 1$, то $(a + b, a - b)$ может быть равен 1 или 2.

3.50. Докажите, что если $(a, b) = 1$, то $(a + b, a^2 - ab + b^2)$ может быть равен 1 или 3.

3.51. Докажите, что если $(a, b) = 1$ и $d \mid (a + b)$, то $(a, d) = (b, d) = 1$.

3.52. Докажите, что $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.

3.53. Известно, что сумма двух несократимых дробей равна целому числу: $a/b + c/d = n$. Докажите, что $|b| = |d|$.

3.54. Докажите, что если $(a, b) = 1$, то наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a^2 + b^2$ равен 1 или 2.

3.55. Может ли наибольший общий делитель двух натуральных чисел быть больше их разности?

3.56. Докажите, что для нечетных чисел a, b и c имеет место равенство

$$\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) = (a, b, c).$$

3.57. По окружности радиуса 40 катится колесо радиуса 18. В колесо вбит гвоздь, который ударяясь об окружность, оставляет на ней отметки. Сколько всего таких отметок оставит гвоздь на окружности? Сколько раз прокатится колесо по всей окружности, прежде чем гвоздь попадет в уже отмеченную ранее точку?

3.58. Для некоторых целых x и y число $3x + 2y$ делится на 23. Докажите, что число $17x + 19y$ также делится на 23.

3.59. Докажите, что следующие дроби несократимы при всех натуральных значениях n:

а) $\dfrac{2n+13}{n+7}$; б) $\dfrac{21n+4}{14n+3}$; в) $\dfrac{2n^2-1}{n+1}$; г) $\dfrac{n^2-n+1}{n^2+1}$.

3.60. Числа x и y связаны с числами m и n равенствами $m = ax + by$, $n = cx + dy$, где $ad - bc = \pm 1$. Докажите, что $(x, y) = (m, n)$.

3.61. При каких целых n сократимы дроби

а) $\dfrac{n^2+2n+4}{n^2+n+3}$; б) $\dfrac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}$?

3.62. При каких целых n число

а) $\dfrac{n^4+1}{n^2+n+1}$; б) $\dfrac{n^3+n+1}{n^2-n+1}$

также будет целым?

3.63. Найдите все натуральные $n>1$ для которых n^3-3 делится на $n-1$.

3.64. Решите в целых числах уравнения

а) $x^2+2x-xy-3y=11$; б) $2xy+x+y=83$.

3.65. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\dfrac{3m-n}{5n+2m}$, если известно, что она сократима и что числа m и n взаимно просты.

3.66. Докажите, что при $m\neq n$ выполняются равенства

а) $(a^m-1,\, a^n-1)=a^{(m,n)}-1$ $(a>1)$; б) $(f_n,\, f_m)=1$,

где $f_k=2^{2^k}+1$ — числа Ферма. (См. также 3.43, 3.156, 6.72.)

3.67. Докажите, что число $2^{2^n}-1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей.

3.68. Докажите, что если для некоторого натурального n выполняется соотношение $n \mid 2^{n-1}-1$ и $m=2^n-1$, то $m \mid 2^{m-1}-1$.

3.69. Докажите, что для простых чисел выполняется неравенство $p_{n+1}\leqslant 2^{2^n}+1$.

3.70. Докажите, что равенство $(a,\, mn)=1$ равносильно выполнению двух условий $(a,\, m)=1$ и $(a,\, n)=1$.

3.71. Докажите, что если $(a,\, b)=1$, то $(2a+b,\, a(a+b))=1$.

3.72. Пусть a и b — натуральные числа. Докажите, что среди чисел a, $2a$, $3a$, $\ldots$, ba ровно $(a,\, b)$ чисел делится на b.

3.73. Пусть $(a,\, b)=1$ и $(x_0,\, y_0)$ — некоторое целочисленное решение уравнения $ax+by=1$. Докажите, что все решения этого уравнения в целых числах получаются по формулам $x=x_0+kb$, $y=y_0-ka$, где k — произвольное целое число.

3.74. Как описать все решения в целых числах уравнения $ax+by=c$ при произвольных a, b, c?

3.75. Решите в целых числах уравнения (укажите *все* решения)

а) $45x-37y=25$; г) $109x+89y=1$;

б) $19x+95y=1995$; д) $43x+13y=21$;

в) $10x+2y+18z=7$; е) $34x-21y=1$.

3.76. Докажите, что число шагов в алгоритме Евклида может быть сколь угодно большим.

3.77. Среди всех решений уравнения $113x - 69y = 11$ в натуральных числах выберите то, для которого сумма $x + y$ минимальна.

3.78. В арифметической прогрессии a_1 и a_{12} — натуральные числа. Найдите a_9, если известно, что $S_{16} = 104$.

3.79. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в $120°$?

3.80. Найдите все взаимно простые a и b, для которых

$$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{3}{13}.$$

3.81. Докажите, что если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, то уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 1$$

разрешимо в целых числах.

Определение. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — отличные от 0 целые числа. *Наименьшим общим кратным* (НОК) этих чисел называется наименьшее положительное число, кратное всем этим числам. Наименьшее общее кратное чисел $a_1, \ldots, a_n$ обозначается $[a_1, \ldots, a_n]$.

3.82. Докажите равенства

а) $[1, 2, \ldots, 2n] = [n, n+1, \ldots, 2n]$;

б) $(a_1,\ a_2, \ldots, a_n) = (a_1, (a_2, \ldots, a_n))$;

в) $[a_1,\ a_2, \ldots, a_n] = [a_1, [a_2, \ldots, a_n]]$.

3.83. На доске написано n натуральных чисел. За одну операцию вместо двух чисел, не делящих друг друга, можно написать их наибольший общий делитель и их наименьшее общее кратное.

а) Докажите, что можно провести только конечное число операций.

б) Финальный результат независимо от порядка действий будет одним и тем же. Например:

$$(4, 6, 9) \to (2, 12, 9) \to (2, 3, 36) \to (1, 6, 36),$$
$$(4, 6, 9) \to (4, 3, 18) \to (1, 12, 18) \to (1, 6, 36).$$

3.84. Найдите наименьшее c, при котором

а) уравнение $7x + 9y = c$ имело бы ровно 6 целых положительных решений;

б) уравнение $14x + 11y = c$ имело бы ровно 5 целых положительных решений.

3.85. В каких пределах должно заключаться c, чтобы уравнение $19x + 14y = c$ имело бы 6 целых положительных решений?

3.86. Пусть a и b — натуральные взаимно простые числа. Рассмотрим точки плоскости с целыми координатами (x, y), лежащие в полосе $0 \leqslant x \leqslant b-1$. Каждой такой точке припишем целое число $N(x, y) = ax + by$.

а) Докажите, что для каждого натурального c существует ровно одна точка (x, y) $(0 \leqslant x \leqslant b-1)$, такая что $c = N(x, y)$.

б) **Теорема Сильвестра.** Докажите, что наибольшее c, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, имеет вид $c = ab - a - b$.

в) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — взаимно простые в совокупности числа, то есть $(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Докажите, что существует наибольшее число g, непредставимое в виде

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \quad (x_1, \ldots, x_n \geqslant 0).$$

Оно называется *числом Фробениуса* и обозначается $g(a_1, \ldots, a_n)$. В частности,

$$g(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_1 - a_2.$$

3.87. Формула Джонсона. Пусть $(a, b, c) = 1$, $d = (a, b)$. Докажите, что

$$g(a, b, c) = d \cdot g\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, c\right) + (d-1)c.$$

3.88. Пусть $(a, b, c) = 1$. С помощью формулы Джонсона проверьте, что

$$g(ab, bc, ac) = 2abc - ab - bc - ac.$$

3.89. Докажите, что если $(a, b, c, d) = 1$, то

$$g(abc, abd, acd, bcd) = 3abcd - abc - abd - acd - bcd.$$

Докажите также аналогичную формулу для числа Фробениуса от n аргументов.

3.90.* Пусть числа a и b взаимно просты и уравнение $ax + by = c$ имеет ровно n решений в целых неотрицательных числах $(n \geqslant 1)$. Докажите, что c должно находиться в пределах

$$(n-1)ab \leqslant c \leqslant (n+1)ab - a - b.$$

Докажите также, что условие

$$nab - a - b + 1 \leqslant c \leqslant nab - 1$$

является достаточным для того, чтобы уравнение $ax + by = c$ имело ровно n решений относительно переменных $x, y \geqslant 0$.

3.91.* Отметим на прямой красным цветом все точки вида $81x+100y$, где x, y — натуральные, и синим цветом — остальные целые точки. Найдите на прямой такую точку, что любые симметричные относительно нее целые точки закрашены в разные цвета. Объясните, почему такая точка существует.

3.3. Мультипликативные функции

Основная теорема арифметики. Всякое натуральное число, большее 1, раскладывается и только одним способом (с точностью до порядка сомножителей) в произведение простых чисел.

3.92. Докажите основную теорему арифметики при помощи утверждения из задачи 3.41.

3.93. Найдите все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

3.94. На какое количество нулей заканчивается число 100! ?

3.95. Найдите наименьшее натуральное n, для которого 1999! не делится на 34^n.

3.96. Докажите, что произведение чисел от $n+1$ до $2n$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

3.97. Для каждого из следующих утверждений или приведите доказательство, или постройте контрпример.

1) Если $a^2 \mid n$, $b^2 \mid n$ и $a^2 \leqslant b^2$, то $a \mid b$.

2) Если b^2 — наибольший полный квадрат, делящий n, то из соотношения $a^2 \mid n$ следует, что $a \mid n$.

3.98. Для каждого из следующих утверждений или приведите доказательство, или постройте контрпример (все числа, входящие в условия — натуральные).

1) Если $a^n \mid b^n$, то $a \mid b$.

2) Если $n^n \mid m^m$, то $n \mid m$.

3) Если $a^n \mid 2b^n$ и $n>1$, то $a \mid b$.

3.99. Пусть $a=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$, $b=p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\beta_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — простые, и $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s \geqslant 0$. Докажите равенства

а) $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\cdot\ldots\cdot p_s^{\min(\alpha_s,\beta_s)}$;

б) $[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\cdot\ldots\cdot p_s^{\max(\alpha_s,\beta_s)}$;

в) $(a, b)[a, b] = ab$.

3.100. Докажите равенства:

а) $[a, (a, b)] = a$; б) $(a, [a, b]) = a$;
в) $abc = [a, b, c](ab, ac, bc)$; г) $abc = (a, b, c)[ab, bc, ac]$;
д) $[(a, b), c] = ([a, c], [b, c])$; е) $([a, b], c) = [(a, c), (b, c)]$;
ж) $([a, b], [a, c], [b, c]) = [(a, b), (a, c), (b, c)]$;
з) $\dfrac{(a, b)(a, c)(b, c)}{(a, b, c)^2} = \dfrac{[a, b][a, c][b, c]}{[a, b, c]^2}$.

3.101. Докажите, что $(bc, ac, ab) \vdots (a, b, c)^2$.

3.102. Приведите пример, когда равенство $(a, b, c)[a, b, c] = abc$ не выполнено. Каким неравенством всегда будут связаны числа $(a, b, c) \times \times [a, b, c]$ и abc?

3.103. Докажите, что $(a, b) = (a + b, [a, b])$.

3.104. Сумма двух натуральных чисел равна 5264, а их наименьшее общее кратное равно 200340. Найдите эти числа.

3.105. Докажите тождество

$$(ab, cd) = (a, c)(b, d)\left(\frac{a}{(a, c)}, \frac{d}{(b, d)}\right)\left(\frac{c}{(a, c)}, \frac{b}{(b, d)}\right).$$

3.106. Сколько различных делителей имеют числа
а) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$; б) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 11^{11}$?

3.107. Для каждого k от 1 до 6 найдите наименьшее натуральное число, которое имеет ровно k различных делителей.

3.108. Пусть $\tau(n)$ — количество положительных делителей натурального числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, а $\sigma(n)$ — их сумма. Докажите равенства:
а) $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_s + 1)$; б) $\sigma(n) = \dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}$.

3.109. Найдите натуральное число n, зная, что оно имеет два простых делителя и удовлетворяет условиям $\tau(n) = 6$, $\sigma(n) = 28$.

3.110. Некоторое натуральное число n имеет два простых делителя. Его квадрат имеет а) 15; б) 81 делителей. Сколько делителей имеет куб этого числа?

3.111. Найдите натуральное число вида $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, зная, что половина его имеет на 30 делителей меньше, треть — на 35 и пятая часть — на 42 делителя меньше, чем само число.

Определение. Функция $f(n)$, определенная на множестве натуральных чисел называется *мультипликативной*, если она удовлетворяет двум условиям:
1) $f(1) = 1$; 2) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ при $(m, n) = 1$.

Если $f(1)=1$ и равенство $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$ выполнено для всех пар натуральных чисел m и n, то функция $f(n)$ называется *вполне мультипликативной.*

3.112. Докажите мультипликативность функций $\tau(n)$ и $\sigma(n)$.

3.113. Докажите неравенство $\tau(n)\leqslant 2\sqrt{n}$.

3.114. Докажите, что произведение всех делителей числа n равно $n^{\tau(n)/2}$.

3.115. Пусть у двух целых положительных чисел равны суммы делителей и равны суммы всех обратных величин к делителям. Докажите, что эти числа равны.

3.116. Пусть $(m,n)>1$. Что больше $\tau(m\cdot n)$ или $\tau(m)\cdot\tau(n)$? Исследуйте тот же вопрос для функции $\sigma(n)$. (См. также 4.164.)

Определение. Число n называется *совершенным*, если $\sigma(n)=2n$. Например, числа 6 и 28 — совершенные:

$$1+2+3+6=2\cdot 6,\quad 1+2+4+7+14+28=2\cdot 28.$$

3.117. Совершенные числа. Докажите, что если $2^k-1=p$ — некоторое простое число Мерсенна, то $n=2^{k-1}(2^k-1)$ — совершенное число.

3.118*. Теорема Эйлера о четных совершенных числах. Докажите, что если n — четное совершенное число, то оно имеет вид $n=2^{k-1}(2^k-1)$, и $p=2^k-1$ — простое число Мерсенна.

Проблема существования нечетных совершенных чисел остается среди трудных и нерешенных задач теории чисел.

3.119. Докажите, что, если N — нечетное совершенное число, то оно должно иметь вид $N=p^{4k+1}\cdot M^2$, где M — натуральное и p — простое вида $4n+1$.

Определение. Числа m и n называются *дружественными*, если сумма собственных делителей числа m равна n и, наоборот, сумма собственных делителей числа n равна m. Другими словами, числа m и n являются дружественными, если

$$\sigma(m)-m=n,\quad \sigma(n)-n=m,$$

или

$$\sigma(m)=m+n=\sigma(n).$$

3.120. Дружественные числа. Докажите, что если все три числа $p=3\cdot 2^{k-1}-1$, $q=3\cdot 2^k-1$ и $r=9\cdot 2^{2k-1}-1$ — простые, то числа $m=2^k\cdot p\cdot q$ и $n=2^k\cdot r$ — дружественные. Постройте примеры дружественных чисел.

3.121. Может ли быть так, что
а) $\sigma(n) > 3n$; б) $\sigma(n) > 100n$?

3.122. Задача Ферма. Найдите наименьшее число вида $n = 2^{\alpha}p_1p_2$, где $p_1 \neq p_2$ — простые числа, такое, что $\sigma(n) = 3n$.

3.123. Пусть α — действительное положительное число, d — натуральное. Докажите, что количество натуральных чисел, не превосходящих α и делящихся на d, равно $\left[\dfrac{\alpha}{d}\right]$.

3.124. Докажите, что для действительного положительного α и натурального d всегда выполнено равенство $\left[\dfrac{\alpha}{d}\right] = \left[\dfrac{[\alpha]}{d}\right]$.

3.125. Формула Лежандра. Число $n!$ разложено в произведение простых чисел $n! = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$. Докажите равенство

$$\alpha_k = \left[\frac{n}{p_k}\right] + \left[\frac{n}{p_k^2}\right] + \left[\frac{n}{p_k^3}\right] + \ldots$$

3.126. Найдите наибольшее α, такое, что $3^{\alpha} \mid 1000!$.

Определение. Далее будем обозначать через $\operatorname{ord}_p m$ показатель, с которым простое p входит в разложение целого числа $m \neq 0$ на простые множители. Другими словами запись $\operatorname{ord}_p m = \alpha$ означает, что $p^{\alpha} \mid m$, но $p^{\alpha+1} \nmid m$. Для рациональных чисел $\operatorname{ord}_p \dfrac{m}{n} = \operatorname{ord}_p m - \operatorname{ord}_p n$.

3.127. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $\operatorname{ord}_p n! \leqslant [n/(p-1)]$.

3.128. Пусть n — натуральное число, а p — простое. Докажите, что если $p^p \mid n!$, то $p^{p+1} \mid n!$.

3.129. Пусть представление числа n в двоичной системе выглядит следующим образом:

$$n = 2^{e_1} + 2^{e_2} + \ldots + 2^{e_r} \quad (e_1 > e_2 > \ldots > e_r \geqslant 0).$$

Докажите, что $n!$ делится на 2^{n-r}, но не делится на 2^{n-r+1}.

3.130. Результат предыдущей задачи допускает обобщение. Пусть p — простое число и представление числа n в p-ичной системе имеет вид:

$$n = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0.$$

Найдите формулу, выражающую показатель α_p, с которым это число p входит в каноническое разложение $n!$, через n, p и коэффициенты a_k.

3.131. При помощи формулы Лежандра из задачи 3.125 докажите, что число $\dfrac{1}{n+1}\, C_{2n}^n$ $(n \geqslant 0)$ всегда целое. (См. также 2.124.)

3.132. Докажите, что если m и n — взаимно простые натуральные числа, то дробь

$$\frac{(m+n-1)!}{m!n!}$$

является целым числом.

3.133. Докажите, что для натуральных m и n число

$$\frac{(mn)!}{n!(m!)^n}$$

всегда целое.

3.134. Докажите, что число $\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ $(m, n \geqslant 0)$ всегда целое.

3.135. Существует ли такое целое r, что число $\dfrac{n!}{2^{n-r}}$ является целым при любом $n \geqslant 1$?

3.136. Докажите, что для любых $n \geqslant 0$ и k в пределах $0 \leqslant k \leqslant n$ выполняются неравенства

а) $\operatorname{ord}_p C_n^k \leqslant \dfrac{n}{2} - 1$; б) $\operatorname{ord}_p C_n^k \leqslant \dfrac{n}{2}$.

3.137. Пусть а) n — простое число; б) n — степень простого числа. Докажите, что число Каталана $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ удовлетворяет сравнению $C_n \equiv 2 \pmod{n}$.

3.138*. Докажите, что суммы

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} \qquad \text{и} \qquad F_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$$

равны друг другу. В качестве следствия получите, что

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord}_2 \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \infty.$$

3.139. Сколькими способами число n может быть представлено в виде суммы (одного или нескольких) последовательных натуральных чисел?

3.140*. Докажите, что при $n \geqslant 2$ каждое из чисел

$$n!+2, \quad n!+3, \ldots, n!+n$$

имеет простой делитель, который не делит никакое другое число из этого списка. (См. также 4.238.)

3.4. Числа Фибоначчи

Определение. Последовательность *чисел Фибоначчи*

$$\{F_0, F_1, F_2, \ldots\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots\}$$

задается условиями $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ (n \geqslant 0)$.

Эти числа были впервые описаны в «Книге абака» (1202 г.) итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи).

3.141. Задача Леонардо Пизанского. Некто приобрел пару кроликов и поместил их в огороженный со всех сторон загон. Сколько кроликов будет через год, если считать, что каждый месяц пара дает в качестве приплода новую пару кроликов, которые со второго месяца жизни также начинают приносить приплод?

3.142. О том, как прыгают кузнечики. Предположим, что имеется лента, разбитая на клетки и уходящая вправо до бесконечности. На первой клетке этой ленты сидит кузнечик. Из любой клетки кузнечик может перепрыгнуть либо на одну, либо на две клетки вправо. Скольками способами кузнечик может добраться до n-й от начала ленты клетки? (См. также 3.148, 3.231–3.232.)

3.143. Некоторый алфавит состоит из 6 букв, которые для передачи по телеграфу кодированы с помощью азбуки Морзе:

$$\cdot \qquad - \qquad \cdot\,\cdot \qquad -\,- \qquad \cdot\,- \qquad -\,\cdot$$

При передаче одного слова не сделали промежутков, отделяющих букву от буквы, так что получилась сплошная цепочка из точек и тире, содержащая 12 знаков. Сколькими способами можно прочитать переданное слово?

3.144. Чему равны числа Фибоначчи с отрицательными номерами $F_{-1},\ F_{-2},\ \ldots,\ F_{-n},\ \ldots$?

3.145. Докажите, что два соседних числа Фибоначчи F_{n-1} и F_n $(n \geqslant 1)$ всегда взаимно просты.

3.146. Тождество Кассини. Докажите равенство

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (n > 0).$$

Будет ли тождество Кассини справедливо для всех целых n? (См. также 12.15.)

3.147. Докажите следующие свойства чисел Фибоначчи

а) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$; в) $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

б) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$; г) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.

3.148. Докажите, что при $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 0$ выполняется равенство

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}.$$

Попробуйте доказать его двумя способами: при помощи метода математической индукции и при помощи интерпретации чисел Фибоначчи из задачи 3.142. Проверьте также, что тождество Кассини является частным случаем этого равенства.

3.149. Докажите равенства
а) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$;
б) $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$;
в) $F_{3n} = F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3$;
г) $F_{n+2} + F_{n-2} = 3F_n$;
д) $F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2 + 1 = 3F_{2n+1}F_{2n-1}$.

3.150. Вычислите $F_{n+2}^4 - F_nF_{n+1}F_{n+3}F_{n+4}$.

3.151. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}.$$

3.152. Делимость чисел Фибоначчи. Докажите справедливость следующих утверждений:
а) $2 \mid F_n \Leftrightarrow 3 \mid n$; в) $4 \mid F_n \Leftrightarrow 6 \mid n$;
б) $3 \mid F_n \Leftrightarrow 4 \mid n$; г) $F_m \mid F_n \Leftrightarrow m \mid n$.

3.153. Докажите, что для любого натурального m существует число Фибоначчи F_n $(n \geqslant 1)$, кратное m.

3.154. Пусть первое число Фибоначчи, делящееся на m есть F_k. Докажите, что $m \mid F_n$ тогда и только тогда, когда $k \mid n$.

3.155. Докажите, что среди чисел $F_n/2$ простым будет только число $17 = F_9/2$.

3.156*. Теорема Люка. Докажите равенство $(F_n, F_m) = F_{(m,n)}$. (См. также 3.180.)

3.157. В последовательности чисел Фибоначчи выбрано 8 чисел, идущих подряд. Докажите, что их сумма не является числом Фибоначчи.

3.158. Рассмотрим множество последовательностей длины n, состоящих из 0 и 1, в которых не бывает двух 1 стоящих рядом. Докажите, что количество таких последовательностей равно F_{n+2}. Найдите взаимно однозначное соответствие между такими последовательностями и маршрутами кузнечика из задачи 3.142.

3.159. Фибоначчиева система счисления. Докажите, что произвольное натуральное число n, не превосходящее F_m, единственным образом можно представить в виде

$$n = \sum_{k=2}^{m} b_k F_k,$$

где все числа $b_2, \ldots, b_m$ равны 0 либо 1, причем среди этих чисел нет двух единиц стоящих рядом, то есть $b_k b_{k+1} = 0$ $(2 \leqslant k \leqslant m-1)$. Для записи числа в фибоначчиевой системе счисления используется обозначение:

$$n = (b_k \ldots b_2)_F.$$

В частности,

$$\begin{array}{lllll} 0=(0)_F, & 1=(1)_F, & 2=(10)_F, & 3=(100)_F, & 4=(101)_F, \\ 5=(1000)_F, & 6=(1001)_F, & 7=(1010)_F, & 8=(10000)_F, & 9=(10001)_F, \\ 10=(10010)_F, & 11=(10100)_F, & 12=(10101)_F, & 13=(100000)_F, & 14=(100001)_F. \end{array}$$

(См. также 12.18, 4.219.)

3.160. Формула Бине. Докажите по индукции формулу Бине:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}},$$

где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ — «золотое сечение» или число Фидия, а $\widehat{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ («фи с крышкой») — сопряженное к нему. (См. также 11.57, 11.94.)

3.161. Докажите следующий вариант формулы Бине:

$$2^{n-1} F_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} 5^k.$$

(См. также 4.144.)

3.162. Докажите, что число Фибоначчи F_n совпадает с ближайшим целым числом к $\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, то есть

$$F_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right].$$

3.163. Числа Фибоначчи и треугольник Паскаля. Докажите равенство:

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = F_{n+1}.$$

Сумма, стоящая в левой части равенства, может быть интерпретирована, как сумма элементов треугольника Паскаля, стоящих в одной диагонали (См. приложение С, II и задачи 2.73, 3.158, 11.58 и 11.60.)

3.164. Вычислите сумму:

$$S_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - \ldots$$

(См. также 11.58, 11.60.)

3.165. Сколько существует последовательностей из 1 и 2, таких что сумма чисел в каждой такой последовательности равна n? Например, если $n = 4$, то таких последовательностей пять:

$$11111, \quad 112, \quad 121, \quad 211, \quad 22.$$

3.166. Решите в целых числах уравнение

$$x \cdot \varphi^{n+1} + y \cdot \varphi^n = 1.$$

Определение. Последовательность *чисел Люка*

$$\{L_0, L_1, L_2, \ldots\} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \ldots\}$$

задается равенствами $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ $(n \geqslant 0)$.

3.167. Докажите, что числа Люка связаны с числами Фибоначчи соотношениями

а) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$;
б) $5\,F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$;
в) $F_{2n} = L_n \cdot F_n$;
г) $L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5F_{2n+1}$.

3.168. Докажите равенства

а) $L_0 + L_1 + \ldots + L_n = L_{n+2} - 1$;
б) $2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m$;
в) $2L_{m+n} = L_m L_n + 5F_m F_n$ и, в частности, $2L_{2n} = L_n^2 + 5F_n^2$;
г) $L_{2n} = L_n^2 - 2 \cdot (-1)^n$, $L_n^2 = L_{n-1}L_{n+1} + 5 \cdot (-1)^n$;
д) $L_n L_{n+3} = L_{n+1}L_{n+2} + 5 \cdot (-1)^n$;
е) $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n$ $(n > 1)$;
ж) $F_n^2 = F_{n-2}F_{n+2} + (-1)^n$ $(n > 2)$;
з) $F_n^2 = F_{n-3}F_{n+3} - 2^2 \cdot (-1)^n$ $(n > 3)$;
и) $F_n^2 = F_{n-4}F_{n+4} + 3^2 \cdot (-1)^n$ $(n > 4)$;
к) $F_n^2 = F_{n-5}F_{n+5} - 5^2 \cdot (-1)^n$ $(n > 5)$.

(См. также 9.86, 11.54.)

3.169. В вершинах правильных многоугольников записываются числа 1 и 2. Сколько существует таких многоугольников, что сумма чисел стоящих в вершинах равна n $(n \geqslant 3)$? Две расстановки чисел, которые можно совместить поворотом не отождествляются.

3.170. Выразите L_n в замкнутой форме через φ и $\widehat{\varphi}$. (См. также 11.96.)

3.171. Докажите равенства

а) $\sqrt[4]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}} = 1;$

б) $\sqrt[5]{\dfrac{11+5\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[9]{\dfrac{76-34\sqrt{5}}{2}} = 1.$

Найдите общую формулу, для которой данные равенства являются частными случаями.

3.172. Докажите, что равенство $F_n = L_m$ $(m, n \geqslant 0)$ возможно только если $F_n = L_m = 1$ или $F_n = L_m = 3$.

3.173. Докажите, что произвольная последовательность Q_n, заданная условиями

$$Q_0 = \alpha, \quad Q_1 = \beta, \quad Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n \quad (n \geqslant 0),$$

может быть выражена через числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n.

3.174. Коэффициенты T_n^k и числа Люка. Докажите, что при $n \geqslant 1$ справедливо тождество

$$T_n^0 + T_{n-1}^1 + T_{n-2}^2 + \ldots = L_{n-1},$$

где T_n^k — числа из задачи 2.93, а L_n — числа Люка. (См. также приложение III.)

3.175. Вычислите сумму

$$T_n^0 - T_{n-1}^1 + T_{n-2}^2 - \ldots$$

3.176*. Решите в целых числах уравнения:

а) $x^2 - xy - y^2 = 1;$

б) $x^2 - xy - y^2 = -1.$

3.177. а) Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи при $m \geqslant 2$ встречается не менее 4 и не более 5 m-значных чисел.

б) Докажите, что число F_{5t+2} $(t \geqslant 0)$ содержит в своей десятичной записи не менее $t+1$ цифры.

3.178. Рассмотрим алгоритм Евклида из задачи 3.39 состоящий из k шагов. Докажите, что начальные числа m_0 и m_1 должны удовлетворять неравенствам $m_1 \geqslant F_{k+1}$, $m_0 \geqslant F_{k+2}$.

3.179. Теорема Ламе. Пусть число m_1 в десятичной системе счисления записывается при помощи t цифр. Докажите, что при любом m_0 число шагов k в алгоритме Евклида для чисел m_0 и m_1 удовлетворяет неравенству $k \leqslant 5t$.

3.180. Фибоначчиевы коэффициенты.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 6 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 15 & & 15 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 8 & & 40 & & 60 & & 40 & & 8 & & 1 & \\
1 & & 13 & & 104 & & 260 & & 260 & & 104 & & 13 & & 1
\end{array}
$$

Данная таблица аналогична треугольнику Паскаля и состоит из фибоначчиевых коэффициентов $\mathcal{F}_n^k$, определяемых равенством

$$\mathcal{F}_n^k = \frac{F_n \cdot F_{n-1} \cdot \ldots \cdot F_{n-k+1}}{F_k \cdot F_{k-1} \cdot \ldots \cdot F_1} \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

а) Докажите, что фибоначчиевы коэффициенты обладают свойством симметрии $\mathcal{F}_n^k = \mathcal{F}_{n-k}^k$.

б) Найдите формулу, которая выражает коэффициент $\mathcal{F}_n^k$ через $\mathcal{F}_{n-1}^{k-1}$ и $\mathcal{F}_{n-1}^k$ (аналогичную равенству б) из задачи 2.57).

в) Объясните, почему все фибоначчиевы коэффициенты являются целыми числами.

3.181*. Обобщенные биномиальные коэффициенты. Пусть A_1, A_2, … — последовательность ненулевых целых чисел, такая, что

$$(A_m, A_n) = A_{(m,n)} \quad (m, n \geqslant 1).$$

Докажите, что все обобщенные биномиальные коэффициенты

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{A_n \cdot A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_{n-k+1}}{A_k \cdot A_{k-1} \cdot \ldots \cdot A_1}$$

являются целыми числами. (См. также 8.94.)

3.182. Спектры чисел. Спектром действительного числа α называется бесконечное мультимножество чисел

$$\operatorname{Spec}(\alpha) = \{[\alpha], [2\alpha], [3\alpha] \ldots\}.$$

(Мультимножество — это то же самое, что и множество, но в нем могут содержаться повторяющиеся элементы.)

Например, спектр числа 1/2 имеет вид

$$\operatorname{Spec}(1/2) = \{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots\}.$$

Пусть $\operatorname{Spec}(\alpha) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Докажите, что

а) если $\alpha \geqslant 1$, то $a_{n+1} > a_n$ $(n \geqslant 0)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \alpha$;

в) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \mathrm{Spec}(\alpha) = \mathrm{Spec}(\beta)$.

3.183. Пусть α и β — положительные иррациональные числа, связанные равенством $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Докажите, что спектры этих чисел образуют *разбиение* множества натуральных чисел, то есть

$$\mathrm{Spec}(\alpha) \cap \mathrm{Spec}(\beta) = \varnothing, \quad \mathrm{Spec}(\alpha) \cup \mathrm{Spec}(\beta) = \mathbb{N}.$$

Например, множества

$$\mathrm{Spec}(\sqrt{2}) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, \dots\},$$

$$\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2}) = \{3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, 37, 40, 44, 47, \dots\}$$

не пересекаются и при объединении дают множество всех натуральных чисел

3.184. Предложите алгоритм, который позволял бы без использования калькулятора вычислять спектры чисел $\sqrt{2}$ и $2+\sqrt{2}$.

3.185. Существуют ли действительные числа α, β, γ, такие, что $\mathrm{Spec}(\alpha)$, $\mathrm{Spec}(\beta)$ и $\mathrm{Spec}(\gamma)$ вместе взятые образуют разбиение множества натуральных чисел?

3.186*. Из равенства

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi+1} = 1$$

следует, что $\mathrm{Spec}(\varphi)$ и $\mathrm{Spec}(\varphi+1) = \mathrm{Spec}(\varphi^2)$ образуют разбиение множества натуральных чисел:

$$\mathrm{Spec}(\varphi) = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, \dots\},$$
$$\mathrm{Spec}(\varphi+1) = \{2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, \dots\}.$$

Как по записи числа n в фибоначчиевой системе счисления определить какому из этих двух спектров принадлежит n?

3.187. Пусть f и g — возрастающие функции, такие, что множества $\{f(1), f(2), \dots\}$ и $\{g(1), g(2), \dots\}$ образуют разбиение множества натуральных чисел. Предположим, что f и g связаны условием $g(n) = f(f(n)) + 1$ при любом $n > 0$. Докажите, что $f(n) = [n\varphi]$ и $g(n) = [n\varphi^2]$.

3.188*. Игра «Цзяньшицзы». Два игрока по очереди берут камни из двух кучек. За один ход можно взять любое количество камней из одной кучки или равное число камней из обеих. Выигрывает тот, кому достается последний камень. Докажите, что игрок находится в проигрышной позиции тогда и только тогда, когда ему достались кучи в которых лежит $[n\varphi]$ и $[n\varphi^2]$ камней. Например, первыми проигрышными позициями будут пары $(1, 2)$, $(3, 5)$, $\dots$

3.189.* Два игрока по очереди берут камни из одной кучки. Если один игрок взял k камней, то второй своим ходом может взять от 1 до $2k$ камней. Взявший последний камень — выигрывает. Пусть изначально в кучке находится n камней и первый игрок может взять только один камень. Для каких значений n он сможет выиграть?

3.190.* **Массив Витхоффа.** В первых двух столбцах массива Витхоффа стоят числа n и $[(n+1)\varphi]$. Строки заполняются числами по правилу Фибоначчи, то есть каждое следующее число равно сумме двух предыдущих:

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	...
3	6	9	15	24	39	63	102	165	267	...
4	8	12	20	32	52	84	136	220	356	...
5	9	14	23	37	60	97	157	254	411	...
6	11	17	28	45	73	118	191	309	500	...
7	12	19	31	50	81	131	212	343	555	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

а) Докажите, что если двигаться по одной строке, то после вертикальной черты каждое следующее число получается из предыдущего путем побитового сдвига в фибоначчиевой системе счисления. Например, за числом $19 = (101001)_F$ следует число $31 = (1010010)_F$.

б) Докажите, что каждое натуральное число в правой части таблицы встречается ровно один раз.

в) В каждой строке массива Витхоффа сгруппируем числа парами. Так первая строка даст последовательность $(1, 2), (3, 5), (8, 13), \ldots;$ вторая — $(4, 7), (11, 18), (29, 47), \ldots$ Докажите, что полученное множество пар чисел совпадает с множеством проигрышных позиций в игре «Цзяньшицзы» (см. 3.188).

г) Докажите, что в n-й строке и k-м столбце будет располагаться число $[(n+1)\varphi F_{k+2}] + nF_{k+1}$ (нулевым считается столбец, расположенный сразу после вертикальной черты).

д) Поставим в соответствие каждому натуральному числу n номер ряда a_n, в котором оно стоит (нумерация начинается с нуля и номер каждого ряда совпадает с числом, стоящим а начале этого ряда). Тогда получится последовательность

$$0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 4, 0, 8, 5, \ldots$$

Докажите, что если из нее удалить каждое число, которое появляется впервые, то последовательность не изменится. Так среди первых элементов нужно удалить подчеркнутые:

$$\underline{0}, 0, 0, \underline{1}, 0, \underline{2}, 1, 0, \underline{3}, 2, 1, \underline{4}, 0, \underline{5}, 3, 2, \underline{6}, 1, \underline{7}, 4, 0, \underline{8}, 5, \ldots$$

е) Докажите, что между двумя последовательными нулями всегда стоит перестановка нескольких (скольких?) первых натуральных чисел.

3.5. Цепные дроби

Определение. Пусть a_0 — целое, a_1, a_2, …, a_n — натуральные и $a_n > 1$. *Конечной цепной (непрерывной) дробью* называется выражение

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} \tag{3.1}$$

(обозначается $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$).

Числа a_1, a_2, …, a_n называются *неполными частными* дроби (3.1).

3.191. Разложите в цепные дроби числа $\dfrac{147}{13}$ и $\dfrac{129}{111}$.

3.192. Пусть $\dfrac{P_n}{Q_n} = [\underbrace{1; 1, \ldots, 1}_{n}]$. Чему равны P_n и Q_n?

3.193. Как связано разложение рационального числа в цепную дробь с алгоритмом Евклида?

3.194. Геометрическая интерпретация алгоритма Евклида. Работу алгоритма Евклида (см. раздел 3.2) можно представить следующим образом. В прямоугольник размерами $m_0 \times m_1$ ($m_1 \leqslant m_0$) укладываем a_0 квадратов размера $m_1 \times m_1$, в оставшийся прямоугольник размерами $m_1 \times m_2$ ($m_2 \leqslant m_1$) укладываем a_1 квадратов размера $m_2 \times m_2$, и т. д. до тех пор, пока весь прямоугольник не покроется квадратами. (См. также 3.207.)

Выразите общее число квадратов через элементы цепной дроби числа m_1/m_2.

3.195. Для каждого натурального n приведите пример прямоугольника, который разрезался бы ровно на n квадратов.

3.196. Цепные дроби и электрические цепи. Для данного рационального числа a/b постройте электрическую цепь из единичных сопротивлений, общее сопротивление которой равнялось бы a/b. Как такую цепь можно получить при помощи разбиения прямоугольника $a \times b$ на квадраты из задачи 3.194?

3.197. Пусть a_0 — целое, $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа. Определим две последовательности

$$P_{-1} = 1, \quad P_0 = a_0, \quad P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2} \quad (1 \leqslant k \leqslant n);$$
$$Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1, \quad Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Докажите, что построенные последовательности для $k = 0, 1, \ldots, n$ обладают следующими свойствами:

а) $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$;

б) $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k+1}$;

в) $(P_k, Q_k) = 1$.

Определение. Рациональные дроби

$$\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

называются *подходящими дробями* к непрерывной дроби (3.1).

3.198. Докажите следующие свойства подходящих дробей:

а) $P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k = (-1)^k a_k \quad (k \geqslant 2)$;

б) $\dfrac{P_k}{Q_k} - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}} \quad (k \geqslant 1)$;

в) $Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n$;

г) $\dfrac{P_0}{Q_0} < \dfrac{P_2}{Q_2} < \dfrac{P_4}{Q_4} < \ldots \leqslant \dfrac{P_n}{Q_n} \leqslant \ldots < \dfrac{P_5}{Q_5} < \dfrac{P_3}{Q_3} < \dfrac{P_1}{Q_1}$;

д) $\dfrac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \dfrac{P_{2l+1}}{Q_{2l+1}} \quad (k, l \geqslant 0)$.

3.199. О приближении чисел подходящими дробями. Пусть $\dfrac{P_k}{Q_k}$ — подходящие дроби к числу α. Докажите, что для всех k

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \leqslant \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \leqslant \frac{1}{Q_k^2}.$$

3.200. Найдите разложение в цепную дробь чисел вида L_n/F_n, где L_n — числа Люка, а F_n — числа Фибоначчи.

3.201. Пусть числа a и b определены равенством $\dfrac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Докажите, что уравнение $ax - by = 1$ с неизвестными x и y имеет решением одну из пар (Q_{n-1}, P_{n-1}) или $(-Q_{n-1}, -P_{n-1})$. Отчего зависит, какая именно из пар является решением?

3.202. Разлагая число a/b в непрерывную дробь, решите в целых числах уравнения $ax - by = 1$, если

а) $a = 101$, $b = 13$; б) $a = 79$, $b = 19$.

3.203. Григорианский календарь. Обыкновенный год содержит 365 дней, високосный — 366. Если n не делится на 100, то n-й год является високосным тогда и только тогда, когда n кратно 4. Если n делится на 100, то n-й год является високосным тогда и только тогда, когда n кратно 400. Так, например, 1996-й и 2000-й годы — високосные, а 1997-й и 1900-й — нет. Эти правила были установлены папой Григорием XIII.

До сих пор мы имели ввиду «гражданский год», число дней которого должно быть целым. Астрономическим же годом называется период времени, за который Земля совершает полный оборот вокруг Солнца. Считая, что «григорианский год» полностью согласован с астрономическим годом, найдите продолжительность астрономического года. (См. также 12.8.)

Определение. *Бесконечной непрерывной* (*цепной*) *дробью* называется выражение вида

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}$$

где a_0 — целое, a_1, a_2, ..., a_n, ... — натуральные числа.

Величиной бесконечной непрерывной дроби называется предел (при условии, что он существует) ее подходящих дробей, то есть такое число α, что

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n},$$

где $\dfrac{P_n}{Q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

3.204. Докажите, что любое иррациональное число α допускает представление

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n],$$

где a_0 — целое, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — натуральные, $\alpha_n > 1$ — иррациональное действительное числа. Отсюда следует, что каждому иррациональному действительному числу можно поставить в соответствие бесконечную цепную дробь.

3.205. Докажите, что для любой бесконечной цепной дроби

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$$

существует предел ее подходящих дробей — иррациональное число α. Объясните, почему если это число α разложить в бесконечную цепную дробь при помощи алгоритма предыдущей задачи, то получится бесконечная цепная дробь, равная исходной.

Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между иррациональными числами и бесконечными цепными дробями. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять цепную дробь с ее числовым значением.

Все свойства подходящих дробей, описанные в задачах 3.197—3.199, остаются справедливыми и для бесконечных цепных дробей.

3.206. Предположим, что число α задано бесконечной цепной дробью

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots].$$

Докажите, что

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_2 q_3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{q_n q_{n+1}} + \ldots$$

3.207. Последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ строятся по следующему закону:

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \min(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = |b_n - a_n| \quad (n \geqslant 1).$$

а) Докажите, что $a_n \neq 0$ и a_n стремится к 0 при $n \to \infty$.

б) Докажите, что последовательность $c_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ имеет предел и найдите этот предел.

3.208. Юлианский календарь. Из астрономии известно, что астрономический год имеет $365{,}2420\ldots = [365; 4, 7, 1, 3, \ldots]$ так называемых «календарных суток». В Юлианском стиле каждый четвертый год — високосный, то есть состоит из 366 дней. За сколько лет при таком календаре накапливается ошибка в одни сутки? На сколько дней отстает Юлианский календарь за 1000 лет? И вообще, почему он отстает, если юлианский год длиннее астрономического?

3.209. Персидский календарь. Наиболее точный календарь ввел в Персии в 1079 году персидский астроном, математик и поэт Омар Альхайями. Восстановите этот календарный стиль, рассмотрев третью подходящую дробь $[365; 4, 7, 1]$ к длительности астрономического года. За сколько лет в этом календаре накапливается ошибка в одни сутки?

Определение. Бесконечная непрерывная дробь вида

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+T}, a_{k+1}, \ldots, a_{k+T}, \ldots] = \\ = [a_0; a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, \ldots, a_{k+T}}\,]$$

называется *периодической с периодом* $a_{k+1}, \ldots, a_{k+T}$. Набор $a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ называется *предпериодом.*

Бесконечная непрерывная дробь вида $[\,\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{T-1}}\,]$ называется *чисто периодической*.

3.210. Вычислите следующие цепные дроби:
а) $[\,5; \overline{1, 2, 1, 10}\,]$; б) $[\,5; \overline{1, 4, 1, 10}\,]$; в) $[\,2; \overline{1, 1, 3}\,]$.

3.211. Разложите в цепные дроби числа:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\dfrac{1}{2} + \sqrt{7}$.

3.212. Формат *A*4. Найдите наименьшее натуральное n, для которого существует такое m, что

$$\sqrt{2} < \frac{m}{n} < \frac{297}{210}.$$

3.213. Числа из электрической розетки. Найдите наименьшее натуральные n и l, для которых существуют такие k и m, что

$$\frac{380}{220} < \frac{k}{l} < \sqrt{3} < \frac{m}{n} < \frac{220}{127}.$$

(См. [202].)

Определение. Число называется *квадратичной иррациональностью*, если оно является иррациональным корнем некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Если $\alpha = b + c\sqrt{d}$ — квадратичная иррациональность, то число $\alpha' = b - c\sqrt{d}$ называется *сопряженным* к числу α.

3.214. Докажите, что значение любой периодической цепной дроби — квадратичная иррациональность.

Верно более сильное утверждение.

Теорема Лагранжа. Число разлагается в периодическую цепную дробь тогда и только тогда, когда оно является квадратичной иррациональностью. (См. [7], [39].)

3.215. Найдите рациональное число, которое отличается от α не более чем на 0,0001, где
а) $\alpha = \sqrt{2}$; б) $\alpha = 2 + \sqrt{5}$; в) $\alpha = 3 + \sqrt{7}$.

3.216. Докажите равенство:

$$[\,\underbrace{2; 2, \ldots, 2}_{n}\,] = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n} - (1-\sqrt{2})^{n}}.$$

3.217*. Теорема Лежандра. Пусть α — действительное число,

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{\theta}{q^2},$$

и p'/q' — предпоследняя подходящая дробь к числу p/q. Докажите, что p/q будет подходящей дробью к числу α тогда и только тогда, когда

$$|\theta| \leqslant \frac{q}{q+q'}.$$

(Если $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ — рациональное число, то для справедливости этого утверждения к множеству подходящих дробей нужно добавить еще одну — $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1]$.)

Выведите отсюда теорему Лежандра: если

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

то $\dfrac{p}{q}$ — подходящая дробь к числу α.

3.218. Теорема Валена. Докажите, что если p_n/q_n $(n \geqslant 1)$ — подходящая дробь к числу α, то имеет место по крайней мере одно из неравенств

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{или} \quad \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{2q_{n-1}^2}.$$

Получите отсюда теорему Валена: для любого α найдется бесконечно много дробей p/q таких, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

3.219. Докажите, что для любых целых чисел p и q $(q \neq 0)$, справедливо неравенство

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2}.$$

3.220. Докажите, что для любого натурального d, не являющегося полным квадратом, найдется такое α, что для любых целых m и n

$$\left|\sqrt{d} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{\alpha n^2}.$$

3.221. Докажите, что при $k \geqslant 1$ выполняется равенство:

$$\frac{a^{F_{k+2}} - 1}{a^{F_{k+1}} - 1} = [a^{F_k}; a^{F_{k-1}}, \ldots, a^{F_0}],$$

где $\{F_k\}$ — последовательность чисел Фибоначчи.

3.222. Докажите, что положительный корень квадратного уравнения $bx^2 - abx - a = 0$, где a и b — натуральные числа, разлагается в чисто периодическую цепную дробь с длиной периода, равной 2. Верно ли обратное утверждение?

3.223. Докажите, что если квадратное уравнение с целыми коэффициентами имеет корень $x = [\,\overline{a; b}\,]$, то вторым корнем служит число $-\dfrac{1}{[\,\overline{a; b}\,]}$.

3.224*. Теорема Галуа. Докажите, что квадратичная иррациональность $\alpha = \dfrac{A + \sqrt{D}}{B}$ разлагается в чисто периодическую цепную дробь тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$, и сопряженная α квадратичная иррациональность $\alpha' = \dfrac{A - \sqrt{D}}{B}$ принадлежит интервалу $(-1; 0)$.

3.225. Докажите, что если квадратное уравнение с целыми коэффициентами имеет корень $x = [a; \overline{b, c}\,]$, то вторым корнем будет число $a - [\,\overline{c, b}\,]$.

3.226. Докажите, что цепные дроби для чисел

$$2\cos\frac{2\pi}{7} = [1; 4, 20, 2, 3, 1, 6, 10, 5, \ldots],$$

$$2\cos\frac{4\pi}{7} = [-1; 1, 1, 4, 20, 2, 3, 1, 6, 10, 5, \ldots],$$

$$2\cos\frac{8\pi}{7} = [-2; 5, 20, 2, 3, 1, 6, 10, 5, \ldots],$$

отличаются лишь первыми неполными частными.

3.227. Пусть $\alpha = 2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ и $\alpha_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ $(n \geqslant 0)$ — подходящие дроби к числу α. Докажите, что дроби

$$\beta_n = -\frac{Q_n}{P_n + Q_n} \quad \text{и} \quad \gamma_n = -\frac{P_n + Q_n}{P_n}$$

будут подходящими для чисел $\beta = 2\cos\dfrac{4\pi}{7}$ и $\gamma = 2\cos\dfrac{8\pi}{7}$.

3.228. Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное тому, что рассматривалось в предыдущей задаче, но для чисел $2\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $2\cos\dfrac{4\pi}{9}$ и $2\cos\dfrac{8\pi}{9}$. Разложение этих чисел в цепные дроби можно найти в приложении С, IV.

3.229*. Согласно теореме Галуа из задачи 3.224 числа вида $[\sqrt{D}] + \sqrt{D}$ (когда D — не полный квадрат) раскладываются в чисто периодическую цепную дробь. Если проследить за процессом разложения таких чисел в цепные дроби, то можно заметить некоторые закономерности. Пусть, например, $\alpha = 6 + \sqrt{43}$ и α_n — полные частные:

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n].$$

Вычисления показывают, что последовательность $\alpha_0 = \alpha$, α_1, … устроена следующим образом:

$$6+\sqrt{43},\quad \frac{6+\sqrt{43}}{7},\quad \frac{1+\sqrt{43}}{6},\quad \frac{5+\sqrt{43}}{3},\quad \frac{4+\sqrt{43}}{9},\quad \frac{5+\sqrt{43}}{2},$$
$$\frac{5+\sqrt{43}}{9},\quad \frac{4+\sqrt{43}}{3},\quad \frac{5+\sqrt{43}}{6},\quad \frac{1+\sqrt{43}}{7},\quad 6+\sqrt{43},\ldots$$

Каждый раз получаются числа вида

$$\alpha_n = \frac{U_n+\sqrt{D}}{V_n},$$

причем числа U_n, V_n и неполные частные $\{a_n\}$ обладают определенной симметрией:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	12	1	1	3	1	5	1	3	1	1	12
U_n	6	6	1	5	4	5	5	4	5	1	6
V_n	1	7	6	3	9	2	9	3	6	7	1

Докажите, что и в общем случае, если T — длина периода цепной дроби для числа $\alpha = [\sqrt{D}] + \sqrt{D}$, то при $0 \leqslant n \leqslant T$

$$a_n = a_{T-n},\quad U_{n+1} = U_{T-n},\quad V_n = V_{T-n}.$$

3.6. Континуанты

Рассмотрим зависимость числителей и знаменателей подходящих дробей

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

от неполных частных:

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1},\quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1},\quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1},$$
$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_0a_1a_2a_3+a_0a_1+a_0a_3+a_2a_3+1}{a_1a_2a_3+a_1+a_3}.$$

Видно, что числитель каждой цепной дроби по своей структуре напоминает знаменатель следующей цепной дроби. Многочлены, находящиеся в числителях и знаменателях, называются континуантами (а также K-многочленами или скобками Эйлера).

Определение. Континуантом $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ называется многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$, который определяется рекуррентно следующим образом:

$K_0() = 1;$

$K_1(x_1) = x_1;$

$K_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}) \quad (n \geqslant 2).$

Для удобства можно считать, что $K_{-1} = 0$.

3.230. Докажите, что всякая конечная цепная дробь есть отношение двух континуантов:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{K_{n+1}(a_0, \ldots, a_n)}{K_n(a_1, \ldots, a_n)} \quad (n \geqslant 0).$$

3.231. Проверьте, что общее количество слагаемых в многочлене $K(x_1, \ldots, x_n)$ равно числу Фибоначчи: $K_n(1, \ldots, 1) = F_{n+1}$ $(n \geqslant 0)$.

3.232. Правило Эйлера. Докажите, что многочлен $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ может быть получен, если начать с произведения $x_1 \ldots x_n$, затем вычеркивать в нем соседние пары $x_k x_{k+1}$ всеми возможными способами и складывать все получающиеся одночлены.

Правило Эйлера можно представить графически, образуя всевозможные слова длины n из точек и тире в «азбуке Морзе», где каждая точка имеет длину 1, а каждое тире имеет длину 2. Вот, например, слова длины 4 в «азбуке Морзе»:

$$\cdot\cdot\cdot\cdot \qquad \cdot\cdot\,— \qquad \cdot\,—\,\cdot \qquad —\,\cdot\cdot \qquad —\,—$$

и соответствующие им слагаемые в $K_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$x_1x_2x_3x_4, \quad x_1x_2, \quad x_1x_4, \quad x_3x_4, \quad 1.$$

Точка означает переменную, которая остается, а тире — пару переменных, которые вычеркнуты (слову из одних тире соответствует пустое произведение, которое, по определению, считается равным 1).

3.233. С помощью правила Эйлера проверьте справедливость следующих свойств:

а) $K_n(x_1, \ldots, x_n) = K_n(x_n, \ldots, x_1)$;

б) $K_{n+2}(x_1, \ldots, x_{n+1}, 0) = K_n(x_1, \ldots, x_n)$;

в) $K_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 K_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) + K_{n-2}(x_3, \ldots, x_n)$;

г)
$$\begin{aligned} K_{m+n}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) &= \\ = K_m(x_1, \ldots, x_m) K_n(x_{m+1}, \ldots, x_n) &+ \\ + K_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}) K_{n-1}(x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}). \end{aligned}$$

3.234. Пусть $\dfrac{P_n}{Q_n}$ $(n \geqslant 0)$ — подходящие дроби к числу $\alpha = [a_0; a_1, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots]$. Докажите равенства

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{K_{n+1}(a_n, \ldots, a_0)}{K_n(a_{n-1}, \ldots, a_0)}, \qquad \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{K_n(a_n, \ldots, a_1)}{K_{n-1}(a_{n-1}, \ldots, a_1)}.$$

3.235. Докажите, что если конечная цепная дробь $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ симметрична, то есть $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, ..., то справедливо равенство $P_{n-1} = Q_n$.

3.236. Докажите, что нулевые аргументы K-многочленов могут быть удалены путем стягивания их соседей $(1 < m < n)$:

$$K_n(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \\ = K_n(x_1, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1} + x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n).$$

3.237. Докажите, что многочлен

$$C_{n+2}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = K_{n+2}(x_1, \ldots, x_{n+2}) + K_n(x_2, \ldots, x_n)$$

не изменяется при циклической перестановке переменных

$$x_1 \to x_2, \ldots, \quad x_{n+1} \to x_{n+2}, \quad x_{n+2} \to x_1,$$

то есть

$$C_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = C_{n+2}(x_2, \ldots, x_{n+2}, x_1).$$

3.238. Пусть $p = 4k + 1$ — простое число. Докажите, что одно из чисел

$$\frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \ldots, \frac{p}{2k}$$

обладает симметричным разложением в цепную дробь, то есть для некоторого q, лежащего в пределах $2 \leqslant q \leqslant 2k$

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_1, a_0].$$

Найдите с помощью этой цепной дроби такие натуральные a и b, что

$$p = a^2 + b^2.$$

3.239. Рассмотрим многочлены $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n)$, которые получаются из числителей и знаменателей цепных дробей с минусами

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots - \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Первые подходящие дроби имеют вид

$$\frac{a_0}{1}, \quad \frac{a_0a_1 - 1}{a_1}, \quad \frac{a_0a_1a_2 - a_0 - a_2}{a_1a_2 - 1}.$$

Следовательно, нужно выбирать

$$\widetilde{K}_0() = 1, \quad \widetilde{K}_1(x_1) = x_1, \quad \widetilde{K}_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - 1,$$

$$\widetilde{K}_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - x_1 - x_3.$$

Как такие многочлены будут связаны с обычными континуантами? Докажите для них свойства аналогичные свойствам многочленов $K_n(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ из задачи 3.233.

3.240. Не все свойства многочленов $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n)$ и соответствующих им цепных дробей с «минусами» аналогичны свойствам K-многочленов и обычных цепных дробей.

а) Приведите пример, когда многочлен $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n)$ от натуральных аргументов $x_1, \ldots, x_n$ принимает отрицательное значение.

б) Докажите, что при $x_1 \geqslant 2, \ldots, x_n \geqslant 2$ многочлен $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n)$ положителен.

в) Покажите, что бесконечная цепная дробь

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots - \cfrac{1}{a_n - \ddots}}}$$

может сходится к рациональному числу.

3.241.* **Морозные узоры.** Рассмотрим таблицу, которая ограничена слева зигзагом из единиц, а сверху и снизу — горизонтальными рядами из единиц:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1\\
&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?\\
&&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?\\
&&&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?\\
&&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?\\
&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?\\
&&1&&?&&?&&?&&?&&?&&?&&?\\
&&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1
\end{array}$$

Затем попробуем заполнить внутренние клетки, используя следующее правило: числа a, b, c и d, образующие маленький квадрат

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

должны удовлетворять условию $ad - bc = 1$.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1\\
&1&&2&&2&&4&&2&&1&&3&&2&&4&&1\\
&&1&&3&&7&&7&&1&&2&&5&&7&&3&&1\\
&&&1&&10&&12&&3&&1&&3&&17&&5&&2&&1\\
&&1&&3&&17&&5&&2&&1&&10&&12&&3&&1\\
&1&&2&&5&&7&&3&&1&&3&&7&&7&&1\\
&&1&&3&&2&&4&&1&&2&&2&&4&&2&&1\\
&&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1&&1
\end{array}$$

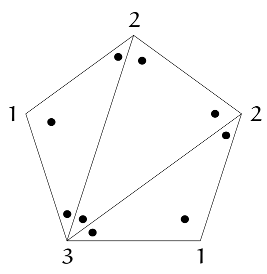
Удивительным образом оказывается, что при вычислении новых чисел всегда происходит деление нацело и таблица заполняется только натуральными числами. Кроме того, левый зигзаг из единиц появляется снова: сначала в перевернутом виде, а потом — в первоначальном. То же самое происходит, если начинать с другого зигзага или если рассматривать таблицы другой ширины.

Докажите эти закономерности, пользуясь континуантами из задачи 3.239.

Можно также доказать, что таблицы ширины n находятся во взаимно однозначном соответствии с триангуляциями выпуклого $n+1$-угольника. Например, таблице

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots & & \\
& \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \dots & \\
& & 1 & & 3 & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & \dots \\
& & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
\end{array}
$$

соответствует триангуляция пятиугольника. На рисунке около каждой



вершины написано число примыкающих треугольников. Обратите внимание на совпадение этих чисел с числами из второй строки таблицы (обход пятиугольника осуществляется по часовой стрелке). Таким образом, общее количество морозных узоров данной ширины будет равно соответствующему числу Каталана (см. [17], раздел 2.3.4.6, зад. 4).

Глава 4

Арифметика остатков

4.1. Четность

4.1. Пусть m и n — целые числа. Докажите, что $mn(m+n)$ — четное число.

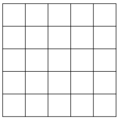
4.2. Рукопожатия. Каждый из людей, когда-либо живших на земле, сделал определенное число рукопожатий. Докажите, что число людей, сделавших нечетное число рукопожатий — четно.

4.3. В прямоугольном треугольнике длины сторон — натуральные взаимно простые числа. Докажите, что длина гипотенузы — нечетное число, а длины катетов имеют разную четность.

4.4. На доске написано 10 плюсов и 15 минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения 24 таких операций?

4.5. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки ($a8$ и $h1$). Можно ли оставшуюся часть доски покрыть неперекрывающимися косточками домино?

4.6. Город имеет форму квадрата 5×5 (см. рисунок). Какую наименьшую длину может иметь маршрут, если нужно пройти по каждой улице этого города и вернуться в прежнее место? (По каждой улице можно проходить любое число раз.)



4.7. Может ли ладья перейти из одного угла шахматной доски в противоположный угол (по диагонали), побывав по одному разу на всех 64 клетках? Тот же вопрос для коня.

4.8. Вороны на деревьях. Вдоль улицы стоят 6 деревьев и на каждом из них сидит по вороне. Раз в час две из них взлетают и каждая садится на одно из соседних деревьев. Может ли получится так, что все вороны соберутся на одном дереве?

4.9. Термит и 27 кубиков. Представим себе большой куб, склеенный из 27 меньших кубиков. Термит садится на центр грани одного из наружных кубиков и начинает прогрызать ход. Побывав в кубике, термит к нему уже не возвращается. Движется он при этом всегда параллельно какому-нибудь ребру большого куба. Может ли термит прогрызть все 26 внешних кубиков и закончить свой ход в центральном кубике? Если возможно, покажите, каким должен быть путь термита.

4.10. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на своих местах?

4.11. Все косточки домино выложены в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?

4.12. Можно ли множество всех натуральных чисел больше 1 разбить на два непустых подмножества так, чтобы для любых двух чисел a и b из одного множества число $ab-1$ принадлежало другому?

4.13. Дан выпуклый $2n$-угольник $A_1, \ldots, A_{2n}$. Внутри него взята точка P, не принадлежащая ни одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит четному числу треугольников с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_{2n}$.

4.14. В ряд выписаны числа $1, 2, \ldots, 10$. Можно ли расставить между ними знаки «$+$» и «$-$» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

4.15*. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна.

4.16. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она может лишь через целое число часов.

4.17. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих. Коля Васин взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

4.18. 7 стаканов. На столе стоят 7 стаканов — все вверх дном. Разрешается за один ход перевернуть любые 4 стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

4.19. В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки $+$ и $-$, как показано на рисунке

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{array}$$

Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, можно менять знак в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы мы ни производили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

4.20. Марсианские амебы. В пробирке находятся марсианские амебы трех типов A, B и C. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа A было 20 штук, типа B — 21 штука, и типа C — 22 штуки? (См. также 5.94.)

4.21. Игра «Йога». На поле для игры расставлены 32 фишки (смотрите рис. 1). При взятии одна фишка перескакивает через другую — почти как в шашках, но не по диагонали, а по горизонтали или по вертикали. Допустим, в конце игры осталась 1 фишка. Объясните, почему для ее расположения есть только 5 вариантов, изображенных на рисунке 2. (См. также 5.95.)

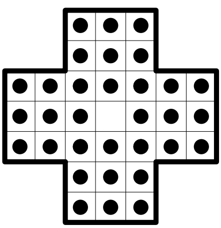


Рис. 1.

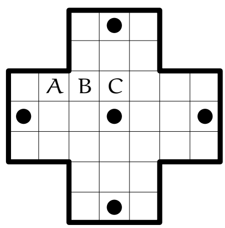


Рис. 2.

Указание: Рассадите на поле для игры марсианских амеб. Пусть в клетках A и B сидят амебы, а клетка C — пустая. Тогда амеба A, перепрыгивая через амебу B превращается в амебу C, а амеба B исчезает.

4.22. На шахматной доске 8×8 двенадцать шашек занимают черные клетки трех первых горизонталей (стандартная начальная позиция). Они начинают бить друг друга по стандартным шашечным правилам (одна шашка бьет другую перепрыгивая через нее). Докажите, что при любой последовательности взятий на доске останется не менее двух шашек.

4.23. Код, исправляющий ошибку. Предположим, что требуется передать сообщение, состоящее из n^2 нулей и единиц. Запишем его в виде квадратной таблицы $n \times n$. Допишем к каждой строке сумму ее элементов по модулю 2. Получится еще один столбец высоты n. Аналогично поступим с каждым столбцом (в том числе найдем и сумму элементов дописанного столбца). Например, если требуется передать сообщение 0111, то таблица 2×2 окажется дополненной до таблицы 3×3:

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Докажите, что если при передаче расширенной таблицы $(n+1) \times (n+1)$ произойдет одна ошибка, то эту ошибку можно будет найти и исправить. Какое наименьшее число ошибок должно произойти, чтобы об этом нельзя было узнать?

4.2. Делимость

4.24. Пусть $p > 3$ — простое число. Докажите, что $p^2 - 1 \,\vdots\, 24$. (См. также 4.87.)

4.25. Докажите, что любое натуральное число, десятичная запись которого состоит из $3n$ одинаковых цифр, делится на 37.

4.26. Докажите, что число $11\ldots1$ (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8; б) 32 различных делителя.

4.27. Докажите, что числа
а) $2^{3^{2001}} + 1$; б) $2^{3^{2001}} - 1$ — составные.

4.28. Докажите следующие соотношения
а) $2^{41} - 1 \,\vdots\, 83$; б) $2^{70} + 3^{70} \,\vdots\, 13$; в) $2^{15} - 1 \,\vdots\, 20801$.

4.29. Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ числитель дроби

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

делится на p. (См. также 4.117.)

4.30. Натуральные числа m и n таковы, что $m > n$, m не делится на n и имеет от деления на n тот же остаток, что и $m + n$ от деления на $m - n$. Найдите отношение $m : n$.

4.31. Даны целые числа a, b, c такие, что $a + b + c \,\vdots\, 6$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 \,\vdots\, 6$.

4.32. Докажите, что $11^{10} - 1 \,\vdots\, 100$.

4.33. Сколько имеется различных прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражены целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?

4.34. Решите уравнения:
а) $3x^2 + 5y^2 = 345$; б) $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

4.35. Докажите, что число $1^{1999} + 2^{1999} + 3^{1999} + \ldots + 16^{1999}$ делится на 17.

4.36. Назовем шестизначное число счастливым, если сумма его первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Докажите, что сумма всех счастливых чисел делится на 13.

4.37. Докажите, что числа от 1 до 2001 включительно нельзя выписать подряд в некотором порядке так, чтобы полученное число было точным кубом.

4.38. Докажите, что $7^{7^{7^{7^{7}}}} - 7^{7^{7^{7}}} \vdots 10$.

4.39. Число x таково, что x^2 заканчивается на 001 (в десятичной системе счисления). Найдите три последние цифры числа x (укажите все возможные варианты).

4.40. Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырех углов стопки. Может ли оказаться так, что
а) в каждом углу стопки сумма равна 2004?
б) в каждом углу стопки сумма равна 2005?

4.41. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестной подставить 2 или 3, то получаются числа, делящиеся на 6. Докажите, что если вместо неизвестной в него подставить 5, то также получится число, делящееся на 6.

4.42. Докажите, что в трехзначном числе, делящемся на 37, всегда можно переставить цифры так, что полученное число также будет делится на 37.

4.43. Докажите, что если p — простое число и $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то $C_p^k \vdots p$.

4.44. Докажите утверждение обратное тому, что было в задаче 4.43: если $C_n^k \vdots n$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то n — простое число.

4.45. Докажите, что если p — простое число и $1 \leqslant k \leqslant p-2$, то $C_{p-k+1}^k - C_{p-k-1}^{k-2} \vdots p$. Верно ли обратное утверждение?

4.46. Докажите, что если p — простое число, то при любых целых a и b выполняется соотношение

$$(a+b)^p - a^p - b^p \vdots p.$$

4.47. Камни лежат в трех кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

В следующих задачах понадобится вспомнить принцип Дирихле (см. раздел 2.2).

4.48. Дано n целых чисел, записанных в ряд: $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что если ни одно из чисел них не делится на n, то из них всегда можно выбрать несколько подряд идущих чисел, сумма которых делилась бы на n.

4.49. Докажите, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать 15 таких, из которых разность любых двух делится на 7.

4.50. Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

4.51. На 99 карточках пишутся числа 1, 2, ..., 99. Затем карточки тасуются и раскладываются чистыми сторонами вверх. На чистых сторонах карточек снова пишутся числа 1, 2, ..., 99. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных сумм перемножаются. Докажите, что в результате получится четное число.

4.3. Сравнения

Определение. Пусть $m \geqslant 1$. Два числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если их разность делится на m. Записывается это в виде $a \equiv b \pmod{m}$.

4.52. Что означают записи:
а) $a \equiv b \pmod{0}$; б) $a \equiv b \pmod{1}$?

4.53. Свойства сравнений. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то
а) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$; б) $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Определение. *Классом вычетов* по данному модулю m называется множество всех целых чисел сравнимых с некоторым данным целым числом a по модулю m. Такой класс обозначается $\bar{a}$.

4.54. Докажите, что класс $\bar{a}$ состоит из всех чисел вида $mt + a$, где t — произвольное целое число.

4.55. Докажите, что два класса $\bar{a}$ и $\bar{b}$ совпадают тогда и только тогда, когда $a \equiv b \pmod{m}$.

Определение. *Полной системой вычетов* по некоторому модулю называется система чисел, взятых по одному из каждого класса по этому модулю.

4.56. Докажите, что любые m чисел $x_1, \ldots, x_m$ попарно несравнимых по модулю m, представляют собой полную систему вычетов по модулю m.

4.57. Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ образуют полную систему вычетов по модулю m. Для каких a и b числа $y_j = ax_j + b$ $(j = 1, \ldots, m)$ также образуют полную систему вычетов по модулю m?

4.58. Из свойств сравнений следует, что с классами вычетов можно делать все операции, которые допустимы для целых чисел: складывать, вычитать, умножать, возводить в степень. Отличие будет лишь в том, что построенная арифметика действует на конечном множестве классов вычетов. Например, для $m = 6$ получаются такие таблицы сложения и умножения:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Постройте аналогичные таблицы сложения и умножения для модулей $m = 7, 8, \ldots, 13$.

4.59. Когда сравнения $a \equiv b \pmod{m}$ и $ac \equiv bc \pmod{m}$ равносильны?

4.60. Равносильны ли сравнения $a \equiv b \pmod{m}$ и $ac \equiv bc \pmod{mc}$?

4.61. Имеется 100 камней. Два игрока берут по очереди от 1 до 5 камней. Проигрывает тот, кто берет последний камень. Определите выигрышную стратегию первого игрока. (См. также 5.98.)

4.62. Иван-царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй — 4 головы, но тогда у Змея Горыныча вырастает 1999 голов. Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов? (Примечание: если, например, у Змея Горыныча осталось лишь 3 головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя.)

4.63. В магазине было 6 ящиков яблок, массы которых соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 килограммов. Две фирмы приобрели 5 ящиков, причем одна из них взяла по массе яблок в два раза больше, чем другая. Какой ящик остался в магазине?

4.64. Составьте список всевозможных остатков, которые дают числа n^2 при делении на 3, 4, 5, ..., 9.

4.65. Докажите, что из 5 целых чисел всегда можно выбрать 2 таких, разность квадратов которых делится на 7.

4.66. Докажите, что если все коэффициенты уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

— целые нечетные числа, то ни один из корней этого уравнения не может быть рациональным.

4.67. Докажите, что если две последние цифры целого числа нечетны, то это число не может быть квадратом целого числа.

4.68. Докажите, что квадрат целого числа не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами, отличными от 0. Какими тремя цифрами может оканчиваться целое число, квадрат которого оканчивается тремя одинаковыми цифрами, отличными от 0?

4.69. Найдите остатки от деления числа 2^{2001} на 3, 5, 7, ..., 17.

4.70. Шестизначное число делится на 7. Его первую цифру стерли, а затем записали ее позади последней цифры. Докажите, что новое число также делится на 7.

4.71. Найдите все p такие, что числа p, $p + 10$, $p + 14$ — простые.

4.72. Известно, что числа p и $8p^2 + 1$ — простые. Найдите p.

4.73. Известно, что числа p и $p^2 + 2$ — простые. Докажите, что число $p^3 + 2$ также является простым.

4.74. Найдите конечную арифметическую прогрессию с разностью 6 максимальной длины, состоящую из простых чисел.

4.75. Найдите последнюю цифру числа $7^{7^{7^7}}$.

4.76. Может ли число $\dfrac{n^2+1}{3}$ быть целым при натуральных n?

4.77. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что
а) если $a^2 + b^2 \,\vdots\, 3$, то $a^2 + b^2 \,\vdots\, 9$; б) если $a^2 + b^2 \,\vdots\, 21$, то $a^2 + b^2 \,\vdots\, 441$.

4.78. Целые числа a, b, c и d таковы, что $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \,\vdots\, 5$. Докажите, что $abcd \,\vdots\, 625$.

4.79. Целые числа a, b и c таковы, что $a^3 + b^3 + c^3 \,\vdots\, 7$. Докажите, что $abc \,\vdots\, 7$.

4.80. Найдите остаток от деления на 17 числа $2^{1999} + 1$.

4.81. Встретится ли каждое простое число в качестве сомножителя некоторого числа Евклида e_n? (См. задачу 3.27.)

4.82. Пусть в прямоугольном треугольнике длины сторон выражаются целыми числами. Докажите, что длина одного из катетов кратна 3, и длина одной из трех сторон делится на 5.

4.83. Пусть m — произведение первых n простых чисел ($n > 1$). Докажите, что ни одно из чисел

а) $m+1$; б) $m-1$

не является полным квадратом.

4.84. При каких целых n число $a_n = 5n^2 + 10n + 8$ делится на 3? А при каких на 4?

4.85. При каких целых n выражение $n^2 - 6n - 2$ делится на

а) 8; б) 9; в) 11; г) 121?

4.86. При каких целых n выражение $n^2 - n - 4$ делится на

а) 17; б) 289?

4.87. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $(p^2-1)(p^2+11) \equiv 0 \pmod{1440}$. (См. также 7.86.)

4.88. Найдите все такие целые числа x, что $x \equiv 3 \pmod 7$, $x^2 \equiv 44 \pmod{7^2}$, $x^3 \equiv 111 \pmod{7^3}$.

4.89. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$.

4.90. Докажите справедливость следующих сравнений:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 \equiv 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{11} \pmod{13}$;

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 12^2 \equiv 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{11} \pmod{13}$.

Будут ли справедливы аналогичные сравнения для бóльших показателей?

4.91. Докажите, что число $1^k + 2^k + \ldots + 12^k$ делится на 13 для $k = 1, 2, \ldots, 11$.

4.92. Докажите, что если $6n + 11m$ делится на 31, то $n + 7m$ также делится на 31.

4.93. Известно, что многочлен $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d, e — данные целые числа, при всех целых x делится на 7. Докажите, что все числа a, b, c, d, e делятся на 7.

4.94. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечетные значения, то уравнение $P(x) = 0$ не имеет целых корней.

4.95. Докажите, что $p^{p+2} + (p+2)^p \equiv 0 \pmod{2p+2}$, где $p > 2$ — простое число.

4.96. Решите сравнения:

а) $8x \equiv 3 \pmod{13}$; в) $7x \equiv 2 \pmod{11}$;

б) $17x \equiv 1 \pmod{37}$; г) $80x \equiv 17 \pmod{169}$.

Чтобы решить сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$, попробуйте сначала решить в целых числах уравнение $ax + my = b$.

4.97. Найдите все пары чисел вида $\overline{1xy2}$ и $\overline{x12y}$, таких, что оба числа делятся на 7.

4.98. В каких случаях разрешимо сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$? Опишите все решения этого сравнения в целых числах.

4.99. Для каких чисел a решением сравнения $ax \equiv 1 \pmod{p}$ будет само число a?

4.100. Теорема Вильсона. Докажите, что для простого p

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

4.101. Обращение теоремы Вильсона. Докажите, что если $n > 1$ и

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n},$$

то n — простое число.

4.102. Геометрическое доказательство теоремы Вильсона. Пусть $p > 2$ — простое число. Сколькими способами можно провести через вершины правильного p-угольника замкнутую ориентированную p-звенную ломаную? (Ломаные, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.) Найдите формулу и выведите из нее теорему Вильсона.

4.103. Теорема Лейбница. Докажите, что p — простое тогда и только тогда, когда

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}.$$

4.104. Докажите, что для любого простого p и целого q в пределах $1 \leqslant q \leqslant p$

$$(q-1)!(p-q)! \equiv (-1)^q \pmod{p}.$$

4.105. Теорема Клемента. Докажите, что числа p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами тогда и только тогда, когда

$$4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod{p^2+p}.$$

4.106. Обобщение теоремы Вильсона. Докажите, что для любого простого $p > 2$

$$\prod_{\substack{k=1\\ p\nmid k}}^{p^n-1} k \equiv -1 \pmod{p^n}.$$

4.107. Докажите, что четное совершенное число может заканчиваться только на 6 и 8.

4.108. Известно, что числа $a_1, \ldots, a_n$ равны ± 1 и

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$

Докажите, что $n \vdots 4$.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен с целыми коэффициентами от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Очевидно, что каждое решение уравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{4.1}$$

в целых числах является и решением сравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{m} \quad (m \geqslant 1). \tag{4.2}$$

Поэтому, если хотя бы при одном m сравнение (4.2) неразрешимо, то уравнение (4.1) не имеет решений в целых числах.

4.109. Докажите, что число $m = 4k + 3$ нельзя представить в виде $m = a^2 + b^2$

4.110. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах

а) $x^2 + 4y^2 = 2002$;
б) $12x + 5 = y^2$;
в) $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + z^2 = 1999$;
д) $15x^2 - 7y^2 = 9$;
е) $x^2 - 5y + 3 = 0$;
ж) $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1999$;
з) $8x^3 - 13y^3 = 17$.

4.111. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть полным квадратом.

4.112. Гармонические числа. Докажите, что числа

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

при $n > 1$ не будут целыми.

4.113. Решите в натуральных числах уравнение

$$1! + 2! + \ldots + n! = m^2.$$

4.114. Решите в целых числах уравнение

$$2^x - 1 = 5^y.$$

4.115*. Уравнение $3^x + 5^y = 7^z + 1$ имеет решение $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Докажите, что оно не имеет других решений в натуральных числах.

4.116. Докажите что если $(m, n) = 1$, то сравнение $a \equiv b \pmod{mn}$ равносильно одновременному выполнению сравнений $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{n}$.

4.117. Докажите, что для простого $p > 3$ числитель дроби
$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$
делится на p^2.

4.4. Теоремы Ферма и Эйлера

4.118. Найдите такое n, чтобы число $10^n - 1$ делилось на
а) 7; б) 13; в) 91; г) 819.

4.119. Докажите, что
а) $\underbrace{111\ldots1}_{12} \vdots 13$; б) $\underbrace{111\ldots1}_{16} \vdots 17$.

Малая теорема Ферма. Пусть p — простое число и $p \nmid a$. Тогда
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

4.120. Докажите теорему Ферма, разлагая $(1 + 1 + \ldots + 1)^p$ посредством полиномиальной теоремы.

4.121. Пусть p — простое число, $p \neq 2$, 5. Докажите, что существует число вида $111\ldots11$, кратное p.

Придумайте два решения этой задачи: одно, использующее теорему Эйлера, и второе — принцип Дирихле.

4.122. Докажите, что для любого простого $p > 7$ число $3^p - 2^p - 1$ делится на $42p$.

4.123. Докажите, что $7^{51} - 1$ делится на 103.

4.124. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что
$$7^p - 5^p - 2 \vdots 6p.$$

4.125. Для каких n число $n^{2001} - n^4$ делится на 11?

4.126. Докажите, что для любого натурального числа найдется кратное ему число, десятичная запись которого состоит только из 0 и 1.

4.127. Дано простое p и целое a, не делящееся на p. Пусть k — наименьшее натуральное число, такое что $a^k \equiv 1 \pmod{p}$. Докажите, что $p - 1$ делится на k.

4.128. С помощью индукции докажите следующее утверждение, эквивалентное малой теореме Ферма: если p — простое число, то для любого натурального a справедливо сравнение
$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

4.129. Известно, что

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12} \,\vdots\, 13.$$

Докажите, что $abcdef \,\vdots\, 13^6$.

4.130. Для каких целых n выполняются сравнения

а) $n^{13} \equiv n \pmod{1365}$; б) $n^{17} \equiv n \pmod{4080}$?

4.131. Пусть $p>2$ — простое число. Докажите, что сумма остатков от деления чисел

$$1^p,\ 2^p,\ 3^p,\ \ldots,\ (p-1)^p$$

на p^2 равна $(p^3-p^2)/2$.

4.132. Геометрическое доказательство малой теоремы Ферма. Пусть $p>2$ — простое число. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.) Получите формулу и выведите из нее малую теорему Ферма.

4.133. Найдите остатки от деления на 103 чисел

а) 5^{102}; б) 3^{104}.

4.134. Докажите, что число $30^{239}+239^{30}$ — составное.

4.135. Будет ли простым число $257^{1092}+1092$?

4.136. Докажите, что если p — простое число, $p \neq 2, 5$, то длина периода разложения $1/p$ в десятичную дробь делит $p-1$. Приведите пример, когда длина периода совпадает с $p-1$.

4.137. Пусть p — простое число. Докажите, что любой простой делитель числа 2^p-1 имеет вид $2kp+1$.

4.138. Пусть n — натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо n^8+1, либо n^8-1 делится на 17.

4.139. Докажите, что при любом простом p

$$\underbrace{1\ldots1}_{p}\underbrace{2\ldots2}_{p}\underbrace{3\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{9\ldots9}_{p}-123\ldots9 \,\vdots\, p.$$

4.140. Пусть для простого числа $p>2$ и целого a, не делящегося на p, выполнено сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Докажите, что

$$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}.$$

4.141. Докажите, что если x^2+1 делится на нечетное простое p, то $p=4k+1$.

4.142. При помощи задачи 4.141 докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $p=4k+1$. (См. также 3.9.)

4.143. Докажите, что для простого числа p вида $p = 4k + 1$ числа $x = \pm(2k)!$ являются решениями сравнения $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, причем других решений (по модулю p) это сравнение не имеет.

4.144. Пользуясь результатом задачи 3.161 найдите остатки, которые при простом p дают числа Фибоначчи F_p и F_{p+1} при делении на p.

4.145. Пусть p — простое число и $p > 3$. Докажите, что если разрешимо сравнение

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

то $p \equiv 1 \pmod{6}$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $6n + 1$. (См. также 3.9.)

4.146. Пусть p — простое число и $p > 5$. Докажите, что если разрешимо сравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

то $p \equiv 1 \pmod{5}$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n + 1$.

4.147. Докажите, что если $p \equiv 1 \pmod{n}$, то сравнение $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ имеет n решений.

4.148. Докажите, что во всякой арифметической прогрессии, составленной из чисел $2pk + 1$, где p — какое-то нечетное простое число, имеется бесконечно много простых чисел.

4.149. Утверждение, обратное малой теореме Ферма, вообще говоря, неверно. Проверьте, что для составного числа $n = 341$ выполняется сравнение

$$2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Определение. Если n — составное число и для некоторого a

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

то число n называется *псевдопростым* по основанию a. Например, 341 — псевдопростое число по основанию 2.

4.150. С помощью задачи 3.68 докажите, что псевдопростых чисел по основанию 2 бесконечно много.

Оказывается, что существуют составные числа n, которые являются псевдопростыми по любому основанию a, взаимно простому с n (см. задачу 4.181).

4.151. Докажите, что при $n > 1$ число $2^n - 1$ не может делиться на n.

Определение. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n.

4.152. Найдите

а) $\varphi(17)$; б) $\varphi(p)$; в) $\varphi(p^2)$; г) $\varphi(p^\alpha)$.

4.153. Чему равна сумма

$$\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots+\varphi(p^\alpha),$$

где α — некоторое натуральное число? (См. также 4.170.)

4.154. Основным свойством функции Эйлера $\varphi(n)$ является ее *мультипликативность*. Для взаимно простых a и b рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 2, & 3, & \ldots, & b \\
b+1, & b+2, & b+3, & \ldots, & 2b \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots \\
(a-1)b+1, & (a-1)b+2, & (a-1)b+3, & \ldots, & ab.
\end{array}$$

В каких столбцах этой таблицы находятся числа взаимно простые с числом b? Сколько в каждом из этих столбцов чисел взаимно простых с a? Докажите мультипликативность функции Эйлера, ответив на эти вопросы.

Определение. *Приведенной системой вычетов* по некоторому модулю m называется система чисел, взятых по одному из каждого класса, взаимно простого с модулем. (Говорят, что класс $\bar{a}$ взаимно прост с модулем m, если само число a взаимно просто с m.)

4.155. Сколько классов составляют приведенную систему вычетов по модулю m?

4.156. Пусть числа x_1, x_2, $\ldots$, x_r образуют приведенную систему вычетов по модулю m. Для каких a и b числа $y_j=ax_j+b$ $(j=1,\ldots,r)$ также образуют приведенную систему вычетов по модулю m?

4.157. Пусть $(m,n)=1$, а числа x и y пробегают приведенные системы вычетов по модулям m и n соответственно. Докажите, что число $A=xn+ym$ пробегает при этом приведенную систему вычетов по модулю mn. Выведите отсюда мультипликативность функции Эйлера.

4.158. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$. Докажите равенство

$$\varphi(n)=n\Bigl(1-\frac{1}{p_1}\Bigr)\ldots\Bigl(1-\frac{1}{p_s}\Bigr)$$

а) пользуясь мультипликативностью функции Эйлера;

б) пользуясь формулой включений и исключений (см. 2.111).

4.159. Решите уравнения

а) $\varphi(x)=2$; б) $\varphi(x)=8$; в) $\varphi(x)=12$; г) $\varphi(x)=14$.

4.160. По какому модулю числа 1 и 5 составляют приведенную систему вычетов?

4.161. Решите уравнения
а) $\varphi(x)=x/2$; б) $\varphi(x)=x/3$; в) $\varphi(x)=x/4$.

4.162. Для каких n возможны равенства:
а) $\varphi(n)=n-1$; б) $\varphi(2n)=2\varphi(n)$; в) $\varphi(n^k)=n^{k-1}\varphi(n)$?

4.163. Решите уравнения
а) $\varphi(5^x)=100$; б) $\varphi(7^x)=294$; в) $\varphi(3^x\cdot 5^y)=600$.

4.164. Известно, что $(m,n)>1$. Что больше $\varphi(m\cdot n)$ или $\varphi(m)\times\times\varphi(n)$? (См. также 3.116.)

4.165. Найдите все натуральные n, для которых $\varphi(n)\equiv 2 \pmod 4$.

4.166. Решите уравнение $a=2\tau(a)$.

4.167. Докажите, что если $n>2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n — четно.

4.168. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

4.169. Выпишем в ряд все правильные дроби со знаменателем n и сделаем возможные сокращения. Например, для $n=12$ получится следующий ряд чисел:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{12},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{12},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{11}{12}.$$

Сколько получится дробей со знаменателем d, если d — некоторый делитель числа n?

4.170. Тождество Гаусса. Докажите равенство

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n,$$

где знак $\sum\limits_{d|n}$ означает, что суммирование идет по всем делителям числа n (См. также 4.153.)

4.171. Вписанные ломаные. Окружность разделена n точками на n равных частей. Сколько можно составить различных замкнутых ломаных из n *равных* звеньев с вершинами в этих точках?

4.172. Докажите равенства:
а) $\varphi(m)\,\varphi(n)=\varphi((m,n))\,\varphi([m,n])$;
б) $\varphi(mn)\,\varphi((m,n))=\varphi(m)\,\varphi(n)\,(m,n)$.

4.173. Пусть m — натуральное число и $d\,|\,m$. Сколько решений имеет сравнение

$$x\equiv 1 \pmod d,$$

когда переменная x пробегает приведенную систему вычетов по модулю m?

Следующая теорема является обобщением малой теоремы Ферма.

Теорема Эйлера. Пусть $m \geqslant 1$ и $(a, m) = 1$. Тогда имеет место сравнение

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

(См. также 4.223.)

4.174. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

4.175. Докажите теорему Эйлера, используя результат задачи 4.156.

4.176. Докажите теорему Эйлера с помощью малой теоремы Ферма
а) в случае, когда $m = p^n$;
б) в общем случае.

4.177. При помощи теоремы Эйлера найдите число x, удовлетворяющее сравнению $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$, где $(a, m) = 1$.

4.178. Докажите, что при любом целом a
а) $a^5 - a \,⋮\, 30$; в) $a^{11} - a \,⋮\, 66$;
б) $a^{17} - a \,⋮\, 510$; г) $a^{73} - a \,⋮\, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$.

4.179. Докажите, что для любого нечетного числа m существует такое натуральное число n, что $2^n - 1 \,⋮\, m$.

4.180. Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.

4.181. Числа Кармайкла. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

Числа, обладающие этим свойством, называются *числами Кармайкла.*

4.182. Найдите все такие целые числа a, для которых число $a^{10} + 1$ делится на 10.

4.183. Усиление теоремы Эйлера. $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — разложение натурального числа m на простые множители. Обозначим через $\lambda(m)$ наименьшее общее кратное чисел $\varphi(p_1^{\alpha_1}), \ldots, \varphi(p_s^{\alpha_s})$:

$$\lambda(m) = [\varphi(p_1^{\alpha_1}), \ldots, \varphi(p_s^{\alpha_s})].$$

Докажите, что для любого целого числа a такого, что $(a, m) = 1$, будет выполняться сравнение

$$a^{\lambda(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

4.5. Признаки делимости

4.184. Признаки делимости на 3, 9 и 11. Число N записано в десятичной системе счисления

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}.$$

Докажите следующие признаки делимости:

а) $N \vdots 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \vdots 3$;
б) $N \vdots 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \vdots 9$;
в) $N \vdots 11 \Leftrightarrow \pm a_n \mp a_{n-1} \pm \ldots - a_1 + a_0 \vdots 11$.

4.185. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть полным квадратом?

4.186. Признаки делимости на 2, 4, 8, 5 и 25. Сформулируйте и докажите признаки делимости на числа 2, 4, 8, 5 и 25.

4.187. Найдите все числа вида $\overline{xy9z}$, которые делились бы на 132.

4.188. Найдите все числа вида $\overline{13xy45z}$, которые делились бы на 792.

4.189. Цифровой корень числа. Рассмотрим число N, записанное в десятичной системе счисления. Найдем сумму цифр этого числа, потом сложим цифры, которыми записана сумма и т. д. Будем продолжать этот процесс, пока в конце концов не получим однозначное число, которое называют *цифровым корнем* числа N. Докажите, что цифровой корень сравним с N по модулю 9.

4.190. Делится ли на 9 число $1234\ldots500$? (В записи этого числа подряд выписаны числа от 1 до 500.)

4.191. Докажите, что число $192021\ldots7980$ делится на 1980.

4.192. Докажите, что число $\overline{abcd}$ делится на 99 тогда и только тогда, когда число $\overline{ab} + \overline{cd}$ делится на 99.

4.193. Последовательность $\{x_n\}$ устроена следующим образом: $x_1 = 3^{2001}$, а каждый следующий член равен сумме цифр предыдущего. Найдите x_5.

4.194. Найдите наименьшее число, запись которого состоит лишь из нулей и единиц, делящееся без остатка на 225.

4.195. Какие цифровые корни бывают у полных квадратов и полных кубов?

4.196. Два числа a и b получаются друг из друга перестановкой цифр. Чему равен цифровой корень числа $a - b$?

4.197. Докажите, что если $n > 6$ — четное совершенное число, то его цифровой корень равен 1. Проверьте также, что n может быть представлен в виде $n = 1 + 9P_3(k)$, где $P_3(k)$ — треугольное число и $k \equiv 2 \pmod 8$.

4.198. На доске написано число 8^n. У него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число, если $n = 2001$?

4.199. Докажите ошибочность следующих записей

а) $4237 \cdot 27925 = 118275855$; в) $1965^2 = 3761225$;

б) $42971064 : 8264 = 5201$; г) $\sqrt[5]{371293} = 23$.

4.200. Коля Васин выписал пример на умножение, а затем заменил все цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось равенство $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{effe}$. Не ошибся ли Коля?

4.201. Докажите, что в десятичной записи числа 2^{30} есть по крайней мере две одинаковые цифры, не вычисляя его.

4.202. Существует ли число, которое является степенью 2 такое, что перестановкой его цифр можно получить другую степень 2?

4.203. Признак делимости на 19. Существует следующий способ проверить делится ли данное число N на 19:

1) отбрасываем последнюю цифру у числа N;

2) прибавляем к полученному числу произведение отброшенной цифры на 2;

3) с полученным числом проделываем операции 1) и 2) до тех пор, пока не останется число, меньшее или равное 19.

4) если остается 19, то $19 \mid N$, в противном случае $19 \nmid N$.

Например, для числа 3173 получается цепочка

$$3173 \to 323 \to 38 \to 19,$$

значит, оно делится на 19.

Докажите справедливость этого признака делимости.

4.204. Признак делимости на 7. Докажите, что следующий алгоритм позволяет проверять делимость на 7:

1) отбрасываем последнюю цифру у числа N;

2) вычитаем из полученного числа произведение отброшенной цифры на 2;

3) с полученным числом проделываем операции 1) и 2) до тех пор, пока не останется число, меньшее или равное 10.

4) если остается число, делящееся на 7, то $7 \mid N$, в противном случае $7 \nmid N$.

Например, число 2345 делится на 7, так как оно приводит к следующей цепочке:

$$2345 \to 224 \to 14 \to -7.$$

4.205. Найдите признаки делимости на числа 13, 21 и 41 аналогичные тем, что рассматривались в задачах 4.203—4.204.

4.206. Признаки делимости на 17. Докажите, что число N делится на 17 тогда и только тогда, когда на 17 делится число M, полученное из N

а) зачеркиванием последней цифры и вычитанием из оставшегося числа упятиренного значения этой цифры;

б) зачеркиванием последних двух цифр и прибавлением к оставшемуся числу увосьмиренного значения зачеркнутого числа;

б) зачеркиванием последних пяти цифр и прибавлением к оставшемуся числу утроенного значения зачеркнутого числа.

Примеры:

$$93313 \to 9316 \to 901 \to 85 = 5 \cdot 17;$$

$$93313 \to 1037 \to 306 \to 51 = 3 \cdot 17;$$

$$111872727101 \to 1200030 \to 102 = 6 \cdot 17.$$

4.207. Эстафетные признаки делимости. Признаки делимости из задач 4.203—4.204 и 4.206 имеют много общего. Каждый из них устроен следующим образом. Для простого p выбираются два параметра: k и d такие, что $k \geqslant 1$ и $(d, p) = 1$. Число N делится на p тогда и только тогда, когда на p делится число M, полученное из N зачеркиванием k последних цифр и прибавлением к полученному числу зачеркнутого k-значного числа, умноженного на d. Число M (взятое по модулю), как правило, оказывается меньше исходного числа N. Число N как бы передает эстафетную палочку меньшему числу M, что и составляет основу алгоритма.

Упомянутые выше признаки делимости можно описать следующей таблицей:

p	19	7	17	17	17
k	1	1	1	2	5
d	2	-2	-5	8	3

Докажите, что в общем случае для справедливости подобных признаков делимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$d \cdot 10^k - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Опишите признаки делимости, которые получаются если перебрать всевозможные простые делители $p<100$ чисел вида $d\cdot 10^k-1$ для $k=1$, 2, 3 и $|d|\leqslant 8$.

4.208. При каких x и y число $\overline{xxyy}$ является квадратом натурального числа?

4.209. Найдите все такие трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

4.210. Докажите, что если числа N и $5N$ имеют одинаковую сумму цифр, то N делится на 9.

4.211. Двое пишут а) 30-значное; б) 20-значное число, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — первый и т. д. Может ли второй добиться того, чтобы полученное число разделилось на 9, если первый стремится ему помешать?

4.212. Рассматриваются всевозможные семизначные числа с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, записанными в произвольном порядке. Докажите, что ни одно из них не делится ни на какое другое.

4.213. В последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ каждый следующий член получается из предыдущего приписыванием к нему справа (то есть в конце) цифры, отличной от 9. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел.

4.214. Признак делимости Паскаля. Пусть запись числа N в десятичной системе счисления имеет вид $N=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$, r_i — остаток от деления числа 10^i на m $(i=0, \ldots, n)$. Докажите, что число N делится на m тогда и только тогда, когда число $M=a_n r_n+a_{n-1}+\ldots+a_1 r_1+a_0$ делится на m.

4.215. С помощью признака делимости Паскаля установите признаки делимости на числа 3, 9, 6, 8, 12, 15, 11, 7, 27, 37.

Иногда в качестве r_i удобнее брать не остаток, а «недостаток», то есть такое наибольшее неположительное число, что $10^i\equiv r_i \pmod{m}$.

4.216. Докажите, что если необходимый и достаточный признак делимости, выражающийся через свойства цифр числа, не зависит от порядка цифр, то это признак делимости на 3 или на 9.

4.217. Опишите все системы счисления, в которых число делится на 2 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 2. Решите задачу, заменив модуль 2 произвольным натуральным числом $m>1$.

4.218. Найдите наименьшее основание системы счисления, в которой одновременно имеют место следующие признаки делимости:

1) число делится на 5 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 5;

2) число делится на 7 тогда и только тогда, когда число, составленное из двух его последних цифр, делится на 7.

4.219. Установите признаки делимости на а) 2, б) 3, в) 5, для чисел, записанных в фибоначчиевой системе счисления.

4.6. Китайская теорема об остатках

Китайская теорема об остатках. Пусть целые числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты, то есть $(m_i, m_j) = 1$ при $i \neq j$, $m = m_1 \ldots m_n$, и $a_1, \ldots, a_n$, A — произвольные целые числа. Тогда существует ровно одно целое число x такое, что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases} \tag{4.3}$$

и $A \leqslant x < A + m$. (См. также 6.54.)

Одним из важнейших применений китайской теоремы об остатках является *система счисления в остатках.* В ней целое число представляется набором его остатков (или вычетов) по взаимно простым модулям. В такой системе счисления операции с числами сводятся к операциям с их остатками.

4.220. При каких целых n число $a_n = n^2 + 3n + 1$ делится на 55?

4.221. Найдите остатки от деления:
а) 19^{10} на 66; б) 19^{14} на 70; в) 17^9 на 48; г) $14^{14^{14}}$ на 100.

4.222. Натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что сравнение

$$a \equiv b \pmod{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n}$$

равносильно системе

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m_1}, \\ a \equiv b \pmod{m_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \equiv b \pmod{m_n}. \end{cases}$$

4.223. Натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что число $x=(m_2m_3\ldots m_n)^{\varphi(m_1)}$ является решением системы

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv 0 \pmod{m_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_n}. \end{cases}$$

4.224. Пользуясь результатом предыдущей задачи, укажите в явном виде число x, которое удовлетворяет системе (4.3).

4.225. Докажите китайскую теорему об остатках.

4.226. Укажите все целые числа x, удовлетворяющие системам

а) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 7 \pmod{17}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{13}, \\ x \equiv 4 \pmod{19}. \end{cases}$

4.227. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7 остатки 1, 2, 4, 6 соответственно.

4.228. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?

4.229. Найдите остаток от деления числа 1000! на 10^{250}.

4.230. Найдите наименьшее четное натуральное число a такое, что $a+1$ делится на 3, $a+2$ — на 5, $a+3$ — на 7, $a+4$ — на 11, $a+5$ — на 13.

4.231. Пусть натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пробегают полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно, то число

$$x = x_1m_2\ldots m_n + m_1x_2m_3\ldots m_n + \ldots + m_1m_2\ldots m_{n-1}x_n$$

пробегает полную систему вычетов по модулю $m_1m_2\ldots m_n$. Выведите отсюда китайскую теорему об остатках.

4.232. Китайская теорема об остатках и функция Эйлера. Докажите, что число x является элементом приведенной системы вычетов тогда и только тогда, когда числа $a_1, \ldots, a_n$, определенные сравнениями (4.3) принадлежат приведенным системам вычетов по модулям $m_1, \ldots, m_n$ соответственно. Выведите отсюда мультипликативность функции Эйлера.

4.233. Предположим, что числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что любую правильную дробь вида $\dfrac{c}{m_1\ldots m_n}$ можно представить в виде алгебраической суммы правильных дробей вида n_i/m_i $(y = 1, \ldots, n)$.

4.234. Какие цифры надо поставить вместо звездочек, чтобы число $454**$ делилось на 2, 7 и 9?

4.235. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

4.236. Числа-автоморфы. а) Трехзначное число 625 обладает своеобразным свойством самовоспроизводимости, как то:

$$625^2 = 390\,625.$$

Сколько четырехзначных чисел удовлетворяют уравнению

$$x^2 \equiv x \pmod{10000}?$$

б) Докажите, что при любом k существует ровно 4 набора из k цифр — $00\ldots00$, $00\ldots01$ и еще два, оканчивающиеся пятеркой и шестеркой, — обладающие таким свойством: если натуральное число оканчивается одним из этих наборов цифр, то его квадрат оканчивается тем же набором цифр.

4.237. Больное войско. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре, но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.

Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата 3×3, а если один человек болен, то в виде двух квадратов 2×2.

4.238. Докажите, что для любых натуральных n и k найдется множество, состоящее из n последовательных натуральных чисел таких, что каждое из них делится на k различных простых чисел, на которые не делится никакое другое число из этого множества. (См. также 3.140.)

4.239. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами от переменной x. Докажите, что для любых натуральных m и n найдется такое целое x_0, что каждое из чисел

$$f(x_0),\ f(x_0+1),\ \ldots,\ f(x_0+n-1)$$

будет иметь по крайней мере m различных простых делителей.

4.240. Восточный Календарь. В китайской натурфилософии выделяются пять первоэлементов природы — дерево, огонь, металл, вода и земля, которым соответствуют пять цветов — синий (или зеленый), красный, белый, черный и желтый. В восточном календаре с древних времен используется 12-летний животный цикл так, что каждому из 12 годов в цикле соответствует одно из животных. Кроме того, каждый год проходит под покровительством одной из стихий и окрашивается в один из цветов:

годы, оканчивающиеся на 0 и 1 — годы металла (цвет белый);
годы, оканчивающиеся на 2 и 3 — это годы воды (цвет черный);
годы, оканчивающиеся на 4 и 5 — годы дерева (цвет синий);
годы, оканчивающиеся на 6 и 7 — годы огня (цвет красный);
годы, оканчивающиеся на 8 и 9 — годы земли (цвет желтый).

В 60-летнем календарном цикле каждое животное возникает 5 раз. С помощью китайской теоремы об остатках объясните, почему оно все 5 раз бывает разного цвета.

4.241. Точка плоскости с целыми координатами (x, y) называется видимой из начала координат (или примитивной), если на отрезке, соединяющем точку (x, y) с началом координат $(0, 0)$, нет других точек с целыми координатами. Докажите, что множество примитивных точек содержит сколь угодно большие «дыры», то есть для любого натурального a найдется квадрат из $a \times a$ точек $(x_0 + 1 \leqslant x \leqslant x + a$, $y_0 + 1 \leqslant y \leqslant y + a)$, свободный от примитивных точек.

Глава 5

Числа, дроби, системы счисления

5.1. Рациональные и иррациональные числа

Определение. Число α называется *рациональным*, если оно представимо в виде $\alpha = m/n$, где m — некоторое целое, а n — натуральное числа. Все остальные действительные числа называются *иррациональными*. Множество всех рациональных чисел обозначается через $\mathbb{Q}$. Два числа называются *несоизмеримыми*, если их отношение иррационально.

5.1. Проверьте, что всякое рациональное число единственным образом представляется в виде a/b, где $(a, b) = 1$.

Определение. Десятичная дробь

$$\alpha = 0{,}a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_nb_1b_2\ldots b_nb_1b_2\ldots b_n\ldots,$$

где $b_1b_2\ldots b_n$ — наименьший по длине отрезок цифр, повторяющийся начиная с некоторого места, называется *периодической десятичной дробью*. При том набор цифр $b_1b_2\ldots b_n$ называется *периодом*, набор $a_1a_2\ldots a_k$ — *предпериодом*, n — *длиной периода* и дробь записывается в виде

$$\alpha = 0{,}a_1a_2\ldots a_k(b_1b_2\ldots b_n).$$

5.2. Представьте следующие рациональные числа в виде десятичных дробей:
а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{1}{14}$; г) $\frac{1}{17}$.

5.3. Найдите цифры a и b такие, для которых

$$\sqrt{0{,}aaaaa\ldots} = 0{,}bbbbb\ldots$$

5.4. Найдите период дроби

$$\frac{1}{49} = 0{,}0204081632\ldots$$

Как можно объяснить тот факт, что после запятой появляются степени числа 2?

5.5. Число Фейнмана. Объясните поведение следующей десятичной дроби и найдите ее период:

$$\frac{1}{243} = 0{,}004115226337448\ldots$$

5.6. Представьте следующие числа в виде обычных и в виде десятичных дробей:

а) $0{,}(12) + 0{,}(122)$; б) $0{,}(3) \cdot 0{,}(4)$; в) $0{,}(9) - 0{,}(85)$.

5.7. Докажите, что число рационально тогда и только тогда, когда оно представляется конечной или периодической десятичной дробью.

5.8. Для каких натуральных n число $\dfrac{1}{n}$ представляется конечной десятичной дробью?

5.9. Пусть число α задается десятичной дробью

а) $\alpha = 0{,}101001000100001000001\ldots$;

б) $\alpha = 0{,}123456789101112131415\ldots$

Будет ли это число рациональным?

5.10. Пусть $a_n = 0$, если n делится на квадрат простого числа и $a_n = 1$ в противном случае. Докажите, что десятичная дробь

$$\alpha = 0,\, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

является иррациональным числом.

5.11. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами от переменной x, который принимает положительные значения при $x \geqslant 1$. Докажите, что бесконечная десятичная дробь

$$\alpha = 0,\, f(1) f(2) \ldots f(n) \ldots$$

является иррациональным числом. Например, если $f(x) = x^2$, то получается иррациональное число $\alpha = 0,\, 149162536496481100\ldots$

5.12. Может ли

а) сумма двух рациональных чисел быть иррациональной?

б) сумма двух иррациональных чисел быть рациональной?

в) иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?

5.13. Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет рациональным числом.

5.14. Коля Васин задумал написать программу, которая дала бы возможность компьютеру печатать одну за другой цифры десятичной записи числа $\sqrt{2}$. Докажите, что даже если бы машина не ломалась, то

Колина затея все равно бы не удалась, и рано или поздно компьютер напечатал бы неверную цифру.

5.15. Найдите все такие натуральные n, для которых $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ представляется конечными десятичными дробями.

5.16. Докажите, что среди чисел $[2^k\sqrt{2}]$ $(k=0, 1, \ldots)$ бесконечно много составных.

5.17. Докажите иррациональность следующих чисел:
а) $\sqrt[3]{17}$; г) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$; ж) $\sin 1°$;
б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; д) $\cos 10°$; з) $\log_2 3$.
в) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; е) $\operatorname{tg} 10°$;

5.18. Докажите, что для натурального n число $\sqrt{n}$ будет рациональным, в том и только в том случае, когда n — полный квадрат.

5.19. Составьте кубические уравнения, корнями которых были бы числа
а) $2\cos\frac{2\pi}{7}$; б) $2\cos\frac{2\pi}{9}$.
Докажите, что эти числа иррациональны и не являются квадратичными иррациональностями (см. также 9.26).

5.20. Метод бесконечного спуска. Докажите, что уравнения
а) $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$; в) $x^2+y^2+z^2+u^2=2xyzu$;
б) $x^2+y^2+z^2=2xyz$; г) $3^n=x^2+y^2$
не имеют решений в натуральных числах.

5.21. Докажите, что уравнение $x^3+x^2y+y^3=0$ не имеет рациональных решений кроме пары (0; 0).

5.22*. а) Для некоторых натуральных a и b число

$$m=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

оказалось целым. Докажите, что m — полный квадрат.

б) Какие целые значения может принимать функция

$$f_k(a, b)=\frac{a^2+b^2}{ab+k}$$

при натуральных a и b, если $k=2$, 3?

5.23*. Для каких натуральных a и b число a^2+b^2+1 делится на ab?

5.24*. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для каждой из которых a^2+1 делится на b, а b^2+1 делится на a.

5.25. Один из корней уравнения $x^2+ax+b=0$ равен $1+\sqrt{3}$. Найдите a и b, если известно, что они рациональны.

5.26. Пусть a, b, c — различные простые числа. Докажите, что числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

5.27. Упростите выражение:

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$$

5.28. Докажите равенство

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$$

5.29. Найдите первые 17 знаков в десятичной записи у чисел:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3/2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3/2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

в) $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$.

5.30. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$;

б) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

в) $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}\quad(9\leqslant x\leqslant 18)$.

5.31. Задача Бхаскары. Упростите выражение

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}.$$

5.32. Формула сложного радикала. Докажите равенство:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

(См. также 7.15.)

5.33*. Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$ иррационально.

5.34. При каких натуральных a и b число $\log_a b$ будет рациональным?

5.35. Докажите, что $\sin x$ и $\cos x$ рациональны тогда и только тогда, когда число $\operatorname{tg}(x/2)$ рационально.

5.36. Дана квадратная сетка на плоскости и треугольник с вершинами в узлах сетки. Докажите, что тангенс любого угла в треугольнике — число рациональное.

5.37. Можно ли нарисовать правильный треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки?

5.38. Дан лист клетчатой бумаги. Докажите, что при $n \neq 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах решетки.

5.39. Докажите, что на окружности с центром в точке $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ лежит не более одной точки целочисленной решетки.

5.40. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{a}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; ж) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

б) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; д) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$;

в) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$;

5.41. При каких натуральных n число $(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n$ будет целым?

5.42. Докажите следующие равенства:

а) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}_{10\text{ радикалов}} = \sqrt[1024]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[1024]{2-\sqrt{3}}$;

б) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ радикалов}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

5.43. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\cdot 3\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{n\text{ радикалов}} = \pi.$$

5.44. Иррациональность числа *e*. Число e определяется равенством $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. Докажите, что

а) $e=\lim\limits_{n\to\infty}(2+1/2!+1/3!+\ldots+1/n!)$;

б) $e=2+1/2!+1/3!+\ldots+1/n!+r_n$, где $0<r_n\leqslant 1/(n!n)$;

в) e — иррациональное число.

(См. также 11.92, 7.55).

5.45. Пусть имеется последовательность натуральных чисел $q_1 \leqslant \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n \leqslant \ldots$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$. Докажите, что число

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n}$$

иррационально.

5.46. Докажите, что число e не является квадратичной иррациональностью.

5.47.* **Число e и комбинаторика.** Дано N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две из этих точек соединены отрезком, и каждый отрезок окрашен в один из k цветов. Докажите, что если $N > [k!\, e]$, то среди данных точек можно выбрать такие три, что все стороны образованного ими треугольника будут окрашены в один цвет. (См. также 2.35.)

5.48.* Определим последовательности чисел $\{x_n\}$ и $\{d_n\}$ условиями

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \left[\sqrt{2x_n(x_n+1)}\right], \quad d_n = x_{2n+1} - 2x_{2n-1} \quad (n \geqslant 1).$$

Докажите, что число $\sqrt{2}$ в двоичной системе счисления представляется в виде $\sqrt{2} = (d_1, d_2 d_3 \ldots)_2$. (Двоичную запись числа $\sqrt{2}$ можно найти в приложении С.)

5.2. Десятичные дроби

Разложение рациональных чисел в десятичные дроби непосредственно связано со специальными числами, называемыми репьюнитами.

Определение. *Репьюнитом* порядка n называется число, состоящее из n единиц $E_n = \underbrace{11\ldots1}_{n}$.

Репьюниты существуют не только в десятичной системе счисления. Но в других системах счисления они уже не будут связаны с десятичными дробями.

5.49. Докажите, что равенство

$$\frac{10^n - 1}{m} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

равносильно тому, что десятичное представление дроби $1/m$ имеет вид $1/m = 0,(a_1 a_2 \ldots a_n)$.

5.50. Докажите, что если $(m, 10) = 1$, то существует репьюнит E_n, делящийся на m. Будет ли их бесконечно много?

5.51. Как связаны между собой десятичные представления чисел $\{p/q\}$ и $\{10^k p/q\}$?

5.52. Докажите, что если $(m, 10) = 1$, то у десятичного представления дроби $1/m$ нет предпериода.

Определение. Если у десятичной дроби отсутствует предпериод, то такая дробь называется *чисто периодической*.

5.53. Найдите возможные значения знаменателя обычной дроби вида $1/m$, которая представляется чисто периодической десятичной дробью с двумя цифрами в периоде.

5.54. Пусть $(n, 10) = 1$, $m < n$, $(m, n) = 1$, и t — наименьшее число такое, что $10^t - 1 \,\vdots\, n$. Докажите, что t кратно длине периода дроби m/n. Будет ли число t длиной периода?

5.55. Докажите, что если $p > 5$ — простое число, то для любого числителя a $(1 \leqslant a \leqslant p - 1)$ длина периода дроби a/p будет одной и той же.

5.56. Докажите, что если $(m, 10) = 1$, то частное $9E_n/m$, записанное как n-значное число (возможно с нулями в начале) состоит из нескольких периодов десятичного представления дроби $1/m$. Кроме того, если еще выполнены условия $(m, 3) = 1$ и E_n — первый репьюнит, делящийся на m, то число $9E_n/m$ будет совпадать с периодом.

5.57. Докажите, что если $(m, 30) = 1$, то число, состоящее из цифр периода дроби $1/m$ делится на 9.

5.58.* **Эффект девяток.** Периодом дроби $1/7$ является число $N = 142857$. Оно обладает следующим свойством: сумма двух половин периода — число из одних девяток $(142 + 857 = 999)$. Докажите в общем случае, что для простого $q > 5$ и натурального $p < q$ период дроби p/q есть $2n$-значное число $N = \overline{N_1 N_2}$ такое, что $N_1 + N_2 = \underbrace{99\ldots9}_{n}$.

5.59.* **Загадочное число.** Число $N = 142857$ обладает и рядом других свойств. Например: $2 \cdot 142\,857 = 285\,714$, $3 \cdot 142\,857 = 428\,571\ldots$, то есть при умножении на 1, 2, 3, ..., 6 цифры циклически переставляются; $14 + 28 + 57 = 99$; $N^2 = 20408122449$, $20408 + 122449 = 142857 = N$, $N^3 = 2915443148696793$, $2915 + 443148 + 696793 = 1142856$, $1 + 142856 = N$, ...

Аналогичные операции можно проделывать периодами других дробей и их циклическими перестановками. Что получается для чисел $1/17$, $1/19$? Объясните эти факты.

5.60. Обозначим через $L(m)$ длину периода дроби $1/m$. Докажите, что если $(m, 10) = 1$, то $L(m)$ является делителем числа $\varphi(m)$.

5.61. Докажите, что если $(m_1, 10) = 1$ и $(m_2, 10) = 1$, то справедливо равенство $L(m_1 m_2) = [L(m_1), L(m_2)]$. Чему равна длина периода дроби $1/m_1 + 1/m_2$?

5.62. Пусть $(m, n) = 1$. Докажите, что сумма длин периода и предпериода десятичного представления дроби m/n не превосходит $\varphi(m)$.

Простые числа $p \neq 2$, 5, для которых десятичное разложение дроби $1/p$ имеет период максимальной возможной длины $p-1$, иногда называются длинными простыми (по основанию 10). Первыми такими числами являются (см. приложение V)

$$7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, \ldots$$

Бесконечность множества длинных простых чисел не доказана ни для одного основания.

5.63. Докажите, что количество оснований b $(2 \leqslant b \leqslant p)$, для которых разложение дроби $1/p$ имеет период длины t совпадает с числом дробей в ряду

$$\frac{1}{p-1}, \ \frac{2}{p-1}, \ \ldots, \ \frac{p-1}{p-1},$$

которые после всех возможных сокращений имеют знаменатель t. В частности число p будет длинным простым для $\varphi(p-1)$ оснований b в пределах $2 \leqslant b \leqslant p-1$.

Например, $1/7$ в системах счисления с основаниями 2, 3, 4, 5 и 6 записывается в виде дробей

$$\frac{1}{7} = 0.(001)_2 = 0.(010212)_3 = 0.(021)_4 = 0.(032412)_5 = 0.(05)_6,$$

с периодами 3, 6, 3, 6 и 2, которые совпадают со знаменателями чисел

$$\frac{1}{6}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{3} \ \text{ и } \ \frac{5}{6}.$$

5.64. Найдите все шестизначные числа, которые уменьшаются втрое при перенесении последней цифры на первое место.

5.65. Найдите все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при перенесении последней цифры в начало.

5.66. Докажите, что не существует целых чисел, которые от перестановки начальной цифры в конец увеличивались бы в 5, 6 или 8 раз.

5.67. Пусть число m имеет вид $m = 2^a 5^b m_1$, где $(10, m_1) = 1$. Положим $k = \max(a, b)$. Докажите, что период дроби $1/m$ начинается с $(k+1)$-й позиции после запятой, и имеет такую же длину, как и период дроби $1/m_1$.

5.68.* Найдите последние три цифры периодов дробей 1/107, 1/131, 1/151. (Это можно сделать, не считая предыдущих цифр.)

5.69.* а) Докажите, что при делении столбиком 1 на 3^{100} будут получаться остатки, дающие остаток 1 при делении на 9, причем каждый такой остаток появится ровно по одному разу

б) Докажите, что в периоде десятичной дроби $1/3^{100}$ встретится любая последовательность из 46 цифр.

5.3. Двоичная и троичная системы счисления

5.70. Имеются весы с двумя чашами и по одной гире в 1 грамм, 3 грамма, 9 грамм, 27 грамм и 81 грамм. Как уравновесить груз в 61 грамм, положенный на чашу весов?

5.71. Дан мешок сахарного песка, чашечные весы без стрелки и гирька в 1 г. Можно ли за 10 взвешиваний отмерить 1 кг сахара?

5.72. Летела стая гусей. На каждом озере садилась половина гусей и еще пол-гуся. Остальные летели дальше. Все гуси сели на n озерах. Сколько всего гусей было в стае?

5.73. Имеются 4 гири и двухчашечные весы без стрелки. Сколько всего различных по весу грузов можно точно взвесить этими гирями если

а) гири можно класть только на одну чашку весов;

б) гири можно класть на обе чашки весов?

5.74. Вы имеете право сделать 4 гири любого веса. Какие это должны быть гири, чтобы на весах из предыдущей задачи можно было взвесить грузы от 1 до 40 кг?

5.75. а) Имеются две веревки. Если любую из них поджечь с одного конца, то она сгорит за час. Веревки горят неравномерно. Например, нельзя гарантировать, что половина веревки сгорает за 30 минут. Как, имея две такие веревки, отмерить промежуток времени в 15 минут?

б) Сколько промежутков времени (считая нулевой) можно отмерить, имея три такие веревки?

5.76. а) У одного человека был подвал, освещавшийся тремя электрическими лампочками. Выключатели этих лампочек находились вне подвала, так что включив любой из выключателей, хозяин должен был спуститься в подвал, чтобы увидеть, какая именно лампочка зажглась. Однажды он придумал способ, как определить для каждого выключателя, какую именно лампочку он включает, сходив в подвал ровно один раз. Какой это способ?

б) Сколько лампочек и выключателей можно идентифицировать друг с другом, если разрешается 2 раза спуститься в подвал?

5.77. С числом разрешается производить две операции: «увеличить в два раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить

а) число 100; б) число n? (См. также 6.80.)

5.78. Бинарный метод возведения в степень. Предположим, что необходимо возвести число x в степень n. Если, например, $n=16$, то это можно сделать выполнив 15 умножений $x^{16}=x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$, а можно обойтись лишь четырьмя:

$$x_1=x\cdot x=x^2,\quad x_2=x_1\cdot x_1=x^4,\quad x_3=x_2\cdot x_2=x^8,\quad x_4=x_3\cdot x_3=x^{16}.$$

Пусть

$$n=2^{e_1}+2^{e_2}+\ldots+2^{e_r}\quad(e_1>e_2>\ldots>e_r\geqslant 0).$$

Придумайте алгоритм, который позволял бы вычислять x^n при помощи

$$b(n)=e_1+\nu(n)-1$$

умножений, где $\nu(n)=r$ — число единиц в двоичном представлении числа n. (См. также 11.111.)

5.79. Докажите, что функция $\nu(n)$ из предыдущей задачи удовлетворяет равенству

$$\nu(n)=n-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]-\ldots-\left[\frac{n}{2^k}\right]-\ldots$$

5.80. Пусть $l(n)$ — наименьшее число умножений, необходимое для нахождения x^n. На примере чисел $n=15$ и $n=63$ покажите, что бинарный метод возведения в степень не всегда оптимален, то есть для некоторых n выполняется неравенство $l(n)<b(n)$.

5.81. Коля Васин задумал число от 1 до 31 включительно и выбрал из 5 данных карточек

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

те, на которых это число присутствует. Как, зная эти карточки, угадать задуманное число? Какими должны быть карточки, чтобы по ним можно было угадывать числа от 1 до 63? Почему на них будет одинаковое количество чисел?

5.82. Карточный фокус. а) Берется колода из 27 карт (без одной масти). Ваш друг загадывает одну из карт. После чего вы раскладываете все карты в три равные кучки, кладя каждый раз по одной карте (в первую кучку, затем во вторую, затем в третью, потом снова в первую и т. д.). Ваш друг указывает на ту кучку, в которой лежит его карта. Далее вы складываете все три кучки вместе, вставляя при этом указанную кучку между двумя другими. Эта процедура повторяется еще два раза. На каком месте в колоде окажется загаданная карта, после того, как вы сложите вместе три кучки в третий раз? (См. также 7.103.)

б) На каком месте окажется загаданная карта, если с самого начала было $3n$ $(n < 9)$ карт?

5.83. Коля Васин задумал число: 1, 2 или 3. Вы задаете ему только один вопрос, на который он может ответить «да», «нет» или «не знаю». Сможете ли вы угадать число, задав всего лишь один вопрос?

5.84. Коля Васин задумал число от 1 до 200. За какое наименьшее число вопросов вы сможете его отгадать, если он отвечает на каждый вопрос

а) «да» или «нет»;

б) «да», «нет» или «не знаю»?

5.85.* Как и раньше загадывается число от 1 до 200, а загадавший отвечает на вопросы «да» или «нет». При этом ровно один раз (за все ответы) он имеет право соврать. Сколько теперь понадобится вопросов, чтобы отгадать задуманное число?

5.86. Докажите, что каждое целое число A представимо в виде

$$A = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^n a_n,$$

где каждое из чисел $a_k = 0$, 1 или -1 и $a_k a_{k+1} = 0$ для всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$, причем такое представление единственно.

5.87. Множество Кантора. Отрезок числовой оси от 0 до 1 покрашен в зеленый цвет. Затем его средняя часть — интервал $(1/3; 2/3)$ перекрашивается в красный цвет, потом средняя часть каждого из оставшихся зелеными отрезков тоже перекрашивается в красный цвет, с оставшимися зелеными отрезками проделывается та же операция и так до бесконечности. Точки, оставшиеся зелеными, образуют множество Кантора.

а) Найдите сумму длин красных интервалов.

б) Докажите, что число 1/4 останется окрашенным в зеленый цвет.

в) Из суммы

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\ldots$$

произвольным образом вычеркнуты слагаемые. Докажите, что сумма оставшихся слагаемых — зеленое число.

г) Докажите, что всякое число $x\in[0, 2]$ представимо в виде $x=\alpha+\beta$, где α и β — элементы множества Кантора.

5.88. Последовательность Морса. Бесконечная последовательность из нулей и единиц

$$0110100110010110 1001\ldots$$

построена по следующему правилу. Сначала написан нуль. Затем делается бесконечное количество шагов. На каждом шаге к уже написанному куску последовательности приписывается новый кусок той же длины, получаемый из него заменой всех нулей единицами, а единиц — нулями.

а) Какая цифра стоит на 2001 месте?

б) Будет ли эта последовательность, начиная с некоторого места, периодической?

в) Докажите, что данная последовательность переходит в себя при замене каждого нуля на комбинацию 01, а каждой единицы — на комбинацию 10.

г) Докажите, что ни одно конечное слово из нулей и единиц не встречается в последовательности Морса три раза подряд.

д) Как, зная представление числа n в двоичной системе счисления, найти n-й элемент данной последовательности? (См. также 11.111.)

5.89. Ханойская башня и двоичная система счисления. Рассмотрим два процесса, каждый из которых состоит из 2^8-1 шагов. Первый — это процесс решения головоломки «Ханойская башня» (см. 1.43) при помощи оптимального алгоритма. Второй — это процесс прибавления единицы, который начинается с 0 и заканчивается числом 2^8-1. Опишите связь между этими двумя процессами.

5.90. Задача Иосифа Флавия. n человек выстраиваются по кругу и нумеруются числами от 1 до n. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Например, если $n=10$, то порядок исключения таков: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остается номер 5. Для данного n будем обозначать через $J(n)$ номер последнего оставшегося человека. Докажите, что

а) $J(2n) = 2J(n) - 1$; б) $J(2n+1) = 2J(n) + 1$;
в) если $n = (1b_{m-1}b_{m-2}\dots b_1b_0)_2$, то $J(n) = (b_{m-1}b_{m-2}\dots b_1b_01)_2$.

5.91. Ним-сумма. Будем говорить, что число n является *ним-суммой* чисел m и k ($m \oplus k = n$), если оно получается из чисел m и k после следующих преобразований.

1) m и k записываются в двоичной системе счисления

$$m = (m_s \dots m_1m_0)_2, \quad k = (k_s \dots k_1k_0)_2$$

(меньшее число дополняется спереди нулями).

2) Полученные наборы цифр как векторы складываются покомпонентно по модулю 2:

$$(m_s, \dots, m_1, m_0) + (k_s, \dots, k_1, k_0) \equiv (n_s, \dots, n_1, n_0) \pmod 2.$$

3) Набор цифр $(n_s, \dots, n_1, n_0)$ переводится в число n:

$$(n_s \dots n_1n_0)_2 = n.$$

Например, $4 \oplus 9 = 3$, так как

$$4 = (100)_2, \quad 9 = (111)_2,$$
$$(1, 0, 0) + (1, 1, 1) \equiv (0, 1, 1) \pmod 2, \quad (011)_2 = 3.$$

Для первых чисел таблица ним-сложения выглядит следующим образом:

0	1	2	3	4	5
1	0	3	2	5	4
2	3	0	1	6	7
3	2	1	0	7	6
4	5	6	7	0	1
5	4	7	6	1	0

Докажите, что ним-сумма удовлетворяет следующим свойствам:

а) $m \oplus m = 0$; б) $m \oplus k = k \oplus m$; в) $(m \oplus t) \oplus k = m \oplus (t \oplus k)$; г) если $n \neq 0$ и

$$m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_l = n, \tag{5.1}$$

то найдется такой номер j ($1 \leqslant j \leqslant l$), для которого $m_j \oplus n < m_j$.

5.92. Докажите, что таблица ним-сложения может быть получена следующим образом: на первой угловой клетке ставится число 0, а затем каждой клетке приписывается наименьшее возможное число, не использованное еще для нумерации каких-либо предшествующих клеток той же горизонтали или той же вертикали.

5.93. Игра «Ним». Имеется несколько кучек камней. Двое по очереди берут из них камни. За один ход разрешается взять любое (ненулевое) количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто взял последний камень.

Для анализа игры каждому набору кучек камней m_1, m_2, $\ldots$, m_l поставим в соответствие его ним сумму (5.1).

а) Докажите, что если игрок делает ход из позиции с нулевой ним-суммой, то в результате получается позиция с ним-суммой $n \neq 0$.

б) Докажите, что из позиции с ненулевой ним-суммой m всегда можно сделать ход в позицию с любой ним-суммой $n < m$, в частности, в позицию ним-суммой $n = 0$.

в) Опишите выигрышную стратегию в игру «Ним».

г) Какой следует сделать ход, если перед вами три кучки: 3, 4 и 5 камней?

5.94. Марсианские амебы II. При помощи ним-сумм можно исследовать самые разные игры и процессы. Например, можно получить еще одно решение задачи 4.20.

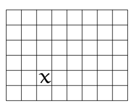
Постройте на множестве марсианских амеб $\{A, B, C\}$ функцию f, принимающую три различных значения, для которой выполнялись бы равенства

$$f(A) \oplus f(B) = f(C), \quad f(A) \oplus f(C) = f(B), \quad f(B) \oplus f(C) = f(A).$$

Какие рассуждения остается провести, чтобы решить задачу про амеб?

5.95. Игра «Йога» II. Проанализируйте при помощи ним-сумм игру «Йога» из задачи 4.21.

5.96. Игра «Шоколадка». Имеется шоколадка, состоящая из $6 \times 8 = 48$ долек. Одна из долек отмечена:



Двое игроков по очереди разламывают ее по какой-нибудь прямой, делящей шоколадку на дольки, и съедают ту половину, которая не содержит отмеченной дольки. Проигрывает тот, кто не может сделать хода, то есть ему остается лишь одна отмеченная долька.

а) Опишите выигрышную стратегию в этой игре. Кто из игроков выиграет, если отмеченная долька располагается так, как показано на рисунке?

б) При каких размерах шоколадки начинающий игрок выигрывает при любом расположении отмеченной дольки?

в) При каких размерах шоколадки начинающий игрок проигрывает при любом расположении отмеченной дольки?

5.97. «Ним»-поддавки. Как изменится стратегия в игру «Ним», если изменить условие выигрыша: взявший последний камень — проигрывает?

5.98. Имеется несколько кучек камней. Двое по очереди берут из них камни. За один ход разрешается взять из одной кучки от 1 до 5 камней. Определите выигрышную стратегию в этой игре, если тот, кто взял последний камень а) выигрывает; б) проигрывает. (См. также 4.61.)

5.99*. Пешечное противостояние. На доске $3 \times n$ расставлены n черных и n белых пешек так, как показано на рисунке:

♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟	♟
♙	♙	♙	♙	♙	♙	♙	♙	♙	♙

Пешки ходят и бьют по шахматным правилам, к которым добавляется одно: бить обязательно. Тот, кто не может сделать очередной ход — проигрывает. Какой из игроков выигрывает в этой игре в зависимости от значения числа n?

5.100. 4 монеты. Из четырех монет одна фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но не известно, в какую сторону). Требуется за два взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти фальшивую монету.

5.101*. 12 монет. Из двенадцати монет одиннадцать настоящих, а одна фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но не известно, в какую сторону). Требуется за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти фальшивую монету и выяснить, легче она или тяжелее настоящей.

5.102*. 13 монет. Предположим теперь, что имеется 13 монет, из которых одна — фальшивая. Как за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти фальшивую монету, если не требуется выяснять, легче она или тяжелее настоящей?

5.103. Циклы Де Брёйна. Рассмотрим последовательность, состоящую из следующих десяти знаков:

$$1000101110.$$

Совокупность трехзначных чисел, которые можно получить из соседних знаков этой последовательности,

$$100, 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110,$$

очевидно, совпадает с совокупностью всех возможных трехзначных чисел, записанных в двоичной системе счисления. Докажите, что следующий алгоритм позволяет выписывать аналогичные последовательности, в которых ровно по одному разу будет встречаться любое число из n двоичных цифр.

Первые n знаков выбираем равными 1. Далее приписываем справа ноль до тех пор, пока получающиеся при этом новые n-значные числа встречаются впервые. Единицу приписываем лишь в том случае, когда приписывание нуля приводит к уже встречавшемуся числу. Приписывание заканчиваем, когда любой новый знак приводит к n-значному числу, которое уже встречалось.

Например, для $n = 1$, 2, 3 и 4 будут получаться следующие последовательности:

$$101, 11001, 1110001011, 1111000010011010111$$

Причем из алгоритма построения следует, что каждую из них можно замкнуть в цикл длины 2^n, в котором каждое число из n двоичных цифр встретится ровно по одному разу.

Глава 6
Многочлены

6.1. Квадратный трехчлен

Теорема Виета для квадратного уравнения. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Тогда справедливы равенства

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q.$$

6.1. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Выразите через p и q следующие величины

а) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; б) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$; в) $x_1^3+x_2^3$; г) $\dfrac{1}{(x_1+p)^2}+\dfrac{1}{(x_2+p)^2}$.

6.2. Для многочленов $f(x)=x^2+ax+b$ и $g(y)=y^2+py+q$ с корнями x_1, x_2 и y_1, y_2 соответственно, выразите через a, b, p, q их *результант*, который определяется равенством

$$R(f,g)=(x_1-y_1)(x_1-y_2)(x_2-y_1)(x_2-y_2).$$

Вычисление результанта позволяет проверить многочлены $f(x)$ и $g(y)$ на наличие у них общих корней.

6.3. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите уравнение, корнями которого будут числа y_1, y_2 равные:

а) x_1^3, x_2^3; б) $\dfrac{1}{x_1^2}$, $\dfrac{1}{x_2^2}$; в) $x_1+\dfrac{1}{x_2}$, $x_2+\dfrac{1}{x_1}$; г) $\dfrac{x_2}{x_1}$, $\dfrac{x_1}{x_2}$.

6.4. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $S_n=x_1^n+x_2^n$ $(n\geqslant 0)$. Докажите формулу

$$aS_m+bS_{m-1}+cS_{m-2}=0 \quad (m\geqslant 2).$$

6.5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

6.6. Какими должны быть p и q, чтобы выполнялось равенство

$$Ax^4+Bx^2+C=A(x^2+px+q)(x^2-px+q)?$$

6.7. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - \dfrac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого?

6.8. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. При каких p и q выполняются равенства $f(p) = f(q) = 0$?

6.9. При каких p и q уравнению $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют два различных числа $2p$ и $p + q$?

6.10. При каких a уравнение

а) $ax^2 + (a+1)x - 2 = 0$; б) $(1-a)x^2 + (a+1)x - 2 = 0$

имеет два различных корня?

6.11. Нарисуйте множество всех таких точек координатной плоскости, из которых к параболе $y = x^2/4$ можно провести две перпендикулярные друг другу касательные.

6.12. Рассмотрим графики функций $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

6.13. Известно, что уравнение $x^2 + 5bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, а некоторое число является корнем уравнения $y^2 + 2x_1 y + 2x_2 = 0$ и корнем уравнения $z^2 + 2x_2 z + 2x_1 = 0$. Найти b.

6.14. Известно, что многочлены $ax^2 + bx + c$ и $bx^2 + cx + a$ $(a \neq 0)$ имеют общий корень. Найдите его.

6.15. При каких a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

6.16. Пусть α — корень уравнения $x^2 + px + q = 0$, а β — уравнения $x^2 - px - q = 0$. Докажите, что между α и β лежит корень уравнения $x^2 - 2px - 2q = 0$.

6.17. Укажите все точки плоскости $(x; y)$, через которые не проходит ни одна из кривых семейства

$$y = p^2 + (4 - 2p)x - x^2.$$

6.18. Укажите все точки плоскости $(x; y)$, через которые проходит хотя бы одна кривая семейства

$$y = p^2 + (2p - 1)x + 2x^2.$$

6.19. Изобразите ту часть плоскости $(x; y)$, которая накрывается всевозможными кругами вида

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 \leqslant 2 + a^2.$$

6.20. Докажите, что корни уравнения

а) $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$;

б) $c(x-a)(x-b)+a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)=0$

— всегда вещественные.

Определение. Каждому квадратному трехчлену x^2+px+q будем ставить в соответствие на координатной плоскости Opq точку с координатами $(p; q)$. Эту плоскость назовем *фазовой*. Прямые вида $a^2+ap+q=0$ будем называть *корневыми*, а параболу $p^2-4q=0$ — *дискриминантной*.

6.21. Каким точкам фазовой плоскости соответствуют квадратные трехчлены, не имеющие корней?

6.22. Для каждого действительного a построим на плоскости Opq корневую прямую $a^2+ap+q=0$. Докажите, что полученное множество прямых совпадает с множеством всех касательных к дискриминантной параболе $p^2-4q=0$. (См. также 9.21.)

6.23. Обозначим корни уравнения $x^2+px+q=0$ через x_1, x_2. Нарисуйте на фазовой плоскости Opq множества точек $M(p; q)$, которые задаются условиями: а) $x_1=0$, $x_2=1$; б) $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \geqslant 2$; в) $x_1=x_2$; г) $-1 \leqslant x_1 \leqslant 0$, $1 \leqslant x_2 \leqslant 2$.

6.24. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $4x^2-2x+a=0$ имеет два корня, причем $x_1<1$, $x_2>1$.

6.25. Найдите все такие q, что при любом p уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два действительных корня.

6.26. Фазовая плоскость Opq разбивается параболой $p^2-4q=0$ и прямыми $p+q+1=0$, $-2p+q+4=0$ на несколько областей. Для точек каждой области укажите, сколько корней имеет соответствующий им многочлен $x^2+px+q=0$ на интервале $(-2; 1)$.

6.27. На фазовой плоскости через точку $(p; q)$ проведены касательные к дискриминантной параболе $p^2-4q=0$. Найдите координаты точек касания.

6.28. При каких значениях параметра a один из корней уравнения

$$(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+(a-5)=0$$

больше 1, а другой — меньше 1?

6.29. Известно, что модули корней уравнений $x^2+ax+b=0$ и $x^2+cx+d=0$ меньше 1. Докажите, что модули корней уравнения

$$x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$$

также меньше 1.

6.30. В квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q независимо пробегают все значения от -1 до 1. Найдите множество значений, которые могут при этом принимать действительные корни этого уравнения.

6.31. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ имеет два корня, которые больше -2 и меньше 6?

6.32. При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ имеет два корня, и один из них больше 3, а второй — меньше 2?

6.33. При каких значениях параметра a уравнение $(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ имеет два корня, каждый из которых больше $\frac{1}{2}$?

6.34. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1?

6.35. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)x^2 - 2(a+1)x + 2(a+1) = 0$ имеет только одно неотрицательное решение?

6.36. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$ является наименьшей?

6.37. Найдите все значения параметра r, при которых уравнение $(r-4)x^2 - 2(r-3)x + r = 0$ имеет два корня, причем каждый из которых больше -1.

6.38. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0$$

хотя бы при одном значении $a \in [-1; 2]$.

6.39. Найти все значения параметра a, для каждого из которых из неравенства $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует неравенство $(a^2 + a - 2)x^2 - (a+5)x - 2 \leqslant 0$.

6.2. Алгоритм Евклида для многочленов и теорема Безу

6.40. Деление многочленов с остатком. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x)$ не равен нулю тождественно. Докажите, что существуют многочлены $T(x)$ и $R(x)$ такие, что

$$P(x) = Q(x)T(x) + R(x),$$

и $\deg R(x) < \deg Q(x)$; и покажите, что при этом $T(x)$ и $R(x)$ определяются однозначно.

Определение. Если многочлен $P(x)$ поделен на $Q(x)$ с остатком

$$P(x) = Q(x)T(x) + R(x),$$

то $T(x)$ называется *неполным частным*, а $R(x)$ — *остатком*. Если многочлен $R(x)$ тождественно равен нулю, то в этом случае $T(x)$ — *полное частное*, и $Q(x)$ называется *делителем* $P(x)$ (обозначается $Q(x) \mid P(x)$).

6.41. Теорема Безу. Докажите, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - c$ равен $P(c)$.

6.42. Докажите, что многочлен степени n имеет не более чем n корней.

6.43. Можно ли из какой-то точки плоскости провести к графику многочлена n-й степени больше, чем n касательных?

6.44. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ (попарно неравны друг другу). Какие корни будут у уравнений

а) $a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$; б) $a_nx^{2n} + \ldots + a_1x^2 + a_0 = 0$?

6.45. Пусть многочлен

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x)\,P(-x)$. Докажите, что

а) многочлен $Q(x)$ имеет степень $2n$ и содержит только четные степени переменной x;

б) функция $Q(\sqrt{x})$ является многочленом с корнями $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$.

(См. также 9.90.)

6.46. Разделите многочлены с остатком:

а) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 1$ на $x^2 - x + 1$;

б) $2x^3 + 2x^2 + x + 6$ на $x^2 + 2x + 1$;

в) $x^4 + 1$ на $x^5 + 1$.

6.47. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = x^5 - 17x + 1$ на $x + 2$.

6.48. При каком значении a многочлен $P(x) = x^{1000} + ax^2 + 9$ делится на $x + 1$?

6.49. Найдите остаток от деления многочлена

$$P(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$$

а) на $x - 1$; б) на $x^2 - 1$.

6.50. Докажите, что многочлен $P(x) = (x+1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$.

6.51. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x-1$, и остаток 1 при делении на $x-2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x-1)(x-2)$?

6.52. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение

$$x^3 + y^3 + z^3 + k\,xyz$$

делилось на $x+y+z$.

6.53. При каких n многочлен $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}$ делится на $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$?

Определение. Пусть $m(x)$ — не равный тождественно нулю многочлен. Два многочлена $a(x)$ и $b(x)$ называются *сравнимыми по модулю* $m(x)$, если их разность делится на $m(x)$. Как и для чисел, соотношение сравнимости для двух многочленов записывается в виде

$$a(x) \equiv b(x) \pmod{m(x)}.$$

6.54. Китайская теорема об остатках для многочленов. Пусть $m_1(x), \ldots, m_n(x)$ попарно взаимно простые многочлены, то есть $(m_i(x), m_j(x)) = 1$ при $i \neq j$, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ — произвольные многочлены. Докажите, что тогда существует ровно один многочлен $p(x)$ такой, что

$$\begin{cases} p(x) \equiv a_1(x) \pmod{m_1(x)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p(x) \equiv a_n(x) \pmod{m_n(x)} \end{cases}$$

и $\deg p(x) < \deg m_1(x) + \ldots + \deg m_n(x)$. (См. также 6.135 и 6.144.)

6.55. Пусть $P(x) = (2x^2 - 2x + 1)^{17}(3x^2 - 3x + 1)^{17}$. Найдите

а) сумму коэффициентов этого многочлена;

б) суммы коэффициентов при четных и нечетных степенях x.

6.56. При каких a и b многочлен $P(x) = (a+b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

6.57. Кубическое и квадратное уравнения с рациональными коэффициентами имеют общее решение. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональный корень.

6.58. Найдите остаток $R(x)$ от деления многочлена $x^n + x + 2$ на $x^2 - 1$.

6.59. Один из корней уравнения $x^3-6x^2+ax-6=0$ равен 3. Решите уравнение.

6.60. При каких значениях параметра a многочлен $P(x)=x^n+ax^{n-2}$ $(n\geqslant 2)$ делится на $x-2$?

6.61. При каких действительных p и q двучлен x^4+1 делится на x^2+px+q?

6.62. При каких a многочлен

$$P(x)=a^3x^5+(1-a)x^4+(1+a^3)x^2+(1-3a)x-a^3$$

делится на $x-1$?

6.63. Найдите все многочлены, которые удовлетворяют тождеству

$$x\,P(x-1)=(x-26)\,P(x).$$

6.64. Дано уравнение

$$x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\ldots-a_1x-a_0=0,$$

где $a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0\geqslant 0$. Докажите, что это уравнение не может иметь двух положительных корней.

6.65. Правило знаков Декарта. Докажите, что количество положительных корней многочлена

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$$

не превосходит числа перемен знака в последовательности $a_n,\ldots,a_1,a_0$.

6.66. Как правило знаков Декарта применить к оценке числа отрицательных корней многочлена

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0?$$

6.67. Докажите, что многочлен

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$

делится на $(b-c)(c-a)(a-b)$.

Определение. *Наибольшим общим делителем* двух или нескольких многочленов называется многочлен максимальной степени, на который делится каждый из данных.

Как и для чисел, наибольший общий делитель многочленов $P_1(x),\ldots$ $\ldots,P_k(x)$ обозначается $(P_1(x),\ldots,P_k(x))$.

6.68. Докажите, что из равенства $P(x)=Q(x)\,T(x)+R(x)$ следует соотношение $(P(x),\,Q(x))=(Q(x),\,R(x))$.

6.69. Алгоритм Евклида для многочленов. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x)$ не равен нулю тождественно и $Q(x) \nmid P(x)$. Докажите, что при некотором $s \geqslant 1$ существуют многочлены $A_0(x)$, $A_1(x)$, $\ldots$, $A_s(x)$ и $R_1(x)$, $\ldots$, $R_s(x)$ такие, что

$$\deg Q(x) > \deg R_1(x) > \deg R_2(x) > \ldots > \deg R_s(x) \geqslant 0,$$

$$\begin{cases} P(x) = Q(x) \cdot A_0(x) + R_1(x), \\ Q(x) = R_1(x) \cdot A_1(x) + R_2(x), \\ R_1(x) = R_2(x) \cdot A_2(x) + R_3(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R_{s-2}(x) = R_{s-1}(x) \cdot A_{s-1}(x) + R_s(x), \\ R_{s-1}(x) = R_s(x) \cdot A_s(x), \end{cases}$$

и $(P(x), Q(x)) = R_s(x)$. (Сравните с задачей 3.39.)

6.70. Пусть $(P(x), Q(x)) = D(x)$. Докажите, в условиях предыдущей задачи что существуют многочлены $U(x)$ и $V(x)$ такие, что $\deg U(x) < \deg Q(x)$, $\deg V(x) < \deg P(x)$, и

$$P(x)\,U(x) + Q(x)\,V(x) = D(x).$$

(Сравните с задачей 3.40.)

6.71. Найдите наибольший общий делитель многочленов $P(x)$, $Q(x)$ и представьте его в виде $P(x)\,U(x) + Q(x)\,V(x)$:

а) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;

б) $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$.

6.72. Найдите $(x^n - 1, x^m - 1)$.

6.73. Последовательность a_0, a_1, a_2, $\ldots$ задана условиями

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = P(a_n) \quad (n \geqslant 0),$$

где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x) > 0$ при $x \geqslant 0$. Докажите, что для любых натуральных m и k выполняется равенство $(a_m, a_k) = a_{(m,k)}$.

6.74. Решите систему

$$\begin{cases} x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + 5x^2 = 5, \\ x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x = 0. \end{cases}$$

6.75. При каком положительном значении p уравнения $3x^2 - 4px + 9 = 0$ и $x^2 - 2px + 5 = 0$ имеют общий корень?

6.76. Найдите многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ такие, что

$$(x+1)\,P(x) + (x^4+1)\,Q(x) = 1.$$

6.77. При помощи метода неопределенных коэффициентов (смотрите раздел 6.3, с. 115) найдите такие линейные функции $P(x)$ и $Q(x)$, чтобы выполнялось равенство

$$P(x)(x^2-3x+2)+Q(x)(x^2+x+1)=21.$$

6.78. Найдите такие линейные функции $P(x)$ и $Q(x)$, чтобы выполнялось равенство

$$P(x)(2x^3-7x^2+7x-2)+Q(x)(2x^3+x^2+x-1)=2x-1.$$

6.79. Сколько представлений допускает дробь $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ в виде суммы двух положительных дробей со знаменателями n и $n+1$?

6.80. Схема Горнера. Значение многочлена

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

в точке $x=c$ можно вычислить, используя ровно n умножений. Для этого нужно представить многочлен $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=(\ldots(a_nx+a_{n-1})x+\ldots+a_1)x+a_0.$$

(См. также 5.77.) Описанный процесс нахождения коэффициентов b_n, $\ldots$, b_1, b_0 называется схемой Горнера.

Пусть b_n, b_{n-1}, $\ldots$, b_0 — это значения выражений, которые получаются в процессе вычисления $P_n(c)$, то есть

$$b_n=a_n,\ \ b_k=c\cdot b_{k+1}+a_k \quad (k=n-1,\ldots,0).$$

Докажите, что при делении многочлена $P_n(x)$ на $(x-c)$ с остатком, у многочлена в частном коэффициенты будут совпадать с числами b_{n-1}, $\ldots$, b_1, а остатком будет число b_0. Таким образом, будет справедливо равенство:

$$P_n(x)=(x-c)(b_nx^{n-1}+\ldots+b_2x+b_1)+b_0.$$

6.81. Формулы сокращенного умножения. Докажите следующие равенства:

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n);$$
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+b^{2n}).$$

6.82. Докажите, что при $n\geqslant 2$

$$n^{n-1}-1 \,\vdots\, (n-1)^2.$$

6.83. Формула Тейлора для многочлена. Докажите, что любой многочлен $P_n(x)$ можно единственным образом разложить по степеням $(x-c)$:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\cdot(x-c)^k,$$

причем коэффициенты c_k могут быть найдены по формуле

$$c_k = \frac{P^{(k)}(x)}{k!}\Big|_{x=c} \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

(См. также 11.23.)

6.84. Пользуясь схемой Горнера, разложите $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ по степеням $x + 1$.

6.85. Разложите $P(x + 3)$ по степеням x, где $P(x) = x^4 - x^3 + 1$.

6.3. Разложение на множители

Метод неопределенных коэффициентов. В задачах о разложении многочленов на множители часто оказывается полезным подход, который называется методом неопределенных коэффициентов. Сначала записывается предполагаемое разложение с неизвестными (неопределенными) коэффициентами. После раскрытия скобок получается выражение, которое должно совпадать с исходным. Равенство коэффициентов при соответствующих одночленах дает систему уравнений, из которой находятся неопределенные коэффициенты, а, тем самым, и разложение на множители.

Соотношения на неопределенные коэффициенты можно также получать, подставляя в предполагаемое равенство конкретные значения переменных.

6.86. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) $x^4 + 4$;
б) $2x^3 + x^2 + x - 1$;
в) $x^{10} + x^5 + 1$;
г) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$;
д) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$;
е) $x^2y^2 - x^2 + 4xy - y^2 + 1$;
ж) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$;
з) $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$;
и) $a^8 + a^6b^2 + a^4b^4 + a^2b^6 + b^8$;
к) $(x^2 + x + 1)^2 + 3x(x^2 + x + 1) + 2x^2$;
л) $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$;
м) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$.

(См. также 9.8.)

6.87. Можно ли разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$?

6.88. Докажите, что многочлен $x^4 + px^2 + q$ всегда можно разложить в произведение двух многочленов второй степени.

6.89. Упростите выражение:

$$\frac{(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5}{(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}.$$

6.90. Докажите, что при нечетном m выражение

$$(x+y+z)^m - x^m - y^m - z^m$$

делится на

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

6.91. Пусть a, b, c — попарно различные числа. Докажите, что выражение

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$$

не равно нулю.

6.92. Докажите, что если три действительных числа a, b, c связаны соотношением

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

то обязательно какие-либо два из этих чисел в сумме дают ноль.

6.93. Докажите, что если $a+b+c=0$, то

$$2(a^5+b^5+c^5) = 5abc(a^2+b^2+c^2).$$

6.94. Теорема о рациональных корнях многочлена. Докажите, что если $(p, q) = 1$ и p/q — рациональный корень многочлена

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

с целыми коэффициентами, то

а) $a_0 \vdots p$; б) $a_n \vdots q$.

Эти соотношения позволяют перечислить все рациональные числа, которые могут быть корнями данного многочлена. (См. также 7.43.)

6.95. Докажите при помощи предыдущей задачи, что $\sqrt{17}$ — иррациональное число.

6.96. Докажите, что $\cos 20^\circ$ — число иррациональное.

6.97. Найдите рациональные корни многочленов:

а) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

б) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

6.98. Решите уравнения:

а) $x^4 + x^3 - 3a^2x^2 - 2a^2x + 2a^4 = 0$; б) $x^3 - 3x = a^3 + a^{-3}$.

6.4. Многочлены с кратными корнями

Определение. Пусть $P(x) = (x-a)^k\, Q(x)$, $k \geqslant 1$ и $Q(a) \neq 0$. Тогда число a называется *корнем* многочлена $P(x)$ *кратности* k. Если a —

корень кратности 1, то он называется *простым* корнем, если кратность больше 1, то число a называется *кратным* корнем.

6.99. Докажите, что корень a имеет кратность больше 1 тогда и только тогда, когда $P(a)=0$ и $P'(a)=0$.

6.100. Для данного многочлена $P(x)$ опишем способ, который позволяет построить многочлен $R(x)$, имеющий те же корни, что и $P(x)$, но все кратности 1.

Положим $Q(x)=(P(x),\,P'(x))$ и $R(x)=P(x)\,Q^{-1}(x)$. Докажите, что
а) все корни многочлена $P(x)$ будут корнями $R(x)$;
б) многочлен $R(x)$ не имеет кратных корней.

6.101. Постройте многочлен $R(x)$ из предыдущей задачи, если:
а) $P(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$;
б) $P(x)=x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$.

6.102. Докажите, что многочлен

$$P(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

6.103. При каких A и B многочлен $Ax^{n+1}+Bx^n+1$ имеет число $x=1$ не менее чем двукратным корнем?

6.104. Докажите, что многочлен $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ при $n>1$ имеет трехкратный корень $x=1$.

6.105. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на свою производную тогда и только тогда, когда он имеет вид $P(x)=a_n(x-x_0)^n$.

6.106. Докажите, что при $n>0$ многочлен $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ делится на $(x-1)^2$.

6.107. Докажите, что при $n>0$ многочлен

$$n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1$$

делится на $(x-1)^3$.

6.108. Докажите, что при $n>0$ многочлен

$$x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$$

делится на $(x-1)^3$.

6.109. Докажите, что многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

имеет число -1 корнем кратности m тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n = 0, \\ -a_1 + 2a_2 - 3a_3 + \ldots + (-1)^n n a_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_1 + 2^m a_2 - 3^m a_3 + \ldots + (-1)^n n^m a_n = 0. \end{cases}$$

(См. также 11.12.)

6.110. Докажите, что многочлен

$$P(x) = (x^{n+1} - 1)(x^{n+2} - 1)\ldots(x^{n+m} - 1)$$

без остатка делится на

$$Q(x) = (x^1 - 1)(x^2 - 1)\ldots(x^m - 1).$$

(См. также 11.118.)

6.5. Теорема Виета

Теорема Виета. Пусть x_1, x_2,…, x_n — корни многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

($a_n \neq 0$). Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1}/a_n, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}/a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_0/a_n. \end{cases}$$

Определение. Многочлен, не изменяющийся при любых перестановках своих переменных, называется *симметрическим.*

Многочлены

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ \sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1x_2\ldots x_n, \end{aligned}$$

называются *элементарными симметрическими.*

Теорема. Всякий симметрический многочлен $F(x_1, \ldots, x_n)$ представим в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов: $F(x_1, \ldots, x_n) = G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и единственным образом (См. [34].)

При этом коэффициенты G получаются из коэффициентов F только при помощи операций сложения, вычитания и умножения, то есть, если все коэффициенты F были целыми числами, то и коэффициенты G также будут целыми числами.

Задачи о выражении симметрических многочленов через элементарные симметрические могут быть решены при помощи метода неопределенных коэффициентов (см. с. 115). Для нахождения искомого представления многочлена $F(x_1, \ldots, x_n)$ степени m достаточно рассмотреть сумму с неопределенными коэффициентами одночленов вида $\sigma_1^{a_1} \ldots \sigma_n^{a_n}$, суммарная степень $(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n)$ каждого из которых равна m.

6.111. Выразите через элементарные симметрические многочлены следующие выражения:

а) $(x+y)(y+z)(x+z)$;
б) $x^3+y^3+z^3-3xyz$;
в) x^3+y^3;
г) $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(x^2+z^2)$;
д) $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$;
е) $x^4+y^4+z^4$.

6.112. Известно, что $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Найдите $a^4+b^4+c^4$.

6.113. Числа x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a.

6.114. Решите систему:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

6.115. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых корни x_1, x_2, x_3 многочлена x^3-6x^2+ax+a удовлетворяют равенству

$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0.$$

6.116. Постройте кубический многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена $x^3+x^2-2x-1=0$.

6.117. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3-2x^2+x+1=0.$$

Составьте кубической уравнение, корнями которого были бы числа $y_1 = x_2x_3$, $y_2=x_1x_3$, $y_3=x_1x_2$.

6.118. Выразите свободный член c кубического уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

через коэффициенты a и b, зная, что корни этого уравнения образуют арифметическую прогрессию.

6.119. Пусть известно, что все корни уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

положительны. Какому дополнительному условию должны удовлетворять его коэффициенты p, q и r для того, чтобы из отрезков, длины которых равны этим корням, можно было составить треугольник?

6.120. а) Известно, что

$$x + y = u + v, \quad x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$x^n + y^n = u^n + v^n.$$

б) Известно, что

$$\begin{gathered} x + y + z = u + v + t, \\ x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + t^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + t^3. \end{gathered}$$

Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + y^n.$$

6.121. Решите системы:

а) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{11}{6}, \\ xy + yz + xz = 11; \end{cases}$
г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{7}{2}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(y + z) = 2, \\ y(z + x) = 2, \\ z(x + y) = 3; \end{cases}$
д) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + xz + yz = -4, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32, \\ 12(x + y) = 7xy; \end{cases}$
е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$

6.122. Числа a, b, c являются тремя из четырех корней многочлена

$$x^4 - ax^3 - bx + c.$$

Найдите все такие многочлены.

6.123. Известно, что целые числа a, b, c удовлетворяют равенству $a + b + c = 0$. Докажите, что $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ — квадрат целого числа.

6.124. Найдите зависимость между коэффициентами кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если известно, что сумма двух его корней равна произведению этих корней.

6.125. При каких a и b уравнение $x^3+ax+b=0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

6.126. Путь a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр, а r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно. Составьте уравнение с коэффициентами, зависящими от p, r, R, корнями которого являются числа a, b, c. Докажите равенство

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{1}{2rR}.$$

6.127. Решите в натуральных числах систему

$$\begin{cases} x+y=uv, \\ u+v=xy. \end{cases}$$

6.128. В каком из двух уравнений сумма квадратов корней больше
а) $4x^3-18x^2+24x=8,\quad 4x^3-18x^2+24x=9;$
б) $4x^3-18x^2+24x=11,\quad 4x^3-18x^2+24x=12?$

6.6. Интерполяционный многочлен Лагранжа

6.129. Решите уравнение

$$c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x.$$

6.130. Докажите тождество

$$c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x^2.$$

6.131. Пусть $x_1<x_2<\ldots<x_n$ — действительные числа. Постройте многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ степени $n-1$, которые удовлетворяют условиям $f_i(x_i)=1$ и $f_i(x_j)=0$ при $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$.

6.132. Опишите явный вид многочлена

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x),$$

где $f_i(x)$ — многочлены из предыдущей задачи.

6.133. Пусть $x_1<x_2<\ldots<x_n$ — действительные числа. Докажите, что для любых y_1, y_2, $\ldots$, y_n существует единственный многочлен $f(x)$ степени не выше $n-1$ такой, что $f(x_1)=y_1$, $\ldots$, $f(x_n)=y_n$.

6.134. Пусть A, B и C — остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x-a$, $x-b$ и $x-c$. Найдите остаток от деления того же многочлена на произведение $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Определение. Многочлен степени не выше $n-1$, значения которого в данных точках $x_1, \ldots, x_n$ (узлах интерполяции) совпадают с заданными числами $y_1, \ldots, y_n$, называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

6.135. Какие остатки дает многочлен $f(x)$ из предыдущей задачи на многочлены вида $(x-x_i)$? Проинтерпретируйте этот факт при помощи китайской теоремы об остатках для многочленов (см. 6.54).

6.136. Постройте многочлены $f(x)$ степени не выше 2, которые удовлетворяют условиям:

а) $f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=3$;
б) $f(-1)=-1,\ f(0)=2,\ f(1)=5$;
в) $f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(2)=4$.

6.137. Корабль с постоянной скоростью проплывает мимо небольшого острова. Капитан каждый час измеряет расстояние до острова. В 12, 14 и 15 часов расстояния равнялись 7, 5 и 11 километров соответственно. Каким было расстояние до острова в 13 часов? Чему оно будет равно в 16 часов?

6.138. Два корабля двигаются с постоянными скоростями. Расстояния между ними, измеренные в 12, 14 и 15 часов равнялись 5, 1 и 2 километра соответственно. Каким было расстояние между кораблями в 13 часов?

6.139. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трехчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трехчлена.

6.140. Решите систему
$$\begin{cases} z+ay+a^2x+a^3=0,\\ z+by+b^2x+b^3=0,\\ z+cy+c^2x+c^3=0. \end{cases}$$

6.141. Пусть a, b и c — три различных числа. Докажите, что из системы
$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0,\\ x+by+b^2z=0,\\ x+cy+c^2z=0, \end{cases}$$
следуют равенства $x=y=z=0$.

6.142. Про многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_0$ известно, что

$$f(1) = f(-1),\ \ \ldots,\ \ f(5) = f(-5).$$

Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого действительного x.

6.143. Пусть $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что хотя бы одно из чисел

$$|3^{n+1} - P(n+1)|, \ldots, |3^1 - P(1)|, |1 - P(0)|$$

не меньше 1.

6.144. Докажите, что если $f(x)$ есть многочлен, степень которого меньше n, то дробь

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}$$

(x_1, x_2, $\ldots$, x_n — произвольные попарно различные числа) может быть представлена в виде суммы n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

где A_1, A_2, $\ldots$, A_n — некоторые константы. (См. также 6.54.)

6.145. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_1 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_1 - b_n} = 1, \\ \dfrac{x_1}{a_2 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_2 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_2 - b_n} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1}{a_n - b_1} + \dfrac{x_2}{a_n - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n - b_n} = 1. \end{cases}$$

Глава 7

Комплексные числа

7.1. Комплексная плоскость

Определение. *Комплексными числами* называются числа вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, то есть число, квадрат которого равен -1; x называется *действительной* или *вещественной частью* z, а y — *мнимой частью* (обозначается $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$). Числа z с $x = 0$, $y \neq 0$ называются *чисто мнимыми*. Число $\overline{z} = x - iy$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = x + iy$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

7.1. Пусть $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$. Найдите
а) $z + z'$; б) $z \cdot z'$; в) z/z'.

7.2. Проверьте равенства:
а) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$; в) $\overline{z/z'} = \overline{z}/\overline{z}'$;
б) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}'$; г) $\overline{(\overline{z})} = z$.

Определение. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка $(x; y)$ на координатной плоскости Oxy и вектор с теми же координатами. Длина вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем числа* z ($r = |z|$). Угол φ, отложенный на плоскости Oxy против часовой стрелки от оси Ox до вектора $(x; y)$, называется *аргументом числа* z ($r = \arg z$). Обычно считается, что функция $\arg z$ принимает значения от $-\pi$ до π.

Если $|z| = r$, $\arg z = \varphi$, то комплексное число z может быть записано в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись называется *тригонометрической формой* числа z. Представление $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* числа z.

7.3. Докажите равенства:
а) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$; б) $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$; в) $\overline{z} \cdot z = |z|^2$.

7.4. Дайте геометрическую интерпретацию следующих неравенств:
а) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; б) $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$; в) $|z - 1| \leqslant |\arg z|$, если $|z| = 1$.

7.5. Представьте в тригонометрической форме числа:

а) $1+i$; г) $\sin\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$;

б) $2+\sqrt{3}+i$; д) $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$.

в) $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$;

7.6. Какие множества на комплексной плоскости описываются следующими условиями:

а) $|z|\leqslant 1$; д) $\arg\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=\dfrac{\pi}{4}$; з) $|z-i|+|z+i|=2$;

б) $|z-i|\leqslant 1$; е) $\mathrm{Re}(z^2)\leqslant 1$; и) $\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{z}<-\dfrac{1}{2}$;

в) $|z|=z$; ж) $|iz+1|=3$; к) $\dfrac{\pi}{6}<\arg(z-i)<\dfrac{\pi}{3}$?

г) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<1$;

7.7. Найдите $\min|3+2i-z|$ при $|z|\leqslant 1$.

7.8. Запишите с помощью неравенств следующие множества точек на комплексной плоскости:

а) полуплоскость, расположенная строго левее мнимой оси;

б) первый квадрант, не включая координатных осей;

в) множество точек, отстоящих от мнимой оси на расстоянии, меньшем двух;

г) полукруг радиуса 1 (без полуокружности) с центром в точке O, расположенный не выше действительной оси.

7.9. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условию $|z-1-i|=2|z+1-i|$.

7.10. Окружность Аполлония. Пусть k — положительное действительное число и $k\neq 1$ Докажите, что на комплексной плоскости равенств $|z-a|=k|z-b|$ задает окружность, центр которой лежит на прямой, проходящей через точки a и b.

7.11. Докажите, что для произвольных комплексных чисел z_1 и z_2 выполняется равенство

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

Какой геометрический смысл оно имеет?

7.12. Докажите, что при любых вещественных a_j, b_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ выполняется неравенство

$$\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

7.13. Докажите, что если $x+iy=(s+it)^n$, то $x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$.

7.14. Тождество Фибоначчи. Докажите равенство:

$$(a^2+b^2)(u^2+v^2)=(au+bv)^2+(av-bu)^2.$$

(См. также 1.6.)

7.15. Докажите, что квадратные корни из комплексного числа $z=$ $=a+ib$ находятся среди чисел

$$w=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

Как нужно выбрать знак пред вторым слагаемым в скобке, чтобы получить два нужных корня, а не сопряженные к ним числа? (См. также 5.32.)

7.16. Вычислите

а) $\sqrt{3-4i}$; в) $\sqrt{24+70i}$; д) $\sqrt{-7-24i}$;
б) $\sqrt{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$; г) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$; е) $\sqrt{12-5i}$.

7.17. Решите в комплексных числах следующие квадратные уравнения:

а) $z^2+z+1=0$; г) $z^2-(3+2i)z+6i=0$;
б) $z^2+4z+29=0$; д) $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$;
в) $z^2-(2+i)z+2i=0$; е) $z^2-(5+2i)z+5+5i=0$.

7.18. Решите в комплексных числах уравнения:

а) $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$; в) $z^4+(z-4)^4=32$;
б) $z^3+3z^2+3z+3=0$; г) $\left(\dfrac{1-ix}{1+ix}\right)^4=-i$.

7.19. Как выглядит формула для корней биквадратного уравнения $x^4+px^2+q=0$, если $p^2-4q<0$?

7.20. Докажите, что если $|z|=1$ и $z\neq-1$, то существует ровно одно действительное t, для которого $z=(1+it)(1-it)^{-1}$.

7.21. Постройте график функции $y(x)=|x+\sqrt{x^2-1}|$ (x — произвольное действительное).

7.22. Пусть точка z движется по единичной окружности против часовой стрелки. Опишите движение следующих точек

а) $2z^2$; в) $3z+z^2$; д) $(z-i)^{-1}$; ж) $Rz+\rho z^n$ $(\rho<R)$.
б) $z+3z^2$; г) z^{-3}; е) $(z-2)^{-1}$;

7.23. Точка z против часовой стрелки обходит квадрат с вершинами $-1-i$, $2-i$, $2+2i$, $-1+2i$. Как при этом ведут себя точки

а) z^2; б) z^3; в) z^{-1}?

7.24. Какое наибольшее значение может принимать $|z|$, если известно, что комплексное число z удовлетворяет условию $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 1$?

7.25. Формулы Муавра. Докажите две формулы Муавра. Первая из них описывает правило возведения в степень комплексного числа, представленного в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$z^n = r^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (n \geqslant 1).$$

Вторая позволяет вычислять все n корней n-й степени из данного числа:

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

(См. также 12.13.)

7.26. Найдите все значения корней:
а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$; в) $\sqrt{-8i}$; г) $\sqrt[3]{1-i}$; д) $\sqrt[6]{-1}$; е) $\sqrt[8]{i\sqrt{3}-1}$.

7.27. Докажите, что числа w_k $(k = 0, \ldots, n-1)$, являющиеся корнями уравнения $w^n = z$ при любом z располагаются в вершинах правильного n-угольника. (См. также 8.3.)

7.28. Докажите, что все корни уравнения $z^n = 1$ могут быть записаны в виде $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$.

7.29. Решите уравнения:
а) $z^4 = \overline{z}^4$; г) $z^2 + |z|^2 = 0$;
б) $z^2 + |z| = 0$; д) $(z+i)^4 = (z-i)^4$;
в) $z^2 + \overline{z} = 0$; е) $z^3 - \overline{z} = 0$.

7.30. Найдите сумму s-х степеней всех корней уравнения $z^n = 1$, где s — целое число.

7.31. Докажите равенства:

а) $\dfrac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi} = 1 - C_n^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi + C_n^4\,\mathrm{tg}^2\,\varphi - \ldots$;

б) $\dfrac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi} = C_n^1\,\mathrm{tg}\,\varphi - C_n^3\,\mathrm{tg}^3\,\varphi + C_n^5\,\mathrm{tg}^5\,\varphi - \ldots$

7.32. Вычислите
а) $(1+i)^n$; д) $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$;
б) $(1+i\sqrt{3})^n$; е) $(\sqrt{3}+i)^n$;
в) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; ж) $\left(\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi + i\sin\psi}\right)^n$.
г) $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{20}$;

7.33. Решите уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

7.34. Докажите, что многочлен $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1=0$ делится на $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

7.35. Вычислите:
а) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$; б) $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}$.

7.36. а) Докажите, что многочлен

$$P(x)=(\cos\varphi+x\sin\varphi)^n-\cos n\varphi-x\sin n\varphi$$

делится на x^2+1.

б) Докажите, что многочлен

$$Q(x)=x^n\sin\varphi-\rho^{n-1}x\sin n\varphi+\rho^n\sin(n-1)\varphi$$

делится на $x^2-2\rho x\cos\varphi+\rho^2$.

7.37. Докажите тождества

а) $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$;

б) $x^{2n+1}-1=(x-1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$;

в) $x^{2n+1}+1=(x+1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$;

г) $x^{2n}+1=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1\right)$.

7.38. Используя формулу Муавра, докажите, что

$$\cos nx=T_n(\cos x),\qquad \sin nx=\sin x\,U_{n-1}(\cos x),$$

где $T_n(z)$ и $U_n(z)$ — многочлены степени n. Вычислите эти многочлены в явном виде для $n=0$, 1, 2, 3, 4, 5.

Определение. Многочлены $T_n(z)$ и $U_n(z)$ называются *многочленами Чебышёва* первого и второго рода соответственно.

7.39. Проверьте, что многочлены Чебышёва $T_n(x)$ и $U_n(x)$ удовлетворяют начальным условиям

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x;\quad U_0(x)=1,\quad U_1(x)=2x,$$

и рекуррентным формулам

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\quad U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x).$$

(См. также 11.102.)

7.40. Докажите, что у многочлена $2T_n(x/2)$ старший коэффициент равен единице, а все остальные коэффициенты — целые числа.

7.41. Упростите выражение $T_{n+1}^2(x)+(1-x^2)U_n^2(x)$.

7.42*. Известно, что $\cos\alpha^\circ=1/3$. Является ли α рациональным числом?

7.43. Пользуясь теоремой о рациональных корнях многочлена (см. 6.94), докажите, что если $p/q\in\mathbb{Q}$ и $1.5\cos(p/q)^\circ\neq 0,\ \pm 1/2,\ \pm 1$, то $\cos(p/q)^\circ$ — число иррациональное.

7.44. Фигуры Лиссажу. При каких натуральных m и n фигура Лиссажу, заданная параметрически

$$x(t)=\cos mt,\quad y(t)=\cos nt\quad (0\leqslant t\leqslant\pi)$$

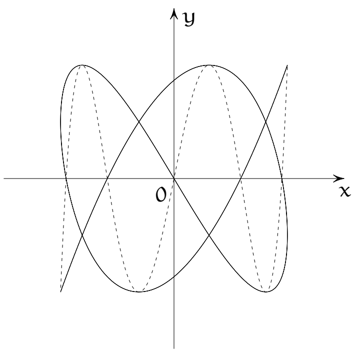
пересекает ось Ox по корням многочлена Чебышёва

$$x(t)=\cos t,\quad y(t)=\cos nt\quad (0\leqslant t\leqslant\pi),$$

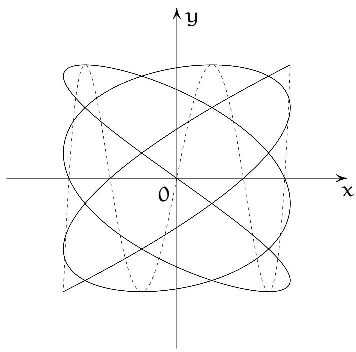
и в каждом корне ровно по одному разу?

Будет ли полученное условие гарантировать, что у данных кривых всегда совпадают точки максимумов и минимумов?

На рисунке сплошной линией изображена фигура Лиссажу, а пунктирной — многочлен Чебышёва на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$.



$m=3,\ n=5$



$m=5,\ n=7$

7.45. Докажите, что

$$\cos^n x=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kx,\quad \sin^n x=\sin x\sum_{k=0}^{n-1}b_k\sin kx,$$

где $a_0,\ldots,a_n$, $b_0,\ldots,b_{n-1}$ — рациональные числа. Найдите эти представления в явном виде для $n=2,\ 3,\ 4,\ 5$. Выразите $\sin^n x$ при четном n в виде $\sin^n x=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k\cos kx$, а при нечетном — в виде $\sin^n x=\sum\limits_{k=0}^{n}d_k\sin kx$.

7.46. Известно, что $\sin\alpha = 3/5$. Докажите, что $\sin 25\alpha$ имеет вид $\dfrac{n}{5^{25}}$, где n — целое число, не делящееся на 5.

7.47. Последовательность многочленов $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - 1$, $\ldots$ задается условием

$$P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Докажите, что уравнение $P_{100}(x) = 0$ имеет 100 различных действительных корней на отрезке $[-2; 2]$. Что это за корни?

7.48. Докажите равенство:

$$\left(\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1 + i\operatorname{tg} n\alpha}{1 - i\operatorname{tg} n\alpha}.$$

7.49. Докажите, что если $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$, то $z^n + z^{-n} = 2\cos n\alpha$. Как выражается $z^n + z^{-n}$ через $y = z + z^{-1}$? (См. также 1.5.)

7.50. При подстановке в многочлены Чебышёва числа $x = \cos\alpha$ получаются значения

$$T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha, \quad U_{n-1}(\cos\alpha) = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}.$$

Что будет, если в многочлены Чебышёва подставить число $x = \sin\alpha$?

7.51. Коммутирующие многочлены. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ называются коммутирующими, если $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Например, многочлены $P(x) = x^m$ и $Q(x) = x^n$ коммутируют, так как $P(Q(x)) = Q(P(x)) = x^{mn}$.

а) Для любого α найдите все многочлены степени не выше трех, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$.

б) Докажите, что для любых m и n многочлены $P_n(x) = 2T_n(x/2)$ и $P_m(x) = 2T_m(x/2)$ коммутируют.

в) Докажите, что не существует других многочленов, отличных от $P_n(x)$, которые коммутировали бы с многочленом $P_2(x) = x^2 - 2$.

7.52. Пусть a, b — натуральные числа и $(a, b) = 1$. Докажите, что величина $(\sqrt{a} + i\sqrt{b})^n$ не может быть действительным числом за исключением случаев $(a; b) = (\pm 1;\ \pm 1), (\pm 1;\ \pm 3), (\pm 3;\ \pm 1)$.

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен степени n $(n \geqslant 1)$, с действительными или комплексными коэффициентами имеет ровно n (с учетом кратности) комплексных корней. (См. [29], [235].)

7.53. Пусть многочлен с действительными коэффициентами $f(x)$ имеет корень $a + ib$. Докажите, что число $a - ib$ также будет корнем $f(x)$. (См. также 7.87.)

7.54. Докажите, что произвольный многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степени, которые также будут иметь действительные коэффициенты.

7.55. Формула Эйлера. Пусть a и b — действительные числа. Определим показательную функцию на множестве комплексных чисел равенством

$$e^{a+ib} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n.$$

Докажите формулу Эйлера:

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

Проверьте также, что функции $\sin x$ и $\cos x$ допускают следующие представления через комплексную экспоненту:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

(См. также 5.44, 11.92 и 12.14.)

7.56. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо равенство $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. (См. также 11.92.)

7.57. Перепишите формулы Муавра, используя вместо тригонометрических функций комплексную экспоненту.

7.58. Как определить функцию $\ln z$ для комплексного аргумента z?

7.59. Как на комплексной плоскости определить показательную функцию a^z? (См. также 12.14.)

7.60. Придайте смысл приближенному равенству $\sqrt[i]{-1} = (-1)^{1/i} \approx \approx 23\frac{1}{7}$.

7.61. Пусть

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{q}} = \cos\frac{2\pi}{q} + i\sin\frac{2\pi}{q}$$

— корень q-й степени из единицы и $\delta_q(a)$ — характеристическая функция делимости на q:

$$\delta_q(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

а) Докажите, что

$$\delta_q(a) = \frac{1}{q}(1+\omega^a+\omega^{2a}+\ldots+\omega^{(q-1)a}).$$

б) Вычислите сумму

$$S(a) = 1 + 2\omega^a + 3\omega^{2a} + \ldots + q\omega^{(q-1)a}.$$

7.62. а) Докажите равенство:

$$\cos\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin(n\varphi/2)\cos((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)};$$

б) Вычислите сумму:

$$\sin\varphi + \ldots + \sin n\varphi.$$

(См. также 8.12.)

7.63. Докажите равенство:

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha} = \operatorname{tg} n\alpha.$$

7.64. Вычислите суммы:
а) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 2nx$; б) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 2nx$.

7.65. Используя разложение $(1+i)^n$ по формуле бинома Ньютона, найдите суммы:
а) $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \ldots + C_{100}^{100}$; б) $C_{99}^1 - C_{99}^3 + C_{99}^5 - \ldots - C_{99}^{99}$.

7.66. а) Докажите равенство:

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

б) Вычислите сумму:

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$$

7.67. а) Докажите равенство:

$$1 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

б) Вычислите суммы:

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots; \quad C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots$$

7.68. Докажите равенство:

$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \ldots = \frac{2^n}{3^{(n-1)/2}}\sin\frac{n\pi}{6}.$$

7.69. Вычислите суммы:
а) $1 + a\cos\varphi + \ldots + a^k\cos k\varphi + \ldots$ $(|a| < 1)$;
б) $a\sin\varphi + \ldots + a^k\sin k\varphi + \ldots$ $(|a| < 1)$;
в) $\cos\varphi + C_n^1\cos 2\varphi + \ldots + C_n^n\cos(n+1)\varphi$;
г) $\sin\varphi + C_n^1\sin 2\varphi + \ldots + C_n^n\sin(n+1)\varphi$.

7.70. Найдите предел

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\ldots+\frac{1}{2^k}\cos kx\right).$$

7.71. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — отличные от нуля комплексные числа, лежащие в полуплоскости $\alpha < \arg z < \alpha+\pi$. Докажите, что

а) $z_1+\ldots+z_n\neq 0$; б) $z_1^{-1}+\ldots+z_n^{-1}\neq 0$.

7.72. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — вершины выпуклого многоугольника. Найдите геометрическое место точек

$$z=\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\ldots+\lambda_n z_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — действительные положительные числа такие, что $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1$.

7.73. Докажите, что корни уравнения

$$\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z-c}=0,$$

где a, b, c — попарно различные комплексные числа, лежат внутри треугольника с вершинами в точках a, b, c, или на его сторонах (в случае вырожденного треугольника).

7.74. Пусть $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ — многочлен третьей степени с комплексными корнями a, b, c. Докажите, что корни производной этого многочлена лежат внутри треугольника с вершинами в точках a, b, c.

7.75. Теорема Гаусса—Люка. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Определим многоугольник M как выпуклую оболочку точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на комплексной плоскости. Докажите, что корни производной этого многочлена лежат внутри многоугольника M.

7.76. При каких n

а) многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на x^2+x+1?

б) многочлен $x^{2n}-x^n+1$ делится на x^2-x+1?

7.77. Докажите, что при любых целых a и натуральном n выражение $(a+1)^{2n+1}+a^n+2$ делится на a^2+a+1.

7.78. При каких n многочлен $(x+1)^n+x^n+1$ делится на:

а) x^2+x+1; б) $(x^2+x+1)^2$; в) $(x^2+x+1)^3$?

7.79. При каких n многочлен $(x+1)^n-x^n-1$ делится на:

а) x^2+x+1; б) $(x^2+x+1)^2$; в) $(x^2+x+1)^3$?

7.80. Пусть $(x-1)\mid P(x^n)$. Докажите, что $(x^n-1)\mid P(x^n)$.

7.81. Найдите остаток от деления многочлена

$$P(x)=x^{6n}+x^{5n}+x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$$

на
$$Q(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,$$
если известно, что n кратно 7.

7.82. Найдите все корни уравнения $(z-1)^n = (z+1)^n$. Чему равна сумма квадратов корней этого уравнения?

7.83. Докажите, что все корни уравнения $a(z-b)^n = c(z-d)^n$, где a, b, c, d — заданные комплексные числа, расположены на одной окружности или прямой. (См. также 7.10.)

7.84. Докажите, что при нечетном $n > 1$ справедливо равенство
$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi m}{n}} = \frac{n^2-1}{3}.$$

7.85*. **Ряд обратных квадратов.** а) Докажите, что при нечетном $n > 1$ справедливо равенство
$$\sum_{m=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2n}\theta_n \quad (0 < \theta_n < 1).$$

б) Докажите тождество:
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7.86*. Проверьте, что при нечетном $n > 1$ выполняется равенство
$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^4 \dfrac{\pi m}{n}} = \frac{(n^2-1)(n^2+11)}{45}.$$
Докажите тождество
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(См. также 4.86.)

7.87*. **Положительные многочлены.** Многочлен $P(x)$ при всех действительных x принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся такие многочлены $a(x)$ и $b(x)$, для которых $P(x) = a^2(x) + b^2(x)$.

7.2. Преобразования комплексной плоскости

Будем пользоваться обозначениями:
T_a — параллельный перенос на вектор a;
S_l — симметрия относительно прямой l (осевая симметрия с осью l);
R_A^α — поворот вокруг точки A на угол α против часовой стрелки;
H_A^k — гомотетия с центром в точке A и коэффициентом k.

7.88. Во что перейдет треугольник с вершинами в точках: 0, $1-i$, $1+i$ в результате преобразования

$$w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)z?$$

7.89. Во что перейдет угол α с вершиной в начале координат в результате преобразования $w = z^3$?

7.90. Каким геометрическим преобразованиям плоскости соответствуют следующие отображения:
а) $w = z + a$; б) $w = 2z$; в) $w = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; г) $w = \overline{z}$?

7.91. Как представить в виде $w = f(z)$ симметрию относительно прямой l проходящей через начало координат под углом φ к оси Ox?

7.92. Выразите в виде $w = f(z)$ следующие геометрические преобразования:
а) $H_O^2 \circ T_{3+4i}$; в) $R_i^{\pi/4}$; д) $H_1^2 \circ H_{-1}^{1/2}$;
б) $T_{3+4i} \circ H_O^2$; г) H_A^k; е) $R_i^{\pi/4} \circ R_{-1}^{\pi/4} \circ R_{-i}^{\pi/4} \circ R_1^{\pi/4}$.
Здесь точка $O = (0; 0)$ — начало координат. Композиция преобразований делается справа налево: $(f \circ g)(z) = f(g(z))$.

7.93. Представьте гомотетию H_i^2 в виде композиции параллельного переноса и гомотетии с центром в точке O.

7.94. Теорема о трех центрах подобия. Докажите при помощи комплексных чисел, что композицией двух гомотетий является гомотетия или параллельный перенос:

$$H_{A_2}^{k_2} \circ H_{A_1}^{k_1} = \begin{cases} T_a, & k_1k_2 = 1, \\ H_A^k, & k_1k_2 \neq 1, \end{cases}$$

причем в первом случае вектор a параллелен прямой A_1A_2, а во втором случае центр результирующей гомотетии A лежит на прямой A_1A_2 и $k = k_1 \cdot k_2$.

7.95. Постройте образ квадрата с вершинами $A(0; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; 2)$, $D(2; 0)$ при следующих преобразованиях:
а) $w = iz$; б) $w = 2iz - 1$; в) $w = z^2$; г) $w = z^{-1}$.

7.96. Куда переходит полоса $2 < \operatorname{Re} z < 3$ при отображениях:
а) $w = z^{-1}$; б) $w = (z-2)^{-1}$; в) $w = (z - 5/2)^{-1}$?

7.97. Найдите
а) образ окружности $|z - a - bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ при отображении $w = 1/z$;
б) образ окружности $|z - a| = R$ при отображении $w = \dfrac{2aR}{z^2 - a^2 + R^2}$.

7.98*. Правильный n-угольник вписан в единичную окружность. Докажите, что
а) сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей равна n^2;
б) сумма всех сторон и всех диагоналей равна $n \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2n}$;
в) произведение всех сторон и всех диагоналей равно $n^{n/2}$.

Определение. *Дробно-линейными отображениями комплексной плоскости* называются преобразования, записываемые формулами
$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{7.1}$$
$$w = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \tag{7.2}$$
где $\delta = ad - bc \neq 0$.

7.99. Как действуют отображения (7.1) и (7.2) в случае, когда $\delta = ad - bc = 0$?

Определение. *Расширенной комплексной плоскостью* $\overline{\mathbb{C}}$ называется комплексная плоскость $\mathbb{C}$, к которой добавлена бесконечно удаленная точка $\infty = \dfrac{1}{0}$, то есть $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

7.100. Докажите, что дробно-линейные отображения являются взаимно однозначными отображениями расширенной комплексной плоскости.

7.101. Докажите, что произвольное дробно-линейное отображение вида (7.1) может быть получено композицией параллельных переносов и отображения вида $w = R/z$.

7.102. Конечный ряд Фурье. Пусть $q \geqslant 1$ и функция $f(x)$ задана в целых точках $x = 0, 1, \ldots, q-1$. Докажите, что в каждой из этих точек функция $f(x)$ представляется рядом
$$f(x) = \sum_{k=0}^{q-1} C_q(k) e^{2\pi i \frac{kx}{q}}, \tag{7.3}$$
где числа $C_q(k)$ определены равенствами
$$C_q(k) = \frac{1}{q} \sum_{y=0}^{q-1} f(y) e^{-2\pi i \frac{ky}{q}} \quad (0 \leqslant k < q).$$
Докажите также, что такое представление единственно.

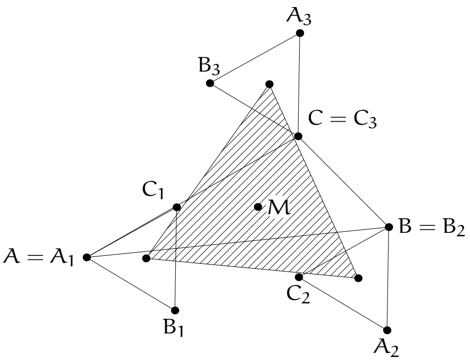
Определение. Сумма (7.3) называется *конечным рядом Фурье* функции $f(x)$, а числа $C_q(k)$ — *конечными коэффициентами Фурье* этой функции.

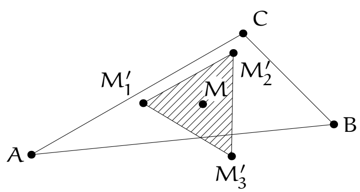
7.103. а) В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Докажите, что точки $A_1 = A$, $B_1 = R_M^{120^\circ}(B)$ и $C_1 = R_M^{240^\circ}(C)$ являются вершинами правильного треугольника $A_1B_1C_1$. (См. также 5.82, 9.9.)

б) Пусть на плоскости расположены n точек A_1, A_2, ..., A_n $(n \geqslant 3)$. С этими точками проделывается следующая операция: находится их центр масс M (такая точка, что $\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = 0$), а затем каждая точка A_k поворачивается вокруг точки M на угол $2\pi k/n$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Докажите, что если такую операцию проделать $n-1$ раз, то все n точек сольются в одну.

в) В пункте а) получался правильный треугольник $A_1B_1C_1$. Аналогично можно построить правильные треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ равны друг другу, а их центры M_1, M_2 и M_3 также образуют правильный треугольник.

При замене углов поворотов на противоположные по знаку будет получаться еще один правильный треугольник $M_1'M_2'M_3'$. Проверьте, что он равен треугольникам $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$. (На первом рисунке треугольник $M_1M_2M_3$ заштрихован.)





г) Докажите, что треугольники $M_1M_2M_3$ и $M_1'M_2'M_3'$ из пункта в) являются решениями следующей экстремальной задачи: в плоскости треугольника ABC найти такой правильный треугольник $A'B'C'$ для которого величина

$$|M_1A|^2 + |M_2B|^2 + |M_3C|^2$$

будет минимальной. В каких случаях решением будет треугольник $M_1M_2M_3$, а в каких $M_1'M_2'M_3'$?

д) Докажите, что для треугольников $M_1M_2M_3$ и $M_1'M_2'M_3'$ достигается также минимум величины

$$\max_{\triangle M_1M_2M_3}\{|M_1A|, |M_2B|, |M_3C|\}$$

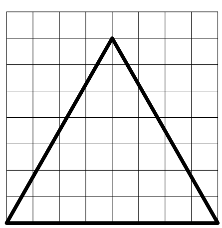
(как и в предыдущем пункте, минимум ищется по всем правильным треугольникам $M_1M_2M_3$, лежащим в плоскости треугольника ABC).

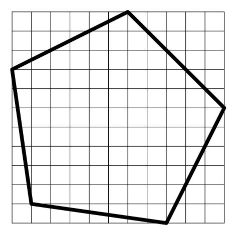
7.104. Докажите, что среди правильных многоугольников лишь квадрат можно расположить на плоскости так, чтобы все его вершины оказались в узлах целочисленной решетки.

7.105. В задачах 5.37—5.38 доказывалось, что среди правильных многоугольников лишь квадрат можно расположить так, чтобы все его вершины лежали в узлах целочисленной решетки. Докажите, что для любого $n \geqslant 3$ и любого $\varepsilon > 0$ на плоскости можно найти правильный n-угольник, все вершины которого будут располагаться в ε-окрестностях точек целочисленной решетки.

7.106*. Опишите алгоритм (более быстрый, чем разумный перебор), который позволял бы для данного $\varepsilon > 0$ находить правильный треугольник (пятиугольник), с вершинами в ε-окрестностях точек целочисленной решетки.

На рисунках правильный треугольник и правильный пятиугольник находятся внутри жирных контуров (см. также 11.49, 11.50).





«Почти правильные» многоугольники с вершинами в узлах целочисленной решетки будут обладать различными любопытными свойствами. Например, пятиугольник, изображенный на рисунке, имеет три равные стороны и четыре равных угла. «Почти правильные» треугольники допускают детальное описание (см. задачи 11.49, 11.51).

7.3. Целые гауссовы числа

Определение. Числа вида $a + ib$, где a и b — целые, называются *целыми гауссовыми числами*. Величина $\lambda(a + ib) = a^2 + b^2$ называется *нормой* числа $a + ib$. Множество всех целых гауссовых чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$.

7.107. Проверьте, что для любых комплексных чисел (не обязательно для целых гауссовых) z_1 и z_2 выполняется равенство $\lambda(z_1z_2) = \lambda(z_1)\lambda(z_2)$.

7.108. Пусть $z \in \mathbb{Z}[i]$. Докажите, что $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$ тогда и только тогда, когда z — одно из чисел ± 1, $\pm i$. Числа ± 1, $\pm i$, обратимые по умножению и имеющие единичную норму, называются *гауссовыми единицами.*

7.109. Деление с остатком в $\mathbb{Z}[i]$. Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком, то есть для любых $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ $(b \neq 0)$ найдутся q и $r \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $a = b \cdot q + r$ и $\lambda(r) < \lambda(b)$.

7.110. Проверьте, что для целых гауссовых чисел можно применять алгоритм Евклида и найдите $(4 + 7i, 6 - 7i)$, $(4 + 19i, -6 + 17i)$.

7.111. Основная теорема арифметики в $\mathbb{Z}[i]$. Докажите, что всякое целое гауссово число, отличное от ± 1, $\pm i$, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей и умножения их на гауссовы единицы) раскладывается в произведение простых гауссовых чисел. (Как и в $\mathbb{Z}$, число $z \in \mathbb{Z}[i]$ называется *простым*, если его нельзя представить в виде $z = z_1z_2$, где z_1, z_2 не равны ± 1, $\pm i$.)

7.112. Простые гауссовы числа. Некоторые целые простые числа (во избежание путаницы обычные простые числа будем называть целыми простыми) перестают быть простыми, если их рассматривать как элементы множества $\mathbb{Z}[i]$. Например,

$$2 = (1 + i)(1 - i) = -i(1 + i)^2, \quad 5 = (2 + i)(2 - i), \ldots$$

Любое комплексное число после умножения на некоторую степень i всегда можно переместить в область

$$-\frac{\pi}{4} < \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому для описания всех простых гауссовых чисел, достаточно рассматривать лишь «положительные», то есть такие, которые лежат в этой области.

а) Проверьте, что первыми (положительными) простыми гауссовыми числами будут

$$1 + i, 2 \pm i, 3, 3 \pm 2i, 4 \pm i, 5 \pm 2i, 6 \pm i, 5 \pm 4i, 7.$$

б) Докажите, что всякое простое $p = 4k + 3$ остается простым и в $\mathbb{Z}[i]$.

в) Докажите, что всякое простое $p = 4k + 1$ в $\mathbb{Z}[i]$ раскладывается на два множителя $p = (a + ib)(a - ib)$, каждый из которых уже будет простым гауссовым числом.

г) Числа $1 + i$, целые простые вида $p = 4k + 3$, и числа вида $a \pm ib$, где a и b из представления простого $p = 4k + 1$ в виде суммы двух квадратов

$p = a^2 + b^2$, являются простыми в $\mathbb{Z}[i]$. Докажите, что не существует других простых (положительных) гауссовых чисел.

7.113. О представлении целых чисел суммой двух квадратов. а) Количество решений уравнения $x^2 + y^2 = n$ в целых числах совпадает с количеством целых гауссовых чисел с нормой n.

Пусть

$$n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \ldots q_l^{\beta_l},$$

где $p_j \equiv 1 \pmod 4$, $q_j \equiv 3 \pmod 4$. Обозначим через $\pi_j = a_j + ib_j$ и $\bar{\pi}_j = a_j - ib_j$ простые делители чисел p_j. Докажите, что если $n = \lambda(z)$, то показатели $\beta_1, \ldots, \beta_l$ обязаны быть четными, а число z должно иметь вид

$$z = i^\nu (1+i)^{\alpha_0} \pi_1^{\lambda_1} \bar{\pi}_1^{\mu_1} \ldots \pi_k^{\lambda_k} \bar{\pi}_k^{\mu_k} q_1^{\beta_1/2} \ldots q_l^{\beta_l/2},$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant 3$, $\lambda_1 + \mu_1 = \alpha_1, \ldots, \lambda_k + \mu_k = \alpha_k$.

Таким образом n допускает представление в виде $n = a^2 + b^2$ тогда и только тогда, когда простые числа $q = 4k + 3$ входят в разложение n в четных степенях.

б) Докажите, что если все показатели $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — четные числа, то $r(n)$ — количество представлений n в виде суммы квадратов двух целых чисел, выражается формулой

$$r(n) = 4(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_k + 1).$$

7.114. Определим функцию $\chi(d)$ равенствами

$$\chi(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } d \text{ — четное,} \\ +1, & \text{если } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{если } d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Докажите, что

$$r(n) = 4 \sum_{d|n} \chi(d).$$

7.115. Целые точки в круге. а) Пусть $K(R)$ — количество точек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащих внутри круга радиуса R с центром в начале координат, или, что то же самое, число решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ в целых числах. Докажите, что

$$|K(R) - \pi R^2| \leqslant A(R),$$

где $A(R)$ — количество единичных квадратов с вершинами в целых точках, пересекаемых окружностью $x^2 + y^2 = R^2$.

б) Докажите, что $A(R) \leqslant B(R)$, где $B(R)$ — площадь кругового кольца с центром в начале координат ширины $2\sqrt{2}$, внутренний и внешний радиусы которого равны $R - \sqrt{2}$ и $R + \sqrt{2}$.

в) Проверьте, что

$$|K(R)-\pi R^2| \leqslant 4\sqrt{2\pi}\,R,$$

и

$$\lim_{R\to\infty}\frac{K(R)}{R^2}=\pi.$$

7.116. Ряд Лейбница. а) Докажите, что общее количество делителей вида $4k+1$ у всех чисел $n\leqslant R^2$ есть

$$[R^2]+\left[\frac{R^2}{5}\right]+\left[\frac{R^2}{9}\right]+\left[\frac{R^2}{13}\right]+\ldots,$$

и, аналогично, общее количество делителей вида $4k+3$ у всех чисел $n\leqslant R^2$ выражается суммой

$$\left[\frac{R^2}{3}\right]+\left[\frac{R^2}{7}\right]+\left[\frac{R^2}{11}\right]+\left[\frac{R^2}{15}\right]+\ldots$$

б) С помощью формулы из задачи 7.114 докажите равенство

$$\frac{K(R)-1}{4}=[R^2]-\left[\frac{R^2}{3}\right]+\left[\frac{R^2}{5}\right]-\left[\frac{R^2}{7}\right]+\left[\frac{R^2}{9}\right]-\left[\frac{R^2}{11}\right]+\ldots,$$

и выведите формулу Лейбница

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \tag{7.4}$$

7.117. Докажите, что число $n+i$ не может иметь простых делителей вида $p=4k+3$.

7.118. С помощью комплексных чисел докажите тождество

$$\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}.$$

7.119. Вычислите сумму

$$\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3.$$

7.120. Докажите равенства:

а) $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

7.121. Задача Кэррола. Докажите, что если $cd=n^2+1$, то

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n+c}+\operatorname{arctg}\frac{1}{n+d}.$$

7.122. Числа Грегори. Для краткости будем использовать обозначение

$$t_x=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Шотландский математик Дэвид Грегори для чисел t_x в 1671 году нашел формулу

$$t_x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \ldots,$$

поэтому t_x называют числами Грегори. В частности, при $x=1$ формула Грегори превращается в ряд Лейбница (7.4). С помощью чисел Грегори равенства из задач 7.118 и 7.120 можно записать в более компактном виде:

$$t_1 = t_2 + t_3, \quad t_1 = 4t_5 - t_{239}, \quad t_1 = t_3 + t_5 + t_7 + t_8.$$

Таким образом одни числа t_x можно выражать через другие.

Докажите, что всякое число $t_{r/s}$ единственным образом можно представить в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами от чисел

$$t_{1/1}, t_{2/1}, t_{3/2}, t_{4/1}, t_{5/2}, t_{6/1}, t_{5/4}, \ldots$$

с индексами $a/b \geqslant 1$, для которых a^2+b^2 — простое число.

7.123. Числа Штёрмера. Натуральное n называется числом Штёрмера, если наибольший простой делитель p числа n^2+1 удовлетворяет условию $p \geqslant 2n$. Первые числа Штёрмера и соответствующие им значения p выглядят следующим образом:

n	p	n	p	n	p	n	p	n	p
1	2	10	101	19	181	26	617	35	613
2	5	11	61	20	401	27	73	36	1297
4	17	12	29	22	97	28	157	37	137
5	13	14	197	23	53	29	421	39	761
6	37	15	113	24	577	33	109	40	1601
9	41	16	257	25	313	34	89	42	353

Докажите, что числа Штёрмера, бо́льшие 1, находятся во взаимно однозначном соответствии с простыми вида $4k+1$.

7.124*. Теорема Штёрмера. Докажите, что всякое число $t_{m/n}$ единственным образом можно представить в виде

$$t_{m/n} = \sum_j c_j t_j,$$

где c_j — целые числа, и суммирование ведется по j, которые являются числами Штёрмера. Например, $j = 7$, 8 и 13 — не числа Штёрмера, и для них соответственно можно получить представления

$$t_7 = -t_1 + 2t_2, \quad t_8 = t_1 - t_2 - t_5, \quad t_{13} = t_1 - t_2 - t_4.$$

Опишите также алгоритм, который позволял бы находить подобные представления.

Глава 8

Алгебра + геометрия

8.1. Геометрия помогает алгебре

8.1. Докажите, что сумма векторов, направленных из центра правильного n-угольника в его вершины, равна нулю.

8.2. Объясните, почему в задачах 1.52 и 1.53 получаются одинаковые ответы.

8.3. Докажите равенства:

а) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{\sin(\pi/7)} = \frac{1}{\sin(2\pi/7)} + \frac{1}{\sin(3\pi/7)}$;

в) $\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + \sin 89^\circ + \ldots + \sin 329^\circ = 0$.

(См. также 7.27.)

8.4. Вычислите

а) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$; б) $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$.

8.5. Найдите $\cos 36^\circ$ и $\cos 72^\circ$.

8.6. а) Используя геометрические соображения, докажите, что основание и боковая сторона равнобедренного треугольника с углом 36° при вершине несоизмеримы (т. е. их отношение иррационально).

б) Придумайте геометрическое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$.

8.7. Решите уравнения при $0^\circ < x < 90^\circ$:

а) $\sqrt{13 - 12\cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} = 2\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{2 - 2\cos x} + \sqrt{10 - 6\cos x} = \sqrt{10 - 6\cos 2x}$;

в) $\sqrt{5 - 4\cos x} + \sqrt{13 - 12\sin x} = \sqrt{10}$.

8.8. Найдите геометрическое решение задач 7.118. и 7.119.

8.9. Докажите равенство

$$\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ = 2.$$

8.10. Пусть x, y, z — положительные числа и $xyz(x+y+z)=1$. Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(x+z)$.

8.11. Неотрицательные числа x, y, z удовлетворяют неравенствам $5 \leqslant x, y, z \leqslant 8$. Какое наибольшее и наименьшее значение может принимать величина

$$S = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4 \ ?$$

8.12. Найдите все корни x_k уравнения

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

Какому алгебраическому уравнению удовлетворяют числа $2\cos x_k$? (См. также 7.62, 8.93.)

8.13. Решите систему

$$\begin{cases} ay + bx = c, \\ cx + az = b, \\ bz + cy = a. \end{cases}$$

Какой геометрический смысл она имеет? (См. также 8.87.)

8.14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^2 + xz + z^2 = 21, \\ y^2 + yz + z^2 = 28. \end{cases}$$

8.15. Положительные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ y^2 + yz + z^2 = b^2, \\ x^2 + xz + z^2 = c^2. \end{cases}$$

Выразите величину $xy + yz + xz$ через a, b и c. (См. также 9.16.)

8.16. Докажите, что для положительных чисел a, b и c всегда выполняется неравенство

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

При каком условии на a, b и c это неравенство превращается в равенство?

8.17. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x_1^2 + (3 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \sqrt{x_3^2 + (3 - x_4)^2} + \sqrt{x_4^2 + (2 - x_1)^2}.$$

8.2. Комплексные числа и геометрия

В задачах этого пункта точки на комплексной плоскости отождествляются с числами. Поэтому с точками можно будет проделывать различные арифметические операции. Например, под суммой двух точек z_1 и z_2 будем понимать точку плоскости, соответствующую числу $z_1 + z_2$.

8.18. Пусть z_1 и z_2 — фиксированные точки комплексной плоскости. Дайте геометрическое описание множеств всех точек z, удовлетворяющих соотношениям:

а) $\arg \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = 0$; б) $\arg \dfrac{z_1 - z}{z - z_2} = 0$.

Определение. Комплексное число

$$V(z_2, z_1, z_0) = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

называется *отношением трех точек* (*трех комплексных чисел*) z_2, z_1, z_0.

8.19. Докажите, что угол между прямыми, пересекающимися в точке z_0 и проходящими через точки z_1 и z_2, равен аргументу отношения $V(z_2, z_1, z_0)$ точек z_2, z_1, z_0.

8.20. Докажите, что три точки z_2, z_1, z_0 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $V(z_2, z_1, z_0)$ — вещественное число, или

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}.$$

8.21. Докажите, что прямая, проходящая через точки z_1 и z_2 — это геометрическое место точек z, для которых

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}.$$

8.22. Докажите, что уравнение прямой на комплексной плоскости всегда может быть записано в виде

$$Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0,$$

где C — чисто мнимое число.

8.23. Докажите, что условием того, что четыре точки z_0, z_1, z_2, z_3 лежат на одной окружности (или прямой) является вещественность числа

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

Определение. Комплексное число

$$W(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)}$$

называется *двойным отношением четырех точек* (*четырех комплексных чисел*) z_0, z_1, z_2, z_3.

8.24. Инвариантность двойного отношения. Пусть z_1', z_2', z_3', z_4' — четыре точки плоскости, в которые дробно-линейное отображение (7.1) (см. с. 136) переводит данные четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4. Докажите, что

$$W(z_1', z_2', z_3', z_4') = W(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

8.25. Как изменяется двойное отношение $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ при действии отображения (7.2)?

8.26. Круговое свойство дробно-линейных отображений. Докажите, что дробно-линейное отображение переводит каждую прямую линию или окружность снова в прямую линию или окружность.

8.27. Докажите, что уравнение окружности (или прямой) на комплексной плоскости всегда может быть записано в виде

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \tag{8.1}$$

где A и C — чисто мнимые числа.

8.28. Докажите, что уравнение (8.1) при отображениях $w = z + u$ и $w = R/z$ переходит в уравнение такого же вида. Получите из этого круговое свойство дробно-линейных отображений.

Определение. *Инверсией относительно окружности S с центром O и радиусом R* называется преобразование плоскости, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A', лежащую на луче OA на расстоянии $OA' = R^2/OA$. Образом точки O считается бесконечно удаленная точка, а образом бесконечно удаленной точки, соответственно, точка O.

Инверсией относительно окружности S будем также называть инверсией с центром O и коэффициентом R^2, а окружность S — окружностью инверсии.

8.29. Докажите, что отображение $w = 1/\bar{z}$ является инверсией относительно единичной окружности.

8.30. Представьте в виде композиции дробно-линейного отображения $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ и комплексного сопряжения $w = \bar{z}$ инверсию относительно окружности

а) с центром i и радиусом $R = 1$; б) с центром $Re^{i\varphi}$ и радиусом R;
в) с центром z_0 и радиусом R.

8.31. Круговое свойство инверсии. Докажите, что инверсия переводит каждую окружность или прямую линию снова в окружность или прямую линию.

8.32. Пусть уравнение некоторой прямой или окружности имеет вид (8.1). Пусть образ этой линии при отображении (7.1) задается уравнением

$$A'z\bar{z} + B'z - \bar{B}'\bar{z} + C' = 0,$$

где A' и C' также чисто мнимые числа. Выразите A', B' и C' через A, B и C.

Определение. *Степенью точки A относительно окружности радиуса R с центром в точке O* называется величина $|OA|^2 - R^2$.

8.33. Докажите, что степень точки w относительно окружности

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0$$

равна

$$w\bar{w} + \frac{B}{A}\,w - \frac{\bar{B}}{A}\,\bar{w} + \frac{C}{A}.$$

8.34. Радикальная ось двух окружностей. Докажите, что геометрическое место точек w, степень которых относительно двух неконцентрических окружностей S_1 и S_2 одинакова, является прямой.

Такая прямая называется *радикальной осью* окружностей S_1 и S_2.

8.35. Радикальный центр трех окружностей. На плоскости даны три окружности S_1, S_2 и S_3. Докажите, что если две радикальных оси этих окружностей пересекаются в точке Q, то третья радикальная ось также проходит через эту точку.

Точка Q называется *радикальным центром* окружностей S_1, S_2 и S_3. Для его существования необходимо и достаточно, чтобы центры окружностей S_1, S_2 и S_3 не лежали на одной прямой.

8.36. Ортоцентр треугольника. Точки a_1, a_2 и a_3 расположены на единичной окружности $z\bar{z} = 1$. Докажите, что точка $h = a_1 + a_2 + a_3$ является ортоцентром треугольника с вершинами в точках a_1, a_2 и a_3.

8.37. Окружность Эйлера. Точки a_1, a_2 и a_3 расположены на единичной окружности $z\bar{z} = 1$. Докажите, что окружность с центром в точке $e = h/2$ и радиусом $1/2$ проходит через середины сторон треугольника $a_1a_2a_3$, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины a_1, a_2, a_3 с ортоцентром h.

8.38. Центр масс треугольника. Докажите, что точка $m = (a_1 + a_2 + a_3)/3$ является точкой пересечения медиан треугольника $a_1a_2a_3$.

8.39. Прямая Эйлера. Докажите, что в произвольном треугольнике точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

8.40. Прямая Симсона. Пусть u — точка на единичной окружности $z\,\bar{z}=1$ и u_1, u_2, u_3 — основания перпендикуляров, опущенных из u на стороны a_2a_3, a_1a_3, a_1a_2 треугольника $a_1a_2a_3$.

а) Докажите, что числа u_1, u_2, u_3 вычисляются по формулам

$$u_1=(a_2+a_3+u-a_2a_3/u)/2,$$
$$u_2=(a_1+a_3+u-a_1a_3/u)/2,$$
$$u_3=(a_1+a_2+u-a_1a_2/u)/2.$$

б) Докажите, что точки u_1, u_2, u_3 лежат на одной прямой.

8.41. На плоскости расположены 4 прямые общего положения. Каждым трем прямым поставим в соответствие окружность, проходящую через точки их пересечения. Докажите, что 4 полученных окружности проходят через одну точку.

8.3. Тригонометрия

8.42. Вычислите следующие произведения:
а) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$; б) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$.

8.43. Докажите равенство:

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

8.44. Упростите выражение:

$$\cos a\cdot\cos 2a\cdot\cos 4a\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}a.$$

8.45. Упростите выражения:

а) $\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\sin\dfrac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}$;

б) $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\sin\dfrac{3\pi}{2n}\ldots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}$;

в) $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}\ldots\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}$;

г) $\cos\dfrac{\pi}{2n}\cos\dfrac{2\pi}{2n}\cos\dfrac{3\pi}{2n}\ldots\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}$.

8.46. Докажите равенство:

$$\operatorname{tg} 20^\circ\cdot\operatorname{tg} 40^\circ\cdot\operatorname{tg} 80^\circ=\sqrt{3}.$$

8.47. Вычислите: а) $\operatorname{tg} 10^\circ\cdot\operatorname{tg} 50^\circ\cdot\operatorname{tg} 70^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 36^\circ\cdot\operatorname{tg} 72^\circ$.

8.48. Решите уравнение:

$$\cos\pi\frac{x}{31}\cos 2\pi\frac{x}{31}\cos 4\pi\frac{x}{31}\cos 8\pi\frac{x}{31}\cos 16\pi\frac{x}{31}=\frac{1}{32}.$$

8.49. Известно, что $\sin\beta = \dfrac{1}{5}\sin(2\alpha+\beta)$. Докажите равенство:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

8.50. Пусть α и β — острые положительные углы, удовлетворяющие равенствам

$$3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1,$$
$$3\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta = 0.$$

Докажите, что $\alpha + 2\beta = \pi/2$.

8.51. Докажите равенства:

а) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\quad \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

б) $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $\quad \cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

8.52. Докажите равенства:

$$\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{8}, \quad \cos 6^\circ = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}.$$

8.53. Докажите тождества:

а) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$;

б) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

8.54. Докажите тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

8.55. Найдите алгебраическую связь между углами α, β и γ, если известно, что

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

8.56. а) Проверьте тождество

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{t_1-t_3}{t_0-t_2},$$

где t_k суть элементарные симметрические многочлены k-й степени от $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$.

б) Докажите, что для произвольного $n \geqslant 1$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) = \frac{t_1-t_3+t_5-t_7+\ldots}{t_0-t_2+t_4-t_6+\ldots}.$$

8.57. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

8.58. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций
а) $f_1(x)=a\cos x+b\sin x$; б) $f_2(x)=a\cos^2 x+b\cos x\sin x+c\sin^2 x$.

8.59. Пусть $\cos x+\cos y=a$, $\sin x+\sin y=b$. Вычислите $\cos(x+y)$ и $\sin(x+y)$.

8.60. Докажите, что функция $\cos\sqrt{x}$ не является периодической.

8.61. При каких целых значениях n функция

$$y=\cos nx\cdot\sin\frac{5}{n}x$$

имеет период 3π?

8.62. Рассмотрим функцию $f(x)=a\cos x+b\sin x$, где a и b — некоторые постоянные. Докажите, что если $f(x)$ обращается в ноль при двух значениях аргумента x_1 и x_2 таких, что $x_1-x_2\neq k\pi$ (k — целое), то функция $f(x)$ равна нулю тождественно.

8.63. Докажите, что если сумма

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+a_2\cos(\alpha_2+x)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x)$$

при $x=0$ и $x=x_1\neq k\pi$ (k — целое) обращается в ноль, то она равна нулю при всех x.

8.64. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$.

8.65. Решите уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=a$.

8.66. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

8.67. Решите уравнение $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 4x=0$.

8.68. Пусть α и β — различные корни уравнения $a\cos x+b\sin x=c$. Докажите, что

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

8.69. Решите систему:

$$\begin{cases} x\sin\alpha+y\sin 2\alpha+z\sin 3\alpha=\sin 4\alpha,\\ x\sin\beta+y\sin 2\beta+z\sin 3\beta=\sin 4\beta,\\ x\sin\gamma+y\sin 2\gamma+z\sin 3\gamma=\sin 4\gamma.\end{cases}$$

8.70. Вычислите:
а) $\arccos\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$; б) $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

8.71. Докажите, что имеют место следующие соотношения:

а) $\cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}$; д) $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$;

б) $\operatorname{tg}\operatorname{arcctg} x = \frac{1}{x}$; е) $\operatorname{ctg}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{x}$;

в) $\cos\operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; ж) $\sin\operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\cos\operatorname{arcctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; з) $\sin\operatorname{arcctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.72. Докажите равенства:
а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$; б) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

8.73. Докажите формулы:
а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, б) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

8.74. Чему равна сумма $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$?

8.75. Докажите равенство:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon = 0$, если $xy < 1$, $\varepsilon = -1$, если $xy > 1$ и $x < 0$, $\varepsilon = +1$, если $xy > 1$ и $x > 0$.

8.76. Найдите сумму:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{1+1\cdot 2x^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{1+2\cdot 3x^2} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{x}{1+n\cdot(n+1)x^2} \quad (x>0).$$

8.77. Найдите сумму:

$$\operatorname{arctg}\frac{r}{1+a_1\cdot a_2} + \operatorname{arctg}\frac{r}{1+a_2\cdot a_3} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{r}{1+a_n\cdot a_{n+1}},$$

если числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{n+1} образуют арифметическую прогрессию с разностью r ($a_1 > 0$, $r > 0$).

8.78. Докажите, что числа Фибоначчи $\{F_n\}$ удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{arcctg} F_{2n} - \operatorname{arcctg} F_{2n+2} = \operatorname{arcctg} F_{2n+1}. \tag{8.2}$$

Получите отсюда равенство

$$\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arcctg} 13 + \ldots + \operatorname{arcctg} F_{2n+1} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

8.79. Докажите, что при $x > 1$ выполняется равенство:

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi.$$

8.80. Решите уравнение

$$\arcsin\frac{x^2-8}{8} = 2\arcsin\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

8.81. Докажите формулу:

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

8.82. Докажите равенство:

$$\arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi,$$

где $\eta = 1$, $\varepsilon = 0$, если $xy < 0$ или $x^2 + y^2 \leqslant 1$; $\eta = -1$, $\varepsilon = -1$, если $x^2 + y^2 > 1$, $x < 0$, $y < 0$; $\eta = -1$, $\varepsilon = 1$, если $x^2 + y^2 > 1$, $x > 0$, $y > 0$.

8.83. Докажите, что если $0 < x < 1$ и

$$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+x}{1-x}, \quad \beta = \mathrm{arctg}\,\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

то $\alpha + \beta = \pi$.

8.84. Найдите соотношение между функциями

$$\arcsin\cos\arcsin x \quad \text{и} \quad \arccos\sin\arccos x.$$

8.85. Докажите, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$\cos\sin\varphi > \sin\cos\varphi.$$

8.86. Вычислите

$$\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{5}{12}\right).$$

8.87. Теорема синусов. Докажите, что из равенств

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{8.3}$$

следует:

$$\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta, \\ b &= c\cos\alpha + a\cos\gamma, \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{aligned} \tag{8.4}$$

(См. также 8.13.)

8.88. Покажите, что из соотношений (8.4) и дополнительных условий $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $0 < \gamma < \pi$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ следуют равенства (8.3).

8.89. Теорема косинусов. Докажите, что соотношения (8.4) равносильны системе

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \end{aligned} \tag{8.5}$$

то есть из равенств (8.4) вытекают равенства (8.5) и наоборот.

8.90. Теорема синусов и первая теорема косинусов для трехгранного угла. Пусть имеется трехгранный угол с плоскими углами α, β, γ и противолежащими им двугранными углами A, B, C. Для него справедлива теорема синусов (8.7) и две теоремы косинусов (8.6), (8.8) (смотрите ниже). После того, как одна из этих теорем доказана, другие могут быть получены путем алгебраических преобразований. Отвлечемся от геометрической природы задачи и предположим, что просто даны равенства

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,\\ \cos\beta &= \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos B,\\ \cos\gamma &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C,\end{aligned} \tag{8.6}$$

и, кроме того, величины α, β, γ и A, B, C заключены между 0 и π. Докажите, что

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}. \tag{8.7}$$

8.91. Вторая теорема косинусов для трехгранного угла и аналог формулы Герона. Докажите, что из системы (8.6) следуют равенства

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha,\\ \cos B &= -\cos A\cos C + \sin A\sin C\cos\beta,\\ \cos C &= -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\gamma,\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A+B+C-\pi}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{p-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{p-\gamma}{2}}, \tag{8.8}$$

где $2p = \alpha+\beta+\gamma$.

8.92. Докажите равенства

$$\frac{\sin(2\pi/7)}{\sin^2(3\pi/7)} - \frac{\sin(\pi/7)}{\sin^2(2\pi/7)} + \frac{\sin(3\pi/7)}{\sin^2(\pi/7)} = 2\sqrt{7},$$

$$\frac{\sin^2(3\pi/7)}{\sin(2\pi/7)} - \frac{\sin^2(2\pi/7)}{\sin(\pi/7)} + \frac{\sin^2(\pi/7)}{\sin(3\pi/7)} = 0.$$

8.93. Формулы Рамануджана. Докажите следующие тождества:

а) $\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}}$;

б) $\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{9}-6}$.

(См. также 8.12.)

8.94. Пусть

$$u_k = \frac{\sin 2nx\cdot\sin(2n-1)x\cdot\ldots\cdot\sin(2n-k+1)x}{\sin kx\cdot\sin(k-1)x\cdot\ldots\cdot\sin x}.$$

Докажите, что числа u_k можно представить в виде многочлена от $\cos x$. (См. также 3.181.)

8.95. Пусть числа u_k определены как и в предыдущей задаче. Докажите тождества:

а) $1-u_1+u_2-\ldots+u_{2n}=2^n(1-\cos x)(1-\cos 3x)\cdot\ldots\cdot(1-\cos(2n-1)x)$;

б) $1-u_1^2+u_2^2-\ldots+u_{2n}^2=(-1)^n\dfrac{\sin(2n+2)x\cdot\sin(2n+4)x\cdot\ldots\cdot\sin 4nx}{\sin 2nx\cdot\sin 2(n-1)x\cdot\ldots\cdot\sin 2x}$.

Глава 9

Уравнения и системы

9.1. Уравнения третьей степени

9.1. Докажите, что

а) при $p \geqslant 0$ график многочлена $x^3 + px + q$ пересекает каждую горизонтальную прямую ровно в одной точке;

б) при $p < 0$ график пересекает некоторые горизонтальные прямые в трех точках;

в) при $p < 0$ график имеет один минимум и один максимум при этом абсциссы точек минимума и максимума противоположны.

9.2. Докажите, что произвольное уравнение третьей степени

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$$

при помощи линейной замены переменной $z = x + \beta$ можно привести к виду

$$x^3 + px + q = 0. \tag{9.1}$$

9.3. Докажите, что график многочлена

а) $x^3 + px$; б) $x^3 + px + q$; в) $ax^3 + bx^2 + cx + d$

имеет центр симметрии.

9.4. Докажите равенство $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

9.5. Решите уравнение

$$x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}.$$

9.6. Докажите, что уравнение

$$x^3 + ax^2 - b = 0,$$

где a и b вещественные и $b > 0$, имеет один и только один положительный корень.

9.7. Какими должны быть числа a и b, чтобы выполнялось равенство

$$x^3 + px + q = x^3 - a^3 - b^3 - 3abx?$$

9.8. Разложите многочлен

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

на три линейных множителя. (См. также 11.93.)

9.9. Выразите через a и b действительный корень уравнения

$$x^3-a^3-b^3-3abx=0.$$

Найдите представления для двух комплексных корней этого уравнения (см. также 7.103).

9.10. Формула Кардано. Получите формулу для корня уравнения $x^3+px+q=0$:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

9.11. Докажите, что

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)=$$
$$=X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-XZ,$$

если

$$X=ax+cy+bz,$$
$$Y=cx+by+az,$$
$$Z=bx+ay+cz.$$

9.12. Решите уравнение $x^3+x-2=0$ подбором и по формуле Кардано.

9.13. Выпишите уравнение, корнем которого будет число

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right).$$

Запишите число α без помощи радикалов.

9.14. При всех значениях параметра a найдите число действительных корней уравнения $x^3-x-a=0$.

9.15. Решите уравнение $x^3-x-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=0$. Сколько действительных корней оно имеет?

9.16. Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+px+q=0$, то

$$x_2^2+x_2x_3+x_3^2=x_1^2+x_1x_3+x_3^2=x_1^2+x_1x_2+x_2^2=-p.$$

(См. также 8.14, 8.15.)

Определение. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен степени $n \geqslant 2$, и пусть $f(x) = a_n(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n)$ — разложение $f(x)$ на линейные множители. Тогда *дискриминант* $D(f)$ *многочлена* $f(x)$ определяется так:

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant j < l \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_l)^2.$$

Из определения $D(f)$ ясно, что многочлен $f(x)$ в том и только в том случае имеет кратный корень, когда $D(f) = 0$.

9.17. Дискриминант кубического уравнения. Пусть уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет корни x_1, x_2 и x_3. Выразите через p и q дискриминант этого уравнения

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2.$$

9.18. Докажите, что равенство

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

является необходимым и достаточным условием для совпадения по крайней мере двух корней уравнения $x^3 + px + q = 0$.

9.19. Найдите все действительные значения a и b, при которых уравнения

$$x^3 + ax^2 + 18 = 0, \quad x^3 + bx + 12 = 0$$

имеют два общих корня, и определите эти корни.

9.20. Пусть дискриминант кубического уравнения равен нулю. Какой из корней дает формула Кардано однократный или двукратный?

Определение. Кривая $4p^3 + 27q^2 = 0$ на фазовой плоскости Opq называется *дискриминантной кривой* уравнения $x^3 + px + q = 0$.

Прямые $ap + q + a^3 = 0$, соответствующие трехчленам, имеющим корень a, называются *корневыми*.

9.21. Каково взаимное расположение на фазовой плоскости Opq дискриминантной кривой и корневых прямых? Имеют ли они общие точки, и, если имеют, то сколько? (См. также 6.22.)

9.22. Изобразите на фазовой плоскости Opq множества точек $(p; q)$, для которых уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет а) один корень; б) два корня; в) три различных корня; г) три совпадающих корня.

9.23. Изобразите на фазовой плоскости Opq множества точек $(p; q)$, для которых все корни уравнения $x^3 + px + q = 0$ не превосходят по модулю 1.

9.24. Изобразите на фазовой плоскости Opq множество точек $(p;q)$, для которых уравнение $x^3+px+q=0$ имеет три различных корня, принадлежащих заданному интервалу $(a;b)$. Рассмотрите, например, случай, когда $a=-2$, $b=4$.

9.25. Метод Виета. Когда $4p^3+27q^2<0$, уравнение $x^3+px+q=0$ имеет три действительных корня (неприводимый случай кубического уравнения), но для того, чтобы их найти по формуле Кардано, необходимо использование комплексных чисел. Однако можно указать все три корня в явном виде через тригонометрические функции.

а) Докажите, что при $p<0$ уравнение (9.1) заменой $x=kt$ сводится к уравнению

$$4t^3-3t-r=0 \tag{9.2}$$

от переменной t.

б) Докажите, что при $4p^3+27q^2\leqslant 0$ решениями уравнения (9.2) будут числа

$$t_1=\cos\frac{\varphi}{3},\quad t_2=\cos\frac{\varphi+2\pi}{3},\quad t_3=\cos\frac{\varphi+4\pi}{3},$$

где $\varphi=\arccos r$.

9.26. Решите уравнения

а) $x^3-3x-1=0$; б) $x^3-3x-\sqrt{3}=0$.

Укажите в явном виде все корни этих уравнений (см. также 9.64, 9.65).

9.27. Докажите, что если корни многочлена $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ образуют правильный треугольник на комплексной плоскости, то многочлен $f'(x)=3x^2+2ax+b$ имеет двукратный корень, расположенный в центре этого треугольника.

9.28. Докажите, что если уравнения

$$x^3+px+q=0,\quad x^3+p'x+q'=0$$

имеют общий корень, то

$$(pq'-qp')(p-p')^2=(q-q')^3.$$

9.29. а) Докажите, что при $4p^3+27q^2\leqslant 0$ уравнение (9.1) заменой $x=\alpha y+\beta$ сводится к уравнению

$$ay^3-3by^2-3ay+b=0 \tag{9.3}$$

от переменной y.

б) Докажите, что решениями уравнения (9.3) будут числа

$$y_1=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3},\quad y_2=\operatorname{tg}\frac{\varphi+2\pi}{3},\quad y_1=\operatorname{tg}\frac{\varphi+4\pi}{3},$$

где φ определяется из условий:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

9.30. Метод Феррари. Этот метод позволяет решать произвольное уравнение 4-й степени путем сведения его к решению вспомогательного кубического уравнения и двух квадратных уравнений.

а) Докажите, что любое уравнение 4 степени можно привести к виду

$$x^4 = Ax^2 + Bx + C. \tag{9.4}$$

б) Введем действительный параметр α и перепишем уравнение (9.4) в виде

$$x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 = (A+2\alpha)x^2 + Bx + (C+\alpha^2). \tag{9.5}$$

Докажите, что для некоторого $\alpha \geqslant -A/2$ правая часть равенства (9.5) превращается в полный квадрат (по переменной x). Пользуясь равенством (9.5), опишите метод нахождения корней уравнения (9.4).

9.2. Тригонометрические замены

9.31. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4xy(2y^2 - 1) = 1. \end{cases}$$

9.32. Решите систему

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1, \\ z = 2y^2 - 1, \\ x = 2z^2 - 1. \end{cases}$$

9.33. Докажите, что среди семи различных чисел всегда можно выбрать два числа x и y так, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

9.34. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + t^2 = 9, \\ xt + yz = 6, \end{cases}$$

выберете те, для которых величина $x + z$ принимает наибольшее значение.

9.35. Решите уравнения

а) $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$; в) $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$;

б) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$; г) $\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2}}=2x^2-1$.

9.36. Последовательность чисел $\{h_n\}$ задана условиями:

$$h_1=\frac{1}{2},\quad h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}\quad (n\geqslant 1).$$

Докажите неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k<1{,}03$.

9.37. Сколько корней на отрезке $[0;1]$ имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

9.38. Пусть $|x_1|\leqslant 1$ и $|x_2|\leqslant 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}\leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}.$$

9.39. Решите уравнение

$$|2x-\sqrt{1-4x^2}|=\sqrt{2}(8x^2-1).$$

9.40*. Числа x, y и z удовлетворяют соотношению $xy+yz+xz=1$. Докажите, что существуют числа α, β, γ такие, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и выполняются равенства

$$x=\operatorname{tg}(\alpha/2),\quad y=\operatorname{tg}(\beta/2),\quad z=\operatorname{tg}(\gamma/2).$$

9.41. Решите системы:

а) $\begin{cases} x+3y=4y^3,\\ y+3z=4z^3,\\ z+3x=4x^3;\end{cases}$ в) $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\\ xy+yz+xz=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+x^2y=y,\\ 2y+y^2z=z,\\ 2z+z^2x=x;\end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{2y}{1+y^2}\cdot\dfrac{1-z^2}{1+z^2},\\ xy+yz+xz=1.\end{cases}$

9.42. Пусть $xy+yz+xz=1$. Докажите равенство:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

9.43. Решите систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z=3,\\ \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=6,\\ x+y+z=\pi.\end{cases}$$

9.44. Решите систему:

$$\begin{cases} y = x(4-x), \\ z = y(4-y), \\ x = z(4-z). \end{cases}$$

9.45. Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

9.3. Итерации

Определение. Итерацией называется результат повторного применения какой-либо математической операции. Так, если $y = f(x) = f_1(x)$ есть некоторая функция от x, то функции $f_2(x) = f(f_1(x))$, $f_3(x) = f(f_2(x))$, $\ldots$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ называются соответственно второй, третьей, $\ldots$, n-й итерациями функции $f(x)$. При отыскании предела последовательности $x_n = f_n(x_0)$ часто оказывается полезной следующая теорема.

Теорема Вейерштрасса. Всякая возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет предел. Аналогично, всякая убывающая последовательность, ограниченная снизу, также имеет предел. (См., например, [9].)

9.46. Имеются два сосуда. В них разлили 1 л. воды. Из первого сосуда переливают половину воды во второй, затем из второго переливают половину оказавшейся в нем воды в первый, затем из первого сосуда переливают половину оказавшейся в нем воды во второй и т. д. Докажите, что независимо от того, сколько воды было сначала в каждом из сосудов, после 100 переливаний в них будет 2/3 л. и 1/3 л. с точностью до 1 миллилитра.

9.47. Вавилонский алгоритм вычисления $\sqrt{2}$. Последовательность чисел $\{x_n\}$ задана условиями:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad (n \geqslant 0).$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$. (См. также 9.70.)

9.48. К чему будет стремиться последовательность из предыдущей задачи, если в качестве начального условия выбрать $x_0 = -1$?

9.49. Итерационная формула Герона. Докажите, что последовательность чисел $\{x_n\}$, заданная условиями

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{k}{x_n}\right), \quad (n \geqslant 0),$$

сходится. Найдите предел этой последовательности.

9.50. Пусть a и $k > 0$ произвольные числа. Определим последовательность $\{a_n\}$ равенствами

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) \quad (n \geqslant 0).$$

Докажите, что при любом неотрицательном n выполняется равенство

$$\frac{a_n - \sqrt{k}}{a_n + \sqrt{k}} = \left(\frac{a - \sqrt{k}}{a + \sqrt{k}}\right)^{2^n}.$$

9.51. Зафиксируем числа a_0 и a_1. Построим последовательность $\{a_n\}$ в которой

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \quad (n \geqslant 1).$$

Выразите a_n через a_0, a_1 и n.

9.52. Старый калькулятор I. а) Предположим, что мы хотим найти $\sqrt[3]{x}$ $(x > 0)$ на калькуляторе, который кроме четырех обычных арифметических действий умеет находить $\sqrt{x}$. Рассмотрим следующий алгоритм. Строится последовательность чисел $\{y_n\}$, в которой y_0 — произвольное положительное число, например, $y_0 = \sqrt{\sqrt{x}}$, а остальные элементы определяются соотношением

$$y_{n+1} = \sqrt{\sqrt{xy_n}} \quad (n \geqslant 0).$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt[3]{x}.$$

б) Постройте аналогичный алгоритм для вычисления корня пятой степени.

9.53. Старый калькулятор II. Производная функции $\ln x$ при $x = 1$ равна 1. Отсюда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{(1+x) - 1} = 1.$$

Воспользуйтесь этим фактом для приближенного вычисления натурального логарифма числа N. Как и в задаче 9.52, разрешается использовать стандартные арифметические действия и операцию извлечения квадратного корня.

9.54. Метод итераций. Для того, чтобы приближенно решить уравнение, допускающее запись $f(x)=x$, применяется метод итераций. Сначала выбирается некоторое число x_0, а затем строится последовательность $\{x_n\}$ по правилу $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n\geqslant 0)$. Докажите, что если эта последовательность имеет предел $x^*=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и функция $f(x)$ непрерывна, то этот предел является корнем исходного уравнения: $f(x^*)=x^*$.

Определение. Геометрической интерпретацией итерационного процесса служит *итерационная ломаная.* Для ее построения на плоскости Oxy рисуется график функции $f(x)$ и проводится биссектриса координатного угла — прямая $y=x$. Затем на графике функции отмечаются точки $A_0(x_0, f(x_0))$, $A_1(x_1, f(x_1))$, $\ldots$, $A_n(x_n, f(x_n))$, $\ldots$, а на биссектрисе координатного угла — точки $B_0(x_0, x_0)$, $B_1(x_1, x_1)$, $\ldots$, $B_n(x_n, x_n)$, $\ldots$ Ломаная $B_0A_0B_1A_1\ldots B_nA_n\ldots$ называется итерационной.

9.55. Постройте итерационные ломаные для следующих данных:

а) $f(x)=1+\dfrac{x}{2}$, $\quad x_0=0$, $x_0=8$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\quad x_0=2$;

в) $f(x)=2x-1$, $\quad x_0=0$, $x_0=1{,}125$;

г) $f(x)=-\dfrac{3x}{2}+6$, $\quad x_0=\dfrac{5}{2}$;

д) $f(x)=x^2+3x-3$, $\quad x_0=1$, $\quad x_0=0{,}99$, $\quad x_0=1{,}01$;

е) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $\quad x_0=0$, $\quad x_0=8$;

ж) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+\dfrac{25x}{6}+3$, $\quad x_0=3$.

9.56. Для последовательности $\{a_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{2}\right)=0.$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

9.57. Числа a_1, a_2, $\ldots$, a_k таковы, что равенство

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+a_1x_{n-1}+\ldots+a_kx_{n-k})=0$$

возможно только для тех последовательностей $\{x_n\}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Докажите, что все корни многочлена

$$P(\lambda)=\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+a_2\lambda^{k-2}+\ldots+a_k$$

по модулю меньше 1.

9.58. Исследуйте последовательности на сходимость:

а) $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$, $\quad x_0=1$;

б) $x_{n+1} = \sin x_n, \quad x_0 = a \in (0; \pi)$;
в) $x_{n+1} = \sqrt{a + x}, \quad a > 0,\ x_0 = 0$.

9.59. Для каких x_0 будет сходиться последовательность $x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$?

9.60. Для каких a и x_0 будет сходиться последовательность $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$?

9.61.* Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \sin x_n \quad (n \geqslant 0).$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} x_n = \sqrt{3}.$$

9.62. Что останется от прямоугольника? Золотой прямоугольник — это такой прямоугольник, стороны a и b которого находятся в пропорции золотого сечения, то есть удовлетворяют равенству $a : b = b : (a - b)$. Представим, что такой прямоугольник вырезан из бумаги и лежит на столе, обращенный к нам своей более длинной стороной. Отсечем по левую сторону прямоугольника наибольший квадрат, который можно из него вырезать; остаток будет снова золотым прямоугольником. Далее становимся по левую сторону стола так, чтобы снова иметь перед собой более длинную сторону и поступаем с новым прямоугольником так же, как и с предыдущим. Таким образом обходим стол вокруг по направлению хода часовой стрелки и по очереди отсекаем квадраты. Каждая точка прямоугольника за исключением одной, будет раньше или позже отсечена. Определите положение этой исключительной точки.

9.63. Алгоритм приближенного вычисления $\sqrt[3]{a}$. Последовательность $\{a_n\}$ определяется условиями:

$$a_0 = a > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{a}{a_n^2}\right) \quad (n \geqslant 0).$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{a}$.

9.64. Уравнение $x^3 - 3x - 1 = 0$ имеет три различных действительных корня

$$\alpha^{(1)} = 2\cos\frac{\pi}{9}, \quad \alpha^{(2)} = 2\cos\frac{7\pi}{9}, \quad \alpha^{(3)} = 2\cos\frac{13\pi}{9}$$

(см. задачу 9.26 а)). Для приближенного нахождения этих корней, исходное уравнение нужно записать в виде $x = f(x)$ и построить последовательность приближений $\{x_n\}$, в которой $x_{n+1} = f(x_n)$. Исследуйте поведение таких итерационных процессов, если а) $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$; б) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{3}$;

в) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2}$; г) $f(x) = \sqrt{3 + \dfrac{1}{x}}$,

а в качестве начальных условий выбираются точки $x_0 = \pm 1$.

9.65. Постройте итерационные процессы, которые позволяют находить приближенные значения для различных корней кубического уравнения из задачи 9.25 б).

9.66. Укажите способ приближенного нахождения корня уравнения $x^3 - x - 1 = 0$.

9.67. Последовательность чисел $\{a_n\}$ задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n}{4} + \frac{1}{a_n} \quad (n \geqslant 1).$$

Докажите, что

а) последовательность $\{a_n\}$ ограничена;

б) $|a_{1000} - 2| < (3/4)^{1000}$.

9.68. Найдите предел последовательности, которая задана условиями

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{8} \quad (n \geqslant 1).$$

9.69. Сходимость итерационного процесса. Предположим, что функция $f(x)$ отображает отрезок $[a; b]$ в себя, и на этом отрезке $|f'(x)| \leqslant q < 1$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет на отрезке $[a; b]$ единственный корень x^*. Докажите, что при решении этого уравнения методом итераций будут выполняться неравенства:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant |x_1 - x_0| \cdot q^n, \quad |x^* - x_n| \leqslant |x_1 - x_0| \cdot \frac{q^n}{1-q} \quad (n \geqslant 0).$$

9.70. Докажите, что для чисел $\{x_n\}$ из задачи 9.47, которые фактически получаются при решении методом Ньютона уравнения $x^2 - 2 = 0$, можно в явном виде указать разложения в цепные дроби:

$$x_n = [1; \underbrace{2, \ldots, 2}_{2^n - 1}] \quad (n \geqslant 0).$$

Оцените разность $|x_n - \sqrt{2}|$. (См. также 9.88.)

9.71. С какой гарантированной точностью вычисляется $\sqrt{k}$ при помощи алгоритма задачи 9.49 после пяти шагов?

9.72. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \\ \dfrac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \\ \dfrac{2x_3^2}{1+x_3^2} = x_1. \end{cases}$$

9.73. Решите систему:

$$\begin{cases} y^2 = 4x^3 + x - 4, \\ z^2 = 4y^3 + y - 4, \\ x^2 = 4z^3 + z - 4. \end{cases}$$

9.74. Последовательность чисел $\{x_n\}$ задана условиями:

$$x_1 \geqslant -a, \quad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}.$$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена. Найдите ее предел.

9.75. Игра на монотонности. Докажите, что для монотонно возрастающей функции $f(x)$ уравнения $x = f(f(x))$ и $x = f(x)$ равносильны.

9.76. Решите уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + x}}} = x$.

9.77. Арифметико-геометрическое среднее. Пусть a и b — два положительных числа, причем $a > b$. Построим по этим числам две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ по правилам:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n \geqslant 0).$$

Докажите, что обе эти последовательности имеют один и тот же предел.

Этот предел называется *арифметико-геометрическим средним* чисел a, b и обозначается $\mu(a, b)$.

9.78. Арифметико-гармоническое среднее. Пусть a и b — два положительных числа, и $a < b$. Определим две последовательности чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ формулами:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \geqslant 0).$$

а) Докажите, что обе эти последовательности имеют общий предел. Этот предел называется *арифметико-гармоническим средним* чисел a и b.

б) Докажите, что этот предел совпадает со средним геометрическим чисел a и b.

в) Пусть $a=1$, $b=k$. Как последовательность $\{b_n\}$ будет связана с последовательностью $\{x_n\}$ из задачи 9.49?

9.79. Геометрико-гармоническое среднее. Назовем *геометрико-гармоническим средним* чисел a и b общий предел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, построенных по правилу

$$a_0=a, \quad b_0=b, \quad a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n} \quad (n\geqslant 0).$$

Обозначим его через $\nu(a, b)$. Докажите, что величина $\nu(a, b)$ связана с $\mu(a, b)$ (см. задачу 9.77) равенством

$$\frac{1}{\nu(a, b)}=\mu\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right).$$

9.80. Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} 1-x_1^2=x_2, \\ 1-x_2^2=x_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ 1-x_{n-1}^2=x_n, \\ 1-x_n^2=x_1. \end{cases}$$

9.81. Найдите с точностью до 0,01 сотый член x_{100} последовательности $\{x_n\}$, если

а) $x_1\in[0;\ 1]$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $\quad(n>1)$;

б) $x_1\in[0{,}1;\ 0{,}9]$, $x_{n+1}=2x_n(1-x_n)$, $\quad(n>1)$.

9.82. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ строится по правилу $x_{n+1}=f(x_n)$, где $f(x)=x^2-2$. Для каких начальных условий эта последовательность будет иметь период длины 3?

Верен следующий общий результат.

Теорема Шарковского. Пусть $f(x)$ — непрерывное отображение отрезка в себя, которое для начального условия x_0 приводит к последовательности с периодом m:

$$f(x_0)=x_1, \quad f(x_1)=x_2, \quad \dots, \quad f(x_{m-1})=x_m=x_0.$$

Тогда для любого натурального n, стоящего правее m в последовательности

$$3, 5, 7, 9, \dots, 2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 2\cdot 9, \dots, 2^2\cdot 3, 2^2\cdot 5, 2^2\cdot 7, 2^2\cdot 9, \dots,$$
$$2^3\cdot 3, 2^3\cdot 5, 2^3\cdot 7, 2^3\cdot 9, \dots, 32, 16, 8, 4, 2, 1,$$

найдется начальное условие x_0', которое приводит к периодической последовательности с периодом n:

$$f(x_0')=x_1', \quad f(x_1')=x_2', \quad \dots, \quad f(x_{n-1}')=x_n'=x_0'.$$

9.83. В задаче 9.82 для функции $f(x) = x^2 - 2$, которая отображает в себя отрезок $[-2, 2]$, были найдены начальные условия, которые приводили к последовательностям с периодом 3. По теореме Шарковского, для любого натурального n должно существовать такое начальное условие x_0, которое даст последовательность с периодом n. Для каждого натурального n найдите такое начальное условие в явном виде.

9.84. Докажите, что касательная к графику функции $f(x)$, построенная в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$ пересекает ось Ox в точке с координатой

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

9.85. Метод Ньютона. Для приближенного нахождения корней уравнения $f(x) = 0$ Ньютон предложил искать последовательные приближения по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

(начальное условие x_0 следует выбирать поближе к искомому корню).

Докажите, что для функции $f(x) = x^2 - k$ и начального условия $x_0 > 0$ итерационный процесс всегда будет сходиться к $\sqrt{k}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{k}$.

Как будет выражаться x_{n+1} через x_n? Сравните результат с формулой из задачи 9.49.

9.86. Метод Ньютона и числа Фибоначчи. Применим метод Ньютона для приближенного нахождения корней многочлена

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Какие последовательности чисел получатся, если

а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 0$?

К каким числам будут сходиться эти последовательности? Опишите разложения чисел x_n в цепные дроби.

9.87. Пусть p и q — отличные от нуля действительные числа и $p^2 - 4q > 0$. Докажите, что следующие последовательности сходятся:

а) $y_0 = 0, \quad y_{n+1} = \dfrac{q}{p - y_n} \quad (n \geqslant 0)$;

б) $z_0 = 0, \quad z_{n+1} = p - \dfrac{q}{z_n} \quad (n \geqslant 0)$.

Установите связь между предельными значениями этих последовательностей y^*, z^* и корнями уравнения $x^2 - px + q = 0$.

9.88. Метод Ньютона и цепные дроби. Предположим, что цепные дроби

$$\alpha = p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{\ddots}}} \quad \text{и} \quad \beta = \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{p - \cfrac{q}{\ddots}}}$$

сходятся. Согласно задаче 9.87, они будут сходиться к корням многочлена $x^2 - px + q = 0$. С другой стороны к тем же корням будут сходиться и последовательности, построенные по методу Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - px_n + q}{2x_n - p} = \frac{x_n^2 - q}{2x_n - p}.$$

Докажите, что если x_0 совпадает с нулевой подходящей дробью цепной дроби α или β, то числа $x_1, x_2, \ldots$ также будут совпадать с подходящими дробями к α или β. (См. также 9.70.)

9.89. Метод Ньютона не всегда позволяет приблизиться к корню уравнения $f(x) = 0$. Для многочлена $f(x) = x(x-1)(x+1)$ найдите начальное условие x_0 такое, что $f(x_0) \neq x_0$ и $x_2 = x_0$.

9.90. Метод Лобачевского. Пусть многочлен

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $|x_1| > |x_2| > \ldots > |x_n|$. В задаче 6.45 был предъявлен способ построения многочлена $Q(x)$ степени n, корнями которого являются числа $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$. На основе этого рассуждения Лобачевский придумал метод для приближенного поиска корней многочлена $P(x)$. Он заключается в следующем. Строится последовательность многочленов $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ такая, что $P_0(x) = P(x)$ и многочлен $P_k(x)$ имеет корни $x_1^{2^k}, \ldots, x_n^{2^k}$. Пусть

$$P_k(x) = x^n + a_{n-1}^{(k)}x^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)}x + a_0^{(k)}.$$

Докажите, что

$$\text{а) } \lim_{k\to\infty} (-a_{n-1}^{(k)})^{1/2^k} = x_1; \quad \text{б) } \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{a_{n-l}^{(k)}}{a_{n-l+1}^{(k)}}\right)^{1/2^k} = x_l \quad (1 \leqslant l \leqslant n).$$

9.91. Метод Лобачевского и числа Люка. Постройте последовательность полиномов, которая получается, если метод Лобачевского применить для приближенного нахождения корней многочлена $x^2 - x - 1$. Какие последовательности будут сходиться к корням x_1 и x_2, если $|x_1| > |x_2|$?

9.92. Метод Архимеда. Для приближенного нахождения числа π рассмотрим окружность радиуса $1/2$. Опишем около нее и впишем в нее правильные n-угольники. Обозначим их периметры через q_n (для описанного) и p_n (для вписанного).

а) Найдите q_4, p_4, q_6 и p_6.

б) Докажите, что справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$q_{2n} = \frac{2q_n p_n}{q_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}} \quad (n \geqslant 3).$$

в) Найдите q_{96} и p_{96}. Докажите неравенства

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

9.93.* Метод Гюйгенса. Для получения более точных приближений к числу π Гюйгенс рассматривал линейную комбинацию чисел q_n и p_n:

$$\pi \approx \frac{2p_n + q_n}{3}.$$

а) Докажите, что

$$p_n < \pi < \frac{2p_n + q_n}{3}.$$

б) Проверьте справедливость асимптотической формулы

$$\pi = \frac{2p_n + q_n}{3} + \frac{24\theta_n}{n^4} \quad (n \geqslant 6,\ 1/2 < \theta_n < 1).$$

в) Вычислите первые шесть знаков после запятой у числа π.

9.94. Формула Ферма. Докажите равенство

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots$$

9.95. Последовательность чисел x_0, x_1, x_2, ... задается условиями

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = a^{x_n} \quad (n \geqslant 0).$$

Найдите наибольшее число a, для которого эта последовательность имеет предел. Чему равен этот предел для такого a?

9.96. Решите уравнения

а) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$; б) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$; в) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = e$.

9.97. Проверьте, что функция $\varepsilon(z)$, определенная равенством $\varepsilon(\ln z) = z^{z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, удовлетворяет функциональному уравнению $\varepsilon(z) = e^{z\varepsilon(z)}$. Какова область определения функции $\varepsilon(z)$?

9.98. Последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ... задается условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2} \quad (n \geqslant 0).$$

Докажите, что

а) эта последовательность неограничена; б) $a_{9000} > 30$; в) найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$.

9.99. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \qquad (n \geqslant 1).$$

Докажите, что

а) $a_n > \sqrt{2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \sqrt{2n}) = 0$.

9.100*. Тройки чисел (x_n, y_n, z_n) $(n \geqslant 1)$ строятся по правилу: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $z_1 = 6/7$,

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, \quad z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1} \quad (n \geqslant 1).$$

а) Докажите, что указанный процесс построения троек может быть неограниченно продолжен.

б) Может ли на некотором шаге получится тройка чисел (x_n, y_n, z_n), для которой $x_n + y_n + z_n = 0$?

9.4. Системы линейных уравнений

9.101. Коля Васин гулял после школы пять часов. Сначала он шел по горизонтальной дороге, затем поднялся в гору и, наконец, по старому маршруту возвратился назад в исходный пункт. Его скорость была 4 км/ч на горизонтальном участке пути, 3 км/ч при подъеме в гору и 6 км/ч — при спуске с горы. Какое расстояние прошел Коля Васин?

Метод Гаусса. Предположим, что имеется система из n линейных уравнений от переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{n1}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{9.6}$$

Одним из возможных методов решения такой системы является метод Гаусса. Он заключается в том, что с помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений. Затем с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из всех следующих уравнений. И так далее, пока из последнего уравнения не получится значение последней переменной. После чего остальные переменные находятся в обратном порядке.

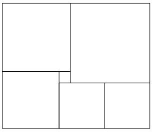
9.102. Решите системы

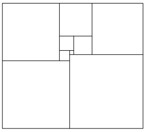
а) $\begin{cases} x-3y+2z-t=3, \\ 2x+4y-3z+t=5, \\ 4x-2y+z+t=3, \\ 3x+y+z-2t=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+3z-t=0, \\ x-y+z+2t=4, \\ x+5y+5z-4t=-4, \\ x+8y+7z-7t=-8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y+3z=2, \\ x-y+z=0, \\ x+3y-z=-2, \\ 3x+4y+3z=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+3z-t=0, \\ x-y+z+2t=4, \\ x+5y+5z-4t=-4, \\ x+8y+7z-7t=6. \end{cases}$

9.103. Составьте систему, состоящую из двух линейных уравнений, для которой строки (1, 1, 1, 1) и (1, 2, 2, 1) служат решениями.

9.104. На рисунках изображены разбиения прямоугольников на квадраты. Найдите стороны этих квадратов, если в первом случае сторона наименьшего квадрата равна 1, а во втором — 2.

а) 

б) 

9.105. Может ли система линейных уравнений с действительными коэффициентами иметь в точности два различных решения?

9.106. Прямоугольник со сторонами a и b разрезан на конечное число квадратов. Докажите, что a/b — рациональное число.

9.107. За круглым столом сидят 4 гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Один из гномов переливает 1/4 своего молока соседу справа. Затем сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и, наконец, четвертый гном 1/4 оказавшегося у него молока наливает первому. Во всех кружках вместе молока 2л. Сколько молока было первоначально в кружках, если

а) в конце у всех гномов молока оказалось поровну? б) в конце у всех гномов оказалось молока столько, сколько было в начале?

9.108. Решите системы уравнений. Для каждой из них выясните, при каких значениях параметров система не имеет решений, а при каких имеет бесконечно много решений.

а) $\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} ax + ay = a^2, \\ x + ay = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} ax - ay = ab, \\ 2ax - y = a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (a+1)x + 8y = 4a, \\ ax + (a+3)y = 3a - 1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} ax + by = a, \\ bx + ay = b; \end{cases}$

г) $\begin{cases} a^2x + (2-a)y = 4 + a^2, \\ ax + (2a-1)y = a^5 - 2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} |a|x - y = 1, \\ x + |a|y = a. \end{cases}$

9.109. Имеется система уравнений

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0. \end{cases}$$

Два человека вписывают по очереди вместо звездочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

9.110. Исследуйте системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - y = 2, \\ x + 4y = a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3, \\ x + by + b^2z = b^3, \\ x + cy + c^2z = c^3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + ay = 1, \\ 2x + 4y = 2, \\ bx + 4y = 2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ax + by = a, \\ (a-2)x + y = 3, \\ x + y = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} ax + by + cz = a + b + c, \\ bx + cy + az = a + b + c, \\ cx + ay + bz = a + b + c. \end{cases}$

9.111. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a_1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2a_2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2a_3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2a_4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x + y + t = b, \\ x + z + t = c, \\ y + z + t = d; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = a_1, \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + \ldots + (n-1)x_n = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \ldots + x_n = a_n. \end{cases}$

9.112. Имеются 13 гирь. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на две чашки весов, по шесть на каждую, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют одну и ту же массу, если известно, что: а) масса каждой гири равна целому числу граммов; б) масса каждой гири равна рациональному числу граммов; в)* масса каждой гири может быть равна любому действительному (неотрицательному) числу.

9.113. Известно, что

$$\begin{cases} a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geqslant 0, \\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geqslant 0, \\ a_{100} - 4a_1 + 3a_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $a_1 = 1$; чему равны тогда числа $a_2, \ldots, a_{100}$?

9.114. Альтернатива Фредгольма. Пусть имеется система линейных уравнений (9.6) с фиксированными коэффициентами $a_{j,k}$ ($1 \leqslant j$, $k \leqslant n$). Докажите, что всегда выполняется одна из следующих возможностей:

1) для любых $b_1, \ldots, b_n$ система имеет ровно одно решение (в частности, при $b_1 = \ldots = b_n = 0$ существует только нулевое решение);

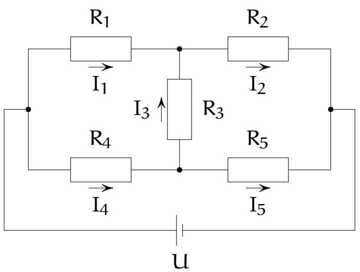
2) для некоторых $b_1, \ldots, b_n$ система неразрешима, а для некоторых (в том числе нулевых) имеет бесконечно много решений.

9.115. Правила Кирхгофа. Для расчета схем постоянного тока используется следующий алгоритм (см. [118]). На каждом участке цепи ставится ток, идущий в произвольном направлении. Затем составляется система линейных уравнений с помощью двух правил Кирхгофа:

1) алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи равна нулю;

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС.

Например, для схемы, изображенной ниже, получается следующая система уравнений, из которой можно однозначно найти токи $I_1, \ldots, I_5$:



$$\begin{cases} R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = U, \\ R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 = 0, \\ R_3 \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 - R_5 \cdot I_5 = 0, \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0, \\ -I_3 + I_4 - I_5 = 0. \end{cases}$$

Узлы электрической цепи будем обозначать $\langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle$. Для каждой пары соседних узлов $\langle j\rangle$ и $\langle k\rangle$ запись $\langle j, k\rangle$ будет обозначать соединяющий их проводник, $R_{j,k}$ — его сопротивление, $I_{j,k}$ — текущий из $\langle j\rangle$ в $\langle k\rangle$ ток ($I_{j,k} = -I_{k,j}$).

Докажите, что если токи удовлетворяют уравнениям, составленным по второму правилу Кирхгофа, то каждому узлу $\langle j\rangle$ электрической цепи можно поставить в соответствие некоторое число φ_j (потенциал) так, что для любых соседних узлов $\langle j\rangle$ и $\langle k\rangle$ будет выполняться равенство

$$I_{j,k} \cdot R_{j,k} = \varphi_j - \varphi_k$$

(падение напряжения равно разности потенциалов).

Выведите отсюда, что независимо от выбранной схемы, система линейных уравнений, составленная по правилам Кирхгофа не может иметь больше одного решения, и что она всегда разрешима. (См. также 11.22.)

9.116. Тепловая мощность цепи. Рассмотрим цепь, которая состоит из сопротивлений и одного источника напряжения. При прохождении тока $I_{j,k}$ по проводнику с сопротивлением $R_{j,k}$, соответствующего разности потенциалов $U_{j,k} = \varphi_j - \varphi_k$ на проводнике $\langle j, k\rangle$ выделяется тепловая мощность

$$q_{j,k} = R_{j,k} \cdot I_{j,k}^2 = U_{j,k} \cdot I_{j,k} = \frac{(\varphi_j - \varphi_k)^2}{R_{j,k}}.$$

Отвлечемся от физической природы задачи и рассмотрим величину

$$Q = \sum_{j,k} q_{j,k}$$

(суммарную мощность цепи) как функцию от потенциалов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Будем считать, что потенциалы φ_1 и φ_n стоят на концах источника напряжения и, таким образом, фиксированы.

а) Докажите, что для функции Q существует ровно один набор значений $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, при котором она достигает своего минимального значения. Используя этот потенциал дайте второе доказательство того факта, что система уравнений, составленная по правилам Кирхгофа разрешима и имеет ровно одно решение. Проверьте также, что для токов, удовлетворяющих правилам Кирхгофа, потенциалы распределены так, что тепловая мощность цепи минимальна.

б) Докажите, что минимальное значение величины Q равно $U \cdot I = R \cdot I^2$, где $U = \varphi_1 - \varphi_n$ — напряжение на источнике, I — текущий через него ток, и R — общее сопротивление цепи, определяемое равенством $R = U/I$.

в) Докажите, что если в цепи одно сопротивление увеличить, то общее сопротивление цепи не уменьшится.

Глава 10
Неравенства

В этой главе все величины, входящие в неравенства (за исключением специально оговоренных случаев), будут считаться положительными.

10.1. Различные неравенства

В задачах 10.1—10.37 докажите неравенства.

10.1. $x + 1/x \geqslant 2$.

10.2. Неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим.

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

10.3. $(a+b+c+d)^2 \leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

10.4. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

10.5. $\sqrt[4]{ab^3} \leqslant \dfrac{a+3b}{4}$.

10.6. $ab^2c^3d^4 \leqslant \left(\dfrac{a+2b+3c+4d}{10}\right)^{10}$.

10.7. $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+xz$.

10.8. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \geqslant x_1(x_2+x_3+x_4+x_5)$.

10.9. $x^4+y^4+8 \geqslant 8xy$.

10.10. $\dfrac{3}{1/a+1/b+1/c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

10.11. $(ab+bc+ac)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$.

10.12. $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

10.13. $ab+bc+ac \leqslant 0$ при $a+b+c=0$.

10.14. $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| < 1$, при $|x|, |y| < 1$.

10.15. $x^{\alpha}y^{\beta} \leqslant \alpha x + \beta y$, при условии, что $\alpha+\beta=1$ $(\alpha, \beta > 0)$.

10.16. $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geqslant abc(a+b+c)$.

10.17. $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geqslant 16abc$.

10.18. $(a+b+c+d+1)^2 \geqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$, при a, b, c, $d \in [0;1]$.

10.19. $x^4+y^4+z^2+1 \geqslant 2x(xy^2-x+z+1)$.

10.20. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8 \geqslant 64xy(x+y)^2$ $(x, y \geqslant 0)$.

10.21. $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.

10.22. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 9abc$.

10.23. $a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4) \leqslant (1+a^4)(1+b^4)$.

10.24. $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

10.25. $a^3b+b^3c+c^3a \geqslant abc(a+b+c)$.

10.26. $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)$.

10.27. $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \dfrac{a_k}{b_k} \leqslant \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n} \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \dfrac{a_k}{b_k}$.

10.28. $\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\left(1+\dfrac{y}{z}\right)\left(1+\dfrac{z}{x}\right) \geqslant 8$.

10.29. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 3$.

10.30. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

10.31. $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b} \geqslant \dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

10.32. Докажите, что при $\alpha \geqslant 1$ и $x>0$

$$1+x^\alpha \leqslant (1+x)^\alpha.$$

10.33. $3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \geqslant (a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)$ при $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3$.

10.34. Докажите, что если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n, \qquad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n,$$

то наибольшая из сумм вида

$$a_1b_{k_1}+a_2b_{k_2}+\ldots+a_nb_{k_n}$$

$(k_1, k_2, \ldots, k_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n)$, это сумма

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n,$$

а наименьшая — сумма

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1.$$

10.35. Неравенство Чебышёва. Докажите, что при $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

10.36. Докажите неравенства:

$$a + b + c \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{a^2 + c^2}{2b} + \frac{b^2 + c^2}{2a} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}.$$

10.37. Неравенства Коробова. а) Докажите, что при

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$$

выполняется неравенство

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leqslant \left(\frac{a_1}{\sqrt{1} + \sqrt{0}} + \frac{a_2}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right)^2.$$

б) Докажите, что при тех же ограничениях на числа $a_1, \ldots, a_n$

$$a_1^4 + \ldots + a_n^4 \leqslant \left(\frac{a_1}{1^{3/4}} + \frac{a_2}{2^{3/4}} + \ldots + \frac{a_n}{n^{3/4}}\right).$$

10.38. Докажите неравенство $(1+x_1)\ldots(1+x_n) \geqslant 2^n$, где $x_1 \ldots x_n = 1$.

10.39. Докажите, что для любого натурального n справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

10.40. Докажите, что для любого натурального n сумма

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

лежит в пределах от $1/2$ до $3/4$.

10.41*. Даны рациональные положительные p, q, причем $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Докажите, что для положительных a и b выполняется неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

10.42. Найдите наименьшую величину выражения

$$\sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_{2n}^2 + (1 - x_1)^2}.$$

10.43. Для натурального n докажите неравенства:

а) $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$;

б) $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$;

в) $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n! < n\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

10.44. Докажите, что при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1.$$

(См. также 7.85.)

10.45. Докажите, что для любых натуральных m и n хотя бы одно из чисел $\sqrt[m]{n}$, $\sqrt[n]{m}$ не больше $\sqrt[3]{3}$.

10.46. Как расставить скобки в выражении $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$, чтобы оно было максимальным?

10.47. Докажите справедливость оценок:

а) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2} \quad (n \geqslant 1)$;

б) $\dfrac{n}{2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} \leqslant n \quad (n \geqslant 1)$;

в) $\dfrac{1}{15} < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$;

г) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{12}$.

10.48. Докажите, что уравнение $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$ неразрешимо в натуральных числах.

10.2. Суммы и минимумы

10.49. Сумма минимумов и минимум суммы. Предположим, что имеется набор функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, определенных на отрезке $[a; b]$. Докажите неравенство:

$$\min_{x \in [a;b]} f_1(x) + \ldots + \min_{x \in [a;b]} f_n(x) \leqslant \min_{x \in [a;b]} (f_1(x) + \ldots + f_n(x)).$$

10.50. Докажите неравенство:

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \ldots + \frac{b_n^2}{a_n} \geqslant \frac{(b_1 + \ldots + b_n)^2}{a_1 + \ldots + a_n}.$$

10.51. Выведите из неравенства предыдущей задачи

а) **неравенство Коши—Буняковского**:

$$(c_1 d_1 + \ldots + c_n d_n)^2 \leqslant (c_1^2 + \ldots + c_n^2)(d_1^2 + \ldots + d_n^2);$$

б) неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}};$$

в) неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим:

$$\frac{n}{1/b_1 + \ldots + 1/b_n} \leqslant \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}.$$

10.52. Докажите неравенство:

$$\left(\frac{b_1 + \ldots + b_n}{a_1 + \ldots + a_n}\right)^{b_1 + \ldots + b_n} \leqslant \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1} \ldots \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n}.$$

10.53. Используя результат предыдущей задачи, докажите неравенства:

а) $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$;

б) $\left(\dfrac{b_1 + \ldots + b_n}{n}\right)^{b_1 + \ldots + b_n} \leqslant b_1^{b_1} \ldots b_n^{b_n}$;

в) $c_1^{b_1} \ldots c_n^{b_n} \leqslant c_1 b_1 + \ldots + c_n b_n$, где $b_1 + \ldots + b_n = 1$.

10.54. Спортпрогноз. Предположим, что ожидается баскетбольный матч между двумя командами A и B, в котором возможно только два исхода: одна из команд выигрывает. Две букмекерские конторы принимают ставки с разными коэффициентами $k_A^{(1)}$, $k_B^{(1)}$, $k_A^{(2)}$, $k_B^{(2)}$. Например, если игрок сделал ставку N в первой конторе на команду A, и эта команда выиграла, то игрок получает сумму $k_A^{(1)} \cdot N$. Пусть

$$k_A^{(1)} = 2,\ \ k_B^{(1)} = \frac{3}{2},\ \ k_A^{(2)} = \frac{4}{3},\ \ k_B^{(2)} = 3.$$

Как, имея капитал N, распорядиться им оптимальным образом, то есть как сделать ставки в двух конторах, чтобы получить максимальный *гарантированный* выигрыш?

Проанализируйте случай произвольных коэффициентов $k_A^{(1)}$, $k_B^{(1)}$, $k_A^{(2)}$, $k_B^{(2)}$ и найдите связь между максимальным *гарантированным* выигрышем и средним гармоническим наибольших коэффициентов.

10.3. Выпуклость

Определение. Пусть Γ — график дифференцируемой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$:

$$\Gamma = \{(x, y) \colon x \in [a; b], y = f(x)\}.$$

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх*, если для любой точки $T \in \Gamma$ кривая Γ лежит ниже касательной к Γ, проведенной в точке T. Аналогично определяется *выпуклость вниз*.

Достаточным условием выпуклости функции вниз (вверх) является положительность (отрицательность) второй производной.

10.55. Докажите, что если функция $f(x)$ выпукла вверх на отрезке $[a; b]$, то для любых различных точек x_1, x_2 из $[a; b]$ и любых положительных α_1, α_2 таких, что $\alpha_1+\alpha_2=1$ выполняется неравенство:

$$f\left(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\right) > \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$

10.56. Неравенство Иенсена. Докажите, что если функция $f(x)$ выпукла вверх на отрезке $[a; b]$, то для любых различных точек x_1, x_2, $\ldots$, x_n $(n\geqslant 2)$ из $[a; b]$ и любых положительных α_1, α_2, $\ldots$, α_n таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$, выполняется неравенство:

$$f(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n) > \alpha_1f(x_1)+\ldots+\alpha_nf(x_n).$$

10.57. Докажите, что для любых x_1, $\ldots$, $x_n\in[0;\ \pi]$ справедливо неравенство:

$$\sin\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{\sin x_1+\ldots+\sin x_n}{n}.$$

10.58. Докажите неравенства:

а) $n(x_1+\ldots+x_n)\geqslant(\sqrt{x_1}+\ldots+\sqrt{x_n})^2$;

б) $\dfrac{n^3}{(x_1+\ldots+x_n)^2}\leqslant\dfrac{1}{x_1^2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n^2}$;

в) $nx_1\ldots x_n\leqslant x_1^n+\ldots+x_n^n$;

г) **Неравенство Минковского.**

$$(x_1+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2.$$

10.59. Докажите, что если $x+y+z=6$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant 12$.

10.60. Докажите, что при $p>1$ выполняется неравенство

$$(\beta_1x_1+\ldots+\beta_nx_n)^p\leqslant(\beta_1+\ldots+\beta_n)^{p-1}(\beta_1x_1^p+\ldots+\beta_nx_n^p).$$

10.61. Неравенство Гёльдера. Пусть p и q — положительные числа, причем $1/p+1/q=1$. Докажите, что

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqslant(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q)^{1/q}.$$

Определение. Для любого действительного $\alpha\neq 0$ *средним степенным чисел* x_1, $\ldots$, x_n *порядка* α называется число

$$S_\alpha(x)=\left(\frac{x_1^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

Частными случаями средних степенных являются: среднее гармоническое $(\alpha=-1)$, среднее арифметическое $(\alpha=1)$, среднее квадратическое

($\alpha = 2$). Средним степенным порядка 0 будем считать среднее геометрическое $S_0(x) = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$.

10.62. Докажите, что выполняются классические неравенства между средними степенными:

$$S_{-1}(x) \leqslant S_0(x) \leqslant S_1(x) \leqslant S_2(x).$$

10.63. Докажите, что если $\alpha < \beta$ и $\alpha\beta \neq 0$, то $S_\alpha(x) \leqslant S_\beta(x)$.

10.64*. Докажите, что если $\alpha < 0 < \beta$, то

$$S_\alpha(x) \leqslant S_0(x) \leqslant S_\beta(x),$$

причем

$$\lim_{\alpha \to -0} S_\alpha(x) = \lim_{\beta \to +0} S_\beta(x) = S_0(x).$$

10.65. Докажите, что если $\alpha < \beta$, то $S_\alpha \leqslant S_\beta$, причем равенство возможно только когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

10.4. Симметрические неравенства

10.66. Докажите неравенства:
а) $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant x^2yz + xy^2z + xyz^2$;
б) $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$;
в) $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \geqslant 4xyzt$;
г) $x^5 + y^5 \geqslant x^3y^2 + x^2y^3$.

Определение. Пусть имеется несколько неотрицательных переменных — для определенности, три переменные x, y и z. Наборы из такого же количества целых неотрицательных чисел, $\alpha = (k, j, i)$, где $k \geqslant j \geqslant i$, будем называть *показателями*. Через $T_\alpha(x, y, z) = T_{(k,j,i)}(x, y, z)$ будем обозначать симметрический многочлен

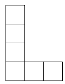
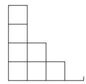
$$T_\alpha(x, y, z) = \sum_{\{a,b,c\}=\{k,j,i\}} x^a y^b z^c$$

(суммирование ведется по всем наборам $\{a, b, c\}$ в количестве 3! являющимися перестановками чисел $\{k, j, i\}$).

Например неравенства из задачи 10.66 можно переписать в виде:
а) $T_{(4,0,0)}(x, y, z) \geqslant T_{(2,1,1)}(x, y, z)$;
б) $T_{(3,0,0)}(x, y, z) \geqslant T_{(1,1,1)}(x, y, z)$;
в) $T_{(4,0,0,0)}(x, y, z, t) \geqslant T_{(1,1,1,1)}(x, y, z, t)$;
г) $T_{(5,0)}(x, y) \geqslant T_{(3,2)}(x, y)$.

10.67. Запишите через многочлены вида T_α неравенства
а) $x^4y + y^4x \geqslant x^3y^2 + x^2y^3$;
б) $x^3yz + y^3xz + z^3xy \geqslant x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y$.

Определение. *Диаграммой Юнга, соответствующей показателям* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется «лестница» из n ступенек, у которой высота k-й ступеньки равна α_k, а ширина — единице. Например

$(4, 1, 1) \mapsto$  $(4, 2, 1, 0) \mapsto$ 

Число $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ называется *весом* диаграммы Юнга.

10.68. Напишите многочлены T_α и нарисуйте соответствующие им диаграммы Юнга для следующих наборов α:

а) (3, 2); б) (3, 2, 1); в) (3, 3, 0, 0); г) (4, 1, 1, 0).

10.69. Найдите число всех диаграмм Юнга с весом s, если

а) $s = 4$; б) $s = 5$; в) $s = 6$; г) $s = 7$.

Определение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — два набора показателей с равной суммой $s = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Будем говорить, что α *мажорирует* β ($\alpha \succ \beta$), если справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant \beta_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \beta_1 + \beta_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}, \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \ldots + \beta_n. \end{cases}$$

В этом случае будем также говорить, что диаграмма Юнга, соответствующая набору α, *мажорирует* диаграмму Юнга, соответствующую набору β.

Например, $(4, 2, 1) \succ (3, 2, 2)$, так как $4 \geqslant 3$, $4 + 2 \geqslant 3 + 2$, $4 + 2 + 1 = 3 + 2 + 2$.

10.70. Докажите, что $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \succ \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ тогда и только тогда, когда β можно получить из α проделав несколько раз (может быть один или ни одного) операцию

$$(k, j, i) \longrightarrow \begin{cases} (k-1, j+1, i) \\ (k-1, j, i+1) \\ (k, j-1, i+1) \end{cases}$$

Эту операцию можно представлять себе как сбрасывание вниз одного кирпича на диаграмме Юнга.

10.71. Для $n=4$ нарисуйте все лестницы из $s=4$ кирпичей в порядке убывания, начиная с самой крутой $(4, 0, 0, 0)$, и заканчивая самой пологой $(1, 1, 1, 1)$.

10.72. а) Проверьте, что диаграммы Юнга $(4, 1, 1)$ и $(3, 3, 0)$ не сравнимы, — ни одна из них не мажорирует другую. Есть ли еще такие несравнимые наборы с суммой 6?

б) Найдите все несравнимые пары наборов для $s = 7$.

10.73. Пусть $T_\alpha(x, y, z) \geqslant T_\beta(x, y, z)$ для всех неотрицательных x, y, z. Докажите, что $\alpha \succ \beta$.

10.74*. **Неравенство Мюрхеда.** Пусть

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{и} \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

— два набора показателей с равной суммой. Докажите, что, если $\alpha \succ \beta$, то при всех неотрицательных $x_1, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$T_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \geqslant T_\beta(x_1, \ldots, x_n).$$

10.75. Выведите из неравенства Мюрхеда неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Сколько раз понадобится сбрасывать вниз «кирпичи», чтобы от набора $(n, 0, \ldots, 0)$ из n чисел перейти к набору $(1, 1, \ldots, 1)$?

10.76. Докажите следующие неравенства непосредственно и при помощи неравенства Мюрхеда:

а) $x^4y^2z + y^4x^2z + y^4z^2x + z^4y^2x + x^4z^2y + z^4x^2y \geqslant 2(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3)$;

б) $x^5 + y^5 + z^5 \geqslant x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2$;

в) $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \geqslant xyz + xyt + xzt + yxt$.

10.77. Докажите неравенства из задачи 10.36 при помощи неравенства Мюрхеда. Как будут выглядеть диаграммы Юнга для соответствующих функций?

Глава 11
Последовательности и ряды

11.1. Конечные разности

Определение. Пусть задана последовательность чисел
$$\{b_n\} = b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$
Будем обозначать $\{\Delta b_n\}$ последовательность, состоящую из разностей соседних членов последовательности $\{b_n\}$:
$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$
(Считается, что $b_0 = 0$.) Оператор[*)] Δ называется *разностным* или *оператором конечной разности.*

11.1. Найдите

а) Δn^2; б) $\Delta n(n-1)$; в) Δn^k; г) ΔC_n^k

(каждый раз разность берется по переменной n).

11.2. Пусть даны последовательности чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, связанные соотношением $\Delta b_n = a_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Как связаны частичные суммы S_n последовательности $\{a_n\}$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
с последовательностью $\{b_n\}$?

11.3. Найдите последовательность $\{a_n\}$ такую, что $\Delta a_n = n^2$. Используя результат предыдущей задачи, получите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

11.4. Выведите формулу для суммы $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

11.5. Докажите тождество
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} \quad (n \geqslant 1).$$

Определение. Для функции $f(x)$ выражение $f(x+1) - f(x)$ будем обозначать $\Delta f(x)$ и называть *конечной разностью первого порядка.* Ко-

---

[*)] Оператор — это отображение, действующее на множестве функций, последовательностей или других отображений.

нечные разности более высокого порядка определяются индуктивно:

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) \quad (n > 1)$$

(считается, что $\Delta^0 f(x) = f(x)$).

11.6. Докажите, что если $Q(x)$ — многочлен степени $m+1$, то $P(x) = \Delta Q(x)$ — многочлен степени m.

11.7. Докажите, что для любого многочлена $P(n)$ степени m существует единственный многочлен $Q(n)$ степени $m+1$ такой, что выполнены два условия: $\Delta Q(n) = P(n)$ и $Q(0) = 0$.

11.8. Докажите формулу

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} f(x+k).$$

11.9. Докажите равенство

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x).$$

11.10. Пусть $f(x)$ — многочлен степени m. Докажите, что если $m < n$, то $\Delta^n f(x) = 0$. Чему равна величина $\Delta^m f(x) = 0$?

11.11. Вычислите сумму

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

11.12. Докажите, что для всех m в промежутке $1 \leqslant m < n$ выполняется равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m C_n^k = 0.$$

(См. также 6.109.)

11.13*. Пусть числа $y_0, y_1, \ldots, y_n$ таковы, что для любого многочлена $f(x)$ степени $m < n$ справедливо равенство:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) y_k = 0. \tag{11.1}$$

Докажите, что $y_k = \lambda(-1)^k C_n^k$, где λ — некоторое фиксированное число.

11.14. Докажите следующие свойства оператора конечной разности, подобные свойствам оператора дифференцирования:

а) $\Delta \dfrac{1}{b_n} = -\dfrac{\Delta b_n}{b_n b_{n+1}}$; б) $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{b_n \Delta a_n - a_n \Delta b_n}{b_n b_{n+1}}$.

11.15. Найдите представление для $\Delta(a_n \cdot b_n)$ через Δa_n и Δb_n. Сравните полученную формулу с формулой для производной произведения двух функций.

11.16. Разностный аналог формулы Лейбница. Для n-ой производной произведения двух функций существует формула Лейбница

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Докажите ее разностный аналог

$$\Delta^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x) \Delta^{n-k} g(x+k). \tag{11.2}$$

11.17. Экспонентой $y = e^x$ называется такая функция, для которой выполнены условия $y'(x) = y(x)$ и $y(0) = 1$. Какая последовательность $\{a_n\}$ будет обладать аналогичными свойствами, если производную заменить на разностный оператор Δ?

11.18. Преобразование Абеля. Для подсчета интегралов используется формула интегрирования по частям. Докажите следующие две формулы, которые являются дискретным аналогом интегрирования по частям и называются преобразованием Абеля:

$$\sum_{x=0}^{n-1} f(x)g(x) = f(n)\sum_{x=0}^{n-1} g(x) - \sum_{x=0}^{n-1} \Delta f(x) \sum_{z=0}^{x} g(z),$$

$$\sum_{x=0}^{n-1} f(x)\Delta g(x) = f(n)g(n) - f(0)g(0) - \sum_{x=0}^{n-1} g(x+1)\Delta f(x).$$

11.19. Найдите последовательность $\{a_n\}$ такую, что $\Delta a_n = n2^n$. (Вспомните как вычисляют $\displaystyle\int xe^x\,dx$.)

11.20. Найдите:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$; б) $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2-1}$; в) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(k-1)\,2^k}{k(k+1)}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{4k+1}{k(k+1)(4k^2-1)}$;

е) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k-1}{k!}$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{n} k!\,k$.

11.21. При помощи преобразования Абеля вычислите следующие суммы:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 q^{k-1}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin kx$; в) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\cos kx$.

Определение. В дальнейшем под символом C_x^n будем понимать многочлен

$$C_x^n = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!},$$

определенный для всех действительных x. При целых $x \geqslant n$ его значения будут совпадать с обычными биномиальными коэффициентами.

11.22. Докажите, что внутри прямоугольника $1 \leqslant x \leqslant m$, $1 \leqslant y \leqslant n$ всегда единственным образом можно восстановить значения гармонической функции $f(x, y)$, если ее значения заданы в соседствующих с прямоугольником $2mn$ точках.

Изменится ли ситуация, если вместо прямоугольника рассматривать более сложные области?

Теорема существования и единственности остается справедливой для произвольных областей, в том числе и «дырявых».

11.23. Интерполяционная формула Ньютона. а) Докажите, что для любого многочлена $f(x)$ степени n существует единственное представление его в виде

$$f(x) = d_0 C_x^0 + d_1 C_x^1 + \ldots + d_n C_x^n.$$

Здесь и далее биномиальный коэффициент C_x^k интерпретируется как многочлен от переменной x. В частности, нижний индекс у биномиального коэффициента может быть любым действительным числом. (См. также 6.83.)

б) Докажите, что коэффициенты $d_0, d_1, \ldots, d_n$ в этом представлении вычисляются по формуле $d_k = \Delta^k f(0)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

11.24. Поиск закономерностей. Пусть некоторая последовательность чисел $\{a_n\}$ совпадает со значениями полинома $f(n)$ в целых точках $n = 0, 1, \ldots$ Тогда для нахождения явного вида многочлена $f(n)$ удобно пользоваться именно формулой Ньютона. Для подсчета коэффициентов $d_0, d_1, \ldots$ нужно заполнить таблицу разностей, в которой первая строка состоит из значений многочлена $f(n)$, а числа в следующих строках равны разностям двух чисел, стоящих над ними. Например, если $f(n) = n^3$, то получается следующая таблица:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & 216 & & 343 \\
& 1 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & & 127 & \\
& & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & \\
& & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Числа, стоящие на левом краю таблицы и есть искомые коэффициенты. Таким образом,

$$n^3 = 0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 6 \cdot C_n^2 + 6 \cdot C_n^3.$$

Найдите пользуясь этим приемом формулы для чисел из задачи 2.92.

11.25. Найдите формулы, которые описывали бы последовательности

а) $1, 5, 12, 22, 35, 51, \ldots$;
б) $1, 7, 19, 37, 61, 91 \ldots$;
в) $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$;
г) $1, 6, 19, 44, 85, 146, \ldots$;
д) $1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, \ldots$
Какой геометрический смысл они имеют?

11.26. Целозначные многочлены. Пусть многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Докажите, что

$$f(x) = d_0 C_x^0 + d_1 C_x^1 + \ldots + d_n C_x^n,$$

где $d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_n$ — некоторые целые числа.

11.27. Для многочлена $f(x) = x^3 - x$ найдите $\Delta^2 f(x)$. Исходя из этого объяснения, не применяя соображения делимости, почему $f(x) \vdots 6$ при всех целых x.

11.28. Докажите, что если многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x = 0, 1, \ldots, n$, то он принимает целые значения для любого целого x.

11.29. а) Пусть q — натуральное число и функция

$$f(x) = cq^x + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

принимает целые значения при $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$. Докажите, что при любом целом $x \geqslant 0$ число $f(x)$ также будет целым.

б) Пусть выполняются условия пункта а) и $f(x)$ делится на некоторое $m \geqslant 1$ при $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$. Докажите, что $f(x)$ делится на m при всех целых $x \geqslant 0$.

11.30. Докажите, что при всех натуральных n число $f(n) = 2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$ делится на 27.

11.31*. Для каких натуральных n в выражении

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm n^2$$

можно так расставить знаки $+$ и $-$, что в результате получится 0?

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ задана во всех точках плоскости с целыми координатами. Назовем функцию $f(x, y)$ *гармонической*, если ее значение в каждой точке равно среднему арифметическому значений функции в четырех соседних точках, то есть

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)).$$

11.32. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — гармонические функции. Докажите, что для любых a и b функция $af(x, y) + bg(x, y)$ также будет гармонической.

11.33. Пусть $f(x, y)$ — гармоническая функция. Докажите, что функции $\Delta_x f(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y)$ и $\Delta_y f(x, y) = f(x, y+1) - f(x, y)$ также будут гармоническими.

11.34*. Дискретная теорема Лиувилля. Пусть $f(x, y)$ — ограниченная гармоническая функция, то есть существует положительная константа M такая, что

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad |f(x, y)| \leqslant M.$$

Докажите, что функция $f(x, y)$ равна константе.

11.2. Рекуррентные последовательности

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, которая удовлетворяет с заданными p и q соотношению

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{11.3}$$

называется *линейной рекуррентной* (*возвратной*) *последовательностью второго порядка.*

Уравнение

$$x^2 - px - q = 0 \tag{11.4}$$

называется *характеристическим уравнением* последовательности $\{a_n\}$.

11.35. Докажите, что если числа a_0, a_1 фиксированы, то все остальные члены последовательности $\{a_n\}$ определяются однозначно.

11.36. Докажите, что геометрическая прогрессия $\{a_n\} = bx_0^n$ удовлетворяет соотношению (11.3) тогда и только тогда, когда x_0 — корень характеристического уравнения (11.4) последовательности $\{a_n\}$.

11.37. Пусть характеристическое уравнение (11.4) последовательности $\{a_n\}$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \quad (n \geqslant 0).$$

11.38. Пусть характеристическое уравнение (11.4) последовательности $\{a_n\}$ имеет корень x_0 кратности 2. Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что

$$a_n = (c_1 + c_2 n)x_0^n \quad (n \geqslant 0).$$

11.39. Найдите формулу n-го члена для последовательностей, заданных условиями ($n \geqslant 0$):

а) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;

б) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$;

в) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;

г) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$;

д) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$.

11.40. При возведении числа $1+\sqrt{2}$ в различные степени, можно обнаружить некоторые закономерности:

$$(1+\sqrt{2})^1 = 1+\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{1},$$
$$(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2} = \sqrt{9}+\sqrt{8},$$
$$(1+\sqrt{2})^3 = 7+5\sqrt{2} = \sqrt{50}+\sqrt{49},$$
$$(1+\sqrt{2})^4 = 17+12\sqrt{2} = \sqrt{289}+\sqrt{288}.$$

Для их изучения определим числа a_n и b_n при помощи равенства $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, ($n \geqslant 0$). (См. также 11.75.)

а) Выразите через a_n и b_n число $(1-\sqrt{2})^n$.

б) Докажите равенство $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

в) Каким рекуррентным уравнениям удовлетворяют последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$?

г) Пользуясь пунктом а), найдите формулы n-го члена для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

д) Найдите связь между числами a_n, b_n и подходящими дробями к числу $\sqrt{2}$.

11.41. Найдите у чисел

а) $(6+\sqrt{35})^{1999}$; б) $(6+\sqrt{37})^{1999}$; в) $(6+\sqrt{37})^{2000}$

первые 1000 знаков после запятой.

11.42. Докажите, что при всех натуральных n выполняется сравнение $[(1+\sqrt{2})^n] \equiv n \pmod 2$.

11.43. а) Найдите количество ломаных, соединяющих начало координат $(0, 0)$ с прямой $x = n-1$, каждое звено которых совпадает с одним из векторов $u = (1, 1)$, $d = (1, -1)$ и $r = (2, 0)$.

б) Сколько существует несамопересекающихся ломаных длины n, начинающихся в начале координат $(0, 0)$, каждое звено которых совпадает с одним из векторов $r = (1, 0)$, $u = (0, 1)$ и $d = (0, -1)$?

11.44. Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ не имеет других решений кроме пар чисел $(\pm a_{2n}, \pm b_{2n})$ $(n \geqslant 0)$ из задачи 11.40.

11.45. Квадратно-треугольные числа. Числа 1, 36 и 1225 являются одновременно квадратными и треугольными:

$$1 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2}{2}, \quad 36 = 6^2 = \frac{8 \cdot 9}{2}, \quad 1225 = 35^2 = \frac{49 \cdot 50}{2}.$$

Опишите все числа, которые обладают таким же свойством.

11.46. Рассмотрим равенства:

$$\begin{gathered}
2 + \sqrt{3} = \sqrt{4} + \sqrt{3}, \\
(2 + \sqrt{3})^2 = \sqrt{49} + \sqrt{48}, \\
(2 + \sqrt{3})^3 = \sqrt{676} + \sqrt{675}, \\
(2 + \sqrt{3})^4 = \sqrt{9409} + \sqrt{9408}.
\end{gathered}$$

Обобщите результат наблюдения и докажите возникшие у вас догадки.

11.47. Докажите, что уравнение

$$(x + y\sqrt{5})^4 + (z + t\sqrt{5})^4 = 2 + \sqrt{5}$$

не имеет решений в рациональных числах x, y, z, t.

11.48. Найдите все целочисленные решения уравнения $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

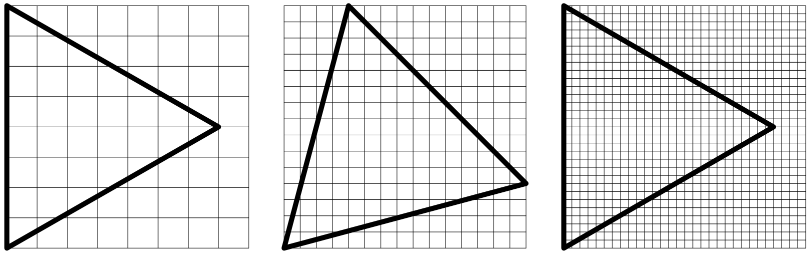
11.49*. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Среди всех правильных треугольников с вершинами в ε-окрестностях различных целых точек (см. задачу 7.105) можно выбрать треугольник наименьшего размера. Будем называть такие треугольники оптимальными. Докажите, что все оптимальные треугольники распадаются на две серии. Первая серия (с точностью до параллельного переноса, поворотов на $\pm 90^\circ$ и симметрий относительно горизонтальных и вертикальных прямых) состоит из треугольников с вершинами вблизи точек $(0, 0)$, (x_n, y_n), $(0, 2y_n)$, где

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\} = \{(2, 1), (7, 4), (26, 15), (97, 56), \ldots\}$$

— решения уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$. Вторая серия (с точностью до тех же движений) — треугольники с вершинами вблизи точек $(0, 0)$, (u_n, v_n), (v_n, u_n), где

$$\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots\} = \{(1, 0), (4, 1), (15, 4), (56, 15), \ldots\}$$

— решения уравнения $u^2 - 4uv + v^2 = 1$, причем $u_n = y_n$, $v_n = y_{n-1}$.



$x_2 = 7,\ y_2 = 4$ $u_3 = 15,\ v_3 = 4$ $x_3 = 26,\ y_3 = 15$

11.50. Пусть ε_k — расстояние от вершин k-го оптимального треугольника до узлов целочисленной решетки. Докажите, что

$$\varepsilon_k = \frac{1}{3}(2-\sqrt{3})^{k/2} = \frac{1}{3}\Big(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\Big)^k = \frac{1}{3}(2\sin 15^\circ)^k.$$

Например, для треугольников, изображенных на рисунках, будем иметь

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{3}(2-\sqrt{3})^2 = 0{,}0239323\ldots < \frac{1}{41},$$
$$\varepsilon_5 = \frac{1}{3}(2-\sqrt{3})^{5/2} = 0{,}0123882\ldots < \frac{1}{80},$$
$$\varepsilon_6 = \frac{1}{3}(2-\sqrt{3})^3 = 0{,}00641263\ldots < \frac{1}{155}.$$

11.51.* Как устроено множество «оптимальных» пятиугольников?

11.52. Для некоторого натурального $m \geqslant 2$ вершины треугольника ABC со сторонами $AB = m-1$, $AC = m$, $BC = m+1$ имеют целые координаты. (Например, такое возможно для $m = 2$, 4, 14.)

а) Докажите, что треугольник ABC можно так расположить на плоскости, что его вершины будут по-прежнему иметь целые координаты, а сторона AC будет параллельна одной из координатных осей.

б) Для каких m такие треугольники существуют?

11.53. Уравнение Пелля. Если D — натуральное число, не являющееся полным квадратом, то уравнение

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

называется уравнением Пелля. Оно всегда имеет бесконечно много решений в целых числах. Для их описания в общем случае применяется метод Браункера (см. [18], гл. 4). Если

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}],$$

k — длина наименьшего периода и $P_{k-1}/Q_{k-1} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1]$, то все решения уравнения Пелля в натуральных числах суть пары

$$(x_n, y_n) = (P_{\delta nk-1}, Q_{\delta nk-1}) \quad (n \geqslant 1),$$

где $\delta = 1$ в случае четного k и $\delta = 2$, если k нечетно. Кроме того, выполняется равенство $x_n + \sqrt{D} y_n = (P_{k-1} + Q_{k-1}\sqrt{D})^{\delta n}$.

Опишите все решения уравнения Пелля в натуральных числах, если а) $D = 10$; б) $D = 13$; в) $D = 14$.

Определение. *Многочлены Фибоначчи* $F_n(x)$ $(n \geqslant 0)$ задаются при помощи начальных условий $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ и рекуррентного соотношения

$$F_{n+1}(x) = x\,F_n(x) + F_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1).$$

Аналогично, *многочлены Люка* $L_n(x)$ определяются равенствами

$$L_0(x) = 2, \quad L_1(x) = x, \quad L_{n+1}(x) = x\,L_n(x) + L_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1).$$

11.54. Многочлены Фибоначчи и Люка. Вычислите несколько первых многочленов Фибоначчи и Люка. Какие значения эти многочлены принимают при $x = 1$?

Докажите, что многочлены Люка связаны с многочлены Фибоначчи соотношениями (сравните с формулами из задачи 3.167):

а) $L_n(x) = F_{n-1}(x) + F_{n+1}(x) \quad (n \geqslant 1)$;
б) $F_n(x)\,(x^2 + 4) = L_{n-1}(x) + L_{n+1}(x) \quad (n \geqslant 1)$;
в) $F_{2n}(x) = L_n(x) \cdot F_n(x) \quad (n \geqslant 0)$;
г) $L_n(x)^2 + L_{n+1}(x)^2 = F_{2n+1}(x)(x^2 + 4) \quad (n \geqslant 0)$;
д) $F_{n+2}(x) + F_{n-2}(x) = (x^2 + 2)F_n(x) \quad (n \geqslant 2)$.

11.55. Разложите функции $F_{n+1}(x)/F_n(x)$ и $L_{n+1}(x)/L_n(x)$ $(n \geqslant 1)$ в цепные дроби. (См. 3.192.)

11.56. Найдите тождества для многочленов Фибоначчи, частными случаями которых являются равенства из задачи 3.149.

11.57. Получите формулу для многочленов Фибоначчи и Люка аналогичную формуле Бине. (См. также 3.160 и 11.94.)

11.58. Докажите, что многочлены Фибоначчи и Люка связаны с многочленами Чебышёва (см. с. 103) равенствами

$$U_n\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{F_{n+1}(ix)}{i^n}, \quad 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{L_n(ix)}{i^n},$$

и проверьте формулы

$$F_n = i^{n-1} U_{n-1}\left(-i/2\right), \qquad L_n = 2 i^n T_n\left(-i/2\right).$$

11.59. Докажите, что для нечетных p выполняется равенство

$$F_n\left(U_{p-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{F_{np}}{F_p},$$

например,

$$F_n(4) = \frac{F_{3n}}{F_3}\ (p=3);\quad F_n(11) = \frac{F_{5n}}{F_5}\ (p=5);\quad F_n(29) = \frac{F_{7n}}{F_7}\ (p=7).$$

11.60. Укажите явный вид коэффициентов в многочленах $F_n(x)$ и $L_n(x)$. Решите задачи 3.163 и 3.164 используя многочлены Фибоначчи. Решите также задачи 3.174 и 3.175 с помощью многочленов Люка.

11.61. Лягушка-путешественница. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?

11.62. Лягушка прыгает по вершинам шестиугольника $ABCDEF$, каждый раз перемещаясь в одну из соседних вершин.

а) Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков?

б) Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя прыгать в D?

в)* **Лягушка-сапер.** Пусть путь лягушки начинается в вершине A, а в вершине D находится мина. Каждую секунду она делает очередной прыжок. Какова вероятность того, что она еще будет прыгать через n секунд? Какова средняя продолжительность жизни таких лягушек?

11.63. Решите аналогичную задачу для восьмиугольника $ABCDEFGH$.

а) Сколькими способами лягушка может попасть из A в E за $2n$ прыжков?

б) Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя попадать в E на предыдущих шагах.

в) Путь лягушки начинается в вершине A, а в вершине E находится мина. Сколько в среднем будет прыгать лягушка?

11.64. Докажите, что для любого числа $p>2$ найдется такое число β, что

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2+p}}}}}_{n \text{ радикалов}} = \beta^{2^{-n}} + \beta^{-2^{-n}}.$$

11.65. Пусть

$$R_n(m) = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2+m}}}}}_{n \text{ радикалов}} = \beta^{2^n} - \beta^{-2^n}.$$

Докажите, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(2)}{R_n(3)}=\frac{3}{2}.$$

11.66. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n-м году роста первоначального растения?

11.67. Докажите, что последовательность $a_n=1+17n^2$ $(n\geqslant 0)$ содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

11.68. Определим последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при помощи условий:
$$x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}\sin^2\alpha,\quad y_n=y_{n-1}+2x_{n-1}\cos^2\alpha,\quad x_0=0,\quad y_0=\cos\alpha.$$
Найдите выражение для x_n и y_n через n и α.

11.69. Пять моряков высадились на остров и к вечеру набрали кучу кокосовых орехов. Дележ отложили на утро. Один из них, проснувшись ночью, угостил одним орехом мартышку, а из остальных орехов взял себе точно $1/5$ часть, после чего лег спать и быстро уснул. За ночь так же поступили один за другим и остальные моряки; при этом каждый не знал о действиях предшественников. На утро они поделили оставшиеся орехи поровну, но для мартышки в этот раз лишнего ореха не осталось. Каким могло быть наименьшее число орехов в собранной куче?

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, которая при заданных $b_0, \ldots, b_{k-1}$ удовлетворяет соотношениям
$$a_{n+k}=b_{k-1}a_{n+k-1}+\ldots+b_0a_n\quad(n=0,1,2,\ldots),\tag{11.5}$$
называется *линейной рекуррентной* (*возвратной*) *последовательностью k-го порядка.*

Уравнение
$$x^k-b_{k-1}x^{k-1}-\ldots-b_0=0$$
называется *характеристическим уравнением* последовательности $\{a_n\}$.

11.70.* Как будет выглядеть формула n-го члена для рекуррентной последовательности k-го порядка, если

а) характеристическое уравнение имеет простые корни $x_1, \ldots, x_k$;

б) характеристическое уравнение имеет корни $x_1, \ldots, x_m$ с кратностями $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ соответственно?

попарно различные

а) действительные б) комплексные

числа. Докажите, что если для любого $n \geqslant n_0$

$$c_1 x_1^n + \ldots + c_k x_k^n = 0,$$

то $c_1 = \ldots = c_k = 0$.

11.71. Пусть характеристическое уравнение (11.4) последовательности (11.3) имеет комплексные корни $x_{1,2} = a \pm ib = re^{\pm i\varphi}$. Докажите, что для некоторой пары чисел c_1, c_2 будет выполняться равенство

$$a_n = r^n (c_1 \cos n\varphi + c_2 \sin n\varphi).$$

11.72. Найдите формулу n-го члена для последовательностей, заданных условиями ($n \geqslant 0$):

а) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 5a_n$;
б) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$;
в) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$;
г) $a_0 = 1$, $a_1 = 8$, $a_{n+2} = 6a_{n+1} + 25a_n$.

11.73.* Пусть $P(n)$ — число последовательностей длины n, составленных из цифр 0 и 1, в которых нули образуют блоки длины 3 или больше. Например, при $n = 4$ таких последовательностей четыре:

$$0000, 0001, 1000, 1111$$

Первые члены этой последовательности суть

$$1, 1, 1, 2, 4, 7, 11, 17, 27, 44, 72, 117, \ldots$$

(считаем, что $P(0) = 1$, т. е. при $n = 0$ существует только пустая последовательность, обладающая нужным свойством). Какому рекуррентному уравнению удовлетворяет последовательность $P(n)$? Найдите формулу для n-го члена этой последовательности. Чему равна вторая конечная разность этой последовательности?

11.74. Каким рекуррентным соотношениям вида (11.5) удовлетворяют последовательности

а) $a_n = n^2$; б) $a_n = n^3$?

11.75. Пусть $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{2} + r_n\sqrt{3} + s_n\sqrt{6}$ ($n \geqslant 0$). Найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{r_n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{s_n}$. (См. также 11.40.)

11.76. Докажите, что для любого целого $n \geqslant 0$ число $a_n = [(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$ делится на 2^{n+1}, но не делится на 2^{n+2}.

11.77. Последовательность Трибоначчи. Последовательность чисел

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots\} = \{0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \ldots, \}$$

задана условиями

$$h_0 = 0, \quad h_1 = 0, \quad h_2 = 1, \quad h_n = h_{n-1} + h_{n-2} + h_{n-3} \quad (n \geqslant 3).$$

Докажите, что существует предел

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n}$$

и найдите явный вид числа η.

11.78.* Пусть a, $b \geqslant 2$ — натуральные числа. Докажите, что если для любого n число $x_n = \dfrac{b^n - 1}{a^n - 1}$ — целое, то $b = a^k$ для некоторого натурального k.

11.3. Производящие функции

Определение. Выражения вида

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{11.6}$$

называются *формальными степенными рядами.*

Формальные степенные ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить, дифференцировать и устраивать их композицию, часто даже не беспокоясь о сходимости.

Определение. *Производной* формального степенного ряда (11.6) называется ряд

$$F'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

11.79. Найдите произведения следующих формальных степенных рядов:

а) $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$;

б) $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^2$;

в) $\Bigl(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots\Bigr)\Bigl(1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \ldots + \dfrac{(-x)^n}{n!} + \ldots\Bigr)$.

11.80. Обращение степенного ряда. Докажите, что если $a_0 \neq 0$, то для ряда $F(x)$ существует ряд $F^{-1}(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots$ такой, что $F(x)F^{-1}(x) = 1$.

11.81. Вычислите:

а) $(1 + x)^{-1}$; б) $(1 - x)^{-1}$; в) $(1 - x)^{-2}$.

Определение. Пусть $\{a_n\} = a_0, a_1, \ldots$ — произвольная числовая последовательность. Формальный степенной ряд

$$F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

будем называть *производящей функцией* этой последовательности.

11.82. Пусть $F(x)$ — производящая функция последовательности $\{a_n\}$. Докажите равенство $a_n = \left.\dfrac{F^{(n)}(x)}{n!}\right|_{x=0}$.

11.83. Вычислите производящие функции следующих последовательностей:

а) $a_n = n$; б) $a_n = n^2$; в) $a_n = C_m^n$.

11.84. Вычислите суммы:

а) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$; б) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \ldots + n^2C_n^n$.

11.85. Пусть a_n — число решений уравнения

$$x_1 + \ldots + x_k = n \tag{11.7}$$

в целых неотрицательных числах и $F(x)$ — производящая функция последовательности a_n. Докажите равенства:

а) $F(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^k$; б) $F(x) = (1 - x)^{-k}$.

11.86. Пусть, как и раньше, a_n — число решений уравнения (11.7) в целых неотрицательных числах. Найдите формулу для a_n, пользуясь задачей 11.82. (См. также 2.76.)

11.87. Докажите тождество:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^9)(1 + x^{10} + x^{20} + \ldots + x^{90})\times$$
$$\times (1 + x^{100} + x^{200} + \ldots + x^{900}) \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

(См. также 1.2.)

11.88. Бином Ньютона для отрицательных показателей. Докажите, что для всех неотрицательных n выполняются равенства

а) $C_{-n}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k$; б) $(1 + x)^{-n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{-n}^k x^k$.

11.89. Вычислите производящие функции следующих последовательностей:

а) $a_n = C_{m+n}^m$; б) $a_n = C_n^m$.

11.90. Счастливые билеты. Предположим, что у нас имеется 1 000 000 автобусных билетов с номерами от 000 000 до 999 999. Будем называть билет счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних. Пусть N — количество счастливых билетов. Докажите равенства:

а) $(1+x+\ldots+x^9)^3(1+x^{-1}+\ldots+x^{-9})^3 = x^{27}+\ldots+a_1x+N+a_{-1}x^{-1}+\ldots$ $\ldots + x^{-27}$;

б) $(1 + x + \ldots + x^9)^6 = 1 + \ldots + Nx^{27} + \ldots + x^{54}$.

11.91. Найдите число счастливых билетов.

Определение. Назовем *экспонентой* степенной ряд

$$\mathrm{Exp}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

11.92. Докажите следующие свойства экспоненты:
а) $\mathrm{Exp}'(z) = \mathrm{Exp}(z)$; б) $\mathrm{Exp}((\alpha+\beta)z) = \mathrm{Exp}(\alpha z)\cdot\mathrm{Exp}(\beta z)$.
(См. также 7.56.)

11.93. Функции a, b и c заданы рядами

$$\begin{aligned} a &= 1 + C_n^3 x^3 + C_n^6 x^6 + \ldots, \\ b &= C_n^1 x + C_n^4 x^4 + C_n^7 x^7 + \ldots, \\ c &= C_n^2 x^2 + C_n^5 x^5 + C_n^8 x^8 + \ldots \end{aligned}$$

Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (1 + x^3)^n.$$

(См. также 9.8.)

11.94. Докажите, что производящая функция последовательности чисел Фибоначчи

$$F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \ldots + F_n z^n + \ldots$$

может быть записана в виде

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi z} - \frac{1}{1-\widehat{\varphi} z}\right),$$

где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Пользуясь результатом задачи 11.82, получите формулу Бине. (См. также 3.160 и 11.57.)

11.95. Докажите, что бесконечная сумма

$$0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}002 + 0{,}0003 + 0{,}00005 + 0{,}000008 + 0{,}0000013 + \ldots$$

сходится к рациональному числу.

11.96. Найдите производящую функцию последовательности чисел Люка

$$L(z) = L_0 + L_1 z + L_2 z^2 + \ldots + L_n z^n + \ldots.$$

Пользуясь этой функцией, выразите L_n в замкнутой форме через φ и $\hat{\varphi}$. (См. также 3.170.)

11.97. Найдите производящую функцию последовательности Трибоначчи из задачи 11.77.

11.98*. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел, равных количеству наборов из нулей и единиц длины n, в которых не встречается трех нулей подряд:

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{1, 2, 4, 7, 13, 24, \dots\}.$$

(При $n=0$ существует единственная последовательность длины n — пустая. Она, конечно не содержит трех нулей подряд, поэтому естественно считать, что $a_0 = 1$.)

Найдите производящую функцию этой последовательности и вычислите предел

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

11.99. Вычислите производящую функцию последовательности $P(n)$ из задачи 11.73. Найдите формулу для n-го члена этой последовательности с помощью полученной производящей функции.

11.100. Вычислите суммы

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{2^n}$.

11.101. Производящие функции многочленов Фибоначчи и Люка. Найдите производящие функции последовательности многочленов Фибоначчи

$$F(x, z) = F_0(x) + F_1(x)z + F_2(x)z^2 + \ldots + F_n(x)z^n + \ldots$$

и последовательности многочленов Люка

$$L(x, z) = L_0(x) + L_1(x)z + L_2(x)z^2 + \ldots + L_n(x)z^n + \ldots$$

11.102. Производящие функции многочленов Чебышёва. Найдите производящие функции последовательностей многочленов Чебышёва первого и второго рода (см. 7.39):

$$F_T(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)z^n, \quad F_U(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)z^n.$$

11.103. Вычислите, используя производящие функции, следующие суммы:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k x^k$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,2^k$; в) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2 2^k$; г) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k \sin kx$.

11.104. Найдите производящую функцию линейной рекуррентной последовательности второго порядка, заданной соотношением (11.2) и начальными членами a_0, a_1.

Определение. *Разбиением* называется представление натурального числа в виде суммы натуральных слагаемых. Порядок слагаемых считается несущественным. Например, разбиения $3 = 1 + 2$ и $3 = 2 + 1$ не различаются.

11.105. Пусть $p(n)$ — количество разбиений числа n. Докажите равенства:

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 \ldots = (1 + x + x^2 + \ldots) \ldots (1 + x^k + x^{2k} + \ldots) \ldots =$$
$$= (1 - x)^{-1}(1 - x^2)^{-1}(1 - x^3)^{-1} \ldots$$

(По определению считается, что $p(0) = 1$.)

11.106. На доске написано n натуральных чисел. Пусть a_k — количество тех из них, которые больше k. Исходные числа стерли и вместо них написали все положительные a_k. Докажите, что если с новыми числами сделать то же самое, то на доске окажется исходный набор чисел. Например, для чисел 5, 3, 3, 2, получается следующая цепочка

$$(5, 3, 3, 2) \to (4, 4, 3, 1, 1) \to (5, 3, 3, 2).$$

11.107. Докажите, что каждое целое положительное число n может быть $2^{n-1} - 1$ различными способами представлено в виде суммы *меньших* целых положительных слагаемых, если два представления, отличающихся хотя бы порядком слагаемых, считать различными. Например, лишь $2^{4-1} - 1 = 7$ следующих сумм имеют значение 4:

$$1+1+1+1, \quad 1+1+2, \quad 1+2+1, \quad 2+1+1, \quad 2+2, \quad 1+3, \quad 3+1.$$

11.108. Каждое положительное число n можно представить в виде суммы различных слагаемых, причем это можно сделать столькими же способами, сколькими способами это же число представимо в виде суммы различных слагаемых. Например, все возможные представления числа 6 посредством различных слагаемых будут:

$$6, \quad 1 + 5, \quad 2 + 4, \quad 1 + 2 + 3,$$

посредством нечетных:

$$1 + 5, \quad 3 + 3, \quad 1 + 1 + 1 + 3, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Для доказательства этого факта обозначим через $d(n)$ количество разбиений числа n на различные слагаемые, а через $l(n)$ — на нечетные. Установите равенства:

а) $d(0) + d(1)x + d(2)x^2 + \ldots = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \ldots$;

б) $l(0) + l(1)x + l(2)x^2 + \ldots = (1 - x)^{-1}(1 - x^3)^{-1}(1 - x^5)^{-1} \ldots$;

в) $d(n) = l(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

(Считается по определению, что $d(0) = l(0) = 1$.)

11.109.* Придумайте какое-либо взаимно однозначное соответствие между разбиениями натурального числа на различные и на нечетные слагаемые. В этом могут помочь диаграммы Юнга, уже упоминавшиеся в разделе 10.4, с. 182.

11.110. Определите коэффициент a_n в разложении

$$(1+qx)(1+qx^2)(1+qx^4)(1+qx^8)(1+qx^{16})\ldots = \\ = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

(См. также 5.78.)

11.111. Каков знак n-го члена в разложении произведения

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ldots = \\ = 1 - a - b + ab - c + ac + bc - abc - d + \ldots \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)?$$

(См. также 5.88.)

11.112. Найдите общую формулу для коэффициентов ряда

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

11.113. Переменные x и y связаны равенством

$$x = y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n + \ldots$$

Разложите y по степеням x.

11.114. Переменные x и y связаны равенством

$$x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \ldots$$

Разложите y по степеням x.

11.115. Пусть $C(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_nz^n$ — производящая функция последовательности чисел Каталана $\{C_n\}$. С помощью рекуррентного соотношения из задачи 2.125 докажите, что она удовлетворяет равенству

$$C(z) = zC^2(z) + 1,$$

и получите явный вид функции $C(z)$.

11.116. Выведите формулы для чисел Каталана из задачи 2.124, воспользовавшись результатом предыдущей задачи и равенством

$$(1-z)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^n(-z)^n,$$

где

$$C_{1/2}^n = \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!}$$

— частный случай обобщенных биномиальных коэффициентов (смотрите определение на с. 188).

11.4. Многочлены Гаусса

Определение. Для целых неотрицательных k и l определим функции $g_{k,l}(x)$ равенством

$$g_{k,l}(x) = \frac{(1-x^{l+1})(1-x^{l+2})\dots(1-x^{l+k})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}.$$

11.117. Вычислите функции $g_{k,l}(x)$ при $0 \leqslant k+l \leqslant 4$ и покажите, что все они являются многочленами.

11.118. Докажите следующие свойства функций $g_{k,l}(x)$:

а) $g_{k,l}(x) = \dfrac{h_{k+l}(x)}{h_k(x)\cdot h_l(x)}$,

где $h_m(x) = (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)$ $(h_0(x)=1)$;

б) $g_{k,l}(x) = g_{l,k}(x)$;

в) $g_{k,l}(x) = g_{k-1,l}(x) + x^k g_{k,l-1}(x) = g_{k,l-1}(x) + x^l g_{k-1,l}(x)$;

г) $g_{k,l+1}(x) = g_{0,l}(x) + xg_{1,l}(x) + \dots + x^k g_{k,l}(x)$;

д) $g_{k,l}(x)$ — многочлен относительно x степени kl.

Многочлены $g_{k,l}(x)$ называются *многочленами Гаусса*. Их свойства во многом аналогичны свойствам биномиальных коэффициентов. В частности, среди многочленов они играют ту же роль, что и биномиальные коэффициенты среди чисел.

11.119. Определение функций $g_{k,l}(x)$ не позволяет вычислять их значения при $x=1$. Но, поскольку функции $g_{k,l}(x)$ являются многочленами, они определены и при $x=1$. Докажите равенство $g_{k,l}(1) = C_{k+l}^k$. Какие свойства биномиальных коэффициентов получаются, если в свойства б)—г) из задачи 11.118 подставить значение $x=1$?

11.120. Найдите сумму

$$S_l(x) = g_{0,l}(x) - g_{1,l-1}(x) + g_{2,l-2}(x) - \dots + (-1)^l g_{l,0}(x).$$

11.121. Обозначим через $P_{k,l}(n)$ количество разбиений числа n на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит l. Докажите равенства: а) $P_{k,l}(n) - P_{k,l-1}(n) = P_{k-1,l}(n-l)$; б) $P_{k,l}(n) - P_{k-1,l}(n) = P_{k,l-1}(n-k)$; в) $P_{k,l}(n) = P_{l,k}(n)$; г) $P_{k,l}(n) = P_{l,k}(kl-n)$.

11.122. Пусть $f_{k,l}(x)$ — производящая функция последовательности $P_{k,l}(n)$:

$$f_{k,l}(x) = P_{k,l}(0) + xP_{k,l}(1) + \ldots + x^{kl}P_{k,l}(kl).$$

а) Докажите равенства:

$$f_{k,l}(x) = f_{k-1,l}(x) + x^k f_{k,l-1}(x) = f_{k,l-1}(x) + x^l f_{k-1,l}(x).$$

б) Докажите, что функции $f_{k,l}(x)$ совпадают с многочленами Гаусса $g_{k,l}(x)$.

11.123. Докажите, что при любых k и l многочлен $g_{k,l}(x)$ является возвратным, то есть $x^{kl}g_{k,l}(1/x) = g_{k,l}(x)$. Решите задачу двумя способами: пользуясь определением многочленов Гаусса и при помощи свойств чисел $P_{k,l}(n)$ из задачи 11.121.

11.124. Докажите, что

$$P_{kl}(0) + P_{kl}(1) + P_{kl}(2) + \ldots + P_{kl}(kl) = C_{k+l}^{k},$$

не используя свойства многочленов Гаусса.

Глава 12
Шутки и ошибки

12.1. Ученик Коля Васин при помощи метода математической индукции смог доказать, что в любом табуне все лошади одной масти.

Если есть только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Для индуктивного перехода предположим, что есть n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до $n-1$ одинаковой масти. Аналогично лошади с номерами от 2 до n также имеют одинаковую масть. Но лошади с номерами от 2 до $n-1$ не могут менять свою масть в зависимости от того как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому все n лошадей должны быть одинаковой масти.

Есть ли ошибка в этом рассуждении, и если есть, то какая? (См. также 1.4.)

12.2. Иногда вычитая дроби можно вычитать их числители и складывать знаменатели. Например:

$$\frac{9-25}{6+10}=\frac{9}{6}-\frac{25}{10};\qquad \frac{8-50}{2+5}=\frac{8}{2}-\frac{50}{5}.$$

Для каких дробей это возможно?

12.3. Докажите, что равные дроби можно смело складывать по правилу «числитель с числителем, знаменатель со знаменателем» и результат при этом не изменится:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Например, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1+3}{2+6}=\dfrac{4}{8}$.

12.4. Найдите все дроби с числителем и знаменателем не превосходящими 100, в которых можно проводить сокращение на равные цифры. Примером может служить равенство

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}.$$

12.5. Легко проверить равенства

$$\log\left(16+\frac{16}{15}\right)=\log 16+\log\frac{16}{15};\qquad \log\left(\frac{64}{7}-8\right)=\log\frac{64}{7}-\log 8.$$

В каких еще случаях можно выносить логарифм за скобку?

12.6. При каких значениях a и b возможно равенство

$$\sin a + \sin b = \sin(a+b)?$$

12.7. Квадраты двух зеркальных чисел 12 и 21 также являются зеркальными числами (144 и 441). Какие двузначные числа обладают аналогичным свойством? И дополнительный вопрос: в каких системах счисления число 441 будет полным квадратом?

12.8. Черная пятница. Докажите, что тринадцатое число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели. Предполагается, что мы живем по Григорианскому стилю (см. 3.203).

12.9. Коля Васин, решая задачу, получил в ответе шестизначное число. А потом он подумал, что это произведение двух трехзначных чисел и выполнил умножение. Каким был первоначальный ответ, если второй ответ оказался в три раза меньше?

12.10. Восстановите алфавит племени Мумбо-Юмбо из задачи 2.6.

12.11. Найдите коэффициент при x у многочлена

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-z).$$

12.12. Вычислите произведение

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\ldots\cdot\sin\omega.$$

12.13. «$1=-1$». Изучив комплексные числа, Коля Васин решил вывести формулу, которая носила бы его имя. После нескольких попыток ему это удалось:

$$\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{\frac{-1}{1}}\Rightarrow\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}\Rightarrow\sqrt{1}\sqrt{1}=\sqrt{-1}\sqrt{-1}\Rightarrow 1=-1.$$

После некоторых размышлений, Коля придумал более короткое доказательство своего тождества:

$$-1=i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1.$$

Не ошибся ли где-нибудь Коля Васин? (См. также 7.25.)

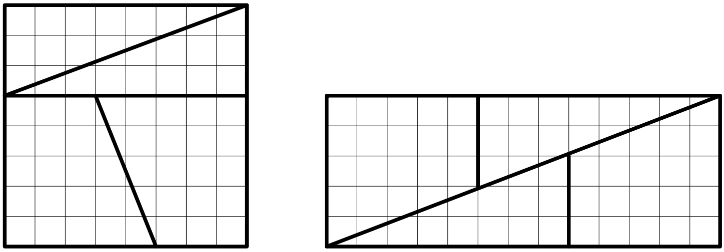
12.14. После экспериментов с мнимой единицей, Коля Васин занялся комплексной экспонентой. Пользуясь формулами задачи 7.55, он смог доказать, что $\sin x$ всегда равен нулю, а $\cos x$ — единице:

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{(e^{2\pi i})^{x/(2\pi)}-(e^{-2\pi i})^{x/(2\pi)}}{2i}=\frac{1-1}{2i}=0;$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{(e^{2\pi i})^{x/(2\pi)}+(e^{-2\pi i})^{x/(2\pi)}}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

Где ошибка в приведенных равенствах? (См. также 7.59.)

12.15. «65 = 64 = 63». Тождество Кассини ((См. задачу 3.146.)) лежит в основе одного геометрического парадокса. Он заключается в том, что можно взять шахматную доску, разрезать ее на четыре части, как показано ниже, а затем составить из этих же частей прямоугольник:



Как расположить те же четыре части шахматной доски, чтобы доказать равенство «64 = 63»?

12.16. Докажите, что всякое число, записываемое на английском языке без буквы «e», обязательно четное.

12.17. Гольдбах без буквы «д». Известно, что всякое достаточно большое нечетное число n можно представить в виде

$$n = p_1 + p_2 + p_3,$$

где p_1, p_2, p_3 — простые числа (тернарная проблема Гольдбаха). Докажите, что существует бесконечно много n для которых такого представления нет, если считать, что $p_1, p_2, p_3 > 5$ и при записи чисел p_1, p_2, p_3 на русском языке запрещено использовать букву «д».

12.18. Из километров — в мили. В задаче 3.159 была введена фибоначчиева система счисления. Она оказывается удобной, когда нужно сделать перевод расстояния из километров в мили или наоборот.

Предположим, что мы хотим узнать, сколько миль в 30 километрах. Для этого представляем число 30 в фибоначчиевой системе счисления:

$$30 = 21 + 8 + 1 = F_8 + F_6 + F_2 = (1010001)_F.$$

Теперь нужно сдвинуть каждое число на одну позицию вправо, получая

$$F_7 + F_5 + F_1 = 13 + 5 + 1 = 19 = (101001)_F.$$

Поэтому предполагаемый результат — 19 миль. (Правильный ответ — около 18,46 миль.) Аналогично делается перевод из миль в километры.

Объясните, почему работает такой алгоритм. Проверьте, что он дает округленное число миль в n километрах при всех $n \leqslant 100$, отличающееся от правильного ответа меньше чем на $2/3$ мили.

12.19. Обозначим через S сумму следующего ряда:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots \tag{12.1}$$

Преобразовав равенство (12.1), можно получить уравнение, из которого находится S:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S \Rightarrow S = \frac{1}{2}.$$

Сумму S можно также найти объединяя слагаемые ряда (12.1) в пары:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0;$$
$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots = 1.$$

Наконец, переставив местами соседние слагаемые, получаем еще одно значение S:

$$S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = -1.$$

Итак, действуя четырьмя разными способами, мы нашли четыре значения суммы S:

$$S = \frac{1}{2} = 0 = 1 = -1.$$

Какое же значение имеет сумма S в действительности?

Ответы, указания, решения

Глава 1. Метод математической индукции

1.7. При $n \geqslant 1$ выполняется равенство $2^{n+2} - 7A_n^2 = B_n^2$, где $\{B_1, B_2, \ldots\} = \{-1, -3, 5, \ldots\}$ — последовательность, задаваемая начальными условиями $B_1 = -1$, $B_2 = -3$ и рекуррентным соотношением $B_n = -B_{n-1} - 2B_{n-2}$.

1.15. Воспользуйтесь тождеством из задачи 1.14.

1.16. $a_n = 2^n + 1$ $(n \geqslant 0)$.

1.26. При $n = 1$ утверждение задачи очевидно. Предположим, что утверждение справедливо для некоторого $n \geqslant 1$ и докажем его для $n+1$. Назовем набор чисел допустимым, если ни одно из них не делится ни на какое другое. Пусть нам удалось среди чисел от 1 до $2n+2$ найти допустимый набор из $n+2$ чисел. В этом наборе будут обязательно присутствовать числа $2n+1$ и $2n+2$, так как иначе получается противоречие с индукционным предположением. Другие n чисел из допустимого набора обозначим $a_1, \ldots, a_n$. Среди них нет числа $n+1$ и его делителей, так как $n+1 \mid 2n+2$. Поэтому, дополняя набор $a_1, \ldots, a_n$ числом $n+1$, получаем снова допустимый набор. Но он состоит из $n+1$ числа в пределах от 1 до $2n$, что снова противоречит предположению индукции.

Мы доказали даже чуть более сильное утверждение: среди любых $n+1$ натуральных чисел, меньших $2n$, есть два числа, отношение которых — степень числа 2.

1.27. $x = 1, 2, \ldots, n$.

1.37. База индукции $(n = 2)$ проверяется непосредственно. Пусть $n \geqslant 3$. Перенумеруем переменные $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы выполнялись условия $x_n \geqslant 1$, $x_{n-1} \leqslant 1$. К произведению $x_1 x_2 \ldots (x_{n-1} x_n)$ можно применить предположение индукции, поэтому

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n \geqslant n - 1. \tag{13.1}$$

Далее, так как $x_n \geqslant 1$ и $x_{n-1} \leqslant 1$, то

$$(x_n - 1)(1 - x_{n-1}) \geqslant 0. \tag{13.2}$$

Складывая формулы (13.1) и (13.2), получаем требуемое неравенство:

$$x_1 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

Для доказательства неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим остается применить доказанное утверждение к набору чисел

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}.$$

1.38. Для перехода от n к $n-1$ выберите $x_n = (x_1 + \ldots + x_{n-1})/(n-1)$.

1.41. $\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

1.43. Самое короткое решение содержит $2^8 - 1$ перемещений.

1.44. $3^8 - 1$.

1.45. $2 \cdot 3^7 - 1$.

1.47. Если квадрат допускает разбиение на n квадратов, то он допускает разбиение и на $n+3$ квадрата (достаточно один из квадратов разрезать на четыре). Разобьем все натуральные числа на три арифметические прогрессии $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$, и в каждой из них найдем минимальное n, для которого задача имеет решение. В первой прогрессии минимальное такое n равно 6, во второй — 4, в третьей — 8. (Требуемые разбиения строятся из квадратов 3×3, 2×2 и 5×5.)

1.49. а) 2 кольца $(11 = 1 + 1 + 3 + 6)$. б) Из $(n+1)2^n - 1$ колец.

1.50. Банк может выдать суммы 8, 9 и 10 рублей. Прибавляя к ним нужное количество трехрублевых купюр, можно получить любую бо́льшую сумму.

1.52. $1 + n(n+1)/2$.

1.53. $n^2 - n + 2$.

1.54. $n^2 - n + 2$.

1.55. $(n^3 + 5n + 6)/6$.

1.60. $k + mk - m$.

1.61. Проведите индукцию по числу граней.

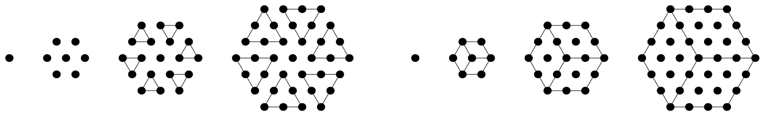
1.62. Пусть не все точки лежат на одной прямой. Проведем прямую через каждую пару точек и рассмотрим всевозможные пары: прямая и не лежащая на ней точка. Противоречие получается, если рассмотреть пару, в которой расстояние от точки до прямой минимально.

1.63. Пусть a_n число невырожденных треугольников периметра n с целыми длинами сторон. Докажите, что

$$a_n = a_{n-3} + \begin{cases} \left[\dfrac{n-1}{4}\right], & \text{если } n \text{ — нечетно;} \\ 0, & \text{если } n \text{ — четно.} \end{cases}$$

Отсюда $a_{100} = 24 + 23 + 21 + 20 + \ldots + 3 + 2 = 208$.

1.66. Алгебраические доказательства следуют из формулы $X(n) = 3n^2 - 3n + 1$, а геометрические — из рисунков:



1.68. Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности воспользуемся индукцией и допустим, что утверждение справедливо, если число юношей меньше m. (Ясно, что при $m=1$ утверждение является верным.) Предположим, что число юношей равно m и рассмотрим два возможных случая.

1) Сначала будем считать, что любые k юношей $(1 \leqslant k < m)$ в совокупности знакомы по крайней мере с $k+1$ девушкой. Тогда, если взять любого юношу и женить его на любой знакомой ему девушке, то для оставшихся $m-1$ юношей остается верным первоначальное условие. По предположению индукции их можно женить на знакомых девушках.

2) Предположим теперь, что имеются k юношей $(1 \leqslant k < m)$, которые в совокупности знакомы ровно с k девушками. По индуктивному предположению этих k юношей можно женить. Остаются еще $m-k$ юношей, но любые h из них $(1 \leqslant h \leqslant m-k)$ должны быть знакомы по крайней мере с h девушками из оставшихся, поскольку в противном случае эти h юношей вместе с уже выбранными k юношами будут знакомы меньше, чем с $h+k$ девушками, а это противоречит нашему предположению. Следовательно, для этих $m-k$ юношей выполнено первоначальное условие, и по предположению индукции их тоже можно женить на знакомых девушках.

Глава 2. Комбинаторика

2.1. а) 24. б) 28.
2.2. $9 \cdot 10^6$.
2.3. $10^3 \cdot 30^3$.
2.4. Школьников в 32/29 раза больше.
2.5. $6^5 \cdot 8^4 + 6^4 \cdot 8^5$.
2.6. 40.
2.7. $9 \cdot 10^4 \cdot 2$.
2.8. $9 \cdot 10^5 - 5^6$.
2.9. $9 \cdot 10^9 - 9 \cdot 9!$.
2.10. Чисел, в записи которых есть единица, больше: $8 \cdot 9^6 < 9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6$.

2.11. 357. Указание: обратите особое внимание на числа 23723, 23737 и 37237.

2.12. $9 \cdot 10^2$

2.13. $9 \cdot 10^7 \cdot 5$.

2.14. 3^7.

2.15. 5^4.

2.16. Найдите число способов поставить фишки на поля одного цвета и на поля разных цветов. *Ответ*: нет.

2.18. а) 26; б) 51.

2.19. 38.

2.20. Если всего имеется n точек, то из каждой выходит от 0 до n линий. Но не может быть двух точек таких, что из одной выходит n линий, а из другой — 0.

2.21. Если взять $k+1$ карточку с нечетными номерами, то условие задачи будет выполнено. Если взять $k+2$ карточки, то рассматривая разности чисел на них, мы получим не менее $k+1$ различных чисел от 1 до $2k$. Поэтому хотя бы одно из них не совпадет с числами на $k-1$ невыбранной карточке.

2.22. Шахматная доска может быть разбита на 16 квадратов 2×2. Если на доске более 16 королей, то два из них попадут в такой квадрат и будут бить друг друга. *Ответ*: 16.

2.23. В каждой из 50 пар женщина находиться не может.

2.24. Пусть $N(k, l)$ и $N(k, r)$ — количества левых и правых сапог k-го размера соответственно. По условию задачи

$$N(k, l) + N(k, r) = 200 \quad (k = 41, 42, 43);$$
$$N(41, l) + N(42, l) + N(43, l) = 300;$$
$$N(41, r) + N(42, r) + N(43, r) = 300.$$

Не может случиться так, что для каждого размера левых (правых) сапог меньше чем правых (левых). Без ограничения общности будем считать, что

$$N(41, l) \leqslant N(41, r), \quad N(42, l) \leqslant N(42, r), \quad N(43, l) \geqslant N(43, r).$$

Тогда количество годных пар

$$N(41, l) + N(42, l) + N(43, r) = 300 - N(43, l) + N(43, r) \geqslant 100.$$

2.25. См. задачу 2.20.

2.26. Указание: рассмотрите множества $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 6\}$, $\{7, 10\}$, $\{8, 11\}$, $\{9, 12\}$, $\{13, 16\}$, …, $\{91, 94\}$, $\{92, 95\}$, $\{93, 96\}$, $\{97, 100\}$, $\{98\}$, $\{99\}$.

2.27. Расположим данные числа в порядке возрастания и разобьем их на группы по цифре десятков. Число m таких групп удовлетворяет условиям $6 \leqslant m \leqslant 10$. Среди m групп найдется группа A_6, в которой не менее 6-ти чисел. Аналогично (методом от противного) устанавливается существование групп $A_5, \ldots, A_1$. Первое число возьмем из A_1. Второе — из A_2, так чтобы цифра единиц отличалась от цифры единиц первого числа и т. д.

2.29. 999.

2.30. Докажем по индукции, что если из чисел от 1 до $2n-2$ ($n \geqslant 3$) выбрано $n+1$ различное число, то из них можно выбрать три таких числа, что сумма двух из них равна третьему. При $n=3$ утверждение задачи очевидно. Предположим, что утверждение доказано для $n=k$ и рассмотрим случай $n=k+1$. Если $k+1$ из выбранных чисел попали в промежуток от 1 до $2k-2$, то применимо предположение индукции. Если же это не так, то обязательно должны быть выбраны числа $2k-1$ и $2k$. Другие k выбранных чисел находятся на отрезке от 1 до $2k-2$. Разбивая этот отрезок на пары $(1, 2k-2)$, $(2, 2k-3)$, $\ldots$, $(k-1, k)$, получаем, что одна из пар состоит из выбранных чисел. Но тогда они дают в сумме $2k-1$. Если число 1002 заменить на 1001, то утверждение перестанет быть верным. Примером может служить набор 1000, 1001, $\ldots$, 2000. Другой вариант — воспользоваться методом из решения задачи 2.21

2.32. Пусть в турнире участвуют n команд. Тогда разыгрывается $\dfrac{n(n-1)}{2}$ очков. Команды могли набрать разное количество очков (0, 1, $\ldots$, $n-1$) лишь после окончания турнира. Поэтому предпоследняя команда набрала 1 очко и обязана была проиграть победителю.

2.33. Пусть доска раскрашена в два цвета. Рассмотрим произвольный столбец. Один из цветов встречается в нем бесконечное число раз. Зафиксируем этот цвет. Вычеркнем из таблицы все строчки, которые в выбранном столбце не содержат зафиксированный цвет. Покажите, что в оставшейся таблице можно найти четыре нужные клетки. Для решения задачи с произвольным числом цветов, примените индукцию.

2.35. Рассмотрим произвольную из 6-ти данных точек. По крайней мере 3 отрезка, выходящие из этой точки, окрашены в один цвет. Можно считать эти отрезки синими. Если два из их концов соединены отрезком синего цвета, то нужный треугольник найден. Если это не так, то концы отрезков образуют треугольник красного цвета.

2.36. Рассмотрим n последовательностей

$$\begin{gathered}
\{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^k, \ldots\},\\
\{3, 6, 12, 24, \ldots, 3\cdot 2^k, \ldots\},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\{2n-1, (2n-1)2, (2n-1)4, \ldots, (2n-1)\cdot 2^k, \ldots\}.
\end{gathered}$$

Каждое число в пределах от 1 до $2n$ принадлежит одной из этих последовательностей. Значит, из $(n+1)$-го выбранного числа хотя бы два окажутся в одной и той же последовательности.

2.37. Рассмотрите числа $\{0\alpha\}$, $\{1\alpha\}$, ..., $\{\tau\alpha\}$, лежащие в полуинтервале $[0, 1)$, разбитом на τ непересекающихся полуинтервалов точками

$$0, \frac{1}{\tau}, \frac{2}{\tau}, \ldots, \frac{\tau-1}{\tau}, \frac{\tau}{\tau}=1.$$

2.39. В единичном n-мерном кубе $[0, 1)^n$ рассмотрим τ^n+1 точек с координатами

$$(\{s\alpha_1\}, \{s\alpha_2\}, \ldots, \{s\alpha_n\}) \quad (s=0, 1, \ldots, \tau^n).$$

Если ребра куба поделить на τ равных частей точками

$$0, \frac{1}{\tau}, \frac{2}{\tau}, \ldots, \frac{\tau-1}{\tau}, \frac{\tau}{\tau}=1,$$

то весь куб разобьется на τ^n маленьких кубов, в одном из которых окажется по крайней мере 2 точки

$$(\{b'\alpha_1\}, \{b'\alpha_2\}, \ldots, \{b'\alpha_n\}) \quad \text{и} \quad (\{b''\alpha_1\}, \{b''\alpha_2\}, \ldots, \{b''\alpha_n\}).$$

Это означает, что для некоторых целых a''_j, a'_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ будут выполняться неравенства

$$|(b''-b')\alpha_j-(a''_j-a'_j)|<\frac{1}{\tau}, \quad \text{или} \quad \left|\alpha_j-\frac{a_j}{b}\right|<\frac{1}{b\tau} \quad (j=1, 2, \ldots, n),$$

где $a_j=a''_j-a'_j$, $b=b''-b'\leqslant\tau^n$ — целые числа.

2.42. 17!.

2.44. 8!.

2.45. 16!.

2.46. 16!/2.

2.47. $28\cdot 6!\cdot 1111111$.

2.48. а) 28!; б) $28!-27\cdot 2\cdot 26!$.

2.49. C_9^4.

2.50. C_{28}^4, C_{27}^3.

2.51. $2\cdot C_{10}^7+1\cdot C_{10}^6$.

2.52. C_n^2.

2.53. C_n^2.

2.54. $C_n^2\cdot C_m^2$.

2.55. По условию задачи, любые 5 человек сейф открыть не могут. Значит у них нет ключа от некоторого замка. При этом любой другой член комиссии должен этот ключ иметь. Поэтому нужно поставить C_9^5 замков. 4 ключа от каждого замка отдаются некоторой четверке членов комиссии, причем разные ключи раздаются разным четверкам. При этом, если соберутся 6 человек, то среди них будет по представителю из каждой четверки и они смогут открыть все замки.

В общем случае понадобится C_n^{m-1} замков и $n-m+1$ ключ к каждому из них.

2.56. $C_7^5 \cdot C_9^5$.

2.60. Рассмотрите $n = 2a - 1$.

2.61. б) $C_k^2 - k$.

2.62. n.

2.63. а) $5!$; б) $6!/2$; в) $8!/3!$; г) $11!/(2!\cdot 3!)$; д) $11!/(4!\cdot 2!\cdot 2!)$; е) $13!/(2!)^4$. В общем случае ответ задается формулой $\dfrac{n!}{k_1!\ldots k_m!}$.

2.64. Каждому маршруту можно поставить в соответствие слово, состоящее из m букв «x» и n букв «y» по следующему правилу: если делается шаг параллельно оси Ox, то пишем «x», если вдоль оси Oy, то пишем «y». Таких слов всего

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!} = C_{m+n}^m = C_{m+n}^n.$$

2.65. Поставьте в соответствие каждому маршруту кузнечика слово, в котором по 9 раз встречаются буквы x, y и z. *Ответ*: $27!/(9!)^3$.

2.67. $\left[\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}\right]^2$.

2.68. а) $\dfrac{1}{2}C_{12}^6$. б) $\dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{24!}{(6!)^4}$.

2.69. Выбор множеств A и B равносилен приписыванию каждому элементу множества C одной из букв a, b или c. В обоих случаях ответ 3^n.

2.71. $\dfrac{32!}{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 2!}$.

2.72. Каждому такому числу однозначно соответствует выбор 6-ти цифр из набора 9876543210. *Ответ*: C_{10}^6.

2.73. Из $(m+1)$-й позиции ($m-1$ место между белыми шарами и два места по краям) нужно выбрать n позиций, в которые будут положены черные шары. *Ответ*: C_{m+1}^n.

2.74. C_{19}^5; C_{m-1}^{n-1}.

2.75. C_{25}^5.

2.76. а) C_{999}^2; б) C_{1002}^2.

2.77. C_{22}^5.

2.78. $11^3 = C_3^0 10^3 + C_3^1 10^2 + C_3^2 10^1 + C_3^3 10^0$, $11^4 = 14641$.

2.79. 2^7.

2.80. В этой задаче возможны различные ответы. Можно, например, расположить сверху перевернутый треугольник Лейбница (смотрите задачу 2.95). Можно также доопределить биномиальные коэффициенты C_n^k при отрицательных n при помощи равенства а) из задачи 11.88.

2.81. При $n = 2^k - 1$.

2.82. а) 3^5; б) 0; в) 2^n.

2.83. а) Левая часть: число способов выбрать m элементов из r, а потом из выбранных m выбрать еще k. Правая часть: сначала выбираем k элементов из r, а из оставшихся выбираем еще $m - k$.

2.85. $x = 2$, $y = 3$, $n = 5$.

2.86. Примените «жадный» алгоритм. Сначала из n нужно вычесть наибольшее число вида C_z^3 так, чтобы остаток был неотрицательным. Из него нужно вычесть наибольшее число вида C_y^2. То что останется всегда можно записать в виде C_x^1.

2.87. Общее число способов выбрать компанию из 3 человек равно $C_{10}^3 = 120$. Каждая ссора разрушает не более 8 таких компаний, поэтому число разрушенных компаний не больше $8 \cdot 14 = 112$. Значит осталось по крайней мере 8 дружных компаний.

2.88. $m = 3$, $n = 2$.

2.89. $C_{100}^6 4(\sqrt{3})^{64}$.

2.91. $2 \cdot 5! \cdot 5!$.

2.92. Каждая точка пересечения диагоналей однозначно определяет четверку вершин, через которые проходят эти диагонали. Наоборот, каждой четверке вершин соответствует ровно одна точка пересечения диагоналей. Поэтому число точек пересечения диагоналей T_n вычисляется по формуле $T_n = C_n^4$. Для нахождения K_n — числа частей, на которые n-угольник разбивается диагоналями, нужно проверить равенство

$$K_{m+1} - K_m = T_{m+1} - T_m + m - 1.$$

Суммируя его по m в пределах от 2 до n, находим, что

$$K_{n+1} = T_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Отсюда

$$K_{n+1} = C_{n+1}^4 + C_n^2 = \frac{n(n-1)(n^2 - n + 10)}{24}.$$

2.95. Знаменатели чисел, расположенных в рядах гармонического треугольника, пропорциональны элементам треугольника Паскаля, причем коэффициентами пропорциональности служат граничные члены. Там, где в треугольнике Паскаля стоит число C_n^k, в треугольнике Лейбница находится $\dfrac{1}{(n+1)C_n^k}$. Рекуррентная формула

$$\frac{1}{(n+1)C_n^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)C_n^k} = \frac{1}{n \cdot C_{n-1}^{k-1}}$$

проверяется непосредственным вычислением.

2.97. Для нахождения суммы достаточно сложить следующие равенства, которые следуют из рекуррентной формулы для треугольника Лейбница (см. решение задачи 2.95)

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},\quad \frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30},\quad \frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60},\ldots$$

Общая формула аналогична равенству из задачи 2.83 д).

2.98. в) $\dfrac{1}{(r-1)!\cdot(r-1)}$.

2.99. C_{10}^4/C_{25}^4.

2.100. $5/90=1/18$.

2.101. а) $1/10^3$; б) $1/10^2$.

2.103. Да, может.

2.104. $a_1+a_2+\ldots+a_k$.

2.105. 20.

2.106. а) 13200; б) 8800; в) 8000.

2.107. 1600.

2.108. 998 910.

2.112. При нечетном k $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|\leqslant S_k$, а при четном — $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|\geqslant S_k$.

2.113. Пусть N_a — количество треугольников, у которых одна из сторон параллельна стороне BC исходного треугольника. Аналогично определим числа N_b, N_c, $N_{a,b}$, $N_{b,c}$, $N_{a,c}$ и $N_{a,b,c}$. Через N обозначим общее число треугольников. Тогда $N=6^3$, $N_a=N_b=N_c=6^2$, $N_{a,b}=N_{b,c}=N_{a,c}=6$, $N_{a,b,c}=1$. Искомое число находится по формуле включений и исключений:

$$6^3-3\cdot 6^2+3\cdot 6-1=5^3.$$

2.115. Пусть S — площадь всей комнаты, S_i — площадь i-го ковра ($i=1, 2, 3$), $S_{i,j}$ — площадь, покрытая i-м и j-м коврами одновременно ($1\leqslant i<j\leqslant 3$), и $S_{1,2,3}$ — площадь, покрытая всеми тремя коврами. По формуле включений и исключений

$$S-(S_1+S_2+S_3)+(S_{1,2}+S_{1,3}+S_{2,3})-S_{1,2,3}\geqslant 0.$$

Отсюда

$$S_{1,2}+S_{1,3}+S_{2,3}\geqslant S_1+S_2+S_3-S=3.$$

Поэтому хотя бы одна из площадей $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ или $S_{2,3}$ не меньше 1 м^2.

2.116. Решение этой задачи повторяет рассуждения из задачи 2.115.

2.117. б) Формула включений и исключений дает:

$$S-\sum S_i+\sum S_{i,j}-\sum S_{i,j,k}+\sum S_{i,j,k,l}-S_{1,2,3,4,5}\geqslant 0. \tag{13.3}$$

Запишем отдельно равенства, которые получаются если формулу включений и исключений применить отдельно к каждой фигуре. Например, для первой имеем

$$S_1 - \sum S_{1,i} + \sum S_{1,i,j} - \sum S_{1,i,j,k} + S_{1,2,3,4,5} \geqslant 0.$$

Складывая пять подобных неравенств, получаем

$$\sum S_i - 2\sum S_{i,j} + 3\sum S_{i,j,k} - 4\sum S_{i,j,k,l} + 5S_{1,2,3,4,5} \geqslant 0. \qquad (13.4)$$

Найдем теперь такую линейную комбинацию неравенств (13.3) и (13.4), в которой отсутствует сумма $\sum S_{i,j,k}$. Очевидно, что для этого к неравенству (13.4) нужно прибавить утроенное неравенство (13.3):

$$3S - 2\sum S_i + \sum S_{i,j} - \sum S_{i,j,k,l} + 5S_{1,2,3,4,5} \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\sum S_{i,j} \geqslant 2\sum S_i - 3S = 5 - 3 = 2.$$

Значит для некоторых i и j выполняется неравенство $S_{i,j} \geqslant 1/5$.

в) Найдите линейную комбинацию неравенств (13.3) и (13.4), в которой отсутствует сумма $\sum S_{i,j}$.

2.118.

12	13	14	15	23
24	25	34	35	45
123	124	125	134	135
145	234	235	245	345

Цифры на отдельных частях показывают какими из фигур покрыты соответствующие участки. Например, цифры 1 и 2 в первой клетке означают, что она покрыта первой и второй фигурами. Эта схема показывает, что оценки 1/5 и 1/20 — точные. Если части переставить и разбиение немного деформировать, то можно добиться того, чтобы фигуры были связными.

2.119. Постройте взаимно однозначное соответствие между такими последовательностями и расстановками скобок в произведении $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ по одному из правил

$$«(» \to +1; \quad « \cdot » \to -1 \quad \text{или} \quad « \cdot » \to +1; \quad «)» \to -1.$$

2.120. Чтобы построить взаимно однозначное соответствие между триангуляциями многоугольника и расстановками скобок в произведении $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, нужно расставить на сторонах многоугольника переменные x_0, x_1, …, x_n (оставшейся стороне приписывается все произведение $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$).

2.121. Придумайте соответствие между всеми такими маршрутами ладьи и последовательностями чисел из задачи 2.119.

2.123. Первое решение: индукция по числу бензоколонок. Для одной бензоколонки решение очевидно. Предположим, что для n бензоколонок задача решена. Если на кольцевой дороге стоит $n+1$ бензоколонка, то среди них всегда можно выбрать такую (назовем ее A), от которой можно доехать до следующей по кругу бензоколонки (B). Если из B перелить весь бензин в A, то, согласно предположению индукции, получится такая конфигурация бензоколонок, для которой автомобиль может проехать полный круг. Следовательно, начиная с того же места, он сможет проехать полный круг и при изначальном расположении бензоколонок.

Второе решение: принцип крайнего. Пусть автомобиль не может проехать полный круг независимо от начального положения. Выберем ту бензоколонку (A_1), начиная с которой он проедет наибольшее расстояние. Предположим, что он остановится не доехав до бензоколонки A_2. Теперь, начиная с A_2, он проедет некоторое расстояние, но не сможет доехать до A_1 и остановится перед бензоколонкой A_3 и т. д. В итоге получится набор бензоколонок A_1, A_2, $\ldots$, A_n, начиная с каждой из которых автомобиль не может доехать до следующей. Но это противоречит тому, что общее количество бензина достаточно для проезда по кругу.

2.124. Чтобы доказать, что существует циклический сдвиг последовательности $\{a_1, \ldots, a_n\}$, у которого все частичные суммы положительны, примените принцип максимума: рассмотрите тот циклический сдвиг, у которого наибольшее количество первых частичных сумм положительно. Единственность следует из того, что ни одну из последовательностей нельзя разбить на два отрезка с положительными суммами. Чтобы получить формулу для чисел Каталана, дополните последовательность задачи 2.107 элементом $a_0 = 1$.

2.125. Рассмотрите в произведении $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ то умножение, которое делается последним.

Глава 3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики

3.1. Если p_1, p_2, $\ldots$, p_n — все простые числа, то число $N = p_1 \times$ $\times p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ не может быть ни простым, ни составным.

3.2. 2 и 19.

3.3. $p = 3$.

3.6. Перепишем уравнение в виде $2q^2 = (p-1)(p+1)$. Заметим, что p — непременно нечетное простое число. Отсюда q — четное. Поэтому $q = 2$. Значит $p = 3$.

3.7. $q = 3$, $p = 19$.

3.9. Пусть $p_1 = 3$, $p_2 = 7$, $\ldots$, p_n — все такие простые числа. Рассмотрим число $N = 4p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 3$. Оно не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, но обязательно содержит простой делитель вида $4k + 3$.

3.10. Доказательство повторяет рассуждения задачи 3.9. В качестве числа N можно взять $N = 6p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 5$.

3.11. Каждому делителю a числа n соответствует делитель b, для которого $a \cdot b = n$. Одно из чисел a или b не превосходит $\sqrt{n}$.

3.12. Когда n — полный квадрат. Воспользуйтесь решением задачи 3.11.

3.13. $111 = 3 \cdot 37$; $1111 = 11 \cdot 101$; $11111 = 41 \cdot 271$; $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \times \times 13 \cdot 37$; $1111111 = 239 \cdot 4649$.

3.14. Рассмотрите числа $1001! + 2$, $1001! + 3$, $\ldots$, $1001! + 1001$.

3.16. а) 5, 11, 17, 23, 29; б) 7, 37, 67, 97, 127, 157.

3.17. Возьмем в качестве начального элемента прогрессии элемент a этой прогрессии такой, что $a > 1$. Тогда все числа $a_k = a + kd$ при $k = ma$ делятся на a, то есть являются составными.

3.19. Рассмотрите остатки от деления на 3.

3.20. 5.

3.22. $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

3.23. Подставьте $n = 40$ или $n = 41$. При $n = 0, 1, \ldots, 39$ числа $P(n)$ будут простыми.

3.25. Рассмотрите число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n - 1$.

3.26. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.

3.27. $e_5 = 1807 = 13 \cdot 139$.

3.28, 3.31. Воспользуйтесь формулами сокращенного умножения из задачи 6.81.

3.29. Так как $2^n > n + 1$, то $2^{n+1} \mid 2^{2^n}$. Отсюда $2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{2^{2^n}} - 1$. Но тогда $f_n \mid 2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{2^{2^n}+1} - 2 = 2^{f_n} - 2$.

3.30. Смотрите задачу 3.21.

3.32. При $x = 0$ многочлен принимает значение a_0. Поэтому $a_0 = p$ — некоторое простое число. Подставляя в многочлен $P(x)$ числа $x_1 = p$, $x_2 = p^2$, $x_3 = p^3$, $\ldots$, получаем $P(x_j) \vdots p$. Следовательно $P(x_j) = p$ $(j = = 1, 2, \ldots)$ и многочлен $P(x)$ принимает одно и то же значение в бесконечном числе точек, что невозможно. *Ответ*: нет.

3.34. $(m, n) + 1$, $m + n - (m, n)$.

3.35. Среди выбранных чисел найдутся два, отличающиеся на единицу.

3.36. Рассмотрите прямоугольник $OABC$, расположенный на координатной плоскости так, что его вершины имеют координаты $O(0;0)$, $A(q,0)$, $B(q,p)$, $C(0,p)$. Проведите в нем диагональ OB и прямые вида $x+y=k$ $(k=0,1,\ldots,p+q)$, которые разделят ее на $p+q$ равных частей.

3.37. Через 180 дней, 28 февраля.

3.38. У пар (a,b) и (b,r) совпадают множества общих делителей. Значит совпадают и наибольшие элементы в этих множествах.

3.41. Если $(a,b)=1$, то для некоторых целых u и v выполняется равенство $au+bv=1$. Домножив его на c, получаем равенство $acu+$ $+bcv=c$, в котором a делит левую часть. Значит a делит и правую часть, то есть $a\mid c$.

3.43. Если $m>n$ и $m=nq+r$, где $r<n$, то один шаг алгоритма Евклида приводит к равенству

$$(\underbrace{1\ldots1}_{m},\ \underbrace{1\ldots1}_{n})=(\underbrace{1\ldots1}_{m}-\underbrace{1\ldots1}_{nq}\underbrace{0\ldots0}_{r},\underbrace{1\ldots1}_{n})=(\underbrace{1\ldots1}_{n},\ \underbrace{1\ldots1}_{r}).$$

То есть, применяя алгоритм Евклида к числам, мы получаем, что он применяется к их длинам m и n Поэтому, в конце концов, получится число, состоящее из (m,n) единиц.

3.44. Заметим сначала, что все элементы последовательности делятся на a_1. Если это не так, и a_n — первый элемент, который не делится на a_1, то $a_l=a_n-a_1<a_n$ также не делится на a_1, что противоречит минимальности a_n. Если теперь предположить, что в данной последовательности отсутствует элемент ka_1, то в ней отсутствует и $(k+1)a_1$ (иначе $ka_1=(k+1)a_1-a_1$ принадлежало бы последовательности). Повторяя это рассуждение, приходим к противоречию с бесконечностью последовательности.

3.45. 10.

3.46. 10.

3.47. $19\cdot19^\circ-360^\circ=1^\circ$.

3.48. 800.

3.55. Только если эти числа равны.

3.57. 20 отметок, 9 оборотов.

3.59. Примените алгоритм Евклида к числам, стоящим в числителе и знаменателе.

3.61. а) Так как $(n^2+2n+4,n^2+n+3)=(n+1,3)$, то дробь будет сократима, когда $(n+1,3)>1$. *Ответ*: $n=3k-1$.

б) Так как $(n^3-n^2-3n,n^2-n+3)=(n^2-n+3,6n)$, то дробь можно сократить либо на 2, либо на 3, либо на некоторый делитель числа n. Первый случай невозможен. Во втором случае находим, что $n=3k$ или

$n = 3k + 1$. В третьем случае $(n^2 - n + 3, n) = (n, 3)$, поэтому n снова должно быть числом вида $n = 3k$. *Ответ*: $n = 3k$, $n = 3k + 1$.

3.62. а) Предположим, что данное число целое. Тогда после деления числителя на знаменатель с остатком, приходим к равенству

$$\frac{n^4 + 1}{n^2 + n + 1} = n^2 - n + \frac{n + 3}{n^2 + n + 1}.$$

Полученная дробь может быть целым только при $n = -1$ и $n = 0$. *Ответ*: $n = -1, 0$.

б) $n = 0, 1$.

3.63. $n = 2, 3$.

3.65. На 17.

3.66. а) При $m \geqslant n$ выполняется равенство

$$(a^m - 1, a^n - 1) = (a^m - 1 - a^{m-n}(a^n - 1), a^n - 1) = (a^{m-n} - 1, a^n - 1).$$

Поэтому алгоритм Евклида для чисел становится алгоритмом Евклида для показателей и заканчивается парой показателей (m, n) и 0. Можно также сказать, что задача равносильна задаче 3.43. Действительно, при решении задачи 3.43 основание системы счисления не имело никакого значения. В частности, можно считать, что вычисления проводились в системе счисления с основанием a.

б) Воспользуйтесь равенством $f_{n+1} = f_0 f_1 \dots f_n + 2$.

3.67. Воспользуйтесь взаимной простотой чисел Ферма.

3.70. Воспользуйтесь результатом задачи 3.41.

3.71. Воспользуйтесь результатом задачи 3.70.

3.75. а) $x_k = 17 + 37k$, $y_k = 20 + 45k$;

б) $x_k = 5k$, $y_k = 21 - k$;

в) решений нет;

г) $x_k = -40 + 89k$, $y_k = 49 - 109k$;

г) $x_k = 2 + 13k$, $y_k = -5 - 43k$;

г) $x_k = -8 + 2k$, $y_k = -13 + 34k$.

3.76. Начните, например, с двух соседних чисел Фибоначчи F_n и F_{n+1}.

3.80. 7 и 2.

3.82. а) Воспользуйтесь методом математической индукции.

3.87. Для каждого натурального N однозначно определим $w = w(N)$ условиями $0 \leqslant w \leqslant d - 1$, $N \equiv cw \pmod{d}$. Тогда

$$N = dn + cw, \tag{13.5}$$

где n — целое. Если n представимо в виде

$$n = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + ct \quad (x, y, t \geqslant 0), \tag{13.6}$$

то N представимо в виде

$$N = ax + by + cz \quad (x, y, z \geqslant 0), \tag{13.7}$$

где $z = dt + w$. Обратно, если есть представление (13.7), то, положив $z = dt + w'$, где $0 \leqslant w' \leqslant d - 1$, получаем $N \equiv cw' \pmod d$, откуда $w = w'$. Следовательно, имеют место представления (13.5) и (13.6).

Таким образом, равенство (13.5) сводит максимизацию чисел N, не представимых в виде (13.7), к максимизации чисел n, не представимых в виде (13.6), в сочетании с выбором числа w, наибольшего в интервале $0 \leqslant w \leqslant d - 1$.

3.90. Пусть уравнение $ax + by = c$ имеет ровно n решений в целых неотрицательных числах. Тогда их можно записать в виде $x_k = x_0 + kb$, $y_k = y_0 - ka$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Подстановкой проверяется, что числа $x'_k = x_0 + (k+1)b$, $y_k = y_0 - ka$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ неотрицательны и удовлетворяют уравнению $ax + by = c + ab$, причем других решений у такого уравнения не будет. Таким образом, при увеличении параметра c на ab число решений уравнения $ax + by = c$ в целых неотрицательных числах увеличивается на единицу. Следовательно, утверждение задачи достаточно проверить для одного значения n, например, для $n = 1$.

Пусть теперь $n = 1$. Необходимость условия $c \geqslant 0$ очевидна. Второе необходимое условие $c \leqslant 2ab - a - b$ проверяется как и в задаче 3.86.

Наименьшее значение c, для которого уравнение $ax + by = c$ имеет 2 решения, есть $c = ab$. Поэтому при $c \leqslant ab - 1$ это уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, из задачи 3.86 вытекает, что при $c \geqslant ab - a - b + 1$ уравнение $ax + by = c$ будет иметь по крайней мере одно решение. Следовательно, при $nab - a - b + 1 \leqslant c \leqslant nab - 1$ решение будет ровно одно.

3.91. Точка с координатой 4140.5.

3.93. 27.

3.94. 24.

3.95. 123.

3.100. При помощи формул задачи 3.99, доказательство каждого тождества сводится к доказательству некоторого равенства, содержащего максимумы и минимумы.

а) $\max(\alpha, \min(\alpha, \beta)) = \alpha$;

б) $\min(\alpha, \max(\alpha, \beta)) = \alpha$;

в) $\alpha + \beta + \gamma = \max(\alpha, \beta, \gamma) + \min(\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma)$;

г) $\alpha + \beta + \gamma = \min(\alpha, \beta, \gamma) + \max(\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma)$.

3.102. $(1, 2, 2)[1, 2, 2] \neq 1 \cdot 2 \cdot 2$. В общем случае $(a, b, c)[a, b, c] \leqslant abc$.

3.106. а) 32; б) $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12$.

3.107. Это числа 1, 2, 4, 6, 16, 12.

3.108. Равенства следуют из того, что все делители числа $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots$ $\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ имеют вид

$$d=p_1^{\beta_1}\ldots p_s^{\beta_s}\quad (0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1,\ldots,0\leqslant\beta_s\leqslant\alpha_s).$$

3.109. $n=12$.

3.110. а) 28; б) 160 или 169.

3.111. $x=6$, $y=5$, $z=4$.

3.112. Мультипликативность функций $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ следует из формул задачи 3.108.

3.113. Все делители числа n можно разбить на пары чисел a, b таких, что $a\cdot b=n$, причем в каждой паре одно из чисел обязательно не превосходит $\sqrt{n}$.

3.116. $\tau(m\cdot n)<\tau(m)\cdot\tau(n)$; $\sigma(m\cdot n)<\sigma(m)\cdot\sigma(n)$.

3.117. Воспользуйтесь формулой для $\sigma(n)$ из задачи 3.108.

3.118. Представим n в виде $n=2^{k-1}b$, где b — нечетное число, $k\geqslant 2$. Поскольку $\sigma(x)$ — мультипликативная функция, то

$$\sigma(n)=\sigma(2^{k-1})\sigma(b)=(2^k-1)\sigma(b).$$

По условию, $\sigma(n)=2n=2^kb$, так что

$$(2^k-1)\sigma(b)=2^kb.$$

Отсюда

$$b=(2^k-1)c,\quad \sigma(b)=2^kc=b+c.$$

Если $c\neq 1$, то у числа b существует по крайней мере три положительных делителя b, c и 1. В этом случае $\sigma(b)\geqslant 1+b+c$, что противоречит равенству $\sigma(b)=b+c$. Поэтому $c=1$, $\sigma(b)=b+1$, то есть $b=2^k-1$ — простое число. Согласно задаче 3.31, это возможно только при простых значениях показателя k. Таким образом n имеет вид $n=2^{p-1}(2^p-1)$, где p и $b=2^p-1$ — простые числа.

Первые простые числа Мерсенна $p=2$, 3, 5, 7 дают совершенные числа $n=6$, 28, 496, 8128.

3.120. 220 и 284; 17296 и 18416.

3.121. Рассмотрите случай, когда $n=m!$.

3.122. 120.

3.124. Оба числа совпадают с количеством натуральных чисел, не превосходящих α и делящихся на d.

3.126. По формуле Лежандра $\alpha=\left[\dfrac{1000}{3}\right]+\left[\dfrac{1000}{9}\right]+\left[\dfrac{1000}{27}\right]+\left[\dfrac{1000}{81}\right]+$ $+\left[\dfrac{1000}{243}\right]+\left[\dfrac{1000}{729}\right]=497$. Поэтому $3^{497}\mid 1000!$, но $3^{498}\nmid 1000!$. Ответ: $\alpha=497$.

3.127. Отбросьте знак целой части в формуле Лежандра и дополните сумму до бесконечной геометрической прогрессии.

3.128. Если $n<p^2$, то $\operatorname{ord}_p n! = [n/p] < p$. Если же $n \geqslant p^2$, то $\operatorname{ord}_p n! \geqslant$ $\geqslant [n/p] + [n/p^2] \geqslant p+1$.

3.129, 3.130. По формуле Лежандра

$$\begin{aligned}\alpha_p = (a_k p^{k-1} + \ldots + a_1) + (a_k p^{k-2} + \ldots + a_2) + \ldots + a_k =\\ = a_k(p^{k-1} + \ldots + p + 1) + \ldots + a_1 =\\ = \frac{a_k(p^k-1) + \ldots + a_0(p^0-1)}{p-1} = \frac{n - a_k - \ldots - a_1 - a_0}{p-1}.\end{aligned}$$

3.135. Нет. Рассмотрите числа n вида $n = 2^k - 1$ и примените к ним формулу Лежандра.

3.136. а) С одной стороны, по формуле Лежандра, $\operatorname{ord}_p(n!) \leqslant n$. С другой,

$$\operatorname{ord}_p(k!(n-k)!) \geqslant \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{n-k}{2}\right] \geqslant \frac{k}{2} + \frac{n-k}{2} - 1 = \frac{n}{2} - 1.$$

Поэтому

$$\operatorname{ord}_p C_n^k = \operatorname{ord}_p(n!) - \operatorname{ord}_p(k!(n-k)!) \leqslant \frac{n}{2} - 1.$$

б) При $n<8$ неравенство проверяется проверяется непосредственно. При $n \geqslant 8$

$$\operatorname{ord}_p(k!(n-k)!) \geqslant \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{4}\right] + \left[\frac{n-k}{2}\right] + \left[\frac{n-k}{4}\right] \geqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{4} - 2 \geqslant \frac{n}{2}.$$

После чего остается повторить рассуждения и пункта а).

3.137. Указание: воспользуйтесь формулой Лежандра и теоремой Вильсона.

3.138. Указание: суммы D_n и F_n удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению. Например, $D_n = 1 + \dfrac{n+1}{2n} D_{n-1}$. Кроме того, $D_0 = F_0 = 1$. Следовательно, они равны друг другу. Значит, при $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \frac{2^n}{n} F_{n-1} = \frac{2^n}{n} D_{n-1} = \frac{2^n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}.$$

Для завершения доказательства нужно с помощью результата задачи 3.136 оценить степень вхождения числа 2 в общий знаменатель полученной суммы.

3.139. Количество таких представлений равно числу нечётных делителей n.

3.140. Предположим, что для числа $n!+m$ условие задачи не выполняется, то есть каждый простой делитель p числа $n!+m$ делит другое число из данного списка. Тогда $p \leqslant n-2$, $p \mid n!$ и число m должно делиться на p. Далее рассмотрим два случая.

1) Если m — составное число, то $\operatorname{ord}_p m < \operatorname{ord}_p n!$ и $\operatorname{ord}_p(n!+m) = \operatorname{ord}_p m$. Но последнее равенство не может выполняться для любого простого $p \mid m$, так как $n!+m > m$.

2) Если m — простое число, то $n!+m = p^\alpha$ для некоторого $\alpha \geqslant 2$. Но тогда $n < 2p$, и среди данных чисел не найдется второго числа, кратного p.

3.141. 377 пар кроликов.

3.142. Пусть a_n — количество способов, которыми кузнечик может добраться до n-й клетки. Тогда $a_1 = a_2 = 1$. Кроме того, в $(n+1)$-ю клетку кузнечик может попасть либо из n-й клетки, либо перепрыгнув n-ю клетку. Поэтому $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$. Отсюда $a_n = F_{n-1}$.

3.143. 233 способами.

3.144. Из начальных условий $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и рекуррентного соотношения $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ числа Фибоначчи с отрицательными номерами определяются однозначно: $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$.

3.146. Примените индукцию.

3.147. Все равенства доказываются при помощи метода математической индукции.

3.148. Разбейте все пути кузнечика на две группы: проходящие и не проходящие через n-ю клетку.

3.150. 1.

3.151. $\dfrac{F_3}{F_1 \cdot F_2} - \dfrac{F_{n+2}}{F_n \cdot F_{n+1}}$.

3.152. а), б), в) Рассмотрите последовательность остатков от деления F_n на 2, 3 и 4. г) Воспользуйтесь тождеством из задачи 3.148.

3.153. Рассмотрим остатки от деления чисел F_1, F_2, … на m. По двум соседним элементам этой последовательности она однозначно восстанавливается влево и вправо. Поэтому эта последовательность циклически повторяется и 0 (остаток от деления F_0 на m) встретится в ней бесконечно много раз.

3.155. По условию задачи число Фибоначчи должно быть четным, значит, его номер делится на 4. Числа F_{6n} делятся на 4, а числа F_{6n+3} — на F_{2n+1}. Таким образом при $n > 1$ число $F_{6n+3}/2$ не может быть простым, так как при $n = 3k$ и $n = 3k+2$ оно делится на F_{2n+1}, а при $n = 3k+1$ — на $F_{2n+1}/2$.

3.156. а) Воспользуйтесь результатом задачи 3.38. б) Воспользуйтесь равенством $(F_{m+n}, F_m) = (F_m, F_n)$, которое следует из тождества задачи 3.148.

3.157. Из пункта а) задачи 3.147 следует равенство

$$F_n + F_{n+1} + \ldots + F_{n+7} = F_{n+9} - F_{n+2}.$$

Это число не может быть числом Фибоначчи, поскольку $F_{n+8} < F_{n+9} - F_{n+2} < F_{n+9}$.

3.158. Найдите рекуррентную формулу для числа таких последовательностей. Можно также воспользоваться результатом задачи 3.142. Для этого нужно каждую единицу интерпретировать как прыжок кузнечика через клетку.

3.159. Для разложения числа n в фибоначчиевой системе счисления нужно воспользоваться «жадным» алгоритмом: вычитать из n наибольшее число F_m, не превосходящее n.

3.160. Докажите, что числа F_n, найденные по формуле Бине, удовлетворяют начальным условиям $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и рекуррентному соотношению $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

3.161. Раскройте скобки в формуле Бине, пользуясь формулой бинома Ньютона.

3.163. Равенство можно доказать методом математической индукции. Другое решение можно получить если воспользоваться задачами 3.158 и 2.73.

3.164. $S_n = 0$, если $n \equiv 2, 5 \pmod 6$; $S_n = 1$, если $n \equiv 0, 1 \pmod 6$; $S_n = -1$, если $n \equiv 3, 4 \pmod 6$. Более коротко ответ задачи можно записать так:

$$S_n = \frac{\sin \pi(n+1)/3}{\sin \pi/3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(n+1)}{3}.$$

3.165. F_{n+1}.
3.169. $F_{n-2} + F_n = L_{n-1}$.
3.170. $L_n = \varphi^n + \widehat{\varphi}^n$.
3.171.

$$\sqrt[n]{\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}} - (-1)^k \sqrt[k]{\frac{L_k - F_k\sqrt{5}}{2}} = 1.$$

3.176. а) Подбором можно найти первые решения данного уравнения в целых числах $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(5, 3)$, в которых угадываются соседние числа Фибоначчи. Можно предположить, что ответом к задаче будут пары $(x_n, y_n) = \pm(F_{2n+1}, F_{2n})$, где n — произвольное целое число. (См. задачу 3.144.) Действительно, после подстановки пары (F_{2n+1}, F_{2n}) в уравнение, приходим к частному случаю тождества Кассини: $F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2} = 1$. (См. задачу 3.146.) Покажем, что у исходного уравнения нет других решений. Рассмотрим, например, те пары решений (x, y), в которых $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 0$. Нетрудно проверить, что такие x и y должны быть связаны неравенствами $y < x \leqslant 2y$. Кроме того, каждая пара решений (x, y) порождает целую цепочку решений по правилу

$$\ldots \to (x - y, 2y - x) \to (x, y) \to (2x + y, x + y) \to \ldots$$

При движении по этой цепочке влево числа в парах уменьшаются:

$$0 < x' = x - y < x, \qquad 0 \leqslant y' = 2y - x < y.$$

Поэтому на некотором шаге получится пара, в которой $y = 0$, $x = 1$, то есть пара (F_1, F_0). Но эта пара порождает цепочку

$$\ldots \to (F_1, F_0) \to (F_3, F_2) \to \ldots \to (F_{2n+1}, F_{2n}) \to \ldots$$

Значит, исходная пара должна иметь вид $(x, y) = (F_{2n+1}, F_{2n}) = (x_n, y_n)$.

б) Все решения уравнения имеют вид $(x_n, y_n) = \pm(F_{2n}, F_{2n-1})$, где n — произвольное целое число.

3.177. а) Докажите сначала вспомогательные неравенства $F_{n+5} \geqslant \geqslant \dfrac{21}{2} F_n$, $F_{n+3} \leqslant 8F_n$.

3.180. б) $\mathcal{F}_n^k = F_{n-k+1}\mathcal{F}_{n-1}^{k-1} + F_{k-1}\mathcal{F}_{n-1}^k = F_{n-k-1}\mathcal{F}_{n-1}^{k-1} + F_{k+1}\mathcal{F}_{n-1}^k$.

3.181. Докажите, что $\mathcal{A}_n^k$ допускает представление в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами чисел $\mathcal{A}_{n-1}^{k-1}$ и $\mathcal{A}_{n-1}^k$.

3.183. Обозначим через $N(\alpha, n)$ число элементов в $\mathrm{Spec}(\alpha)$, которые не превосходят n. Поскольку $\alpha > 1$, то они все различны, и их количество совпадает с числом решений неравенства $a_k = [\alpha k] \leqslant n$ $(k > 0)$. Заменим это неравенство равносильным:

$$[\alpha k] \leqslant n \Leftrightarrow \alpha k < n + 1 \Leftrightarrow k < \frac{n+1}{\alpha}.$$

Значит, $N(\alpha, n) = \left[\dfrac{n+1}{\alpha}\right]$. Аналогично $N(\beta, n) = \left[\dfrac{n+1}{\beta}\right]$.

Покажем, что

$$N(\alpha, n) + N(\beta, n) = n.$$

Из равенства $1/\alpha + 1/\beta = 1$ получаем

$$\left[\frac{n+1}{\alpha}\right] + \left[\frac{n+1}{\beta}\right] = \frac{n+1}{\alpha} + \frac{n+1}{\beta} - \left\{\frac{n+1}{\alpha}\right\} + \left\{\frac{n+1}{\beta}\right\} = n.$$

Сумма двух дробных частей дает 1, так как их аргументы — иррациональные числа в сумме равные некоторому целому числу.

Для завершения доказательства осталось проверить, что при любом n все те n чисел из $\mathrm{Spec}(\alpha) \cup \mathrm{Spec}(\beta)$, которые не превосходят n — различны. Действительно, если мы предположим, что некоторое число m попало в оба спектра, то

$$N(\alpha, m) - N(\alpha, m-1) = 1, \quad N(\beta, m) - N(\beta, m-1) = 1.$$

Складывая два этих равенства, приходим к противоречию:

$$m - (m-1) = 2.$$

3.186. Первому спектру принадлежат числа с четным количеством нулей на конце, а второму — с нечетным. Для доказательства получите формулы умножения на φ в фибоначчиевой системе счисления: $\varphi \cdot F_n = F_{n+1} - \widehat{\varphi}^n$, и, если

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r},$$

где $k_1 - k_2 \geqslant 2, \ldots, k_{r-1} - k_r \geqslant 2$, то

$$[n\varphi] = F_{k_1+1} + F_{k_2+1} + \ldots + F_{k_r+1} - \delta_2(k_r),$$

где $\delta_2(a) = 1$ при $a \equiv 0 \pmod 2$ и $\delta_2(a) = 0$ при $a \equiv 1 \pmod 2$.

3.189. Первый игрок выигрывает, если число n имеет вид $n = [m\varphi^2] - 1$, то есть, если $n + 1 \in \operatorname{Spec}(\varphi + 1)$. Первые выигрышные значения n равны 1, 4, 6, 9, 12, 14, … (см. нулевой столбец в массиве Витхоффа из задачи 3.190).

3.190. Воспользуйтесь формулами из решения задачи 3.186.

3.191. а) $[11; 3, 4]$; б) $[1; 6, 6]$.

3.192. $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

3.195. Смотрите задачу 3.147, пункт г).

3.197. а) При $k = 0, 1$ равенство проверяется непосредственно. Далее применим индукцию. Предположим, что равенство доказано для некоторого k. Докажем его для $k + 1$. Подходящая дробь с номером $k + 1$ получается из k-й дроби заменой a_k на $a_k + 1/a_{k+1}$:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}] = [a_0; a_1, \ldots, a_k + 1/a_{k+1}].$$

Делая такую замену в равенстве

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k] = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_k P_{k-1} + P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}, \tag{13.8}$$

приходим к соотношению

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}] = \frac{(a_k + 1/a_{k+1})P_{k-1} + P_{k-2}}{(a_k + 1/a_{k+1})Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}.$$

б) Примените индукцию. в) Из пункта б) немедленно следует, что числа P_k и Q_k взаимно просты.

3.201. Воспользуйтесь свойством б) из задачи 3.197.

3.202. а) $x_k = 4 + 13k$, $y_k = 31 + 101k$ $(k \in \mathbb{Z})$; б) $x_k = -6 + 19k$, $y_k = -19 + 79k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3.203. Если бы 400 последовательных «григорианских» лет в точности соответствовали 400 астрономическим годам, то продолжительность одного астрономического года равнялась бы

$$\frac{97 \cdot 366 + 303 \cdot 365}{400} = 365 + \frac{97}{407}$$

дням, что всего лишь на 26 секунд превышает продолжительность года, найденную из астрономических наблюдений. Расхождение невелико: оно составляет один день в 3323 года.

3.207. Рассмотрите прямоугольник со сторонами 1, $\sqrt{2}$ и воспользуйтесь геометрической интерпретацией алгоритма Евклида из задачи 3.194.

3.208. В Юлианском стиле ошибка в одни сутки накапливается за 128 лет.

3.209. $[365; 4, 7, 1] = 365\frac{8}{33}$. Омар Альхайями ввел цикл из 33 лет, в котором семь раз високосный год считался четвертый, а восьмой раз високосный год был не четвертый, а пятый. Таким образом, здесь имеется 8 лишних суток в 33 года. Ошибка в одни сутки в этом календаре набегает примерно за 5000 лет. Точнее сказать нельзя, потому что сама продолжительность астрономического года меняется из-за замедления вращения Земли вокруг своей оси. Этот эффект задается приближенной формулой Саймона Ньюкома:

$$1 \text{ год} = (365{,}24219879 - 0{,}0000000614 \cdot (n - 1900)) \text{ суток},$$

где n — номер года.

3.210. а) $\sqrt{33}$; б) $\sqrt{34}$; в) $(1+\sqrt{17})/2$.

3.211. а) $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$; б) $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$; в) $1/2 + \sqrt{7} = [3; \overline{6, 1, 6, 5}]$.

3.212.

3.213. $\frac{k}{l} = \frac{64}{37}$, $\frac{m}{n} = \frac{97}{56}$.

3.214. Докажем сначала, что всякая чисто периодическая цепная дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \alpha]$$

задает квадратичную иррациональность. При решении задачи 3.197 а) была получена формула (13.8), которая выражает зависимость подходящей дроби от последнего неполного частного. Заменяя в этой формуле a_k на α, приходим к равенству

$$\alpha = \frac{\alpha p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha q_{k-1} + q_{k-2}},$$

которое дает квадратное уравнение для α:

$$\alpha^2 q_{k-1} + \alpha(q_{k-2} - p_{k-1}) - p_{k-2} = 0.$$

Таким образом, α — квадратичная иррациональность. Осталось заметить, что если

$$\beta = [b_0; b_1, \ldots, b_m, \alpha],$$

то β также является квадратичной иррациональностью.

3.215. а) $\dfrac{99}{70}$; б) $\dfrac{305}{72}$; в) $\dfrac{271}{48}$.

3.216. Проверьте, что последовательность

$$p_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$$

удовлетворяет начальным условиям $p_1 = 2$, $p_2 = 5$ и рекуррентному уравнению $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$, а последовательность

$$q_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

— начальным условиям $q_1 = 1$, $q_2 = 2$ и рекуррентному уравнению $q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$. Отсюда будет следовать, что p_n/q_n — n-я подходящая дробь к числу $[\overline{2}] = 1 + \sqrt{2}$.

3.217. Пусть p/q — подходящая дробь к числу α и p''/q'' — следующая подходящая дробь. Тогда, согласно задаче 3.199,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qq''} \leqslant \frac{1}{q(q+q')},$$

что и дает нужную оценку величины θ.

Возможен также случай, когда p/q — последняя подходящая дробь к числу α и дроби p''/q'' не существует. Тогда $|\alpha - p/q| = 0$ и нужное неравенство также выполняется.

Докажем утверждение теоремы в другую сторону. Пусть

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_k], \qquad \frac{p'}{q'} = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}].$$

Если $\alpha = p/q$ то утверждение тривиально. Заметим, что число α не может совпадать ни с одной из подходящих дробей к p/q. Действительно, если $\alpha = P_j/Q_j$ — подходящая дробь, то $Q_j < q$, но неравенства

$$\frac{1}{qQ_j} \leqslant \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q(q+q')},$$

приводят к тому, что $Q_j \geqslant q + q'$.

Значит, для некоторого α' будет выполняться равенство

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_k, \alpha']. \tag{13.9}$$

Согласно рекуррентным соотношениям из задачи 3.197

$$\alpha = \frac{p\alpha' + p'}{q\alpha' + q'}, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p\alpha' + p'}{q\alpha' + q'} - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{q|q\alpha' + q'|} = \frac{|\theta|}{q^2} \leqslant \frac{1}{q(q+q')}.$$

Отсюда $|q\alpha' + q'| \geqslant q + q'$, $\alpha' \geqslant 1$, и из равенства (13.9) следует, что p/q есть подходящая дробь к числу α.

3.219. Заметим, что числа p и q можно считать натуральными. В этом случае

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|2q^2-p^2|}{q(q\sqrt{2}+p)}\geqslant\frac{1}{q(q\sqrt{2}+p)}.$$

Из предположения

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{3q^2}, \tag{13.10}$$

вытекают неравенства

$$\frac{1}{3q^2}\geqslant\frac{1}{q(q\sqrt{2}+p)},\qquad \frac{p}{q}\geqslant 3-\sqrt{2}>\sqrt{2},$$

что позволяет раскрыть модуль в формуле (13.10) со знаком «минус». Значит,

$$\frac{1}{3q^2}\geqslant\frac{p}{q}-\sqrt{2}\geqslant 3-2\sqrt{2},\qquad q^2\leqslant\frac{1}{3(3-2\sqrt{2})}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3}<2.$$

То есть сделанное предположение может быть верным только при $q=1$. Но

$$\frac{2}{1}-\sqrt{2}>\frac{1}{3}\quad\text{и}\quad\sqrt{2}-\frac{1}{1}>\frac{1}{3}.$$

3.221. Примените алгоритм Евклида к многочленам $a^{F_{k+2}}-1$ и $a^{F_{k+1}}-1$.

3.222. $\dfrac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}=[\overline{a;\,b}]$.

3.224. Пусть α разлагается в чисто периодическую цепную дробь с периодом длины k. Тогда $a_0=a_k\geqslant 1$ и, следовательно, $\alpha>1$. Из соотношения

$$\alpha=\alpha_k=\frac{P_{k-1}\alpha+P_{k-2}}{Q_{k-1}\alpha+Q_{k-2}}$$

(где, в частности, при $k=1$ $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$) находим, что α является корнем многочлена

$$f(x)=Q_{k-1}x^2+(Q_{k-2}+P_{k-1})x-P_{k-2}.$$

Так как $f(0)=-P_{k-2}<0$ и $f(-1)=(Q_{k-1}-Q_{k-2})+(P_{k-1}-P_{k-2})>0$, то второй корень этого уравнения α' должен лежать в интервале $(-1;0)$.

Предположим теперь, что

$$\alpha=\frac{A+\sqrt{D}}{B}>1\quad\text{и}\quad -1<\alpha'=\frac{A-\sqrt{D}}{B}<0.$$

Так как полные частные α_n, определяемые соотношением

$$\alpha=[a_0;\,a_1,\,\ldots,\,a_{n-1},\,\alpha_n],$$

являются квадратичными иррациональностями с тем же дискриминантом D, то при любом $n \geqslant 1$

$$\alpha_n = \frac{U_n + \sqrt{D}}{V_n}, \quad \alpha_n' = \frac{U_n - \sqrt{D}}{V_n}.$$

Покажем, что при всех $n \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$-1 < \alpha_n' < 0. \tag{13.11}$$

Если эти неравенства справедливы для некоторого $n \geqslant 0$, то из соотношения $\alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ получаем, что

$$\alpha_n' = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}'}, \quad \alpha_{n+1}' = \frac{1}{\alpha_n' - a_n}.$$

Но так как $a_n \geqslant 1$ и согласно предположению $-1 < \alpha_n' < 0$, то из последнего неравенства находим, что $-1 < \alpha_{n+1}' < 0$. Поскольку при $n = 0$ неравенства (13.11) верны по условию, то согласно принципу математической индукции они будут верны и для всех $n \geqslant 0$.

3.226. Пусть $2\cos\dfrac{2\pi}{7} = \alpha$, $2\cos\dfrac{4\pi}{7} = \beta$, $2\cos\dfrac{8\pi}{7} = \gamma$. Утверждение задачи равносильно тому, что для некоторого действительного δ (предполагаемого общего «хвоста» трех цепных дробей) выполняются равенства

$$\alpha = [1; \delta], \quad \beta = [-1; 1, 1, \delta], \quad \gamma = [-2; 1 + \delta],$$

или

$$\delta = \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{-\beta}{2\beta + 1} = \frac{-\gamma - 1}{\gamma + 2}.$$

Проверка этих равенств сводится к тождествам

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \beta + 1 &= 0, \\ \beta\gamma + \gamma + 1 &= 0, \\ \gamma\alpha + \alpha + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{13.12}$$

Но так как

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma^2 - 2, \\ \beta &= \alpha^2 - 2, \\ \gamma &= \beta^2 - 2, \end{aligned}$$

то равенства (13.12) следуют из того, что числа α, β и γ являются корнями уравнения

$$\theta^3 + \theta^2 - 2\theta - 1 = 0$$

(см. задачу 5.19).

3.227. При $n=0$, 1 утверждение задачи проверяется непосредственно. При $n \geqslant 3$ нужно воспользоваться утверждением задачи 3.226, из которой следует, что числители и знаменатели дробей α_n, β_n и γ_n удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению.

3.228. Если $\dfrac{P_n}{Q_n}$ — подходящие дроби к числу $\alpha = 2\cos\dfrac{2\pi}{9}$, то дроби $\dfrac{P_n+Q_n}{P_n}$ и $\dfrac{Q_n}{P_n+Q_n}$ будут подходящими для чисел $2\cos\dfrac{4\pi}{9}$ и $2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ соответственно.

3.232. Примените индукцию по количеству переменных. Шаг индукции обосновывается исходя из рекуррентных соотношений для континуантов.

3.234. Воспользуйтесь рекуррентными соотношениями для числителей и знаменателей подходящих дробей.

3.237. Указание: многочлен $C_{n+2}(x_1, \ldots, x_{n+2})$ получается, если правило азбуки Морзе применить не к отрезку из нескольких последовательных точек, а к точкам, расположенным в виде замкнутого ожерелья.

3.238. Для натуральных чисел q, лежащих в пределах $2 \leqslant q \leqslant 2k$, имеем
$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{K_{n+1}(a_0, \ldots, a_n)}{K_n(a_1, \ldots, a_n)}. \tag{13.13}$$

Поскольку $\dfrac{p}{q}$ — число не целое, то в таком представлении
$$n > 0, \quad a_0 \geqslant 2, \quad a_n \geqslant 2. \tag{13.14}$$

Так как дроби p/q и K_{n+1}/K_n несократимы, то можно утверждать равенства:
$$p = K_{n+1}(a_0, \ldots, a_n), \quad q = K_n(a_1, \ldots, a_n).$$

Наоборот, из условий (13.13) и (13.14) следует, что q — одно из чисел 2, 3, ..., $2k$. По свойству б) из задачи 3.233
$$p = K_{n+1}(a_0, \ldots, a_n) = K_{n+1}(a_n, \ldots, a_0),$$

следовательно цепная дробь $[a_n; \ldots, a_0]$ может быть записана в виде $[a_n; \ldots, a_0] = \dfrac{p}{q'}$, где q' также совпадает с одним из чисел 2, 3, ..., $2k$. Таким образом числа 2, 3, ..., $2k$ разбиваются на пары q и q'. Но всего этих чисел $2k-1$, поэтому встретится пара, в которой $q = q'$. Значит, $[a_0; a_1, \ldots, a_n] = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_0]$, $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, ..., $a_0 = a_n$.

Рассмотрим такую цепную дробь. Если $n = 2m$ — число четное, то $m \geqslant 1$ и
$$p = K_{2m+1}(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0).$$

По свойству г) из задачи 3.233, число p может быть записано в виде

$$p = K_{m+1}(a_0, \ldots, a_m)K_m(a_{m-1}, \ldots, a_0) + \\ + K_m(a_0, \ldots, a_{m-1})K_{m-1}(a_{m-2}, \ldots, a_0) = \\ = K_m(a_0, \ldots, a_{m-1})(K_{m-1}(a_0, \ldots, a_{m-2}) + K_{m+1}(a_0, \ldots, a_m)),$$

что противоречит его простоте. Поэтому $n = 2m + 1$ — число нечетное и

$$p = K_{2m+2}(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0).$$

По тому же свойству г) из задачи 3.233, получаем:

$$p = K_{m+1}(a_0, \ldots, a_m)K_{m+1}(a_m, \ldots, a_0) + \\ + K_m(a_0, \ldots, a_{m-1})K_m(a_{m-1}, \ldots, a_0) = a^2 + b^2,$$

где

$$a = K_{m+1}(a_0, \ldots, a_m), \quad b = K_m(a_0, \ldots, a_{m-1}).$$

Число b будет обязательно положительным, так как равенство $p = a^2$ невозможно в силу простоты p.

3.239. Многочлены $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n)$ будут связаны с обычными континуантами равенствами $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n) = i^{-n}\widetilde{K}_n(ix_1, \ldots, ix_n)$, $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) = i^{-n} \cdot \widetilde{K}_n(ix_1, \ldots, ix_n)$. Для многочленов $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняется свойство симметричности $\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{K}_n(x_n, \ldots, x_1)$. В остальных свойствах происходят небольшие изменения:

$$\widetilde{K}_{n+2}(x_1, \ldots, x_{n+1}, 0) = -\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\widetilde{K}_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1\widetilde{K}_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) - \widetilde{K}_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}),$$

$$\widetilde{K}_{m+n}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = \widetilde{K}_m(x_1, \ldots, x_m)\widetilde{K}_n(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) - \\ - \widetilde{K}_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1})\widetilde{K}_{n-1}(x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}).$$

Таким образом каждое тире в азбуке Морзе нужно интерпретировать как минус перед соответствующим слагаемым.

3.240. в) Рассмотрите случай, когда $a_0 = \ldots = a_n = \ldots = 2$.

3.241. Указание. По индукции можно проверить, что в таблице стоят значения многочленов k_n, аргументами которых являются числа из строк, соседствующих со строками из единиц. Для доказательства шага индукции нужно заметить, что числа, стоящие в вершинах одного квадрата имеют вид

$$\begin{matrix} k_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) & k_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) \\ k_n(a_1, \ldots, a_n) & k_{n+1}(a_0, \ldots, a_n) \end{matrix}$$

Глава 4. Арифметика остатков

4.3. Если a и b — нечетные числа, то равенство $a^2+b^2=c^2$ невозможно, поскольку c^2 не может давать остаток 2 при делении на 4.

4.5. Каждая кость домино накрывает одну черную и одну белую клетки доски. Но из шахматной доски вырезаны две черные клетки. *Ответ*: нет.

4.12. Рассмотрите множества четных и нечетных чисел.

4.18. Проследите за четностью числа стаканов, которые стоят вверх дном.

4.19. Не обращайте внимания на угловые и центральные клетки.

4.20. Воспользуйтесь тем, что при любых слияниях амеб, четность суммарного количества амеб типов A и B не меняется. То же самое можно сказать про типы A, C и B, C. *Ответ*: останется амеба типа B.

4.21. Расставим амеб сначала как на рисунке 1.

		C	A	B		
		B	C	A		
B	C	A	B	C	A	B
A	B	C	A	B	C	A
C	A	B	C	A	B	C
		A	B	C		
		C	A	B		

Рис. 1.

		C	A	B		
		A	B	C		
C	A	B	C	A	B	C
A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B
		B	C	A		
		C	A	B		

Рис. 2.

Если в начале игры снята фишка с центральной клетки, то, рассуждая как в задаче 4.20, получаем, что последняя фишка может остаться только на клетке, помеченной буквой A. Но амеб с самого начала можно расположить и по-другому (смотрите рис. 2). Клеток, которые оба раза оказываются помечены буквой A оказывается 5 и это именно те клетки, которые указаны в условии задачи.

4.22. Указание: используйте вместо шашек марсианских амеб.

4.23. В расширенной таблице сумма элементов в любом столбце и в любой строке четная. Если изменить один из элементов, то изменятся суммы для одной строки и одного столбца (станут нечетными). Чтобы исправить такую ошибку, надо будет изменить тот элемент таблицы, который находится на пересечении строки и столбца с нечетными суммами. Минимальное число ошибок, которые нельзя обнаружить — 4. Например, можно изменить все четыре цифры в сообщении 0111. При этом суммы во всех строках и столбцах останутся теми же.

4.24. $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Четные числа $p-1$ и $p+1$ отличаются на 2, поэтому одно из них делится на 4.

4.25. Такое число делится на $111=3\cdot 37$.

4.26. а) 8 делителей можно найти среди чисел вида $11\ldots1$ (n единиц) выбирая $n=1, 2, 3, 6, 331, 662, 993$. б) Воспользуйтесь равенством

$$111\,111=1001\cdot 111=3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37.$$

4.27. $2^{3k}+1 \vdots 2^k+1$, $2^{3k}-1 \vdots 2^3-1$.

4.29. $\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{p-k}=\dfrac{p}{k(p-k)}$.

4.30. $m/n=5/2$.

4.31. Подставьте $c=6k-a-b$ или рассмотрите остатки от деления на 2 и на 3.

4.32. Проследите за тем, как меняется предпоследняя цифра у чисел вида 11^n.

4.33. Пусть b и c — длины второго катета и гипотенузы. Возможны следующие варианты: $(b, c)=(8, 17)$, $(35, 40)$, $(36, 39)$ и $(112, 113)$. *Ответ*: 4.

4.34. а) $(x, y)=(\pm 10, \pm 3)$.

б) Представьте уравнение в виде $(1+x)(1+x^2)=2^y$. *Ответ*: $(x, y)=$ $=(0, 0), (1, 2)$.

4.35. $k^{1999}+(17-k)^{1999} \vdots 17$.

4.36. Разобьем номера всех счастливых билетов на две группы. В первую группу отнесем номера, которые состоят из двух равных трехзначных чисел (например, 765765). Все остальные номера отнесем ко второй группе. Поскольку

$$\overline{abcabc}=\overline{abc}\cdot 1001=\overline{abc}\cdot 7\cdot 11\cdot 13,$$

то каждый номер из первой группы делится на 13, а, значит, делится на 13 и сумма всех номеров из первой группы. Рассмотрим номер $\overline{abcdef}$ из второй группы ($\overline{abc}\neq\overline{def}$). Вместе с этим номером во второй группе находится и номер $\overline{defabc}$. Таким образом, все номера из второй группы разбиваются на пары. Сумма номеров в каждой паре делится на 13, так как

$$\overline{abcdef}+\overline{defabc}=(\overline{abc}+\overline{def})\cdot 1001=(\overline{abc}+\overline{def})\cdot 7\cdot 11\cdot 13.$$

Поэтому делится на 13 и сумма всех номеров из второй группы.

4.37. Рассмотрите остаток, который такое число будет давать при делении на 9.

4.40. а) Не может, так как $2004\cdot 4$ не делится на $10=1+2+3+4$. б) Может. Можно взять 401 пару квадратов с таким расположением чисел $(1, 2, 3, 4)$ и $(4, 3, 2, 1)$.

4.43. $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$. Если $0 < k < p$, то $(k!(p-k)!, p) = 1$, поэтому число p в числителе сократиться не может.

4.44. Пусть n составное число и p — один из его простых делителей. Представим n в виде $n = p^\alpha m$, где $(m, p) = 1$. По формуле Лежандра (см. задачу 3.125) находим, что p входит в разложение C_n^p в степени $\alpha - 1$, поэтому $n \nmid C_n^p$.

4.46. Воспользуйтесь результатом задачи 4.43.

4.47. Нет. Например, если мы на первом шаге объединяем две первых кучки, то дальше в любой из получающихся кучек количество камней будет кратно 5.

4.48. Воспользуйтесь тем, что среди чисел a_1, $a_1 + a_2$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ либо одно делится на n, либо два дают равные остатки при делении на n.

4.50. Покажем, что среди 10 последовательных чисел найдется такое, которое не делится на числа 2, 3, 5, 7. Оно и будет удовлетворять условию задачи. Действительно, среди этих чисел 5 делятся на 2. Среди оставшихся чисел не более 2 делятся на 3, и не более одного — на 5 и 7. Таким образом исключается не более 9 чисел.

4.51. Среди чисел 1, 2, $\ldots$, 99 есть 50 нечетных и 49 четных. Это значит, что на одной из карточек на обеих сторонах будут написаны нечетные числа.

4.52. а) Ничего.

б) Это соотношение справедливо для всех целых a и b.

4.53. Воспользуйтесь равенствами $(a + c) - (b + d) = (a - c) + (b - d)$, $ac - bd = c(a - b) + b(c - d)$.

4.54. Согласно определению, класс $\bar{a}$ состоит из таких чисел b, что $b \equiv a \pmod{m}$ или $b - a = mt$. Таким образом, каждое число из $\bar{a}$ должно иметь вид $mt + a$.

4.55. Пусть $\bar{a} = \bar{b}$. Рассмотрим элемент c, принадлежащий обоим этим классам. Согласно предыдущей задаче, для некоторых целых t_1 и t_2 будут выполняться равенства $c = a + mt_1$, $b = a + mt_2$. Отсюда $a - b = m(t_2 - t_1)$, то есть $b \equiv a \pmod{m}$.

4.56. По принципу Дирихле такие числа попадают по одному в каждый из классов по модулю m.

4.57. При $(a, m) = 1$.

4.59. При $(m, c) = 1$.

4.61. Первый игрок должен следить за тем, чтобы количество камней, оставшихся после его хода, давало остаток 1 при делении 6.

4.63. Если одна фирма приобрела x килограммов яблок, то вторая — $2x$, поэтому масса приобретенных яблок должна делится на 3.

4.66. Дискриминант дает остаток 5 при делении на 8, и поэтому не может быть полным квадратом.

4.67. Рассмотрите остатки от деления на 4.

4.68. Согласно задаче 4.67, квадрат целого числа не может заканчиваться на одинаковые нечетные цифры. Кроме этого, квадрат не может заканчиваться на 22 и 66, так как для четного n должно выполняться сравнение $n^2 \equiv 0 \pmod 4$. Вариант $n^2 \equiv 8888 \pmod{10000}$ также невозможен, поскольку число 8888 делится на 8, но не делится на 16. Остается рассмотреть случай, когда $n^2 \equiv 4444 \pmod{10000}$. При этом $n = 2m$, $n^2 = 10000 \cdot a + 4444$, $m^2 = 2500 \cdot a + 1111 \equiv 11 \pmod{100}$. Но квадрат целого числа не может заканчиваться на 11, поэтому такой случай также невозможен.

Аналогично проверяется, что если квадрат целого числа n заканчивается на три одинаковые цифры, то они равны 4. В такой ситуации само число n может заканчиваться на один из следующих наборов цифр: 038, 538, 462, 962.

4.70. От числа $b \cdot 10^5 + a$ делается переход к числу $10a + b$. При делении на 7 эти числа дают остатки $5b + a$ и $3a + b$. Утверждение задачи следует из сравнения $5b + a \equiv 5(3a + b) \pmod 7$.

4.71. Среди этих чисел всегда есть одно, которое делится на 3. Поэтому $p = 3$.

4.72. Если $p \neq 3$, то $8p^2 + 1 \,\vdots\, 3$.

4.73. Здесь, как и в задачах 4.71, 4.72, нужно рассмотреть остатки от деления на 3.

4.74. Среди любых пяти последовательных членов такой арифметической прогрессии один обязательно делится на 5. Если это не 5, то простых чисел, идущих подряд, будет не более 4. *Ответ*: 5, 11, 17, 23, 29.

4.75. 3.

4.76. Так как числа n^2 при делении на 3 дают остатки либо 0, либо 1, то указанное число целым быть не может.

4.77. Сравнение $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$ возможно только если оба числа a и b делятся на 3. Аналогичные рассуждения проходят и для модуля $m = 7$

4.80. Остаток равен $2^4 \equiv -1 \pmod{17}$.

4.81. Нет. Рассмотрите числа Евклида e_n по модулю 5.

4.82. Перейдите от равенства $a^2 + b^2 = c^2$ к сравнению по соответствующему модулю.

4.83. а) $m + 1 \equiv 3 \pmod 4$. б) $m - 1 \equiv 2 \pmod 3$.

4.84. $a_n \,\vdots\, 3$ при $n = 2 + 3k$; $a_n \,\vdots\, 4$ при $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4.85. а), б), г) ни при каких n; в) при $n = 3 + 11k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4.86. а) $n = -8 + 17k$ $(k \in \mathbb{Z})$; б) ни при каких.

4.88. $x = 17 + 7^3 k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4.94. Докажите, что при всех целых x будет выполняться сравнение $P(x) \equiv 1 \pmod 2$. Из него будет следовать, что значения $P(x)$ не могут быть нулевыми.

4.96. а) $x \equiv 2 \pmod{13}$; б) $x \equiv 24 \pmod{37}$; в) $x \equiv 5 \pmod{11}$; г) $x \equiv 15 \pmod{169}$.

4.97. 1652 и 6125.

4.99. $a \equiv \pm 1 \pmod p$.

4.100. Все числа от 2 до $p-2$ можно разбить на пары взаимно обратных по умножению чисел, то есть для каждого a из этого интервала найдется b (отличное от a по задаче 4.99) такое, что $ab \equiv 1 \pmod p$. Поэтому $(p-1)! \equiv p-1 \pmod p$.

4.101. Пусть n — составное число. Если p — некоторый простой делитель числа n $(p < n)$, то $(n-1)! \equiv 0 \pmod p$, что противоречит условию $(n-1)! \equiv -1 \pmod p$.

4.102. $\dfrac{(p-1)! - (p-1)}{p} = \dfrac{(p-1)! + 1}{p} - 1$.

4.103. $(p-1)! + 1 = (p-2)!(p-1) + 1 = (p-2)!p - ((p-2)! - 1)$.

4.105. Число p — простое тогда и только тогда, когда $4((p-1)!+1) + p \equiv 0 \pmod p$. Остается доказать, что $p+2$ — простое тогда и только тогда, когда $4((p-1)!+1) + p \equiv 0 \pmod{p+2}$. С этой целью умножим обе части очевидного сравнения $p \equiv -2 \pmod{p+2}$ на $p+1$. Получаем

$$p(p+1) \equiv -2(p+1) = -2((p+2)-1) \equiv 2 \pmod{p+2}.$$

Части полученного сравнения умножим на $2(p-1)!$:

$$2(p+1)! \equiv 4\,(p-1)! \pmod{p+2}.$$

К обеим частям полученного сравнения прибавим по $p+4$:

$$2((p+1)!+1) + (p+2) \equiv 4((p-1)!+1) + p \pmod{p+2}.$$

По теореме Вильсона $p+2$ — число простое тогда и только тогда, когда $(p+1)!+1 \equiv 0 \pmod{p+2}$ и, следовательно, $2((p+1)!+1)+(p+2) \equiv 0 \pmod{p+2}$, откуда $4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod{p+2}$.

4.108. Из условия задачи следует, что

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \equiv 0 \pmod 4.$$

Это сравнение остается справедливым при замене знака у любого из чисел a_j $(j = 1, \ldots, n)$. Заменив все числа на $+1$, приходим к сравнению $n \equiv 0 \pmod 4$.

4.109. Указание: Рассмотрите остатки от деления на 4.

4.110. Докажите неразрешимость по модулю m, где
а) $m=4$; б) $m=3$; в) $m=7$; г) $m=8$;
д) $m=5$; е) $m=5$; ж) $m=16$; з) $m=13$.

4.111. Сумма квадратов пяти последовательных целых чисел всегда делится на 5:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2).$$

Но число n^2+2 не может делится на 5, поэтому $5(n^2+2)$ полным квадратом не является.

4.112. Выберите среди чисел 1, 2, ..., n то, которое делится на максимальную степень двойки. Такое число будет ровно одно. Поэтому после приведения к общему знаменателю числитель будет нечетным.

4.113. Для решения задачи нужно рассмотреть последние цифры указанных чисел, или, что то же самое, перейти к сравнению по модулю 10.

4.114. $x=1$, $y=0$.

4.115. Указание: рассмотрите остатки от деления на 3, 4, 5, 7, 9, 13 и 25.

4.116. Воспользуйтесь задачей 3.41.

4.118. Во всех случаях ответ 6.

Воспользуйтесь соотношением $10^{p-1}-1=99\ldots9\equiv 0 \pmod p$.

4.122. Делимость на 2, 3 и 7 проверяется непосредственно. Делимость на p следует из малой теоремы Ферма.

4.124. Делимость на 2 проверяется непосредственно. Делимость на $p>3$ следует из малой теоремы Ферма. Отдельно нужно разобрать случай $p=3$, т. к. при этом нужно проверить делимость на 9.

4.125. Для $n=0, 1 \pmod{11}$.

4.128. При $a=0$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для некоторого $a\geqslant 0$. Из результата задачи 4.43 следует соотношение $(a+1)^p\equiv a^p+1 \pmod p$. Далее, применяя предположение индукции, приходим к нужному сравнению.

4.130. В обоих случаях сравнения справедливы для всех целых n.

4.131. Указание: $a^p+(p-a)^p\equiv 0 \pmod{p^2}$.

4.132. Существует a одноцветных раскрасок и $\dfrac{a^p-a}{p}$ раскрасок, в которых участвует не менее двух цветов. *Ответ*: $\dfrac{a^p-a}{p}+a$.

4.133. а) 1; б) 9.

4.134. Данное число делится на 31.

4.135. Данное число делится на 1093.

4.137. Пусть q — простой делитель числа 2^p-1. Тогда выполняются сравнения $2^p-1\equiv 0 \pmod q$ и $2^{q-1}-1\equiv 0 \pmod q$ (второе из них —

малая теорем Ферма). Далее следует воспользоваться результатом задачи 3.66 а).

4.138. Воспользуйтесь равенством $n^{16}-1=(n^8-1)(n^8+1)$.

4.144. Применяя формулу из задачи 3.161, находим, что $F_p \equiv 5^{(p-1)/2} \pmod{p}$, $2F_{p+1} \equiv 1+5^{(p-1)/2} \pmod{p}$. Кроме того, $5^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ при $=10k \pm 1$ и $5^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$ при $=10k \pm 3$.

4.145. Число $x \neq 1$ удовлетворяет условиям $x^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$ и $x^3-1 \equiv 0 \pmod{p}$. Далее следует применить результат задачи 3.66.

4.146. Используйте условия $x^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$ и $x^5-1 \equiv 0 \pmod{p}$.

4.147. Воспользуйтесь тем, что существует представление $x^{p-1}-1= (x^n-1)Q(x)$.

4.151. Для четных n утверждение задачи очевидно. Пусть n — нечетное число, $n \mid 2^n-1$ и p — наименьший простой делитель числа n. Тогда $p \mid 2^n-1$ и, по малой теореме Ферма, $p \mid 2^{p-1}-1$. Согласно задаче 3.54 а) $p \mid 2^{(n,p-1)}-1$. Следовательно, $(n, p-1) \geqslant 2$ и n имеет простой делитель, меньший чем p. Но это противоречит выбору числа p.

4.152. а) 16; б) $p-1$; в) $p(p-1)$; г) При подсчете $\varphi(p^\alpha)$ нужно будет отбрасывать все числа, делящиеся на p. Таких чисел на отрезке от 1 до p^α будет p^α. Поэтому $\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$.

4.153. p^α.

4.154. Числа, взаимно простые с b, находятся в $\varphi(b)$ столбцах. В каждом из них $\varphi(a)$ чисел, взаимно простых с a. (См. задачу 4.57.)

4.155. $\varphi(m)$.

4.156. $(a, m)=1$ и b делится на все простые числа из разложения m.

4.159. а) $x=3, 4, 6$; б) $x=15, 30, 20, 24, 16$;
в) 13, 21, 28, 36, 26, 42; г) нет решений.

4.160. Необходимо, чтобы $\varphi(m)=2$. Но $1 \equiv 5 \pmod{4}$, поэтому ответом служат только числа 3 и 5.

4.161. а) $x=2^\alpha$ $(\alpha \geqslant 1)$; б) $x=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$ $(\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 1)$; в) нет решений.

4.162. а) При простом n; б) при четном n;
в) при любом n.

4.163. а) $x=3$; б) $x=3$; в) $x=2$, $y=3$.

4.164. Каждому простому числу p, являющемуся делителем как m так и n, в числе $\varphi(m \cdot n)$ соответствует множитель $1-1/p$, а в числе $\varphi(m)\cdot\varphi(n)$ — множитель $(1-1/p)^2$. Так как $(1-1/p)<1$, то при $(m, n)=1$ будет выполняться неравенство $\varphi(m\cdot n) > \varphi(m)\cdot\varphi(n)$.

4.165. $n=4$, p^α или $2p^\alpha$, где p — простое и $p \equiv 3 \pmod{4}$.

4.166. $a=8, 12$.

4.167. Все такие дроби можно разбить на пары k/n, $(n-k)/n$. Числа в такой паре совпадать не могут. Из равенства $k/n=(n-k)/n$ следует, что n — четное, $k=n/2$ и дробь k/n можно сократить на $n/2$.

4.168. Пусть $S(n)$ — искомая сумма. Очевидно, что $S(1)=1$. При $n>1$
$$\sum_{\substack{(d,n)=1\\1\leqslant d\leqslant n}}\frac{d}{n}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{(d,n)=1\\1\leqslant d\leqslant n}}\left(\frac{d}{n}+\frac{n-d}{n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{(d,n)=1\\1\leqslant d\leqslant n}}1=\frac{\varphi(n)}{2}.$$
Ответ: $S(1)=1$, $S(n)=\varphi(n)/2$ при $n>1$.

4.169. $\varphi(d)$.

4.170. Рассмотрим ряд чисел из задачи 4.169. С одной стороны, он состоит из n дробей. С другой стороны, все числа разбиваются на группы дробей с равным знаменателем d, каждая из которых состоит из $\varphi(d)$ чисел.

4.171. $\varphi(n)/2$.

4.172. а) Из мультипликативности функции Эйлера следует, что формулу достаточно доказать в случае, когда числа m и n суть степени одного и того же простого числа. Пусть $m=p^\alpha$, $n=p^\beta$ $(\alpha\geqslant\beta\geqslant 0)$. Тогда нужное тождество следует из равенств $[m,n]=m=p^\alpha$, $(m,n)=n=p^\beta$.

б) Если воспользоваться мультипликативностью функции Эйлера, то задача сводится к проверке равенства
$$\varphi(p^{\alpha+\beta})\,\varphi(p^\beta)=\varphi(p^\alpha)\,\varphi(p^\beta)\,p^\beta.$$
Оно, в свою очередь, следует из соотношения $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha(p-1)$. (См. задачу 4.152.)

4.173. $\dfrac{\varphi(m)}{\varphi(d)}$.

4.174. $3^{\varphi(10^4)}-1\equiv 0 \pmod{10^4}$.

4.177. $-a^{\varphi(m)-1}b$.

4.179. В качестве n можно взять, например, число $\varphi(m)$.

4.180. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$. Достаточно доказать, что $2^{n!}-1\,\vdots\,p_j^{\alpha_j}$ при $j=1,\ldots,s$. Для этого нужно применить теорему Эйлера к каждому из чисел $m_j=p_j^{\alpha_j}$.

4.181. Так как $561=3\cdot 11\cdot 17$, то достаточно доказать справедливость сравнений $a^{560}\equiv 1 \pmod p$, где p принимает значения $p=3$, 11, 17. Каждое такое сравнение выполняется по малой теореме Ферма.

4.182. Очевидно, что решением задачи могут быть только те a, для которых $(a,10)=1$. Так как $\varphi(10)=4$, то сравнение $a^{10}+1\equiv 0 \pmod{10}$ равносильно сравнению $a^2+1\equiv 0 \pmod{10}$. Перебирая случаи $a=\pm 1$, $a=\pm 3$, находим, что $a\equiv\pm 3 \pmod{10}$.

Ответ: $a\equiv\pm 3 \pmod{10}$.

4.183. Покажите, что при $(a,m)=1$ выполняется соотношение
$$a^{\lambda(m)}\equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}\quad (j=1,\ldots,s).$$

4.187. 3993, 3597, 6797.

4.188. Примените признаки делимости на 8, 9 и 11. *Ответ*: 1 380 456.

4.190. Нет. Для доказательства можно находить не сумму цифр, а просуммировать арифметическую прогрессию $1 + 2 + \ldots + 500$.

4.191. Для проверки делимости на 9 и 11 можно рассмотреть сумму данного числа с числом $8079\ldots2019$.

4.194. 11 111 111 100.

4.196. 9.

4.198. 8.

4.200. Примените признак делимости на 11.

4.201. Примените признак делимости на 3.

4.202. Нет. Рассмотрите остатки от деления на 9.

4.203. Сравнения $10a + b \equiv 0 \pmod{19}$ и $a + 2b \equiv 0 \pmod{19}$ равносильны.

4.207. Число $N = N_1 \cdot 10^k + N_2$ делится на p тогда и только тогда, когда на p делится число $d \cdot N = N_1 \cdot d \cdot 10^k + d \cdot N_2 \equiv N_1 + d \cdot N_2 \pmod{p}$. Но $N_1 + d \cdot N_2$ и есть то число, которое получается из N зачеркиванием k последних цифр и прибавлением к полученному числу зачеркнутого k-значного числа, умноженного на d.

Признаки делимости, которые получаются при $p < 100$, $k = 1$, 2, 3 и $|d| \leqslant 8$ устроены следующим образом:

p	71	61	17	41	31	7	11	3	19	29	13	7	59	23	79	89	7	43	67
k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
d	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	5	6	7	8	−8	−3	−3	−2
p	11	13	23	7	19	17	47	7	17	23	29	7	11	13	37	31	43	7	19
k	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
d	1	3	3	4	4	8	8	−8	−6	−2	−2	−1	−1	−1	1	4	4	6	8

4.208. Число $\overline{xxyy}$ всегда делится на 11. Если оно полный квадрат, то и число $\overline{x0y}$ должно делится на 11. *Ответ*: $88^2 = 7744$.

4.209. Число получается из суммы своих цифр умножением на 12, значит, оно кратно 3. Согласно признаку делимости на 3, сумма цифр также делится на 3. Поэтому само число должно делится на 9. Кроме того оно делится на 4. Следовательно, его нужно искать среди чисел, которые делятся на 36. Поскольку сумма цифр трехзначного числа не превосходит 27, то само число может быть не больше $27 \cdot 12 = 324$. Перебор можно еще сократить, если заметить, что сумма цифр может быть не больше 18 (она делится на 9 и меньше 27). Поэтому само число не больше $18 \cdot 12 = 216$. Осталось перебрать числа 108, 144, 180, 216. *Ответ*: 108.

4.211. а) Стратегия второго: писать цифру так, чтобы сумма предыдущей цифры и его равнялась 6.

б) Стратегия первого: сначала нужно написать 1, а потом писать цифру так, чтобы сумма предыдущей цифры и его равнялась 6. В этом случае перед последним ходом второго игрока сумма цифр будет равна 55, и он не сможет добиться своей цели.

4.212. Рассмотрите остатки от деления на 9.

4.214. Так как $a_j 10^j \equiv a_j r_j \pmod{m}$, то $M \equiv N \pmod{m}$. Поэтому числа M и N могут делиться на m только одновременно.

4.217. Сравнение

$$a_n q^n + \ldots + a_1 q + a_0 \equiv a_n + \ldots + a_1 + a_0 \pmod{m}$$

равносильно сравнению

$$a_n(q^n - 1) + \ldots + a_1(q - 1) \equiv 0 \pmod{m},$$

которое имеет место независимо от a_i тогда и только тогда, когда $q - 1 \equiv 0 \pmod{m}$. В частности, для $m = 2$ годится система счисления с любым нечетным основанием. *Ответ*: $q = 1 + mk$ $(k \geqslant 1)$.

4.218. 21.

4.220. Исследуйте отдельно делимость на 5 и на 11. *Ответ*: $n = 6 + 55k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.221. а) Обозначим остаток от деления 19^{10} на 66 через r. Из сравнений $19 \equiv 1 \pmod{2}$, $19 \equiv 1 \pmod{3}$, $19 \equiv -2 \pmod{11}$, следует, что $r \equiv 1 \pmod{2}$, $r \equiv 1 \pmod{3}$, $r \equiv (-2)^{10} \pmod{11}$. По малой теореме Ферма, $(-2)^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Отсюда $r = 1$. б) 11; в) 17; г) 36.

4.223. Воспользуйтесь теоремой Эйлера.

4.224. $x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, где $x_j = \left(\dfrac{m_1 \ldots m_n}{m_j}\right)^{\varphi(m_j)}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

4.226. а) $x = 58 + 85k$ $(k \in \mathbb{Z})$; б) $x = 78 + 13 \cdot 19k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4.227. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1$.

4.229. $2 \cdot 10^{249}$.

4.230. 15803.

4.233. Пусть $n = 2$. Равенство

$$\frac{c}{m_1 \cdot m_2} = \frac{a}{m_1} + \frac{b}{m_2}$$

можно переписать в виде $c = a \cdot m_1 + b \cdot m_2$. Для того, чтобы решить это уравнение, рассмотрите сравнение $c \equiv a \cdot m_1 + b \cdot m_2 \pmod{m_1 \cdot m_2}$ и воспользуйтесь задачей 4.222. Для произвольного n нужно применить индукцию

4.234. 45486.

4.235. $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

4.236. а) Данное сравнение равносильно выполнению двух условий $x(x-1) \equiv 0 \pmod{2^4}$ и $x(x-1) \equiv 0 \pmod{5^4}$. Отсюда $x \equiv 0, 1 \pmod{2^4}$

и $x \equiv 0, 1 \pmod{5^4}$. Поэтому по модулю 10^4 исходному сравнению будут удовлетворять 4 числа, из которых два — это числа $x=0$ и $x=1$. Два других решения — это $x=0625$ и $x=9376$, из которых четырехзначным является только второе. *Ответ*: $x=9376$.

б) Докажите утверждение по индукции. Если процесс нахождения таких чисел не остановить, то кроме 0 и 1 получатся два бесконечных «числа»

$$x_1 = \ldots 8212890625, \quad x_2 = \ldots 1787109376.$$

4.237. Примените китайскую теорему об остатках с $m_1 = p_1^2, \ldots$ $\ldots, m_{37} = p_{37}^2$, где $p_1, \ldots, p_{37}$ — различные простые числа.

Глава 5. Числа, дроби, системы счисления

5.2. а) $1/7 = 0{,}(142857)$; б) $2/7 = 0{,}(285714)$; в) $1/14 = 0{,}(714285)$; г) $1/17 = 0{,}(0588235294117647)$.

5.3. $a=0$, $b=0$ или $a=1$, $b=3$.

5.4. $1/49 = 0{,}(020408163265306122448979591836734693877551)$. Если просуммировать геометрическую прогрессию $2/10^2 + 4/10^4 + \ldots$, то получается в точности $1/49$.

5.5. $1/243 = 0{,}(004115226337448559670781893)$.

5.6. а) $15926/111111 = 0{,}(143334)$; б) $4/27 = 0{,}(148)$; в) $14/99 = 0{,}(14)$.

5.8. $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$.

5.10. Примените китайскую теорему об остатках.

5.12. а) нет. б) $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

в) Определим число α равенством $(\sqrt{3})^\alpha = 2$. Если $\alpha = \dfrac{p}{q}$, то получаем невозможное равенство $3^p = 4^q$.

Другой пример можно построить при помощи числа $\beta = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Если оно рационально, то задача решена. Если оно иррационально, то $\beta^{\sqrt{2}} = 2$ и искомой парой чисел будут β и $\sqrt{2}$.

5.13. Рассмотрите отдельно те цифры, которые встречаются конечное число раз и те, которые встречаются бесконечно много раз.

5.15. $n = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$, $n+1 = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$. Отсюда $n=1$ или $n=4$.

5.16. Среди указанных чисел бесконечно много четных.

5.19. а) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$; б) $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Получившиеся уравнения не имеют рациональных корней, следовательно, данные числа иррациональны. Если бы, например, число $2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ было квадратичной иррациональностью, то первое уравнение делилось бы без остатка на некоторый многочлен второй степени. Но тогда частное было бы многочленом первой степени с рациональными коэффициентами, а, значит, уравнение имело бы рациональный корень. Полученное противоречие доказывает, что число $2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ не может быть квадратичной иррациональностью.

5.22. а) Докажите, что если $0 < a \leqslant b$, то найдется такое целое число c, что $0 \leqslant c < a$ и

$$\frac{a^2+c^2}{ac+1} = \frac{a^2+b^2}{ab+1} = m.$$

б) Целыми значениями функции $f_2(a, b)$ являются числа вида $2n^2$, где $n \in \mathbb{N}$. Целыми значениями функции $f_3(a, b)$ являются числа 1, 5 и $3n^2$, где $n \in \mathbb{N}$.

5.23, 5.24. Указание: примените метод бесконечного спуска. Ответ: $(a, b) = (F_{2k-1}, F_{2k+1})$ или $(a, b) = (F_{2k+1}, F_{2k-1})$ $(k \geqslant 0)$.

5.25. Подставляя в уравнение $x = 1 + \sqrt{3}$, приходим к равенству

$$(4 + a + b) + (a + 2)\sqrt{3} = 0.$$

Так как $\sqrt{3}$ — иррациональное число, то такое равенство возможно лишь когда $4 + a + b = 0$ и $a + 2 = 0$. *Ответ*: $a = -2$, $b = 2$.

5.26. Если числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ являются членами одной арифметической прогрессии, то для некоторых целых p и q будет выполняться равенство $q(\sqrt{b} - \sqrt{a}) = p(\sqrt{c} - \sqrt{b})$ или $\sqrt{b}(p + q) = p\sqrt{c} + q\sqrt{a}$. После возведения последнего равенства в квадрат получаем, что $\sqrt{ac}$ — рациональное число. Но это невозможно, поскольку a и c — различные простые числа.

5.27. $\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

5.29. а) $9 = \sqrt{100} - 1$; б) 1; в) -10.

5.30. а) 4; б) 2; в) 6.

5.31. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

5.32. Возведите равенство в квадрат.

5.33. Для решения этой задачи удобнее доказать более общее утверждение: если $b_1, \ldots, b_n$ — ненулевые целые числа, $a_1, \ldots, a_n$ — различные натуральные числа, свободные от квадратов, то

$$b_1\sqrt{a_1} + \ldots + b_n\sqrt{a_n} \neq 0. \tag{13.15}$$

Выбирая здесь $a_1 = b_1 = \ldots = b_n = 1$, получаем иррациональность суммы радикалов $\sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}$. Для доказательства соотношения (13.15) проведите индукцию по числу простых $p_1, \ldots, p_m$, входящих в разложения чисел $a_1, \ldots, a_n$ на множители.

5.34. Только если a и b являются степенями одного и того же числа, то есть $a = d^m$ и $b = d^n$ для некоторых натуральных d, m и n.

5.36. Тангенс угла между стороной треугольника и любой из координатных осей рационален. Углы треугольника являются суммами или разностями таких углов и, следовательно, также имеют рациональные тангенсы.

5.37. Воспользуйтесь тем, что прямая, проходящая через целые точки, имеет рациональный тангенс наклона, а $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

5.39. Пусть на окружности лежат две точки $(x; y)$ и $(u; v)$. Тогда

$$(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 = (u-\sqrt{2})^2 + (v-\sqrt{3})^2,$$
$$2(u-x)\sqrt{2} + 2(v-y)\sqrt{3} = u^2+v^2-x^2-y^2.$$

Невозможность последнего равенства доказывается возведением в квадрат.

5.40. ж) Смотрите задачу 6.86 г).

5.41. При четных n.

5.47. Как и в задаче 2.35, идея решения основана на принципе Дирихле. При $k=1$ утверждение задачи очевидно. Далее применим индукцию. Предположим, что утверждение задачи доказано для $k-1$, и докажем его для k. Рассмотрим произвольную из N данных точек. Из нее выходит по крайней мере $N_1 = \left\lceil \dfrac{N-1}{k} \right\rceil$ отрезков, окрашенных в один и тот же цвет, где $\lceil x \rceil$ — минимальное целое число n такое, что $x \leqslant n$. Для N_1 справедлива оценка

$$N_1 \geqslant \left\lceil \frac{[k!\,e]}{k} \right\rceil > \left[\frac{[k!\,e]}{k} \right] = \left[\frac{k!\,e}{k} \right] = [(k-1)!\,e].$$

(См. задачу 3.124.) Если концы каких-либо двух из этих N_1 отрезков соединены отрезком того же цвета, то нужный треугольник найден. В противном случае, концы соединяются отрезками, окрашенными в $k-1$ цветов. Так как $N_1 > [(k-1)!\,e]$, то, согласно предположению индукции, можно найти треугольник одного цвета с вершинами в этих точках.

5.49. По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$0{,}(a_1 \ldots a_n) = \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{10^n - 1}.$$

Отсюда, если $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = \dfrac{10^n-1}{m}$, то $\dfrac{1}{m} = 0{,}(a_1 a_2 \ldots a_n)$.

5.50. По теореме Эйлера $10^{k\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ при любом $k \geqslant 1$. Поэтому $9 \cdot E_{k\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}$. Если m не делится на 3, то $E_{k\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}$. Если же m делится на 3 или на 9, то на m будут делится числа $E_{3k\varphi(m)}$ и $E_{9k\varphi(m)}$ соответственно.

5.51. Если $\left\{\dfrac{p}{q}\right\} = 0{,}a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \ldots$, то $\left\{\dfrac{10^k p}{q}\right\} = 0{,}a_{k+1} \ldots$

5.52. Пусть $r_0 = 1$, $r_1 = 10 - m[10/m] \ldots$ — остатки, которые возникают при делении 1 на m столбиком. Тогда $r_k \equiv 10^k \pmod{m}$, так как приписывание нуля равносильно умножению на 10. Если $(m, 10) = 1$, то $10^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, то есть $r_{\varphi(m)} = r_0 = 1$. Отсюда следует, что у дроби отсутствует предпериод, и что длина периода делит $\varphi(m)$.

5.53. 11, 33 и 99 — делители числа 99, не делящие 9.

5.54. Если $10^t \equiv 1 \pmod{n}$, то остатки r_0 и r_t (см. задачу 5.49) совпадают, так как $r_0 = m$ и $r_t \equiv 10^t m \pmod{n}$. Значит период дроби m/n делит t. Наоборот, если T — длина периода, то $r_T = r_0$ (дробь чисто периодическая согласно задаче 5.52) и $r_0 10^T \equiv r_0 \pmod{n}$. Так как $r_0 = m$ и $(m, n) = 1$, то полученное сравнение можно сократить на r_0. Следовательно, $10^T \equiv 1 \pmod{n}$.

5.57. Воспользуйтесь результатом задачи 5.49.

5.58. Пусть $t = 2n$ — длина периода. Согласно задаче 5.54, выполняется сравнение $10^t \equiv 1 \pmod{q}$. Отсюда $10^n \equiv -1 \pmod{q}$ и $\dfrac{p}{q} + \left\{\dfrac{10^n p}{q}\right\} = 1$. Но в десятичной системе эти дроби имеют вид

$$\frac{p}{q} = 0{,}\overline{N_1 N_2}, \qquad \frac{10^n p}{q} = 0{,}\overline{N_2 N_1},$$

поэтому $N_1 + N_2 = \underbrace{99\ldots9}_{n}$.

5.59. При разложении 1/7 в десятичную дробь последовательность остатков устроена следующим образом:

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 6, \quad r_4 = 4, \quad r_5 = 5, \quad r_6 = 1, \quad \ldots$$

Первое свойство объясняется равенствами

$$2 \cdot \frac{r_0}{7} = \frac{r_2}{7}, \quad 3 \cdot \frac{r_0}{7} = \frac{r_1}{7}, \quad 4 \cdot \frac{r_0}{7} = \frac{r_4}{7}, \quad \ldots$$

Объяснение второго свойства получается, если в равенстве $1/7 + 2/7 + 4/7 = 1$ перейти к десятичной записи.

Чтобы объяснить последнее свойство, запишем N в виде $N = (10^6 - 1)/7$. Отсюда $N^2 = (10^6 - 1)^2/49$. Число, которое получается сложением половинок числа N^2, будет периодом дроби

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N^2}{10^{6k}} = N^2 \frac{1}{10^6 - 1} = \frac{10^6 - 1}{49} = \frac{142857}{7}.$$

Так как

$$\left\{\frac{142857}{7}\right\} = \frac{1}{7} = 0{,}(142857),$$

то из половинок числа N^2 получится число N.

5.60. См. решение задачи 5.52.

5.64. Пусть $\overline{abcdef} = 3 \cdot \overline{fabcde}$. Рассмотрим число α, которое разлагается в периодическую десятичную дробь с периодом $abcdef$:

$$\alpha = 0,(fabcde) = \frac{1}{3} \cdot 0,(abcdef).$$

Тогда

$$10 \cdot \alpha = f,(abcdef) = f + 3 \cdot \alpha.$$

Отсюда $\alpha = f/7$. Остается перебрать различные значения f.

5.65. Рассмотрите десятичные дроби, у которых искомое число является периодом.

5.70. $81 + 9 + 1 = 61 + 27 + 3$

5.71. Да. Причем меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.

5.72. $2^n - 1$.

5.73. а) $2^4 - 1 = 15$; б) $(3^4 - 1)/2 = 40$.

5.74. 1, 3, 9 и 27 кг.

5.75. а) Первую веревку следует поджечь с двух концов, а вторую — с одного. После догорания первой веревки второй останется гореть 30 минут. Чтобы сократить этот промежуток вдвое, следует поджечь и второй конец оставшейся веревки. б) $2^4 - 1$.

5.76. а) Лампочка может находится в трех состояниях — включенном, выключенном и в нагретом. б) 9.

5.77. б) Если $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$ $(k_1 > k_2 > \ldots > k_m \geqslant 0)$, то наименьшее число операций равно $k_1 + m$.

5.79. Указание: если $n = a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^m a_m$, то

$$\left[\frac{n}{2^k}\right] = a_k + 2a_{k+1} + \ldots + 2^{m-k} a_m.$$

5.80. $b(15) = 6$, но $l(15) = 5$:

$$x_1 = x^2,\ x_2 = x_1 \cdot x = x^3,\ x_3 = x_1 \cdot x_2 = x^5,\ x_4 = x_3^2 = x^{10},\ x_5 = x_3 \cdot x_4 = x^{15}.$$

Аналогично $l(63) = 8 < 10 = b(63)$.

5.81. Для нахождения числа нужно сложить первые числа с выбранных карточек. Например, если загадано число 23, то потребуется сложить числа 1, 2, 4 и 16.

5.82. Загаданная карта всегда оказывается в центре колоды.

5.86. Если A четно, то представление числа A получается из представления меньшего числа $m = A/2$ «сдвигом» на один разряд. Если же A нечетно, то $a_0 = \pm 1$ и число a_1 должно равняться нулю; поэтому число $A - a_0$ делится на 4 и представление числа A получается из представления меньшего числа $m = (A - a_0)/4$ «сдвигом» на два разряда и добавлением цифры a_0. В обоих случаях единственность представления числа A следует из единственности представления числа m.

5.87. Числа от 0 до 1 удобно рассматривать как бесконечные троичные дроби из цифр 0, 1 и 2. Числа, о которых говорится в пункте в) — это те числа, в троичной записи которых нет ни одной 1.

5.88. а) 1; б) нет; д) n-й элемент данной последовательности совпадает по модулю 2 с $\nu(n)$ (суммой двоичных цифр числа n).

5.89. Занумеруем диски в головоломке «Ханойская башня» числами от 0 до 7. При увеличении на 1 числа n, записанного в двоичной системе счисления, могут измениться цифры сразу в нескольких разрядах. Если среди всех изменившихся разрядов наибольший номер имеет k-й разряд, то это означает, что на n-м шаге решения головоломки «Ханойская башня» следует перемещать диск с номером k.

5.90. а) Если по кругу стоят числа 1, 2, ..., $2n$, то вначале вычеркиваются все четные числа. Оставшиеся числа 1, 3, 5, ..., $2n-1$ снова подвергаются процедуре вычеркивания. В этом списке k-е число имеет вид $2k-1$. После того, как из этого списка будут вычеркнуты все числа кроме одного, останется число с номером $J(n)$, которое равно $2J(n)-1$.

5.91. г) Пусть $n=(n_s\ldots n_1n_0)_2$, где $n_s=1$. Тогда у одного из чисел m_1, m_2, ..., m_l в s-м разряде также стоит единица. Если m_j — одно из таких чисел, то $m_j\oplus n<m_j$.

5.93. а) Если n равнялось 0 и одно из чисел m_1, m_2, ..., m_l изменилось, то изменится и число n. Оно станет равно количеству взятых камней, отличному от нуля.

б) Согласно задаче 5.91 г), для некоторого j $(1\leqslant j\leqslant l)$ выполняется неравенство $m_j\oplus n<m_j$. Поэтому из j-й кучки можно взять $m_j-(m_j\oplus n)$ камней, что приведет к обнулению ним-суммы.

в) Игрок находится в проигрышной позиции, если перед его ходом $n=0$. Все остальные позиции — выигрышные. Для того, чтобы выиграть в «Ним», нужно оставлять после своего хода проигрышную позицию.

г) Нужно сделать переход к позиции 1, 4, 5.

5.94. Можно, например положить $f(A)=3$, $f(B)=5$, $f(A)=6$. Теперь остается заметить, что при слиянии амеб общая ним-сумма не меняется, а в начальный момент времени она равна $5=f(B)$.

5.96. а) Игра «Шоколадка» сводится к игре «Ним» с 4 кучками камней. Например, позиция, изображенная на рисунке, соответствует такому набору камней: 2, 5, 1, 4 (2 ряда слева от отмеченной дольки, 5 — справа, 1 — снизу и 4 — сверху.

5.97. В целом стратегия остается прежней: нужно держать инициативу в своих руках, то есть оставлять противнику позицию с нулевой ним-суммой. Такого правила нужно придерживаться до тех пор пока не появится позиция, в которой лишь одна куча содержит $n>1$ камней, а все остальные состоят ровно из одного камня. (Проверьте, что при правильной игре, эту позицию перед своим ходом получит именно тот игрок, в чьих руках инициатива.) После чего из наибольшей кучи нужно взять $n-1$ или n камней так, чтобы противнику осталось нечетное количество куч по одному камню.

5.99. После первого хода белых происходит несколько обязательных взятий, затем ход переходит к черным. Аналогично, после хода черных и нескольких обязательных взятий, ход возвращается к белым, и т. д. Поскольку стратегию игры определяют ходы, не являющиеся обязательными, далее будем рассматривать только их. Если имеется доска $3\times n$ $(n\geqslant 2)$, то каждый такой ход либо (если он сделан посередине доски) делит ее на две доски размеров $3\times k$ и $3\times l$ $(k+l=n-3)$, либо уменьшает размер доски на 2 или 3 (если он сделан с краю).

Таким образом, задача сводится к следующей. Камни выложены в k рядов по n_1, n_2, $\ldots$, n_k штук. За один ход разрешается сделать одну из операций: 1) забрать ряд, состоящий из одного камня; 2) забрать 2 или 3 крайних камня из любого ряда длины $n_j\geqslant 2$; 3) забрать 3 стоящих рядом камня из середины любого ряда длины $n_j\geqslant 5$.

Выигрывает тот, кто забрал последний камень.

Сведем эту задачу к игре «ним» из задачи 5.93. Для этого каждому ряду из n камней поставим в соответствие кучу из $f(n)$ камней, где $f(n)$ — некоторая (пока неизвестная) функция. Тогда, в соответствии с решением для игры «ним», для позиции из нескольких рядов будем иметь

$$f(n_1,n_2,\ldots,n_k)=f(n_1)\oplus f(n_2)\oplus\ldots\oplus f(n_k).$$

В игре «ним» от каждой кучки из m камней можно перейти к кучке, в которой будет от 0 до $m-1$ камня. Поэтому, если от ряда из n камней можно перейти к нескольким позициям, для которых значения функции f равны m_1, m_2, $\ldots$, m_l, то $f(n)$ должно быть равно наименьшему целому $m\geqslant 0$, отличному от m_1, m_2, $\ldots$, m_l. Естественно считать, что $f(0)=0$. Тогда $f(1)=f(2)=1$, так как от 1 и 2 можно перейти только к нулевому количеству камней, а $f(0)=0$. Далее, $f(3)=2$, так как от 3 можно перейти к 0 или 1 камню, а $f(0)=0$, $f(1)=1$. Аналогично, $f(4)=0$, так как от 4 камней можно перейти к 1 или 2, но не к 0. В общем случае от ряда из n камней можно перейти к позициям, для которых значения функции f лежат в множестве

$$M=\{f(n-2),\, f(n-3)\oplus f(0),\, f(n-4)\oplus f(1),\,\ldots,\, f(0)\oplus f(n-3)\},$$

следовательно,

$$f(n)=\min\{\,\mathbb{N}_0\setminus M\},$$

где $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пользуясь этим правилом, можно последовательно находить значения функции $f(n)$. Оказывается, что их удобно записывать в таблицу ширины 34, в которой числа $f(0)$, ..., $f(33)$ располагаются в первой строке, $f(34)$, ..., $f(67)$ — во второй и т. д.:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
0	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	0	5	2	2	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	2	7	4
34	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	2	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7	4
68	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7	4
102	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7	4
136	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7	4

По таблице можно предположить, что после $f(85)=9$ значения функции $f(n)$ будут повторяться с периодом 34. Эта гипотеза проверяется индукцией по параметру n. Нулям в полученной таблице соответствуют проигрышные позиции. Таким образом, белые проигрывают, если $n \equiv 4, 8, 20, 24, 28 \pmod{34}$ или если $n=14$, 34. Для остальных значений n белые находятся в выигрышном положении.

5.98. б) Пусть в кучках m_1, m_2, ..., m_l камней, и r_1, r_2, ..., r_l — остатки от деления чисел m_1, m_2, ..., m_l на 6. Положим

$$n = r_1 \oplus r_2 \oplus \ldots \oplus r_l$$

— ним-сумма по модулю 6. Если в начальной позиции $n=0$, то выигрывает второй игрок; во всех остальных случаях — первый. Исключение составляет случай

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{l-1} = 1, \quad m_l \text{ — любое.} \tag{13.16}$$

(Рассмотрите этот случай отдельно.) Стратегия выигрыша первого игрока: если перед ходом первого игрока набор камней удовлетворяет равенствам (13.16), причем l нечетно, то ход надо делать так, чтобы новая ним-сумма (по модулю 6) n' равнялась 1; если l четно и $r_l=1$, то забирается любой из камней, лежащих отдельно. Во всех остальных случаях ход надо делать так, чтобы $n'=0$. Если это невозможно (то есть, если уже $n'=0$), то первый игрок проигрывает.

5.100. Сначала следует сравнить 1-ю и 2-ю монеты, затем 1-ю и 4-ю.

5.101. Во-первых, специальным образом пронумеруем монеты: присвоим им трехзначные номера 001, 010, 011, 012, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 220.

Для первого взвешивания положим на одну чашу весов те монеты, у которых старший разряд равен 0 (то есть 001, 010, 011, 012), а на другую — те монеты, у которых он равен 2 (200, 201, 202, 220). Если перетянет чашка с «0», запишем на бумажке цифру 0. Если перетянет «2» — запишем 2. Если чаши весов останутся в равновесии — запишем 1.

Для второго взвешивания на одну чашу выложим монеты 001, 200, 201, 202 (то есть все те монеты, у которых второй разряд равен 0), а на другую — 120, 121, 122, 220 (то есть те монеты, у которых средний разряд равен 2). Запишем результат взвешивания таким же образом, что и при первом взвешивании.

Третьим взвешиванием сравниваем 010, 020, 200, 220 с 012, 112, 122, 202 (соответственно, нули и двойки в младшем разряде) и записываем третью цифру.

Мы получили три цифры — иначе говоря, трехзначное число. Далее определяем фальшивую монету по следующему рецепту:

Если это число совпадает с номером какой-то монеты, то эта монета фальшивая и тяжелее остальных. Если нет, то заменим в этом числе все нули на двойки, а все двойки на нули. После этого оно должно совпасть с номером какой-то монеты. Эта монета фальшивая и легче остальных.

5.102. Нужно присвоить 13-й монете номер 111 и не использовать ее при взвешиваниях. К остальным монетам следует применить алгоритм из задачи 5.101.

Глава 6. Многочлены

6.1. а) $-\dfrac{p}{q}$; б), г) $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 - \dfrac{2}{q}$; в) $-p(p^2-3q)$.

6.2. $(b-q)^2+(p-a)(bp-aq)$.

6.3. а) $y^2+p(p^2-3p)y+q^3=0$; б) $y^2-\dfrac{p^2-2q}{q^2}y+\dfrac{1}{q^2}=0$;

в) $y^2+\dfrac{p(p+1)}{q}y+\dfrac{(q+1)^2}{q}=0$; г) $y^2+\dfrac{2q-p^2}{q}y+1=0$.

6.5. Наибольшее значение суммы квадратов корней — 18. Это значение достигается при $a=-3$.

6.7. Воспользуйтесь теоремой Виета. *Ответ*: $-5/2$, $3/2$.

6.8. $(p, q)=(0, 0)$, $(1, -2)$, $(-1/2, -1/2)$.

6.9. Воспользуйтесь теоремой Виета. *Ответ*: $p=2/3$, $q=-8/3$.

6.10. а) $a\in(-\infty,\ -5-2\sqrt{6})\cup(-5+2\sqrt{6},\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

б) $a\neq 1$, $a\neq 3$.

6.11. Все такие точки образуют прямую $y=-1$.

6.12. Все окружности проходят через точку $D(0; 1)$.

6.13. $b=1/10$.

6.14. $x=1$.

6.18. $y\geqslant x^2-x$.

6.15. Рассмотрите разность данных многочленов. *Ответ*: $a=2$.

6.17. Все точки, удовлетворяющие условию задачи лежат под параболой $y=4x-2x^2$. *Ответ*: $y<4x-2x^2$.

6.18. $y \geqslant x^2 - x$

6.20. а) Найдите дискриминант этого уравнения и воспользуйтесь неравенством из задачи 10.7. б) Воспользуйтесь неравенством из задачи 10.11.

6.21. Квадратные трехчлены, не имеющие корней, соответствуют внутренности дискриминантной параболы.

6.28. Условие задачи равносильно тому, что указанная функция в точке $x=1$ принимает отрицательное значение. Отсюда $a \in (-2-\sqrt{11}; -2+\sqrt{11})$.

6.30. $\left[-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

6.31. $0 \leqslant a < 4$.

6.32. $2 < a < 5$.

6.33. $a \in \left(\dfrac{16}{17}, 2\right)$.

6.34. $a \in \left(-\dfrac{16}{17}, -1\right)$.

6.35. $a \in [-1, 1] \cup \{3\}$.

6.36. При $m=0$.

6.37. $r \in \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right) \cup \left(4, \dfrac{9}{2}\right)$.

6.38. В задаче нужно найти те x, для которых функция

$$f(a) = -a^2 + a(4 - 2x^2 - x^3) + (2x^3 + x^2 - 6x + 5)$$

хотя бы при одном $a \in [-1; 2]$ принимает отрицательное значение. Решим сначала обратную задачу, т. е. найдем те x, для которых

$$f(a) \geqslant 0 \quad \text{при } a \in [-1; 2]. \tag{13.17}$$

Так как график функций $f(a)$ — это парабола, ветви которой направлены вниз, то условие (13.17) равносильно системе

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ f(2) \geqslant 0. \end{cases}$$

Последняя система после преобразований принимает вид

$$\begin{cases} x(x-1)(x+2) \geqslant 0, \\ (x-1)(x+3) \leqslant 0. \end{cases}$$

Методом интервалов находим, что $x \in [-2, 0] \cup \{1\}$. Значит, решением исходной задачи будет множество $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

6.39. $-3 \leqslant a \leqslant 3$.

6.41. Пусть после деления $P(x)$ на $x-c$ получился остаток r:

$$P(x) = (x-c)T(x) + r.$$

Подставляя сюда $x=c$, приходим к равенству $r = P(c)$.

6.43. Нет.

6.45. Так как

$$Q(x) = (x - x_1)(-x - x_1)\dots(x - x_n)(-x - x_n) = (x_1^2 - x)\dots(x_n^2 - x),$$

то $Q(x)$ содержит только четные степени x и $Q(\sqrt{x})$ — многочлен степени n. Кроме этого $Q(\sqrt{x_k^2}) = P(x_k)P(-x_k) = 0$, поэтому все числа x_1^2, x_2^2, $\dots$, x_n^2 являются корнями $Q(\sqrt{x})$.

6.46. а) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 2) + 2x - 1$;

б) $2x^3 + 2x^2 + x + 6 = (x^2 + 2x + 1)(2x - 2) + 3x + 8$;

в) $x^4 + 1 = (x^5 + 1) \cdot 0 + x^4 + 1$.

6.47. Согласно теореме Безу, остаток равен $P(-2) = 3$.

6.48. Согласно теореме Безу, остаток от деления $P(x)$ на $x + 1$ равен $P(-1) = a + 10$. Он будет равен 0 при $a = -10$.

6.49. а) Остаток равен $P(1) = 5$.

б) Остаток будет многочленом не выше первой степени. Подставляя в равенство

$$P(x) = (x^2 - 1)T(x) + ax + b$$

значения $x = 1$, $x = -1$, находим $a = 5$, $b = 0$. *Ответ*: $5x$.

6.50. Достаточно проверить, что $P(0) = 0$, $P(-1) = 0$, $P(-1/2) = 0$.

6.51. Запишем остаток $R(x)$ от деления $P(x)$ на $(x-1)(x-2)$ в виде $R(x) = ax + b$. По теореме Безу $P(1) = 2$, $P(2) = 1$. Отсюда $a = -1$, $b = 3$. *Ответ*: $R(x) = 3 - x$.

6.52. $k = -3$.

6.53. Нужно выяснить, при каких n функция

$$\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} : \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^n + 1}{x + 1}$$

будет многочленом относительно x. По теореме Безу, для этого необходимо и достаточно, чтобы число -1 было корнем многочлена $x^n + 1$. Отсюда n — нечетное число.

6.54. Докажите утверждение индукцией по n.

6.55. а) Сумма всех коэффициентов равна $P(1) = 1$.

б) Сумма коэффициентов при нечетных степенях находится по формуле

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{1 - 5^{17}7^{17}}{2}.$$

Аналогично, сумма коэффициентов при четных степенях равна

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{1 + 5^{17}7^{17}}{2}.$$

6.56. Чтобы многочлен $P(x)$ делился на $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ необходимо и достаточно выполнение двух условий $P(1) = 0$ и $P(2) = 0$. Первое условие дает $(a+1)(b+1) = 0$. Отсюда либо $a = -1$, либо $b = -1$.

Если $a=-1$, то из второго условия $b=31/28$. При $b=-1$ аналогично находим $a=31/28$. *Ответ*: $(-1, 31/28)$, $(31/28, -1)$.

6.58. Повторяя рассуждения задачи 6.49, находим что $R(x) = \frac{3-(-1)^n}{2} + \frac{5+(-1)^n}{2}$.

6.59. Корни — 1, 2, 3.

6.60. $a = -4$.

6.61. Двучлен x^4+1 при делении на x^2+px+q дает остаток $p(2q-p^2)x+(q^2-p^2q+1)$, который по условию задачи должен быть нулевым. Из уравнений $p(2q-p^2)=0$, $q^2-p^2q+1=0$ находим, что $q=1$, $p=\pm\sqrt{2}$. Это соответствует разложению $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$. *Ответ*: при $q=1$ и $p=\pm\sqrt{2}$.

6.62. Равенство $P(1)=0$ равносильно уравнению $a^3-4a+3=0$. *Ответ*: $a=1$, $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

6.63. $P(x)=ax(x-1)\ldots(x-25)$.

6.66. Рассмотрите многочлен $f(-x)$.

6.72. Смотрите решение задачи 3.66. *Ответ*: $x^{(m,n)}-1$.

6.73. Положим

$$P_n(x) = \underbrace{P(P(P\ldots(P}_{n}(x)))).$$

Это многочлен с целыми коэффициентами, причем $a_m = P_m(a_0)$ и $a_m = P_{m-k}(a_k)$ при $m \geqslant k$. Так как $P_n(x) = a_n + x\,Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — также многочлен с целыми коэффициентами, то при $m \geqslant k$

$$(a_m, a_k) = (P_{m-k}(a_k), a_k) = (a_{m-k} + a_k Q_n(a_k), a_k) = (a_{m-k}, a_k).$$

Далее остается повторить рассуждения из решения задачи 3.43

6.74. $x=1$.

6.75. $p=3$.

6.76. $P(x) = -\frac{(x-1)(x^2+1)}{2}$, $Q(x) = \frac{1}{2}$.

6.77. Пусть $P(x)=ax+b$, $Q(x)=cx+d$. Тогда, подставив эти величины в данное равенство, находим

$$(a+c)x^3 + (-3a+b+c+d)x^2 + (2a-3b+c+d)x + 2b+d = 21.$$

Так как это равенство должно быть тождественным, то

$$\begin{cases} a+c=0, \\ -3a+b+c+d=0, \\ 2a-3b+c+d=0, \\ 2b+d=21. \end{cases}$$

Отсюда $a=4$, $b=5$, $c=-4$ и $d=11$, то есть $P(x)=4x+5$, $Q(x)=-4x+11$.

6.78. $P(x) = \frac{4}{21}x + \frac{5}{21}$, $Q(x) = -\frac{4}{21}x + \frac{11}{21}$.

6.79. $\dfrac{2n+1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$.

6.81. Найдите коэффициенты частного по схеме Горнера.

6.84. $1 + 4(x+1) - 3(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + (x+1)^4$.

6.85. $P(x+3) = 55 + 81x + 45x^2 + 11x^3 + x^4$.

6.86. а) $(2 - 2x + x^2)(2 + 2x + x^2)$;
б) $(-1 + 2x)(1 + x + x^2)$;
в) $(1 + x + x^2) \times (1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8)$;
г) $(a + b + c)(a^2 - ab + b^2 - ac - bc + c^2)$;
д) $(x + y - 1)(1 + x + x^2 + y - xy + y^2)$;
е) $(1 + x - y + xy)(1 - x + y + xy)$;
ж) $3(a + b)(a + c)(b + c)$;
з) $-5(x - y)(x - z)(y - z)(x^2 - xy + y^2 - xz - yz + z^2)$;
и) $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
к) $(1 + x)^2(1 + 3x + x^2)$;
л) $(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)$;
м) $(2 + x)(6 + x)(10 + 8x + x^2)$.

6.87. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12 = (3 - 2x + x^2)(4 + 3x + x^2)$.

6.88. В случае, когда $p^2 - 4q < 0$, выражение $x^2 + q/x^2 + p$ после замены $t = x + \sqrt{q}/x$ может быть разложено как разность квадратов.

6.89. $5/3(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$.

6.90. Известно, что
$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(x + z).$$
Докажем, что многочлен $(x + y + z)^m - x^m - y^m - z^m$ делится на $x + y$. По теореме Безу, достаточно проверить, что он обращается в ноль при $y = -x$. Действительно, $(x - x + z)^m - x^m - (-x)^m - z^m = 0$. Делимость на $x + z$ и $y + z$ доказывается аналогично.

6.91. Разложите данное выражение на множители.

6.92. Если $a + b = 0$, то равенство является верным. Значит после приведения к общему знаменателю, числитель будет делиться на $a + b$. Аналогично, он делится на $a + c$ и $b + c$. После разложения числителя на множители, решение становится очевидным.

6.93. Подставьте в левую и в правую части равенства $c = -a - b$.

6.95. Согласно задаче 6.94, рациональными корнями уравнения $x^2 - 17 = 0$ могут быть только числа ± 1 и ± 17. Но они не являются корнями. Поэтому уравнение $x^2 - 17 = 0$ вообще не имеет рациональных корней.

6.96. Воспользуйтесь тем, что число $\alpha = \cos 20°$ удовлетворяет уравнению
$$4x^3 - 3x = 1/2,$$
которое не имеет рациональных корней.

6.97. а) $x = 1, 3, -2$; б) $x = -1, 3$.

6.98. а) $x^4+x^3-3a^2x^2-2a^2x+2a^4=(2a^2-x^2)(a^2-x-x^2)$;
б) $x^3-3x-a^3-a^{-3}=(a+1/a-x)(x^2+x(a+1/a)+a^2+1/a^2-1)$.

6.101. а) x^2-x-2; б) x^2-1.

6.102. Покажите, что $(P(x), P'(x))=1$.

6.103. $A=n$, $B=-n-1$.

6.110. Можно, например, воспользоваться задачей 3.181.

6.111. а) $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$; б) $\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)$; в) $\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)$; г) $4\sigma_1\sigma_2\sigma_3+ +\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-\sigma_3^2-2\sigma_1^3\sigma_3$; д) $\sigma_1^2-2\sigma_2$; е) $\sigma_1^4+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_1^2\sigma_2$.

6.112. 2.

6.113. Рассмотрите выражение

$$(a-x)(a-y)(a-z)=a^3-a^2\sigma_1+a\sigma_2-\sigma_3.$$

6.114. $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$, $(a, 0, 0)$.

6.115. $a=-9$.

6.116. $x^3-5x^2+6x-1=0$.

6.117. $y^3-y^2-2y-1=0$.

6.118. $c=-\dfrac{2}{27}a^3+\dfrac{1}{3}ab$.

6.119. Для того, чтобы из отрезков с длинами x_1, x_2, x_3 можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы

$$(x_1+x_2-x_3)(x_1-x_2+x_3)(-x_1+x_2+x_3)>0.$$

Выражая левую часть через p, q и r, приходим к неравенству $p^3-4pq+ +8r>0$.

6.120. а) Докажите, что пары чисел (x, y) и (u, v) являются парами корней одного и того же квадратного уравнения. Из этого будет следовать, что числа x, y совпадают с числами u, v с точностью до перестановки.

6.122. x^4-ax^3; x^4-ax^3-x+a; x^4-x^3+x-1; x^4+x.

6.123. Воспользуйтесь результатом задачи 6.111 е).

6.124. $(c+d)(b+c+d)=ad$.

6.125. $b=0$, $a<0$.

6.127. Приведите разность данных уравнений к виду

$$(x-1)(y-1)+(u-1)(v-1)=2.$$

6.128. В каждом из случаев нужно узнать, сколько корней имеют уравнения: один или три.

6.129. Подставьте в уравнение $x=a$, $x=b$, $x=c$.

6.131. $f_i(x)=\dfrac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$.

6.132. $f(x)=1$.

6.133. $f(x)=y_1f_1(x)+\ldots+y_nf_n(x)$. Если таких многочленов будет два, то их разность будет многочленом степени не выше n с $n+1$ действительным корнем, что невозможно.

6.134. Остатком будет многочлен $R(x)$ степени 2, для которого выполняются равенства

$$R(a)=A,\quad R(b)=B,\quad R(c)=C.$$

Явный вид этого многочлена выписывается при помощи задачи 6.133:

$$R(x)=A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

6.135. По теореме Безу остаток равен $f(x_i)=y_i$.

6.136. а) $1+(3-x)x$; б) $1+(1+x)^2$; в) x^2.

6.137. 1 и 17 километров.

6.138. 2.

6.139. По трем точкам график квадратного трехчлена строится однозначно.

6.140, 6.141. Каждое равенство в системе можно интерпретировать как равенство нулю соответствующего многочлена в точках a, b и c.

6.142. Если $f(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, то $f(-x)$ также будет интерполяционным многочленом Лагранжа. В силу единственности такого многочлена (см. задачу 6.133) $f(x)=f(-x)$.

6.143. Пусть многочлен $P(x)$ таков, что $P(0)=1,\ \ldots,\ P(n)=3^n$. Докажите, что тогда $P(n+1)<3^{n+1}$.

6.144. Воспользуйтесь равенством

$$f(x)=f(x_1)\frac{(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}+\ldots+f(x_n)\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

6.145. Рассмотрите функцию

$$f(\lambda)=\frac{x_1}{\lambda-b_1}+\ldots+\frac{x_n}{\lambda-b_n}=1-\frac{(\lambda-a_1)\ldots(\lambda-a_n)}{(\lambda-b_1)\ldots(\lambda-b_n)}.$$

Глава 7. Комплексные числа

7.4. а) Длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон. б) Длина стороны треугольника не меньше модуля разности двух других его сторон. в) Хорда короче дуги, которую она стягивает.

7.5. а) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

в) $2\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

д) $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

7.7. $\sqrt{13}-1$.

7.8. а) $\operatorname{Re} x<0$; б) $0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$; в) $|\operatorname{Re} z|<2$; г) $|z|<1$ и $\operatorname{Im} z\leqslant 0$.

7.9. Окружность $(x+5/3)^2+(y-1)^2=(4/3)^2$.

7.11. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.

7.13. Домножьте равенство на сопряженное.

7.14. Воспользуйтесь пунктом б) из задачи 7.2.

7.16. а) $\pm(2-i)$; б) $\pm\left(\sqrt{1+1/\sqrt{2}}+i\sqrt{1-1/\sqrt{2}}\right)$; в) $\pm(7+5i)$; г) $\pm(\sqrt{3/2}+i/\sqrt{2})$; д) $\pm(3-4i)$; е) $\pm((5-i)/\sqrt{2})$.

7.17. а) $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$; б) $z=-2\pm 5i$; в) $z=2,\ i$; г) $z=3,\ 2i$; д) $z=i+2,\ 3-i$; е) $z=3+i,\ 2+i$.

7.18. а) $z=-1,\ 3,\ 1\pm 2i$; б) $z=-1-\sqrt[3]{2},\ -1+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(1\pm i\sqrt{3})$; в) $z=2$, $2\pm 2\sqrt{6}i$; г) $x=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{4}\right)$, $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

7.19. Воспользуйтесь результатом задачи 6.6.

7.20. Числа $1+it$ и $1-it$ являются комплексно сопряженными, значит,

$$|1+it|=|1-it|,\quad |z|=\left|\frac{1+it}{1-it}\right|=1,\quad \arg z=2\arg(1+it)=2\operatorname{arctg} t.$$

Когда параметр t меняется в пределах $-\infty<t<+\infty$ функция $\varphi(t)=2\operatorname{arctg} t$ принимает все значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Следовательно, точка $z=\cos\varphi(t)+i\sin\varphi(t)$ описывает всю единичную окружность за исключением точки $z=-1$.

7.21. Для того, чтобы построить график на отрезке $[-1;1]$, представьте x в виде $x=\sin t$ $(t\in[-\pi/2;\pi/2])$.

7.30. Сумма степеней равна 0, если $s\neq kn$, и равна n, если $s=kn$.

7.31. Рассмотрите действительную и мнимую части первой формулы Муавра.

7.32. Представьте каждое из чисел в тригонометрической форме.

7.35. а) $-1/2$; $1/8$.

7.36. а) Проверьте, что $P(i)=P(-i)=0$ и примените теорему Безу. б) Как и в пункте а), достаточно проверить, что $Q(\rho(\cos\varphi\pm\sin\varphi))=0$.

7.38. Смотрите приложение C, VIII.

7.40. Найдите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют многочлены $2T_n(x/2)$.

7.41. Ответ: 1.

7.42. Пусть $\alpha = m/n$. Тогда $\cos(360n\alpha)^\circ = 1$. Так как $\cos(360n\alpha)^\circ = T_{360n}(\cos\alpha^\circ)$, то получаем, что многочлен $T_{360n}(x) - 1$ обращается в ноль при $x = \cos\alpha^\circ = 1/3$. Значит многочлен $f(x) = 2T_{360n}(x/2) - 2$ имеет корнем число $x = 2/3$. Согласно задаче 7.40, многочлен $f(x)$ имеет старший коэффициент равный 1, а остальные его коэффициенты — целые числа. Но, по теореме о рациональных корнях многочлена $f(x)$ может иметь только целые корни.

7.43. Рассмотрите многочлен $T_{360q}(x) - 1$.

7.44. При $(m, 2n) = 1$. Из этого условия также вытекает, что у данных кривых точки максимумов и минимумов совпадают.

7.47. $P_n(x) = 2T_n(x/2)$, где $T_n(x)$ — многочлен Чебышёва.

7.48. Замените тангенс на отношение синуса к косинусу.

7.49. Перейдите в равенстве $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$ к сопряженным числам и вычислите z.

7.50. Поскольку в многочлены Чебышёва удобно подставлять числа вида $x = \cos\alpha$, то для решения задачи следует воспользоваться равенством $\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$. *Ответ*: Если $n = 2k$, то

$$T_n(\sin\alpha) = (-1)^k \cos n\alpha, \quad U_{n-1}(\sin\alpha) = (-1)^{k+1}\frac{\sin n\alpha}{\cos\alpha}.$$

Если $n = 2k+1$, то

$$T_n(\sin\alpha) = (-1)^k \sin n\alpha, \quad U_{n-1}(\sin\alpha) = (-1)^{k}\frac{\cos n\alpha}{\cos\alpha}.$$

7.24. Указание: представить число z в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = \frac{|z^2+1|}{r} = 1.$$

Ответ: наибольшее значение равно $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и принимается при $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

7.53. Если $f(z) = 0$, то $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = 0$.

7.54. Комплексные корни многочлена можно разбить на пары взаимно сопряженных чисел. При этом произведение соответствующих линейных сомножителей даст квадратный трехчлен с действительными коэффициентами:

$$(x - a - ib)(x - a + ib) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

7.55. Выделим в выражении $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a+ib}{n}\right)^n$ ту часть, которая будет стремится к e^a:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ib}{a+n}\right)^n$$

и найдем второй предел. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ib}{a+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+i\operatorname{tg}\frac{b}{a+n}\right)^n.$$

Теперь нужный предел находится по формуле Муавра:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+i\operatorname{tg}\frac{b}{a+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{nb}{a+n}+i\sin\frac{nb}{a+n}\right) = \cos b + i\sin b.$$

7.56. Воспользуйтесь формулой Эйлера из задачи 7.55.

7.58. На комплексной плоскости функция $\ln z$ становится многозначной. Если $z=|z|e^{i\varphi}$, то в качестве $\ln z$ можно брать любое из чисел

$$w_k = \ln|z| + i(\varphi+2k\pi) \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Для каждого из них

$$e^{w_k} = e^{\ln|z|}\cdot e^{i(\varphi+2k\pi)} = |z|\,(\cos\varphi+i\sin\varphi) = z.$$

7.59. $a^z = e^{z\ln a}$, где экспонента определяется как в задаче 7.55, а логарифм — как в задаче 7.58.

7.60. Корень i-й степени из числа $z=e^{i\theta}=e^{(\theta+2k\pi)i}$ равен $e^{\theta+2k\pi}$, где k — произвольное целое число. При $z=-1$ получаем $\sqrt[i]{-1}=e^{(1+2k)\pi}$. Значение корня, приведенное в задаче, соответствует $k=0$.

7.61. а) Если $a\equiv 0 \pmod q$, то равенство очевидно. Если же $a\not\equiv 0 \pmod q$, то $\omega^a\ne 1$ и первую сумму можно просуммировать как геометрическую прогрессию. Результатом будет функция

$$f(a) = \frac{1}{q}\cdot\frac{\omega^{aq}-1}{\omega^a-1},$$

которая обращается в ноль для любого целого a, не кратного q.

б) Продифференцируйте функцию $f(a)$, найденную в пункте а). Ответ: $S(a)=q(q+1)/2$ при $a\equiv 0 \pmod q$ и $S(a)=\dfrac{q}{\omega^a-1}$ при $a\not\equiv 0 \pmod q$.

7.62. б) $\dfrac{\sin(n\varphi/2)\sin((n+1)\varphi)/2}{\sin(\varphi/2)}$.

7.64. а) $n+\dfrac{\sin 2nx\cos(2n+1)x}{2\sin x}$; б) $n-\dfrac{\sin 2nx\cos(2n+1)x}{2\sin x}$.

7.65. а) -2^{50}; б) 2^{49}.

7.66. б) $2^{n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

7.67. б) $\frac{1}{3}\Big(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\Big)$; $\frac{1}{3}\Big(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\Big)$.

7.71. а) Все векторы $z_1, \ldots, z_n$ имеют положительную проекцию на луч $\arg z = \alpha + \pi/2$.

б) Все числа $z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}$ лежат в полуплоскости $\pi - \alpha < \arg z < 2\pi - \alpha$.

7.73. Если точка z лежит вне треугольника abc, то векторы $z-a$, $z-b$, $z-c$ располагаются в некоторой полуплоскости. Сумма их обратных величин не может равняться нулю согласно задаче 7.71, п. б).

7.74. Воспользуйтесь равенством $f'(x) = f(x)\Big(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{1}{z-c}\Big)$ и результатом задачи 7.73.

7.76. а) $n \equiv 1, 2 \pmod 3$; б) $n \equiv \pm 1 \pmod 6$.

7.78. а) $n = 6k \pm 2$; б) $n = 6k - 2$; в) ни при каких.

7.79. а) $n = 6k \pm 1$; б) $n = 6k + 1$; в) ни при каких.

7.80. Если $x = 1$ — корень многочлена $P(x^n)$, то его корнем будет любое из чисел $x_k = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Поэтому $P(x^n)$ делится на $(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) = x^n - 1$.

7.44. При $(m, 2n) = 1$. Из этого условия также вытекает, что у данных кривых точки максимумов и минимумов совпадают.

7.81. 7.

7.82. $z_k = i\,\mathrm{tg}(-\pi/2 + k\pi/n) = i\,\mathrm{ctg}(k\pi/n)$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Для нахождения суммы квадратов корней раскроем в уравнении скобки по формуле бинома Ньютона и сделаем сокращения:

$$C_n^{n-1}z^{n-1} + C_n^{n-3}z^{n-3} + \ldots = 0.$$

По теореме Виета

$$\sigma_1(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0, \quad \sigma_2(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \frac{C_n^{n-3}}{C_n^{n-1}} = \frac{(n-1)(n-2)}{6}.$$

Далее, применяя результат задачи 6.111, д), находим

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n-1}^2 = -\frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

7.84. Так как

$$\frac{1}{\sin^2 \pi\frac{m}{n}} = 1 + \mathrm{ctg}^2\,\pi\frac{m}{n} = 1 - \Big(i\,\mathrm{ctg}\,\pi\frac{m}{n}\Big)^2,$$

то

$$\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\pi\frac{m}{n}} = \sum_{m=1}^{n-1}\Big(1 - \Big(i\,\mathrm{ctg}\,\pi\frac{m}{n}\Big)^2\Big) = n - 1 - \sum_{m=1}^{n-1}\Big(i\,\mathrm{ctg}\,\pi\frac{m}{n}\Big)^2.$$

Согласно задаче 7.82, последняя сумма равна $-\dfrac{(n-1)(n-2)}{3}$. Следовательно,

$$\sum_{m=2}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{m}{n}} = \sum_{m=1}^{n-1} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \pi \frac{m}{n}\right) = n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n^2-1}{3}.$$

7.85. Воспользуйтесь тем, что $0 < \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} < 1$ при $x \in (0; \pi/2)$ (см. задачу 10.44) и результатом задачи 7.84.

7.87. Многочлен $P(x)$ не имеет действительных корней, поэтому все его корни разбиваются на пары комплексно сопряженных чисел z_1, $\overline{z}_1$, ..., z_n, $\overline{z}_n$ (см. задачу 7.53). Пусть

$$\prod_{k=1}^{n} (x - z_k) = a(x) + ib(x).$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{n} (x - \overline{z}_k) = a(x) - ib(x).$$

Отсюда $P(x) = a^2(x) + b^2(x)$.

7.90. а) Параллельный перенос на вектор a; б) гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом 2; в) поворот против часовой стрелки на угол φ вокруг начала координат.

7.91. $w = \overline{z} \cdot e^{2i\varphi}$.

7.92. а) $w = 2(z + 3 + 4i)$; б) $w = 2z + 3 + 4i$; в) $w = (z - i)\dfrac{i+1}{\sqrt{2}} + i$; г) $w = k(z - A) + A$; д) $w = z - 2$; е) $w = -z + (1+i)(2 - \sqrt{2})$.

7.94. Композиция гомотетий

$$H_{A_1}^{k_1} : w = k_1(z - A_1) + A_1; \quad H_{A_2}^{k_2} : w = k_2(z - A_2) + A_2$$

имеет вид

$$w = k_1 \cdot k_2 \cdot z + k_2(1 - k_1)A_1 + (1 - k_2)A_2.$$

Если $k_1 \cdot k_2 = 1$, то получаем параллельный перенос. Если же $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, то это гомотетия с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$, центр A которой находится из уравнения

$$k_1 \cdot k_2 \cdot z + k_2(1 - k_1)A_1 + (1 - k_2)A_2 = k_1 \cdot k_2(z - A) + A.$$

7.98. а) Воспользуйтесь задачей 7.62, а); б) Воспользуйтесь задачей 7.62, б); в) Воспользуйтесь задачей 8.45, а)—б).

7.101. Формулу (7.1) можно переписать в виде

$$w = \frac{a}{c} - \frac{\delta}{c(cz + d)},$$

где $\delta = ad - bc \neq 0$.

7.102. Воспользуйтесь задачей 7.61.

7.103. Вершины A, B и C нужно интерпретировать как значения некоторой функции $f(x)$ заданной в трех точках 0, 1 и 2. Тогда вершины возникающих правильных треугольников превращаются в значения функций вида $C(k)e^{2\pi ik/3}$ $(k=1,2)$, а точка M совпадает с числом $C(0)$ ($C(k)$ — конечные коэффициенты Фурье из задачи 7.102).

7.105. Воспользуйтесь задачей 2.40.

7.107. Величина $\lambda(z)$ совпадает с квадратом модуля комплексного числа z, а при умножении комплексных чисел их модули перемножаются.

7.108. Если в равенстве $z \cdot z^{-1} = 1$ перейти к нормам, то получится, что $\lambda(z) \cdot \lambda(z^{-1}) = 1$. Так как для любого числа $z \in \mathbb{Z}[i]$ выполняется условие $\lambda(z) \geqslant 1$, то $\lambda(z) = 1$, а это возможно только для чисел ± 1, $\pm i$.

7.109. Пусть q — целое гауссово число, ближайшее (на комплексной плоскости) к числу a/b. Тогда $a/b = q + c$, где $\lambda(c) \leqslant 1/2$. Следовательно, $a = bq + r$, где $r = bc$ и

$$\lambda(r) = \lambda(b)\lambda(c) \leqslant \frac{1}{2}\lambda(b) < \lambda(b).$$

7.110. $(4+7i, 6-7i) = 2+i$, $(4+19i, -6+17i) = 2+3i$.

7.112. а) Указание: если $a \mid b$, то $\lambda(a) \mid \lambda(b)$.

б) Если $p = 4k+3$ и $p = (a+ib)(c+id)$, то $\lambda(p) = p^2 = \lambda(a+ib)\lambda(c+id)$. Отсюда $\lambda(a+ib) = \lambda(c+id) = p$ и $p = a^2+b^2$. Но для простых $p = 4k+3$ такое равенство невозможно (см. задачу 4.109).

в) Всякое простое $p = 4k+1$ можно представить в виде $p = a^2+b^2$ (см. задачу 3.238). Следовательно в $\mathbb{Z}[i]$ такое простое число раскладывается на множители $p = (a+ib)(a-ib)$. Так как $\lambda(a \pm ib) = p$ — простое число, то каждый из этих сомножителей обязан быть простым.

г) Если $q = a+ib$ — некоторое простое гауссово число, то q является делителем числа $\lambda(q) \in \mathbb{Z}$, следовательно оно делит одно из простых чисел $p = 4k+1$ или $p = 4k+3$ и обязано совпадать с одним из уже описанных чисел.

7.114. Пусть $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \ldots q_l^{\beta_l}$, где $p_j \equiv 1 \pmod 4$, $q_j \equiv 3 \pmod 4$. Из мультипликативности функции $\chi(d)$ вытекает равенство

$$4\sum_{d|n} \chi(d) = 4\prod_{\nu=1}^{k}(1+\chi(p_\nu)+\ldots+\chi(p_\nu^{\alpha_\nu}))\prod_{j=1}^{l}(1+\chi(q_j)+\ldots+\chi(q_j^{\beta_j})).$$

По определению функции $\chi(d)$

$$1+\chi(p_\nu)+\ldots+\chi(p_\nu^{\alpha_\nu}) = \alpha_\nu + 1, \tag{13.18}$$

$$1+\chi(q_j)+\ldots+\chi(q_j^{\beta_j}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_j \equiv 0 \pmod 2, \\ 0, & \text{если } \beta_j \equiv 1 \pmod 2. \end{cases} \tag{13.19}$$

Поэтому, если хотя бы одно из чисел $\beta_1, \ldots, \beta_l$ является нечетным, то исходная сумма равна нулю. Если же все числа $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — четные, то

$$4\sum_{d|n}\chi(d) = 4(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_k+1),$$

что совпадает с формулой для $r(n)$ из задачи 7.113.

7.117. Воспользуйтесь задачей 4.141.

7.118. Перейдите к аргументам комплексных чисел в равенстве

$$(1+i)(2+i)(3+i) = 10i.$$

7.119. Переходя к аргументам в равенстве $(1+i)(1+2i)(1+3i) = -10$, находим

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi.$$

7.121. Если $cd = n^2+1$, то $(n+c+i)(n+d+i) = (n+i)(2n+c+d)$. Нужная формула получается после перехода к аргументам этих комплексных чисел.

7.122. Число $s+ir$ единственным образом можно представить в виде произведения простых гауссовых чисел. Если в таком представлении перейти к аргументам, то простые вида $4k+3$ не дадут никакого вклада, а простые вида $a-ib$ будут давать те же углы, что и числа $a+ib$, но с отрицательным знаком.

7.123. Как было доказано в задаче 4.143, для простого числа p вида $4k+1$ найдется некоторое n (можно считать, что $1 \leqslant n \leqslant \frac{p-1}{2}$), для которого $n^2+1 \equiv 0 \pmod{p}$. Неравенство $n \leqslant \frac{p-1}{2}$ означает, что $p > 2n$, следовательно, каждому простому $p = 4k+1$ соответствует некоторое число Штёрмера. С другой стороны, число n^2+1 не может иметь двух простых делителей, бóльших $2n$, поэтому установленное соответствие является взаимно однозначным.

Глава 8. Алгебра + геометрия

8.1. Сумма векторов, направленных из центра правильного n-угольника в его вершины, сохраняется при повороте на угол $\frac{2\pi}{n}$, поэтому она может быть только нулевым вектором.

8.2. Проведем сферу с центром в точке, через которую проходят плоскости. Тогда количество частей, на которые разрезано пространство, равно количеству частей, на которые разрезана сфера. При стереографической проекции с центром в точке, которая не лежит ни на одной плоскостей, окружности на сфере перейдут в окружности на плоскости, удовлетворяющие условию задачи 1.52.

8.3. а) Воспользуйтесь результатом задачи 8.1 для правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность.

б) Рассмотрим правильный семиугольник $A_1A_2\ldots A_7$. Пусть M — точка пересечения диагоналей A_1A_4 и A_2A_5. Равенство задачи следует из подобия треугольников A_1MA_5 и $A_2A_3A_4$.

Второй вариант решения получается, если к четырехугольнику $A_1\bar{A}_2A_3A_5$ применить теорему Птолемея, которая утверждает, что во вписанном четырехугольнике произведения диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

в) Воспользуйтесь результатом задачи 8.1 для правильного двенадцатиугольника, вписанного в единичную окружность.

8.5. $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} = \dfrac{\varphi}{2}$; $\quad \cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = -\dfrac{\widehat{\varphi}}{2}$.

8.7. а) $x = \arccos\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$; $\quad$ б) $x = \arccos\dfrac{2}{3}$; $\quad$ в) $x = \arccos\dfrac{14-\sqrt{21}}{20}$.

8.8. Для решения задачи 7.118 рассмотрите на координатной плоскости треугольник OAB, вписанный в прямоугольник $OKLM$, где $O(0,\,0)$, $A(1,\,2)$, $B(3,\,1)$, $K(0,\,2)$, $L(3,\,2)$, $M(3,\,0)$.

В задаче 7.119 достаточно взять на координатной плоскости точки $O(0,\,0)$, $A(-3,\,1)$, $B(2,\,1)$, $C(3,\,-1)$ и $D(0,\,1)$. Тогда $\angle AOD = \operatorname{arctg} 3$, $\angle BOD = \operatorname{arctg} 2$, $\angle BOC = \operatorname{arctg} 1$, а их сумма — развернутый угол AOC.

8.9. Рассмотрите равнобедренный треугольник с углом 30° при вершине.

8.10. Сделайте замены $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$. *Ответ*: 2.

8.11. Раскройте скобки в формуле Герона. *Ответ*: $3\cdot 5^4 \leqslant S \leqslant 3\cdot 8^4$.

8.12. $x_k = \dfrac{2k\pi}{7}$ $(k = 1,\,2,\,3)$; $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

8.13. Система приобретает геометрический смысл, если положить $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$.

8.14. $(x,\,y,\,z) \in \{(1,\,2,\,4),\,(-1,\,-2,\,-4),\,(-\sqrt{7},\,0,\,2\sqrt{7}),\,(\sqrt{7},\,0,\,-2\sqrt{7})\}$.

8.15. Равенство $x^2 + xy + y^2 = a^2$ можно трактовать как теорему косинусов в треугольнике со сторонами x, y, a и углом 120°. *Ответ*:

$$xy + yz + xz = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{3}},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

8.16. При условии $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b}$.

8.17. Указание: рассмотрите цепочку векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = (3-x_2,\,x_1)$, $\overrightarrow{A_2A_3} = (x_2,\,1-x_3)$, $\overrightarrow{A_3A_4} = (x_3,\,3-x_4)$, $\overrightarrow{A_4A_5} = (x_4,\,2-x_1)$.

8.18. а) Часть прямой, проходящей через точки z_1 и z_2, расположенная вне отрезка $[z_1;\,z_2]$. б) Внутренность отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2.

8.25. $W(z_1', z_2', z_3', z_4') = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)}$.

8.30. а) $w = i + \dfrac{1}{\bar{z} + i}$; б) $w = Re^{i\varphi} + \dfrac{R^2}{\bar{z} - Re^{-i\varphi}}$; в) $w = z_0 + \dfrac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}$.

8.32. $A' = Aa\bar{a} + Ba\bar{c} - \overline{B}a\bar{c} + Cc\bar{c}$, $B' = Aa\bar{b} + Ba\bar{d} - \overline{B}c\bar{b} + Cc\bar{d}$, $C' = Ab\bar{b} + Bb\bar{d} - \bar{B}\bar{b}d + Cd\bar{d}$.

8.42. а) 3/16; б) 1/16.

8.43. Найдите отдельно произведения $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15}$ и $\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}$.

8.44. Сделайте умножение на $\sin a$.

8.45. а) $\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$; б) $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$; в) $\dfrac{1}{2^n}$; г) $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

8.47. а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; б) 5.

8.48. Домножьте уравнение на $32\sin\dfrac{\pi x}{31}$. *Ответ*: $x_1 = 2n$, $n \neq 31l$; $x_2 = \dfrac{31}{33}(2n+1)$, $n \neq 33l + 16$ $(n, l \in \mathbb{Z})$.

8.50. Из данных соотношений находим:

$$\sin 2\beta = \frac{3}{2}\sin 2\alpha, \quad 3\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\beta = \cos 2\beta.$$

Отсюда

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha \cdot 3\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \frac{3}{2}\sin 2\alpha = 0.$$

8.51. а) Воспользуйтесь равенствами $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$ и $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$; б) Воспользуйтесь результатом задачи 8.5.

8.52. Воспользуйтесь равенствами $\sin 6^\circ = \sin(60^\circ - 54^\circ)$ и $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$.

8.53. а) На первом шаге нужно применить формулы для суммы и разности синусов к величинам $\sin\alpha + \sin\beta$ и $\sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)$. б) Решается аналогично предыдущему пункту.

8.54. Сумма $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$ приводится к виду

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

8.55. $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$.

8.57. Воспользуйтесь равенством а) из задачи 8.53.

8.61. $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

8.64. Наибольшее значение — 1, наименьшее — 1/4.

8.65. Воспользуйтесь равенством

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x.$$

8.66. Домножьте уравнение на $\sin\dfrac{x}{2}$.

8.69. $x=2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

$y=-2-4(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma)$;

$z=2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$.

8.70. а) $\dfrac{9\pi}{14}$; б) $-\dfrac{\pi}{10}$.

8.71. а) Пусть $y=\arcsin x$ $(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$. Тогда $\sin y=x$, $\cos y=$ $=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$, причем перед корнем выбирается знак плюс, так как $\cos y\geqslant 0$. Остальные формулы доказываются аналогично.

8.72. На основании определения имеем:

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\operatorname{arcctg}x\leqslant\pi.$$

Отсюда

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x<\frac{3\pi}{2}.$$

Остается проверить равенство

$$\sin(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x)=0.$$

Для доказательства второго равенства достаточно заметить, что

$$-\frac{\pi}{2}<\arcsin x+\arccos x<\frac{3\pi}{2}$$

и найти

$$\sin(\arcsin x+\arccos x).$$

8.74. $\pi/2$ при $x>0$ и $-\pi/2$ при $x<0$.

8.75. Прежде всего нетрудно показать, что величины $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$ и $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ отличаются друг от друга на $\varepsilon\pi$, где ε — целое число. Действительно,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Так как

$$-\pi<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\pi,$$

то ε может принимать лишь три значения — 0 и ±1. Для нахождения ε рассмотрите косинусы левой и правой частей исходного равенства.

8.78. По формуле котангенса суммы

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}F_{2n}-\operatorname{arcctg}F_{2n+2})=\frac{F_{2n}F_{2n+2}+1}{F_{2n+2}-F_{2n}}=F_{2n+1}.$$

Тем самым равенство (8.2) доказано. Суммируя его по n от 1 до ∞, находим

$$\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arcctg} 13 + \ldots + \operatorname{arcctg} F_{2n+1} + \ldots = \operatorname{arcctg} 1 = \pi/4.$$

8.79. Пусть $\alpha = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$. Докажите, что угол α лежит в пределах $0 < \alpha \leqslant 3\pi/2$ и $\sin\alpha = 0$.

8.80. $0 \leqslant x \leqslant 4$.

8.84. $\arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \pi/2$.

8.86. По формуле из задачи 8.75, $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$. *Ответ*: 0.

8.87. Для доказательства соотношения $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ воспользуйтесь равенством

$$\sin\alpha = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma.$$

Другие соотношения проверяются аналогично.

8.88. Из первых двух равенств системы (8.4) находим:

$$b = \frac{c(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}, \quad a = \frac{c(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}.$$

После подстановки этих равенств в третье уравнение системы, приходим к соотношению

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0.$$

Отсюда $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta$, $\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma = \sin\alpha\sin\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $a\sin\gamma = c\sin\alpha$, $b\sin\gamma = c\sin\beta$.

8.90. Из первого равенства

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Отсюда

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\beta\sin^2\gamma},$$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}.$$

Так как данные формулы переходят одна в другую при круговой перестановке переменных α, β, γ, A, B, C и от этого преобразования правая часть последнего равенства не меняется, то

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2\gamma}.$$

Так как все величины α, β, γ, A, B, C заключены в пределах от 0 до π, то

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

Глава 9. Уравнения и системы

9.2. После подстановки $z = x + \beta$, коэффициент при x^2 оказывается равен $A + 3\beta$. Поэтому нужно выбрать $\beta = -A/3$.

9.3. а) Функция $f(x) = x^3 + px$ — нечетная, поэтому ее график симметричен относительно начала координат. б) График функции $f(x) = x^3 + px + q$ получается из графика функции $f(x) = x^3 + px$ параллельным переносом, поэтому он также имеет центр симметрии. в) Из задачи 9.2 следует, что функция $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ может быть получена из функции $f(x) = x^3 + px + q$ линейной заменой переменной и умножением на число. Оба эти преобразования сохраняют свойство графика иметь центр симметрии.

9.4. Число $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ удовлетворяет кубическому уравнению $\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$. Так как $\alpha^3 + 3\alpha - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 4)$, то у полученного многочлена нет действительных корней, кроме $\alpha = 1$.

9.5. Приведите уравнение к виду $2x^3 + (x+1)^3 = 0$.

9.6. Воспользуйтесь условиями $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = b > 0$.

9.7. Числа a и b должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = -q, \\ a^3\, b^3 = -p^3/27. \end{cases}$$

Поэтому a^3 и b^3 можно найти как корни квадратного уравнения $y^2 + qy - p^3/27 = 0$. То есть

$$a^3, b^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}; \quad a, b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

9.8. Разложение выглядит следующим образом:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega).$$

Здесь ω и ω^2 — кубические корни из 1:

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

9.9. $x_1 = a + b$, $x_2 = a\omega + b\omega^2$, $x_3 = a\omega^2 + b\omega$, где ω и ω^2 — кубические корни из 1 (смотрите задачу 9.8.)

9.10. Формула Кардано получается, если воспользоваться ответом задачи 9.7 и формулой для корня x_1 из задачи 9.9. Для того, чтобы найти два других корня, заметим, что при нахождении чисел a и b кубический корень можно извлечь тремя способами. Всего получается 9 комбинаций x вида $x = a + b$, но только три из них будут корнями, поскольку a и b связаны условием $a \cdot b = -p/3$. Если в качестве a и b взять пару чисел из решения задачи 9.7, то кроме корня $x_1 = a + b$, исходное кубическое уравнение будет иметь корни $x_2 = \omega a + \omega^2 b$ и $x_3 = \omega^2 a + \omega b$, где ω — кубический корень из 1.

9.11. Так как

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = (a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega),$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = (x + y\omega + z\omega^2)(x + y\omega^2 + z\omega),$$

то

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) =$$
$$= (X + Y\omega + Z\omega^2)(X + Y\omega^2 + Z\omega) = X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - XZ.$$

9.12. Подбором находим корень $x_0 = 1$. Так как

$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2),$$

то других действительных корней нет. Поэтому формула Кардано дает корень $x_0 = 1$:

$$1 = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{27}}}.$$

9.13. $x^3 + 3/4x - 7/4$, $\alpha = 1$.

9.14. При $a \in \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ уравнение имеет 3 решения, при $a = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ — два решения и при $a \notin \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ — 1 решение.

9.15. По формуле Кардано находим корень $x_1 = 2/\sqrt{3}$. После деления столбиком, приходим к равенству

$$x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right).$$

Полученный квадратный трехчлен оказывается полным квадратом. В итоге получается, что уравнение имеет три действительных корня, два из которых совпадают. *Ответ*: $x_1 = 2/\sqrt{3}$, $x_2 = x_3 = -1/\sqrt{3}$.

9.16. Воспользуйтесь равенством $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

9.17. $D(x^3 + px + q) = -4p^3 - 27q^2$.

9.18. Решение непосредственно следует из результата задачи 9.17.

9.19. $a = 1$, $b = 2$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-5}$.

9.26. а) $x_1 = 2\cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = 2\cos\frac{7\pi}{9}$, $x_3 = 2\cos\frac{13\pi}{9}$;

б) $x_1 = 2\cos\frac{\pi}{18}$, $x_2 = 2\cos\frac{13\pi}{18}$, $x_3 = 2\cos\frac{21\pi}{18}$.

9.28. Вычитая из одного уравнения другое, находим

$$(p - p')x + (q - q') = 0. \tag{13.20}$$

Умножая первое уравнение на q', а второе на q и вычитая почленно, будем иметь

$$x^3(q'-q)+x(pq'-qp')=0, \quad x^2(q'-q)+pq'-qp'=0. \qquad (13.21)$$

Исключая теперь из уравнений (13.20) и (13.21) переменную x, получим искомый результат.

9.30. Чтобы правая часть уравнения 9.5 была полным квадратом необходимо и достаточно выполнение двух условий: дискриминант равен нулю; старший коэффициент неотрицателен. Запишем эти условия в явном виде:

$$D(\alpha)=(C+\alpha^2)(A+2\alpha)-B^2=0, \quad \alpha \geqslant -A/2.$$

Первое соотношение является кубическим уравнением относительно α. Его корни могут быть найдены по формуле Кардано. Остается заметить, что

$$D(-A/2)=-B^2 \leqslant 0, \quad \lim_{\alpha\to\infty} D(\alpha)=\infty,$$

поэтому один из найденных корней обязательно будет удовлетворять условию $\alpha \geqslant -A/2$.

9.31. Сделайте замены $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0;2\pi]$. Ответ: $x = \sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $y=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k=0, 1, 2, 3$.

9.32. $(x, y, z)=\left(\cos\frac{2\pi k}{9}, \cos\frac{4\pi k}{9}, \cos\frac{8\pi k}{9}\right)$ $(k=0, \ldots, 4)$, или $(x, y, z)= \left(\cos\frac{2\pi k}{7}, \cos\frac{4\pi k}{7}, \cos\frac{8\pi k}{7}\right)$ $(k=1, 2, 3)$.

9.33. Представьте семь данных чисел как тангенсы некоторых углов.

9.34. Сделайте замены $x=2\cos\varphi$, $y=2\sin\varphi$, $z=3\cos\psi$, $t=3\sin\psi$.

9.35. а) Сделайте замену $x=\cos t$.

Ответ: $x\in\left\{-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}\right\}=\left\{\cos\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{5\pi}{8}\right\}$;

б) *Ответ*: $x\in\{5/3, 5/4\}$;

в) Сделайте замену $x=\sin t$, $t\in[-\pi/2;\pi/2]$. Относительно t уравнение будет иметь одно решение $t=\pi/5$. *Ответ*: $x=\sin(\pi/5)$.

г) Сделайте замену $x=\cos t$.

9.36. Если $h_n=\sin 2\alpha$, то $h_{n+1}=\sin\alpha$. Поскольку $h_1=\sin(\pi/6)$, то задача сводится к оценке суммы $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$. Из неравенства $\sin x<x$ $(x>0)$ находим

$$S<\frac12+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\pi}{3\cdot 2^n}=\frac12+\frac{\pi}{6}<1{,}03.$$

9.37. Сделаем замену $x = \cos t$, $t \in [0; \pi/2]$. Уравнение перепишется в виде $8\cos t \cos 2t \cos 4t + 1 = 0$. Домножая на $\sin t$, получаем, что корни последнего уравнения лежат среди корней уравнения $\sin 8t + \sin t = 0$ или $\sin(9t/2)\cos(7t/2) = 0$. Решая уравнение и делая проверку, находим, что на отрезке $[0; \pi/2]$ лежит 4 корня. *Ответ*: 4.

9.41. б) Система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2}, \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2}, \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}$$

После замены $x = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ получаем, что $y = \operatorname{tg} 2\alpha$, $z = \operatorname{tg} 4\alpha$, $x = \operatorname{tg} 8\alpha$. Решая уравнение $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$, находим, что $\alpha = \dfrac{\pi k}{7}$, $-3 \leqslant k \leqslant 3$. *Ответ*: $(x, y, z) = \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi k}{7}, \operatorname{tg}\dfrac{2\pi k}{7}, \operatorname{tg}\dfrac{4\pi k}{7}\right)$ $(-3 \leqslant k \leqslant 3)$.

9.44. Сделайте замены $a = 2 - x$, $b = 2 - y$, $c = 2 - z$, $a = 2\cos\alpha$.

9.45. После замены $x = \sin t$, $t \in [-\pi/2; \pi/2]$, приходим к уравнению

$$\sqrt{\frac{1 + \sin 2t}{2}} = \cos 2t.$$

Решая его, находим $\sin 2t = -1$ или $\sin 2t = 1/2$, где $t \in [-\pi/4; \pi/4]$. Отсюда $t = -\pi/4$ или $t = \pi/12$. *Ответ*: $x \in \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right\}$.

9.47. Обозначим через d_n разность $d_n = x_n - \sqrt{2}$. Тогда последовательность $\{d_n\}$ будет удовлетворять рекуррентному соотношению

$$d_{n+1} = \frac{d_n^2}{2(\sqrt{2} + d_n)} \quad (n \geqslant 1).$$

Если для некоторого n окажется, что $0 < d_n < 1$, то начиная с этого момента d_n будет убывать не медленнее, чем геометрическая прогрессия: $0 < d_{n+1} < d_n/2$. В нашем случае $d_2 = 3/2 - \sqrt{2}$ удовлетворяет нужному условию, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}.$$

9.48. Последовательность будет сходиться к $-\sqrt{2}$.

9.49. Как и при решении задачи 9.47, обозначим через d_n разность $d_n = x_n - \sqrt{k}$. Тогда

$$d_{n+1} = \frac{d_n^2}{2(\sqrt{k} + d_n)} \quad (n \geqslant 0).$$

Последовательность $\{d_n\}$ оказывается монотонной и ограниченной. Значит она имеет предел, который может быть только равным 0.

9.50. Воспользуйтесь методом математической индукции.

9.51. $a_n = \dfrac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^n \dfrac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{n-1}}$.

9.52. Рассмотрите последовательность, которая задается условиями:

$$y_0 = \sqrt{\sqrt{x}}, \quad y_{n+1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^3 y_n}}}} \quad (n \geqslant 0).$$

Можно также воспользоваться последовательностью

$$y_0 = \sqrt{\sqrt{x}}, \quad y_{n+1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x y_n^3}}} \quad (n \geqslant 0),$$

но скорость сходимости при этом будет меньше (см. задачу 9.69).

9.53. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln N^{1/2^k}}{N^{1/2^k} - 1} = 1,$$

то

$$\ln N = \lim_{k\to\infty} 2^k (N^{1/2^k} - 1).$$

При вычислении $\ln N$ на калькуляторе не следует брать k очень большим, поскольку это приводит к росту погрешности.

9.59. Последовательность будет сходиться для всех x_0.

9.60. При $a \geqslant 0$ последовательность сходится для $x_0 \geqslant -a$, при $-1/4 \leqslant a < 0$ — для $x_0 \geqslant \dfrac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}$, а при $a < -1/4$ — расходится для всех x_0.

9.61. Из разложения синуса в ряд Тейлора $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \ldots$ следует, что последовательность $v_n = 3/x_n^2$ удовлетворяет условию

$$v_{n+1} - v_n = 1 + O\left(\frac{1}{v_n}\right)$$

Отсюда $v_n = n + O(\log n)$, $x_n = \sqrt{\dfrac{3}{n}}\left[1 + O\left(\dfrac{\log n}{n}\right)\right]$.

9.62. Пусть $OAKB$ — данный прямоугольник, расположенный на координатной плоскости так, что его вершины имеют координаты $O(0;0)$, $A(a;0)$, $K(a;b)$, $B(0;b)$. Тогда искомая точка будет иметь координаты

$$x = \frac{aq}{1-q^4}, \quad y = \frac{aq^4}{1-q^4},$$

где $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = -\widehat{\varphi}$.

9.63. Как и при решении задачи 9.47, обозначим через d_n разность $d_n = a_n - \sqrt[3]{a}$. Тогда

$$d_{n+1} = \frac{2d_n^3 + 3d_n^2\sqrt[3]{a}}{3(\sqrt[3]{a} + d_n)^2} \quad (n \geqslant 1).$$

Если для некоторого n_0 число d_{n_0} будет положительным (это условие будет выполнено при $n=2$ независимо от значения a), то для d_{n+1} можно будет написать оценку

$$d_{n+1} < \frac{3d_n^3 + 3d_n^2\sqrt[3]{a}}{3(\sqrt[3]{a} + d_n)^2} = \frac{d_n^2}{\sqrt[3]{a} + d_n} < d_n \quad (n \geqslant n_0).$$

Последовательность $\{d_n\}$ снова оказывается монотонной и ограниченной. Поэтому она имеет предел, который может быть равным только 0.

9.64. Обозначим предел последовательности $\{x_n\}$ через α.

а) $x_0 = 1$, $\alpha = \alpha^{(1)}$; $x_0 = -1$, $\alpha = \alpha^{(2)}$.

б) $x_0 = \pm 1$, $\alpha = \alpha^{(3)}$;

в) $x_0 = 1$, предел не существует; $x_0 = -1$, $\alpha = \alpha^{(2)}$;

г) $x_0 = \pm 1$, $\alpha = \alpha^{(1)}$;

9.66. Данное уравнение можно записать в виде $x^2 = 1 + 1/x$. Последовательность, построенная по правилу $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 1/x_n}$, будет сходиться к корню данного уравнения. Другой способ приближенного нахождения корня (причем более быстрый) получается, если применить метод Ньютона (см. задачу 9.85). Можно также воспользоваться последовательностью $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n}$.

9.67. Неравенство $0 < 2 - a_n < (3/4)^n$ доказывается по индукции.

9.68. Можно указать $0 < q < 1$ такое, что (начиная с некоторого n) $a_{n+1} < qa_n$.

9.69. Примените теорему Лагранжа о конечном приращении.

9.72. $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$.

9.76. Из задачи 9.74 следует, что данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{a + x} = x$. Отсюда находим, что уравнение разрешимо при $a \geqslant -\dfrac{1}{4}$ и имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

9.77. Воспользуйтесь неравенствами $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ и теоремой Вейерштрасса.Явное выражение для $\mu(a, b)$ через a и b впервые получил Гаусс:

$$\mu(a, b) = \pi\left(2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\right)^{-1}.$$

9.78. б) Докажите, что произведение элементов данных последовательностей не меняется: $a_n b_n = ab$ $(n \geqslant 0)$. Затем перейдите к пределу в этом равенстве.

9.79. $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1/a_n+1/b_n}{2},\quad \dfrac{1}{b_{n+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{a_n}\cdot\dfrac{1}{b_n}}.$

9.82. Для $x_0=2\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $2\cos\dfrac{4\pi}{7}$, $2\cos\dfrac{6\pi}{7}$, $2\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $2\cos\dfrac{4\pi}{9}$, $2\cos\dfrac{8\pi}{9}$.

9.83. Сделайте замену $x_0=2\cos\alpha$.

9.86. а) $x_n=F_{2^n+1}/F_{2^n}=[\underbrace{1;1,1,\ldots,1}_{2^n}]\to\varphi$;

б) $x_n=F_{-2^n+1}/F_{-2^n}=-F_{2^n-1}/F_{2^n}=[\underbrace{-1;2,1,\ldots,1}_{2^n-1}]\to\widehat{\varphi}$.

9.87. Последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к различным корням уравнения $x^2-px+q=0$. Какой именно из корней является предельным значением, зависит от знака параметра q.

9.88. Докажите, что подходящие дроби p_n/q_n к числам α и β удовлетворяют соотношению

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{p_n^2-q\cdot q_n^2}{q_n(2p_n-p\cdot q_n)}.$$

9.89. Так как функция $f(x)$ нечетная, то можно пытаться найти такую точку $x_0\neq 0$, что $x_1=-x_0$. В этом случае получится, что $x_2=-x_1=x_0$. Условие $x_1=-x_0$ записывается в виде уравнения $x_0(x_0^2-1)=-x_0$. Отсюда $x_0=\pm\sqrt{2}$.

9.90. Нетрудно найти первые многочлены:

$$P_1(x)=x^2-3x+1=x^2-L_2x+1,$$
$$P_2(x)=x^2-7x+1=x^2-L_4x+1,$$
$$P_3(x)=x^2-47x+1=x^2-L_8x+1,$$

где L_k — числа Люка. Общая формула доказывается по индукции:

$$P_k(x)=x^2-L_{2^k}x+1.$$

Отсюда

$$x_1=\lim_{k\to\infty}(L_{2^k})^{1/2^k}=\varphi,\quad x_2=-\lim_{k\to\infty}(L_{2^k})^{-1/2^k}=\widehat{\varphi}.$$

9.92. а) 4, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, 3; б) Воспользуйтесь формулами для длин сторон описанного и вписанного многоугольников $a_n=\operatorname{tg}(\pi/n)$, $b_n=\sin(\pi/n)$, $p_n=nb_n$, $q_n=na_n$.

9.94. Из соотношения

$$\sin x=2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$$

и равенства

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=x$$

находим

$$\frac{x}{\sin x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots$$

Далее, подставляя значение $x=\pi/2$, приходим к нужному равенству.

9.95. Для наибольшего числа a график функции $y=a^x$ должен касаться прямой $y=x$. *Ответ*: $a=e^{1/e}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$.

9.96. а) $x=\sqrt{2}$; б) решений нет; в) $x=e^{1/e}$ (см. задачу 9.95).

9.98. Докажите неравенство $a_n^3 > 3n$ и оцените разность a_n^3-3n.

9.100. Воспользуйтесь равенством $x_1+y_1+z_1=x_1y_1z_1$.

9.102. а) $(2, -1, -3, -4)$.

9.104. а) 13×11; б) 61×69.

9.105. Нет. Если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — два вектора решений, то решением будет и вектор $\lambda\overline{x}+(1-\lambda)\overline{y}$ при любом действительном λ.

9.106. Указание: Пусть $x_1, \ldots, x_n$ стороны квадратов. Тогда $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ удовлетворяют системе линейных уравнений (как в задаче 9.104), к которой можно добавить еще одно нелинейное соотношение

$$x_1^2+\ldots+x_n^2=ab.$$

9.107. а) $(4/9, 5/9, 1/2, 1/2)$; б) $(8/13, 6/13, 6/13, 6/13)$.

9.108. а) Если $a=1$, то $(x, y)=(t, 1-t)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a=-1$, то решений нет; если $a\neq\pm1$, то $(x, y)=\left(\dfrac{a^2+a+1}{a+1}, -\dfrac{a}{a+1}\right)$.

б) Если $a=0$, то $(x, y)=(2, t)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a=1$, то решений нет; если $a\neq 0, 1$, то $(x, y)=\left(\dfrac{a^2-2}{a-1}, \dfrac{2-a}{a-1}\right)$.

в) Если $a=1$, то $(x, y)=(2-4t, t)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a=3$, то решений нет; если $a\neq 1, 3$, то $(x, y)=\left(\dfrac{4(a-2)}{a-3}, \dfrac{1-a}{a-3}\right)$.

г) Если $a=0$, то $(x, y)=(t, 2)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a=\pm1$, то решений нет; если $a\neq 0,\ \pm1$, то $(x, y)=\left(\dfrac{a^5-2a^4+2a^2-a+6}{2(a^2-1)}, \dfrac{a^6-a^2-2a-4}{2(a^2-1)}\right)$.

д) Если $a=1$, то $(x, y)=(t, 1-t)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a=-1$, $(x, y)=(t, t-1)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a\neq\pm1$, то $(x, y)=(a^2+1, -a)$.

е) Если $a=0$, то $(x, y)=(t, 0)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a=1/2$, $b=1/2$, $(x, y)=$ $=(1/2+t, t)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a=1/2$, $b\neq 1/2$, то решений нет; если $a\neq 0,\ 1/2$, то $(x, y)=\left(\dfrac{a-b}{2a-1}, \dfrac{a(1-2b)}{2a-1}\right)$.

ж) Если $a=b=0$, то $(x, y)=(t_1, t_2)$ $(t_1, t_2\in\mathbb{R})$; если $a=b\neq 0$, $(x, y)=$ $=(t, 1-t)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a=-b\neq 0$, $(x, y)=(1+t, t)$ $(t\in\mathbb{R})$; если $a\neq\pm b$, то $(x, y)=(1, 0)$.

з) Если $a\geqslant 0$, то $(x, y)=\left(\dfrac{2a}{a^2+1}, \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$; если $a<0$, $(x, y)=(0, 1)$.

9.109. Первый игрок всегда может добиться того, чтобы решением системы был вектор $(1, 1, 1)$.

9.112. а) Воспользуйтесь методом бесконечного спуска.

в) Если не все гири имеют одинаковую массу, то это означает, что у некоторой системы линейных уравнений кроме решения $x_1 = x_2 = \ldots = 1$ есть еще одно. Но тогда такая система будет иметь и нетривиальное решение в рациональных числах.

9.114. Методом Гаусса приведите систему уравнений к треугольному виду.

9.115. Будем считать, что система линейных уравнений составлена относительно неизвестных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (потенциалов в узлах сети). В этом случае равенства, составленные для токов по второму правилу Кирхгофа будут выполняться автоматически. Таким образом, система будет состоять из n уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа. Если она будет иметь два решения, то, вычитая одно из другого, получим нетривиальное решение однородной системы (с нулевыми потенциалами на батарейках). Выберем тот узел, в котором потенциал максимален (или минимален). Тогда из этого узла токи будут только вытекать (втекать), что будет противоречить соответствующему уравнению, составленному по первому правилу Кирхгофа. Существование решения системы вытекает из его единственности (см. альтернативу Фредгольма из задачи 9.114).

Глава 10. Неравенства

10.1. Поделите неравенство $(x-1)^2 \geqslant 0$ на x.

10.2. Возведите неравенство в квадрат.

10.3. Воспользуйтесь два раза неравенством задачи 10.2.

10.4. Возведите неравенство в квадрат и воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

10.5. Воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

10.6. Воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

10.7. Раскройте скобки в неравенстве $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geqslant 0$.

10.8. Сложите неравенства $(x_1/2)^2 + x_2^2 \geqslant x_1x_2, \ \ldots, \ (x_1/2)^2 + x_5^2 \geqslant x_1x_5$.

10.10. После упрощений воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

10.11. После раскрытия скобок получается неравенство задачи 10.7.

10.12. Примените два раза неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: сначала к числам, а потом к их показателям.

10.13. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2=0$.

10.14. Число $1+xy$ всегда положительно. После домножения на это число, неравенство может быть записано в виде $(1\pm x)(1\pm y)>0$.

10.15. Сначала докажите неравенство для рациональных α и β.

10.16. Воспользуйтесь неравенством

$$a^2(b-c)^2+b^2(a-c)^2+c^2(a-b)^2\geqslant 0.$$

10.17. Раскройте скобки и воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

10.20. После извлечения квадратного корня задача сводится к неравенству $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4\geqslant 0$.

10.21. Воспользуйтесь неравенством

$$a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2\geqslant 0.$$

10.22. Раскройте скобки и воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

10.23. Воспользуйтесь неравенством

$$(1+a^4)(1-b^2)^2+(1+b^4)(1-a^2)^2\geqslant 0.$$

10.24. Воспользуйтесь неравенствами из задач 10.7 и 10.16.

10.26. Докажите сначала неравенство $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

10.28. Смотрите задачу 10.21.

10.29. Воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

10.30. После домножения на общий знаменатель и сокращений задача сводится к неравенству из задачи 10.26.

10.31. Воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим (задача 10.10).

10.37. а) Докажите неравенство по индукции. б) Два раза применить неравенство п. а).

10.41. Всегда можно подобрать натуральные x и y так, чтобы выполнялись равенства

$$p=\frac{x+y}{x},\quad q=\frac{x+y}{y}.$$

После замены $\alpha=a^{1/x}$, $\beta=b^{1/y}$ исходное неравенство принимает вид

$$\frac{x\alpha^{x+y}+y\beta^{x+y}}{x+y}\geqslant\alpha^x\beta^y.$$

Для его доказательства достаточно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x\alpha^{x+y}+y\beta^{x+y}}{x+y}\geqslant\sqrt[x+y]{\underbrace{\alpha^{x+y}\ldots\alpha^{x+y}}_{x}\underbrace{\beta^{x+y}\ldots\beta^{x+y}}_{y}}=\alpha^x\beta^y.$$

10.43. а) $(\sqrt[n]{n!})^2 = \sqrt[n]{(1 \cdot n) \ldots (n \cdot 1)} \geqslant \sqrt[n]{n^n} = n$. Вторая часть неравенства следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

10.44. Так как для x из интервала $(0; \pi/2)$ выполняется оценка $x < \operatorname{tg} x$, то

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 1.$$

10.46. Если m, n, $k \geqslant 2$, то $m^{(n^k)} \geqslant (m^n)^k$.

10.47. а) Воспользуйтесь неравенством $\dfrac{1}{n+k} > \dfrac{1}{2n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. б) Разбейте сумму на блоки по 2^k слагаемых $(0 \leqslant k \leqslant n)$. в) Сравните произведение из условия задачи с произведениями

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \ldots \frac{100}{101} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots \frac{98}{99}.$$

г) Оцените отдельно произведение

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \ldots \frac{99}{100}.$$

10.48. $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{y}{z} \cdot \dfrac{z}{x} = 1$.

10.50. Выберите $f_k(x) = a_k x^2 + b_k x$.

10.52. Рассмотрите функции $f_k(x) = a_k e^x - b_k(x+1)$.

10.53. а) Положите $b_1 = \ldots = b_n = 1$. б) Положите $a_1 = \ldots = a_n = 1$. в) Положите $a_1 = b_1 c_1, \ldots, a_n = b_n c_n$.

10.55. Пусть $l(x)$ — касательная к графику функции $f(x)$ в точке $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Тогда, по определению выпуклости,

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) < \alpha_1 l(x_1) + \alpha_2 l(x_2) = l(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

10.56. Применим индукцию. При $n = 2$ неравенство Иенсена было доказано в задаче 10.55. Предположим, что оно верно для некоторого $n \geqslant 2$ и докажем его при $n+1$. Пусть $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n > 0$. Тогда $\dfrac{\alpha_1}{\beta} + \ldots + \dfrac{\alpha_n}{\beta} = 1$. Используя неравенство с $n = 2$, находим

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = f\left(\beta\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right) + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right) >$$
$$> \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \beta f\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right).$$

Далее, по предположению индукции,

$$f\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right) > \frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} f(x_n).$$

Следовательно

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n+1}x_{n+1}) > \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_{n+1}f(x_{n+1}).$$

10.58. Воспользуйтесь неравенством Иенсена для следующих функций: а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=1/x^2$; в) $f(x)=e^{nx}$; г) $f(x)=1/x$.

10.60. Применяя неравенство Иенсена к функции $y=x^p$, получаем

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^p \leqslant \alpha_1 x_1^p + \alpha_2 x_2^p + \ldots + \alpha_n x_n^p.$$

После замены

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \ldots + \beta_n}, \ldots, \alpha_n = \frac{\beta_n}{\beta_1 + \ldots + \beta_n}$$

приходим к нужному неравенству:

$$(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n)^p \leqslant (\beta_1 + \ldots + \beta_n)^{p-1}(\beta_1 x_1^p + \ldots + \beta_n x_n^p).$$

10.61. В неравенстве из предыдущей задачи сделайте подстановку: $\beta_k = b_k^q$, $x_k = a_k b_k^{1-q}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

10.64. Для доказательства неравенств достаточно рассмотреть функцию $f(x)=e^{\alpha x}$ и точки $\ln x_1, \ldots, \ln x_n$.

Для подсчета пределов воспользуемся приближенной формулой для функции e^x, которая верна на отрезке $x \in [-1; 1]$:

$$e^x = 1 + x + \theta x^2 \quad (|\theta| < 1).$$

При достаточно малом α получим

$$S_\alpha(x) = \left(\frac{e^{\alpha \ln x_1} + \ldots + e^{\alpha \ln x_n}}{n}\right)^{1/\alpha} = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\ln(x_1 \ldots x_n) + \alpha^2 A\right)^{1/\alpha},$$

$$S_0(x) = \left(e^{\frac{\alpha}{n}\ln(x_1 \ldots x_n)}\right)^{1/\alpha} = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\ln(x_1 \ldots x_n) + \alpha^2 B\right)^{1/\alpha},$$

где $A=A(\alpha)=\theta_1(\ln^2 x_1+\ldots+\ln^2 x_n)$; $B=B(\alpha)=\dfrac{\theta_2}{n^2}\ln^2(x_1 \ldots x_n)$; $|\theta_1|, |\theta_2|<1$. Поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{S_\alpha(x)}{S_0(x)} = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1+(\alpha/n)\ln(x_1 \ldots x_n)+\alpha^2 A}{1+(\alpha/n)\ln(x_1 \ldots x_n)+\alpha^2 B}\right)^{1/\alpha} = 1.$$

10.72. а) Других нет; б) $(5, 1, 1)$ и $(4, 3, 0)$; $(4, 1, 1, 1)$ и $(3, 3, 1, 0)$.

10.73. Рассмотрите несколько частных случаев: $x=y=z=t$; $x=y=t$, $z=1$; $x=t$, $y=z=1$, где t — параметр, принимающий действительные значения, и сравните степени полученных полиномов от t.

10.74. Очевидно, что достаточно доказать неравенство в случае, когда набор β получается из набора α сбрасыванием одного «кирпича» на диаграмме Юнга. Проведем доказательство для случая, когда делается переход от $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ к $\beta=(\alpha_1-1, \alpha_2+1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1-\alpha_2\geqslant 2$. При этом каждый одночлен вида $x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}x_{i_3}^{\alpha_3}\ldots x_{i_n}^{\alpha_n}$ заменяется одночленом вида $x_{i_1}^{\alpha_1-1}x_{i_2}^{\alpha_2+1}x_{i_3}^{\alpha_3}\ldots x_{i_n}^{\alpha_n}$. Для доказательства неравенства $T_\alpha(x_1,\ldots,x_n)\geqslant T_\beta(x_1,\ldots,x_n)$ сгруппируем все одночлены, входящие в данное неравенство парами:

$$x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}A+x_{i_2}^{\alpha_1}x_{i_1}^{\alpha_2}A;\quad x_{i_1}^{\alpha_1-1}x_{i_2}^{\alpha_2+1}A+x_{i_2}^{\alpha_1-1}x_{i_1}^{\alpha_2+1}A,$$

$(A=x_{i_3}^{\alpha_3}\ldots x_{i_n}^{\alpha_n}\geqslant 0)$ и проверим, что разность таких пар всегда неотрицательна. Действительно,

$$x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}+x_{i_2}^{\alpha_1}x_{i_1}^{\alpha_2}-x_{i_1}^{\alpha_1-1}x_{i_2}^{\alpha_2+1}-x_{i_2}^{\alpha_1-1}x_{i_1}^{\alpha_2+1}= \\ =(x_{i_1}^{\alpha_1-1}x_{i_2}^{\alpha_2}-x_{i_2}^{\alpha_1-1}x_{i_1}^{\alpha_2})(x_{i_1}-x_{i_2})\geqslant 0,$$

поскольку $\alpha_1-1>\alpha_2$ и разность $x_{i_1}^{\alpha_1-1}x_{i_2}^{\alpha_2}-x_{i_2}^{\alpha_1-1}x_{i_1}^{\alpha_2}$ имеет тот же знак, что и $x_{i_1}-x_{i_2}$.

Частные случае этого рассуждения можно найти в решении задачи 10.76.

10.76. а) Если использовать идею задачи 10.74, то нужно сложить три неравенства вида

$$x^4y^2z+x^2y^4z-2x^3y^3x=x^2y^2z(x-y)^2\geqslant 0.$$

Второй вариант решения получается, если сложить три неравенства вида

$$4x^3y^2z^2\leqslant x^4y^2z+x^4yz^2+x^2y^4z+x^2yz^4,$$

которые следуют из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

б) Для преобразования диаграммы Юнга $(5,0,0)$ в $(2,2,1)$ нужно три шага:

$$(5,0,0)\to(4,1,0)\to(3,2,0)\to(2,2,1),$$

поэтому для непосредственного доказательства неравенства с помощью идеи из задачи 10.74 понадобится цепочка из трех неравенств:

$$x^5+y^5-x^4y-xy^4=(x^4-y^4)(x-y)\geqslant 0, \\ x^4y+xy^4-x^3y^2-x^2y^3=xy(x^2-y^2)(x-y)\geqslant 0, \\ x^3y^2+y^2z^3-x^2y^2z-xy^2z^2=y^2(x^2-z^2)(x-z)\geqslant 0.$$

Более простой вариант доказательства получается, если снова использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Из него вытекает, что

$$5x^2y^2z\leqslant 2x^5+2y^5+z^5.$$

Складывая три таких неравенства, получаем утверждение задачи.

в) Возможны оба варианта доказательства, описанные в пунктах а) и б).

Глава 11. Последовательности и ряды

11.1. а) $\Delta n^2 = 2n+1$;

б) $\Delta n(n-1) = 2n$;

в) $\Delta n^k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} C_k^j n^j$;

г) $\Delta C_n^k = C_{n+1}^k - C_n^k = C_n^{k-1}$.

11.2. $S_n = b_{n+1} - b_1$.

11.3. Для нахождения a_n можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Для этого нужно представить a_n в виде $a_n = An^3 + Bn^2 + Cn$ и определить коэффициенты A, B, C из условия $\Delta a_n = n^2$.

11.4. Найдите последовательность a_n вида $a_n = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$, для которой $\Delta a_n = n^3$.

11.5. Воспользуйтесь тем, что для четного положительного m выполняется равенство $1/F_{2m} = F_{m-1}/F_m - F_{2m-1}/F_{2m}$.

11.6. Утверждение задачи достаточно проверить для $Q(x) = x^{m+1}$. В этом случае $\Delta Q(x) = x^{m+1} - x^m = (m+1)x^m + \ldots$

11.8. Формула доказывается индукцией по n.

11.10. Воспользуйтесь задачей 11.6. Для многочлена $f(x)$ степени m будет выполняться равенство $\Delta^m f(x) = m!a_m$, где a_m — старший коэффициент $f(x)$.

11.11. $n!/n^n$.

11.13. Согласно задаче 11.12, для чисел $y_k = \lambda(-1)^k C_n^k$ действительно выполняются нужные равенства. Поэтому для решения задачи остается показать, что такой набор чисел $\{y_k\}$ единственный с точностью до постоянного сомножителя. Предположим, что таких наборов два: $y_0^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$ и $y_0^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}$. Обозначим через λ_1 и λ_2 те числа, которые получаются при подстановке в равенство 11.1 наборов $\{y_k^{(1)}\}$ и $\{y_k^{(2)}\}$ и функции $f(k) = k^n$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^n y_k^{(1)} = \lambda_1, \quad \sum_{k=0}^{n} k^n y_k^{(2)} = \lambda_2.$$

Тогда новый набор чисел

$$y_k^{(3)} = \lambda_2 y_k^{(1)} - \lambda_1 y_k^{(2)} \quad (k = 0, \ldots, n)$$

обладает тем свойством, что

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) y_k^{(3)} = 0$$

для всех многочленов $f(x)$, $\deg f(x) \leqslant n$. Но многочлен $f(x)$ можно подобрать так, чтобы $f(k) = y_k^{(3)}$ $(k = 0, \ldots, n)$. Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n} (y_k^{(3)})^2 = 0, \quad \text{то есть} \quad y_1^{(3)} = y_2^{(3)} = \ldots = y_n^{(3)} = 0,$$

что противоречит непропорциональности наборов $\{y_k^{(1)}\}$ и $\{y_k^{(2)}\}$.

11.12. Воспользуйтесь результатами задач 11.8 и 11.10.

11.15. $\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}\Delta b_n + b_n \Delta a_n = a_n \Delta b_n + b_{n+1}\Delta a_n$.

11.16. При $n = 1$ формула

$$\Delta(f(x)g(x)) = f(x+1)\Delta g(x) + \Delta f(x)g(x) = f(x)\Delta g(x) + \Delta f(x)g(x+1)$$

легко проверяется. Для доказательства формулы в общем случае применим индукцию. Пусть формула (11.2) справедлива для некоторого n. Тогда применяя ее в равенстве

$$\Delta^{n+1}(f(x)g(x)) = \Delta^n(\Delta^n f(x)g(x)) = \Delta^n(f(x)\Delta g(x) + \Delta f(x)g(x+1))$$

получим

$$\Delta^{n+1}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x)\Delta^{n-k+1} g(x+k) + \\ + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^{k+1} f(x)\Delta^{n-k} g(k+x+1).$$

После сдвига переменной суммирования во второй сумме, приходим к формуле

$$\Delta^{n+1}(f(x)g(x)) = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x)\Delta^{n-k+1} g(x+k) + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \Delta^k f(x)\Delta^{n-k+1} g(x+k) = \\ = \sum_{k=0}^{n+1} (C_n^k + C_n^{k-1})\Delta^n f(x)\Delta^{n-k+1} g(x+k) = \\ = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \Delta^k f(x)\Delta^{n+1-k} g(x+k)$$

11.17. $a_n = 2^n$.

11.20. а) $1 - \dfrac{1}{n+1}$; б) $\dfrac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$; в) $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\Big)$; г) $\dfrac{2^{n+1}}{n+1} - 1$; д) $1 - \dfrac{2}{2n+1} + \dfrac{1}{n+1}$; е) $1 - \dfrac{1}{n!}$; ж) $(n+1)! - 1$.

11.22. Для доказательства единственности проверьте, что наибольшее и наименьшее значения функции достигаются на границах прямоугольника. Существование нужной функции вытекает из ее единственности (см. альтернативу Фредгольма из задачи 9.114).

11.23. б) Для двух многочленов степени n $f(x)$ и $g(x) = d_0 C_x^0 + d_1 C_x^1 + \ldots + d_n C_x^n$ справедливы равенства $\Delta^k f(0) = \Delta^k g(0)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Поэтому они совпадают в точках $x = 0, 1, \ldots, n$, то есть равны.

11.24. $T_n = C_n^4$, $K_n = C_n^2 + C_n^3 + C_n^4$.

11.25. а) Пятиугольные числа: $a_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

б) Гексы — количество шаров, уложенных в шестиугольник со стороной n: $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ (см. задачу 1.66).

в) Тетраэдральные числа, равные количеству шаров, уложенных в тетраэдр с ребром n: $a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$; г) октаэдральные числа: $a_n = \dfrac{n(2n^2+1)}{3}$.

д) Количество шаров, уложенных в пентатоп, аналог тетраэдра, но в четырехмерном пространстве: $a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$.

11.26. Поскольку многочлен $f(x)$ принимает целые значения в точках $x = 0, 1, \ldots, n$, то коэффициенты d_k, найденные по формулам $d_k = \Delta^k f(0)$ (см. задачу 11.23), оказываются целыми.

11.31. Если $n = 4k+1$ или $n = 4k+2$, то независимо от расстановки знаков будет получаться нечетное число. Поэтому задача решения иметь не будет. Исследуем прогрессии $n = 4k+3$ и $n = 4k$. Покажем, что для чисел из первой прогрессии задача имеет решение начиная с $n = 7$, а из второй — начиная с $n = 8$. Очевидно, что для $n = 3$ и $n = 4$ решения не существует. Из равенства $n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4$ следует, что из восьми последовательных чисел, подобрав знаки $+$ и $-$, всегда можно получить 0. Поэтому, если задача имеет решение для некоторого n, то она будет иметь решение и для всех чисел $n + 8k$ $(k \geqslant 0)$. Осталось показать существование решения для $n = 7$, 11 и 12. Поиск облегчается, если сначала выяснить, для каких комбинаций знаков можно получить 0 по модулю некоторого натурального m, например, для $m = 8$. Нужные представления устроены следующим образом:

$$1 + 4 - 9 + 16 - 25 - 36 + 49 = 0;$$

$$1 - 4 + 9 + 16 + 25 - 36 - 49 - 64 + 81 - 100 + 121 = 0;$$

$$1 - 4 + 9 + 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 - 121 + 144 = 0.$$

11.32, 11.33 Гармоничность данных функций проверяется по определению.

11.34. Рассмотрим функции

$$\Delta_x f(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y) \quad \text{и} \quad \Delta_y f(x, y) = f(x, y+1) - f(x, y),$$

которые также будут ограниченными и гармоническими. Пусть функция $\Delta_x f(x, y)$ не равна нулю тождественно. Допустим, что $M = \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2} f(x, y)$. Тогда на плоскости $\mathbb{Z}^2$ можно найти квадрат K сколь угодно большого размера $(n \times n)$, что $\Delta_x f(x, y) > M/2$ для всех точек этой области V. Отсюда следует, что функция $f(x, y)$ возрастет при движении внутри K параллельно оси Ox по крайней мере на $M \cdot n/2$. Но это противоречит ограниченности $f(x, y)$.

11.35. Проведите доказательство по индукции.

11.37. Согласно задаче 11.36, последовательности $\{a_n\} = c_i x_i^n$ $(i=1,2)$ для любых c_1, c_2 являются решениями уравнения (11.3), поэтому их сумма будет удовлетворять тому же уравнению. С другой стороны, числа c_1, c_2 можно подобрать так, чтобы $a_0 = c_1 + c_2$, $a_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2$. После этого получается, что две последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_1 x_1^n + c_2 x_2^n\}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению и имеют одинаковые начальные условия. Согласно задаче 11.35, они совпадают.

11.39. а) $a_n = 3^n - 2^n$;

б) $a_n = 1$;

в) $a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = F_{n+1}$;

г) $a_n = n + 1$;

д) $a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)$.

11.40. а) $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.

б) $a_n^2 - 2b_n^2 = (a_n - b_n\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = 1$.

в) Из равенства $(a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = (a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2})$ находим, что числа a_n и b_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$. Отсюда $a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$, $b_{n+2} - 2b_{n+1} - b_n = 0$ $(n \geqslant 0)$.

г) $a_n = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n)$, $b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)$.

11.41. Сложите данные числа с сопряженными к ним.

11.42. Указание: $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ — целое число.

11.43. а) b_n; б) a_{n-1}, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности, определенные в задаче 11.40.

11.44. Если пара чисел (a, b) является решением уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$, то и пара (c, d), полученная по формуле

$$(a + b\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)^2 = (3a + 4b) + \sqrt{2}(2a + 3b) = c + d\sqrt{2},$$

также будет удовлетворять этому уравнению:

$$c^2 - 2d^2 = (c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)^2(a - b\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)^2 = \\ = (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 = 1.$$

По паре (c, d) можно восстановить пару (a, b) с помощью равенства

$$a + b\sqrt{2} = (c + d\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)^2 = (3c - 4d) + (3d - 2c)\sqrt{2}.$$

Эти соображения позволяют решить задачу используя метод бесконечного спуска. Действительно, предположим, что (c, d) — некоторое решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$, отличное от пар $(\pm a_{2n}, \pm b_{2n})$ из задачи 11.40. Можно считать, что c и d — натуральные числа, поскольку знак чисел всегда можно поменять, а если $d = 0$, то $c = 1$ и $(c, d) = (a_0, b_0)$. Будем также считать, что среди всех решений, отличных от $(\pm a_{2n}, \pm b_{2n})$ выбрана та пара, в которой значения c и d наименьшие. Построим новые решения

$$a = 3c - 4d,\ b = 3d - 2c.$$

Если окажется, что $0 < a < c$, $0 < b < d$, то получится противоречие с минимальностью пары (c, d). Условия $0 < a < c$, $0 < b < d$ равносильны неравенствам $4d < 3c$, $2c < 3d$. Предположим, что первое из них не выполняется. Тогда $4d \geqslant 3c$ и следующая цепочка соотношений приводит к противоречию:

$$1 = c^2 - 2d^2 \leqslant \frac{16}{9}d^2 - d^2 = -\frac{2}{9}d^2.$$

Предположение $2c \geqslant 3d$ также приводит к противоречию:

$$1 = c^2 - 2d^2 \geqslant \frac{9}{4}d^2 - d^2 = \frac{1}{4}d^2$$

(случаи, когда $d = 1$ или $d = 2$ проверяются непосредственно).

11.45. Если некоторое число q является одновременно квадратным и треугольным, то это означает, что для некоторых натуральных m и n выполняются равенства

$$q = m^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Относительно неизвестных m и n получается уравнение, которое можно переписать в виде $(2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1$. Таким образом $n = \dfrac{x-1}{2}$, $m = \dfrac{y}{2}$, где (x, y) — такое решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$, (x и y всегда имеют нужную четность). Согласно задаче 11.44, $y = b_{2k}$, где b_k — элементы последовательности $\{0, 1, 2, 5, 12, \ldots\}$, которая задается начальными условиями $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ и рекуррентным соотношением

$b_{k+1}=2b_k+b_{k-1}$ $(k\geqslant 1)$. Следовательно,

$$m_k=\frac{b_{2k}}{2},\quad q_k=\left(\frac{b_{2k}}{2}\right)^2\quad (k\geqslant 0).$$

Последовательность чисел $\{q_k\}$ можно также задать начальными условиями $q_0=0$, $q_1=1$ и рекуррентным соотношением $q_{k+1}=34q_k-q_{k-1}+2$ $(k\geqslant 1)$, или замкнутой формулой

$$q_k=\frac{(1+\sqrt{2})^{4k}+(1-\sqrt{2})^{4k}-2}{32}.$$

11.47. Перейдите к сопряженным числам.

11.48. $a_n=\frac{1}{2}\big((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\big)$, $b_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\big((2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\big)$.

11.49. Обе серии можно объединить в одну, состоящую из треугольников на комплексной плоскости с вершинами вблизи точек a_n, b_n, c_n $(n\geqslant 1)$, которые определяются с помощью начальных условий $a_0=1$, $b_0=0$, $c_0=0$ и рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=0\cdot a_n+i\cdot b_n+c_n,\\ b_{n+1}&=a_n+0\cdot b_n+i\cdot c_n,\\ c_{n+1}&=i\cdot a_n+b_n+0\cdot c_n.\end{aligned}$$

Далее следует использовать метод бесконечного спуска.

11.54. В явном виде многочлены Фибоначчи и Люка помещены в приложение С, VIII. Многочлены, стоящие в равенствах а), б) и д) удовлетворяют одному рекуррентному соотношению. Поэтому достаточно проверить лишь выполнение начальных условий. (См. задачу 11.35.) Для доказательства равенств в) и г), найдите рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют многочлены, стоящие в левых и правых частях и проверьте справедливость начальных условий. Например, многочлены Фибоначчи с четными номерами удовлетворяют равенству

$$F_{2n+4}(x)=(x^2+2)F_{2n+2}(x)-F_{2n}(x).$$

11.52. а) Пусть H — основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B, $AH=\frac{m}{2}-x$, $CH=\frac{m}{2}+x$, $BH=h$. Тогда по теореме Пифагора

$$(m-1)^2-\left(\frac{n}{2}-x\right)^2=h^2=(m+1)^2-\left(\frac{n}{2}+x\right)^2.$$

Отсюда $x=2$, $(2h)^2=3m^2-12$. Значит, $2h$ — целое число, кратное 3. Пусть $2h=3d$. Тогда $3d^2=m^2-4$. Рассматривая остатки от деления на 4, получаем, что m, d — четные и h — целое. Поэтому треугольник ABC можно расположить следующим образом: $A(0,0)$, $B(m/2,h)$, $C(m,0)$.

б) Пользуясь тем, что m — четное и h кратно 3, введем новые переменные $x=m/2$, $y=h/3$. Тогда уравнение $(2h)^2=3m^2-12$ перепишется в виде $x^2-3y^2=1$. Согласно задаче 11.48 все возможные значения m имеют вид

$$m_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n.$$

11.53. а) $(x_1, y_1)=(3, 1)$, $\delta=2$; б) $(x_1, y_1)=(18, 5)$, $\delta=2$; в) $(x_1, y_1)=$ $=(15, 4)$, $\delta=1$.

11.56. а) $F_{2n+1}(x)=F_n^2(x)+F_{n+1}^2(x)$;

б) $F_{n+1}(x)F_{n+2}(x)-F_n(x)F_{n+3}(x)=(-1)^n(x)$;

в) $xF_{3n}(x)=F_{n+1}^3(x)+xF_n^3(x)-F_{n-1}^3(x)$;

г) $F_{n+2}(x)+F_{n-2}(x)=(x^2+2)F_n(x)$;

д) $F_{2n+1}^2(x)+F_{2n-1}^2(x)+x^2=(x^2+2)F_{2n+1}(x)F_{2n-1}(x)$.

11.57. $F_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\right]$;

$$L_n(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n+\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n.$$

11.60. $F_{n+1}(x)=\sum\limits_{k\geqslant 0}C_{n-k}^k x^{n-2k}$, $L_n(x)=\sum\limits_{k\geqslant 0}(C_{n-k}^k+C_{n-k-1}^{k-1})x^{n-2k}=$ $=\sum\limits_{k\geqslant 0}T_n^k x^{n-2k}$, где T_n^k — числа из задачи 2.93.

11.61. Пусть a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n обозначают число способов добраться из вершины A за n прыжков до вершин A, B, C, D, E, F соответственно. В силу симметрии задачи, $b_n=f_n$, $c_n=e_n$. Легко видеть, что выполняются равенства

$$\begin{cases} b_{n+1}=a_n+c_n,\\ d_{n+1}=2c_n,\\ a_{n+1}=2b_n,\\ c_{n+1}=b_n+d_n. \end{cases}$$

Отсюда находим, что все перечисленные последовательности удовлетворяют рекуррентному уравнению $x_{n+4}-5x_{n+2}+4x_n=0$ $(n\geqslant 0)$. Из начальных условий $a_0=1$, $a_2=2$, находим $a_{2n}=(2+4^n)/3$.

11.62. а) Из рекуррентного уравнения $c_{n+4}-5c_{n+2}+4c_n=0$ $(n\geqslant 0)$ (см. решение задачи 11.61) и начальных условий $c_0=0$, $c_2=1$, находим $c_{2n}=(4^n-1)/3$.

б) При условии, что лягушке нельзя прыгать в D, рекуррентное уравнение запишется в виде $c_{n+2}=3c_n$ $(n\geqslant 1)$. Отсюда $c_{2n}=3^{n-1}$ $(n\geqslant 1)$. Аналогично $a_{2n}=2\cdot 3^{n-1}$.

в) Вероятность того, что лягушка будет еще прыгать через n секунд равна отношению числа всех путей, не проходящих через D, к общему числу маршрутов. Для четных n имеем:

$$P_{2k} = \frac{a_{2k} + c_{2k} + e_{2k}}{2^{2k}} = \frac{3^{k-1}}{4^{k-1}} \quad (k \geqslant 1).$$

Для нечетных n:

$$P_{2k+1} = \frac{b_{2k+1} + f_{2k+1}}{2^{2k+1}} = \frac{2a_{2k} + c_{2k} + e_{2k}}{2^{2k+1}} = \frac{3^k}{4^k} \quad (k \geqslant 1).$$

Лягушка может попасть в вершину D только на нечетном шаге. Вероятность такого события для шага с номером $n = 2k+1$ равна

$$\frac{c_{2k} + e_{2k}}{2^{2k+1}} = \frac{2 \cdot 3^{k-1}}{2^{2k+1}}.$$

Поэтому средняя продолжительность жизни задается рядом

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) \frac{2 \cdot 3^{k-1}}{2^{2k+1}}.$$

Указанная сумма может быть вычислена при помощи производящей функции

$$f(t) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^{2k}} t^{2k+1} = \frac{t^3}{4 - 3t^2}.$$

Среднее число шагов совпадает со значением производной функции $f(t)$ в точке $t = 1$:

$$N = f'(t)|_{t=1} = 4.$$

Ответ: 4 секунды.

11.65. Указание: $R_n(x) = 2 \sin \left(\frac{1}{2^n} \arccos \left(\frac{x-2}{2} \right) \right)$.

11.66. $(3^n - (-2)^n)/5$.

11.67. Бесконечная серия решений уравнения $x^2 - 17n^2 = 1$ в целых числах может быть получен по формуле $(x_1 + n_1\sqrt{17})^k = x_k + n_k\sqrt{17}$ $(k \geqslant 1)$, где (x_1, n_1) — решение, отличное от пары $(\pm 1, 0)$. Например, можно взять $(x_1, n_1) = (33, 8)$.

11.68. $x_n = 1/2 \sin \alpha [(1 + \sin 2\alpha)^n - (1 - \sin 2\alpha)^n]$,

$y_n = 1/2 \cos \alpha [(1 + \sin 2\alpha)^n + (1 - \sin 2\alpha)^n]$.

11.69. Пусть a_0 — начальное число орехов, a_k — количество орехов, оставшихся в куче после того, как «свою» долю взял k-й моряк. Тогда

$$a_{k+1} = \frac{4}{5}(a_k - 1) \quad (k = 0, \ldots, 4).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению второго порядка

$$5a_{k+1} - 9a_k + 4a_{k-1} = 0 \quad (k = 1, \ldots, 4).$$

Из результата задачи 11.37 следует, что
$$a_k = c_1 + c_2(4/5)^k \quad (k = 0, \ldots, 5).$$
Подставляя это представление в первое рекуррентное соотношение, находим, что $c_1 = -4$. Чтобы a_k было целым числом для каждого k от 0 до 5, константа c_2 должна иметь вид $c_2 = 5^5 n$. Поскольку при $n = 1$ оставшееся число орехов $a_5 = 4^5 - 4$ кратно 5, то наименьшее возможно число орехов в куче равно $5^5 - 4$. *Ответ*: $5^5 - 4$.

11.72. а) $a_n = \frac{i}{2}(-(2+i)^n + (2-i)^n)$; б) $a_n = \frac{1-i}{2}(1+i)^n + \frac{1+i}{2}(1-i)^n$; в) $a_{3n} = 1$, $a_{3n+1} = 2$, $a_{3n+2} = -3$; г) $a_n = i((3-4i)^n - (3+4i)^n)$.

11.73. Последовательность $P(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению
$$P(n) = 2P(n-1) - P(n-2) + P(n-4).$$
Характеристическое уравнение
$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 - x - 1) = 0$$
имеет корни
$$\omega = e^{\pi i/3}, \quad \bar{\omega} = e^{-\pi i/3}, \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
Таким образом формула для n-го члена данной последовательности должна иметь вид
$$P(n) = C_1 \cos\frac{\pi n}{3} + C_2 \sin\frac{\pi n}{3} + C_3\varphi^n + C_4\hat{\varphi}^n.$$

С помощью начальных условий $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(3) = 2$ находятся коэффициенты из этой формулы
$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad C_3 = \frac{5+3\sqrt{5}}{20}, \quad C_4 = \frac{5-3\sqrt{5}}{20}.$$

После упрощений окончательно находим:
$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right) + \frac{F_{n+2}}{2}.$$

Вторая конечная разность равна исходной последовательности, сдвинутой на 2 номера.

11.74. Воспользуйтесь равенствами $\Delta^3 n^2 = 0$ и $\Delta^4 n^3 = 0$.

11.75. Воспользуемся методом задачи 11.40. Выбирая всевозможные комбинации знаков при числах $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, получим равенства
$$\begin{aligned}
\lambda_1^n &= (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{2} + r_n\sqrt{3} + s_n\sqrt{6},\\
\lambda_2^n &= (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = p_n - q_n\sqrt{2} + r_n\sqrt{3} - s_n\sqrt{6},\\
\lambda_3^n &= (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{2} - r_n\sqrt{3} - s_n\sqrt{6},\\
\lambda_4^n &= (1-\sqrt{2}-\sqrt{3})^n = p_n - q_n\sqrt{2} - r_n\sqrt{3} + s_n\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства с коэффициентами $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$, находим

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{4}\,(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n), \\ q_n &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\,(\lambda_1^n - \lambda_2^n + \lambda_3^n - \lambda_4^n), \\ r_n &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\,(\lambda_1^n + \lambda_2^n - \lambda_3^n - \lambda_4^n), \\ s_n &= \frac{1}{4\sqrt{6}}\,(\lambda_1^n - \lambda_2^n - \lambda_3^n + \lambda_4^n). \end{aligned}$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{r_n} = \sqrt{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \sqrt{6}$.

11.76. Для $n=0$ и $n=1$ утверждение задачи проверяется непосредственно. При $n \geqslant 2$ применим индукцию. Числа a_n допускают представление $a_n = (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}$ и, следовательно, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_{n+1} = 8a_n - 4a_{n-1} \qquad (n \geqslant 1).$$

Пусть $a_{n-1} = 2^n b_{n-1}$, $a_n = 2^{n+1} b_n$, где b_{n-1} и b_n — нечетные числа. Тогда для a_{n+1} получается представление

$$a_{n+1} = 2^{n+2}(4b_n - b_{n-1}) = 2^{n+2} b_{n+1},$$

где $b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}$ — нечетное число.

11.77. Число η совпадает с наибольшим по модулю корнем характеристического многочлена последовательность Трибоначчи $t^3 - t^2 - t - 1$. Такой корень ровно один (по модулю он больше 1, а два другие корня — меньше), значит, предел существует. Явный вид числа η можно найти по формуле Кардано или с помощью метода Виета из задачи 9.25:

$$\eta = \frac{1}{3}[1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}] = \\ = \frac{1}{3}\left[1 + 4\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{19}{8}\right)\right] = 1{,}8392867\ldots$$

11.78. Пусть $a^k < b < a^{k+1}$. Положим

$$\lambda_1 = \frac{b}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{b}{a^2}, \quad \ldots, \lambda_k = \frac{b}{a^k}, \quad y_n = \lambda_1^n + \ldots + \lambda_k^n.$$

Из тождества

$$x_n = \frac{b^n - 1}{a^n - 1} = \frac{b^n - a^{kn}}{a^{kn}(a^n - 1)} + y_n$$

вытекает, что $x_n - y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению с характеристическим многочленом $P(x) = (x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_k)$. Заметим, что по определению чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ многочлен $a^{\frac{k(k+1)}{2}}P(x)$ имеет целые коэффициенты. Пусть

$$a^{\frac{k(k+1)}{2}}P(x) = A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0.$$

Тогда для любого $n \geqslant 0$

$$A_k y_{n+k} + \ldots + A_1 y_{n+1} + A_0 y_n = 0.$$

Так как $x_n - y_n \to 0$, то стремится к нулю и последовательность

$$z_n = A_k(x_{n+k} - y_{n+k}) + \ldots + A_1(x_{n+1} - y_{n+1}) + A_0(x_n - y_n) = \\ = A_k x_{n+k} + \ldots + A_1 x_{n+1} + A_0 x_n.$$

Но, по условию задачи, эта последовательность состоит из целых чисел. Следовательно, при $n \geqslant n_0$

$$z_n = A_k x_{n+k} + \ldots + A_1 x_{n+1} + A_0 x_n = 0.$$

Поэтому при $n \geqslant n_0$

$$x_n = \frac{b^n - 1}{a^n - 1} = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n,$$

$$b^n - 1^n = c_1(a\lambda_1)^n + \ldots + c_k(a\lambda_k)^n - c_1\lambda_1^n - \ldots - c_k\lambda_k^n.$$

Согласно задаче 11.48, среди чисел $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, a\lambda_1, \ldots, a\lambda_k, b$ должны быть равные друг другу. Но это возможно только если для некоторого j в пределах $1 \leqslant j \leqslant k$ будет выполнено одно из неравенств $\lambda_j = 1$ или $a\lambda_j = 1$. Поэтому b есть степень числа a.

11.84. Пусть $f(x) = (1 + x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. Тогда $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}$. Подставляя в эту формулу $x = 1$, находим сумму из п. а):

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = f'(x)|_{x=1} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Аналогично находится сумма из п. б):

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = (xf'(x))'|_{x=1} = n(n + 1)2^{n-2}.$$

Ответ: а) $n \cdot 2^{n-1}$; б) $n(n + 1) \cdot 2^{n-2}$.

11.86. Из равенства

$$\frac{F^{(k)}(x)}{k!} = C_{n+k-1}^k \frac{1}{(1 - x)^{n+k}}$$

находим $a_n = C_{n+k-1}^k$.

11.87. Данное равенство равносильно утверждению, что всякое положительное число может быть записано в десятичной системе счисления и при том только одним способом.

11.88. Как и в предыдущей задаче, примените формулу из задачи 11.82.

11.89. Здесь первое соотношение — замаскированный случай биномиальной теоремы, а второе получается из первого умножением на x^m:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n}^{m} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_{n}^{m} x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

11.91. Из задачи 11.90 следует, что число счастливых билетов N равно коэффициенту при x^{27} у функции $\left(\dfrac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6$. Для нахождения N разложим функции $(1-x^{10})^6$ и $(1-x)^{-6}$ по степеням x:

$$(1-x^{10})^6 = \sum_{k=0}^{6} (-x)^{10k} C_6^k;$$

$$(1-x)^{-6} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k C_{6+k-1}^k.$$

Отсюда

$$N = C_6^0 \cdot C_{32}^{27} - C_6^1 \cdot C_{22}^{17} + C_6^2 \cdot C_{12}^{7} = 55252.$$

11.92. Первое равенство непосредственно следует из определения производной формального степенного ряда. Для доказательства второго равенства сравним коэффициенты при z^n в рядах $\mathrm{Exp}((\alpha+\beta)z)$ и $\mathrm{Exp}(\alpha z)\cdot\mathrm{Exp}(\beta z)$. В первом случае, это $\dfrac{(\alpha+\beta)^n}{n!}$, во втором —

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^k \beta^{n-k}.$$

Равенство этих коэффициентов следует из формулы бинома Ньютона (задача 2.59).

11.93. Заметим, что

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$$

(смотрите задачу 9.8). Отсюда

$$\begin{cases} a+b+c = (1+x)^n, \\ a+\omega b+\omega^2 c = (1+\omega x)^n, \\ a+\omega^2 b+\omega c = (1+\omega^2 x)^n. \end{cases}$$

Поэтому

$$a^3+b^3+c^3-3abc=[(1+x)(1+\omega x)(1+\omega^2 x)]^n=(1+x^3)^n.$$

11.95. Подставьте в производящую функцию последовательности чисел Фибоначчи $z=1/10$. Данная сумма оказывается равна $10/89$.

11.96. $L(z)=\dfrac{2-z}{1-z-z^2}$.

11.97. $H(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n t^n=\dfrac{t^2}{1-t-t^2-t^3}$.

11.98. Обозначим через b_n, c_n, d_n и e_n число наборов из нулей и единиц длины n, в которых не встречается трех нулей подряд, и которые заканчиваются на фиксированный набор цифр 00, 01, 10 и 11 соответственно. Тогда

$$\begin{gathered} b_{n+1}=d_n, \quad c_{n+1}=b_n+d_n, \quad d_{n+1}=c_n+e_n, \\ e_{n+1}=c_n+e_n=d_{n+1}, \quad a_{n+1}=b_n+2c_n+2d_n+2e_n. \end{gathered} \tag{13.22}$$

С учетом начальных условий это приводит к следующей системе линейных уравнений относительно производящих функций:

$$\begin{gathered} B(t)=tD(t)+t^2, \quad C(t)=tB(t)+tD(t)+t^2, \\ D(t)=tC(t)+tE(t)+t^2=E(t), \\ A(t)=1+2t+4t^2+tB(t)+2tC(t)+2tD(t)+2tE(t). \end{gathered}$$

Решая ее, находим:

$$\begin{gathered} B(t)=\frac{t^2}{1-t-t^2-t^3}, \quad C(t)=\frac{t^2+t^3}{1-t-t^2-t^3}, \\ D(t)=E(t)=\frac{t^2+t^3+t^4}{1-t-t^2-t^3}, \quad A(t)=\frac{1+t+t^2}{1-t-t^2-t^3}. \end{gathered}$$

Поэтому число α равно наибольшему по модулю корню уравнения $t^3-t^2-t-1=0$, который совпадает с числом η из задачи 11.77.

Другой вариант решения получается, если заметить, что последовательность $\{a_n\}$ с точностью до сдвига совпадает с последовательностью чисел Трибоначчи $\{h_n\}$ из задачи 11.77. Действительно, из формул (13.22) вытекает рекуррентное соотношение

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}.$$

Сравнивая начальные условия, находим, что при $n \geqslant 0$ выполняется равенство $a_n=h_{n+3}$. Следовательно,

$$A(t)=\frac{H(t)-t^2}{t^3}=\frac{1+t+t^2}{1-t-t^2-t^3},$$

где $H(t)$ — производящая функция из задачи 11.97.

11.99. $f(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{1-t+t^2}+\frac{1+t}{1-t-t^2}\right)$

11.100. а) 2; б) 6.

11.101. $F(x, z)=\dfrac{z}{1-xz-z^2}$, $\quad L(x, z)=\dfrac{2-xz}{1-xz-z^2}$.

11.102. $F_T(x, z)=\dfrac{1-xt}{1-2xt+t^2}$, $\quad F_U(x, z)=\dfrac{1}{1-2xt+t^2}$.

11.103. а) Обозначим искомую сумму через $f(x)$. Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, находим, что

$$f(x)=\frac{(2x)^n-1}{2x-1}.$$

б) Как и в задаче 11.84 вторая сумма равна $f'(1)=2^n(n-2)+2$.

в) Снова, как и в задаче 11.84 б), сумма равна следующей величине

$$(xf'(x))'|_{x=1}=f'(1)+f''(1)=2^n(n^2-5n+8)-8.$$

г) По формуле из задачи 7.62 а),

$$g(x)=\sum_{k=1}^{n-1}=\frac{\sin((n-1)/2)x\cdot\cos(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

Искомая сумма равна $-g'(1)$:

$$-g'(x)|_{x=1}=\frac{n\sin(n-1)x-(n-1)\sin nx}{2(1-\cos x)}.$$

11.106. Проследите за изменением диаграммы Юнга.

11.107. Задачу можно решить используя комбинаторные соображения из задачи 2.73. Если же использовать метод производящих функций, то решение задачи сводится к проверке равенства

$$\frac{1}{1-x-x^2-x^3-\ldots}=\frac{1}{1-x/(1-x)}=1+x+2x^2+\ldots+2^{n-1}x^n+\ldots$$

11.110. $a_n=q^{\nu(n)}$, где $\nu(n)$ — число единиц в двоичном представлении числа n.

11.111. Интересующий нас ряд может быть получен из произведения

$$(1-ax)(1-bx^2)(1-cx^4)(1-dx^8)\ldots,$$

если положить $x=1$. При определении знака можно положить $a=b=$ $=c=d=\ldots=1$. Тогда искомый знак будет согласно задаче 11.110 равен $(-1)^{\nu(n)}$.

11.112. $a_n=C_{2n}^n$.

11.113. $x=y/(1-y)$, $y=x/(1+x)$. Таким образом,

$$y=x-x^2+x^3-x^4+\ldots+(-1)^{n+1}x^n+\ldots$$

11.114. $y = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots + (-1)^{n+1}x^n/n + \ldots$

11.115. Воспользуйтесь равенством из задачи 2.125 и тем, что коэффициент при z^n у функции $C^2(z)$ совпадает с правой частью этого равенства.

11.116. Решая квадратное уравнение $C(z) = zC^2(z) + 1$, находим

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

(знак «минус» выбирается из условия $C(0) = 1$). Отсюда

$$C(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_{1/2}^{n}(-4)^n z^{n-1}, \quad C_n = \frac{1}{2}(-4)^{n+1}C_{1/2}^{n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

11.117. Многочлены Гаусса, как и биномиальные коэффициенты, удобно располагать в виде треугольника:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & g_{0,0}(x) & & & \\
 & & g_{1,0}(x) & & g_{1,1}(x) & & \\
 & g_{2,0}(x) & & g_{2,1}(x) & & g_{2,2}(x) & \\
g_{3,0}(x) & & g_{3,1}(x) & & g_{3,2}(x) & & g_{3,3}(x)
\end{array}$$

В явном виде многочлены Гаусса помещены в приложение С, VIII.

11.118. Свойства б) и в) непосредственно вытекают из а).

Свойство г) доказывается индукцией по k при помощи свойства в).

Свойство д) доказывается индукцией по l при помощи свойства г).

11.119. Поделите числитель и знаменатель функции из определения полиномов $g_{k,l}(x)$ на $(1-x)^k$. Свойства многочленов $g_{k,l}(x)$ при подстановке $x = 1$ превращаются в равенства из задачи 2.83.

11.120. $S_l(x) = 0$ при нечетных l и

$$S_l(x) = (1-x)(1-x^3)\ldots(1-x^{l-1}) = \frac{h_l(x)}{h_{l/2}(x^2)}$$

при четных l. Для доказательства применим индукцию. Очевидно, что $S_0(x) = 1$ и $S_1(x) = 0$. Задача будет решена, если доказать соотношение

$$S_l(x) = (1-x^{l-1})S_{l-2}(x).$$

Пользуясь свойством в) из задачи 11.118, находим

$$S_l(x) = (1-x^{l-1})g_{0,l-1}(x) - (1-x^{l-2})g_{1,l-2}(x) + \ldots + (-1)^{l-1}(1-x^0)g_{l-1,0}(x).$$

Применяя равенство $(1-x^l)g_{k,l}(x) = (1-x^{k+l})g_{k,l-1}(x)$ к каждому слагаемому в полученной сумме, приходим к нужному равенству:

$$S_l(x) = (1-x^{l-1})(g_{0,l-2}(x) - g_{1,l-3}(x) + \ldots) = (1-x^{l-1})S_{l-2}(x).$$

11.121. в) Рассмотрите симметричную диаграмму Юнга.

г) Разбиению $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_j$, $j \leqslant k$, $a_i \leqslant l$ числа n сопоставьте разбиение $kl - n = (l - a_1) + (l - a_2) + \ldots + (l - a_j) + l + \ldots + l$ числа $kl - n$, где слагаемое $l - a_i$ отбрасывается, если оно равно нулю, а число слагаемых, равных l, равно $k - j$. Как связаны диаграммы Юнга, соответствующие двум таким разбиениям?

11.124. Воспользуйтесь конструкцией из задачи 2.64.

Глава 12. Шутки и ошибки

12.4. 16/64, 19/95, 26/65, 49/98.

12.6. Приведите равенство к виду

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a+b}{2} = 0.$$

Ответ: либо $a = 2k\pi$, либо $b = 2l\pi$, либо $a + b = 2m\pi$.

12.8. Воспользуйтесь тем, что число дней в 400-летнем цикле делится на 7.

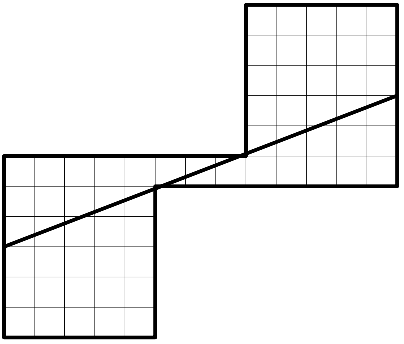
12.10. Название племени должно быть словом в их алфавите.

12.11. Среди сомножителей присутствует скобка $(x - x)$. *Ответ*: 0.

12.12. Указание: $\sin\pi = 0$.

12.14. Результат возведения единицы в степень $\frac{x}{2\pi}$ не определен однозначно. Это происходит из-за того, что $\ln z$ — многозначная функция.

12.15.



12.18. Отношение длины мили к длине километра равно $1{,}609\ldots$, что мало отличается от числа $\varphi = 1{,}618\ldots$

Приложение А
Программа курса

В данное приложение помещена программа курса алгебры, читавшегося в школе им. А. Н. Колмогорова на двухгодичном потоке. Темы, взятые в квадратные скобки, включались в курс по усмотрению лектора.

Тема 1. Метод математической индукции. Натуральные числа. Принцип математической индукции. Доказательство тождеств и неравенств. Применение индукции в геометрии и комбинаторике.

Тема 2. Комбинаторика. Множества и операции с ними. Основные правила комбинаторики. Принцип Дирихле. Перестановки. Размещения с повторениями и без повторений. Перестановки с повторениями (анаграммы). Биномиальная и полиномиальная теоремы. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля и его свойства. Сочетания с повторениями. Функции на множествах. [Формула включений-исключений. Ее приложения.]

Тема 3. Целые числа. Простые числа. Делимость с остатком и без остатка. Алгоритм Евклида. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Линейное представление наибольшего общего делителя. Решение неопределенных уравнений первой степени в целых числах. Основная теорема арифметики. Теоретико-числовые функции. [Формула Лежандра для максимальной степени простого числа, делящего факториал. Цепные дроби. Уравнение Пелля.]

Тема 4. Сравнения. Отношение эквивалентности. Классы вычетов. Сравнения и их свойства. Неразрешимость некоторых уравнений в целых числах. Полная и приведенная системы вычетов. Функция Эйлера и ее свойства. Решение сравнений с одним неизвестным. Теоремы Ферма, Эйлера, Вильсона. Длина периода бесконечной десятичной дроби рационального числа. Китайская теорема об остатках. [Признак делимости Паскаля.]

Тема 5. Рациональные и иррациональные числа. Доказательство иррациональности радикалов. Метод бесконечного спуска. Теорема о рациональных корнях многочлена. Иррациональность значений тригонометрических функций. Сопряженные числа. Избавление от иррациональности в знаменателе. [Десятичное представление рациональных чисел. Свойства периодов.]

Тема 6. Многочлены. Квадратный трехчлен и фазовая плоскость. Результант двух многочленов второй степени. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида для многочленов. Линейное представление наибольшего общего делителя. Теорема Безу. Схема Горнера. Теорема о числе корней многочлена. Ряд Тейлора для многочлена. Теорема единственности. Однозначность разложения многочлена на неприводимые сомножители. Многочлены с кратными корнями. Избавление от кратных корней. Теорема Виета. Элементарные симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Симметрические системы алгебраических уравнений. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Формула Кардано. Формулировка теоремы Руффини—Абеля. Необходимость введения комплексных чисел. [Интерполяционный многочлен Ньютона. Правило знаков Декарта.]

Тема 7. Комплексные числа. Комплексные числа и операции с ними. Геометрическая интерпретация. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел; модуль и аргумент. Алгебраическое извлечение квадратного корня из комплексного числа. Решение квадратных уравнений над множеством комплексных чисел. Формулы Муавра и Эйлера. Корни из единицы. Решение уравнений третьей степени при помощи комплексных чисел. [Неприводимый случай кубического уравнения. Суммирование ряда обратных квадратов при помощи комплексных чисел и теоремы Виета.]

Тема 8. Отображения комплексной плоскости. Пути и отображения комплексной плоскости. Основная теорема алгебры. Разложение на неприводимые многочлены над действительными и комплексными числами. [Принцип аргумента. Теорема Штурма о корнях тригонометрического полинома.]

Тема 9. Неразрешимость трех классических задач на построение. Построения циркулем и линейкой с алгебраической точки зрения. Числовые поля. Понятие квадратичного расширения числового поля. Алгебраические числа. Трансцендентность числа π (без доказательства). Невозможность квадратуры круга. Теорема о невозможности построения циркулем и линейкой корней кубического уравнения. Невозможность удвоения куба. Невозможность трисекции угла. Невозможность построения правильного семиугольника. [Построение правильных пятиугольника и семнадцатиугольника.]

Тема 10. Последовательности и ряды. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Метод конечных разностей. Суммирование последовательностей. Линейные рекуррентные последовательности второго порядка. Формула n-го члена. Метод производящих функций. Формальные степенные ряды. Числа Фибоначчи. Формула Бине.

Тема 11. Неравенства, уравнения, системы. Доказательство неравенств. Возвратные уравнения. Уравнения с целыми коэффициентами. Метод подстановок и сведение уравнений к системам. Тригонометрические замены. Приближенное решение алгебраических уравнений. Метод Ньютона. Метод итераций. Решение уравнений рекуррентного типа. Системы линейных уравнений. Аналитические методы решения задач с параметрами.

Приложение В
Источники задач и ссылки на дополнительную литературу

Указанная литература послужила источником задач и теоретического материала. Здесь также указаны ссылки на публикации, которые содержат более обширный материал по соответствующим темам. Ссылки после названия главы указывают на литературу, которая имеет отношение к содержанию всей главы. Издания, выделенные жирным шрифтом, содержат наиболее полную информацию.

1. Метод математической индукции: [25], **[50]**, [64].

1.1. Тождества, неравенства и делимость: [9], **[44]**, [47], [48], [65], [71], [73], [78].

1.2. Индукция в геометрии и комбинаторике: [2], [8], [11], [48], [71], [212], [14].

2. Комбинаторика: [8], **[19]**, **[40]**.

2.1. Сложить или умножить?: **[10]**, [41], **[50]**, [64], [129], [164], [186].

2.2. Принцип Дирихле: **[37]**, [47], [48], **[50]**, [59], [64], [106], **[194]**.

2.3. Размещения, перестановки и сочетания: [10], [13], **[17]**, [28], [41], **[50]**, [51], [52], [64], [79], [84], [97], [116], [129], [181], [186], [190], [242], [243].

2.4. Формула включений и исключений: [41], [64], [120], [186], [254].

2.5. Числа Каталана: **[17]**, [87], **[137]**, [250], [265].

3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики: [17], **[49]**.

3.1. Простые числа: **[7]**, [12], [25], [35], **[45]**, [46], [48], [50], [54], [62], [41], [67], [93], [131], [132], [136], [209], [168], [170], [173], [175], [188], [193], [204], [233], [256].

3.2. Алгоритм Евклида: **[7]**, [11], [25], **[35]**, [41], **[45]**, [47], [50], [54], [55], [62], [72], [114], [120], [174], [192], [221], [227].

3.3. Мультипликативные функции: **[7]**, **[45]**, [51], [54], [62], [67], [119], [120], [150], [153], [176], [209], [221].

3.4. Числа Фибоначчи: [11], [13], [46], [48], [53], [60], [50], [67], [62], **[70]**, [96], [210], [189], [201], [213], [215], [253], [255], [270].

3.5. Цепные дроби: **[7]**, [11], [35], [37], **[39]**, **[45]**, [54], [62], [70], [101], [102], [192], [244], [262], [18].

3.6. Континуанты: [34], [24], [21], [22].

4. Арифметика остатков: [7], **[17]**, **[45]**, **[49]**, [50], [54], [62], [63].

4.1. Четность: [11], [37], [234].

4.2. Делимость: [37], [158], [194], [247], [221].

4.3. Сравнения: **[35]**, [37], [92], [95], [121], [130], [141], [154], [158], [160], [166], [178], [183], [221].

4.4. Теоремы Ферма и Эйлера: [12], [20], [35], [130], [141], [160], [168], [205], [221], [256].

4.5. Признаки делимости: [11], [12], [69], [82], [229].

4.6. Китайская теорема об остатках: [154], [162], [239].

5. Числа, дроби, системы счисления:

5.1. Рациональные и иррациональные числа: **[7]**, [12], [25], [27], [37], [41], [44], [45], [49], [53], [61], [64], [152], [115], [135], [156], [167], [179], [183], [221], [237], [245], [246], [214], [216].

5.2. Систематические дроби: **[20]**, **[49]**, [143], **[205]**, **[236]**.

5.3. Двоичная и троичная системы счисления: [2], [3], **[17]**, [46], [139], [208], [217], [228], [249], [263], [264], [266], [267], [268], [269].

6. Многочлены: [9], **[30]**, **[36]**, [44], [53].

6.1. Квадратный трехчлен: [47], [55], [61], [63], [88], [103], **[104]**, [107], **[112]**, [113], [151], [155], [157], [163], [200], [230].

6.2. Алгоритм Евклида для многочленов и теорема Безу: [29], [34], [41], [63], [94], [127].

6.3. Разложение на множители: **[33]**, [41], [55], [63], [240].

6.4. Многочлены с кратными корнями: [29], [34], [41], [55], [230].

6.5. Теорема Виета: [33], **[34]**, [56], [61], [63], [172], **[184]**, [211].

6.6. Интерполяционный многочлен Лагранжа: [34], [41], [116], [211].

7. Комплексные числа: [10], [29], [42], [76], [90], [142], [235].

7.1. Комплексная плоскость: [34], [44], [51], [53], [55], [60], [63], [64], [89], [123], [128], [138], [145], [195], [197], [203], [222], [226], [231], [242].

7.2. Преобразования комплексной плоскости: [26], [199], [110].

7.3. Целые гауссовы числа: [1], [24], [220].

8. Алгебра + геометрия:

8.1. Геометрия помогает алгебре: [37], [61], [125], [185], [261].

8.2. Комплексные числа и геометрия: **[26]**, **[42]**, [90], [232], [58].

8.3. Тригонометрия: [53], [56], [63], [248].

9. Уравнения и системы: [53].

9.1. Уравнения третьей степени: **[36]**, [55], [56], [63], [112], [140], [142], [161], [169], [191], [198], [206], [207], [230], [248], [257].

9.2. Тригонометрические замены: [85], [146].

9.3. Итерации: [28], [34], [46], [64], [68], [80], **[105]**, **[108]**, [126], [159], [177], [223], [111].

9.4. Системы линейных уравнений: [44], [48], [55], [63], **[74]**, [77], **[148]**, [151], [43].

10. Неравенства: [4], **[38]**, [44], [46], **[50]**, [61], [62], [64], [196].

10.1 Различные неравенства: **[5]**, [47], [53], [55], [60], [63], [66], [86], [91], [99], [100], [133], [144], [147], [155], [171], [180], [218], [219], [224], [225], [252], [259].

10.2. Суммы и минимумы: [86]

10.3. Выпуклость: [5], [73], **[165]**, **[251]**.

10.4. Симметричные неравенства: **[149]**, [196].

11. Последовательности и ряды:

11.1. Конечные разности: [12], **[16]**, **[17]**, **[41]**, [49], [60], [83], [98], [116], [124], [182].

11.2. Рекуррентные последовательности: **[16]**, **[17]**, **[45]**, [49], [60], [70], **[75]**, [115], [122].

11.3. Производящие функции: [8], [28], [41], [57], [60], [70], [116], [117], [123], [128], **[134]**, [181], [238], **[241]**.

11.4. Многочлены Гаусса: [30], [41], [53].

12. Шутки и ошибки: [6], [11], [17], [51], [109].

Некоторые задачи, по-видимому, в данной книге публикуются впервые. Из них номера 3.164, 7.103 принадлежат В. А. Быковскому; 7.44 — И. А. Дорофееву; 3.237, 4.206, 4.207, 9.52 — И. Д. Кану, ему же принадлежат решения задач 4.21, 5.68 и 5.99; задачи 3.175, 3.226—3.228, 7.106, 7.86, 9.83, 11.49, 12.17 — А. В. Устинову.

Приложение С

Формулы и числа

I. Греческий алфавит

$A\,\alpha$	альфа	$B\,\beta$	бэта	$\Gamma\,\gamma$	гамма	$\Delta\,\delta$	дельта
$E\,\varepsilon$	эпсилон	$Z\,\zeta$	дзета	$H\,\eta$	эта	$\Theta\,\theta$	тэта
$I\,\iota$	иота	$K\,\kappa$	каппа	$\Lambda\,\lambda$	ламбда	$M\,\mu$	мю
$N\,\nu$	ню	$O\,o$	омикрон	$\Xi\,\xi$	кси	$\Pi\,\pi$	пи
$P\,\varrho$	ро	$\Sigma\,\sigma$	сигма	$T\,\tau$	тау	$\Upsilon\,\upsilon$	ипсилон
$\Phi\,\varphi$	фи	$X\,\chi$	хи	$\Psi\,\psi$	пси	$\Omega\,\omega$	омега

II. Треугольник Паскаля и числа Фибоначчи

0	1									
1	1	2								
1	1	3	5							
1	2	1	8	13						
1	3	3	1	21	34					
1	4	6	4	1	55	89				
1	5	10	10	5	1	144	233			
1	6	15	20	15	6	1	377	610		
1	7	21	35	35	21	7	1	987	1597	
1	8	28	56	70	56	28	8	1	2584	4181
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	6765
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

III. (1, 2)-треугольник Паскаля и числа Люка

	2									
	1	3								
1	2	4	7							
1	3	2	11	18						
1	4	5	2	29	47					
1	5	9	7	2	76	123				
1	6	14	16	9	2	199	322			
1	7	20	30	25	11	2	521	843		
1	8	27	50	55	36	13	2	1364	2207	
1	9	35	77	105	91	49	15	2	3571	5778
1	10	44	112	182	196	140	64	17	2	9349
1	11	54	156	294	378	336	204	81	19	2

IV. Константы

Десятичная запись констант, наиболее часто возникающих в задачах (40 знаков):

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85697\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73205\,08075\,68877\,29352\,74463\,41505\,87236\,69428\ldots$$
$$\sqrt{5} = 2{,}23606\,79774\,99789\,69640\,91736\,68731\,27623\,54406\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41972\ldots$$
$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\ldots$$
$$\varphi = 1{,}61803\,39887\,49894\,84820\,45868\,34365\,63811\,77203\ldots$$
$$\ln 2 = 0{,}69314\,71805\,59945\,30941\,72321\,21458\,18\ldots$$

Двоичная запись тех же констант (40 знаков):

$$\sqrt{2} = 1{,}01101\,01000\,00100\,11110\,01100\,11001\,11111\,10011\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}10111\,01101\,10011\,11010\,11101\,00001\,01100\,00100\ldots$$
$$\sqrt{5} = 10{,}00111\,10001\,10111\,01111\,00110\,11100\,10111\,11110\ldots$$
$$\pi = 11{,}00100\,10000\,11111\,10110\,10101\,00010\,00100\,00101\ldots$$
$$e = 10{,}10110\,11111\,10000\,10101\,00010\,11000\,10100\,01010\ldots$$
$$\varphi = 1{,}10011\,11000\,11011\,10111\,10011\,01110\,01011\,11111\ldots$$
$$\ln 2 = 0{,}10110\,00101\,11001\,00001\,01111\,11101\,11110\,10001\ldots$$

Разложение некоторых чисел в цепные дроби.

$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, \ldots]$

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots]$

$\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, \ldots]$

$2\cos\dfrac{2\pi}{7} = [1; 4, 20, 2, 3, 1, 6, 10, 5, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 18, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, \ldots]$

$2\cos\dfrac{4\pi}{7} = [-1; 1, 1, 4, 20, 2, 3, 1, 6, 10, 5, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 18, 1, 1, 3, 2, \ldots]$

$2\cos\dfrac{6\pi}{7} = [-2; 5, 20, 2, 3, 1, 6, 10, 5, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 18, 1, 1, 3, 2, 1, \ldots]$

$2\cos\dfrac{2\pi}{9} = [1; 1, 1, 7, 3, 2, 3, 1, 1, 6, 11, 1, 3, 2, 1, 9, 36, 1, 1, 55, 81, \ldots]$

$2\cos\dfrac{4\pi}{9} = [0; 2, 1, 7, 3, 2, 3, 1, 1, 6, 11, 1, 3, 2, 1, 9, 36, 1, 1, 55, 81, \ldots]$

$2\cos\dfrac{8\pi}{9} = [-2, 8, 3, 2, 3, 1, 1, 6, 11, 1, 3, 2, 1, 9, 36, 1, 1, 55, 81, 2, 1, \ldots]$

$\sqrt{1} = [1]$	$\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$
$\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$	$\sqrt{4} = [2]$
$\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$	$\sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$
$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$	$\sqrt{8} = [2; \overline{1, 4}]$
$\sqrt{9} = [3]$	$\sqrt{10} = [3; \overline{6}]$
$\sqrt{11} = [3; \overline{3, 6}]$	$\sqrt{12} = [3; \overline{2, 6}]$
$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$	$\sqrt{14} = [3; \overline{1, 2, 1, 6}]$
$\sqrt{15} = [3; \overline{1, 6}]$	$\sqrt{16} = [4]$
$\sqrt{17} = [4; \overline{8}]$	$\sqrt{18} = [4; \overline{4, 8}]$
$\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$	$\sqrt{20} = [4; \overline{2, 8}]$

$\sqrt{21} = [4; \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$ $\sqrt{22} = [4; \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$
$\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$ $\sqrt{24} = [4; \overline{1, 8}]$
$\sqrt{25} = [5]$ $\sqrt{26} = [5; \overline{10}]$
$\sqrt{27} = [5; \overline{5, 10}]$ $\sqrt{28} = [5; \overline{3, 2, 3, 10}]$
$\sqrt{29} = [5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$ $\sqrt{30} = [5; \overline{2, 10}]$
$\sqrt{31} = [5; \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$ $\sqrt{32} = [5; \overline{1, 1, 1, 10}]$
$\sqrt{33} = [5; \overline{1, 2, 1, 10}]$ $\sqrt{34} = [5; \overline{1, 4, 1, 10}]$
$\sqrt{35} = [5; \overline{1, 10}]$ $\sqrt{36} = [6]$
$\sqrt{37} = [6; \overline{12}]$ $\sqrt{38} = [6; \overline{6, 12}]$
$\sqrt{39} = [6; \overline{4, 12}]$ $\sqrt{40} = [6; \overline{3, 12}]$
$\sqrt{41} = [6; \overline{2, 2, 12}]$ $\sqrt{42} = [6; \overline{2, 12}]$
$\sqrt{43} = [6; \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}]$ $\sqrt{44} = [6; \overline{1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12}]$
$\sqrt{45} = [6; \overline{1, 2, 2, 2, 1, 12}]$ $\sqrt{46} = [6; \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}]$
$\sqrt{47} = [6; \overline{1, 5, 1, 12}]$ $\sqrt{48} = [6; \overline{1, 12}]$
$\sqrt{49} = [7]$ $\sqrt{50} = [7; \overline{14}]$

V. Десятичные периоды дробей $1/p$

Для простых чисел $p \neq 2$, 5 приведены десятичные представления дробей $1/p$. Звёздочкой помечены разложения для длинных простых чисел (см. с. 97).

$1/3 = 0{,}(3)$, $2/3 = 0{,}(6)$;
$1/7^* = 0{,}(142857)$;
$1/11 = 0{,}(09)$, $2/11 = 0{,}(18)$, $3/11 = 0{,}(27)$, $4/11 = 0{,}(36)$, $5/11 = 0{,}(45)$;
$1/13 = 0{,}(076923)$, $2/13 = 0{,}(153846)$;
$1/17^* = 0{,}(0588235294117647)$;
$1/19^* = 0{,}(052631578947368421)$;
$1/23^* = 0{,}(0434782608695652173913)$;
$1/29^* = 0{,}(0344827586206896551724137931)$;
$1/31 = 0{,}(032258064516129)$, $3/31 = 0{,}(096774193548387)$;
$1/37 = 0{,}(027)$, $2/37 = 0{,}(054)$, $3/37 = 0{,}(081)$, $5/37 = 0{,}(135)$,
$6/37 = 0{,}(162)$, $7/37 = 0{,}(189)$, $9/37 = 0{,}(243)$, $11/37 = 0{,}(297)$,
$14/37 = 0{,}(378)$, $17/37 = 0{,}(459)$, $18/37 = 0{,}(486)$, $21/37 = 0{,}(567)$;
$1/41 = 0{,}(02439)$, $2/41 = 0{,}(04878)$, $3/41 = 0{,}(07317)$,
$4/41 = 0{,}(09756)$, $5/41 = 0{,}(12195)$, $6/41 = 0{,}(14634)$,
$11/41 = 0{,}(26829)$, $15/41 = 0{,}(36585)$;
$1/43 = 0{,}(023255813953488372093)$, $2/43 = 0{,}(046511627906976744186)$;
$1/47^* = 0{,}(0212765957446808510638297872340425531914893617)$;
$1/53 = 0{,}(0188679245283)$, $2/53 = 0{,}(0377358490566)$,
$4/53 = 0{,}(0754716981132)$, $5/53 = 0{,}(0943396226415)$;
$1/59^* = 0{,}(0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661)$;
$1/61^* = 0{,}(016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459)$;
$1/67 = 0{,}(014925373134328358208955223880597)$,
$2/67 = 0{,}(029850746268656716417910447761194)$;
$1/71 = 0{,}(01408450704225352112676056338028169)$,
$3/71 = 0{,}(04225352112676056338028169014084507)$.

VI. Первые 20 греческих числовых приставок

1	моно-	6	гекса-	11	гендека-	16	гексадека-
2	ди-	7	гепта-	12	додека-	17	гептадека-
3	три-	8	окта-	13	тридека-	18	октадека-
4	тетра-	9	нано-	14	тетрадека-	19	наnодека-
5	пента-	10	дека-	15	пентадека-	20	икоса-

VII. Последовательности

Ниже приведены, возникавшие в книге последовательности. Нумерация даётся по онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей Нейла Слоэна [271] (см. также [32]). Знаком вопроса заканчиваются последовательности, бесконечность которых не доказана.

[A000005] Значения функции $\tau(n)$
1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, 4, 5, 2, 6, 2, 6, 4, 4, 2, 8, 3, 4, 4, 6, 2, 8, 2, 6, 4, ...

[A000010] Значения функции Эйлера $\varphi(n)$ (см. также [A002202])
1, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4, 10, 4, 12, 6, 8, 8, 16, 6, 18, 8, 12, 10, 22, 8, 20, 12, 18, ...

[A000040] Простые числа
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, ...

[A000045] Числа Фибоначчи, F_n (см. раздел 3.4):
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

[A000073] Числа Трибоначчи (см. задачи 11.77, 11.98):
0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, ...

[A000079] Степени числа 2:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, ...

[A000108] Числа Каталана, C_n (см. раздел 2.5):
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, ...

[A000120] Количество единиц в двоичной записи числа n
0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 1, ...

[A000124] Максимальное число частей, на которые плоскость разбивается n прямыми: $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$
1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92, 106, 121, 137, 154, 172, 191, 211, ...

[A000125] Максимальное количество частей, на которые пространство делится n плоскостями; C_{n+1}^3+n+1
1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64, 93, 130, 176, 232, 299, 378, 470, 576, 697, 834, 988, ...

[A000129] Знаменатели подходящих дробей к $\sqrt{2}$:
0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, ...

[A000142] Факториалы, $n!$:
1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, 39916800, 479001600, ...

[A000151] Первые компоненты пар (x_n, y_n), являющихся решениями уравнения Пелля $x^2-3y^2=1$, $x_n=T_n(2)$, где $T_n(x)$ — многочлен Чебышёва 1-го рода (см. задачу 11.49, 11.46); подпоследовательность [A002531]:
1, 2, 7, 26, 107, 458, 2058, 9498, 44947, 216598, 1059952, 5251806, 26297238, ...

[A000201] Спектр числа φ
1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 38, ...

[A000203] Значения функции $\sigma(n)$
1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, 24, 31, 18, 39, 20, 42, 32, 36, 24, 60, ...
[A000204] Числа Люка, L_n (см. раздел 3.4):
1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, ...
[A000217] Треугольные числа $C_{n+1}^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, ...
[A000244] Степени числа 3:
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, 177147, 531441, 1594323, ...
[A000668] Числа Мерсенна (см. задачу 3.31):
3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, 2305843009213693951, ...?
[A000788] Количество единиц в двоичной записи числа n
0, 1, 2, 4, 5, 7, 9, 12, 13, 15, 17, 20, 22, 25, 28, 32, 33, 35, 37, 40, 42, 45, 48, 52, ...
[A001008] Числители гармонических чисел H_n
1, 3, 11, 25, 137, 49, 363, 761, 7129, 7381, 83711, 86021, 1145993, 1171733, ...
[A001110] Квадратно-треугольные числа
0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, 55420693056, ...
[A001109] Вторые компоненты пар (x_n, y_n), являющихся решениями уравнения Пелля $x^2-2(2y)^2=1$, $y_n=T_n(3)$, где $T_n(x)$ — многочлен Чебышёва 1-го рода (см. задачу 11.40):
0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, 46611179, ...
[A001333] Числители подходящих дробей к $\sqrt{2}$:
1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 19601, 47321, 114243, ...
[A001353] Вторые компоненты пар (x_n, y_n), являющихся решениями уравнения Пелля $x^2-3y^2=1$, $y_n=U_n(2)$, где $U_n(x)$ — многочлен Чебышёва 2-го рода (см. задачу 11.49):
0, 1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, 10864, 40545, 151316, 564719, 2107560, ...
[A001541] Первые компоненты пар (x_n, y_n), являющихся решениями уравнения Пелля $x^2-2(2y)^2=1$, $x_n=U_n(3)$, где $U_n(x)$ — многочлен Чебышёва 2-го рода (см. задачу 11.40):
1, 3, 17, 99, 577, 3363, 19601, 114243, 665857, 3880899, 22619537, ...
[A001913] Длинные простые числа по основанию 10 (см. с. 97)
2, 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, ...?
[A001950] Спектр числа φ^2
2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, 39, 41, 44, 47, 49, 52, 54, ...
[A001951] Спектр числа $\sqrt{2}$
1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 32, ...
[A001952] Спектр числа $2+\sqrt{2}$
3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, 37, 40, 44, 47, 51, 54, 58, 61, 64, 68, 71, 75, ...
[A002202] Значения, принимаемые функцией Эйлера $\varphi(n)$, выписанные в порядке возрастания
1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 46, 48, 52, 54, 56, ...
[A002450] Количество путей длины $2n$ между двумя вершинами на расстоянии 2 на циклическом графе с 6 вершинами; количество путей длины $2n+1$ между двумя вершинами на расстоянии 3 на циклическом графе с 12

вершинами; $(4^n - 1)/3$.
0, 1, 5, 21, 85, 341, 1365, 5461, 21845, 87381, 349525, 1398101, 5592405, ...

[A002530] Знаменатели подходящих дробей к $\sqrt{3}$:
0, 1, 1, 3, 4, 11, 15, 41, 56, 153, 209, 571, 780, 2131, 2911, 7953, 10864, ...

[A002531] Числители подходящих дробей к $\sqrt{3}$:
1, 1, 2, 5, 7, 19, 26, 71, 97, 265, 362, 989, 1351, 3691, 5042, 13775, 18817, ...

[A002805] Знаменатели гармонических чисел H_n
1, 2, 6, 12, 60, 20, 140, 280, 2520, 2520, 27720, 27720, 360360, 360360, 360360, ...

[A002997] Числа Кармайкла (см. задачу 4.181):
561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, ...

[A003313] Минимальное количество умножений, необходимое для вычисления n-й степени
0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 5, 4, 5, 5, 6, 5, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 6, 7, 5, ...

[A003622] Нулевой столбец массива Витхоффа; числа, заканчивающиеся на 1 в фибоначчиевой системе счисления; $a_n = [n \cdot \varphi^2] - 1 = [(n+1) \cdot \varphi] + n = [[n \cdot \varphi]\varphi]$.
1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 51, 53, 56, 59, ...

[A004022] Простые репьюниты
$11 = E_2, E_{19}, E_{23}, E_{317}, E_{1031}, \ldots ?$

[A005252] a_{n+3} — количество бинарных последовательностей длины n, в которых отсутствуют наборы 101 и 1001 (см. зад. 11.73); $\sum\limits_{k=0}^{[n/4]} C_{n-2k}^{2k}$
1, 1, 1, 1, 2, 4, 7, 11, 17, 27, 44, 72, 117, 189, 305, 493, 798, 1292, 2091, 3383, ...
Последовательность [A024490] является ее первой конечной разностью.

[A006522] Количество частей на которые выпуклый n-угольник делится своими диагоналями (см. задачу 2.92):
1, 0, 0, 1, 4, 11, 25, 50, 91, 154, 246, 375, 550, 781, 1079, 1456, 1925, 2500, ...

[A006933] Числа без буквы e (см. задачу 12.16):
2, 4, 6, 30, 32, 34, 36, 40, 42, 44, 46, 50, 52, 54, 56, 60, 62, 64, 66, 2000, ...

[A007318] Треугольник Паскаля, записанный по строкам
1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 5, 10, 10, 5, 1, 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, 1, 7, ...

[A092506] Числа Ферма, f_n (см. задачу 3.28):
2, 3, 5, 17, 257, 65537, ...?

[A010060] Последовательность Морса
0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, ...

[A014701] Минимальное количество умножений, необходимое для вычисления n-й степени с помощью бинарного алгоритма
0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 6, 4, 5, 5, 6, 5, 6, 6, 7, 5, 6, 6, 7, 6, 7, 7, 8, 5, 6, ...

[A024490] Конечные разности и частичные суммы последовательности [A005252]; $a_n = \sum\limits_{k=0}^{[(n-2)/4]} C_{n-2k+1}^{2k-1}$
1, 2, 3, 4, 6, 10, 17, 28, 45, 72, 116, 188, 305, 494, 799, 1292, 2090, 3382, 5473, ...

[A029635] (1, 2)-треугольник Паскаля, записанный по строкам
1, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 5, 9, 7, 2, 1, 6, 14, 16, 9, 2, 1, 7, 20, 30, 25, 11, 2, 1, 8, ...

[A047849] Число замкнутых траекторий длины $2n$ на циклическом графе из 6 вершин
1, 2, 6, 22, 86, 342, 1366, 5462, 21846, 87382, 349526, 1398102, 5592406, ...

[A060995] Количество путей длины $2n$ по сторонам восьмиугольника с концами в противоположных вершинах
0, 2, 8, 28, 96, 328, 1120, 3824, 13056, 44576, 152192, 519616, 1774080, ...

VIII. Многочлены

1. Многочлены Чебышёва:

$T_0(x)=1,$ $U_0(x)=1,$
$T_1(x)=x,$ $U_1(x)=2x,$
$T_2(x)=2x^2-1,$ $U_2(x)=4x^2-1,$
$T_3(x)=4x^3-3x,$ $U_3(x)=8x^3-4x,$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$ $U_4(x)=16x^4-12x^2+1,$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$ $U_5(x)=32x^5-32x^3+6x,$
$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,$ $U_6(x)=64x^6-80x^4+24x^2-1,$
$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x,$ $U_7(x)=128x^7-192x^5+80x^3-8x.$

2. Многочлены Гаусса:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1+x & & 1 & & \\
 & 1 & & 1+x+x^2 & & 1+x+x^2 & & 1 & \\
1 & & 1+x+x^2+x^3 & & 1+x+2x^2+x^3+x^4 & & 1+x+x^2+x^3 & & 1
\end{array}$$

3. Многочлены Фибоначчи и Люка:

$F_0(x)=0,$ $L_0(x)=2,$
$F_1(x)=1,$ $L_1(x)=x,$
$F_2(x)=x,$ $L_2(x)=x^2+2,$
$F_3(x)=x^2+1,$ $L_3(x)=x^3+3x,$
$F_4(x)=x^3+2x,$ $L_4(x)=x^4+4x^2+2,$
$F_5(x)=x^4+3x^2+1,$ $L_5(x)=x^5+5x^3+5x,$
$F_6(x)=x^5+4x^3+3x,$ $L_6(x)=x^6+6x^4+9x^2+2,$
$F_7(x)=x^6+5x^4+6x^2+1,$ $L_7(x)=x^7+7x^5+14x^3+7x,$
$F_8(x)=x^7+6x^5+10x^3+4x,$ $L_8(x)=x^8+8x^6+20x^4+16x^2+2,$
$F_9(x)=x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1,$ $L_9(x)=x^9+9x^7+27x^5+30x^3+9x.$

IX. Основные тригонометрические тождества

4. Формулы приведения:

$$\cos(\pi\pm x)=-\cos x;\qquad \sin(\pi\pm x)=\mp\sin x;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\sin x;\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\cos x;$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm x\right)=\pm\sin x;\qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm x\right)=-\cos x;$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\operatorname{ctg} x;\qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\operatorname{tg} x.$$

5. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

6. Тригонометрические функции кратных аргументов:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x; \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1);$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1; \quad \sin 4x = 4\sin x \cos x\,(2\cos^2 x - 1);$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x};$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}.$$

7. Тригонометрические функции половинного аргумента:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}; \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x}.$$

8. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}.$$

9. Суммы и разности тригонометрических функций:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}; \quad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

10. Произведения тригонометрических функций:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

11. Степени тригонометрических функций:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x); \qquad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x);$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3); \qquad \cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3).$$

12. Введение вспомогательного аргумента:

$$a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sin x\cos\varphi \pm \cos x\sin\varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x\pm\varphi),$$

где $\varphi = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. В частности,

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\cdot\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right).$$

13. Решение простейших тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a, \quad |a|\leqslant 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n\arcsin a + \pi n \quad (n\in\mathbb{Z});$$

$$\cos x = a, \quad |a|\leqslant 1 \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n \quad (n\in\mathbb{Z});$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n \quad (n\in\mathbb{Z});$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

X. Таблица простых чисел

В таблицу помещены первые 275 простых чисел.

2	101	233	383	547	701	877	1049	1229	1429	1597
3	103	239	389	557	709	881	1051	1231	1433	1601
5	107	241	397	563	719	883	1061	1237	1439	1607
7	109	251	401	569	727	887	1063	1249	1447	1609
11	113	257	409	571	733	907	1069	1259	1451	1613
13	127	263	419	577	739	911	1087	1277	1453	1619
17	131	269	421	587	743	919	1091	1279	1459	1621
19	137	271	431	593	751	929	1093	1283	1471	1627
23	139	277	433	599	757	937	1097	1289	1481	1637
29	149	281	439	601	761	941	1103	1291	1483	1657

Окончание таблицы

31	151	283	443	607	769	947	1109	1297	1487	1663
37	157	293	449	613	773	953	1117	1301	1489	1667
41	163	307	457	617	787	967	1123	1303	1493	1669
43	167	311	461	619	797	971	1129	1307	1499	1693
47	173	313	463	631	809	977	1151	1319	1511	1697
53	179	317	467	641	811	983	1153	1321	1523	1699
59	181	331	479	643	821	991	1163	1327	1531	1709
61	191	337	487	647	823	997	1171	1361	1543	1721
67	193	347	491	653	827	1009	1181	1367	1549	1723
71	197	349	499	659	829	1013	1187	1373	1553	1733
73	199	353	503	661	839	1019	1193	1381	1559	1741
79	211	359	509	673	853	1021	1201	1399	1567	1747
83	223	367	521	677	857	1031	1213	1409	1571	1753
89	227	373	523	683	859	1033	1217	1423	1579	1759
97	229	379	541	691	863	1039	1223	1427	1583	1777

XI. Таблица квадратов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
20	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
30	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
40	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
50	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
60	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
70	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
80	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
90	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Литература

Учебники и монографии

[1] Айерленд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987.

[2] Арсак Ж. Программирование игр и головоломок. — М.: Наука, 1990.

[3] Байиф Ж.-К. Логические задачи. — М.: Мир, 1983.

[4] Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.

[5] Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. — М.: Мир, 1965.

[6] Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. — М.: Учпедгиз, 1959.

[7] Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Учпедгиз, 1960.

[8] Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.

[9] Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и математический анализ: Учебник для учащихся для 10 классов. — М.: Просвещение, 1998.

[10] Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и математический анализ: Учебник для учащихся для 11 классов. — М.: Просвещение, 1998.

[11] Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971.

[12] Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972.

[13] Гарднер М. Математические новеллы. — М.: Мир, 1974.

[14] Гарднер М. Путешествие во времени. — М.: Мир, 1990.

[15] Гашков С. Б., Современная элементарная алгебра: Сборник задач. — М.: МЦНМО, 2006.

[16] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.

[17] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998.

[18] Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука, 1965.

[19] Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977.

[20] Ейтс С. Репьюниты и десятичные периоды. — М.: Мир, 1992.

[21] Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 1. — М.—СПб.; Киев: Вильямс, 2000.

[22] Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 2. — М.—СПб.; Киев: Вильямс, 2000.

[23] Колосов В. А. Теоремы и задачи алгебры теории чисел и комбинаторики. — М.: Гелиос АРВ, 2001.
[24] Конвей Дж. Х., Ги Р. К. (Conway, J. H., Guy R. K.) The book of numbers. — New York: Springer-Verlag, 1996.
[25] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2001.
[26] Моденов П. С. Задачи по геометрии. — М.: Наука, 1979.
[27] Нивен Р. Числа рациональные и иррациональные. — М.: Мир, 1966.
[28] Пойа Д. Математическое открытие. — М.: Наука, 1970.
[29] Понтрягин Л. С. Знакомство с высшей математикой. Алгебра. — М.: Наука, 1987.
[30] Прасолов В. В. Многочлены. — М.: МЦНМО, 2000.
[31] Радемахер Г., Теплиц О. Чичла и фигуры. — М.: Физматгиз, 1952.
[32] Слоэн Н. Дж. А., Плуф С. (Sloane N. J. A., Plouffe S.) The Encyclopedia of Integer Sequences. San Diego: Academic Press, 1995.
[33] Соминский И. С. Элементарная алгебра: Дополнительный курс. — М.: Физматгиз, 1962.
[34] Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. — М.: ГИТТЛ, 1937.
[35] Сушкевич А. К. Теория чисел. — Харьков: изд-во Харьк. гос. ун-та им. А. М. Горького, 1954.
[36] Табачников С. Л. Многочлены. — М.: Фазис, 1996.
[37] Уфнаровский В. А. Математический аквариум. — М.; Ижевск: РХД, 2000.
[38] Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
[39] Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.
[40] Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.
[41] Шафаревич И. Р. Избранные главы алгебры. — М.: Фонд математического образования и просвещения, 2000.
[42] Яглом И. М. Комплексные числа. — М.: ГИФМЛ, 1963.
[43] Яглом И. М. Как разрезать квадрат? — М.: Наука, 1968.

Сборники задач

[44] Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Алгебра: Справочное пособие. — М.: Наука, 1988.
[45] Василенко О. Н., Галочкин А. И. Сборник задач по теории чисел. — М.: изд-во Моск. ун-та, 1995.
[46] Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1986.
[47] Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре. — М.: Просвещение, 1999.
[48] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.
[49] Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. — М.: Наука, 1996.

[50] Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические олимпиады. — Киров: АСА, 1994.

[51] Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly» / Под ред. В. М. Алексеева. — М.: Мир, 1977.

[52] Кречмар В. А. Задачи по алгебре. — М.: Учпедгиз, 1940.

[53] Кречмар В. А. Задачник по алгебре. — М. — Л.: ОНТИ, 1937.

[54] Кудреватов Г. А. Сборник задач по теории чисел. — М.: Просвещение, 1970.

[55] Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. — М.: Советская наука, 1957.

[56] Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И. Задачи по элементарной математике. — М.: Физматгиз, 1962.

[57] Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1978.

[58] Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах — М.: МЦНМО, 2004.

[59] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001.

[60] Пржевальский Е. М. Сборник алгебраических задач повышенной трудности. Ч. 1—4. — М., 1908—1915.

[61] Рождественский В. В., Панкратьев Е. В., Мельников И. И., Вавилов В. В. Математический тренинг. — М.: изд-во Учебно-научного центра довузовского образования МГУ, 1997.

[62] Соловьев Ю. П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Ч. 1—3. — М.: школа им. А. Н. Колмогорова, 1998.

[63] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: В 3 ч. Ч. 1. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 2001.

Библиотечка «Квант»

[64] Башмаков М. И., Беккер Б. М., Гольховой В. М. Задачи по математике. Алгебра и анализ. — Вып. 22. — М.: Наука, 1982.

[65] Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. — Вып. 64. — М.: Наука, 1988.

[66] Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. — Вып. 56. — М.: Наука, 1986.

[67] Хонсбергер Р. Математические изюминки. — Вып. 83. — М.: Наука, 1992.

Серия «Популярные лекции по математике»

[68] Виленкин Н. Я. Метод последовательных приближений. — Вып. 35. — М.: Наука, 1968.

[69] Воробьев Н. Н. Признаки делимости. — Вып. 39. — М.: Наука, 1963.

[70] Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — Вып. 6. — М.: Наука, 1984.

[71] Головина Л. И., Яглом И. М. Индукция в геометрии. — Вып. 21. — М.: Наука, 1961.

[72] Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. — Вып. 47. — М.: Наука, 1969.
[73] Коровкин П. П. Неравенства. — Вып. 5. — М.: Наука, 1983.
[74] Маргулис Б. Е. Системы линейных уравнений. — Вып. 34. — М.: Наука, 1960.
[75] Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. — Вып. 1. — М.: Наука, 1950.
[76] Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения. — Вып. 13. — М.: Наука, 1979.
[77] Скорняков Л. А. Системы линейных уравнений. — Вып. 59. — М.: Наука, 1986.
[78] Соминский И. С. Метод математической индукции. — Вып. 3. — М.: Наука, 1974.
[79] Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — Вып. 43. — М.: Наука, 1979.
[80] Шишкин Ю. А. Неподвижные точки. — Вып. 60. — М.: Наука, 1989.

Статьи журнала «Квант»

[81] «Квант» за 30 лет (путеводитель). — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 1).
[82] Абрамович В. Признаки делимости на l // № 10. 1978.
[83] Абрамович В. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел // № 5. 1973.
[84] Аврамов А. Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля // № 11. 1980.
[85] Алексеев Р., Курляндчик А. Тригонометрические подстановки // № 2. 1995; То же // Матем. кружок. Вып. 4. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 5).
[86] Алексеев Р., Курляндчик А. Сумма минимумов и минимум суммы // № 3. 1991.
[87] Арнольд В. Меандры // № 3. 1991.
[88] Атамускас М. Квадратный трехчлен // № 9. 1971.
[89] Ашманов С. Числа и многочлены // № 2. 1980.
[90] Балк Г., Балк М. Мнимые числа и геометрические задачи // № 3. 1973.
[91] Балк М., Мазалов М. Как же доказать это неравенство? // № 6. 1995.
[92] Башмаков М. Нравится ли вам возиться с целыми числами? // № 3. 1971; То же // Математический кружок. Вып. 4. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 5).
[93] Башмаков М. О постулате Бертрана // № 5. 1971; То же // № 1. 1990.
[94] Белага Э. Вычисление многочленов — от Ньютона до наших дней // № 7. 1974.
[95] Бельский А., Садовский Л. Кольца // № 2. 1974.
[96] Бендукидзе А. Золотое сечение // № 8. 1973.
[97] Бендукидзе А. Треугольник Паскаля // № 10. 1982.
[98] Бендукидзе А., Сулаквелидзе А. Вычисление сумм // № 9. 1970.

[99] Берколайко С. Интеграл помогает доказать неравенство Коши // № 8. 1979.
[100] Берколайко С. Использование неравенства Коши при решении задач // № 4. 1975.
[101] Бескин Н. Бесконечные цепные дроби // № 8. 1970.
[102] Бескин Н. Цепные дроби // № 1. 1970.
[103] Болибрух А., Уроев В., Шабунин М. Квадратный трехчлен // № 9. 1983; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).
[104] Болтянский В. Квадратное уравнение // № 6. 1992; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).
[105] Болтянский В. Метод итераций // № 3. 1983.
[106] Болтянский В. Шесть зайцев в пяти клетках // № 2. 1977.
[107] Бронштейн И. Парабола // № 4. 1975.
[108] Брудно А. Метод Лобачевского // № 4. 1989.
[109] Булавко И. Удивительные равенства // № 9. 1972.
[110] Быковский В., Васильев Н. Решение задачи М 1325 // № 7. 1992.
[111] Вавилов В. Об одной формуле Гюйгенса // № 11. 1985. № 4. 1995.
[112] Вавилов В. Сетчатые номограммы // № 9. 1978.
[113] Вавилов В., Мельников И. Касательная // № 5. 1978.
[114] Вагутен В. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики // № 6. 1972.
[115] Вагутен В. Сопряженные числа // № 2. 1980.
[116] Вагутен В. Числа C_n^k, многочлены, последовательности // № 2. 1973.
[117] Вайнштейн Ф. Разбиение чисел // № 11/12. 1988.
[118] Варламов А. Правила Кирхгофа. // № 1, 1985.
[119] Варпаховский А. Тайны совершенных чисел и дружественных пар // № 9. 1973.
[120] Васильев Н., Гутенмахер В. Арифметика и принципы подсчета // № 1, 1983; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).
[121] Васильев Н., Гутенмахер В. Комбинаторика — многочлены — вероятность // № 1. 1986.
[122] Васильев Н., Гутенмахер В. Пары чисел и действия с ними // № 1. 1985.
[123] Васильев Н., Зелевинский А. Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения // № 1. 1982.
[124] Васильев Н., Маликов Т. Рассмотрим разность // № 6. 1981.
[125] Васильев Н., Сендеров В. Про угол $\pi/7$ и $\sqrt{7}$ // № 2. 1996.
[126] Вертгейм Б. Метод неподвижной точки // № 6. 1980.
[127] Виленкин А. Сокращение алгебраических дробей // № 11. 1970.
[128] Виленкин Н. В таинственном мире бесконечных рядов // № 10. 1989.
[129] Виленкин Н. Комбинаторика // № 1. 1971.
[130] Виленкин Н. Сравнения и классы вычетов // № 10. 1978.

[131] Винниченко А. Квадратичный треугольник и непрерывные цепочки № 4. 1975.

[132] Винниченко А. Простые числа, математическая статистика и ... ЭВМ // № 8. 1988.

[133] Власов А. Сравнение чисел // № 2. 1986; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра); М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).

[134] Воронин С., Кулагин А. Метод производящих функций // № 5. 1984.

[135] Галкин Е. Рационально или иррационально? // № 5. 1977.

[136] Гальперин Г. Просто о простых числах // № 4. 1987; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).

[137] Гарднер М. Числа Каталана // № 7. 1978.

[138] Гашков С. Задача Чебышёва и тригонометрические многочлены // № 6. 1990.

[139] Гик Е. Две игры // № 3. 1988.

[140] Гиндикин С. «Великое искусство» // № 9. 1976.

[141] Гиндикин С. Малая теорема Ферма // № 10. 1972.

[142] Гиндикин С. О пользе чисел «поистине софистических» // № 6. 1983; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).

[143] Гиндикин С. Рассмотрим бесконечную десятичную дробь... // № 9. 1970; То же // № 1. 1995.

[144] Гольдман А., Звавич Л. Числовые средние и геометрия // № 9. 1990.

[145] Гончаров А. Арифметика гауссовых чисел // № 12. 1983.

[146] Горнштейн П. Тригонометрия помогает алгебре // № 5. 1989; То же // Практикум абитуриента. Математика (алгебра и тригонометрия). — М.: Бюро «Квантум», 1995. — (Прил. к журналу «Квант»; № 3).

[147] Гутенмахер В. Неравенства с фуксированной суммой // № 9. 1979; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).

[148] Гутенмахер В. Системы линейных уравнений // № 1. 1984.

[149] Дворянинов С., Ясиновый Э. Как получаются симметричные неравенства // № 7. 1985; То же // Матем. кружок. Вып. 3. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 3).

[150] Депман И. Совершенные числа // № 8. 1971; То же // № 5. 1991.

[151] Дорофеев Г. Как расположены корни трехчленов? // № 7. 1986.

[152] Жуков А. Алгебраические и трансцендентные числа // № 4. 1998.

[153] Жуков А. Узы дружбы в мире чисел // № 6. 1999.

[154] Егоров А. Деление с остатком и сравнение по модулю // № 6. 1991; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).

[155] Егоров А. О дискриминанте // № 6. 1992; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).

[156] Егоров А. Решетки и правильные многоугольники // № 2. 1974.

[157] Егоров А. Решим относительно параметра // № 4. 1997.

[158] Егоров А. Сравнения по модулю и арифметика остатков // № 5. 1970.

[159] Егоров А. Уравнения и пределы // № 10. 1977; То же // Матем. кружок. Вып. 3. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 3).

[160] Егоров А., Котова А. Необыкновенные арифметики // № 3/4. 1993; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).

[161] Жаутыков О. График кубического трехчлена // № 6. 1972; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).

[162] Жиглевич А., Петров Н. О четырех решениях уравнения $x^2 = x$ // № 11. 1989.

[163] Земляков А. Как выглядит парабола? // № 3. 1978.

[164] Иванов Ю. Сколько вариантов? // №№ 11, 12. 1980; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).

[165] Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Иенсена // № 4. 1990.

[166] Ионин Ю., Плоткин А. Выбор модуля // № 6. 1984; То же // Матем. кружок. Вып. 4. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 5).

[167] Камнев Л. Иррациональность суммы радикалов // № 2. 1972.

[168] Кириллов А. О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма // № 7. 1977; То же // № 6. 1994.

[169] Клумова И., Фукс Д. Формула существует, но... // № 9. 1976; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).

[170] Колмогоров А. Решето Эратосфена // № 1. 1974; То же // № 3. 1984.

[171] Конюшков А. Неравенство Коши—Буняковского // № 8. 1987.

[172] Копрински С. Формулы Виета // № 4. 1987.

[173] Кордемский Б. Так или не так действовал Ферма? // № 7. 1972.

[174] Кордемский Б. Этому виду задач более 1600 лет // № 4. 1973.

[175] Коробов А. Простые числа и постулат Бертрана // № 4. 1998.

[176] Котляр Б. Сколько у числа делителей? // № 4. 1994.

[177] Крейн М., Нудельман А. Замечательные пределы, порождаемые классическими средними // № 9. 1981.

[178] Кудреватов Г. Сравнения // № 9. 1972.

[179] Кузьмин Е., Ширшов А. О числе e // № 8. 1979.

[180] Курляндчик Л. Приближение к экстремуму // № 1. 1981; То же // Матем. кружок. Вып. 4. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 5).

[181] Курляндчик Л., Лисицкий А. Как придумать комбинаторное тождество // № 5. 1980.
[182] Курляндчик Л., Лисицкий А. Суммы и произведения // № 10. 1978.
[183] Курляндчик Л., Розенблюм Г. Метод бесконечного спуска // № 1. 1978; То же // Матем. кружок. Вып. 3. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 3).
[184] Курляндчик Л., Фомин С. Теорема Виета и вспомогательный многочлен // № 12. 1984.
[185] Кушнир И. Геометрические решения негеометрических задач // № 11. 1989.
[186] Левин А. Что такое комбинаторика // №№ 5, 6. 1999.
[187] Ляшко О. Почему не уменшится сопротивление // № 1, 1985.
[188] Матиясевич Ю. Формулы для простых чисел // № 5. 1975.
[189] Матулис А., Савукинас А. «Ферзя — в угол», «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи // № 7. 1984.
[190] Мешойрер Р. Комбинаторные доказательства формулы Ньютона // № 9. 1978.
[191] Мордкович А. Экстремумы многочлена третьей степени // № 11. 1974.
[192] Нестеренко Ю., Никишин Е. Очерк о цепных дробях // № 5. 1983.
[193] Оре О. Простые числа Ферма // № 12. 1979.
[194] Орлов А. Принцип Дирихле // № 3. 1971.
[195] Пекарскас В. Геометрия комплексных чисел // № 6. 1973.
[196] Пинтер Л., Хегедыш Й. Упорядоченные наборы чисел и неравенства // № 12. 1985.
[197] Понтрягин Л. Комплексные числа // № 3. 1982; То же // № 2. 1983; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).
[198] Понтрягин Л. Кубическая парабола // № 3. 1984; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).
[199] Понтрягин Л. Основная теорема алгебры // № 4. 1982; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).
[200] Пресман А. Решение квадратных уравнений при помощи циркуля и линейки // № 4. 1972.
[201] Прохоров А. Золотая спираль // № 9. 1984.
[202] Раббот Ж. Знаете ли вы, что $220\,\text{В}/127\,\text{В} \approx \sqrt{3}$? // № 11. 1978.
[203] Раббот Ж. Тригонометрические функции // № 5. 1972.
[204] Радемахер Г., Теплиц О. Об одном свойстве числа 30 // № 3. 1992.
[205] Радемахер Г., Теплиц О. Периодические десятичные дроби // № 2. 1994.
[206] Резников А. Формула Кардано и геометрия // № 9. 1976.
[207] Рубинштейн А. О кубических уравнениях // № 2. 1998.
[208] Савин А. Двенадцать долларов, ним и шоколадка // № 12. 1991.
[209] Савин А. Дружественные числа и простые числа-близнецы // № 9. 1988.

[210] Савин А. Замечательные числа // № 4. 1987.
[211] Савин А. Многочлены // № 3. 1991.
[212] Савин А. Ханойская башня // № 11. 1991.
[213] Савин А. Числа Фибоначчи // № 3. 1988.
[214] Савин А. Числа $\sqrt{2}$ и e // № 6. 1996.
[215] Савин А. Число Фидия — золотое сечение // № 6. 1997.
[216] Савин А. Число π // № 6. 1996.
[217] Садовский Л., Аршинов М. Двоичное кодирование // № 7. 1979.
[218] Севрюк М. Вариации на тему классических неравенств // № 5. 1979.
[219] Седракян Н. О применении одного неравенства // № 2. 1997.
[220] Сендеров В., Спивак А. Суммы квадратов и целые гауссовы числа // № 3. 1999.
[221] Сендеров В., Спивак А. Малая теорема Ферма // №№ 1, 3. 2000.
[222] Сидоров Ю. Аргумент комплексного числа // № 4. 1974.
[223] Силкин Б. С корнем квадратным сквозь историю // № 6. 1973.
[224] Скопец З. Сравнение средних двух положительных чисел // № 2. 1971.
[225] Смышляев В. Применение неравенства Коши—Буняковского к решению некоторых задач // № 1. 1972.
[226] Соловьев Ю. Комплексные числа // № 7. 1991; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).
[227] Соловьев Ю. Неопределенные уравнения первой степени № 4. 1992; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).
[228] Спивак А. Математический праздник. Ч. III. — М.: Бюро «Квантум», 2001. — (Прил. к журналу «Квант»; № 4).
[229] Столяр В. Признак делимости на числа вида $10n \pm 1$ // № 4. 1987.
[230] Табачников С. Геометрия уравнений // № 10. 1988.
[231] Табачников С. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля // № 6. 1990; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).
[232] Тадеев В. Простые, двойные, гармонические // № 7. 1982.
[233] Тихомиров В. Теорема Чебышёва о распределении простых чисел // № 6. 1994.
[234] Толпыго А. Игра «Йога» // № 9. 1978.
[235] Тоом А. Дама с собачкой // № 2. 1990; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).
[236] Столяр В. Г., Кураев Э. А., Силогадзе З. К., Гальперин Г. А., Корлюков Л. В. Удивительные приключения периодических дробей // № 8. 1989.
[237] Фельдман Н. Алгебраические и трансцендентные числа // №№ 7, 10. 1983; То же // Школа в «Кванте». Математика (арифметика и алгебра). — М.: Бюро «Квантум», 1994. — (Прил. к журналу «Квант»; № 2).
[238] Финк Л. Еще раз о счастливых билетах // № 12. 1976.

[239] Флейшман Д. Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова // № 3. 1997.
[240] Фомин С. Разложение на множители // № 7. 1983.
[241] Фукс Д. О раскрытии собок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях // № 8. 1981.
[242] Фукс Д. Формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$ // № 6. 1986.
[243] Фукс Д., Фукс М. Арифметика биномиальных коэффициентов // № 6. 1970.
[244] Фукс Д., Фукс М. О наилучших приближениях // № 6. 1971.
[245] Фукс Д., Фукс М. Рациональные приближения и трансцендентность // № 12. 1973.
[246] Хаплатов М. Трансцендентные числа // № 1. 1976; То же // Числа и многочлены. — М.: Бюро «Квантум», 2000. — (Прил. к журналу «Квант»; № 6).
[247] Хитрук В. Таблица составных чисел // № 9. 1984.
[248] Шевелев В. Три формулы Рамануджана // № 6. 1988; То же // Матем. кружок. Вып. 3. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 3).
[249] Шестопал Г. Как обнаружить фальшивую монету // № 10. 1979.
[250] Ширшов А. Об одной комбинаторной задаче // № 9. 1979; То же // Матем. кружок. Вып. 4. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 5).
[251] Шкапенюк М. Выпуклость функций и доказательство неравенств // № 3. 1980; То же // Матем. кружок. Вып. 4. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 5).
[252] Шуликовская В. Неравенство Коши и объемы // № 9. 1990.
[253] Яглом И. Две игры со спичками // № 2. 1971; То же // № 1. 1992.
[254] Яглом И. Заплаты на кафтане // № 2. 1974.
[255] Яглом И. Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики // № 7. 1984.
[256] Яглом И. Почти простые числа // № 9. 1981.
[257] Янкелевич В. «Неприводимый» случай // № 11. 1971.
[258] Янтаров И. Коммутирующие многочлены // № 4. 1979; То же // Матем. кружок. Вып. 4. — М.: Бюро «Квантум», 1999. — (Прил. к журналу «Квант»; № 5).
[259] Ярский А. Как доказать неравенство // № 2. 1997.
[260] Ярский А. Рациональные корни многочлена // № 6. 1995.
[261] Ясиновый Э. Геометрия помогает решать уравнения // № 12. 1984.

Другие источники

[262] Кноп К. Все врут календари // № 21. 1998.
[263] Кноп К. «Да» и «Нет» не говорите // № 3. 1998.
[264] Кноп К. 12 монет // № 51. 1997.
[265] Кноп К. Классические головоломки // № 25. 1999.

[266] Кноп К. Мини-конкурс для программистов // № 48. 1997.
[267] Кноп К. Ним-игры // № 20. 1998.
[268] Коробов Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения // ИАН. Сер. матем. 1950. Т. 14. С. 215—238.
[269] Коробов Н. М. Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей // ИАН. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 17—46.
[270] Слоэн Н. Дж. А. (Sloane N. J. A.) My Favorite Integer Sequence // Proceedings of SETA. 1998.
[271] Слоэн Н. Дж. А. (SloaneN. J. A.) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `www.research.att.com/~njas/sequences/`

Предметный указатель

Надежда Борисовна Алфутова
Алексей Владимирович Устинов

Алгебра и теория чисел.
Сборник задач для математических школ

Подписано в печать 13.08.2009 г. Формат 60 × 90 $^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 21. Тираж 3000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано по CtP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.