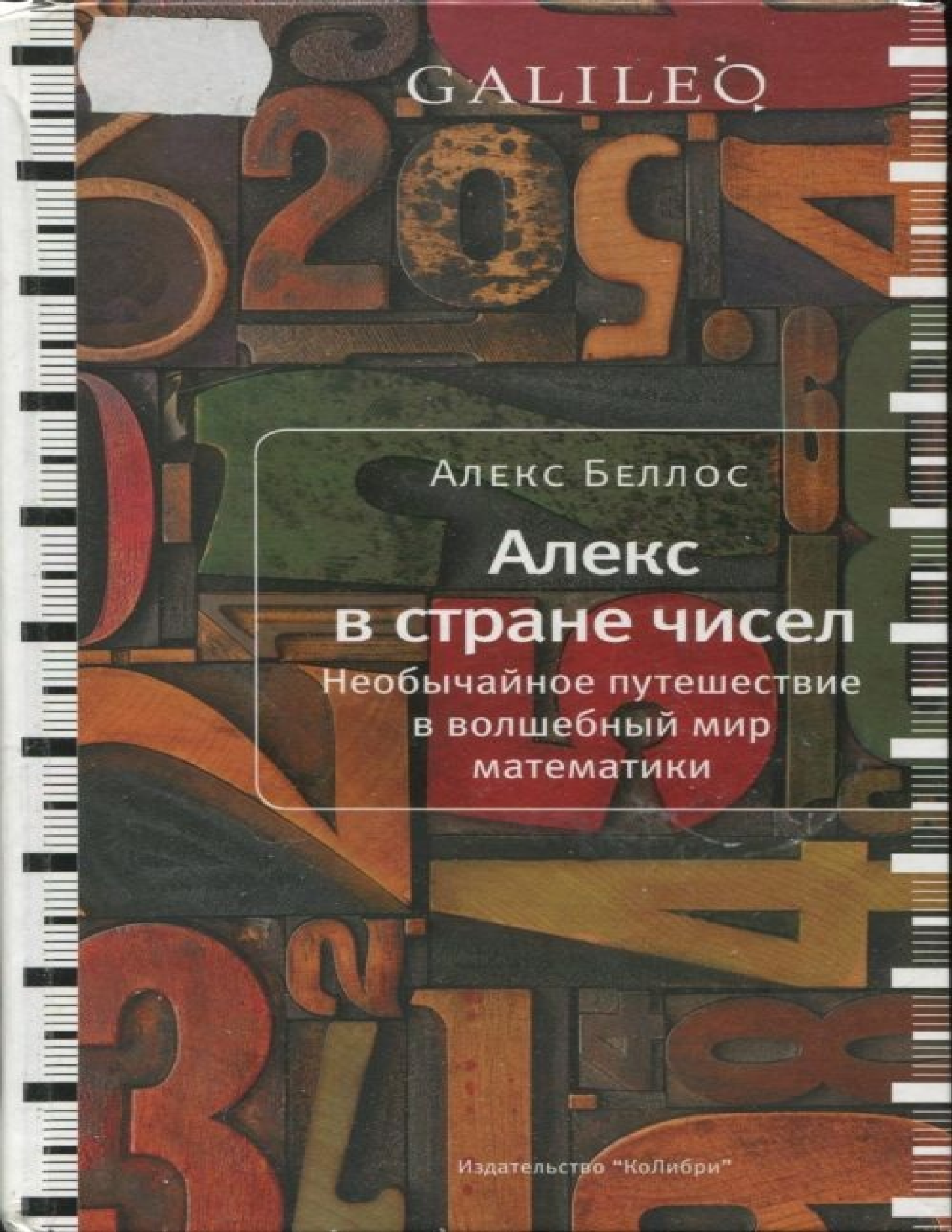




GALILEO

АЛЕКС БЕЛЛОС

Алекс в стране чисел

Необычайное путешествие
в волшебный мир
математики

Издательство "Колибри"

Алекс Беллос

АЛЕКС В СТРАНЕ ЧИСЕЛ

*Необычайное путешествие в
волшебный мир математики*

Моим родителям посвящается

Предисловие

В школьные годы мне нравилась математика и нравилось сочинять разные истории, а потому я решил, что смогу заниматься и тем и другим, если поступлю в университет и буду изучать там математику и философию — такой совместный курс, одной ногой стоящий в точных науках, а другой — в свободных искусствах. Большую часть времени в университете я посвящал работе в студенческой газете. Поначалу мне удавалось немного публиковаться и в британской национальной прессе, а одну статейку (о том, почему математика — это так круто) напечатали даже в лондонском «Guardian». То была моя первая статья про математику, и она же оказалась последней на протяжении почти двадцати последующих лет.

Окончив университет, я стал журналистом. Мне тогда казалось, что я ухожу из мира чисел в мир слов навсегда. Сначала я работал в вечерней газете в Брайтоне, затем в нескольких газетах в Лондоне и в конце концов стал иностранным корреспондентом в Рио-де-Жанейро. От случая к случаю мое математическое образование оказывалось полезным, например, когда требовалось найти американский штат, который по площади ближе всего к только что расчищенной от леса территории в джунглях Амазонки, или при необходимости вычислять обменные курсы во время финансовых кризисов. Но в общем я полагал, что вся моя математика осталась в далеком прошлом.

Прошло несколько лет, и я вернулся домой в Англию, не очень-то представляя, чем буду заниматься дальше. В качестве временного занятия я продавал футболки с бразильскими футболистами; потом завел себе блог; в какой-то момент мне пришла в голову мысль импортировать тропические фрукты — из этого ничего не вышло, зато тогда я решил снова обратиться к предмету, столь сильно занимавшему меня в юности, и здесь-то нашел искру вдохновения, приведшую к написанию этой книги.

Знакомство с миром математики во взрослом возрасте идет совсем иначе, чем в детстве, когда страх перед экзаменами часто приводит к тому, что по-настоящему интересные вещи просто проскакиваешь. Теперь же у меня была свобода в выборе пути, главное — чтобы он был увлекательным, интересным. Я прочел про «этноматематику» — про то, как различные народы подходят к математике, — и про то, как на формирование математики повлияла религия. Меня заинтересовали и

недавние работы по поведенческой психологии и неврологии — авторы этих работ пытаются понять, как наш мозг воспринимает числа.

Мои странствия по миру математики вскоре приобрели и вполне земное, географическое измерение. Я полетел в Индию — узнать, как древние индусы изобрели нуль, совершив таким образом один из величайших интеллектуальных подвигов в истории человечества. Я заказал место в мегаказино в Рино, чтобы самому наблюдать за тем, как вероятности управляют игровой индустрией. А потом я отправился в Японию, где познакомился с самым «арифметическим» шимпанзе в мире.

По мере продвижения в своих изысканиях я оказался в странном положении — одновременно специалиста и профана. Заново изучать школьную математику — словно возобновить дружбу со старыми друзьями, но там вдруг оказалось много приятелей моих приятелей, которых я прежде никогда не встречал, да еще я познакомился с массой совершенно новых, о которых никогда не слышал. До написания этой книги, например, я не знал, что в течение сотен лет велась кампания за то, чтобы ввести два новых числа в нашу систему из десяти чисел. Я не подозревал, что оригами — это серьезный научный метод. И даже не задумывался о теории, скрывающейся за sudoku (потому что в мои школьные годы этой игры еще не изобрели). Мне приходилось приезжать в самые разные места — в Германию, в Лейпциг, и в Скоттдейл в Аризоне — и в местных библиотеках наткаться на совершенно неожиданные книги. А однажды я провел незабываемый день за чтением книги об истории ритуалов, связанных с растениями, дабы понять, почему Пифагор был столь привередлив в еде.

*

Книга начинается с главы 0 — мне хотелось подчеркнуть, что то, о чем в ней говорится, еще предматематика. В этой главе рассказывается о том, как возникли числа. К началу главы 1 числа становятся существенным элементом человеческой жизни — и тут уже мы переходим к делу. Я свел технические подробности к минимуму, но не стал выбрасывать все уравнения и доказательства. Мне хотелось, чтобы у читателя была возможность прочувствовать красоту некоторых из этих шедевров математического искусства и самому оценить их элегантность. Тем не менее я написал книгу таким образом, что, если вам неохота следить за каким бы то ни было уравнением или доказательством, вы можете просто перейти к следующему разделу. Главы, кроме того, можно читать в любом порядке; каждая из них самодостаточна, то есть для ее понимания не

требуется прочтения предыдущих глав. Тем не менее я надеюсь, что вы прочтете все главы от первой до последней, поскольку они примерно соответствуют хронологии в истории математических открытий и я все-таки иногда ссылаюсь на что-то из обсуждавшегося ранее.

Я включил в книгу немало исторического материала, ведь рассказ о математике — это прежде всего рассказ об истории математики. В отличие от гуманитарного знания, находящегося в непрерывном состоянии переизобретения по мере того, как новые идеи и новая мода вытесняют старые, и в отличие от прикладных наук, где теории постоянно уточняются, математика не подвержена возрасту. Теоремы Пифагора и Евклида верны сегодня в той же степени, в какой они были верны и в античную эпоху. Пифагор и Евклид — самые древние ученые, о которых мы узнаем из школьного курса математики. К 16 годам школьники едва ли изучают что-нибудь из того, что не было бы известно в середине XVII столетия, а к 18 годам, аналогичным образом, они не выбираются за середину XVIII века. (Математика, которая требовалась для моего диплома, относилась к 1920-м годам.)

Работая над книгой, я постоянно испытывал желание поделиться с будущими читателями своим восхищением математическими открытиями. Еще мне хотелось показать, что математики умеют веселиться. Они — короли логики, что в колоссальной степени обостряет их восприятие всего нелогичного. Математика страдает от репутации — принято считать, что она суха и трудна. Она такой бывает. Но вместе с тем эта наука может быть воодушевляющей, вполне постижимой и, самое главное, наполненной истинным творчеством. Абстрактное математическое мышление — одно из величайших достижений человечества, и, пожалуй, именно оно определяет прогресс общественной мысли.

Так давайте же совершим путешествие в мир математики — и обещаю, вам будет нескучно!

Глава 0

Голова для чисел

Автор пытается выяснить, откуда взялись числа, ибо им не так уж много лет от роду. Он встречается с человеком, который поселился в джунглях, и с шимпанзе, которая жила в городе.

Войдя в тесноватую парижскую квартиру Пьера Пика, я ощутил почти невыносимый запах средств от насекомых. Пика только что вернулся из тропических лесов Амазонии, где провел пять месяцев в обществе индейцев, и сейчас занимался тем, что обеззараживал привезенные оттуда подарки. Стены его кабинета украшали туземные маски, головные уборы из перьев и плетеные корзинки. Полки были завалены научными книгами. На столе лежал несобранный кубик Рубика.

Я поинтересовался у Пика, как прошла его поездка.

— Непросто, — ответил он.

Пика — лингвист и, быть может, по этой причине говорит медленно и тщательно, старательно выговаривая отдельные слова, тихо. Ему слегка за сорок, но выглядит он молодо: сияющие голубые глаза, румяное лицо и мягкие, растрепанные седеющие волосы.

Пика, ученик известного американского лингвиста и общественного деятеля Ноама Хомского, работает во французском Национальном центре научных исследований и последние десять лет изучает мундуруку — племя туземцев численностью около 7000 человек, проживающих в бразильской Амазонии. Мундуруку — охотники и собиратели, они живут в небольших селениях, раскиданных в тропических лесах на территории размером со штат Нью-Джерси. Пика изучает язык мундуруку: в нем нет времен глаголов, множественного числа и слов для чисел больше пяти.

Полевые работы для Пика означают путешествия, которым могли бы позавидовать знаменитые искатели приключений. Ближайший к его индейцам аэропорт находится в Сантареме, городе, расположенном в 500 милях от Атлантического океана вверх по Амазонке. В Сантареме Пика

садится на паром вверх по реке Тапажос, который за 15 часов проплывает почти 200 миль и довозит его до Итаитубы — города, в свое время пережившего золотую лихорадку. Это последнее место на его пути, где можно пополнить запасы еды и топлива. В свою самую последнюю поездку Пика взял напрокат в Итаитубе джип, загрузил в него снаряжение — компьютеры, панели солнечных батарей, аккумуляторы, книги и 120 галлонов бензина — и отправился по Трансамазонской автостраде, небезопасной, а порой просто непроходимой грунтовой дороге, оставшейся от одного из безрассудных национальных проектов 1970-х годов.

Целью Пика было Жакареаканги — небольшое поселение в 200 милях на юго-запад от Итаитубы. Я спросил его, сколько времени занимает этот путь.

— Бывает по-всякому, — пожал он плечами. — Может, полжизни. А может, и два дня.

— А в *этот* раз сколько? — повторил я свой вопрос.

— Никогда не знаешь, сколько времени уйдет на дорогу, потому что каждый раз получается по-разному. В сезон дождей — что-то от десяти до двенадцати часов. Это если все хорошо.

Жакареаканга находится на самом краю территории проживания мундуруку. Чтобы попасть туда, Пика пришлось дожидаться, пока появится кто-нибудь из индейцев, с кем можно было бы договориться, чтобы его отвезли на каноэ.

— И сколько вы ждали? — полюбопытствовал я.

— Ждал я порядком. Но опять же не спрашивайте меня сколько.

— Пару дней, наверное? — рискнул я предположить.

В течение нескольких секунд он морщил лоб.

— Около двух недель.

Итак, больше чем через месяц после отъезда из Парижа Пика наконец приблизился к цели своего путешествия. Разумеется, мне хотелось знать, сколько времени занял путь от Жакареаканги до индейских деревень.

Но тут я почувствовал, что Пика перестал сдерживать раздражение по поводу моих расспросов:

— Еще раз вам говорю — *по-разному получается!*

Но я не отступал.

— А на *этот* раз сколько времени ушло?

Он запнулся.

— Ну не знаю. Думаю, может быть, два дня, а может, один.

Чем больше я наседаю на Пика по поводу цифр и фактов, тем больше он раздражался. Я тоже начал терять терпение. Мне было непонятно, что им

движет — французская строптивость, научный педантизм или простое упрямство. Я временно прекратил расспросы, и мы поменяли тему беседы. И лишь спустя несколько часов, когда мы заговорили о том, каково это — возвращаться домой после столь долгого пребывания в такой глуши, он немного оттаял.

— Когда я приезжаю из Амазонии, у меня пропадают ощущения времени и смысла чисел, а может, даже и понятие пространства, — сказал он.

Он забывает о назначенных встречах. Теряет дорогу там, где совсем просто пройти.

— Мне невероятно трудно заново приспособиться к Парижу, со всеми его углами и прямыми.

То, что Пика отказывался сообщить мне количественные данные о своем путешествии, представляло собой часть культурного шока. Он провел так много времени с этими людьми, мундуруку, которые едва умеют считать, что сам потерял способность описывать наш мир, используя числа.

*

Точно никто не знает, но по всей вероятности, числам не более 10 000 лет от роду. Я имею в виду работающую систему слов и символов для чисел. Одна из теорий состоит в том, что ее появление связано с развитием сельского хозяйства и торговли, поскольку числа абсолютно необходимы при подсчете запасов и товаров — каждая сторона должна убедиться, что ее не надули. У мундуруку только натуральное хозяйство, деньги вошли в обращение лишь недавно, так что у них решительно не было времени, чтобы развить навыки счета. Насчет некоторых туземных племен в Папуа — Новой Гвинее есть мнение, что появление чисел у них было вызвано развитием обычая обмена подарками. Но в Амазонии таких традиций нет.

Десятки тысяч лет назад, задолго до появления чисел, у наших предков должны были быть какие-то способы для восприятия количества. Им, надо думать, приходилось отличать одного мамонта от двух мамонтов, а также понимать, что одна ночь — это не то же самое, что две ночи. Однако интеллектуальный скачок от идеи двух вещей к изобретению символа или слова для абстрактной идеи «два», потребовал многих веков. Стадия его осуществления — это на самом деле как раз то состояние, до которого добрались в наше время некоторые сообщества в Амазонии. Там есть племена, у которых для чисел имеются лишь слова «один», «два» и «много». Мундуруку, успешно добравшиеся до пятерки, представляют

собой относительно продвинутый отряд.

Числа настолько широко распространены в нашей жизни, что нелегко и представить себе, как люди могут обходиться без них. Однако когда Пьер Пика живет среди мундуруку, он без труда переходит в состояние «бесчисленного» существования. Он спит в гамаке и ходит на охоту, ест мясо тапира, броненосца и дикого кабана, а время определяет по положению солнца. Если идет дождь, он не выходит из хижины, а если солнечно — то выходит. И у него не возникает необходимости что-либо посчитать.

И все же мне показалось странным, что числа больше пяти никак не проявляются в повседневной жизни племен Амазонии. Я спросил Пика, как бы индейцы сказали «шесть рыб». Например, представим себе, что кто-то из них собирается приготовить еду на шесть человек и хочет быть уверенным, что каждому достанется по рыбе.

— Это невозможно, — сказал он. — Предложения «Мне нужно шесть рыб для шести людей» не существует.

— А что, если вы спросите у кого-то из мундуруку, имеющего шесть детей: «Сколько у тебя детей?»

Пика ответил, как и предыдущий раз:

— Он скажет «Я не знаю». Это невозможно выразить.

Однако, добавил Пика, дело здесь касается культуры. Ответ «Я не знаю» вовсе *не* означает, что мундуруку сначала сосчитает своего первого ребенка, потом второго, потом третьего, четвертого, пятого, а потом начнет чесать в затылке из-за того, что пришлось остановиться, потому что он не знает, что делать дальше. Для мундуруку сама по себе идея подсчета детей представляется нелепой. Более того, идея вообще что бы то ни было посчитать выглядит абсурдной.

— С чего бы взрослому мундуруку захотеть считать своих детей? — спросил Пика. — За детьми присматривают все взрослые племени. И никто не занимается подсчетом того, кто из детей кому принадлежит.

Пика сравнил ситуацию с французским выражением «J'ai une grande famille», или «Я из большой семьи».

— Когда я говорю, что у меня большая семья, я сообщаю вам, что не знаю точно, сколько именно людей имею в виду. Где заканчивается моя семья и где начинается чья-то другая? Я не знаю. Никто никогда мне этого не сообщал. Аналогичным же образом, если вы спросите взрослого мундуруку, за скольких детей он несет ответственность, на такой вопрос не найдется правильного ответа. Он скажет «Я не знаю», и это будет правдой.

Кроме мундуруку, истории известны и другие примеры человеческих

сообществ, представители которых не считают, сколько людей в них, в эти сообщества, входит. Когда царь Давид посчитал свой собственный народ, он был наказан тремя днями мора и 77 000 смертями. Подразумевается, что евреи могут пересчитывать евреев только косвенно, и именно поэтому в синагоге способ удостовериться в присутствии десяти человек — *миньян*, числа, достаточного для молитв, — состоит в произнесении молитвы из десяти слов, при этом при произнесении каждого слова указывают на одного из присутствующих. Пересчет людей с помощью чисел воспринимается как способ разобщить этих людей, что делает их более восприимчивыми к вредным влияниям. Попросите правоверного раввина сосчитать его детей — и вы увидите, что шансы услышать от него ответ равны шансам услышать ответ от многодетного отца из племени мундуруку.

Однажды я разговаривал с одной бразильской учительницей, которая долго работала среди аборигенов. Она заметила, что индейцы воспринимают постоянные вопросы о числе детей, которые им задают приезжие, как некую странную манию, тогда как на самом деле гости задавали этот вопрос, просто желая проявить вежливость. Что толку пересчитывать детей? У индейцев такие вопросы вызывают сильное недоверие.

Первые письменные упоминания о мундуруку относятся к 1768 году, когда белые поселенцы заметили одного из них на берегу реки. Спустя столетие францисканские миссионеры основали на землях мундуруку свою миссию. В конце XIX века во время каучукового бума, когда здесь появились охотники за каучуком, белые стали больше контактировать с мундуруку. Однако племя по-прежнему живет в относительной изоляции, но, как и многие другие группы индейцев, долгое время общавшиеся с чужаками, они стали носить в основном западную одежду — футболки и шорты. В конце концов в их мир с неизбежностью войдут и другие стороны современной жизни, такие как электричество и телевидение. И конечно, числа. На самом деле некоторые мундуруку, живущие на границах их территории, выучили португальский, национальный язык Бразилии, и могут считать по-португальски.

— *Они считают им, dois, três и далее до сотни и более, — рассказывает Пика. — Но когда у них спрашиваешь: «Кстати, сколько будет пять минус три?» — он утрированно пожимает плечами на французский манер, — ответа не дождешься.*

Свои исследования в тропических лесах Пика проводит, используя лэптоп, который работает от солнечных батарей. Поддерживать оборудование в рабочем состоянии там исключительно непросто из-за жары и влажности — но еще сложнее может оказаться собрать вместе всех участников исследования. Как-то раз старейшина племени потребовал, чтобы Пика съел большого красного муравья *sauba*, — только после этого он был готов разрешить ему расспрашивать о чем-то ребенка. Верность науке одержала верх, и Пика, скорчив гримасу, с хрустом разгрыз и проглотил насекомое.

Цель, ради которой изучаются математические способности людей, умеющих считать лишь на пальцах одной руки, состоит в том, чтобы понять природу свойственного нам фундаментального восприятия чисел на интуитивном уровне. Пика хотел знать, где лежат универсалии, присущие всем людям, а где — результат воздействия культуры. В одном из самых увлекательных экспериментов Пика исследовал пространственное восприятие чисел индейцами. Как они представляют себе расположение чисел вдоль прямой? В современном мире мы постоянно сталкиваемся с линейным упорядочением чисел — на рулетках, линейках, графиках, в виде нумерации домов вдоль улицы. Поскольку у мундуруку чисел как таковых нет, Пика в своих опытах использовал наборы точек на экране. Каждому добровольному испытуемому на экране показывали неразмеченную прямую. Слева от прямой располагалась одна точка, а справа — десять точек. Затем испытуемому показывали случайные группы, содержащие от одной до десяти точек. Для каждого набора предлагалось указать, где на прямой, по мнению испытуемого, эти точки должны располагаться. Пика передвигал туда курсор и кликал. Анализируя статистику этих кликов, он мог в точности сказать, как мундуруку размещают на прямой числа от единицы до десяти.

Когда тот же тест предлагается взрослым американцам, они располагают числа вдоль прямой на равных интервалах. Тем самым они воспроизводят числовую прямую, которую все мы изучали в школе, — на ней соседние числа находятся друг от друга на одинаковых расстояниях, как на линейке. Однако мундуруку отвечали совсем по-другому. Они считают, что сначала интервалы между числами больше, а потом становятся все меньше и меньше по мере того, как числа растут. Например, расстояния между отметками, соответствующими одной точке и двум точкам, и между отметками, соответствующими двум точкам и трем точкам, оказались намного больше, чем расстояние между отметками, соответствующими семи и восемью точкам или восьми и девяти точкам.

Эти результаты оказались довольно неожиданными. Вообще говоря, тот факт, что числа разнесены на равные расстояния, считается очевидным. Нас этому учат в школе, и мы легко это воспринимаем, на этом основаны все измерения и все научное знание. И тем не менее для мундуруку мир устроен по-другому. Они представляют себе величины совершенно иным способом.

Если числа нанесены на линейку равномерно, то такая шкала называется линейной. Если числа располагаются все теснее по мере их возрастания, то такая шкала называется логарифмической^[1]. Оказалось, что логарифмический подход присущ не только индейцам Амазонии. У всех у нас от рождения имеется подобное восприятие чисел. В 2004 году Роберт Сиглер и Джули Бут из Университета Карнеги Меллон в Пенсильвании провели аналогичный эксперимент с числами на прямой среди детей из группы детского сада (со средним возрастом 5,8 года), первоклассников (6,9 года) и второклассников (7,8 года). Результаты показали, каким образом практика счета оказывает влияние на наше интуитивное восприятие. Детсадовские дети, у которых не было никакого систематического математического образования, располагали числа логарифмически. К первому году в школе, когда учеников обучают словам и символам для обозначения чисел, шкала выравнивается. И ко второму классу числа наконец располагаются равномерно вдоль прямой.

Почему индейцы и дети полагают, что большие числа сидят ближе друг к другу, чем меньшие числа? Объяснение этому простое. Как мы уже говорили, во время экспериментов добровольным участникам показывали наборы точек и спрашивали их, где — по их мнению — данный набор должен располагаться на прямой линии, в левой части которой поставлена одна точка, а в правой части — десять точек. (В эксперименте с детьми речь шла о 100 точках.) Представьте себе, что мундуруку видит перед собой пять точек. Он внимательно их рассмотрит и обнаружит, что пять точек *в пять раз* больше, чем одна точка, но десять точек *всего в два раза* больше, чем пять точек. И мундуруку, и дети, по-видимому, принимают решения о том, как расположены числа, основываясь на оценке величин. При этом если рассматривать именно эти оценки, то представляется вполне логичным, что расстояние между пятеркой и единицей намного больше, чем расстояние между десяткой и пятеркой. Таким образом, если вы делаете заключения, основываясь на оценках, то вы всегда получите логарифмическую шкалу.

Пика убежден: понимание величин в терминах их примерных оценок — врожденное свойство нашего интуитивного восприятия. Действительно,

люди незнакомые с числами — например, индейцы и маленькие дети — просто не умеют воспринимать мир иначе. Напротив, восприятие величин в терминах точных значений — не врожденное свойство, а продукт культуры. По мнению Пика, ведущая роль, исходно отводимая приближениям и оценкам по сравнению с точными значениями, определяется тем, что оценки гораздо важнее для выживания в дикой природе, чем способность к точному счету. При неожиданной встрече с вооруженными копьями врагами требуется немедленно оценить — кого больше — своих или чужих. При взгляде на два дерева требуется сразу оценить, на каком из них больше плодов. Ни в том ни в другом случае нет необходимости в пересчете всех врагов или всех плодов по отдельности. Ключевой момент состоит в способности быстро оценить приближенное количество.

Логарифмическая шкала также хорошо отвечает нашему восприятию расстояния (и, возможно, поэтому оно выглядит столь противоречащим интуиции). Она учитывает законы перспективы. Например, если мы смотрим на дерево, находящееся на расстоянии 100 метров от нас, и на другое дерево, находящееся в 100 метрах позади первого, то второе 100 метров кажутся короче. Для мундуруку идея о том, что каждые 100 метров должны выглядеть как одно и то же расстояние, отражает их искаженное восприятие окружающего мира.

Итак, точные числа отвечают линейной шкале, противоречащей нашему интуитивному логарифмическому восприятию. В самом деле, наше совершенное владение точными числами означает, что логарифмическое восприятие в большинстве ситуаций оказывается подавленным. Но оно не исчезло вовсе. Мы существуем, сохраняя как линейное, так и логарифмическое восприятие величин. Например, чувство времени часто логарифмическое. Я помню, в детстве годы проходили медленно, а сейчас они просто летят. И наоборот — бывает, кажется, вчерашний день длился намного дольше, чем вся последняя неделя. Глубоко встроенный в нас логарифмический инстинкт проступает наружу наиболее явно, когда дело доходит до очень больших чисел. Например, всем понятно различие между единицей и десятью. Исключительно маловероятно, чтобы мы спутали пинту пива с десятью пинтами пива. А как насчет различия между миллиардом галлонов воды и десятью миллиардами галлонов воды? Несмотря на то что разница колоссальна, мы склонны воспринимать обе этих величины как довольно близкие — просто как очень большое количество воды. Подобным же образом словами «миллионер» и «миллиардер» бросаются почти как

синонимами, как если бы не было особой разницы между очень богатыми и очень-очень богатыми. Однако же миллиардер в тысячу раз богаче миллионера. Чем больше становятся числа, тем более близкими (тесно сидящими на шкале) они воспринимаются.

Тот факт, что Пика временно позабыл, как пользоваться числами, проведя всего лишь несколько месяцев в джунглях, говорит о том, что наше линейное восприятие чисел укоренилось в наших головах не столь глубоко, как логарифмическое. И вообще — наше восприятие чисел на удивление хрупко, и именно поэтому, не пользуясь им регулярно, мы теряем способность обращаться с точными числами и возвращаемся на базисный уровень интуитивного восприятия, когда количества понимаются приблизительно, то есть просто оцениваются.

Пика считает, что как его собственные исследования математического интуитивного восприятия, так и исследования других ученых могут иметь серьезные последствия для развития математического образования — будь то в Амазонии или в цивилизованном мире. Нам требуется понимание линейной числовой прямой для успешного функционирования в современном обществе, поскольку именно на этом основаны все измерения и это облегчает вычисления. Но в своей зависимости от линейности не зашли ли мы слишком далеко, подавляя врожденное логарифмическое восприятие? Вероятно, сказал Пика, в этом и состоит причина того, почему столь многим людям математика представляется трудной для понимания. Вероятно, следует уделять больше внимания оценкам величин, а не действиям с точными значениями. И тогда учить представителей племени мундуруку считать так же, как это делаем мы, возможно, и неправильно, поскольку кто знает, а вдруг это лишит их врожденного математического восприятия величин и знаний, необходимых для выживания в их мире?

*

Интерес к математическим возможностям тех, у кого нет слов или символов для чисел, традиционно концентрировался вокруг животных. Одним из самых известных объектов исследований была лошадь рысистой породы по кличке Умный Ханс. В начале 1900-х годов в одном берлинском дворе регулярно собирались толпы, чтобы взглянуть, как хозяин Ханса — вышедший на пенсию преподаватель математики Вильгельм фон Остен — задавал лошади простые арифметические примеры. Ханс отвечал, стуча копытом по земле правильное число раз. В его репертуаре были сложение и вычитание, а также дроби, квадратные корни и разложение на множители. Популярность Ханса наполовину с подозрением, что

демонстрируемые умственные способности лошади являются результатом какого-то фокуса, привели к тому, что в дело вмешалась комиссия из известных ученых. Они пришли к выводу, что — jawohl! — Ханс и вправду выполнял математические действия. Чтобы разоблачить этого лошадиного Эйнштейна, потребовалось вмешательство менее известного, но более скрупулезного психолога Оскара Пфюнгста. Ученый обратил внимание на то, что Ханс воспринимает мимику фон Остена. Ханс начинал стучать по земле копытом и останавливался, только когда замечал, что выражение лица хозяина изменилось, — это означало, что Ханс добрался до ответа. Ханс оказался восприимчив к самым тонким зрительным сигналам, таким как наклон головы, подъем бровей и даже расширение ноздрей. Фон Остен и сам не подозревал, что производит все эти знаки.

Урок, преподнесенный Умным Хансом, состоит в том, что при обучении животных счету следует самым тщательным образом позаботиться о том, чтобы исключить невольные подсказки и побуждения со стороны людей. В том, что касается математического образования Аи — шимпанзе, привезенной в Японию из Западной Африки в конце 1970-х годов, — вероятность подсказок со стороны людей была исключена, потому что обучение проходило с использованием компьютера с сенсорным экраном.

Аи сейчас 31 год, она живет в Институте исследования приматов в Инуяме — туристическом городке в Центральной Японии. У обезьяны высокий лысеющий лоб, на подбородке — седая щетина. Она смотрит глубоким взглядом темных глаз, присущим всем приматам среднего возраста. О ней говорят как об «ученице» и никогда как об «объекте исследования». Каждый день с Аи проводят занятия, во время которых ей дают задания. Аи приходит ровно в 9 утра, проведя ночь с другими шимпанзе в открытом вольере на напоминающей дерево гигантской конструкции из бревен, металлических труб и веревок. В тот день, когда я увидел Аи, она сидела, наклонившись к компьютеру, и тыкала пальцами в последовательности цифр, появлявшихся на экране. Когда она правильно выполнила задание, справа от нее из трубки выпал квадратный кусочек яблока размером около сантиметра. Аи схватила его и немедленно слопала. Отсутствующий взгляд, бестолковое постукивание по мигающему и гудящему компьютеру, рутинное поощрение, которое дозированно ей подбрасывалось, — Аи была похожа на пожилую леди, поглощенную игрой на игровом автомате.

Еще в детстве Аи стала самой великой, во всех смыслах этого слова, человекообразной обезьяной — первым нечеловеком, умеющим считать,

используя арабские числительные (то есть символы 1, 2, 3 и так далее, которыми пользуются почти во всех странах, за исключением, как ни парадоксально, части арабского мира.) Чтобы она хорошо с этим справлялась, директору Института исследования приматов Тецуру Мацузава потребовалось обучить ее двум элементам, которые и составляют человеческое восприятие числа: величине и порядку.

Числа выражают количество, но они же выражают и порядок. Эти две концепции связаны друг с другом, но не тождественны. Например, когда я говорю «пять картофелин», я имею в виду, что число картофелин в данной группе равно пяти. Математики называют этот аспект числа его «кардинальностью». С другой стороны, когда я считаю от 1 до 20, я пользуюсь тем удобным свойством, что числа можно расположить по порядку. Я не говорю о двадцати объектах, а просто озвучиваю последовательность. Математики называют этот аспект числа его «ординальностью». В школе нас учат понятиям кардинального числа и ординального числа вместе, и мы без труда перескакиваем от одного к другому. Для шимпанзе, однако, имеющаяся тут связь вовсе не очевидна.

Мацузава сначала внушил Аи, что один красный карандаш обозначается символом 1, а два красных карандаша — символом 2. Вслед за 1 и 2 Аи выучила число 3 и все остальные цифры до 9. Когда ей показывали, скажем, число 5, она знала, что нужно ткнуть в квадрат с пятью точками, а когда показывали квадрат с пятью точками, она знала, что надо показать на цифру 5. Процесс обучения стимулировался наградами: каждый раз, как она правильно выполняла задание компьютера, установленная рядом система выдавала ей что-нибудь вкусное.

Когда Аи овладела кардинальными числами от 1 до 9, Мацузава перешел к заданиям, которые могли бы внушить ей понимание упорядоченности этих чисел: на экране вспыхивали цифры, а от Аи требовалось тыкать в них в порядке их возрастания. Если на экране появлялись 4 и 2, ей надо было сначала дотронуться до 2, а затем до 4, только тогда ей доставался аккуратный кусочек яблока. Аи довольно быстро сообразила, что к чему. Приобретенные ею познания в области как кардинальных, так и ординальных чисел были таковы, что Мацузава теперь мог, и не без основания, утверждать, что его ученица научилась считать. Потрясающие успехи в математике превратили Аи в национальную героиню Японии и выдающуюся представительницу своего вида.

Далее Мацузава познакомил Аи с концепцией нуля. Кардинальность символа 0 она освоила легко. Всякий раз, когда на экране появлялся пустой квадрат, она тыкала в нужную цифру. Далее Мацузава пожелал узнать,

сможет ли она овладеть пониманием ординальности нуля. Ей показывали случайную последовательность экранов с двумя цифрами, в точности так же, как когда она осваивала ординальность чисел от 1 до 9, хотя на этот раз одна из цифр представляла собой 0. Где, по ее мнению, располагался ноль среди числового порядка?

Сначала Аи располагала 0 между 6 и 7. В следующий раз она переместила ноль ниже 6, затем ниже 5, затем ниже 4 и, наконец, через несколько сотен попыток, расположила его около 1. Однако она все время путалась, должен ли 0 быть больше или меньше, чем 1. Хотя Аи уже умела очень хорошо обращаться с числами, ей недоставало глубины человеческого понимания.

Тем не менее она приобрела весьма ценный навык — искусство показывать товар лицом. Сейчас она — настоящий профи, и самые лучшие результаты на своем компьютере демонстрирует в присутствии зрителей, особенно когда на нее нацелены телевизионные камеры.

*

Ученые активно занимаются исследованием того, как животные управляют с числами. Эксперименты выявили у столь непохожих между собой созданий, как саламандры, крысы и дельфины, неожиданную способность «различать количества». Пусть даже лошади пока не могут извлекать квадратные корни, однако ученые в настоящий момент полагают, что численные способности животных развиты намного сильнее, чем считалось ранее. Все существа, похоже, рождаются с мозгами, предрасположенными к математике.

Как-никак, умение ориентироваться в числах очень важно для выживания в дикой природе. Шимпанзе с меньшей вероятностью проголодается, если, взглянув на дерево, сумеет оценить, достаточно ли на нем спелых плодов на обед. Кэрин Маккоум из Университета Сассекса наблюдала за прайдом львов в Серенгети. Она хотела показать, что львы пользуются понятием числа, когда решают, нападать ли на других львов. Во время одного из экспериментов одинокая львица в сумерках возвращалась в прайд. Маккоум заранее спрятала в кустах звуковые динамики и в нужный момент включила запись рычания одного животного. Наша львица услышала это рычание, но продолжила свой путь домой. В другой раз в эксперименте участвовали пять львиц, а Маккоум воспроизвела через спрятанные динамики рычание трех львиц. Все пять львиц, услышав это рычание, стали смотреть в направлении источника звука. Одна львица зарычала, и вскоре все пятеро пошли на кусты в

наступление.

Таким образом, сделала вывод Маккоум, львицы умеют оценивать и сравнивать число соперниц. В ситуации «одна против одной» нападение сопряжено со слишком большим риском, но при наличии численного перевеса, в случае «пять к трем», можно и атаковать.

Не все исследования взаимоотношений животных с числами столь же эффективны, как эксперименты с львицами Серенгети или со знаменитой шимпанзе. В Университете Ульма в Германии ученые помещали муравьев, обитающих в пустыне Сахара, у одного конца туннеля и отправляли их на поиски пищи. Однако как только муравьи находили еду, у некоторых из них отрывали нижние части ножек, а другим их наращивали, приделывая «ходули» из свиной щетины. (На самом деле это не так уж жестоко, как может показаться, потому что ножки у пустынных муравьев регулярно снашиваются под солнцем Сахары.) Муравьи с укороченными ножками не доходят до дома, тогда как те, у кого их удлинили, проскакивают мимо. Напрашивается вывод: муравьи судят о пройденном расстоянии не визуально, а с помощью встроенного внутреннего «шагомера». Потрясающие способности муравьев к многочасовым прогулкам, после которых они всегда находят обратную дорогу к своему муравейнику, также могут иметь в своей основе сноровку в подсчете шагов.

*

Исследования числовых навыков у животных имели неожиданные следствия. Оказалось, математические возможности шимпанзе хоть и существуют, но явно ограничены, зато Мацузава обнаружил, что им присущи другие когнитивные способности, причем намного превосходящие наши, людские.

В 2000 году Аи родила сына, которого назвали Аюму. В тот день, когда я приехал в Институт исследования приматов, Аюму сидел на занятиях рядом с мамочкой. Он меньше ее ростом, у него более розовая кожа, а волосы на руках и на лице — чернее. Аюму сидел перед своим собственным компьютером, тыкая в экран, когда там возникали числа, и жадно поглощал кусочки яблока, когда ему удавалось их заработать. Аюму — вполне уверенный в себе юноша, своим образом жизни оправдывающий привилегированный статус сына доминантной самки в группе.

Аюму никто специально не обучал, как именно пользоваться дисплеями сенсорных экранов (тачскрин-дисплеями), хотя он с младенчества сопровождал свою мамочку на ежедневные занятия. Однажды Мацузава приоткрыл дверь в класс только наполовину, как раз настолько, чтобы

Аюму смог войти, но недостаточно для того, чтобы Аи последовала за ним. Аюму направился прямо к компьютерному монитору. Весь персонал сгорал от нетерпения, желая узнать, чему же он успел научиться. Для начала он ткнул в экран, и там появились цифры 1 и 2. То была простая задача на упорядочение. Аюму клинул на 2. Неправильно. Он продолжал нажимать на 2. Снова неправильно. Тогда он попробовал нажимать на 1 и 2 одновременно. Неправильно. В конце концов он сделал то, что требовалось: нажал на 1, а затем на 2, — кусочек яблока выпал ему на ладонь. Прошло немного времени, и Аюму стал выполнять все компьютерные задания лучше своей мамочки!

Пару лет назад Мацузава стал задавать ему задачи нового типа, тоже с числами. При нажатии на кнопку «Старт» на экране случайным образом высвечивались числа от 1 до 5. Через 0,65 секунды числа превращались в белые квадратики. Задание состояло в том, чтобы нажать на белые квадратики в правильном порядке — предварительно запомнив, на месте какого числа возник какой квадратик.

Аюму выполнял это задание правильно в 80 процентах случаев, что составляет примерно столько же, что и в контрольной группе японских детей. Тогда Мацузава уменьшил до 0,43 секунды время, в течение которого числа оставались видны на экране. Аюму не почувствовал серьезной разницы, в то время как показатели, продемонстрированные детьми, существенно упали — процент успешного выполнения стал равен примерно 60. Когда Мацузава уменьшил время, в течение которого числа оставались видимыми, до 0,21 секунды, Аюму по-прежнему показывал 80 процентов, дети же опустились до 40 процентов.

Этот эксперимент показал, что Аюму обладает необычайной фотографической памятью. Такая память есть и у других шимпанзе в Инуяме, но ни у одного из них она не развита так хорошо. В дальнейших экспериментах Мацузава увеличил количество цифр, и теперь Аюму запоминает расположение восьми цифр, которые видны лишь в продолжение 0,21 секунды. Кроме того, Мацузава уменьшил и интервал времени для запоминания — оказалось, Аюму способен запомнить расположение пяти цифр, видимых только в течение 0,09 секунды, чего человеческому глазу едва хватает, чтобы зафиксировать числа сами по себе, не говоря уж о том, чтобы их запомнить. Этот потрясающий талант к мгновенному запоминанию, скорее всего, связан с необходимостью принятия быстрых решений — например, о количестве врагов, — что жизненно важно в мире дикой природы.

*

Изучение пределов способностей животных к восприятию чисел естественным образом подводит нас к вопросу о наших врожденных способностях. Ученым, которые хотят исследовать мозг, не засоренный приобретенными знаниями (насколько это вообще возможно), требуются испытуемые возраста столь юного, сколь это возможно. Проверка врожденного математического восприятия у младенцев возрастом в несколько месяцев стала в наши дни обычным делом. Поскольку в этом возрасте дети еще не умеют не только говорить, но даже толком контролировать свое собственное тело, признаки математической одаренности определяют по глазам, точнее, по времени, в течение которого ребенок удерживает взгляд на каком-то объекте. Считается, что малыши будут дольше удерживать взгляд на картинке, которую сочтут интересной. В 1980 году Принтер Старки из Университета Пенсильвании показывал младенцам от 16 до 30 недель от роду экран с двумя точками, а затем другой экран, с двумя точками. Младенцы смотрели на второй экран в течение 1,9 секунды. Но когда Старки повторил опыт, показывая экран с тремя точками, младенцы смотрели на него в течение 2,5 секунды — почти на треть дольше. Старки сделал вывод, что, поскольку младенцы разглядывали картинку с тремя точками дольше, чем картинку с двумя точками, они заметили какие-то отличия, а следовательно, обладают рудиментарным представлением о числе. Подобный метод определения способности распознавания чисел на основании продолжительности отрезка времени, в течение которого взгляд фиксируется на картинке, сегодня стал стандартным. В 2000 году Элизабет Спелке из Гарварда показала, что шестимесячные дети могут заметить различие между 8 и 16 точками, а в 2005 году — что они способны различать 16 и 32 точки.

Похожие исследования продемонстрировали, что младенцы обладают и арифметическими навыками. В 1992 году Кэрин Винн из Университета Аризоны провела такой эксперимент. Она сажала пятимесячного младенца перед небольшим столиком. Взрослый клал на столик игрушечного Микки Мауса, а затем ставил экран, чтобы скрыть его. Потом взрослый клал перед экраном второго Микки Мауса, после чего экран убирали, так что становились видны обе игрушки. В другой раз Винн делала все то же самое, но только после того, как экран убирали, обнаруживалось неправильное число игрушек: или всего одна, или три. В случае, когда в конце на столике оказывались одна или три игрушки, ребенок рассматривал их дольше, чем когда их оказывалось две. Это означало, что

ребенок удивлен неправильным числом. Дети понимают, заключает Винн, что одна игрушка плюс еще одна игрушка равно двум игрушкам.

Эксперимент, аналогичный эксперименту с Микки Маусом, проводили с разными игрушками, например с Элмо и Эрни, персонажами «Улицы Сезам». Элмо сажали на столик. Опускался экран. Затем позади экрана клали второго Элмо или Эрни. Экран убирали. Иногда на столике оказывались два Элмо, иногда Элмо и Эрни, а иногда один только Элмо или один Эрни. Дети рассматривали игрушки дольше, когда оставалась только одна кукла, чем когда оставались две *неправильные* куклы. Другими словами, арифметическая невозможность равенства $1 + 1 = 1$ беспокоила их гораздо сильнее, чем превращение Элмо в Эрни. По-видимому, знания детей о законах математических гораздо глубже, чем знания о законах физических.

Швейцарский психолог Жан Пиаже (1896–1980) утверждал, что младенцы строят восприятие чисел медленно, через опыт, так что нет смысла обучать арифметике детей младше шести или семи лет. Эта точка зрения оказала влияние на поколения учителей, которые нередко предпочитали, чтобы дети на занятиях просто играли в кубики, чем знакомились с формальной математикой. Сейчас взгляды Пиаже считаются устаревшими. В наше время дети усваивают арабские цифры и учатся решать примеры уже в самых младших классах.

*

Эксперименты с точками играют ключевую роль и в исследованиях числовой когнитивности взрослых. В классическом опыте испытуемому показывают точки на экране и спрашивают, сколько он их видит. В случае одной, двух или трех точек ответ всегда следует практически немедленно. Когда же точек четыре, ответ занимает существенно больше времени, и еще больше — если точек пять.

И что же? — спросите вы. Возможно, этим скорее всего объясняется, почему в ряде культур числительные для 1, 2 и 3 содержат одну, две и три линии, тогда как число 4 *не* представляется четырьмя линиями. Когда имеется три или меньшее число линии, мы можем немедленно сказать, сколько их, но, когда их четыре, нашему мозгу задается слишком серьезная задача. Китайские иероглифы для чисел от 1 до 4 имеют вид

	—
,	==
,	===

и



. Древние индийские числительные выглядели как



,



,



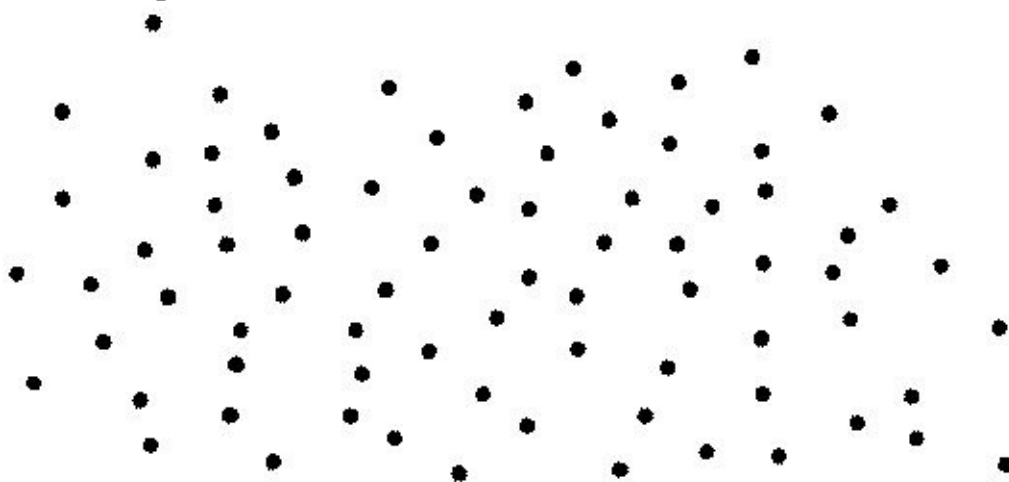
и



. (Если соединить здесь кое-какие линии, то будет видно, как они превращаются в современные 1, 2, 3 и 4.)

На самом деле не ясно, каково число линий, которые мы можем зафиксировать мгновенно, — три или четыре? У римлян в действительности были два возможных способа написания четверки — III и IV. Зрительно намного быстрее распознается IV, но на циферблатах часов — быть может, по эстетическим причинам — имеется тенденция использовать III. Без сомнения, число линий, точек или саблезубых тигров, которое мы можем распознать быстро, уверенно и точно, — не более четырех.

При том что у нас есть точное ощущение чисел 1, 2 и 3, за пределами числа 4 наши способности ослабевают и суждения о числах становятся *приблизительными*. Попробуйте, например, быстро определить, сколько точек здесь изображено:



Это невозможно. (Не считая того случая, когда вы — аутист с незаурядными умственными способностями, как персонаж Дастина Хоффмана в фильме «Человек дождя», который мог бы через долю

секунды сказать «семьдесят пять».) Все, что нам доступно, — это оценка, и она вполне может оказаться неточной.

Исследователи протестировали, насколько далеко простирается наше интуитивное восприятие чисел. Добровольцам показывали картинки с различным числом точек и спрашивали, на какой картинке точек больше. Оказалось, что умение распознавать точки подчиняется регулярным закономерностям. Например, легче выявить различие между группой из 80 точек и группой из 100 точек, чем между группами из 81 и 82 точек. Аналогичным образом, легче провести различие между группами из 20 и 40 точек, чем между группами из 80 и 100 точек. Кроме того, ученых на самом деле очень удивляет, сколь строго наши способности к сравнению следуют математическим законам, таким как принцип мультипликативности. В своей книге «Чувство числа» французский специалист по когнитивным наукам Станислас Деэн приводит пример человека, который может отличить группу из 10 точек от группы из 13 точек с 90-процентной точностью. Если же число точек в первой группе удвоить, так что их станет 20, то сколько точек надо включить во вторую группу, чтобы этот человек по-прежнему различал их с 90-процентной точностью? Ответ: 26, то есть в точности удвоенное значение исходного числа во второй группе.

Животные также обладают способностью сравнивать группы точек. Хотя результаты у них далеко не такие высокие, как у нас, их умениями управляют, по-видимому, те же математические законы. Это довольно нетривиальная вещь. Люди — единственные, кто обладает прекрасно развитой системой счета. Наша жизнь заполнена числами. И тем не менее, при всех наших математических талантах, когда дело доходит до восприятия и оценки больших чисел, наш мозг функционирует в точности как мозги наших пернатых и мохнатых друзей.

*

Интуитивные человеческие представления о величинах непрерывно развивались в течение миллионов лет, и в конце концов в жизни людей появились числа. Нет возможности в точности узнать, как это произошло, но разумно допустить, что числа возникли из желания отслеживать количество самых разных вещей, таких как луна, горы, хищники или удары в барабан. Сначала, по-видимому, использовались наглядные символы, к примеру пальцы или засечки на деревяшке, находящиеся во взаимно-однозначном соответствии с самими объектами, подлежащими отслеживанию, — две засечки или два пальца для двух мамонтов, три

засечки или три пальца — для трех и т. д. Позднее появились слова, выражавшие идеи «двух зарубок» или «трех пальцев». По мере вовлечения все новых и новых объектов, за количеством которых надо было следить, словарный запас расширялся и появлялись новые символы для чисел, так что в конце концов — если перескочить прямо к нашему времени — мы получили полностью развитую систему точных чисел и теперь можем ни в чем себе не отказывать, если хотим что-либо посчитать. Наши способности оперировать точными числами, например возможность подсчитать, что на приведенной выше картинке имеется в точности 75 точек, как нельзя более тесно связаны с более фундаментальной способностью воспринимать подобные величины приблизительно. Мы выбираем, какой стратегии придерживаться, в зависимости от обстоятельств: в супермаркете, например, пользуемся нашими знаниями о точных числах, когда смотрим на цену продуктов. Но, решая, в какую кассу самая короткая очередь, мы используем наше интуитивное, оценочное восприятие. Мы не пересчитываем всех людей в каждой очереди — просто смотрим на имеющиеся очереди и оцениваем, в какой из них меньше людей.

На самом деле приближенный подход к числам мы используем постоянно, даже когда употребляем «точную» терминологию. Спросите людей, сколько времени они добираются работы, и чаще всего в ответе будет указан «диапазон», например, «тридцать пять — сорок минут». Как-то я заметил, что часто не в состоянии ответить на вопрос о величине чего-либо, используя только одно число. «Сколько людей было на вечеринке?» — «Двадцать-тридцать». — «Сколько времени вы там провели?» — «Три с половиной — четыре часа». — «Сколько бокалов коктейля выпили?» — «Четыре-пять, а может, и десять». Раньше я полагал, что подобные ответы просто означают, что я колеблюсь, но теперь далеко не так в этом уверен и скорее склонен думать, что таким образом я обращаюсь к своему внутреннему представлению о числе: интуитивному, животному стремлению оперировать приближениями.

Коль скоро приближенное восприятие чисел существенно для выживания, можно было бы подумать, что все люди в этом отношении должны обладать примерно одинаковыми способностями. В 2008 году психологи из Университета Джонса Хопкинса и Института Кеннеди Кригера исследовали этот вопрос на группе 14-летних подростков. В течение 0,2 секунды им показывали на экране группы из желтых и синих точек, а затем спрашивали, каких точек было больше — синих или желтых. Результаты потрясли исследователей, поскольку продемонстрировали неожиданно широкий разброс.

Некоторым испытуемым было легко зафиксировать разницу между девятью синими точками и десятью желтыми, в то же время способности других не сильно отличались от способностей младенцев — они едва были в состоянии отметить, что пять желтых точек — это больше, чем три синих.

Еще более озадачивающие результаты обнаружились, когда успехи подростков по сравнительно чисел разноцветных точек сопоставили с их оценками по математике, полученными начиная с детского сада. До того исследователи полагали, что интуитивные способности различать количество предметов не оказывают значительного влияния на то, насколько успешно данный ученик выполняет задания по решению уравнений и построению треугольников. Однако в данном исследовании выяснилось наличие сильной корреляции между способностями к оценке количества точек и успехами в формальной математике. Чем лучше ученику дается приблизительное восприятие чисел, тем выше, как оказалось, его школьные результаты. Этот результат может иметь важные последствия для развития методов образования. Если склонность к оценочному восприятию напрямую связана с математическими способностями, то тогда занятия математикой должны в меньшей степени состоять из таблицы умножения, а в большей — из отработки навыков сравнения наборов точек.

*

Вскоре после того, как Станислас Деэн в 1997 году опубликовал свою книгу «Чувство числа», он встретился с Пьером Пика, который тогда как раз вернулся из поездки к мундуруку. Познакомившись, они решили сотрудничать. Деэн придумывал эксперименты, которые Пика смог бы осуществить в Амазонии. Цель одного из них был очень простой: узнать, что именно индейцы понимают под словами, с помощью которых они выражают числа. Снова отправившись в тропические леса, Пика там собрал группу добровольных испытуемых. Он показывал им точки на экране и просил сказать вслух, сколько точек они видят.

Числа у мундуруку таковы:

один	<i>пюг</i>
два	<i>ксеп ксеп</i>
три	<i>ебапюг</i>
четыре	<i>ебадипдип</i>
пять	<i>пюг погби</i>

Когда на экране появлялась одна точка, мундуруку говорили *пюг*.

Когда точек было две, они произносили *ксеп ксеп*. Но после двух они выражались уже не так определенно. Когда появлялись три точки, слово *ебапюг* сказали только около 80 процентов испытуемых. Слово *ебадипдип* было реакцией на четыре точки только в 70 процентах случаев. Когда же индейцам показывали пять точек, *пюг погби* произнесли только 28 процентов из них, а 15 процентов ответили *ебадипдип*. Таким образом, слова, используемые мундуруку для чисел начиная с трех, были на самом деле просто оценками. Они считают как «один», «два», «около трех», «около четырех», «около пяти». Пика начал задумываться, в самом ли деле слово *пюг погби*, буквально означающее «пригоршня», можно отнести к словам для обозначения чисел. Может быть, на самом деле мундуруку умели считать не до пяти, а только до «около четырех»?

Пика также заметил интересное лингвистическое свойство используемых мундуруку слов для обозначения чисел. Он обратил мое внимание, что в словах от одного до четырех число слогов в каждом слове равно самому числу. Это наблюдение привело его в немалое волнение. «Выглядит так, будто слоги — способ счета „на слух“», — сказал он. Подобно тому как римляне использовали для счета знаки I, II, III и IIII, но для пятерки переходили на V, мундуруку начинают с одного слога для единицы, добавляют еще один слог для двойки, еще один для тройки, еще один для четырех, но не используют пяти слогов для числа 5. Несмотря на то что слова для обозначения чисел 3 и 4 не всегда применяются точно, они содержат точное число слогов. Когда число слогов становится более не важным, слово уже может вовсе и не быть словом для обозначения числа. «Это потрясающе, поскольку, по-видимому, подтверждает мысль о том, что люди обладают интуитивной числовой системой, которая способна к отслеживанию только до четырех точных объектов одновременно», — говорит Пика.

Пика также изучал способности мундуруку к оценке больших чисел. В одном эксперименте испытуемым показывали компьютерную анимацию: на экране два набора точек ссыпались в банку. Потом индейцев просили

сказать, верно ли, что эти два набора точек — упавшие в банку и теперь невидимые, — взятые вместе, превосходят третий набор точек, который в следующий момент появлялся на экране. Таким способом Пика проверял, могли ли индейцы приблизительно выполнять сложение. Оказалось, что очень даже могли, причем ничуть не хуже, чем группа взрослых французов, выполнявших то же задание.

В другом эксперименте Пика показывал на экране компьютера анимацию, на которой сначала шесть точек падали в банку, а потом четыре точки вылетали из нее. Затем он просил мундуруку выбрать один из трех ответов на вопрос о том, сколько точек осталось в банке. Другими словами, нужно было ответить на вопрос, чему равно $6 - 4$. Тест был нацелен на то, чтобы узнать, понимают ли мундуруку числа, для которых у них нет слов. Индейцы не смогли выполнить это задание. Когда им показывали анимацию с вычитанием с участием шести, семи или восьми точек, решение задачи от них ускользало.

Результаты этих экспериментов с точками показали, что мундуруку довольно неплохо обращаются с приближенными количествами, но абсолютные профаны в том, что касается точных величин, превосходящих пять. Пика был совершенно зачарован обнаруженным таким образом сходством между мундуруку и представителями западной цивилизации: и у тех и у других имеется полнофункциональная точная система для операций с малыми числами и приближенная система для оценок больших чисел. Существенная же разница заключается в том, что мундуруку даже не пытались соединить эти две независимые системы друг с другом, чтобы охватить числа, лежащие дальше чем число 5. Пика заметил, что это, вероятно, связано с тем, что подобное раздельное существование двух систем оказалось полезней для жизни мундуруку. Он предположил, что в интересах культурного многообразия важно постараться сохранить используемый мундуруку способ счета, потому что его существованию, очевидно, угрожают контакты между индейцами и другими жителями Бразилии, которые год от года становятся все более и более интенсивными.

Тем не менее тот факт, что некоторые мундуруку освоили счет португальски, но при этом по-прежнему не могут справиться с простой арифметикой, говорит о том, насколько сильна их собственная математическая система и как хорошо она приспособлена к их потребностям. Отсюда также видно, насколько нетривиален тот концептуальный скачок, который необходимо сделать, чтобы начать должным образом воспринимать точные числа выше пяти.

*

Другое направление работы Станисласа Деэна — это исследование состояния, называемого дискалькулия, или «числовой дальтонизм», при котором нарушено восприятие чисел. По оценкам, оно может наблюдаться у 3–6 процентов населения. Подверженные дискалькулии не «ухватывают» числа так, как это делают большинство людей. Например, какое из этих двух чисел больше:

65 или 24?

Что ж тут сложного, скажете вы, конечно 65. Почти каждый из нас найдет правильный ответ менее чем за полсекунды. Но если у вас дискалькулия, то, чтобы ответить на этот вопрос, вам понадобится не менее трех секунд. Люди могут быть подвержены этому состоянию в разной степени, но те, кому все же поставлен диагноз «дискалькулия», как правило, часто испытывают сложности в установлении корреляций между символами для чисел (например, 5) и самими числами, представляемыми этими символами. Кроме того, им трудно считать. Дискалькулия не означает полную неспособность считать, но те, кто страдает ею, как правило, лишены фундаментальных интуитивных навыков в отношении чисел и вместо этого полагаются на альтернативные стратегии, позволяющие справляться с числами в быту, например чаще используя пальцы. В тяжелых случаях страдающие дискалькулией с трудом определяют время, глядя на часы.

Если вы отлично успевали в школе по всем предметам, кроме математики, вы вполне можете оказаться дискалькуликом. (Впрочем, если у вас с математикой всегда было плохо, то вряд ли вы возьметесь читать эту книгу.) Это состояние считается главной причиной неспособности к математическому мышлению. Понимание дискалькулии имеет актуальное социальное содержание, потому что люди, малоспособные к восприятию чисел, с гораздо большей вероятностью испытывают трудности при поиске работы или подвергаются различного рода дискриминации. Дискалькулия плохо изучена. Ее можно воспринимать как «числовой аналог» дислексии; оба этих состояния похожи тем, что затрагивают примерно одинаковый процент людей и, по-видимому, не влияют на уровень интеллекта в целом. Однако о дислексии известно гораздо больше, чем о дискалькулии. Имеются даже оценки, согласно которым научных статей по дислексии примерно в десять раз больше, чем статей по дискалькулии. Одна из причин того, почему исследования дискалькулии так сильно отстают,

заключается в том, что имеется также много других причин, из-за которых человек может оказаться не в ладах с математикой, — эту науку часто плохо преподают в школе, по математике легко отстать, если вы пропустили много занятий, на которых объясняются ключевые концепции. Помимо этого, в социальном плане скорее допустимо плохо управляться с числами, чем плохо уметь читать.

Невролог Брайен Баттеруорт из Университетского колледжа в Лондоне часто пишет рекомендации для людей, которых он проверил на дискалькулию, объясняя потенциальным работодателям, что плохие оценки по математике в школьном аттестате не являются результатом лени или отсутствия умственных способностей. Дискалькулики могут добиваться высоких достижений во всех других областях, кроме мира чисел. Возможно даже, говорит Баттеруорт, быть дискалькуликом и при этом добиваться успехов в математике. Имеется несколько областей математики, такие как логика и геометрия, где приоритет отдается дедуктивным рассуждениям или пространственному воображению, а не числам и уравнениям. В целом, однако, дискалькулики вообще плохо успевают по математике.

Значительная часть исследований по дискалькулии — бихевиористские. Например, компьютерное тестирование десятков тысяч школьников. Во время тестов они должны просто сказать, какое из двух предложенных чисел больше. Некоторые исследования — неврологические, в них сравниваются сделанные с помощью метода магнитного резонанса изображения мозга людей, страдающих и не страдающих дискалькулией, чтобы увидеть, как различаются протекающие в них токи. В когнитивных науках продвижение в понимании различных умственных способностей часто происходит как результат изучения случаев нарушения данной способности. Постепенно формируется более ясная картина того, что же представляет собой дискалькулия, и того, как работает мозг в процессе восприятия чисел.

Действительно, в последнее время в неврологии сделано немало новых важных открытий в области исследований числовой когнитивности. Например, появилась возможность увидеть, что происходит с отдельными нейронами в мозгу у обезьяны, когда она думает о точном числе точек.

Андреас Нидер из Университета Тюбингена, расположенного на юге Германии, научил макаков-резусов думать о числах. Он добился этого, показывая им на экране компьютера один набор точек, а затем, после интервала в одну секунду, — другой набор точек. Обезьянок обучили, что если во втором наборе будет столько же точек, сколько и в первом, и они

нажмут на рычаг, то получают награду в виде яблочного сока. Если же во втором наборе окажется другое число точек, а они все равно нажмут на рычаг, то яблочного сока не будет. Примерно через год обезьянки научились нажимать рычаг только в том случае, когда число точек в первом наборе совпадало с числом точек во втором. Нидер и его коллеги утверждают, что в течение той секунды, которая проходит перед появлением на экране компьютера второй картинке, обезьянки думают о числе точек, которые они увидели на первой картинке.

Далее Нидер решил, что теперь надо выяснить, что происходит у обезьянок в мозгу в то время, когда они держат эти числа у себя в голове. Для этого он, просверлив дырочку в обезьяньем черепе, внедрил в нервную ткань мозга электрод диаметром в два микрона. Этот электрод настолько мал, что никак не вредит мозгу и не вызывает болевых ощущений. (Внедрение электродов в человеческий мозг для исследований считается превышением этических норм, хотя и допустимо по медицинским показаниям, например при лечении эпилепсии.) Нидер располагал электрод в обезьяньем мозгу так, чтобы он находился напротив префронтальной коры, а затем начинал эксперимент с точками.

Электрод настолько чувствителен, что может улавливать электрический импульс в отдельных нейронах. Когда обезьянки «думают» о числах, Нидер видит, что определенные нейроны активизируются, — у обезьянок целые области в мозгу «зажигаются». Исследуя эту картину подробнее, он пришел к чрезвычайно интересному открытию. Чувствительные к числам нейроны реагируют с различной степенью интенсивности в зависимости от того, о каком числе обезьянка в данный момент думает. Причем у каждого нейрона есть «любимое» число — то, из-за которого данный нейрон становится максимально активным. Имеется, например, кластер из нескольких тысяч нейронов, которые «любят» число 1. Эти нейроны ярко сияют, когда обезьяна думает о единице, менее ярко — о двойке, еще менее ярко — о тройке и т. д. Имеется другая группа нейронов, которые предпочитают число 2. Эти нейроны сияют ярче всего, когда обезьяна думает о двойке; менее ярко, когда она думает о единице или тройке, и становятся совсем тусклыми, когда обезьяна думает о четверке. Другая группа нейронов полюбила число 3, а еще одна — число 4. Нидер проводил эксперименты вплоть до 30, и для каждого числа он нашел нейроны, которые предпочитают именно это число.

Результаты, полученные Нидером, позволяют объяснить, почему наша интуиция тяготеет к приближенному восприятию чисел. Когда обезьянка думает о числе 4, наиболее активны, конечно, нейроны, которые

предпочитают число 4. Но нейроны, которые предпочитают тройку, и нейроны, которые предпочитают пятерку, тоже активны, хотя и в меньшей степени. Это, по-видимому, связано с тем, что мозг обезьянки при этом одновременно думает и о числах, окружающих четверку. «Восприятие числа размыто шумом, — объясняет Нидер. — Обезьяны способны представлять себе кардинальности только приблизительным образом».

Можно быть почти уверенным, что то же самое происходит и в человеческом мозгу. Тут возникает интересный вопрос; если наш мозг способен представлять числа только на оценочном уровне, то как же мы вообще сумели их «изобрести»? «Восприятие чисел в точном смысле — это уникальное свойство человеческого мозга, которое, скорее всего, развилось из нашей способности точно выражать числа с помощью символов», — заключает Нидер. Таким образом, числа — артефакт, продукт человеческой культуры, а не что-то, данное нам от природы.

Глава 1

Культурный счет

Автор узнает о тирании десяти и о тех, кто замышляет ее ниспровержение, а затем посещает внеклассные занятия в Токио, где ученики осваивают вычисления, думая о бусинках.

В Средние века в Англии, в Линкольншире, «pimpr» плюс «dik» равнялось «bumfit». И в том не было ничего необычного. Эти слова просто обозначали числа пять, десять и пятнадцать на жаргоне, которым при счете овец пользовались пастухи. Полный набор этих числительных выглядел так:

1. Yan	11. Yan-a-dik
2. Tan	12. Tan-a-dik
3. Tethera	13. Tethera-dik
4. Pethera	14. Pethera-dik
5. Pimp	15. Bumfit
6. Setherera	16. Yan-a-bumfit
7. Letherera	17. Tan-a-bumfit
8. Hovera	18. Tethera-bumfit
9. Covera	19. Pethera-bumfit
10. Dik	20. Piggot

В наши дни мы считаем по-другому, — и дело не только в том, что тут все слова незнакомые. Линкольнширские пастухи организовывали числа в группы по двадцать, начиная счет со слова *yan* и заканчивая словом *piggot*. Если у пастуха было более двадцати овец — при условии, что он не заснет, занимаясь их пересчетом, — ему приходилось делать отметку о том, что он закончил один цикл, например положив камешек в карман или проведя линию на земле. После этого он опять начинал считать сначала: «Yan, tan, tethera». Если у него восемьдесят овец, то в кармане у него в конце концов

окажется четыре камушка или же на земле будут нарисованы четыре линии.

В современном мире мы, разумеется, группируем числа десятками, так что в нашей числовой системе десять цифр. Число, выражающее размер группы, используемой при счете, — которое к тому же часто совпадает с числом используемых символов, — называется основанием системы счисления, так что наша десятичная система имеет основание десять, а принятая у английских пастухов — двадцать.

Если при счете не пользоваться каким-либо разумным основанием, с числами вообще невозможно иметь дело. Представим себе, что у пастухов система счета с основанием единица. Это означает, что у них имеется только одно слово для чисел, *уап*, обозначающее единицу. «Два» тогда будет *уап уап*. «Три» — *уап уап уап*. Восемьдесят овец потребуют произнесения слова *уап* восемьдесят раз. Такая система достаточно бесполезна для счета чего бы то ни было, превосходящего числом тройку. С другой стороны, вообразим, что каждое число выражается отдельным новым словом, так что способность досчитать до восьмидесяти потребует запоминания восьмидесяти разных слов. Попробуйте-ка теперь досчитать до тысячи!

Многие сообщества людей, живущих в изоляции, до сих пор используют нестандартные основания. Представители племени араара, живущие в Амазонии, например, считают парами, выражая числа от одного до восьми таким образом: *анане, адак, адак анане, адак адак, адак адак анане, адак адак адак анане, адак адак адак адак*. Счет двойками — не слишком большое усовершенствование по сравнению со счетом единицами. Чтобы добраться до сотни, придется повторить *адак* пятьдесят раз подряд — спорить и торговаться на базаре окажется делом, занимающим немало времени. В Амазонии также встречаются системы счета с основаниями 3 и 4.

Число, являющееся основанием, должно быть достаточно большим, чтобы позволять проговаривать числа типа сотни, не сбиваясь с дыхания, но при этом не настолько большим, чтобы нам приходилось перенапрягать память. Наиболее распространенные в истории основания — это 5, 10 и 20, и нетрудно понять почему. Эти числа получены из человеческого тела. У нас пять пальцев на руке, так что пять — первое число, которое просится, чтобы на нем перевели дух при счете от одного и выше. Следующая естественная пауза происходит из-за наличия двух рук, или десяти пальцев, а вслед за тем — двадцати пальцах на руках и ногах. (Некоторые системы — составные. Например, Линкольнширский лексикон для счета овец

содержит основания 5 и 10, а также основание 20: первые десять чисел уникальны, а следующие десять сгруппированы в пятерки.) Роль, которую исторически сыграли пальцы, отражена в используемых словах, не в последнюю очередь — в наличии двух значений слова «digit»^[2]. Например, в России число «пять» соотносится со словом «пясть», обозначающим раскрытую ладонь. Аналогичным же образом, слово «пять» на санскрите — *панча* — связано с персидским *пенча*, что также обозначает руку.

С того самого момента, как люди начали считать, они пользовались пальцами для облегчения счета, и не будет преувеличением сказать, в большой степени научный прогресс обязан ловкости наших пальцев. До того как бумага и карандаш стали доступны всем и везде, числа нередко выражались на хитром языке, связанном со счетом на пальцах. В VIII столетии англосаксонский теолог, бенедиктинский монах Беда Достопочтенный предложил систему счета до миллиона, которая отчасти была основана на арифметике, а отчасти — на использовании быстрых движений пальцев и рук. Единицы и десятки представлялись там левыми пальцами, включая большой; сотни и тысячи — правыми. Более высокие порядки выражались движениями рук вдоль тела; дело дошло до не вполне подобающего священнику способа представить число 90 000: «левой рукой обхвати себя за чресла, большой палец направив в сторону гениталий», — писал Беда. Знак «миллион», от которого требовалось выражение свершенности и удовлетворения достигнутым, был гораздо более изысканным: руки сложены вместе, а пальцы переплетены.

*

Системы с основанием 10 (десятичные) были в ходу на Западе в течение тысячелетий. Впрочем, несмотря на их соответствие устройству нашего тела, многие задавались вопросом, самое ли это подходящее основание для счета. Говорили, что идти на поводу у нашего телесного устройства — не вполне удачное решение. Шведский король Карл XII отвергал основание 10 как придумку «неотесанных простолудинов», которые всюду лезут своими пальцами. В современной Скандинавии, считал он, требовалось основание, «доставляющее более удобств и преимуществ в использовании». Поэтому в 1716 году он приказал ученому Эмануэлю Сведенборгу разработать новую систему счета с основанием 64. Король остановил свой выбор на этом неординарном числе, потому что оно возникало из куба, как $4 \times 4 \times 4$. Карл, который сражался в Великой Северной войне — и проиграл ее, — считал, что требуемые в военном деле вычисления, подобно измерению объема ящика с порохом, должны

выполняться легче, если в основании системы будет лежать куб. Однако идея, которой он облагодетельствовал подданных, как писал Вольтер, «доказала единственно то, что он любил все необычное и сложное». Основание 64 требует для чисел 64 уникальных названия (и 64 символа), что делает счет довольно неудобным. Поэтому Сведенборг упростил систему до основания 8 и предложил новые обозначения, в которых 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 переименовывались в o, l, s, n, m, t, f, u. В этой системе, таким образом, $1 + 1 = x$, а $m \times m = so$. (Среди слов для новых чисел были поистине чудесные. Степени числа 8, которые предстояло записывать в виде lo, loo, looo, loooo и looooo, предлагалось произносить, или *йодлить* (на манер тирольского пения), как лу, ло, ли, ле, ла.) В 1718 году, однако, незадолго до того, как Сведенборг должен был завершить работу над своей системой, пуля оборвала жизнь короля, положив конец и его амбициозным начинаниям.

Однако идеи Карла XII были не лишены логики. На каком основании мы должны придерживаться десятичной системы лишь из-за того, что она возникла из числа пальцев у нас на руках и на ногах? Если бы люди были, например, кем-то вроде диснеевских персонажей всего с четырьмя пальцами на каждой руке, то почти наверняка мы бы жили в мире с основанием 8: ставили отметки исходя из высшего балла 8, составляли бы списки первых восьми победителей, а в гривеннике было бы восемь копеек. Математика нисколько не изменилась бы из-за введения альтернативного способа группировки чисел. Воинственный швед был прав, ставя вопрос о том, какое основание лучше всего подходит к нашим научным потребностям, и не полагаясь на систему, которая в максимальной степени соответствует нашей анатомии.

*

Как-то раз субботним утром в конце 1970-х годов в Чикаго Майкл де Флигер смотрел по телику мультфильмы. Начался очередной мультик. Сначала зазвучала музыка — диссонансное сочетание звуков расстроенного пианино, бренчания гитары и зловещего рева контрабаса. Действие происходило ночью, на небе ярко светила луна и сияли звезды. Вдруг появился странный гуманоид — во фраке в бело-синюю полоску, на голове — цилиндр. У гуманоида были светлые волосы и вытянутый нос, что до некоторой степени соответствовало моде той эпохи глэм-рока. И последний штрих в довершение отталкивающего образа — по шесть пальцев на руках и на ногах. «Это было что-то уродское, типа привидения, — вспоминает Майкл. — Мультик, называвшийся „Little

Twelvetoos“ („Маленькие Двенадцатипальчики“), оказался образовательным фильмом, посвященным счету с основанием 12. Подозреваю, что подавляющая часть американцев вообще не врубилась в то, что там происходило. Но мне это показалось очень даже крутым».

Сейчас Майклу 38 лет. Я встретился с ним в его офисе, который размещается в жилой части Сент-Луиса, штат Миссури. У него густые темные волосы с первыми признаками седины, круглое лицо, темные глаза и смугловатая кожа. Его мать — филиппинка, а отец — белый. Из-за принадлежности к смешанной расе все детство Майкл страдал от насмешек. Будучи умным и чувствительным ребенком с развитым воображением, он решил изобрести свой собственный язык, чтобы одноклассники не могли прочесть, что записано у него в тетрадях. Мультфильм «Little Twelvetoos» вдохновил его на то, чтобы сделать то же самое и с числами, — и для своего личного пользования он выбрал основание 12.

Основанию 12 соответствуют двенадцать цифр. Это цифры от 0 до 9 и еще две, обозначающие десять и одиннадцать. Стандартные обозначения для этих двух «трансдецимальных» цифр — X и Σ. Вот, значит, как выглядит счет до 12:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, Σ, 10.

Новые цифры получили новые имена, дабы избегать недоразумений: X называется дек, а Σ — эл. Снабдим еще цифру 10 именем дю, что есть сокращение от «дюжины», чтобы не путать ее с цифрой 10 по основанию 10. Двенадцатеричный счет от дю и далее ведется так: дю-один — это 11, дю-два — 12, дю-три — 13 и т. д. до дю-девять, что есть 19, дю-дек — 1X, дю эл — 1Σ и, наконец, два-дю — 20^[3].

Майкл придумал свой личный календарь, построенный на основании 12. Каждая дата в этом календаре представляла собой число дней, посчитанных по основанию 12 начиная со дня его рождения. Он до сих пор его использует, и после нашей встречи сказал мне, что я приехал к нему на 80Σ9-й день его жизни^[4].

Майкл принял основание 12 по причинам личной безопасности, но далеко не он один подпал под очарование этой системы. Многие серьезные мыслители аргументированно утверждали, что 12 — лучшее основание для числовой системы, потому что это число многостороннее, чем 10. На самом деле числовая система с основанием 12 — больше чем числовая система, это политико-математическое явление. Одним из самых первых ее пропагандистов был Джошуа Джордейн, который в 1687 году

самостоятельно опубликовал книгу «Duodecimal Arithmetick». По его утверждению, «нет ничего более естественного и неподдельного», чем счет дюжинами. В XIX столетии к числу высокопоставленных дуодецифилов относились англичане Айзек Питман, снискавший себе немалую славу изобретением широко распространенной системы скорописи, и выдающийся философ и социолог Викторианской эпохи Герберт Спенсер. Спенсер настаивал на необходимости реформы основания числовой системы ради «рабочих людей, людей скудного достатка и мелких лавочников, помогающих им в их нуждах». Американский изобретатель и инженер Джон В. Найстром также был фанатом двенадцатеричной системы. Он говорил об основании 12 как о «дуоденальном» — и похоже, это самое неудачное из двусмысленностей в истории науки (дуоденуме — двенадцатиперстная кишка).

Причина, по которой число 12 может считаться лучше числа 10, — это его свойства делимости. 12 делится на 2, 3, 4 и 6, тогда как 10 — только на 2 и 5. По мнению сторонников двенадцатеричной системы, в нашей повседневной жизни гораздо чаще приходится делить на 3 или 4, чем на 5. Возьмем, к примеру, хозяина магазинчика. Если у него имеется двенадцать яблок, то он может разделить их на две упаковки по шесть яблок, на три упаковки по четыре, на четыре по три или на шесть упаковок по два яблока каждая. Это гораздо практичнее, чем дележ десяти яблок, когда все имеющиеся возможности — это две упаковки по пять яблок или пять упаковок по два яблока. Само слово «grocer» — бакалейщик — на самом деле является свидетельством предпочтения, которое торговцы оказывали числу 12: оно произошло от слова «gross», означающего дюжину дюжин, то есть 144. Разнообразная делимость числа 12 также объясняет преимущество, которым обладают футы и дюймы по сравнению с метрами и сантиметрами: фут, в отличие от метра, можно легко и просто разделить на два, три и четыре — большое удобство, например для плотников и кройщиков.

Свойства делимости влияют также и на таблицу умножения. Самое простое для запоминания умножение в системе с любым основанием — это умножение на числа, на которые это основание делится. Вот почему при основании 10 таблицу умножения на 2 и 5 — где в результате могут получиться только четные числа и числа, оканчивающиеся на 5 или 0, — так легко запомнить. Подобным же образом при основании 12 простейшая часть таблицы умножения — это умножение на делители основания, то есть 2, 3, 4 и 6:

$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 1 = 4$	$6 \times 1 = 6$

$2 \times 2 = 4,$	$3 \times 2 = 6,$	$4 \times 2 = 8,$	$6 \times 2 = 10,$
$2 \times 3 = 6,$	$3 \times 3 = 9,$	$4 \times 3 = 10,$	$6 \times 3 = 16,$
$2 \times 4 = 8,$	$3 \times 4 = 10,$	$4 \times 4 = 14,$	$6 \times 4 = 20,$
$2 \times 5 = X,$	$3 \times 5 = 13,$	$4 \times 5 = 18,$	$6 \times 5 = 26,$
$2 \times 6 = 10,$	$3 \times 6 = 16,$	$4 \times 6 = 20,$	$6 \times 6 = 30,$
$2 \times 7 = 12,$	$3 \times 7 = 19,$	$4 \times 7 = 24,$	$6 \times 7 = 36,$
$2 \times 8 = 14,$	$3 \times 8 = 20,$	$4 \times 8 = 28,$	$6 \times 8 = 40,$
$2 \times 9 = 16,$	$3 \times 9 = 23,$	$4 \times 9 = 30,$	$6 \times 9 = 46,$
$2 \times X = 18,$	$3 \times X = 26,$	$4 \times X = 34,$	$6 \times X = 50,$
$2 \times 1\Xi = 1X,$	$3 \times \Xi = 29,$	$4 \times \Xi = 38,$	$6 \times \Xi = 56,$
$2 \times 10 = 20,$	$3 \times 10 = 30,$	$4 \times 10 = 40,$	$6 \times 10 = 60.$

Посмотрите на последние цифры в каждом столбце, и вы увидите замечательную закономерность. При умножении на 2 вы, конечно, получаете четные числа; при умножении на 3 — числа, оканчивающиеся на 3, 6, 9 и 0; при умножении на 4 — числа, оканчивающиеся на 4, 8 и 0, а при умножении на 6 — числа, оканчивающиеся на 6 или 0. Другими словами, при основании 12 мы получаем таблицу умножения на 2, 3, 4 и 6 «забесплатно». Поскольку многие дети испытывают сложности в запоминании таблицы умножения, переход к основанию 12 был бы гуманитарным актом величайшего масштаба. Так, по крайней мере, утверждают некоторые ученые.

Самым знаменитым призывом к борьбе за дюжину стала статья писателя Ф. Эмерсона Эндрюса, опубликованная в «Atlantic Monthly» в октябре 1934 года. Эта статья привела к созданию Американского дуодецимального общества (АДО). (Впоследствии название было изменено на Американское дюжинное общество). Эндрюс утверждал, что принятие десятичной системы означало «не имеющую оправдания недалёковидность, и ставил вопрос о том, будет ли отказ от нее сопряжен с „колоссальными потерями“». «Duodecimal Bulletin», который продолжает выходить по сей день, представляет собой отличное издание и единственное место за пределами медицинской литературы, где появляются статьи о гексадактильности — шести пальцах при рождении. (Она распространена более широко, чем можно было бы подумать: один из каждых 500 людей рождается по крайней мере с одним лишним пальцем на руках или ногах.) Юношеская страсть Майкла де Флигера к основанию 12

не увяла; в настоящий момент он является президентом АДО. Майкл столь привержен к этой системе, что использует ее в своей работе дизайнера цифровых архитектурных моделей.

Как мы уже отмечали, таблицу умножения с основанием 12 учить определенно легче. Но еще одно величайшее преимущество этого основания заключается в том, что оно облегчает действия с дробями. Когда вы собираетесь поделить одно число на другое, основание 10 зачастую проявляет изрядную строптивость. Например, одна треть от 10 равна 3,33..., где тройки продолжают до бесконечности. Четверть от 10 равна 2,5, где потребовался разряд после запятой. При основании же 12 треть от 10 — это 4, а четверть от 10 — это 3. Неплохо, правда? Будучи выражена в процентах, треть становится 40 процентами^[5], а четверть — 30 процентами. На самом деле, если посмотреть, как именно 100 делится на числа от 1 до 12, то станет ясно, что основание 12 приводит к более компактной системе:

<i>Доля от 100</i>	<i>Десятичн.</i>	<i>Дюжинн.</i>
Целое	100	100
Половина	50	60
Треть	33,333...	40
Четверть	25	30
Пятая	20	24;97...
Шестая	16,666...	20
Седьмая	14,285	18;6X35...
Восьмая	12,5	16
Девятая	11,111...	14
Десятая	10	12;497...
Одиннадцатая	9,09...	11;11...
Двенадцатая	8,333...	10

(точка с запятой означает «дюжинную запятую»)

Именно из-за этой возросшей точности основание 12 оказывается лучше приспособлено к тому, что требуется Майклу. Пусть даже его клиенты сообщают ему замеры в десятичной системе, он все равно предпочитает перевести их в дюжинную. «У меня появляется больше свободы, когда дело касается разбиения на несколько частей, — говорит он. — Когда не имеешь дела с путаными дробями, легче удостовериться,

что все ко всему подходит. Иногда, из-за сжатых сроков или внесенных в последний момент изменений, мне приходится быстро много чего поменять прямо на месте, — сделать такое, что не укладывается в первоначальную разметку. Вот тогда важно иметь предсказуемые простые отношения. Для дюжин у меня больше выбора, с ними проще, чем с десятками, и делается все быстрее». Более того, Майкл полагает, что использование основания 12 дает его бизнесу определенное преимущество, подобное тому, что получают велосипедисты и пловцы, полностью сбривая волосы на ногах.

Первейшая задача АДО состоит в том, чтобы числительные, выражающие дек и эл, присутствовали в стандарте кодирования «Unicode» — наборе текстовых символов, используемом большинством компьютеров. На самом деле в обществе ведутся серьезные дебаты о том, какие именно символы использовать. Принятые в АДО стандартные символы X и Z изобрел в 1940-х годах Уильям Эддисон Двиггинс — один из самых значительных дизайнеров типографских шрифтов в Соединенных Штатах, создавший шрифты Futura, Caledonia и Electra. Французский приверженец основания 12 Жан Эссиг предпочитает символы

L

и

z

. Некоторые, настроенные более практично, склонны использовать символы * и #, потому что они уже присутствуют среди 12 кнопок на панели телефона. Выбор слов для этих чисел — также дело вкуса. «Учебник по дюжинной системе» (написанный в 1960 — или, если считать по-дюжинному, в 1174 году) рекомендует термины дек, эл и дю (а еще гро для 100, мо для 1000 и дю-мо, гро-мо, би-мо и три-мо для следующих в порядке возрастания степеней числа дю). Другое предложение состоит в том, чтобы сохранить слова десять, одиннадцать и двенадцать, но далее продолжать счет как двен-один, двен-два. Вопрос о терминологии оказался столь чувствительным, что АДО благоразумно не спешит пропагандировать какую-либо одну систему.

Пристрастие Майкла к авангардным основаниям не ограничилось числом 12. Он побаловался немного с числом 8 — его он иногда использует, когда мастерит что-нибудь по дому. «Я использую основания как инструменты», — говорит он. Он экспериментирует и увеличивая основания — так он добрался до основания 60. Эта задача потребовала от него изобретения 50 новых символов в дополнение к тем 10 цифрам, что уже имеются. Здесь он не ставил перед собой задач практических. По его

словам, работа в системе с основанием 60 — это как подъем на высокую гору. «Я не в состоянии там жить. Слишком большая группировка получается. Внизу, в долине, числа группируются по десять, и там я могу дышать. Но при подъеме на гору мне открывается впечатляющий вид». Он составил таблицу делителей по основанию 60 — что называется еще шестидесятеричной системой — и зачарованный глядел на открывающиеся там закономерности. «Определенно там скрывается красота», — сказал он мне.

Хотя использование основания 60 может показаться плодом нездорового воображения, шестидесятеричная система имеет солидную историческую родословную. Это и в самом деле самая древняя из известных нам основных систем счисления.

*

Простейшие обозначения для чисел — это насечки или зарубки. В различных формах они использовались по всему миру. Инки вели счет, завязывая узелки на веревке, а обитатели пещер наносили метки на скальные стены. С момента изобретения деревянной мебели столбики кровати размечаются — по крайней мере, метафорически — насечками. Полагают, что самый древний из открытых «математических артефактов» — найденная в пещере в Свазиленде счетная палочка, сделанная из берцовой кости бабуина, ее возраст насчитывает 35 000 лет. На этой палочке, называемой «костью из Лебомбо», нацарапаны 29 линий, вероятно обозначающих лунный цикл.

Как мы видели в предыдущей главе, люди способны очень быстро заметить различие между одним предметом и двумя, между двумя и тремя, но после четырех это становится трудней. То же касается и насечек. Во всякой системе организации насечек, которая претендует на удобство в использовании, насечки требуется группировать. В Соединенных Штатах принято сначала ставить четыре вертикальные линии, а затем пятой перечеркивать их по диагонали — получаются так называемые «five-bar gate» — «ворота из пяти перекладин». В Южной Америке предпочитают другой стиль, когда первые четыре линии образуют квадрат, а пятая представляет собой диагональ в этом квадрате. Японцы, китайцы и корейцы используют более изощренный метод, собирая черточка за черточкой иероглиф

正

, означающий «правильно» или «верно». (Когда вы в следующий раз

будете в суши-баре, попросите официанта показать, как он считает выбранные вами тарелочки.)

Около 8000 года до н. э. наши предки начали использовать небольшие кусочки глины с нанесенными на них отметками для оценки количества различных предметов. Таким способом записывалось, например, число продаваемых или покупаемых овец. Различные кусочки глины соответствовали различным объектам или различному количеству объектов. В результате стало возможным пересчитывать овец без необходимого участия их самих, что значительно упростило торговлю. Этот момент и знаменует рождение того, что мы теперь понимаем под числами.

В четвертом тысячелетии до н. э. в Шумере, древнем государстве, находившемся на территории современного Ирака, эта система символов превратилась в систему записи — на незатвердевшей глине заостренной палочкой из тростника делались специальные отметки. Числа сначала записывались как кружки или овалы, подобные форме ногтей. Около 2700 года до н. э. у палочки для письма появился плоский край, и отметки стали выглядеть примерно как следы, оставленные птичьими лапками, причем отметки различной формы соответствовали различным числам. Возникшее таким образом письмо, названное клинописью, ознаменовало начало долгой истории западных систем письма. И тут просто напрашивается занятая мысль: а ведь вся письменность (и литература), в конце концов, оказалась побочным продуктом развития системы численных обозначений!

В клинописи имелись символы только для чисел 1, 10, 60 и 3600, а это означает, что система представляла собой смесь систем с основанием 60 и с основанием 10, ведь основные клинописные символы соответствуют числам 1, 10, 60 и 60×60 . Почему шумеры группировали числа в шестидесятки? Сегодня это одна из величайших неразгаданных тайн в истории арифметики. Высказывались предположения, что такая система явилась результатом слияния двух более ранних систем — с основаниями 5 и 12, — хотя никаких твердых свидетельств тому найдено не было.

Вавилоняне, совершившие колоссальный вклад в развитие математики и астрономии, приняли шумерскую шестидесятеричную систему. Вслед за ними египтяне, а потом и греки положили вавилонскую систему в основу измерения времени — именно по этой причине и поныне в минуте 60 секунд, а в часе 60 минут. Мы настолько привыкли выражать время по основанию 60, что никогда не задаемся вопросом, почему так делаем, хотя в действительности объяснить это нелегко. В революционной Франции, впрочем, нашлись такие, которые страстно возжелали устранить все то, что

не укладывалось в десятичную систему. В 1793 году, когда Национальный Конвент учредил метрическую систему мер и весов, была также сделана попытка перейти на метрическое время. Был подписан декрет, устанавливающий, что каждый день следует делить на десять часов, каждый час — на 100 минут, а каждую минуту — на 100 секунд^[6]. Как несложно посчитать, в сутках тем самым оказалось 100 000 секунд — вместо обычных 86 400 (что есть $60 \times 60 \times 24$). Революционная секунда при этом имела продолжительность несколько меньшую, чем обычная. В 1794 году десятичное время стало обязательным, и тогда же стали выпускать часы с циферблатом, на котором были указаны цифры от одного до десяти. Однако большинство населения нашло новую систему сбивающей с толка, и спустя лишь немногим более полугода от нее пришлось отказаться. Помимо просто непривычности революционного времени сыграл свою роль и тот факт, что час из 100 минут не так удобен, как час из 60 минут, потому что у 100 не так много делителей, как у 60. Число 100 делится на 2, 4, 5, 10, 20, 25 и 50, а 60 — на 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 и 30.

Провалился и другой проект по децимализации времени, имевший место в более близкую к нам эпоху. В 1998 году швейцарская компания «Swatch» предложила «Swatch Internet Time», где сутки были разделены на 1000 частей, названных «битами» (продолжительностью 1 минута 26,4 секунды). Компания выпустила специальные часы, выразившие «революционный взгляд на время». Они продавались около года, после чего стыдливо исчезли из магазинов и каталогов.

По правде говоря, французы и швейцарцы — не единственные из западных наций, кто еще не так давно пытался использовать для счета довольно нелепые процедуры. Счетные палочки с насечками, морально устаревшие уже в те времена, когда первый шумерский писец создал свою первую клинописную табличку, использовались в Великобритании как средство денежного обращения вплоть до 1826 года. Банк Англии^[7] выпускал «откалиброванные» счетные палочки (так называемые «бирки»), денежная стоимость которых определялась на основании нанесенных на них насечек. Документ, составленный в 1186 году лордом-казначеем епископом Ричардом Фицнилом, устанавливал следующие денежные эквиваленты для бирок:

Фунты стерлингов	
£ 1000	ширина ладони
£ 100	ширина большого пальца

£ 20	ширина мизинца
£ 1	ширина разбухшего ячменного зерна

Процедура, которую применяло Казначейство, на самом деле состояла в том, что палочку разламывали на две части, называемые stock («ствол») и foil («остаток»). На каждой половине оставались насечки, которые соответствовали сумме сделки или долга. «Ствол» оставался заемщику, а «остаток», который служил долговой распиской, — должнику. Если кто-то одалживал деньги Банку Англии, то ему давали «ствол» с насечками, обозначавшими количество данных в долг денег, — чем и объясняется происхождение терминов «stockholder» (владелец акций) и «stockbroker» (биржевой маклер), — банк же оставлял у себя «остаток», на котором также имелись соответствующие насечки. Два куса бирки складывались, чтобы проверить сумму долга.

Подобная практика сошла на нет без малого два столетия назад. В 1834 году Казначейство решило сжечь старые, уже никому не нужные деревянные бирки в печи под Вестминстерским дворцом — тем самым, где размещается британский парламент. Однако огонь вышел из-под контроля. Чарльз Диккенс писал: «От печи, в которую загрузили слишком много этих нелепых палок, огонь перекинулся на деревянную обшивку; от обшивки — на здание палаты общин; в результате оба правительственных здания сгорели дотла». Различные финансовые махинации нередко оказывают влияние на работу правительств, но только деревянные бирки разрушили парламент до основания. Когда дворец отстроили заново, там воздвигли новую башню с часами — Биг-Бен, — быстро ставшую главной достопримечательностью Лондона.

*

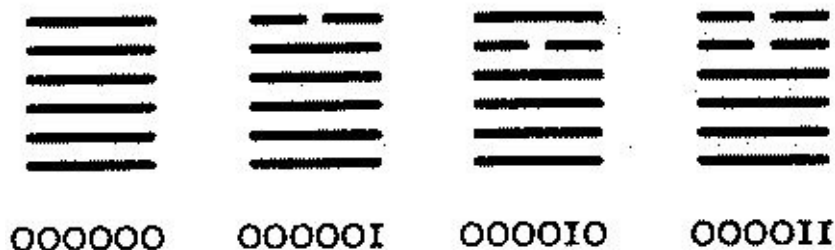
Самое известное из альтернативных оснований — это 2, а соответствующая система счисления называется двоичной; числа в ней обычно выражаются с помощью цифр 0 и 1. Числа в двоичной системе записываются так, как если бы в системе с основанием 10 можно было использовать только цифры 0 и 1. Это последовательность, которая начинается как 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000. Таким образом, 10 — это два, 100 — четыре, 1000 — восемь и так далее, где каждый следующий нуль справа выражает собой результат умножения на два. (И в системе с основанием 10 то же самое — добавление нуля в число справа дает результат умножения этого числа на 10.)

В число своих поклонников двоичная система может с гордостью

записать величайшего математика из всех, когда-либо увлекавшихся нестандартными основаниями. Это — Готфрид Лейбниц, один из величайших мыслителей конца XVII столетия — ученый, философ и государственный деятель. Среди множества его занятий было и исполнение обязанностей библиотекаря при дворе герцога Брауншвейгского в Ганновере. Лейбниц настолько вдохновился системой счета с основанием 2, что однажды даже написал письмо герцогу, побуждая его отлить серебряный медальон со словами *imago creationis* — «в образе мира» — как дань уважения двоичной системе. Для Лейбница двоичная система имела и практическую, и духовную значимость. Во-первых, он полагал, что ее возможности в описании любого числа в терминах удвоений упрощают все виды операций. «Она позволяет лаборанту взвешивать все виды масс, используя лишь несколько весов, а при отливке монеты может обеспечить большую ценность при меньшем числе», — писал он в 1703 году. Лейбниц признавал, что у двоичной системы имеются некоторые недостатки, так, числа при записи получаются намного длиннее (например, десятичная 1000 в двоичной системе записывается как 1 111 101 000), однако он добавлял: «Зато она играет более фундаментальную роль для наук и приносит новые открытия». Изучение симметрий и закономерностей в двоичных обозначениях, утверждал он, позволяет глубоко проникнуть в суть математики, а теория чисел благодаря этому становится богаче и разностороннее.

Но особенно восхищало Лейбница поразительное согласие между двоичной системой и его религиозными воззрениями. Он верил, что в основании всех явлений лежит «бытие» (или субстанции) и «небытие» (или «ничто»). Эта двойственность идеально выражалась числами 1 и 0. Подобно тому как Бог создал все бытие из пустоты, все числа можно записать в терминах единиц и нулей. К немалой радости Лейбница, его убежденность в том, что в двоичной системе выражена фундаментальная метафизическая истина, получила подтверждение, когда позднее он познакомился с древним китайским мистическим текстом «И Цзин» — «Книгой Перемен». С помощью этой книги можно заглянуть в будущее. В ней содержится 64 различных символа, каждый из которых сопровождается набором афоризмов. Гадающий случайным образом выбирает какой-то символ (традиционно — бросая веточки тысячелистника) и интерпретирует соответствующие комментарии — получается нечто вроде того, что можно прочесть в астрологическом прогнозе. Каждый символ в «Книге Перемен» представляет собой гексаграмму, то есть составлен из шести горизонтальных линий. Эти линии

могут быть целыми (им соответствует ян) или иметь разрывы (им соответствует инь). Все 64 гексаграммы в «Книге Перемен» представляют собой полный набор комбинаций, составленных из инь и ян, сгруппированных по шесть.



Особенно изящный способ упорядочить все гексаграммы показан на рисунке. Если каждый янь записывается как 0, а каждый инь — как 1, то выписанная последовательность в точности соответствует двоичным числам от 0 до 63.

Это упорядочение известно также как последовательность Фу Си^[8]. (Строго говоря, это упорядочение, обратное последовательности Фу Си, но математически они эквивалентны.) Лейбниц обнаружил двоичную природу последовательности Фу Си и, в соответствии с этим, «высоко оценил глубину „Книги Перемен“». Поскольку он считал, что двоичная система отражает Божественный промысел, сделанное им открытие, что она лежит также в основе даоистской мудрости, означало, что восточный мистицизм не противоречит западным религиозным воззрениям. «Субстанция древней теологии китайцев сохранена без потерь и, будучи избавлена от дополнительных ошибок, может быть поставлена на службу великим истинам христианской религии», — писал он.

Как тут было не восхититься двоичной системой! Однако в те времена восторженное ее принятие выглядело в научных кругах довольно эксцентрично. И тут Лейбниц, полагая, что эта система имеет значение фундаментальной важности, проявил поразительный дар предвидения. Он и сам не мог тогда вообразить, насколько прав в своих утверждениях относительно основания 2. Цифровой век целиком основан на двоичной системе, поскольку компьютерные технологии на самом базисном уровне оперируют на языке, составленном из нулей и единиц. «Увы! — писал математик Тобиас Данциг. — То, что некогда превозносилось как памятник монотеизму, в конце концов превратилось в потроха робота».

*

«Свобода — это свобода сказать, что два плюс два равно четырем», —

утверждал Уинстон Смит, главный герой романа Джорджа Оруэлла «1984». Оруэлл имел в виду не только свободу слова в Советском Союзе, но и математику. Два плюс два — всегда четыре. Никто не может утверждать, что это не так. Математические истины не подвержены влиянию культуры и идеологии.

С другой стороны, наш подход к математике в весьма значительной степени подвержен влиянию культуры. Выбор основания десять, например, был сделан не по математическим причинам, а по физиологическим, отражающим число пальцев на руках и ногах. Языки также порой выражают математическое знание довольно занятным образом.

Почти во всех западноевропейских языках слова, выражающие числа, не подчиняются какому-то одному, постоянному правилу. Так, в английском языке существуют «двадцать один» (twenty one), «двадцать два» (twenty-two), «двадцать три» (twenty three), но при этом англоязычные люди не говорят «десять один», «десять два», «десять три» — вместо этого есть «одиннадцать», «двенадцать», «тринадцать». «Одиннадцать» («eleven») и «двенадцать» («twelve») — единственные в своем роде, и, хотя «тринадцать» (thirteen) представляет собой комбинацию трех и десяти, та часть, которая относится к тройке, идет перед десяткой — в противоположность слову «двадцать три», в котором часть, относящаяся к тройке, идет после части, выражающей двадцать. Между десятью и двадцатью в английском языке полный разброд.

В отличие от этого в китайском, японском и корейском языках слова, выражающие числа, следуют четкому закону. Одиннадцать записывается как «десять один», двенадцать — как «десять два» и так далее: «десять три», «десять четыре» — до «десять девять», что есть 19. Двадцать — это «два десять», а двадцать один — «два десять один». Во всех случаях числа произносятся точно так же, как они пишутся. Ну и что? А то, например, что это как-никак важно для детей. Эксперименты постоянно показывают, что азиатским ребятишкам легче научиться считать, чем европейским. В одном исследовании, которое проводилось с китайскими и американскими детьми четырех-пяти лет, и те и другие испытуемые показывали одинаковые результаты при обучении счету в пределах 12, но при обучении большим числам китайцы опередили американцев почти на год. Четкая, регулярная система упрощает также понимание арифметики. Выполняя простое сложение, типа 25 плюс 32, мы оказываемся на шаг ближе к ответу (который равен «пять десять семь»), если мы выражаем наш пример как «два десять пять» плюс «три десять два».

В немецком языке беспорядка еще больше, чем в английском. По-

немецки 21 есть «einundzwanzig», или «один-и-двадцать», 22 — «zweiundzwanzig», или «два-и-двадцать»; и таким образом дело продолжается аж до 99 — количество единиц предшествует количеству десятков. Отсюда следует, что, когда немец произносит число, превышающее 100, цифры произносятся вовсе не по порядку: 345 — это «dreihundertfünfundvierzig», или «три-сто-пять-и-сорок», где все цифры порядком перемешаны по сравнению с записью 3-5-4. В Германии проявляют немалое беспокойство по поводу того, что из-за этого обращение с числами выглядит более запутанным, чем оно есть на самом деле — беспокойство настолько серьезное, что было основано общественное движение «Zwanzigeins» («Двадцать одно»), цель которого состоит в продвижении более регулярной системы.

Но не только из-за беспорядочного расположения слов, обозначающих числа, и не только из-за отсутствия регулярности при образовании числительных от 11 до 19 те, кто говорит на основных западноевропейских языках, оказываются в менее выгодном положении по сравнению с теми, кто говорит на азиатских. Нам мешает и то, сколько времени занимает само произнесение слова-числительного. В книге «Чувство числа» Станислас Деэн приводит список — 4, 8, 5, 3, 9, 7, 6 — и просит запомнить его за 2 секунды. У англоязычных читателей вероятность правильного запоминания семи чисел равна 50 процентам. Однако люди, говорящие на мандаринском варианте китайского языка, в состоянии без особого труда запомнить девять чисел. Деэн полагает, что количество цифр, которое мы способны удержать в голове в любой данный момент времени, определяется тем, сколько слов мы можем произнести за две секунды. Все китайские слова для обозначения чисел от одного до девяти содержат по одному краткому слогу: «ви», «ер», «сан», «си», «ву», «лю», «ки», «ба», «джу». Каждое из них можно выговорить менее чем за четверть секунды, так что в течение двухсекундного интервала говорящий по-китайски может запросто отарабанить все девять штук. Произнесение же каждого из чисел по-английски требует почти треть секунды (из-за «seven», где два слога, и длинного слога в «three»), так что предел, которого англоязычный человек может достичь за две секунды, — всего семь чисел. Рекорд, впрочем, принадлежит говорящим на кантонском диалекте китайского языка, на котором, в частности, говорят в Гонконге, — тут числительные еще короче. Гонконгцы в состоянии запомнить десять цифр за две секунды.

В то время как западные языки как будто бы противодействуют всякой попытке упростить понимание математики, в Японии язык, наоборот, зачислен в ее союзники. Слова и фразы изменяются, например, для того,

чтобы облегчить запоминание таблицы умножения (которая называется «куку»). Традиция таблицы умножения восходит к Древнему Китаю, откуда она проникла в Японию примерно в XVIII столетии. «Ку» по-японски «девять», и принятое название отражает тот факт, что раньше таблица умножения начиналась с конца — с умножения $9 \times 9 = 81$. Около 400 лет назад произошли изменения, в результате которых «куку» теперь начинается с «один один есть один».

В «куку» написаны просто следующие слова:

Один один есть один

Один два есть два

Один три есть три

...

Это продолжается до «Один девять есть девять», а затем появление двоек начинается так:

Два один есть два

Два два есть четыре

И т. д. до «Девять девять есть восемьдесят один».

Пока все довольно похоже на обычную таблицу умножения. Однако когда в «куку» имеется два способа произнесения слова, выбирается тот, при котором слова лучше «ложатся». Например, словом для числа 1 может быть «ин» или «ичи», и «куку» начинается не с «ин *ин*» или же «ичи ичи» — японцы используют более звучную в произнесении комбинацию «ин ичи». Слово для числа восемь — «ха». Восемью восемь должно бы быть «ха ха». Однако строка в «куку» для 8×8 — это «хаппа», потому что такое слово легче скатывается с языка. В результате «куку» представляет собой нечто почти зарифмованное, наподобие стихов для детей. В начальной школе в Токио я наблюдал, как семи-и восьмилетние ученики учат «куку». Меня поразило, насколько звучание таблицы умножения было похоже на рэп — синкопированные фразы произносились с выражением. Происходящее было решительно не похоже на то, как сам я, по моим воспоминаниям, проговаривал таблицу умножения — с периодичностью пыхтящего паровоза, который тащит поезд в гору. Макико Кондо, учительница тех токийских детишек, сказала, что учит их проговаривать «куку» в быстром музыкальном ритме — так разучивать таблицу умножения гораздо веселее. «Сначала мы добиваемся, чтобы дети просто выучили ее наизусть, и только потом, некоторое время спустя, до них доходит истинный смысл произносимого». Таким образом, поэзия «куку»

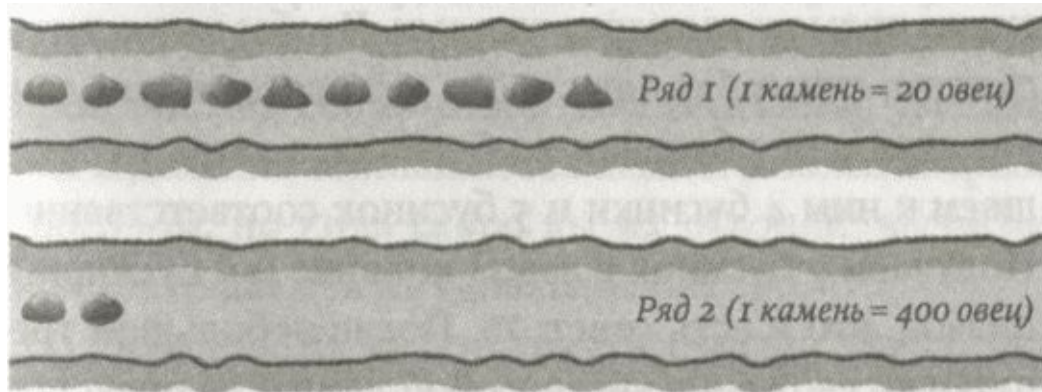
внедряет таблицу умножения прямо в мозги японцев. Взрослые японцы говорили мне, что они знают, например, что «семью семь есть сорок девять», не потому, что помнят арифметику, а потому, что фраза «семью семь сорок девять» хорошо звучит.

Неправильные словоформы для обозначения чисел в западных языках, возможно, не слишком облегчают жизнь тем, кто начинает свое знакомство с арифметикой, зато они исключительно интересны для историков математики. По-французски число 80 выражается как «*quatre-vingts*», или «четыре двадцатки», что указывает на систему с основанием двадцать, которой, возможно, некогда пользовались предки современных французов. Высказывалось также предположение, что причина, по которой слова, обозначающие «девять» и «новый», весьма схожи во многих индоевропейских языках, включая французский («*neuf*» и «*neuf*»), испанский («*nieve*» и «*nievo*»), немецкий («*neur*» и «*neu*») и норвежский («*ni*» и «*ny*»), — это наследие давно позабытой системы счета с основанием 8, в которой девятый предмет шел первым в новом наборе из восьми. (Если не использовать большие пальцы, то на обеих руках остается восемь пальцев, что, возможно, и послужило развитию системы с основанием 8. Или, быть может, она возникла из пересчета промежутков *между* пальцами.) Слова-числительные также напоминают нам, насколько недалеко мы ушли от племен Амазонии и Австралии, вообще не знающих чисел: по-английски «*thrice*» может означать как «три раза», так и «много раз»; по-французски «*trois*» — это «три», а «*frès*» — «очень»; все это — напоминания о той далекой поре, когда наши предки тоже считали «один, два, много».

*

Итак, определенные аспекты числа — такие, как основание, способ составления числительных и используемые словоформы — различны в разных культурах. Однако ранние цивилизации проявляли удивительное единодушие в отношении механических средств для счета и вычислений. Общий метод, который они применяли, называется «позиционным». Он основан на принципе, согласно которому различные положения используются для представления чисел различных порядков. Рассмотрим, что это означало, например, для пастухов в средневековом Линкольншире. Как уже говорилось, у них было 20 чисел, от «*yan*» до «*piggot*». Как только пастух доходил в счете овец до 20, он откладывал камушек и начинал снова считать от «*yan*» до «*piggot*». Если имелось 400 овец, у него должно было набраться 20 камушков, потому что $20 \times 20 = 400$. Представим себе

теперь, что у пастуха тысяча овец. Если он пересчитает их всех, у него наберется 50 камушков, потому что $20 \times 50 = 1000$. Однако перед ним встает проблема: у него нет способа их сосчитать, ведь его счет ограничен числом 20!



$$\text{Всего овец} = (10 \times 20) + (2 \times 400) = 1000$$

Однако выход есть: нужно нарисовать на земле параллельные бороздки, как показано на рисунке. Когда пастух насчитает 20 овец, он положит камень в первую бороздку. Когда он насчитает следующие 20, положит еще один камень в первую бороздку. Первая бороздка будет постепенно заполняться камнями. Но когда настанет момент класть туда двадцатый камень, вместо этого он положит один-единственный камень во вторую бороздку, а из первой уберет все камни. Другими словами, один камень во второй борозде означает 20 камней в первой — в точности так же, как один камень в первой означает 20 овец. Тогда камень во втором ряду будет означать 400 овец. Пастух, у которого тысяча овец, при использовании этой процедуры получит два камня во втором ряду и десять в первом. Используя подобную позиционную систему счисления — когда разные борозды придают различные значения положенным в них камням, — он потратил только 12 камней, чтобы досчитать до 1000 овец, а не 50 камней, которые потребовались бы без этого изобретения.

Позиционные системы счета использовались по всему миру. Вместо камней в бороздках инки передвигали бобы или зерна маиса на специальных лотках. Североамериканские индейцы передвигали бусины или ракушки на разноцветных нитках. Греки и римляне использовали фишки из костей, слоновой кости или металла, лежащие на столах с размеченными колонками. В Индии использовали отметки на песке.

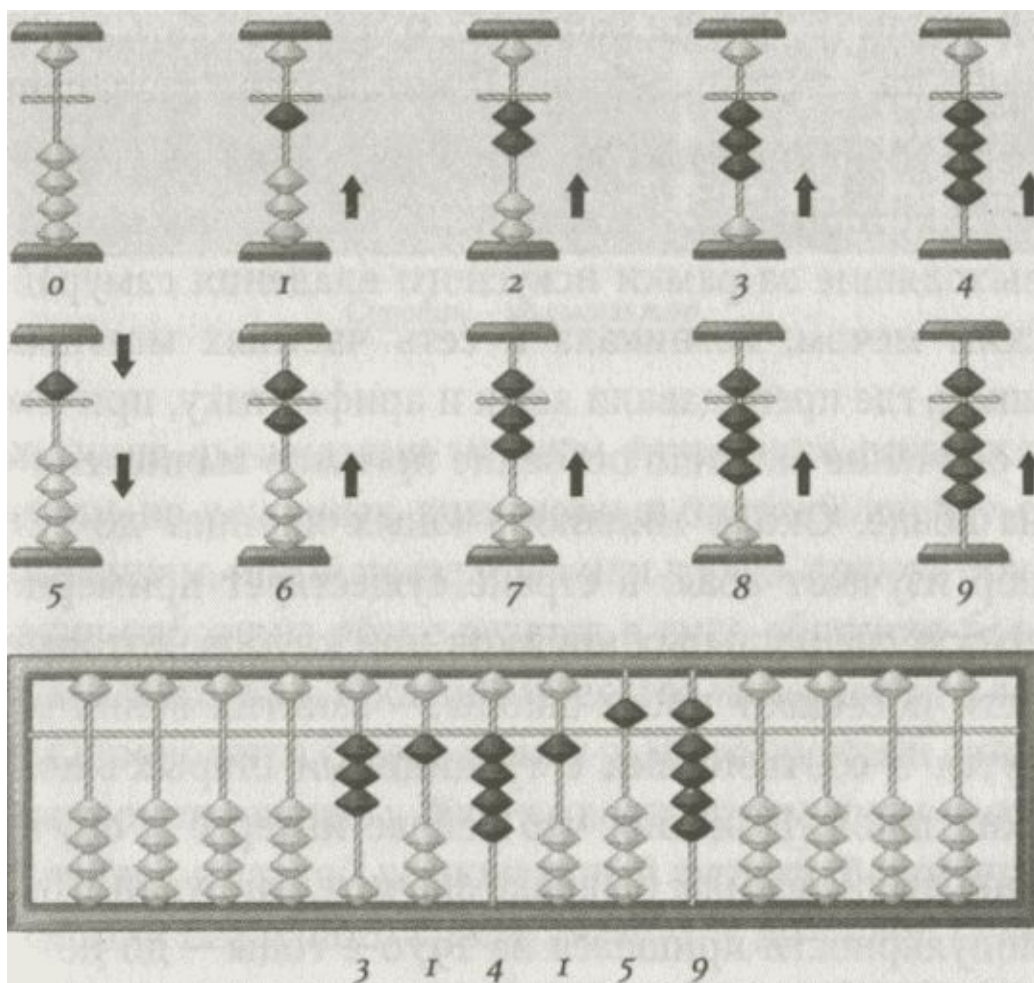
Кроме того, римляне изобрели абак, представлявший собой механическую реализацию «позиционного» принципа: в абаке бусинки

передвигали по прорезям. Этот переносной вариант счетной системы распространился по всему цивилизованному миру, хотя детали и варьировались от страны к стране. В России на счетах имеется десять костяшек на каждом стержне. В китайском «суаньпане» их семь, а в японском «соробане» — самом компактном из всех — пять.

*

Для представления однозначного числа на соробане используется один стержень. Для представления двузначного числа — два соседних стержня, трехзначные числа требуют уже трех стержней и т. д. Каждая цифра из числа всегда представляется на отдельном стержне, причем на всех стержнях имеется десять различных положений — они соответствуют числам от 0 до 9.

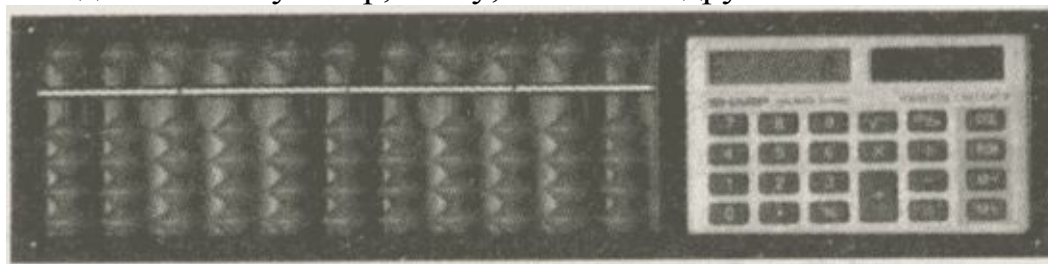
Абак был изобретен как способ простого счета, но по-настоящему сила этого инструмента проявилась, как только его стали использовать в качестве средства для вычислений. Арифметика значительно упростилась, когда в дело оказались вовлечены передвигаемые по стержням бусинки. Например, чтобы вычислить сумму «3 плюс 1», мы начинаем с того, что передвигаем 3 бусинки, затем передвигаем одну бусинку — и ответ готов — 4 бусинки прямо у вас перед глазами. Чтобы вычислить, скажем, сумму «31 плюс 45», в двух соседних колонках сдвигаем 3 бусинки и 1 бусинку, а затем перемещаем к ним 4 бусинки и 5 бусинок соответственно. Получаем 7 бусинок в левой колонке и 6 бусинок в правой, это и есть ответ: 76. После небольшой тренировки сложение чисел любой длины не представляет никакой трудности, нужно только иметь достаточно колонок, в которых эти числа могли бы разместиться. Если на какой-либо колонке сложение двух чисел дает в результате число больше десяти, надо передвинуть бусинки в соседней слева колонке. Например, 9 плюс 2 дает 1 бусинку в левой колонке и 1 бусинку в исходной колонке, что и представляет собой ответ: 11. Вычитание, умножение и деление выполняются немного более хитрым способом, но коль скоро вы их освоили, вычисления совершаются на удивление быстро.



Числа на соробане

По-японски «читать, писать, считать» звучит как «йоми, каки, соробан», что означает «чтение, письмо, абак». Эта фраза родилась в Японии где-то между XVII и XIX веками, когда страна была практически полностью изолирована от остального мира. По мере возникновения нового класса, класса торговцев, которым потребовались умения, несколько выходящие за рамки искусного владения самурайским мечом, возникала и сеть частных местных школ, где преподавали язык и арифметику, причем в обучение входило освоение приемов вычислений на абаке. Около миллиона юных японцев до сих пор изучают абак: в стране существует примерно 20 000 специальных кружков или клубов, которые дети посещают после школы, — занятия в них ведутся в соответствии с традициями старых японских школ. Понятно, что сейчас интерес к обучению вычислениям на абаке значительно упал. Пик популярности

пришелся на 1970-е годы — до появления электронного калькулятора, — когда каждый год 3,2 миллиона учащихся даже сдавали государственный экзамен по владению соробаном. В переходный период между эрами ручных и электронных вычислений в Японии можно было купить изделие, сочетающее в себе и калькулятор, и абак. Сложение, как правило, выполняется быстрее на абаке — ответ появляется немедленно, как только вы ввели заданные числа. Что же касается умножения, то тут небольшим преимуществом в скорости обладает электронный калькулятор. (А кроме того, абак позволял скептически настроенным абакистам проверить ответ, который выдавал калькулятор, — ну, если они вдруг начинали сомневаться



в нем.)

Соробан — калькулятор

Владение абаксом в Японии по-прежнему считается чрезвычайно важным для подрастающего поколения; вычисления на этом устройстве остаются одним из основных внеклассных занятий наряду с плаванием, игрой на скрипке или дзюдо, причем обучение работе на абаксе ведется в духе обучения боевым искусствам. Уровни мастерства измеряются в данах, проводятся соревнования разного уровня и даже чемпионаты страны. Как-то воскресным днем я отправился на такой региональный турнир. В нем участвовали без малого триста детей от 5 до 12 лет. Они сидели за партами в конференц-зале, вооруженные целым набором «соробанных» аксессуаров типа модных футляров для них. Перед первой партой стоял диктор. С интонацией нетерпеливого муэдзина он оглашал числа, которые предстояло складывать, вычитать или умножать. Соревнование шло на выбывание и продолжалось несколько часов. Когда пришло время вручать победителям награды — каждая из которых включала крылатую фигуру, в поднятых руках держащую абак, — из динамиков зазвучала музыка в исполнении военного духового оркестра.

*

После нескольких лет обучения работе на абаксе вы настолько хорошо

усваиваете расположение бусинок, что можете выполнять вычисления, просто мысленно представляя его себе. Эта процедура, называемая «анзан», выглядит довольно занятно — несмотря на то, что и смотреть-то, вообще говоря, не на что! Я наблюдал, как это происходит, в клубе любителей абака в Токио. Преподаватель Юдзи Миямото читал числа, обращаясь к замершей и погруженной в полную тишину аудитории, после чего в течение нескольких секунд ученики поднимали руки, показывая, что ответ готов. Один ученик по имени Наоки Фуруяма сказал мне, что он может мысленно представить себе абак с восемью столбцами. Другими словами, его воображаемый абак позволяет изображать все числа от 0 до 99 999 999.

Клуб любителей абака, которым руководит Миямото, — один из самых известных в стране: его ученики получают немало данов за разнообразные достижения во время чемпионатов страны, однако специализируются в этом клубе именно на анзане. Несколько лет назад Миямото решил придумать такой тип арифметических задач, которые решаются только на анзане. Например, когда вы задаете ученикам какой-то пример, ответ можно получить различными способами: используя калькулятор, карандаш и бумагу, или же абак, или анзан. Миямото хотел продемонстрировать, что имеются ситуации, когда анзан представляет собой единственный возможный метод.

В результате Миямото придумал компьютерную игру «Мелькающий анзан», которую он мне и показал в действии. Он велел классу приготовиться, нажал кнопку «Play», и ученики уставились на монитор, закрепленный на стене комнаты. Машина издала трехкратный «бип», предупреждая, что сейчас все начнется, а затем на экране стали по одному появляться следующие 15 чисел:

164, 597, 320, 872, 913, 450, 568, 370, 619, 482, 749, 123, 310, 809, 561.

Каждое число возникало только на 0,2 секунды, так что вся процедура уложилась в три секунды. Задача состояла в том, чтобы определить сумму всех чисел. Они мелькали так быстро, что я едва их уловил. И тем не менее вскоре после того, как промелькнуло последнее, улыбающийся Наоки Фуруяма выдал ответ: сумма чисел равна 7907.

Задачу для «Мелькающего анзана» невозможно решить с помощью калькулятора или абака, потому что нет времени даже на то, чтобы запомнить числа, промелькнувшие перед вами, не говоря уже о том, чтобы набрать их на клавиатуре или передвинуть руками бусинки. Анзан *не требует* запоминания чисел. Все, что нужно, — это лишь мысленно передвигать бусинки каждый раз, как на экране возникает новое число.

Увидев число 164, вы немедленно представляете себе абак, на котором выставлено 164. Когда вы видите число 597, ваш внутренний абак перестраивается в соответствии с получающейся суммой, которая равна 761. Выполнив 14 сложений, вы не в состоянии вспомнить ни промелькнувшие числа, ни промежуточные суммы, но воображаемый абак у вас в голове тем не менее показывает ответ: 7907.

«Мелькающий анзан» немедленно завоевал популярность по всей стране, а компания «Nintendo» даже выпустила игру «Мелькающий анзан» для своей DS-консоли. Миямото показал мне отрывки из телевизионной игры «Мелькающий анзан», в которой подростки — виртуозы анзана сражались под восторженные крики болельщиков. Миямото считает, что эта игра способствовала привлечению большого числа учеников в абак-клубы по всей Японии. «Люди и не подозревали, на что они, оказывается, способны при хорошем владении соробаном, — говорит он. — Зато теперь, когда эти передачи стали показывать по телевидению, они это осознали».

Результаты сканирования мозга показывают, что участки, активируемые при работе на абаке или при занятиях анзаном, отличны от тех участков, которые активируются при обычных арифметических вычислениях или при использовании языка. Традиционная арифметика в стиле «карандаш и бумага» зависит от нейронных сетей, связанных с обработкой лингвистической информации. Соробан же активирует сети, связанные с информацией, визуализируемой в пространстве. Миямото упрощенно выражает это так: «Соробан использует правое полушарие, а обычная математика использует левое». Чтобы понять, какие преимущества дает подобное разделение полушарий или как оно связано с сообразительностью, умением фокусировать внимание на задаче и другими навыками, необходимо провести еще немало научных исследований. И тем не менее в этом разделении, возможно, — ключ к пониманию потрясающего феномена: мастера соробана проявляют невероятные способности к многозадачности.

Миямото познакомился со своей женой — бывшей чемпионкой страны по соробану, — когда оба они, будучи подростками, проводили много времени в одном из клубов любителей абака. Их дочь Рикако — соробанный вундеркинд. Ну еще бы ей не стать им! В возрасте восьми лет Рикако получила самый старший дан — уровень, которого достигает всего один человек из 100 000. Сейчас Рикако девять лет. Я застал ее в классе. Она была одета в нежно-голубую кофточку, ее челка доходила до самых очков. Всем своим видом она выражала полную боевую готовность и сосредоточенно поджимала губы.

«Ширитори» — японская игра в слова: кто-то один говорит «ширитори», а каждый следующий играющий произносит слово, начинающееся с последнего слога предыдущего^[9]. Например, вторым словом может быть «ринго» (яблоко), потому что оно начинается со слога «ри». Миямото попросил Рикако и сидящую рядом с ней девочку поиграть друг с другом в ширитори, не отрываясь при этом от «Мелькающего анзана», где за 20 секунд должны были появиться 30 трехзначных чисел. Машина издала предупреждающие бипы, а девочки завели диалог:

Ринго

Горира (горилла) *Раппа* (труба)

Панда (панда)

Дачоу (страус)

Уши (корова)

Шика (олень)

Карасу (ворона) *Судзуме* (воробей) *Медака* (карп)

Каме (черепаха) *Медама яки* (глазунья)

По прошествии двадцати секунд Рикако сказала: 17 602. Она сложила 30 чисел, одновременно играя в ширитори!

Глава 2

Зри!

Автор, едва не сменив имя по велению адепта легендарного античного мыслителя, вместо этого последовал рекомендациям другого греческого ученого, сдул пыль со своего циркуля и сложил две визитные карточки в тетраэдр.

Обсуждение дня моего рождения не кажется мне каким-то особо удачным способом завязать разговор. Но это, быть может, происходит оттого, что я недостаточно общался с людьми, подобными Джерому Картеру, — только я сел обедать с ним и его женой Памелой у них дома в Скоттдейле, штат Аризона, как вопрос сразу и возник: 22 ноября.

— Уууууууууууууу! — только и сказала Памела. Ей 57 лет, раньше она работала стюардессой. На Памеле джинсовая юбка и симпатичная розовая кофточка.

Джером поглядел на меня. Серьезным тоном он подтвердил то, что она выразила столь эмоционально:

— У вас очень хорошее число.

53-летний Джером совсем не похож на мистика средней руки. Крепкий, мускулистый, в оранжевой гавайской рубашке и белых шортах, в прошлом он был чемпионом по карате и работал телохранителем в международном агентстве.

— Что же хорошего в дате 22/11, — спросил я?

— Вот смотрите, 22 — это мастер-число. Как и 11. Их всего четыре таких: 11, 22, 33 и 44.

У Джерома на редкость музыкальный голос, словно позаимствованный наполовину от спортивного комментатора, а наполовину — от исполнителя вокала в рэпе.

— Вы родились 22-го, — продолжил он. — Не случайно наш первый президент родился 22-го. Два и два равно чему? Четырем. Мы выбираем наших президентов когда? Каждые четыре года. Мы платим налоги в четвертый месяц. Всё в Соединенных Штатах основано на четверке.

Буквально всё. Наш первый военный флот состоял из 13 кораблей, один и три равно четырем. У нас было 13 колоний, один и три равно четырем. На провозглашении Декларации независимости было 13 певчих. Опять четыре. Где все происходило? По адресу Локус-стрит, 1300. Снова четыре!

Число 4 управляет деньгами. Вы родились под этим числом. Это очень мощное число. Число четыре — это квадрат, так что к нему относятся закон, ведомства, правительство, организация, журналистика, устройство.

Его уже было трудно остановить.

— Поэтому я и сказал О. Дж., что его обязательно отпустят^[10]. Я посмотрел, кто у него адвокаты. Все его адвокаты родились под числом четыре. Джонни Кокрэн родился 22-го, 2 и 2 равно 4. Ф. Ли Бейли родился 13-го, 1 и 3 равно 4. Барри Шек родился 4-го. Роберт Шапиро родился 31-го, 3 и 1 равно 4. У него не было адвоката, не родившегося под числом 4! А вердикт присяжных был оглашен когда? В четыре пополудни. Смекаете? Тут бы и Гитлера выпустили! Как сказал Майк Тайсон, когда я прикинул для него расклад чисел, — если все числа за тебя, то даже твои ошибки оборачиваются тебе на пользу.

Джером — профессиональный нумеролог. Он верит, что числа выражают свойства, а не просто величины. По его словам, он обладает даром, который позволяет глубоко понимать людей и даже предсказывать будущее. Актеры, музыканты, спортсмены и корпорации неплохо платят за его консультации.

— Большинство нумерологов и экстрасенсов бедны, — говорит он. — Что в общем неправильно.

У самого-то Джерома великолепный дом в роскошном кондоминиуме, а в гараже — три мотоцикла по 25 000 долларов за штуку.

Дни рождения — очевидный источник чисел для определения личностных качеств. Ту же роль играет и наше имя, потому что слова можно разбить на буквы и присвоить каждому числовое значение.

— Пафф Дадди должен был отправиться в тюрьму, — сказал он. — Пафф Дадди кое-кого обидел. Я сменил его имя на П. Дидди. Потом, когда он захотел уладить дело, я сменил ему имя на просто Дидди. Я ему эти имена предложил, и он меня послушался. Джей-Зет хотел жениться на Бейонсе. Я ему сказал, пусть снова возьмет свое старое имя. Он опять стал Шоном Картером.

Я спросил у Джерома, будут ли у него какие-нибудь рекомендации для меня.

— Полное имя у вас какое? — спросил он.

— Александр Беллос, но все зовут меня Алекс.

— Чё за фигня? — Он выдержал театральную паузу.

— А что, Александр лучше? — спросил я.

Он явно был на подъеме.

— Ну, скажем, одного из величайших людей, когда-либо ходивших по земле, звали *не* Алекс Великий. Слушайте сюда. Мне приходилось беседовать с людьми, которых звали Алекс. Если по-простому: первая буква имени очень важна. «А» означает 1. Из вашего Алекса (Alex) вы это и получаете. Но Александр (Alexander) оканчивается на «г», а «г» — это 9. Так что первая и последняя буквы вашего имени — 1 и 9. Альфа и омега. Начало и конец. А теперь посмотрим, что у нас с первой и последней буквами в имени Alex. Просто звук «кс». — Он произносил «кккссс», скорчившись так, как будто его сейчас стошнит. — И вы намерены такое использовать? Я бы не стал. Я бы никогда не взял имя Алекс (Alex). Бог сказал, что доброе имя дороже золота! Он, правда, не сказал, что уменьшительное имя тоже следует выбирать!

— Алекс — не уменьшительное имя, — запротестовал я. — Это сокращение.

— Чего зря спорить, Александр? — Джером попросил мой блокнотик и набросал такую таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	D	E	F	G	H	I
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
S	T	U	V	W	X	Y	Z	

Эта таблица, объяснил он, показывает, какие числа отвечают каким буквам. Он ткнул в первый столбец:

— Буквы, которые равны 1, — это A, J, S. Аллах, Jehovah (Иегова), Jesus (Иисус), Savior (Спаситель), Salvation (Искупление). 2 — это число дипломатов, послов. 2 дает хорошие советы, вы хороший игрок в команде, и тут буквы B, K и T, вот почему стоит только пойти в «Burger King», как все по-вашему выходит. Число 3 управляет радио, телевидением, эстрадой и нумерологией. Буквы C, L, U. Разумеется, непосвященные пусть идут на радио и телевидение. — Он хитро мне подмигнул. — Но если вы изучили нумерологию, вам откроются главные секреты. Число 4: D, M, и V. Сколько колес у автомобиля? Где вы получили права? В «Department of Motor Vehicles» (Департаменте транспортных средств). Число 5 — посередине между 1 и 10: буквы E, N и W. 5 — это число перемен. Если вы переставите буквы, то получите слово «new» — новый. 6 — это число

Венеры, любви, семьи, сообщества. Когда вы видите красивую женщину, что вы видите? — FOX (лисицу). 7 — число духовное. Иисус родился 25-го, а 2 и 5 есть 7. Число 8 отвечает за бизнес, финансы, торговлю, деньги. Где вы держите деньги? В Headquarters (Главном офисе). 9 — единственное число, которому отвечают всего две буквы, 1 и R. Не приходилось беседовать с кем-нибудь с Ямайки? Все ништяк, чувак^[11].

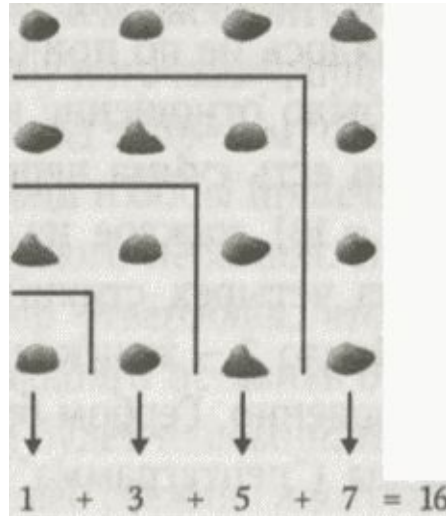
Закончив, он опустил ручку, подождал секунду и посмотрел мне прямо в глаза.

— Таков, — в заключение сказал он, — метод Джерома Картера в приложении к Пифагоровой системе.

*

Пифагор — самое знаменитое имя в математике, и всё благодаря его теореме о треугольниках. (О ней мы подробнее поговорим ниже.) Однако ему принадлежат и другие достижения, например открытие «квадратных чисел». Представим себе, что, как это часто делали наши предки, мы ведем счет с помощью гальки. (Латинское слово, обозначающее гальку, — *calculus* — и его производные стали во многих языках обозначать «вычисление» или «исчисление»^[12].) Если складывать галечные камушки в квадрат, так чтобы они располагались на равном расстоянии друг от друга по столбцам и строкам, то в квадрате из двух строк и двух столбцов будет четыре камушка, а в квадрате из трех строк и столбцов — девять. Другими словами, умножение числа n само на себя дает число камушков в квадрате из n строк и столбцов. Именно из-за наглядности этой картины и привился термин «квадрат» для обозначения умножения числа само на себя.

Пифагор заметил некоторые интересные закономерности в своих квадратах. Он заметил, что в квадрате два на два число камушков — равное четырем — представляет собой сумму единицы и тройки, а число камушков в квадрате размера три на три — девять — есть сумма чисел 1, 3 и 5. В квадрате размером четыре на четыре их шестнадцать — что есть $1 + 3 + 5 + 7$. Другими словами, квадрат числа n есть сумма первых n нечетных чисел. Это можно усмотреть, если строить галечный квадрат следующим образом:



Пифагора зачаровывали численные закономерности, которые он находил в природе, и он верил, что тайны Вселенной доступны для понимания только через математику. При этом великий грек не относился к ней просто как к средству для описания природы, а воспринимал числа как суть мира и предписывал своим последователям почитать числа. Дело в том, что Пифагор был не только ученым. Он был харизматичным главой мистической секты — Пифагорейского братства, цель которого состояла в философском и математическом созерцании. Это братство представляло собой нечто среднее между санаторием, лагерем для новобранцев и коммуной хиппи. От учеников требовалось выполнение строгих правил, например, никогда не мочиться против солнца, не жениться на женщине, носящей золотые украшения, и никогда не проходить мимо лежащего на улице осла. То была группа избранных — желающих вступить в братство требовалось пройти через пять подготовительных периодов, каждый длиною в год, в течение которых им позволялось смотреть на Пифагора только из-за занавеси.

В спиритуальном Пифагоровом космосе число 10 обожествлялось не по причинам, имеющим какое бы то ни было отношение к числу пальцев, а потому, что оно есть сумма первых четырех чисел ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$), каждое из которых символизирует одну из четырех стихий: огонь, воздух, воду и землю^[13]. Число 2 — женское, 3 — мужское, а 5 — их союз — священо. Гербом братства была пятиконечная звезда («пентаграмма»). Хотя мысль о культе чисел может показаться несколько странной, она, вероятно, отражает степень изумления перед открытием первых элементов абстрактного математического знания. Воодушевление и азарт, сопутствующие выявлению закономерностей и порядка в природе, — при том, что до того никакого порядка не было видно вовсе, — должно было

ощущаться как религиозное озарение.

Спиритуалистические учения Пифагора не ограничивались нумерологией. Они включали в себя и веру в перевоплощение, а кроме того, по всей видимости, Пифагор был вегетарианцем. На самом деле, его диетические пристрастия были предметом неувядающих дебатов в течение более двух тысяч лет. Говорили, что членам братства запрещалось есть маленькие круглые черные бобы. В одном из рассказов о смерти Пифагора говорится, что, когда он спасался от преследовавших его врагов, перед ним оказалось поле, где росли бобы. Согласно преданию, он предпочел, чтобы преследователи поймали его и убили, чем наступить на бобы. Согласно одному античному источнику, причина, по которой бобы оказались под запретом, состояла в том, что, по Пифагору, люди и бобы произошли из одного и того же изначального пережня. В качестве доказательства Пифагор утверждал, что если разжевать боб, а затем ненадолго оставить бобовую массу на солнце, то запах будет напоминать запах человеческого семени. Более свежая гипотеза состоит в том, что братство просто представляло собой общину людей, страдающих наследственной аллергией к бобовым.

*

Пифагор жил в VI веке до н. э. Он не писал книг, и все наши сведения о нем основаны на записях, сделанных многие годы спустя после его смерти. Пифагорейское братство высмеивалось на сцене афинского театра, но к началу христианской эры самого Пифагора стали воспринимать скорее благосклонно — как единственного в своем роде гения; глубокие математические озарения превратили его в духовного, интеллектуального предшественника целой плеяды великих греческих философов. Ему приписывались чудеса, а некоторые авторы, сколь ни странным такое покажется, утверждали, что бедро у него было сделано из золота. Другие рассказывали, что однажды он переходил через реку и река обратилась к нему — достаточно громко для того, чтобы все услышали: «Приветствую тебя, Пифагор». Подобное посмертное мифотворчество связано с именем другого средиземноморского духовного вождя — и в самом деле, Пифагор и Иисус некоторое время были религиозными соперниками. Во II веке н. э. римская императрица Юлия Домна, желая противодействовать распространению христианства, поощряла среди жителей Римской империи поклонение Аполлонию из Тианы, утверждавшему, что он — воплощение, реинкарнация, Пифагора^[14].

Пифагор оставил двойственное и противоречивое наследие: математику

и антиматематику. А может быть даже — как предполагают некоторые ученые, — единственные идеи, которые принадлежат ему, носят мистический характер. Эзотерическая составляющая Пифагорова учения неизменно присутствовала в западной философии со времен Античности, но в особую моду он вошел в эпоху Возрождения, благодаря переоткрытию «Золотых стихов Пифагора» — стихотворений, приписываемых Пифагору и выражавших принципы его учения «самоусовершенствования». Написаны они были примерно в VI веке до н. э. Пифагорейское братство стало образцом для многих оккультных тайных обществ. Повлияло оно и на возникновение масонства — братства с развитой системой ритуалов, восходящих к XVI столетию, причем считается, что в наши дни только в США оно насчитывает около двух миллионов членов. Пифагор также вдохновил «мать-основательницу» современной западной нумерологии миссис Л. Дау Баллиетт — домохозяйку из Атлантик-Сити, написавшую в 1908 году книгу «Философия чисел». «Пифагор говорил, что Небеса и Земля вибрируют в согласии с отдельными числами или с цифрами, из которых числа составлены», — говорила она, предлагая систему предсказания судьбы на основе соотнесения каждой буквы в алфавите с некоторым числом от 1 до 9. Сложение чисел, получаемых из букв, входящих в имя, уверяла своих читателей высокоученая дама, позволяет предсказать личностные особенности. Исключительно ради забавы я испытал эту идею на себе. Из имени Alex получаем $1 + 3 + 5 + 6 = 15$. Далее предписание состоит в том, чтобы сложить две цифры, входящие в полученный ответ, что дает $1 + 5 = 6$. Итак, вибрация моего имени равна 6, а это, согласно Баллиетт, означает, что мне «всегда следует одеваться тщательно и аккуратно; увлекаться изысканными эффектами и цветами, отдавая особое предпочтение оранжевому, багряному и лиловому более светлых оттенков, никогда при этом не забывая об их истинных тонах». Мои драгоценные камни — топаз, изумруд, оникс и яшма, тогда как мой минерал — бор, а мои цветы — тубероза, лавр и хризантема. Мой аромат — камелия.

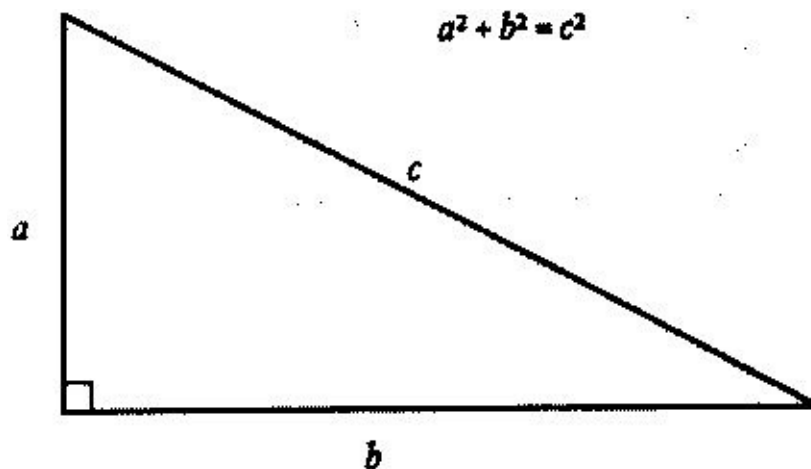
Нумерология, конечно, стала постоянным блюдом в меню современного мистицизма, где нет недостатка в специалистах, дающих советы по поводу чисел в лотерее или желающих порассуждать о значимости и знамениях, связанных с предполагаемой датой. На первый взгляд, это вполне безвредная забава — и я получил истинное удовольствие, разговаривая с Джеромом Картером, — однако же приписывание числам спиритуального значения может иметь и зловещие последствия. В 1987 году, например, военное правительство в Бирме

выпустило в обращение денежные банкноты, значение которых выражалось числами, делящимися на 9. Сделано это было по одной причине — любви к числу 9 генерала, возглавлявшего хунту. Новые банкноты ускорили наступление экономического кризиса, приведшего к восстанию 8 августа 1988 года — восьмого числа восьмого месяца восемьдесят восьмого года, — так что восьмерка оказалась избранным числом антидиктаторского движения. Протестные выступления, впрочем, жестоко подавили 18 сентября: в девятый месяц и в число, которое делится на 9.

*

Теорема Пифагора утверждает, что *в любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*. Эти слова отпечатаны у меня в мозгу, как один из первых детских стишков или как рождественский гимн; эта фраза вызывает ностальгическое ощущение и умиротворяет независимо от содержащегося в ней смысла.

Гипотенуза — это сторона, противолежащая прямому углу, а прямой угол — это четверть полного оборота. Теорема Пифагора — абсолютный чемпион по популярности во всех начальных курсах по геометрии, первая действительно наводящая на размышление математическая концепция, изучаемая в школе. Меня в ней восхищает, насколько глубокую связь она вскрывает между числами и пространством. Не у всех треугольников имеется прямой угол, но, когда такой угол есть, сумма квадратов двух сторон должна быть равна квадрату третьей. Теорема верна и в противоположном направлении: возьмем любые три числа. Если сумма квадратов двух из них равна квадрату третьего, то можно построить прямоугольный треугольник, длины сторон которого будут как раз заданными числами.



Теорема Пифагора

В ряде комментариев о Пифагоре говорится, что до основания братства он предпринял путешествие в Египет с целью сбора фактов. Если бы он заглянул на египетскую строительную площадку, то наверняка бы заметил, что для создания прямого угла рабочие использовали прием, представляющий собой применение теоремы, позднее названной его именем. На веревке делались отметки в виде завязанных узлов на расстояниях, равных 3, 4 и 5 единицам. Поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$, когда веревку растягивали между тремя кольцами так, чтобы у каждого кольца оказывался узел, она образовывала треугольник, один из углов которого был прямым.

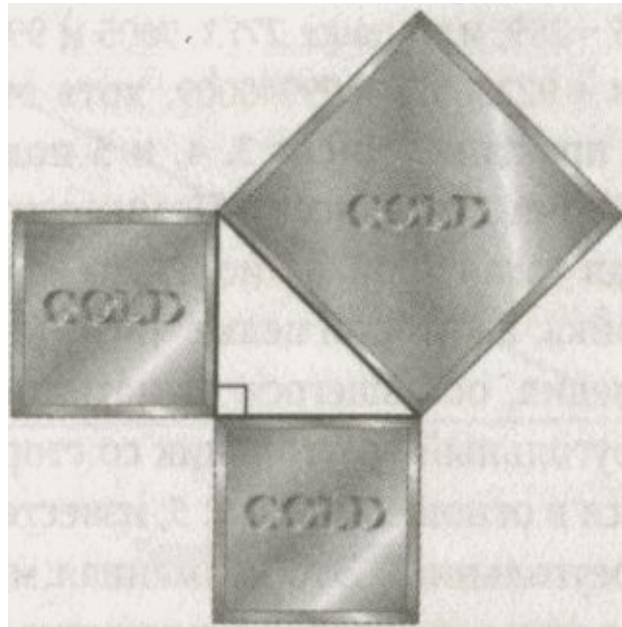
Натягивание веревки — самый удобный способ получения прямых углов, необходимых для того, чтобы кирпичи или гигантские каменные блоки, подобные тем, что использовались при строительстве пирамид, можно было слой за слоем класть друг на друга^[15]. (Слово «гипотенуза» происходит из греческого слова, означающего «протянутая, растянутая снизу».) Чтобы получить настоящий прямой угол, египтяне могли использовать и много других чисел, кроме 3, 4 и 5. В действительности имеется бесконечное количество чисел a , b и c , таких что $a^2 + b^2 = c^2$. Египтяне могли бы отметить на своих веревках, например, длины в 5, 12 и 13 единиц, потому что $25 + 144 = 169$, или длины 8, 15 и 17, потому что $64 + 225 = 289$, или даже 2772, 9605 и 9997, потому что $7\,683\,984 + 92\,256\,025 = 99\,940\,009$, хотя это едва ли удобно на практике. Числа 3, 4, и 5 подходят для решения задачи лучше всего. Помимо того что это наименьшая такая тройка чисел, это еще и единственная тройка, в которой целые числа идут подряд. Из-за наследия, оставшегося от натягивания веревок, прямоугольный треугольник со сторонами, находящимися в отношении 3:4:5, известен как «египетский треугольник». Это карманная машина для построения прямых углов — жемчужина нашего математического достояния, интеллектуальный продукт колоссальной мощи, элегантности и точности.

*

Квадраты, фигурирующие в теореме Пифагора, можно понимать как числа, а можно и как картинки — буквально, как квадраты, нарисованные на сторонах треугольника. Представим себе, что квадраты на сторонах

треугольника, изображенного на рисунке, сделаны из золота. Предлагается или выбрать два меньших квадрата, или взять самый большой. Что лучше?

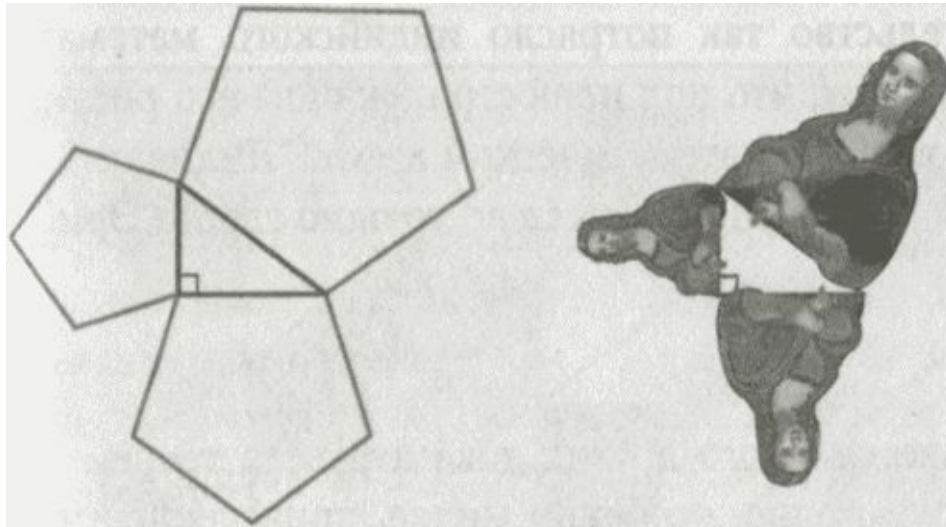
Учитель математики Реймонд Смулльян говорит, что, когда он задает этот вопрос своим ученикам, половина класса желает взять один большой квадрат, а другая половина — два меньших квадрата. И те и другие очень удивляются, когда он сообщает им, что никакой разницы нет.



Это так потому, что, как утверждает теорема, общая площадь двух меньших квадратов равна площади большего квадрата. На каждом прямоугольном треугольнике можно построить таким способом три квадрата, так что площадь большего можно в точности разделить на площади двух меньших. И так получается всегда.

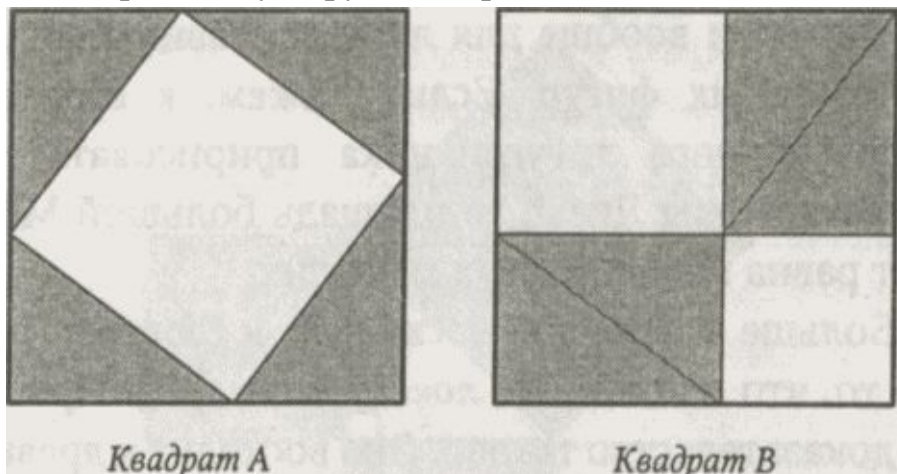
Неизвестно, действительно ли честь открытия этой теоремы принадлежит Пифагору, однако еще с античных времен имя его прочно связано с ней. Эта теорема подтверждает его мировоззрение, демонстрируя замечательную гармонию математической вселенной. И действительно, теорема выявляет связь более глубинную, чем просто между квадратами, построенными на сторонах прямоугольного треугольника. Площадь полуокружности, построенной на гипотенузе, например, равна сумме площадей полуокружностей, построенных на двух других сторонах. Площадь пятиугольника, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей пятиугольников, построенных на двух других сторонах; то же верно для шестиугольников, восьмиугольников и вообще для любых правильных или неправильных фигур. Если, скажем, к сторонам прямоугольного треугольника пририсовать три портрета Моны Лизы, то

площадь большой Моны будет равна площади двух меньших.



Больше всего меня восхищает в теореме Пифагора то, что я понимаю, *почему* она верна. Простейшее доказательство таково. Оно восходит к древним китайцам, возможно к тем временам, когда Пифагор еще не родился, и представляет собой одну из причин, по которой многие подвергают сомнению, что именно он был первым, кто предложил эту теорему.

Прежде чем продолжать чтение, рассмотрим два квадрата. Квадрат А по размеру равен квадрату В, и все прямоугольные треугольники внутри этих двух квадратов тоже имеют одинаковые размеры. Поскольку квадраты равны, площади белых областей внутри них тоже равны. Заметим теперь, что большой белый квадрат внутри квадрата А — это квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника. А меньшие белые квадраты внутри квадрата В — это квадраты, построенные на двух других сторонах треугольника. Другими словами, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух других сторон. Готово.

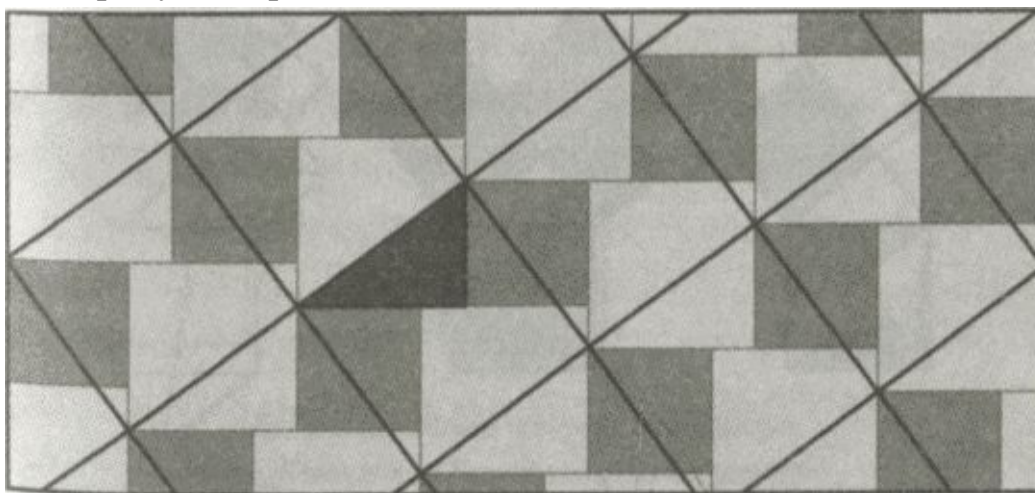


Поскольку мы можем построить квадраты, аналогичные А и В, для прямоугольного треугольника любой формы и размера, теорема должна быть верна во всех случаях.

Захватывающая увлекательность математики коренится в моменте внезапного проявления истины в доказательствах, подобных приведенному выше, когда все вдруг становится ясным. И тогда испытываемое интеллектуальное удовольствие граничит с физическим. В XII столетии это доказательство так потрясло индийского математика Бхаскару, что под иллюстрирующим его рисунком он в своей математической книге «Лиливати» вместо объяснений написал всего одно слово: «Зри!»

*

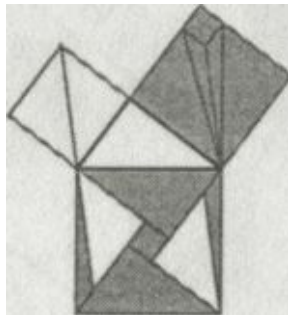
Имеется много других доказательств теоремы Пифагора; одно, особенно милое, приведенное на рисунке, приписывается арабскому математику Аннаиризи, а появилось оно около 900 года. Теорема там извлекается из повторяющегося узора. Улавливаете? (Если нет, то помощь можно почерпнуть в приложении 1 на веб-сайте, посвященном этой книге.)



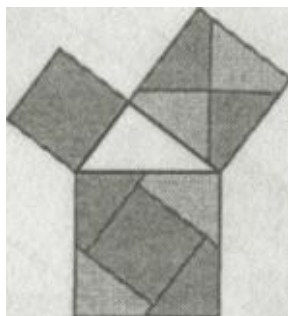
В книге «Пифагорово предложение» Элиша Скотта Лумиса, изданной в 1940 году, приведено 371 доказательство этой теоремы. Их авторы были на редкость несхожие между собой люди; к примеру, одно доказательство в 1888 году предложила слепая девушка Эмма Кулидж; второе, в 1938 году — Энн Кондит, 16-летняя старшеклассница; авторами других считаются Леонардо да Винчи и американский президент Джеймс А. Гарфилд, правивший страной с марта по сентябрь 1881 года. Гарфилд наткнулся на свое доказательство во время математических развлечений с коллегами в бытность свою конгрессменом от Республиканской партии. «Мы рассматриваем его как нечто, по поводу чего члены обеих палат могут

проявить единство, невзирая на партийные различия», — сказал он, когда его доказательство впервые было опубликовано в 1876 году.

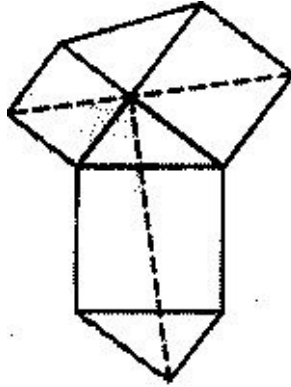
Разнообразие доказательств — свидетельство жизненной силы математики. Нет и никогда не было одного-единственного «правильного» способа решения математической задачи, и исключительно интересно наблюдать, какими различными путями различные умы добивались до желанного решения. Возьмем, например, три доказательства теоремы Пифагора из трех различных эпох: одно предложил Лю Хуэй — китайский математик, живший в III веке, другое — Леонардо да Винчи, один из титанов эпохи Возрождения, а третье (в 1917 году) — Генри Дьюдени, самый знаменитый британский изобретатель головоломок. И Лю Хуэй, и Дьюдени дали «доказательства путем разбиения», в которых два малых квадрата разбиваются на фигуры, которые можно собрать в точности в большой квадрат. Вы можете пожелать изучить их доказательства, чтобы понять, как это делается. Доказательство Леонардо более необычно и требует большего напряжения мысли. (Если потребуется помощь, загляните на веб-сайт www.alexbellos.com.)



лю Хуэй



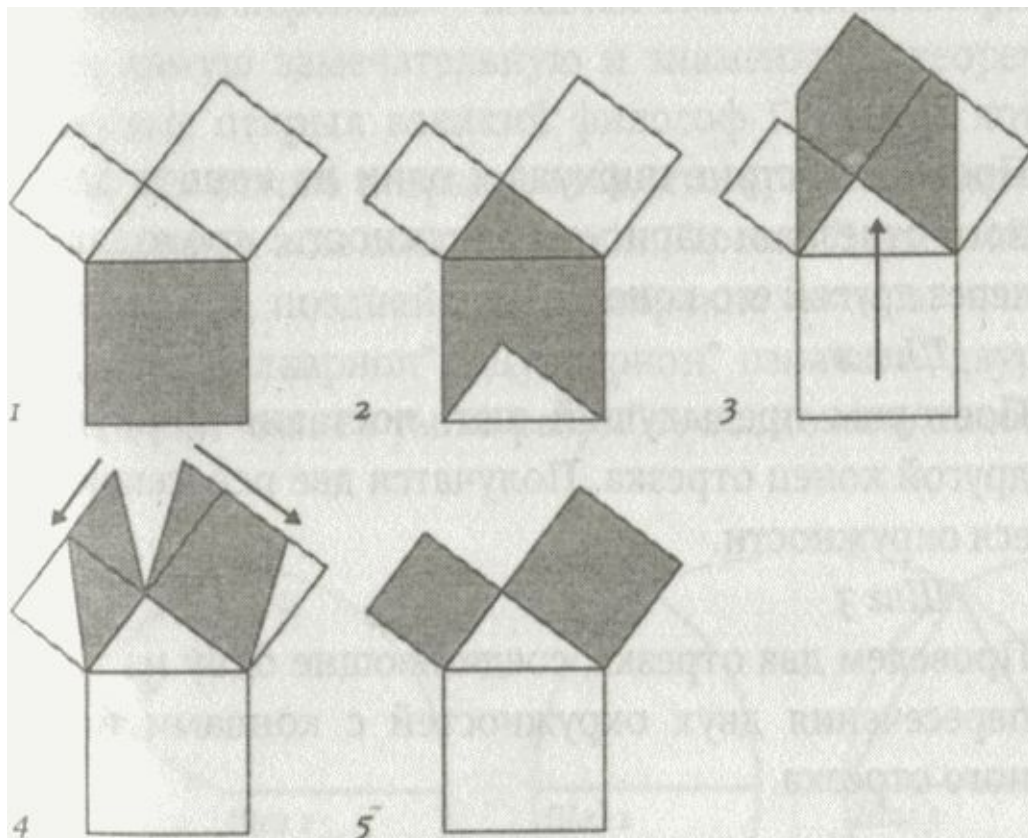
Генри Дьюдени



Леонардо да Винчи

Особо динамичное доказательство придумал в начале XX века нью-йоркский профессор математики Герман фон Баравалле. На рисунке показано, как большой квадрат, подобно амебе, делится на два меньших. Затемненные участки сохраняют свою площадь на каждом шаге. На шаге 4 два параллелограмма «скашиваются» за пределы области, а далее на шаге 5 эти параллелограммы преобразуются в квадраты, и — зри! — теорема доказана.

Доказательство Баравалле подобно наиболее общепринятому в математической литературе — тому, которое пошло от Евклида (около 300 года до н. э.).



Доказательство теоремы Пифагора, предложенное Германом фон Баравалле

Евклид — самый знаменитый греческий математик после Пифагора — жил в Александрии. В его шедевре «Начала» содержится 465 теорем, которые отражали объем знаний, доступных грекам того времени. Греческая математика почти целиком состояла из геометрии — слово это происходит от греческих слов, означавших «земля» и «измерение», — хотя содержание «Начал» и не имело отношения к устройству реального мира. Евклид действовал в абстрактном мире точек и линий. Средства, которыми он разрешал себе пользоваться, представляли собой лишь карандаш, линейку и циркуль, — по каковой причине именно они стали основным содержимым детских пеналов на протяжении столетий.

Первая задача Евклида — книга 1, предложение 1 — состояла в том, чтобы показать, что по любому заданному отрезку можно построить равносторонний треугольник (то есть треугольник с тремя равными сторонами), причем со стороной, равной заданному отрезку. Он использовал следующий метод:

Шаг 1

Поставим острый циркуль в один из концов заданного отрезка и нарисует окружность, проходящую через другой его конец.

Шаг 2

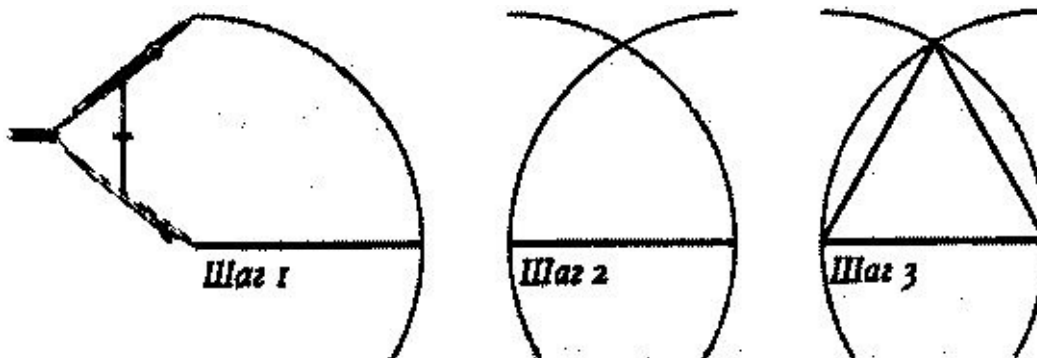
Повторим предыдущий шаг, поставив циркуль в другой конец отрезка. Получатся две пересекающиеся окружности.

Шаг 3

Проведем два отрезка, соединяющие одну из точек пересечения двух окружностей с концами исходного отрезка.

Затем Евклид методично продвигается от предложения к предложению, для чего требуется установление немалого числа свойств линий, треугольников и окружностей. Например, предложение 9 показывает, как провести «биссектрису» угла — построить угол, который есть в точности половина данного угла. Предложение 32 утверждает, что внутренние углы треугольника в сумме всегда дают два прямых угла, или 180 градусов. «Начала» — это гимн педантичности и строгости. Ничто никогда не принимается на веру. Каждая строчка логически следует из предыдущих. И тем не менее, исходя из всего нескольких основных аксиом (о них мы будем говорить позже), Евклид приводит впечатляющий набор неопровержимых результатов.

Первая книга завершается великолепным предложением 47. В издании 1570 года — первом английском переводе — имеется такой комментарий: «Эту самую замечательную и знаменитую теорему впервые открыл великий философ Пифагор, который так оттого возрадовался, что принес в жертву быка, как о том пишут Гиерон, Прокл, Дикий и Витрувий. И позднейшие варварские авторы называли ее Дулкарнон». «Дулкарнон» означает «двурогий», или «зашел ум за разум» — возможно, потому что рисунок, иллюстрирующий доказательство, содержит два похожих на рога квадрата, а быть может, потому что понять его действительно очень и очень непросто.



«Начала», книга 1, предложение 1.

Евклидово доказательство теоремы Пифагора лишено намека на изящество. Оно длинное, методичное, извилистое и требует рисунка, изобилующего линиями и наложенными друг на друга треугольниками. Выдающийся немецкий философ XIX века Артур Шопенгауэр заметил, что оно настолько неоправданно сложно, что представляет собой «блестящий образчик извращенности». Справедливости ради скажем, что Евклид не ставил перед собой задачу превратить доказательство в игру (как Дьюдени), или сделать его эстетским (как Аннаиризи), или интуитивным (как Баравалле). Евклида волновала — зато всерьез — одна только строгость его дедуктивной системы.

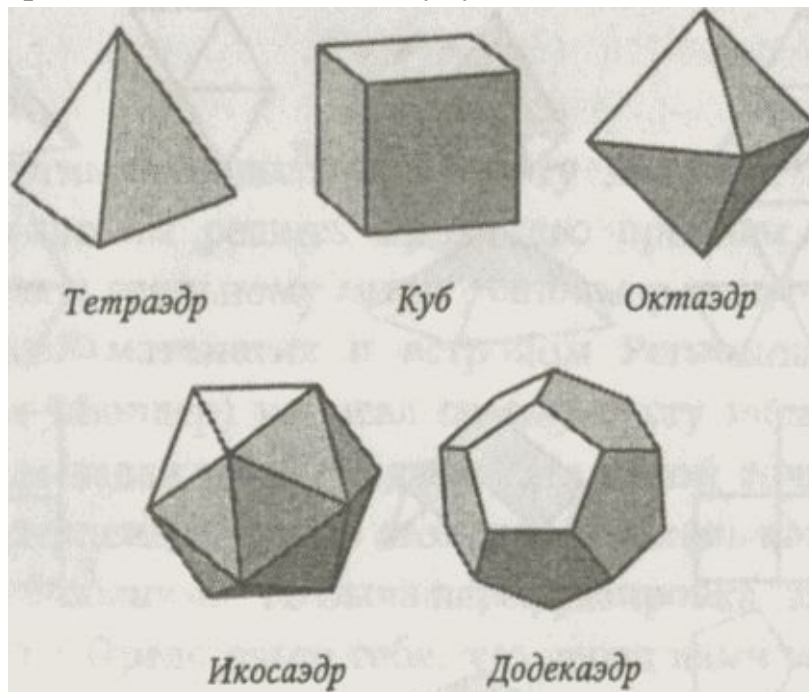
Тогда как Пифагор усматривал чудесное в числах, Евклид в своих «Началах» выявил более глубокую красоту — неопровержимую систему математических истин. Страница за страницей он демонстрирует, что математическое знание радикально отличается от любого другого. Предложения, доказанные в «Началах», не имеют срока давности. Они не становятся менее верными или даже менее актуальными с течением времени (это — причина, по которой Евклида изучают во всех школах мира, а греческих драматургов, поэтов и историков — нет). Мощь Евклидова метода внушает трепет. Про Томаса Гоббса — разносторонне одаренного человека, жившего в Англии в XVII веке, — говорят, что, когда ему было уже 40 лет, взгляд его как-то упал на «Начала», лежавшие открытыми в библиотеке. Он прочитал одно предложение и воскликнул: «Боже мой, не может быть!» Тогда ему пришлось прочитать предыдущее предложение, затем вернуться еще на одно назад, и так далее, пока он не убедился, что все верно. В результате он влюбился в геометрию из-за определенности, которую она предписывает, и дедуктивный подход оказал влияние на его самые знаменитые работы по политической философии. Начиная с «Начал» логическая аргументация стала золотым стандартом всех научных изысканий.

*

Евклид принялся за нарезание двумерного пространства на семейство фигур, известных как многоугольники — фигуры, построенные лишь из отрезков прямых линий. С помощью циркуля и линейки он сумел построить не только равносторонний треугольник, но и квадрат,

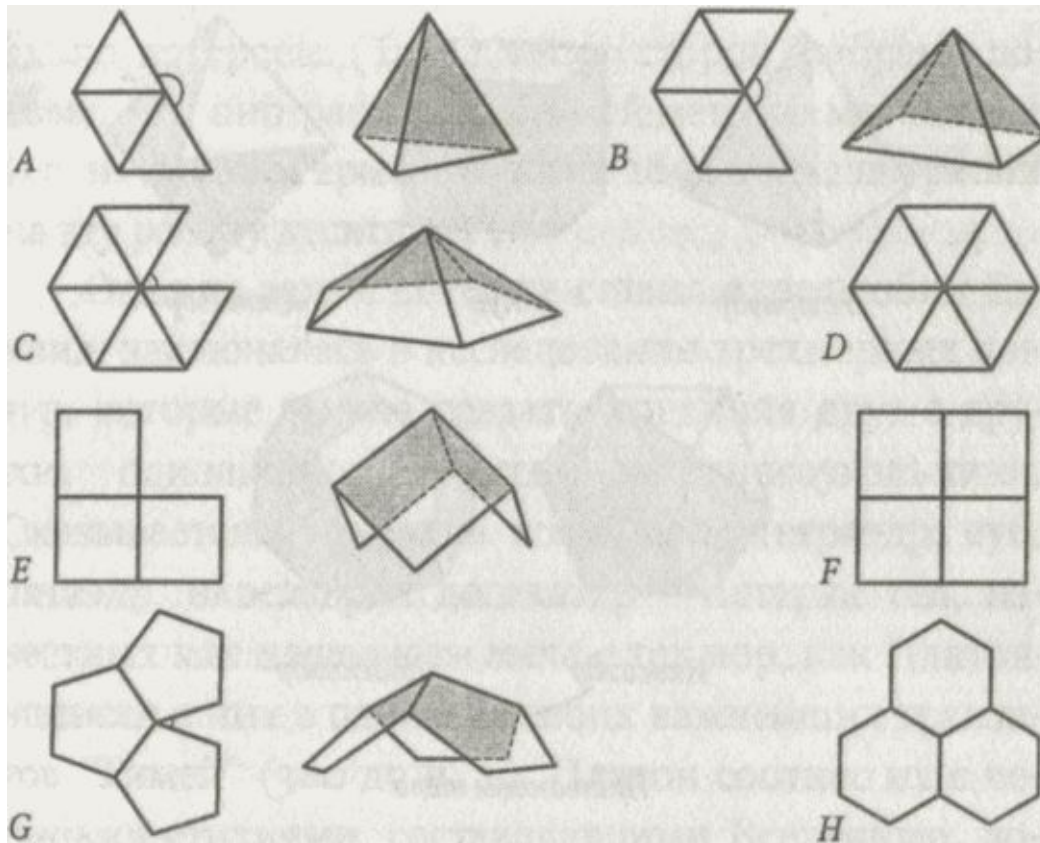
пятиугольник и шестиугольник. Многоугольники, в которых все стороны имеют одну и ту же длину, а все углы между сторонами одинаковы, называются *правильными*. Интересно, что метод Евклида работает не для всех правильных многоугольников. Семиугольник, например, нельзя построить циркулем и линейкой, зато восьмиугольник — можно, но девятиугольник снова нельзя. Между тем сумасшедше сложный правильный многоугольник с 65 537 сторонами построить можно — более того, он был реально построен. (Такое число сторон выбрано потому, что оно равно $2^{16} + 1$.) Немецкий математик Иоган Густав Гермес, начав в 1894 году, потратил на эту работу десять лет^[16].

Одна из задач, которые ставил перед собой Евклид, заключалась в исследовании трехмерных фигур, которые можно создать, соединяя друг с другом одинаковые правильные многоугольники. Оказывается, вариантов всего пять: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр — пятерка тел, известных как *Платоновы тела* с тех пор, как Платон написал о них в одном из своих важнейших трактатов «Тимей» (360 до н. э.). Платон соотнес их с четырьмя стихиями, составляющими Вселенную, добавив к ним божественное пространство, которое всех их окружает. Тетраэдру отвечал огонь, кубу — земля, октаэдру — воздух, икосаэдру — вода, а додекаэдру — охватывающий купол. Платоновы тела особо интересны тем, что они полностью симметричны. Их можно крутить, вертеть или как угодно переворачивать, и они всегда будут оставаться неизменными.



Платоновы тела

В тринадцатой, заключительной, книге «Начал» Евклид доказал, почему имеется только пять Платоновых тел. Он рассмотрел все объемные объекты, которые можно собрать из правильных многоугольников: сначала равносторонний треугольник, затем квадраты, пятиугольники, шестиугольники и т. д. На рисунке показано, как он пришел к своему выводу. Чтобы построить объемный объект из многоугольников, необходима точка, в которой сходятся три стороны: такой угол называется вершиной. При соединении в вершине, например, трех равносторонних треугольников получается тетраэдр (А). При соединении четырех — пирамида (В). Такая пирамида — не платоново тело, потому что не все стороны у нее одинаковы, но, приклеив к ее дну отраженную пирамиду, получаем октаэдр — платоново тело. Соединение вместе пяти равносторонних треугольников дает начало икосаэдру (С), а вот соединение шести — плоский лист бумаги (D). Не удастся сконструировать телесный угол из шести равносторонних треугольников, так что нет других способов сделать из них какие-либо Платоновы тела. Повторение той же процедуры с квадратами показывает, что есть только один способ соединить три квадрата в угол (Е). Это построение приведет к кубу. Соединение четырех квадратов дает плоский лист бумаги (F). Из квадратов более не удастся построить Платоновых тел. Аналогичным образом, три пятиугольника образуют телесный угол, который можно достроить до додекаэдра (G). Невозможно соединить четыре пятиугольника. Три шестиугольника, соединяющиеся в одной точке, уже лежат в одной плоскости (H), так что из них невозможно создать объемный объект. Больше Платоновых тел нет, поскольку невозможно соединить в вершине три правильных многоугольника с более чем шестью сторонами.



Доказательство того, что имеется только пять Платоновых тел

*

Математики продолжили работу Евклида, и это позволило им решить множество проблем, относящихся к реальному миру. Например, в 1471 году немецкий математик и астроном Региомонтанус (Иоанн Мюллер) написал своему другу письмо, в котором задал такую задачу: «Из какой точки на земле перпендикулярно стоящий стержень кажется самым большим?» То была перефразировка «задачи о статуе». Представьте себе, что перед вами на пьедестале установлена статуя. Когда вы подходите к ней слишком близко, приходится задирать голову, и угол, под которым она видна, очень узкий. Когда же вы отошли далеко, приходится напрягать глаза, и статуя, опять же, видна под очень малым углом. Где расположено наилучшее место для обзора статуи?

Взглянем на статую сбоку, как показано на рисунке. Нам нужно найти точку на пунктирной линии, отвечающей уровню глаз, так, чтобы угол, под которым видна статуя, был бы наибольшим. Решение можно извлечь из третьей книги «Начал», посвященной окружностям. Угол максимален, когда окружность, проходящая через верх и низ статуи, касается

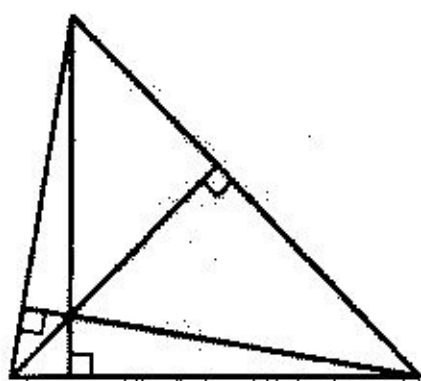
пунктирной линии.



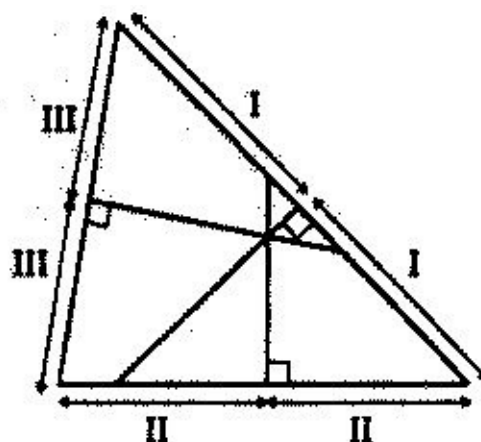
Задача о статуе

Однако самый, быть может, ошеломляющий результат в евклидовой геометрии — это тот, в котором выявляется потрясающее свойство треугольников. Для начала найдем, где находится центр треугольника. Это на удивление неочевидное понятие. Имеется четыре способа определить центр треугольника, и все они представляют собой различные точки (за исключением случая, когда треугольник равносторонний, — тогда эти точки совпадают друг с другом). Первый называется *ортоцентром* — это пересечение перпендикуляров, проведенных из каждой вершины к противоположащей ей стороне (сами эти линии называются *высотами*). Уже довольно занятен тот факт, что в любом треугольнике его высоты всегда пересекаются в одной и той же точке. Второй кандидат на центр треугольника — это *центр описанной окружности*, лежащий на пересечении перпендикуляров, проведенных из середины каждой стороны. Опять же, очень мило, что эти линии всегда пересекаются^[17], какой бы треугольник вы ни выбрали. Третий кандидат — *центроид*, представляющий собой пересечение линий, идущих от вершин к серединам противоположащих сторон. Они тоже всегда пересекаются. И наконец, имеется *окружность шести точек* — это окружность, проходящая через середину каждой стороны, а также через пересечения сторон и высот^[18]. У каждого треугольника есть окружность шести точек, и ее центр — четвертый кандидат на среднюю точку треугольника. В 1767 году Леонард Эйлер доказал, что у каждого треугольника его ортоцентр, центр описанной окружности, центроид и центр окружности шести точек всегда лежат на одной прямой. Полный улет — независимо от вида треугольника эти четыре точки сохраняют ослепительно единообразное взаимоотношение друг с другом! Присутствующая здесь гармония

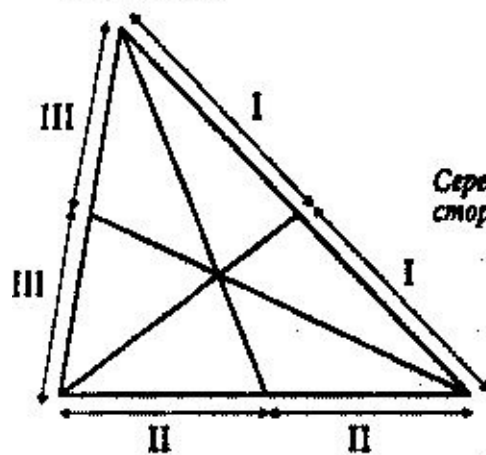
поистине чудесна. Пифагор, надо думать, просто ликовал бы.



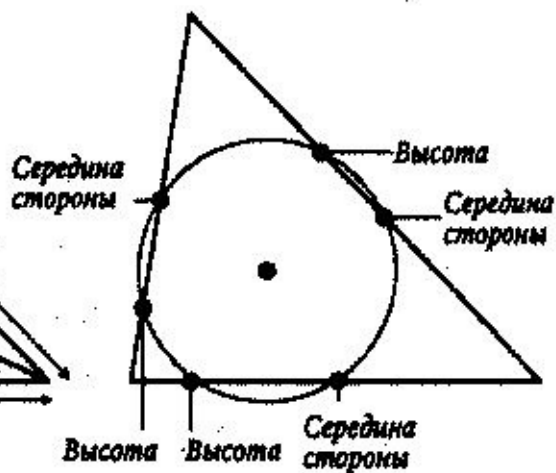
Ортоцентр



Центр описанной окружности



Центроид



Окружность шести точек



Прямая Эйлера

Построение прямой Эйлера

*

Сейчас даже трудно оценить важность Евклидовых «Начал» для всей античной культуры. Не теряют они своего значения и по сей день.

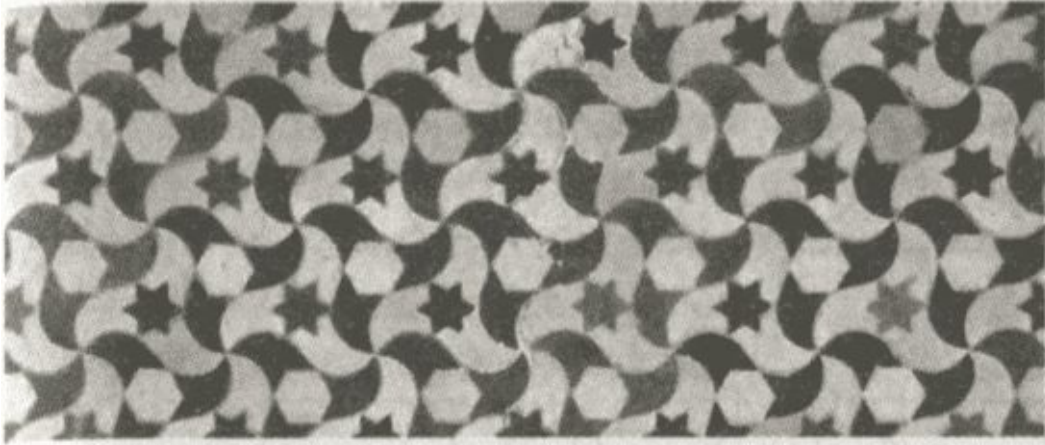
Появившись около 300 года до н. э., вплоть до XX века эта книга была второй после Библии по числу переизданий. И тем не менее, сколь бы виртуозным ни был Евклидов метод, он не решал все проблемы; ответ некоторых задач, порой совсем простых, не получишь с помощью циркуля и линейки. Это глубоко огорчало греков. В 430 году до н. э. Афины поразила эпидемия брюшного тифа. Афиняне отправились за советом к делосскому оракулу, который предложил им в два раза увеличить размер посвященного Аполлону алтаря, имевшего форму куба. Радуюсь, что столь простое дело принесет им избавление, афиняне построили новый алтарь (тоже в форме куба), стороны которого были вдвое длиннее сторон исходного алтаря. Однако при удвоении стороны куба объем его увеличивается в два в кубе, то есть в восемь раз. Аполлон не возрадовался и только усугубил заразу. Задача, заданная богом, *об удвоении куба*, — по заданному кубу построить куб вдвое большего объема — называется делийской задачей и представляет собой одну из трех классических задач Античности, не разрешимых евклидовыми средствами. Две другие — это *квадратура круга*, то есть построение квадрата, имеющего ту же площадь, что и заданный круг, и *трисекция угла*, то есть построение угла, представляющего собой треть заданного. Почему евклидова геометрия не позволяет решить эти задачи^[19], а другие методы позволяют? Этот вопрос на долгие годы стал главной проблемой математики.

*

Не одних только греков интриговали чудеса, скрытые в математических формах. Самый священный объект в исламе представляет собой платоново тело. Это Кааба, черный куб, стоящий в центре мечети Харам Бейт-Уллах в Мекке, который паломники обходят против часовой стрелки во время хаджа. (Истинные размеры Каабы таковы, что чуть недотягивают до идеального куба.) Кааба также служит ориентиром — той точкой, к которой должны быть обращены лицом правоверные мусульмане, совершающие дневную молитву, где бы они ни находились. Математика играет более значимую роль в исламе, чем в какой-либо другой из основных религий. За более чем тысячу лет до появления GPS-технологий необходимость обращаться лицом к Мекке требовала сложных астрономических вычислений — в этом, по-видимому, заключается одна из причин, по которым исламская наука не знала себе равных на протяжении почти тысячи лет.

В исламе запрещалось изображение людей и животных, а потому стены, потолки и полы священных зданий украшали затейливые

геометрические мозаики. Предполагалось, что геометрия выражает истину, выходящую за пределы человеческого бытия, и это было вполне созвучно идеям Пифагора, утверждавшего, что Вселенная раскрывает себя через математические формы. Симметричные формы и бесконечные петли, которые исламские мастера использовали в своих узорах, были аллегорией бесконечного и выражением священного, математического миропорядка.



Исламская паркетная мозаика из дворца Альгамбра в Гранаде (Испания)

*

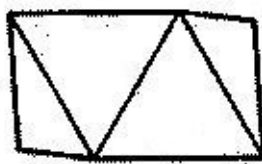
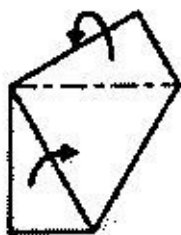
Если отправиться еще дальше на восток, то мы окажемся в другой цивилизации, которая давно восприняла красоту геометрических форм. В Японии все знают оригами. Это искусство складывания бумаги возникло из обычая крестьян воздавать благодарность богам во время уборки урожая, предлагая им на листке бумаги богатые приношения. Предназначенное богам располагалось не на плоском листе, а на сложенном по диагонали, дабы сделать дар более теплым, душевным. Оригами расцвело в Японии за последние несколько сотен лет в качестве досуга, как нечто вроде игры, в которую родители играют с детьми ради развлечения. Оригами как нельзя лучше отвечает любви японцев к художественной сдержанности, вниманию к деталям и экономии формы.

На первый взгляд складывание оригами из визитных карточек кажется сугубо японским изобретением, объединяющим два этих национальных пристрастия. На самом же деле такая практика японцам претит. Они воспринимают визитные карточки как продолжение личности, поэтому забавы с ними рассматриваются как серьезное оскорбление, пусть даже это оригами. Когда я попытался сложить визитную карточку в ресторане в Токио, меня едва не выставили на улицу за такое антиобщественное

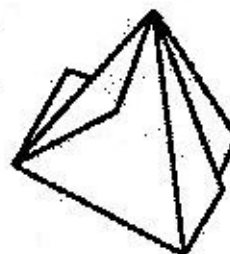
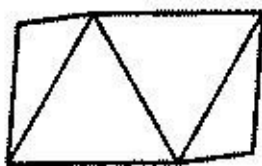
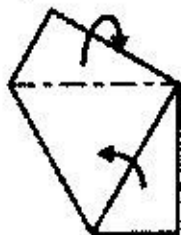
поведение. В остальном мире, однако, оригами с визитными карточками — некий современный поджанр в искусстве складывания бумаги. Ему более сотни лет, со времен (ныне позабытой) практики оригами с карточками, использовавшимися при нанесении визитов.

Примером может служить складывание карточки так, чтобы правый нижний угол пересекался с левым верхним углом, а затем сложение нахлестов. Повторите то же с другой карточкой, только на этот раз сложите левый нижний угол с правым верхним. Получатся две половинки тетраэдра.

*Левосторонняя
часть*

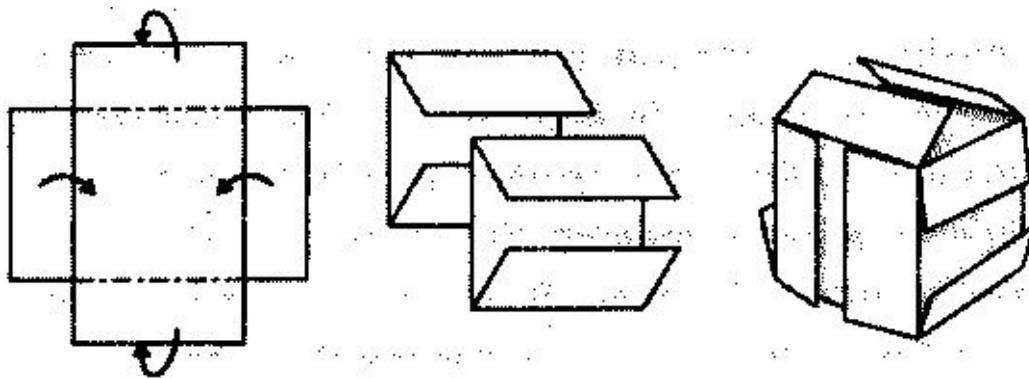


*Правосторонняя
часть*



Как сложить тетраэдр из карточек

Октаэдр можно сделать из четырех карточек, а икосаэдр — из десяти. Несложно также сделать четвертое платоново тело — куб. Сложим две карточки друг на друга в виде знака плюс и загнем выступающие части. Получившееся имеет форму квадрата. Шесть карточек, сложенных таким образом, собираются в куб, хотя загнутые части и остаются снаружи. Требуется еще шесть карточек, чтобы, надвинув их на грани, сделать куб гладким.



Как сложить куб из карточек

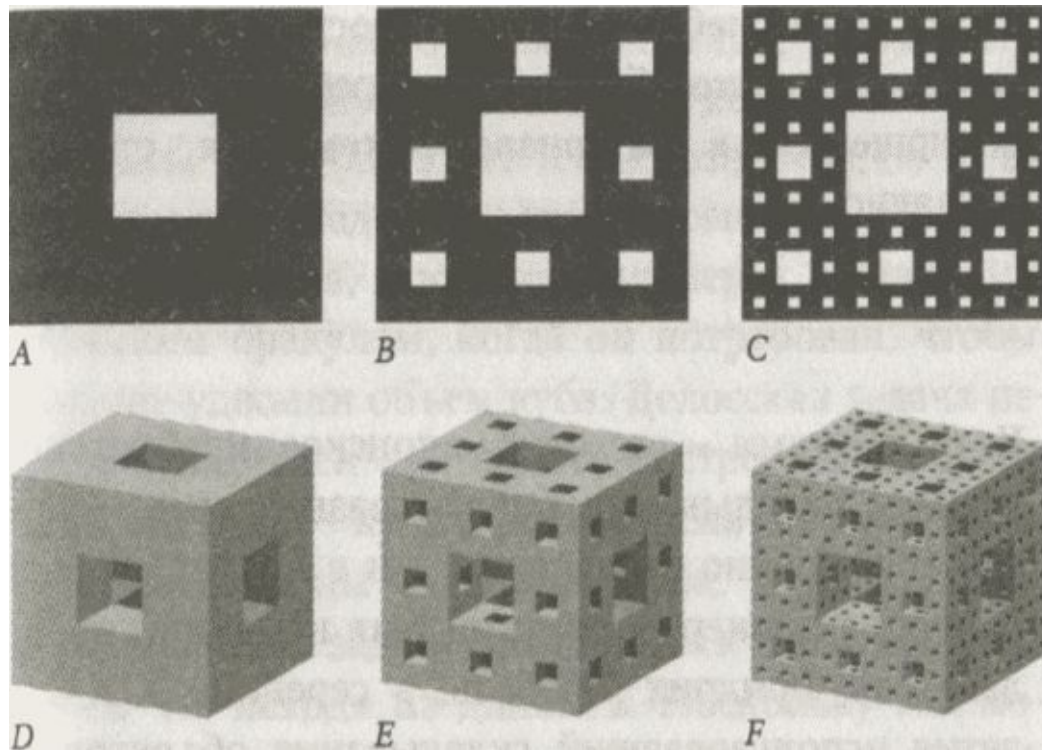
*

Жанин Мозли, программистка из Массачусетса, — настоящий дзен-мастер оригами из карточек. Несколько лет назад она обнаружила, что у нее в гараже скопились 100 000 карточек — они достались ей от коллег по работе: первый комплект она получила, когда компания сменила название, второй — когда компания поменяла адрес, а затем еще один, когда выяснилось, что во всех новых карточках имеется опечатка. При наличии таких ресурсов она готова была бросить вызов самому сложному объекту в искусстве оригами — губке Менгера.

Прежде чем мы подойдем к губке Менгера, мне следует познакомить вас с ковром Серпинского. Эту замысловатую фигуру изобрел в 1916 году польский математик Вацлав Серпинский. Начнем с черного квадрата. Представим себе, что он сделан из девяти одинаковых подквадратиков, и удалим центральный (рис. А). Далее для каждого из оставшихся подквадратиков повторим эту операцию — то есть представим себе, что они сделаны из девяти подквадратиков каждый, и удалим центральные (рис. В). Снова повторим тот же процесс (рис. С). Ковер Серпинского — это то, что получится, если продолжать подобные действия до бесконечности.

В 1926 году австрийский математик Карл Менгер предложил трехмерный вариант ковра Серпинского, получивший известность как губка Менгера. Начнем с куба. Представим себе, что он сделан из 27 одинаковых подкубов, и удалим подкуб, расположенный в самом центре, а заодно и шесть подкубов в центре каждой грани исходного куба. Получается куб, в котором просверлили три квадратные дырки (рис. D). Поступим с каждым из оставшихся 20 подкубов как с исходным кубом и удалим 7 из 27 подкубов из каждого (рис. E). Повторим этот процесс еще раз (рис. F), после чего наш куб примет такой вид, будто в нем пировал

целый выводок геометрически озабоченных древесных червей.



Губка Менгера

Губка Менгера — поразительный, парадоксальный объект. При продолжении итераций, в ходе которых удаляются все меньшие и меньшие кубы, объем губки все уменьшается, и в конце концов она становится невидимой — как если бы древесные черви съели ее целиком. Однако при каждой итерации, состоящей в удалении кубиков, площадь поверхности губки возрастает. Совершая все больше и больше итераций, можно сделать площадь его поверхности больше любого наперед заданного значения, а это означает, что, когда число итераций стремится к бесконечности, площадь поверхности губки также стремится к бесконечности. В пределе губка Менгера — это объект с бесконечно большой площадью поверхности, но при этом невидимый.

Мозли построила губку Менгера третьего уровня — другими словами, губку, получаемую за три итерации удаления кубиков (рис. F). На это у нее ушло десять лет. Она прибегла к помощи около 200 человек и использовала 66 048 карточек. Построенная ею губка имеет высоту, ширину и глубину по четыре фута и восемь дюймов.

«Я долгое время размышляла над вопросом, делаю ли я нечто

совершенно нелепое, — сказала она мне. — Но когда я закончила работу и взглянула на эту штуку, я осознала, что ее масштаб придал всему делу великолепии. Особенно чудесно, что в модель можно засунуть голову и плечи и посмотреть на эту изумительную фигуру с такой точки зрения, с которой раньше никто на нее не смотрел. Это было бесконечно пленительно, потому что чем глубже в нее погружаешься, тем больше видишь повторяющих самих себя структур. Просто смотришь на все это, и ничего объяснять не требуется. Это идея, воплощенная в материале; математика, ставшая наглядной».

*

Хотя оригами — исходно японское изобретение, приемы складывания бумаги развивались — причем совершенно независимо — и в других странах. В Европе пионером оригами был немецкий преподаватель Фридрих Фрёбель, в середине XIX столетия использовавший складывание объектов из бумаги как метод обучения маленьких детишек началам геометрии. Оригами обладало тем преимуществом, что позволяло его подопечным в детском садике наблюдать за тем, как геометрические объекты создаются в пространстве, а не просто рассматривать их плоские изображения на рисунках. Пример Фрёбеля перенял другой математик — индеец Сундара Роу, написавший в 1901 году книгу «Геометрические упражнения со складыванием бумаги», в которой он утверждал, что оригами — математический метод, в ряде случаев оказывающийся более мощным, чем Евклидов. Он говорил, что «несколько важных геометрических процессов можно осуществить намного проще, чем с циркулем и линейкой». Но даже Роу не мог предвидеть, насколько это мощный метод — оригами.

В 1936 году итальянка Маргерита Пьяццола Белок из Университета Феррары опубликовала статью, где доказала, что, взяв лист бумаги с отмеченной на нем длиной L , можно сложить его так, чтобы получить длину, равную кубическому корню из L . Может быть, тогда она этого и не осознавала, но из ее утверждения следовало, что с помощью оригами решалась задача, поставленная перед афинянами делосским оракулом, когда он потребовал, чтобы афиняне удвоили объем куба. Делосская задача переформулируется как задача построения куба со стороной в кубический корень из двух — раз большей стороны заданного куба. С использованием оригами задача сводилась к складыванию длины

$\sqrt[3]{2}$

, исходя из длины 1. Поскольку мы можем удвоить 1 и получить 2 путем складывания 1 самой на себя, а кроме того, можем найти кубический корень из 2, следуя предписанию Белок, значит, задача решена. Из доказательства Белок также следовало, что любой угол можно разделить на три равные части — и тем самым была побеждена вторая великая нерешаемая задача Античности. Статья Белок, однако, пребывала в неизвестности десятилетия, пока в 1970-х годах математики не занялись оригами всерьез.

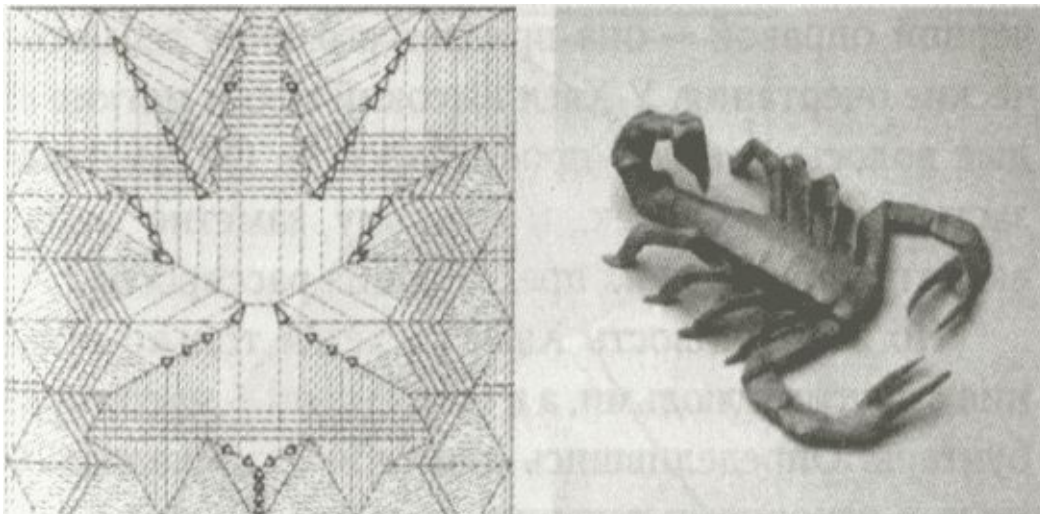
Первое, опубликованное в 1980 году оригами-доказательство делосской задачи было дано японским математиком; затем один американец в 1986 году предложил трисекцию угла. Всплеск интереса происходил отчасти от усталости — математикам изрядно надоело более чем двухтысячелетнее господство евклидовой ортодоксии. Ограничения, налагаемые Евклидом, — работа только с циркулем и линейкой — сузили границы математических изысканий. Как оказалось, оригами дает гораздо больше возможностей, чем циркуль и линейка, например при построении правильных многоугольников. Евклид смог построить равносторонний треугольник, квадрат, пятиугольник и шестиугольник, однако семиугольник, как мы помним, и девятиугольник ему не покорились. Оригами позволяет относительно легко получать семиугольники и девятиугольники с помощью складывания, хотя по-настоящему серьезным делом оказывается построение 11-угольника. (Строго говоря, здесь речь идет об оригами, где допустимы только однократные складывания. Если разрешить многократные складывания, то в принципе можно построить любой многоугольник, хотя физическое построение из-за своей сложности может оказаться практически невозможным.)

Так, далеко уйдя от детской забавы, оригами вышло на передний край

математики.

И это действительно так. Когда Эрику Демейну было 17 лет, он с соавторами доказал возможность создания любой геометрической фигуры с прямолинейными сторонами путем складывания листа бумаги и проведения всего одного разреза. Определившись с тем, какую именно фигуру хотите получить, вы разрабатываете схему складывания, затем складываете лист, проводите единственный разрез, разворачиваете то, что получилось, и оттуда выпадает желанная фигура. С первого взгляда может показаться, что подобный результат представляет интерес только для школьников, занятых созданием рождественских украшений всевозрастающей сложности. Однако работа Демейна нашла применение в промышленности, в частности при проектировании автомобильных подушек безопасности. Оригами находит применение в самых неожиданных сферах: в робототехнике, при создании артериальных стентов и солнечных батарей на искусственных спутниках Земли.

Гуру современного оригами — Роберт Лэнг, который кроме развития теории, лежащей в основе складывания бумаги, превратил это занятие в раздел скульптуры. В прошлом физик из NASA, Лэнг был пионером в использовании компьютеров при разработке схем складывания с целью создания все более сложных фигур. Среди созданных им фигур — жуки, скорпионы, динозавры и человек, играющий на рояле. Надо заметить, что схемы складывания почти всегда столь же прекрасны, как и готовые изделия.



Оригами скорпион Роберта Лэнга и соответствующая схема складывания

Сегодня США претендуют на первенство в исследовании оригами ничуть не меньше, чем Япония, — отчасти потому, что оригами настолько вплелось в ткань японского общества в качестве вида досуга, что японцам оказалось не так легко воспринимать это занятие серьезно, как науку. Делу не слишком помогает и произошедшее в Японии разделение на фракции между различными организациями, каждая из которых оставляет только за собой исключительное право олицетворять оригами. Меня удивило, когда Кадзуо Кобаяши — председатель Международной ассоциации оригами — отверг работу Роберта Лэнга как элитарную. «Он делает это для себя, — пробурчал Кобаяши. — Мое же оригами способствует реабилитации больных и помогает обучению детей».

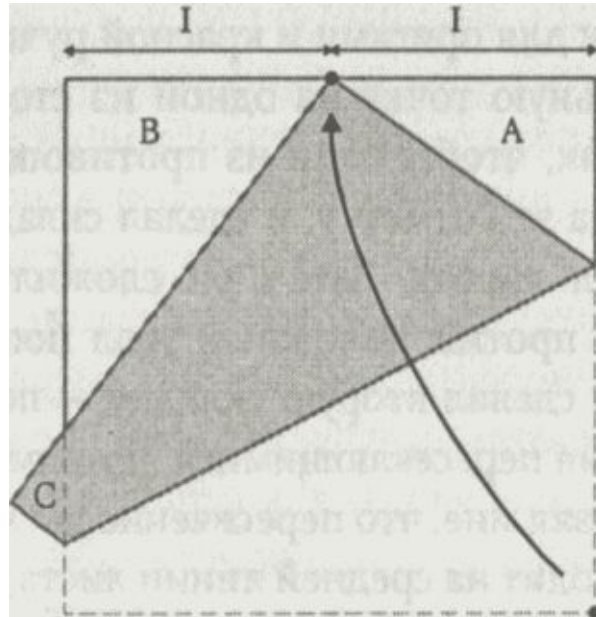
Тем не менее множество японских любителей оригами создают новые интересные вещи, и я отправился в Цукубу, современный университетский город немного к северу от Токио, чтобы встретиться с одним из таких мастеров оригами. Кадзуо Хага — энтомолог на пенсии, его профессиональная специализация — эмбриональное развитие яиц насекомых. Малюсенький офис Хаги завален книгами и заставлен витринами с бабочками. Хага, которому сейчас 74 года, носит большие очки с тонкой черной оправой — она придает его лицу геометрические очертания. У Хаги высокий лоб и мягкие седые волосы, а вид — профессорский. Он довольно застенчивый человек, и поэтому заметно волновался по поводу моих предстоящих расспросов.

Но застенчивость Хаги касается только общения с другими людьми, а в оригами он — настоящий бунтарь. Определившись для себя с принадлежностью к основному течению оригами, он тем не менее никогда не чувствовал себя связанным какими-либо условностями. Например, согласно правилам традиционного японского оригами, имеется только два способа сделать первое складывание. Оба представляют собой складывание пополам — или по диагонали, так что соединяются два противоположных угла, или по средней линии, из-за чего вместе оказываются соседние углы. Называются они «первичными складками».

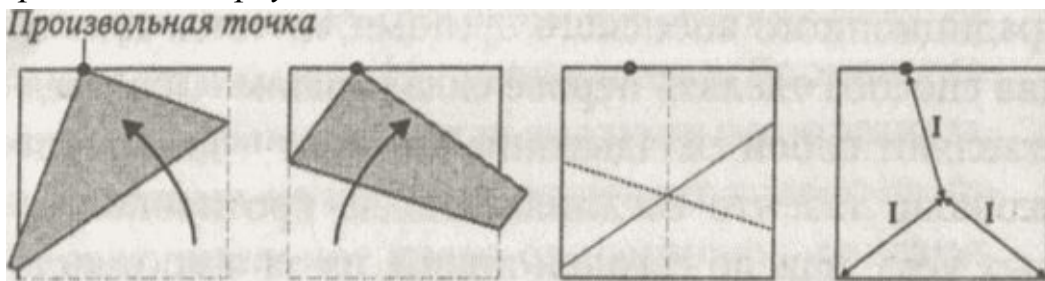
Хага решил нарушить традиции. Что, если сложить угол на середину стороны? Не безумная ли идея?! Первый раз он сделал такое в 1978 году, и эта простая операция открыла двери в грандиозный новый мир. Хага получил три прямоугольных треугольника, но то были не просто прямоугольные треугольники. Все они оказались египетскими — самыми известными в истории и самыми каноническими треугольниками в мире.

Подстегиваемый трепетом сделанного открытия, он написал письмо о новом складывании профессору Коджи Фушими — физику-теоретику,

известному своим интересом к оригами. «Я так и не получил ответа, — сказал Хага, — но затем он внезапно опубликовал статью в журнале „Mathematics Seminar“, ссылаясь там на теорему Хаги. Вот что получилось вместо ответа». С тех пор имя Хаги получили две другие «оригами-теоремы», а по его словам, у него таких еще с полсотни.



Теорема Хаги: треугольники A, B и C — египетские



Другая теорема Хаги

В теореме Хаги угол складывается на середину стороны. Хага задался вопросом, возникнет ли что-нибудь интересное, если сложить угол на случайную точку на стороне. Решив это продемонстрировать мне, он взял синий квадратный листок из набора бумаги для оригами и красной ручкой отметил произвольную точку на одной из сторон, сложил листок так, чтобы один из противоположных углов попал на эту отметку, и сделал складку, а потом развернул листок. Затем он сложил его так, чтобы другой противоположный угол попал на ту же отметку, и сделал вторую складку, — получился квадрат с двумя пересекающимися линиями.

Хага показал мне, что пересечение двух складок всегда происходит на средней линии листа бумаги и что расстояние от выбранной произвольной точки до пересечения всегда равно расстоянию от пересечения до противоположных углов. Меня это просто потрясло. Точка выбиралась случайным образом и вовсе не по центру. И тем не менее процесс складывания подобен самокорректируемому механизму!

Мне пришло в голову, что если про кого-то и можно сказать, что этот человек воплощает в современном мире душу Пифагора, то это определенно Кадзуо Хага. И у него, и у Пифагора одна и та же страсть к математическим открытиям, в основе которых — искреннее восхищение гармонией геометрии. И это восхищение, судя по всему, повлияло на Хагу в духовном плане аналогично тому, как это случилось с Пифагором две тысячи лет назад. «Большинство японцев пытаются в оригами создавать новые фигуры, — говорит Хага. — Моя же цель — уйти от идеи создания чего-то физического, а вместо этого открывать новые математические феномены. Вот почему я нахожу оригами таким интересным. Оказывается, в очень, очень простом мире все еще можно обнаружить захватывающие вещи».

Глава 3

Кое-что про ничто

Автор отправляется в Индию, дабы встретиться с индуистским пророком, и открывает кое-какие очень медленные методы арифметических действий, а также некоторые очень быстрые.

Каждый год в расположенный на побережье индийский город Пури стекается миллион паломников. Собираются они ради самого зрелищного фестиваля в индуистском календаре — Рат Ятра («парад колесниц»), во время которого по городу проезжают три гигантские разукрашенные колесницы. Когда я туда приехал, улицы были заполнены любителями цимбал и мантр, босоногими святыми людьми с длинными бородами, а также индийскими туристами — типичными представителями среднего класса, одетыми в модные футболки и сари неоновых цветов. Была середина лета — начало сезона дождей, и, если не лил проливной дождь, работники фестиваля опрыскивали водой лица проходивших мимо, чтобы дать немного прохлады. Хотя и не столь масштабные, процессии фестиваля Рат Ятры проходят одновременно по всей Индии, но праздник в Пури — главное событие, а участвующие в нем колесницы — самые большие.

Фестиваль начинается по-настоящему, только когда местный святой — Шанкарачарья из Пури — предстает перед толпой и благословляет собравшихся. Шанкарачарья — один из самых важных индуистских мудрецов, глава монашеского ордена, корни которого уходят в историю более чем на тысячу лет. Из-за него-то я и отправился в Пури. Он — не только духовный лидер, но и публикующий свои работы математик.

Сразу по прибытии в Индию я обратил внимание на не совсем обычное использование числительных. В гостинице, где я остановился, мне попался номер газеты «Times of India», и я прочел крупный заголовок на первой странице:

Индусов на 5 крор больше, чем считало правительство

«Крор» — индо-английское слово, означающее 10 миллионов, так что в газетной статье говорилось о том, что в Индии внезапно обнаружилось 50 миллионов жителей, о существовании которых никто никогда не подозревал. Как можно не заметить столько граждан своей страны, даже если принять во внимание, что это менее 5 процентов всего населения? Но что озадачило меня гораздо больше — так это само слово «крор». В индийском английском языке для больших чисел используются иные слова, нежели в британском или американском английском. Например, слово «миллион» вообще не применяется. Миллион выражается как «десять лакх», где «лакх» — это сто тысяч. Поскольку о «миллионе» в Индии никогда не слышали, осыпанный «Оскарами» фильм «Миллионер из трущоб» вышел здесь под названием «Кроранер из трущоб». Очень богатым человеком считается владелец крора долларов или рупий, — а вовсе не миллиона указанных единиц. Индийские эквиваленты названий чисел таковы:

	<i>Обозначение</i>	<i>Индийск.</i>	<i>Обозначение</i>
Десять	10	Десять	10
Сто	100	Сто	100
Тысяча	1000	Тысяча	1,000
Десять тысяч	10 000	Десять тысяч	10,000
Сто тысяч	100 000	Лакх	1,00,000
Миллион	1 000 000	Десять лакх	10,00,000
Десять миллионов	10 000 000	Крор	1,00,00,000
Сто миллионов	100 000 000	Десять крор	10,00,00,000

Стоит заметить, что для чисел выше тысячи индийцы используют разделительную запятую после каждой двух цифр, тогда как во всем остальном мире, где используется разделительная запятая, принято ставить ее через каждые три цифры.

Слова «лакх» и «крор» — наследие Древней Индии. Они происходят из слов «лакх» и «карод» (хинди), которые, в свою очередь, происходят из санскритских названий этих чисел — «лакш» и «коти». В Древней Индии изобретение слов для больших чисел было научным и религиозным предприятием. Например, в «Латисвара Сутра» — тексте на санскрите, датированном самым поздним началом VI столетия, — перед Буддой встает проблема выразить числа большие чем сто «коти». На что он говорит:

«Одна сотня „коти“ называется „аюта“, сотня „аюта“ дает „пиюту“,

сотня „пиют“ дает „канкару“, сотня „канкар“ дает „вивару“, а сотня „вивар“ — это „кшобхья“».

Будда продолжает счет числами, кратными ста, пока не добирается до «таллакшана», что есть десять миллионов, умноженные на сто 23 раза, — как можно видеть, это 10, за которым следуют 53 нуля, или, другими словами, 10^{53} . Это колоссально большое число — настолько большое, что если измерить всю Вселенную от края до края в метрах, а потом возвести полученное число в квадрат, то получится как раз нечто в районе 10^{53} .

Но Будда на этом не остановился. Он разъяснил, что описал только лишь счетную систему таллакшана, и выше нее имеется другая система, в которой такое же количество членов. А выше той — еще одна, и в ней снова 24 названия для чисел. Но и это еще не все — кроме них есть еще шесть других систем, каковые Будда, разумеется, полностью перечислил. Последнее число в самой последней системе эквивалентно 10^{421} — это единица с 421 нулем.

Пожалуй, стоит перевести дух и оглядеться. Во Вселенной, по имеющимся оценкам, примерно 10^{80} атомов. Если взять наименьший из измеримых отрезков времени — так называемое планковское время — настолько малых, что в секунде их насчитывается 10^{43} , то окажется, что с момента Большого взрыва прошло «всего лишь» 10^{140} таких отрезков времени, что во много (во много!!!) раз меньше, чем 10^{421} . Упомянутые Буддой большие числа лишены практического применения — по крайней мере, в отношении пересчета того, что *существует в нашем мире*.

Будда не только оказался способен измерить непредставимо большое, но и с немалым блеском прошелся по области непредставимо малого, дав объяснение того, сколь много атомов имеется в йоджане — древней единице длины порядка 10 километров. Йоджана, заметил он, имеет следующие эквиваленты:

Четыре кроша, каждый из которых есть длина в Одну тысячу арк, каждый из которых есть длина в

Четыре локтя, каждый из которых есть длина в Две пяди, каждая из которых есть длина в Двенадцать пальцев, каждый из которых есть длина в

Семь зернышек, каждое из которых есть длина в Семь семечек горчицы, каждое из которых есть длина в

Семь маковых зернышек, каждое из которых есть длина в

Семь частиц пыли, поднятой коровой, каждая из которых есть

*длина в Семь частиц пыли, поднятой бараном, каждая из которых есть
длина в*

*Семь частиц пыли, поднятой зайцем, каждая из которых есть длина
в*

*Семь частиц пыли, уносимой ветром, каждая из которых есть
длина в*

Семь крошенных пылинок, каждая из которых есть длина в

Семь малюсеньких пылинок, каждая из которых есть длина в

Семь частиц первых атомов.

На самом деле получается довольно неплохая оценка. Пусть, скажем, длина пальца — 4 сантиметра. «Первые атомы» Будды, таким образом, имеют длину 4 сантиметра, деленную на 7 десять раз, что составляет $0,04 \text{ м} \times 7^{-10}$, или 0,000000000416 м, что более или менее соответствует размеру атома углерода.

Будда никоим образом не был единственным древним индийцем, который интересовался невероятно большим и невообразимо малым; литература на санскрите полна астрономически больших чисел. Некоторые из них использовались для нужд астрономии — науки, развитой в Индии в совершенстве, — но не все. Последователи джайнизма (религии, близкой индуизму) ввели единицу «раджа» как расстояние, которое бог проходит за шесть месяцев, если преодолевает 100 000 йоджан за каждое мигание глаза. Время, называемое «палья», определялось как продолжительность, необходимая для опустошения гигантского куба, имеющего размер йоджаны и заполненного шерстью новорожденных ягнят, если одна шерстинка вынимается из него раз в столетие. Зацикленность на больших (и малых) числах была в основе своей метафизической — некоторым интуитивным способом осознания бесконечного и попыткой разрешить экзистенциальные проблемы жизни.

*

Прежде чем арабские числительные получили всеобщее международное признание, люди изобрели много других способов записи чисел. Первыми обозначениями для чисел, появившимися на Западе, были зарубки, клинописные знаки и иероглифы. Когда люди, говорившие на разных языках, развили свои собственные алфавиты, для представления чисел стали использовать буквы. Говорившие на иврите евреи использовали букву алеф (א) для обозначения 1, бет (ב) для обозначения 2 и т. д. Десятая буква — йод (י) — обозначала 10, после чего численные

значения букв шли через десяток, а по достижении 100 — через сотни. Двадцать вторая, и последняя, буква древнееврейского алфавита — тав (ט) — имела значение 400. Использование букв для обозначения чисел не было лишено некоторой путаницы, а кроме того, способствовало развитию нумерологического подхода к счету. Например, *гематрия* заключалась в сложении чисел, выражаемых буквами в словах на иврите. Получившееся значение воспринималось как проявление боговдохновения и становилось основой для пророчеств.

Похожую систему использовали и древние греки — у них альфа (α) обозначала единицу, бета (β) — двойку и т. д. до 27-й буквы имевшегося в их распоряжении алфавита, сампи (λ), которая обозначала число 900. Греческой математической культуре — самой развитой в Древнем мире — не была свойственна жажда индусов к овладению колоссальными числами. Названием для самого большого из чисел, имевшихся в распоряжении древних греков, было слово «мириада», означавшее десять тысяч, что записывалось как заглавная буква М.

В основе римских числительных также лежал алфавит, хотя римская система имела более древние корни, чем даже греческая или еврейская. Символ для единицы выглядел как I — возможно, происходил он из засечки на счетной палочке. Пять обозначалось как V — возможно, из-за схожести с тем, как выглядит рука. Другие числа выглядели как X, L, C, D, M и соответственно обозначали 10, 50, 100, 500, 1000. Все остальные числа строились с использованием этих семи заглавных букв. Использование всего лишь семи символов в сравнении с 22 из иврита и 27 из греческого алфавита делало римскую систему более удобной, вот почему она оставалась основной числовой системой в Европе на протяжении более тысячи лет.

Тем не менее римские числительные очень плохо приспособлены к нуждам арифметики. Давайте попробуем вычислить 57×43 . Лучшим способом решить эту задачу является хитроумный, но медленный метод, получивший название египетского или крестьянского умножения, поскольку возник он в Древнем Египте.

Для начала разложим одно из чисел, подлежащих умножению, по степеням двойки (эти степени, напомним, равны 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. д., где каждый раз происходит удвоение), а затем составим таблицу удвоений другого числа. В нашем примере — (57×43) — надо разложить число 57 и выписать таблицу удвоений числа 43. Я буду использовать арабские числительные, чтобы продемонстрировать, как это делается, но процесс остается тем же самым и при использовании римских числительных.

Разложение: $57 = 32 + 16 + 8 + 1$.

Таблица удвоений:

$$1 \times 43 = 43$$

$$2 \times 43 = 86$$

$$4 \times 43 = 172$$

$$8 \times 43 = 344$$

$$16 \times 43 = 688$$

$$32 \times 43 = 1376$$

Умножение 57×43 эквивалентно сложению результатов из правого столбца в таблице удвоений, которые отвечают степеням двойки в разложении. Это, возможно, звучит не слишком понятно, но в действительности оказывается не так уж сложно. Наше разложение содержит в себе числа 32, 16, 8 и 1. В таблице 32 отвечает числу 1376, 16 — числу 688, 8 — числу 344, а 1 — числу 43. Таким образом, результат нашего умножения равен $1376 + 688 + 344 + 43$, что дает 2451.

Если разбивать вычисления на удобоваримые кусочки, сводящиеся только к удвоению и сложению, то римские числительные оказываются вещью вполне пригодной. И тем не менее нам пришлось выполнить работы куда больше, чем это на самом деле нужно.

Сравним приведенное вычисление с умножением столбиком, которое все мы изучали:

$$\begin{array}{r} \text{ } 57 \\ \times 43 \\ \hline 0171 \\ 2280 \\ \hline 2451 \end{array}$$

Имеется очень простая причина, по которой наш метод и проще, и быстрее. Дело в том, что ни римляне, ни греки, ни евреи не изобрели символа для нуля. А когда дело доходит до вычислений, то именно 0, то есть ничто, становится невероятно важным и меняет все кардинальным образом.

*

Веды, священные индуистские тексты, передавались из поколения в поколение из уст в уста, пока наконец их не перевели на санскрит около

двух тысяч лет назад. В одном ведическом пассаже о построении алтарей перечисляются следующие слова, обозначающие числа:

Даса	10	Арбуда	10 000 000
Сата	100	Ньярбуда	100 000 000
Сахастра	1000	Самудра	1 000 000 000
Аюта	10 000	Мадхья	10 000 000 000
Ньюта	100 000	Анта	100 000 000 000
Праюта	1 000 000	Парардха	1 000 000 000 000

При наличии названий для каждого числа, кратного десяти, удастся эффективно описать большие числа, из чего астрономы и астрологи (и, надо полагать, строители алтарей) почерпнули подходящий к своим задачам лексикон для огромных величин, требуемых в их вычислениях. В этом одна из причин, по которым индийская астрономия опережала свое время. Возьмем число 422 396. Индусы начинали с самой младшей цифры — той, что справа, — и последовательно описывали число, переходя справа налево: «шесть и девять дасы и три сахастры и две аюты и две ньюты и четыре праюты». Не так уж сложно осознать, что при этом можно не указывать степени десятки, потому что значение числа в списке определяется его положением. Другими словами, приведенное выше число можно было бы записать и просто как «шесть, девять, три, два, два, четыре».

Исчисление такого типа известно как «позиционная» система, и мы рассматривали ее выше. Бусинка на абаке имеет различные значения в зависимости от того, к какому столбцу она относится. Подобным же образом каждое число в приведенном выше списке имеет значение в зависимости от своей позиции. Но при этом позиционная система требует какой-то идеи для «заполнения места» в том случае, когда в данном столбце или в данной позиции никакого числа нет. Например, если в числе имеется две дасы, ни одной саты и три сахастры, то его нельзя записать как «два, три», потому что такая запись указывает на число, в котором две дасы и три саты. Заполнитель места требуется для того, чтобы ясно сигнализировать отсутствие саты, и индусы использовали для этого слово «шунья», означавшее «пустота». Наше число поэтому есть «два, шунья, три».

Индусы были не первыми, кто ввел в обиход заполнитель места. Честь этого изобретения, судя по всему, принадлежит вавилонянам, которые записывали свои числовые символы в столбцы, применяя систему с

основанием 60. Одна колонна отводилась для единиц, вторая — для «шестидесяток», следующая — для чисел, кратных 3600, и т. д. Если в числе не было значения, соответствующего заданному столбцу, то изначально там не писали ничего. Но это приводило к путанице, так что в конце концов вавилоняне ввели символ, обозначающий отсутствие значения. Правда, этот символ использовался только как элемент разметки.

Индусы же, приняв шунью за заполнитель места, на этом не остановились, а, наоборот, повысили его в ранг полноценного числа — нуля. В наши дни нет ничего сложного в том, чтобы воспринимать нуль как число. Но на самом деле эта идея далеко не очевидна. Западные цивилизации, например, так и не пришли ни к чему подобному даже за тысячи лет математических изысканий. Действительный масштаб концептуального скачка, совершенного в Индии, хорошо иллюстрируется тем фактом, что Древний мир, имея нуль перед своим носом, глядел прямо сквозь него. Абак содержал в себе концепцию нуля уже потому, что он опирался на позиционную идею. Когда римлянин желал выразить число «одна сотня и один», он передвигал бусинку в первом столбце для обозначения одной сотни, не передвигал ничего во втором столбце, что означало отсутствие десятков, и передвигал бусинку в третьем столбце, чтобы указать просто единицу. Второй, оставленный в покое столбец выражал «ничто». Вычислители на абаке знали, что к нетронутым столбцам надо относиться с тем же вниманием, что и к тем, в котором бусинки меняли положения. Но никто из них не снабдил числовым именем или символом значение, которое выражалось нетронутым столбцом.

Свои первые робкие шаги в роли полноправного числа нуль проделал под покровительством знаменитого индийского математика Брахмагупты, жившего в VII веке. Именно Брахмагупта показал, как шунья ведет себя по отношению к своим числовым братьям и сестрам. «Данное число минус шунья дает данное число», — писал он, понимая под этим, что если из положительного числа вычесть нуль, то получится то же самое положительное число: $a - 0 = a$. А если умножить шунью на любое число, то получится шунья — другими словами, $0 \times a = 0$.

Числа исходно возникли как средство счета, как абстракции, описывающие количества. Но нуль не был числом для счета в том же смысле; понимание его значения потребовало более высокого уровня абстракции. Однако чем меньше математика оказывалась привязанной к реальным вещам, тем более мощной она становилась. Обращение с нулем как с числом означало, что позиционную систему, превратившую абак в наилучший способ вычисления, прекрасно можно использовать и для

записи символов. Но это не все — нуль сделал возможным появление таких понятий, как отрицательные числа и десятичные дроби, — понятий, которые мы ныне без труда постигаем в школе и которые глубоко внедрены в нашу повседневную жизнь, но ведь они вовсе не являются самоочевидными. Древние греки сумели совершить фантастические математические открытия без использования нуля, отрицательных чисел или десятичных дробей — потому что полагались на существенно пространственное понимание математики. Им представлялось бессмыслицей, что ничто может быть «чем-то». Пифагору вообразить отрицательное число было столь же трудно, как отрицательный треугольник.

*

Среди всех новаторских способов обращения с числами в Древней Индии самым, пожалуй, занятым был лексикон, применявшийся для описания чисел от нуля до девяти. Вместо того чтобы закрепить за каждой цифрой уникальное имя, они применяли колоритный набор синонимов. Нуль, как мы уже знаем, назывался шинья, но еще и «эфиром», «точкой», «дырой» или «змеем вечности». Единица — «землей», «луной», «путеводной звездой» или «свернувшимся молоком». Двойка выступала под названием «рука», тройка была «огнем», а четверка — «вульвой». То или иное имя выбиралось в зависимости от контекста и следовало принятым в санскрите строгим правилам версификации и просодии. Например, следующий стих представляет собой отрывок из описания манипуляций с числами в одном древнем астрологическом тексте:

Апсиды Луны в Юга.

*Огонь. Пустота. Всадник. Васу^[20]. Змей. Океан,
и в ее ущербном узле.*

Васу. Огонь. Изначальная Пара. Всадник. Огонь. Близнецы.

Перевод таков:

*[Число обращений] апсидов Луны в [космическом цикле есть]
Три. Нуль. Два. Восемь. Восемь. Четыре [то есть 488 203],
и в ее ущербном узле.*

Восемь. Три. Два. Два. Три. Два [то есть 232 238].

На первый взгляд использование витиеватых альтернативных названий для каждого числа может показаться бесполезным, но на самом деле оно совершенно осмысленно. В те периоды в истории, когда рукописи были

недолговечны и легко портились, астрономам и астрологам требовался способ резервного хранения данных для точной передачи чисел. Последовательности цифр легче запомнить, если они описаны в стихах с использованием разнообразных имен, нежели когда при их записи используется набор безликих, похожих друг на друга обозначений.

Другая причина, по которой числа передавались изустно, состояла в том, что имена числительные, возникавшие в различных районах Индии для чисел от одного до девяти (к нулю мы вернемся чуть позже), были разными. Два человека из разных районов и использующие разные числительные, могли говорить о числах и понимать друг друга, произнося слова, обозначающие числа. К 500 году в Индии, однако, установилось определенное единство в использовании числительных и были узаконены три основных элемента, которые составляют современную десятичную числовую систему: десять цифр, зависимость значения от позиции, а также — к всеобщей радости — нуль.

Из-за простоты использования индийский метод быстро распространился по Ближнему Востоку и прочно утвердился в исламском мире, вот почему эта система приобрела известность под неправильным названием арабской. Далее метод проник в Европу благодаря предприимчивому итальянцу Леонардо Фибоначчи (Фибоначчи на итальянском языке означает «сын Боначчи»). Фибоначчи впервые познакомился с индийскими числительными еще в детстве, в городе Буджия (теперь это алжирский город), где его отец работал на Пизанской таможне. Осознав, что эта система намного превосходит римскую, Фибоначчи написал книгу о десятичной позиционной системе и опубликовал ее в 1202 году под названием «Liber Abaci». Книга начинается с хорошей новости:

Имеется девять индийских цифр

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Используя эти девять цифр вместе со знаком 0, который арабы называют «зефир», можно записать любое число, как и будет продемонстрировано.

Знакомством с индийской системой Запад во многом обязан именно «Liber Abaci» — гораздо больше, чем какой бы то ни было другой книге. В своем труде Фибоначчи описал, как можно умножать и делить, используя значительно более быстрые и элегантные методы, чем те, что были до того известны европейцам. В наши дни основы арифметики с использованием арабских числительных могут показаться безотрадно скучными, но в

начале XIII века они воспринимались как настоящее чудо.

Впрочем, не все сразу согласились сменить привычки. Во-первых, профессиональные вычислители на абаке ощущали угрозу, исходящую от более простого метода, а во-вторых, время для публикации книги оказалось не очень удачным: «Liber Abaci» вышла в период Крестовых походов, и церковь испытывала понятную подозрительность ко всему, что имело арабскую, исламскую, подоплеку. Некоторые даже усмотрели в новой арифметике дело рук дьявола — причем как раз по причине ее гениальной изобретательности. Страх перед арабскими числительными проявился и в этимологии некоторых современных слов. Из зефира возник «зеро», то есть нуль, но кроме того и португальское «chifre», означающее рога [дьявола], а также английское слово «cipher» — шифр, код. Некоторые ученые видят причину этого в том, что с числами, включающими «зефир», работали втайне, вопреки воле церкви.

В 1299 году во Флоренции арабские числительные были запрещены, потому что, как утверждалось, плавно написанные арабские символы легче подделать, чем ясные и выразительные римские V и I. Из 0 можно сделать 6 или 9, а 1 ничего не стоит преобразовать в 7. Как следствие, римские числительные окончательно ушли со сцены лишь примерно в конце XV века. Отметим, что для утверждения отрицательных чисел потребовалось гораздо больше времени — это произошло лишь в XV столетии, — поскольку многие были уверены, что они используются при вычислениях незаконных денежных ссуд или при ростовщических сделках, считавшихся святотатственными.

С принятием арабских чисел арифметика смогла соединиться с геометрией и превратиться из инструмента лавочников в настоящий составной элемент западноевропейской математики. И тем самым открыла путь, ведущий к научной революции.

*

Еще один, менее далекий по времени, вклад Индии в мир чисел — это арифметические приемы, собрание которых известно как ведическая математика. Их открыл в начале XX века молодой свами^[21] — Бхарати Кришна Тиртха^[22]. Он утверждал, что обнаружил их в Ведах. (Как бы вы реагировали, если бы некий священник заявил, что нашел в Библии метод решения квадратных уравнений?) Ведическая математика основана на следующем списке из 16 коротких изречений, или сутр, которые, согласно Тиртхе, не прописаны где бы то ни было в Ведах в явном виде, но извлекаются оттуда «с помощью интуитивного озарения»:

1. *На единицу больше, чем предыдущий*
2. *Все из 9 и последнее из 10*
3. *Вертикально и крест-накрест*
4. *Переставляй и применяй*
5. *Если сумма та же самая, то нуль*
6. *Если один в отношении, то другой есть нуль*
7. *Умножением и вычитанием*
8. *Дополнением и не-дополнением*
9. *Дифференциальное исчисление*
10. *По недостающему количеству*
11. *Частное и общее*
12. *Остатки по последней цифре*
13. *Последнее и дважды предпоследнее*
14. *На единицу меньше, чем предыдущий*
15. *Произведение суммы*
16. *Все множители*

Всерьез ли это писалось? Да, и абсолютно всерьез. Тиртха был одним из наиболее уважаемых мудрецов своего поколения. В детстве он был вундеркиндом и к двадцати годам изучил санскрит, философию, английский язык, математику, историю и естественные науки, кроме того, стал талантливым оратором. Уже в самом начале своей взрослой жизни он понял, что ему предназначено судьбой занять видное положение в религиозных кругах Индии. Действительно, в 1925 году Тиртха был признан воплощением Шанкарачарьи и получил в свое ведение основанный древним святым, имеющий национальное значение монастырь в Пури, Орисса, на берегу Бенгальского залива. Этот пост — один из самых высокопоставленных в традиционном индуистском обществе. Как раз в Пури — центр фестиваля колесниц Рат Ятра — я и приехал, надеясь встретить там Шанкарачарью, официального главу ведической математики.

В 1930-х и 1940-х годах, исполняя роль Шанкарачарьи, Тиртха регулярно путешествовал по Индии — читал проповеди перед десятками тысяч людей и раздавал духовные наставления, но кроме того еще и пропагандировал свой новый способ вычислений. Те 16 сутр, учил он, следовало использовать так, как если бы они были математическими формулами. Хотя некоторые из них и могут показаться не слишком внятными, подобно названиям глав в книге для инженеров или нумерологическим мантрам, на самом деле они указывают на ясные правила. Одно из самых простых и понятных — правило номер два: «Все

из 9 и последнее из 10». Его надо применять всякий раз, когда производится вычитание числа из степени десятки, например, 1000. Если я желаю вычислить, скажем, $1000 - 456$, то я буду вычитать 4 из 9, 5 из 9 и 6 из 10: другими словами, первые два числа из 9, а последнее из 10. Ответ равен 544. (Остальные сутры предназначены для применения в других ситуациях, часть из которых мы рассмотрим ниже.)

Тиртха пропагандировал ведическую математику в качестве дара, который он бескорыстно преподносил своему народу. Тиртха утверждал, что математику, изучаемую в школе примерно 15 лет, можно выучить всего за восемь месяцев — нужно только использовать его сутры. Более того, он утверждал, что его систему можно распространить не только на арифметику, но и на алгебру, геометрию, математический анализ и астрономию. Благодаря моральному авторитету Тиртхи, его харизме и ораторскому таланту люди его просто обожали. На широкую публику, писал он, ведическая математика «произвела колоссальное впечатление, мало того — она вызывала трепет, изумляла и ошеломляла!». Для тех, кто спрашивал, является ли его метод математикой или магией, у него был готовый ответ: «Тут и то и другое. Магия, до тех пор, пока ты ее не понял, и математика, как только это случится».

*

В 1958 году, в уже весьма почтенном возрасте, Тиртха посетил Соединенные Штаты, что вызвало большую полемику — индуистским духовным лидерам не разрешалось покидать страну, и то был первый раз, когда какой бы то ни было Шанкарачарья выезжал за пределы Индии. Его поездка вызвала колоссальное любопытство в Соединенных Штатах, и, когда Тиртха добрался до Калифорнии, газета «Los Angeles Times» назвала его «одним из самых значительных — и наименее известных — людей в мире».

Программа пребывания Тиртхи была плотно забита лекциями и выступлениями на телевидении. Как правило, он говорил о мире во всем мире, однако одну лекцию он полностью посвятил ведической математике. Местом действия был Калифорнийский технологический институт, знаменитый Калтех — одно из самых престижных научных учреждений в мире. Тиртха, весивший не более пятидесяти килограммов, в традиционных одеяниях, торжественно уселся в кресло перед слушателями и тихим голосом, в котором, однако, слышались командные нотки, заговорил: «С самого детства я в равной степени увлекался как метафизикой, так и математикой. И не нахожу в этом ничего сложного».

Тиртха начал с того, что показал, как умножить 9×8 без использования таблицы умножения. Для этого надо воспользоваться сутрой «Все из 9 и последнее из 10», хотя лишь задним числом становится ясно почему.

Сначала он написал мелом на доске цифру 9, а за ней — разность между 9 из 10, составляющую -1. Ниже он написал цифру 8, а затем — разность между 8 и 10, составляющую -2:

$$\begin{array}{r} 9 \ -1 \\ \times 8 \ -2 \end{array}$$

Первую цифру ответа можно получить четырьмя различными способами: сложить числа в первом столбце и вычесть десять ($9 + 8 - 10 = 7$);

сложить числа во втором столбце и прибавить десять ($-1 - 2 + 10 = 7$);

сложить числа, стоящие на любой из диагоналей ($9 - 2 = 7$ или $8 - 1 = 7$).

В результате неизменно получается семь:

$$\begin{array}{r} 9 \ -1 \\ \times 8 \ -2 \\ \hline 7 \end{array}$$

Вторая цифра ответа вычисляется путем перемножения двух чисел во втором столбце: $(-1) \times (-2) = 2$. Окончательный ответ равен 72:

$$\begin{array}{r} 9 \ -1 \\ \times 8 \ -2 \\ \hline 7 \ 2 \end{array}$$

меня этот трюк вызывает чувство глубочайшего удовлетворения. Запись однозначного числа рядом с числом, выражающим его отличие от десяти, до некоторой степени подобна разборке данного числа на части с целью увидеть его внутреннее содержание, выявить его эго и альтерэго. Таким путем достигается более глубокое понимание поведения чисел. Пример типа 9×8 , конечно, совершенно обыденный, но стоит только копнуть поглубже, как неожиданно проступят изящество и порядок. Данный метод работает не только для 9×8 , но и для любой пары чисел. Тиртха далее написал мелом другой пример, 8×7 :

$$\begin{array}{r} 8 \ -2 \\ \times 7 \ -3 \end{array}$$

Как и раньше, первую цифру ответа можно получить любым из четырех способов: $8 + 7 - 10 = 5$, или $-2 - 3 + 10 = 5$, или $8 - 3 = 5$, или же $7 - 2 = 5$.

Вторая цифра есть произведение цифр во втором столбце: $(-2) \times (-3) = 6$.
Ответ равен 56.

Способ, которым действует Тиртха, сводит умножение двух однозначных чисел к сложению и умножению разниц между исходными числами и числом десять. Другими словами, умножение двух однозначных чисел больше пяти сводится к некоторому сложению и умножению двух чисел меньше пяти. А это означает, что можно умножать на шесть, семь, восемь и девять без обращения к верхней (выше пятерки) части таблицы умножения. Это полезно для тех, кому запоминание таблицы умножения дается с трудом.

Этот метод по сути подобен вычислению на пальцах, который использовался в Европе по крайней мере с эпохи Возрождения и применялся во французских и российских деревнях чуть ли не до конца 1950-х годов. На каждой руке пальцам приписаны числа от 6 до 10. Чтобы перемножить два числа, скажем 8 и 7, соединим палец 8 с пальцем 7. Число цифр выше соединенных пальцев с одной стороны вычитаем из числа, соответствующего соединенному пальцу с другой стороны (или $7 - 2$, или $8 - 3$), что дает 5. Число цифр выше соединенных пальцев с каждой из сторон — 2 и 3 — затем перемножается, что дает 6. Ответ, как и раньше, равен 56.

*

Далее в своем выступлении Тиртха продемонстрировал, что данный метод работает и для умножения двузначных чисел, на примере 77×97 . Он записал на доске:

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times 97 \\ \hline \end{array}$$

Затем, вместо того чтобы выписывать разницу между числами 77 и 10, он записал отличие каждого из чисел от 100 (здесь-то и вступает в игру вторая сутра: когда мы вычитаем число из 100 или из любой большей степени числа 10, все цифры числа вычитаются из 9, кроме самой последней, которая вычитается из 10):

$$\begin{array}{r} 77 - 23 \\ \times 97 - 3 \\ \hline \end{array}$$

Как и прежде, для получения первой части ответа имеются четыре возможности. Тиртха выбрал два диагональных сложения: $77 - 3 = 97 - 23 = 74$:

$$\begin{array}{r} 77 - 23 \\ \times 97 - 3 \\ \hline 74 \end{array}$$

Вторая часть ответа получается, если перемножить обе цифры в правом столбце столбце: $(-23) \times (-3) = 69$:

$$\begin{array}{r} 77 - 23 \\ \times 97 - 3 \\ \hline 74 \quad 69 \end{array}$$

Ответ равен 7469.

«С помощью этих формул уравнения существенно упрощаются», — отметил Тиртха. Это высказывание искренне порадовало аудиторию. Хотя смех могла вызвать просто некоторая абсурдность ситуации, когда почтенный гуру в балахоне обучает основам арифметики самых способных студентов-математиков в Соединенных Штатах. А может, показанные Тиртхой арифметические фокусы и правда развеселили слушателей. Арабские числительные — это кладезь скрытых структур, даже на таком простом уровне, как перемножение двух однозначных чисел.

Далее Тиртха перешел к способам возведения в квадрат, деления, а затем — к алгебре. Аудитория, судя по всему, откликнулась с энтузиазмом. Когда лекция закончилась, один из слушателей спросил сидевшего рядом приятеля: «Ну как тебе?» На что тот ответил: «Просто обалдеть!»

Вернувшись в Индию, Тиртха получил приказ явиться в священный город Варанаси, где специальный совет индуистских старейшин обсудил совершенное им нарушение протокола — выезд за пределы страны. Было решено, что его поездка — первый и последний раз, когда какому бы то ни было Шанкарачарье было дозволено отправиться за рубеж; Тиртхе же после предписывалось пройти через очистительный ритуал — на тот случай, если во время своих путешествий он все же вкусил неиндуистской пищи. Через два года он скончался.

*

В гостинице в Пури, где я остановился, я встретил двух ярых поборников ведической математики и узнал от них много нового. Один из них — Кеннет Уильямс, 62-летний бывший преподаватель математики из

Южной Шотландии — написал несколько книг на эту тему. «Этот метод так прекрасно изложен и выстроен в такую ясную систему, — сказал он мне. — Когда я впервые узнал о нем, я подумал — именно такой и должна быть математика». Уильямс — невзрачный, молчаливый человек, со лбом мыслителя, с аккуратной, тронутой сединой бородкой и голубыми глазами, прикрытыми тяжелыми веками. Вторым энтузиастом ведической математики был гораздо более разговорчивый Горав Текривал — 29-летний брокер из Калькутты, в безупречной белой рубашке и с темными очками от Армани. Текривал — президент Ведического математического форума Индии. Эта организация имеет свой веб-сайт, организует лекции и продает DVD.

Текривал помог мне добиться аудиенции у Шанкарачарьи. Естественно, он и Уильямс пожелали составить мне компанию. Мы наняли моторикшу и отправились в путь в Говардхан-Мат — название места звучало многообещающе в смысле математики, но, увы, не имело к ней никакого отношения и обозначало монастырь или храм. Мы ехали по небольшим улочкам, вдоль которых протянулись ряды торговых палаток, где продают еду и узорчатые шелковые ткани. Монастырь Мат представляет собой простое здание из кирпича и бетона размером с небольшую сельскую церковь. Оно окружено пальмами и садом с песчаной почвой, где выращивают базилик, алоэ и манго. Во внутреннем дворике растет баньян, ствол которого украшен оранжево-желтой тканью. Считается, что под этим деревом сидел и медитировал Шанкара — основатель этого ордена, индуистский мудрец, живший в VIII веке. Единственный современный элемент здания — сияюще-черный фасад второго этажа: покои Шанкарачарьи сделали пуленепробиваемыми после того, как в адрес монастыря прозвучали угрозы со стороны мусульманских террористов.

Нынешний Шанкарачарья из Пури — Нисчалананда Сарасвати, унаследовавший свой сан от преемника Тиртхи. Сарасвати гордится математическим наследием Тиртхи и уже опубликовал пять книг о ведическом подходе к числам и вычислениям. Нас встретили и препроводили в комнату, которую Шанкарачарья использует для аудиенций. Она была обставлена довольно скромно — мы увидели старинный диван с обивкой глубокого красного цвета и стоящее перед ним низкое кресло с большим сиденьем и деревянной спинкой, покрытое красным платком. То был трон Шанкарачарьи. Ожидая прибытия святого мудреца, мы уселись на полу лицом к креслу.

Наконец Сарасвати, облаченный в бледно-розовые одежды, вошел в комнату. Затем его старший ученик прочитал стихи религиозного

содержания, после чего Сарасвати сложил руки для молитвы и обратился к изображению Шанкары на задней стене. Усевшись наконец на своем троне — в позе полулотоса, — он придал своему лицу подобающее выражение, нечто среднее между безоблачностью и печалью. Перед началом церемонии стоявший передо мной человек в синих одеждах бросился на пол и растянулся перед троном, раскинув руки. Раздраженно охая и вздыхая — ни дать ни взять рассерженный дедуля, — Шанкарачарья без лишних церемоний велел его выпроводить.

Религиозные традиции требуют, чтобы Шанкарачарья изъяснялся на хинди, поэтому я попросил старшего ученика быть моим переводчиком. Первый вопрос, который я задал, звучал так: «Какова связь между математикой и духовностью?» Через несколько минут последовал ответ: «По моему мнению, создание, существование и уничтожение всей нашей Вселенной всегда происходят в математических формах. Мы не делаем различия между математикой и духовностью. Мы воспринимаем математику как первоисточник индийских философских учений».

Затем Сарасвати рассказал историю о том, как однажды в лесу встретились два правителя. И вот первый правитель сказал второму, что ему достаточно лишь раз взглянуть на дерево, чтобы сказать, сколько на нем листьев, а затем произнес число. Второй правитель не поверил ему и принялся, срывая листья с дерева, пересчитывать их по одному. Закончив счет, он получил число — то самое, которое сообщил ему первый правитель. Сарасвати заметил, что эта история свидетельствует о том, что у древних индийцев была способность пересчитывать много объектов, просто рассматривая их как целое, вместо того чтобы перебирать их один за другим. Это и многие другие навыки той эпохи, добавил он, ныне утеряны. «Все эти потерянные знания можно восстановить с помощью серьезного созерцания, серьезной медитации и серьезных усилий», — сказал он. Процесс изучения древних писаний с целью спасения древнего знания, добавил он, — это именно то, что Тиртха делал с математикой.

В течение всей аудиенции в комнате присутствовало около двух десятков людей — они хранили молчание, пока Шанкарачарья говорил. Ближе к концу церемонии один человек среднего возраста — как выяснилось, консультант по программному обеспечению из Бангалора — задал вопрос о значении числа 10^{62} . Это число присутствует в Ведах, сказал он, а потому *должно* что-нибудь означать. Шанкарачарья согласился с ним. И далее началась дискуссия по поводу того, что индийское правительство пренебрегает наследием страны. Шанкарачарья посетовал, что тратит большую часть своего времени и сил на защиту

традиционной культуры, в связи с чем ему не удастся уделять достаточно времени математике. В тот год он посвятил ей всего пятнадцать дней...

*

На следующий день за завтраком я спросил вчерашнего компьютерного консультанта, чем вызван его интерес к числу 10^{62} , и он прочел мне целую лекцию о научных достижениях Древней Индии. Тысячи лет назад, сказал он, индийцы знали о мире гораздо больше, чем известно сейчас. Он упомянул о том, что они могли летать на аэропланах. Когда я спросил, имеются ли тому какие-либо доказательства, он ответил, что археологи нашли вырезанные на камне изображения самолетов, которым тысячи лет. Использовали ли эти самолеты реактивные двигатели? Нет, сказал он, они черпали энергию из магнитного поля Земли. Эти летательные аппараты были сделаны из композитных материалов. Скорость их была небольшой — между 100 и 150 километрами в час. Постепенно мои вопросы стали раздражать его все больше и больше, поскольку мое желание получить должное научное объяснение воспринималось им как оскорбление индийского научного наследия. В конце концов он больше не захотел со мной говорить.

Хотя ведическое знание является фантастическим, оккультистским и, в общем, довольно сомнительным, ведическая математика вполне выдерживает тщательное, критическое рассмотрение, несмотря на то что сутры по большей части туманны вплоть до полного отсутствия смысла, а принятие истории об их происхождении в Ведах требует временной атрофии способности к сомнению. Некоторые из методов столь специфичны, что представляются не более чем курьезами — взять хотя бы подсказки для превращения дроби $1/19$ в десятичную. Но некоторые и правда очень ясные и точные.

Рассмотрим пример умножения 57×43 , к которому мы уже обращались в данной главе. Стандартный метод умножения этих чисел состоит в том, чтобы записать две промежуточных строки, а затем сложить их. Но, используя третью сутру — «Вертикально и крест-накрест», — можно довольно ловко найти ответ таким способом:

Шаг 1

Запишем числа друг над другом:

5	7
4	3

Шаг 2

Перемножим цифры в правом столбце: $7 \times 3 = 21$. Последняя цифра этого числа есть последняя цифра в ответе. Запишем ее внизу в правом столбце и перенесем возникшую 2:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ \times \quad 4 \quad 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

Шаг 3

Найдем сумму скрестных произведений: $(5 \times 3) + (7 \times 4) = 15 + 28 = 43$. Прибавим перенесенную 2, что даст 45. Последняя цифра этого числа — то есть 5 — записывается внизу в левом столбце, а 4 переносится:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ \times \quad 4 \quad 3 \\ \hline 5 \quad 1 \end{array}$$

Шаг 4

Перемножим цифры в левом столбце: $5 \times 4 = 20$. Прибавим к этому перенесенную 4, что даст 24, и получим окончательный ответ, 2451:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ \times \quad 4 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

Данный метод можно обобщить на умножение чисел любой величины. Изменения затрагивают только порядок, в котором числа скрестно перемножаются.

Рассмотрим, например, умножение 376×852 :

$$\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 6 \\ 8 \quad 5 \quad 2 \end{array}$$

Шаг 1

Начинаем с правого столбца: $6 \times 2 = 12$:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 6 \\
 \times \quad 8 \quad 5 \quad 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Шаг 2

Далее берем сумму скрестных произведений между столбцом единиц и столбцом десятков: $(7 \times 2) + (6 \times 5) = 44$ плюс перенесенная 1. Получается 45:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 6 \\
 \times \quad 8 \quad 5 \quad 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Шаг 3

Теперь переходим к скрестным произведениям между столбцом единиц и столбцом сотен и прибавляем к ним вертикальное произведение в столбце десятков: $(3 \times 2) + (8 \times 6) + (7 \times 5) = 89$ плюс еще перенесенная 4. Получается 93:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 6 \\
 \times \quad 8 \quad 5 \quad 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Шаг 4

Сдвигаясь налево, перемножим накрест первые два столбца: $(3 \times 5) + (7 \times 8) = 71$, к чему прибавим перенесенную 9. Получается 80:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 6 \\
 \times \quad 8 \quad 5 \quad 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Шаг 5

И наконец, найдем вертикальное произведение в левом столбце: $3 \times 8 = 24$, к чему прибавим перенесенную 8. Получается 32. Окончательный ответ: 320 352.

$$\begin{array}{r}
 \times \\
 3 \\
 8 \\
 \hline
 3 2 0 3 5 2
 \end{array}$$

«Вертикально и крест-накрест», или «скрестное умножение», оказывается быстрее, чем умножение столбиком и занимает меньше места. Кеннет Уильямс сказал мне, что всякий раз, как он объясняет ведический метод школьникам, они воспринимают его очень легко. «Почему же, — спрашивают его дети, — нам не объясняли такого раньше?» В школах предпочитают умножение столбиком по той причине, что в нем подробно расписаны все промежуточные стадии вычисления. При использовании приема «Вертикально и крест-накрест» часть алгоритма остается скрытой.

Уильямс полагает, что этот прием — штука небесполезная и даже может помочь более слабым ученикам. «Наша задача — сориентировать, а не требовать, чтобы дети знали все и всегда. Некоторым детям хочется знать, как работает алгоритм умножения, другие не желают вникать в детали, и все, что им нужно, — это иметь возможность выполнить вычисление». Если учитель настаивает на следовании общим, но непонятным правилам, сказал он, то может оказаться, что ребенок так и не научится умножать и вообще ничего не получит от обучения. А для более сообразительных детей, добавил Уильямс, ведическая математика оживляет преподавание арифметики. «Математика — предмет творческий. Коль скоро дети видят, что имеются различные методы, им приходит в голову, что они и сами могут изобрести свой собственный, и таким образом начинают относиться к предмету более творчески. Математика — на самом деле штука веселая, даже забавная, а ведическая математика дает хороший способ преподавать ее именно таким образом».

*

Одной аудиенции с Шанкарачарьей не хватило, чтобы обсудить все, что хотелось, так что мне предоставили еще одну. В самом начале церемонии старший ученик заявил: «Мы хотели бы кое-что сказать касательно нуля». После чего сам Шанкарачарья в течение десяти минут оживленно вещал на хинди, а старший ученик переводил. «В современной математической системе ноль рассматривается как несуществующая сущность, — объявил он. — Мы намерены исправить это аномальное положение. Ноль нельзя рассматривать как несуществующую сущность. Попросту говоря, одна и та

же сущность не может существовать в одном положении и не существовать в другом». Суть рассуждения Шанкарачарьи, как мне кажется, сводилась к следующему. Люди рассматривают 0 внутри числа 10 как существующий, но при этом 0 сам по себе рассматривается как нечто несуществующее. Здесь имеется противоречие: нечто должно или существовать, или нет. Так что ноль существует. «В ведической литературе ноль рассматривается как вечносущее число, — сказал он. — Ноль нельзя никаким образом уничтожить. Он представляет собой неразрушаемый фундамент. Он лежит в основе всего». Я решил больше не задавать вопросов, поскольку мои замечания сначала переводили на хинди, обсуждали, а потом ответ переводили обратно на английский, так что эти ответы всякий раз запутывали меня еще больше. Пусть, подумал я, переводимые слова просто проплывают надо мной, пока аудиенция не закончится.

Я отвлекся и стал разглядывать Шанкарачарью. На нем было оранжевое одеяние, с большим узлом, завязанным сзади на шее, а его лоб был вымазан бежевой краской. Интересно, размышлял я, как это — жить так, как живет он. Мне говорили, что он спит в пустой комнате, где нет никакой мебели, ест каждый день одно и то же надоевшее карри и не испытывает никакой необходимости или привязанности к собственности. В самом начале церемонии к нему подошел паломник и вручил ему чашу с фруктами. Приняв фрукты, Шанкарачарья немедленно раздал их нам. Мне досталось манго.

Всячески пытаюсь осмыслить мудрость Шанкарачарьи, я стал думать об утверждении, что «ноль есть существующая сущность», и повторял его в своей голове как мантру. Внезапно ход моих мыслей нарушился, вслед за чем пришло более глубокое понимание этой фразы. Согласно индуистскому мышлению, ничто не было ничем. Ничто было всем. И аскетичный, добровольно отказавшийся от всех земных благ Шанкарачарья был идеальным олицетворением этого ничто. Напротив меня восседал господин Ноль собственной персоной — воплощение «шуньи» в крови и плоти.

Индийской философии так же внутренне присуща концепция «несуществования», как и индийской математике — концепция нуля. Концептуальный скачок, приведший к изобретению нуля, произошел в цивилизации, которая приняла пустоту как суть Вселенной. Символ изображения нуля, возникший в Древней Индии, в полной мере воплотил в себе главное откровение Шанкарачарьи о том, что математику невозможно отделить от духовности. Окружность, олицетворяющая нуль, была выбрана потому, что выражает циклическое движение небесного свода. Нуль означает ничто, и это означает вечность.

*

Законная гордость, связанная с изобретением нуля, привела к тому, что математическое мастерство стало частью индийской национальной идентичности. Школьникам предписано учить таблицу умножения до 20, что в два раза больше, чем учил я в обычной английской школе^[23]. В предшествующие десятилетия индийские школьники должны были заучивать таблицу умножения до 30. Один из ведущих неведических индийских математиков С. Г. Дани сказал мне по этому поводу: «Когда я был ребенком, у меня сложилось твердое впечатление, что математика представляет собой нечто исключительно важное». Для взрослых было обычным делом задавать детям математические задачи, и правильные решения весьма приветствовались. «Помимо своей практической пользы, математика — это нечто такое, чему в Индии придается большое значение как среди коллег, так и в кругу друзей».

Дани — старший профессор математики в Институте фундаментальных исследований Тата в Бомбее. Он носит очки в черепаховой оправе, его курчавые волосы камуфлируют залысину на академический манер, верхнюю губу прикрывают усы. Он вовсе не фанат ведической математики; по его мнению, в Ведах нельзя найти арифметические методы Тиртхи, да и особой пользы от этих методов нет. «Не думаю, что они делают математику какой-то особенно интересной. Главное в них то, что эти алгоритмы ускоряют счет, а не то, что они делают это занятие таким уж интересным или позволяют лучше усвоить алгоритм вычислений. Весь интерес — в результате, а не в процессе».

Поэтому я был удивлен, когда Дани положительно отозвался о трудах Тиртхи, связанных с ведической математикой. Дани воспринимает Тиртху на эмоциональном уровне. «Я сочувствую ему, у него был комплекс неполноценности, который он попытался преодолеть. Когда я был ребенком, я тоже испытывал нечто похожее. В те годы (вскоре после

обретения независимости) многие в Индии полагали, что нам следует всеми правдами и неправдами забрать обратно (у британцев) все, что мы утратили. В наибольшей степени это относилось к предметам искусства, которые англичане вывезли из страны. Ведь мы действительно столько потеряли! Я был уверен — мы должны получить обратно эквивалентный объем того, что потеряли.

Ведическая математика — ошибочная попытка вернуть арифметику Индии».

*

Некоторые из приемов ведической математики настолько просты, что я задался вопросом, встречаются ли они где-нибудь еще в литературе по арифметике. Я решил, что хорошей отправной точкой для начала поисков будет книга Фибоначчи «Liber Abaci». Вернувшись в Лондон, я отыскал ее экземпляр в библиотеке, открыл там главу про умножение и увидел, что первый же из предложенных Фибоначчи методов — не что иное, как «вертикально и крест-накрест». Я исследовал вопрос несколько глубже и обнаружил, что умножение на основе «все из 9 и последнее из 10» было излюбленным методом нескольких европейских авторов, живших в XVI веке. (На самом деле имеется даже предположение, что эти методы повлияли на принятие знака $\times$. К 1631 году, когда $\times$ впервые появился в качестве обозначения для умножения, уже были опубликованы книги, в которых оба метода умножения иллюстрировались большими знаками, выполненными в виде пересекающихся линий.)

Ведическая математика Тиртхи, как представляется, есть, по крайней мере отчасти, переоткрытие некоторых арифметических приемов, широко распространенных во времена Возрождения. Может быть, они пришли из Индии, а может быть, и нет, но каково бы ни было их происхождение, очарование ведической математики для меня состоит в том, что она позволяет по-детски непосредственно радоваться числам, а также структурам и симметриям, которые в ней содержатся. Арифметика играет существенную роль в повседневной жизни, причем важно вычислять правильно, и именно поэтому нас столь методично учат ей в школе. Однако, сосредоточившись на практических аспектах, мы перестали замечать, насколько восхитительна индийская система числительных. Она стала огромным шагом вперед по сравнению со всеми предыдущими методами счета, и более того — оставалась непревзойденной в течение тысячи лет. Сейчас мы воспринимаем позиционную десятичную систему как нечто само собой разумеющееся, не задумываясь о том, насколько она

многогранна, изящна и ефективна.

Глава 4

Вокруг π

Автор путешествует по Германии ради того, чтобы стать свидетелем самого быстрого в мире умножения, совершаемого в уме, ищет окольный путь для того, чтобы начать говорить об окружностях и рассказать трансцендентную сказку, приводящую на диван в Нью-Йорке.

В начале XIX столетия до английской королевы Шарлотты^[24] дошла молва о вундеркинде Джордже Паркере Биддере — сыне девонширского каменщика. Она задала мальчику такой вопрос: «От мыса Лэндс-энд в Корнуолле до Фаррэтс-хэд в Шотландии 838 миль; сколько времени понадобится улитке, чтобы проползти это расстояние, если она ползет со скоростью 8 футов в день?»

Заданный вопрос и полученный ответ — 553 080 дней — упомянуты в популярной книге того времени «Краткий рассказ о Джордже Биддере, прославленном Чудо-Вычислителе, с приложением множества самых трудных вопросов, заданных ему в главных городах королевства, и его невероятно быстрых ответов». На ее страницах приведен список грандиознейших вычислений, сделанных ребенком, включая такую «классику», как вопросы «Чему равен квадратный корень из 119 550 669 121?» (ответ — 345 761 — последовал через полминуты) и «Сколько фунтов весит сахар, погруженный в 232 бочки, каждая из которых весит 12 центнеров, 1 четверть и 22 фунта?». (Ответ — 323 408 фунтов — также последовал через полминуты.)

Использование арабских цифр существенно упростило операцию сложения, но тут вдруг выяснилось, что некоторые люди отмечены поистине потрясающими арифметическими способностями. Нередко эти чудо-вычислители не преуспевали ни в чем другом, кроме как в действиях с числами. Один из самых ранних известных нам примеров — сельскохозяйственный рабочий из Дербишира Джедедия Бакстон, изумлявший всю округу своими способностями к счету, хотя он никогда не

учился ни читать, ни писать. Он мог, например, вычислить, какая сумма получится после 140-кратного удвоения фартинга. (Ответ, выраженный в фунтах, дается числом длиной в 39 цифр, плюс остаются 2 шиллинга и 8 пенсов.) В 1754 году интерес к таланту Бакстона достиг такого уровня, что его позвали в Лондон, где члены Королевского общества его внимательно обследовали. По всей видимости, он страдал некоторой формой высокофункционального аутизма. Например, когда его повели в театр на спектакль «Ричард III», действие на сцене оставило его совершенно равнодушным, он лишь сообщил, что актер совершил 5202 шага и произнес 14 445 слов.

В XIX веке «чудо-вычислители» блистали на сценах всего мира. Некоторые из них проявляли недюжинные способности уже в самом юном возрасте. Зира Колберн из Вермонта впервые выступил на публике в пятилетнем возрасте, а в восемь приплыл в Англию с видами на громкий и прибыльный успех. (Колберн, кстати, имел от рождения 12 пальцев, хотя осталось неизвестным, давало ли ему это какие-либо преимущества при обучении счету.) Девонширский парень Джордж Паркер Биддер был современником Колберна. Пути двух вундеркиндов пересеклись в 1818 году, когда Колберну было 14 лет, а Биддеру — 12, и их встреча в одном лондонском пабе неизбежно привела к математической дуэли.

Колберна спросили, как много времени понадобится, чтобы обогнуть земной шар на воздушном шаре, если шар движется со скоростью 3878 футов в минуту, а Земля имеет в окружности 24 912 миль. То был вопрос, который во всем мире задавали на состязаниях на получение неофициального титула самого всезнайского всезнайки на свете. Однако после девятиминутного размышления Колберн так и не смог дать ответ. Одна лондонская газета опубликовала разгромную статью, в которой говорилось, что оппоненту Колберна, напротив, для решения задачи понадобилось всего две минуты. Ответ — 23 дня, 13 часов и 18 минут — был встречен бурными рукоплесканиями. И на многие другие заданные ему вопросы американский мальчик отвечать отказался, тогда как юный Биддер ответил на все. В своей автобиографии «Воспоминания Зире Колберна, написанные им самим», американец, желая произвести благоприятное впечатление, излагает несколько иную версию: «Биддер продемонстрировал огромную силу и мощь ума в высших областях арифметики, — сначала пишет он, а затем пренебрежительно добавляет: — Но оказался не в состоянии извлекать корни и разлагать числа на множители». Кто же стал победителем, так и осталось неизвестным.

Некоторое время спустя профессора Эдинбургского университета

решили позаботиться об образовании Биддера, и он впоследствии стал сначала одним из лучших инженеров на строительстве железных дорог, а в конце концов — автором проекта и руководителем строительства дока королевы Виктории в Лондоне. Колберн же вернулся в Америку, стал священником методистской церкви и скончался в возрасте 35 лет.

Способности к быстрым вычислениям редко связаны с глубокими математическими озарениями и творческим началом. Мало кто из великих ученых обладал даром молниеносного счета, и более того — многие математики были на удивление слабы в арифметике. Александр Крейг Эйткин был хорошо известен в первой половине XX века как молниеносный вычислитель, а необычным было то, что он занимал при этом должность профессора математики в Эдинбургском университете. В 1954 году, выступая с лекцией в Лондонском обществе инженеров, Эйткин рассказал о некоторых приемах, которыми он пользуется при вычислениях, о различных алгебраических ухищрениях и — что особенно важно — о методах быстрого запоминания числа. В подтверждение своих слов он без запинки выдал десятичное разложение числа $1/97$, которое начинает повторяться только после 96 цифр.

Эйткин закончил свою лекцию горестным замечанием о том, что, как только он приобрел свой первый настольный калькулятор, его вычислительные способности стали ухудшаться. «Мастера устного счета, вероятно, как тасманийцы или миориоры^[25], обречены на вымирание, — предсказал он. — Поэтому вы вполне можете испытывать почти антропологический интерес к данному занятому экземпляру, и некоторые из здесь присутствующих смогут сказать в 2000 году: „Да, я знал одного такого!“»

Но вот тут Эйткин ошибся.

*

«Нейроны! На старт! Внимание! Марш!»

Сгорая от нетерпения, участники посвященного умножению турнира на чемпионате мира по устному счету перевернули свои листочки с заданиями. В аудитории Лейпцигского университета царил тишина, а мужчина и две женщины размышляли над первым вопросом:

$$29\,513\,736 \times 92\,842\,033.$$

Арифметика снова вошла в моду. Через тридцать лет после того, как повсеместное распространение первых дешевых электронных

калькуляторов привело к утрате навыков устного счета, неожиданно возникла обратная реакция. Газеты начали ежедневно печатать математические головоломки, популярные компьютерные игры с арифметическими задачками оттачивают наши мозги, а молниеносные вычислители соревнуются друг с другом во время регулярных международных турниров. Чемпионат мира по устному счету, основанный в 2004 году немецким прикладным математиком Ральфом Лауэ, проводится каждые два года. Чемпионат явился логической кульминацией двух хобби Ральфа Лауэ: устный арифметический счет и коллекционирование необычных рекордов. (Подобных таким, как наибольшее число виноградин, брошенных с расстояния 15 футов и пойманных ртом за одну минуту, — каковое число составляет 55.) Не обошлось без помощи Интернета, благодаря которому Лауэ познакомился с массой единомышленников — любители устного счета в целом отнюдь не экстроверты. Мировое сообщество вычислителей, или «матлетов», было представлено в Лейпциге довольно широко: туда съехались таланты из самых разных стран, таких как Перу и Иран, Алжир и Австралия.

Как оценить способности человека к вычислениям? Лауэ принял категории, уже предложенные Книгой рекордов Гиннесса: перемножение двух восьмизначных чисел, сложение десяти десятизначных, извлечение квадратного корня из шестизначного числа с восемью значащими цифрами и нахождение дня недели, на который выпадает любая дата между 1600 и 2100 годами. Последнее известно как календарные вычисления и представляет собой отблеск золотого века эстрадных молниеносных вычислителей, когда выступавшие спрашивали зрителей об их дате рождения и немедленно называли день недели, на который приходилась указанная дата.

Установление определенных правил, а также дух соревновательности имели свою цену — в жертву была принесена зрелищность мероприятия. Самый молодой из участников на чемпионате мира, 11-летний мальчик из Индии, проделывал вычисления на «воздушных счетах», — его руки неистово дергались, как будто передвигая воображаемые косточки, все же остальные участники вели себя тихо и спокойно, лишь время от времени быстро записывая свои ответы. (По правилам записывать можно только окончательный ответ.) Через 8 минут и 25 секунд 38-летний Алберто Кото из Испании поднял руку — как сгорающий от нетерпения школьник. Он выполнил за это время десять умножений двух восьмизначных чисел, побив мировой рекорд! Это и правда было фантастическое достижение, но наблюдать за ним было столь же интересно, как наблюдать за ходом

рутинного экзамена.

Однако в Лейпциге бросалось в глаза отсутствие самого, быть может, знаменитого в мире матлета — французского студента Алексиса Лемэра, который предпочитал иной критерий для оценки вычислительной силы. В 2007 году имя Лемэра, которому тогда было 27 лет, попало в газеты всего мира, после того как в лондонском Музее науки он за 70,2 секунды извлек корень 13-й степени из числа

85 877 066 894 718 045 602 549 144 850 158 599 202 771 247 748 960 87
674 592 650 724 521 841 103 664 923 661 204 223.

Достижение Лемэра было, без сомнения, весьма впечатляющим. В указанном числе 200 цифр, которые за 70,2 секунды едва можно успеть произнести. Но подтверждает ли этот «подвиг» его слова о том, что он — величайший молниеносный вычислитель всех времен и народов? По этому поводу в «вычислительной» среде мнения сильно разнятся, как и почти 200 лет назад, после битвы между Зирой Колберном и Джорджем Биддером.

Выражение «корень 13-й степени из x » означает число, которое при умножении само на себя 13 раз дает x . Лишь ограниченное количество чисел при умножении на себя 13 раз дает 200-значное число. (Это ограниченное количество — довольно большое. Оно находится в пределах около 400 триллионов различных вариантов, каждый из которых имеет длину в 16 цифр и начинается с двойки.) Поскольку число 13 — простое, а кроме того, считается несчастливым, вычисление Лемэра было окутано дополнительной аурой тайны. На самом же деле 13 обладает и некоторым преимуществом. Например, когда число 2 умножается на себя 13 раз, ответ заканчивается на цифру 2. Когда 3 умножается на себя 13 раз, ответ заканчивается на 3. То же верно для 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Другими словами, последняя цифра корня 13-й степени из некоторого числа такова же, что и последняя цифра этого исходного числа. Мы получили ее легко, вообще не прибегая ни к каким вычислениям.

Лемэр разработал алгоритмы, которые он не разглашает, для вычисления остальных 14 цифр в окончательном ответе. Приверженцы строгости утверждают — возможно, и несправедливо, — что его талант — это способность не столько к хитрым вычислениям, сколько к запоминанию жутко длинных последовательностей цифр. При этом они указывают, что Лемэр не может найти корень 13-й степени из любого 200-значного числа, которое ему сообщат. В Музее науки ему предложили несколько сот чисел, из которых он выбрал то, для которого и произвел вычисление.

Тем не менее выступления Лемэра в большей степени продолжают традиции старых эстрадных вычислителей. Зрители желают приобщиться к шоу, а не вникать в процесс. Наоборот, на чемпионате мира по устному счету у Кото не было возможности выбрать задачу для решения и он не пользовался никакими таинственными приемами. Он просто использовал таблицу умножения на числа от 1 до 9.

Беседуя с участниками соревнований в Лейпциге, я обнаружил, что многие из них увлеклись устным счетом благодаря Виму Клайну — голландскому эстрадному вычислителю, знаменитому в 1970-х годах. Клайн уже был ветераном цирков и мюзик-холлов, когда в 1958 году ему предложили работу в ведущем европейском физическом институте — Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) в Женеве. Он должен был выполнять там различные вычисления для физиков. Вероятно, он был последним человеком-вычислителем, получившим работу по своей специальности. По мере развития компьютеров его искусство становилось ненужным, и, выйдя на пенсию, он вернулся в шоубизнес — снимался на телевидении. (Клайн, кстати, на самом деле был первым, кто популяризировал вычисления корней 13-й степени.)

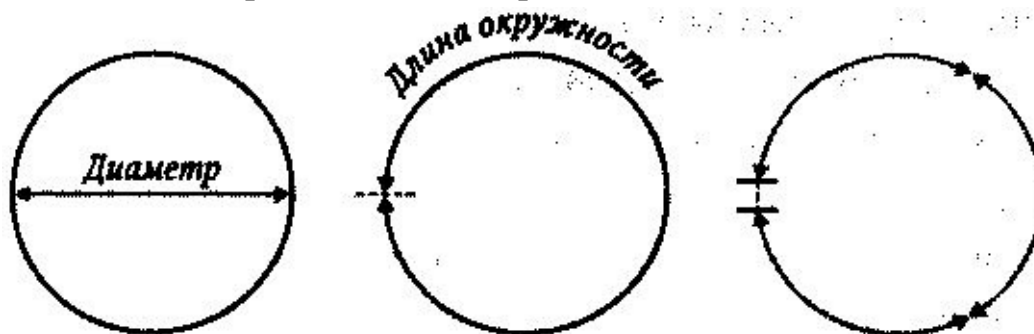
За столетие до Клайна другой эстрадный вычислитель, Йохан Захария Дазе, также поступил на работу в научное учреждение, чтобы вычислять необходимые суммы. Дазе родился в Гамбурге и начал выступать в качестве эстрадного вычислителя еще подростком. Тогда он и попался на глаза двум видным математикам. В те времена, до изобретения электронных или механических калькуляторов, ученые всякий раз, когда им требовалось выполнить сложное умножение или деление, полагались на таблицы логарифмов. У каждого числа есть свой собственный логарифм (я буду говорить об этом подробнее в следующей главе), который можно вычислить, пользуясь трудоемкой процедурой сложения дробей. Дазе вычислил натуральные логарифмы первых 1 005 000 чисел с точностью до 7 десятичных разрядов каждый. Это заняло у него три года, и, по его словам, работа доставила ему удовольствие. Затем, по совету математика Карла Фридриха Гаусса, Дазе приступил к более масштабному предприятию: составлению таблиц множителей, на которые разлагаются все числа, лежащие между 7 000 000 и 10 000 000. Это означало, что он брал каждое из чисел в указанном диапазоне и вычислял его делители — то есть находил целые числа, на которые данное число делится. Например, у числа 7 877 433 только два делителя: 3 и 2 625 811. К моменту своей смерти в возрасте 37 лет Дазе реализовал значительную часть этой программы.

Однако гораздо чаще Дазе вспоминают совсем за другое вычисление. Еще подростком он вычислил число π с точностью в 200 разрядов, что для того времени было рекордом.

*

В окружающем нас мире окружности и круги присутствуют повсюду — и в видимой форме Луны, и в глазах людей и животных, и в срезе яйца, которое вы едите на завтрак. Привяжите собаку к шесту, воткнутому в землю, и путь, по которому она будет бегать вокруг шеста, охраняя территорию на натянутом поводке, будет окружностью. Окружность — это простейшая геометрическая форма. И древнему египтянину, прикидывающему, сколько зерна потребуется, чтобы засеять круглое поле, и римскому мастеровому, отмеряющему, сколько дерева пойдет на колесо, требовались вычисления, связанные с окружностями.

Уже в античные времена люди понимали, что отношение длины окружности к ее диаметру всегда одно и то же, независимо от величины окружности. Это отношение известно как число π , его величина — чуть больше трех. Так что если вы возьмете диаметр окружности и, слегка изогнув, приложите его к самой окружности, то окажется, что он укладывается в ней три с небольшим раза.



Хотя число π и представляет собой простое отношение, если выражать его через свойства окружности, задача нахождения его точного значения оказалась вовсе не простой. Эта неуловимость числа π тысячи лет завораживала математиков. И чего тут удивляться! π — единственное число, одновременно являющееся названием и песни (Кейт Буш)^[26], и парфюма (мужской туалетной воды от «Givenchy»). Кстати, из отдела «Givenchy» по связям с общественностью мне прислали следующий текст:

π — Пи

ЗА ПРЕДЕЛАМИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Прошло четыре тысячи лет, а эта тайна

*все еще остается тайной.
И хотя каждый школьник изучает π ,
этот знакомый символ
по-прежнему скрывает в себе бездны
величайшей сложности.
Почему мы выбрали π как вечный символ
мужского начала?
Все дело в знаках и указателях.
Если π — это история
долгой борьбы за достижение недостижимого,
то это и портрет
легендарного покорителя неизведанного,
идущего вперед в поисках Знания.
Пи говорит нам о мужчинах, обо всех мужчинах,
об их научном гении,
об их тяге к приключению, об их готовности
к действию
и об их стремлении к недостижимому.*

*

Самые ранние приближения числа π дошли до нас от древних вавилонян, использовавших значение $3\frac{1}{8}$, и от египтян, которые пользовались значением $4(\frac{8}{9})^2$, что в десятичных дробях выражается, соответственно, как 3,125 и 3,160.

Позднее, в Древней Греции, первым в череде гениев с необычайной страстью к числу π был Архимед — мыслитель, предпочитавший иметь дело с миром реальности, в отличие от Евклида, существовавшего в мире абстракций. Среди многочисленных изобретений Архимеда были гигантская катапульта и система зеркал, с помощью которых он сфокусировал солнечные лучи так, что поджег римские корабли во время осады Сиракуз. А кроме того, он оказался первым, кто предложил метод вычисления числа π .

Итак, Архимед нарисовал окружность, а затем построил два шестиугольника: один — вписанный в окружность, а другой — описанный вокруг нее, как указано на рисунке.

Одно это уже говорит нам, что значение числа π должно лежать где-то между 3 и 3,46 — это можно определить, вычисляя периметры двух шестиугольников. Если принять диаметр окружности равным 1, то

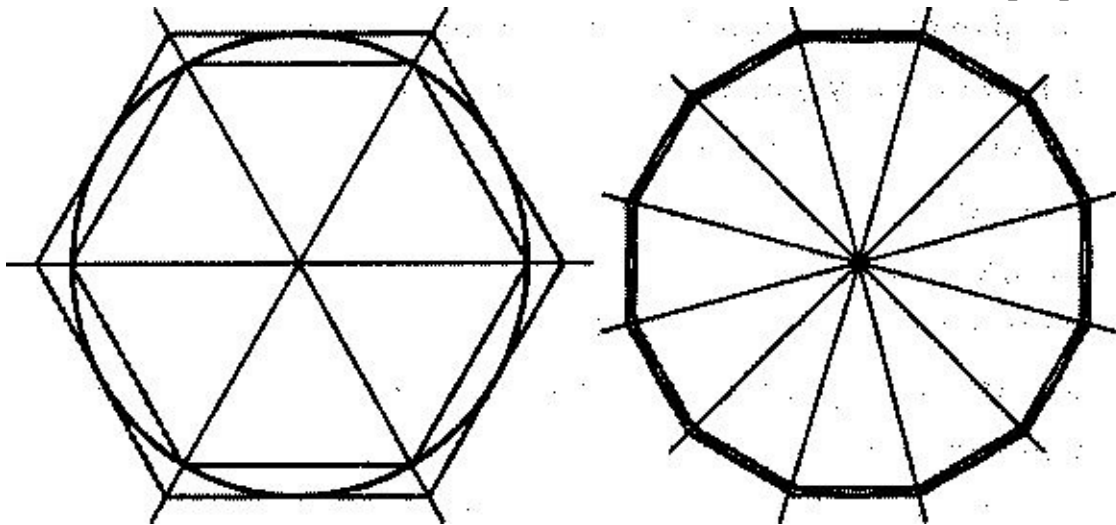
периметр внутреннего шестиугольника равен 3, что меньше, чем длина окружности, равная π , что в свою очередь меньше, чем периметр внешнего шестиугольника, равный $3\sqrt{2}$, то есть с точностью до двух десятичных разрядов — 3,46. (Архимед находил периметр внешнего шестиугольника, используя метод, который по сути был довольно канительным предшественником тригонометрии и который слишком сложен для того, чтобы здесь его приводить.) Итак,

$$3 < \pi < 3,46.$$

Если теперь повторить вычисление, используя два правильных многоугольника с более чем шестью сторонами, то для π получится более узкий интервал. Дело в том, что чем больше у многоугольника сторон, тем ближе его периметр к длине окружности, в чем можно убедиться, глядя на приведенный выше рисунок с двенадцатиугольником. Многоугольники ведут себя подобно стенам, смыкающимися вокруг π , зажимая его снаружи и изнутри, между все более узких пределов. Архимед начал с шестиугольников, а в конце довел дело до многоугольников с 96 сторонами, что позволило ему вычислить π следующим образом:

$$3^{10}/71 < \pi < 3^{1/7}.$$

Это дает $3,14084 < \pi < 3,14289$ — точность в два десятичных разряда.



Шестиугольники Двенадцатиугольники

Однако охотники за числом π не собирались на этом останавливаться. Все, что требовалось, дабы подобраться поближе к истинному значению этого числа, — это строить многоугольники со все большим числом

сторон. Лю Хуэй, живший в Китае в III веке, применил сходный метод, используя площадь многоугольника с 3072 сторонами, и получил пять десятичных разрядов числа π : 3,14159. Два столетия спустя Цзу Чунчжи и его сын Цзу Гэнчжи продвинулись дальше еще на одну цифру, до 3,141592, что потребовало многоугольника с 12 288 сторонами.

Грекам и китайцам мешали неуклюжие обозначения. Когда в конце концов математики стали применять арабские числительные с десятичной запятой, прежние рекорды тут же пали. В 1596 году голландский учитель фехтования Лудольф ван Цейлен, используя метод удвоения, дошел до многоугольника с 60×2^{29} сторонами и нашел значение π с точностью до 20 десятичных знаков. Опус, в котором он напечатал свой результат, заканчивался так: «У кого есть охота, пусть подойдет ближе». Он продолжал вычислять и получил число π с точностью до 32 и затем 35 десятичных знаков, каковые и были высечены на его надгробии. В Германии die Ludolphsche Zahl — число Лудольфа, или лудольфово число, — до сих пор допустимо в качестве названия числа π .

*

В течение двух тысяч лет единственный способ определить значение числа π состоял в использовании многоугольников.

Но в XVII веке Готфрид Лейбниц и Джон Грегори открыли новую страницу в истории числа π , предложив формулу

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots$$

Другими словами, четвертая часть π равна единице минус одна треть плюс одна пятая минус одна седьмая плюс одна девятая и т. д.: надо попеременно прибавлять и вычитать дроби с единичным числителем и со знаменателем, последовательно равным нечетным числам, устремляющимся в бесконечность. До этого ученые видели в десятичном разложении числа π лишь случайный набор цифр. И вдруг появилось одно из наиболее изящных, ничем не усложненных уравнений во всей математике. Оказалось, что образцовый представитель беспорядка несет некий порядок в своей ДНК.

Лейбниц пришел к этой формуле, используя «анализ» — мощный раздел математики, в котором для вычисления площадей, кривых и наклонов стали применяться новые представления о бесконечно малых величинах. Формула Лейбница представляет собой так называемый бесконечный ряд — сумму, которая продолжается и продолжается без

конца. И эта формула дает способ вычислить число π . Для начала нам надо умножить обе ее части на 4:

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \dots$$

Начав с первого члена и прибавляя один за другим остальные, получаем следующую последовательность (записанную в виде десятичных дробей):

$$4 \rightarrow 2,667 \rightarrow 3,467 \rightarrow 2,895 \rightarrow 3,340 \rightarrow \dots$$

Сумма подходит к числу π все ближе и ближе, а результат скачет все меньше и меньше. Тем не менее этот метод требует более 300 членов, чтобы ответ имел точность в два десятичных знака, так что он практически непригоден для тех, кто желает найти большее число цифр в десятичном разложении числа π .

В конце концов с помощью анализа удалось получить другие бесконечные ряды для π , менее симпатичные на вид, но более эффективные для действий с числами. В 1705 году астроном Абрахам Шарп применил такой ряд для вычисления π с точностью до 72 десятичных знаков, сокрушив продержавшийся столетие рекорд ван Цейлена, составлявший 35 знаков. Да, это было достойным достижением, но в нем было мало пользы. Решительно нет никаких практических причин для того, чтобы знать число π с точностью до 72 знаков, да, впрочем, и до 35 тоже. Инженерам, имеющим дело с прецизионными инструментами, вполне хватает четырех десятичных знаков, а чтобы вычислить длину окружности Земли с точностью до долей сантиметра, достаточно десяти знаков. Если взять 39 десятичных разрядов, то окажется возможным посчитать длину окружности, охватывающей всю известную нам Вселенную, с точностью порядка радиуса атома водорода. Дело, однако, было вовсе не в практической целесообразности — отнюдь не практические соображения двигали учеными эпохи Просвещения, одержимыми вычислением числа π . Цель охоты за цифрами заключалась в самой охоте, это было романтическое приключение. Через год после предпринятых Шарпом усилий Джон Мэчин добился точности в 100 знаков, а в 1717 году француз Тома де Ланьи прибавил к ним еще 27. К началу следующего столетия вперед вырвался Юрий Вега из Словении со своими 140 знаками.

В 1844 году, с головой погрузившись в работу на два месяца, немецкий молниеносный эстрадный вычислитель Захария Дазе отодвинул рекорд вычисления числа π до отметки 200 десятичных знаков. Дазе использовал ряд, который хотя на вид и сложнее, чем приведенная выше формула для π , но на самом деле гораздо удобнее в употреблении. Во-первых, потому что

он сходится к π с неплохой скоростью. Точность в два десятичных знака достигается уже после первых девяти членов. Во-вторых, с дробями $1/2$, $1/5$ и $1/8$, которые все время появляются в каждом третьем члене, удобно иметь дело. Если записать $1/5$ как $1/10$, а $1/8$ — как $1/2 \times 1/2 \times 1/2$, то все необходимые действия с этими членами можно свести к комбинациям удвоения и взятия половины. Дазе выписал справочную таблицу, к которой обращался в ходе вычислений, начиная с 2, 4, 8, 16, 32 и далее по мере надобности. Поскольку он выполнял вычисления числа π с точностью до 200 знаков, полученное в самом конце удвоение будет иметь 200 цифр в длину. Это происходит после 667 последовательных удвоений.

Дазе использовал такое разложение:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{5})^3 + (\frac{1}{8})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{5})^5 + (\frac{1}{8})^5}{5} - \dots$$

$$= 0,825 - 0,0449842 + 0,00632 - \dots$$

Отсюда $\pi = 4(0,825 - 0,0449842 + 0,00632 - \dots)$.

Учет одного члена дает 3,3,

учет двух членов — 3,1200

и учет трех — 3,1452.

Дазе недолго почивал на лаврах, поскольку на его рекорд очень скоро нацелились британцы, и по прошествии десяти лет Уильям Резерфорд вычислил π с точностью в 440 знаков. Он побуждал своего протеже Уильяма Шэнкса — математика-любителя, который держал школу с пансионом в графстве Дарэм, — не останавливаться на достигнутом. В 1853 году Шэнкс достиг 607 знаков, а в 1874-м — 707. Его рекорд продержался семьдесят лет, пока Д. Ф. Фергюсон из Королевского морского колледжа в Честере не нашел ошибку в вычислениях Шэнкса. Шэнкс сделал ошибку в 527-м знаке, а потому и все последующие тоже были неправильными. Фергюсон провел последний год Второй мировой войны, вычисляя число π вручную, и к маю 1945 года достиг 530 знаков. К июлю 1946-го он дошел до 620, и более никто никогда не вычислял π с помощью лишь ручки и листа бумаги.

Фергюсон был последним, кто охотился за цифрами вручную, и

первым, кто стал делать это, используя технику. Благодаря настольному калькулятору он прибавил почти 200 новых разрядов всего за год, так что в сентябре 1947 года π было известно с точностью до 808 десятичных знаков. А затем компьютеры изменили правила игры. Первым компьютером, сразившимся с π , был Электронный числовой интегратор и вычислитель ENIAC, построенный в последние годы Второй мировой войны по заказу армии США в Лаборатории баллистики в Мэриленде. Размером он был с небольшой дом. В сентябре 1949 года ENIAC за 70 часов работы вычислил π с точностью в 2037 знаков, побив предыдущий рекорд более чем на тысячу десятичных разрядов.

*

По мере появления новых знаков в числе π становилось все более ясно, что найденные числа не подчиняются никакому очевидному порядку. Однако только в 1767 году математики смогли доказать, что сумбурная последовательность цифр числа π никогда не повторяется. Это открытие вытекало из рассмотрения вопроса о том, числом какого *типа* может быть π .

Числа самого простого типа — *натуральные*. Это числа для счета, начинающиеся с единицы:

1, 2, 3, 4, 5, 6 ...

Натуральные числа, однако, имеют некоторое ограничение, поскольку идут только в одном направлении. Более полезны *целые числа*, которые состоят из натуральных, нуля и отрицательных натуральных чисел:

... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ...

Любое положительное или отрицательное целое число от минус бесконечности до плюс бесконечности входит в целые числа. Если бы нашлась гостиница с неограниченным числом этажей, а также с неограниченным числом все более глубоких подземных уровней, то кнопками в лифте там были бы все целые числа.

Числа другого основного типа — это дроби, которые представляют собой числа, записанные в виде a/b , где a и b — целые, причем b не равно 0. Поскольку дроби эквивалентны отношениям между целыми числами, они также называются рациональными числами^[27], и их бесконечно много. На самом деле имеется бесконечно много рациональных чисел уже между 0 и 1. Давайте, например, возьмем дробь, числитель которой равен 1, а знаменатель — натуральное число, больше или равное 2. Это дает

множество, составленное из

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Можно пойти дальше и доказать, что имеется бесконечно много рациональных чисел между любыми двумя рациональными числами. Пусть c и d — любые два рациональных числа, причем c меньше d . Точка на полпути между c и d представляет собой рациональное число — оно равно $(c + d)/2$. Назовем эту точку e . Теперь можно найти точку на полпути между c и e . Это $(c + e)/2$ — рациональное число, которое также лежит между c и d . Будем продолжать так до бесконечности, каждый раз разбивая расстояние между c и d на все меньшие и меньшие части. Не важно, сколь малым было расстояние между c и d в самый первый раз — между ними всегда найдется бесконечно много рациональных чисел.

Поскольку между любыми двумя рациональными числами всегда можно найти бесконечно много рациональных чисел, можно было бы подумать, что каждое число — рациональное. Без сомнения, именно на это одно время и надеялся Пифагор. Его метафизика основывалась на вере в то, что мир состоит из чисел и гармонических пропорций между ними. Существование числа, которое нельзя описать как отношение, по крайней мере сильно ослабляло его позиции, если не прямо им противоречило. Но, к несчастью для Пифагора, имеются числа, которые нельзя выразить в виде дроби, и к его немалому конфузу, одно из них дает его собственная теорема. Если взять квадрат со стороной, равной единице, то длина его диагонали равна квадратному корню из двух, а это число нельзя записать в виде дроби. (Доказательство — в приложении 2 на веб-сайте, посвященном этой книге.)

Числа, которые нельзя записать в виде дроби, называются иррациональными. Согласно легенде, их существование впервые доказал ученик Пифагора Гиппас, что, однако, не подарило ему симпатии Пифагорейского братства: его объявили отступником и утопили в море.

Когда рациональное число записано в виде десятичной дроби, оно всегда или содержит конечный набор цифр, как, например, $\frac{1}{2}$, которая записывается в виде 0,5, или же разложение рано или поздно начинает повторяться, как, например, для числа $\frac{1}{3}$, которое записывается в виде 0,3333..., где тройки продолжаются без конца. Иногда число «зацикливается» через более чем одну цифру — так обстоит дело с дробью $\frac{1}{19}$, которая записывается как 0,0526315789473684210..., где 18-значный

период 526315789473684210 повторяется до бесконечности. Наоборот — и в этом-то все дело! — когда число иррационально, его десятичное разложение никогда не будет повторять само себя.

В 1767 году швейцарский математик Иоганн Генрих Ламберт доказал, что π — именно такое иррациональное число. Его первоисследователи еще могли надеяться, что вслед за начальным хаосом в 3,14159... сумбур уляжется и наконец-то появится закономерность. Однако открытие Ламберта подтвердило, что это невозможно. Десятичное разложение числа π стремится в бесконечность некоторым предопределенным, но с виду совершенно беспорядочным образом.

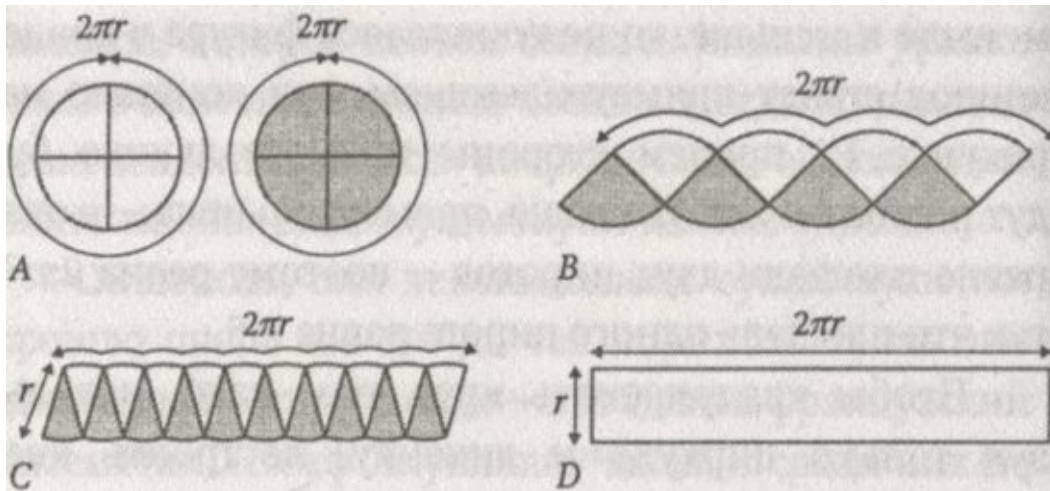
*

Математики, занимавшиеся иррациональностями, страстно желали навести в них какой-то порядок. В XVIII столетии ученые начали размышлять об иррациональностях специального типа, получивших название *трансцендентных чисел*. То были числа столь таинственные и неуловимые, что получить их в конечной математике было нельзя. Квадратный корень из двух, например, — иррациональное число, но его можно описать как решение уравнения $x^2 = 2$. Трансцендентное же число — это такое иррациональное, которое нельзя описать никаким уравнением с конечным числом членов. Когда концепция трансцендентных чисел впервые стала обсуждаться, никто не знал даже, существуют ли они вообще.

Оказалось, они действительно существуют, но прошло около ста лет до тех пор, пока были найдены первые их примеры — это сделал французский математик Жозеф Лиувилль. Числа π среди них не было. Только еще спустя 40 лет Фердинанд фон Линдеманн смог доказать, что число π и в самом деле трансцендентно, то есть существует за пределами царства конечной алгебры.

Открытие Линдеманна было ключевым моментом в теории чисел. Оно также раз и навсегда решило проблему, являвшуюся, пожалуй, самой знаменитой нерешенной задачей в математике: можно ли квадрировать круг или этого сделать нельзя. Но чтобы объяснить, как это следовало из результата Линдеманна, надо ввести уравнение, которое гласит, что площадь круга есть πr^2 , где r — радиус. Наглядное доказательство, почему это так, представляет собой тот случай, когда лучшей метафорой для числа π является пирог. Представьте себе, что у вас два круглых пирога одного и того же размера, белый и серый, как на рисунке А. Длина окружности каждого пирога — произведение π и диаметра, то есть π , умноженное на

удвоенный радиус, или $2\pi r$. После разрезания на равные сегменты куски можно сложить по-другому, как показано на рисунке В (там взяты четвертинки пирогов) или С (где пироги порезаны на десять кусков каждый). В обоих случаях длина стороны остается равной $2\pi r$. Если делать куски все меньше и меньше, то получившаяся фигура в конце концов станет прямоугольником, как показано на рисунке D, причем стороны прямоугольника будут равны r и $2\pi r$. Площадь прямоугольника — а она равна площади двух пирогов — поэтому равна $2\pi r^2$, так что площадь одного пирога равна πr^2 .



Как показать, что площадь круга равна πr^2

Чтобы квадрировать круг, нам надо, используя только циркуль и линейку, построить квадрат, который имеет в точности ту же площадь, что и круг, ограниченный заданной окружностью. Мы теперь знаем, что линия длиной r — это радиус окружности, площадь круга внутри которой равна πr^2 , а также что у квадрата с площадью πr^2 сторона должна иметь длину $r\sqrt{\pi}$ (поскольку $(r\sqrt{\pi})^2 = r^2(\sqrt{\pi})^2 = r^2\pi = \pi r^2$). Так что превращение окружности в квадрат можно свести к задаче построения длины r по заданной длине π . Или, если для удобства взять r равным 1, то к построению отрезка длины, если дан отрезок длины 1.

Используя координатную геометрию, о которой мы будем говорить в следующей главе, можно выразить процесс построения линии алгебраически, в виде конечного уравнения. Можно показать, что кольцо скоро x есть решение конечного уравнения, то начиная с отрезка длины 1 можно построить отрезок длины x . Но если x не есть решение какого-либо

конечного уравнения — другими словами, если x трансцендентно, — то построить отрезок длины x невозможно. Ну, а тот факт, что π трансцендентно, означает, что квадратный корень из π также трансцендентен (тут вам предстоит поверить мне на слово), и отрезок такой длины построить невозможно. Трансцендентность числа π доказывает, что круг нельзя квадрировать.

Данное Линдеманном доказательство трансцендентности числа π перечеркнуло мечту бесчисленного числа математиков. И тем не менее в 1897 году Законодательным собранием штата Индиана был выпущен знаменитый билль, содержащий доказательство квадратуры круга неким Е. Дж. Гудвином, местным сельским врачом, который преподнес свое доказательство в качестве «дара штату Индиана». Разумеется, этот сельский энтузиаст заблуждался. После доказательства Фердинанда фон Линдемманна, представленного им в 1882 году, математики, говоря о ком-то, что «он занимается квадратурой круга», имеют в виду, что он занимается чушью, в общем, чудаком.

*

В течение двух столетий — XVIII и XIX — выяснилось, что загадочные свойства числа π проявляются не только в самой сердцевине античных геометрических задач, но и глубоко укоренены в новых областях знания, не демонстрирующих никакой очевидной связи с окружностями. «Это таинственное 3,141592..., что появляется из каждой двери и из каждого окна и вылезает из каждой каминной трубы», — писал британский математик Огастес Де Морган. Например, время качания маятника зависит от π . Смертность населения в данном регионе есть функция числа π . Если бросать монету $2n$ раз, то при очень большом n вероятность получить в точности 50 процентов орлов и 50 процентов решетоков есть $1/\sqrt{n\pi}$.

Вездесущность числа π , однако, сделала его чем-то большим, чем просто знаменитостью в мире чисел. Оно стало в общем смысле культурной иконой. Поскольку цифры, входящие в число π , никогда не повторяются, оно идеально подходит для тех, кто хочет проявить себя на поприще мастеров запоминания. Если запоминание чисел — ваше призвание, то можете считать, что цифры числа π — предел совершенства. Их запоминание стало увлечением по крайней мере с 1838 года, когда журнал «The Scotsman» сообщил, что 12-летний голландский мальчик продекламировал все 155 цифр π , известных на тот момент, перед аудиторией из ученых и особ королевской крови. Сегодня мировой рекорд принадлежит Акире Харагучи — 60-летнему инженеру на пенсии. Имеется

запись его публичного выступления в 2006 году в окрестностях Токио, во время которого он продекламировал 100 000 десятичных знаков числа π . Выступление заняло у него 16 часов и 28 минут, включая пятиминутные перерывы каждые два часа, в которые он съедал несколько рисовых шариков. Он объяснил журналистам, что число π символизирует жизнь, поскольку его цифры никогда не повторяются и не следуют никакому порядку. Запоминание цифр числа π , добавил он, — это «религия Вселенной».

Простое заучивание числа π на память может быстро наскучить, но вот заучивание π на память и одновременное жонглирование — уже состязание! Рекорд здесь удерживает швед Матс Бергстен, которому без малого 60 лет и который сумел продекламировать 9778 цифр, жонглируя при этом тремя мячами. Он, правда, сказал мне, что более всего гордится своими успехами в тестировании памяти «Эверест», когда первые 10 000 цифр из разложения числа π разбиваются на 2000 групп по пять начиная с 14 159. Участникам состязания случайным образом зачитываются вслух 50 групп, и они должны сказать по памяти, какие пять чисел идут до и какие пять после прочитанных. Матс Бергстен — один из всего лишь четырех людей в мире, кто может сделать это без ошибок, и показанное им время — 17 минут и 39 секунд — самое быстрое. «Запомнить 10 000 цифр не одно за другим, а в случайном порядке — это куда большая нагрузка для ума», — сказал он мне.

Когда Акира Харагучи декламировал наизусть 100 000 цифр числа π , он использовал мнемонический прием, по которому каждому числу от 0 до 9 приписываются слоги, так что десятичная запись превращается в слова, в свою очередь образующие предложения. Первые пятнадцать цифр звучали так: «жена и дети уехали за границу, а муж не боится». В разных культурах по всему миру школьники используют слова, чтобы запомнить цифры числа π , но, как правило, это делается не с помощью перехода к слогам, а путем придумывания фразы, в которой число букв в каждом слове представляет последовательные цифры в десятичном разложении π . Подобная хорошо известная английская фраза приписывается астрофизику сэру Джеймсу Джинсу: «How I need a drink, alcoholic in nature, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard». «How» состоит из трех букв, «I» — из одной, «need» — из четырех и т. д. ^[28].

Среди чисел только π породило фанов подобного рода. Никто не стремится запомнить квадратный корень из двух, что является в равной степени сложным. π остается также единственным числом, которое

вдохновило создание своего собственного поджанра в литературе. Принудительный стиль — это техника, в которой принимается условие, предписывающее литературному произведению следовать определенной схеме или же, наоборот, запрещающее определенные вещи при написании текста. Были написаны целые поэмы — или «пиэмы», — где количество букв в словах определяется цифрами числа π , причем принято, что если в разложении встречается нуль, то это требует слова из десяти букв. Самая впечатляющая пиэма — это «Cadaeic Cadenza», которую написал Майк Кит, и она не отстает от числа π на протяжении 3835 цифр. Начинается она как стилизация под Эдгара Аллана По^[29]:

One; A poem

A Raven

Midnights so dreary, tired and weary,

Silently pondering volumes extolling all by now obsolete lore.

During my rather long nap — the weirdest tap!

*An ominous vibrating sound disturbing
my chamber's antedoor.*

«This», I whispered quietly, «I ignore».

Кит говорит, что написание длинного произведения при наличии сложных условий тренирует как дисциплину, так и творческие возможности. Поскольку цифры в π случайны, условие, как он выразился, «подобно созданию порядка из хаоса». Когда я спросил его: «Почему пи?» — он ответил, что число π было «метафорой для всех вещей бесконечных, или неисповедимых, или непредсказуемых, или полных нескончаемого чуда».

*

Число π обрело свое имя только начиная с 1706 года, когда валлиец Уильям Джонс ввел символ π в своей книге, озаглавленной так: «Новое введение в математику для использования некоторыми из друзей, у которых нет ни досуга, ни возможностей, ни, быть может, терпения, дабы вникать в труды столь большого числа различных авторов и переворачивать страницы столь многих нудных томов, что непременно требуется для достижения приемлемого прогресса в математике». Греческая буква, которая скорее всего явилась сокращением слова «периферия»^[30], прижилась, однако, не мгновенно, и стала стандартным обозначением для числа π лишь спустя 30 лет, когда ее начал использовать Леонард Эйлер.

Эйлер был наиболее плодовитым математиком всех времен и народов (он опубликовал 886 книг!), и он же, возможно, внес наибольший вклад в понимание числа π . Именно его улучшенные формулы для π позволили охотникам за цифрами в XVIII и XIX столетиях докапываться до все более и более далеких десятичных разрядов. В начале XX века индийский математик Сриниваса Рамануджан изобрел много новых бесконечных рядов для числа π в духе рядов Эйлера.

Рамануджан был по сути математиком-самоучкой. Однажды он написал письмо профессору Кембриджского университета Г. Х. Харди. Харди, ошеломленный тем, что Рамануджан сам переоткрыл результаты, получение которых заняло столетия, пригласил его в Англию, где они и работали вместе вплоть до смерти Рамануджана, в возрасте 32 лет. В своих работах Рамануджан продемонстрировал потрясающую интуицию в том, что касается свойств чисел, включая и число π , а его самая знаменитая формула такова:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Символ суммы указывает, что надо складывать целый ряд значений, начиная со значения при n равном нулю, далее прибавить значение при n равном единице, и т. д. до бесконечности. Но, даже не вникая в подробности обозначений, можно оценить, сколь эффектно работает подобное равенство. Формула Рамануджана стремится к π с замечательной скоростью. С самого начала, при n равном 0, формула дает значение числа π с точностью до шести десятичных разрядов. При каждом увеличении значения n формула добавляет к π примерно восемь новых цифр. Это поистине установка для производства числа π в промышленном масштабе.

В духе Рамануджана в 1980-х годах математики Грегори (Григорий) и Дэвид (Давид) Чудновски (урожденные украинцы) сконструировали даже еще более зверскую формулу. Каждый новый член в ней прибавляет примерно 15 цифр:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \frac{(6n)!}{(3n)!n!^3} \times \frac{163096908 + 6541681608n}{(262537412640768000)^{n+1/2}}.$$

При своем первом знакомстве с формулой Чудновски я в буквальном

смысле стоял на ней. Грегори и Дэвид — братья, и у них общий кабинет в Политехническом университете в Бруклине. В кабинете диван в углу, пара стульев и голубой пол, декорированный десятками формул для числа π . «Мы хотели чем-то украсить пол, а чем еще его можно украсить, как не какой-нибудь штуковиной, имеющей отношение к математике?» — объяснил Грегори.

На самом деле к украшению пола формулами для числа π они пришли со второй попытки. Исходный план состоял в том, чтобы использовать гигантскую репродукцию гравюры «Меланхолия» Альбрехта Дюрера. Математики обожают ее, поскольку она полна лукавых символов со ссылками на числа, геометрию и перспективу.

— Как-то ночью, когда на полу еще ничего не было, мы напечатали «Меланхолию» на двух тысячах листочков и разложили их на полу, — рассказывает Дэвид. — Но попробуй по этому походить — тебя сразу начнет мутить! Дело в том, что угол зрения изменяется слишком резко.

Тогда Дэвид принялся изучать, как устроены полы в соборах и замках Европы; ему хотелось, чтобы пол в офисе был красивым, но не вызывал приступов тошноты у тех, кто по нему ходит.

— И я обнаружил, что все полы по большей части оформлены...

— В простом геометрическом стиле, — перебивает его Грегори.

— Черное и белое, черные и белые квадраты, — продолжает Дэвид.

— Понимаешь, если у тебя на полу действительно сложная картинка, и ты пытаешься по ней ходить, то угол зрения меняется настолько резко, что глаза начинают протестовать, — добавляет Грегори. — Так что единственным способом сделать что-то подобное оказалось...

— Поместить ее на потолок! — восклицает мне в ухо Дэвид, и оба покатываются со смеху.

Когда разговариваешь с братьями Чудновски, кажется, что на тебе стереонаушники, через которые сигналы поступают в разные уши беспорядочно и с перебоями. Они усадили меня на диван, а сами расположились по обеим сторонам. Постоянно перебивая друг друга, подхватывая сказанные другим предложения, они изъяснялись при этом на очень мелодичном английском с большим количеством славянских интонаций. Оба брата родились в Киеве, когда он еще входил в Советскую Украину; в Соединенных Штатах они живут с конца 1970-х годов, братья — граждане этой страны. Вместе они написали так много статей и книг, что хотели бы, чтобы их воспринимали не как двух математиков, а как одного.

И тем не менее, несмотря на все свое генетическое, разговорное и

профессиональное единство, братья выглядят очень по-разному. Главная причина этого в том, что Грегори, которому сейчас 56, страдает тяжелой формой миастении, — аутоиммунного заболевания мускулатуры. Он настолько худой и хрупкий, что большую часть своей жизни проводит лежа. Я ни разу не видел, чтобы он вставал с дивана. Однако энергия, которой недостает его телу, в полной мере проявляет себя в неподражаемых выражениях его лица, которое оживает всякий раз, как он заводит речь о математике. У него заостренные черты лица, большие карие глаза, седая борода и клочковатые нечесанные волосы. У Дэвида, который на пять лет его старше, голубые глаза, полноватая фигура и более круглое лицо. Он гладко выбрит, а на его коротко стриженных волосах красуется бейсбольная кепка оливково-зеленого цвета.

Судя по всему, братья Чудновски сделали для популяризации числа π больше всех других современных математиков. В начале 1990-х годов в квартире Грегори на Манхэттене они собрали суперкомпьютер из заказанных по почте деталей, и этот компьютер, используя их собственную формулу, вычислил число π до более чем двух миллиардов десятичных разрядов, что стало рекордом для того времени.

Их потрясающему достижению была посвящена статья в «New Yorker», которая даже привела к появлению в 1998 году фильма «Пи». Главный герой картины — математический гений с непокорными волосами, изучающий скрытые закономерности в данных с фондового рынка на собранном у себя дома суперкомпьютере. Мне было любопытно узнать, смотрели ли братья Чудновски этот фильм, собравший немало положительных откликов и ставший образцом для низкобюджетных черно-белых психо-математических триллеров.

— Нет, нет, не видели, — сказал Грегори.

— Насколько я понимаю, те, кто снимает фильмы, как правило, выражают свое собственное внутреннее состояние, — саркастически заметил Дэвид.

Я заметил, что, возможно, им могло польстить оказанное им внимание.

— Вовсе нет, — ухмыльнулся Грегори.

— Вот что я вам скажу, — встрял Дэвид. — Два года назад я вернулся из Франции. За пару дней до моего отъезда я оказался на огромной книжной ярмарке. Я остановился у стенда, на котором была выставлена книга с детективным сюжетом. Написал ее некий инженер. Это была, знаете ли, история про загадочное убийство. Всех убили, начиная с хозяйки гостиницы, и знаете, кто был источником всех этих ужасов — число пи!

Грегори улыбнулся до ушей и пробурчал себе под нос:

— Да уж, я ни за что не буду читать такую книгу, это наеверррряка!

Но Дэвид не останавливался:

— Так вот, я поговорил с этим парнем, автором. Он оказался довольно образованным человеком. — Он остановился, пожал плечами и повысил тон на целую октаву: — Но я же говорил, что не несу за это никакой ответственности!

Дэвид сказал, что сначала несколько обалдел, когда впервые увидел афиши с рекламой той туалетной воды от Givenchy.

— Во всю улицу, от одной стороны до другой, там было это пи, пи, пи. — Он перешел на вопль: — Пи, пи, пи! Несу ли я какую-нибудь ответственность?

Бросив взгляд на меня, Грегори сказал:

— По некоторым причинам широкая публика тащится от этого дела. Правда, они получают в некотором роде неправильное представление. Кстати, немало профессиональных математиков изучают число пи. — И добавил сухо: — Но, как правило, этих людей и знать-то никто не знает!

Успехи в компьютерных технологиях в 1950-е и 1960-е годы нашли свое отражение в появлении новых десятичных знаков в числе π . К концу 1970-х годов рекорд был побит девять раз и значительно превысил миллион десятичных разрядов. В 1980-х годах, однако, комбинация еще более быстрых компьютеров и совершенно новых алгоритмов открыла новую эру неистовой охоты за цифрами. Ясумаса Канада, молодой специалист по прикладной математике из Токийского университета, первым вырвался вперед в состязании между Японией и Соединенными Штатами, превратившемся в настоящую гонку. В 1981 году с помощью компьютера NEC за 137 часов он вычислил число π с точностью в два миллиона знаков. Через три года он достиг 16 миллионов.

Затем в лидеры пробился Уильям Госпер, математик из Калифорнии, предложив 17,5 миллиона знаков, а потом Дэвид Х. Бейли из NASA обошел его, дойдя до 29 миллионов. В 1986 году Ясумаса Канада обогнал их обоих, получив 33 миллиона знаков, а за последующие два года три раза побил свой собственный рекорд, достигнув 201 миллиона на новом компьютере S-820, вычисление на котором заняло всего шесть часов.

В то время как охота за цифрами числа π была объектом всеобщего внимания, братья Чудновски, оставаясь в тени, продолжали свою кропотливую работу. Используя новое средство коммуникации, получившее название Интернет, Грегори сумел соединить свой домашний компьютер с двумя суперкомпьютерами компании IBM, расположенными в различных местах в Соединенных Штатах. Братья разработали программу для вычисления числа π на основе новой, изобретенной ими супербыстрой формулы. Доступ к компьютерам был для них открыт, только когда никто больше ими не пользовался, то есть по ночам и по выходным.

— Это было здорово, — с ностальгией вспоминает Грегори. Тогда компьютеры еще не могли хранить числа, которые братья вычисляли. — Пи хранилось на магнитной ленте, — говорит он.

— На мини-ленте. Причем требовалось звонить чуваку и просить его, — добавляет Дэвид.

— И говорить: пленка номер такой-то и такой-то, — продолжает Грегори. — А иногда, если появлялось что-то поважнее, твои пленки вытаскивали в самый разгар вычисления. — Он закатил глаза, как будто собираясь всплеснуть руками.

Несмотря на препятствия, Чудновски не прекращали усилий и вышли за предел миллиарда цифр. Затем Канада снова вырвался вперед — ненадолго, пока Чудновски не вернули себе лидерство, вычислив 1,13

миллиардов. После чего Дэвид и Грегори решили, что если они намерены и дальше всерьез заниматься вычислением π , то им нужна своя собственная вычислительная машина.

Суперкомпьютер Чудновски жил в одной из комнат в квартире Грегори. Вся штука была сделана из процессоров, соединенных кабелями, и стоила, по оценке братьев, около 70 000 долларов. Это было разве что не задаром, если сравнить с миллионами долларов, в которые обошлась бы покупка вычислительной машины сравнимой мощности. Однако эта машина серьезно осложнила их жизнь. Компьютер, который они называли «т-нуль», должен был все время оставаться включенным, случайное выключение могло бы все испортить, так что в комнате пришлось поставить 25 вентиляторов для охлаждения. Братья следили за тем, чтобы не включать в квартире слишком много света, дабы не перегружать электрическую сеть.

В 1991 году домашний питомец Дэвида и Грегори вычислил π с точностью более двух миллиардов знаков. Затем они переключились на другие задачи.

К 1995 году Канада снова оказался впереди, и в 2002 году он достиг 1,2 триллиона цифр; этот рекорд продержался лишь до 2008 года, когда его соотечественники из Университета Цукуба получили 2,6 триллиона знаков. В декабре 2009 года француз Фабрис Белляр объявил о новом рекорде, поставленном с использованием формулы Чудновски: почти 2,7 триллиона знаков. Вычисление на его настольном PC заняло 131 день.

Если записать триллион цифр мелким шрифтом, то они покроют расстояние от Земли до Солнца. Если писать по 5000 цифр на каждой странице (для чего потребуется очень мелкий шрифт) и сложить их стопкой друг на друга, то число π достигнет небес, поднявшись в высоту на 10 километров. В чем же смысл вычисления числа π с таким абсурдно большим числом знаков? Одна причина — очень человеческая: рекорды существуют для того, чтобы их побивать.

Но есть и другая, более важная причина. Нахождение новых цифр в числе π — идеальный тест для проверки того, насколько эффективно считает компьютер. «Уточнение известного значения числа π само по себе не является для меня каким-то специальным пристрастием или хобби, — заметил Канада. — Но меня всерьез интересует, как увеличить скорость вычислений». Вычисление числа π стало важным элементом при проверке качества суперкомпьютеров, потому что это «очень процессороемкая работа, которая требует большого объема основной памяти, оперирует с огромными числами, но при этом легко проверить ответ. Можно

использовать и другие математические константы, например, квадратный корень из двух, число e ^[31], или число гамма — но π из них самое эффективное».

В истории жизни числа π наблюдается занятная цикличность. Это простейшее и наиболее древнее отношение (длины окружности к диаметру) в математике было изобретено заново в качестве важнейшего инструмента, используемого на самом переднем крае компьютерных технологий.

На самом деле интерес братьев Чудновски к числу π был связан главным образом с их желанием строить суперкомпьютеры — страстью, которая с тех пор и не думала угасать. В настоящее время братья работают над чипом, который, по их утверждению, станет самым быстрым в мире, он будет иметь всего 2,7 сантиметра в ширину, и при этом в него войдут целых 160 000 меньших по размеру чипов и 1,75 километра проводов.

*

В написанном Карлом Саганом бестселлере «Контакт» инопланетянин предупреждает женщину на Земле, что после определенного количества цифр случайность в числе π исчезнет и там появится сообщение, записанное нулями и единицами. Это послание появится после десятичного разряда с номером 10^{20} — что представляет собой единицу с двадцатью нулями. Поскольку к настоящему моменту мы добрались «только» то 2,7 триллиона разрядов (число 27 с и нулями), то надо еще немного постараться, чтобы проверить, действительно ли там есть что-то в этом роде. На самом деле придется продвинуться даже еще чуть дальше, потому что послание, по-видимому, записано в 11-ричной системе.

Мысль о том, что в числе π есть закономерность, способна любому вскружить голову. Математики стали выискивать какие-либо указания на порядок в десятичных разложениях числа π , как только они появились. Иррациональность π означает, что цифры следуют друг за другом без какого-либо повторяющегося порядка, но это не исключает возможности появления упорядоченных кусков — таких, как послание, записанное нулями и единицами. До сих пор, однако, никто не нашел ничего важного. Хотя, надо сказать, у π есть свои причуды. Первый 0 появляется только на 32-м месте, что намного позже, чем можно было бы ожидать, коль скоро цифры распределены случайно. Первый раз, когда какая-либо цифра повторяется шесть раз подряд, наступает на 762-м десятичном знаке (и это 999 999). Вероятность столь раннего повторения шести девяток — если их появление случайно — меньше 0,1 процента. Эта последовательность

известна как точка Фейнмана — выдающийся физик Ричард Фейнман однажды заметил, что хотел бы запомнить число π именно до этого места и закончить словами «девять, девять, девять, девять, девять, девять и так далее». Следующий раз, когда последовательно выпадают шесть одинаковых цифр, случается на 193 034-м месте, и цифры эти — снова девятки. Не послание ли это извне, и если да — то о чем оно?

Число считается *нормальным*, если каждая из его цифр от 0 до 9 появляется в его десятичном разложении с равной частотой. Нормально ли π ? Канада изучил первые 200 миллиардов цифр числа π и нашел, что цифры появляются со следующими частотами:

0	20 000 030 841
1	19 999 914 711
2	20 000 136 978
3	20 000 069 393
4	19 999 921 691
5	19 999 917 053
6	19 999 881 515
7	19 999 967 594
8	20 000 291 044
9	19 999 869 180

Только цифра 8 кажется несколько избыточной, однако отличие статистически несущественно. Казалось бы, число π нормально, но никто не смог этого доказать. И никто не смог доказать, что такое доказательство невозможно. Поэтому есть шанс, что π *не* нормально. Быть может, вслед за 10^{20} знаками и правда идут только 0 и 1?

Другой, но связанный с предыдущим вопрос — это вопрос о положении чисел. Распределены ли они случайно? Стэн Вейгин проанализировал первые 10 миллионов цифр числа π на «покерный тест»: возьмем пять последовательных цифр и рассмотрим их, как если бы это были карты, сданные вам при игре в покер.

Расклад	Реальная частота события	Ожидаемая частота события
Все цифры различны	604 976	604 800
Одна пара, три различны	1 007 151	1 008 000
Две пары	216 520	216 000
Три одинаковых		

три одинаковые	144 375	144 000
Фулл хаус	17 891	18 000
Четыре одинаковые	8887	9000
Пять одинаковых	200	200

В правом столбце показано, сколько раз можно было бы ожидать появления того или иного расклада, если число π нормально и если на каждой десятичной позиции с равным шансом могла бы стоять любая цифра. Результаты оказываются вполне в границах ожидаемого. Видно, что каждый расклад чисел появляется с правильной частотой, как было бы, если бы числа на каждой десятичной позиции генерировались случайным образом.

Имеются веб-сайты, на которых можно узнать, когда в числе π впервые появляется дата вашего рождения. Первое появление последовательности 0123456789 происходит на 17 387 594 880-м месте — что было установлено только после того, как Канада добрался туда в 1997 году.

Я спросил у Грегори, полагал ли он когда-либо, что в числе π может найтись какой-то порядок.

— Нет там никакого порядка, — бросил он довольно презрительно. — А если бы он там и был, то это было бы ненормально и неправильно. Так что нет смысла тратить на это время.

Вместо того чтобы искать закономерности в числе π , некоторые воспринимают его случайную природу как колоссальное выражение математической красоты. Число π — предопределенное, но при этом оно, по-видимому, необычайно хорошо имитирует случайность.

— Это очень хорошее случайное число, — соглашается Грегори.

Вскоре после того знаменательного вычисления числа π братьям Чудновски позвонили из правительства Соединенных Штатов. Дэвид изобразил визгливый голос на другом конце провода: «Не будете ли вы столь любезны прислать нам π ?»

Случайные числа нужны в промышленности и торговле. Пусть, например, некой компании, занимающейся исследованием рынка, требуется сделать опрос среди представительной выборки тысячи людей из населения в миллион. Компания использует генератор случайных чисел, чтобы создать группу выборки. Чем лучше этот генератор производит случайные числа, тем более представительной будет выборка — и тем более точным будет опрос. Подобным же образом последовательности случайных чисел требуются для симуляции непредсказуемых сценариев при тестировании компьютерных моделей. Чем более случайны числа, тем

более надежны результаты теста. На самом деле возможны серьезные ошибки, если применяемые для проверки случайные числа недостаточно случайны.

— Ты хорош лишь настолько, насколько хороши твои случайные числа, — замечает Дэвид.

— Ты используешь жуткие случайные числа, но в конце концов все равно оказываешься в жуткой ситуации, — заключает Грегори.

Среди всех множеств доступных случайных чисел десятичное разложение числа π — наилучшее.

Здесь, однако, таится некий философский парадокс. Пи, со всей самоочевидностью, не случайно. Его цифры могут вести себя как будто они случайны, но на самом деле они предопределены. Например, если бы цифры в числе π были случайны, то шанс, что первая цифра после десятичной запятой будет равна 1, был бы равен всего 10 процентам. Однако же мы с абсолютной определенностью знаем, что там стоит 1. π проявляет случайность не случайно — что само по себе и захватывающе, и фатально.

π — это математический концепт, который изучался тысячи лет, и тем не менее хранит в себе множество тайн. В течение почти полутора столетий, прошедших после доказательства его трансцендентности, большого прогресса в понимании природы π не наблюдалось.

— По сути дела большая часть того, что там творится, нам неизвестна, — говорит Грегори.

Я спросил, можно ли ожидать какого-либо прогресса в отношении нашего понимания того, что же такое число π .

— А то как же! — восклицает Грегори. — Прогресс неостановим. Математика движется вперед.

— Это будет что-то совершенно фантастическое, но это будет здорово, — подытоживает Дэвид.

Глава 5

х-фактор

Автор объясняет, почему числа — это хорошо, но буквы — лучше. Он наносит визит в английскую деревню, где встречается человека, собирающего логарифмические линейки, и выслушивает трагическую историю об их вымирании.

Математики питают определенную склонность к волшебным фокусам. Подобные фокусы бывают забавными, а нередко скрывают за собой интересную теорию. Вот классический фокус, одновременно представляющий собой отличный способ оценить силу и достоинства алгебры. Начнем с того, что выберем любое трехзначное число, в котором первая и последняя цифры отличаются по крайней мере на два — например, 753. Теперь запишем эти же цифры в противоположном порядке: получим 357. Вычтем меньшее число из большего: $753 - 357 = 396$. И наконец, сложим полученное число с тем, что получается из него перестановкой цифр в обратном порядке: $396 + 693$. Сумма, которая при этом получается, равна 1089.

Попробуем еще: раз с другим числом, например 421:

$$\begin{aligned} 421 - 124 &= 297, \\ 297 + 792 &= 1089. \end{aligned}$$

Мы получили тот же самый ответ. На самом деле не имеет значения, с какого трехзначного числа мы начинаем — в конце концов всегда получится 1089. Как по волшебству, из ниоткуда возникает число 1089, подобно скале в зыбучих песках случайно выбранных чисел. Хотя устойчивое появление одного и того же результата для любого исходного числа при применении к нему всего лишь нескольких простых операций и может показаться несколько озадачивающим, тому имеется объяснение, и мы очень скоро до него доберемся. Тайна возникающего вновь и вновь числа 1089 раскрывается практически немедленно после того, как задача переписывается, но не с помощью цифр, а с помощью букв.

*

Хотя использование чисел просто для развлечения всегда сопровождало математическими изысканиями, начало развития собственно математики было обусловлено необходимостью решения задач практического характера. Папирус Ринда, относящийся примерно к 1600 году до н. э. (хранится в Британском музее, а назван в честь владельца — английского египтолога А. Г. Ринда), представляет собой наиболее полный из дошедших до нас математических документов Древнего Египта. В нем содержатся 84 задачи из таких областей, как землемерие, бухгалтерский учет и разделение определенного числа хлебов на заданное число людей.

Египтяне формулировали свои задачи весьма изысканно. К примеру, задача № 30 из папируса Ринда звучит так: «Когда писец спрашивает вас, чему равна куча, если известно, что $\frac{2}{3} + \frac{1}{10}$ от нее составит десять, пусть он услышит правильный ответ». Здесь «куча» — египетский термин для *неизвестной величины*, которую в наши дни обозначают буквой x , представляющей собой фундаментальный и неотъемлемый символ современной алгебры. Сейчас бы мы задали Задачу № 30 так: чему равно значение x , если $\frac{2}{3} + \frac{1}{10}$ при умножении на x дает 10? Или еще короче:

Найти x , если $(\frac{2}{3} + \frac{1}{10})x = 10$.

Поскольку у египтян не было привычных нам математических обозначений, таких как скобки, знак равенства или иксы, они искали ответ на заданный выше вопрос методом проб и ошибок, делая оценки для «кучи». Такой метод называется правилом ложного положения, он весьма похож на игру в гольф. Когда вы уже вышли на поле, становится легче понять, как же отправить мяч в лунку. Аналогичным образом, коль скоро у вас есть какой-то ответ, пусть и неправильный, вы можете сообразить, как приблизиться к правильному. Современный метод решения, наоборот, состоит в том, чтобы сложить дроби, стоящие при переменной x , при этом уравнение

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right)x = 10$$

можно записать в виде

$$\left(\frac{20}{30} + \frac{3}{30}\right)x = 10$$

или же

$$\frac{23}{30}x=10,$$

что далее сводится к

$$x=10\times\frac{30}{23},$$

откуда, наконец,

$$x=\frac{300}{23}.$$

Обозначения, использующие буквы, делают жизнь куда проще.

*

Египетский иероглиф для сложения представлял собой пару ног, шагающих справа налево:



(«складывающие» ноги шагают в ту сторону, в которую читается текст).
Вычитание представлялось парой ног, шагающих слева направо:



. По мере того как обозначения для чисел эволюционировали от палочки с насечками до современных обозначений числительных, менялись и символы арифметических операций.

У египтян, однако, не было символа для неизвестной величины; не было его и у Пифагора с Евклидом. Для них математика была по природе геометрической, связанной с тем, что можно построить. А неизвестная величина требовала следующего уровня абстракции. Диофант, живший в Александрии в III веке, первым из греческих математиков стал использовать символ для неизвестной величины. Для этой цели он выбрал греческую букву сигма — ς . Для обозначения квадрата неизвестного числа он писал Δ^ς , а для куба — K^ς . Хотя его обозначения и были крупным достижением для того времени, поскольку позволяли сформулировать задачу более четко, они все же оставались довольно путанными, потому что — в отличие от системы, использующей x , x^2 и x^3 , — не было очевидной визуальной связи между величиной ς и ее степенями Δ^ς и K^ς . Впрочем, несмотря на недостатки своих обозначений, Диофант вошел в историю математики как отец алгебры.

*

«Алгебра» — общий термин для математики уравнений, когда числа и операции записываются в виде символов. Само слово «алгебра» имеет занятую историю. В средневековой Испании над дверьми парикмахерских красовались вывески «Algebrista у Sangrador», то есть «Костоправ и Кровопускатель» — два вида деятельности, которые составляли неотъемлемую часть услуг цирюльника. По этой же причине шест, указывавший на характер заведения, выкрашен в красные и белые полосы — красный символизирует кровь, а белый — повязки.

Корень в слове «algebrista» взят из арабского «al-jabr»^[32], что, помимо указания на примитивные хирургические приемы, означало также восстановление или воссоединение. Абу Джафар Мухаммад ибн Муса Аль-Хорезми, багдадский математик, живший в IX веке, написал вводный математический курс, озаглавленный «Книга восстановления и редукции» (буквально «сокращение и сравнение» — «Хисаб аль-джабр у аль-мукабала»). В своем труде он объяснил два метода решения арифметических задач. Аль-Хорезми писал весьма цветисто, витиевато, по-восточному, но мы для лучшего понимания будем использовать современные обозначения и терминологию.

Рассмотрим уравнение $A = B - C$.

Аль-Хорезми описывает «al-jabr», или восстановление, как процесс, посредством которого данное уравнение принимает вид $A + C = B$. Другими словами, отрицательный член можно превратить в положительный, если перенести его на другую сторону от знака равенства.

Рассмотрим теперь уравнение $A = B + C$. Редукция — процесс, который превращает это уравнение в $A - C = B$.

Благодаря современным обозначениям мы ясно видим, что и восстановление, и редукция — примеры общего правила, согласно которому *все*, что вы делаете с одной частью уравнения, надо делать и с другой его частью. В первом уравнении мы прибавили C к обеим частям. Во втором уравнении мы вычли C из обеих частей. Поскольку по определению выражения по обе стороны от знака равенства равны друг другу, они должны оставаться равными и когда какое-то слагаемое одновременно прибавляется или вычитается с обеих сторон. Если мы умножим одну из частей уравнения на некоторое число, то и другую часть должны будем умножить на то же самое число, и все это применимо также к делению и другим операциям.

Аль-Хорезми был не первым, кто использовал восстановление и редукцию — эти операции можно найти еще у Диофанта. Когда книгу Аль-Хорезми перевели на латынь, фигурирующий в заглавии «aljabr»

превратился в «алгебру». Книга Аль-Хорезми по алгебре, наряду с еще одной его книгой, посвященной индийской десятичной системе счисления, распространилась в Европе столь широко, что само имя его обессмертилось в качестве научного термина: аль-Хорезми стал Алхоарисми, Алгорисми и в конце концов алгоритмом.

*

С XV по XVII век математические предложения двигались по дороге от словесных выражений к *символьным*. Мало-помалу слова заменялись буквами. Диофант, может, и заложил основы буквенных обозначений, введя символ для неизвестной величины, но первым, кто широко популяризировал этот метод, был француз Франсуа Виет, живший в XVI столетии. Виет предложил использовать заглавные гласные буквы *A, E, I, O, U* и *Y* для неизвестных величин, а согласные *B, C, D* и т. д. — для известных.

Через несколько десятилетий после смерти Виета Рене Декарт опубликовал свое «Рассуждение о методе». В этом труде он применил математическую логику к человеческому мышлению. Для начала он подверг сомнению все свои убеждения, а после того, как все было отброшено, у него осталась лишь уверенность в том, что он существует. Тот аргумент, что нельзя подвергать сомнению собственное существование, коль скоро мыслительный процесс требует существования того, кто мыслит, нашел краткое выражение в знаменитой фразе из «Рассуждения» — «Я мыслю — следовательно, я существую». Это, наверное, наиболее известная в мире цитата, а сама книга считается краеугольным камнем западной философии. Декарт, однако, замысливал свой труд как введение к трем приложениям, составленным из других его научных работ. Одно из них — «La Geometrie» — в равной мере стало вехой в истории математики.

В своей «La Geometrie» Декарт вводит символы, ставшие затем стандартными алгебраическими обозначениями. Это первая книга, которая выглядит как современная публикация по математике, со всеми ее *a, b* и *c*, а также *иксами*, *игреками* и *зетами*. Именно Декарт решил использовать малые буквы из начала алфавита для известных величин, а малые буквы из конца алфавита — для неизвестных. Однако когда книгу набирали в типографии, наборщику в какой-то момент стало не хватать букв. Он поинтересовался у автора, насколько важно, какую именно букву нужно использовать — *x*, *y* или *z*. Декарт ответил, что это все равно, и наборщик использовал в основном букву *x*, потому что во французских словах эта

буква используется реже, чем y или z . В результате x прочно поселился в математике — и даже на более широком культурном пространстве — в качестве обозначения, символа неизвестной величины. Именно поэтому материалы о паранормальных явлениях попадают в «X-файлы»^[33], а Вильгельм Рентген предложил назвать обнаруженные им таинственные лучи X-лучами^[34]. Если бы не сиюминутные обстоятельства, касающиеся типографского набора текста, то словом для пробивающегося «звездного» таланта мог бы стать «Y-фактор», а афроамериканский политический лидер приобрел известность под именем Malcolm X^[35].

То, что Лука Пачоли в 1494 году выразил бы как

4 Census p 3 de 5 rebus ae 0,

а Виет в 1591 году записал бы как

4 in A quad - 5 in A piano + 3 aequatur 0,

Декарт в 1637 году застолбил в виде

$4x^2 - 5x + 3 = 0$.

*

Замена слов буквами и символами представляла собой нечто большее, чем просто удобное сокращение записи. Начало символу x положило сокращение для «неизвестной величины», но коль скоро такое обозначение возникло, оно превратилось в мощное средство, способствующее мышлению. Просто слово или сокращение нельзя подвергнуть математическим операциям так, как это делается с символом, подобным x . Появление числа сделало возможным счет; но буквенные символы вывели математику в новую область, простирающуюся далеко за пределы языка.

Пока задачи формулировались риторически, как это было в Египте, математики применяли изобретательные, но довольно бессистемные методы для их решения. Древние решатели задач были подобны участникам экспедиции, застрявшим в тумане и вынужденным полагаться лишь на несколько ухищрений, помогающих продвигаться вперед. Когда же задачи стали формулировать, используя символы, туман этот рассеялся, и перед математиками предстал мир с исключительно ясными очертаниями. Диво алгебры состоит в том, что порой одна лишь запись задачи в символическом виде уже почти дает ее решение.

Вернемся к тому фокусу, о котором я рассказал в начале главы. Я попросил вас назвать трехзначное число, в котором первая и последняя

цифры различались бы по крайней мере на два. А далее требовалось получить второе число, переставив цифры в исходном числе в обратном порядке.

Затем надо было вычесть меньшее число из большего. Так что если вы выбрали число 614, то число с переставленными цифрами было бы равно 416, и $614 - 416 = 198$. В качестве последнего действия предлагалось сложить полученную разность и число, получающееся в результате перестановки в ней цифр в обратном порядке. В только что выбранном примере это будет $198 + 891$.

Как и раньше, ответ равен 1089. Таким он будет всегда — и алгебра объясняет нам почему. Но прежде всего нам надо выработать способ для записи нашего главного героя — трехзначного числа, в котором первая и последняя цифры различаются по крайней мере на два.

Рассмотрим число 614. Оно равно $600 + 10 + 4$. На самом деле любое трехзначное число вида abc можно записать как $100a + 10b + c$. Итак, пусть наше исходное число есть abc , где a , b и c — отдельные цифры. Для удобства будем считать, что a больше c .

Переставление цифр дает cba , что можно выразить как $100c + 10b + a$.

Для получения промежуточного результата требуется вычесть cba из abc . Получаем, что $abc - cba$ равно

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a).$$

Два члена с буквой b сокращают друг друга, так что промежуточный результат равен

$$99a - 99c, \text{ или } 99(a - c).$$

На своем начальном уровне алгебра не предполагает особо глубоких озарений, однако требует соблюдения ряда правил. Цель всего происходящего состоит в том, чтобы применять эти правила, пока выражение не станет максимально простым. Выражение $99(a - c)$ приведено именно в такой вид, в какой нужно.

Поскольку первая и последняя цифры в числе abc различаются по крайней мере на 2, получаем, что $a - c$ может иметь одно из значений 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8.

Тем самым, число $99(a - c)$ — одно из следующих: 198, 297, 396, 495, 594, 693 или 792. С какого бы трехзначного числа мы ни начали, вычитание его из числа, записанного с помощью его же цифр, взятых в обратном порядке, даст промежуточный результат, который непременно будет равен одному из семи перечисленных чисел.

Заключительный этап состоит в том, чтобы сложить это промежуточное число с тем, которое получается из него изменением порядка цифр на противоположный.

Повторим то, что мы делали выше, в применении к промежуточному числу.

Пусть наше промежуточное число равно def , то есть $100d + 10e + f$. Требуется сложить def и fed .

Рассматривая приведенный список возможных промежуточных чисел, мы замечаем, что среднее число e всегда равно 9. Кроме того, первая и третья цифры всегда дают в сумме 9 — другими словами, $d + f = 9$.

Итак, $def + fed$ равно

$$100d + 10e + f + 100f + 10e + d,$$

или

$$100(d + f) + 20e + d + f,$$

что есть

$$(100 \times 9) + (20 \times 9) + 9.$$

Или, другими словами,

$$900 + 180 + 9.$$

Вуаля! Сумма равна 1089 — и секрет фокуса раскрыт.

Элемент неожиданности в «фокусе 1089» состоит в том, что, какое бы число мы случайно ни выбрали, в ответе всегда получается одно и то же. Алгебра позволяет увидеть то, что скрыто за ловкостью рук, указывая путь, ведущий от конкретного к абстрактному, то есть предлагая следить не за поведением отдельного числа, а за поведением *любого*, произвольного числа. Это незаменимое средство, причем не только в математике. Другие науки также полагаются на язык уравнений.

*

В 1621 году во Франции вышел латинский перевод Диофантова шедевра «Арифметика». Новое издание оживило интерес к античным методам решения задач и в сочетании с усовершенствованными числовыми и буквенными обозначениями распахнуло двери в новую эру математического мышления. «Арифметика» Диофанта стала настольной

книгой Пьера де Ферма^[36] (1601–1665), тулузского судьи и страстного математика-любителя, исписавшего поля всех ее страниц своими комментариями. В частности, рядом с разделом, где говорилось о Пифагоровых тройках — любых натуральных числах a , b и c , таких что $a^2 + b^2 = c^2$ (например, 3, 4 и 5), — Ферма отметил, что невозможно подобрать такие значения a , b и c , чтобы выполнялось равенство $a^3 + b^3 = c^3$. Не смог он найти и значения a , b и c , для которых было бы верно $a^4 + b^4 = c^4$. В результате Ферма написал — там же, на полях «Арифметики», — что для всякого числа n , превышающего 2, невозможно найти значения a , b и c , которые удовлетворяли бы уравнению $a^n + b^n = c^n$. «У меня имеется поистине чудесное доказательство, однако эти поля слишком узки для него», — написал он. Ферма так и не представил своего доказательства — чудесного или уж как получится, — даже когда узость полей его более не стесняла. Заметки Ферма на полях «Арифметики» отчасти указывают на то, что доказательство ему было известно, или же он сам уверовал, что его знает, а может, просто решил подзадорить публику. Во всяком случае, его нахальное заявление оказалось невероятной силы приманкой для многих поколений математиков, а само утверждение, вошедшее в науку как Великая теорема Ферма, оставалось самой знаменитой нерешенной задачей в математике до 1995 года, когда ее наконец продавил британец Эндрю Уайлс. Алгебра бывает обманчиво скромной в подобных ситуациях — она позволяет легко сформулировать задачу, которую решить оказывается совсем не легко. Вот и доказательство теоремы Ферма, предложенное Уайлсом, столь сложно, что, судя по всему, его понимают не более пары сотен человек во всем мире.

*

Прогресс в математических обозначениях сделал возможным открытие новых концепций. Невероятно важным изобретением стали *логарифмы*, придуманные в начале XVII столетия выдающимся шотландским математиком Джоном Непером (1550–1617) — бароном, восьмым лэрдом Мерчинстона, который, впрочем, прижизненно был куда более знаменит своими работами по теологии. Непер написал имевшую огромный успех книгу — толкование Апокалипсиса, — где утверждал, что папа есть Антихрист, и предсказывал, что конец света наступит между 1688 и 1700 годами. По вечерам он любил облачаться в длинное платье и разгуливать за пределами своего родового замка, что немало способствовало его репутации чародея. Кроме того, он экспериментировал с удобрением

почвы на своих обширных владениях близ Эдинбурга, а также предложил несколько изобретений, касающихся военной техники, например металлическую колесницу, движимую находящимися внутри нее воинами, которые будут «поражать врагов во все стороны через маленькие отверстия в корпусе колесницы», и устройства для «плавания под водой, с ныряльщиками и иными хитрыми приспособлениями для внезапного нападения на врага» — предшественников танка и субмарины. Занимаясь математикой, Непер популяризировал применение десятичной запятой, а кроме того предложил идею логарифмов, изобретя и сам термин как производное от греческих слов *logos* и *arithmos* — «относительное число».

Пожалуйста, не пугайтесь, прочитав следующее определение: *логарифм числа есть показатель степени в выражении данного числа в виде степени числа 10*. Логарифмы проще понять, если выразить их алгебраически: если $a = 10^b$, то логарифм числа a равен b . Итак:

$$\begin{aligned}\lg 10 &= 1 \text{ (потому что } 10 = 10^1), \\ \lg 100 &= 2 \text{ (потому что } 100 = 10^2), \\ \lg 1000 &= 3 \text{ (потому что } 1000 = 10^3), \\ \lg 10\,000 &= 4 \text{ (потому что } 10\,000 = 10^4).\end{aligned}$$

Нахождение логарифма числа — дело самоочевидное, если число это выражено как произведение десятков. Но как быть, если надо найти логарифм числа, которое не есть произведение десятков? Например, каков логарифм числа 6? Логарифм числа 6 — это число, показывающее, сколько раз 10 надо умножить само на себя, чтобы в результате получилось 6. Однако же кажется совершенно лишенным смысла говорить о том, что умножение числа 10 само на себя определенное число раз даст 6. Как можно умножить 10 само на себя дробное число раз? Конечно, вся идея и правда лишена смысла, когда мы пытаемся себе представить, что она могла бы означать в реальном мире, но мощь и красота математики в том и состоят, что нет нужды беспокоиться о каком бы то ни было смысле, выходящем за пределы алгебраических определений.

Логарифм числа 6 равен 0,778 с точностью до трех десятичных разрядов. Другими словами, когда мы умножим 10 само на себя 0,778 раз, мы получим 6^[37].

Приведем список логарифмов чисел от 1 до 10, оставляя в каждом логарифме по три десятичных знака:

$$\begin{aligned}\lg 1 &= 0 \\ \lg 2 &= 0,301\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg 3 &= 0,477 \\ \lg 4 &= 0,602 \\ \lg 5 &= 0,690 \\ \lg 6 &= 0,778 \\ \lg 7 &= 0,845 \\ \lg 8 &= 0,903 \\ \lg 9 &= 0,954 \\ \lg 10 &= 1,000\end{aligned}$$

Так в чем же суть логарифмов? Логарифмы превращают более сложную операцию умножения в более простую — сложение. Точнее говоря, умножение двух чисел эквивалентно сложению их логарифмов. Если $X \times Y = Z$, то $\lg X + \lg Y = \lg Z$.

Проверим это, используя приведенную таблицу значений:

$$\begin{aligned}3 \times 3 &= 9 \\ \lg 3 + \lg 3 &= \lg 9 \\ 0,477 + 0,477 &= 0,954\end{aligned}$$

Еще раз:

$$\begin{aligned}2 \times 4 &= 8 \\ \lg 2 + \lg 4 &= \lg 8 \\ 0,301 + 0,602 &= 0,903\end{aligned}$$

Поэтому для того, чтобы перемножить два числа, можно использовать следующий метод: превратим заданные числа в их логарифмы, сложим эти логарифмы, а полученный «третий» логарифм снова превратим в число. Чему, например, равно 2×3 ? Находим логарифмы чисел 2 и 3, равные 0,301 и 0,477, и, складывая их, получаем 0,788. Как мы видели из приведенного списка значений логарифмов, 0,788 есть логарифм числа 6. Итак, ответ равен 6.

Теперь умножим 89 на 62.

Прежде всего нам надо найти их логарифмы. Для этого можно воспользоваться калькулятором или Гуглом. До последних десятилетий XX столетия, впрочем, единственный способ сделать это состоял в том, чтобы найти соответствующие значения в таблицах логарифмов.

Логарифм числа 89 равен 1,949 с точностью в три десятичных разряда. Логарифм числа 62 равен 1,792.

Сумма логарифмов составляет $1,949 + 1,792 = 3,741$.

Число, логарифм которого равен 3,741, есть 5518. Это опять же можно

выяснить, воспользовавшись таблицами логарифмов.

Итак, $89 \times 62 = 5518$.

Существенный момент состоит в том, что единственное вычисление, которое нам пришлось сделать, чтобы узнать результат умножения, состояло в простом сложении.

Логарифмы, писал Непер, способны освободить математиков от «тяжелых затрат времени» и «ошибок, закрадывающихся при выполнении умножения, деления и извлечения квадратных и кубических корней из больших чисел». С появлением изобретения Непера оказалось возможным не только свести умножение чисел к сложению их логарифмов. Деление чисел превратилось в вычитание их логарифмов, вычисление квадратного корня стало делением на два, а вычисление кубического корня — делением на три.

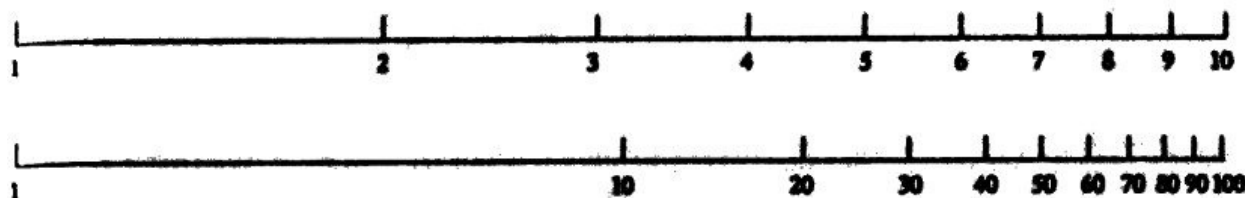
Удобства, предоставляемые логарифмами, сделали их самым значительным математическим изобретением XVII века. Наука, торговля и промышленность получили от них колоссальную пользу. Например, немецкий астроном Иоганн Кеплер, используя логарифмы, почти мгновенно вычислил орбиту Марса. Не так давно высказывалось мнение, что он, возможно, никогда не пришел бы к открытию своих трех законов небесной механики без упрощения вычислений за счет использования неперовских логарифмов.

В написанной в 1614 году книге «Описание восхитительных таблиц логарифмов» Непер использовал вариант логарифмов, слегка отличный от того, каким пользуются в современной математике. Логарифмы можно выражать как степень любого числа, которое называется в этом случае основанием. Система Непера основывалась на неоправданно сложном основании $1 - 10^{-7}$ (после чего он умножал на 10^7). Генри Бриггс — современник Непера и ведущий английский математик того времени — приехал в Эдинбург, чтобы поздравить шотландца с его открытием. Бриггс пошел дальше Непера и упростил систему, введя логарифмы по основанию десять — они стали известны как логарифмы Бриггса, или просто десятичные логарифмы, и именно они приобрели самое широкое распространение. (В данной главе под «логарифмами» я понимаю именно десятичные логарифмы.) В 1617 году Бриггс опубликовал таблицы логарифмов всех чисел от 1 до 1000 с точностью в восемь десятичных разрядов. К 1628 году Бриггс и голландский математик Адриан Флакк расширили таблицы логарифмов до 100 000 с точностью в десять десятичных разрядов. Проведенные ими вычисления требовали упорного численного счета — при том, что после единственной ошибки в

вычислении его надо было начинать сначала.

*

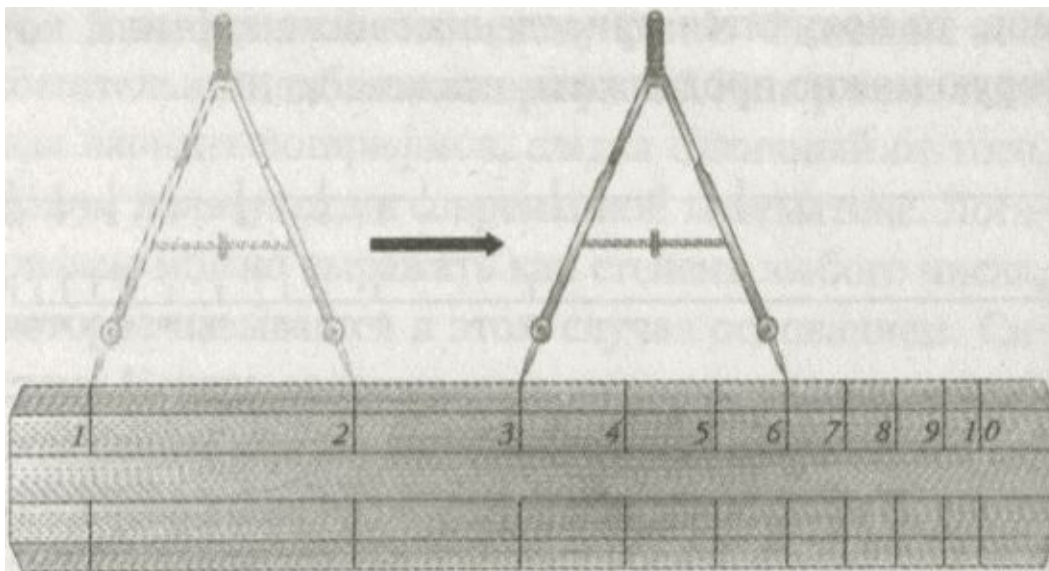
Если нанести числа от 1 до 10 на линейку, расположив их в соответствии со значениями их логарифмов, то получится приведенная ниже картина, которую можно продолжить, скажем, до 100:



Получилась так называемая логарифмическая шкала. В этом масштабе числа по мере их возрастания располагаются все ближе и ближе друг к другу.

Некоторые измерительные шкалы являются логарифмическими — каждый шаг от одного значения к следующему на такой шкале представляет десятикратное увеличение соответствующего значения. Самая широко применяемая из них — это шкала Рихтера, по которой измеряются амплитуды волн, записанных сейсмографом. Землетрясение в 7 баллов по шкале Рихтера означает амплитуду колебаний в десять раз большую, чем для землетрясения в 6 баллов.

В 1620 году английский математик Эдмунд Гантер впервые нанес логарифмическую шкалу на линейку. Он заметил, что использование пары циркулей и его логарифмической линейки позволяет умножать числа, не обращаясь к таблицам логарифмов; если циркуль установлен на значении 1 слева и на значении a справа, то при переносе левой иглы циркуля в любое число b окажется, что правая игла стоит на числе $a \times b$. На рисунке показан циркуль, поставленный на 2, а затем перенесенный так, что его левая игла стоит на 3; правая при этом оказывается на отметке $2 \times 3 = 6$.



Гантеровское умножение $2 \times 3 = 6$

*

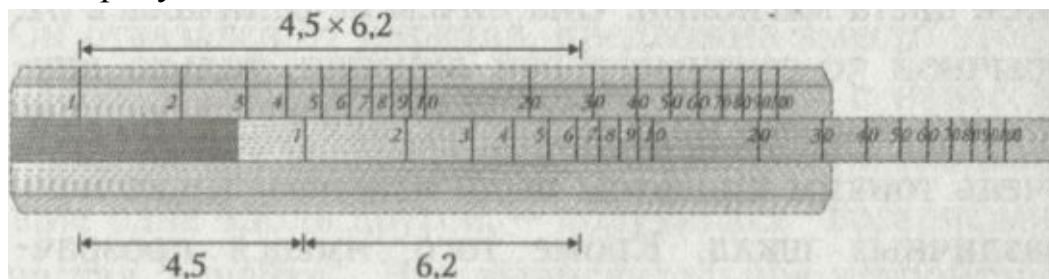
Прошло немного времени, и англиканский священник Уильям Отред усовершенствовал идею Гантера. Он отказался от циркуля, предложив вместо этого использовать две деревянные линейки с нанесенными на них логарифмическими шкалами, скользящие одна вдоль другой, — получилась «логарифмическая линейка». Это вычислительное устройство поистине фантастическое по своей гениальности, и несмотря на то, что в наши дни оно выглядит пережитком прошлого, у него есть свои истовые поклонники. К одному из них — Питеру Хоппу — я заехал в гости в его родной городок в 40 милях от Лондона. «Между 1700-ми годами и 1975 годом все без исключения инновации в технике совершались с помощью логарифмической линейки», — сказал он мне, встречая меня на станции. Хопп — инженер-электрик на пенсии — необычайно любезный человек с клочковатыми бровями, голубыми глазами и роскошными бакенбардами. Он показал мне свою коллекцию логарифмических линеек, одну из самых больших в мире, содержащую более тысячи этих позабытых героев нашего научного прошлого. По дороге к его дому мы обсуждали с ним коллекционирование. Хопп заметил, что все самое лучшее продается на интернет-аукционах, и конкуренция приводит к взвинчиванию цен. А редкая логарифмическая линейка, сказал он, легко может стоить более тысячи долларов.

Когда мы добрались до его дома, миссис Хопп предложила нам чаю, а потом мы удалились в его кабинет, где он показал мне деревянную логарифмическую линейку 1970-х годов, изготовленную фирмой «Faber-

Castell», с пластиковым покрытием цвета магнолии. Она ничем не отличалась от обычной 30-сантиметровой линейки, только внутри нее имелась подвижная средняя часть. На ней очень тонким шрифтом были нанесены несколько различных шкал. Кроме того, имелся прозрачный подвижный бегунок с рисками. Вид этого изделия фирмы «Faber-Castell» и то, каково оно было на ощупь, вызывало глубокие ассоциации с послевоенной докомпьютерной эрой чудаков-зубрил, когда занудничающие умники ходили в рубашках и галстуках и носили в карманах пластиковые пеналы, набитые ручками, — не то что нынешние, в футболках и кедах, с айподом в руках.

Я ходил в британскую младшую и среднюю школу в 1980-х годах, когда логарифмическими линейками уже больше не пользовались, так что Хопп прочитал мне краткий вводный курс. Он посоветовал, чтобы я, как начинающий, использовал шкалу от 1 до 100 на основной линейке и соседнюю с ней шкалу от 1 до 100 на подвижной средней части.

Умножение двух чисел с помощью логарифмической линейки — операция совсем не сложная, при этом даже не требуется понимать, что такое логарифмы. Пусть, например, я собираюсь умножить 4,5 на 6,2. Мне надо сложить длину, отмеченную как 4,5 на одной линейке, с длиной, отмеченной как 6,2 на другой. Для этого я сдвигаю среднюю подвижную часть линейки так, чтобы 1, нанесенная на ней, совпала с точкой 4,5 на основной линейке. Результат этого умножения находится в точке на основной линейке, стоящей напротив числа 6,2 на средней линейке. Все понятно из рисунка:



Прозрачный курсор с рисками помогает разглядеть, как именно соотносятся две шкалы. Проследив от точки 6,2 на подвижной средней линейке, можно увидеть, что на основной линейке это будет соответствовать отметке, лишь немного не доходящей до 28, что и представляет собой правильный ответ. Логарифмические линейки не являются прецизионными устройствами. Однако, говорит Хопп, несмотря на отсутствие прецизионности, логарифмические линейки, как правило, оказывались достаточно точными для инженерных задач.

Я использовал на логарифмической линейке шкалу от 1 до 100. Кроме того, там нанесены шкалы от 1 до 10, которые применяются при расчетах, требующих большей точности, потому что при такой шкале между нанесенными на линейку числами остается больше места. По этой причине при пользовании логарифмической линейкой лучше переписать подлежащее вычислению выражение так, чтобы в него входили числа между 1 и 10 — это можно сделать, перенеся десятичную запятую. Например, мы хотим умножить 4576 на 6231 — превратим это в умножение чисел 4,576 и 6,231. А получив ответ, перенесем десятичную запятую на шесть разрядов обратно направо. Имея входное значение 4,576 и выравнивая его с числом 6,231, получаем примерно 28,5, что означает, что ответ в задаче об умножении 4576×6231 составляет около 28 500 000. Совсем не такая плохая оценка. Точный ответ, вычисленный с использованием таблиц логарифмов, равен 28 513 056. Как правило, логарифмическая линейка, подобная линейке фирмы «Faber-Castell», дает точность в три значащие цифры — а нередко только это и требуется. Но там, где я проиграл в точности, я выиграл в скорости — это вычисление заняло у меня менее пяти секунд. Использование таблиц логарифмов потребовало бы в десять раз больше времени.

Самый старый экземпляр в коллекции Питера Хоппа — это деревянная логарифмическая линейка начала XVIII века, которую использовали сборщики налогов для вычисления объема спиртных напитков. До моей встречи с Хоппом я весьма скептически относился к коллекционированию логарифмических линеек как к *интересному* времяпрепровождению. Марки и окаменелости, по крайней мере, бывают красивыми; логарифмические же линейки — это чисто функциональные устройства, созданные с целью облегчения вычислений. Но старинная логарифмическая линейка Хоппа определенно была красивой — из превосходного дерева, с изящно нанесенными цифрами.

В обширной коллекции Хоппа нашли свое отражение те небольшие изменения, что происходили с линейками в течение веков. К примеру, в XIX столетии появились новые шкалы. Питер Роже — тот самый лексикограф, что с поистине маниакальной настойчивостью составлял списки слов, пытаясь таким образом справиться с душевной болезнью (это привело в 1805 году к появлению «Тезауруса Роже», *Thesaurus of English Words and Phrases*, одного из первых в истории и наиболее известных на сегодня словарей, впервые опубликованного в 1852 году), — изобрел двойную логарифмическую шкалу, с помощью которой стало возможным вычислять дробные степени, подобные $3^{2,5}$, и квадратные корни. По мере

совершенствования производства логарифмических линеек появлялись все новые и новые изделия, сочетавшие в себе достижения изобретательности, точность и великолепие. Например, счетное устройство Тэчера выглядит как вращающийся цилиндр на металлическом основании, а калькулятор профессора Фуллера состоит из трех концентрических полых медных цилиндров с ручкой из красного дерева. Спираль общей длиной в 41 фут обвивает цилиндр, позволяя получать точность в пять значащих цифр. И в самом деле, решил я, логарифмические линейки — предмет, обладающий неожиданной привлекательностью.

*

Среди других экспонатов я заметил на полке у Хоппа нечто, выглядевшее как мельница для перца, и поинтересовался, что это такое. Хопп ответил, что это курта. Курта — черный цилиндр размером с ладонь, с заводной ручкой сверху — представляет собой уникальное изобретение: это единственный в своем роде механический карманный калькулятор. Чтобы показать, как он работает, Хопп сначала провернул ручку на один оборот — обнулil показания машинки. Числа задаются изменением расположения ползунков, перемещающихся в пазах боковой поверхности курты. Хопп выставил число 346 и один раз повернул ручку. Затем он поставил ползунки в положение, соответствующее числу 217. После еще одного поворота ручки сумма этих двух чисел, равная 563, появилась в окошке в верхней части механизма. Хопп сказал, что курта может еще вычитать, умножать, делить и выполнять другие математические операции.

И хотя курта — это не логарифмическая линейка, воплощенная в ней изобретательность сделала ее объектом, милым сердцу собирателей вычислительных устройств. Стоило мне только увидеть этот калькулятор в деле, как я сразу понял — он лучший в коллекции Хоппа. Начнем с того, что курта и правда почти буквально «перемалывала» числа — их в нее «засыпали», а результат появлялся после вращения ручки. Хотя «перемалывала» — пожалуй, слишком грубое слово для устройства, внутри которого запрятаны 600 механических деталей, работающих с точностью швейцарских часов.

С куртой связана весьма драматическая история. Ее изобретатель Курт Херцштарк придумал прототип этого устройства в концентрационном лагере Бухенвальд в конце Второй мировой войны. Херцштарка арестовали за «пособничество евреям» и за «связь с еврейскими женщинами». Лагерное начальство, узнав, что Херцштарк — гениальный инженер, велело ему продолжать работу над его вычислительной машиной.

Херцштарку сказали, что, если устройство будет работать, его преподнесут Гитлеру в качестве подарка, и жизнь Херцштарка будет спасена. Когда с окончанием войны Херцштарк получил свободу, он покинул лагерь, имея при себе практически законченные чертежи. После нескольких попыток найти инвестора он в конце концов сумел убедить князя Лихтенштейна, и именно там, в Лихтенштейне, в 1948 году была выпущена первая курта. До начала 1970-х годов фабрика в этом княжестве произвела около 150 000 штук механических калькуляторов. Херцштарк прожил в Лихтенштейне до самой своей смерти. Он скончался в 1988 году в возрасте 86 лет.

*

В течение 1950-х и 1960-х годов курта оставалась единственным в мире карманным калькулятором, способным давать точные ответы. Но и курта, и логарифмическая линейка немедленно отправились в утиль, как только появился электронный карманный калькулятор.

Логарифмическая линейка первенство удерживала в течение трех сотен лет. До тех пор, пока в 1972 году компания «Hewlett-Packard» выпустила свое устройство HP-35, которое рекламировалось как «высокоточная переносная электронная логарифмическая линейка». Однако оно сильно отличалось от обычной логарифмической линейки. Приборчик этот был величиной с небольшую книгу, с красным жидкокристаллическим дисплеем, 35 кнопками и переключателем Вкл/Выкл. Уже через несколько лет стало практически невозможно купить обычную логарифмическую линейку, разве что подержанную, да и интересовала она лишь только редких коллекционеров.

За одним исключением. В современном мире есть место, где логарифмические линейки по-прежнему широко применяются. Это кабина пилота самолета. Круговая авиационная логарифмическая линейка называется навигационной линейкой. Она измеряет скорость, расстояние, время, расход топлива, температуру и плотность воздуха. Чтобы сдать экзамен на пилота, надо в совершенстве овладеть мастерством расчетов с помощью навигационной линейки — что может показаться исключительно странным в наш век продвинутых компьютерных технологий, когда кабина пилотов напичкана самыми разнообразными современными приборами. Навигационные логарифмические линейки нужны потому, что пилоты должны уметь летать и на маленьких самолетах, где нет бортовых компьютеров. Тем не менее нередко и пилоты, летающие даже на реактивных самолетах, предпочитают пользоваться навигационной линейкой. Имея ее под рукой, можно очень быстро получить оценки всех

необходимых величин, а кроме того, нагляднее представлять себе численные параметры полета. Благодаря тому что пилоты умеют обращаться с вычислительным устройством начала XVII века, авиаполеты становятся безопаснее.

*

Возвращаясь к алгебре, рассмотрим неразлучного спутника школьной математики: *системы уравнений*. Задача, как правило, состоит в том, чтобы решить систему из двух уравнений, в каждое из которых входят две переменные. Например,

$$\begin{aligned}y &= x, \\ y &= 3x - 2.\end{aligned}$$

Здесь требуется решить оба уравнения, что мы сейчас и исполним. Подставив значение переменной, взятое из одного уравнения, в другое, найдем решения. В данном случае, поскольку $y = x$, имеем

$$x = 3x - 2,$$

что дает

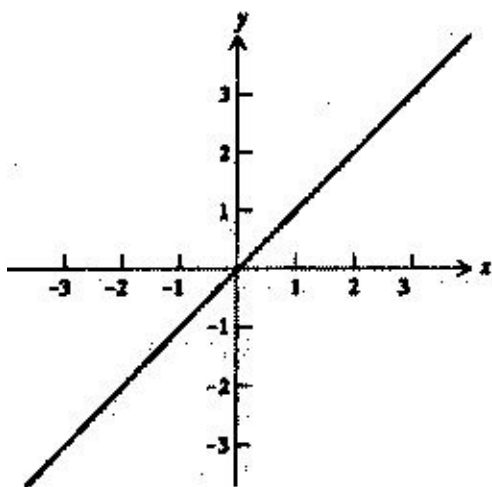
$$2x = 2.$$

Итак, $x = 1$ и $y = 1$.

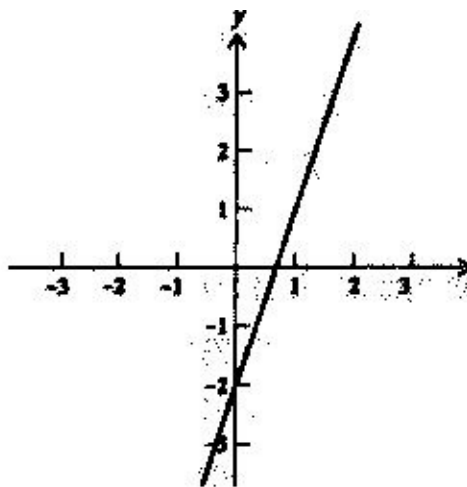
Всякое уравнение, содержащее две переменных, можно представить себе наглядно, на графике. Проведем горизонтальную прямую и пересекающую ее вертикальную прямую. Будем говорить, что горизонтальная прямая — это ось x , а вертикальная — ось y . Оси пересекаются в точке 0. Положение любой точки на плоскости можно тогда определить, указав соответствующие ей значения на каждой оси. Местоположение точки, определяемое числами (a, b) , задается как пересечение вертикальной прямой, проходящей через точку a на оси x , и горизонтальной прямой, проходящей через точку b на оси y .

Для всякого уравнения, содержащего x и y , те точки (x, y) , в которых значения x и y удовлетворяют заданному уравнению, представляют собой некоторый график. Например, каждая из точек $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$ удовлетворяет нашему первому уравнению, $y = x$. Если мы нанесем все эти точки на график, то станет ясно, что уравнение $y = x$ порождает прямую линию. Подобным же образом можно изобразить второе из приведенных выше уравнений, $y = 3x - 2$. Выбирая значение x и затем выясняя, чему равен y , мы устанавливаем, что точки $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ и $(3, 7)$ лежат на

линии, описываемой данным уравнением. Это тоже прямая, пересекающая ось y в точке -2 :



$$y = x$$



$$y = 3x - 2$$

Если мы наложим одну из наших прямых на другую, то увидим, что они пересекаются в точке $(1, 1)$. Таким образом, мы видим, что решение системы уравнений — это координаты точки пересечения двух прямых линий, описываемых этими уравнениями.

Мысль о том, что уравнения можно выразить в виде линий, представляла собой радикальное новшество, предложенное Декартом в его книге «La Geometrie». Введение Декартовой системы координат носило революционный характер, потому что в ней соединились до того никак не связанные области: алгебра и геометрия. Впервые оказалось, что два различных раздела знания не только связаны между собой, но и являются альтернативными представлениями друг друга. Одна из задач, которые ставил перед собой Декарт, состояла в том, чтобы сделать и алгебру, и геометрию доступнее для понимания, потому что, как он заметил, взятые по отдельности, «они простираются лишь в области весьма абстрактных вещей, с виду не представляющих никакого практического интереса, — геометрия всегда настолько привязана к исследованию фигур, что понимания в ней невозможно добиться без чрезвычайного напряжения воображения, в то время как алгебра до такой степени подчинена всяческим правилам и числам, что превратилась в запутанное и замутненное искусство, которое подчиняет себе ум, вместо того чтобы быть наукой, способствующей развитию ума». Декарт не питал особой склонности к перенапряжению. Он вошел в историю как любитель позднего вставания, прославившись тем, что предпочитал при всякой возможности оставаться в кровати до полудня.

Выполненное Декартом соединение алгебры и геометрии — это мощный пример взаимодействия между абстрактными идеями и пространственным воображением, и это взаимодействие стало с тех пор постоянным сюжетом в математике. Многие из наиболее впечатляющих доказательств в алгебре — включая доказательство Великой теоремы Ферма — опираются на геометрию. Подобным же образом, получив алгебраическое описание, геометрические задачи, история которых составляет до двух тысяч лет, зажили новой жизнью. Одно из наиболее восхитительных свойств математики как раз и выражается в том, как различные с виду предметы оказываются связаны между собой, что приводит к новым неожиданным открытиям.

В 1649 году Декарт по приглашению шведской королевы Кристины перебрался в Стокгольм, дабы исполнять обязанности ее личного наставника. Королева была ранней пташкой. Необходимость вставать в 5 утра, помноженная на отсутствие привычки к скандинавской зиме, привела к тому, что вскоре после приезда Декарт заболел воспалением легких и умер.

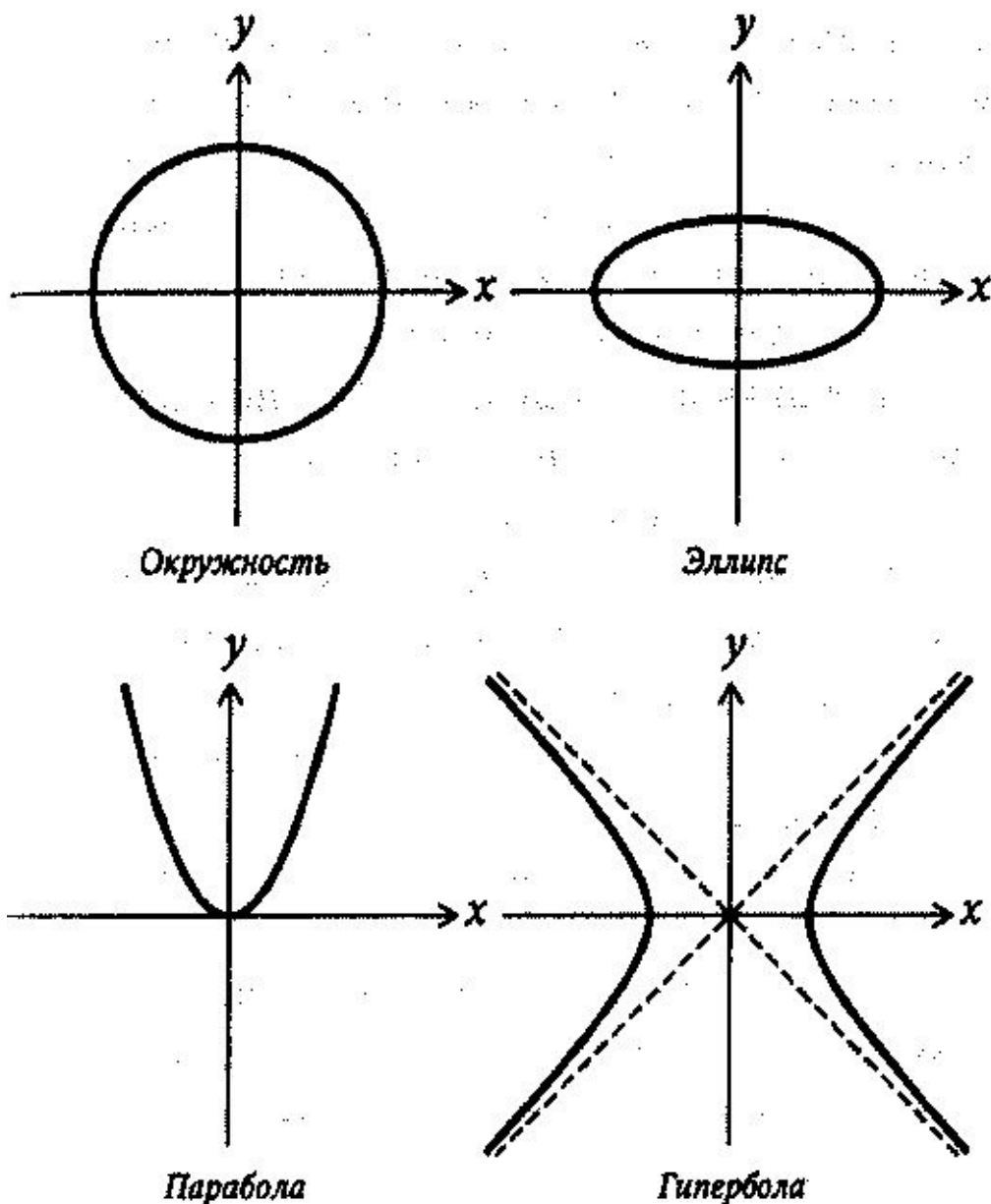
*

Одним из наиболее очевидных следствий из Декартова озарения, заключавшегося в том, что уравнения, связывающие x и y , можно выражать в виде линий, было осознание того факта, что различные типы уравнений дают при этом различные типы линий. Мы можем начать их классификацию прямо с наших уравнений.

Уравнения, подобные $y = x$ и $y = 3x - 2$, содержащие только x и y , всегда дают прямые линии.

Напротив, уравнения, содержащие квадратичные члены — то есть те, которые включают выражения x^2 и/или y^2 , — всегда дают кривые одного из следующих четырех типов: окружность, эллипс, парабола или гипербола.

Тот факт, что всякую окружность, эллипс, параболу и гиперболу, нарисованные на плоскости, можно описать уравнением, квадратичным по x и y , крайне полезен для науки по той причине, что эти кривые присутствуют в реальном мире. Парабола — это траектория объекта, брошенного в воздух (в пренебрежении сопротивлением воздуха и в предположении однородного гравитационного поля). Когда футболист бьет по мячу, летящий мяч тоже описывает параболу. Эллипсы — это кривые, по которым планеты движутся вокруг Солнца, а траектория, по которой движется в течение дня тень, отбрасываемая самым кончиком гномона солнечных часов, — это гипербола.



Рассмотрим следующее квадратичное уравнение, которое на самом деле подобно машине для рисования окружностей и эллипсов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

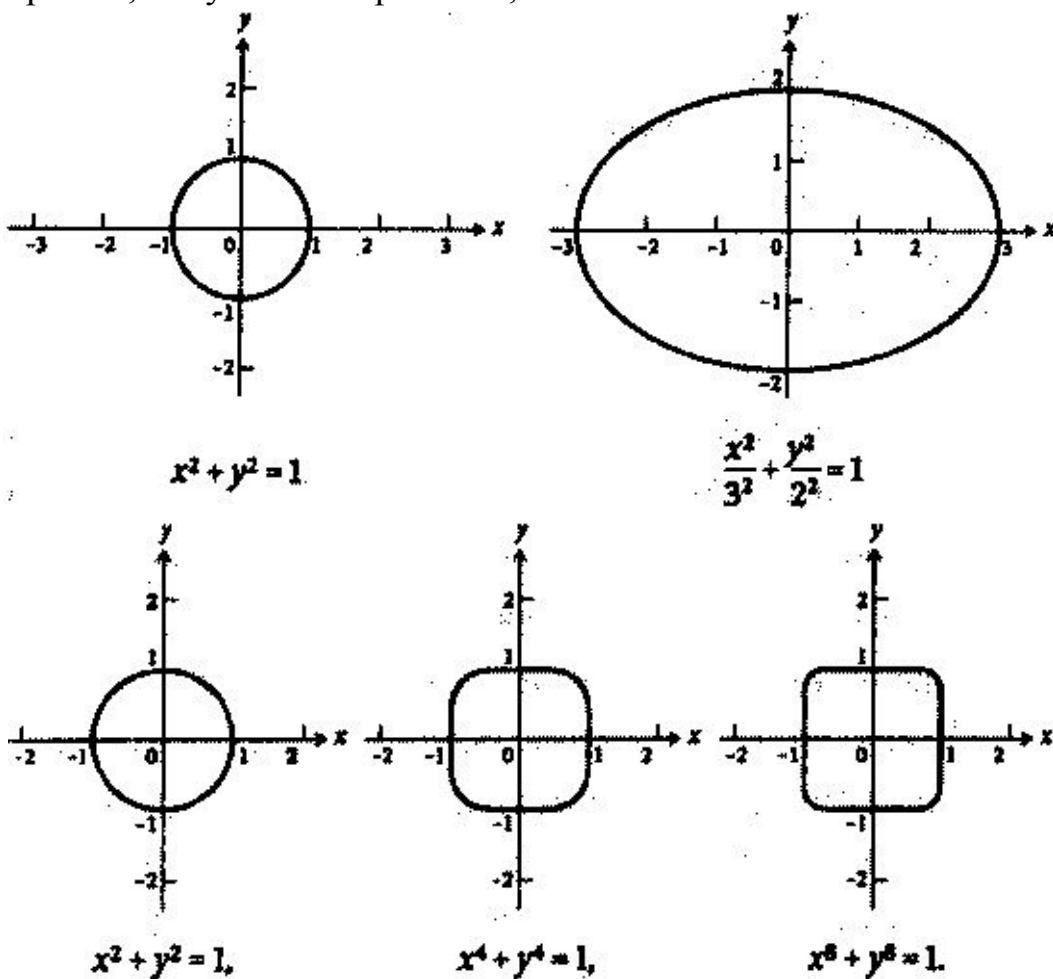
где a и b — некоторые постоянные. У этой машины два рычажка, один из которых управляет буквой a , а другой — буквой b . Подбирая значения a и b , мы можем по своему желанию нарисовать любую окружность и любой эллипс с центром в точке 0.

Например, когда a совпадает с b , получающееся уравнение описывает окружность радиуса a . Когда $a = b = 1$, уравнение принимает вид $x^2 + y^2 = 1$

и получается окружность радиуса 1 — «единичная окружность», как та, что нарисована слева на рисунке. Если же a и b — различные числа, то уравнение описывает эллипс, который пересекает ось x в точке a и ось y в точке b . Например, кривая справа — это эллипс, для которого $a = 3$ и $b = 2$.

В 1818 году французский математик Габриель Лямэ, размышляя над формулой для окружности и эллипса, задался таким вопросом: что будет, если «подкручивать» не значения a и b , а показатели степени?

Эффект оказался восхитительным. Рассмотрим, например, уравнение $x^n + y^n = 1$. При $n = 2$, как мы видели, оно порождает единичную окружность. А вот кривые, получаемые при $n = 2$, $n = 4$ и $n = 8$:



Когда n равно 4, кривая выглядит как окружность, стиснутая при зажимании в квадратный ящик. Ее стороны уплощаются, но остаются четыре скругленных угла. Как будто окружность пытается стать квадратом. Когда n равно 8, получающаяся кривая еще более походит на квадрат.

На самом деле, чем большее мы выберем число n , тем ближе полученная кривая будет к квадрату. В пределе, когда $x^\infty + y^\infty = 1$,

уравнение описывает квадрат. (Если что-то и заслуживает названия квадратуры круга, то это как раз тот самый случай.)

*

В центре Стокгольма расположен Сергелс Торг — многоуровневый торговый центр и транспортный узел. Это широкое прямоугольное пространство, устроенное так, что нижний уровень предназначен для пешеходов, а машины ездят сверху по кругу. Именно там политические активисты любят устраивать различные мероприятия, и именно туда стекаются спортивные болельщики, когда шведская сборная выигрывает какое-то значимое международное соревнование. Визитная карточка этого места — расположенная в центральной части здоровенная скульптура, стоящая там со времен 1960-х годов, предмет ненависти местных жителей — 37-метровый обелиск из стекла и стали, подсвечиваемый по ночам.

В конце 1950-х годов, когда планировщики города проектировали Сергелс Торг, они столкнулись с некой геометрической проблемой. Какова, спрашивали они себя, наилучшая форма для кругового движения в прямоугольном пространстве? Им не хотелось использовать точную окружность, потому что в таком случае прямоугольное пространство было бы задействовано не полностью. Но градостроители также не желали использовать овал и эллипс — несмотря на то, что они лучше заполняют пространство — и в том и в другом случае «заостренные» края препятствовали бы плавному движению транспорта. В поисках ответа архитекторы решили проконсультироваться у зарубежного специалиста и обратились к Питу Хейну (1905–1996). Этот человек некогда считался третьей по известности фигурой в Дании (после физика Нильса Бора и писательницы Карен Бликсен). Пит Хейн изобрел «груки» — короткие афористические стихотворения, которые он публиковал во время Второй мировой войны, считая их одной из форм пассивного сопротивления оккупации Дании нацистами. Кроме того, он был художником и математиком, а потому обладал как раз нужным художественным чутьем, широтой мышления и научным взглядом на мир — сочетание, которое могло бы помочь взглянуть под другим углом на проблему планировки стокгольмского центра.

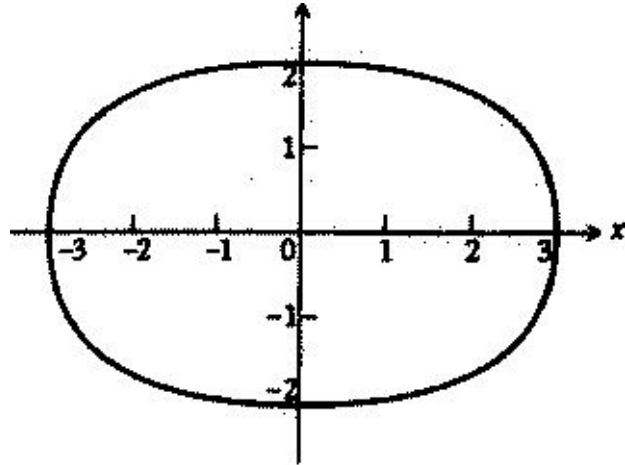
И Пит Хейн решил с помощью несложных математических вычислений найти форму, которая будет представлять собой нечто среднее между эллипсом и прямоугольником. Для этого он использовал описанный выше метод, только применил его не к окружности, а к эллипсу. Говоря алгебраически, он стал по-всякому изменять значения n в таком уравнении:

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 1.$$

Как мы только что видели, если взять окружность и начать увеличивать n от 2 до бесконечности, окружность будет переходить в квадрат. Соответственно, если взять эллипс и начать увеличивать n от 2, эллипс все больше и больше будет приближаться к прямоугольнику. Представим себе эллипс, описываемый приведенным выше уравнением, в котором $a = 3$ и $b = 2$. Пит Хейн рассудил, что значение n , при котором кривая представляет собой наилучший с эстетической точки зрения компромисс между эллиптической и прямоугольной формами, — 2,5. Соответствующая кривая показана на рисунке. Он назвал эту новую форму суперэллипсом.

Помимо просто изящного математического фрагмента, суперэллипс Пита Хейна затрагивает и более глубокую человеческую тему — повсеместно присутствующий в нашем окружении конфликт между окружностями и прямыми линиями. Он писал по этому поводу:

Всегда в цивилизованном мире постоянно просматривались две тенденции: одна — тяготеющая к прямым линиям и прямоугольным очертаниям, и другая — к округлым линиям. У каждой из этих тенденций имеются причины как механические, так и психологические. То, что состоит из прямых линий, лучше подходит одно к другому и экономит пространство. Зато передвигаться — физически или мысленно — легко среди вещей, образованных округлыми линиями. Но мы заключены в смиренную рубашку, заставляющую нас довольствоваться то одним, то другим, хотя порой лучше бы выбрать нечто среднее. Суперэллипс оказался решением задачи. Он не круглый, не прямоугольный; он где-то посередине. Но при этом он строго определен — он обладает собственной сущностью.



$$\left(\frac{x}{3}\right)^{2.5} + \left(\frac{y}{2}\right)^{2.5} = 1$$

Круговое движение, выполненное в Стокгольме в форме суперэллипса, повторяли и другие архитекторы; самый известный пример — проект стадиона «Ацтека» в Мехико, где проходили финалы чемпионата мира по футболу в 1970 и 1986 годах.

Разработанная Питом Хейном кривая вошла в моду, завоевав себе место в скандинавском дизайне 1970-х годов. Там до сих пор можно купить суперэллиптические тарелки, подносы и дверные ручки, производимые компанией, принадлежащей сыну Пита Хейна.

Лукавый ум Пита Хейна не остановился на суперэллипсе. Работая над своим следующим проектом, он задался вопросом о том, каков мог бы быть трехмерный вариант этой формы. Результат — нечто промежуточное между сферой и ящиком, который он назвал «суперяйцом». Неожиданной чертой суперяйца оказалась способность удерживаться на одной из своих сторон, не опрокидываясь. В 1970-х годах Пит Хейн выпустил в продажу суперяйца, сделанные из нержавеющей стали, они предлагались покупателям как «скульптура, сувенир или амулет». Это довольно красивые и в то же время забавные предметы. Одно такое суперяйцо стоит у меня на каминной полке. Одно есть у Ури Геллера^[38]. Его подарил ему Джон Леннон, объяснив, что сам получил это яйцо от инопланетян, посетивших его нью-йоркскую квартиру. «Храни его, — сказал Леннон Геллеру. — Для меня оно слишком странное. Если это мой билет на другую планету, то мне туда совсем не хочется».

Глава 6

На досуге

*Автор отправляется на поиск математических головоломок.
Он изучает наследие двух китайцев — один из которых
туповатый затворник, а другой свалился с Земли, — а затем
летит в Оклахому ради встречи с волшебником.*

Маки Кадзи издает японский журнал, специализирующийся на числовых головоломках. Кадзи считает себя кем-то вроде шоумена или эстрадного артиста, использующего в своем ремесле числа. «Я ощущаю себя скорее режиссером фильма или спектакля, чем математиком», — объясняет он. Я познакомился с Кадзи в его офисе в Токио. Он не вел себя эксцентрично, но и не держался чересчур официально, хотя именно эти два качества можно было бы ожидать от того, кто некогда был одержим числами, а потом превратился в успешного бизнесмена. Кадзи был одет в черную футболку, а поверх нее — в модный бежевый кардиган, на его носу сидели очки в стиле Джона Леннона. Ему 57 лет, у него короткая козлиная бородка и бакенбарды, и он часто и заразительно смеется. Кадзи с удовольствием поведал мне о том, что помимо числовых головоломок у него есть и другие хобби. Например, он собирает канцелярские резинки и из своего недавнего путешествия в Лондон привез про запас 25-граммовую упаковку фирменных резинок из книжного магазина «WH Smith» и еще одну 100-граммовую упаковку от независимого торговца канцелярскими товарами. Еще он на досуге развлекается тем, что фотографирует содержательные с арифметической точки зрения номерные знаки на автомобилях. В Японии номерные знаки состоят из двух пар чисел. Кадзи постоянно носит с собой небольшой фотоаппарат и старается не пропустить ни одного знака, на котором перемножение чисел из первой пары дает число, равное второй.

Если предположить, что ни на одном номере ни одного японского автомобиля во второй паре цифр не стоят 00, то каждый номерной знак, сфотографированный Кадзи, — это строка в таблице умножения от 1 до 9.

Например, знак 1101 можно воспринимать как $1 \times 1 = 1$. Подобным же образом, 1202 — это $1 \times 2 = 2$. Если продвигаться дальше по списку, то получится, что всего имеется 81 возможная комбинация. Кадзи уже собрал более 50. Когда у него будет полная таблица умножения, он намеревается устроить выставку своих фотографий.

*

Идее о том, что числа могут пригодиться для развлечения, столько же лет, сколько и самой математике. Например, древнеегипетский папирус Ринда содержит следующий список, составляющий часть ответа на задачу № 79. Данная задача, в отличие от других задач из этого папируса, не имеет никакого очевидного практического применения:

Домов	7
Кошек	49
Мышей	343
Спельты	2401
Гекатов ^[39]	16 807
Всего	19 607

Этот список — описание семи домов, в каждом из которых семь кошек, каждая из которых съела семь мышей, каждая из которых съела семь зерен спельты, каждое из которых взято из отдельного геката. Эти числа образуют *геометрическую прогрессию* — то есть последовательность, каждый член в которой вычисляется путем умножения предыдущего члена на одно и то же число (в данном случае — семь). Кошек в семь раз больше, чем домов, мышей в семь раз больше, чем кошек, зерен спельты в семь раз больше, чем мышей, а гекатов в семь раз больше, чем зерен спельты. Полное число объектов можно записать в виде суммы $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$.

Впрочем, не только древним египтянам такая последовательность казалась неотразимой. Почти точно та же сумма фигурирует в книжке «Стихи Матушки Гусыни» — детском сборнике начала XIX века:

*Еду я как-то в Шерборн-Сент-Джон,
А навстречу Джон и семь его жен.*

*У каждой жены по семь лукошек,
В каждом лукошке семь кошек,
У каждой кошки по семь котят —*

*А ну сосчитай-ка попробуй, брат,
Котят да кошек, лукошки да жен, —
Сколько всего их едет в Сент-Джон?*

Это стихотворение^[40] — одна из наиболее известных в английской литературе задач с подвохом, потому что, как можно сообразить, весь отряд женщин и путешествующих поневоле представителей семейства кошачьих, двигались из Сент-Айвс. Впрочем, каким бы ни было направление их движения, полное число котят, кошек, корзинок и жен составляет $7 + 72 + 73 + 74$, что равно 2800.

Другое — не столь широко известное — изложение этой загадки содержится в одной из задач в написанной в XIII столетии книге Леонардо Фибоначчи «Liber Abaci». В этом варианте участвуют семь женщин, а далее все возрастающие количества мулов, мешков, ломтей хлеба, ножей и ножен. Сделанное добавление доводит последовательность до 7^6 , так что полное число предметов равно 137 256.

В чем же привлекательность степеней числа семь, обуславливающая их появление в столь различные времена в столь различных контекстах? Каждый из примеров демонстрирует все возрастающее ускорение, характерное для геометрической прогрессии. Стихотворение — это поэтический способ выразить, сколь быстро малые числа способны приводить к большим. При первом чтении вы можете подумать, что там какое-то разумное число котят, кошек, корзинок и жен, — но в действительности их почти три тысячи! Точно так же занимательные задачи из папируса Ринда и «Liber Abaci» выражают то же самое глубокое математическое наблюдение. Причем число 7 — пусть иногда и кажется, что оно уж очень часто возникает в подобных задачах из-за каких-то своих особенных свойств, — само по себе не важно. Стоит несколько раз умножить любое число^[41] само на себя, как ответ быстро выходит за пределы ожидаемого.

Даже при перемножении на себя самого меньшего из возможных чисел — числа 2 — ответ устремляется в небеса с головокружительной скоростью. Положим одно пшеничное зернышко на клетку шахматной доски, на соседнюю клетку — два зерна и далее примемся заполнять всю доску, каждый раз удваивая число зерен. Сколько пшеницы тогда окажется на последней клетке? Быть может, несколько грузовиков? Или контейнер? На шахматной доске 64 клетки, так что нам надо выполнить удвоение 63 раза, что означает число 2, умноженное само на себя 63 раза, или 2^{63} . В терминах пшеничных зерен это число примерно в сто раз превосходит все

годовое производство пшеницы в мире. А можно посмотреть и по-другому: если пересчитывать зерна так, чтобы на каждое зерно уходила одна секунда, и при этом начать счет в момент Большого взрыва, случившегося около 13 миллиардов лет назад, то к настоящему моменту вы не дойдете и до десятой доли числа 2^{63} .

*

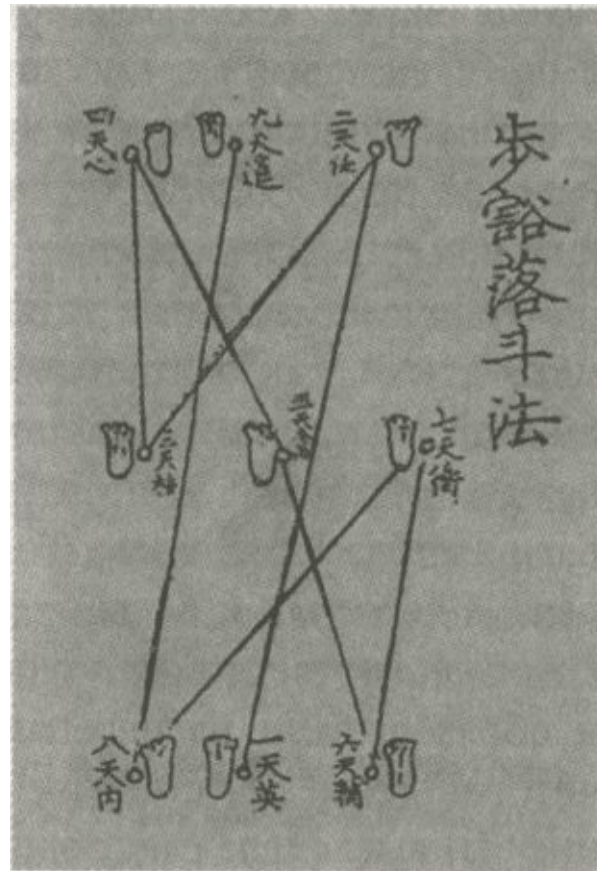
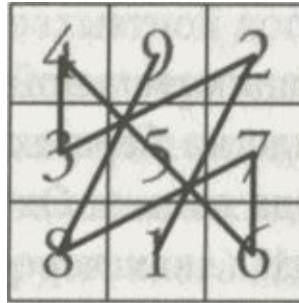
Математические загадки, стихи и игры очень популярны в наши дни. Занимательная математика — широкая и живая область, важнейшее достоинство которой состоит в том, что она доступна целеустремленному непрофессионалу, но при этом может порой затрагивать достаточно сложные элементы теории. Теоретической составляющей может и не быть вовсе, но вместо нее должно присутствовать восхищение перед чудом чисел — подобно нервной дрожи, сопутствующей коллекционированию номерных знаков.

Ключевое событие в истории занимательной математики, как считается, произошло на берегах Желтой реки, Хуанхэ, около 2000 года до н. э. Однажды китайский император наблюдал, как черепаха выползает из воды. То была священная черепаха, с черными и белыми пятнышками на брюхе, которые соответствовали первым девяти числам и образовывали на черепашьем брюхе табличку, которая (если вместо точек подставить арабские цифры) выглядела следующим образом:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Квадрат, который, подобно данному, содержит последовательные числа начиная от 1, причем они расставлены так, что все их суммы по всем строкам, столбцам и диагоналям равны друг другу, называется «магическим». Китайцы называют этот квадрат «ло шу». (В нем все суммы по строкам, столбцам и диагоналям равны 15.) Китайцы верили, что «ло шу» символизирует внутреннюю гармонию Вселенной. Они использовали его для предсказаний будущего и отправлений религиозных обрядов. Например, если начать с 1 и провести линию, соединяющую стоящие в квадрате числа по порядку, то получится узор (см. рисунок), изображающий схему передвижения даосистского жреца по храму. Этот

узор, называемый «юбу», также лежит в основе некоторых правил фэн шуй — китайской философии эстетики.



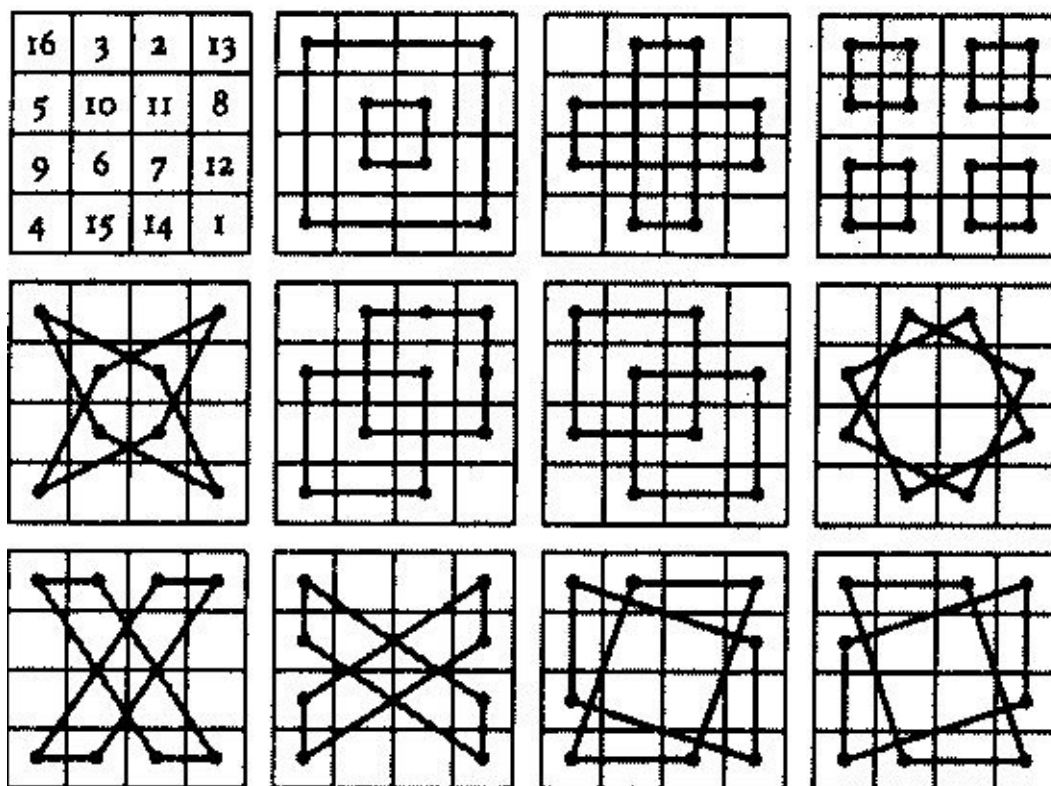
Движение по узору ло шу и даосистское руководство сюбу

Мистическую сторону ло шу разглядели не только в Китае. Магические квадраты представляли объекты большой духовной значимости для индуистов, мусульман, иудеев и христиан. В исламской культуре им нашли наиболее творческое использование. В Турции и Индии девственницам предписывалось вышивать магические квадраты на рубашках воинов. Кроме того, считалось, что если магический квадрат положить на живот

роженицы, то это облегчит роды. Индуисты носили амулеты с изображениями магических квадратов в качестве защиты от злых чар, а астрологи эпохи Возрождения сопоставляли их с планетами нашей Солнечной системы. Легко смеяться над склонностью наших предков к оккультизму, однако и современному человеку их очарованность магическими квадратами совершенно понятна. Простые, но при этом со сложной структурой, они подобны числовым мантрам, некоему объекту бесконечного созерцания и сдержанного выражения порядка в нашем совершенно неупорядоченном мире.

Одна из привлекательных черт магических квадратов состоит в том, что они могут иметь любой размер, не обязательно только 3×3 . Знаменитый пример — квадрат 4×4 , который использовал в своем творчестве Альбрехт Дюрер. В композицию гравюры «Меланхолия I» он включил квадрат 4×4 , получивший такую известность потому, что в него встроен год создания гравюры — 1514. На самом деле это *сверхмагический* квадрат — в нем не только строки, столбцы и диагонали дают в сумме 34, но также и все комбинации из четырех чисел, отмеченных точками и соединенных в квадратах на рисунке.

Структуры, связанные с этим квадратом, вызывают изумление, и чем дольше смотришь, тем больше их видишь. Сумма квадратов чисел из первой и второй строчек равна 748. То же самое число получается путем сложения квадратов чисел в строках 3 и 4, или квадратов чисел в строках 1 и 3, или же квадратов чисел в строках 2 и 4, или, наконец, квадратов чисел на каждой из диагоналей. Ничего себе!



Не меньшее изумление вызывает то, что получается, если повернуть магический квадрат Дюрера на 180 градусов, а затем вычесть 1 из клеток, содержащих числа 11, 12, 15 и 16. Результат будет таким:



Квадрат, показанный на рисунке, расположен на стене кафедрального собора Саграда Фамилия в Барселоне, построенного по проекту Антонио Гауди. Квадрат Гауди не магический, поскольку два числа в нем повторяются, но и столбцы, и строки, и диагонали в нем все суммируются к числу 33 — возрасту Христа к моменту его смерти.

Немало времени можно провести, забавляясь с магическими квадратами и восхищаясь их структурой и гармонией. На самом деле ни одна другая область непрактической математики не привлекала столько любителей математики на протяжении столь многих лет. В XVIII и XIX веках литература по магическим квадратам расцвела пышным цветом. Одним из самых именитых энтузиастов был Бенджамин Франклин. В молодости он забавлялся составлением магических квадратов, пытаясь скрасить скучные часы на службе в Законодательном собрании штата Пенсильвания. Самый известный его квадрат имеет размер 8×8 (см. рис.), и считается, что он придумал его еще мальчишкой.

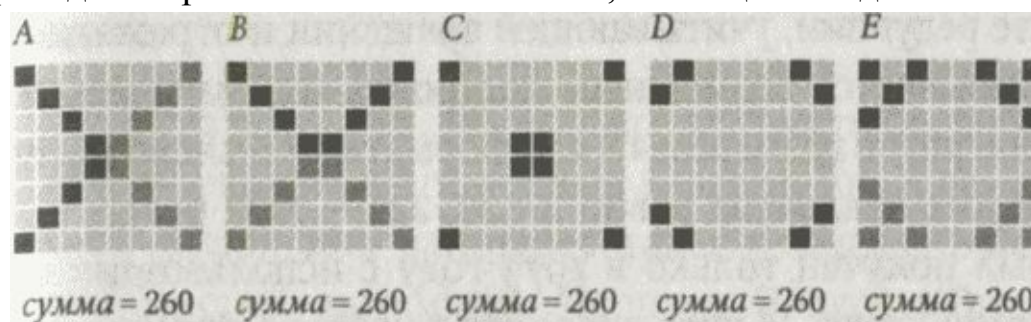
В этом квадрате Франклин воплотил одно из своих собственных изобретений, касающееся развития теории магических квадратов: «ломаную диагональ», которая учитывает суммы чисел в черных клетках и суммы чисел в серых клетках, как показано на рисунках А и В ниже. Хотя квадрат Франклина не является собственно магическим, поскольку сумма чисел по основным диагоналям не составляет 260, его новое изобретение — половинные диагонали — суммируются именно таким образом. Суммы чисел по черным клеткам на рисунках С, D и E, сумма чисел по серым клеткам на рисунке E и, конечно, суммы по каждой строке и каждому столбцу — все они равны 260.

Fig. III. Page 351

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Квадрат Франклина содержит и еще более хитроумные симметрии. Сумма чисел в каждом из подквадратов 2×2 равна 130, и такова же сумма любых из четырех чисел, расположенных равноудаленно от центра. Считается, что Франклин изобрел еще один квадрат, когда ему было уже за сорок. Потратив всего один вечер, он составил невероятный квадрат размером 16×16 , который, по его утверждению, был «самым магически

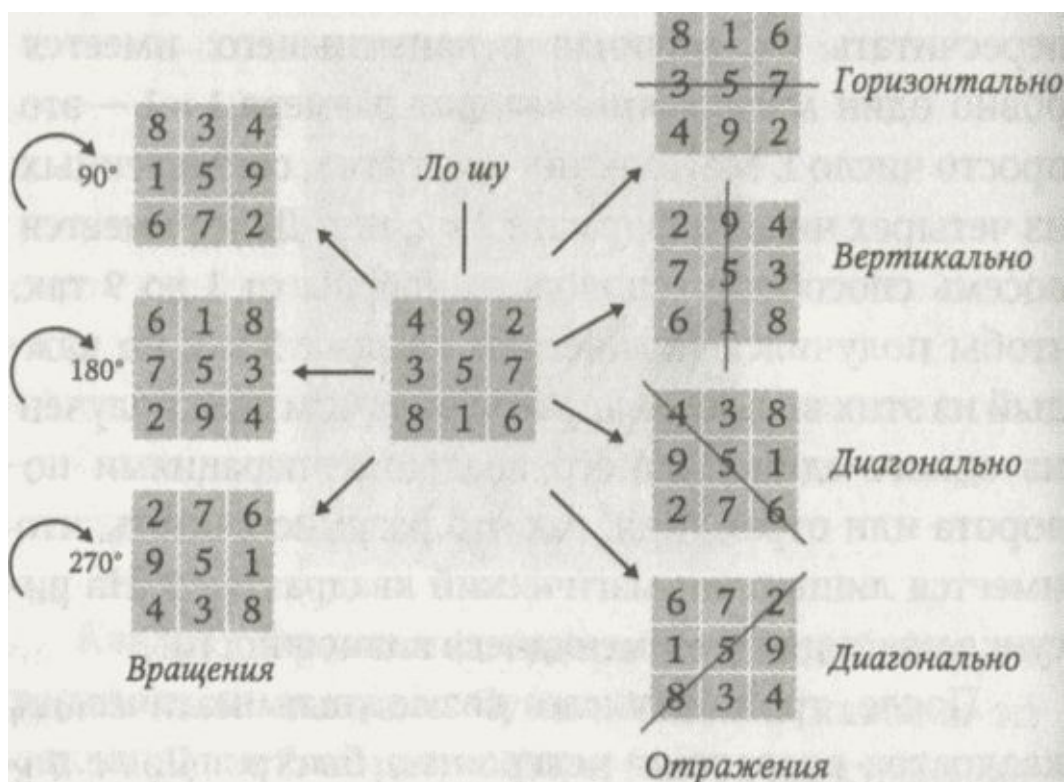
магическим из всех магических квадратов, когда-либо созданных магами». (Он приведен в приложении 3 на веб-сайте, посвященном данной книге.)



Одна из причин непреходящей популярности составления магических квадратов заключается в том, что их оказывается неожиданно много. Попробуем пересчитать их, начиная с наименьшего: имеется ровно один магический квадрат размера 1×1 — это просто число 1. Магических квадратов, составленных из четырех чисел в формате 2×2 , нет. Далее имеется восемь способов расположить цифры от 1 до 9 так, чтобы получился магический квадрат 3×3 , но каждый из этих восьми квадратов на самом деле получен из одного-единственного квадрата операциями поворота или отражения, так что разумно считать, что имеется лишь один магический квадрат 3×3 . На рисунке показаны все имеющиеся возможности.

После тройки число возможных магических квадратов возрастает невероятно быстро. Даже после редукции, учитывающей вращения и отражения, оказывается возможным построить 880 магических квадратов размером 4×4 . В формате 5×5 число магических квадратов равно 275 305 224 — этот результат был получен только в 1973 году с использованием компьютера. И хотя число это кажется астрономически большим, на самом деле оно ничтожно по сравнению с числом *всех* возможных расстановок цифр от 1 до 25 в магическом квадрате размером 5×5 . Полное количество возможных расположений можно вычислить, умножая 25 на 24, потом на 23 и т. д. до 1, что примерно составляет число, записываемое как 1,5 с 25 нулями, то есть 15 септиллионов.

Число магических квадратов 6×6 неизвестно, хотя вероятно, что оно есть нечто близкое к 1 с 19 нулями. Это число настолько огромно, что превосходит даже полное число пшеничных зерен на шахматной доске в задаче, рассмотренной выше.



*

Надо сказать, что не только математики-любители увлекались магическими квадратами. В конце своей жизни ими заинтересовался и выдающийся швейцарский математик Леонард Эйлер^[42]. (Он к тому времени практически полностью ослеп, из-за чего его исследования в области, существенным образом использующей пространственное расположение чисел, представляются особенно впечатляющими.) В частности, он изучал модифицированный вариант магического квадрата, в котором каждое число или символ появляется только один раз в каждой строке и каждом столбце. Он назвал такие квадраты «латинскими».

●	▲	■	£	¥	\$	€	2	3	4	0	1
▲	■	●	€	\$	¥	£	0	1	2	3	4
■	●	▲	\$	£	€	¥	3	4	0	1	2
			¥	€	£	\$	1	2	3	4	0
							4	0	1	2	3

Латинские квадраты

В отличие от магических квадратов латинские квадраты имеют несколько практических применений. Их можно использовать для составления графика спортивных турниров, проводимых по круговой системе, когда каждая команда должна сыграть с каждой, а также в сельском хозяйстве в качестве удобного средства, позволяющего фермеру испытать, например, несколько различных удобрений на участке земли и узнать, какое из них дает наилучшие результаты. Если у фермера, скажем, пять продуктов, подлежащих проверке, и он разбивает землю в квадрат 5×5 , то размещение каждого из продуктов по латинскому квадрату гарантирует, что всякое изменение в характере почвы окажет одинаковое влияние на каждое средство.

*

Маки Кадзи — представленный мною в начале главы японец, который занимается созданием головоломок, — открыл новую эру в играх с числовыми квадратами. Идея посетила его, когда он просматривал один американский журнал головоломок. Поскольку английский — не его родной язык, он пролистывал страницы малопонятных игр, использующих слова, пока не наткнулся на загадочно выглядящую сетку из чисел. То была головоломка под названием «Поставь числа на место». Она представляла собой частично заполненный латинский квадрат 9×9 , в котором использовались цифры от 1 до 9. Рассуждая логически, игрок должен был заполнить пустые места числами, помня, что каждое число может появиться в каждой строке и каждом столбце только один раз. Задача облегчалась дополнительным условием: квадрат был разбит на девять подквадратов 3×3 , выделенных жирным шрифтом. Каждое из чисел от 1 до 9 могло появляться в подквадрате лишь единожды. Кадзи решил головоломку «Поставь числа на место» и очень воодушевился — именно головоломки подобного типа он и хотел размещать в своем новом журнале.

Головоломка «Поставь число на место», впервые появившаяся в 1979 году, была творением Говарда Гарнса, в прошлом архитектора из Индии, на пенсии увлекшегося головоломками. Хотя Кадзи понравилось решать головоломку Гарнса, он решил переделать ее таким образом, чтобы заданные числа были распределены в симметричную структуру по сетке, подобно тому, как это имеет место в кроссвордах. Он назвал свой вариант sudoku, что по-японски означает «число должно появляться только один

раз».

	1	5		4		8		
	8		3				5	
6					5		2	
8				6		5		
		4	8		3	6		
		6		9				1
	2		1					8
	9				8		7	
		8		7		2	1	

Судоку

Кадзи поместил судоку в первых же номерах своего журнала головоломок, который начал выходить в 1980 году, но, по его словам, никто не обратил тогда на них никакого внимания. Лишь после того, как судоку пересекли границу Японии, они стали распространяться подобно лесному пожару.

Точно так же, как говорящие по-японски, но не знавшие английского люди могли понять, что требуется в головоломке «Поставь числа на место», говорившие по-английски, но не знавшие японского могли играть в судоку.

В 1997 году новозеландец по имени Уэйн Гоулд зашел в один из книжных магазинов в Токио. Увидев на полках только книги на японском языке, он поначалу слегка растерялся, но вдруг его глаз зацепился за что-то знакомое. Ему бросилась в глаза обложка книги, которая выглядела как кроссворд с расставленными в нем числами. Очевидно, это было нечто вроде головоломки, подумал он, но вот как она решается? Гоулд решил купить книжку и разобраться с ней потом. Во время отпуска, который он проводил на юге Италии, Гоулд наконец решил головоломку. Незадолго до того он вышел на пенсию — ранее он был судьей в Гонконге — и увлекся

программированием на компьютере. Гоулд решил, что попробует написать программу, которая будет генерировать различные sudoku. Программисту высшего класса для этого понадобилась бы пара дней, у Гоулда же на решение задачи ушло шесть лет.

Однако затраченные усилия стоили того, и в сентябре 2004 он смог убедить редакцию нью-гэмпширской газеты «Conway Daily Sun» опубликовать одну из своих головоломок. Успех превзошел все ожидания. В следующем месяце Гоулд решил попробовать силы в британской национальной прессе. Он полагал, что самый эффективный способ продвинуть свою идею состоит в том, чтобы предложить редакции готовый макет их газеты с уже помещенным в него sudoku. Судебная практика в Гонконге многому его научила, так что изготовить хорошую подделку не составило большого труда. Он подготовил выглядывший достаточно убедительно «макет» приложения к «Times» и принес его с собой в главную редакцию этой газеты. Гоулду пришлось прождать несколько часов в приемной, но он все-таки сумел продемонстрировать свой самодельный номер кое-кому из сотрудников. Идея всем понравилась. Более того, не успел Гоулд уйти из редакции, как один из топ-менеджеров «Times» послал ему имейл с просьбой никому больше не показывать sudoku. Первая головоломка была напечатана через две недели, а уже через три дня газета «Daily Mail» предложила свой собственный вариант. В январе 2005 года в игру вступила и «Daily Telegraph». Прошло совсем немного времени, и уже каждая британская газета считала своим долгом ежедневно публиковать подобную головоломку, чтобы не отставать от конкурентов. В тот год, по данным газеты «Independent», продажи карандашей в Великобритании возросли в 7 раз — по мнению газеты, это было связано с массовым помешательством на sudoku. К лету в книжных магазинах, газетных киосках и в аэропортах появились отдельные полки со сборниками sudoku, причем это наблюдалось не только в Соединенном Королевстве, но и по всему миру. По данным «USA Today» в 2005 году шесть из 50 наиболее популярных книг в списке бестселлеров были книгами по sudoku. К концу года sudoku распространились уже в 30 странах, а журнал «Time» назвал Уэйна Гоулда в числе 100 наиболее влиятельных людей года — он оказался в этом списке в компании Билла Гейтса, Опри Уинфри и Джорджа Клуни. К концу 2006 года головоломки sudoku публиковались в 60 странах, а к концу 2007-го — в 90. По оценкам Маки Кадзи, число людей, регулярно решающих sudoku, превышает ныне 100 миллионов.

*

Успешное решение всякой головоломки оказывает важное позитивное влияние на ваше эго, но дополнительное очарование в решении задачек судoku состоит отчасти во внутренней красоте и уравновешенности идеального латинского квадрата, определяющего их форму. Успех судoku — свидетельство уходящего в века и существующего в самых различных культурах фетиша в виде числовых квадратов. И в отличие от массы всяких других головоломок успех судoku — это одновременно и замечательная победа математики. Хотя в судoku нет никакой арифметики, решение требует абстрактного мышления, распознавания образов, логической дедукции и построения алгоритмов.

Например, как только вы поняли правила судoku, становится полностью ясной идея *единственности решения*. Для каждой числовой структуры в таблице имеется только одно возможное окончательное расположение для чисел в пустых клетках. Однако при этом не верно, что всякая частично заполненная таблица будет иметь единственное решение. Вполне может случиться, что некий квадрат 9×9 с расставленными в нем числами не имеет решения, как может случиться и то, что у данного квадрата будет много решений. Когда британский спутниковый канал «Sky TV» запустил Судoku-шоу, продюсеры нарисовали таблицу размером 275 на 275 футов на известняковом холме, расположенном где-то в сельской местности в Англии. Это, по их утверждению, было самое большое судoku в мире. Однако предложенные ими числа позволяли заполнить квадрат 1905 различными способами. Таким образом, разрекламированное самое большое судoku не имело единственного решения, а потому и не могло классифицироваться как судoku.

Область математики, имеющая дело с перечислением комбинаций (таких, например, как упомянутые 1905 решений фальшивого судoku, предложенного «Sky TV»), называется *комбинаторикой*. Она состоит из изучения перестановок и комбинаций предметов, подобных числам из таблицы. Кроме того, к комбинаторике относится и знаменитая задача о коммивояжере. Пусть, скажем, я — коммивояжер, и мне надо заехать в 20 магазинов. В каком порядке мне надо в них заезжать, чтобы полный путь, который я проделаю, оказался минимальным? Решение требует рассмотрения всех перестановок путей между всеми магазинами, и представляет собой классическую (и исключительно сложную) комбинаторную задачу. Подобные задачи постоянно возникают в бизнесе и промышленности; например, при составлении расписания вылета

самолетов из аэропорта или при проектировании эффективной системы сортировки почты.

Комбинаторика — это область математики, которая имеет дело с исключительно большими числами. Как мы видели на примере магических квадратов, уже небольшое количество чисел можно расположить на удивление большим количеством способов. Хотя и латинские, и магические квадраты образуют квадратные таблицы, при их одинаковом размере латинских квадратов меньше, чем магических, однако латинских квадратов все равно очень много. Например, количество латинских квадратов размером 9×9 выражается числом из 28 цифр. Сколько среди них различных судоку? Число латинских квадратов, представляющих собой судоку, — то есть таблиц размером 9×9 , в которых 9 подквадратов содержат все цифры, — меньше полного числа примерно в сто тысяч раз и равно 6 670 903 752 021 072 936 960. Впрочем, многие из этих таблиц представляют собой различные варианты одного и того же квадрата, получаемые отражением или вращением (что мы видели выше для магического квадрата 3×3). Если не считать квадраты, получаемые вращениями и отражениями, то искомое количество заметно уменьшается: общее число различных возможностей для целиком заполненных таблиц судоку оказывается равным примерно 5,5 миллиарда.

Это, впрочем, не равно полному числу возможных судоку, которое намного больше данного числа, потому что каждая заполненная сетка будет решением многих разных судоку. Скажем, напечатанное в газете судоку имеет одно-единственное решение. Но как только вы заполните один из квадратов, вы немедленно тем самым создадите новую таблицу с новым набором данных, другими словами — новое судоку с тем же единственным решением, и т. д. для каждого из квадратов, которые вы будете заполнять. Так что если в данном судоку имеется, скажем, 30 исходно заданных чисел, то у вас есть возможность создать еще 50 других судоку с тем же единственным решением — до тех пор, пока не будет заполнена вся таблица. (Это означает новое судоку для каждого дополнительного числа, до тех пор пока в таблице из 81 квадрата не окажется 80 заполненных.) Нахождение полного числа судоку не слишком интересно, поскольку большинство таблиц для них имеют лишь очень небольшое число незаполненных клеток, что не отвечает духу этих головоломок. Математиков гораздо более привлекает задача нахождения минимального числа цифр, исходно расставленных по таблице. Самый главный комбинаторный вопрос касательно судоку звучит так: каково наименьшее количество чисел, которые можно оставить, чтобы имелся

только один способ заполнения всей таблицы?

Те sudoku, которые печатают в газетах, обычно содержат около 25 заданных чисел. К настоящему моменту никому не удалось найти sudoku, которая имела бы единственное решение при менее чем 17 заданных числах. На самом деле sudoku с 17 подсказками привели к появлению некоторого комбинаторного культа. Гордон Ройл из Университета Западной Австралии поддерживает базу данных по sudoku с 17 подсказками, и от создателей головоломок по всему миру ему ежедневно приходят три или четыре новые. К настоящему моменту он собрал их почти 50 000 штук. Но несмотря на то, что он — признанный во всем мире специалист по sudoku с 17 подсказками, он говорит, что не знает, сколь близко подошел к нахождению полного числа возможных головоломок. «Некоторое время назад я бы сказал, что дело близится к концу, но потом один анонимный участник прислал мне почти 5000 новых, — говорит он. — Мы так толком и не поняли, как же этот человек под ником „anon17“ смог их найти, но несомненно, он использовал какой-то хитрый алгоритм».

По мнению Ройла, барьер из 17 заданных чисел пока не преодолен, потому что «или мы недостаточно умные, или наши компьютеры недостаточно мощные». Скорее всего, участник «anon17» не обнародовал свой метод потому, что тайком использовал чей-то очень большой компьютер. Ответы на комбинаторные задачи нередко опираются на серьезную работу компьютера по перебору чисел. «Полное возможное пространство допустимых головоломок с 16 подсказками настолько обширно, что нам остается лишь исследовать его маленький уголок, если мы не будем привлекать какие-то новые теоретические идеи», — утверждает Ройл. Однако чутье подсказывает ему, что sudoku с 16 подсказками никогда не будут найдены. Он добавляет: «Сейчас имеется так много головоломок с 17 подсказками, что было бы крайне странно, если бы вдруг нашлась какая-нибудь с 16-ю, на которую мы до сих пор случайно не наткнулись».

*

Мне всегда казалось, что одна из причин успеха sudoku — это экзотическое название, апеллирующее к романтическому увлечению высшей восточной мудростью, несмотря на то что эту идею предложил американский архитектор Говард Гарнс. На самом деле существует традиция головоломок, имеющая свои корни на Востоке. Самый первый международный бум головоломок относится к началу XIX века, когда европейские и американские моряки, вернувшиеся из Китая, привезли

наборы геометрических фигур из семи элементов, как правило изготовленных из дерева или слоновой кости, — двух больших и двух маленьких треугольников, треугольника среднего размера, ромба и квадрата. Сложенные вместе, эти кусочки образовывали большой квадрат. К фигурам прилагались буклеты, изображавшие десятки вариантов различных геометрических или человеческих фигур и других объектов. В головоломке требовалось сложить каждую из них, используя все семь деталей.

Эта головоломка ведет свое происхождение из китайской традиции расстановки столов на званых обедах в виде различных фигур. В одной китайской книге XII века показаны 76 вариантов расположения столов, причем многие из этих вариантов были задуманы так, чтобы напоминать различные объекты, к примеру развевающийся флаг, горный хребет и цветы. В начале XIX столетия китайский писатель с забавным прозвищем Отупелый Отшельник приспособил эту церемониальную хореографию к миниатюрным геометрическим фигурам (размером с палец), которые поместил в книгу под названием «Картинки, составленные из семи дощечек мастерства».

Исходно названные китайской головоломкой, эти наборы позднее приобрели название «танграм». Первая книга по головоломкам-танграмм, вышедшая за пределами Китая, увидела свет в Лондоне в 1817 году. Она сразу же породила повальное увлечение танграмми. В последующие два года десятки подобных книг вышли во Франции, Германии, Италии, Нидерландах и в Скандинавии. Карикатуристы тех времен высмеивали массовое помешательство, изображая людей, отказывающихся спать с женами, шеф-поваров, разучившихся готовить, и докторов, забывших про своих больных, — все время эти люди были заняты складыванием треугольников.

Мне нравятся танграммы. В них волшебным образом оживают люди и животные. В результате перестановки всего одного элемента характер фигуры может полностью поменяться. У танграммов угловатые и нередко гротескные очертания, удивительным образом наводящие на самые разнообразные мысли...



Англия 1817



Англия 1818



Китай 1858



Соединенные
Штаты 1903



Соединенные
Штаты 1925



Франция 1818



Франция 1818



Насколько всепоглощающа эта головоломка, понять нелегко, пока вы сами не попробовали. Несмотря на кажущуюся простоту, решение головоломок с танграмами бывает порой делом довольно сложным. Фигуры, которые предлагается собрать, часто оказываются с подвохом; например, два весьма сходных по виду силуэта могут иметь абсолютно различную внутреннюю структуру. Танграмы — это предупреждение против беспечности, напоминание о том, что сущность вещей не всегда обнаруживается с первого взгляда. Присмотритесь к приведенным на рисунке фигурам. Кажется, что вторая получена из первой удалением маленького треугольника. На самом деле в обеих фигурах использованы все детали, и собраны они двумя совершенно различными способами.

*

В 1817 году увлечение танграмами пошло на спад. Их сменило другое повальное помешательство, вызванное второй международной эпидемией головоломок. Начиная с самого первого дня — в декабре 1879 года, — когда игра в пятнашки появилась в продаже в магазине игрушек в Бостоне, производители не могли угнаться за спросом. «Ни умудренные годами старцы, ни ангельски невинные младенцы не смогут избежать этой заразы», — предупреждала газета «Boston Post». Игра в пятнашки состоит из 15 деревянных квадратиков — фишек, помещенных в квадратную картонную коробку так, что они составляют большой квадрат размером 4×4 , при этом одно место остается незанятым. На фишках написаны числа от 1 до 15, и они расставлены по коробке случайным образом. Цель состоит в том, чтобы, используя единственное пустое место для передвижения фишек по квадрату 4×4 , выстроить все номера по порядку. Игра в пятнашки оказалась столь затягивающей и при этом столь забавной, что вскоре повальное увлечение ею распространилось из Массачусетса в НьюЙорк, а затем и по всей стране. «Подобно мощнейшему сирокко, она пронеслась над землей с востока на запад, иссушая мозги и вызывая временное помешательство», — возбужденно свидетельствовала «Chicago Tribune». А «New York Times» добавляла, что никакая другая эпидемия «из всех, когда-либо случавшихся в этой или какой бы то ни было другой стране, не распространялась с такой чудовищной скоростью и проворством».

Игру в пятнашки изобрел Ной Чепмэн — почтовый служащий из штата НьюЙорк. До этого он в течение почти двух десятилетий пытался создать физическую модель магического квадрата 4×4 . Ради удобства работы он сделал маленькие деревянные квадратики для чисел от 1 до 16 и плотно

посадил их в квадратную коробку. Когда же оказалось, что удаление одного квадрата освобождает место, на которое можно сдвинуть любой из соседних квадратов, выяснилось, что задача переупорядочения чисел может превратиться в забавную игру. Чепмэн сделал несколько экземпляров игры для членов своей семьи и для друзей, но никогда не пытался извлечь из своего изобретения прибыль. Дело приняло масштабный оборот, только когда один смекалистый бостонский плотник решил поставить производство головоломок на коммерческую основу.

Игра в пятнашки способна стать сущим мучением — это знает всякий, кто пробовал в нее играть. Дело в том, что иногда задача решается, а иногда — нет. Оказалось, при случайной расстановке фишек есть только два исхода: или все фишки удастся расположить в правильном порядке, или же получаются только первые три ряда, а в последнем числа располагаются как 13-15-14. Массовое безумие игроков подогревалось отчасти желанием понять, возможно ли из расположения 13-15-14 получить расположение 13-14-15. В январе 1890 года — через несколько недель после появления в продаже первой головоломки — некий дантист из Рочестера, штат НьюЙорк, поместил в местной газете объявление, в котором обещал награду в 100 долларов и комплект вставных зубов всякому, кто ответит на этот вопрос. Сам он, считая, что это невозможно, не сумел справиться с соответствующей математикой.

Из гостиных задачка пришла в залы научных учреждений, и, коль скоро в дело вступили профессионалы, вскоре она была решена. В апреле 1890 года Герман Шуберт, один из выдающихся математиков того времени, опубликовал в немецкой газете самое первое доказательство того, что порядок 13-15-14 представляет собой нерешаемое положение. Вскоре доказательство было опубликовано и в «American Journal of Mathematics». Это подтверждало, что половина всех начальных расположений фишек в игре в пятнашки приведет в конце игры к расположению 13-14-15, а половина — к расположению 13-15-14. Игра в пятнашки — единственная головоломка, которая не всегда имеет решение. Неудивительно, что она вызывала натуральное помешательство во всем мире — люди порой просто сходили с ума.

Как и танграммы, игра в пятнашки и сегодня не забыта. До сих пор ее можно найти в магазинах игрушек, пятнашки кладут в рождественские хлопушки и корпоративные подарочные наборы. В 1974 году один венгр задумал усовершенствовать эту головоломку — ему пришла в голову мысль перенести ее в три измерения. Этот человек — Эрнё Рубик — сделал опытный образец, кубик Рубика, не подозревая, что впоследствии

он станет одной из самых успешных головоломок в истории.

*

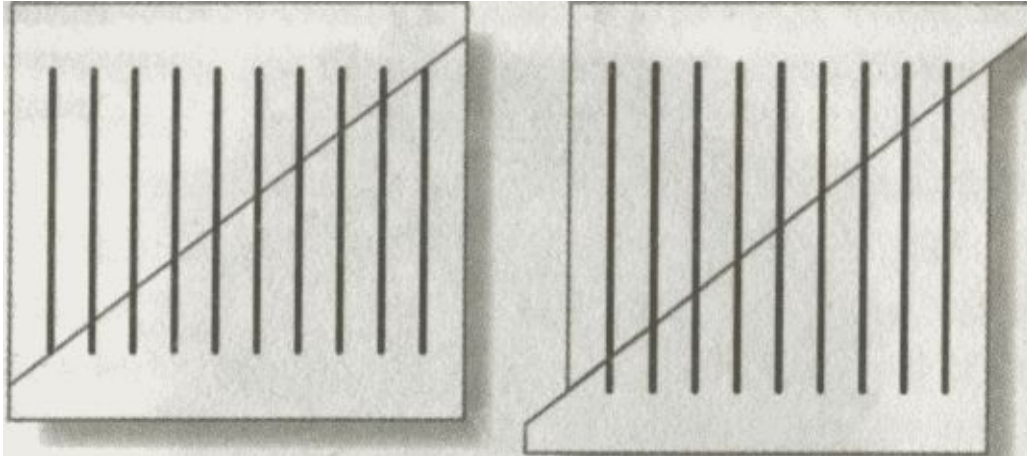
В 2002 году специалист по семиотике Марсель Данези писал в своей книге «Головоломный инстинкт», что интуитивная способность к решению головоломок представляет собой одно из необходимых человеку свойств. Когда нам предъявляют какую-либо головоломку, объясняет он, наши инстинкты заставляют нас искать решение до тех пор, пока мы не будем удовлетворены. Начиная с загадок Сфинкса и кончая тайнами современных детективов, головоломки представляют собой важный элемент человеческой культуры. Данези утверждает, что головоломки — некий вид экзистенциальной терапии, демонстрирующий нам, что сложные вопросы могут иметь точные решения. Великий создатель головоломок англичанин Генри Эрнест Дьюдени утверждал, что процесс решения головоломок лежит в основе человеческой природы: «Вся наша жизнь по большей части проходит в решении головоломок, ибо что такое головоломка, как не вопрос, ставящий нас в тупик? С детских лет мы беспрестанно задаем вопросы или пытаемся найти на них ответы».

Головоломки — это, кроме того, чудесный способ сделать математику более привлекательной. Решение их нередко требует нестандартного мышления или опирается на факты, на первый взгляд противоречащие интуиции. Ощущение достигнутого успеха, испытываемое при решении головоломок, — удовольствие, которое хочется переживать вновь и вновь; когда же задачка не решается, от тоски просто лезешь на стенку. Чувство поражения почти непереносимо.

Издатели быстро осознали, что рынок математических забав огромен. В 1612 году во Франции вышла книга Клода Гаспара Баше «Занимательные и приятные задачи (очень полезные для всех любопытных людей, использующих арифметику)». Один из ее разделов был посвящен магическим квадратам, фокусам с картами, вопросам, относящимся к системам счисления с основанием, отличным от десяти, а также задачкам из серии «задумай число». Баше был серьезным исследователем, он перевел Диофантову «Арифметику» с греческого на латынь и снабдил текст своими комментариями. Однако его популярная книга по математике оказалась, пожалуй, гораздо более заметной, чем его научные труды. Она сохраняла свою актуальность в течение столетий, а сравнительно недавно — в 1959 году — выдержала еще одно издание. Мы уже говорили, что определяющая черта математики — пусть даже развлекательной — состоит в том, что она никогда не устаревает.

В середине XIX века американские газеты начали печатать шахматные задачи. Одним из первых, и к тому же самым молодым из изобретателей таких задач был ньюйоркец Сэм Лойд. В возрасте всего 14 лет опубликовал свою первую задачку в местной газете. В 17 лет он был уже одним из наиболее успешных и известных изобретателей шахматных задач в Соединенных Штатах. От шахмат Лойд перешел к математическим головоломкам и к концу столетия стал первым в мире профессиональным составителем головоломок и импресарио. Он часто публиковался в американских изданиях и утверждал, что получал от читателей до 100 000 писем в день. Эту цифру, впрочем, следует воспринимать с известной долей скептицизма. Лойд призывал людей относиться к истине как к некой забавной игре — что можно ждать от профессионального загадочника! Для начала Ллойд заявил, что именно он изобрел игру в пятнашки, и ему поверили! И только в 2006 году, когда историки Джерри Слонам и Дик Соннвелд проследили происхождение этой игры, выяснилось, что на самом деле ее придумал Ной Чепмэн. Лойд также возродил интерес к танграмам, опубликовав «Восьмую книгу о тан, Часть I», якобы являвшуюся вариантом древнего текста, посвященного 4000-летней истории этой головоломки. Книга оказалась мистификацией, хотя сначала ее всерьез восприняли даже ученые.

Лойд обладал феноменальной способностью к превращению математических задач в забавные, ярко иллюстрированные головоломки. Самой гениальной из них была головоломка, изобретенная Лойдом в 1896 году для газеты «Brooklyn Daily Eagle». Эта головоломка, называвшаяся «Таинственное исчезновение с Земли», приобрела такую популярность, что позднее ее идеей воспользовались в качестве рекламных приемов несколько известных брендов, таких как «The Young Ladies Ноше Journal» и «Большая Атлантическая & Тихоокеанская чайная компания»; кроме того, ее использовали республиканцы для своей политической программы на президентских выборах 1896 года (хотя содержащееся в ней послание вовсе не походило на политический манифест). На этой головоломке изображены китайские воины, расположенные вокруг Земли, нарисованной на картонном круге, который может вращаться вокруг своего центра^[43]. Когда нарисованная на круге стрелка указывает на северо-восток, на картинке нарисовано 13 воинов, но стоит повернуть круг так, чтобы стрелка указывала на северо-запад, как один из них исчезает, и воинов остается только 12. Эта головоломка сбивает с толка. Только что перед вами было 13 воинов, а через секунду — уже только 12. Кто именно исчез и куда он делся?



Фокус, используемый в данной головоломке, известен как геометрическое исчезновение. Его можно продемонстрировать и так: на рисунке изображен лист бумаги с нанесенными на него десятью вертикальными отрезками. При разрезании листа по диагонали получают два куска, которые можно сложить по-другому — так, что получится только девять отрезков. Куда делся десятый? А происходит следующее: отрезки сложились таким образом, что их получилось девять, но они оказались *длиннее* первоначальных. Если отрезки на первом рисунке имели длину 10 единиц, то на втором их длина равна $11\frac{1}{9}$, поскольку один из исходных отрезков распределился среди девяти остальных.

В своей головоломке «Таинственное исчезновение с Земли» Сэм Лойд использовал геометрическое исчезновение на окружности, а вместо отрезков — китайских воинов. В его головоломке имеется 13 позиций воинов, аналогично наличию 10 отрезков в разобранный выше примере. В левом нижнем углу исходно имеются два воина, что соответствует исходному положению крайних отрезков в фокусе с геометрическим исчезновением. Когда стрелка переводится с северо-востока на северо-запад, части воинов соединяются по-другому — ко всем, кроме двух, немножко «добавляется», а два крайних при этом радикально «ужимаются» — создается впечатление, что целый воин исчез. На самом деле он просто перераспределился среди остальных. Сэм Лойд заявлял, что произведено десять миллионов экземпляров «Таинственного исчезновения с Земли». Он стал богатым и знаменитым и наслаждался репутацией американского короля головоломок.



«Таинственное исчезновение с Земли»

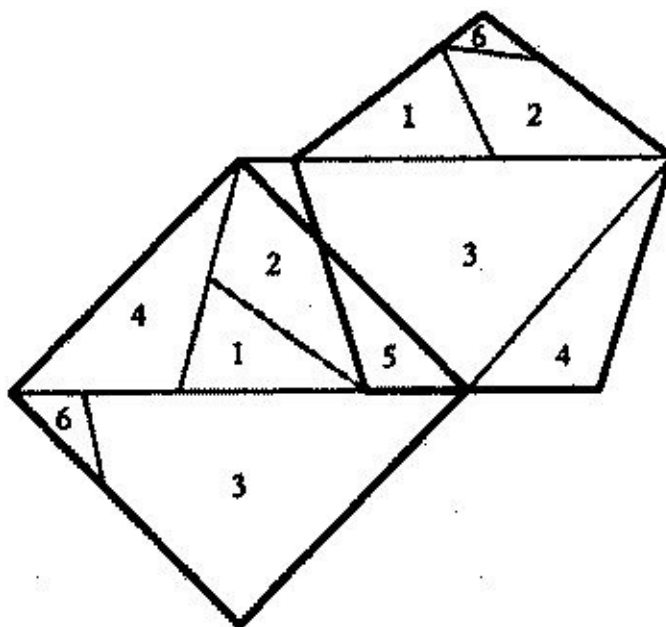
Тем временем в Великобритании Генри Эрнест Дьюдени также приобрел аналогичную репутацию. Если капиталистическая наглость

Лойда и его талант к саморекламе отражали оживленную атмосферу соперничества, царившую в НьюЙорке на рубеже столетий, то Дьюдени был воплощением сдержанного английского стиля. Он происходил из фермерской семьи, занимавшейся разведением овец в Сассексе. Уже в 13-летнем возрасте он начал работать — клерком в одном из государственных учреждений в Лондоне. Однако эта работа ему быстро наскучила, и он принялся публиковать небольшие задачки и головоломки в различных изданиях. В конце концов он полностью посвятил себя журналистике^[44]. Его жена Элис писала пользовавшиеся успехом романтические повести о деревенской жизни в Сассексе — где, благодаря ее авторским гонорарам, они с мужем могли жить в их поместье, ни в чем не нуждаясь. Супруги Дьюдени часто бывали и в Лондоне, вращались в высокообразованных литературных кругах, куда также входил сэр Артур Конан Дойл — создатель Шерлока Холмса, самого знаменитого разгадывателя головоломок во всей литературе.

В 1894 году Лойд опубликовал очередную шахматную задачу, которая решалась в 53 хода. Он был уверен, что никто никогда не найдет известное ему одному решение. Однако Дьюдени, который был на 17 лет младше Лойда, нашел решение в 50 ходов. После этого они некоторое время сотрудничали, но разругались, когда Дьюдени узнал, что Лойд не гнушается плагиатом. Дьюдени презирал Лойда столь глубоко, что сравнивал его с дьяволом.

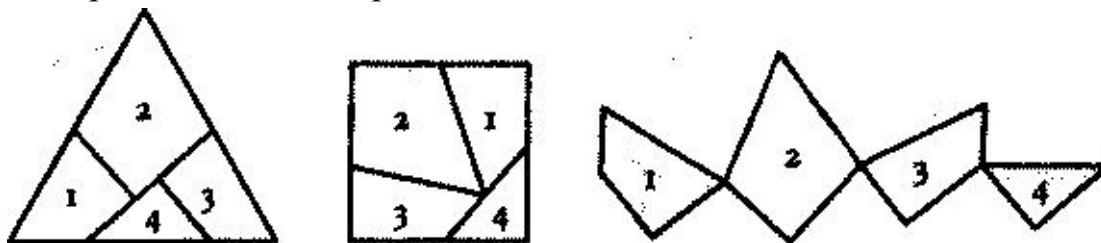
И Лойд, и Дьюдени были самоучками, но Дьюдени обладал гораздо более ясным математическим складом ума. Многие из его головоломок затрагивают глубокие математические проблемы, причем нередко предвосхищая интерес к ним со стороны ученых. Например, в 1962 году математик Мейко Кван исследовал задачу о дороге, которую должен выбрать почтальон, чтобы пройти по каждой улице и притом кратчайшим путем. Дьюдени же почти на 50 лет ранее сформулировал — и решил — ту же задачу в виде головоломки об инспекторе шахт, которому надо пройти по всем подземным туннелям.

Особого искусства Дьюдени достиг в решении геометрических задач на разбиение, в которых фигура некоторой определенной формы разрезается на куски, после чего они собираются в фигуру другой формы, по тому же принципу, что и танграмы. Дьюдени нашел способ превращения квадрата в правильный пятиугольник путем разбиения его на шесть частей. Его метод стал популярной классикой, ведь ранее, в течение многих лет, считалось, что минимальное разбиение, превращающее квадрат в пятиугольник, требует семи частей.



Разбиение, превращающее квадрат в пятиугольник

Дьюдени также открыл новый способ разбиения правильного треугольника на четыре куска, из которых собирается квадрат. Более того, он придумал, что если эти четыре куска соединить шарнирами, то их можно складывать одним способом в треугольник, а другим — в квадрат. Он назвал получившуюся конструкцию «Головоломкой галантерейщика», потому что формы фигур выглядели как обрезки материи в лавке галантерейщика. Эта головоломка ввела в обиход идею «шарнирного разбиения» и вызвала такой интерес, что Дьюдени изготовил ее из красного дерева с медными шарнирами и в 1905 году выступил с докладом об этой задаче на заседании Королевского математического общества в Лондоне. «Головоломка галантерейщика», жемчужина наследия Дьюдени, до сих пор вызывает восторг математиков.



Головоломка галантерейщика

*

Юный канадец Эрик Демейн был одним из тех, на кого «Головоломка

галантерейщика» произвела неизгладимое впечатление. Он рос вундеркиндом, и к 20 годам уже стал профессором Массачусетского технологического института. Особенно Демейна заинтересовала «универсальность» проблемы. Он задался вопросом, возможно ли *всякую* фигуру с прямолинейными сторонами разбить на части, а затем шарнирно соединить эти части друг с другом так, чтобы они сворачивались в *любую* заданную фигуру той же площади с прямолинейными сторонами. Он посвятил работе над этой задачей десять лет и в марте 2008 года (в возрасте 27 лет) объявил о полученном решении перед очень восприимчивой аудиторией — в бальном зале одной из гостиниц в Атланте, где он делал доклад, собрались истинные любители головоломок.

Демейн — высокий и тощий, с пушистой бородкой и собранными в хвост выющимися темно-русыми волосами — вывел изображение «Головоломки галантерейщика» на большой экран за своей спиной. Он сообщил слушателям, что недавно принял решение взяться за эту задачу вместе со своими аспирантами. «Я не верил, что все это правда», — сказал он. Вопреки ожиданиям, однако, он и его ученики обнаружили, что можно преобразовать любой многоугольник в любой другой многоугольник той же площади, выполняя разбиения в духе «Головоломки галантерейщика». Аудитория зааплодировала — что не так часто случается в высших кругах вычислительной геометрии. Ведь слушатели Демейна стали свидетелями того, как была решена поистине культовая задача! И сделал это блестящий Демейн!

Та конференция в Атланте, называвшаяся «Gathering for Gardner», «Собрание для Гарднера», представляла собой собрание, где в максимальной степени были способны оценить доклад Демейна. Она проводится раз в два года, дабы отдать дань уважения человеку, который во второй половине XX столетия революционизировал занимательную математику. Мартин Гарднер, умерший совсем недавно, в 2010 году, в возрасте 95 лет, вел в 1957–1981 годах ежемесячную математическую колонку в журнале «Scientific American». То был период колоссального научного прогресса — космических полетов, новых информационных технологий, достижений в генетике, — и несмотря на это, внимание читателя неизменно привлекали написанные живым и ясным языком гарднеровские заметки. «По-моему, Гарднер проявлял уважение к веселой стороне математики, на которую редко обращают внимание в математических кругах, — сказал мне Демейн, когда я подошел к нему после его доклада. — Люди все время стараются быть уж очень серьезными. А вот моя цель — найти элемент забавы во всем, что я делаю».

Тогда в Атланте Демейн не стал объяснять подробности своего доказательства универсальности разбиений в стиле «Головоломки галантерейщика», но сказал, что разбиение одного многоугольника, позволяющее сложить из него другой, поворачивая куски на шарнирах, выглядит далеко не всегда симпатично — и часто оказывается малопригодным с практической точки зрения. Демейн сейчас занят приложением своей теоретической работы по шарнирным разбиениям к созданию роботов, которые смогут изменять свою форму, складываясь и раскладываясь, подобно героям книги комиксов и киносериала «Трансформеры», где роботы превращаются в различные машины.

*

Та конференция была восьмым по счету «Собранием для Гарднера», или G4G, и ее логотип, придуманный дизайнером Скоттом Кимом, представляет собой перевертыш, или амбиграмму.

После переворачивания вверх ногами она не меняется. Ким — специалист по прикладной математике, переквалифицировавшийся в изобретателя головоломок, — создал стиль симметричной каллиграфии в 1970-х годах. (Одновременно, и совершенно независимо, с художником Лэнгдоном.) Амбиграммы не обязательно должны оставаться неизменными при повороте именно на 180 градусов — подойдет любая симметрия или тайнопись. Математики питают особую любовь к записям такого типа, поскольку они перекликаются с их собственными поисками скрытых структур и симметрий.



На конференции G4G невозможно было отделаться от мысли, что математика отвращает наступление старческого слабоумия. Многим из приглашенных было более 70 лет, а некоторым — за 80 и даже за 90. В течение более полувека Гарднер переписывался с тысячами читателей, многие из них были знаменитыми математиками, а некоторые стали его близкими друзьями. Реймонд Смулльян, которому 88 лет, является ведущим мировым специалистом по логическим парадоксам. Он предварил свое выступление такой фразой: «Прежде чем я начну говорить, позвольте мне кое-что сказать». Стройный, одетый с изящной небрежностью, с мягкими белыми волосами и воздушной бородой, Смулльян часто развлекал гостей конференции, играя на фортепиано в отеле. Кроме того, он показывал волшебные фокусы ничего не подозревающим прохожим, а однажды вечером за ужином заслужил овации, исполнив экспромтом комедийную сценку.

Другой участник конференции — Иван Москович. Ему 82, и он поразительно похож на постаревшего Винсента Прайса^[45] — в безупречно строгом темном костюме, со сверкающими глазами, торчащими карандашом усами и шевелюрой зачесанных назад седых волос. Москович

— тоже изобретатель головоломок. Он показал мне свое самое последнее творение, получившее название «Ты и Эйнштейн». Его мечта — как и каждого, кто увлечен этим занятием, — состоит в том, чтобы придумать головоломку, которая вызовет новую волну массового помешательства. До сих пор имели место всего четыре всемирных волны лихорадки по поводу головоломок с математическим уклоном: танграмы, игра в пятнашки, кубик Рубика и sudoku. Сегодня первенство по прибыльности держит кубик Рубика. С момента его изобретения Эрнэ Рубиком в 1974 году было продано более 300 миллионов штук! Помимо чисто коммерческого успеха, этот ярко раскрашенный разноцветный куб оказался неувядающим элементом массовой культуры. Он занимает беспрецедентное положение в мире головоломок, и нет ничего удивительного в том, что его популярность ощущалась и на конференции G4G в 2008 году. Доклад о кубике Рубика в четырех измерениях вызвал бурю аплодисментов.

*

Исходно кубик Рубика представлял собой конструкцию из 26 меньших кубиков, собранных в большой куб размером $3 \times 3 \times 3$. Каждый горизонтальный и вертикальный «срез» может независимо вращаться. После того как все цвета граней перемешаны, задача состоит в том, чтобы вращением «срезов» добиться, чтобы каждая сторона куба состояла целиком из квадратиков одного цвета. Всего имеется шесть цветов, по одному для каждой стороны. По мнению Московича, Эрнэ Рубик проявил гениальность дважды. Не только сама идея куба была гениальной, но и способ, которым отдельные элементы соединены друг с другом, — выдающееся инженерное решение. Если разобрать кубик Рубика, то оказывается, что внутри нет никаких специальных механических приспособлений, удерживающих отдельные детали вместе, — каждый из кубиков содержит часть центральной сцепляющей сферы.

Кубик Рубика обладает притягательностью и сам по себе. Это платоново тело, то есть трехмерная фигура, обладающая культовым, мистическим статусом по крайней мере со времен Древней Греции. Другое слагаемое успеха состоит в том, что даже достаточная сложность решения этой головоломки не отпугивает людей. Грэм Паркер, строитель из Хэмпшира, трудился без устали на протяжении 26 лет, пока наконец не реализовал свою мечту. «Я пренебрегал многими важными делами ради того, чтобы не выключаться из процесса и продолжать искать решение. Нередко я даже просыпался среди ночи с мыслями об этом, — рассказывал он о проведенных им примерно 27 400 часах за складыванием кубика

Рубика. — Когда я наконец поставил последний кусочек на место и каждая грань оказалась окрашена в свой цвет, я разрыдался. Не могу даже передать вам, какое облегчение я испытал». Те, кто решал задачу за более приемлемый отрезок времени, неизменно желали сделать то же самое еще раз, но быстрее. Установление очередного рекорда по складыванию кубика Рубика превратилось в состязание.

После 2000 года соревнования по складыванию кубика Рубика на скорость стали настоящим бумом, и ныне официальные турниры проводятся по всему миру каждую неделю. Чтобы обеспечить достаточную сложность исходного положения, правилами предписано, что кубики должны быть «перемешаны» в соответствии со случайной последовательностью вращений, которая генерируется компьютерной программой. Текущий рекорд в 7,08 секунды был установлен в 2008 году Эриком Аккерсдайком — 19-летним голландским студентом. Аккерсдайк также удерживает рекорд для кубика $2 \times 2 \times 2$ (0,96 секунды), для кубика $4 \times 4 \times 4$ (40,05 секунды) и для кубика $5 \times 5 \times 5$ (1 минута и 16,21 секунды). Он также может собрать кубик Рубика ногами — показанное им время составляет 51,36 секунды и является четвертым результатом в мире. Однако Аккерсдайк далеко не так силен в соревнованиях по сборке кубика Рубика одной рукой (всего лишь 33-е место в мире) или с завязанными глазами (43-е место). Правила для манипуляции с завязанными глазами таковы: время отсчитывается от того момента, как кубик покажут участнику. Он должен изучить его, а затем уже вращать грани с завязанными глазами. Когда, по его мнению, задача решена, он просит судью остановить секундомер. Текущий рекорд в 48,05 секунды установил в 2008 году Вилле Сеппянен из Финляндии. Другие спортивные дисциплины в скоростном складывании кубика Рубика включают решение этой задачи на американских горках, под водой, палочками для еды, во время езды на велосипеде и в свободном падении.

С математической точки зрения наиболее интересно решение задачи за минимально возможное число ходов. Участникам соревнований дают кубик с официально перемешанными цветами и предоставляют 60 минут, чтобы изучить расположение, после чего требуется найти кратчайшую последовательность, ведущую к цели. В 2009 году Джимми Колл из Бельгии установил мировой рекорд — 22 хода. Заметим, что такое число ходов сумел найти очень проницательный человек, которому дали 60 минут на осмотр перепутанного кубика Рубика. Смог бы он предложить решение, состоящее из меньшего числа ходов для той же самой начальной конфигурации, если бы у него было 60 часов? Вопрос по поводу кубика

Рубика, который занимал математиков более всего, таков: каково наименьшее n , такое что каждую конфигурацию можно привести в порядок за n или меньшее число ходов? Заметим попутно, что такое n получило прозвище «числа Бога». Нахождение «числа Бога» необычайно сложно потому, что в дело вовлечены очень большие числа. Имеется около 43×10^{18} (то есть 43 с 18 нулями) конфигураций кубика Рубика.

Если кубики в каждой из возможных конфигураций водрузить друг на друга, то получится башня, высота которой в восемь миллионов раз больше расстояния от Земли до Солнца и обратно. Анализ всех конфигураций одной за другой занял бы слишком много времени. Вместо этого математики стали рассматривать подгруппы конфигураций. Томас Рокицки, занимавшийся исследованием этой задачи около 20 лет, проанализировал набор из 19,5 миллиарда конфигураций и нашел способы решения их за 20 или меньшее число ходов. Затем он изучил около миллиона подобных наборов, каждый из которых содержит 19,5 миллиарда конфигураций, и снова нашел, что для решения достаточно 20 ходов. В 2008 году он доказал, что все оставшиеся конфигурации кубика Рубика приводятся к конфигурациям из этих наборов не более чем за два хода, а это значит, что верхняя граница для «числа Бога» равна 22.

Рокицки убежден, что «число Бога» равно 20. «На данный момент я разобрался примерно с 9 процентами всех конфигураций куба, и ни одно из них не потребовало 21 хода. Если и имеются конфигурации, требующие 21 или более ходов, то они исключительно редки». Проблема, стоящая перед Рокицки, не столько теоретическая, сколько логистическая. Просмотр всех возможных конфигураций куба требует невероятного количества компьютерной памяти и компьютерного времени. «Если использовать имеющиеся на данный момент методы, то понадобится около года работы 1000 современных компьютеров, чтобы доказать, что „число Бога“ равно 20», — говорит он.

Математика, присутствующая в кубике Рубика, долгое время была хобби Рокицки. Когда я спросил его, не думал ли он о том, чтобы исследовать математические аспекты других головоломок, например sudoku, он отшутился: «И не пытайтесь отвлечь меня всякими другими заманчивыми проблемами. Математика этого кубика — уже достаточно серьезная задача!»

*

В один из дней, после обеда, участники конференции перебрались в дом Тома Роджерса, в пригород Атланты. Роджерс — бизнесмен, которому

сейчас уже не так мало лет, — организовал первую G4G в 1993 году, а все свое детство был почитателем Гарднера. Исходная идея Роджерса состояла в том, чтобы организовать мероприятие, на котором славившийся своей застенчивостью Гарднер мог бы встречаться со своими поклонниками. Роджерс решил пригласить почитателей трех областей интересов Гарднера — математики, фокусов и головоломок. Конференция имела такой успех, что в 1996 году была организована вторая. Гарднер присутствовал на первых двух, однако впоследствии ухудшившееся здоровье уже не позволяло ему принимать в них участие. Роджерс живет в одноэтажном доме, построенном в японском стиле и окруженном зарослями бамбука, соснами и садом с плодовыми деревьями, которые, когда я туда приехал, утопали в цвету. В саду некоторые гости собирались в команды, чтобы строить геометрические скульптуры из дерева и металла. Другие пытались разгадать головоломки, подсказки к которым были прикреплены к наружным стенам дома.

В доме я встретил Колина Райта — австралийца, который живет в городке Порт-Санлайт на полуострове Уиррал. Мальчишечьи рыжие, непослушные волосы и очки делают его похожим на типичного математика. Райт — жонглер.

— После того как я научился ездить на одноколесном велосипеде, мне показалось совершенно естественным заняться жонглированием, — говорит он.

Райт также поучаствовал в разработке системы математических обозначений для жонглирования. С первого взгляда это может показаться вещью не слишком важной, однако эта система привела международное жонглерское сообщество в сильное возбуждение. Оказалось, что, используя специальный язык, жонглеры смогли придумать новые трюки, которые раньше — на протяжении тысяч лет — даже не приходили им в голову.

— Коль скоро у вас есть язык, на котором вы можете говорить о проблеме, ваш мыслительный процесс сильно облегчается, — замечает Райт, доставая несколько шариков для демонстрации недавно изобретенного фокуса. — Математика — это не только примеры, вычисления и формулы. Математика занимается тем, что разбирает вещи на части, чтобы понять, как они работают.

Я спросил его, не является ли это просто потворством собственным прихотям, нет ли чего-то бесцельного или даже расточительного в том, что лучшие математические умы тратят время, работая над такими несущественными проблемами, как жонглирование, пересчитывание

чешуек в сосновых шишках или решение головоломок.

— Математикам нужно предоставить возможность делать то, что они делают, — ответил он. — Даже гений не всегда может предугадать, что и когда окажется полезным.

Он приводит пример кембриджского профессора Г. Х. Харди, который в 1940 году громогласно (и с гордостью) заявил, что теория чисел лишена каких бы то ни было практических применений; на самом же деле в наше время эта теория лежит в основе множества программ, обеспечивающих безопасность в Интернете. Райт считает, что математикам часто сопутствует «несуразный успех» — когда они находят применение для с виду бесполезных теорем, причем нередко это случается годы спустя после их открытия.

*

Один из самых очаровательных аспектов конференции G4G состоит в том, что всех приглашенных (их 300 человек) просят привезти подарок — «нечто, что вы подарили бы Мартину». На самом деле всех просят привезти подарки в количестве 300 экземпляров, потому что каждый в конце получает мешок, в котором лежат подарки от всех остальных участников. В тот год, когда я был участником конференции, в моем мешке оказались головоломки, приспособления для фокусов, книги, компакт-диски и кусок пластика, издававший звуки, подобные тем, что издает человек, выпивший слишком много кока-колы. Один мешок предназначался Мартину Гарднеру, и я взялся доставить ему его.

Гарднер жил в Нормане, штат Оклахома. В тот день, когда я приехал, в штате свирепствовали ураганные ветры. Съехав с федеральной трассы, я немного поплутал, но наконец нашел нужное место — дом, где живут старики, нуждающиеся в уходе. Рядом располагалась забегаловка, торгующая техасским фастфудом. Дверь в комнату Гарднера была всего в нескольких шагах от входа, нужно было лишь пересечь общий холл, где беседовали несколько престарелых обитателей дома. Рядом с гарднеровской дверью стоял ящик для корреспонденции. Он не пользуется электронной почтой, но посылает и получает писем больше, чем все остальные его соседи, вместе взятые.

Гарднер открыл дверь и пригласил меня войти. На стене висел его портрет, выполненный из домино, большая фотография Эйнштейна и картина Эшера (оригинал). Гарднер был одет в обычную зеленую рубашку и свободные брюки. Мягкое, открытое лицо, на голове — клочья седых волос, а за большими очками в черепаховой оправе притаились

внимательные глаза. Было в нем нечто неземное. Он был художав и сохранил идеальную осанку, потому что работал каждый день, стоя за конторкой.

Я передал ему мешок с подарками от участников G4G и спросил, каково это — чувствовать себя темой конференции.

— Это большая честь для меня, и, признаюсь, я удивлен, — ответил он. — Меня изумляет, насколько она разрослась.

Довольно скоро я понял, что он стесняется говорить о том, насколько он знаменит среди математиков.

— Я не математик, — сказал он. — Я главным образом журналист. За пределами математического анализа я совершенно теряюсь. В этом-то и был секрет успеха моей колонки. Понимание того, о чем я пишу, занимало у меня так много времени, что мне удавалось изложить вопрос так, что большинство читателей тоже были в состоянии это понять.

Любимый предмет Гарднера — фокусы. Он говорил о них как о своем главном хобби. Он выписывал журналы, посвященные фокусам, и — насколько ему позволял его артрит — разучивал их и показывал всем желающим. Он предложил и мне показать фокус, который, по его словам, был единственным изобретенным им самим карточным фокусом, требующим ловкости рук. Фокус назывался «мгновенная перемена цвета», поскольку во время этого фокуса цвет карты меняется моментально. Гарднер взял колоду карт, положил черную карту на ладонь и накрыл колодой. Черная карта немедленно стала красной. Математика увлекла Гарднера через «математические» фокусы, и в молодости он больше общался именно с фокусниками, а не с математиками.

Гарднер сказал, что фокусы нравятся ему потому, что благодаря им люди не перестают испытывать чувство удивления окружающим миром.

— Вы смотрите на левитирующую женщину и понимаете, что это явление столь же чудесно, как и то, что она падает на землю под действием силы тяготения. Ведь сила гравитации столь же таинственна, как и парящая в воздухе женщина.

Я спросил, заставляла ли его математика испытывать такое же чувство удивления.

— Без сомнения, — ответил он, — конечно же да.

Гарднер, вероятно, более всего известен своими книгами, посвященными занимательной математике, но они составляют лишь часть его литературного наследия. Его первая книга называлась «Фантазии и заблуждения» — то была первая популярная книга, посвященная разоблачению псевдонауки. Он много писал на философские темы, а также

опубликовал серьезный роман о религии. Созданный им бестселлер — неустаревающий сборник комментариев к книгам Л. Кэрролла «Алиса в Стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье». В 93 года он не производил на меня впечатления человека, полностью отошедшего от дел. В планах у него было издание сборника эссе о творчестве Г. К. Честертона и большая книга об играх со словами и в слова.

Благодаря Гарднеру занимательная математика до сих пор пребывает в прекрасной форме. Она восхитительна и разнообразна, а потому по-прежнему дарит радость людям всех возрастов и национальностей, вдохновляя на весьма серьезные свершения и весьма серьезных ученых. Поначалу меня несколько расстроила фраза Гарднера о том, что он не математик, но потом, уже покидая Оклахому, я вдруг подумал о том, насколько блестяще отвечает духу занимательной математики тот факт, что человек, который является ее воплощением, — всего лишь продвинутый любитель^[46].

Глава 7

Тайны следствия

*Автор сталкивается лицом к лицу с бесконечностью,
встречает неостановимую улитку и бесовское семейство
чисел.*

В Атланте я познакомился с человеком, у которого довольно необычное хобби. Нил Слоун — так его зовут — собирает числа.

Не отдельные числа, а семейства чисел, организованных в упорядоченные ряды, называемые последовательностями. Например, натуральные числа — это последовательность, которую можно определить, сказав, что ее n -й член равен n :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

Слоун начал собирать свою коллекцию в 1963 году, когда учился на старших курсах Корнеллского университета. Сначала он записывал последовательности на карточках. Это было довольно удобно, поскольку при этом упорядоченные ряды сами образовывали некий упорядоченный ряд. К 1973 году он собрал 2400 последовательностей и опубликовал их в книге под заглавием «Энциклопедия целочисленных последовательностей». К середине 90-х годов у него их было уже 5500. Но только с изобретением Интернета коллекция обрела идеальную среду для своего существования. Список Слоуна расцвел и превратился в «Онлайн-энциклопедию целочисленных последовательностей» — собрание, в котором сейчас более 160 000 записей и которое разрастается со скоростью около 10 000 записей в год.

При первом знакомстве Слоун производит впечатление человека, никогда не покидающего своего домашнего кабинета. Однако это впечатление обманчиво. Слоун худощав, лыс и носит очки с толстыми квадратными стеклами, при этом он жилистый и плотный и предстает перед вами со всей своей дзен-осанкой, которая есть плод другого его увлечения — скалолазания. Слоуну нравится бросать вызов геологическим

образованиям ничуть не меньше, чем покорять образования из чисел.

По мнению Слоуна, сходство между изучением последовательностей и скалолазанием состоит в том, что оба этих занятия требуют умения решать головоломки. Я бы добавил, что есть и другая параллель: подобно тому, как скалолаз, покорив одну вершину, уже готов сразиться с новой, так и любитель последовательностей, дойдя до n -го члена, тут же начинает искать $(n + 1)$ -й. При этом у скалолазов есть естественный ограничитель — географический фактор, зато последовательности, уходя в бесконечность, часто никаких ограничений не имеют.

Как истинный коллекционер, который складывает в одну коробку своих старых любимцев рядом с колоритными раритетами, Слоун принимает в «Энциклопедию» как обыкновенное, так и экстравагантное. В его коллекции, например, имеется «нулевая последовательность», состоящая из одних только нулей. (Каждой последовательности в «Энциклопедии» присвоен идентификационный номер, перед которым стоит буква А. Нулевая последовательность — четвертая в собрании Слоуна, и потому известна как А4):

(A4) 0, 0, 0, 0, 0...

Будучи простейшей из возможных бесконечных последовательностей, она в то же время наименее динамичная в слоуновской коллекции, хотя и не лишена определенного нигилистического очарования.

Поддержание «Онлайн-Энциклопедии» — основная работа Слоуна, параллельная другой настоящей работе — занятию математикой в лабораториях компании AT&T в Нью-Джерси. Однако сейчас ему больше не нужно тратить время на поиски новых последовательностей. После того как к «Энциклопедии» пришел успех, Слоан постоянно получает новые — от профессиональных математиков, но по большей части от людей, одержимых числами. У Слоуна есть всего один критерий, на основе которого новой последовательности разрешается вступить в клуб: она должна быть «корректно определенной и интересной». Первое означает попросту, что каждый член в последовательности можно описать или алгебраически, или риторически. Удовлетворяет ли последовательность второму требованию — решает он сам, хотя обычно в случае сомнения он склонен решить вопрос скорее в пользу той или иной последовательности. Правда, из требований «корректной определенности» и «интересности» вовсе не следует, что последовательность обязательно должна быть математической. И история, и фольклор, и причуды также играют роль в его решении.

Среди последовательностей, включенных в «Энциклопедию», имеется и вот такая довольно древняя:

(A100000) 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7.

Числа в этой последовательности представляют собой перевод на язык цифр отметок, сделанных на самом старом из известных математических объектов — на кости Ишанго, артефакте возрастом 22 000 лет, найденном на территории нынешней Демократической Республики Конго^[47]. Эта обезьянья кость сначала считалась инструментом для определения длины (попросту говоря, линейкой), однако потом ученые высказали идею, что поскольку насечки на кости хитро сгруппированы — тройка, ее удвоение, затем четверка, ее удвоение, десятка, за которой следует ее половина, — то эта последовательность может выражать какой-то более замысловатый ход мыслей, возможно связанный с выполнением арифметических действий.

В коллекции имеется также дьявольская последовательность:

(A51003) 666, 1666, 2666, 3666, 4666, 5666, 6660, 6661...

Она составлена из так называемых Чисел Зверя — чисел, содержащих фрагмент 666.

Ради забавы Слоун также включил и такую последовательность:

(A38674) 2, 2, 4, 4, 2, 6, 6, 2, 8, 8, 16.

Это числа из латиноамериканской детской песенки «La Farolera»: «Dos y dos son cuatro, cuatro y dos son seis. Seis y dos son ocho, y ocho dieciseis» (Два и два — четыре, четыре и два — шесть, шесть и два — восемь и т. д.).

Но самая, быть может, классическая из всех последовательностей — это последовательность простых чисел:

(A40) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37...

Простые числа — это натуральные числа большие единицы, которые делятся только на себя и на единицу. Их очень просто описать, но их последовательность демонстрирует весьма впечатляющие, а временами и таинственные свойства. Во-первых, как доказал Евклид, простых чисел бесконечно много. Какое бы число вы ни взяли, всегда найдется простое число большее, чем данное. Во-вторых, каждое натуральное число больше 1 записывается — причем существует только один вариант — как произведение простых чисел. Другими словами, каждое число равно результату перемножения определенного набора простых чисел. Например, 221 есть 13×17 . Следующее число, 222, есть $2 \times 3 \times 37$. Идущее за ним —

223 — простое, так что можно записать только 1×223 , а 224 есть $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$. И так можно продолжать до бесконечности. Например, миллиард равен $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$. Это свойство чисел известно как *фундаментальная теорема арифметики*, и именно оно определяет, почему простые числа рассматриваются как неделимые кирпичики всей системы натуральных чисел.

Однако, несмотря на свою особенность, простые числа не обладают монополией на производство последовательностей, несущих в себе специальные секреты математического порядка (или беспорядка). Все последовательности так или иначе способствуют нашему лучшему пониманию того, как устроены числа. «Онлайн-энциклопедию целочисленных последовательностей» можно также рассматривать как собрание разнообразных примеров, справочное руководство по численному порядку, лежащему в основании мира. Возникнув из личного пристрастия Нила Слоуна, этот проект оказался действительно важным научным ресурсом.

Слоун считает «Энциклопедию» математическим эквивалентом хранящейся в ФБР базы данных по отпечаткам пальцев. «Взяв отпечатки пальцев на месте преступления, их затем проверяют по базе с целью опознать подозреваемого, — говорит он. — То же самое и с „Энциклопедией“. Математики, столкнувшись с какой-то последовательностью чисел, которая естественным образом возникла в ходе их работы, смотрят в базу, — и страшно радуются, если оказывается, что их последовательность там уже есть». Такая база данных приносит пользу не только чистым математикам. Инженеры, химики, физики и астрономы также искали и находили свои последовательности в «Энциклопедии», таким образом обнаруживая неожиданные междисциплинарные связи и глубже проникая в суть своей собственной области знания. Если люди работают в области, постоянно изрыгающей недоступные для понимания числовые последовательности, которым они надеются придать некий смысл, то такая база данных — настоящая золотая жила.

«Энциклопедия» позволяет Слоуну быть в курсе множества новых математических идей, а кроме того, он проводит часть времени, рождая свои собственные. В 1973 году он предложил концепцию «продолжительности жизни» числа. Она измеряется числом шагов, которое требуется сделать, чтобы получить однозначное число, перемножая все цифры предыдущего числа, затем перемножая все цифры полученного

числа, что даст третье число, и т. д., пока не получится однозначное число. Например, $88 \rightarrow 8 \times 8 = 64 \rightarrow 6 \times 4 = 24 \rightarrow 2 \times 4 = 8$. Таким образом, говорит Слоун, число 88 имеет продолжительность жизни, равную 3, поскольку требуются три шага, чтобы добраться до одной цифры. Кажется, что чем больше число, тем выше его продолжительность жизни. Например, 679 имеет продолжительность жизни, равную 5: $679 \rightarrow 378 \rightarrow 168 \rightarrow 48 \rightarrow 32 \rightarrow 6$. Подобным же образом, слегка потрудившись, можно узнать, что число 277 777 788 888 899 имеет продолжительность жизни, равную 11. Однако Слоуну не удалось найти числа, продолжительность жизни которого была бы больше 11, даже после того, как он перебрал все числа до 10^{233} , что есть единица с 233 нулями. Другими словами, какое бы 233-значное число вы ни выбрали, применив к нему правила перемножения цифр для определения продолжительности жизни, вы непременно доберетесь до одной-единственной цифры за 11 шагов или ранее.

Этот результат восхитительным образом противоречит нашей интуиции. Казалось бы, если взять число, состоящее из 200 или около того цифр, причем по большей части из *больших* цифр, скажем восьмерок и девяток, то произведение всех этих цифр окажется достаточно большим, и для того, чтобы в конце концов добраться до однозначного числа, потребуется существенно больше и шагов. Однако, как оказалось, большие числа схлопываются под собственным весом. Дело в том, что если в числе хоть раз появится нуль, то произведение всех его цифр окажется равным нулю. Если в числе, с которого вы начали, нет нулей, то нуль непременно появится на 11-м шаге, если только число уже не свелось к этому моменту к единственной цифре. Слоун считает свой алгоритм необычайно эффективным убийцей чисел-гигантов.

Не останавливаясь на достигнутом, Слоун составил последовательность, в которой n -й член есть наименьшее число с продолжительностью жизни, равной n . (Мы рассматриваем только числа, имеющие по крайней мере две цифры.) Первый такой член равен 10, потому что $10 \rightarrow 0$, так что 10 — это наименьшее двузначное число, которое претерпевает редукцию за один шаг.

Второй член равен 25, потому что $25 \rightarrow 10 \rightarrow 0$ и 25 есть наименьшее число, которое редуцируется за два шага.

Третий член равен 39, потому что $39 \rightarrow 27 \rightarrow 14 \rightarrow 4$ и 39 есть наименьшее число, которое редуцируется за три шага.

Приведем всю последовательность:

(A3001) 10, 25, 39, 77, 679, 6788, 68 889, 2 677 889, 26 888 999,

3 778 888 999, 277 777 788 888 899

На мой взгляд, эта последовательность странным образом завораживает. В ней одновременно присутствуют и некая отчетливая структура, и малая толика асимметричного беспорядка. Продолжительность жизни — это нечто вроде автоматической линии по выпуску сосисок, которая выдает связки своеобразных сосисок длиной не более 11 штук.

Друг Слоуна профессор Джон Хортон Конуэй из Принстона тоже любит нестандартные математические концепции. В 2007 году он изобрел понятие степенной трансмиссии. Степенная трансмиссия числа, записанного в виде $abcd\dots$, — это $abc^d\dots$. В случае чисел с нечетным числом цифр его последней цифре не во что возводиться, так что $abcde$ переходит в abc^de . Возьмем 3462. Из него получаем $3462 = 81 \times 36 = 2^9 1^6$. Будем применять степенную трансмиссию повторно, пока не останется однозначное число:

$$3462 \rightarrow 2916 \rightarrow 2^9 1^6 = 512 \times 1 = 512 \rightarrow 5^1 2 = 10 \rightarrow 1^0 = 1.$$

Конуэй пожелал узнать, имеются ли какие-либо неразрушаемые числа — те, которые не сводятся к однозначному числу при применении степенной трансмиссии. Ему удалось найти только одно:

$$2592 \rightarrow 2^5 9^2 = 32 \times 81 = 2592.$$

Но не такой человек Нил Слоун, чтобы сидеть сложа руки, глядя на то, как другие изобретают числа! Он открыл второе такое число^[48]

$$24\,547\,284\,284\,866\,560\,000\,000\,000.$$

Слоун в настоящее время уверен, что других неразрушаемых чисел нет.

Задумаемся об этом на минутку: конуэевская степенная трансмиссия — это смертоносная машина, убивающая каждое число во Вселенной, за исключением 2592 и 24 547 284 284 866 560 000 000 000 — двух с виду никак не связанных неподвижных точек в безграничном мире чисел. «Это потрясающий результат», — говорит Слоун. Большие числа при применении степенной трансмиссии умирают достаточно быстро по тем же причинам, по которым они умирают при вычислении их продолжительности жизни, — появляется нуль, и все становится ничем. Я спросил Слоуна, может ли устойчивость этих двух чисел по отношению к степенной трансмиссии найти какое-либо применение в реальном мире. Он думает, что нет. «Это просто забавно. И ничего плохого в этом нет — надо

же иногда просто развлечься».

И Слоун развлекается вовсю. Он исследовал так много последовательностей, что развил свою собственную числовую эстетику. Одну из его любимых последовательностей изобрел математик из Колумбии Бернардо Рекаман Сантос, и называется она последовательностью Рекамана:

(A5132) 0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, 23, 9, 24, 8, 25, 43, 62, 42, 63, 41, 18, 42, 17, 43, 16, 44, 15, 45...

Давайте взглянем на эти числа и постараемся углядеть закономерность. Смотрите внимательно. Они скачут вроде бы без всякого порядка.

На самом же деле эти числа получаются применением следующего простого правила: «вычитайте, если возможно, а если невозможно — то складывайте». Чтобы получить n -й член, мы берем $(n - 1)$ -й и либо прибавляем к нему, либо вычитаем из него n . Правило гласит, что следует применять вычитание во всех случаях кроме тех, когда результат оказался бы или отрицательным числом, или числом, уже присутствующим в последовательности. Вот как вычисляются первые четыре члена, если начать с нуля (нулевого члена):

Первый член равен нулевому члену плюс 1.

Результат: 1.

Мы должны складывать, потому что вычитание 1 из 0 дало бы -1, что запрещено.

Второй член равен первому члену плюс 2.

Результат: 3.

Мы снова должны складывать, потому что вычитание 2 из 1 дало бы -1, что запрещено.

Третий член равен второму члену плюс 3.

Результат: 6.

Мы должны складывать, потому что вычитание 3 из 3 дало бы 0, который уже присутствует в последовательности.

Четвертый член равен третьему члену минус 4. Результат: 2.

Мы должны вычитать, коль скоро это возможно.

И так далее.

Во время всего этого довольно занудливого процесса мы имеем дело с целыми числами и получаем ответы, которые выглядят совершенно бессистемными. Однако закономерность, которая здесь возникает, можно увидеть, если изобразить последовательность в виде графика. По горизонтальной оси отложим номер члена, так что n -й член будет расположен над числом n , а по вертикальной оси — значение этого члена. График для первой тысячи членов последовательности Рекамана не похож, наверное, ни на один из ранее виденных вами графиков. Он подобен брызгам из садового распылителя, или же рисунку ребенка, пытающегося соединить точки друг с другом. (Толстые линии на графике — это скопления точек, выглядящие так из-за неподходящего масштаба.) «Интересно посмотреть, сколь много порядка можно привести в хаос, — заметил Слоун. — Последовательность Рекамана находится ровно на границе между хаосом и изящной математикой, поэтому-то она так и захватывает».



Последовательность Рекамана

Столкновение порядка и беспорядка в последовательности Рекамана можно выразить и музыкально. В «Энциклопедии» имеется функция, позволяющая прослушать любую последовательность, как если бы она была записана с помощью нот. Представим себе, что имеется фортепиано с

88 клавишами (что составляет диапазон чуть меньше восьми октав). Число 1 соответствует самой нижней ноте, число 2 — второй ноте снизу, и так далее, до числа 88, которое соответствует самой верхней ноте. Когда ноты заканчиваются, мы опять начинаем снизу, так что число 89 возвращает нас к первой клавише. Натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5 звучат как восходящая гамма, повторяющаяся без конца. Но музыка, создаваемая последовательностью Рекамана, леденит кровь. Она подобна саундтреку из фильма ужасов. Она звучит негармонично, однако не воспринимается как нечто совершенно хаотичное. Можно различить отчетливые музыкальные фразы, как если бы за какофонией скрывалось творение таинственной человеческой руки^[49].

Вопрос, который интересует математиков, — все ли числа встречаются в последовательности Рекамана. Были изучены 10^{25} членов последовательности, и оказалось, что наименьшее из не присутствующих чисел — это 852 655. Слоун подозревает, что в конце концов в этой последовательности появятся все числа, включая и 852 655, но это его предсказание пока не доказано. Нет ничего удивительного в том, что Слоун находит последовательность Рекамана столь увлекательной.

Другой фаворит Слоуна — это последовательность Гийсвийта^[50]. В отличие от многих последовательностей, которые растут с победоносной быстротой, последовательность Гийсвийта растет с тягучей неторопливостью, способной свести с ума. Она представляет собой прекрасную метафору идеи «никогда не сдаваться»:

(A90822) 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 2...

Первая тройка появляется на девятом месте. Четверка первый раз возникает на 221-м месте. Появление пятерки ожидается не раньше, чем ад замерзнет — она возникнет на месте с номером $10^{1000000000000000000000000}$.

Это экстремально большое число. Например, вся Вселенная содержит только 10^{80} элементарных частиц. В конце концов появится и шестерка, но на таком расстоянии от начала, которое разумно можно описать только как степень степени степени степени степени:

22345

. Остальные числа тоже рано или поздно возникнут, хотя — и это следует подчеркнуть — не выказывая при этом решительно никакой спешки. «Земля умирает, даже океаны умирают, — замечает Слоун с поэтическим пафосом, — но приют и спасение можно найти в абстрактной красоте последовательности типа A090822 Диона Гийсвийта».

*

Древние греки уделяли простым числам серьезное внимание. Но еще больше они были очарованы числами, которые называли совершенными. Рассмотрим число 6: числа, на которое оно делится, его делители, — это 1, 2 и 3. Если сложить 1, 2 и 3 — voilà, снова получается 6. Совершенное число — это любое число, которое, подобно шестерке, равно сумме своих делителей. (Строго говоря, у 6 есть еще делитель 6, но при рассмотрении совершенных чисел имеет смысл включать только те делители, которые меньше данного числа.) Следующее за шестеркой совершенное число — это 28, потому что числа, на которые оно делится, — это 1, 2, 4, 7 и 14, а их сумма равна как раз 28. Не только греки, но и евреи и христиане приписывали космологическое значение такому численному совершенству. Живший в XI веке выдающийся богослов и писатель Рабан Мавр писал: «Шесть не потому совершенно, что Бог сотворил мир за 6 дней, но Бог совершил акт творения за 6 дней потому, что число это совершенно».

Греки обнаружили также неожиданную связь между совершенными и простыми числами, которая породила многочисленные связанные с ними приключения. Рассмотрим последовательность удвоений, начинающуюся с 1:

(A 79) 1, 2, 4, 8, 16...

В своих «Началах» Евклид показал, что всегда, когда сумма удвоений есть простое число, можно найти совершенное число, умножая сумму на наибольшее из тех удвоений, что в нее входят. Это звучит как малопонятная тирада, так что давайте начнем складывать удвоения, чтобы увидеть, что же все это означает.

$1 + 2 = 3$. Число 3 простое, так что мы умножим 3 на старшее из наших удвоений, то есть на 2: $3 \times 2 = 6$, а число 6 совершенно.

$1 + 2 + 4 = 7$. Число 7 снова простое. Поэтому умножим 7 на 4, что даст еще одно совершенное число, а именно 28.

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Это число не простое. Не появится здесь и совершенного числа.

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. Это число простое, а $31 \times 16 = 496$ — совершенное число.

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. Это число не простое.

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$. Это число также простое, а $127 \times 64 = 8128$ — совершенное число.

Доказательство Евклида было, конечно, геометрическим. Он не записывал его в терминах чисел, а использовал отрезки прямых. Однако если бы он мог позволить себе роскошь современных алгебраических обозначений, то заметил бы, что сумму удвоений $1 + 2 + 4 + \dots$ можно выразить как сумму степеней двойки, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots$ (Заметим, что любое число в степени 0 есть 1 и что любое число в степени 1 есть само это число.) Тогда становится понятным, что любая сумма удвоений равна следующему удвоению за вычетом единицы. Например:

$$1 + 2 = 3 = 4 - 1, \text{ или } 2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$$

$$1 + 2 + 4 = 7 = 8 - 1, \text{ или } 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1.$$

Это можно обобщить в виде формулы $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Другими словами, сумма первых n удвоений равна $2^n - 1$.

Итак, используя исходное заявление Евклида о том, что «когда сумма удвоений есть простое число, можно построить совершенное число, умножая сумму на наибольшее из тех удвоений, что в нее входят» и добавляя к этому современные алгебраические обозначения, мы можем получить намного более четкое утверждение:

Если число $2^n - 1$ простое, то число $(2^n - 1) \times 2^{n-1}$ совершенное.

Для цивилизаций, которые превозносили совершенные числа, данное Евклидом доказательство было потрясающей новостью. Если совершенные числа можно породить всякий раз, когда число $2^n - 1$ простое, то все, что нужно для нахождения новых совершенных чисел, — это нахождение простых чисел, которые можно записать в виде $2^n - 1$. Охота за совершенными числами свелась к охоте за простыми числами определенного типа.

Конечно, математический интерес к простым числам, записываемым в

виде $2^n - 1$, мог быть связан с совершенными числами, однако к XVII столетию простые числа стали объектом увлечения сами по себе. В то время как одни математики были поглощены вычислением числа π со все большим и большим количеством десятичных знаков, другие посвящали себя нахождению все больших и больших простых чисел. Эти два рода деятельности похожи, но противоположны: если вычисление десятичных знаков в числе π — это поиск все меньших и меньших объектов, то погоня за простыми числами — это взлет вверх, в небеса. Развитию обоих направлений способствовала скорее романтическая аура самого путешествия, нежели возможности практического использования чисел, открытых по дороге.

В ходе этого поиска простые числа вида $2^n - 1$ зажили своей собственной жизнью. Эта формула не давала простых чисел при всех значениях n , но для малых чисел процент успеха был весьма неплох. Как мы уже видели, при $n = 2, 3, 5, 7$ число $2^n - 1$ — простое.

Французский монах (и одновременно один из выдающихся ученых своего времени) Марен Мерсенн (1588–1648) просто заикнулся на использовании чисел вида $2^n - 1$ для производства простых. В 1644 году он выступил с широкомасштабным заявлением о том, что ему известны все значения n до 257, при которых число $2^n - 1$ простое. По его словам, это были значения

(A109 461) 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Мерсенн был дельным математиком, однако его список — по большей части плод угадывания. Число $2^{257} - 1$ состоит из 78 цифр — определенно слишком много для проверки человеческими силами на предмет того, простое оно или нет. Мерсенн осознавал, что его числа — это стрельба наугад. Он говорил о своем списке: «Всего времени не хватит, дабы определить, простые ли они».

Но одному математику времени тем не менее все-таки хватило, — такое нередко бывает в науке. В 1876 году, через два с половиной столетия после того, как Мерсенн предложил свой список, французский специалист по теории чисел Эдуар Люка изобрел метод, позволяющий проверить, являются ли числа вида $2^n - 1$ простыми, и выяснил, что Мерсенн был не прав по поводу числа 67 и, кроме того, он пропустил числа 61, 89 и 107. Потрясающе, однако, что Мерсенн оказался прав насчет числа 127. Люка применил свой метод для доказательства того, что число $2^{127} - 1$ (то есть 170 141 183 460 4 69 231 731 687 303 715 884 105 727) — простое. Оно

оставалось самым большим известным простым числом до наступления века компьютеров. Люка, однако, не смог определить, простое или нет число $2^{257} - 1$ — оно было слишком большим для ручных вычислений.

Несмотря на отдельные ошибки, список Мерсенна обессмертил своего создателя; простые числа вида $2^n - 1$ в наше время известны как простые числа Мерсенна.

*

Дабы выяснить, простое или нет число $2^{257} - 1$, пришлось дожидаться наступления 1952 года. Для доказательства был использован метод Люка, правда при существенной поддержке. В том году в Институте численного анализа в Лос-Анджелесе собралась команда ученых. Они наблюдали за 24-футовыми барабанами с магнитной лентой, вводившейся в один из первых цифровых компьютеров, который назывался SWAC. Один только этот процесс занял несколько минут. Затем оператор ввел число, которое предстояло проверить: 257. Через долю секунды появился результат. Компьютер сообщил, что число $2^{257} - 1$ — не простое.

Вечером того же дня, когда было получено, что число $2^{257} - 1$ — не простое, в вычислительную машину один за другим были введены новые претенденты на право занять место в списке Мерсенна. SWAC отказал первым 42 из них. И только в 10 вечера появился результат: компьютер сообщил, что число $2^{521} - 1$ — простое. Это число было наибольшим из простых чисел Мерсенна, выявленным за 75 лет, что, кстати, давало и соответствующее совершенное число $2^{520}(2^{521} - 1)$ — всего лишь тринадцатое открытое за чуть ли не вдвое большее число столетий. Но число $2^{521} - 1$ только два часа наслаждалось своим статусом старшего в колоде. Незадолго до полуночи SWAC подтвердил, что число $2^{607} - 1$ тоже простое. За последующие несколько месяцев SWAC, работая на пределе своих возможностей, нашел еще три простых числа. 17 простых чисел Мерсенна были открыты в период с 1957 по 1996 год.

Начиная с 1952 года почти всегда наибольшим известным простым числом было простое число Мерсенна. Единственным исключением явилась трехлетняя интерлюдия между 1989 и 1992 годом, когда самым большим простым числом считалось $(391\,581 \times 2^{216\,193}) - 1$, которое, впрочем, относится к типу простых чисел, связанных с мерсенновскими простыми. Среди всех существующих простых чисел (а мы знаем, что их бесконечно много) в таблице наибольших открытых простых преобладают

простые числа Мерсенна, поскольку они представляют собой прекрасную мишень для охотников за простыми числами. Лучшая тактика поиска больших простых чисел — это искать простые числа Мерсенна; другими словами, отправлять число $2^n - 1$ в компьютер при все больших и больших значениях n и использовать для проверки его простоты тест Люка — Лемера, представляющий собой усовершенствованный вариант упоминавшегося выше метода Эдуара Люка.

*

Самого влиятельного из охотников за простыми числами нашего времени привела на этот путь марка на конверте. В 1960-х годах, когда Джордж Уолтман был еще ребенком, его отец показал ему почтовую марку, на которой был изображен Университет Иллинойса и написано « $2^{11213} - 1$ простое» — это был результат, только что установленный в этом университете. «Это меня просто потрясло — оказывается, можно доказать, что такое большое число — простое», — вспоминает он.

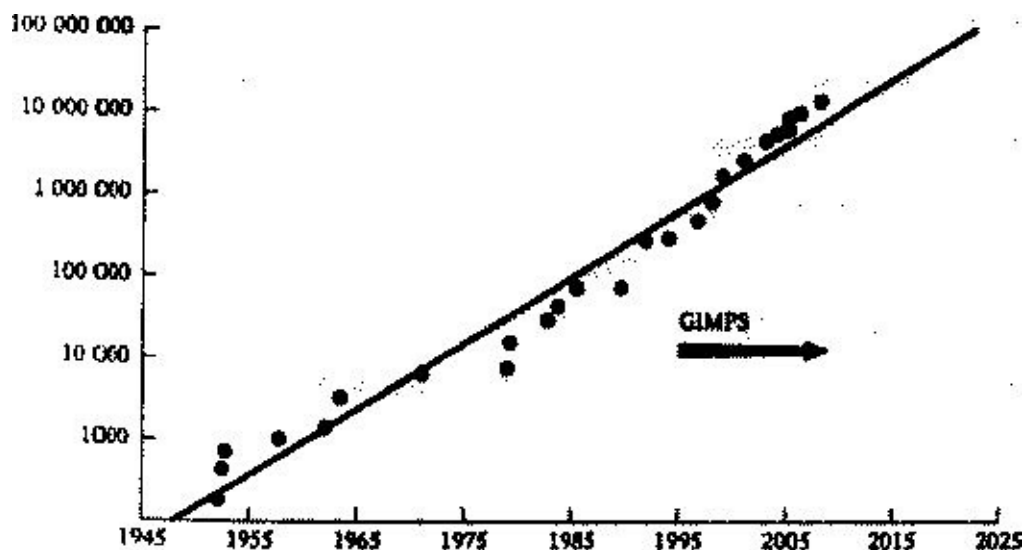
Уолтман внес немалый вклад в написание программ, существенным образом продвинувших поиск простых чисел. Все проекты, имевшие дело с масштабной обработкой чисел, как правило, выполнялись на суперкомпьютерах, доступ к которым ограничен. Начиная с 1990 года, однако, немало больших задач подвергались «нарезке» наподобие салями — работа разбивалась на части, которыми занимались тысячи меньших машин, связанных друг с другом через Интернет. В 1996 году Уолтман написал программу, которую пользователи могут бесплатно скачать, а установив ее, получить маленький кусок еще неисследованной части числовой прямой для поиска там простых чисел. Эта программа использует процессор, только когда ваш компьютер ничего не делает. Пока вы крепко спите, ваша машина занята тем, что перетряхивает числа на дальнем рубеже познания.

Великий «интернет-поиск мерсенновских простых», или GIMPS, в настоящее время связывает около 75 000 компьютеров. Часть из них стоит в научно-исследовательских учреждениях, другие — в офисах, а некоторые — дома у энтузиастов поиска. GIMPS был одним из первых проектов «распределенных вычислений» и оказался одним из наиболее успешных. (Самый масштабный из подобных проектов — SetiKhome, который занят расшифровкой космического шума в поисках сигналов от внеземных цивилизаций. Утверждается, что в нем участвуют три миллиона ученых, правда, они до сих пор ничего не открыли.) Спустя всего лишь несколько месяцев после запуска GIMPS 29-летний французский программист поймал

в свои сети 35-е простое число Мерсенна, $2^{1398269} - 1$. С тех пор GIMPS обнаружил еще 11 мерсенновских простых, что соответствует в среднем одному числу в год. Мы живем в золотой век больших простых чисел.

На настоящий момент рекорд самого большого простого числа удерживает 45-е простое число Мерсенна, $2^{43112609} - 1$ — это число, в котором почти 13 миллионов цифр, найдено в 2008 году на компьютере, подсоединенном к GIMPS, в Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе. Простые числа Мерсенна, найденные по счету 46-м и 47-м, оказались *меньше* 45-го. Это произошло потому, что различные компьютеры с различными быстродействиями одновременно работают на различных участках числовой прямой, и может так случиться, что простые числа на более далеком ее участке будут открыты раньше, чем на более близком.

Проект GIMPS стал примером массового добровольного сотрудничества в целях научного прогресса, и это сделало его символом свободного Интернета. Уолтман, даже не помышляя ни о чем подобном, превратил поиск простых чисел в квазиполитическое предприятие. С целью подчеркнуть символическую важность этого проекта Фонд электронных рубежей (Electronic Frontier Foundation, EFF) — группа, ведущая кампанию за цифровые права, — начиная с 1999 года предлагает денежное вознаграждение за каждое новое простое число, количество цифр в котором достигнет следующего порядка величины. Первым простым числом, добравшимся до 10 миллионов цифр, оказалось 45-е простое число Мерсенна, призовая сумма за него составила 100 000 долларов. Фонд EFF предлагает 150 000 долларов за первое простое число, состоящее из 100 миллионов цифр, и 250 000 долларов за первое, состоящее из миллиарда. Если нанести на график самые большие простые числа, полученные за все последние годы начиная с 1952-го, то в логарифмическом масштабе, как показано ниже, эти числа выстроятся почти в прямую линию. Эта прямая показывает, как замечательным образом постоянно возрастала мощность процессоров, а кроме того, позволяет оценить, когда будет открыто первое простое число, состоящее из миллиарда цифр. Бьюсь об заклад, это открытие произойдет ближе к 2025 году.



Число цифр в наибольших известных простых числах в различные годы

При том что простых чисел бесконечно много (хотя бесконечно ли количество мерсенновских простых — пока не известно), поиск все больших и больших простых — задача, конца которой нет. Какого бы простого числа мы ни достигли, и не важно, насколько большого, всегда найдется еще большее простое число — дразнящее нас и бросающее вызов.

*

Продолжение, которому нет конца, — самая, пожалуй, глубокая и многообещающая идея в фундаментальной математике. Человеческое сознание с трудом воспринимает понятие бесконечности. Например, что случится, если мы начнем считать 1, 2, 3, 4, 5 и никогда не остановимся? Я помню, как ребенком задавал этот с виду простой вопрос — и не получал ясного ответа. Как правило, я слышал от родителей и школьных учителей, что вот тогда мы доберемся до «бесконечности», что есть, по сути, лишь перефразировка самого вопроса.

Тем не менее нам с относительного юного возраста внушают мысль, что с бесконечностью можно обращаться как с числом — необычным, но тем не менее числом. Нам показывают обозначение для бесконечности — горизонтальную замкнутую петлю («лемнискату») и знакомят нас с ее необычной арифметикой. Прибавление любого конечного числа к бесконечности дает бесконечность. Вычитание любого конечного числа из бесконечности дает бесконечность. Умножение или деление бесконечности на конечное число, если только это не нуль, снова дает бесконечность.

Легкость такого обращения с бесконечностью как с числом скрывает более двух тысячелетий борьбы за то, чтобы найти общий язык с ее тайнами.

*

Первым, кто показал, что если иметь дело с бесконечностью, то могут возникнуть проблемы, был греческий философ Зенон Элейский (490 до н. э. — 430 до н. э.). В одном из своих знаменитых парадоксов он описал теоретическую гонку между Ахиллом и черепахой. Ахилл быстрее черепахи, поэтому черепаха при старте имеет фору. Прославленный воин начинает движение из точки А, а бросившая ему вызов рептилия — из точки В. Ахилл устремляется вперед и вскоре достигает точки В, но к тому моменту, как он туда добирается, черепаха уже продвинулась в точку С. Ахилл мчится в точку С. Но опять, когда он достигает этой точки, черепаха уже продвинулась вперед до точки D. Ахиллу надо, конечно, добраться до D, но, когда он туда попадает, черепаха уже будет в точке Е. Зенон утверждает, что эта игра в «догонялки» будет продолжаться вечно, и поэтому быстроногий Ахилл никогда не обгонит неторопливого четвероногого соперника.

Как и в приведенном парадоксе, во всех парадоксах Зенона явно абсурдные заключения получаются в результате бесконечного разбиения непрерывного процесса движения на дискретные события. Ахиллу, прежде чем он сможет догнать черепаху, надо совершить бесконечное число дискретных «шагов». Парадокс возникает из допущения, что невозможно совершить бесконечное число «шагов» за конечное время.

У древних греков, впрочем, не было глубокого математического понимания бесконечности, позволявшего заключить, что это предположение ошибочно. *Можно* совершить бесконечное число «шагов» за конечное время. Основное требование состоит в том, что эти «шаги» должны становиться все короче, а их прохождение — занимать все меньше времени, так что при этом как расстояние, так и время стремятся к нулю. Хотя это и необходимое условие, оно не является достаточным; «шаги» также должны уменьшаться достаточно быстро.

А теперь вернемся к Ахиллу и черепахе. Пусть, например, герой бежит со скоростью, в два раза превышающей скорость черепахи, и пусть точка В на один метр впереди точки А. Когда Ахилл достигает точки В, черепаха прошла полметра до С. Когда Ахилл достигает точки С, черепаха прошла еще четверть метра и попала в точку D и т. д. Полное расстояние в метрах, которое пробежит Ахилл, пока не догонит черепаху, равно

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Если бы Ахиллу требовалась секунда, чтобы пройти каждый из этих «шагов», то прохождение всего расстояния заняло бы у него вечность. Но дело обстоит не так. Предположим, он бежит с постоянной скоростью, тогда ему понадобится секунда, чтобы пробежать метр, полсекунды — чтобы пробежать полметра, четверть секунды — чтобы пробежать четверть метра и т. д. Таким образом, время в секундах, которое потребуется ему для того, чтобы догнать черепаху, описывается той же самой суммой:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Когда и время, и расстояние описываются последовательностью, каждый член которой в два раза меньше предыдущего, их суммы одновременно сходятся к определенному конечному значению — в нашем случае к 2 секундам и 2 метрам. Итак, в конце концов выясняется, что Ахилл все же догонит черепаху.

Впрочем, не все парадоксы Зенона решаются с помощью математики бесконечных рядов. В «парадоксе дихотомии» бегун отправляется из А в В. Назовем первую точку, которую он пройдет после того, как выйдет из точки А, точкой С. Но чтобы попасть в С, он должен сначала пройти через точку, расположенную на полпути до С. Следовательно, С не может быть первой точкой, через которую он пройдет. Получается, нет никакой «первой точки», через которую проходит бегун, потому что всегда найдется точка, через которую он должен пройти до того. Если же нет первой точки, через которую проходит бегун, говорит нам Зенон, значит, бегун никогда не сможет сдвинуться с точки А.

Согласно легенде, для опровержения этого парадокса киник Диоген молча встал и прошел от А до В, тем самым продемонстрировав, что движение возможно. Но зеноновский парадокс дихотомии не удастся так просто списать со счета. За два с половиной тысячелетия, в течение которых ученые чесали затылки, никто не смог полностью разрешить эту загадку. Часть проблемы состоит в том, что непрерывная линия не допускает адекватного представления последовательностью ни из бесконечного числа дискретных точек, ни из бесконечного числа малых интервалов. Подобным же образом непрерывный промежуток времени невозможно адекватно представить бесконечным числом дискретных временных интервалов. Концепции непрерывности и дискретности не хотят уживаться друг с другом.

Десятичная система предоставляет нам чудесный пример парадокса в духе Зенона. Каково самое большое число, меньшее единицы? Это не 0,9, потому что 0,99 больше него, но при этом меньше единицы. Но это и не 0,99, поскольку 0,999 еще больше, но все равно меньше единицы. Единственный возможный кандидат — это периодическая десятичная дробь 0,9999..., где многоточие означает, что девятки продолжаются неограниченно. Здесь-то и заключается парадокс. Искомое число не может быть равно 0,9999..., потому что 0,9999... *совпадает* с числом 1!

Вот как на это можно смотреть. Если бы 0,9999... было числом, отличным от 1, то между ними был бы некий интервал на числовой прямой. А тогда было бы возможно втиснуть в этот интервал еще какое-то число — число больше 0,9999... и меньше 1. Но что это могло бы быть за число? Подобраться к 1 ближе, чем 0,9999..., нельзя. Таким образом, если 0,9999... и 1 неразличимы, то они должны совпадать. Сколь бы странным такое ни казалось, $0,9999... = 1$.

Так какое же самое большое число, меньшее единицы? Единственное удовлетворительное заключение, которое можно сделать, исходя из этого парадокса, состоит в том, что самого большого числа меньше единицы *не существует*.

*

Парадокс, связанный с гонкой Ахилла за черепахой, разрешился, когда мы записали продолжительность его «шагов» как сумму с бесконечным числом слагаемых. Такие суммы известны также как бесконечные ряды. При сложении членов бесконечного ряда возможны два случая в зависимости от того, конечным или бесконечным будет *предел*, то есть то число, к которому сумма подходит все ближе и ближе по мере прибавления все новых членов. Если предел конечный, то ряд называется *сходящимся*. Если нет — ряд называется *расходящимся*.

Например, мы видели, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

сходится, и сходится он к числу 2. Кроме того, много рядов, как мы видели, сходятся к числу π .

Напротив, ряд

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

расходится, устремляясь в бесконечность.

Когда я учил математику, одним из моих любимых упражнений было занятие с бесконечными рядами, состоявшее в выяснении того, сходится данный ряд или расходится. Меня всегда поражало, что при всем колоссальном различии между сходимостью и расходимостью — различии между конечным числом и бесконечностью, отличающимися на *бесконечность*, — детали, определяющие поведение ряда, порой кажутся совершенно несущественными.

Взглянем на гармонический ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

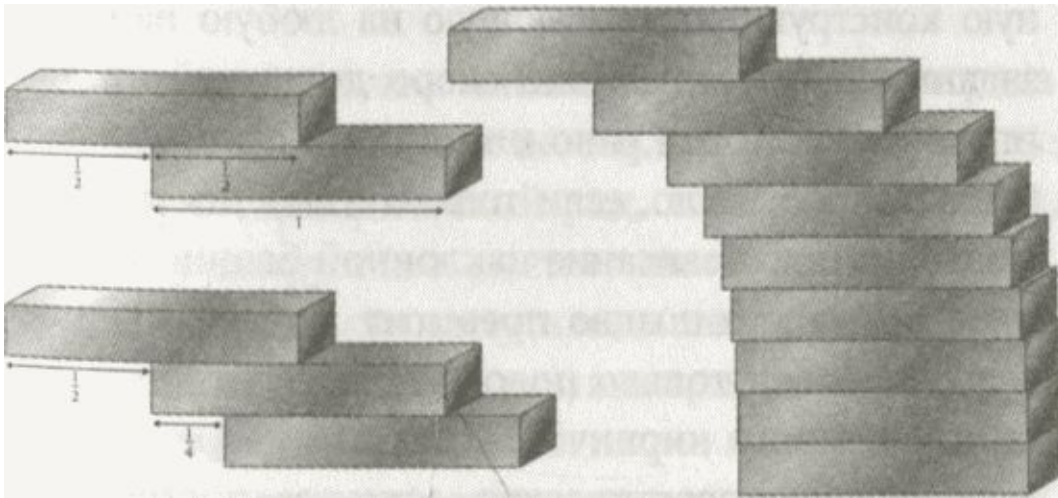
Числитель каждого из членов здесь равен 1, а знаменатели — просто все натуральные числа. С виду ряд должен бы сходиться. Каждый следующий член в этом ряду делается все меньше и меньше, так что можно было бы ожидать, что сумма всех членов окажется ограниченной некоторым фиксированным числом. Однако же гармонический ряд — расходящийся, подобно замедляющейся, но не останавливающейся улитке. Сумма первых 100 членов ряда едва превышает 5. Сумма впервые превышает число 100 только после суммирования 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497 членов. Эта упорная улитка будет продолжать свое движение к свободе, преодолевая любое заданное ей расстояние. В конце концов ряд достигнет миллиона, затем миллиарда, уходя все далее и далее к бесконечности. (Доказательство этого факта приводится в приложении 5 на сайте, посвященном этой книге.)

Гармонический ряд возникает при рассмотрении процесса укладки кирпичей. Пусть у вас имеются два одинаковых кирпича и вы желаете расположить их один на другом так, чтобы верхний кирпич выступал над нижним далеко, насколько возможно, но не падал. Для этого нужно положить верхний кирпич в точности на половину нижнего, как показано на рисунке, — так центр тяжести верхнего кирпича будет опираться на самый край нижнего.

А как же расположить три кирпича, спросим мы себя, чтобы суммарное их нависание было максимальным, но сама конструкция не опрокидывалась? Решение состоит в том, что самый верхний кирпич должен лежать на половине среднего, а средний — был бы сдвинут вдоль нижнего на четверть его длины, как показано на рисунке.

Продолжая в том же духе с большим числом кирпичей, мы получим общую закономерность: чтобы гарантировать максимальное суммарное нависание, самый верхний кирпич надо сдвинуть относительно второго на

половину его длины, второй — на четверть длины третьего, третий — на одну шестую длины четвертого, а тот — на одну восьмую длины пятого и т. д. Получается «Пизанская башня» из кирпичей.



Как сложить кирпичи с максимальным нависанием так, чтобы они не опрокинулись

Полное нависание этой башни, представляющее собой сумму отдельных нависаний, дается следующим рядом:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots,$$

что можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right).$$

Но это — половина суммы гармонического ряда, если только мы не будем останавливаться и возьмем все бесконечное число членов. А поскольку мы знаем, что гармонический ряд растет до бесконечности, то после его деления на два все равно останется бесконечность, потому что бесконечность, деленная на два, — снова бесконечность. В терминах кирпичной кладки это означает, что теоретически возможно создать ничем не скрепленную конструкцию, свисающую на любую наперед заданную величину. Коль скоро деленный на два гармонический ряд рано или поздно превысит любое заданное число, если только взять достаточно много членов, нависание наклонной башни из кирпичей рано или поздно превысит любое заданное значение, если только положить друг на друга достаточно много кирпичей. Хотя это теоретически и возможно,

практические аспекты построения башни с большим нависанием довольно пугающи. Дабы достичь нависания в 50 кирпичей, понадобится башня из 15×1042 кирпичей — что намного превысит расстояние от строительной площадки до края наблюдаемой Вселенной.

*

Гармонический ряд оказывается обильным источником разнообразных забав, так что давайте поиграем с ним еще немного. Рассмотрим гармонический ряд, в котором выкинут каждый член, содержащий в себе 9; получится снова бесконечный ряд. Другими словами, мы выкинем следующие члены:

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \frac{1}{39}, \frac{1}{49}, \frac{1}{59}, \frac{1}{69}, \frac{1}{79}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \dots$$

А «общипанный» ряд будет иметь вид:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \dots$$

Вспоминая, что члены гармонического ряда суммируются к бесконечности, можно было бы думать, что гармонический ряд, лишенный девяток, также суммируется к достаточно большому числу. А вот и нет! Его сумма чуть меньше числа 23.

Отфильтровав девятки, мы приручили грозную бесконечность.

Этот результат представляется удивительным, но, посмотрев на происходящее повнимательнее, мы, несомненно, поймем, в чем тут дело. Устранение девяток избавляет нас только от одного из первых 10 членов гармонического ряда. Но уже в первой сотне удаляются 19 членов, а в первой тысяче — 271. Когда числа становятся очень большими, скажем, длиной в 100 цифр, подавляющее большинство их содержит хотя бы одну девятку. И оказывается, что «утонышение» гармонического ряда за счет удаления членов с девятками удаляет почти все члены.

Однако тонкая настройка гармонического ряда может оказаться еще более захватывающей. Мы произвольным образом решили удалить девятки. Если бы мы удалили из гармонического ряда все члены, содержащие 8, то оставшиеся члены также сходились бы к конечному числу, и то же самое повторилось бы при удалении всех членов, содержащих 7, и вообще любую выбранную цифру. На самом деле нет никакой необходимости ограничиваться отдельными цифрами. Удалим все члены, содержащие *любое* выбранное число, и «утонышенный» таким способом гармонический ряд окажется сходящимся. Таким числом может

быть, например, 9 или 42, или 666, или 314 159, — в каждом случае действует то же самое рассуждение.

Возьмем для примера число 666. В числах между 1 и 1000 сочетание цифр 666 встречается один раз. Между 1 и 10 000 оно встречается 20 раз, между 1 и 100 000 — 300 раз. Другими словами, процент его появления равен 0,1 % в первой тысяче чисел, 0,2 % — в первых 10 000 и 0,3 % — в первых 100 000. По мере перехода ко все большим и большим числам сочетание 666 будет встречаться все чаще и чаще. В конце концов окажется, что почти все числа содержат в себе 666. Стоит только выбросить их из гармонического ряда — и полученный «утоненный» ряд будет сходиться.

В 2008 году Томас Шмелцер и Роберт Бейли вычислили, что гармонический ряд, лишенный членов, содержащих число 314 159, суммируется к числу, немного превосходящему 2,3 миллиона. Это большое число, но ему ох как далеко до бесконечности.

Отсюда следует, что «гармонический ряд», состоящий из одних только членов, *включающих* сочетание цифр 314 159, должен суммироваться к бесконечности. Другими словами, ряд

$$\frac{1}{314159} + \frac{1}{1314159} + \frac{1}{2314159} + \frac{1}{3314159} + \frac{1}{4314159} + \dots$$

суммируется к бесконечности. Хотя он и начинается с очень маленького числа, и затем его члены становятся только меньше, сумма всех членов в конце концов преодолет любое наперед заданное число. Причина, как и раньше, состоит в том, что, когда числа делаются очень большими, почти каждое число содержит в себе последовательность цифр 314 159. Почти все дроби с единичным числителем содержат 314 159 в знаменателе.

*

Напоследок взглянем на еще один бесконечный ряд, который тоже позволит нам прикоснуться к тайнам простых чисел. *Простой гармонический ряд* — это дроби с единичным числителем, знаменатели

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$$

которых суть простые числа:

По мере увеличения чисел простые числа встречаются все реже и реже, так что можно было бы ожидать, что у этого ряда в конце концов не хватит сил, чтобы достичь бесконечности. Но — вы не поверите — он ее достигает! Этот впечатляющий результат, идущий вразрез с интуицией, заставляет нас осознать мощь и важность простых чисел. На них можно смотреть не только как на строительные элементы для натуральных чисел, но и как на строительные элементы, слагающие бесконечность.

Глава 8

Золотая лихорадка

Автор встречается лондонца с клешней, утверждающего, что он разгадал секрет красивых зубов.

Как-то раз, когда я был в гостях у Эдди Левина, дантиста на пенсии, он дал мне листок бумаги и попросил написать мое имя заглавными буквами. Левину 75 лет, у него чопорный вид, седые волосы топорщатся над продолговатым лбом. Он живет в северном Лондоне — на улице, которая является образчиком тех пригородов, где селятся преуспевающие и консервативные британцы. Я взял листок и написал: ALEX BELLOS.

Левин взял инструмент из нержавеющей стали, по виду напоминавший небольшую клешню с тремя зубцами. Твердой рукой он приложил ее к листу бумаги и принялся анализировать мою надпись. Он установил свой инструмент над буквой Е в моем имени, при этом он был так сосредоточен, что ему позавидовал бы и раввин, делающий обрезание.

— Неплохо, — сказал он.

Этот инструмент — собственное изобретение Левина. Три зубца расположены так, что, когда инструмент раскрыт, их концы остаются на одной линии, причем расстояния между ними находятся в том же отношении друг к другу, как когда инструмент закрыт. Левин разработал его таким образом, что расстояние между средним и верхним зубцами всегда в 1,618 раз больше расстояния между средним и нижним. Поскольку данное число более известно как золотое сечение, он назвал свой инструмент калибром золотого сечения. (Среди других синонимичных названий числа 1,618 имеются золотая пропорция, божественная пропорция и ϕ , или фи.) Левин наложил свой калибр на написанную мной букву Е так, чтобы кончик одного зубца пришелся на верхнюю горизонтальную черту в букве Е, кончик среднего — на среднюю горизонтальную черту, а нижний оказался бы на нижней черте. Я полагал, что, выписывая заглавную букву Е, я помещаю среднюю черту на равном расстоянии между верхом и низом, но калибр Левина продемонстрировал,

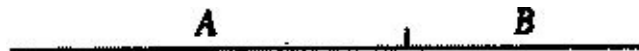
что я бессознательно помещаю черту несколько выше середины — так, что она разбивает полную высоту буквы на два отрезка, отношение длин которых равно 1,618. Хотя я написал свое имя довольно небрежно, не успев ни о чем подумать, тем не менее оказалось, что я попал в число соблюдающих золотую пропорцию с поразительной точностью.

Левин улыбнулся и перешел к букве S. Он перенастроил свой калибр так, что зубцы касались самого верхнего и самого нижнего окончания буквы S, и, к моему полному изумлению, средний зубец попал точно на изгиб в букве S.

Точное попадание, — спокойно заметил Левин. — В почерк каждого человека заложена золотая пропорция.

*

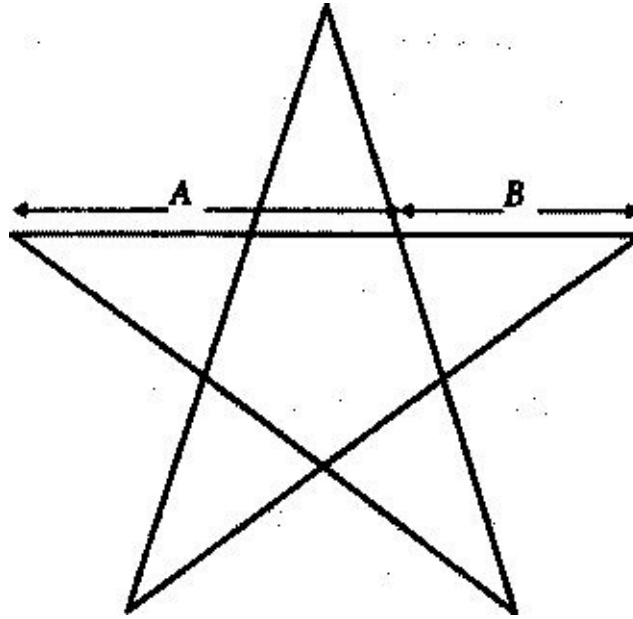
Золотая пропорция — это число, которое описывает отношение, возникающее при делении отрезка на две части таким образом, что отношение всего отрезка к большему из двух равно отношению большего к меньшему. Другими словами, когда отношение $A + B$ к A равно отношению A к B :



Деление отрезка на две части указанным образом называется золотым сечением. При этом число фи — отношение между большим и меньшим отрезками — можно вычислить, и оно равно $(1 + 5\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2})/2$. Это иррациональное число, десятичное разложение которого начинается как

1,61803398874989484820...

Древних греков зачаровывало число фи. Они познакомились с ним, рассматривая пятиконечную звезду (пентаграмму), которая являлась почитаемым символом Пифагорейского братства. Евклид писал о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении», он предложил метод построения правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки. Начиная с эпохи Возрождения это число интриговало как художников, так и математиков.



Пятиконечная звезда — мистический символ, рожденный в древности, — содержит в себе золотое сечение

Ключевой работой, посвященной золотому сечению, была написанная в 1509 году книга выдающегося итальянского математика францисканца Луки Пачоли (1445–1517) «Божественная пропорция», где описывались многие случаи появления этого числа из геометрических построений. Иллюстрировал книгу друживший с Пачоли Леонардо да Винчи. Итак, Пачоли пришел к выводу, что число фи — послание Бога, источник тайного знания о внутренней красоте вещей.

*

С математической точки зрения число фи интересно еще и потому, что оно связано с самой знаменитой последовательностью в математике — последовательностью Фибоначчи. Эта последовательность начинается с чисел 0 и 1, а далее каждый следующий член представляет собой сумму двух предыдущих: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377... Вот как получаются эти числа:

$$0+1=1$$

$$1+1=2$$

$$1+2=3$$

$$2+3=5$$

$$3+5=8$$

$$5+8=13$$

....

И Т. Д.

Прежде чем говорить о том, как связаны число фи и последовательность Фибоначчи, давайте изучим саму последовательность. Природа тяготеет к числам Фибоначчи. Заглянув в сад, вы обнаружите, что у большинства цветков число лепестков равно числам Фибоначчи. У лилий и ирисов — три лепестка, у гвоздик и лютиков — пять, у дельфиниума — восемь, у ноготков — 13, у астр — 21, а у маргариток — 55 или 89. Каждый цветок может и не иметь всегда в точности столько лепестков, но в среднем их число будет одним из чисел Фибоначчи. Например, на стебле клевера обычно три листочка — это тоже число Фибоначчи. Лишь очень редко у клевера бывает четыре листочка, поэтому четырехлистный клевер считается особенным. Они встречаются редко как раз потому, что 4 — *не* число Фибоначчи.

Числа Фибоначчи встречаются также в спиральных узорах, которые образуют чешуйки сосновых шишек и ананасов, соцветия цветной капусты и семена подсолнухов. Можно пересчитывать витки спирали по часовой стрелке или против — все, что вы насчитаете в любом направлении, будет числами Фибоначчи. На ананасах, как правило, 5 и 8 спиралей, или же 8 и 13. На еловых шишках их обычно 8 и 13. У подсолнухов спиралей может быть 21 и 34 или же 34 и 55 — хотя известны примеры с 144 и 233 спиральями. Чем больше семян в подсолнухе, тем больше оказывается число спиралей.

Последовательность Фибоначчи называется так потому, что ее члены впервые появились в написанной Фибоначчи книге «*Liber Abaci*», в связи с задачей о кроликах. Однако свое имя эта последовательность приобрела лишь через более чем 600 лет после выхода книги — в 1877 году, когда ее изучал теоретико-числовик Эдуар Люка. Именно он решил воздать должное Фибоначчи, назвав последовательность его именем.

В книге «*Liber Abaci*» эта последовательность возникла из следующей

задачи. Пусть у нас имеется пара кроликов, которая через месяц дает потомство — появляется еще пара кроликов. Если у каждой взрослой пары кроликов каждый месяц появляется потомство — пара крольчат, — а крольчатам требуется один месяц, чтобы стать взрослыми, то сколько кроликов получится от первой пары через год? Ответ на этот вопрос можно получить, пересчитывая кроликов из месяца в месяц. В первый месяц имеется всего одна пара. В второй месяц — две, поскольку исходная пара произвела новую. На третий месяц имеется три пары, потому что исходная пара снова размножилась, но другая пара лишь достигла зрелости. На четвертый месяц обе пары взрослых кроликов размножились, что добавит двойку к имеющейся тройке. Последовательность Фибоначчи — это полное число пар, подсчитанное месяц за месяцем:

	Полное число пар
1-й месяц: 1 взрослая пара	1
2-й месяц: 1 взрослая пара и 1 пара крольчат	2
3-й месяц: 2 взрослые пары и 1 пара крольчат	3
4-й месяц: 3 взрослые пары и 2 пары крольчат	5
5-й месяц: 5 взрослых пар и 3 пары крольчат	8
6-й месяц: 8 взрослых пар и 5 пар крольчат	13

Важное свойство последовательности Фибоначчи состоит в том, что она *рекуррентная*, — то есть каждый новый член порождается предыдущими. Это же помогает понять, почему числа Фибоначчи настолько распространены в природе. Многие живые организмы растут, следуя рекуррентному процессу.

*

Последовательность Фибоначчи не только описывает формирование плодов и процесс безостановочного размножения кроликов, но и обладает разнообразными увлекательными математическими свойствами. Закономерность будет легче увидеть, если мы выпишем первые 20 чисел. Каждое число Фибоначчи традиционно записывается с использованием буквы F , снабженной нижним индексом, который обозначает положение данного числа в последовательности:

$F_0 = 0.$			
$F_1 = 1.$	$F_6 = 8,$	$F_{11} = 89,$	$F_{16} = 987,$

$F_2 = 1,$	$F_7 = 13,$	$F_{12} = 144,$	$F_{17} = 1597,$
$F_3 = 2,$	$F_8 = 21,$	$F_{13} = 233,$	$F_{18} = 2584,$
$F_4 = 3,$	$F_9 = 34,$	$F_{14} = 377,$	$F_{19} = 4181,$
$F_5 = 5,$	$F_{10} = 55,$	$F_{15} = 610,$	$F_{20} = 6765.$

При более близком рассмотрении удастся заметить, что наша последовательность воспроизводит саму себя многими и весьма неожиданными способами. Взглянем на числа F_3, F_6, F_9 — другими словами, на каждое третье F -число. Все они делятся на 2. А числа F_4, F_8, F_{12} — то есть каждое четвертое F -число — делятся на 3. Каждое пятое F -число делится на 5, каждое шестое F -число делится на 8, и каждое седьмое — на 13. Эти делители в точности являются F -числами из самой последовательности.

Другой впечатляющий пример получается при вычислении $1/F_{11}$, то есть $1/89$. Это число равно сумме чисел

0,0
0,01
0,001
0,0002
0,00003
0,000005
0,0000008
0,00000013
0,000000021

0,0000000034

Таким образом, здесь снова высовывает голову последовательность Фибоначчи^[51].

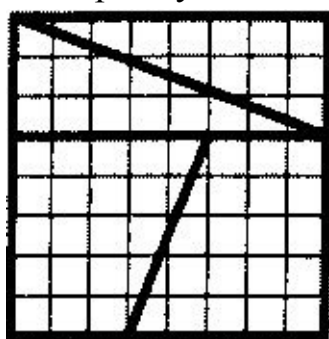
А вот другое интересное математическое свойство этого ряда. Возьмем любые три последовательных F -числа. Произведение первого на третье всегда на 1 отличается от квадрата второго числа.

Для F_4, F_5, F_6 имеем $F_4 \times F_6 = F_5 \times F_5 - 1$ ($24 = 25 - 1$).

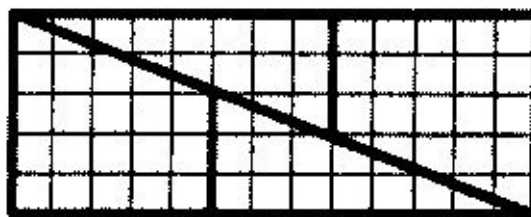
Для F_5, F_6, F_7 имеем $F_5 \times F_7 = F_6 \times F_6 + 1$ ($65 = 64 + 1$).

Для F_{18}, F_{19}, F_{20} : $F_{18} \times F_{20} = F_{19} \times F_{19} - 1$ ($17\,480\,760 = 17\,480\,761 - 1$).

Это свойство лежит в основе магического фокуса возрастом в несколько сотен лет. Фокус состоит в том, что квадрат, состоящий из 64 единичных квадратов, можно разрезать на четыре куса так, что, сложив их по-другому, мы получим прямоугольник из 65 единичных квадратов. Вот как это делается: нарисуем квадрат, составленный из 64 маленьких квадратиков. Сторона большого квадрата имеет длину 8. В последовательности Фибоначчи два F -числа, идущие перед 8, — это 5 и 3. Разделим большой квадрат на куски, используя длины 5 и 3. Куски можно сложить по-другому в прямоугольник со сторонами длиной 5 и 13, и площадь этого прямоугольника равна 65:



$$8 \times 8 = 64$$



$$5 \times 13 = 65$$

Разгадка фокуса состоит в том, что после изменения конфигурации куски не точно прилегают друг к другу. Хотя этого и не видно сразу невооруженным глазом, на самом деле имеется тонкий длинный зазор вдоль средней диагонали, и площадь этого зазора равна площади одного маленького квадратика.

В начале XVII столетия немецкий астроном Иоганн Кеплер писал, что

«как 5 относится к 8, так же, примерно, 8 относится к 13, и как 8 относится к 13, так же, примерно, 13 относится к 21». Другими словами, он обратил внимание, что отношения последовательных F-чисел близки друг к другу. Столетие спустя шотландский математик Роберт Симсон усмотрел нечто еще более невероятное. Если взять отношения последовательных F-чисел и расположить их в последовательность

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34} \dots$$

или (с точностью в три десятичных разряда)

$$1, 2, 1,5, 1,667, 1,6, 1,625, 1,615, 1,619, 1,618 \dots$$

то эти числа будут все ближе и ближе подходить к числу фи — золотому сечению.

Другими словами, приближением к золотому сечению служат отношения последовательных чисел Фибоначчи, причем точность приближения возрастает с каждым новым членом последовательности.

А теперь рассмотрим некую последовательность типа последовательности Фибоначчи, начинающуюся с двух случайных чисел, но продолжающуюся в соответствии с тем же правилом сложения двух последовательных членов. Начнем, скажем, с чисел 4 и 10; следующий член тогда равен 14, а идущий за ним — 24. Далее получаем:

$$4, 10, 14, 24, 38, 62, 100, 162, 262, 424 \dots$$

Посмотрим на отношения соседних членов:

$$\frac{10}{4}, \frac{14}{10}, \frac{24}{14}, \frac{38}{24}, \frac{62}{38}, \frac{100}{62}, \frac{162}{100}, \frac{262}{162}, \frac{424}{262} \dots$$

или

$$2,5, 1,4, 1,714, 1,583, 1,632, 1,612, 1,620, 1,617, 1,618 \dots$$

Заложенный в последовательность Фибоначчи рекуррентный алгоритм, согласно которому надо складывать два соседних члена в последовательности, чтобы получить следующий, оказывается настолько мощным, что с каких бы двух чисел мы ни начали, отношения последовательных членов всегда сходятся к числу фи. Я думаю, это совершенно потрясающий математический феномен.

Повсеместное присутствие чисел Фибоначчи в природе означает, что число фи тоже вездесуще. И это возвращает нас к дантисту-пенсионеру Эдди Левину. В начале своей профессиональной карьеры он провел немало времени, протезируя зубы, однако это не приносило ему полного удовлетворения, поскольку, как он ни старался, улыбка пациента все равно получалась какой-то кривоватой.

— Я трудился до кровавого пота, — говорил он. — Но как бы я ни старался, зубы все равно не выглядели настоящими.

Примерно тогда же Левин начал посещать занятия по математике и спиритуализму, где он и узнал о числе фи. Узнал Левин и о «Божественной пропорции» Пачоли — и немало этим воодушевился. Что, если число фи, которое согласно Пачоли выражало истинную красоту, также содержало в себе секрет божественных зубных протезов? Эта мысль осенила его в два часа ночи, и он помчался в свой кабинет.

— Остаток ночи я провел за измерением зубов, — рассказывает он мне.

Левин перелопатил множество фотографий и обнаружил, что в самой привлекательной улыбке центральный передний зуб — центральный резец — шире следующего за ним (бокового резца) на множитель, равный числу фи. Боковой резец был также шире соседнего с ним зуба (клыка), и тоже на множитель, равный фи. А клык был шире следующего за ним зуба (первый премоляр — малый коренной зуб), и также на множитель, равный фи^[52]. Левин измерял не реальную ширину зубов, но видимый размер зуба на фотографии, сделанной анфас. Как бы то ни было, он полагал, что совершил историческое открытие: красота совершенной улыбки управляется числом фи!

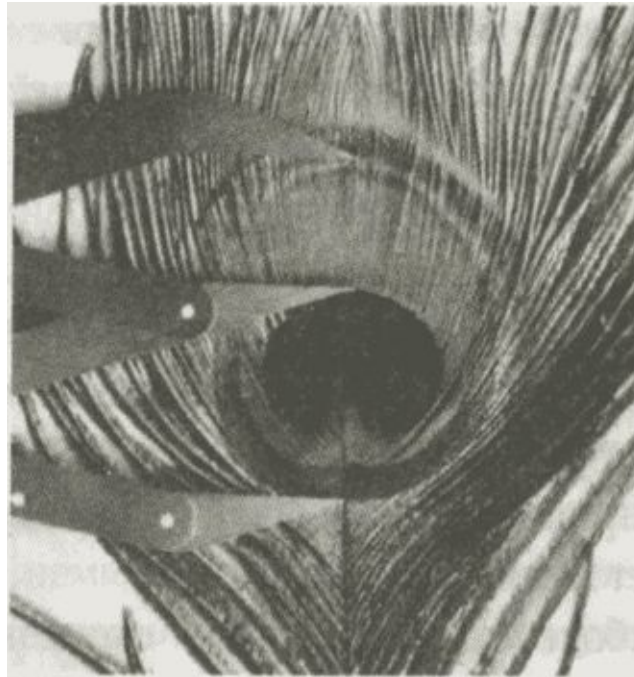
— Я пришел в необычайное возбуждение, — вспоминает Левин.

На работе он рассказал о своих открытиях коллегам, но те отнеслись к этому как к чудачеству. Это не остановило его — он продолжал развивать свои идеи, и в 1978 году опубликовал статью с их подробным изложением в «Journal of Prosthetic Dentistry».

— И тогда люди этим заинтересовались, — говорит он. — Сейчас ни одна лекция о зубной эстетике не обходится без раздела о золотой пропорции.

Левин постоянно использовал число фи в своей работе, так что в начале 1980-х годов он попросил одного инженера сделать для него инструмент, с помощью которого можно было бы определить, находятся ли два зуба в золотой пропорции. В результате появился трехзубый калибр золотого сечения. Старый дантист сейчас продолжает продавать его своим коллегам по всему миру.

Левин рассказал мне, что его калибр стал для него больше чем просто инструментом для работы — он начал измерять и другие объекты, не только зубы, и — обнаружил число ϕ в структуре цветов, в распределении веток вдоль ствола дерева и листьев вдоль веток. Он брал с собой калибр, когда уезжал в отпуск, и находил число ϕ в пропорциях зданий. Кроме того, он видел число ϕ в различных частях человеческого тела: в длине фаланг пальцев и в относительном расположении носа, губ и подбородка. В конце концов он выяснил, что число ϕ присутствует в почерке большинства людей — как, например, в моем.



Чем больше Левин искал число ϕ , тем чаще он его находил.

— Я обнаружил так много совпадений, что поневоле стал задумываться, что бы все это значило. — Он открыл свой лэптоп и показал мне фотографии, на каждой из которых все три зубца калибра в точности указывали, где скрывалось золотое сечение. Там были изображения крыльев бабочки, перьев павлина, ЭКГ здорового человеческого сердца, картины Мондриана и даже автомобиль.

*

Построив прямоугольник таким образом, что отношение двух его сторон равно числу ϕ , мы получаем так называемый «золотой прямоугольник», изображенный на рисунке.

Этот прямоугольник обладает тем полезным свойством, что если мы обрежем его вертикально, так, чтобы с одной стороны получился квадрат,

то оставшаяся часть также будет золотым прямоугольником. Чудесной матери чудесное дитя. Если продолжить этот процесс, появляются внуки, правнуки и т. д., до бесконечности. Теперь в самом большом квадрате нарисуем четверть окружности, поставив циркуль в правый нижний угол и проведя им дугу из одного из соседних углов в другой. Повторим то же самое во втором по величине квадрате, поставив циркуль в левый нижний угол и прочертив еще четверть окружности; затем сделаем это с последующими, все уменьшающимися квадратами. Получившаяся кривая будет приближением к логарифмической спирали.



Золотой прямоугольник и логарифмическая спираль

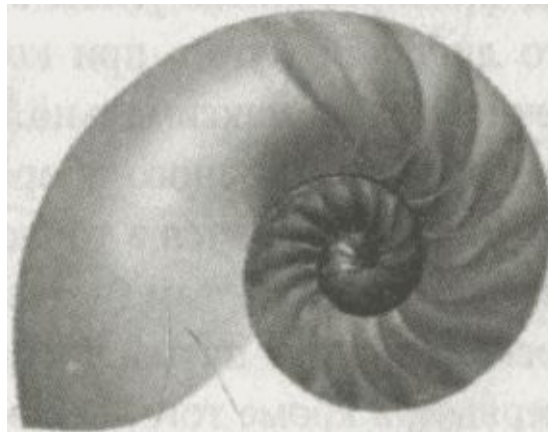
Настоящая логарифмическая спираль проходит через те же самые углы в тех же самых квадратах, но она закругляется более гладко, чем получившаяся у нас кривая, изображенная на рисунке, — наша кривая претерпевает небольшие скачки кривизны в тех местах, где соединяются четвертинки окружностей. В логарифмической спирали прямая линия, проведенная из центра спирали — «полюса», — пересекает саму спираль под одним и тем же углом во всех точках; по этой причине Декарт назвал логарифмическую спираль «равноугловой спиралью».

Логарифмическая спираль — одна из самых пленительных кривых в математике. Впервые ее свойства тщательно исследовал выдающийся швейцарский математик Якоб Бернулли (1654–1705). Он назвал ее «*spira mirabilis*» — чудесной спиралью и распорядился выгравировать ее на его надгробии. (По ошибке скульптор изобразил спираль другого типа.)

Фундаментальное свойство логарифмической спирали состоит в том, что, сколько бы она ни росла, она никогда не меняет форму. Бернулли выразил это фразой «*Eadem mutata resurgo*» («Меняясь, остаюсь прежней»), которую просил высечь на своем надгробии. Данная спираль совершает бесконечное число оборотов, прежде чем достигает полюса. Если взять микроскоп и взглянуть на ее центральную область, то окажется, что ее форма в точности та же самая, как если бы логарифмическая спираль, изображенная на рисунке, продолжилась бы наружу и достигла

размеров галактики, а мы бы смотрели на нее из другой солнечной системы. Немало галактик имеют форму логарифмических спиралей. Подобно фракталу, логарифмическая спираль *самоподобна*: любая ее малая часть подобна большей.

Наиболее ошеломляющий пример логарифмической спирали в природе — раковина головоногого моллюска. По мере роста раковины каждая последующая камера имеет больший размер, сохраняя при этом ту же форму, что и предыдущая. Единственная спираль, образованная из частей с одинаковыми относительными размерами, — это «*spira mirabilis*» Бернулли.



Раковина головоногого моллюска

Как заметил Декарт, прямая линия, проведенная из полюса логарифмической спирали, всегда пересекает ее под одним и тем же неизменным углом, и это свойство объясняет, почему данную спираль используют соколы-сапсаны, когда они нападают на свою добычу. Сапсаны не бросаются прямо вниз, а скорее устремляются к своей добыче, описывая вокруг нее спираль. В 2000 году Вэнс Такер из Университета Дьюк понял, почему дело обстоит именно так. У соколов глаза расположены по бокам головы, так что если им надо смотреть прямо перед собой, то приходится поворачивать голову на 40 градусов. Вэнс испытывал соколов в аэродинамической трубе и показал, что, когда голова птицы повернута под таким углом, сила сопротивления воздуха, действующая на сокола, на 50 процентов больше, чем когда его голова повернута прямо. Траектория, при которой птице удастся держать голову в наиболее выгодном аэродинамическом положении, но в то же время постоянно смотреть на добычу под одним и тем же углом, и представляет собой

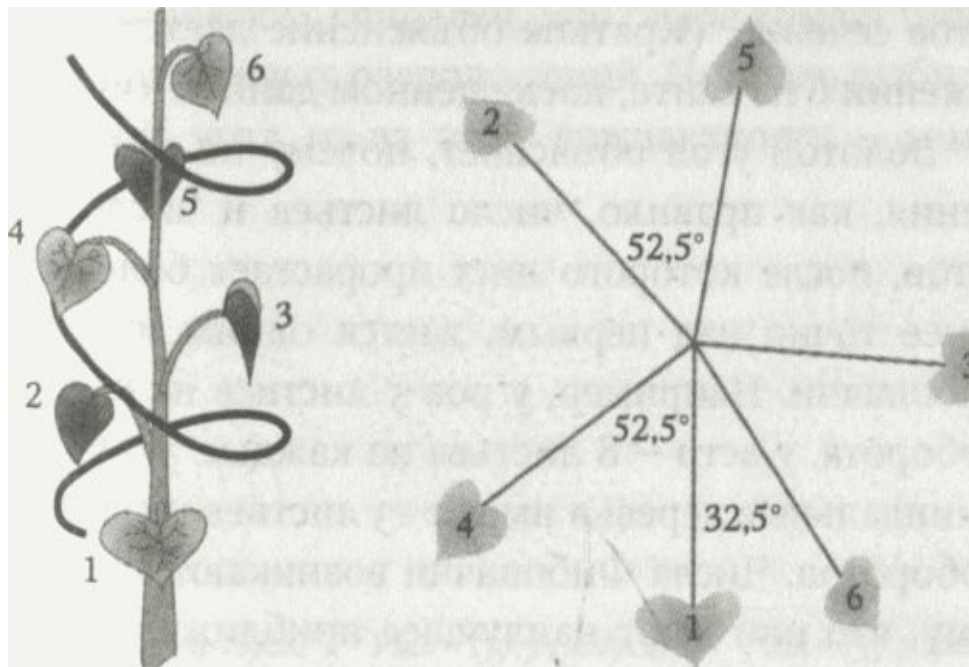
логарифмическую спираль.

*

Листья растений располагаются вокруг стебля так, чтобы количество солнечного света, падающего на каждый из листьев, было максимально. Именно поэтому они не растут в точности друг над другом, иначе те, что снизу, света не получали бы вовсе.

По мере роста стебля каждый новый лист появляется под фиксированным углом относительно предыдущего листа. Это угол, при котором количество солнечного света максимально. Он не равен 180 градусам (половине полного оборота), потому что тогда третий лист окажется в точности над первым. Не равен он и 90 градусам (четверти полного оборота), поскольку тогда пятый лист оказался бы ровно над первым, а кроме того, первые три листа использовали бы только одну сторону стебля, что было бы недопустимой растратой солнечного света, падающего на другую сторону. Оказывается, угол, обеспечивающий наилучшее расположение листьев, — 137,5 градуса.

На рисунке показано, как располагаются листья, если каждый следующий лист растет повернутым под данным углом по отношению к предыдущему. Первые три листа расположены на достаточном угловом удалении друг от друга. Следующие два (листья четыре и пять) разнесены на более чем 50 градусов относительно ближайших к ним листьев — такой угол все еще оставляет им достаточно места. Шестой лист повернут на 32,5 градуса относительно первого. Это меньшее угловое расстояние, чем было между предыдущими листьями, что, конечно, неизбежно, поскольку появляются все новые листья, но тем не менее имеющийся угловой разнос по-прежнему достаточно широк.



Как листья обвивают стебель по спирали

Угол 137,5 градуса известен как золотой угол. Это тот угол, который получается, когда мы делим угол 360 градусов на два угла так, что отношение большего угла к меньшему равно ϕ , то есть 1,618. Получаемые два угла составляют 222,5 градуса и 137,5 градуса (с точностью до одного знака после запятой). Меньший из двух и есть золотой угол.

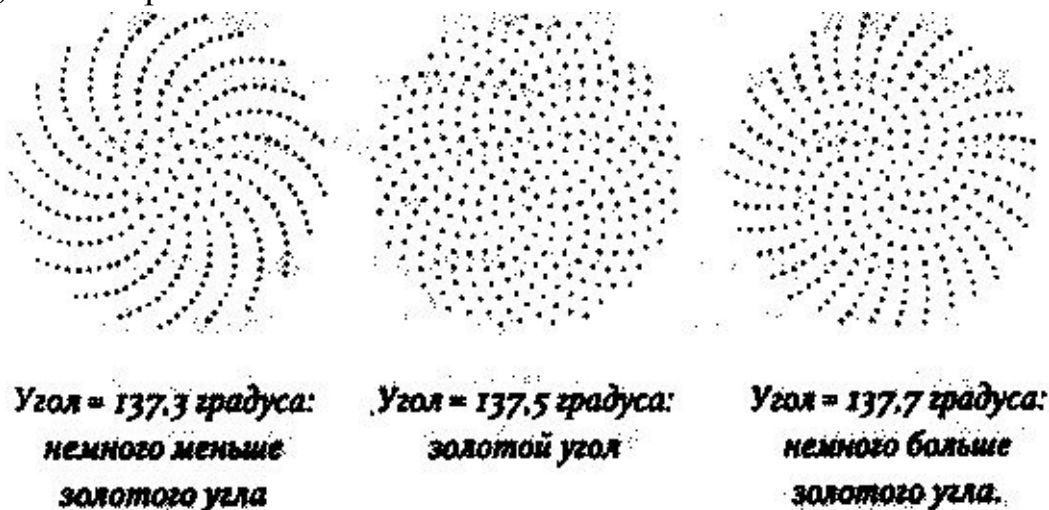
С математической точки зрения причина, по которой золотой угол обеспечивает наилучшую организацию расположения листьев вокруг ствола, связана с концепцией иррациональных чисел — то есть таких чисел, которые невозможно выразить в виде дроби. Если некий угол равен иррациональному числу, то сколько бы оборотов мы ни делали вокруг окружности, мы никогда не вернемся к начальному положению. Перефразируя Оруэлла, можно сказать, что некоторые иррациональные числа более иррациональны, чем другие. И ни одно число не является более иррациональным, чем золотое сечение. (Краткое объяснение дается в приложении 6 на сайте, посвященном данной книге.)

Золотой угол объясняет, почему на стебле растения, как правило, число листьев и число оборотов, после которого лист прорастает более или менее точно над первым, дается одним из чисел Фибоначчи. Например, у роз 5 листьев на каждые 2 оборота, у астр — 8 листьев на каждые 3 оборота, а миндальные деревья имеют 13 листьев на каждые 5 оборотов. Числа

Фибоначчи возникают здесь потому, что они дают наилучшее приближение к золотому углу среди углов, выраженных в виде отношения целых чисел. Если растение выпускает 8 листьев на каждые 3 оборота, то каждый следующий лист прорастает через $\frac{3}{8}$ оборота, что соответствует 135 градусам — очень хорошее приближение к золотому углу.

Но самым поразительным образом уникальные свойства золотого угла проявляются в расположении семян. Представим себе, что семена сначала возникают в центре цветка, и далее ряды следуют, заворачиваясь под фиксированным углом. Новые семена выталкивают старые все дальше и дальше от центра. На рисунке показаны различные расположения семян, возникающие при различных величинах этого угла: немного меньше золотого, в точности равный ему и чуть-чуть больше.

Неожиданным здесь оказывается то, сколь малое изменение угла влечет колоссальное изменение в расположении семян. Если угол в точности равен золотому, соцветие подсолнуха представляет собой завораживающий узор из взаимопроникающих логарифмических спиралей. Это самое компактное из всех возможных расположений. Природа выбирает золотой угол из-за этой компактности — семена располагаются очень тесно друг к другу, и весь организм от этого становится сильнее.



*

В конце XIX столетия немецкий философ и поэт Адольф Цейзинг (1810–1876) самым настойчивым образом продвигал идею о том, что золотая пропорция представляет собой воплощение красоты, — он писал, что золотое сечение — это универсальный закон, «который, как высший духовный идеал, пронизывает все структуры, формы и пропорции, будь они космические или индивидуальные, органические или неорганические,

акустические или оптические, и при этом он находит свое высшее воплощение в человеке». Цейзинг был первым, кто заявил, что фасад Парфенона имеет форму золотого прямоугольника. В действительности нет документальных свидетельств, что те, кто отвечал за сей архитектурный проект (а среди них был скульптор Фидий), использовали золотое сечение. Более того, если приглядеться, то золотой прямоугольник не вполне точно подходит к фасаду — края цоколя выступают наружу. И тем не менее именно имя строителя Парфенона Фидия около 1909 года побудило американского математика Марка Барра обозначить золотое сечение буквой φ .

Несмотря на эксцентричный стиль работ Цейзинга, его на полном серьезе воспринял Густав Фехнер (1801–1887) — известный немецкий ученый, один из основателей психофизиологии. Желая выяснить, действительно ли имеются какие-либо эмпирические свидетельства в пользу того, что человеческая мысль воспринимает золотой прямоугольник как более совершенный по сравнению со всеми другими видами прямоугольников, Фехнер изобрел тест, в котором испытуемым показывали ряд различных прямоугольников и просили указать на те, которые им больше понравились.

Результаты Фехнера, казалось, подтвердили идеи Цейзинга. Чаще всего выбирали прямоугольник, наиболее близкий к золотому, — его предпочитали больше трети испытуемых. И хотя методы Фехнера были достаточно грубыми, его «прямоугольные» тесты открыли новое направление в науке — экспериментальную психологию искусства, а заодно и более узкую дисциплину — «эстетику прямоугольников». Многие физиологи провели аналогичные исследования на тему привлекательности прямоугольников, что на самом деле не столь абсурдно, сколь это звучит. Ведь если существует «самый желанный» прямоугольник, то именно эту форму должны использовать дизайнеры при создании коммерческой продукции. И в самом деле, кредитные карты, пачки сигарет и книги часто приближаются по пропорциям к золотому прямоугольнику. К несчастью для фанатов числа φ , самые недавние и подробные исследования, проведенные группой Криса Макмануса из Лондонского университетского колледжа показывают, что Фехнер был не прав. В статье, опубликованной в 2008 году, говорится, что «более столетия экспериментальных исследований показывают, что золотое сечение в действительности играет незначительную роль при выборе наиболее предпочтительных форм прямоугольников». И тем не менее авторы этой статьи не считают, что подобные тесты — пустая трата времени. Вовсе нет. Они утверждают, что

в эстетическом восприятии прямоугольников разными людьми важную роль играют их индивидуальные различия, которые несомненно заслуживают дальнейших исследований.

*

Гэри Майзнер — 53-летний бизнес-консультант из Теннесси. Он называет себя Фи-Парнем и продает через свой сайт товары сувенирного толка, включая фи-футболки и фи-кружки. Однако из всего ассортимента лучше всего продается фи-матрица — программный продукт, который создает на экране вашего компьютера сетку для проверки изображений на предмет их близости к золотому сечению. Большинство пользователей используют ее для дизайна столовых приборов, мебели и интерьеров. Некоторые применяют ее для финансовых спекуляций, накладывая сетку на графики биржевых показателей и используя число фи для предсказания будущих трендов.

— Один парень с Карибов использовал мою матрицу для торговли нефтью, а один китаец — для спекуляции на курсах валют, — рассказывает Майзнер.

Золотое сечение привлекло Майзнера по причине его духовных устремлений — по словам этого Фи-Парня, оно помогло ему понять Вселенную. Но даже он полагает, что его коллеги по цеху иногда заходят слишком далеко. Например, его совершенно не убеждают трейдеры.

— Когда оглядываешься назад в прошлое, не так уж сложно найти в истории рыночных отношений такие, что подходили бы под число фи, — говорит он. — Реальная же проблема состоит в том, что оглядываться назад — это далеко не то же самое, что смотреть через лобовое стекло.

Благодаря своему веб-сайту Майзнер стал главным авторитетом для всех фанатов числа фи. Месяцем раньше он получил имейл от одного безработного, который считает, что единственный способ попасть на собеседование по устройству на работу — это оформить свое резюме согласно пропорциям золотого сечения. Чувствуя, что человек заблуждается, Майзнер все же решил ему помочь. Он подсказал ему несколько приемов фи-дизайна, но намекнул, что эффективней было бы сосредоточиться на более традиционных методах поиска работы, например, посмотреть сайты вакансий.

— И вот сегодня утром я получил от него письмо. — Майзнер явно удивлен. — Этот чудак пишет, что получил приглашение на собеседование! И он абсолютно уверен, что это все из-за нового дизайна резюме!

*

Вернувшись в Лондон, я рассказал Эдди Левину историю о золотом резюме в качестве примера чрезмерной экстравагантности. Левин, однако, не нашел эту историю забавной. Он тоже считает, что резюме, выполненное в фи-пропорции, привлекательней обычного.

— Оно будет красивее выглядеть, поэтому тот, кто его прочтет, решит, что оно привлекательнее других.

После 30 лет изучения золотого сечения Левин убежден, что везде, где присутствует красота, найдется число фи.

— Во всякой картине, которая нравится людям, доминирует золотая пропорция, — говорит он.

Левин отдает себе отчет в том, что далеко не все разделяют его точку зрения, хотя бы в силу того, что она предписывает наличие формулы для такого понятия, как красота, однако он гарантирует, что сможет найти число фи в любом шедевре.

Инстинктивно я весьма скептически воспринимаю одержимость Левина числом фи. Во-первых, я не уверен, что его калибр достаточно прецизионен, чтобы с нужной точностью измерить отношение 1,618. Обнаружить «примерное число фи» в пропорциях картины или здания не так уж сложно, особенно если выбирать, какие именно части измерять. А еще, поскольку отношения соседних членов в последовательности Фибоначчи дают хорошее приближение к 1,618, всякий раз при появлении структур 5×3 , 8×5 , 13×8 и т. д. будет видаться золотой прямоугольник. Нечего удивляться, что золотая пропорция оказывается столь распространенной.

И тем не менее в приводимых Левином примерах есть нечто неотразимое. Я испытывал восторг и упоение чудом всякий раз, как он показывал мне новое изображение. Число фи действительно присутствует везде! Да, золотое сечение всегда привлекало сумасбродов, но это не означает, что все теории по этому поводу сумасбродные. Некоторые, причем весьма уважаемые ученые утверждают, что число фи действительно создает красоту, в частности в структуре музыкальных произведений. Так что идея о том, что суть человеческого существования, возможно, сводится к пропорции, служащей наилучшим выражением естественного роста и воспроизведения, не кажется слишком уж притянутой за уши.

В тот солнечный летний день мы с Левином перебрались в его садик. Устроившись на шезлонгах, мы наслаждались ароматным чаем. Левин

сказал, что успех лимериков как формы поэзии определяется тем, что предписанное число слогов в строках (8, 8, 5, 5, 8) — это числа Фибоначчи. Тогда мне пришло в голову вот что. Я спросил Левина, знает ли он, что такое айпод. Он не знал. У меня в кармане как раз лежал айпод, который я оттуда и извлек.

— Это — прекраснейшая вещь, — заметил я, — а потому, в соответствии с вашей аргументацией, в ней должно скрываться золотое сечение.

Левин взял мой ослепительно белый айпод и положил его на ладонь.

— Да, — согласился он, — вещь прекрасная, и в ней должно быть золотое сечение. — Однако, не желая лишать меня надежды, предупредил: — Объекты, выпускаемые в промышленных масштабах, часто не следуют в точности золотому сечению. Используемые формы несколько отклоняются для удобства производства.

Левин раскрыл свой мерный калибр и принялся оценивать расстояния между всеми существенными точками.

— Ну да, конечно, а как же иначе, — ухмыльнулся он.

Глава 9

Шанс — дело тонкое

Автор вспоминает королей «hasard»'а и играет на деньги в Рено. Прогуливаясь по миру случайности, он попадает в офисный квартал в Ньюпорт-Бич, откуда, взглянув из окна, можно разглядеть победителя лотерей на уединенном острове в южных морях.

Раньше говорили, что в Лас-Вегас отправляются, чтобы пожениться, а в Рено — чтобы развестись. В наши дни и в тот и в другой город штата Невада едут ради игровых автоматов. В казино «Перечница» в Рено их 1900, хотя это казино вовсе не самое большое в городе. Когда я пробирался через его главный зал, то заметил, что столы для игры в рулетку и блекджек освещены мягким, приглушенным светом, — в отличие от сияющих, вращающихся, гудящих рядов игровых автоматов. Технологическая эволюция избавила большинство из них от рычажных «конечностей» и механических внутренностей. Игроки теперь делают ставки, нажимая на подсвеченные кнопки или тыкая в тачскрин-дисплей. Время от времени до меня доносился возбуждающий азарт звук сыплющейся мелочи, но звуки эти ныне — заготовленные записи, поскольку монеты уступили место электронным кредитам. Игровые автоматы — передний край индустрии казино. Они зарабатывают в Соединенных Штатах 25 миллиардов долларов в год (это после того, как выплачены все выигрыши), что примерно в два с половиной раза больше, чем суммарная стоимость всех билетов в кино, ежегодно продаваемых в стране. В штате Невада — главном центре индустрии казино — автоматы приносят почти 70 процентов доходов от всего игорного бизнеса, причем с каждым годом эта цифра становится больше.

*

Теория вероятностей занимается изучением шансов. Подбрасывая монету, мы не знаем заранее, как она упадет, а сидя перед игровым

автоматом — не знаем, в каком именно положении останутся вращающиеся барабаны. Теория вероятностей дает нам язык для описания того, каковы шансы, что монета упадет орлом вверх или что мы сорвем банк. В рамках математического подхода непредсказуемость становится предсказуемой. В обыденной жизни мы воспринимаем эту мысль как само собой разумеющуюся — интересуясь, например, прогнозом погоды, — но осознание того факта, что математика способна сообщить нечто о будущем, — очень глубокая — и сравнительно недавно появившаяся — идея в истории человеческой мысли.

В Рено я приехал, чтобы встретиться с математиком, который определяет вероятность выигрыша для более чем половины всех игровых автоматов в мире. Его профессия освящена веками традиций — теория вероятностей возникла в XVI столетии стараниями математика и азартного игрока Джероламо Кардано (1501–1576). Редко когда научный прорыв возникал из такого глубокого презрения к самому себе. «Сколь сильно меня привлекали излишества шахматной доски и игорного стола, столь же твердо я знаю, что в глазах людей заслуживаю самого сурового порицания», — писал он. Его пагубная привычка привела к появлению трактата под названием «Книга об игре в кости», представлявшего собой первый научный анализ вероятности. Однако эта книга, написанная в 1526 году, настолько опережала свое время, что была опубликована спустя почти столетие после смерти автора, в 1663 году.

Кардано заметил, что если случайное событие имеет несколько равновероятных исходов, то вероятность какого-либо конкретного исхода равна доле, которую он занимает среди всех возможных. Это означает, что если имеется один шанс из шести, что некое событие случится, то вероятность наступления этого события равна одной шестой. Так что, когда вы бросаете игральную кость, шанс, что выпадет шестерка, равен $\frac{1}{6}$. Шанс выпадения четного числа равен $\frac{3}{6}$, то есть попросту $\frac{1}{2}$. Вероятность можно определить как правдоподобие наступления события, выраженное в виде дроби. Невозможность имеет вероятность 0; полная определенность — вероятность 1; а все остальное расположено между ними.

Кажется, все просто, но в действительности это не так. В древние времена и греки, и римляне, и индийцы увлекались азартными играми. Но ни один из этих народов не попытался понять, как математические законы управляют случайностью. В Риме, например, подбрасывание монеты использовали как средство разрешения споров: выпадение стороны с изображением Юлия Цезаря означало, что император поддерживал

предлагаемое решение. Случайность воспринималась не как случайность, а как выражение божественной воли. На протяжении всей своей истории человечество демонстрировало недюжинное воображение, изобретая различные способы анализа случайных событий. Например, предсказание по книгам представляло собой испрошение о наставлении посредством случайного выбора отрывка из некоторого литературного произведения. Точно так же, согласно Библии, вытягивание более короткой соломинки было объективным способом выбора, коль скоро Господь уже определил, чему должно случиться: «В полу бросается жребий, но все решение его — от Господа» (*Притч., 16:33*).

Предрассудки представляли собой мощный тормоз на пути научного подхода к вероятности, но не прошло и тысячи лет, в течение которых люди бросали кости, как мистицизм все-таки удалось преодолеть, чему во многом поспособствовала одна из самых сильных человеческих страстей — стремление к финансовой выгоде. И Джероламо Кардано был первым, кто сумел обуздать фортуна. Существует мнение, что открытие теории вероятностей даже оказало определяющее влияние на упадок религии и затухание предрассудков в течение нескольких последних столетий. Если непредсказуемые события подчиняются математическим законам, то нет нужды в их божественном объяснении. Наступление секуляризации в мире обычно связывают с мыслителями, подобными Чарльзу Дарвину и Фридриху Ницше, однако вполне возможно, что первым, кто толкнул камень и привел в движение всю лавину, был Джероламо Кардано.

*

Как я уже говорил, вероятность получить шестерку при бросании одной кости равна $\frac{1}{6}$. Бросим вторую кость; шанс получить шестерку снова равен $\frac{1}{6}$. Каковы шансы получить пару шестерок при бросании пары костей? Самое основное правило теории вероятностей состоит в том, что вероятность наступления двух независимых событий равна вероятности первого, умноженной на вероятность второго. При бросании пары костей исходы, относящиеся к первой кости, не зависят от исходов, относящихся ко второй кости, и наоборот. Таким образом, шанс появления двух шестерок равен $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, что есть $\frac{1}{36}$. Это можно увидеть, перебирая все возможные комбинации выпадения двух костей: имеется 36 равновероятных исходов, лишь один из которых представляет собой две шестерки.

Если посмотреть на это с другой стороны, то из 36 возможных исходов

35 не представляют собой выпадание двух шестерок. Таким образом, вероятность невыпадения двух шестерок равна $^{35}/_{36}$. Вместо того чтобы перебирать 35 примеров, можно с равным успехом начать с полного набора исходов, а затем вычесть случаи, когда выпадают две шестерки. В нашем примере это вычисление выглядит как $1 - 1/36 = ^{35}/_{36}$. Итак, вероятность того, что некоторое событие не случится, равна 1 минус вероятность, что это случится.

В давние времена стол для игры в кости заменял собой игровые автоматы, и игроки делали ставки на исход бросания костей. Одна классическая азартная игра состояла в том, чтобы бросить четыре кости и поставить на выпадение по крайней мере одной шестерки. Получался славный источник скромного дохода для всякого, кто желал поставить на это, и наших математических познаний уже достаточно, чтобы увидеть почему:

Шаг 1

Вероятность выпадения одной шестерки при бросании четырех костей равна 1 минус вероятность невыпадения шестерки ни на одной из четырех костей.

Шаг 2

Вероятность невыпадения шестерки на одной кости есть $^5/_6$, так что при наличии четырех костей вероятность равна $^5/_6 \times ^5/_6 \times ^5/_6 \times ^5/_6 = ^{625}/_{1296}$ что есть 0,482.

Шаг 3

Итак, вероятность выпадения шестерки равна $1 - 0,482 = 0,518$.

Вероятность 0,518 означает, что если вы бросите четыре кости тысячу раз, то можно ожидать получения по крайней мере одной шестерки около 518 раз, а отсутствия шестерок около 482 раз. Если вы поставили деньги на выпадение по крайней мере одной шестерки, то в среднем вы будете выигрывать больше, чем проигрывать, так что к окончанию игры немного разбогатеете.

Живший в XVII веке писатель шевалье де Мэрэ был завсегдатаем как игральных заведений, так и самых модных салонов Парижа. Шевалье интересовался математической стороной происходящего за игорным столом не менее, чем своим выигрышем. В связи с этим у него возник целый ряд вопросов, на которые сам он был не в состоянии ответить.

Поэтому в 1654 году он обратился к прославленному математику Блезу Паскалю. Его обращение было случайным событием, которое положило начало систематическому исследованию случайности.

Блезу Паскалю в то время был всего 31 год, но он пользовался известностью в интеллектуальных кругах уже почти два десятилетия. Уже в детстве Паскаль выказывал такие способности, что к 13 годам отец позволил ему посещать научный салон, организованный уже известным нам монахом и любителем простых чисел Мареном Мерсенном. Туда заходили многие знаменитые математики, включая Рене Декарта и Пьера де Ферма. (Кстати, еще подростком Паскаль доказал важные теоремы из геометрии и изобрел нечто вроде механической вычислительной машины, которую назвал паскалиной.)

Первый вопрос, с которым де Мэрэ обратился к Паскалю, был таков. Итак, имеется равная $1/36$ вероятность выпадения двух шестерок при бросании двух костей. Вообще говоря, вероятность выпадения двух шестерок повышается по мере того, как пару костей бросают снова и снова. Наш шевалье желал узнать, сколько раз необходимо бросать кости, чтобы ставка на две шестерки превратилась в дело прибыльное.

Второй вопрос был посложнее. Пусть Жан и Жак играют в кости, причем игра состоит из нескольких раундов, в каждом из которых они бросают кость и определяют, у кого выпало большее число очков. Окончательным победителем является тот, у кого большее число очков выпало три раза. Они оба поставили по 32 франка, так что на кону 64 франка. Если игра прерывается после трех раундов, в течение которых Жан выбросил большее число два раза, а Жак лишь один раз, то как следует поделить деньги в банке?

Размышляя над этими вопросами и ощущая потребность обсудить их с коллегой по цеху гениев, Паскаль написал своему другу из мерсенновского салона — Пьеру де Ферма. Ферма, живший вдали от Парижа в Тулузе, был на 22 года старше Паскаля. Он работал судьей в местном уголовном суде и забавлял себя математикой, к которой относился как к интеллектуальному развлечению. Тем не менее любовь к сосредоточенным размышлениям сделала его одним из наиболее уважаемых математиков первой половины XVII столетия.

Короткая переписка между Паскалем и Ферма по поводу шансов — которые они называли словом «hasard»^[53] — ознаменовала переломный момент в истории науки. В ходе переписки эти господа нашли ответы на большую часть вопросов, поставленных азартным шевалье, а в процессе

решения заложили основы современной теории вероятностей.

*

Первый вопрос шевалье де Мэрэ касался выпадения двух шестерок. Сколько раз надо бросать пару костей, чтобы появление двух шестерок стало более вероятным, чем их неappearance? При одном бросании двух костей шанс выпадения двух шестерок равен $\frac{1}{36}$, что есть 0,028. Шанс получить две шестерки за два бросания пары костей есть 1 минус вероятность невыпадения двух шестерок за два бросания, то есть $1 - (\frac{35}{36} \times \frac{35}{36})$. Это равно $\frac{71}{129}$, или 0,055. (Заметим, что шанс получить две шестерки за два бросания *не* равен $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$. Это число выражает шанс появления двух шестерок в обоих бросаниях. Вероятность же, которая нас интересует, — это шанс выпадения двух шестерок по крайней мере один раз, с учетом исходов, когда две шестерки выпадают или при первом бросании, или при втором, или при обоих. Игроку для выигрыша требуется, чтобы две шестерки выпали только один раз, а не при каждом бросании.) Шанс выпадения двух шестерок при трех бросаниях двух костей равен 1 минус вероятность их невыпадения, что в данном случае равно $1 - (\frac{35}{36} \times \frac{35}{36} \times \frac{35}{36}) = \frac{3781}{46656}$, или 0,081.

Как видим, чем большее число раз бросаются кости, тем выше вероятность выпадения двух шестерок: 0,028 при одном бросании, 0,055 при двух и 0,081 при трех. Поэтому исходный вопрос можно перефразировать так: «После скольких бросаний эта дробь превысит 0,5?» — ведь вероятность, превосходящая половину, означает, что событие скорее произойдет, чем нет. Паскаль получил правильный ответ: требуется 25 бросаний. Если шевалье ставил на выпадение двух шестерок за 24 бросания, то следовало ожидать, что он потеряет деньги, но после 25 бросаний шансы начинают склоняться в его сторону, и он может рассчитывать на выигрыш.

Второй вопрос де Мэрэ — о разделении денег, стоящих на кону, — часто называют *задачей о разделе ставки*, и вопрос этот ставился и до того, как за него взялись Ферма и Паскаль, но правильного решения никто не нашел. Переформулируем сначала этот вопрос в терминах орлов и решек. Жан выигрывает каждый раунд, когда монета падает орлом, а Жак — когда решкой. Первый из игроков, победивший в трех раундах, забирает стоящие на кону деньги в размере 64 франков. Пусть теперь в тот момент, когда счет 2:1 в пользу Жана (два орла и одна решка), игру приходится внезапно

прервать. Если такое случилось, то как самым справедливым образом поделить банк? Один возможный ответ такой: деньги должен забрать Жан, потому что он лидирует; однако при этом не учитывается, что и у Жака есть шанс выиграть. А вот другой возможный ответ: Жан должен получить вдвое больше, чем Жак; но и это не вполне справедливо, потому что счет 2:1 отражает лишь прошлые события и никоим образом не говорит о том, что случится в будущем. Способности Жана к угадыванию ничем не превосходят способности Жака. Каждый раз, когда они бросают кости, имеются шансы 50:50, что монета ляжет орлом или решкой. Наилучший — и самый справедливый — анализ состоит в том, чтобы рассмотреть, что может произойти в будущем. Если монету бросают еще два раза, то вероятные исходы таковы:

орел,	орел
орел,	решка
решка,	орел
решка,	решка

После этих двух подбрасываний монеты игра непременно закончится чьей-то победой. В первых трех случаях побеждает Жан, а в четвертом — Жак. Самый справедливый способ поделить банк — это отдать $\frac{3}{4}$ Жану и $\frac{1}{4}$ Жаку, то есть 48 франков — Жану, и 16 — Жаку. Теперь это кажется простым, но в XVII столетии сама мысль о том, что случайные события, которые еще не произошли, можно анализировать математически, представляла собой мощный концептуальный прорыв. Именно эта концепция лежит в основе нашего научного понимания значительной части современного мира, от физики до финансов и от медицины до маркетинговых исследований.

*

Через несколько месяцев после того, как он отправил письмо Ферма, Паскаль пережил мистический транс. Придя в себя, он записал свои мысли на листке бумаги, который затем постоянно носил с собой в специальном кармашке, вшитом в подкладку камзола^[54]. Быть может, это была реакция на страх близкой смерти — после случая, когда его карета лишь чудом удержалась на мосту, в то время как передние лошади уже сорвались за парашет, — а может, это была эмоциональная реакция на упадок игорных заведений в предреволюционной Франции — но, как бы то ни было, в

Паскале ожила его тяга к идеям янсенизма^[55], строгому варианту католицизма, и он забросил математику, сосредоточившись на теологии и философии.

Несмотря на благочестивые намерения Паскаля, его наследие оказалось в большей степени мирским, чем духовным. Теория вероятностей — основа невероятно доходной игровой индустрии. Некоторые историки даже приписывают Паскалю изобретение рулетки. Правда это или нет, но колесо рулетки, несомненно, имеет французское происхождение^[56]. К концу XVIII века рулетка стала одним из самых популярных развлечений парижан. Правила игры таковы: шарик запускается по внешнему ободу рулетки в сторону, противоположную вращению внутреннего колеса. Он должен свалиться в одну из 38 ячеек, расположенных на колесе. Ячейки пронумерованы от 1 до 36 и окрашены в чередующиеся красный и черный цвета. Есть также две дополнительные ячейки 0 и 00, они зеленого цвета. Игрокам предлагается делать ставки, предсказывая, куда попадет шарик. Самая простая ставка — на то, что шарик остановится на некотором определенном числе. Если число это угадано правильно, заведение платит игроку выигрыш, в 35 раз превышающий его ставку. Так, ставка в 10 долларов принесет вам 350 долларов (и вам еще вернут и вашу поставленную на кон десятку).

Рулетка — очень эффективная машина по производству денег, и, чтобы увидеть, почему это так, нам следует познакомиться с новой концепцией — *математического ожидания*. Это то, чего вы можете ожидать в качестве исхода сделанной ставки. Например, какой выигрыш я могу ожидать, если я поставил на определенное число? Математическое ожидание вычисляется путем умножения вероятности каждого исхода на цену этого исхода и суммирования всех полученных произведений. При ставке на конкретное число вероятность выигрыша равна $1/38$, поскольку имеется 38 потенциально возможных исходов. Поэтому, ставя 10 долларов на любое конкретное число, я предполагаю выиграть следующую сумму (деньги, которые на самом деле выигрываются, берутся со знаком плюс, а те, что оказываются проигранными, — со знаком минус):

(вероятность остановки на данном числе) $\times$ (соотв. выигрыш) +
(вероятность остановки на другом числе) $\times$ (соотв. выигрыш),

что есть

$$(1/38 \times \$350) + (37/38 \times -\$10) = -52,6 \text{ цента.}$$

Другими словами, я ничего не выигрываю. Ожидаемым результатом является проигрыш в 52,6 цента на каждые 10 поставленных долларов. Разумеется, сделав одну ставку, я никогда не проиграю 52,6 цента. Я или выиграю 350 долларов, или проиграю 10. Значение -52,6 цента — теоретическое, но в среднем, если я буду продолжать делать ставки, мои потери будут близки к 52,6 цента на ставку. Иногда я буду выигрывать, а иногда проигрывать, но если играть в рулетку долго, продолжая ставить на число, то гарантировано, что в результате у меня окажется меньше, а у заведения, наоборот, больше денег, чем вначале.

У всех других ставок при игре в рулетку — на два числа или более, на сектора, цвета или комбинации — ожидаемый выигрыш равен -52,6 цента, за исключением ставки на «пять чисел», то есть на остановку шарика в 0, 00, 1, 2 или 3, для которой шансы еще хуже: ожидаемая потеря составляет 78,9 цента.

Несмотря на постоянные проигрыши, рулетка была — и остается — любимым развлечением огромного множества людей. Они полагают, что 52,6 цента — разумная плата за то, чтобы пощекотать себе нервы потенциальным выигрышем в 350 долларов. В XIX веке после повсеместного распространения казино для повышения конкурентоспособности стали применяться колеса без ячейки 00, из-за чего вероятность выигрыша при ставке на число оказывалась равной $1/37$, а ожидаемые потери уменьшались до 27 центов на каждые поставленные 10 долларов. Такое изменение означало, что скорость, с которой игроки теряли деньги, уменьшилась в два раза. В европейских казино чаще встречаются колеса только с ячейкой 0, тогда как в Америке предпочитают исходный вариант, где присутствуют и 0, и 00.

Во всех играх с казино ожидаемый выигрыш отрицателен; другими словами, ожидается, что игроки будут проигрывать деньги. Если бы дело обстояло каким-то по-другому, то казино бы быстро разорились. Впрочем, ошибки иногда случаются. Как-то раз владельцы одного казино на речном пароходике в Иллинойсе в рекламных целях изменили выигрыш, выплачиваемый при определенной сдаче при игре в блекджек, не учтя, что ожидаемый выигрыш из отрицательного стал положительным. Вместо проигрыша у игрока появился ожидаемый выигрыш в 20 центов на ставку в 10 долларов. По некоторым данным, это казино теряло 200 000 долларов в день.

Взглянуть на ожидаемые потери можно и другим способом — рассмотрев *процент возврата*. Если вы играете в рулетку и ставите 10 долларов, то можете ожидать, что к вам вернется около 9,47 доллара.

Другими словами, в американских рулетках процент возврата равен 94,7 %. Хотя это и не выглядит слишком выгодным для игроков, но так все-таки лучше, чем в случае игровых автоматов.

*

В 1893 году газета «San Francisco Chronicle» известила читателей, что в городе появились полторы тысячи «слот-машин^[57], которые могут принести вам колоссальный доход. Их становится все больше и больше, хотя о первых мы узнали всего-то несколько месяцев назад». У тех машин было много различных вариаций, но рождение современных игровых автоматов состоялось только на рубеже столетий, когда немецкий иммигрант Чарльз Фей предложил идею трех вращающихся барабанов. На барабанах автомата «Колокол Свободы» были изображены подкова, звезда, карточные черва, бубна и пика, а также треснувший колокол Свободы из Филадельфии. Различные комбинации этих символов приносили различные выигрыши, а джекпот выплачивался, когда выпадали три колокола. Этот игровой автомат — известный как «однорукий бандит» из-за имеющегося сбоку рычага и своей способности к грабежу играющих, — отличался от конкурирующих моделей тем, что привносил элемент интриги: вращающиеся колеса останавливались по очереди. Другие компании быстро переняли сей опыт, и вскоре машины такого типа распространились за пределы Сан Франциско, а к 1930-м годам игровые автоматы с тремя барабанами стали неотъемлемой частью американской индустрии развлечений.

У «Колокола Свободы» средний возврат был равен 75 процентам. В наши дни игровые автоматы гораздо щедрее.

— Правило очень простое: если бросить в машину доллар, то в большинстве случаев вы получите обратно 95 процентов, — говорит об игровых автоматах, где ставки производятся в долларах, Энтони Бэрлокер, директор по разработке игр в компании «International Game Technology» (IGT), на счету которой — 60 процентов из около миллиона действующих игровых автоматов. — Если это 5 центов, то возврат около 90 процентов, на четвертак — 92 процента, а там, где принимаются одноцентовики, возврат может составлять всего 88 процентов.

Компьютерные технологии позволяют машинам принимать ставки без ограничений по достоинству монет, так что одна и та же машина может выплачивать различный процент возврата в зависимости от сделанной ставки. Я спросил Бэрлокера, имеется ли некий ограничительный процент, ниже которого игроки просто перестанут играть из-за того, что будут

слишком много проигрывать.

— Мне лично кажется, что если мы опустимся ниже 85 процентов, то будет исключительно сложно придумать увлекательную игру. Там уже потребуется настоящее везение. Выигрываемых денег окажется недостаточно для поддержания в игроке настоящего азарта. Неплохие результаты получаются уже на уровне 87,5 или 88 процентов. Но когда мы довели процент возврата до 95–97, народ просто валом повалил.

Мы встретились с Бэрлокером в центральном офисе IGT, расположенном в бизнес-парке в Рино, от него до казино «Перечница» ехать всего минут двадцать. Он провел меня по залу, где выставлены различные образцы их изделий — каждый год их выпускается десятки тысяч, — и мимо зала, где хранятся расставленные аккуратными рядами сотни игровых автоматов. Бэрлокер гладко выбрит, одет стильно, но строго; у него короткие темные волосы и ямочка на подбородке. Сам он живет в Карсон-Сити, в получасе езды. Он начал работать в IGT после окончания математического факультета в Университете Нотр-Дам. Для человека, которому с детства нравилось изобретать игры и который еще будучи студентом увлекался теорией вероятностей, эта работа подходит просто идеально.

*

Математическое ожидание — одно из двух фундаментальных математических понятий, скрывающихся в природе азартных игр. Второе — это *закон больших чисел*. Вы можете выиграть, сделав всего несколько ставок при игре в рулетку или на игровом автомате. Однако чем дольше вы будете играть в рулетку, тем более вероятно, что в целом вы проиграете. Процент возврата действительно начинает работать только на относительно длинном отрезке времени.

Закон больших чисел утверждает, что если монету подбросить три раза, орел может не выпасть ни разу, но стоит подбросить ее три миллиарда раз, то наверняка выпадение орлов составит почти в точности 50 процентов. Во время Второй мировой войны математик Джон Керрик оказался в Дании. Немцы арестовали его и интернировали. Имея в своем распоряжении много свободного времени, он решил проверить закон больших чисел. Сидя в тюремной камере, он подбросил монетку 10 000 раз. Результат был таким: 5067 орлов, что составляет 50,67 процента от полного числа. Около 1900 года специалист по статистике Карл Пирсон проделал то же самое 24 000 раз. При заметно большем числе испытаний можно ожидать, что и процент будет ближе к 50 — и правда, у него выпало 12 012 орлов, то есть

50,05 процента.

Все эти результаты, по всей видимости, подтверждают то, что мы принимаем за само собой разумеющееся: если подбрасывать монету много раз, то орел и решетка выпадают с одинаковой вероятностью. Однако недавно группа исследователей из Стэнфордского университета во главе со специалистом по статистике Перси Диаконисом более глубоко исследовала этот вопрос — действительно ли эти события равновероятны. Для этого они соорудили машинку для подбрасывания монеты и провели замедленную съемку полета монеты по воздуху. Результаты анализа данных, полученных группой Диакониса — с учетом того, что монета может приземлиться на ребро примерно один раз за 6000 подбрасываний, — оказались захватывающе неожиданными: примерно в 51 проценте случаев монета падает на ту же сторону, с которой ее подбросили. Так что если в момент подбрасывания вверх смотрит орел, то орел будет выпадать немного чаще, чем решка. Диаконис заключил, впрочем, что его исследование на самом деле демонстрирует, насколько трудно изучать случайные явления, и что «для подбрасываемых монет классические предположения о независимости с вероятностью 1:2 достаточно твердо обоснованы».

Казино, без сомнения, имеют дело с большими числами. Как пояснил Бэрлокер, «вместо одной машины казино желают иметь тысячи, потому что они знают, что когда их много, то даже если одна какая-нибудь машина ведет себя неправильно, „наоборот“ — то есть проигрывает, — все равно для казино в целом имеется очень большая вероятность оказаться в плюсе». Игровые автоматы IGT сделаны так, что значение процента возврата поддерживается с точностью 0,5 процента после 10 миллионов проведенных игр. В «Перечнице», где я побывал во время моего посещения Рино, каждая машина разыгрывает около 2000 игр в день. При наличии почти 2000 машин получается около 4 миллионов игр за день. Так что уже через два с половиной дня хозяева «Перечницы» могут быть практически уверены, что значение процента возврата поддерживается с точностью в полпроцента. Если средняя ставка — доллар, а процент возврата равен 95 процентам, то за каждые 60 часов получается доход в 500 000 долларов, плюс-минус 50 000 долларов. Неудивительно, что хозяева казино так любят игровые автоматы.

Правила игры в рулетку не менялись со времен ее изобретения. Напротив, работа Бэрлокера нетривиальна отчасти и по той причине, что от него постоянно требуется придумывать новые расклады вероятностей всякий раз, когда его компания выпускает новый игровой автомат. Сначала

он решает, какие символы использовать на барабане. Традиционно это вишни и надпись «bag», но в наши дни это вполне могут быть персонажи мультфильмов, художники эпохи Возрождения или животные. Далее он прикидывает, как часто эти символы будут встречаться на барабане, какие комбинации будут означать выигрыш и сколько машина будет платить за каждую выигрышную комбинацию.

Бэрлокер набросал для меня простенькую игру, описываемую ниже как Игра А — в ней имеются три барабана, на каждом из них 82 положения: вишни, bag'ы, красные семерки, джекпот и пустое место. Изучив таблицу, вы увидите, что имеется вероятность $\frac{9}{82}$, или 10,976 процента, выпадения вишни на первом барабане, и в этом случае ставка в 1 доллар приносит выигрыш в 4 доллара. Вероятность выигрывающей комбинации, умноженная на выплату, называется *ожидаемым вкладом*. Ожидаемый вклад от комбинации вишни — любое — любое составляет $10,967 \times 4 = 43,902$ процента. Другими словами, на каждый доллар, опущенный в машину, 43,902 цента будет выплачено за комбинацию вишни — любое — любое. Проектируя игры, Бэрлокер должен обеспечить, чтобы сумма ожидаемых вкладов по всем выплатам равнялась установленному проценту возврата для автомата в целом.

Игра А. Таблица выигрышей

ИГРА С НИЗКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ

Символ	Барабан 1	Барабан 2	Барабан 3
Пустота	23	27	26
Вишни (CH)	9	0	0
1 Bar (1B)	19	27	25
2 Bar (2B)	12	15	16
3 Bar (3B)	12	7	10
Красная Семерка (R7)	5	4	4
Джекпот (JP)	2	2	1
Итого	82	82	82

ТАБЛИЦА ВЫИГРЫШЕЙ — ОЦЕНКИ

Комбинация	Размер выплаты	Вероят- ность	Доля
CH Любое Любое	4	10,976%	43,902%
1B 1B 1B	10	2,326%	23,260%
2B 2B 2B	25	0,522%	13,058%
3B 3B 3B	50	0,152%	7,617%
R7 R7 R7	100	0,015%	1,451%
JP JP JP	1000	0,001%	0,725%
Полная частота выпадения		13,992%	
Полный возврат игроку		90,015%	

Игра Б. Таблица выигрышей

ИГРА С ВЫСОКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ

Символ	Барабан 1	Барабан 2	Барабан 3
Черное	20	22	23
Вишня (CH)	6	0	0
1 Bar (1B)	18	25	19
2 Bar (2B)	13	15	14
3 Bar (3B)	12	9	13
Красная Семерка (R7)	9	7	10
Джекпот (JP)	4	4	3
Итого	82	82	82

ТАБЛИЦА ВЫИГРЫШЕЙ — ОЦЕНКИ

Комбинация	Размер выплаты	Вероят- ность	Доля
CH Любое Любое	4	7,317%	29,268%
1B 1B 1B	10	1,551%	15,507%
2B 2B 2B	25	0,495%	12,378%
3B 3B 3B	50	255%	12,732%
R7 R7 R7	100	0,114%	11,426%
JP JP JP	1000	0,009%	8,706%
Полная частота выпадения		9,740%	
Полный возврат игроку		90,017%	

Гибкость в проектировании игрового автомата означает, что за счет варьирования используемых символов, выигрышных комбинаций и установленных выплат можно получать очень различные игры. Игра А — это «дриблинг на вишне», сие означает, что машина платит часто, но помалу. Почти половина всех выплачиваемых денег приходится на суммы всего в 4 доллара. Наоборот, в Игре Б только треть выигрышей приходится на выплаты в 4 доллара, тогда как гораздо большая часть денег отведена на более крупные выигрыши. Игра А — это так называемая игра с низкой волатильностью, а Игра Б — с высокой волатильностью; в ней вы будете попадать на выигрышные комбинации не так часто, зато растут шансы на больший выигрыш. Чем больше волатильность, тем выше риск для владельца игрового автомата на коротких отрезках времени.

Некоторые игроки предпочитают игровые автоматы с низкой волатильностью, тогда как другие — с высокой. Основная задача проектировщика игр — обеспечить достаточные выплаты для того, чтобы поддерживать в играющем желание продолжать игру, ведь чем дольше данный игрок играет, тем больше он в среднем проигрывает. Игры с высокой волатильностью вызывают большой азарт — особенно в казино, где машины, на которых выпал джекпот, привлекают всеобщее внимание, разражаясь вызывающими мурашки трезвоном и вспышками света. Однако создание хорошей игры не ограничивается разработкой изощренных графических элементов, насыщенных звуков и завлекательных видеороликов. Хорошая игра предполагает еще и создание правильного баланса вероятностей. Я спросил Бэрлокера, можно ли, по-разному настраивая волатильность, придумать машину с низким процентом возврата, которая для игроков была бы более привлекательной, чем машины с высоким возвратом.

— Мы с коллегами провели больше года, пытаясь в этом разобраться и выписывая всякие формулы, и нам удалось придумать метод, позволяющий скрывать, каков же в машине настоящий процент возврата, — сказал он. — Из некоторых казино до нас теперь доходят сведения, что там запускают машины с более низким процентом возврата, но игроки не вполне это осознают. То была непростая задача.

Я поинтересовался, как тут обстоит дело с этикой.

— Это — необходимость, — ответил он. — Нам нужно, чтобы игроки не теряли азарта, но при этом требуется, чтобы и те, кто покупает у нас автоматы, не оставались в убытке.

Составленные Бэрлокером таблицы выигрышей полезны не только для понимания внутреннего устройства одноруких бандитов, но и в качестве наглядного пособия на тему о том, как работает индустрия страхования. Работа страховой компании во многом очень похожа на работу игровых автоматов. Обе системы построены на основе теории вероятностей, когда потери, приходящиеся почти на каждого, используются для выплат лишь немногим. При этом обе эти системы могут приносить фантастический доход тем, в чьих руках находится контроль величины процента возврата.

Покупка страхового полиса ничем не отличается от азартной игры. Вы делаете ставку, например, на то, что ваш дом обворуют. Если вас действительно ограбили, вы получаете выплату — возмещение того, что было украдено. Если же ограбления не случилось — к счастью, вы, конечно, не получаете ничего. Актуарии, специалисты по страховой математике, ведут себя в точности как Энтони Бэрлокер из IGT. Им известно, каковы в целом должны быть выплаты клиентам, знают они и вероятности каждого события, предполагающего выигрыш (грабеж, пожар, серьезная болезнь и т. д.), так что они вычисляют, какие выплаты должны приходиться на одно такое событие, да так, чтобы сумма ожидаемых вкладов равнялась полной сумме выплат. Хотя составление страховочных таблиц представляет собой дело куда более сложное, чем проектирование игровых автоматов, принцип там тот же. Страховые компании выплачивают меньше, чем они получают в виде взносов, то есть процент возврата у них меньше ста. Покупка страхового полиса — это ставка с отрицательным ожиданием, и потому предприятие это весьма невыгодное.

Так почему же люди страхуются, несмотря на то что это невыгодно? Отличие страхования от игры в казино состоит в том, что в казино вы (будем надеяться) играете на деньги, проигрыш которых можете себе позволить. Но в страховании вы делаете ставку, чтобы защититься от потери, которую вы позволить себе не можете. Да, страхуясь, вы неизбежно будете терять небольшие суммы денег (взносы), зато вы предохраните себя от потерь катастрофического масштаба (например, всех ценностей в вашем доме). Страховщики обеспечивают нам душевный покой за очень неплохую цену.

Отсюда следует, однако, что страхование чего-то, что вам не очень дорого, — занятие бессмысленное. В качестве примера рассмотрим страхование мобильного телефона. Мобильные телефоны относительно дешевы (скажем, по цене 100 долларов), но их страхование дорогое (скажем, 7 долларов в месяц). В этом случае выгоднее не приобретать страховку, а просто при потере старого мобильного покупать новый. Таким

способом вы оставляете себе прибыль, которая иначе пошла бы страховой компании.

*

Одна из причин наблюдающегося в последнее время роста рынка игровых автоматов состоит во введении «прогрессивных» машин. Прогрессивные игровые автоматы предлагают большие джекпоты, чем обычные, потому что они объединены в сеть, где каждая машина вносит свой вклад в общий джекпот, величина которого постоянно растет. В «Перечнице» меня поразили ряды связанных друг с другом автоматов, предлагающих призы в десятки тысяч долларов.

Прогрессивные машины обладают высокой волатильностью, то есть на коротких периодах времени казино могут проигрывать заметные деньги. «Если мы выпускаем игру с прогрессивным джекпотом, то примерно один из каждых двадцати владельцев казино принимается писать нам письма, утверждая, что наша игра — неправильная. Дело в том, что там выпадают два или три джекпота за первую неделю, и эти автоматы залетают на 10 000 долларов в минус, — сказал Бэрлокер, усматривая горькую иронию в том, что люди, старающиеся заработать на вероятностях, не вполне разбираются в теории вероятностей на базисном уровне. — Тогда мы проводим анализ и видим, что вероятность подобного события составляет, скажем, 1 к 200. Им достался расклад, который должен выпадать лишь в полпроцента случаев, — но должен же он кому-то достаться. И мы говорим им: не беспокойтесь, все нормально».

Самые популярные из производимых в IGT прогрессивных игровых машин — «Мегабакс», сотни связанных друг с другом игровых автоматов по всей Неваде. Когда компания только предложила «Мегабакс» лет десять тому назад, минимальный джекпот составлял 1 миллион долларов. Исходно казино не желали брать на себя обязательства по выплате столь крупной суммы, поэтому IGT застраховала всю сеть целиком за некоторый процент с каждого автомата и взяла на себя обязательство по выплате джекпотов. Несмотря на то что компания уже выплатила сотни миллионов долларов призовых денег, «Мегабаксы» остаются прибыльным делом. Закон больших чисел на редкость надежен: чем больший кусок вы схватите, тем лучше все получится.

Сейчас джекпот на «Мегабаксах» начинается с 10 миллионов долларов. Если никто его не выигрывает к тому времени, как размер джекпота достигает 20 миллионов долларов, в казино выстраиваются очереди у «Мегабаксов», а IGT заваливают заявками на установку дополнительных

автоматов. «Люди полагают, что раз джекпот так долго не выпадал, то он должен вот-вот выпасть и уж тут-то им точно должно повезти», — объясняет Бэрлокер.

Но это рассуждение ошибочно. Каждая отдельная игра — случайное событие. Имеется одна и та же вероятность выиграть, когда джекпот составляет 10 долларов, 20 долларов или даже 100 миллионов долларов, хотя инстинкт, казалось бы, говорит, что если в течение столь долгого периода никто не выигрывал, то вероятность того, что автоматы в казино раскошелятся, повышается. Вера в то, что джекпот «назрел», известна как *«заблуждение игрока»*.

«Заблуждение игрока» — побудительный мотив невероятной силы. С его помощью игровые автоматы манипулируют человеком с особой жестокостью, из-за чего, возможно, люди попадают в сильнейшую зависимость от них — гораздо более сильную, чем от других азартных игр. Если вы играете много игр, одну за другой, то представляется совершенно естественным полагать, что после долгого периода потерь «в следующий раз мне обязательно повезет». Игроки в азартные игры нередко говорят, что машина «горяча» или «холодна» — имея в виду, что она сейчас выплачивает много или, наоборот, мало. Но и это, опять же, — ерунда, потому что вероятности выигрыша всегда одни и те же. Тем не менее понятно, почему механизму из пластика и металла размером примерно с человека и иногда называемому «одноруким бандитом» можно приписать даже наличие некоторых человеческих черт. Игра с игровым автоматом — напряженное, глубоко лично переживание: вы устраиваетесь в непосредственной близости от него, тыкаете в него пальцами и отключаетесь от всего остального мира.

*

Поскольку наши мозги плохо приспособлены к восприятию случайности, теория вероятностей — это область математики, полная парадоксов и неожиданностей. Мы инстинктивно усматриваем закономерность даже в тех ситуациях, про которые мы знаем, что никаких закономерностей там нет. Легко посматривать свысока на игрока, полагающего, что после полосы проигрышей он вскоре начнет выигрывать, но на самом деле психология заблуждения игрока не обошла стороной и тех, кто в азартные игры не играет.

Рассмотрим следующий фокус, который можно показывать в компании. Пригласим двух людей поучаствовать в этом мероприятии, а затем объясним им, что один из них должен подбросить монету 30 раз и записать

последовательность орлов и решек, а второй должен подбросить монету 30 раз, но только в своем воображении, и также записать последовательность орлов и решек, исходя из того, что он или она себе вообразит. Не сообщая вам о своем выборе, два игрока решают между собой, кто из них что будет делать; потом вы получаете от них два списка. Я попросил свою маму и отчима проделать это и получил от них такое:

Список 1

ORRORORRRROOROOROORORRRORORROO

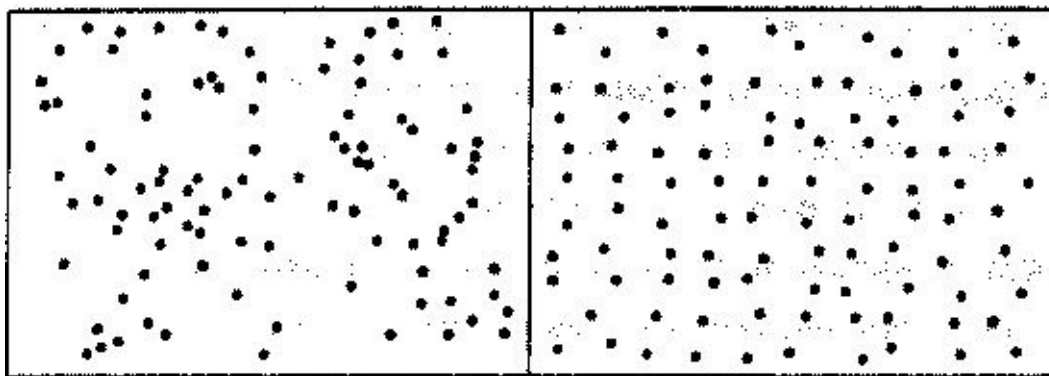
Список 2:

RRORRRRRROORRRORRRORORORORORO

Смысл забавы в том, что очень легко понять, какой список — результат подбрасывания настоящей монеты, а какой — воображаемой. В приведенном выше примере мне было ясно, что второй список — настоящий, и я не ошибся. Во-первых, я выяснил, какова максимальная серия выпадающих подряд одних орлов или одних решеток. Во втором списке максимальная серия — 5 решек. В первом списке максимальная серия — 4 орла. Вероятность серии из 5 одинаковых исходов в 30 подбрасываниях составляет почти две трети, так что намного более вероятно, что за 30 бросаний серия из 5 одинаковых результатов действительно наступит. Исходя уже из этого, второй список оказывается подходящим кандидатом на то, чтобы отражать результаты подбрасывания настоящей монеты. Во-вторых, мне было известно, что большинство людей никогда не напишут серию из 5 одинаковых исходов при 30 подбрасываниях, потому что это кажется им недостаточно случайным. Для проверки того, что я не ошибся, отнеся второй список к реальному эксперименту, я решил проверить, сколь часто в этих списках происходят переходы между орлами и решками. Из-за того, что каждый раз при подбрасывании монеты шансы выпадения орла и решки одинаковы, следует ожидать, что за каждым данным исходом примерно в половине случаев следует противоположный исход, а в половине случаев — тот же самый исход. Во втором списке переходы совершаются 15 раз, а в первом — 19, что свидетельствует о человеческом вмешательстве. Представляя себе подбрасывание монеты, наш мозг склонен чередовать исходы гораздо чаще, чем это происходит на самом деле в истинно случайной последовательности: после пары орлов наш инстинкт хочет внести

компенсацию и воображает исход в виде решки, несмотря на то что шансы выпадения орла остаются равными 1:2. Здесь-то и проявляется заблуждение игрока. Истинная случайность не помнит, что было раньше.

Для человеческого ума оказывается невероятно сложно, если не невозможно, имитировать случайность. А при столкновении со случайностью мы часто интерпретируем ее как неслучайную. Например, на айпоне есть опция воспроизведения песен «вразброс». При этом песни проигрываются в случайном порядке. Но когда компания «Apple» поставила эту программу, пользователи стали жаловаться, что она предпочитает определенных исполнителей, потому что их песни часто следовали одна за другой. Слушатели здесь впадают в заблуждение игрока. Если опция «вразброс» на айпоне по-настоящему случайна, то выбор каждой следующей песни не зависит от предыдущей. Как показывает эксперимент с подбрасыванием монеты, противоречащие интуиции длинные последовательности одного и того же исхода являются скорее нормой. Если композиции выбираются случайно, то вполне возможно, или даже весьма вероятно, что будут появляться кластеры песен одного и того же исполнителя. Генеральный директор компании «Apple» Стив Джобс говорил абсолютно всерьез, когда комментировал высказывания недовольных пользователей: «Мы сейчас делаем опцию „вразброс“ менее случайной, чтобы она воспринималась как более случайная».



Случайные точки

Неслучайные точки

Почему же заблуждение игрока — столь сильный мотив? Все дело в контроле. Нам нравится ощущение контроля за тем, что вокруг нас происходит. Если события совершаются случайно, мы не можем их контролировать. Наоборот, если нам удастся контролировать события, то они не случайны. Именно поэтому мы предпочитаем усматривать закономерности даже там, где никаких закономерностей нет. Тем самым мы пытаемся восстановить чувство контроля. Потребность осуществления

контроля представляет собой глубокий человеческий инстинкт, связанный с выживанием. В 1970-х годах в весьма впечатляющем (если не сказать жестоком) эксперименте исследовалось, насколько ощущение контроля важно для пожилых пациентов, живущих в интернатах для престарелых. Некоторым пациентам предоставили возможность самим решать, как будут обставлены их комнаты, а также выбрать растение, за которым они будут ухаживать. Других же просто поселили в уже готовые комнаты и выделили комнатное растение. По прошествии 18 месяцев результат оказался просто устрашающим. У тех пациентов, кому была предоставлена возможность принятия решений, смертность составляла 15 процентов, а у тех, кто был этого лишен, — 30 процентов. Ощущение, что мы контролируем ситуацию, поддерживает в нас жизнь.

*

Случайность — нечто очень далекое от плавности и спокойствия. Она создает области пустоты и области сгущений.

Случайность позволяет объяснить, почему в некоторых небольших деревнях процент врожденных заболеваний выше нормального, почему на некоторых дорогах происходит больше несчастных случаев и почему в некоторых баскетбольных матчах оказываются забитыми все штрафные. А также почему в 7 из 10 последних финалов чемпионата мира по футболу по крайней мере у двух игроков совпадали дни рождения:

2006	Патрик Виера, Зинедин Зидан (Франция), 23 июня
2002	Никого
1998	Эммануэль Пети (Франция), Рональдо (Бразилия), 22 сентября
1994	Франко Барези (Италия), Клаудио Таффарель (Бразилия), 8 мая
1990	Никого
1986	Серхио Батиста (Аргентина), Андреас Бреме (Западная Германия), 9 ноября
1982	Никого
1978	Рене ван де Керкхоф, Вилли ван де Керкхоф (Голландия), 16 сентября; Джонни Реп, Ян Йонгблед (Голландия), 25 ноября
1974	Джонни Реп, Ян Йонгблед (Голландия), 25 ноября
1970	Пьяцца (Бразилия), Пьерлуиджи Чера (Италия), 25 февраля

С первого взгляда это воспринимается как удивительный набор совпадений, однако с точки зрения математики в этом списке нет ничего выдающегося, потому что стоит только случайно выбрать группу из 23

человек, как окажется, что совпадение дней рождения у двух людей в группе будет более вероятным, чем отсутствие таких совпадений. Это явление известно как *парадокс дней рождения*. В нем нет никаких противоречий, однако же он бросает вызов здравому смыслу: число 23 кажется абсурдно малым для такого совпадения.

Доказательство парадокса дней рождения похоже на те доказательства, что мы использовали в начале главы, изучая комбинации, выпадающие при бросании костей. На самом деле можно переформулировать парадокс дней рождения в виде следующего утверждения: если взять кость с 365 сторонами, то после 23 бросаний более вероятно, что одна и та же грань выпадет два раза, чем что такого не случится.

Шаг 1

Вероятность того, что у двух человек в группе окажется одна и та же дата рождения, равна единице минус вероятность того, что ни у каких двух людей в этой группе дни рождения не совпадут.

Шаг 2

Вероятность того, что в группе из двух человек их дни рождения не совпадут, равна $365/365 \times 364/365$. Так получается, потому что первый человек может родиться в любой день (365 возможностей из полного числа 365), а для второго остается любой из дней за исключением того, когда родился первый (364 возможности из полного числа 365). Для простоты не будем обращать внимания на лишний день в високосные годы.

Шаг 3

Вероятность того, что ни у кого в группе из трех человек даты рождения не попадут на один и тот же день, равна $\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$. В группе из четырех человек она оказывается равной $\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365}$ и т. д. Каждое следующее умножение делает результат все меньше и меньше. Когда в группе оказывается 23 человека, результат наконец пересекает отметку в 0,5 (точное значение равно 0,493).

Шаг 4

Если вероятность того, что ни у каких двух человек даты рождения не попадут на один и тот же день, меньше чем 0,5, то вероятность того, что по крайней мере у двух дни рождения совпадут, оказывается больше 0,5 (из шага 1). Так что в группе из 23 человек скорее окажется, что какие-то два человека родились в один и тот же день, чем наоборот.

Футбольные матчи предоставляют нам идеальную выборку, демонстрирующую, что реальные факты отвечают предсказаниям теории, потому что на поле всегда имеется 23 человека — две команды из игроков и судья. Впрочем, рассмотрение с этой точки зрения финалов чемпионата мира показывает, что парадокс дней рождения работает чуть-чуть *слишком* хорошо. Вероятность, что у двух людей в группе из 23 человек окажется один и тот же день рождения, равна 0,507, что лишь едва больше 50 процентов. Однако же, судя по нашему списку, такое случилось в семи из десяти случаев (даже если исключить близнецов ван де Керкхоф), что дает 70 процентов [\[58\]](#).

Частично это следует отнести на счет закона больших чисел. Если бы я анализировал *все* матчи, сыгранные на чемпионатах мира, то можно было бы пребывать практически в полной уверенности, что результат окажется близким к 50,7 процента. Однако имеется и еще одна переменная. Равномерно ли распределены дни рождения футболистов на протяжении всего года? Возможно, нет. Исследования показывают, что для футболистов выше вероятность рождения в определенные времена года — вероятностное предпочтение оказывается у тех, кто родился сразу после даты, которая разделяет тех, кого записывают в школу на текущий год или на следующий. Дело в том, что родившиеся вскоре после этой даты будут самыми старшими в своем классе, а потому и самыми крупными, и будут показывать лучшие результаты в спорте. А если в распределение дат

рождения вносится какая-то систематическая поправка, то можно ожидать более высокой вероятности совпадения дней рождения. Например, в наше время значительное число детей появляются на свет посредством кесарева сечения или искусственных родов. Это чаще случается по рабочим дням (поскольку сотрудники родильных отделений предпочитают отдыхать по выходным), и в результате оказывается, что дни рождения распределены по календарным датам не самым случайным образом. Если взять выборку из 23 людей, рожденных за один и тот же 12-месячный период, — скажем, детей в классе начальной школы, — то окажется, что вероятность одного и того же дня рождения у двух из них существенно превосходит 50,7 процента.

Если у вас под рукой нет группы из 23 человек, чтобы проверить это, займитесь своими ближайшими родственниками. При наличии четырех человек имеется 70-процентная вероятность, что у двух из них дни рождения придутся на один и тот же месяц. Всего лишь семь человек требуется, чтобы вероятным оказался факт рождения двоих из них в одну и ту же неделю, а в группе из 14 человек имеется пятидесятипроцентная вероятность, что два дня рождения отстоят друг от друга не более чем на один день. По мере роста группы вероятность растет на удивление быстро. В группе из 35 человек шансы на наличие совпадающего дня рождения составляют 85 процентов, а в группе из 60 — уже более 99 процентов.

А вот другой вопрос по поводу дней рождения, ответ на который настолько же противоречит интуиции, как и парадокс дней рождения: сколько людей должно быть в группе, чтобы с более чем 50-процентной вероятностью чей-нибудь день рождения совпадал с вашим? Это совсем не то же самое, что парадокс дней рождения, потому что вы задаете конкретную дату. При рассмотрении парадокса дней рождения нас не волнует, у кого именно и с кем совпадут дни рождения; надо найти всего лишь совпадающий день рождения. А наш новый вопрос можно переформулировать так: при заданной фиксированной дате сколько раз надо бросать нашу кость с 365 сторонами, чтобы выпала указанная дата? Ответ: 253 раза! Другими словами, придется собрать группу из 253 человек всего лишь для того, чтобы с вероятностью больше 50 процентов у кого-то из них день рождения совпал с вашим. Это число кажется абсурдно большим — заметим, что оно обитает заметно дальше середины отрезка между единицей и числом 365. И тем не менее именно случайность обеспечивает появление этих совпадений — такой размер группы необходим потому, что дни рождения людей не распределены регулярным образом. Среди этих 253 человек окажется много тех, у кого дни рождения

совпадают (не совпадая при этом с вашим!), и все это тоже надо учесть.

Урок, извлекаемый из парадокса дней рождения, состоит в том, что совпадения происходят намного чаще, чем нам кажется. В немецкой лотерее «Lotto» у каждой комбинации чисел имеется один из 14 миллионов шанс на выигрыш. И однако же, в 1995 и в 1986 годах выиграла одна и та же комбинация: 15-25-27-30-42-48. Насколько невероятно такое совпадение? Не слишком, если разобраться. Между двумя появлениями одной и той же выигрышной комбинации лотерея разыгрывалась 3016 раз. Вычисление, позволяющее найти, сколько раз в розыгрыше должна появляться одна и та же комбинация, эквивалентно вычислению шанса на то, что найдутся совпадающие дни рождения в группе из 3016 человек, если всего имеется 14 миллионов возможных дней рождения. Искомая вероятность получается равной 0,28. Другими словами, имеется более чем 25-процентная вероятность того, что две выигрышные комбинации за этот период окажутся одинаковыми, так что произошедшее «совпадение» — не слишком нереалистичное событие.

Вот еще один случай. В 1985–1986 годах некая дама из Нью-Джерси дважды за четыре месяца стала победительницей лотереи, проводимой в ее родном штате. Повсюду говорили, что шансы такого исхода — один из 17 триллионов. Однако хотя вероятность купить выигрышный билет в каждой из двух лотерей и оба раза сорвать джекпот действительно равна единице на 17 триллионов, это не означает, что вероятность того, что кто-то где-то победит в двух лотереях, столь же мала. На самом деле такое вполне вероятно. Стивен Сэмюэлс и Джордж Маккейб из Университета Пэрдью вычислили, что за период в семь лет вероятность двойного выигрыша в лотерею в Соединенных Штатах превосходит 50 процентов. Даже за период в четыре месяца имеется более одного шанса из 30 на появление двойного выигрыша в пределах страны. Перси Диаконис и Фредерик Мостеллер назвали это *законом очень больших чисел*: «При достаточно большой выборке может произойти любая сколь угодно несуразная вещь».

*

С математической точки зрения лотереи — без сомнения наихудший вариант из всех ставок во всех азартных играх, дозволяемых законом. Даже самый наискупой игровой автомат предлагает вам процент возврата около 85 процентов. А в лотерее «Мега-Миллионс» процент возврата равен примерно 50. Лотереи — занятие, не представляющее никакого риска для организаторов, поскольку призовые деньги — это просто перераспределенные деньги, уже полученные ими. Или, как в случае

лотереи «Мега-Миллионс», это распределение половины полученного.

В редких случаях, однако, лотереи могут оказаться наилучшим способом получить хороший выигрыш. Такое происходит, когда из-за «переходящего» джекпота заявленный выигрыш становится больше, чем цена покупки всех возможных комбинаций чисел. В таких случаях вы можете быть уверены, что получите выигрышную комбинацию. Риск состоит только в том, что могут найтись люди, у которых уже есть выигрышная комбинация, — и тогда вам придется разделить главный выигрыш с ними. Впрочем, подход «купи-все-комбинации» подразумевает способность сделать именно *это*, что может оказаться делом нелегким как с теоретической, так и с логистической точки зрения.

Игроки в «Мега-Миллионс» должны выбрать пять чисел от 1 до 56 и одно от 1 до 46. Имеется около 175 миллионов возможных комбинаций. Как перечислить все эти комбинации таким образом, чтобы каждая из них встречалась только один раз, без дублирования? В начале 1960-х годов румынский математик Стефан Мандел задался этим вопросом относительно румынской лотереи, которая по масштабу гораздо меньше американских. Получить ответ оказалось совсем непросто. Мандел, однако, в конце концов решил задачу, правда потратив на нее несколько лет, и стал победителем в румынской лотерее 1964 года. (Он не скупил все комбинации, потому что это было бы слишком дорого, а применил вспомогательный метод, называемый «уплотнением», который гарантирует, что по крайней мере 5 из 6 чисел будут правильными. Обычно за угадывание 5 чисел полагается второй приз, но ему повезло, и он сразу же выиграл главный.) Записанный на бумаге алгоритм Мандела, позволяющий определить те комбинации, которые надо покупать, занял 8000 страниц. Вскоре после получения выигрыша он эмигрировал в Израиль, а затем в Австралию.

Уже в Мельбурне Мандел основал международный синдикат по лотерейным ставкам, собрав с его участников достаточно денег для того, чтобы при желании иметь возможность скупить все комбинации в лотерее. Он следил за проводимыми по всему миру лотереями с переходящими джекпотами, как минимум в три раза превышающими суммарную цену покупки всех комбинаций. В 1992 году в поле его зрения попала лотерея штата Виргиния, в которой было семь миллионов комбинаций, а каждый билет стоил 1 доллар, при том что джекпот достиг почти 28 миллионов долларов. Тогда Мандел принялся за дело. Он печатал купоны в Австралии, заполнял их на компьютере так, чтобы они охватили все семь миллионов комбинаций, а затем отправлял самолетом в Соединенные

Штаты. И — получил главный приз, а заодно и 135 000 вторых призов!

Лотерея в Виргинии была самым большим из сорванных Манделом джекпотов, доведя счет его побед, одержанных после отъезда из Румынии, до 13. Служба внутренних доходов США (The U.S. Internal Revenue Service), ФБР, и ЦРУ проявили интерес к синдикату Мандела и попытались расследовать его методы участия в лотерее, но ничего противоправного эти уважаемые организации не нашли. Ведь нет ничего незаконного в том, чтобы скупить все комбинации, хотя это и слегка отдает аферой. Мандел в настоящее время отошел от дел, связанных с лотереями, и наслаждается жизнью на одном из тропических островов южной части Тихого океана^[59].

*

Особенно выразительное и наглядное представление случайности изобрел в 1888 году Джон Венн (1834–1923). Венн, быть может, — наименее яркий из всех математиков, имя которых постоянно на слуху. Он был кембриджским профессором и англиканским клириком и провел большую часть жизни, занимаясь составлением сборника биографий 136 000 выпускников Кембриджа, получивших дипломы до 1900 года. Никаких революционных прорывов в своей науке он не совершил, но тем не менее разработал замечательный способ для объяснения логических рассуждений с помощью пересекающихся окружностей. Хотя в предшествующие столетия и Лейбниц, и Эйлер рассматривали нечто очень похожее, диаграммы были названы в честь Венна^[60]. Гораздо меньше известно, что Венн придумал блестящий способ для иллюстрации случайности.

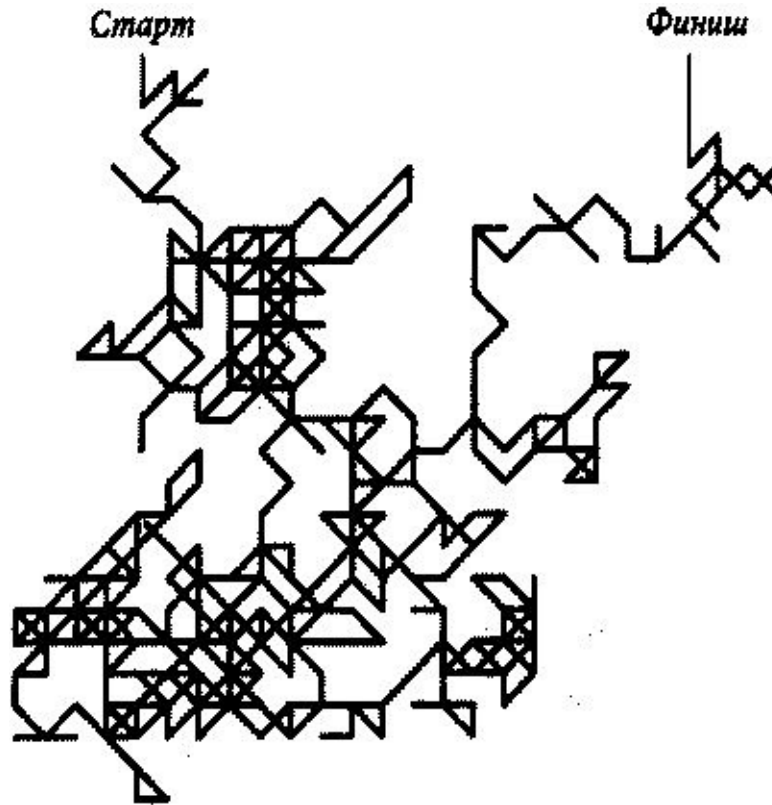
Представим себе точку, поставленную в центре белого листа бумаги. Из этой точки выходят восемь возможных направлений: на север, северо-восток, восток, юго-восток, юг, юго-запад, запад и северо-запад. Припишем этим направлениям числа от 0 до 7. Случайным образом выберем число от 0 до 7 и проведем отрезок прямой в направлении, отвечающем полученному числу. Будем делать так снова и снова, в результате чего на бумаге появится некая кривая. Венн проделал такое для самой непредсказуемой из известных ему числовых последовательностей — десятичного разложения числа π (откуда исключил восьмерки и девятки)^[61]. Результат, писал он, представлял собой «очень правильное наглядное представление случайности».

Построенный Венном чертеж стал, по-видимому, самой первой диаграммой «случайного блуждания». То же самое нередко называют

«блужданием пьяницы», апеллируя к более выразительной картинке, на которой вместо исходной точки — фонарный столб, а вместо числа π — человек в состоянии сильного опьянения, совершающий неуверенные движения. Один из самых очевидных вопросов, которые здесь напрашиваются, — насколько далеко пьяница сумеет отойти от столба, пока еще стоит на ногах? В среднем, чем дольше он будет блуждать, тем дальше от столба окажется. Выяснилось, что расстояние между пьяницей и фонарем растет как квадратный корень из времени прогулки. Итак, если за один час наш пьянчужка в среднем проходит один квартал, то, если дать ему четыре часа, он пройдет два квартала, а через девять часов — три.

Во время своего случайного блуждания наш подвыпивший герой будет иногда ходить кругами, повторяя собственные шаги. Какова вероятность, что он в конце концов снова набредет на фонарный столб? Как ни странно, ответ таков: 100 процентов! Он может блуждать годами в самых отдаленных уголках, но будьте уверены — если дать ему достаточно времени, он в конце концов обязательно вернется в исходную точку.

Представим себе, что пьяница блуждает в трех измерениях. Назовем это «полетом одурелого шмеля». Шмель стартует из некоторой точки в трехмерном пространстве и летит в случайном направлении на фиксированное расстояние по прямой. Затем он останавливается, переводит дух и снова, жужжа, срывается с места в другом случайном направлении, пролетая то же самое расстояние. И так далее. Какова вероятность, что в конце концов он вернется в точку своего старта? Ответ: всего 0,34, то есть около трети. Не правда ли, довольно странно, что в двух измерениях возвращение пьяницы к фонарному столбу представляло собой абсолютную определенность, но еще более странно то, что шмель, жужжащий в воздухе неограниченно долго, с высокой вероятностью никогда не вернется домой.

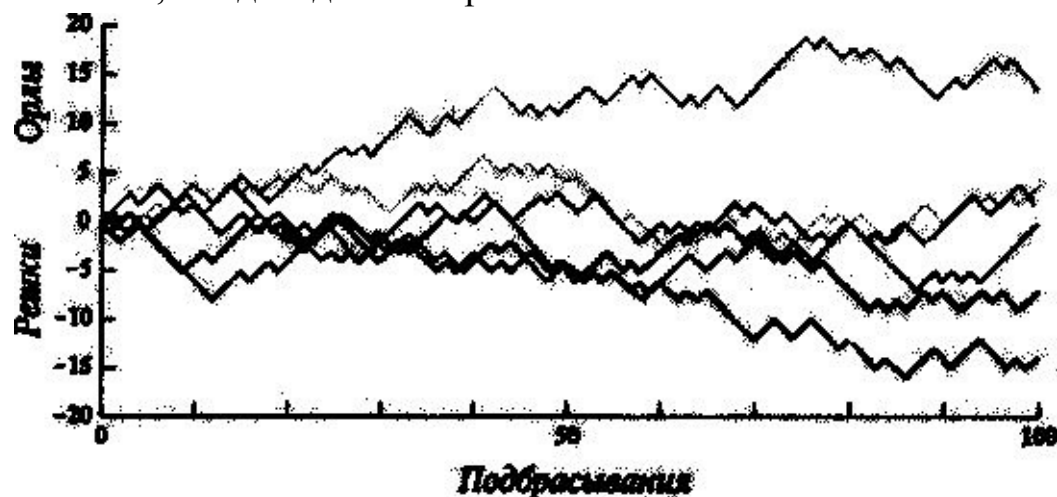


Первый в мире пример случайного блуждания. Из книги Джона Венна «Логика шанса» (1866). Траектория задается цифрами из разложения числа π , начиная с 1415

Главный герой романа-бестселлера Люка Рейнхарта «Дайсмен» («Человек — Игральная кость») принимает жизненно важные решения, бросая игральную кость. Представим себе «Человека-монету», который принимает решения, подбрасывая монету. Если, скажем, у него выпадает орел, он передвигается на один шаг вверх по странице, а если решка — то вниз. Путь нашего Человека-монеты подобен блужданиям уже знакомого нам пьяницы, но в одном измерении, ведь он может смещаться только вдоль одной и той же прямой. Изобразим на графике случайные блуждания, описываемые вторым из двух отчетов о 30 бросаниях монеты, приведенных ранее. Получается вот что:



Блуждание изображается изломанной линией, состоящей из пиков и провалов. Если продолжить упражнение и бросать монету все большее число раз, то проявится тенденция. Линия будет «раскачиваться» вверх и вниз, причем все сильнее и сильнее. Человек-монета будет двигаться, удаляясь все дальше и дальше от начальной точки в обоих направлениях. Ниже приведены графики, которые я составил для путешествий шести Человек-монет, каждый для 100 бросаний монеты.



Если мы вообразим себе, что в одном направлении на определенном расстоянии от начальной точки стоит барьер, то окажется, что в конце концов Человек-монета уткнется в него со 100-процентной вероятностью. Неизбежность этого столкновения весьма поучительна при анализе закономерностей, связанных с играми.

Вместо того чтобы отправлять Человека-монету в путешествие в пространстве, можно использовать траекторию его движения как иллюстрацию состояния его банковского счета. А подбрасывание монеты пусть будет азартной игрой, в которую он играет. При выпадении орла он

выигрывает 100 долларов, а решка означает проигрыш 100 долларов. Сумма на его счете будет колебаться — то есть вести себя подобно волнам все большей величины. Установим барьер: Человек-монета не может продолжать игру, если на его счете 0 долларов. Оказывается, он гарантированно наткнется на этот барьер! Другими словами, в любом случае его ждет банкротство. Этот феномен известен под экспрессивным названием *разорение игрока*.

Конечно, ни одно казино не расщедрится до такой степени, чтобы ваши шансы были такими же, как при подбрасывании монеты (где процент возврата равен 100). Если шансы на проигрыш выше, чем шансы на выигрыш, график случайных блужданий будет смещаться вниз, вместо того чтобы следовать за ходом горизонтальной оси. Другими словами, банкротство наступит еще быстрее.

Случайные блуждания объясняют, почему преимущество в игре имеют очень богатые. Дело не только в том, что они дольше не становятся банкротами, но и в том, что вероятность того, что их случайные блуждания будут время от времени устремляться вверх, у них выше. Впрочем, секрет выигрыша — что для богатых, что для бедных — это знать, когда остановиться.

Математика случайных блужданий содержит некоторые головоломные парадоксы. Рассматривая приведенные выше графики, где Человек-монета движется вверх или вниз в зависимости от результатов подбрасывания монеты, мы могли бы предположить, что кривая случайных блужданий нашего героя будет с достаточным постоянством пересекать горизонтальную ось. Монета дает шансы 50:50 выпадения орла или решки, так что логично ожидать, что Человек-монета будет проводить одинаковое время с каждой стороны от начальной точки. На самом же деле верно противоположное утверждение. Если монета подбрасывается бесконечно много раз, то наиболее вероятное число переходов с одной стороны на другую равно нулю. Следующее наиболее вероятное число — единица, затем два, три и т. д.

Даже для конечного числа бросаний монеты получаются достаточно странные результаты. Уильям Феллер вычислил, что если монету подбрасывать раз в секунду на протяжении целого года, то имеется один шанс против 20, что Человек-монета будет находиться на одной и той же стороне графика в течение более чем 364 дней и 10 часов. «Мало кто верит, что честная монета породит нелепую последовательность, в которой для миллионов попыток подряд не будет происходить смены стороны; а тем не менее честная монета будет совершать такое с известной

регулярностью, — писал он в книге „Введение в теорию вероятностей и ее применения“. — Если бы современному педагогу или психологу пришлось описывать сюжеты, возникающие на достаточно долгом отрезке времени в какой-либо отдельно взятой игре с подбрасыванием монеты, то он наверняка бы зачислил большинство монет в разряд неправильных».

*

Чудесная способность случайности опровергать прогнозы, диктуемые нашей интуицей, приводит в восторг чистых математиков, но она же прельщает нечистых на руку. Недостаточное понимание основ теории вероятностей означает, что вас легко надуть. Если, например, вы когда-либо подумывали о том, чтобы обратиться в компанию, служащие которой утверждают, что способны предсказать пол вашего ребенка, значит, вы чуть не стали жертвой старого как мир трюка. Представим себе, что я открыл фирму под названием «Узнай-Пол-Ребенка», и заявляю, что обладаю некой научной формулой для предсказания, родится у вас мальчик или девочка. «Узнай-Пол-Ребенка» берет с матерей установленную плату за предсказание. Из-за колоссальной уверенности в точности своей формулы, а также вследствие филантропической щедрости ее генерального директора (то есть меня) фирма также предлагает полное возмещение расходов, если предсказание окажется неверным. Приобретение у фирмы предсказания выглядит как выгодная сделка: или компания «Узнай-Пол-Ребенка» окажется права — и тогда все останутся довольны, или она ошибется — и вы получите назад свои деньги. Увы, на самом деле тайная научная метода, которой пользуются в «Узнай-Пол-Ребенка», состоит в подбрасывании монеты. Если выпадает орел, я говорю, что родится мальчик, а если решка — девочка. Теория вероятностей говорит, что я буду прав примерно в половине случаев, потому что число рождающихся мальчиков примерно равно числу рождающихся девочек. Конечно, в половине случаев я верну деньги, зато кое-что мне все-таки останется!

Эта афера работает, потому что женщины не задумываются о проблеме в целом. Каждая из них воспринимает себя как выборку в количестве одного лица, а не как часть большой группы. Удивительное дело, но фирмы, предсказывающие пол младенца, продолжают существовать, и довольно неплохо, в чем несложно убедиться с помощью Интернета. Дети на нашей планете рождаются ежеминутно, и всегда есть кто-то, кто хочет немного заработать на наивности будущих мамаш.

*

Устраивать аферы — аморально, а нередко и незаконно. Попытка же одолеть казино, наоборот, часто воспринимается как дело правое. Для математиков возможность бросить вызов случайности — все равно что красная тряпка для быка, и имеется почетный список тех, кто в этом преуспел.

Первый метод борьбы со случайностью заключается в осознании того, что наш мир не совершенен. Джозеф Джаггер (1830–1892) был самым обычным механиком на ткацкой фабрике в Ланкашире, однако он достаточно преуспел в инженерных науках, дабы понять, что колесо рулетки не может крутиться абсолютно идеально. Однажды его осенило, что если колесо сбалансировано не идеально, то оно обязательно будет предпочитать некоторые числа. В 1873 году, в возрасте 43 лет, он отправился в Монте-Карло, чтобы проверить свою теорию. Джаггер нанял шестерых помощников, закрепил за каждым из них один стол в казино (всего столов было шесть) и поручил записывать все числа, которые выпадают в течение недели. Проанализировав полученные данные, он увидел, что колесо одной рулетки и в самом деле демонстрировало некоторую закономерность — девять чисел выигрывали чаще других. Это отклонение было столь малым, что становилось заметным только при записи результатов сотен сыгранных конов.

Джаггер тут же облюбовал эту рулетку и принялся делать ставки. За день он выиграл сумму, эквивалентную 70 000 нынешних долларов.

Хозяева казино, однако, проследили, что Джаггер играет только на одном столе. Чтобы запутать его, они поменяли рулеточные колеса местами. Начав проигрывать, Джаггер догадался, в чем дело, и перебрался к столу с заветным колесом — он узнал его по характерной царапине. И снова начал выигрывать! Джаггер сдался, только когда в казино снова предприняли защитные действия, — поменяли местами ободы рулеток, из-за чего балансировка изменилась, и номера, которые раньше выигрывали, перестали быть «счастливыми». Но к этому времени Джаггер уже был обладателем 325 000 долларов, что по тем временам было миллионным состоянием. Вернувшись домой, он уволился и вложил деньги в недвижимость. Метод Джаггера повторили в Неваде в 1949–1950 годах два молодых ученых — Эл Хиббс и Рой Уолфорд. Взяв в долг 200 долларов, они превратили эту сумму в 42 000 долларов, что позволило им купить роскошную яхту и отправиться на 18 месяцев в плавание по Карибскому морю, устроив неплохой перерыв в научных занятиях. В наши дни

владелец казино, учтя прошлый опыт, меняют колеса с гораздо большей регулярностью, чем это делалось раньше.

Второй способ заставить удачу работать на вас — это задаться вопросом, что вообще такое случайность. События, случайные при одних условиях, вполне могут оказаться неслучайными в свете других. Это означает превращение математической задачи в физическую. Подбрасывание монеты случайно потому, что мы не знаем, как именно она приземлится, но подброшенные монеты подчиняются ньютоновским законам движения. Зная в точности скорость и угол подбрасывания, плотность воздуха и все остальные существенные физические параметры процесса, мы могли бы точно вычислить, какой стороной монетка упадет. В середине 1950-х годов молодой математик по имени Эд Торп задумался, а какого типа информация требуется, чтобы предсказать, где именно остановится шарик на рулетке.

Торпу помогал его коллега по Массачусетскому технологическому институту Клод Шеннон. И тут лучшего сообщника, пожалуй, не найти! Шеннон был талантливым изобретателем, и в его гараже хранились самые разнообразные электрические и механические приспособления. Кроме того, он — один из самых знаменитых математиков, создатель теории информации, важнейшего научного направления, приведшего к появлению компьютера. И вот Торп и Шеннон, приобретя рулеточное колесо, принялись экспериментировать в подвале шенноновского дома. После нескольких опытов они установили, что, зная скорость шарика, когда он катится по неподвижному внешнему ободу, а также скорость внутреннего колеса (которое крутится в сторону, противоположную движению шарика), можно довольно точно предсказать, в каком секторе колеса шарик остановится. Поскольку казино позволяют делать ставки после того, как вброшен шарик, все, что было нужно Торпу и Шеннону, — это придумать, как измерить эти скорости и обработать их значения в течение нескольких секунд, пока крупье не объявит, что ставок больше нет.

И снова азартные игры послужили прогрессу науки. Чтобы предсказывать исход игры, наши математики построили первый в мире компьютер, который можно надеть на себя. Машина помещалась в кармане, откуда шли провода в ботинок, где находилась кнопка, а еще один провод шел к миниатюрному наушнику. От обладателя всего этого требовалось нажать на кнопку четыре раза: когда выбранная точка на колесе проходила через определенную отметку, когда колесо делало один полный оборот, когда шарик проходил через ту же точку и когда шарик совершал полный оборот. Этой информации было достаточно, чтобы

оценить скорости колеса и шарика.

Торп и Шеннон разбили колесо на восемь секторов по пять чисел в каждом (некоторые секторы, впрочем, перекрывались, поскольку всего имеется 38 ячеек). Карманного размера компьютер исполнял в наушнике гамму из восьми нот — октаву — и та нота, на которой он останавливался, определяла сектор, где должен был остановиться шарик. Компьютер не мог сказать, в какую точно ячейку попадет шарик, но этого и не требовалось. Все, чего хотели Торп и Шеннон, — это чтобы их предсказания были лучше, чем случайное угадывание. Прослушав ноты, обладатель компьютера ставил фишки на все пять чисел в соответствующем секторе. Метод оказался на удивление точным — по оценкам Торпа и Шарпа, можно было ожидать выигрыша в 4,4 доллара на каждую ставку в 10 долларов.

И вот Торп и Шеннон отправились в Лас-Вегас, на полевые испытания. Компьютер работал, пусть даже и не слишком надежно. Заговорщики старались привлекать как можно меньше внимания, но наушник все время выпадал, а провода постоянно обрывались. Тем не менее система работала, и изобретатели смогли превратить небольшую стопку фишек достоинством в десять центов в несколько кучек. Торп вполне удовлетворился практическим подтверждением теоретической возможности победить рулетку. Однако его атака на другую азартную игру принесла ему гораздо более громкий успех.

Блек-джек, или двадцать одно, — карточная игра, цель которой состоит в том, чтобы набрать «руку», то есть набор карт, так, чтобы суммарное значение очков было как можно ближе к верхнему пределу, равному 21. Дилер — сдающий — сдает карты всем участникам игры и самому себе тоже. Чтобы выиграть, вы должны набрать сумму старше, чем у дилера, но не выше 21.

Подобно всем классическим играм, присутствующим в казино, блек-джек предоставляет небольшое преимущество заведению. Если вы играете в блек-джек достаточно долго, то в конце концов проиграете все свои деньги. В 1956 году в малоизвестном журнале по статистике появилась забавная статья. Ее авторы утверждали, что изобрели стратегию, при которой преимущество заведения составляет лишь 0,62 процента. Проштудировав статью, Торп освоил эту стратегию и решил протестировать ее в реальном казино. Он взял отпуск и отправился в Вегас. Испытания показали, что он теряет деньги намного медленнее других игроков. Тогда Торп решил разобраться в блек-джеке поглубже. Это решение изменило его жизнь.

*

Эду Торпу сейчас 75 лет, но я подозреваю, что он не сильно изменился за полвека. Худощавый, с длинной шеей и выразительным лицом, аккуратная, как у школьника, прическа, недорогие, без претензий, очки, но уверенная прямая осанка. Тогда, вернувшись из Вегаса, Торп еще раз перечитал ту журнальную статью.

— Я сразу — буквально через пару минут — понял, как можно почти наверняка выиграть у казино, если следить за картами, которые уже вышли, — вспоминает он. — Блек-джек отличается, скажем, от рулетки тем, что вероятности исхода изменяются, как только сдана очередная карта. При игре в рулетку вероятность, что шарик попадет на 7, — $1:38$, и она не меняется, пока колесо крутится. При игре в блек-джек вероятность, что первая сданная карта будет тузом, равна $1/13$. Вероятность, что вторая карта будет тузом, однако, не равна $1/13$ — она уже равна $1/51$, потому что в колоде осталась 51 карта, из которых всего лишь три туза.

Торп полагал, что должна быть система, позволяющая повысить шансы игрока. Оставалось только ее найти.

В колоде из 52 карт имеется $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ способов упорядочения карт. Это число равно примерно 8×10^{67} , что есть 8 с 67 нулями — число столь огромное, что крайне маловероятно, что за всю историю мироздания карты в двух случайно перетасованных колодах окажутся лежащими в одном и том же порядке — даже если все население Земли непрерывно играло бы в карты от момента Большого взрыва и до наших дней. Торп рассудил, что возможных перестановок карт слишком много для того, чтобы человеческий мозг был в состоянии пользоваться какой-либо системой запоминания перестановок. Вместо этого он решил выяснить, каким образом шансы меняются в зависимости от того, какие карты уже сданы. Используя один из первых компьютеров, он узнал, что, следя за пятерками в каждой масти — пятерками червей, пик, бубен и треф, — игрок может сделать вывод о том, благоприятен ли для него расклад колоды. В разработанной Торпом системе блек-джек становился игрой, в которой возможен выигрыш с ожидаемым возвратом до 5 процентов в зависимости от расклада в колоде. Торп изобрел метод «счета карт».

Изложение своей теории он направил для публикации в журнал Американского математического общества.

— Когда в журнале появилась аннотация статьи, все решили, что это

просто розыгрыш, — вспоминает он. — Тогда в научном мире считалось, что ни одну из основных азартных игр нельзя одолеть с помощью математики. Это была непререкаемая истина, причем весомо подтвержденная исследованиями, проводившимися на протяжении пары сотен лет.

Доказательства, утверждающие возможность выигрыша в казино вопреки теории вероятностей, смахивают на доказательства квадратуры круга, которые, в свою очередь, гарантируют, что у человека не все в порядке с головой. По счастью, один из членов комиссии Американского математического общества, рассматривавшей статьи на предмет возможной публикации, был одноклассником Торпа, и аннотация его статьи была напечатана.

В январе 1961 года Торп представил свою работу на зимнем собрании Американского математического общества в Вашингтоне. Новость быстро распространилась по всей стране. Ученого завалили письмами и оборвали ему телефон. Все наперебой предлагали ему профинансировать кампанию по разорению казино, а затем поделить прибыль. Один нью-йоркский синдикат предложил Торпу 100 000 долларов. Он позвонил по телефону, указанному в письме, и спустя некоторое время перед его домом остановился «кадиллак». Оттуда вылез пожилой коротышка в сопровождении двух очаровательных блондинок в норковых шубах.

Этот человек оказался Манни Киммелом — известным нью-йоркским гангстером, а по совместительству любителем математики и заядлым игроком в азартные игры по-крупному. Киммел нахватался азов теории вероятностей и знал о парадоксе дней рождения — одним из его любимых развлечений было держать пари на совпадающие дни рождения в группе людей. Киммел представился и сообщил, что является владельцем 64 нью-йоркских парковок (что было истинной правдой). Он также представил девушек как своих племянниц (что, скорее всего, правдой не было). Я спросил Торпа, заподозрил ли он, что Киммел связан с мафией.

— В то время я очень мало что знал о мире игорного бизнеса, если не считать моих теоретических изысканий. И конечно же я никогда не занимался устройством преступного мира. Киммел держался как богатый бизнесмен, и тому имелось немало видимых подтверждений.

Киммел пригласил Торпа заехать к нему на следующей неделе в его роскошную квартиру на Манхэттене и сыграть в блек-джек. После нескольких раундов Киммел убедился, что метод счета карт работает. Вдвоем они полетели в Рено, дабы испытать систему в деле. Начав с 10 000 долларов, к концу путешествия они имели уже 21 000 долларов.

*

Когда вы играете в казино, два фактора существенно влияют на то, сколько денег вы выиграете или проиграете. *Стратегия игры* — это то, как выиграть игру. *Стратегия ставок* — это как управлять деньгами: сколько и когда ставить. Стоит ли, например, ставить все деньги на одну-единственную ставку? Или разумно разбить их на возможно меньшие порции? Разные стратегии могут приводить к поразительно разным результатам.

Самая известная стратегия ставок называется «мартингал», или удвоение; она была популярна среди французских игроков в XVIII столетии. Принцип состоит в том, чтобы удваивать ставку, если вы проигрываете. Пусть, скажем, вы поставили на подбрасывание монеты. Орел означает, что вы получаете 1 доллар, а решка — что проигрываете 1 доллар. Пусть при первом подбрасывании выпадает решка. Вы проиграли 1 доллар. В следующий раз ставьте 2 доллара. Победа во втором раунде принесет вам 2 доллара, что компенсирует вашу потерю в 1 доллар в первом раунде, и вы останетесь с доходом в 1 доллар. Предположим теперь, что вы проиграли первые пять подбрасываний: ваши потери тогда будут равны $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ доллару, так что шестая ставка должна составлять 32 доллара. Если вы выигрываете, вы компенсируете все свои потери и даже останетесь в выигрыше. Правда, несмотря на то, что вам пришлось рисковать столь большими деньгами, вы в плюсе всего на 1 доллар — размер вашей исходной ставки.

Мартингал обладает несомненной привлекательностью. В игре, где шансы выиграть или проиграть составляют почти 50:50 (как, например, при ставках на красное в рулетку, где вероятность успеха — 47 процентов), вероятность, что вы выиграете достаточную часть раундов, не так уж мала, так что у вас неплохой шанс остаться в плюсе. Но система мартингала не защищена от сбоев. Вначале вы выигрываете только малыми порциями. А мы знаем, что в последовательности из 30 бросаний монеты полоса в пять орлов или пять решеток скорее случится, чем нет. Если вы начали со ставки в 40 долларов и проиграли пять игр подряд, то после этого вам придется поставить уже 1280 долларов. В казино «Перечница» вам просто не дадут такого сделать: максимальная ставка там равна 1000 долларов. Одна из причин, почему казино вводят максимальный размер ставки, состоит в желании противодействовать системам, подобным мартингалу. Экспоненциальный рост ставок при мартингале в случае проигрыша нескольких игр подряд часто ускоряет банкротство, а не служит гарантией

против него. Самый знаменитый пропагандист этой системы жил в XVIII столетии — то был венецианский плеейбой Джакомо Казанова, и он убедился в этом на горьком опыте. «Я продолжал играть на мартингал, — сказал он однажды, — но мне сопутствовало такое невезение, что я вскоре остался без единого цехина».

Если тем не менее, встав у рулеточного стола в «Перечнице», вы будете играть на мартингал, то вам должно страшно не повезти, если, начав со ставки в 10 долларов на красное, в конце концов вы не выиграете 10 долларов. Система откажет, только если вы проиграете шесть раз подряд, а шансы на это — один из 47. Однако как только вы окажетесь в плюсе, весьма благоразумно будет получить свой выигрыш и покинуть заведение^[62]. Если вы будете продолжать игру, шансы на несчастливую полосу в конце концов пробьют себе дорогу.

Рассмотрим иную систему ставок. Представьте себе, что вы играете в рулетку в казино, вам дали 20 000 долларов и сказали, что надо ставить на красное. Какова наилучшая стратегия удвоить имеющиеся деньги? Надо ли проявить отвагу и поставить все за один раз, или же следует быть осторожным и делать наименьшие возможные ставки, то есть по 1 доллару? Хотя с первого взгляда это кажется безрассудным, ваши шансы на успех заметно выше, если вы поставите всю сумму в один присест. Выражаясь математически, смелая игра здесь оптимальна. И после небольшого размышления становится понятно, почему это так: закон больших чисел говорит, что в долгой перспективе вы проиграете. Ваш самый лучший шанс — сократить игру насколько возможно.

В 2004 году этому принципу последовал 32-летний англичанин Эшли Ревел. Он продал все, что у него было, включая одежду, и в одном из казино Лас-Вегаса поставил вырученную сумму — 135 300 долларов — на красное. В случае выигрыша он по крайней мере стал бы телезвездой, поскольку весь процесс снимался для телевизионного реалити-шоу. Но шарик застыл на красной семерке — и Ревел отправился домой с 270 600 долларов в кармане!

*

Что же касается игры в блек-джек, то тут перед Эдом Торпом стояла другая проблема. Его система, основанная на счете карт, позволяла в определенные моменты игры с уверенностью сказать, имеет ли игрок преимущество перед дилером. Торп задался вопросом: какова наилучшая стратегия ставок, чтобы шансы склонились в вашу пользу?

Представим себе, что имеется ставка, когда шанс выиграть составляет

55 процентов, а шанс проиграть — 45 процентов. Для простоты будем считать, что процент возврата равен 100 и мы играем 500 раз. Наше преимущество — *шансы на выигрыш* — 10 процентов. При продолжительной игре наш выигрыш будет в среднем составлять 10 долларов на каждые поставленные 100 долларов. Чтобы максимизировать полный доход, нам, очевидно, необходимо максимизировать полную сумму всех ставок. Как именно это сделать, ясно не сразу, поскольку максимизация капитала требует минимизации риска потерять его целиком. Рассмотрим, как работают следующие четыре стратегии ставок.

Стратегия 1. Ва-банк.

В точности как Эшли Ревел, поставьте все, чем вы располагаете, на первую же ставку. Если выиграете, удвойте свои деньги. Если проиграете, будете банкротом. В случае выигрыша в следующей игре снова ставьте все целиком. Единственный шанс избежать потери всего — это выиграть все 500 игр. Вероятность, что такое случится, — с учетом того, что вероятность выигрыша в каждой игре по отдельности равна 0,55, — составляет около одного шанса из 10^{130} (что есть 1 со 130 нулями). Другими словами, можно быть вполне уверенным, что к 500-й игре вы будете банкротом. Очевидно, что это не очень удачная долгосрочная стратегия.

Стратегия 2: Фиксированная ставка.

Ставьте каждый раз фиксированную сумму. Если вы выиграете, то ваше благосостояние возрастет на это фиксированное число. Если проиграете, то оно на столько же уменьшится. Поскольку вы выигрываете больше раз, чем проигрываете, ваш капитал будет в целом возрастать — но будет возрастать только ступеньками заданной величины. Как показывает график, объем ваших денег будет расти не очень быстро.

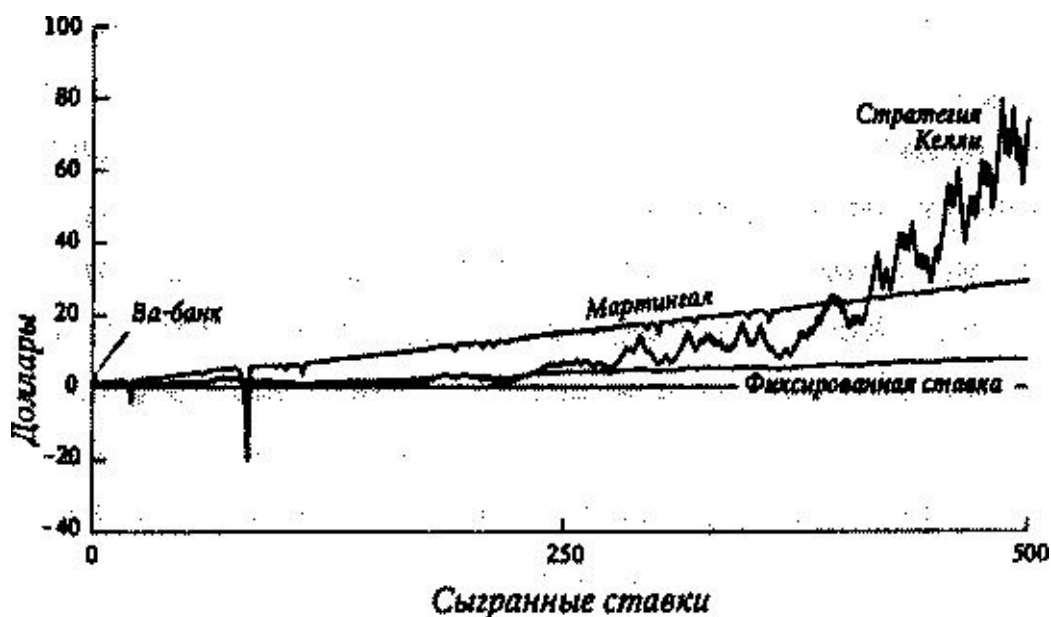
Стратегия 3: Мартингал.

Эта стратегия обеспечивает более быстрый рост, чем стратегия фиксированной ставки, потому что потери компенсируются удвоением вслед за потерей, однако с этим же сопряжен и заметно больший риск. Всего лишь несколько проигрышей могут сделать вас банкротом. Опять

же, это не слишком удачная долгосрочная стратегия.

Стратегия 4: Пропорциональные ставки.

В этом случае размер ставки равен некоторой части от имеющихся у вас денежных средств (банка). Эта часть определяется вашим шансом на выигрыш. Имеется несколько вариантов пропорциональных ставок. Система, по которой ваши капиталы растут быстрее всего, называется стратегией Келли. Она предписывает ставить долю вашего банка, определяемую отношением (преимущество игрока) / (шансы в игре). В нашем случае преимущество равно 10 процентам, а шансы в игре — равные (или 1:1), так что искомое отношение равно 10 процентам. Итак, ставьте каждый раз 10 процентов от имеющихся у вас денег. Если вы выиграете, ваш капитал увеличится на 10 процентов, так что следующая ставка тоже будет на 10 процентов больше. Если вы проиграете, то капитал уменьшится на 10 процентов, и следующая ставка будет на 10 процентов меньше. Это очень безопасная стратегия: если вы попали в полосу проигрышей, абсолютное значение ставки уменьшается, а потому ваши потери ограничены. Эта стратегия сулит большой выигрыш, потому что — как в случае со сложными процентами — при попадании в полосу выигрышей ваше богатство растет экспоненциально. Вы оказываетесь в лучшем из миров, где царят низкий риск и высокая отдача. Достаточно взглянуть на график, чтобы увидеть, как работает эта стратегия: сначала медленно, но в конце концов, после примерно 400 сделанных ставок, вы оставляете всех партнеров по игре далеко позади.



Компьютерное моделирование 500 сыгранных ставок, в каждой из которых вероятность выигрыша равна 55 процентам. Исходно имеется 1 доллар. В стратегиях «фиксированная ставка», «мартингал» и «Келли» первая ставка равна 10 центам. В стратегии «ва-банк» на кон каждый раз ставится все, что имеется

Ту статью 1956 года, где была приведена ставшая позже знаменитой формула игры, что так впечатлила Эда Торпа, написал техасский математик Джон Келли-младший. Когда Эд Торп применил ее на практике во время игры в блек-джек, результаты оказались просто поразительными. «Как выразился один генерал, вы приходите к цели „самым первейшим в виде самом лучшем“». Даже с небольшими шансами на выигрыш, но при осмотрительном управлении деньгами можно добиться колоссальной прибыльности. Я спросил Торпа, с помощью какой стратегии можно больше выиграть в блек-джек — метода счета карт или использования формулы Келли.

— Мне кажется, что после десятилетнего исследования этого вопроса, — ответил он, — достигнутый консенсус состоит в том, что доля стратегии Келли — приносит две трети или три четверти того, что вы хотите получить, а стратегия счета карт — что-то от четверти до трети. Так что стратегия Келли эффективней.

С помощью метода Келли Торп выиграл более 80 миллиардов долларов на финансовых рынках.

*

В 1962 году Эд Торп выпустил книгу «Обыграй дилера», в которой описал свою систему счета карт. Во втором издании, вышедшем в 1966 году, он внес в нее уточнения, предложив считать также карты достоинством в 10 очков (валет, дама, король и десятка). Хотя они влияют на шансы на проигрыш в меньшей степени, чем пятерки, таких карт в колоде больше, поэтому легче оценить шансы на выигрыш. В мире было продано более миллиона экземпляров книги «Обыграй дилера». Она воодушевляла — и продолжает воодушевлять — легионы любителей азартных игр.

Чтобы помешать игрокам использовать метод счета карт, казино пробовали применять различные способы. Самый распространенный — игра многими колодами. В этом случае в игре участвует большее число карт, и считать их становится труднее, в результате игроки чаще проигрывают. «Останови профессора» — приспособление, которое перетасовывает много колод одновременно, — получило такое название по сути дела в честь Торпа. Кроме того, владельцам казино пришлось запретить использование компьютера для составления прогнозов при игре в рулетку.

Торп последний раз играл в блек-джек в 1974 году.

— Мы с семьей поехали на Всемирную выставку в Спокан. По дороге остановились в отеле «Nagah's», и я сказал детям, что мне нужна пара часов, чтобы заработать денег на поездку, — что и было исполнено.

«Обыграй дилера» — это не просто классика жанра. Эта книга не осталась незамеченной и в мире экономики и финансов. Целое поколение математиков, вдохновленных книгой Торпа, принялось разрабатывать модели финансовых рынков, применяя к ним различные стратегии ставок. Двое из этих математиков — Фишер Блэк и Майрон Скоулз — вывели формулу Блэка — Скоулза для оценки финансовых деривативов. Это самое знаменитое — и самое скандальное — из уолл-стритовских уравнений.

Торп возвестил начало новой эры — эры господства специалистов по количественному анализу, «числовиков», математиков, которые находят для банков какие-то хитрые, наиболее прибыльные способы инвестирования.

«Обыграй дилера» была первой «числовой» книгой в этой области, и она в известной степени привела к чему-то вроде революции, — говорит Торп, который может — и не без оснований — сказать про себя, что он был самым-самым первым «числовиком».

Следующая его книга — «Обыграй рынок» — способствовала трансформации рынков ценных бумаг. В начале 1970-х годов, на пару со своим партнером по бизнесу, он основал первый «нейтральный по отношению к рынкам» хедж-фонд^[63]. Идея состояла в том, чтобы избежать всякого рыночного риска. С тех пор Торп продолжал придумывать все более и более изощренные математические финансовые продукты, что сделало его невероятно богатым (во всяком случае, для профессора математики). Хотя он и управлял хорошо известным хедж-фондом, сейчас он сосредоточился на семейном предприятии, куда инвестирует только свои собственные деньги.

*

Я встретился с Торпом в сентябре 2008 года. Мы сидели в его офисе, расположенном в небоскребе в Ньюпорт-Бич. Из окна открывался вид на Тихий океан. То был один из восхитительных калифорнийских дней, когда небо приобретает удивительный, целомудренно-голубой свет. Среди разнообразных достоинств Торпа я бы назвал эрудицию, но без излишнего занудства, а также внимательность и осмотрительность. Кроме того, его отличает острый ум и чувство юмора. Прошла всего неделя, как банк «Leman Brothers» объявил о своем банкротстве. Я спросил Торпа, не испытывает ли он чего-то типа чувства вины за то, что способствовал созданию некоторых рыночных механизмов, которые внесли вклад в самый большой за последние десятилетия финансовый кризис.

— Проблема была не в самих деривативах, а в отсутствии их регулирования, — ответил он вполне ожидаемо.

Тогда я спросил, не обращалось ли правительство хоть раз к нему за рекомендацией, ведь сегодня математика, лежащая в основе мировых финансов, невероятно усложнилась.

— Лично мне ничего об этом не известно! — сказал он с улыбкой. — Если они вдруг заявятся, то рекомендаций у меня хоть отбавляй! Но все это страшно политизировано, и при этом они не хотят выносить сор из избы.

Если вы желаете, чтобы к вашему голосу прислушались, — продолжает он, — вам надо жить на Восточном побережье, играть в гольф и обедать с банкирами и политиками. Но я-то живу в Калифорнии, у меня тут из окна чудесный вид. Я просто развлекаюсь, поигрывая в математические игры. Здесь нужных людей не встретишь, разве что случайно.

При этом Торп явно наслаждается своим положением «в сторонке». Он даже не воспринимает себя как представителя финансового мира, хотя и прожил в нем четыре десятилетия.

— Я считаю себя ученым, который применил свои знания к анализу финансовых рынков, — говорит он.

На самом деле бросать вызов стандартной мудрости — лейтмотив всей его жизни, это именно то, что он с успехом делает вновь и вновь. И он полагает, что у сообразительных математиков шансов на выигрыш всегда больше, чем шансов на проигрыш.

Я поинтересовался также, помогло ли ему то, что он так хорошо умеет оценивать вероятности, в тех ситуациях, когда руководствоваться интуицией противопоказано. Например, становился ли он когда-либо жертвой «заблуждения игрока»?

— Я считаю, что довольно неплохо научился говорить «нет» — хотя это и потребовало кое-какого времени. Вначале, когда я только начинал

разбираться в акциях, мое обучение оказалось довольно дорогостоящим. Я был склонен принимать решения, действуя не вполне рационально.

Я спросил его, играл ли он когда-либо в лотерею.

— Вы хотите спросить, делал ли я когда-нибудь невыгодные ставки?

— Наверное, — сказал я, — вы никогда такого не делали.

— Всякое бывало. Знаете, иногда, время от времени, подобные вещи делать приходится. Представьте себе, что все ценное, что у вас есть, — это ваш дом. Страховать свой дом — невыгодно в смысле математического ожидания, но, по всей видимости, весьма благоразумно в смысле долгосрочного выживания.

— Так что, — спросил я, — вы все-таки застраховали свой дом?

Торп ненадолго замолчал.

— Да. — Он замялся, потому что прикидывал величину своего состояния. — Если вы достаточно богаты, вам нет необходимости страховать несущественное имущество, — объяснил он. — Например, если вы миллиардер, а ваш дом стоит миллион долларов, то не важно, застрахуете вы его или нет, по крайней мере с точки зрения критерия Келли. Вам нет нужды защищать себя от этой сравнительно небольшой потери. Выгоднее оставить эти деньги себе и самому вложить их во что-нибудь получше. Кстати, кажется, я все-таки застраховал свои дома.

Я когда-то видел статью, где упоминалось, что Торп собирается заморозить свое тело после смерти. Я сказал ему, что это смахивает на азартную игру — и к тому же выглядит очень по-калифорнийски.

— Ну, как говорит один мой друг-фантаст, «Другой игры у нас для вас нет».

Глава 10

Все нормально

Автор позволяет себе слишком много мучного, дабы прочувствовать, как рождалась статистика.

Некоторое время назад я приобрел электронные кухонные весы. Они состояли из стеклянной платформочки и «легкого в использовании голубого дисплея с задней подсветкой». Покупка эта отнюдь не была симптомом овладевшего мною желания готовить изысканные десерты. Равным образом не рассчитывал я и на частые посещения моей квартиры местными наркоторговцами. Просто меня заинтересовал процесс взвешивания. Вынув весы из коробки, я тут же отправился в ближайшую булочную — «Греггс» — и купил там багет. Взвесив его, я выяснил, что его вес составляет 391 грамм. На следующий день я снова отправился в ту же булочную и купил еще один багет. Этот оказался чуть тяжелее — 398 граммов. «Греггс» — это известная британская сеть, в которую входит более тысячи магазинов, где вы можете выпить чашку чаю и купить сэндвич с колбасой или булочку, покрытую сахарной глазурью. Однако меня интересовали только багеты. Третий, купленный в «Греггсе» багет весил 399 граммов. Мне уже изрядно надоело поглощать в день по целому багету, однако я продолжал ежедневную процедуру взвешивания. Четвертый багет оказался гигантом: 403 грамма. Я прикидывал даже, не повесить ли его на стену, как чучело рекордно большой рыбы. Ведь вес багета, продолжал размышлять я, не должен постоянно увеличиваться. Так и случилось: пятый весил жалкие 384 грамма.

В XVI и XVII веках Западную Европу охватила страсть к сбору всевозможных данных. Такие измерительные средства, как термометр, барометр и курвиметр — колесико, позволяющее засекать пройденное вдоль дороги расстояние, — были изобретены именно тогда, и их использование представляло собой восхитительное новшество. Не последнюю роль сыграло и то, что арабские числительные, обеспечивавшие эффективные обозначения для выражения результатов

измерений, наконец полностью утвердились среди образованных классов. Возникший измерительный бум ознаменовал собой начало современной науки. Возможность описывать мир в количественных, а не качественных терминах полностью изменила наши взаимоотношения с природой. Числа, предоставив язык для научного исследования, внушили человеку уверенность, что он может добиться более глубокого понимания истинного устройства вещей.

Процедура измерения содержит в себе некий элемент веселой игры; и правда, мой ежедневный ритуал, состоящий в приобретении и взвешивании багета, оказался на удивление приятным занятием. От «Греггса» я возвращался почти бегом, сгорая от нетерпения, — сколько же граммов будет весить мой новый багет? И тут острота моих чувств ничуть не уступала жажде узнать счет футбольного матча или результаты финансовых торгов.

Мои ежедневные походы в булочную были обусловлены желанием составить таблицу распределения весов; после приобретения десятого багета я мог заключить, что самый малый вес составляет 380 граммов, самый большой — 410 граммов, а одно из значений — 403 грамма — повторялось. Разброс оказывается довольно широким, решил я. Все багеты куплены в одном и том же магазине, у всех одна и та же цена, и тем не менее самый тяжелый почти на 8 процентов тяжелее самого легкого!

Заинтригованный происходящим, я продолжал свои опыты. Несъеденный хлеб копился у меня на кухне, а я приходил в полный восторг, глядя, как веса распределялись по моей таблице. Хотя я и не мог предсказать, сколько будет весить следующий багет, было уже видно, что, без сомнения, в таблице присутствует некоторая закономерность. После сотого багета я прекратил эксперимент. К концу моих исследований каждое число между 379 граммами и 422 граммами, за исключением всего четырех, встречалось по крайней мере однажды.

Хотя я и приступил к реализации «хлебного» проекта по причинам математическим, я заметил, что тут имеют место и интересные психологические побочные эффекты. Перед взвешиванием каждого багета я внимательно его разглядывал и размышлял о его цвете, длине, толщине и текстуре, каковые довольно заметно варьировали от одного образца к другому. К самому себе я стал относиться как к знатоку багетов и временами даже говорил себе: «Ну, этот будет потяжелее», или «Сегодня, вне всякого сомнения, попался совершенно рядовой». При этом ошибался я столь же часто, как и оказывался прав. Тем не менее мой ограниченный опыт предсказателя нисколько не умалил мою веру в то, что я и в самом

деле стал экспертом по оценке багетов. Видимо, это было нечто вроде того самообольщения, что свойственно знатокам спорта и финансов, которые хотя и не способны предсказывать случайные события, однако же с успехом строят на таких предсказаниях свою карьеру.

Надо сказать, более всего меня обескураживали ситуации, когда багеты от «Греггса» оказывались или экстремально тяжелыми, или экстремально легкими. В эти редкие моменты я испытывал сильное волнение. Когда вес багета оказывался исключительно необычным, весь день становился, казалось, таким же исключительно необычным, как если бы уникальные свойства данного багета как-то влияли на другие стороны жизни. Рассуждая рационально, я понимал, что время от времени мне обязательно должны попадаться или сверхбольшие, или сверхмалые багеты, но тем не менее каждое появление багета с экстремальным весом подстегивало мои эмоции. Я не считаю себя суеверным, но, удивительное дело, я не смог избежать попытки углядеть какой-то смысл в случайности. Насколько же все мы подвержены ни на чем не основанным верованиям!

*

Ученые эпохи Просвещения нашли в цифрах надежных помощников, привнесших в мир некую определенность, однако она, эта определенность, никогда не была полной. В самом деле, стоит вам только измерить одну и ту же вещь дважды, как вы получите два различных результата. Эти различия немало смущали ученых, вознамерившихся дать ясные и точные объяснения природных явлений. Галилео Галилей, например, заметил, что, когда он с помощью своего телескопа вычислял угловые расстояния между звездами, результаты были подвержены вариациям, причем вариации эти нельзя было отнести на счет ошибки в его вычислениях. Скорее они случались потому, что процедура измерения неизбежно содержит в себе некую «размытость». Числа, казалось, не вполне оправдывали возложенные на них надежды всегда быть точными.

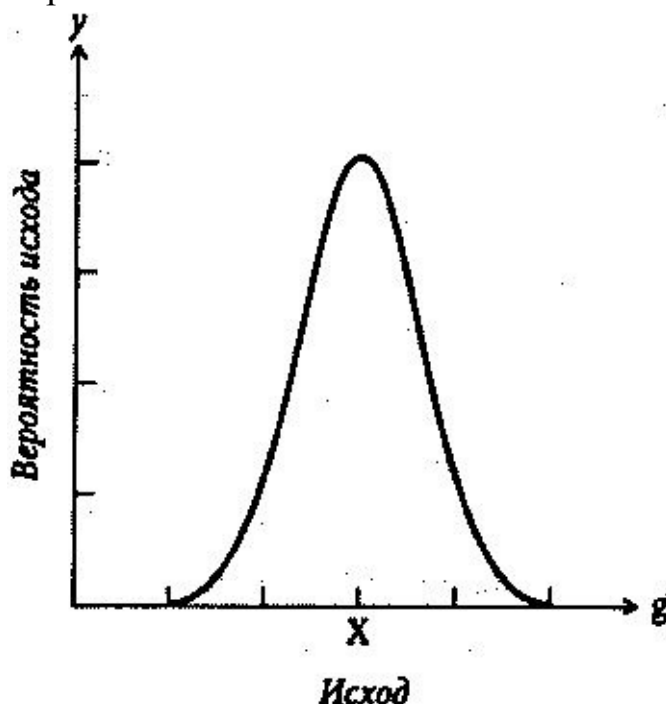
Ровно это я и наблюдал, взвешивая свои багеты. Вероятно, целый ряд факторов вносил вклад в вариации веса: количество и консистенция использовавшейся муки, время, проведенное в печи, путешествие багетов от центральной пекарни «Греггса» к ближайшему ко мне магазину, влажность воздуха и т. д. Подобным же образом, имелось много переменных, влиявших на результаты, получаемые с помощью телескопа Галилея: например, атмосферные условия, температура оборудования и личные факторы, вроде того, насколько уставшим был Галилей, когда снимал показания.

Тем не менее Галилей смог заметить, что вариации в его результатах подчинялись определенным правилам: данные каждого измерения имели тенденцию группироваться вокруг некоторого центрального значения, причем малые отклонения от этого центрального значения случались намного чаще, чем большие. Кроме того, Галилей заметил, что разброс был симметричным — каждое данное измерение могло оказаться меньше центрального значения с той же частотой, что и больше него.

Точно так же полученные мной результаты по взвешиванию багетов показали, что веса группируются приблизительно вблизи значения в 400 граммов, плюс-минус 20 граммов. Хотя *ни один* из моих ста багетов не весил ровно 400 граммов, имелось намного больше багетов с весом около 400 граммов, чем с весом около 380 граммов или около 420 граммов. И разброс также был на вид довольно симметричным.

*

Первым, кто осознал закономерность, проявляемую подобными ошибками измерений, был знаменитый немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855). Закономерность описывается следующей колоколообразной кривой:



Гауссовский график требует некоторых пояснений. Горизонтальная ось изображает некоторый набор исходов, например вес багета или угловое расстояние между звездами. Вертикальная ось показывает вероятности этих исходов. Кривая, построенная на осях с такими параметрами,

называется *распределением*. Она показывает разброс исходов и то, насколько вероятен каждый из них.

Имеется множество различных типов распределений, но самый главный тип описывается именно приведенной выше кривой. Колоколообразная кривая известна также как *нормальное распределение*, или *гауссово распределение*. Исходно оно называлось *кривой ошибок*, но из-за ее отличительной формы больше прижился термин *колоколообразная кривая*. У колоколообразной кривой есть среднее значение, которое отмечено буквой *X*. Среднее — это наиболее вероятный исход. Чем дальше вы уходите от среднего, тем менее вероятны соответствующие исходы.

Когда измеряется некая величина и процесс подвержен случайным ошибкам, результат, как правило, одним и тем же не получается. Однако чем больше делается измерений, тем сильнее распределение исходов начинает напоминать колоколообразную кривую; другими словами, исходы симметрично группируются вокруг среднего значения. Конечно, график, выражающий результаты измерений, будет не непрерывной кривой, а (как в случае с моими багетами), ломаной линией, проходящей через фиксированные точки. Колоколообразная кривая — это теоретический предел того, как ведут себя случайные ошибки. Чем больший объем данных собран, тем лучше ломаная линия ложится на эту кривую.

В конце XIX столетия другой выдающийся математик — француз Анри Пуанкаре (1854–1912) понял, что распределение исходов, подверженных случайным ошибкам измерения, аппроксимируется колоколообразной кривой. Пуанкаре на самом деле провел тот же «хлебный» эксперимент, что и я, но совсем по другой причине. Он подозревал, что булочник обманывает его, продавая хлеб заниженного веса, и решил с помощью математики вывести мошенника на чистую воду. Каждый день в течение года Пуанкаре взвешивал купленную килограммовую буханку хлеба. Пуанкаре знал, что если вес несколько раз окажется ниже 1 килограмма, то это еще не свидетельство злонамеренности булочника, поскольку следует ожидать, что вес будет колебаться, оказываясь то несколько выше, то несколько ниже указанного килограмма. И он предположил, что график, отражающий вес хлеба, будет напоминать нормальное распределение, поскольку ошибки, неизбежно закрадывающиеся при изготовлении хлеба (количество использованной муки или продолжительность выпечки), носят случайный характер.

Спустя год он рассмотрел все собранные им данные. Распределение весов очень неплохо аппроксимировало колоколообразную кривую.

Однако пик кривой пришелся на 950 граммов. Другими словами, средний вес буханки был равен 0,950 килограмма, а не 1 килограмму, как объявлялось. Подозрения, мучавшие Пуанкаре, подтвердились. Знаменитого ученого обманывали в среднем на 50 граммов на каждой буханке. Согласно распространенной легенде, Пуанкаре известил парижскую полицию, и пекарь получил строгое предупреждение.

Добившись этой небольшой победы в борьбе за права потребителей, Пуанкаре не остановился на достигнутом. Он продолжал каждый день взвешивать хлеб, и еще через год обнаружил, что форма графика не описывается правильной колоколообразной кривой; оказалось, кривая скошена направо. Поскольку он знал, что полностью случайная ошибка приводит к правильной колоколообразной кривой, он заключил, что на вес продаваемого хлеба влияет какой-то неслучайный фактор. По-видимому, решил Пуанкаре, пекарь не прекратил хитрить, недовешивая хлеб. Просто каждый раз мошенник продавал Пуанкаре — с которым, как он считал, лучше было не связываться — самый большой хлеб из имевшихся, тем самым внося в распределение систематическую ошибку.

К несчастью для булочника, его покупатель был одним из умнейших людей во всей Франции. Пуанкаре снова информировал полицию.

Способ, который применил тогда Пуанкаре, был поистине провидческим; в наше время он составляет теоретическую основу защиты прав потребителей. Когда магазины продают продукты заявленного веса, по закону эти продукты не обязаны иметь в точности этот вес — такого и быть не может, потому что в процессе производства неизбежно некоторые изделия оказываются немного тяжелее, а некоторые — немного легче. Работа служащих, следящих за соблюдением стандартов в торговле, состоит в случайной выборке образцов продукта, доступного в продаже, и построении графика, показывающего вес. Для всякого продукта, подвергающегося такой процедуре, распределение весов должно укладываться на колоколообразную кривую с центром на заявленном значении.

*

За полвека до того, как Пуанкаре занялся укладкой веса хлеба на колоколообразную кривую, другой математик видел эту кривую повсюду и во всем. Бельгиец Адольф Кетле (1796–1874) был по образованию геометром и астрономом, но интересовало его совсем иное — его увлекали массивы данных, а точнее говоря, нахождение закономерностей в цифрах. В одной из своих первых работ Кетле исследовал французскую

национальную статистику преступлений, которую правительство начало публиковать в 1825 году. Ученый заметил, что число убийств год от года практически не менялось. Даже частота использования различных видов орудий убийства — было ли оно произведено с помощью ружья, сабли, ножа, кулака и т. д. — оставалась, в грубом приближении, той же самой. В наши дни это не вызывает особого интереса — и в самом деле, вся система функционирования общественных институтов основана на использовании, например, частоты преступлений, частоты прохождения экзамена и частоты несчастных случаев, от которых мы и в самом деле ожидаем постоянства, — но Кетле был первым, кто обратил внимание на потрясающую регулярность социальных явлений. На каждый данный год появлялась возможность с достаточной точностью предсказать количество будущих убийств. Из такого рода закономерностей возникала совсем иная трактовка личной ответственности и справедливости наказания. Ведь если общество подобно машине, вырабатывающей заданное число убийств, то не означает ли это, что вся вина лежит скорее на обществе, чем на индивидууме-преступнике?

Работы Кетле привели к тому, что слово *статистика* изменило свое значение. Исходно оно не имело отношения к числам, а использовалось для описаний общих фактов о государстве, вроде той информации, которая нужна государственным деятелям. Кетле превратил статистику в гораздо более широкую дисциплину, в меньшей степени имеющую отношение к делам государства, а в большей — к математике коллективного поведения. Едва ли он сильно преуспел бы на этом поприще, если бы не параллельное бурное развитие теории вероятностей, которая предоставляла методы для анализа случайных данных. В 1853 году Кетле организовал в Брюсселе первую международную конференцию по статистике.

Глубокие наблюдения Кетле, касающиеся коллективного поведения, оказали большое влияние и на другие области знания. Коль скоро изучение данных о народонаселении позволяло проследить устойчивые тенденции, требовался лишь небольшой толчок, чтобы осознать, что, например, в поведении атомного «населения» также имеются предсказуемые закономерности. Джеймс Клерк Максвелл и Людвиг Больцман воспользовались многими «статистическими» идеями Кетле и предложили кинетическую теорию газов, согласно которой давление газа определяется столкновениями его молекул, летящих в случайных направлениях с различными скоростями. Хотя скорость каждой отдельной молекулы узнать нельзя, в целом молекулы ведут себя предсказуемым образом. Происхождение кинетической теории газов — интересное исключение из

общего правила, согласно которому прогресс в социальных науках основан на достижениях в науках естественных. В данном случае знание перетекало в обратном направлении.

Самая общая закономерность, найденная Кетле в его исследованиях, выражалась колоколообразной кривой. Она присутствовала повсюду в данных, имевших отношение к народонаселению. В те времена собирать информацию было гораздо труднее, чем сегодня, так что Кетле прочесывал все и вся в поисках нужных ему данных с упорством профессионального коллекционера. Например, однажды он наткнулся на исследование, опубликованное в 1814 году в «Edinburg Medical Journal» и содержавшее результаты измерений грудной клетки у 5738 шотландских солдат. Кетле нанес эти числа на график и показал, что распределение размеров груди следовало колоколообразной кривой со средним значением около 40 дюймов. На основе других данных он смог показать, что рост мужчин и женщин также распределяется по колоколообразной кривой. И ныне розничная торговля опирается на сделанные Кетле открытия. Причина, по которой в магазинах одежды всегда запасено больше средних размеров, нежели малых или больших, состоит в том, что распределение людей по размерам примерно соответствует колоколообразной кривой.

*

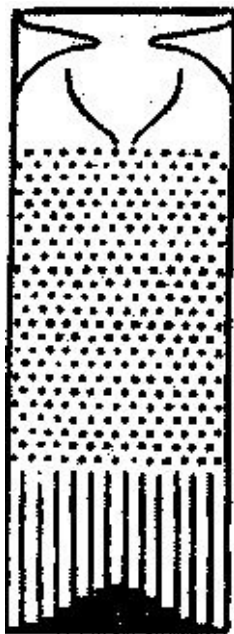
Кетле умер в 1874 году. Десятилетие спустя на другой стороне Ла-Манша на улицах британских городов можно было наблюдать лысого 60-летнего человека с изящными викторианскими бакенбардами, который, уставившись на проходившую мимо женщину, начинал шарить у себя в кармане. Фрэнсис Гальтон (1822–1911), знаменитый географ, антрополог и психолог, решил измерить женскую привлекательность. Чтобы деликатно фиксировать свое мнение о встречаемых женщинах, он в кармане втыкал иголку в сложенный вчетверо листок бумаги, отмечая, показалась ли она ему «привлекательной», «нейтральной» или «отталкивающей». По окончании исследования он нанес на карту страны результаты своих зрительных впечатлений. Наивысший балл среди городов получил Лондон, а наинизший — Абердин.

Судя по всему, из европейских ученых XIX века только Гальтон был одержим идеей сбора данных более, чем сам Кетле. Еще будучи совсем молодым, Гальтон ежедневно измерял температуру чайника с чаем, а также собирал информацию об объеме кипящей воды и о том, насколько тонким получился вкус. Цель его состояла в установлении способа приготовления чашки совершенного чая. (К окончательным выводам, впрочем, он так и не

пришел.) Гальтон также создал в Лондоне «антропометрическую лабораторию» — нечто вроде клиники, принимавшей всех желающих, куда представители широкой публики могли прийти, дабы измерить свой рост, вес, силу рук, частоту дыхания, зрение и другие физические характеристики. Лаборатория Гальтона собрала данные о более чем 10 000 человек, и он удостоился такой славы, что премьер-министр Уильям Гладстон даже заглянул как-то к нему, чтобы его тоже измерили.

Исследования Гальтона подтвердили то, что утверждал Кетле, — вариации в человеческих популяциях строго предопределены. Гальтон тоже повсюду обнаруживал колоколообразную кривую. Именно то, что она появлялась столь часто, навело его на мысль использовать термин «нормальное» как наиболее подходящее определение для данного распределения. Окружность человеческой головы, размер мозга и количество мозговых извилин — колоколообразные кривые были везде, хотя сам Гальтон больше всего интересовался нефизическими характеристиками, например интеллектом. Тесты для измерения IQ. тогда еще не придумали, так что Гальтон решил использовать результаты вступительных экзаменов в Королевскую военную академию в Сандхерсте. Баллы, выставленные за экзамен, также ложились на колоколообразную кривую! Она вызывала в нем чувство восхищения, смешанного с ужасом. «Едва ли мне известно что-либо другое, столь же впечатляющее, чем эта поистине чудесная форма космического порядка, выраженная в колоколообразной кривой, — писал он. — Если бы древние греки знали о таком законе, они бы придумали для него специального бога, который правит, невозмутимый и незаметный, среди ужасного беспорядка. Чем огромней толпа и чем больше анархия, тем более совершенно его действие. Это высший закон иррациональности».

Гальтон изобрел на удивление простое приспособление, названное «квинканкс»^[64], для объяснения той математики, что стоит за обожаемой им кривой. Слово «квинканкс» исходно означало пятерку — пять точек, расположенных как на игральной кости 5, а придуманное им приспособление представляло собой нечто вроде пинбол-машинки — ящик с прозрачной передней стенкой, в заднюю стенку которого в шахматном порядке вбиты штырьки. Сверху в ящик через воронку, расположенную посередине, кидаются шарики. Нижняя часть ящика разделена перегородками, число которых равно числу штырьков в последнем ряду. Падая, шарики скапливаются на дне и образуют столбики. Распределение высот этих столбиков напоминает колоколообразную кривую^[65].



Квинканкс

Разобраться в том, что здесь происходит, можно используя идею о вероятности. Сначала представим себе квинканкс с одним-единственным штырьком; когда шарик ударяется о него, исход такого соударения случаен: в 50 процентах случаев шарик отскочит налево, а в 50 процентах случаев — направо. Другими словами, с вероятностью $1:2$ он попадет в положение слева, а с вероятностью $1:2$ — справа от центра.

Теперь добавим второй ряд штырьков. Теперь шарик может повернуть или сначала налево и потом еще раз налево, что мы будем обозначать как LL, или налево и потом направо, что мы обозначим как LR, или же, в тех же обозначениях, пройти пути RL или RR. Поскольку исход «сначала повернуть налево, а затем сразу же направо» эквивалентен исходу «положение шарика не меняется», L и R сокращают друг друга (как, равным образом, и R и L), так что в результате вероятность того, что шарик попадет в левое положение, равна $1:4$, вероятность того, что он попадет в середину, равна $2:4$, и вероятность того, что он уйдет направо, также равна $1:4$.

Добавим третий ряд. Повторяя наши рассуждения, видим, что равновероятные исходы состоят в том, что пути шарика будут LLL, LLR, LRL, LRR, RRR, RRL, RLR и RLL. Это дает вероятность $1:8$ приземлиться в крайнем левом положении, $3:8$ — слева рядом с центром, $3:8$ — справа рядом с центром и $1:8$ — в крайнем правом положении.

Другими словами, если в квинканксе имеется два ряда и мы накидаем туда уйму шариков, то по закону больших чисел шарик лягут на дно в отношении, близком к 1:2:1.

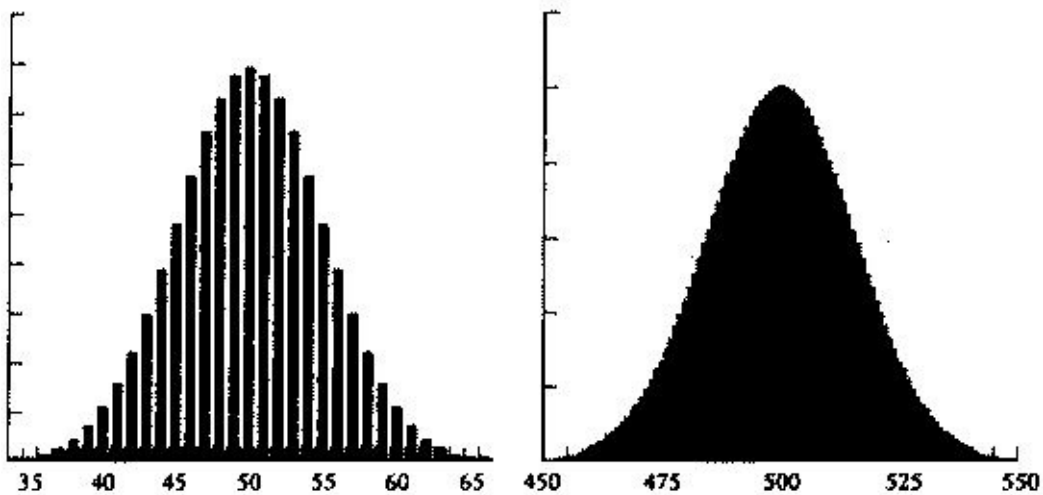
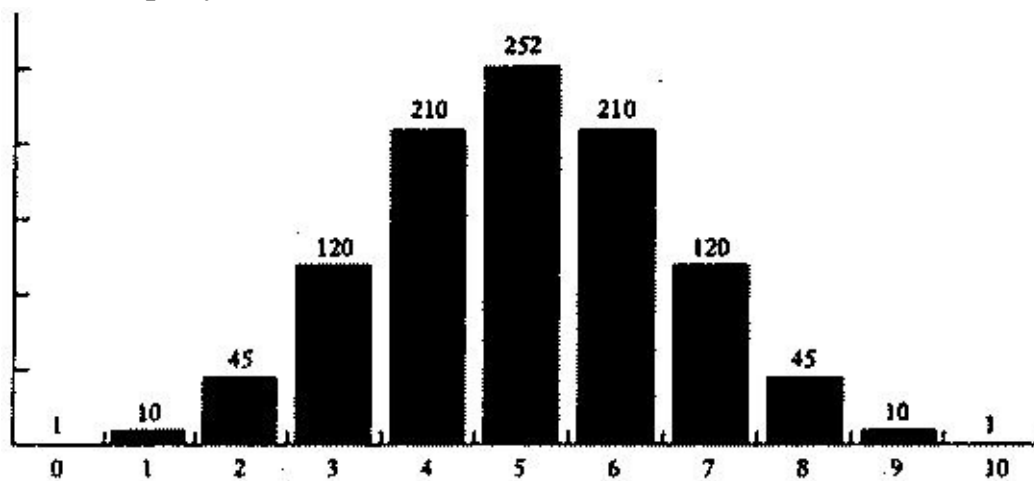
Если рядов три, то шарик соберутся на дне в отношении 1:3:3:1.

Если рядов четыре, то в отношении 1:4:6:4:1.

Подсчитывая вероятности и дальше, для квинканкса с десятью рядами штырей получим, что шарик распределятся в отношении

1:10:45:120:210:252:210:120:45:10:1.

Если нанести эти числа на график, то получатся распределения, показанные на рисунке.



Форма кривой становится все более знакомой по мере увеличения числа рядов из штырей. На рисунке приведены также диаграммы, получающиеся для 100 и 1000 рядов. (Для двух последних диаграмм показаны только их центральные области, поскольку значения в областях, уходящих налево и направо, слишком малы, чтобы их можно было

изобразить.)

Итак, как же игра в пинбол связана с тем, что имеет место в реальном мире? Представим себе, что каждый ряд штырей в квинканксе — это случайная переменная, которая приводит к ошибке в измерении: или добавляет немного к измеряемому значению, или же, наоборот, немного из него вычитает. В случае Галилея и его телескопа один из рядов, составленных из штырей, мог бы представлять наличие проходящего рядом атмосферного фронта, а другой ряд мог бы представлять наличие загрязняющих примесей в воздухе. Каждая переменная вносит тот или иной вклад в ошибку — в точности как шарик отскакивает в квинканксе вправо или влево. При любом измерении имеется много миллионов ненаблюдаемых случайных ошибок, однако их совместный эффект приведет к результатам, распределенным по колоколообразной кривой.

*

Если характеристики, относящиеся к народонаселению, распределены нормально — другими словами, группируются вблизи среднего и ложатся на колоколообразную кривую, — и если колоколообразная кривая есть результат случайных ошибок, то, как утверждал Кетле, вариации в человеческих характеристиках можно воспринимать как ошибки, отвечающие отклонению от некоего образца. Он назвал такой образец *«l'homme moyen»* — «средний человек». Популяции, утверждал он, составлены из отклонений от этого образца. По мысли Кетле, следовало всячески стремиться к тому, чтобы быть средним, потому что именно таким образом общество удерживалось бы под контролем, а отклонения от среднего, писал он, приводят к «телесному уродству и моральному разложению». Хотя концепция *«l'homme moyen»* не получила признания в науке, использование этого термина просочилось в широкие слои общества. Часто, рассуждая о морали или вкусах, мы апеллируем к тому, что подумал или почувствовал бы средний представитель человечества, и говорим о том, что приемлемо «с точки зрения среднего человека».

Кетле превозносил идею среднего, но Гальтон смотрел на нее свысока. Как уже говорилось, Гальтон заметил, что результаты экзаменов следуют нормальному распределению. Больше всего людей получают средние оценки, и лишь немногие — очень высокие или очень низкие. Сам Гальтон, кстати, происходил из семьи, которая весьма заметно возвышалась над средним. Двоюродным братом ему приходился Чарльз Дарвин, с которым он регулярно обменивался научными идеями. Лет через десять после выхода книги Дарвина «О происхождении видов» Гальтон начал

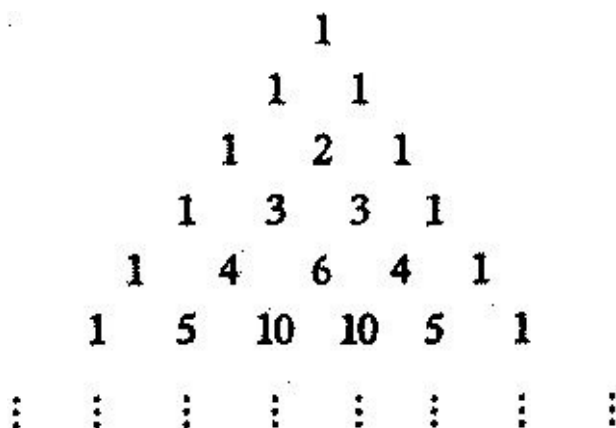
теоретизировать о способах управления человеческой эволюцией. Его интересовала передача гениальности по наследству, и он задавался вопросом о том, как можно было бы повысить уровень интеллекта населения в целом. Он стремился сдвинуть колоколообразную кривую вправо. С этой целью Гальтон предложил новую область исследований, направленных на «культивацию расы», то есть повышение интеллектуального потенциала населения посредством направленного разведения одаренных людей. Одно время он думал назвать свою новую науку «*витикультурой*», от латинского «*vita*» — жизнь, но в конце концов остановился на «*евгенике*» — от греческого «*eu*» — хороший и «*genos*» — род. (Сегодняшнее значение слова «*витикультура*», относящееся к возделыванию винограда, происходит от «*vitis*» — лоза по-латыни — и восходит примерно к тому же самому времени.) Хотя немало либерально настроенных интеллектуалов в конце XIX и начале XX столетия поддерживали евгенику как способ улучшения общества, идея «разводить» более умных людей впоследствии претерпела значительные искажения и окончательно дискредитировала себя, когда в 1930-х годах евгеника стала синонимом бесчеловечной политики нацистов по созданию высшей арийской расы.

Оглядываясь назад, не так уж сложно заметить, что оценочные критерии — такие, как уровень интеллекта или расовая чистота, — могут порождать дискриминацию и слепой фанатизм. Поскольку колоколообразная кривая появляется, как только какие-то человеческие качества подвергаются измерению, она стала неким сигналом, говорящим о том, что предпринимаются попытки объявить некоторых людей априори лучше других. Примером, наделавшим много шума, стала публикация в 1994 году книги Ричарда Дж. Хернстайна и Чарльза Мюррея «Колоколообразная кривая». Эта книга вызвала яростную полемику. Название ее апеллирует к результатам распределения тестов на IQ: авторы этого труда утверждают, что различия в IQ между расовыми группами свидетельствуют о биологических различиях. Гальтон писал, что колоколообразная кривая правит «невозмутимо и незаметно». Ее наследие, однако, оказалось каким угодно, но только не спокойным и не незаметным.

*

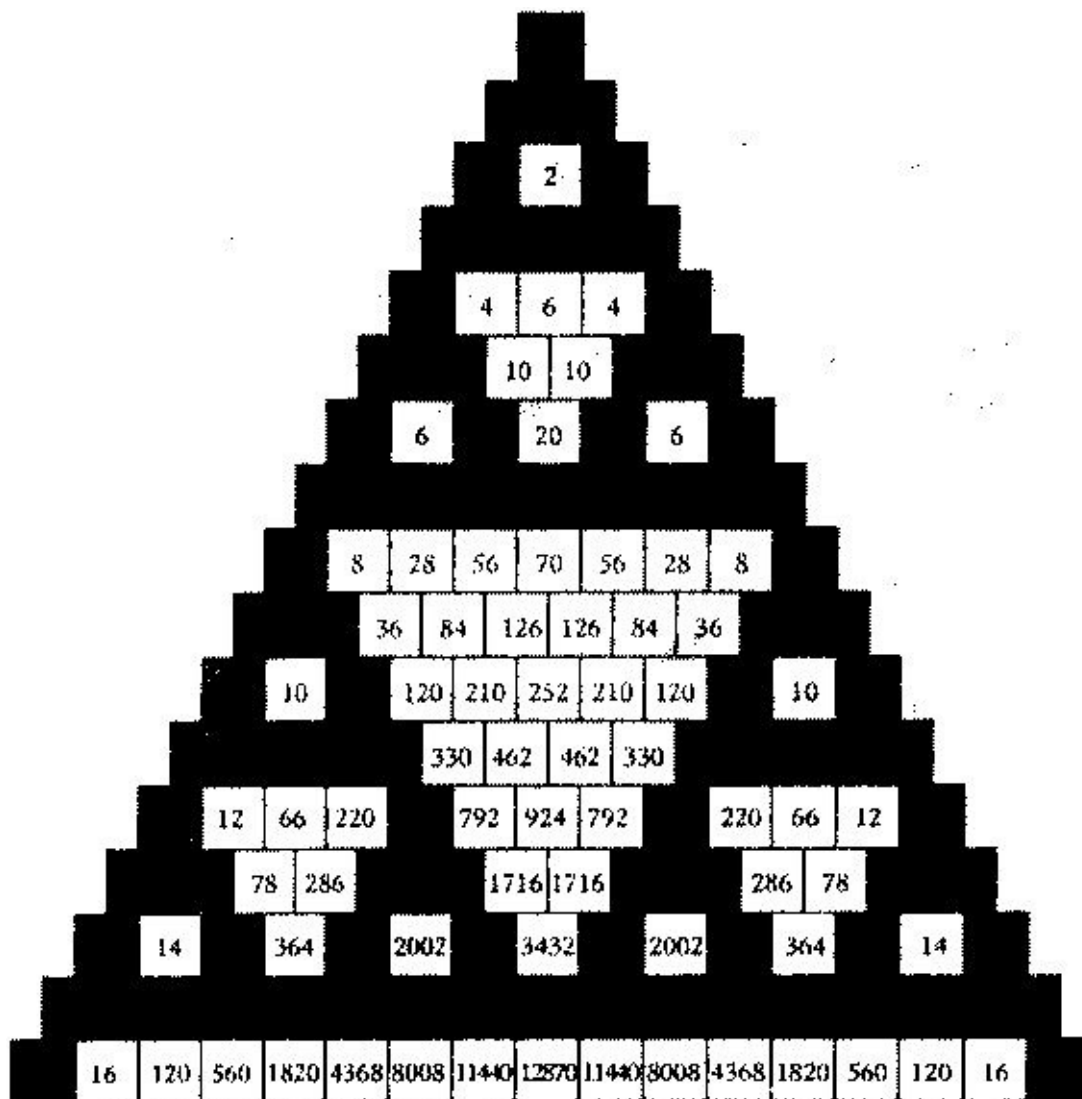
Другой способ получить те наборы цифр, которые мы наблюдаем, рассматривая распределение шариков в квинканксе, состоит в том, чтобы сложить из них нечто вроде числовой пирамиды. Организованные таким образом цифры более известны как треугольник Паскаля.

Треугольник Паскаля можно построить методом гораздо более простым, чем изучение распределения шариков, случайным образом просеивающихся через квинканкс. Начнем с 1 в первой строке, а под ней расположим две 1 так, чтобы все они образовывали треугольник. В следующих строках всегда будем помещать по 1 в начале и в конце, а во всех остальных положениях будем писать сумму двух чисел, расположенных выше.

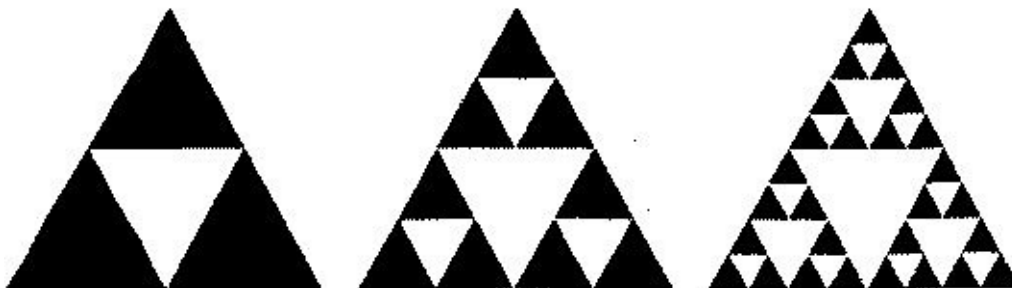


Этот треугольник назван по имени Блеза Паскаля, хотя Паскаль был далеко не первым, кого очаровала эта конструкция. Индийские, китайские и персидские математики знали об этой структуре за столетия до Паскаля. Правда, Паскаль, в отличие от предшественников, написал книгу о том, что он называл «*le triangle arithmetique*». Его зачаровывала математическая глубина открытых им структур. «Удивительно, насколько изобилует он (имелся в виду треугольник) в своих свойствах», — поражался Паскаль, добавляя, что в книгу он смог поместить меньшую часть того, что ему известно.

Мне в треугольнике Паскаля больше всего нравится вот какое свойство. Пусть каждое число сидит в квадратике. Закрасим черным все квадратики с нечетными числами, а все квадратики с четными числами оставим белыми. В результате получается чудесная мозаика:



Возникающий узор напоминает ковер Серпинского — кусок математической фрактальной структуры, похожий на обивку, о котором говорилось во второй главе (квадрат делится на девять подквадратов, а потом центральный подквадрат удаляется, и тот же процесс повторяется для каждого из оставшихся подквадратов до бесконечности). Треугольный вариант ковра Серпинского называется треугольником Серпинского: в данном случае равносторонний треугольник делится на четыре одинаковых равносторонних треугольника, средний из которых затем удаляется, а три оставшихся снова подвергаются той же операции — разбиению на четыре и удалению среднего. Вот как выглядят первые три итерации:



Если распространить описанный выше метод закрашивания треугольника Паскаля на все большее и большее количество строк, то возникающая структура будет все более напоминать треугольник Серпинского. На самом деле в бесконечном пределе треугольник Паскаля становится треугольником Серпинского.

Серпинский — не единственный наш знакомец, кого можно встретить на этом черно-белом паркете. Рассмотрим белые треугольники, расположенные внизу по центру основного треугольника. Первый из них составлен из одного квадрата, второй — из 6 квадратов, третий — из 28, а далее идут числа 120 и 496. Ничего не напоминает? Три из этих чисел — 6, 28 и 496 — это совершенные числа, рассматривавшиеся в седьмой главе. Их появление — замечательное и очень наглядное выражение абстрактных идей, с виду никак не связанных.

*

Интерес древних индийцев к треугольнику Паскаля был вызван задачей о комбинациях объектов. Пусть, например, у нас имеется три фрукта: манго, личи и банан и всего одна их комбинация: манго, личи, банан. Если же мы желаем выбрать только два фрукта, то сделать это можно тремя различными способами: взять манго и личи, или манго и банан, или же личи и банан. Также тремя способами можно выбрать какой-то один фрукт. Наконец, надо рассмотреть и случай, когда выбирается нуль фруктов, и это можно сделать только одним-единственным способом. Другими словами, число комбинаций трех различных фруктов дает последовательность 1, 3, 3, 1 — третью строчку в треугольнике Паскаля.

С четырьмя объектами число комбинаций, в которых не выбирается а) ни одного объекта, б) выбирается один, в) два сразу, г) три сразу и д) четыре сразу, равны, соответственно, 1, 4, 6, 4, 1, что представляет собой четвертую строчку в треугольнике Паскаля. Подсчет можно продолжить для все большего числа объектов, и окажется, что треугольник Паскаля — это справочная таблица для числа комбинаций. Если у нас есть n предметов и нас интересует, сколько комбинаций можно составить, беря из

них m штук, за ответом надо обратиться к m -му элементу в n -й строке в треугольнике Паскаля. (Замечание: примем соглашение, что самой левой 1 в каждой строке приписано нулевое положение в строке.) Например, каково число способов взять три фрукта из имеющихся семи? Таких способов 35, потому что третий элемент в седьмой строке равен 35.

Давайте теперь перейдем к комбинированию математических объектов. Рассмотрим выражение $x + y$. Что представляет собой $(x + y)^2$? Это то же самое, что $(x + y)(x + y)$. Чтобы разложить это выражение, умножим каждый член в первой скобке на каждый член во второй. Таким образом, получится $xx + xy + yx + yy$, или $x^2 + 2xy + y^2$. Дальнейшие вычисления делают структуру более ясной. Коэффициенты перед отдельными членами — это строки из треугольника Паскаля:

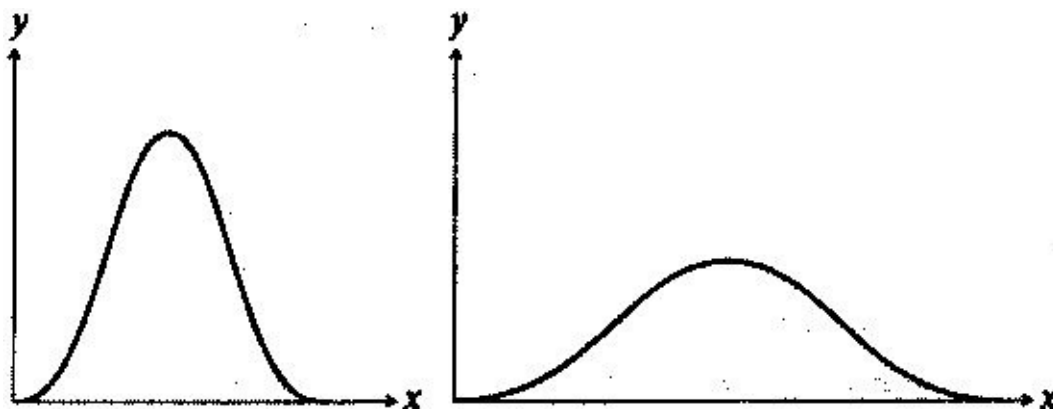
$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\(x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \\(x + y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

В начале XVIII столетия математик Абрахам де Муавр (1667–1754) — француз и гугенот, нашедший убежище в Лондоне, — первым понял, что коэффициенты в этих равенствах все лучше ложатся на кривую-колокол по мере, того как $(x + y)$ *все* большее число раз умножается само на себя. Он не назвал то, что получилось, ни колоколообразной кривой, ни кривой ошибок, ни нормальным распределением, ни даже гауссовым распределением — все эти имена были даны ей позже. Данная кривая впервые появилась в математической литературе в написанной в 1718 году книге Муавра об играх — «Теория случайностей» («The Doctrine of Chances»). То был первый учебник по теории вероятностей, а заодно и пример того, как азартные игры способствовали прогрессу научного знания.

*

Я говорил о колоколообразной кривой так, как если бы это была одна кривая; на самом же деле это семейство кривых. Все они выглядят похожими на колокол, но одни уже, а другие шире.

Вот объяснение, почему ширина бывает различной. Если бы Галилей, скажем, в своих астрономических измерениях пользовался телескопом XXI века, то ошибка была бы меньше, чем при использовании телескопа XVI столетия. Современный инструмент дал бы гораздо более узкую колоколообразную кривую, чем первый телескоп. Ошибки были бы намного меньше, но все равно были бы распределены нормально.



Колоколообразные кривые с различными отклонениями

Помимо среднего значения, колоколообразная кривая характеризуется еще шириной, называемой *отклонением*. Если известны среднее и отклонение, то полностью известна и форма кривой. Это исключительное удобство связано с тем фактом, что нормальную кривую можно описать, используя всего два параметра. Ну или, быть может, это даже слишком удобно. Те, кто имеет дело со статистикой, нередко принимают желаемое за действительное, стремясь обнаружить колоколообразную кривую во всех своих результатах. Билл Робинсон — экономист, возглавляющий отдел судебной бухгалтерии в KPMG^[66] в Лондоне, признает, что подобное имеет место. «Мы обожаем работать с нормальными распределениями, потому что их математические свойства очень хорошо изучены. Стоит нам только узнать, что речь идет о нормальном распределении, как мы уже готовы делать всяческие интересные утверждения».

Работа Робинсона, грубо говоря, состоит в том, чтобы, исследуя структуру колоссальных объемов данных, сказать, не намухлевал ли кто в бухгалтерской отчетности. Робинсон придерживается той же стратегии, что использовал Пуанкаре, ежедневно взвешивая хлеб, с той лишь разницей, что он — британский экономист — ежедневно анализирует гигабайты финансовых данных и применяет для этого гораздо более продвинутые средства.

Робинсон говорит, что сотрудники его отдела имеют склонность работать, исходя из предположения, что любому набору данных априорно свойственно нормальное распределение. «Я полагаю, что в отношении финансовых рынков истина состоит в том, что мы зачастую предполагаем наличие нормального распределения там, где оно, возможно, не работает». В последние годы и правда наблюдалось некоторое попятное движение —

как в мире науки, так и в мире финансов — прочь от исторически сложившейся практики опираться на нормальное распределение.

Когда некоторое распределение сконцентрировано вблизи среднего в меньшей степени, чем колоколообразная кривая, про него говорят, что оно плосковершинное или что у него эксцесс меньше нормального. Наоборот, когда распределение в большей степени сконцентрировано вблизи среднего, говорят, что оно островершинное, или что оно имеет положительный эксцесс. Уильям Сили Госсет, специалист по статистике, работавший на пивоварне Гиннеса в Дублине^[67], придумал в 1908 году памятку, облегчающую запоминание того, что есть что: «У утконоса с плоским утиным носом (и плоской спиной) плосковершинное распределение, а у целующихся кенгуру — островершинное». Он выбрал кенгуру из-за того, что они «высоко скачут, хотя, честно говоря, по той же самой причине можно было выбрать и зайцев!». Поскольку в составленной Госсетом памятке главные действующие лица — животные, далекие правые и далекие левые участки кривых, описывающих распределения, называют *хвостами*.



Плосковершинное и островершинное распределения

Когда экономисты говорят, что у распределения «толстые» или «тяжелые» хвосты, они имеют в виду, что кривые в далеких от среднего областях проходят выше, то есть на большем удалении от горизонтальной оси, чем кривая нормального распределения, как если бы у госсетовских животных хвосты были толще средних. Эти кривые описывают распределения, в которых крайние события более вероятны, чем в случае нормального распределения. Например, если вариации в цене акций имеют толстые хвосты, это означает, что вероятность резкого падения или, наоборот, резкого роста этих акций в цене больше, чем в случае нормального распределения. По этой причине иногда довольно безрассудно предполагать колоколообразную кривую там, где распределение имеет толстые хвосты.

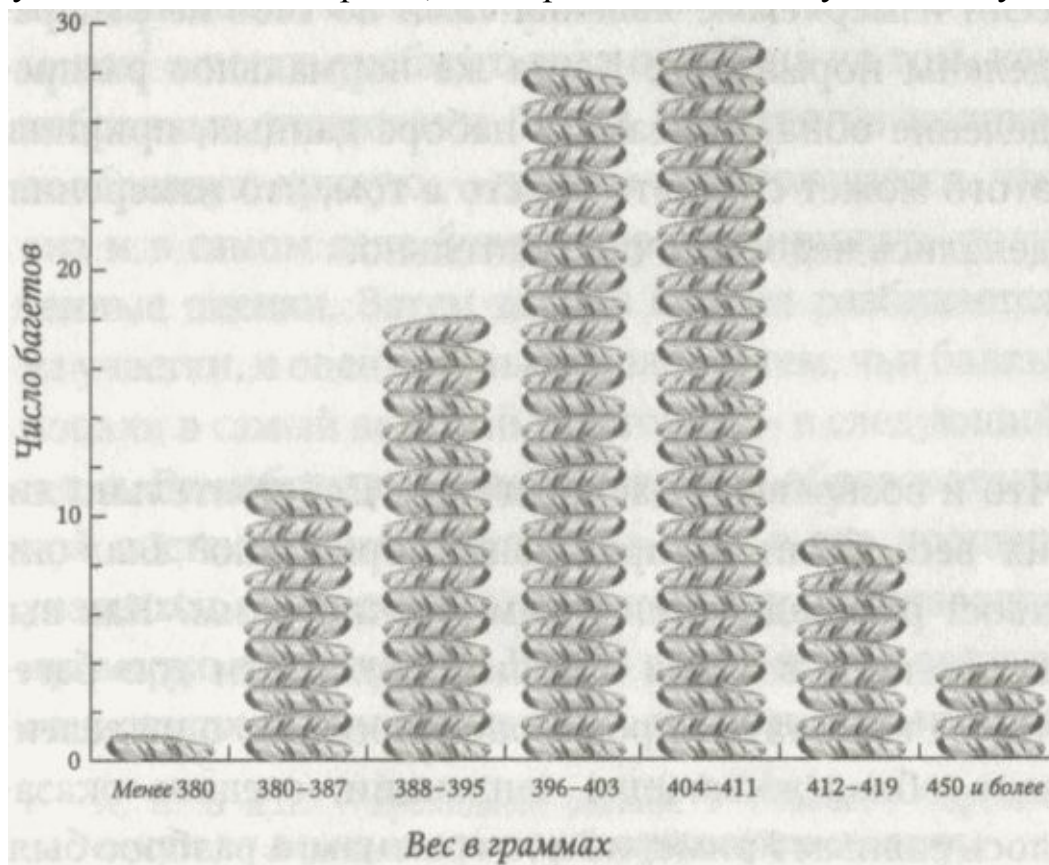
В своем бестселлере «Черный лебедь»^[68] экономист Нассим Николас Талеб утверждает, что нам свойственна тенденция к недооценке размера и важности хвостов кривых, описывающих распределения. Его аргумент состоит в том, что колоколообразная кривая — это исторически дефективная модель, потому что она не позволяет предсказывать ни появление очень редких, крайних событий, ни производимый ими эффект, — а к таким событиям могут относиться ключевые научные открытия, подобные изобретению Интернета, или нападение террористов, подобное атаке и сентября 2001 года. Вездесущность нормального распределения не относится к числу свойств окружающего мира, утверждает он, — тут проблема нашего восприятия, порожденная тем, как мы смотрим на те или иные явления.

Желание всюду усматривать колоколообразную кривую, пожалуй, сильнее всего проявляется в образовании. Расстановка оценок от А до F на экзаменах^[69] в конце учебного года основана на том, как набранные учащимися баллы ложатся на колоколообразную кривую, — причем предполагается, что она и в самом деле будет аппроксимировать полученные оценки. Затем данная кривая разбивается на участки, и оценка А выставляется тем, чьи баллы попали в самый верхний участок, В — в следующий и т. д. Во избежание резких встрясок образовательной системы важно, чтобы из года в год процент учащихся, получающих оценки от А до F, оставался примерно постоянным. Если в какой-то год получается слишком много оценок А или слишком много оценок F, то потом на некоторых курсах окажется слишком много или слишком мало студентов, что, в свою очередь, повлечет изменение требований к преподавательскому составу. Экзамены целенаправленно устроены таким образом, чтобы распределение результатов по возможности наилучшим образом ложилось на колоколообразную кривую, независимо от того, насколько точно это отражает реальный уровень знаний.

Высказывалось мнение, что почтение, питаемое некоторыми учеными к колоколообразной кривой, поощряет небрежность в работе. Из нашего примера с квинканксом мы видели, что случайные ошибки распределены нормально. Так что чем больше случайных ошибок мы сможем внести в измерение, тем более вероятно, что данные будут описываться колоколообразной кривой — даже если измеряемые явления сами по себе не распределены нормально. Когда же нормальное распределение обнаруживают в наборе данных, причина этого может состоять просто в том, что измерения делались недостаточно тщательно.

*

Что и возвращает нас к багетам. Действительно ли их веса были распределены нормально? Был ли хвост распределения узким или широким? Как вы помните, я взвесил в общей сложности 100 багетов. Результаты продемонстрировали определенные обнадеживающие тенденции: среднее оказалось равным примерно 400 граммам, а разброс был более или менее симметричным — между 380 и 420 граммами. Если бы я был неумом в той же степени, что и Анри Пуанкаре, я продолжил бы эксперимент и взвешивал багеты в течение года, получил бы 365 (плюс-минус несколько штук с учетом тех дней, когда пекарня закрыта) весов, которые мог бы сравнивать. При наличии большего объема данных характер распределения был бы яснее. И тем не менее моя скромная выборка оказалась достаточной, чтобы примерно представить себе, как формируется результат. Я использовал трюк, состоящий в «сжатии» полученных данных: нарисовал график, на котором сгруппировал багеты по весу со шкалой не в 1 грамм, а в 8 граммов. Вот что у меня получилось:



Нарисовав это, я почувствовал облегчение, поскольку и в самом деле было похоже, что в моем эксперименте с багетами веса укладываются на

колоколообразную кривую. Но при ближайшем рассмотрении оказалось, что график вовсе не является колоколообразной кривой. Да, веса группировались вокруг среднего значения, но кривая с очевидностью не обладала симметрией. Левая ее сторона оказалась не такой крутой, как правая, словно какой-то невидимый магнит немного вытягивал кривую влево.

Отсюда следовало два возможных вывода. Или веса багетов от «Греггса» не распределены нормально, или же они распределены нормально, но в ход моего эксперимента вкралась какая-то систематическая ошибка. У меня были определенные соображения, что это могла быть за ошибка. Несъеденные багеты скапливались у меня на кухне, и теперь я решил взвесить один из них. К моему удивлению, в нем был всего 321 грамм — существенно меньше, чем самый малый из весов, что появлялся в ходе моего эксперимента. И тут меня осенило: вес багета — величина не постоянная, багет становится легче по мере высыхания! Я снова отправился в магазин и выяснил, что багет теряет около 15 граммов веса за время от 8 утра до полудня.

Мне стало ясно, что мой эксперимент далеко не идеален. Я не учитывал время дня, в которое осуществлял свои измерения. Вне всякого сомнения, именно это внесло систематическую ошибку в распределение весов. Чаще всего я приходил в магазин к открытию и взвешивал свой хлеб около 8:10 утра; но иногда я вставал поздно. Эта случайная переменная *не* распределена нормально, потому что среднее время попадает куда-то между 8 и 9 утра, но нет никакого хвоста, описывающего период до 8 утра, поскольку магазин в это время еще закрыт. Зато с другой стороны хвост тянулся до самого обеда. И тогда мне пришло в голову кое-что еще. А как обстояло дело с окружающей температурой? Я начал свои опыты в начале весны, а закончил их в начале лета, когда стало существенно теплее. Я взглянул на цифры и обнаружил, что веса моих багетов в целом уменьшались по мере приближения к концу эксперимента. Летняя жара, заключил я, способствовала их более быстрому высыханию. И опять же, этот фактор мог влиять на вытягивание кривой влево.

Из моего эксперимента можно, наверное, заключить, что веса багетов аппроксимируются слегка искаженной колоколообразной кривой, но главный урок, который я для себя извлек, состоял в том, что измерение — вовсе не простая штука. Нормальное распределение — это теоретический идеал, и нельзя предполагать, что все результаты будут ему соответствовать. Тогда я задумался об Анри Пуанкаре. Когда он взвешивал свой хлеб, исключил ли он систематические ошибки, связанные с

парижской погодой или временем измерений? Быть может, из его экспериментов вовсе не следовало, что ему продавали 950-граммовый хлеб вместо килограммового, а следовало лишь, что между выпечкой и взвешиванием килограммовый хлеб теряет в весе 50 граммов? Вся история колоколообразной кривой в действительности представляет собой прекрасную аллегория нетривиального взаимоотношения теоретических и прикладных областей знания. Однажды Пуанкаре получил письмо от французского физика Габриэля Липмана, который блестяще выразил, почему нормальное распределение столь высоко превозносится: «Все верят в колоколообразную кривую: экспериментаторы — поскольку полагают, что ее присутствие доказано математически; математики — поскольку считают, что она следует из наблюдений». В науке, как и во многих других сферах, мы часто выбираем то, что устраивает нас более всего.

Глава 11

Конец прямой

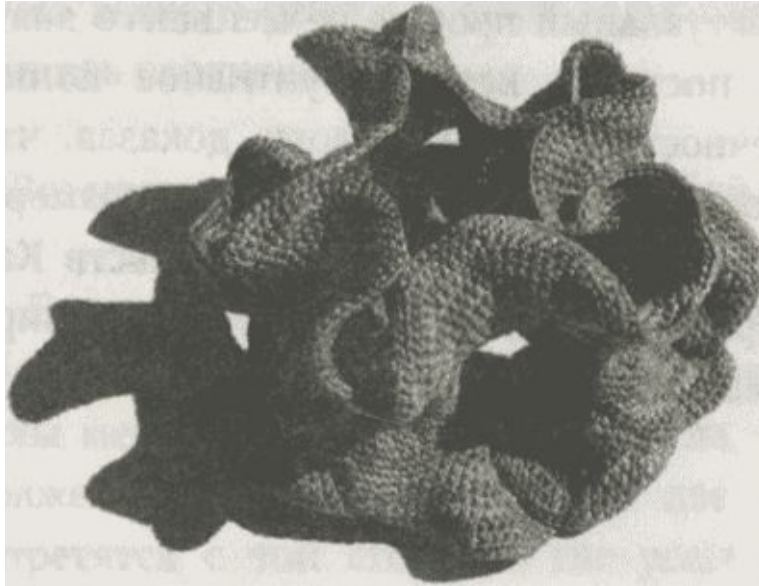
Автор завершает свое путешествие, остановившись на картофельных чипсах. Снова вспомнив Евклида, он оказывается в гостинице с бесконечным числом номеров, которая никак не может справиться с внезапным наплывом постояльцев.

Несколько лет тому назад Дайна Таймина сидела откинувшись на диване у себя дома в Итаке, штат Нью-Йорк, где она преподает в Корнеллском университете. Кто-то из домочадцев спросил ее, чем это она занимается.

— Пробую связать крючком гиперболическую плоскость, — ответила она, имея в виду конструкцию, которая одновременно озадачивала и пленяла математиков в течение почти двух столетий.

— Разве математики умеют вязать крючком? — презрительно обронил ее собеседник.

Несмотря на такое пренебрежительное отношение к ее занятию, Дайна только укрепилась в своем намерении использовать женское рукоделие для развития науки. И ей это удалось: она изобрела так называемое «гиперболическое вязание» — технику, в результате которой получаются очаровательные изделия, — а кроме того, внесла вклад в понимание геометрии, причем таким способом, о котором математики до этого и не подозревали.



Гиперболическое вязание

Чуть ниже я дам подробное определение понятию *гиперболический* и расскажу о том, что дает возможность понять модели, связанные Дайной, пока же все, что нам надо знать, — это то, что гиперболическая геометрия идет полностью вразрез с геометрией интуитивной, а правила игры, столь тщательно прописанные Евклидом в его «Началах», полагаются там неверными. Возникновение в начале XIX столетия «неевклидовой» геометрии ознаменовало появление в математике водораздела, который отсек геометрию, отвечающую нашему опыту, от новой геометрии, целиком и полностью ему противоречащей, что, впрочем, вовсе не делает ее математически противоречивой — наоборот, математически она верна в той же степени, что и родившаяся до нее евклидова система.

Позднее в том же столетии выдающийся немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) совершил интеллектуальный прорыв не меньшего значения: Кантор поставил наше интуитивное понимание бесконечности с ног на голову, доказав, что бесконечность может иметь различные размеры. Неевклидова геометрия и теория множеств Кантора стали воротами в необычные и чудесные миры, которые мы посетим на ближайших страницах.

*

«Начала» Евклида, как мы уже говорили, были и остаются самым влиятельным во все времена учебником по математике; в них заложены

основы геометрии древних греков. Кроме того, в «Началах» установлен *аксиоматический метод*; Евклид исходил из ясных определений используемых терминов и правил, которым надлежало следовать, а затем строил из них весь корпус своих теорем. Правила, или аксиомы, представляют собой утверждения, которые принимаются без доказательства, и поэтому математики всегда стараются сделать их простыми и самоочевидными настолько, насколько это возможно.

Евклид доказал в «Началах» 465 теорем, исходя всего лишь из пяти аксиом, которые приобрели широкую известность как пять евклидовых постулатов:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Каждую ограниченную прямую можно продолжить неопределенно.
3. Из всякого центра всяким радиусом можно описать окружность.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы меньшие, чем два прямых угла, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Когда мы добираемся до пятого постулата, закрадывается подозрение, что тут не все в порядке. Начинаются постулаты достаточно бодро. Первые четыре легко формулируются, их несложно понять и легко принять. Но что же в их компании делает пятый? Он многоречивый, сложный и не слишком самоочевидный. Да и не столь уж фундаментальный: первый раз он требуется в «Началах» в предложении 29.

Несмотря на свою любовь к дедуктивному методу Евклида, математики невзлюбили его пятый постулат; он не только посягал на их чувство прекрасного, но и заставлял подозревать, что там принимается слишком много для простой аксиомы. И действительно, в течение 2000 лет много

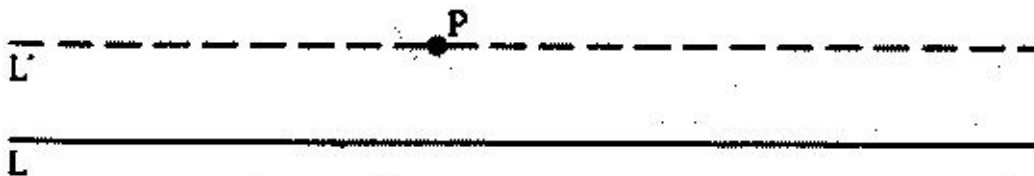
великих умов делали попытки изменить статус пятого постулата, пытаясь вывести его из остальных постулатов и тем самым разжаловать в теорему. Но никто в этом так и не преуспел. Быть может, величайшее свидетельство гения Евклида состоит как раз в понимании того, что и пятый постулат необходимо принимать без доказательства.

Большой успех сопутствовал математикам в попытках переформулировать постулат в других терминах. Например, англичанин Джон Уоллис еще в XVII веке понял, что все, имеющееся в «Началах», можно доказать, взяв первые четыре постулата неизменными и заменив пятый постулат следующим альтернативным вариантом: *если задан любой треугольник, его можно увеличить или, наоборот, сжать до любого размера таким образом, чтобы длины сторон оставались в неизменном отношении друг к другу, а углы между сторонами не менялись*. Хотя осознание того, что пятый постулат можно перефразировать как утверждение о треугольниках, а не о прямых, означало глубокое проникновение в суть происходящего, это не развеяло беспокойства математиков: альтернативный постулат Уоллиса, может, и был более (хотя и не так уж) интуитивным, чем пятый постулат, но он все равно не получался столь же простым или очевидным, как первые четыре. Были открыты и другие эквиваленты пятого постулата; Евклидовы теоремы по-прежнему оставались верными, если заменить пятый постулат утверждением о том, что сумма углов треугольника составляет 180 градусов, или что верна теорема Пифагора, или что для всех окружностей отношение длины окружности к диаметру равно π . Сколь бы неожиданным такое ни показалось, все эти утверждения математически взаимозаменяемы. Эквивалентное утверждение, которое наиболее удобным образом выражает суть пятого постулата, однако, касается поведения параллельных линий. Начиная с XVIII столетия математики, изучавшие Евклида, стали отдавать предпочтение следующему варианту, известному как постулат о параллельных:

Для заданной прямой и точки вне ее существует самое большее одна прямая, проходящая через эту точку и параллельная данной прямой.

Можно показать, что постулат о параллельных имеет отношение к геометрии двух различных типов поверхности, где все зависит от фразы «самое большее одна прямая», которая на языке математики означает «или одна прямая, или ни одной». В первом случае, проиллюстрированном на рисунке, для любой прямой L и точки P существует *только одна* проходящая через P прямая, параллельная L (она обозначена как L'). Этот

вариант постулата о параллельных применим к поверхности наиболее очевидного типа — плоской поверхности, такой как лист бумаги, лежащий у вас на столе.



Постулат о параллельных

Теперь рассмотрим второй вариант постулата, в котором для любой прямой L и точки P вне ее *нет* ни одной прямой, проходящей через P и параллельной L . С ходу нелегко сообразить, что это может быть за поверхность. В какую ужасную даль от Земли нам придется отправляться на ее поиски?

Да никуда не придется. Мы так и останемся на Земле! Представим себе, например, что наша линия L — это экватор, и вообразим, что точка P — это Северный полюс. Единственные прямые линии, идущие через Северный полюс, — это линии долготы, такие как Гринвичский меридиан, и при этом все линии долготы пересекают экватор. Таким образом, прямой линии, которая проходила бы через Северный полюс и была бы при этом параллельна экватору, просто нет.

Постулат о параллельных говорит о том, что кроме геометрии поверхностей существует еще и геометрия поверхностей сферических. «Начала» имели дело с плоскими поверхностями, и в течение 2000 лет именно они оставались в фокусе математических изысканий. Сферические же поверхности, например поверхность Земли, представляли тогда больший интерес для штурманов и астрономов, чем для теоретиков. Лишь к началу XIX века математики создали теорию, которая охватывала как плоские, так и сферические поверхности, а произошло это только после того, как ученые познакомились с поверхностями третьего типа — гиперболическими.

*

Среди вознамерившихся вывести постулат о параллельных из первых четырех постулатов и тем самым доказать, что это вовсе не постулат, а теорема, решительнее всех был настроен, пожалуй, Янош Бойяи (1802–1860) — студент из Трансильвании, обучавшийся инженерному делу. Его

отец Фаркаш — тоже математик! — исходя из собственного неудачного опыта хорошо представлял себе, какие испытания уготованы сыну на сем пути. «Бога ради, заклинаю тебя, брось это дело, — убеждал он сына. — Оно опаснее, чем чувственные удовольствия, поскольку способно точно так же поглотить все твоё время и лишить тебя здоровья, душевного спокойствия и счастья в жизни». Но Янош упрямо игнорировал отцовские увещевания; более того, в своём бунтарстве он был даже готов рассматривать возможность ложности этого евклидовского постулата! Не надо забывать, что для математиков «Начала» были чем-то вроде Библии для христиан — книгой, содержащей непререкаемую, священную истину. И хотя вопрос о том, является ли пятый постулат аксиомой или теоремой, обсуждался, и довольно активно, никто до Бояйи-младшего не осмеливался предположить, что это утверждение Евклида не совсем верно. Прошло время, и оказалось, что постановка этого вопроса открыла окно в новый мир.

Постулат о параллельных утверждает, что для любой заданной прямой и точки вне её существует *самое большее* одна параллельная прямая, проходящая через указанную точку. Яношу хватило смелости предложить, что для любой заданной прямой и точки вне её имеется *более одной* параллельной прямой, проходящей через эту точку. Хотя было не слишком ясно, как представить себе поверхность, для которой это утверждение верно, Янош понял, что геометрия, следующая из этого утверждения, взятого вместе с первыми четырьмя постулатами, по-прежнему остается математически последовательной. Это было революционным открытием, и Янош сумел осознать его судьбоносное значение. В 1823 году Янош написал отцу письмо, в котором заявлял: «Из ничего я создал новую вселенную».

На руку Яношу, вероятно, было то обстоятельство, что он работал один, и вне стен какого-либо математического заведения, и потому был в меньшей степени зажат в рамки традиционных воззрений. Более того, даже уже совершив свое великое открытие, он не думал, что станет математиком. После окончания университета Бояйи вступил в Австро-Венгерскую армию, где, по имеющимся отзывам, проявил себя среди сослуживцев как один из лучших фехтовальщиков и танцоров. Кроме этого, он был замечательным музыкантом и однажды, вызвав на дуэль сразу 13 офицеров, поставил условие, что в случае победы сыграет проигравшему пьесу на скрипке.

А тем временем другой, неизвестный Яношу математик, живший в еще большем, чем Трансильвания, удалении от европейских научных центров,

тоже размышлял о пятом постулате. Он неуклонно продвигался вперед, несмотря на то что никто из коллег не поддерживал и не принимал его работы. В 1826 году профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) направил свою статью, в которой подвергал сомнению истинность постулата о параллельных, в журнал «Записки физико-математического отделения». Статью (она называлась «О началах геометрии») не приняли, после чего Лобачевский решил напечатать ее в университетском «Казанском вестнике», где ее, естественно, почти никто не заметил. Позже петербургские профессора подвергли его работу жесточайшей критике.

Ирония судьбы — в истории низвержения пятого постулата Евклида с пьедестала незыблемой истины был еще один драматичный момент: за несколько десятилетий до Яноша Бойяи и Николая Лобачевского еще один ученый сделал то же самое открытие, причем произошло это в самом сердце математической науки; однако этот человек не стал обнародовать свои результаты среди коллег. Почему Карл Фридрих Гаусс — величайший математик своего времени^[70] — решил сохранить свою работу о постулате о параллельных в тайне, до сих пор точно не знает никто. Принято считать, что он не хотел вступать в распри с университетскими коллегами по поводу авторитета Евклида.

Однако, прочитав о результатах Яноша, опубликованных в 1831 году в приложении к книге его отца Фаркаша, Гаусс дал понять, что он еще раньше высказал предположение о возможной неправомерности постулата о параллельных. Гаусс написал своему старому университетскому товарищу Фаркашу письмо, в котором отозвался о Яноше как о «гении первой величины», однако же добавил, что не может воздать должной похвалы его замечательному научному открытию: «Ибо хвалить его означало бы хвалить самого себя. Содержание его труда целиком совпадает с моими собственными открытиями, некоторым из которых исполнилось уже 30 или 35 лет. Поначалу я собирался записать все это, дабы оно по крайней мере не ушло в небытие вместе со мной. Поэтому приятной неожиданностью стало известие, что я избавлен от сего труда, и в особенности я рад, что не кто иной, как сын моего старого друга, помог мне в этом деле». Узнав, что первым к цели пришел Гаусс, Янош очень огорчился. Когда же, уже годы спустя, он узнал, что русский математик Лобачевский тоже опубликовал доказательство раньше него, он был просто потрясен, а потом уверовал в то, что Лобачевский — вымышленный персонаж, изобретенный Гауссом в качестве изощренной уловки с целью лишить его, Яноша, первенства.

*

Финальный аккорд в исследовании пятого постулата Гаусс сделал незадолго до своей смерти. Будучи уже серьезно больным, он выбрал для одного из своих самых способных учеников, 27-летнего Бернхарда Римана (1826–1866) — такую тему пробной лекции: «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Риман — болезненно застенчивый сын лютеранского пастора, готовясь к лекции, поначалу испытывал довольно серьезные затруднения, зато страдания были не напрасны — его лекции было суждено произвести революцию в математике. Впоследствии он способствовал перевороту и в физике — предложенные им новаторские идеи оказались теми ценнейшими семенами, из которых потом выросла общая теория относительности Эйнштейна.

Лекция Римана, прочитанная им в 1854 году, ознаменовала собой тектонический сдвиг в понимании геометрии, возникающий в результате низвержения постулата о параллельных — Риман дал описание всеобъемлющей теории, включающей как Евклидовы, так и не Евклидовы идеи. Ключевой концепцией, лежавшей в основе теории Римана, была кривизна пространства. Когда поверхность имеет нулевую кривизну, она является плоской, или евклидовой, и тогда выполняется все, что получено в «Началах». Когда же поверхность *искривлена*, то есть имеет положительную или отрицательную кривизну, она — неевклидова, и применительно к ней написанное в «Началах» неверно.

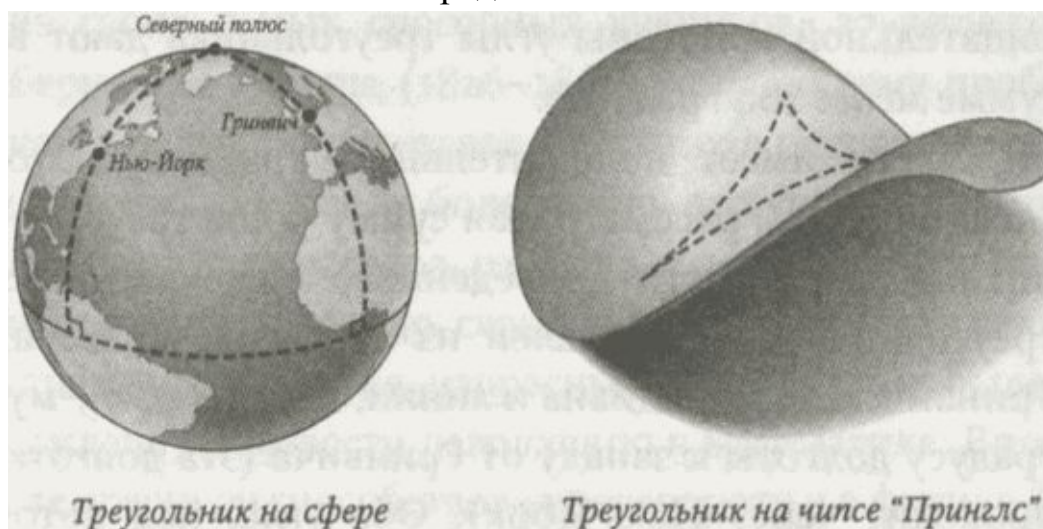
Простейший способ понять, что такое кривизна, учит нас Риман, — рассмотреть то, что происходит с треугольниками. На поверхности нулевой кривизны сумма углов треугольника — 180 градусов. На поверхности *положительной* кривизны эта сумма *превышает* 180 градусов. На поверхности отрицательной кривизны углы треугольника дают в сумме *менее* 180 градусов.

Сфера имеет положительную кривизну. Это можно понять, рассматривая сумму углов треугольника в левой части приведенного ниже рисунка: треугольник там составлен из отрезков экватора, Гринвичского меридиана и линии, идущей по 73-му градусу долготы к западу от Гринвича (эта долгота проходит через Нью-Йорк). Оба угла, под которыми линии долготы пересекают экватор, равны 90 градусам, так что сумма всех трех углов должна быть больше 180 градусов.

А поверхности какого типа имеют отрицательную кривизну? Другими словами, где искать те треугольники, углы которых в сумме дают меньше 180 градусов? Откройте пачку картофельных чипсов «Принглс», и вы

поймете где. Нарисуйте треугольник на седловой части чипса (для чего можно использовать тюбик с нежной французской горчицей) — треугольник будет выглядеть как «вогнутый» в сравнении с «выпуклым» треугольником, который мы наблюдали на сфере. Ясно, что его углы в сумме дают менее 180 градусов.

Поверхность отрицательной кривизны называется гиперболической. Итак, поверхность чипса «Принглс» — гиперболическая. Впрочем, чипс — это всего лишь первый шаг к пониманию гиперболической геометрии, потому что у него есть край. Стоит только показать математику край, как он тут же захочет выйти за его пределы.



Можно посмотреть на это и другим способом. Проще всего представить себе поверхность нулевой кривизны без края: взять хотя бы ту страницу, что сейчас перед вами, разгладить ее, положить на стол, а потом продолжить по всем направлениям до бесконечности. Если бы мы жили на подобной поверхности и отправились на прогулку вдоль прямой линии в любом направлении, то никогда не добрались бы до края. Аналогичным образом, у нас есть очевидный пример поверхности положительной кривизны без края: это сфера. Если бы мы жили на сфере, то могли бы идти, никогда не останавливаясь и нигде не встречая края. (Конечно, мы и в самом деле живем на том, что представляет собой грубое приближение к сфере. Если бы Земля была совершенно гладкой, без всяких океанов и гор, встающих у нас на пути, и мы бы отправились в путь, в конце нашего путешествия мы снова вернулись бы к исходной точке — на самом деле мы двигались бы по окружности.)

А как же выглядит поверхность отрицательной кривизны без края? Она не может выглядеть как чипс, потому что если мы бы жили на чипсе «Принглс» размером с Землю и начали бы шагать в одном направлении, то

в конце концов свалились бы за край. Математики долго гадали, как могла бы выглядеть «бескрайняя» гиперболическая поверхность — такая, по которой можно было бы путешествовать так далеко, как только захочется, и никогда не достигать края, но которая при этом не теряет своих гиперболических свойств. Понятно, что такая поверхность должна быть постоянно изогнута как чипс; так может, попробовать склеить ее из множества чипсов указанной формы? Увы, так у нас ничего не получится, потому что чипсы «Принглс» плохо состыковываются один с другим, а если заполнять образующиеся пустоты какой-то другой поверхностью, то эти добавленные области не будут гиперболическими. Другими словами, чипсы позволяют представить себе лишь локальные гиперболические свойства. Вещь, которую необычайно сложно представить — и которая требует напряжения мысли у даже самых блестящих математических умов, — это гиперболическая поверхность, которая продолжается без конца и без края.

Сферические и гиперболические поверхности — это математические противоположности. Покажем на примере, почему это так. Вырежем кусок из сферической поверхности — скажем, из баскетбольного мяча. Когда мы надавим на вырезанный кусок, чтобы он плотно прижался к земле и сделался плоским, он или растянется, или же разорвется просто потому, что в нем недостаточно материала для того, чтобы точно лечь на плоскость. А теперь представим себе резиновый чипс. Когда мы попробуем разложить его на плоскости, в нем окажется *слишком много* материала, и он сложится в складки. В то время как сферическая поверхность сворачивается, гиперболическая поверхность все время расширяется.

Вернемся к постулату о параллельных, который дает нам весьма точный способ классификации поверхностей на плоские, сферические и гиперболические. Для любой заданной прямой и точки вне ее:

На *плоской поверхности* имеется *одна и только одна* параллельная прямая, проходящая через эту точку.

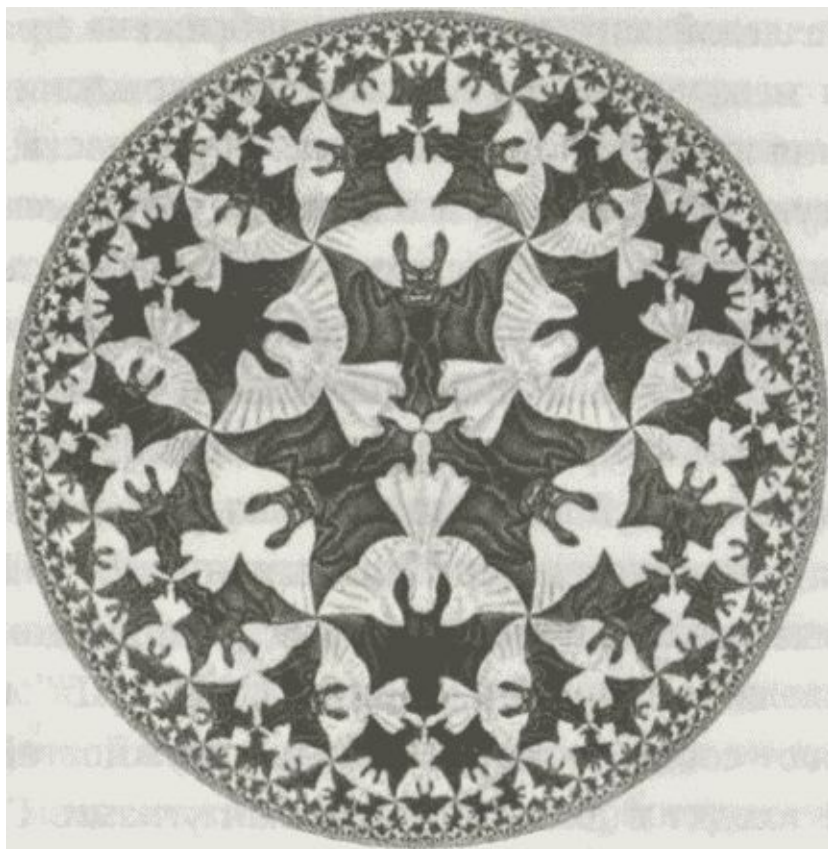
На *сферической поверхности* нет *ни одной* параллельной линии, проходящей через эту точку^[71].

На *гиперболической поверхности* имеется *бесконечно много* параллельных линий, проходящих через эту точку.

Поведение параллельных линий на плоской или сферической поверхности можно понять интуитивно, потому что нам легко представить себе плоскую поверхность, которая продолжается до бесконечности, и потому что все мы знаем, что такое сфера. Гораздо более сложная задача — понять поведение параллельных линий на гиперболической поверхности, потому что совершенно не ясно, как будет выглядеть такая поверхность, когда она продолжается до бесконечности. Параллельные линии в гиперболическом пространстве расходятся все дальше и дальше друг от друга. При этом, отклоняясь одна от другой, они не изгибаются, потому что, раз мы говорим о параллельных линиях, они должны быть прямыми, и тем не менее они расходятся из-за того, что гиперболическая поверхность постоянно искривляется, уходя сама от себя, а по мере того, как поверхность расширяется, между любыми двумя параллельными линиями появляется все больше и больше места. Да уж, такая картина кого угодно сведет с ума, и неудивительно, что, несмотря на всю свою гениальность, Риман не сумел придумать никакой поверхности, которая имела бы заданные свойства.

*

В последние десятилетия XIX века проблема представления гиперболической плоскости возбуждала многих математиков. Одна из таких попыток, предпринятая Анри Пуанкаре, захватила воображение голландского художника-графика М. К. Эшера (1898–1972). Его знаменитая серия гравюр «Предел круга» возникла как результат знакомства с предложенной французским математиком «дисковой моделью» гиперболической поверхности. На гравюре «Предел круга IV» двумерная вселенная помещена на круг (диск), где ангелы и демоны уменьшаются по мере приближения к краю. Сами ангелы и демоны, однако, и не подозревают о том, что уменьшаются, потому что по мере того, как они сами становятся меньше, то же самое происходит и с их измерительными приборами. С точки зрения обитателей диска все они сохраняют свои размеры, а их вселенная продолжается до бесконечности.

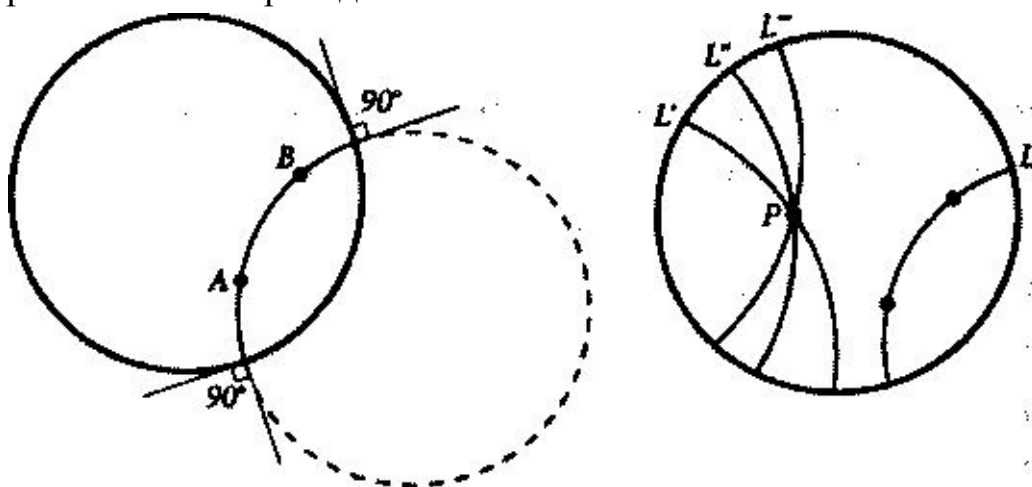


«Предел круга IV»

Изобретательность, воплощенная в дисковой модели Пуанкаре, состоит в том, что она восхитительным образом иллюстрирует, как параллельные линии ведут себя в гиперболическом пространстве. Прежде всего, нам надо определиться с тем, что такое прямая линия на диске. Аналогично тому, как прямые на сфере линии выглядят искривленными, когда их изображают на плоской карте (например, маршруты самолетов являются прямыми, но на карте выглядят искривленными), линии, являющиеся прямыми в диско-мире, также кажутся нам искривленными. Пуанкаре определил прямую линию на диске как сечение диска окружностью, которая входит в него под прямым углом.

На левой картинке внизу изображена прямая линия между точками A и B , для нахождения положения которой надо построить окружность, проходящую через точки A и B и входящую в диск под прямым углом. Гиперболический вариант постулата о параллельных утверждает, что для каждой прямой L и точки P вне этой прямой имеется бесконечно много прямых, параллельных L , которые проходят через P . Это показано на

рисунке внизу справа, где отмечено три прямых — L' , L'' и L''' , — которые проходят через точку P , но при этом все параллельны прямой L . Линии L' , L'' и L''' представляют собой части различных окружностей, которые входят в диск под прямыми углами. Глядя на рисунок, можно понять, как может получиться, что имеется бесконечно много прямых, параллельных L и проходящих через P , — просто потому, что можно нарисовать бесконечное число окружностей, которые входят в диск под прямыми углами и проходят через P . Модель Пуанкаре, кроме того, помогает нам понять смысл утверждения о том, что две параллельные линии расходятся: L и L' параллельны, но становятся все дальше и дальше друг от друга по мере приближения к краю диска.



Диско-мир Пуанкаре позволяет понять многое, но не все. При том что он снабжает нас концептуальной моделью гиперболического пространства, искаженного за счет взгляда через довольно странную линзу, он не показывает, как же гиперболическая поверхность будет выглядеть в нашем мире. Поиску более реалистичных гиперболических моделей — предприятию, которое подавало большие надежды в последние десятилетия XIX столетия, — нанес в 1901 году удар выдающийся немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943): он доказал, что невозможно описать гиперболическую поверхность, используя какую-либо формулу. Математическое сообщество приняло доказательство Гильберта без энтузиазма, поскольку математики решили, что если нет никакого способа описать поверхность с помощью формулы, то, значит, такая поверхность и не существует. Интерес к производству моделей гиперболических поверхностей стал угасать.

*

Что и возвращает нас к Дайне Таймине, с которой я встретился в

Лондоне на южном берегу Темзы, представляющем собой набережную-променад, вдоль которой располагаются театры, художественные галереи и кинотеатры. Она кратко напомнила мне историю гиперболических пространств — предмет, который она преподавала в качестве ассистента в Корнеллском университете. Из Гильбертова доказательства невозможности описания гиперболического пространства с помощью формулы, сообщила она мне, имелось следствие: компьютеры также оказались не в состоянии создавать образы гиперболических поверхностей, потому что компьютеры могут создавать только образы, основанные на формулах. Однако в 1970-х годах геометр Уильям Тёрстон (р. 1946) предложил подход, хоть и не основанный на высоких технологиях, но оказавшийся весьма плодотворным. Не обязательно обладать формулой для создания гиперболической модели, говорит Тёрстон, все, что требуется, — это бумага и ножницы. Тёрстон, которому в 1981 году была присуждена Филдсовская медаль (высшая награда для математика) и который теперь был коллегой Дайны в Корнеллском университете, предложил модель, состоящую в соединении друг с другом бумажных кусочков, имеющих форму подковы.

Дайна использовала модель Тёрстона на занятиях со студентами, но модель оказалась столь хрупкой, что неизменно рассыпалась на части, и Дайне каждый раз приходилось делать новую. «Ненавижу склеивать бумагу. Это занятие сводит меня с ума», — жаловалась она. И тут ей пришла в голову свежая идея — что, если вместо бумаги попробовать *связать* модель гиперболической плоскости?

Идея ее была проста: наберем один ряд петель, а затем в каждом следующем ряду будем прибавлять некоторое заданное количество петель. Например, можно прибавлять по одной петле через каждые две. В таком случае, если мы начали с ряда из 20 петель, то во втором ряду их будет 30 (мы добавили 10), в третьем — 45 (мы добавили 15) и т. д. (В четвертом должно оказаться 22,5 дополнительные петли, но, поскольку полпетли связать невозможно, будем округлять до большего или меньшего их целого числа.) По замыслу Дайны должен был получиться кусок вязаного полотна, который будет становиться все шире и шире, как будто он гиперболически расширяется сам из себя. Однако вязание на спицах — дело довольно хлопотное, из-за одной ошибки порой приходится распустать весь ряд. Поэтому вместо спиц Дайна взяла вязальный крючок. Если вязать крючком, то легче исправить ошибку, потому что в процессе вязания на крючке всего одна петля. Так что она довольно быстро приновилась. Помогла еще и настойчивость в овладении рукоделием — привычка,

приобретенная в детстве, которое она провела в 1960-х годах в Латвии.

В своей первой вязаной модели она добавляла в каждом ряду по одной петле через каждые две, как и в нашем примере, упомянутом выше. В результате, однако, получился кусок с большим количеством плотных сборок. «Как-то он слишком сильно скручивался, — объяснила она, — и не удавалось толком разглядеть, что же там происходит». Поэтому для второй модели она решила попробовать другой вариант, прибавляя в каждом ряду одну петлю через каждые пять. Результаты превзошли ожидания. Теперь получившееся полотно фалдило как надо. Дайна выбрала и отметила прямые линии, входящие в расширяющиеся «складки» и выходящие из них, и сразу увидела, что удастся проследить за тем, как эти исходно параллельные линии расходятся друг от друга. «Именно такую картину я всегда и хотела увидеть, — сияла она от радости. — Давно не получала такого удовольствия. Разве это не здорово — сделать своими руками то, чего не удастся сделать на компьютере».

Дайна показала модель гиперболического кроше своему мужу, и он пришел в такой же восторг. Дэвид Хендерсон — профессор геометрии в Корнеллском университете, специализирующийся на топологии, про которую Дайна, по ее словам, вообще ничего не знает. Он объяснил ей, что топологам давно известно, что, когда на гиперболической плоскости нарисован восьмиугольник, его можно сложить таким образом, что он будет напоминать штаны. «Надо построить восьмиугольник!» — сказал он ей, и именно так они и сделали. «Никто раньше никогда не видел гиперболических штанов!» — воскликнула Дайна, открыла спортивную сумку, достала оттуда связанный ею гиперболический восьмиугольник и показала мне, как он складывается. Получилось нечто, очень похожее на детские вязаные штанишки.

Новость о связанных Дайной моделях разлетелась по математическому факультету Корнеллского университета. Дайна рассказала мне, как она показала свою модель одному из коллег, который, как ей было известно, пишет работы о гиперболических плоскостях. «Он рассмотрел модель и начал складывать ее так и сяк. Вдруг лицо его просияло. „Так вот как выглядит ороцикл!“ — воскликнул он, имея в виду очень сложный тип кривых, которые до того ему никак не удавалось изобразить. На протяжении всей своей научной карьеры он писал о них, — поясняет Дайна, — но они так и оставались лишь в его воображении».

Не будет преувеличением сказать, что гиперболические модели Дайны способствовали более глубокому пониманию концепций, которые относятся к довольно неблагоприятной области математики. Ее модели дали

студентам возможность почувствовать гиперболическую плоскость, потрогать и пощупать поверхности, которые прежде подлежали только абстрактному пониманию. Эти модели, однако, не идеальны. Одна из проблем состоит в том, что из-за толщины пряжи и неровности петель вязанные модели — лишь грубое приближение к тому, что в идеале должно быть гладкой поверхностью. И тем не менее они намного универсальнее и точнее, чем чипсы «Принглс». Если бы кусок вязаной гиперболической поверхности имел бесконечное число линий, то теоретически на ней можно было бы жить, и более того — отправиться в бесконечно долгое путешествие в выбранном направлении и никогда не дойти до края.

*

Одно из достоинств моделей, связанных Дайной, состоит в том, что они, как оказалось, неожиданным образом выглядят вполне естественно, если учесть, насколько формальны они по своей сути. Если в каждом ряду прибавлять по петле через относительно большие промежутки, то модель будет похожа на капустный лист. При большем же увеличении числа прибавляемых петель (то есть если прибавлять петли чаще) полотно естественным образом будет складываться в нечто, напоминающее коралл. Дайна прилетела в Лондон по причине открытия инспирированной ее моделями выставки «Вязаный гиперболический коралловый риф», цель которой состояла в привлечении внимания к уничтожению морской среды. Благодаря своему математическому новаторству Дайна нечаянно породила глобальное движение любителей вязания крючком.

За последние десять лет Дайна связала более сотни гиперболических моделей. Самую большую из них она привезла с собой в Лондон. Она розового цвета, на нее пошло 5,5 километра пряжи, ее вес 4,5 килограмма. Дайна вязала ее шесть месяцев. Завершающие этапы работы были настоящим испытанием. «По мере того как она тяжелела, поворачивать ее становилось все труднее». Замечательное свойство модели — это ее невероятно большая поверхность, площадь которой составляет 3,2 квадратных метра (что в два раза превосходит площадь поверхности самой Дайны). Гиперболические поверхности дают максимальные площади при минимальном объеме, и именно поэтому их так любят некоторые растения и морские организмы. Когда организму требуется большая площадь поверхности — скажем, как в случае с кораллами, для поглощения пищи, — он растет гиперболическим образом.

Маловероятно, что Дайна пришла бы к идее связать гиперболическую поверхность, если бы она родилась мужчиной, и это делает ее изобретения

заметным событием в культурологической истории математики, где женщины в течение долгого времени были представлены в весьма малой степени. На самом деле вязание крючком — лишь один из немногих примеров традиционно женских рукоделий, вдохновляющих математиков на исследование новых подходов. Математическое вязание, производство килтов, вышивка и ткачество — все это даже составляет университетский курс, известный как «математика и текстильные ремесла».

*

Когда гиперболическое пространство впервые предстало перед мысленным взором ученых, казалось, что оно устроено наперекор всякому чувству реальности, но со временем оно заняло свое место как явление ничуть не менее «реальное», чем плоская или сферическая поверхность. Каждая поверхность имеет свою собственную геометрию, и нам следует выбрать ту из них, которая окажется самой подходящей, — или, как однажды заметил Анри Пуанкаре, «одна геометрия не может быть более истинной, чем другая; она может лишь быть более удобной». Евклидова геометрия, например, лучше всего подходит для школьников, вооруженных линейками, циркулями и плоскими листами бумаги, в то время как сферическая геометрия больше годится для авиационных пилотов, прокладывающих маршрут для своего самолета.

Физики также проявляли интерес к выяснению того, какая геометрия более всего подходит для их целей. Идеи Римана о кривизне поверхностей снабдили Эйнштейна средствами для совершения одного из величайших интеллектуальных прорывов. Ньютоновская физика предполагала, что пространство является евклидовым, или плоским. Общая теория относительности Эйнштейна, однако, утверждает, что геометрия пространства — времени (трехмерное пространство плюс время, рассматриваемое как четвертое измерение) — не плоская, а искривленная. В 1919 году британская научная экспедиция, направившаяся в Собрал — город на северо-востоке Бразилии, — сфотографировала во время солнечного затмения звезды, находящиеся позади Солнца, и обнаружила, что они немного смещены относительно своих реальных положений. Объяснение этому дала теория Эйнштейна, согласно которой свет от звезд, прежде чем достигнуть Земли, искривляется вблизи Солнца. Траектория луча света кажется изогнутой вблизи Солнца, если рассматривать луч в трехмерном пространстве (а это единственный доступный нам способ наблюдений), но на самом деле он следует по прямой линии, определяемой искривленной геометрией пространства — времени. Тот факт, что теория

Эйнштейна правильно предсказала положение звезд, послужил доказательством верности общей теории относительности, а сам Эйнштейн стал мировой знаменитостью. Лондонская «Таймс» пестрела заголовками: «Революция в науке. Новая теория Вселенной. Ньютоновские идеи ниспровергнуты».

*

Эйнштейн был занят выяснением вопроса о пространстве — времени, которое, как он показал, искривлено. А что насчет кривизны нашей Вселенной, если не рассматривать время как еще одно измерение? Чтобы узнать, какая же геометрия более всего отвечает поведению наших трех пространственных измерений на больших масштабах, надо понять, как линии и формы ведут себя на экстремально больших расстояниях. Ученые надеются узнать это из данных, которые в настоящее время собирает спутник «Планк», запущенный в мае 2009 года и измеряющий реликтовое излучение космоса — так называемый «последний отблеск» Большого взрыва, — и делает это с более высоким разрешением и чувствительностью, чем были доступны когда-либо ранее. Среди рассматриваемых возможностей обсуждается Вселенная или плоская, или сферическая (но достаточно плоская), хотя все еще не исключено, что она может оказаться гиперболической. Есть немалая доля иронии в том, что геометрия, исходно считавшаяся лишенной смысла, оказалась пригодной для описания самого того, что ни на есть реального положения вещей.

*

Примерно в то же самое время, когда математики исследовали противоречащие здравому смыслу неевклидовы пространства, великий немецкий ученый Георг Кантор (1845–1918) перевернул вверх ногами наше понимание другого математического понятия — бесконечности. Кантор преподавал в Университете Галле-Виттенберг в Германии, где он и развил новаторскую теорию чисел, в которой бесконечность может иметь более одного размера. Идеи Кантора были столь необычны, что поначалу вызывали лишь насмешки. Многие математики того времени их совершенно не воспринимали. Анри Пуанкаре, например, отзывался о работах Кантора как о «заболевании, позорной болезни, от которой математика когда-нибудь излечится», а Леопольд Кронекер — профессор математики в Берлинском университете, учитель Кантора, — отвергал его как «шарлатана» и «развратителя юношества». Эта словесная война, надо думать, не прошла для Кантора даром и во многом обусловила нервный

срыв, случившийся с ним в 1884 году, когда ему было 39 лет. То был первый из многочисленных эпизодов в его жизни, связанных с глубокой депрессией и пребыванием в клиниках. В своей книге о Канторе «Всё и более» Дэвид Фостер Уолис пишет: «В наши дни Психически Больной Математик занимает, по всей видимости, место, в предыдущие эпохи зарезервированное за Странствующим Рыцарем, Святым Мучеником, Терзающимся Художником и Сумасшедшим Ученым, представляя собой некое подобие Прометея, который отправляется в запретные края и возвращается с дарами, которыми готовы воспользоваться все, но за которые платит он один». Литература и кино во многом ответственны за придание связи между математикой и безумием такого налета романтизма. Подобное клише удовлетворяет сюжетно-тематическим требованиям, предъявляемым к голливудскому сценарию (основной пример — «Игры разума»), но, конечно, представляет собой некорректное обобщение; и тем не менее великим математиком, стоящим за этим архетипом, вполне мог бы быть Кантор. Данный стереотип подходит к нему особенно хорошо, поскольку он вступил в схватку с бесконечностью — концепцией, связывающей математику, философию и религию. Он не только бросал вызов математическим доктринам, но и создавал основы абсолютно новой теории познания, которая для него была еще и способом понять Бога; неудивительно, что в процессе этих свершений он серьезно задел некоторых людей.

Бесконечность — это одна из самых головоломных концепций в математике. Мы уже видели ранее, при обсуждении парадоксов Зенона, что попытка представить себе бесконечное число все уменьшающихся расстояний полна математических и философских ловушек. Греки из всех сил старались избегать бесконечностей. Евклид выражал идеи математической бесконечности через отрицательные утверждения. Например, его доказательство того, что имеется бесконечное число простых чисел, есть по существу доказательство отсутствия самого большого простого числа. Древние стеснительно избегали обращаться с бесконечностью как с самодостаточной концепцией, и именно поэтому бесконечный ряд, неизменно присутствующий во всех парадоксах Зенона, до такой степени ставил их в тупик.

К XVII столетию математики возжелали освоить операции, включающие бесконечно много шагов. Работы Джона Уоллеса, который в 1655 году ввел символ ∞ для бесконечности, чтобы использовать его в своей работе о бесконечно малых, расчистил дорогу для математического анализа Исаака Ньютона. Открытие полезных соотношений, включающих

в себя бесконечное число членов, например, $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$, показало, что бесконечность не так уж враждебна, и тем не менее ученые все равно относились к ней с осмотрительностью и подозрением. В 1831 году Гаусс проявил житейскую мудрость, заметив, что бесконечность — это «просто способ говорить» о пределе, который никогда не достигается, просто идея, выражающая потенцию продолжать действия бесконечно. Канторова же ересь состояла в рассмотрении бесконечности как вещи в себе.

Причина, по которой математиков до Кантора нервировало отношение к бесконечности как к любому другому числу, состояла в том, что здесь скрывалось множество головоломок, о самой знаменитой из которых Галилей писал в «Двух новых науках» и которая известна как парадокс Галилея:

1. Некоторые числа являются полными квадратами, такими как 1, 4, 9 и 16, а некоторые — не являются полными квадратами, например 2, 3, 5, 6, 7 и т. д.

2. Общее количество чисел должно быть больше количества полных квадратов, поскольку среди всех чисел присутствуют как квадраты, так и неквадраты.

3. Однако же каждое число можно поставить во взаимно-однозначное соответствие со своим квадратом:

1	2	3	4	5	...	n
↓	↓	↓	↓	↓		↓
1	4	9	16	25	...	n ²

4. Итак, полных квадратов в действительности столько же, сколько и всех целых чисел. Что есть противоречие, потому что в пункте 2 мы заметили, что целых чисел вообще больше, чем квадратов.

Вывод Галилея состоял в том, что, когда дело доходит до бесконечности, такие числовые концепции, как «больше чем», «равно» и «меньше чем», теряют смысл. Эти термины могут быть понятны и осмысленны в приложении к конечным количествам, но не к бесконечным. Утверждения, что чисел вообще больше, чем квадратов, или что чисел столько же, сколько квадратов, лишены смысла, поскольку вся совокупность как чисел вообще, так и квадратов бесконечна.

*

Георг Кантор придумал новый способ осмысления бесконечности, который устранил парадокс Галилея. Вместо того чтобы рассматривать отдельные числа, Кантор рассмотрел группы чисел, которые назвал «множествами». Кардинальное число всякого множества есть число членов в этой группе. Так, $\{1, 2, 3\}$ — множество с кардинальным числом 3, а $\{17, 29, 5, 14\}$ — множество с кардинальным числом 4. «Теория множеств» Кантора заставляет сердце биться чаще, когда рассматриваются множества с бесконечным числом членов. Он ввел новый символ для бесконечности — $\aleph_0$ (произносится «алеф-нуль»), используя первую букву древнееврейского алфавита, снабженную нижним индексом, и сказал, что это есть кардинальное число множества натуральных чисел, то есть $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Каждое множество, члены которого можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с натуральными числами, также обладает кардинальным числом $\aleph_0$. Таким образом, поскольку имеется взаимно-однозначное соответствие между натуральными числами и их квадратами, множество квадратов $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ имеет кардинальное число $\aleph_0$. Подобным же образом, множество нечетных чисел $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$, множество простых чисел $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ и множество чисел, внутри которых содержится 666, то есть $\{666, 1666, 2666, 3666, \dots\}$, — все они имеют кардинальное число $\aleph_0$. Если имеется множество с бесконечным числом членов и если возможно пересчитать члены один за другим, так что в конце концов каждый будет посчитан, то кардинальным числом такого множества является $\aleph_0$. По этой причине $\aleph_0$ стал известен как «счетная бесконечность». Причина же, по которой все это представляется столь замечательным, состоит в том, что Кантор показал, что можно двигаться и дальше. Сколь бы большим ни было $\aleph_0$, это сущее дитя в семье канторовских бесконечностей.

Я введу бесконечность большую чем $\aleph_0$, используя историю, которую, как говорят, Давид Гильберт приводил на своих лекциях. История эта — о гостинице со счетно-бесконечным (то есть $\aleph_0$) числом номеров. Это хорошо известное и весьма любимое математиками заведение иногда называют Гильбертовым отелем.

В Гильбертовом отеле имеется бесконечное число номеров, на дверях которых прибиты таблички 1, 2, 3, 4.... Однажды у регистрационной стойки отеля появляется путешественник и к своему разочарованию узнает, что в гостинице нет свободных мест. Он спрашивает, есть ли хоть

какой-нибудь способ найти для него номер. Администратор отеля отвечает, что, конечно, есть. Все, что надо проделать, — это расселить уже имеющихся постояльцев по номерам следующим способом: того, кто жил в номере 1, — переселить в номер 2, того, кто жил в номере 2, — переселить в номер 3 и так далее, переселяя гостя из каждого номера n в номер $n + 1$. Как только это будет сделано, у каждого из старых постояльцев по-прежнему будут свои собственные апартаменты, а номер с табличкой 1 освободится для вновь приехавшего. Вот и отлично!

На следующий день возникает более сложная ситуация. Приезжает автобус, и каждому пассажиру этого автобуса нужен номер. А в автобусе бесконечное число сидений, занумерованных как 1, 2, 3 и так далее, и все они заняты. Есть ли теперь хоть какой-то способ расселить всех без исключения пассажиров? Другими словами, хотя гостиница и полна, может ли администратор так перетасовать постояльцев по номерам, чтобы в итоге освободить бесконечное число номеров для пассажиров автобуса? Да это легче легкого, говорят нам.

Все, что надо проделать на этот раз, — это переселить каждого постояльца в номер, на двери которого написано число в два раза большее, чем то, что написано на номере, где этот постоялец живет в данный момент. Тем самым заполнятся номера 2, 4, 6, 8.... А все номера, на дверях которых написано нечетное число, освободятся, и пассажирам автобуса дадут ключи от них. Пассажир, ехавший на первом сиденье, получит номер 1 (первое из нечетных чисел), пассажир, ехавший на втором сиденье, получит номер 3 (второе нечетное число) и т. д.

На третий день в Гильбертов отель прибывает много автобусов. Бесконечно много. Автобусы выстраиваются на стоянке перед гостиницей: сначала автобус 1, затем автобус 2, вслед за ним автобус 3 и т. д. В каждом автобусе — бесконечное число пассажиров (это автобусы того же типа, что приезжали накануне). И понятно, каждому пассажиру требуется номер. Есть ли способ найти для каждого пассажира из каждого автобуса номер в (уже заполненном) Гильбертовом отеле? Не проблема, отвечает администратор. Прежде всего ему надо освободить бесконечно много номеров. Он делает это тем же способом, что и накануне, — переселяет каждого постояльца в комнату с удвоенным номером. В результате свободными оказываются все нечетные номера. Все, что ему надо сделать, чтобы разместить там бесконечное число групп автобусных пассажиров, — это найти способ пересчитать всех пассажиров, потому что, как только он найдет такой способ, он поселит первого пассажира из списка в номер 1, второго — в номер 3, третьего — в номер 5 и т. д.

Администратор проделывает следующее. Сначала составляется список пассажиров, в котором каждый пассажир представлен записью вида m/n , где m — это номер автобуса, на котором данный пассажир приехал, а n — номер его места в автобусе. Если начать с пассажира, ехавшего на первом месте в первом автобусе (путешественник $1/1$), а затем следовать по зигзагообразной кривой, показанной ниже, — так, что вторым окажется путешественник, занимавший второе место в первом автобусе ($1/2$), затем тот, кто сидел на первом месте во втором автобусе ($2/1$), и т. д. — в концов концов окажутся переписанными все без исключения пассажиры.

	Место 1	Место 2	Место 3	Место 4	Место 5	...
Автобус 1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	
Автобус 2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	
Автобус 3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	
Автобус 4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	
Автобус 5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	
...						

Теперь перенесем на язык символьной математики то, что мы узнали про Гильбертов отель.

Когда номер нашли для одного путешественника, это эквивалентно формулируется как $1 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Когда номер нашли для счетно-бесконечного числа путешественников, мы узнали, что $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Когда счетно-бесконечное число пассажиров в каждом автобусе из счетно-бесконечного числа автобусов смогли расселиться по номерам, мы узнали, что $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Таковы правила, которых мы ожидаем от бесконечности: прибавление бесконечности к бесконечности дает бесконечность, и умножение бесконечности на бесконечность также дает бесконечность.

*

Давайте на секунду остановимся. Мы уже получили один потрясающий результат. Взглянем снова на таблицу с номерами мест и номерами автобусов. Рассмотрим каждого путешественника, обозначаемого символом m/n , как дробь $\frac{m}{n}$. Если продолжить нашу таблицу до бесконечности, в ней будут указаны все без исключения положительные дроби — просто потому, что положительные дроби и представляют собой

выражения $\frac{m}{n}$ для любых натуральных чисел m и n . Например, дробь $\frac{5628}{785}$ окажется перечисленной, когда мы доберемся до 5628-й строки и 785-го столбца. Зигзаговый метод подсчета всех пассажиров во всех автобусах можно поэтому использовать и для пересчета всех положительных дробей. Другими словами, множество положительных дробей и множество натуральных чисел имеют одно и то же кардинальное число $\aleph_0$. Интуитивно кажется, что дробей должно быть больше, чем натуральных чисел, потому что между любыми двумя натуральными числами имеется бесконечное число дробей, и, однако же, Кантор показал, что наша интуиция неверна. Положительных дробей ровно столько же, сколько и натуральных чисел. (Конечно, положительных и отрицательных дробей тоже столько же, сколько натуральных чисел, потому что имеется $\aleph_0$ положительных дробей и $\aleph_0$ отрицательных, а из предыдущего мы знаем, что $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$)

Чтобы оценить, насколько необычным является этот результат, рассмотрим числовую прямую, которая позволяет воспринимать числа как точки на линии. Вот числовая прямая, начинающаяся в 0 и устремляющаяся в бесконечность:



Каждую положительную дробь можно рассматривать как точку на этой числовой прямой. Из предыдущих глав мы знаем, что имеется бесконечно много дробей, заключенных между 0 и 1, а равным образом между 1 и 2 или между двумя любыми другими числами. Теперь представим себе, что мы поднесли к числовой прямой микроскоп, который позволяет разглядеть, что происходит между точками, представляющими дроби $\frac{1}{100}$ и $\frac{2}{100}$. Как мы показали выше, имеется бесконечно много точек, представляющих дроби между двумя указанными точками. И куда бы на числовой прямой мы ни направили микроскоп и сколь бы маленький интервал между двумя точками он ни показывал, там всегда будет бесконечно много точек, представляющих дроби в данном интервале. Поскольку имеется бесконечно много точек, представляющих дроби всюду, куда ни посмотри, осознание того факта, что все их, без единого исключения, можно пересчитать, поместив в упорядоченный список, сбивает с толку.

*

И теперь главное. Это доказательство того, что имеется кардинальное

число, большее $\aleph_0$. Сначала — назад в Гильбертов отель. На этот раз гостиница пуста, когда появляется бесконечное число людей, желающих поселиться. Но теперь путешественники приехали не в автобусах; они представляют собой толпу, причем каждый одет в футболку, надпись на которой представляет собой десятичное разложение некоторого числа, лежащего между 0 и 1. Ни у каких двух людей написанные на груди десятичные разложения не совпадают, и при этом использованы все десятичные разложения между 0 и 1. (Конечно, десятичные разложения бесконечно длинные, поэтому для их изображения требуются бесконечно широкие футболки, но, поскольку мы уже кое на что согласились, когда попытались представить себе гостиницу с бесконечным числом номеров, я полагаю, что в случае с футболками прошу не так уж и о многом.)

Некоторые из прибывших атакуют стойку регистрации, пытаясь выяснить, может ли гостиница их принять. Все, что для этого надо сделать администратору, — это найти способ составить список, в котором присутствовало бы каждое десятичное число между 0 и 1, поскольку, как только такой список будет составлен, расселение не составит труда. Задача не кажется нерешаемой — ведь, в конце концов, наш находчивый администратор однажды уже придумал, как организовать в список всех пассажиров из бесконечного числа автобусов, в каждом из которых было бесконечно много пассажиров. И тем не менее эта новая задача оказывается нерешаемой! *Нет* способа пересчитать все десятичные разложения между 0 и 1 таким образом, чтобы стало возможным внести все их в упорядоченный список. Дабы продемонстрировать это, я покажу, что для каждого бесконечного списка чисел, лежащих между 0 и 1, всегда найдется число между 0 и 1, которого в этом списке нет.

Вот как это делается. Вообразим себе, что первый из прибывших одет в футболку с разложением 0,6429657, второй — 0,0196012 и администратор отводит им номера 1 и 2. И пусть он так и продолжает назначать номера следующим, кто прибывает, в результате у него получается бесконечный список, начало которого выглядит следующим образом (не будем забывать еще, что разложения продолжаются до бесконечности):

Номер 1	0,6429657...
Номер 2	0,0196012...
Номер 3	0,9981562...
Номер 4	0,7642178...
Номер 5	0,6097856...
Номер 6	0,5070014...

Номер 6	0,5273611...
Номер 7	0,3002981...
Номер...	0....
...	...

Наша цель, как было сказано, состоит в том, чтобы предъявить десятичное разложение, лежащее между 0 и 1, которого нет в этом списке. Мы этого добьемся, используя следующий метод. Сначала построим число, первая десятичная цифра которого совпадает с первой десятичной цифрой из номера 1, вторая десятичная цифра — со второй из номера 2, третья — с третьей из номера 3 и т. д. Другими словами, мы выберем цифры, стоящие на диагонали. Для удобства мы их подчеркнем:

Номер 1	0,6429657...
Номер 2	0,0196012...
Номер 3	0,9981562...
Номер 4	0,7642178...
Номер 5	0,6097356...
Номер 6	0,5273611...
Номер 7	0,3002981...
Номер...	0....
...	...

Полученное число такое: 0,6182811....

Мы почти у цели. Теперь, в качестве последнего действия, построим число, которого нет в списке администратора: изменим каждую цифру в только что полученном числе, прибавляя 1 к каждой цифре, так что 6 станет 7, 1 станет 2, 8 станет 9 и т. д.; в результате получится число

0,7293922....

Это оно и есть! Это то самое десятичное разложение, не включенное в список, которое мы искали. Оно не может быть в списке администратора, потому что мы искусственно построили его таким, чтобы оно там не содержалось. Это не число из номера 1, потому что его первая цифра отлична от первой цифры числа из номера 1. Наше число — не из номера 2, потому что его вторая цифра отлична от второй цифры числа из номера 2,

и т. д. — откуда видно, что наше число не может относиться ни к какому номеру n , потому что его n -я цифра непременно отлична от n -й цифры в разложении из номера n . Поэтому наше хитрое разложение $0,7293922\dots$ не может быть равным никакому из разложений, написанных на футболках путешественников, расселенных по номерам отеля, ведь всегда *по крайней мере одна* цифра из этого десятичного разложения будет отличаться от десятичного разложения, приписанного данному номеру. В списке вполне может оказаться число, первые семь десятичных цифр которого равны $0,7293922$, и, однако же, оно будет отличаться от нашего специального числа по крайней мере одной цифрой где-то дальше в разложении. Другими словами, даже если администратор все дальше и дальше будет продолжать раздавать номера, он не сможет найти номер для путешественника, на котором надета футболка с придуманным нами числом, которое начинается как $0,7293922\dots$.

Я взял список, начинающийся с произвольных чисел $0,6429657\dots$ и $0,0196012\dots$, но равным образом я мог бы рассмотреть список, начинающийся с любых других чисел. Для каждого списка, который можно создать, всегда удастся выписать, используя предложенный выше «диагональный» метод, такое число, которое в данном списке не присутствует. Пусть в Гильбертовом отеле бесконечное число номеров, но в нем нельзя расселить такое бесконечное число людей, которое определяется десятичными разложениями всех чисел между 0 и 1. Всегда кто-то останется на улице. Отель для этого просто недостаточен вместительный^[72].

*

Сделанное Кантором открытие того, что имеется бесконечность большая, чем бесконечность натуральных чисел, было одним из величайших математических прорывов XIX столетия. Это сногшибательный результат, и сила его не в последнюю очередь определяется тем, что его совсем несложно объяснить: некоторые бесконечности — счетные, и их размер равен $\aleph_0$, а некоторые бесконечности — не счетные, а потому большие. И эти несчетные бесконечности тоже могут иметь различные размеры.

Самая простая для понимания несчетная бесконечность называется c , она выражает число людей, прибывших в Гильбертов отель одетыми в футболки со всеми десятичными разложениями между 0 и 1. Подобно тому, что мы делали выше, поучительно интерпретировать c , глядя на

числовую прямую. Каждый персонаж с десятичным разложением между 0 и 1 на футболке можно также понимать как точку на прямой, лежащую между 0 и 1. Символ $\aleph_0$ был исходно выбран потому, что он напоминает о слове «континуум» — непрерывном множестве точек на числовой прямой.

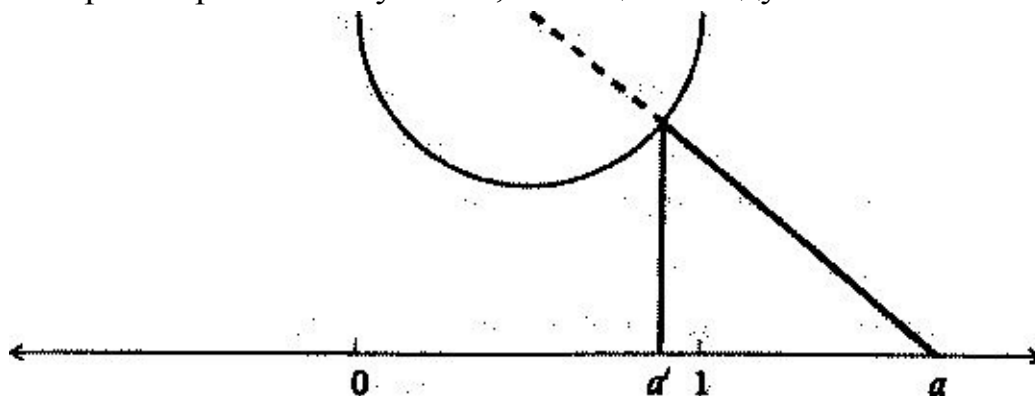
И здесь мы подошли к еще одному странному результату. Мы знаем, что имеется c точек, лежащих между 0 и 1, но при этом мы также знаем, что имеется $\aleph_0$ дробей на всей числовой прямой, взятой целиком. Поскольку мы доказали, что c превосходит $\aleph_0$, получается, что на отрезке прямой между 0 и 1 помещается больше точек, чем имеется точек, представляющих дроби на всей числовой прямой.

Кантор снова завел нас в мир, противоречащий интуиции. Дроби, хоть их и бесконечно много, ответственны только за очень малую, просто крохотную часть числовой прямой. Они рассыпаны там гораздо реже, чем числа того другого типа, которые в основном и составляют числовую прямую, — числа, которые нельзя выразить в виде обыкновенной дроби, то есть наши старые друзья — иррациональные числа. Оказывается, что иррациональные числа сидят на числовой прямой настолько плотно, что в любом конечном интервале их больше, чем дробей на всей числовой прямой.

Мы определили c как число точек на числовой прямой, заключенных в интервале между 0 и 1. Сколь много точек имеется между 0 и 2 или между 0 и 100? В точности c . На самом деле между любыми двумя точками на числовой прямой имеется ровно c точек, независимо от того, насколько далеко друг от друга располагаются выбранные концы. Но еще более поразительным является то, что совокупность точек на всей числовой прямой также есть c , что видно из следующего доказательства, проиллюстрированного на рисунке.

Наша цель — показать, что имеется взаимнооднозначное соответствие между точками, лежащими между 0 и 1, и точками на всей числовой прямой. Для этого найдем для каждой точки на числовой прямой пару из отрезка от 0 до 1. Сначала нарисуем полуокружность, висящую над этим отрезком. Эта полуокружность играет роль посредника в том плане, что она организует в пары точки, лежащие между 0 и 1, и точки на всей числовой прямой. Возьмем любую точку на числовой прямой, обозначенную буквой a , и проведем прямую линию из a к центру окружности. Эта прямая пересекает полуокружность в точке, которая единственным образом определяет расстояние между 0 и 1, обозначенное a' , если провести прямую вертикально вниз до пересечения с числовой

прямой. Организуем пару из каждой точки a и точки a' , которая однозначно определяется для нее указанным выше способом. Когда выбранная точка a устремляется к плюс бесконечности, соответствующая точка между 0 и 1 приближается к 1, а когда выбранная точка устремляется к минус бесконечности, соответствующая точка приближается к 0. Если каждую точку на числовой прямой можно соединить в пару с единственной точкой, лежащей между 0 и 1, и наоборот, то, значит, число точек на числовой прямой равно числу точек, лежащих между 0 и 1.



Различие между $\aleph_0$ и c — это различие между числом точек на числовой прямой, представимых в виде дробей, и полным числом точек, включая дроби и иррациональные числа. Однако разрыв между $\aleph_0$ и c столь огромен, что если бы мы наугад выбирали точки на числовой прямой, то вероятность выбрать дробь была бы равна нулю. По сравнению с несчетной бесконечностью иррациональных чисел дробей, можно сказать, попросту очень мало.

*

С каким бы трудом идеи Кантора ни воспринимались поначалу, история реабилитировала его трактовку числа алеф; не только сам алеф прижился среди чисел практически повсеместно, но и зигзаговые и диагональные доказательства по всеобщему признанию были провозглашены наиболее яркими во всей математике. Давид Гильберт заявил, что «никто не изгонит нас из рая, созданного Кантором».

К несчастью для Кантора, этот рай стоил ему дорого — он заплатил за него своим душевным здоровьем. Поправившись после первого срыва, ученый стал уделять больше внимания другим предметам, таким как теология и история эпохи Елизаветы, и пришел к убеждению, что автором пьес Уильяма Шекспира на самом деле был ученый Фрэнсис Бэкон. Доказательство этой гипотезы стало для Кантора личным крестовым

походом, идеей фикс, определявшей его все более странное поведение. В 1911 году Кантора пригласили в Университет Сент-Эндрюс прочитать лекцию по математике. Представ перед публикой, он с жаром принялся обсуждать свои теории о Шекспире и Бэконе, чем немало смутил собравшихся, ожидавших услышать о последних достижениях математической мысли. Кантор испытал еще несколько тяжелых приступов депрессии и много времени проводил в больнице. Умер выдающийся математик в 1918 году.

*

Набожный лютеранин, Кантор вел широкую переписку с духовными лицами по поводу значимости своих результатов. Он полагал, что его подход к бесконечности продемонстрировал ее постигаемость человеческим разумом, а поэтому подвел человека ближе к Богу. Среди предков Кантора были и евреи, что, как полагают многие, повлияло на его выбор буквы алеф в качестве символа для бесконечности: великий математик мог знать, что в мистической еврейской традиции Каббалы алеф обозначает высшее проявление Бога. Сам же Кантор говорил, что гордится своим выбором алефа, поскольку эта буква, первая буква древнееврейского алфавита, — очень подходящий символ для нового начала.

Алеф годится и для завершения нашего путешествия в мир математики. Эта наука, как я писал в начальных главах этой книги, возникла из стремления человека придать смысл тому, что его окружает. Делая насечки на стволах деревьев или считая на пальцах, наши далекие предки изобрели числа. Числа помогали и в земледелии, и в торговле, они открыли человечеству дверь в «цивилизацию». Затем, по мере развития математики, предметом ее стали в меньшей степени реальные вещи, а в большей — абстракции. Греки ввели в обиход такие концепции, как точка и линия, а индусы изобрели ноль и тем самым проложили дорогу к еще более радикальным абстракциям — отрицательным числам. Хотя эти концепции казались сначала идущими вразрез с интуицией, они довольно быстро были приняты, и ныне мы пользуемся ими ежедневно. К концу XIX столетия, однако, пуповина, связывающая математику с непосредственным опытом, была разорвана раз и навсегда. После Римана и Кантора она потеряла какую-либо связь с интуитивным восприятием мира.

Обнаружив кардинальное число $\aleph_0$, Кантор не остановился и доказал, что имеются даже еще большие бесконечности. Как мы видели, c — это число точек на прямой. Оно же есть число точек на двумерной поверхности. (Еще один удивительный результат, который вам придется

принять с моих слов на веру.) Пусть d — число всевозможных кривых, линий и загогулин, которые можно нарисовать на двумерной поверхности. Используя теорию множеств, можно доказать, что d больше, чем c . Можно двинуться и дальше — показать, что должна иметься бесконечность еще бóльшая, чем d . Никто, впрочем, не смог предъявить множество вещей, кардинальное число которого было бы больше, чем d .

Кантор увел нас далеко за пределы вообразимого. Это довольно чудесное место и, занятным образом, противоположное тому, в котором пребывает племя в бассейне Амазонки, о котором говорилось в начале книги. У мундуруку много вещей, но не хватает чисел, чтобы их пересчитать. Кантор предоставил нам числа в неограниченном избытке, зато теперь у нас не хватает вещей, которые можно было пересчитывать с их помощью.

Список литературы

Подробную библиографию по каждой главе, а также приложения можно найти на веб-сайте www.alexbellos.com. Ниже перечислены наиболее существенные книги, из которых я почерпнул информацию.

- Acheson D. *1089, and All That*. New York: Oxford University Press, 2002.
- Aczel A. D. *Chance*. New York: Basic Books, 2005.
- Aczel A. D. *The Mystery of the Aleph*. New York: Washington Square Press, 2000.
- Andrews F. E. *New Numbers*. London: Faber & Faber, 1936. Balliett L. D. *The Philosophy of Numbers*. Atlantic City, N.J.: L. N. Fowler & Co., 1908.
- Beckmann P. *A History of Pi*. New York: St. Martin's, 1971.
- Bell E. T. *Numerology*. New York: Century, 1933.
- Bell E. T. *Men of Mathematics*. New York: Touchstone, 1937.
- Bennett D. J. *Randomness*. Cambridge: Harvard University Press, 1998.
- Bentley P. J. *The Book of Numbers*. London: Cassell Illustrated, 2008.
- Berggren L., Borwein J., and Borwein P. *Pi: A Source Book*. New York: Springer, 2003.
- Butterworth B. *The Mathematical Brain*. London: Macmillan, 1999.
- Cajori F. *A History of Mathematical Notations*. New York: Dover, 1993 (facsimile of original by Illinois: Open Court, 1928/9).
- Cohen I. B. *The Triumph of Numbers*. New York: W. W. Norton, 2005.
- Darling D. *The Universal Book of Mathematics*. Hoboken, N.J.: Wiley, 2004.
- Dehaene S. *The Number Sense*. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- Derbyshire J. *Unknown Quantity*. London: Atlantic Books, 2006.
- Devlin K. *All the Math That's Fit to Print*. Washington: Mathematical Association of America, 1994.
- Dudley U. *Numerology*. Washington: Mathematical Association of America, 1997.
- Dudley U. (ed.). *Is Mathematics Inevitable?* Washington: Mathematical Association of America, 2008.
- Du Sautoy M. *Finding Moonshine*. London: Fourth Estate, 2008.
- Du Sautoy M. *The Music of the Primes*. London: Fourth Estate, 2003.
- Eastaway R., Wyndham J. *How Long Is a Piece of String?* London: Robson Books, 2002.
- Eastaway R., Wyndham J. *Why Do Buses Come in Threes?* London: Robson

Books, 1998.

Ferguson K. *The Music of Pythagoras*. New York: Walker, 2008.

Fibonacci L. *Fibonacci's Liber Abaci*. New York: Springer, 2002.

Gardner M. *Martin Gardner's Mathematical Games*. Washington: Mathematical Association of America, 2005.

Gowers T. *Mathematics: A Very Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2002.

Gullberg J. *Mathematics: From the Birth of Numbers*. New York: W. W. Norton, 1997.

Hidetoshi F., Rothman T. *Sacred Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 2008.

Hodges A. *One to Nine*. London: Short Books, 2007.

Hoffman P. *The Man Who Loved Only Numbers*. London: Fourth Estate, 1998.

Hogben L. *Mathematics for the Million*. London: George Allen & Unwin, 1936.

Hull T. *Project Origami*. Natick, Mass.: AK Peters, 2006.

Ifrah G. *The Universal History of Numbers*. Hoboken, N.J.: Wiley, 2000.

Joseph G. G. *Crest of the Peacock*. London: Penguin, 1992.

Kahn C. H. *Pythagoras and the Pythagoreans: A Brief History*. Indianapolis, Ind.: Hackett Publishing Company, 2001.

Knott K. *Hinduism: A Very Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 1998.

Livio M. *The Golden Ratio*. London: Review, 2002.

Loomis E. S. *The Pythagorean Proposition*. Urbana, Ill.: National Council of Teachers, 1968.

Maor E. *Trigonometric Delights*. Princeton: Princeton University Press, 1998.

Matzusawa T. (ed.). *Primate Origins of Human Cognition and Behavior*. Tokyo: Springer, 2001.

Mazur J. *Euclid in the Rainforest*. New York: Plume, 2005.

Mlodinow L. *Euclid's Window*. New York: Free Press, 2001.

Mlodinow L. *The Drunkard's Walk*. London: Allen Lane, 2008.

Nelsen R. B. *Proofs Without Words*. Washington: Mathematical Association of America, 1993.

Newman J. (ed.). *The World of Mathematics*. New York: Dover, 1956.

O'Shea D. *The Poincarez' Conjecture*. New York: Walker, 2007.

Pickover C. A. *A Passion for Mathematics*. Hoboken, N.J.: Wiley, 2005.

Pickover C. A. *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*. Princeton:

Princeton University Press, 2002.

Poundstone W. *Fortune's Formula*. New York: Hill and Wang, 2005.

Riedwig C. *Pythagoras: His Life, Teaching, and Influence*. Ithaca; N.Y.: Cornell University Press, 2002.

Seife C. *Zero*. London: Souvenir Press, 2000.

Simoons F. J. *Plants of Life, Plants of Death*. Madison: University of Wisconsin Press, 1998.

Singh S., *Fermat's Last Theorem*. London: Fourth Estate, 1997.

Slocum J. *The Tangram Book*. New York: Sterling, 2001.

Slocum J., Sonneveld D. *The 15 Puzzle*. Beverly Hills, Calif.: Slocum Puzzle Foundation, 2006.

Sundara Row T. *Geometric Exercises in Paper Folding*. Chicago: Open Court, 1901.

Swetz F. J. *Legacy of the Luoshu*. Chicago: Open Court, 2002.

Tirthaji Jagadguru Swami S. B. K. *Vedic Mathematics*. Delhi: Motilal Banarsidass, 1992.

Благодарности

Прежде всего я хочу поблагодарить Клер Патерсон из Janklow & Nesbit, без поддержки которой эта книга никогда бы не состоялась, и моих редакторов Ричарда Эткинсона из Лондона и Эмили Луз из Нью-Йорка.

Успех моих поездок зависел от поддержки друзей, как старых, так и новых. В Японии это Чиеко Цунеока, Ричард Ллойд Парри, Фиона Уилсон, Коудзи Судзуки, Масао Учибаяши, Тецуро Мацузава, Крис Мартин и Лео Льюис; в Индии — Горав Текривал, Дханаджай Вайдья и Кеннет Уильямс; в Германии — Ральф Лауэ; в Соединенных Штатах — Колм Мулкай, Том Роджерс, Том Халл, Нил Слоун, Джерри Слокам, Дэвид Чудновски, Грегори Чудновски, Том Морган, Майкл де Флигер, Джером Картер, Энтони Бэрлокер и Эд Торп; и в Соединенном Королевстве — Брайен Баттеруорт, Питер Хопп и Эдди Левин.

Значительные улучшения в рукопись были внесены благодаря замечаниям следующих людей: Роберт Фаунтейн, Колин Райт, Колм Мулкай, Тони Манн, Алекс Пазо, Пьер Пика, Стефани Марш, Метью Кершоу, Джон Мейнгей, Морган Райэн, Андреас Нидер, Дайна Таймина, Дэвид Хендерсон, Стефан Мандел, Роберт Лэнг, Дэвид Беллос и Илона Морисон. А еще в моем списке благодарностей присутствуют Натали Хант, Саймон Векснер, Вероника Есаулова, Гэвин Претор-Пинни, Жанин Мозли, Элейн Леггетт, Станислас Деэн, Тереса Йукулано, Маринелла Каппеллетти, Рон Нотт, Ребекка Фолланд, Кэрсти Гордон, Тим Глистер, Уго де Клее, Мора О'Брайен, Хью Морисон, Джонатан Каммунгс, Рафаэль Зарум, Гарет Робертс, Джин Зиркел, Эрик Демейн, Уэйн Гоулд, Кэрк Пирсон, Анджела Ньюинг, Билл Идингтон, Майк Леван, Шина Рассел, Хартош Бал, Иван Москович, Джон Холден, Крис Оттвил, Мариана Кавалл, Леал Феррейра, Тодд Рангивхету, Уильям Паундстоун, Френк Светц и Амир Ачел. И кроме того, моя племянница Зара Беллос, которая обещала получить 5 с плюсом по математике, если я упомяну ее где-нибудь в книге.

GALILEO

ALEX BELLOS

Here's Looking at Euclid

A Surprising Excursion Through
the Astonishing World of Math



Многие полагают, что математика — наука невероятно сложная, да к тому же ужасно скучная. Алекс Беллос, бывший математик, а ныне журналист и писатель, с этим утверждением абсолютно не согласен. Увлекательно и просто он рассказывает о неразрывной связи математики с жизнью: о том, как появились числа и ка-

кие они бывают, что такое sudoku и оригами, как с помощью теории вероятностей выиграть в казино, а с помощью гауссова распределения вывести на чистую воду продавца-обманщика. А еще — о том, что такое множества и бесконечность и почему параллельные прямые иногда пересекаются. Эта книга для всех: и для тех, кто любит математику, и для тех, кто ее не любит — пока...



Колibri

САМОЕ ИНТЕРЕСНОЕ,
САМОЕ НОВОЕ, САМОЕ НЕВЕРОЯТНОЕ
О НАУКЕ И ЕЕ ГЕРОЯХ

Примечания

1

На самом деле для получения логарифмической шкалы требуется, чтобы числа усаживались теснее по вполне определенному закону.

2

Два значения — цифра (то есть однозначное число) и палец. (*Примеч. перев.*)

3

Отметим на всякий случай, что только что выписанные семь чисел выражаются в десятичной системе соответственно как 13, 14, 15 и 21, 22, 23, 24. (*Примеч. перев.*)

4

Потренируемся в переводе двенадцатеричного числа в десятичное:
 $(80\Xi 9)_{12} = 8 \times 12^3 + 0 \times 12^2 + \Xi \times 12 + 9 = 8 \times 1728 + 11 \times 12 + 9 = 13\,965$.
Это число дней — немного больше 38 лет. (*Примеч. перев.*)

5

Терминология, как это часто бывает при работе с другими основаниями, требует осторожности. Речь идет не о *процентах*, то есть не о сотых долях, а о сто сорок четвертых долях. Для полной ясности

выполним деление, пользуясь десятичной системой, а затем переведем результат в двенадцатеричную. Будем указывать основание в виде нижнего индекса: $100_{12}/3 = 144_{10}/3 = 48_{10} = 40_{12}$ (*Примеч. перев.*)

6

Система имеет своих приверженцев и поныне. Любопытны ссылки <http://dock.catlair.ru/> и http://en.wikipedia.org/wiki/Metric_time. Установить (работающие) метрические часы на свой компьютер можно отсюда: <http://sites.google.com/site/davidkbainbridge/metricclock>. (*Примеч. перев.*)

7

Банк Англии был основан в 1694 году. Вероятно, имеется в виду Государственное казначейство. (*Примеч. перев.*)

8

Фу Си — имя мифического создателя китайской цивилизации. (*Примеч. перев.*)

9

Японский язык — *слоговой* в своей основе. (*Примеч. перев.*)

10

Имеется в виду скандальный судебный процесс над О. Дж. Симпсоном. (*Примеч. перев.*)

11

В оригинале Картер говорит «All is irie» — искаженное «all right», означающее, что все хорошо. Выражение употребляется в среде афроамериканцев. (*Примеч. перев.*)

12

Отсюда и слово «калькуляция». (*Примеч. перев.*)

13

Читатель может вспомнить фильм «Пятая стихия» (в российском прокате — «Пятый элемент»), где Пифагоровы идеи оказались не чужды и инопланетянам. (*Примеч. перев.*)

14

Юлия Домна (167–217) — жена императора Септимия Севера. По ее поручению Флавий Филострат написал «Жизнь Аполлония Тианского» в 8 книгах. Истории о философе-чудотворце («языческом святом») повлияли на последующую христианскую агиографическую литературу. Исторический Аполлоний Тианский — философ-неопифагореец — жил в I веке н. э. (*Примеч. перев.*)

15

Быть может, полезно вспомнить, что строительство знаменитых египетских пирамид прекратилось примерно за тысячу лет до того, как жил Пифагор. (*Примеч. перев.*)

16

Достаточно интересно уже построение циркулем и линейкой правильного многоугольника с $17 = 2^4 + 1$ сторонами. На прекрасно анимированное построение можно посмотреть по адресу <http://en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon>. (*Примеч. перев.*)

17

В одной точке. (*Примеч. перев.*)

18

Она называется также окружностью Эйлера, окружностью Фейербаха и окружностью девяти точек — последнее из-за того, что проходит еще и через середины трех отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром. (*Примеч. перев.*)

19

Под «евклидовой геометрией» в этой фразе следует понимать в точности *построение циркулем и линейкой*. Использование «других методов» означает лишь выход за рамки этих искусственно выбранных средств, однако *не* означает выход за рамки постулатов, на которых основаны «Начала» и которые — вместе с их разнообразными следствиями — и составляют *евклидову геометрию*. (*Примеч. перев.*)

20

Васу — группа из восьми божеств в Махабхарате.

21

Свами — святой мудрец в Индии. (*Примеч. перев.*)

22

Шанкарачарья Шри *Бхарати Кришна Тиртха* (1884–1960) — выдающийся индийский философ, математик и религиозный деятель. (*Примеч. перев.*)

23

Количество формул, подлежащих запоминанию, возрастает весьма драматическим образом. Не будем считать умножение на 1 и на 10, а кроме того, учтем перестановочный закон для умножения. Тогда в «обычной» таблице умножения остается 36 формул для запоминания, а в таблице до 20 — уже 171 (или 153, если не считать умножение на 20). А таблица умножения до 30 содержит 351 формулу, не считая умножения на 1, 10, 20 и 30. (*Примеч. перев.*)

24

Шарлотта Мекленбург-Стрелицкая (1744–1818) — жена короля Георга III, бабушка королевы Виктории. (*Примеч. перев.*)

25

Миориори — полинезийская культура, существовавшая в Новой Зеландии до маори. (*Примеч. перев.*)

26

Буш Кейт (Kate Bush) — английская исполнительница, работающая на стыке поп-музыки и прогрессивного рока; песня «Pi» вошла в альбом «Aerial» (2005). В словах этой песни имеются такие строки:

.....
In a circle of infinity

3,141592653589793238462643383279

Oh he love, he love, he love

50288419716939937510

5823197494459230781

6406286208821480865132.

.....
He does love his numbers
.....

8230664709384460955058223

(Примеч. перев.)

27

«Рациональный» от слова ratio — отношение. *(Примеч. перев.)*

28

Приведем буквальный перевод ввиду того, что фраза относительно осмысленна и касается чтения лекций студентам-физикам: «Как же я хочу выпить чего-нибудь алкогольного после тяжелой лекции, посвященной квантовой механике. Вся твоя геометрия, герр Планк, весьма сложна». Известна и русская фраза, выполняющая аналогичную функцию, хотя и для меньшего числа цифр: «Кто и шутя, и скоро пожелает пи узнать, число уж знает».

29

Имеется в виду стихотворение «Ворон» (1845).

30

περιφέρεια. *(Примеч. перев.)*

31

Математическая константа e — иррациональное число, начинающееся как 2,718281828, которое Грегори Чудновски называет «дважды Толстым», поскольку этот великий русский писатель родился в 1828 году.

32

Не будем забывать, что значительная часть Испании в течение столетий находилась под арабским владычеством. (*Примеч. перев.*)

33

Телесериал «X-files» в русском переводе получил название «Секретные материалы». (*Примеч. перев.*)

34

X-rays — общепринятое английское название рентгеновских лучей. (*Примеч. перев.*)

35

Малколм Икс (1935–1965) — американский борец за права темнокожих. Малколм Литл сменил фамилию на букву «Икс», символизирующую потерю знания о собственном происхождении. (*Примеч. перев.*)

36

де Ферма́ Пьер (1601–1665) — выдающийся французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. Получил юридическое образование, с

1631 года занимал пост советника парламента в Тулузе. Ко всему прочему был блестящим полиглотом. (*Примеч. ред.*)

37

Может быть интересно оценить ошибку, связанную с ограничением тремя цифрами после запятой: $10^{0,778} = 5,9979$. Разумеется, дело не в идее логарифмов, а в выбранной точности; повышая точность, получаем, например, $10^{0,7781512304} = 6,000000000225971\dots$ (*Примеч. перев.*)

38

Геллер Ури — иллюзионист, мистификатор, якобы обладающий паранормальными способностями. Стал известен благодаря сгибанию металлических ложек и остановке часов на башне Биг-Бен. (*Примеч. перев.*)

39

Гекат — древнеегипетская мера объема.

40

Перевод Е. Чевкиной.

41

Любое число *больше единицы*. В тексте речь идет, более специально, о *целых положительных* числах больше единицы. (*Примеч. перев.*)

42

Эйлер Леонард (1707–1783) почти полжизни провел в России, был академиком Российской академии наук. Внес огромный вклад в развитие российской науки. Умер в Петербурге. (*Примеч. перев.*)

43

Круг прикреплен в центре к картонному квадрату, относительно которого и рассматриваются вращения. (*Примеч. перев.*)

44

В течение 20 лет Г. Э. Дьюдени вел раздел математических развлечений в популярном ежемесячном журнале «Strand Magazine». (*Примеч. перев.*)

45

Прайс Винсент (1911–1993) — известный американский актер. (*Примеч. перев.*)

46

В издательстве «КоЛибри» в серии «Galileo» вышла последняя книга Мартина Гарднера, сборник эссе «Когда ты была рыбкой, головастиком я...» (*Примеч. ред.*)

47

Кость Ишанго (эпоха верхнего палеолита) — берцовая кость бабуина, покрытая рядами насечек. Некоторые ученые полагают, что это примитивный лунный календарь. (*Примеч. перев.*)

48

Здесь используется соглашение $0^0 = 1$, потому что если $0^0 = 0$, то число схлопнется мгновенно. (Итак, $2^4 \times 5^4 \times 7^2 \times 8^4 \times 2^8 \times 4^8 \times 6^6 \times 5^6 = 24547284284866560000000000$. Таким образом, *без* соглашения $0^0 = 1$ второго «неразрушаемого» числа нет. — *Примеч. перев.*)

49

См. <http://oeis.org/play?seq=A005132>. (*Примеч. перев.*)

50

Ее определение дается в приложении 4 на сайте, посвященном книге.

51

Надо продолжать складывать. Сумма одних лишь указанных чисел отличается от $1/89$ на $6,561797754461862... \times 10^{-10}$. Прибавление еще двух слагаемых, 0,000000000055 и 0,000000000089, приближает к $1/89$ уже на $1,7179774963738126... \times 10^{-11}$. (*Примеч. перев.*)

52

Итак, получается, что премоляр *уже*, чем центральный резец, в число раз, равное $\varphi^3 = 4,236$ — то есть более чем в четыре раза. (*Примеч. перев.*)

53

Многозначное слово, означающее случай, случайность, судьбу, риск,

опасность, а еще — игру в кости и удачу в игре (*фр.*). (*Примеч. ред.*)

54

Имеется в виду так называемый «Мемориал, или Амулет Паскаля» (*Примеч. перев.*)

55

Янсенизм — религиозное движение внутри католицизма, подчеркивающее греховную природу человека и необходимость божественной благодати. Основатель — Корнелий Янсений (1585–1638). (*Примеч. перев.*)

56

Roulette (*фр.*) — маленькое колесо. (*Примеч. перев.*)

57

Slot (*англ.*) — щель для приема монет в автомате. (*Примеч. перев.*)

58

В заявке на каждый матч указаны 23 игрока, и на поле даже могут выйти 14 (ранее 1994 года — как правило, 13) человек из каждой команды. (*Примеч. перев.*)

59

В марте 2011 года житель штата Нью-Йорк выиграл в лотерею «Мега-

Миллионс» рекордный джекпот в размере 319 миллионов долларов. За всю историю лотереи это самая большая сумма, которая будет выплачена по одному выигрышному билету. (*Примеч. перев.*)

60

В России распространено название «диаграммы Эйлера — Венна». (*Примеч. перев.*)

61

См. главу 4. (*Примеч. перев.*)

62

Рецепт успешной игры в казино? Конечно нет, ведь при долгой игре или достаточно большом числе играющих этот случай с вероятностью 1:47 реализуется — а из-за последовательных удвоений проигрыш окажется большим! (*Примеч. перев.*)

63

Хедж-фонд — частный, не ограниченный нормативным регулированием либо подверженный более слабому регулированию инвестиционный фонд, недоступный широкому кругу лиц и управляемый профессиональным менеджером. Отличается особой структурой вознаграждения за управление активами. Главная цель — приумножение средств инвесторов. Хедж-фонды обладают широкими возможностями в выборе инструментов вложения денег. Им доступно все, включая короткие позиции, фьючерсы, опционы и прочие деривативы. (*Примеч. ред.*)

64

Квинканкс — доска Гальтона. (Примеч. перев.)

65

При достаточно большом числе шариков. (Примеч. перев.)

66

KPMG — одна из крупнейших аудиторских компаний мира. (Примеч. перев.)

67

Госсет У. С. (1876–1937) более известен под псевдонимом Стьюдент («распределение Стьюдента», «критерий Стьюдента» в статистике). Госсет взял себе псевдоним, чтобы иметь возможность публиковаться, используя в своих работах данные, полученные им на заводе Гиннеса и составлявшие коммерческую тайну. (Примеч. перев.)

68

Тaleb Н. Н. Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. Москва: КоЛибри. 2012.

69

A, B, C и D — проходные оценки, F («failure» — провал, неудача) — аналог отечественной двойки. (Примеч. перев.)

70

И по мнению многих — величайший математик из когда-либо живших.
(Примеч. перев.)

71

Можно было бы подумать, что линии постоянной широты параллельны экватору. Это не так, потому что линии широты (за исключением экватора) — это не прямые линии, а лишь прямые линии могут быть параллельны друг другу. Прямая — это кратчайшее расстояние между двумя точками; вот почему самолет, летящий из Нью-Йорка в Мадрид — при том, что эти две точки находятся на одной широте, — не летит по линии постоянной широты, а выбирает траекторию, которая на двумерной карте выглядит искривленной. (Примеч. авт.)

72

В применении «диагонального метода» имеются тонкости, связанные с тем, что одно и то же число можно записать двумя способами, как это обсуждалось в гл. 3, где мы видели, что $0,9999\ldots = 1$. Но связанные с этим сложности преодолимы, и диагональный метод действительно работает во всей строгости. (Примеч. перев.)