АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Научно-популярная серия

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1969


MELENCOLIA I
16 3 2 13
5 10 11 8
9 6 7 12
4 15 14 1

Е. Я. ГУРЕВИЧ

ТАЙНА ДРЕВНЕГО ТАЛИСМАНА

Тем, кто учит
математику,
тем, кто учит
математике,
тем, кто любит
математику,
тем, кто еще не
знает, что может
любить
математику

Эта книга о «магических квадратах», пришедших к нам из глубокой древности. В Индии и некоторых других странах магические квадраты употреблялись в качестве талисманов. Автор рассказывает об истории поисков закономерностей, объясняющих удивительные свойства магических квадратов. Использованный им элементарный способ анализа позволил не только дополнить известные из теории чисел общие свойства некоторых магических квадратов, но и найти неизвестные до сих пор типы квадратов.

Ответственный редактор
И. Б. ПОГРЕБЫССКИЙ

2-2-1
20-68 НПЛ

ГЛАВА 1

ПОСЛАНЦЫ ДРЕВНЕГО МИРА

Из тьмы веков

В Европе они появились в XIV веке. Или в шестнадцатом... Мнения расходятся. Но и так и этак — давние были времена.

Еще до своего появления в Европе они существовали века и десятки веков. Неизвестно, какая из древних цивилизаций была их родиной. Неизвестна страна, неизвестен век, даже тысячелетие нельзя установить точно.

Известно только, что эти талисманы появились до нашей эры и что их родиной был Древний Восток.

В незапамятные времена, научившись считать, люди познали меру количества — число. Вглядываясь в сочетания чисел, они с изумлением увидели, что числа имеют какую-то самостоятельную жизнь, удивительную и полную тайны; тайны необъяснимой и поэтому загадочной и многозначительной.

Оказалось, что, складывая различные числа, можно получать одно и то же число. Оказалось также, что, располагая числа правильными рядами, один под другим, в случае удачи, можно, складывая числа слева направо и сверху вниз, каждый раз получать одно и то же число. Наконец, кто-то придумал разделить числа линиями так, что каждое число оказалось в отдельной клетке, как птицы в доме птицелова. Так посвященные увидели квадрат, населенный числами, неизвестно что сулящий его владельцу, но, конечно, обладающий магической силой. Квадрат можно было резцом высечь на камне, тростниковым каламом написать на пергаменте, кончиком кисти, смоченным в растертой туши, нарисовать на листе бумаги, рыхлой и слабой.

Квадрат можно было продать верующим. Зашитый в ладанку он становится амулетом и (конечно!) защитит его владельца от всякого зла. Порожденный пытливой мыслью таинственный квадрат превратился в товар, такой же, как кусок материи для набедренной повязки или как лепешка на бараньем сале. Товар — у торговца, и торговец ждет покупателя, сидя на дырявой циновке в полутемной лавочке-нише, где-нибудь в укромном углу шумного восточного базара. (Что только не привидится, когда грезишь с открытыми глазами?)

А вот и покупатель. После долгих переговоров босоногий посетитель развязывает конец грязной чалмы, дает обладателю сокровищ пару медных монет и получает вожделенный лоскуток пергамента. Небрежной скорописью на нем написана молитва к пророку и изображен таинственный и всесильный магический квадрат. Изображен так же, как это делали и отец почтенного бизнесмена, и дед его, и прадед, если только он умел держать перо в руке...

Медленна поступь истории. Веками существовали древние государства. Многие из них исчезли, другие остановились в своем развитии. Но магия чисел не была забыта. О ней уже знали арабы. Наконец, несмотря на костры инквизиции, она проникла в феодальную Европу. В кельях монастырей, за подслеповатыми окнами бюргерских домов, ученые изучили десятки древних сочинений и трактатов. Но среди них еще не было сочинения о таинственных магических квадратах.

Наконец, в руках, дрожащих от волнения, целый ряд драгоценных находок. Находят арабский манускрипт конца восьмого века, в котором описан магический квадрат с тремя клетками в основании и упоминается его автор — грек Аполлон из Тиана, философ-новопифагореец. Он жил в начале нашей эры. Но не он был создателем этого древнейшего из всех магических квадратов. Он только вновь открыл то, что было известно за много веков до него.

Магический квадрат в девять клеток вновь нашли в трактате испанского еврея, филолога и поэта, Ибн-Эзра или Абен-Эзра, жившего в двенадцатом веке. Он написал много сочинений (до нас не дошедших), в том числе по математике и, в одном из них, о магических квадратах.

Ибн-Эзра не знал, что многие арабские математики, еще в десятом веке, в своих сочинениях приводили примеры магических квадратов.

Первое, по-видимому, сочинение о магических квадратах, дошедшее до наших дней, было написано византийским грамматистом и лексикографом Мануэлем Мосхопулосом. (Теперь его назвали бы филологом и языковедом.) Работу Мосхопулоса относят примерно к 1300 г. Он опубликовал вычисленные им многие магические квадраты с различным числом клеток в основании. Там были и нечетные квадраты и кратные четырем. Кроме этого, Мосхопулос дал один пример квадрата с шестью клетками в основании и один — с десятью клетками.

Наш современник, французский математик А. Обри́, в своем историческом очерке, говоря о работах Мосхопулоса, меланхолически отмечает, что составленный им квадрат 10×10 клеток содержал ошибку. Возможно. Однако работа Мосхопулоса была первым специальным сочинением о магических квадратах. За ней последовали многие сотни других работ старых и современных математиков, в том числе крупнейших ученых, основоположников современной науки, Первым сочинением о магических квадратах, написанным в Западной Европе, был германский манускрипт XV в. В нем описан квадрат с 5 клетками в основании.

В начале XVI в. магический квадрат был увековечен в искусстве. Знаменитый немецкий художник и гравер Альбрехт Дюрер выпустил в 1514 г. гравюру, названную им «Меланхолия». На заднем плане гравюры, над фигурой крылатой женщины в одежде горожанки, помещен магический квадрат 4×4 клетки. Все комментаторы гравюры говорят об этом квадрате, но разногласия между ними очень велики. Немецкий математик В. Аренс считал, что магический квадрат на гравюре Дюрера просто-напросто символизирует арифметику, так же как шар и многогранник — геометрию. Это объяснение слишком примитивно. Не похоже, чтобы такой глубокий мыслитель, как Дюрер, видел в изображенных им предметах только внешние признаки науки, ремесла или искусства. И уж, конечно, не потому Дюрер выбрал именно этот вариант магического квадрата, что на его нижней строке два средних числа (15 и 14) вместе дают дату выпуска гравюры.

Более интересным является толкование, основанное на обширном историческом исследовании, приведенное в новой (1961 г.) монографии о Дюрере, написанной нашей соотечественницей и современницей Цецилией Нессельштраус. С глубокой древности и до времени Дюрера сохранилось учение о том, что люди разного темперамента находятся под влиянием разных планет. Жизнерадостным сангвиникам покровительствуют планеты Юпитер и Венера. Мужественные холерики находятся под покровительством планеты Марс. Флегматикам покровительствует Луна. Неуравновешенные меланхолики, поднимая свой неуверенный взгляд к небу, видят на нем свою мрачную планету — Сатурн.

Во времена Дюрера меланхоликам стали приписывать повышенную одаренность, граничащую с гениальностью. Прекрасная женщина Меланхолия на гравюре Дюрера, возможно, олицетворяет гений человеческой мысли, человеческого труда. Именно ему угрожает планета меланхоликов Сатурн.

Но почему для защиты Меланхолии Дюрер взял магический квадрат в 16 клеток и никакой другой?

Ответ можно увидеть в сочинении о магии чисел немецкого гуманиста Генриха Корнелия Агриппы из Неттенхейма. Оно носит название: «О сокровенной философии». Это сочинение было напечатано всего за 10 лет до смерти Коперника. Ничего не зная о работе Коперника и следуя взглядам астрологов, Агриппа пользовался древней космогонией Птолемея; в центре мира — Земля; вокруг нее небесные сферы, вложенные друг в друга, как старинные китайские резные шары из слоновой кости. На каждой сфере по одной планете. На внутренней — Луна. Далее — Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер и на внешней — Сатурн. (Луна и Солнце считались в числе планет.) За сферой Сатурна были еще две небесные сферы. Одна из них была заселена неподвижными звездами. Планеты Юпитер и Сатурн враждуют друг с другом, унаследовав из древнегреческих мифов вражду между олимпийскими богами — Сатурном и победившим его Юпитером.

В своем сочинении Агриппа описал семь магических квадратов, имеющих в основании 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 клеток. Число квадратов было выбрано равным числу птолемеевых планетных сфер. Агриппа назвал эти квадраты «планетными таблицами». Каждую «планетную таблицу» Агриппа связал с одной из семи планет. Квадрат с тремя клетками в основании был связан с третьей, считая извне, сферой, несущей планету Сатурн, квадрат с четырьмя клетками — со следующей сферой, где была планета Юпитер, и так далее.

Вот, оказывается, почемv Дюрер для защиты своего крылатого Гения взял именно квадрат в 16 клеток. Юпитер должен был снова побороть Сатурна.

Агриппа не дал никакого способа, как строить «планетные таблицы», зато он советует гравировать их на пластинках или дисках из различных металлов и носить на себе, как амулеты. Многие такие «планетарные медали» дошли до нашего времени и дали возможность познакомиться с первыми вариантами магических квадратов разного размера.

Только мистический смысл видел в магических квадратах современник Агриппы, врач и естествоиспытатель, легендарный Парацельс (псевдоним Филиппа Ауреола Теофраста Бомбаста фон Гогенгейма).

Несмотря на мистический туман, распространявшийся со страниц сочинений Агриппы и Парацельса, в современных им некоторых математических сочинениях, когда речь идет о магических квадратах, начинают звучать новые ноты. Так, в сочинении немецкого математика Штифеля «Полная арифметика», выпущенном в 1544 г., указано, что в некоторых магических квадратах может быть выделена срединная часть, которая также является магическим квадратом, и окружающая ее рамка, шириной в одну клетку. Это был первый случай анализа математической формы магических квадратов. Век спустя о магических квадратах вновь писали такие крупные математики, как Френи́кль, Паска́ль, Ферма́, Арно́. Их сочинения положили начало второй, новой жизни магических квадратов.

Только ли забава?

В 1624 г. в Лионе была напечатана книга Баше́ (Клода Гаспара Баше́ де Мезириака). Книга Баше́ имела название «Задачи забавные и сладостные, кои совершаются в числах». Магические квадраты предстали в ней в новом обличьи — математической забавы. С мистикой чисел, казалось, было покончено.

Баше дал способы составления магических квадратов, имеющих 10, 11 и 12 клеток в основании. Он описал также, замечает уже упомянутый ранее А. Обри, «изящный графический способ составления нечетных магических квадратов, который неправильно носит его имя». Баше, оказывается, тоже вновь открыл один из древних способов составления нечетных квадратов. По-видимому, древние индийские нечетные квадраты были составлены именно таким способом. Этот же способ, как оказалось, ранее Баше был описан в сочинении П. Спинуля, изданном в Венеции в 1562 г. В 1599 г. в Мадриде вышла книга Диэго Паломино, в которой он дает способ составления магического квадрата 16×16 клеток, такой же, какой дает Баше для всех четных квадратов.

Эти обстоятельства не умаляют ценности книги Баше, оказавшей большое влияние на последующие работы о магических квадратах.

Почти одновременно с Баше над проблемой составления магических квадратов работал известный французский математик Пьер де Фермá, один из создателей теории чисел. В апреле 1640 г. в письме к П. Мерсенну Ферма пишет о магических квадратах следующее: «Я не знаю ничего более прекрасного в арифметике, чем эти числа, называемые некоторыми «планетными» и другими — «магическими»». Ферма разработал общий способ построения четных магических квадратов.

Знаменитого Блеза Паскáля, физика, математика и философа, каждый учившийся в школе знает как автора «закона Паскаля» (о давлении внутри жидкости). В 1654 г. Паскаль закончил трактат о магических квадратах. Он строил их тем же способом, которым пользовался Штифель. В конце XVII в. были опубликованы сочинения о магических квадратах французских математиков Арнó, Озанáма и Симона де Лялюбéра.

В это же время французским академиком Бернаром Френи́клем де Бесси́ были написаны два сочинения о магических квадратах. Это были рукописные доклады, представленные им Королевской академии наук в Париже. Они были напечатаны впервые в результате хлопот математика Лягира только в 1693 г., спустя 18 лет после смерти Френикля. Не будь Лягира, неизвестно сколько лет лежали бы работы Френикля в архивах Королевской академии. Это даже странно. Ведь в дальнейшем сочинения Френикля переиздавались неоднократно. Одно обстоятельство обращает на себя внимание. В библиотеке имени В. И. Ленина в Москве имеется старинный том. Ему более 230 лет. Это сборник сочинений двух авторов. В начале сборника помещено сочинение архитектора-академика Франсуа Блонделя «Решение четырех начальных задач архитектуры». Далее идут четыре математические работы Френикля; из них две — о магических квадратах.

Многие научные труды того времени, да и не только научные, начинались раболепными посвящениями какому-нибудь знатному лицу. Академик-архитектор Блондель счел выгодным составить обширное посвящение всесильному тогда Кольбе́ру, министру и государственному секретарю. Ни в одной из четырех работ Френикля ничего подобного нет. Может быть, Френикль де Бесси не искал покровительства людей, власть имущих? Может быть, разрабатывая математические проблемы, он думал только о ценности своего труда, которую не увеличит благосклонность вельможи? Не поэтому ли Френикль даже после своей смерти не пользовался вниманием своих коллег по Королевской академии?

Но не проблематичной независимостью взглядов привлекает к себе Френикль. Когда перелистываешь хрупкие страницы, все яснее возникает облик ученого-труженика. Он был им не только потому, что необходимость самому заниматься обширными вычислениями определялась общими условиями того времени. Трудолюбие Френикля особенно видно в его сочинении «Общая таблица магических квадратов в четыре» (клетки в основании. — *Е. Г.*). Френикль был и остается единственным математиком, который вычислил и построил все 880 вариантов магических квадратов в 16 клеток. Таблица занимает 43 страницы книги. Трудно представить себе, сколько времени заняла у Френикля эта работа. Трудно потому, что в наше время и в XVII в. решения одной и той же задачи выглядят совершенно по-разному. Эту разницу невозможно себе представить, если не увидеть какой-либо подлинный пример.

Вот, например, одна задача из трактата Френикля «Перечень расчетов», названная им «Вопрос на правило о прибыли».

«Один человек поместил один дукат в банк, чтобы умножать его в течение 32 лет с целью иметь прибыль и прибыль на прибыль по 5 на 100. Спрашивается, насколько возрастет основной капитал и какова будет прибыль к концу этого времени».

Пока нет ничего необычного: в наше время это простенькая задача на сложные проценты. Самое интересное в том, как решал эту задачу математик XVII в.

Сначала Френикль говорит, что прибыль за год равна $^1/_{20}$ от основного капитала и что поэтому к концу года капитал составит $^{21}/_{20}$ от начального.

К концу второго года он будет равен $\frac{21}{20} \cdot \frac{21}{20} = \frac{441}{400}$ от основного (При этом Френикль поясняет, что срок в 32 года он выбрал для того, чтобы сократить вычисления. Взамен того, чтобы еще 31 раз умножать на $\frac{21}{20}$, он далее только четыре раза возводит в квадрат предыдущий относительный размер капитала.) Через 4 года, продолжает Френикль, капитал составит $\frac{194\,481}{160\,000}$ от основного; через 8 лет: $\frac{37\,822\,859\,361}{25\,600\,000\,000}$; через 16 лет: $\frac{1\,430\,568\,690\,241\,985\,328\,321}{655\,360\,000\,000\,000\,000\,000}$. Далее Френикль пишет: За 32 года он превысит основной в $\frac{2\,046\,526\,777\,500\,669\,368\,319\,342\,638\,102\,622\,164\,679\,041}{429\,496\,729\,600\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ раза, что составляет несколько больше $4\frac{3}{4}$ дукатов. Прибыль же будет несколько больше $3\frac{3}{4}$ дуката, то есть она будет почти вчетверо больше основного капитала. Вслед за этим Френикль указывает, что можно было бы отбросить и в числителе и в знаменателе дроби по 32 знака и от этого результат мало изменится.

Дело не только в том, что теперь любой человек, не забывший, чему его учили в школе, отбросил бы не 32, а 40 знаков и, приближенно разделив на счетной линейке 205 на 43, за несколько секунд получил бы более точный результат: 4,78. Теперь вообще никто не стал бы пять раз возводить дроби в квадрат, а использовал бы таблицу логарифмов.

Почему же Френикль не воспользовался ими? Неужели тогда логарифмы еще не были изобретены? Нет, первые таблицы логарифмов (вначале — для синусов, косинусов и тангенсов) были составлены независимо друг от друга шотландцем Непером и швейцарцем Бюрги́, когда Френикль был еще школьником, затем англичанин Бригг выпустил первые таблицы логарифмов для обычных чисел. Наконец, голландец Влакк, продолжая работу Бригга, выпустил таблицы логарифмов столь совершенные, что они содержали всего 173 ошибки[1]. Это было в 1628 г. Френиклю было тогда только 23 года.

Проще всего предположить, что Френикль не хотел заниматься изложением способа пользования такой новой вычислительной техникой, как логарифмирование. По необходимости подробное, оно заслонило бы основную тему о сложных процентах. Что же касается громоздких вычислений, то они Френикля не пугали. Это была обычная черная работа математика.

Но неужели Френикль был вынужден выбирать срок действия сложных процентов только равным степени двух? Ничуть не бывало. Он пишет далее, что если надо рассчитать прибыль за 33 года, то результат для 32 лет надо умножить на $\frac{21}{20}$, а если за 34 года, то еще раз умножить на $\frac{21}{20}$. А для облегчения работы отбросить в числителе и знаменателе по 32 знака, как было сделано ранее.

Это все верно, но если бы вкладчик пожелал отдать в рост свой единственный дукат, например, на 27 лет? Тогда понадобилось бы дробь для 16 лет умножить на дробь для 8 лет, а резуль-

---

[1] Здесь нет иронии. Лишь полтора века спустя австриец Вег сумел выпустить таблицы логарифмов, где было только 5 ошибок. Первые таблицы без ошибок были выпущены немецким математиком Бремикером совсем недавно — в 1857 г., только 110 лет тому назад.

тат еще три раза умножать на $\frac{21}{20}$. Возможно, что такие вычисления были приемлемы в XVII в., но недаром столько людей в разных странах почти в одно и то же время рассчитывали таблицы логарифмов. Они были необходимы не только астрономам.

Таблицам магических квадратов в 16 клеток предшествовало сочинение Френикля «О магических квадратах или таблицах». В нем он дает способы построения магических квадратов с 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 и 14 клетками в основании. Таблицы Френикль заключает интересным рассуждением о разделении всех 880 магических квадратов с 4 клетками в основании на группы. Здесь же он дает расчет числа вариантов магических квадратов с 5 и 6 клетками в основании, построенных только одним способом. В дальнейшем расчетами числа вариантов магических квадратов занимались многие ученые и, в том числе, на рубеже XIX и XX вв., профессор Ермаков, член-корреспондент Петербургской академии наук.

В 1705 г., в Париже, было издано сочинение уже упомянутого ранее Филиппа де Лягира «Новые начертания и соображения о магических квадратах с их демонстрацией. Начертания магических квадратов при четном числе клеток в основании». Эта работа особенно интересна тем, что в ней Лягир впервые рассмотрел и описал особый тип магического квадрата, который он назвал «панмагическим». В нем содержится наибольшее число равных сумм чисел. В дальнейшем квадраты этого типа называли также «дьявольскими», «сатанинскими», «чертовскими», «кабалистическими», «сверхмагическими». У современных французских авторов есть для этих квадратов отличное и простое название «совершенные». Оно и будет здесь использовано.

Развлечение или наука?

Начиная с Ферма, Френикля и их современников, сочинения о магических квадратах теряют характер математических развлечений. Теория магических квадратов развивается одновременно с развитием общей теории чисел и становится ее ответвлением.

Чем ближе к нашему времени, тем больше встречается имен крупных ученых, занимавшихся магическими квадратами. Им отдал дань знаменитый, «поймавший молнию» Франклин, но на первом месте должен быть назван Леонард Эйлер, швейцарец по происхождению. Его второй родиной стала Россия.

Эйлер был избран академиком в Петербургской, Берлинской, Лондонской, Парижской, Туринской, Лейпцигской, Флиссингенской, Базельской и других академиях. После смерти Эйлера русская Академия наук 79 лет продолжала публиковать его работы, не напечатанные ранее. Он написал более 800 работ. Сейчас у нас нет студента, который не встретил бы теорем и задач Эйлера в математике, механике, сопротивлении материалов и т. д. Поистине Эйлер был одним из тех, кто заложил фундамент современной науки.

Много он сделал и в теории чисел. Шестая из его записных книжек (примерно 1754—1757 гг.) содержит много заметок по теории чисел. Около 30 страниц уделено магическим квадратам. В 1776 г. Эйлер закончил сочинение «О магических квадратах». В 1782 г. выходит его новая работа «Исследование нового вида магических квадратов». В ней исследовались не числовые, а буквенные квадраты.

Магическим квадратам отдал дань (в переписке с Шумахером) и великий немецкий математик Гаусс.

Девятнадцатый и начало двадцатого века особенно богаты работами о магических квадратах. Для их анализа используется глубоко разработанная к этому времени теория чисел, в частности, теория сравнений. Применяются десятки хитроумных способов составления магических квадратов. Анализ магических квадратов расширяется и углубляется: рассчитываются магические кубы; анализируются численные линии, плоскости, пространства трех и более измерений. Рассматриваются магические квадраты не с суммами, а с произведениями чисел; квадраты, у которых суммы степеней чисел оказываются равными. В обстоятельном хронологическом перечне работ (книг и статей в сборниках и журналах) о магических квадратах, составленном ранее упомянутым профессором В. Аренсом, содержатся сотни названий. Только за 10 лет, с 1901 по 1910 г., указаны авторы и названия 50 работ на всех западноевропейских языках и даже на японском. За 8 лет, с 1911 по 1918 г., вышло в свет более 30 работ о магических квадратах.

В капитальном труде о магических квадратах Э. Казала́са, выпущенном в Париже в 1933 г., напечатан также огромный[1] хронологический перечень работ о магических квадратах. Судя по этому перечню, с 1918 г. и по время выхода книги Казаласа изданы десятки работ о магических квадратах. Среди них особенно интересен расчет числа магических квадратов, имеющих по 4 и по 8 клеток в основании, выполненный в 1930 г. 68-летним немецким математиком Ф. Фиттингом. (Начало этого расчета совпадает с работой проф. Ермакова, выполненной в 1895 г. О ней и о работе Ф. Фиттинга будет сказано далее.)

За последние 80—100 лет возрастает число популярных книг, имеющих целью развлечь читателя математическими диковинками из мира чисел, играми и задачами, требующими не столько специальных знаний, сколько простой смекалки. В большинстве таких книг содержатся главы о магических квадратах. Однако именно в этих главах популярное изложение часто уступает место

---

[1] Свыше 500 книг более чем 400 авторов.

достаточно сложным приемам анализа, использующего, в частности, теорию сравнений. Среди зарубежных авторов многократно печатавшихся развлекательных математических книг находятся упоминавшийся В. Аренс, а также немецкий математик В. Литцман [17].

Но дело не ограничивается только зарубежными авторами. В конце XIX и в начале нашего века, после долгого перерыва, длившегося со времен Эйлера, начали появляться работы о магических квадратах, написанные русскими учеными. В 1884 г. в Петербурге вышла книга инженера М. Фролова «Задача Эйлера и магические квадраты» и иллюстрирующий ее атлас с большим числом решений.

В 1895 г. с докладом на тему о магических квадратах выступил казанский математик И. Износков. Авторский реферат об этом докладе был напечатан в «Известиях физико-математического общества при Казанском университете» за 1896 г. В этом докладе И. Износков излагает содержание книги французского ученого Габриэля Арну́ «Графическая арифметика. Сверхмагические арифметические пространства». (Книга Арну была издана в Париже в 1894 г.) Рассказывая о книге Арну, Износков полемизирует с ним и с М. Фроловым. В январе 1914 г. то же «Общество» при Казанском университете печатает реферат о новой работе И. Износкова «Полные численные квадраты». Им же написано отдельное исследование «Решение уравнений со многими неизвестными при помощи магических квадратов». В работах И. Износкова интересны попытки дать численным магическим квадратам более общую буквенную (алгебраическую) форму.

В 1884—1885 гг. ряд статей о магических квадратах написал профессор Киевского университета, член-корреспондент Петербургской академии наук В. П. Ермаков. Он напечатал их в издаваемом им «Журнале элементарной математики». Вот их названия: «Полные волшебные квадраты», «Средние волшебные квадраты с шестнадцатью клетками», «Правильные волшебные квадраты с шестнадцатью клетками». В статьях В. Ермакова использован способ Эйлера для составления магических квадратов сложением нескольких так называемых «вспомогательных» квадратов и сделана попытка рассчитать число вариантов магических квадратов.

В 1924 г. вышла книга академика Я. В. Успенского, рассматривающая отдельные вопросы из теории чисел [10]. Отдельная глава посвящена магическим квадратам. Несмотря на развлекательное название, изложение имеет строгую математическую форму.

За 9 лет, с 1954 по 1963 г., вышло 7 изданий книги советского математика Б. А. Кордемского «Математическая смекалка», содержащей главу о магических квадратах.

Наконец, в 1964 г. вышла в свет брошюра М. М. Постникова «Магические квадраты», являющаяся первой отечественной специальной книгой о магических квадратах. Для их анализа в книге использована теория сравнений.

Чем же определяется интерес к магическим квадратам в наше время? Пусть скажет свое мнение А. Обри́, ранее названный автор исторического очерка, являющегося вступлением к книге Э. Казаласа «Магические квадраты». В переводе несколько проигрывает его цветистый французский язык, но дело, в конце концов, не в красоте стиля.

«... Ценность теории определяется не только возможностью ее практического использования, для какого она разработана, но также ее способностью воспитывать наш ум, доставлять ему питание, поддерживающее его жизнь, везде отыскивать новые истины и выяснять их значение без помощи извне. С этой точки зрения изучение магических квадратов, не требуя глубоких знаний, представляет собой превосходную умственную гимнастику, развивающую способность понимать идеи размещения, сочетания, симметрии, классификации, обобщения и т. д. ... Можно сказать, что эта умственная гимнастика включает тонкие теоретические построения, занимаясь которыми упражняется ум.

С другой стороны, в необъятной области чисел арифметическая магия никогда не будет оазисом, посещаемым туристами, заботящимися только о том, чтобы не отклоняться от предписанного маршрута и во всех случаях избегать длинных комментариев и каких-либо философских рассуждений на эту тему. Мы не будем их избегать (в книге Э. Казаласа. — *Е. Г.*), если это облегчит подход к вопросу и устранит длительные поиски решения. Это будет способствовать прогрессу теории, раскрытию ее древней тайны и выявлению ее старомодного изящества. Естественная красота, которую содержат магические квадраты, многократно встречающаяся и разнообразная, достаточна для того, чтобы привлечь и удержать любителей. .»

Неплохо сказал Обри! Надо только добавить, что способ анализа, его форма, его сложность, не представляющие трудности для математиков, могут стать препятствием для неспециалиста. Уже сказано в одном случае, что книга о магических квадратах, написанная на основе теории сравнений, требует от читателя довольно высокой математической культуры.

Однако немало книг написано без аппарата теории сравнений Пусть эта книга будет одной из них. В ней, конечно, надо рассмотреть известные простые способы построения магических квадратов. Но в ней будет и новое. То, что встретилось при исследовании некоторых проблем. Недостаточно было бы дать только конечные выводы. Надо рассказать о самой работе — поисках, неудачах, находках. Такой способ позволит показать «черную» работу исследователя в ее истинном виде. А это может оказаться для читателя-неспециалиста более интересным, чем отдельные специальные детали.

Первая встреча

Вот каков магический квадрат:

	11	*24*	*7*	*20*	*3*	→ 65
	4	*12*	*25*	*8*	*16*	→ 65
	17	*5*	*13*	*21*	*9*	→ 65
	10	*18*	*1*	*14*	*22*	→ 65
	23	*6*	*19*	*2*	*15*	→ 65
↙ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↘ 65

Можно было для примера взять квадрат побольше, но с ним труднее работать. Можно было взять квадрат поменьше, с 3 или 4 клетками в основании, но это квадраты особенные и приятнее сразу рассматривать их более обстоятельно и не торопясь. Впрочем, нельзя ограничиться только общим знакомством и для квадратов в 25 клеток. С ними нужно будет еще поработать. Пока же такой квадрат — просто образец на витрине. Но и через витринное стекло можно многое заметить, если, конечно, смотреть внимательно. Что же можно увидеть, если посмотреть внимательно?

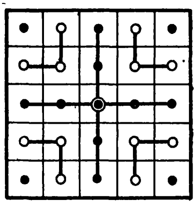
Суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце, в обеих диагоналях равны друг другу, иначе квадрат нельзя было бы называть магическим. Но как это сделано? В чем секрет расстановки цифр? На первый взгляд они располагаются без всякой системы. Почему получаются равные суммы? Сколько таких квадратов можно сделать? Чем они отличаются друг от друга?

По-видимому, во многих случаях, и в древности и во времена, более близкие к нам, сначала каким-то способом, при случайных пробах или путем длительных поисков, находили магический квадрат. Когда же магический квадрат был налицо, разрабатывали лучший способ его составления, более короткий, более экономный, более красивый. Часто на этом работа заканчивалась и никакого исследования полученного квадрата или квадратов не делалось. А ведь это было бы, пожалуй, даже интереснее.

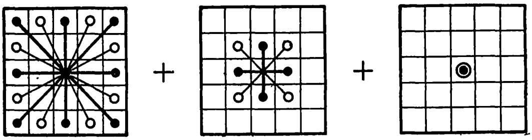
Числа, расположенные в клетках этого магического квадрата, составляют натуральный ряд, начинающийся единицей и заканчивающийся числом 25. Можно ли без подробного исследования заметить какие-нибудь особенности в их расстановке? Как, например, расположены четные и нечетные числа? (*см. стр. 17*).

Неожиданно открывается рисунок необычайной правильности и симметрии.

Легко разделить все числа ряда только на две группы — четные и нечетные, но это сужает основу для дальнейших поисков,



Гораздо интереснее проследить, как расположены пары чисел[1]. Оказывается, что оба числа каждой пары симметрично расположены по отношению к центру квадрата, а в нем находится среднее число ряда.



Этот магический квадрат обладает полной центральной симметрией. Может быть, она является признаком магического квадрата и причиной его свойств?

В поисках ответа можно попробовать рассмотреть квадрат, в котором числа натурального ряда записаны в их естественном порядке.

1	2	3	4	5	→ 15
6	7	8	9	10	→ 40
11	12	13	14	15	→ 65
16	17	18	19	20	→ 90
21	22	23	24	25	→ 115
↓ 55	↓ 60	↓ 65	↓ 70	↓ 75	

↙ 65 ↘ 65

Оказывается, что пары чисел и здесь расположены симметрично по отношению к центру квадрата, точно так же, как у предыдущего магического квадрата. Но суммы чисел равны 65 только в четырех случаях: в средней строке, в среднем столбце и в обеих диагоналях. Полная центральная симметрия имеется, а квадрат не магический.

[1] Можно напомнить: это числа, равноотстоящие от концов ряда. Сумма пары чисел одна и та же для всех пар: $\sigma = 1 + 25 = 2 + 24 = \ldots = 11 + 15 = 12 + 14$.

Теперь ясно, что внутренняя структура, понимаемая как рисунок, изображающий расположение пар чисел, сама по себе не определяет свойств численного квадрата. Он может оказаться магическим, а может им не быть. Очевидно, для получения магического квадрата нужно еще какое-то условие или какие-то условия. Но значит ли это, что внутренняя структура магического квадрата может быть какой угодно? Что внутренний рисунок может быть симметричным и не симметричным, простым и сложным? Что им вообще не следует интересоваться?

Все это пока неизвестно. Было бы проще всего сравнить друг с другом внутренние структуры достаточно большой группы магических квадратов одного размера. Но откуда их взять? Можно ли надеяться их составить, последовательно пробуя различные варианты расстановки чисел в клетках квадрата? Пусть будут получаться какие-то случайные численные квадраты, но ведь среди них должны найтись и магические? Велик ли объем такой работы?

Определить его, пожалуй, нетрудно. Первое по счету число, любое из чисел ряда, может быть записано в любой из 25 клеток квадрата. Это составит 25 вариантов. В каждом из них остаются свободными 24 клетки. В любой из них можно поставить второе число. Поэтому размещение двух первых чисел может быть выполнено в $25 \times 24 = 600$ вариантах. (Такое начало расчета не особенно обнадеживает, но что будет далее?) Каждому из 600 вариантов соответствуют 23 варианта размещения любого третьего числа в любой из оставшихся свободными 23 клеток. Значит, размещение трех чисел может быть выполнено в $25 \times 24 \times 23$ вариантах; четырех чисел — в $25 \times 24 \times 23 \times 22$ вариантах и так далее. Для всех 25 чисел ряда общее число возможных численных квадратов оказывается равным произведению из 25 множителей, начиная с 25 и кончая единицей: $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \ldots$ $\ldots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Такие произведения нам встречались еще в школьные времена, когда «проходили» теорию соединений. (Удивительно, как много умных вещей было в школе, мимо которых мы проходили не задумываясь.) Эти произведения носят звучное название «факториал» и обозначаются числом с восклицательным знаком 25! Надо полагать, что величина 25! достаточно велика. Но очень ли она велика?

Сколько времени надо вычислительной машине, чтобы составить из 25 чисел 25! вариантов численных квадратов? Пусть это будет обычная современная электронная вычислительная машина, не очень большая и не очень дорогая, поэтому не очень уж быстродействующая, выполняющая до 20 тысяч операций в секунду. Составление одного варианта 25-клеточного численного квадрата с подсчетом сумм чисел в рядах, с подведением итога — магический или не магический, потребует около 40 операций. Вычислительная машина затратит на составление одного варианта 40 : 20 000 = 0,002 секунды — всего только две тысячные доли секунды. Общее время работы машины должно равняться $0{,}002 \times 25!$ секунд. Без логарифмов здесь не обойтись, но для облегчения работы их можно прочитать не по таблицам, а на шкале счетной линейки, где видны только 2—3 знака после запятой,

$$\lg (0{,}002 \times 25!) = \lg 0{,}002 + \lg(25!);$$

$$\lg 0{,}002 = -3 + 0{,}30 = -2{,}70;$$

$$\lg (25!) = \lg 25 + \lg 24 + \lg 23 + \lg 22 + \ldots + \lg 3 + \lg 2 + \lg 1 = 1{,}40 + 1{,}38 + 1{,}36 + 1{,}34 + 1{,}32 + 1{,}30 + 1{,}28 + 1{,}255 + 1{,}23 + 1{,}20 + 1{,}175 + 1{,}145 + 1{,}115 + 1{,}08 + 1{,}04 + 1{,}00 + 0{,}95 + 0{,}90 + 0{,}845 + 0{,}78 + 0{,}70 + 0{,}60 + 0{,}475 + 0{,}30 + 0 = 25{,}17.$$

Остается добавить логарифм двух тысячных:
$25{,}17 - 2{,}70 = 22{,}47$.

По этому логарифму определяется искомое число[1]. Оно оказывается примерно равным 29 500 000 000 000 000 000 000. Приличнее записать его так: $2{,}95 \cdot 10^{22}$.

Следовательно, чтобы составить из 25 чисел все возможные численные квадраты, размером в 25 клеток, электронная вычислительная машина должна непрерывно работать $2{,}95 \cdot 10^{22}$ секунд, или $4{,}92 \cdot 10^{20}$ минут, или $8{,}20 \cdot 10^{18}$ часов, или $3{,}4 \cdot 10^{17}$ суток, или $9{,}35 \cdot 10^{14}$ лет.

—Лет?

—Да, свыше девятисот тысяч миллиардов лет. Почти миллион миллиардов лет непрерывной работы.

—Какая нелепость!

—Конечно, нелепость. Но она состоит вовсе не в том, что расчет содержит ошибку и поэтому срок астрономически велик. Расчет верен. Просто нельзя было бы поручить вычислительной машине работу, которая ей не по силам. Если бы значительно усложнить программу работы машины, то можно было бы сократить время ее работы до разумных пределов.

Однако при этом возникли бы два затруднения. Первое: составление сложной программы требует большого труда. Второе: трудно было бы рассмотреть и проанализировать большое количество полученных от машин магических квадратов. Хорошо, если их будут сотни. А если тысячи, десятки тысяч, сотни тысяч?.. (В таком предположении нет ничего невероятного.)

---

[1] В логарифме 22,47 после запятой стоит число 47. Логарифму 0,47 соответствует число 2,95. До запятой стоит число 22. Логарифму 22,0 соответствует число 100 000 000 ... 000, содержащее 22 нуля.

Следовательно, пока не ясно, каким способом составлять магические квадраты. Можно или нельзя, удобно или неудобно использовать для этой цели внутреннюю структуру? В этом придется разобраться. Сейчас же можно выполнить небольшую подготовительную работу. Надо условиться о некоторых простых вещах, относящихся к магическим квадратам любого размера.

Число клеток в основании квадрата обычно обозначают латинской буквой n (малой). Тогда общее число клеток квадрата равно n^2. Вообще не обязательно, чтобы в клетках магического квадрата были записаны числа только натурального ряда, но здесь для простоты (и красоты) будут использованы только они, и начинаться они будут единицей. Тогда последние члены рядов всегда будут равны n^2, то есть числу клеток квадрата. При расчетах часто приходится пользоваться величиной суммы обоих чисел пары, равноотстоящих от концов ряда, равной сумме первого и последнего членов ряда. Для нее нет общепринятого обозначения. Для этого будет удобна греческая буква сигма (малая) — σ; $\sigma = 1 + n^2$.

При $n = 5$ $\sigma = 1 + 25 = 26$.

Сумма чисел в строке или в столбце, или в диагонали магического квадрата одна и та же. Она называется «постоянной» магического квадрата. Ее обычно обозначают греческой буквой сигма (большой) — Σ, но часто этой же буквой обозначают сумму вообще. Пусть здесь «постоянная» будет обозначена большой сигмой с нулем под строчкой — Σ_0.

Между σ и Σ_0 имеется простая связь, одна и та же для магических квадратов любого размера. Если n — четное число, то число пар чисел в ряду равно $n^2 : 2$. При нечетном n число пар равно $(n^2 - 1) : 2$. Сумма всех пар четного квадрата, совпадающая с суммой всех чисел квадрата, равна $\frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \sigma$. Сумма всех пар нечетного квадрата равна $\frac{1}{2} \cdot (n^2 - 1) \cdot \sigma$. Чтобы получить сумму всех чисел нечетного квадрата, надо добавить среднее число ряда, равное $(1 + n^2) : 2$ или $\sigma : 2$. Она оказывается такой же, что у четного квадрата: $\frac{1}{2} \cdot (n^2 - 1)\sigma + \frac{1}{2}\sigma = \frac{1}{2} \cdot (n^2 - 1 + 1) \cdot \sigma = \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \sigma$. Следовательно, «постоянная» магического квадрата любого размера $\Sigma_0 = \left(\frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \sigma\right) : n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sigma$.

При $n = 5$ $\Sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 26 = 65$. Если бы магический квадрат имел в основании 20 клеток, то для него $\sigma = 1 + n^2 = 1 + 400 = 401$; $\Sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 401 = 4010$. При проверке «магичности» таких квадратов не очень приятно подсчитывать большие суммы, складывая по 20 чисел в 20 строках, 20 столбцах и

2 диагоналях в каждом варианте. Поэтому надо будет работать преимущественно с квадратами малого размера.

Любопытно, что при вычислении Σ_0 произведение $n \cdot \sigma$ всегда оказывается четным числом. Поэтому число Σ_0 — всегда целое. Так получается потому, что четность n и σ всегда различна. Если n — число четное, то $\sigma = 1 + n^2$ — нечетное и наоборот.

Еще одно важное замечание.

Если каким-либо путем были бы получены все возможные численные квадраты одного размера, магические или немагические, то среди них обязательно окажутся (и оказываются) сходные. Сходство заключается в том, что эти квадраты можно получить один из другого поворотом или зеркальным отображением. Но как ни поворачивай численный квадрат, он, в сущности, не изменяется. Вот пример:

1)

11	**24**	**7**	**20**	**3**
4	**12**	**25**	**8**	**16**
17	**5**	**13**	**21**	**9**
10	**18**	**1**	**14**	**22**
23	**6**	**19**	**2**	**15**

2)

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

3)

15	2	19	6	23
22	14	1	18	10
9	21	13	5	17
16	8	25	12	4
3	20	7	24	11

4)

23	10	17	4	11
6	18	5	12	24
19	1	13	25	7
2	14	21	8	20
15	22	9	16	3

5)

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

6)

11	4	17	10	23
24	12	5	18	6
7	25	13	1	19
20	8	21	14	2
3	16	9	22	15

7)

3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23

8)

15	22	9	16	3
2	14	21	8	20
19	1	13	25	7
6	18	5	12	24
23	10	17	4	11

Таких вариантов всегда восемь. Один из них — исходный, начальный, основной. Три квадрата получаются поворотами начального квадрата на 90°, 180° и 270°. Каждый из полученных четырех квадратов можно преобразовать с помощью зеркального отображения. Это дает еще 4 квадрата. Однако полученные такими способами 7 квадратов не могут считаться вариантами исходного квадрата. Это ложные варианты, кажущиеся варианты, потому что каждый из них в сущности все тот же исходный квадрат.

Для этих ложных вариантов нет установившегося названия, а оно необходимо — при расчетах ложные варианты встречаются очень часто. В дальнейшем они будут здесь именоваться «невариантами».

Уже выяснено, что численных квадратов, магических и немагических, с 5 клетками в основании, ровно 25! Среди них обязательно находятся неварианты. Если от них избавиться, то число истинных вариантов квадратов 5×5 клеток, магических и немагических, равно $25! : 8$. (Это число имеет 25 знаков, то есть практически столь же неудобно большое.)

В квадратах любого размера, с n клетками в основании, число истинных вариантов всегда равно $n! : 8$.

Так состоялось первое знакомство с магическим квадратом. Можно начать поочередно рассматривать магические квадраты разного размера. В первую очередь квадрат с 3 клетками в основании. Но прежде — одна история, найденная в книге немецкого профессора.

Вот она.

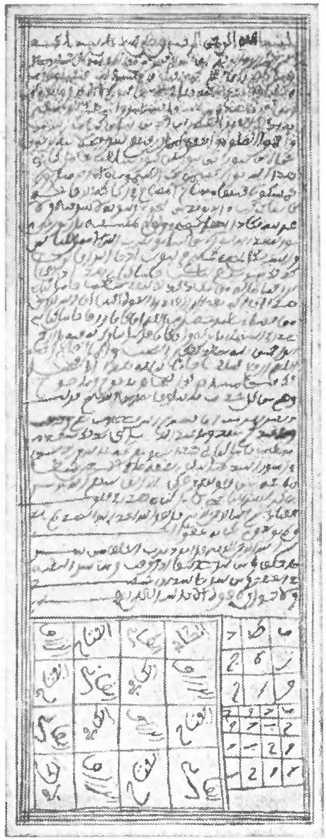
Единственный вариант

Франция. Лето 1917 г. Франко-германский фронт. Выжженная, изуродованная, мертвая земля. Была атака, но захлебнулась и откатилась назад, к окопам англичан. У немецких окопов остались только трупы.

Франц Буль ногой перевернул убитого на спину. Франц устал и дает себе минутную передышку. Он думает: конечно, кайзер знает, что делает, но какая была бы гадость, если бы это он так лежал, унтер-офицер Франц Буль. Лежал бы, так же подогнув ногу, ничком, как упал бы на бегу, а кто-то другой перевернул бы его на спину, чтобы обшарить карманы. Откуда только такие берутся? Лицо тонкое, бородка. Была бы чалма на голове, было бы ясно, что — индус. Когда же все небритые, грязные, а на голове стальная кастрюля, поди, разберись, кто — кто?

Привычно быстро Франц опустошил карманы френча убитого. Солдатские мелочи — вон, пару монет — себе в карман, письма, документы — в сумку. А это что такое? В руках баварца оказалась длинная полоска какой-то плотной бумаги, вся исписанная странными закорючками. Внизу какие-то кособокие квадраты, разделенные на клетки, и в них такие же закорючки. Шифр? Планы какие-то? Что-то напоминали Францу эти квадраты. Он спрятал таинственную полоску в сумку с документами, затем переложил в свой карман и, пригнувшись, отправился в обратный путь.

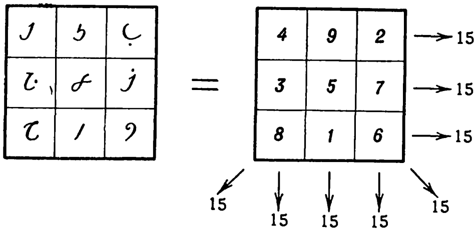
То же лето 1917 г. Германия. Город Росток. Старый дом, старая квартира, старый профессор. Он сильно похудел. Математика — мало доходная специальность во время войны. Когда раздался звонок у входной двери, профессор с трудом встал с кресла. Это был всего только почтальон. Не спеша профессор вскрыл конверт. Майн гот, какие каракули! Да это вовсе не письмо!.. Профессор схватил лупу. Какой-то невежда перерисовал арабский текст, но так, что понять что-либо невозможно. Но что это в конце? Лупа задрожала в руке профессора. Нет сомнения, это магические квадраты. А вот и само письмо. Смотрите-ка, даже на фронте есть люди, не забывшие труды профессора о магических квадратах. Скорее написать этому баварцу. Его могут двадцать раз убить и подлинный амулет, амулет XX в. будет утерян безвозвратно.



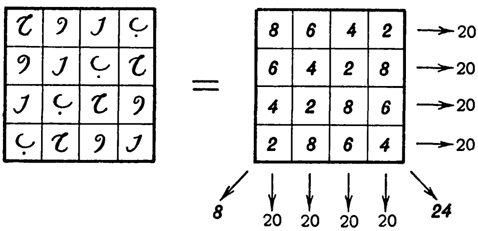
Письмо успело дойти до окопов на франко-германском фронте. Профессор успел получить желанный листок. Он был немного испачкан чем-то бурым, но это было неважно. Зато теперь профессор смог написать статью «Арабский амулет с поля битвы». Он упомянул также о нем в своей книге «Математические игры». Без всяких подробностей, всего несколько строк: Франц Буль, унтер-офицер баварского полка, нашел амулет на убитом, догадался, что он содержит магические квадраты, и прислал сначала копию, затем подлинный амулет. После этого следовали научные комментарии, свидетельствующие о глубоком понимании профессором всех вопросов, связанных с магическими квадратами.

Вот и вся история этой находки. Вся? А индус?.. Кому было дело до индуса? Франц Буль выполнил задание собрать документы убитых. Профессор написал научный комментарий. А индус в братской могиле. Недаром, видимо, боялся он английских окопов на франко-германском фронте. Иначе, зачем у него амулет? Где только он его достал? Быть может, там же, на той же тихой улочке шумного восточного базара? И лавка, возможно, была та же, где покупал свой амулет его пра-пра-пра-прадед? И не помог ему амулет так же, как не помог трижды пра-прадеду.

Какие же магические квадраты оказались на полоске пергамента? Может быть, попробовать разобраться в арабской скорописи? Перевод арабских букв — цифр на современные цифры может сделать каждый, если есть под рукой справочник, например первый том «Энциклопедии элементарной математики». С ее помощью удается заметить, что некоторые арабские буквы — цифры написаны в амулете недостаточно четко и не очень-то разборчивы Но в самом малом квадрате их всего только девять. Кроме того если это магический квадрат, должны быть одинаковы суммы чисел в строках, столбцах и диагоналях квадрата. Это помогает расшифровке. В результате каждое из 9 чисел находит свою клетку, и первый магический квадрат арабского амулета оказывается переведенным. Это самая древняя форма магического квадрата.

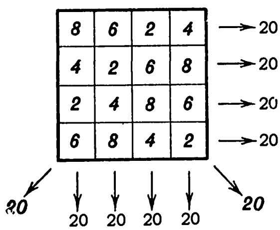


Второй квадрат амулета, после его перевода с арабского, тоже оказывается численным квадратом, но каким-то странным. В его 16 клетках размещены только 4 числа (2, 4, 6, 8), но каждое по 4 раза. Они так расставлены в строках и столбцах, что не повторяются в них.



Поэтому суммы чисел в столбцах и строках одинаковы. Зато диагонали в нем не удались и квадрат нельзя назвать магическим, а только полумагическим [1].

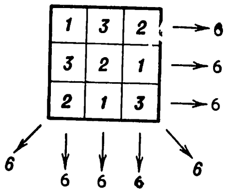
Пожалуй, составитель амулета не только плохо разбирался в магических квадратах (куда уж тут!), но просто списывал с неудачного образца. А ведь достаточно небольшой перестановки чисел и квадрат становится магическим.



[1] Это название общепринято.

Правда, в этом случае в диагоналях квадрата числа повторяются, но их сумма равна постоянной квадрата.

Нетрудно сделать такой же «странный» магический квадрат в 9 клеток:



«Странные» численные квадраты по-своему очень интересны, но они самочинно вторглись в рассуждения о квадратах, содержащих один ряд чисел. Поэтому сейчас ими заниматься не стоит. Пусть ждут своей очереди.

В последнем, третьем, самом большом квадрате арабского амулета, вовсе нет чисел. Он содержит только имена богов и поэтому неинтересен.

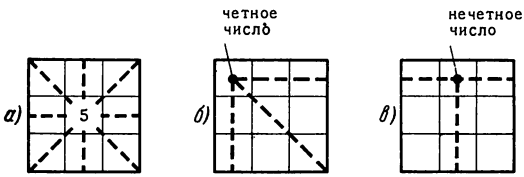
Теперь пришла пора разобраться в 9-клеточном магическом квадрате. Такой простой с виду, он обладает одной особенностью, которой нет ни у одного другого магического квадрата большего размера. Эта особенность состоит в том, что 9-клеточный магический квадрат существует только в одном-единственном варианте. (Не считая, конечно, его семи невариантов.) Пусть это общеизвестно, но все равно удивительно, в особенности, если подсчитать общее количество 9-клеточных квадратов, которое можно составить из 9 чисел, даже без невариантов. Таким же способом, как для квадрата 5×5 клеток, получается $9! : 8 = 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 45\,360$. Это не миллиарды, не миллионы, но все-таки большое число. Среди этих 45 тысяч квадратов только один магический и какое-то число полумагических. Нельзя этому не верить, но приятнее убедиться самому. Можно испробовать простой способ, который будет пригоден в дальнейшем для магических квадратов иного размера, в первую очередь для квадратов 4×4 клетки.

Способ состоит в том, что из чисел ряда подбирают группы. В каждой группе по n чисел. (Здесь по 3 числа.) Сумма чисел каждой группы должна равняться Σ_0. (Здесь $\Sigma_0 = 15$.) Готовые группы нужно так разместить в клетках квадрата, чтобы числа группы располагались прямыми рядами: по строкам, по столбцам и по диагоналям. Из 9 чисел натурального ряда, как оказывается, можно составить только 8 групп:

1) $1 + 5 + 9 = 15$ (в этой группе есть пара: $1 + 9 = \sigma = 10$);

2) $1 + 6 + 8 = 15$;
3) $2 + 4 + 9 = 15$;
4) $2 + 5 + 8 = 15$, $(2 + 8 = \sigma)$;
5) $2 + 6 + 7 = 15$;
6) $3 + 4 + 8 = 15$;
7) $3 + 5 + 7 = 15$, $(3 + 7 = \sigma)$;
8) $4 + 5 + 6 = 15$, $(4 + 6 = \sigma)$.

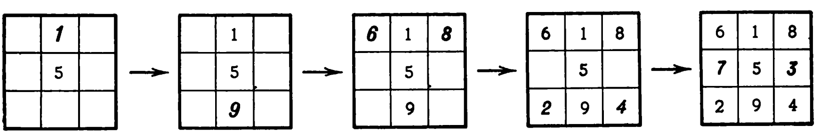
Как только эта табличка готова и внимательно рассмотрена, она сама начинает диктовать расстановку чисел в клетках квадрата. Число 5 входит в 4 группы. Это значит, что клетка для числа 5 находится на пересечении четырех прямых рядов. В квадрате 3×3 клетки есть только одна такая клетка — средняя (рис. *а*).



Следовательно, число 5 должно находиться только в центре квадрата и нигде более. Этим неожиданно и сразу определяется будущая внутренняя структура этого еще не построенного квадрата. Каждые два числа, находящиеся в одной группе и в одном ряду с числом 5, составляют пару. Эти пары располагаются симметрично по отношению к центру квадрата. Поэтому внутренняя структура будет обладать полной центральной симметрией.

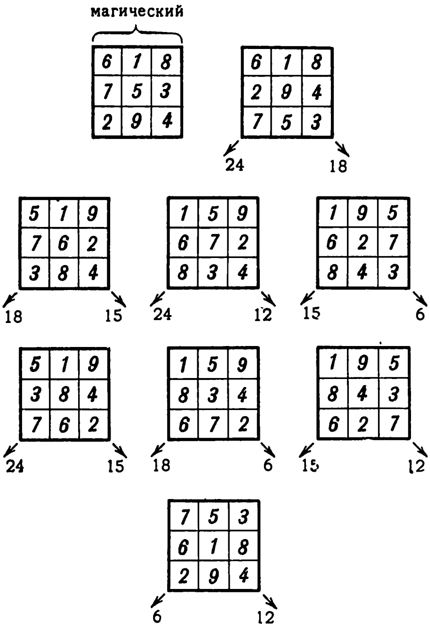
Каждое четное число ряда встречается в трех группах. Это значит, что четные числа находятся на пересечении трех прямых рядов, то есть в угловых клетках (рис. *б*). Наконец, каждое из четырех оставшихся нечетных чисел — 1, 3, 7, 9 — входит только в 2 группы. Их место — в средних клетках по краям квадрата (рис. *в*).

Если для записи единицы из четырех пригодных клеток выбрать среднюю клетку верхней строки, то для числа 9 оказывается пригодной только одна клетка — средняя на нижней строке. Теперь можно заполнить всю первую строку: $6 + 1 + 8$ или $8 + + 1 + 6$. Это не два варианта, а только вариант и его невариант Числа в нижних угловых клетках определяются диагоналями: $6 + 5 + 4$ и $8 + 5 + 2$. Наконец, последние два числа 7 и 3 занимают свои места так, как подсказывают группы 5) и 6).



Действительно, получился только один вариант магического квадрата 3 × 3 клетки. Он не совпадает с магическим квадратом из арабского амулета. Там был его невариант.

Та же табличка из 8 групп позволяет легко построить все полумагические квадраты 3 × 3 клетки. При этом приходится заботиться о том, чтобы «испортить» диагонали так, чтобы сумма чисел в них не равнялась 15. Это удается только в четырех случаях. В остальных четырех полумагических квадратах сумма чисел в одной из диагоналей остается равной 15.



Вся группа из 9 квадратов, одного магического и восьми его родичей второго сорта, обладает некоторыми любопытными особенностями. В средней клетке по очереди располагаются все числа ряда от 1 до 9. В угловые клетки и в клетки на середине стороны квадрата каждое число попадает 4 раза.

Так, без осложнений и без затраты значительного труда, раскрылись основные особенности самого малого, самого простого, самого древнего магического квадрата.

Как-то будет с квадратами в 16 клеток?

ГЛАВА 2

ВСТРЕЧИ С ФРЕНИКЛЕМ

Задача

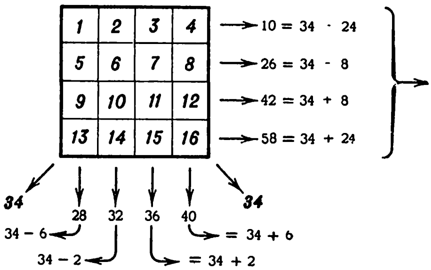
Казалось бы, что о магических квадратах с четырьмя клетками в основании уже давно все известно. Бернар Френикль составил таблицы, в которых записаны один за другим все 880 таких квадратов [1]. За два с половиной века никто не пытался проверить их число.

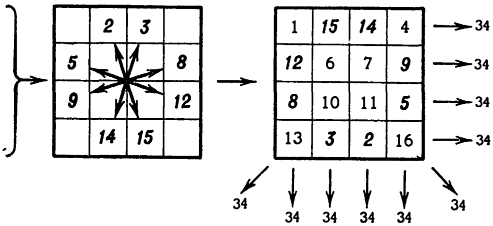
Уже в наше время немецкий математик Фридрих Фиттинг чисто теоретическими рассуждениями, не построив ни одного квадрата, экономно и красиво доказал, что число этих магических квадратов равно 880. Но вот что неприятно: работа Фиттинга не дает представления о самих магических квадратах, не считая пары примеров, а в таблицах Френикля квадратов слишком много. Они сливаются в общую массу и, за исключением разницы в расстановке чисел, не имеют, как кажется, никаких отличий друг от друга. А вдруг удалось бы найти и различия, и общие свойства?

Прежде чем начинать такую работу, надо посмотреть хотя бы на один готовый магический квадрат 4×4. Существует почти традиция начинать построение магических квадратов 4×4 с преобразования немагического квадрата такого же размера, заполненного числами от 1 до 16 в их естественном порядке. Секрет этой традиции, по-видимому, состоит в том, что этот способ настолько прост, что, не зная его, каждый придет к нему самостоятельно. Вопрос только в том, сколько времени займут многократные и неудачные попытки. Оказывается, что задача решается (в одном только варианте), если поменять местами числа четырех пар: 2 и 15, 3 и 14, 5 и 12, 8 и 9 (*см. стр. 29*).

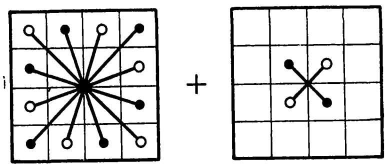
Полученный таким способом квадрат оказывается магическим, а сам способ — известным со времен Дюрера. В наше время этот способ теоретически разработан английскими математиком Раус-Боллом [2] и оказался пригодным также для четных квадратов

[1] См. литературу в конце книги.
[2] Способ Раус-Болла изложен в упомянутых ранее книгах академика Я. В. Успенского и М. М. Постникова.

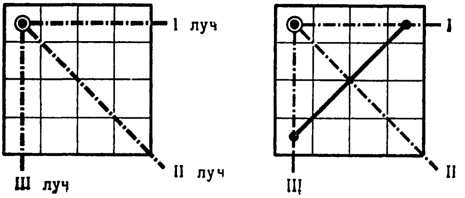




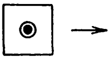
большего размера, чем 4 × 4. Внутренняя структура полученного магического квадрата 4×4 оказалась обладающей полной центральной симметрией — числа каждой пары сохранили свое симметричное расположение по отношению к центру квадрата.



В этом квадрате, так же как в любом другом магическом и немагическом квадрате, в каждой угловой клетке сходятся 3 прямых ряда: строка, столбец и диагональ. Общей клеткой здесь выбрана верхняя левая, а направление рядов определяется лучами I, II, III. В случае полной центральной симметрии группа чисел, расположенных на верхней строке (по лучу I), и группа чисел в левом столбце (по лучу III) обязательно содержат по



одному числу, которые вместе составляют пару. (В примере это числа 4 и 13.) Можно сказать иначе: при полной центральной симметрии луч I и луч III связаны одной парой, расположенной на «восходящей» диагонали (из левой нижней клетки вправо вверх). При той же структуре все 4 клетки вдоль луча II («нисходящая» диагональ из клетки сверху слева вниз направо) должны быть заняты двумя парами чисел. Из них одна включает числа в верхней левой клетке (в примере — число 1) и в правой нижней клетке (число $16 = \sigma - 1$).



1			4
13			16

Для опробования способа расчета можно взять исходные данные из уже построенного магического квадрата. В нем по лучу I и по лучу III расположены группы: 1) $1 + \underset{\smile}{4} + 14 + 15 = 34$ и 2) $1 + 8 + 12 + \underset{\smile}{13} = 34$. (Подстрочной дужкой отмечены два числа, составляющие обязательную пару.) Пара $4 + 13$ должна быть размещена на концах восходящей диагонали. Порядок расположения чисел пары не играет роли. Зеркальное отображение пары даст только невариант будущего магического квадрата. Далее надо разместить на верхней строке и в левом столбце пока не использованные числа обеих групп: 14 и 15, 8 и 12. Но это можно с равным правом выполнить в следующих четырех вариантах:

1)

	14	15	
8			
12			

2)

	14	15	
12			
8			

3)

	15	14	
8			
12			

4)

	15	14	
12			
8			

Как следствие — 4 равноправных варианта заполнения клеток внешних рядов:

1)

1	14	15	4
8			5
12			9
13	2	3	16

2)

1	14	15	4
12			9
8			5
13	2	3	16

3)

1	15	14	4
8			5
12			9
13	3	2	16

4)

1	15	14	4
12			9
8			5
13	3	2	16

Теперь остается заполнить числами 4 свободные клетки внутри каждого варианта. Для этого имеются 4 свободных числа ряда: 6; 7; 10; 11. Нетрудно найти для них правильную расстановку путем проб, но это можно сделать и расчетом. Для того чтобы не повторять один и тот же расчет для каждого из четырех вариантов, удобнее выполнить его сначала в алгебраической форме. Для этого обозначим числа каждой пары одинаковыми буквами с подстрочными индексами: a_1 и a_2; b_1 и b_2; c_1 и c_2 и так далее. Неизвестные пока числа для внутренних клеток можно обозначить x_1 и x_2; y_1 и y_2.

a_1	b_1	c_1	d_1
e_1	x_1	y_1	f_2
f_1	y_2	x_2	e_2
d_2	c_2	b_2	a_2

Вместо того, чтобы составить и решить 4 уравнения с четырьмя неизвестными, можно найти первое неизвестное число, например x_1, сложив числа двух рядов, пересекающихся на клетке с числом x_1, то есть второй строки и второго столбца слева:

$$+\begin{array}{l} e_1 + x_1 + y_1 + f_2 = \Sigma_0 = 2\sigma; \\ b_1 + x_1 + y_2 + c_2 = \Sigma_0 = 2\sigma. \\ \hline e_1 + b_1 + 2x_1 + y_1 + y_2 + f_2 + c_2 = 2\Sigma_0 = 4\sigma. \end{array}$$

Но $y_1 + y_2 = \sigma$; поэтому $2x_1 = 4\sigma - (e_1 + b_1 + f_2 + c_2) - \sigma = 3\sigma - (e_1 + b_1 + f_2 + c_2)$. Переходя к числовой форме последовательно для всех четырех вариантов, найдем:

1) $2x_1 = 3\;\; 17 - (8 + 14 + 2 + 5) = 51-29 = 22;\quad x_1 = 11;$
2) $2x_1 = 3 \cdot 17 - (12 + 14 + 2 + 9) = 51-37 = 14;\quad x_1 = 7;$
3) $2x_1 = 3 \cdot 17 - (8 + 15 + 3 + 5) = 51-31 = 20;\quad x_1 = 10;$
4) $2x_1 = 3 \cdot 17 - (12+15 + 3 + 9) = 51-39 = 12;\quad x_1 = 6.$

Все получилось хорошо: величины x_1 соответствуют свободным числам 6; 7; 10; 11. Остальные неизвестные x_2; y_1; y_2 рассчитать легко: $x_2 = \sigma - x_1$; $y_1 = \Sigma_0 - (c_1 + x_2 + b_2)$; $y_2 = \sigma - y_1$. Итак, одновременно получены 4 варианта магического квадрата с полной центральной симметрией, семейство из четырех братьев-близнецов. Все они являются истинными вариантами. Нельзя привести их к совпадению ни поворотами, ни зеркальным отображением, но можно найти способ, позволяющий преобразовать один вариант в другой. Для этого достаточно поменять местами 2 средние строки или 2 средних столбца, или то и другое вместе. Эти преобразования не делают их невариантами. Между прочим, четвертый вариант оказался тем, который был получен вначале (*см. стр. 32*).

1)

1	14	15	4
8	***11***	***10***	5
12	***7***	***6***	9
13	2	3	16

2)

1	14	15	4
12	***7***	***6***	9
8	***11***	***10***	5
13	2	3	16

3)

1	15	14	4
8	***10***	***11***	5
12	***6***	***7***	9
13	3	2	16

4)

1	15	14	4
12	***6***	***7***	9
8	***10***	***11***	5
13	3	2	16

Расчет удался. Он был основан на двух случайных числовых группах: $1 + 4 + 14 + 15$ и $1 + 8 + 12 + 13$. Вероятно, из 16 чисел ряда можно будет подобрать и другие группы по 4 числа, такие, чтобы сумма их чисел была равна 34. Надо найти эти группы. Надо найти затем комбинации из двух таких групп, чтобы группы были связаны одной (только одной!) парой. Каждая такая комбинация из двух групп даст по 4 варианта магических квадратов с полной центральной симметрией. Открывается возможность найти общее число таких магических квадратов.

Это — ближняя задача.

Черная работа

Начало работы оказалось простым и легким. При подборе чисел в группы всего только было заботы, чтобы среди чисел группы не было составляющих пару. Иначе это не соответствовало бы намеченной структуре — полной центральной симметрии. Всех групп оказалось 58:

I.1) $1 + 4 + 14 + 15$
I.2) $1 + 5 + 13 + 15$
I.3) $1 + 6 + 12 + 15$
I.4) $1 + 6 + 3 + 14$
I.5) $1 + 7 + 11 + 15$
I.6) $1 + 7 + 12 + 14$
I.7) $1 + 8 + 10 + 15$
I.8) $1 + 8 + 11 + 14$
I.9) $1 + 8 + 12 + 13$
I.10) $1 + 9 + 10 + 14$
I.11) $1 + 9 + 11 + 13$
I.12) $1 + 10 + 11 + 12$

II.1) $2 + 3 + 13 + 16$
II.2) $2 + 4 + 12 + 16$
II.3) $2 + 5 + 11 + 16$
II.4) $2 + 5 + 13 + 14$
II.5) $2 + 6 + 10 + 16$
II.6) $2 + 6 + 12 + 14$
II.7) $2 + 7 + 9 + 16$
II.8) $2 + 7 + 11 + 14$
II.9) $2 + 7 + 12 + 13$
II.10) $2 + 8 + 10 + 14$
II.11) $2 + 8 + 11 + 13$
II.12) $2 + 9 + 10 + 13$
II.13) $2 + 9 + 11 + 12$

III.1) $3 + 4 + 11 + 16$
III.2) $3 + 4 + 12 + 15$
III.3) $3 + 5 + 10 + 16$
III.4) $3 + 5 + 11 + 15$
III.5) $3 + 6 + 9 + 16$
III.6) $3 + 6 + 10 + 15$
III.7) $3 + 6 + 12 + 13$
III.8) $3 + 7 + 8 + 16$
III.9) $3 + 7 + 9 + 15$
III.10) $3 + 7 + 11 + 13$
III.11) $3 + 8 + 10 + 13$
III.12) $3 + 8 + 11 + 12$
III.13) $3 + 9 + 10 + 12$

IV.1) 4 + 5 + 9 + 16
IV.2) 4 + 5 + 10 + 15
IV.3) 4 + 5 + 11 + 14
IV.4) 4 + 6 + 8 + 16
IV.5) 4 + 6 + 9 + 15
IV.6) 4 + 6 + 10 + 14
IV.7) 4 + 7 + 8 + 15
IV.8) 4 + 7 + 9 + 14
IV.9) 4 + 7 + 11 + 12
IV.10) 4 + 8 + 10 + 12
IV.11) 4 + 9 + 10 + 11

V.1) 5 + 6 + 7 + 16
V.2) 5 + 6 + 8 + 15
V.3) 5 + 6 + 9 + 14
V.4) 5 + 6 + 10 + 13
V.5) 5 + 7 + 8 + 14
V.6) 5 + 7 + 9 + 13
V.7) 5 + 8 + 10 + 11

VI.1) 6 + 7 + 8 + 13
VI.2) 6 + 7 + 9 + 12

VII — нет VIII — нет

Странно, что не нашлось ни одной группы, начинающейся числами 7 и 8. Неужели нет магических квадратов, у которых в угловой клетке было бы 7 или 8? Впрочем, с группами из шестого столбика также не все в порядке: группы VI.1) и VI.2) нельзя использовать совместно потому, что помимо начального числа 6 в них два раза повторяется число 7. Этого не может быть ни в одном магическом квадрате любой структуры.

Недоумение разрешается просто. Оказывается, что могут (должны!) быть использованы и такие группы, в которых число, назначенное для записи в угловой клетке, не является наименьшим. В третий столбик можно (нужно!) добавить четырнадцатую группу, заимствованную из второго столбика: II.1) 3 + 2 + 13 + 16. В четвертый столбик добавляются четыре группы: I. 1) 4 + 1 + + 14 + 15; II.2) 4 + 2 + 12 + 16; III.1) 4 + 3 + 11 + 16; III.2) 4 + 3 + 12 + 15. В столбик V входят добавочные группы I.2); II.3); II.4); III.3); IV.1); IV.2); IV.3). К двум группам столбика VI добавляются 14 групп, начиная с I.3) и кончая V.4). Кроме этого, появляется столбик VII из 16 заимствованных групп и столбик VIII из 15 заимствованных групп. В результате общее число групп, с которыми надо будет работать, возрастает вдвое, с 58 до 116. Среди них надо разыскать те, которые пригодны для построения магических квадратов, имеющих полную центральную симметрию. Это будут группы, которые можно будет комбинировать[1] попарно так, чтобы они были связаны только одной парой. Такое требование обязательно, но оно не является гарантией того, что расчет квадрата будет благополучно закончен. При пробных расчетах не раз оказывалось, что сумма чисел ряда будет равна 34 только в том случае, если в свободную клетку вписать число, равное уже записанному в другой клетке, или боль-

[1] Здесь и в дальнейшем слово «комбинация» означает совместное использование двух (редко — трех) числовых групп.

шее, чем 16, или равное нулю, или даже отрицательное. Хорошо, если бы такие случаи были исключением, но практика показывает иное: исключениями оказываются удачно законченные расчеты. Но эти огорчения еще впереди. Сейчас нужно заняться подбором комбинаций.

Первыми идут в работу 12 групп, начинающихся единицей. К каждой группе, начиная с первой, примериваются последовательно все прочие группы, также начинающиеся единицей и идущие вслед за ней. Большая часть из них оказывается непригодной. Например, с группой I.1) 1+4+14+15 комбинируются только 2 группы: I.9) 1+8+12+13 и I.11) 1+9+11+13. Необходимая по условию пара в обеих комбинациях состоит из чисел 4 и 13. У остальных групп, начинающихся единицей, или совпадают два числа (редко более двух), или нет пары. Для следующей группы I.2) 1+5+13+15 пригодны также только две группы I.6) 1+7+12+14 и I.12) 1+10+11+12. С третьей группой I.3) комбинируются группы I.8) и I.11). И так далее, и так далее. Но для групп I.8); I.9); I.10); I.11) не нашлось ни одной следующей за ними группы, чтобы составить комбинацию, содержащую одну пару.

Итак, группы, начинающиеся с единицы, образуют только 12 комбинаций (с одной парой). Группы, начинающиеся двойкой, образуют 15 таких комбинаций; начинающиеся числом 3—20 комбинаций; 21 комбинация начинается числом 4; 25 — числом 5; 34 — числом 6; 28 — числом 7 и 24 — числом 8. Общее число комбинаций, содержащих одну пару, оказалось равным 179. Не так уж много, чтобы опасаться трудностей при их опробовании. Не так уж мало, чтобы не думать о наиболее экономных способах дальнейшего расчета.

Ранее, при расчете одного из четырех неизвестных чисел, которым надо было разместиться во внутренних клетках, выяснилось, что $2x_1 = 3\sigma - (e_1 + b_1 + f_2 + c_2)$. В предварительно заданных группах $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = \Sigma_0$ и $a_1 + e_1 + f_1 + d_2 = \Sigma_0$ нет чисел f_2 и c_2, но есть f_1 и c_1. Было бы удобнее, если бы в выражении $2x_1$ были f_1 и c_1, а не f_2 и c_2. Замена легко выполнима: $c_2 = \sigma - c_1$ и $f_2 = \sigma - f_1$. То есть $2x_1 = 3\sigma - e_1 - b_1 - (\sigma - f_1) - (\sigma - c_1) = \sigma + c_1 - b_1 + f_1 - e_1$. Окончательно: $x_1 = 0{,}5 \cdot (\sigma + c_1 - b_1 + f_1 - e_1)$. Такая запись удобна для быстрого расчета. Впрочем, рассуждение не так наглядно, как пример. Пусть комбинация имеет такой вид:

1) $2 + 5 + 11 + 16$; Пару составляют числа: 5 + 12.

2) $2 + 7 + 12 + 13$. Свободны: 3; 14; 8; 9 [1].

[1] Потому что заняты числа 16 (и поэтому занято число 1, дополняющее его до пары); 2 (и 15); 13 (и 4); 5 (и 12); 11 (и 6); 7 (и 10).

В группе 1) числа 11 и 16 соответствуют числам b_1 и c_1 или c_1 и b_1 квадрата; в группе 2) 7 и 13 это e_1 и f_1 или f_1 и e_1.

Разность $c_1 - b_1 = 16 - 11 = 5$ или $11 - 16 = -5$;
разность $f_1 - e_1 = 13 - 7 = 6$ или $7 - 13 = -6$.

Сумма этих разностей $(c_1 - b_1) + (f_1 - e_1) = 5 + 6 = 11$, или $5 - 6 = -1$, или $-5 + 6 = 1$, или $-5 - 6 = -11$, то есть или ± 11, или ± 1. Определились 4 варианта [1] величины x_1:

$$x_1 = \left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\cdot(17 + 11) = 14; \\ &\frac{1}{2}\cdot(17 - 11) = 3; \\ &\frac{1}{2}\cdot(17 + 1) = 9; \\ &\frac{1}{2}\cdot(17 - 1) = 8. \end{aligned}\right\}$$

Все эти 4 числа свободны. Это показывает, что комбинация пригодна, и магические квадраты можно составить.

Такие вычисления легко укладываются в табличку.

№	Группы	Свободны	Разности	Сумма разностей	x_1
II·3) II·9)	1) $2+\underbrace{5}+11+16$ 2) $2+7+\underbrace{12}+13$	3;8;14;9	±5; ±6	±11; ±1;	14;3;9;8

Всего две строчки в таблице нужны для расчета одной комбинации. Для расчета 179 комбинаций понадобится около 360 строк. На одной странице черновика свободно размещаются 30—32 строки. Поэтому один этот расчет должен занять 360 : 30 = 12 страниц. Это совсем не много.

На этих страницах чаще встречаются неудачные примеры. Вот два типичных случая.

Первый:

№	Группы	Свободны	Разности	Сумма разностей	x_1
IV.1) V.2)	$5+4+9+16$ $5+6+\underbrace{8}+15$		±12; ±9	±21; ±3	19;—2;10;7

Конечно, x_1 не может быть более 16 и не может быть отрицательным. Такая комбинация не даст магического квадрата. Не будет его и в случае, если взять $x_1 = 10$ или $x_1 = 7$.

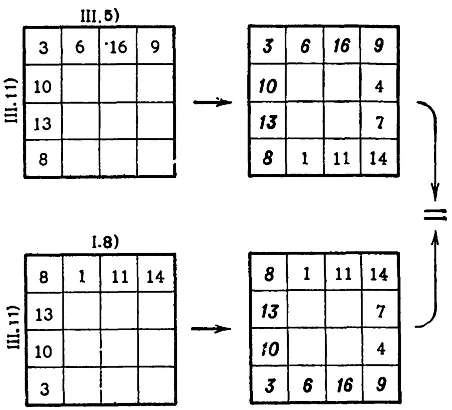
---

[1] Для будущих четырех вариантов квадрата.

Второй:

№	Группы	Свободны	Разности	Сумма разностей	x_1
III.10) V.5)	$7+3+11+13$ $7+\breve{5}+8+\underbrace{14}$	1,2;16;15	$\pm 2;\ \pm 3$	$\pm 5;\ \pm 1$	11;6;9;8

Здесь рассчитанные значения x_1 не совпадают со свободными числами. В итоге из 179 комбинаций отпали 155. Оказались пригодными только 24 комбинации. Однако, как только началось сопоставление пригодных комбинаций друг с другом, оказалось, что половина из них повто́ряет другую половину. Вот пример такого совпадения, которое приводит к тому, что будущие два магических квадрата должны оказаться невариантами друг друга:



Поэтому из 179 остаются только 12 комбинаций:

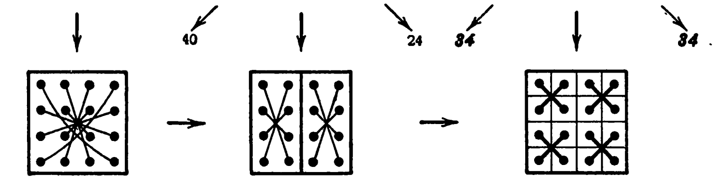
1) $1+\underbrace{4}+14+15$ $1+8+12+\underbrace{13}$	5) $2+\underbrace{5}+11+16$ $2+7+\underbrace{12}+13$	9) $4+5+\underbrace{10}+15$ $4+\underbrace{7}+9+14$
2) $1+\underbrace{6}+12+15$ $1+8+\underbrace{11}+14$	6) $2+7+\underbrace{9}+16$ $2+\underbrace{8}+11+13$	10) $4+5+\underbrace{11}+14$ $4+\underbrace{6}+9+15$
3) $1+\underbrace{7}+12+14$ $1+8+\underbrace{10}+15$	7) $3+\underbrace{5}+11+16$ $3+6+\underbrace{12}+13$	11) $5+4+\underbrace{9}+16$ $5+\underbrace{8}+10+11$
4) $2+\underbrace{3}+13+16$ $2+7+11+\underbrace{14}$	8) $3+6+\underbrace{9}+16$ $3+\underbrace{8}+10+13$	12) $6+3+\underbrace{10}+15$ $6+\underbrace{7}+9+12$

Каждая пригодная комбинация дает возможность построить 4 самостоятельных магических квадрата-близнеца, имеющих полную центральную симметрию. Можно, даже не построив ни одного, утверждать, что среди 880 магических квадратов 4×4 различного типа существует компактная группа из 48 родственных друг с другом магических квадратов, обладающих полной центральной симметрией. Каждый из них может быть преобразован в своего родича простой и симметричной перестановкой средних рядов — или строк, или столбцов, или тех и других одновременно. Что произойдет, если выполнить несимметричную перестановку двух рядов? Например, поменять местами второй и четвертый столбцы?

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1	4	14	15
12	9	7	6
8	5	11	10
13	16	2	3

1	4	14	15
13	16	2	3
8	5	11	10
12	9	7	6

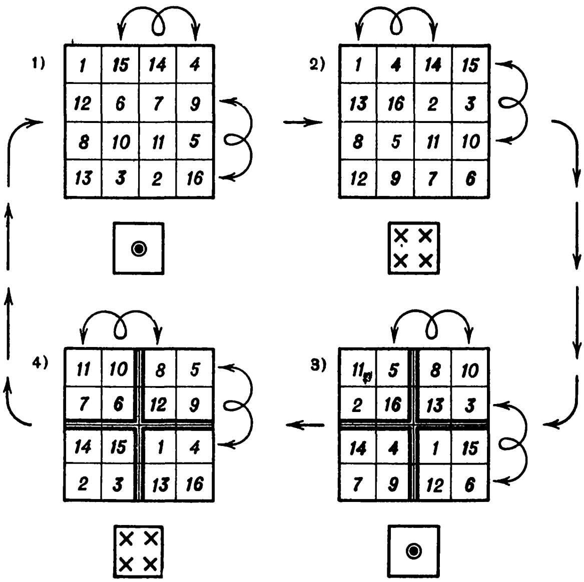


Оказывается получился полумагический квадрат, имеющий своеобразную внутреннюю структуру. Она распалась на две одинаковые фигуры. Нетрудно добиться, чтобы суммы чисел в диагоналях стали равными 34. Для этого достаточно такое же несимметричное перемещение строк. Новый квадрат оказался магическим и обладающим очень интересной структурой. Ее можно было бы назвать «четыре косых креста» [1]. Сопоставление числовых комбинаций у нового магического квадрата и у исходного квадрата, обладающего полной центральной симметрией, показывает, что они одинаковы.

Из одного исходного квадрата получился один квадрат «4 косых креста». Следовательно, число этих квадратов точно такое же, как квадратов с полной центральной симметрией. Любопытный вывод, не потребовавший никаких расчетов и как будто до сих пор никем не отмеченный.

[1] Часто оказывается желательным иметь миниатюрное изображение внутренней структуры. Легко выполнить уменьшенное изображение «четырех косых крестов» в квадратной рамке. Трудно это сделать для полной центральной симметрии. Поэтому для нее будет использовано символическое, графически простое изображение: кружок в квадратной рамке с точкой в центре.

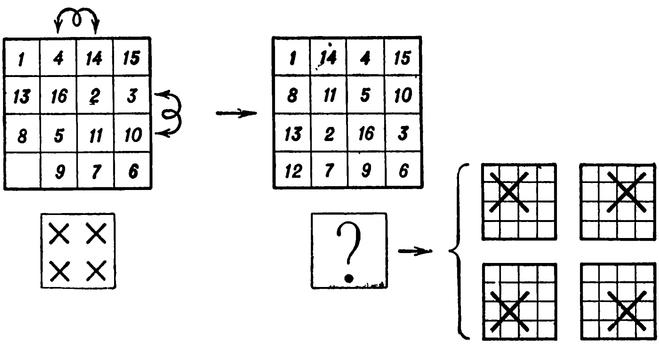
Несимметричную перестановку рядов можно продолжить, преобразовав полученный магический квадрат «4 косых креста». При этом получается новый квадрат 3), снова имеющий полную центральную симметрию. Третье по счету несимметричное преобразование дает новый магический квадрат 4), имеющий структуру «4 косых креста». Четвертое преобразование возвращает к квадрату 1). Кольцо преобразований оказалось замкнутым.



При рассмотрении этого кольца преобразований выясняется, что квадрат 1) можно сразу преобразовать в квадрат 3), а квадрат 2) в квадрат 4). Для этого достаточно поменять местами, передвинув их по диагонали, четверти квадратов — их квадранты. Второе, что обращает на себя внимание,— это разница числовых комбинаций у квадратов 1) и 3), а поэтому и у 2) и 4). В первом случае комбинация включает группы I.1) $1 + 4 + 14 + 15$ и I.9) $1 + 8 + 12 + 13$. Во втором — V.7) $11 + 5 + 8 + 10$ и II.8) $11 + 2 + 14 + 7$. Не означает ли это, что число магических квадратов с полной центральной симметрией и «4 косых креста» увеличивается вдвое, с 48 до 96? Было бы так, если бы разница комбинаций была действительной. На самом деле она оказалась кажущейся. Это выяснилось при сопоставлении квадратов 2) и 3), точнее, при сопоставлении их неваринтов. Достаточно было взять за начальную правую нижнюю клетку, занятую числом 6, как оказалось, что оба квадрата содержат одну комбинацию, включающую группы: III.6) $6 + 3 + 10 + 15$ и VI.2) $6 + 7 + 9 + 12$.

(Эта комбинация записана в табличке под № 12.) То же получается при сопоставлении квадратов 4) и 1). Здесь начальным числом оказывается 16. Следовательно, квадрат 3) входит в группу из 48 магических квадратов, возглавляемую квадратом 1), а квадрат 4) находится в таком же отношении к квадрату 2).

Все ли возможности исчерпаны для преобразования магических квадратов 4 × 4 перестановкой рядов? Остается еще одна: одновременная симметричная перестановка средних рядов (строк и столбцов) в квадрате, имеющем структуру «4 косых креста». Она удается и дает новый магический квадрат, обладающий третьей



по счету внутренней структурой. Ее графическое изображение содержит, как оказывается, также 4 косых креста, но большего размера, чем у предыдущего. (Если вглядеться в рисунок структуры, обладающей полной центральной симетрией, то и здесь имеются 4 косых креста, но трех размеров). Оказывается, что недостаточно указать число крестов и то, что они косые. Важен их размер. Но такие названия были бы неудобны. Имея три структуры и ожидая еще какое-то их количество, можно им дать цифровую порядковую нумерацию. Для наглядности здесь эти номера заключены в угловые скобки, для которых использованы обычные знаки «больше — меньше»: ⟨1⟩; ⟨2⟩; ⟨3⟩.

Способ преобразования магических квадратов ⟨2⟩ в магические квадраты ⟨3⟩ таков, что из одного квадрата ⟨2⟩ получается один квадрат ⟨3⟩. Следовательно, квадратов ⟨3⟩ также 48. Уж очень легко и просто было получено число магических квадратов ⟨2⟩ и ⟨3⟩. Это втрое уменьшает относительный размер работы по составлению таблицы групп, таблицы комбинаций и по расчету числа квадратов ⟨1⟩.

Из 880 магических квадратов 4 × 4 стали известны 3 × 48 = = 144 квадрата со всеми их связями и группировками. Остается разобраться в 736 магических квадратах 4 × 4. Для этого в первую очередь надо узнать их внутренние структуры.

Еще и еще Френикль

Как узнать внутренние структуры всех магических квадратов 4×4? Единственный источник — это таблицы Френикля. Но Френикль не рассматривал внутреннюю структуру магических квадратов и расставил их в таблицах в порядке возрастающих чисел, записанных в верхней левой клетке. Мало того, что нельзя заранее отобрать уже известные 144 квадрата и придется просматривать все 880,но надо вглядеться в каждый квадрат,заметить, как расположены числа, составляющие все 8 пар, запомнить рисунок внутренней структуры, найти его в сводной табличке, в блокноте, где зарисованы все уже встреченные структуры, и отметить, что найден еще один такой квадрат. А если такая структура встречена впервые, вписать ее отдельной строкой с миниатюрным рисунком. Хотя техника работы самая примитивная, быстро возникающая тренировка позволяет выяснить внутреннюю структуру каждого просматриваемого квадрата за какие-то секунды. С первого взгляда становится ясным расположение двух-трех пар. Сразу возникает предположение о типе структуры. (Некоторые структуры были заранее выяснены пробным просмотром нескольких десятков квадратов.) Предположение проверяется просмотром расположения еще нескольких пар. Затем пометка в блокноте и шаг к следующему квадрату. Так квадрат за квадратом, страница за страницей, час за часом. Работа идет почти механически, но внимание, по-видимому, не ослабело: в нескольких квадратах найдены опечатки. В них, конечно, проверено расположение всех пар.

Наконец просмотрена последняя страница таблиц. Закончена и начисто переписана сводная табличка. Подсчитано общее число просмотренных квадратов. Только нескольких не хватает до 880, но искать их нет смысла, они не изменят общей картины. Подсчитано число найденных внутренних структур, и вот ответ: во всех просмотренных магических квадратах выявлены только 12 внутренних структур. В это число входят уже известные структуры типа ⟨1⟩; ⟨2⟩; ⟨3⟩.

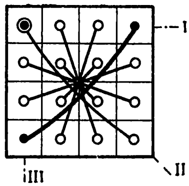
Первое, что замечаешь во всех 12 структурах, — их простота. Самой простой является структура ⟨4⟩. Сложнее других структуры ⟨11⟩ и ⟨12⟩.

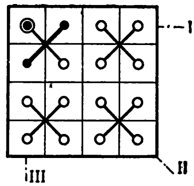
Второе — это симметрия. За исключением структур ⟨11⟩ и ⟨12⟩, все рисунки структур симметричны: правые половины квадратов являются зеркальным отображением левых, верхние половины — нижних [1]. Структуры ⟨11⟩ и ⟨12⟩ являются исключением. У них только верхние и нижние половины зеркально отображают друг друга [2].

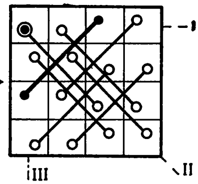
---

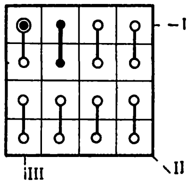
[1] Иначе: структуры с ⟨1⟩ по ⟨10⟩ имеют по 2 оси симметрии, проходящие через центр квадрата и параллельные его сторонам.

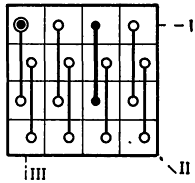
[2] Иначе: одна горизонтальная ось симметрии.

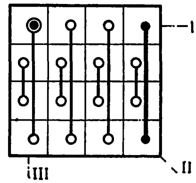
<1>


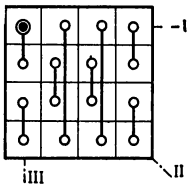
<2>


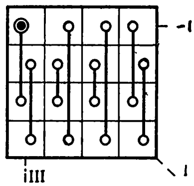
<3>


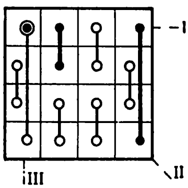
<4>


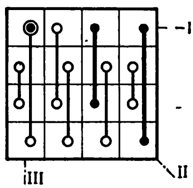
<5>


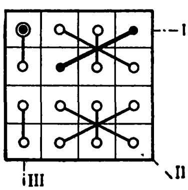
<6>


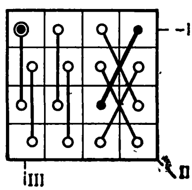
<7>


<8>


<9>


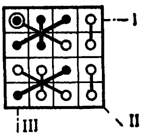
<10>


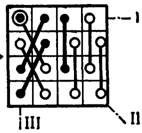
<11>


<12>


Третья особенность определяется количеством и расположением пар, связывающих группы чисел. На рисунке эти пары показаны отрезками прямых большей толщины. Оказывается, что структуры ⟨7⟩ и ⟨8⟩ вовсе не имеют таких связей. Структуры ⟨9⟩ и ⟨10⟩ имеют по 2 пары, связывающие I и II лучи. Структуры ⟨4⟩, ⟨5⟩, ⟨6⟩ и не полностью симметричные структуры ⟨11⟩ и ⟨12⟩ имеют по одной паре, связывающей лучи I и II. Наконец, первые три структуры имеют также по одной паре, но она связывает лучи I и III. Это является следствием того, что в первых трех структурах луч II занят двумя парами чисел, а во всех прочих две пары расположены вдоль луча III.

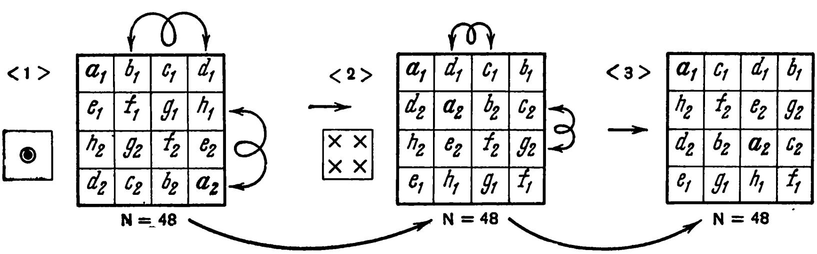
Структуры ⟨11⟩ и ⟨12⟩, не полностью симметричные, обладают еще одной особенностью. Если их повернуть на 180°, то число пар, связывающих лучи, становится равным трем; попарно связанными оказываются лучи I и II, II и III, III и I. Ни на одном из этих лучей при этом нет двух пар.

⟨11'⟩ 

⟨12'⟩ 

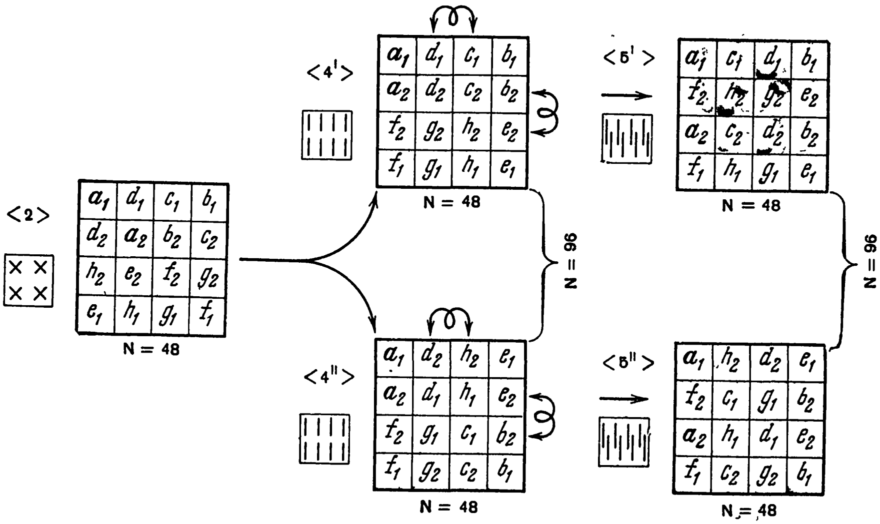
Одинаковые связи лучей парами и сходство рисунков внутренних структур вызывают предположение о возможности перехода от одной структуры к другой перемещениями рядов примерно так, как это оказалось возможным для структур ⟨1⟩, ⟨2⟩ и ⟨3⟩. Для них доказана возможность цепочки ⟨1⟩ ↔ ⟨2⟩ ↔ ⟨3⟩. Надо выяснить возможность аналогичных превращений: ⟨4⟩ ↔ ⟨5⟩ ↔ ⟨6⟩; ⟨7⟩ ↔ ⟨8⟩; ⟨9⟩ ↔ ⟨10⟩ и ⟨11⟩ ↔ ⟨12⟩. Если бы это удалось, то сократились расчеты числа магических квадратов каждого типа. Но не это главное. Главное в том, что аморфную массу 880 магических квадратов Френикля удалось бы разделить на какие-то группы или семейства, внутри которых возможны простые преобразования квадратов одной структуры в квадраты другого типа. Это был бы новый и более глубокий взгляд на всю массу магических квадратов 4 × 4.

Чтобы сократить труд, нужно избежать записи в числах и работать только с квадратами, записанными в алгебраической форме. Если преобразования получатся, то они будут пригодны для любого варианта в числах. Для начала можно вновь записать преобразования квадратов ⟨1⟩ ↔ ⟨2⟩ ↔ ⟨3⟩.



Как всегда, при перемещении целых рядов изменилась только расстановка чисел в строках и столбцах. Сами числа остались теми же, что были. Поэтому не изменилась их сумма. По диагоналям квадратов ⟨1⟩, ⟨2⟩ и ⟨3⟩ расположены по 2 пары. Поэтому суммы чисел на них обязательно равны $\Sigma_0 = 2\sigma$. Числовая комбинация у этих трех квадратов одна и та же. Она содержит одинаковые группы: $a_1 + b_1 + c_1 + d_1$ и $a_1 + e_1 + h_2 + d_2$.

Следующий квадрат ⟨4⟩ обладает удивительно простой структурой. Все пары в нем параллельны и размещены в столбцах в 2 ряда. (Или, в его неварианте,— в строках, одна за другой.) Конечно, хотелось бы избежать расчета квадратов ⟨4⟩ с помощью числовых комбинаций, а ограничиться преобразованием в квадрат ⟨4⟩ какого-либо из квадратов ⟨1⟩, ⟨2⟩ или ⟨3⟩. Перемещения рядов, симметричные и несимметричные, для этого непригодны. Если применить какой-либо другой способ, то в качестве исходного лучше взять квадрат ⟨2⟩. Его внутренняя структура наиболее близка к структуре квадрата ⟨4⟩. Если бы пары чисел, которые в квадрате ⟨2⟩ сидят «скрестив ножки», удалось заставить поставить ножки прямо, то был бы получен квадрат, имеющий структуру ⟨4⟩. Надо попытаться сохранить при этом числовые группы, использованные в квадрате ⟨2⟩ : $a_1 + d_1 + c_1 + b_1$ и $a_1 + d_2 + h_2 + e_1$. В квадрате ⟨2⟩ они находятся на лучах I и III, в квадрате ⟨4⟩ они должны быть на лучах I и II. Однако первая группа, находившаяся в квадрате ⟨2⟩ на луче I, в квадрате ⟨4⟩ с равным правом может быть записана и на луче I, и на луче II. Оказывается одному магическому квадрату ⟨2⟩ соответствуют два магических квадрата: ⟨4′⟩ и ⟨4″⟩.



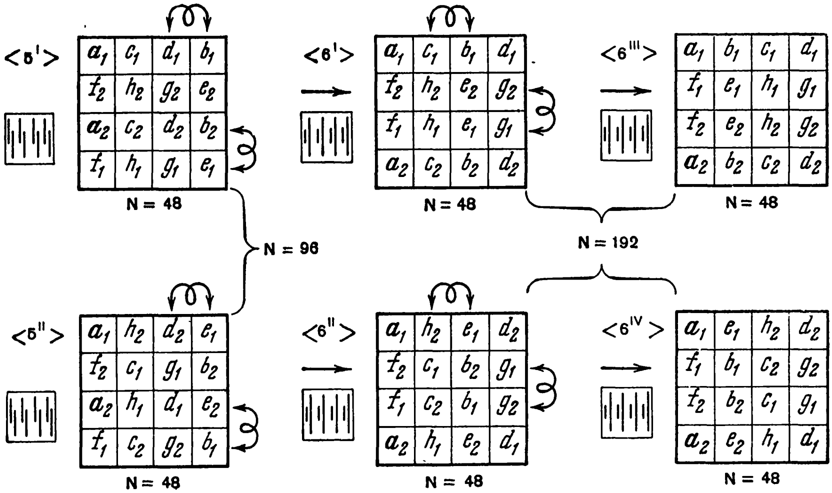
Следовательно, общее число магических квадратов, имеющих внутреннюю структуру типа ⟨4⟩, равно 96. Можно ли в этом убедиться еще каким-либо способом? При поисках типов внутренних структур в таблицах Френикля были сделаны черновые подсчеты числа квадратов каждой структуры. Сейчас они пригодятся. Оказывается, в таблицах Френикля действительно содержится 96 квадратов типа $\langle 4 \rangle$. (Кстати можно проверить число квадратов типа $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$ и $\langle 3 \rangle$. Здесь также все верно — по 48 квадратов каждого типа.)

При заполнении клеток любых квадратов 4×4 и, в том числе, квадратов $\langle 4' \rangle$ и $\langle 4'' \rangle$, после размещения чисел обеих групп и чисел, дополняющих их до пары, в каждом квадрате остаются свободными 4 клетки. Их расположение определяется внутренней структурой. В квадратах $\langle 4' \rangle$ и $\langle 4'' \rangle$ они находятся в левом нижнем квадранте. Их будущими жильцами являются 4 пока еще свободных числа: f_1; f_2; g_1; g_2. При их размещении приходится следить за тем, чтобы сумма чисел в восходящей диагонали была равна Σ_0. В квадрате $\langle 4' \rangle$ в двух клетках этой диагонали уже записаны числа $b_1 + c_2 + ? + ?$ Нужная сумма будет получена, если в диагонали квадрата $\langle 4' \rangle$ будут содержаться те же числа, что находятся в правом столбце квадрата $\langle 2 \rangle$: $b_1 + c_2 + g_2 + f_1$. Значит на этой диагонали квадрата $\langle 4' \rangle$ нужно вписать свободные пока числа $g_2 + f_1$. Так же в квадрате $\langle 4'' \rangle$ к числам $e_1 + h_1 + ? + ?$ нужно добавить числа $g_1 + f_1$, использовав нижнюю строку квадрата $\langle 2 \rangle$. Последние два свободных числа и в квадрате $\langle 4' \rangle$, и в квадрате $\langle 4'' \rangle$ находят свои места в согласии с рисунком внутренней структуры. Этим заканчивается общее доказательство возможности получить магические квадраты $\langle 4' \rangle$ и $\langle 4'' \rangle$, используя квадраты $\langle 2 \rangle$.

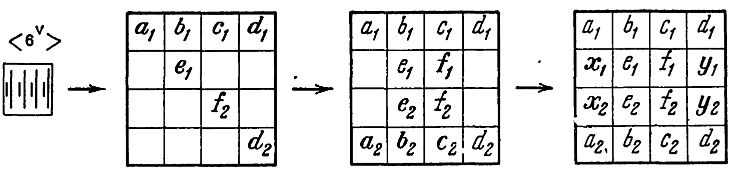
После этого возникает возможность совсем просто получить квадраты типа $\langle 5 \rangle$. Перестановкой средних рядов из квадрата $\langle 4' \rangle$ получается квадрат $\langle 5' \rangle$, а из $\langle 4'' \rangle$ получается $\langle 5'' \rangle$. Общее число квадратов $\langle 5 \rangle$ поэтому равно 96. (А у Френикля? Также 96). Числовая комбинация у квадратов $\langle 5 \rangle$ та же, что у предыдущих квадратов $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 3 \rangle$ и $\langle 4 \rangle$.

На очереди преобразование квадратов $\langle 5 \rangle$ в квадраты $\langle 6 \rangle$, но симметричная перестановка рядов здесь непригодна. Можно подобрать несимметричную перестановку. Достаточно поменять местами третью и четвертую строку и одновременно третий и четвертый столбец. При этом получаются два магических квадрата типа $\langle 6' \rangle$ и $\langle 6'' \rangle$, по 48 вариантов каждого типа. Их числовая комбинация та же, что у предыдущих квадратов (*см. стр. 45*).

Магические квадраты $\langle 6' \rangle$ и $\langle 6'' \rangle$ можно еще раз преобразовать симметричной перестановкой средних рядов. При этом получаются новые магические квадраты $\langle 6''' \rangle$ и $\langle 6^{IV} \rangle$, такой же структуры и в таком же количестве — по 48 вариантов. Общее количество магических квадратов типа $\langle 6 \rangle$ оказывается равным 192. (А у Френикля? Что такое?.. У Френикля число квадратов этого типа равно не 192, а 304, на 112 квадратов больше.)



Нет никакого сомнения в том, что из 179 составленных ранее числовых комбинаций только 12 комбинаций пригодны для получения магических квадратов и дали по 48 вариантов 11 типов: $\langle 1\rangle$; $\langle 2\rangle$; $\langle 3\rangle$; $\langle 4'\rangle$; $\langle 4''\rangle$; $\langle 5'\rangle$; $\langle 5''\rangle$; $\langle 6'\rangle$; $\langle 6''\rangle$; $\langle 6'''\rangle$; $\langle 6^{\mathrm{IV}}\rangle$. По-видимому, надо искать какие-то таинственные квадраты $\langle 6^{\mathrm{V}}\rangle$. обладающие такой же структурой, как предыдущие квадраты типа $\langle 6\rangle$, но для расчета которых непригодны прежние 12 числовых комбинаций, а нужны новые комбинации, да еще такие, которые непригодны для построения квадратов от $\langle 1\rangle$ до $\langle 6^{\mathrm{IV}}\rangle$. Придется заново рассчитать квадрат со структурой $\langle 6\rangle$, последовательно пробуя различные числовые комбинации, но избегая ранее использованных.



При расчете числа x_1 в квадратах $\langle 6^{\mathrm{V}}\rangle$ не удается освободиться от чисел y_1 и y_2, как это было ранее при расчете квадрата $\langle 1\rangle$. Можно лишь написать условие, определяющее сумму двух неизвестных. Из второй строки получим:

$$x_1 + e_1 + f_1 + y_1 = \Sigma_0 = 2\sigma;$$

$$x_1 + y_1 = 2\sigma - e_1 - f_1 = (\sigma - e_1) + (\sigma - f_1) = \sigma - e_1 + f_2.$$

Числа e_1 и f_2 входят в группу чисел, расположенную по диагонали и известную, как только выбрана для пробы очередная комбинация. Числа e_1 и f_2 должны находиться в средних клетках квадрата, а числа x_1 и y_1 — два из четырех свободных чисел. Эти условия позволяют довольно быстро проверять пригодность одной комбинации за другой. Всего приходится проверить 179—12 = 167 комбинаций. Действительно, среди этих 167, ранее не пригодных комбинаций, удается обнаружить 14 комбинаций, позволяющих построить новые магические квадраты типа $\langle 6 \rangle$.

Пример. IV.3) $4 + 5 + 11 + 14$;

IV.4) $4 + 6 + 8 + 16$. Свободны: 2, 7, 10, 15.

В углах квадрата числа: 4, 11, 6 (и, конечно, 13).

$$\begin{aligned} \sigma - e_1 + f_2 = {} & 17 - 5 + 14 = 26 \text{ или} \\ & 17 - 14 + 5 = 8, \text{ или} \\ & 17 - 8 + 16 = 25, \text{ или} \\ & 17 - 16 + 8 = 9. \end{aligned}$$

Суммы двух свободных чисел, не составляющих пары, могут быть записаны в четырех вариантах:

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 = {} & 2 + 7 = 9 \text{ или} \\ & 2 + 10 = 12, \text{ или} \\ & 7 + 15 = 22, \text{ или} \\ & 10 + 15 = 25. \end{aligned}$$

Пригодны:

1) $e_1 = 8$; $f_2 = 16$; $x_1 + y_1 = 10 + 15$ или $= 15 + 10$;

2) $e_1 = 16$; $f_2 = 8$; $x_1 + y_1 = 2 + 7$, или $= 7 + 2$.

Каждый из двух приемлемых вариантов решения позволяет составить по 4 варианта магического квадрата типа $\langle 6 \rangle$.

Поэтому из одной новой числовой комбинации получаются 8 вариантов типа $\langle 6 \rangle$. Новые 14 комбинаций дают $14 \cdot 8 = 112$ магических квадратов — ровно столько, сколько не хватало.

$\langle 6^V \rangle$

1)

4	***5***	***14***	11
10	8	1	15
7	9	16	2
13	***12***	***3***	6

2)

4	***14***	***5***	11
10	8	1	15
7	9	16	2
13	***3***	***12***	6

3)

4	***5***	***14***	11
15	8	1	10
2	9	16	7
13	***12***	***3***	6

4)

4	***14***	***5***	11
15	8	1	10
2	9	16	7
13	***3***	***12***	6

5)

4	***5***	***14***	11
7	16	9	2
10	1	8	15
13	***12***	***3***	6

6)

4	***14***	***5***	11
7	16	9	2
10	1	8	15
13	***3***	***12***	6

7)

4	***5***	***14***	11
2	16	9	7
15	1	8	10
13	***12***	***3***	6

8)

4	***14***	***5***	11
2	16	9	7
15	1	8	10
13	***3***	***12***	6

Пока расчет шел сравнительно гладко. Как-то будет с квадратом ⟨7⟩? Он принадлежит к новой семье магических квадратов. У квадратов ⟨7⟩ и ⟨8⟩ числовые комбинации не имеют пар, связывающих группы. Эти комбинации необходимо составлять заново из уже известных 116 групп по 4 числа в каждой. Никаких новых трудностей в этой работе нет.

Когда она была закончена, было получено 88 новых комбинаций. Если расставить по своим клеткам числа, входящие в новые комбинации (в алгебраической форме, как в предыдущих случаях), и добавить числа, дополняющие их до пары, то из 16 клеток квадрата 14 клеток оказываются занятыми. Остаются только 2 свободные клетки для одной пары свободных чисел.

<7>

→

a_1	b_1	c_1	d_1
	e_2		
		f_1	
			g_2

→

a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	e_2	f_2	d_2
	e_1	f_1	g_1
	b_2	c_2	g_2

→

a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	e_2	f_2	d_2
x_1	e_1	f_1	g_1
x_2	b_2	c_2	g_2

Условие, позволяющее проверить пригодность числовой комбинации, можно получить не из решения x_1, а, например, из суммы чисел двух верхних строк:

$$
\begin{array}{l}
+\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = \Sigma_0 = 2\sigma \\ a_2 + e_2 + f_2 + d_2 = \Sigma_0 = 2\sigma \end{array} \\
\hline
\sigma + b_1 + e_2 + c_1 + f_2 + \sigma = 4\sigma; \\
b_1 + c_1 + e_2 + f_2 = 2\sigma; \\
b_1 + c_1 = \sigma - e_2 + \sigma - f_2 = \sigma - e_2 + f_1.
\end{array}
$$

Однако соблюдение этого условия еще не дает гарантии, что очередной вариант удастся благополучно довести до конца. Например, при опробовании комбинации, включающей группы I.1)1 + 4 + 14 + 15 и I.12) 1 + 10 + 11 + 12, удается найти 3 случая, когда сумма $b_1 + c_1$ равна сумме $\sigma - e_2 + f_1$:

	а)	б)	в)
$b_1 + c_1$	4+14	4+14	4+15
$\sigma - e_2 + f_1$	17—10+11	17—11+12	17—10+12

Вариант а) оказывается неудачным. Зато остальные два варианта расчета позволяют построить четыре варианта магических квадратов типа ⟨7⟩:

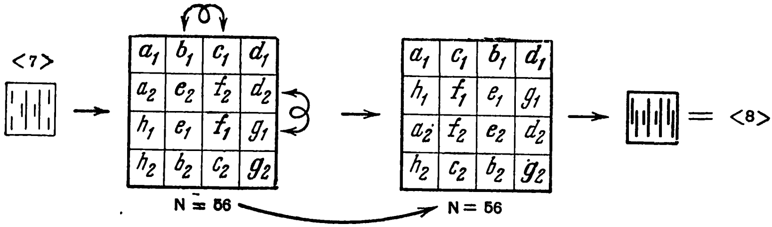
	Расположение чисел			
на луче I	1+4+14+15	1+14+4+15	1+4+15+14	1+15+4+14
на луче II	1+11+12+10	1+11+12+10	1+10+12+11	1+10+12+11
числа x_1 и x_2	9; 8	9; 8	9; 8	9; 8
	1)	2)	3)	4)

Из 88 комбинаций можно подобрать только восемь таких. Иной результат получается для комбинации, состоящей из групп I. 1) $4+1+15+14$ и IV. 9) $4+7+11+12$. Здесь получаются только два варианта магического квадрата ⟨7⟩:

	Расположение чисел	
на луче I	4+1+15+14	4+15+1+14
на луче II	4+12+11+7	4+12+11+7
числа x_1 и x_2	8; 9	8; 9
	1)	2)

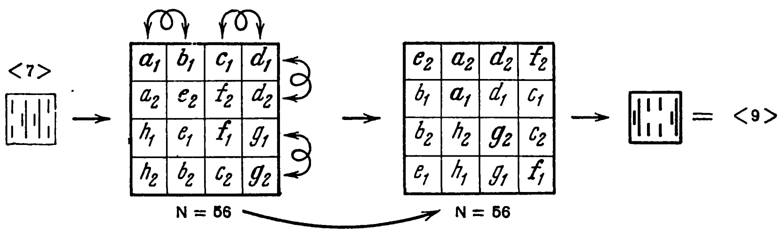
Таких комбинаций из 88 оказалось двенадцать. Всего из 88 оказались пригодными $8+12=20$ комбинаций, а общее число магических квадратов, имеющих структуру ⟨7⟩, оказывается равным $8\cdot 4+12\cdot 2=56$. (А как у Френикля? Неужели опять что-либо иное? Но нет, все в порядке, тоже 56.)

Попытка получить квадрат ⟨8⟩ из квадрата ⟨7⟩ удается без труда. Для этого достаточно поменять местами средние столбцы и средние строки.



При этом сохранились: числовая комбинация [1] и числа в строках, столбцах и диагоналях. Поэтому квадрат ⟨8⟩ оказывается магическим, как исходный квадрат ⟨7⟩. Способ преобразования таков, что из одного квадрата ⟨7⟩ получается только один квадрат ⟨8⟩. Поэтому число квадратов ⟨8⟩ также равно 56.

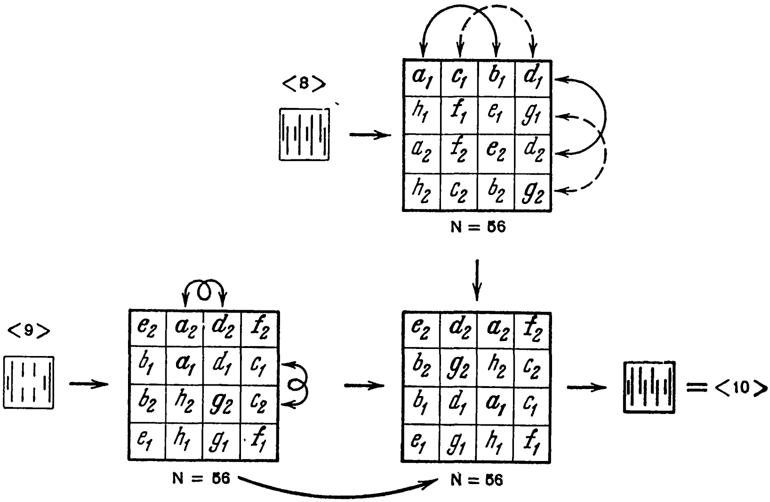
Квадраты ⟨9⟩ и ⟨10⟩ имеют такую внутреннюю структуру, при которой числовая комбинация содержит по *две* пары, связывающие группы. Попытка получить квадрат ⟨9⟩ из квадрата ⟨7⟩ или ⟨8⟩ удалась бы только в том случае, если бы при этом изменилась числовая комбинация. (До сих пор требование было противоположным.) Но рисунки внутренней структуры квадратов ⟨7⟩ и ⟨9⟩ настолько близки друг к другу, что преобразование кажется не только возможным, но и простым: надо только поменять местами столбцы — первый со вторым и третий с четвертым. Тогда рисунок ⟨7⟩ приводится к рисунку ⟨9⟩. Уже известно, что при этом изменятся диагонали, и известен способ исправления — надо сделать такую же перестановку в строках. При соблюдении этих условий преобразование из ⟨7⟩ в ⟨9⟩ оказывается удачным, квадрат ⟨9⟩ — магическим, а число квадратов ⟨9⟩ равным 56 — числу квадратов ⟨7⟩.



Последнее преобразование во втором семействе магических квадратов должно дать квадрат ⟨10⟩. Как поступить? Преобразовывать ли квадрат ⟨9⟩ или квадрат ⟨8⟩? При удаче и то, и другое преобразования должны дать один и тот же результат. Для пре-

[1] Лучше сказать так: квадрат ⟨8⟩ может быть получен из той же числовой комбинации, которая легла в основу квадрата ⟨7⟩.

образования квадрата ⟨9⟩ оказывается пригодной перестановка средних рядов. Чтобы преобразование квадрата ⟨8⟩ дало точно тот же вариант квадрата ⟨10⟩, в нем необходимо поменять местами первую строку с третьей и вторую с четвертой, точно так же и столбцы.



Оказывается, что магические квадраты ⟨7⟩, ⟨8⟩, ⟨9⟩, ⟨10⟩ родственны друг другу и имеют по 56 вариантов. (То же и у Френикля.)

На долю последних двух типов ⟨11⟩ и ⟨12⟩ остается всего лишь 16 магических квадратов. Это очень мало; это очень странно (хотя у Френикля точно столько же). По-видимому, магические квадраты 4×4, обладающие неполной симметрией, являются крайней редкостью даже среди своих собратьев. Ранее выяснено [1], что у квадратов ⟨11⟩ и ⟨12⟩, этих двуликих Янусов, если их рассматривать в одном повороте, лучи I и II связаны одной парой, а вдоль луча III расположены две пары чисел. После поворота на 180°, оказывается, что ни на одном луче нет двух пар, но все три луча связаны тремя парами чисел. При этом каждые два луча связаны одной парой. В каком обличьи их анализировать? Проба показала, что лучше... Впрочем, какая же это проба? Были выполнены два расчета, в двух вариантах. Очень уж была любопытна эта двойственность и не было ясно, совпадут ли результаты расчетов? Сначала был испробован второй путь, когда комбинации состояли не из двух, а из трех групп, попарно связанных. Таких комбина-

---

[1] См. структуры на стр. 41 и 42.

ций оказалось только 48[1]. Каждая комбинация была испробована для построения магического квадрата ⟨11⟩. Это удалось только в восьми случаях. (Между прочим, в отличие от всех предыдущих случаев, пришлось работать с комбинациями, начинающимися числами, большими 8. Это следствие неполной симметрии структуры.)

На втором пути, где комбинация состояла по-старому из двух групп, связанных одной парой, предстояло испробовать пригодность не 48, а 179 комбинаций. Не особенно приятно снова иметь дело с 179 комбинациями, но можно было сначала испробовать только те 12 комбинаций из 179, что послужили основой квадрата ⟨1⟩ и всех его родичей. Расчеты аналогичны выполненным ранее и достаточно просты. Но ни один из них не удался. Тогда была сделана попытка испробовать те добавочные 14 комбинаций, которые потребовались, чтобы получить магические квадраты ⟨6^V⟩. Оказалось, что одни и те же числовые комбинации (8 из этих 14, особенных) дают и магические квадраты типа ⟨6^V⟩ и типа ⟨11⟩. Первые — в восьми вариантах, второй — только в одном. Пример:

III.6) 3 + 6 + *10* + 15
III.8) 3 + 7 + 8 + 16

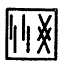
III.6) + III.8)

3	*6*	*15*	*10*
13	*8*	1	12
4	9	*16*	5
14	11	2	*7*

→  → ⟨6^V⟩

III.6) + III.8)

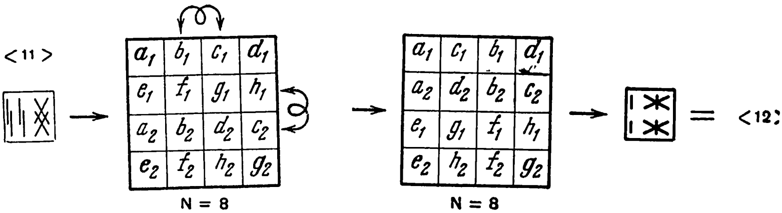
3	*15*	*6*	*10*
4	*16*	9	5
14	2	*7*	11
13	1	12	*8*

→  → ⟨11⟩

Очень прост переход от магического квадрата ⟨11⟩ к магическому квадрату ⟨12⟩. Достаточо поменять местами средние ряды, т. е. воспользоваться ранее примененным способом *(см. стр. 52)*. При этом получаются восемь вариантов квадратов ⟨12⟩. (То же и у Френикля.)

[1] Примеры:

5 + 3 + 10 + 16; 9 + 4 + 5 + 16; 14 + 12 + 7 + 1;
5 + 4 + 11 + 14; 9 + 6 + 7 + 12; 14 + 10 + 8 + 2;
5 + 7 + 9 + 13; 9 + 2 + 10 + 13; 14 + 9 + 6 + 5.



Итак, 12 вариантов внутренней структуры дают все 880 вариантов магических квадратов 4×4, рассчитанных Френиклем. Однако не это главное. Если стремиться только к проверке общего числа магических квадратов 4×4, то можно было бы ограничиться ранее названной работой Ф. Фиттинга. Это у него была цель сосчитать число этих квадратов и своей цели он добился. Любопытно, что и у него вся масса магических квадратов 4×4 оказалась разделенной на группы. В первой оказались 528 квадратов, включая совершенные. Во второй $352 = 192 + 112 + 48$ квадратов. Но это разделение было лишь побочным результатом расчета и отражало классификацию не магических квадратов, а так называемых «вспомогательных», использованных Фиттингом. (Об этих квадратах надо сказать, но в дальнейшем.)

Здесь же получилось иначе: анализ самих магических квадратов привел к рассмотрению их внутренней структуры. Классификация по внутренней структуре определила сравнительно мелкие группы, или семейства, магических квадратов, содержавшие по 48, 32, 24 и 8 квадратов. (Только семья квадратов типа $\langle 6^{V} \rangle$ включает 112 представителей.) Общее число магических квадратов 4×4 получилось как побочный результат их классификации.

Остается привести примеры магических квадратов 4×4 всех типов, но примеры хороши тогда, когда их немного. Можно попытаться ограничиться только одним примером для каждого типа магического квадрата 4×4. При этом сводная табличка должна вместить только 22 примера (*см. стр. 53*).

Трудно поверить, что в одной этой маленькой табличке содержится обработанных сведений о магических квадратах 4×4 не меньше, а, может быть, даже больше, чем в полных таблицах Френикля. Нужны ли пояснения к этой табличке? Во всяком случае — немногие.

Почему для квадратов $\langle 7 \rangle$, $\langle 8 \rangle$, $\langle 9 \rangle$ и $\langle 10 \rangle$ даны по два примера? Ранее выяснилось, что из 56 вариантов каждого типа 32 варианта определяются 8 числовыми комбинациями, а 24 других варианта 12 другими комбинациями.

Сколько понадобилось числовых групп и комбинаций этих групп, чтобы составить все 22 примера? Легко сосчитать: только 7 групп, только 6 комбинаций.

I.1) 1 + 4 + 14 + 15
I.9) 1 + 8 + 12 + 13

<1>

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

N = 48

<2>

1	4	14	15
13	16	2	3
8	5	11	10
12	9	7	6

N = 48

<3>

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

N = 48

<4'>

1	4	14	15
16	13	3	2
11	10	8	5
6	7	9	12

N = 48

<5'>

1	14	4	15
11	8	10	5
16	3	13	2
6	9	7	12

N = 48

<6'>

1	14	15	4
11	8	5	10
6	9	12	7
16	3	2	13

N = 48

<6'''>

1	15	14	4
6	12	9	7
11	5	8	10
16	2	3	13

N = 48

<4''>

1	13	12	8
16	4	5	9
7	11	14	2
10	6	3	15

N = 48

<5''>

1	12	13	8
7	14	11	2
16	5	4	9
10	3	6	15

N = 48

<6''>

1	12	8	13
7	14	2	11
10	3	15	6
16	5	9	4

N = 48

<6IV>

1	8	12	13
10	15	3	6
7	2	14	11
16	9	5	4

N = 48

~~I.9) 1+8+12+13~~
I.10) 1 + 9 + 10 + 14

<6V>

1	12	13	8
15	10	3	6
2	7	14	11
16	5	4	9

N = 112

<11>

1	13	12	8
2	14	7	11
16	4	9	5
15	3	6	10

N = 8

<12>

1	12	13	8
16	9	4	5
2	7	14	11
15	6	3	10

N = 8

I.1) 1 + 4 + 14 + 15
I.12) 1 + 10 + 11 + 12

II.3) 11 + 2 + 9 + 16
I.12) 11 + 1 + 10 + 12

<7'>

1	4	14	15
16	11	5	2
9	6	12	7
8	13	3	10

N = 32

<8'>

1	14	4	15
9	12	6	7
16	5	11	2
8	3	13	10

N = 32

<9'>

11	16	2	5
4	1	15	14
13	8	10	3
6	9	7	12

N = 32

<10'>

11	2	16	5
13	10	8	3
4	15	1	14
6	7	9	12

N = 32

I.1) 4 + 1 + 14 + 15
IV.9) 4 + 7 + 11 + 12

III.7) 12 + 3 + 6 + 13
IV.9) 12 + 4 + 7 + 11

<7''>

4	1	15	14
13	12	6	3
8	5	11	10
9	16	2	7

N = 24

<8''>

4	15	1	14
8	11	5	10
13	6	12	3
9	2	16	7

N = 24

<9''>

12	13	3	6
1	4	14	15
16	9	7	2
5	8	10	11

N = 24

<10''>

12	3	13	6
16	7	9	2
1	14	4	15
5	10	8	11

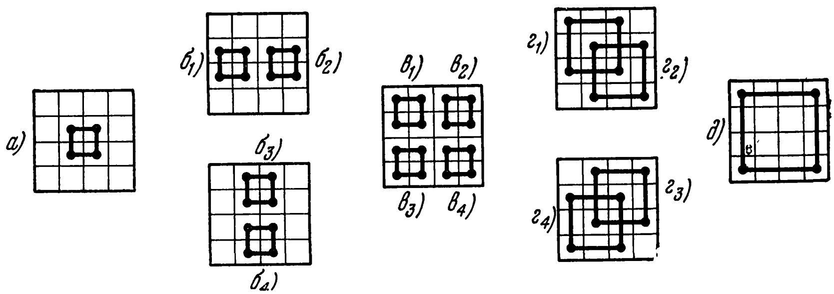
N = 24

Что означают маленькие прямоугольнички и треугольнички у углов некоторых квадратов и маленькие крестики над другими? Только то, что в этой табличке помещены еще какие-то сведения о магических квадратах, о которых пока еще ничего не было сказано.

Верно, сказано не было, но ведь можно сейчас этим заняться.

Греческие буквы Френикля

В своих таблицах над некоторыми магическими квадратами 4×4 Френикль поставил греческие буквы — α, β, γ, δ. Над некоторыми их нет. Почему он сделал это? Что они обозначают? Ответ содержится в его же работе о магических квадратах, предшествующей таблицам квадратов 4×4. Совершенно очевидно, что у Френикля, когда он составил какое-то число магических квадратов, возникло желание отличить их друг от друга. Это совершенно естественно, и каждый в этих обстоятельствах думал бы так же. Френикль рассуждал, возможно, так: в магическом квадрате 4×4 содержится 10 прямых рядов по 4 клетки в каждом (строки, столбцы, диагонали) и сумма чисел в каждом из этих рядов равна 34. В этом все магические квадраты 4×4 похожи друг на друга. А чем они не похожи друг на друга? Разница между ними стала ясной, когда он обратил внимание на малые квадраты в 4 и в 9 клеток, которые можно выделить внутри контура магического квадрата. Френикль различал 14 таких внутренних квадратов:



В группу α Френикль включил такие магические квадраты, у которых равнялась 34 сумма чисел, расположенных в углах всех 14 внутренних квадратиков. Все магические квадраты 4×4, обладающие двадцатью четырьмя $(10 + 14)$ равными суммами, оказались имеющими внутреннюю структуру типа $\langle 3 \rangle$. Это даже удивительно. Квадрат $\langle 3 \rangle$, ничем до сих пор не замечательный, вдруг получил самую высокую оценку по классификации Френикля.

В группу β были включены магические квадраты, у которых сумма 34 получается в 12 внутренних квадратиках. В этой группе находятся все квадраты типа $\langle 4 \rangle$ и все квадраты типа $\langle 6 \rangle$, за исключением квадратов $\langle 6^{\mathrm{V}} \rangle$.

В группу γ помещены магические квадраты, у которых 10 внутренних квадратиков содержат числа, в сумме дающие 34. Ими оказались все магические квадраты типа $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$ и $\langle 5 \rangle$. В группе δ, где «балл» оказался равным четырем, расположились все магические квадраты типа $\langle 6^{V} \rangle$, $\langle 7 \rangle$, $\langle 9 \rangle$ и $\langle 12 \rangle$. В последней группе с «баллом», равным двум, на которую Френикль не счел нужным расходовать какую-либо греческую букву, находятся все магические квадраты типа $\langle 8 \rangle$, $\langle 10 \rangle$ и $\langle 11 \rangle$.

Так Френикль оценивал «качество» магических квадратов 4×4 — по числу равных сумм чисел, расположенных в углах внутренних квадратиков. Эта классификация любопытна сама по себе, но уже давно она вытеснена иной, в которой также рассматривается число равных сумм, однако числа, образующие их, расположены иначе.

Прежде чем оставить внутренние квадратики и более не возвращаться к ним, было бы интересно подумать об одном из них. Общеизвестно, что у всех 880 магических квадратов 4×4 сумма чисел, содержащихся во внутренних четырех клетках (внутренний квадратик «а»), обязательно равна 34. Почему так получается? Удастся ли это разъяснить, если использовать такую простую вещь, как внутренняя структура?

Если сумма четырех чисел равна «постоянной» квадрата $\Sigma_0 = 2\sigma$, то эти числа или распадаются на 2 пары, или составляют одну из 58 уже известных групп. Очень просто проверить предположение о двух парах. По рисункам всех 12 внутренних структур сразу видно, что две пары в средних клетках содержатся у всех магических квадратов типа $\langle 1 \rangle$, $\langle 6 \rangle$, $\langle 7 \rangle$ и $\langle 8 \rangle$. Так легко решена часть задачи.

Из алгебраической записи чисел в квадратах типа $\langle 2 \rangle$ и $\langle 3 \rangle$ видно, что в их средних клетках находятся числа a_2; b_2; e_2; f_2. Эти же числа находятся в магическом квадрате $\langle 1 \rangle$, в клетках третьего (правого нижнего) квадранта. Можно ли найти сумму этих чисел?

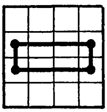
Можно и довольно легко, если обозначить искомую сумму s_3 (по номеру квадранта), сумму чисел второго квадранта (правого верхнего) через s_2, а сумму четвертого квадранта (левого нижнего) через s_4. В этих обозначениях: $s_3 + s_4 = 2\Sigma_0$ потому, что эти 8 чисел заполняют полностью 2 нижние строки; $s_3 + s_2 = 2\Sigma_0$ потому, что здесь 8 чисел правых столбцов. Сумма $(s_2 + s_4) + (s_3 + s_2) = 2s_3 + (s_2 + s_4) = 4\Sigma_0$. Но в квадрате типа $\langle 1 \rangle$ 8 чисел, находящихся во втором и четвертом квадрантах, составляют 4 пары. Поэтому $s_2 + s_4 = 4\sigma = 2\Sigma_0$. Следовательно, $2s_3 + 2\Sigma_0 = 4\Sigma_0$ и $s_3 = \Sigma_0$ у всех квадратов типа $\langle 1 \rangle$, но эти же числа находятся в средних клетках всех магических квадратов типа $\langle 2 \rangle$ и $\langle 3 \rangle$.

В квадратах $\langle 4' \rangle$ и $\langle 5' \rangle$ в средних клетках записаны числа c_2; d_2; g_2; h_2; а в квадратах $\langle 4'' \rangle$ и $\langle 5'' \rangle$ — числа c_1; d_1; g_1; h_1. Их также можно найти в квадрате типа $\langle 1 \rangle$. Первые расположены во втором квадранте, вторые — в четвертом. Из предыдущего анализа сумм чисел в квадрантах квадрата $\langle 1 \rangle$ ясно, что $s_3 = s_1 = s_2 = s_4 = \Sigma_0$. Поэтому задача решена и для всех квадратов $\langle 4 \rangle$ и $\langle 5 \rangle$.

Остаются еще квадраты $\langle 9\rangle$, $\langle 10\rangle$, $\langle 11\rangle$ и $\langle 12\rangle$. Для их анализа квадрат $\langle 1\rangle$ и родственные ему квадраты непригодны, так как основаны на иных числовых комбинациях.

В средних клетках квадратов $\langle 9\rangle$ и $\langle 10\rangle$ записаны числа a_1; d_1; h_2; g_2. Их сумма является искомой. Ее можно обозначить s_a (по внутреннему квадратику «a»). Числа в угловых клетках (внутренний квадратик «∂») квадрата $\langle 9\rangle$ составляют 2 пары. Поэтому $s_\partial = \Sigma_0$. Но 8 чисел внутренних квадратиков a) и ∂) заполняют обе диагонали. Поэтому $s_a + s_\partial = 2\Sigma_0$. Тогда $s_a = 2\Sigma_0 - s_\partial = 2\Sigma_0 - \Sigma_0 = \Sigma_0$. Задача решена и для квадратов $\langle 9\rangle$ и $\langle 10\rangle$, то есть всего для 864 квадратов.

Последние 16 квадратов типа $\langle 11\rangle$ и $\langle 12\rangle$ даются труднее всех предыдущих. В квадрате $\langle 11\rangle$ средние клетки заполнены числами b_2; d_2; f_1; g_1. Их сумма s_a является искомой. Для решения приходится воспользоваться внутренним прямоугольником e).



Сумма чисел, расположенных в его углах, $s_e = a_2 + e_1 + h_1 + c_2$. Вместе с числами квадратика a) они заполняют вторую и третью строки. Поэтому $s_a + s_e = 2\Sigma_0$. Если бы удалось найти величину s_e или доказать, что $s_a = s_e$, задача была бы решена. Но как это сделать?

После многих проб кое-что начинает проясняться. Сумма чисел нисходящей диагонали квадрата $\langle 11\rangle$: $a_1 + f_1 + d_2 + g_2 = \Sigma_0$. Сумма чисел, дополняющих их до пары, такая же: $a_2 + f_2 + d_1 + g_1 = \Sigma_0$. Для восходящей диагонали: $e_2 + b_2 + g_1 + d_1 = \Sigma_0$. Разность последних двух сумм:

$$(a_2 + f_2 + d_1 + g_1) - (e_2 + b_2 + g_1 + d_1) = \Sigma_0 - \Sigma_0 = 0$$

или

$$a_2 + f_2 - e_2 - b_2 = 0.$$

Для третьего столбца: $c_1 + g_1 + d_2 + h_2 = \Sigma_0$.
Вторая разность двух последних сумм:

$$(a_2 + f_2 - e_2 - b_2) - (c_1 + g_1 + d_2 + h_2) = 0 - \Sigma_0 = -\Sigma_0.$$

Теперь — раскрытие скобок, группировка, замена числами, дополняющими до пары:

$$(a_2 - c_1 - e_2 - h_2) - (b_2 + d_2 - f_2 - g_1) = -\Sigma_0$$

или

$$[a_2 - (\sigma - c_2) - (\sigma - e_1) - (\sigma - h_1)] - [b_2 + d_2 - (\sigma - f_1) + g_1] = -\Sigma_0,$$

или

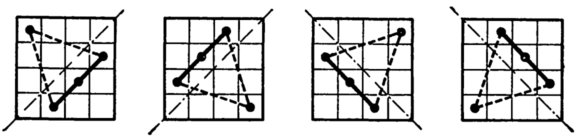
$$(a_2 + c_2 + e_1 + h_1) - 3\sigma - (b_2 + d_2 + f_1 + g_1) + \sigma = -\Sigma_0.$$

Наконец удалось сосредоточить в скобках числа, содержащиеся в квадратике a) и прямоугольнике e).

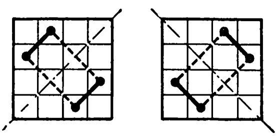
$s_a - 3\sigma - s_e + \sigma = -\Sigma_0$ или $s_a - s_e = 2\sigma - \Sigma_0 = \Sigma_0 - \Sigma_0 = 0$, или $s_a = s_e$ (как было задумано) и поэтому $s_a = \Sigma_0$. Теперь задача решена полностью. Оказалось, что условие $s_a = \Sigma_0$ определяется внутренней структурой для всех 880 магических квадратов 4×4.

Сходными способами можно исследовать условия, определяющие, что $s_б = \Sigma_0$; $s_в = \Sigma_0$ и т. д. для отдельных типов магических квадратов 4×4, но это менее интересно. На очереди иной способ определения «качества» магических квадратов пока 4×4, а в дальнейшем и иных размеров. В нем взамен внутренних квадратиков, начиная с XVIII в., чаще применяются так называемые «разломанные» диагонали. Это два диагональных ряда такой длины, что в квадрате 4×4 сумма клеток в них равна четырем. (В квадратах 5×5 — пяти клеткам, вообще n клеткам.) Оба ряда находятся по разные стороны параллельной им диагонали квадрата.

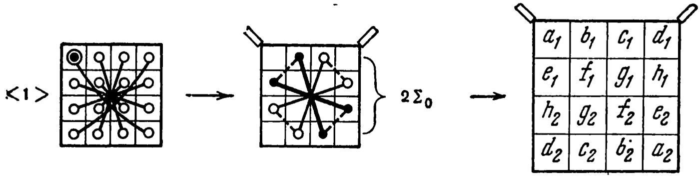
1)

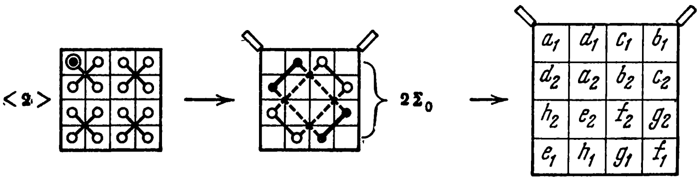


2)

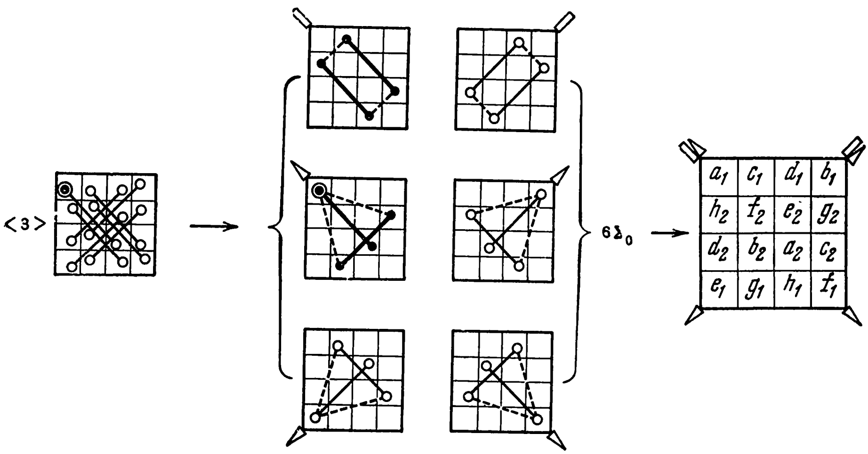


Если разломанные диагонали замкнуть в контур, то получаются 4 треугольные разломанные диагонали и 2 прямоугольные. (В квадрате 5×5 были бы 4 треугольные и 4 трапецеидальные. В квадрате 6×6 — 4 треугольные, 4 трапецеидальные и 4 прямоугольные разломанные диагонали.) Преимущество разломанных диагоналей не только в том, что их меньше (6, 8, 12) по сравнению с 14, 26, 51 внутренними квадратиками в магических квадратах 4×4, 5×5, 6×6. Разломанные диагонали оказались тесно связанными с главными диагоналями магических квадратов. При использовании одного удивительного обобщения, о котором в конце этой работы будет сказано, разломанные диагонали могут превращаться в главные, а главные — в разломанные. Пока же задача состоит в поисках таких разломанных диагоналей, сумма чисел которых равна постоянной $\Sigma_0 = 34$. В некоторых случаях, так же как для внутренних квадратиков, внутренняя структура сразу позволяет выявить такие «хорошие» разломанные диагонали. В первую очередь это относится ко всем случаям, когда числа разломанной диагонали составляют две пары. Примером этого являются обе прямоугольные разломанные диагонали всех магических квадратов типа $\langle 1 \rangle$ и типа $\langle 2 \rangle$:





(Два маленьких прямоугольничка у углов квадрата указывают удачные прямоугольные разломанные диагонали.) В магических квадратах типа $\langle 3 \rangle$, тех самых, что вышли на первое место по качеству в таблицах Френикля, не только прямоугольные, но и треугольные диагонали содержат по две пары.



(Удачные треугольные разломанные диагонали отмечены треугольничками у вершин углов квадрата.) Оказывается, что при оценке качества магических квадратов с помощью разломанных диагоналей, квадраты ⟨3⟩ имеют высший балл и стоят на первом месте. Квадраты ⟨3⟩ — *совершенные* магические квадраты. По старинной терминологии они — квадраты «сверхмагические», «пан-магические», «дьявольские» и тому подобное. В тех случаях, когда цифровое обозначение ⟨3⟩ их структуры окажется неудобным, по праву такую структуру можно называть *совершенной*.

Несколько иначе идет анализ качества магических квадратов типа ⟨4⟩, ⟨5⟩, ⟨6⟩.

	a_1	d_1	c_1	b_1
<4'>	a_2	d_2	c_2	b_2
<4''>	f_2	g_2	h_2	e_2
	f_1	g_1	h_1	e_1

	a_1	c_1	d_1	b_1
<5'>	f_2	h_2	g_2	e_2
<5''>	a_2	c_2	d_2	b_2
	f_1	h_1	g_1	e_1

<6'>	a_1	c_1	b_1	d_1
<6''>	f_2	h_2	e_2	g_2
<6'''>	f_1	h_1	e_1	g_1
<6IV>	a_2	c_2	b_2	d_2

Прямоугольные разломанные диагонали этих квадратов не содержат двух пар. Для первого квадрата ⟨4⟩ задача решается, если поочередно взять суммы чисел каждой диагонали:

$$a_1 + d_2 + h_2 + e_1 = \Sigma_0;$$
$$b_1 + c_2 + g_2 + f_1 = \Sigma_0.$$

Эти восемь чисел дополняют до пар числа, входящие в прямоугольные разломанные диагонали. Поэтому их суммы также равны Σ_0:

$$a_2 + d_1 + h_1 + e_2 = \Sigma_0$$

и

$$b_2 + c_1 + g_1 + f_2 = \Sigma_0.$$

Прямоугольные разломанные диагонали квадратов ⟨4⟩ и ⟨5⟩ содержат одни и те же числа. Этим устанавливается качество обеих разломанных прямоугольных диагоналей в квадрате ⟨5⟩. В квадрате ⟨6⟩ одна диагональ содержит числа $f_2 + c_1 + g_1 + b_2$, повторяющие числа такои же диагонали в квадратах ⟨4⟩ и ⟨5⟩, а числа $b_1 + g_2 + f_1 + c_2$ второй прямоугольной разломанной диагонали дополняют их до пар. Поэтому и их сумма равна Σ_0.

Сопоставление с квадратами ⟨4⟩ и ⟨5⟩ оказывается совершенно непригодным для квадратов типа ⟨6^V⟩. В их основе лежат иные числовые комбинации, чем те, на которых основаны квадраты типа ⟨4⟩; ⟨5⟩; ⟨6′⟩; ⟨6′′⟩; ⟨6′′′⟩; ⟨6^IV⟩. Алгебраическая запись поэтому не может помочь и приходится разбираться на численных примерах. Они же нужны для определения качества разломанных диагоналей квадратов ⟨7⟩, ⟨8⟩, ⟨9⟩, ⟨10⟩, ⟨11⟩, ⟨12⟩. Из численных примеров удается узнать, что в квадратах ⟨6^V⟩, ⟨11⟩, ⟨7′⟩, ⟨8⟩, ⟨9′⟩, ⟨10⟩ суммы чисел всех разломанных диагоналей не равны Σ_0. (Такие квадраты отмечены сверху небольшим косым крестом.) Лишь квадраты ⟨7″⟩, ⟨9″⟩ и ⟨12⟩ имеют по две «хорошие» треугольные разломанные диагонали. Это отмечено на примерах в сводной табличке. Но есть два исключения. (Удивляться приходится не исключениям, а тому, что их так мало. Зная коварный характер магических квадратов и их обычное стремление выскользнуть из-под опеки правил, можно было бы ждать большего числа исключений.) Оказывается, что косой крестик, свидетельствующий о полном отсутствии «хороших» разломанных диагоналей у квадратов ⟨7′⟩ и ⟨9′⟩, справедлив только в половине случаев. Вторая половина вариантов этих квадратов, отличающаяся от первой только расстановкой средних чисел на верхней и нижней строках, обладает двумя «хорошими» разломанными диагоналями. Обратная картина видна у квадратов ⟨7″⟩ и ⟨9″⟩.

<7′>

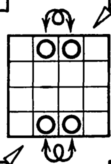
×

1	***4***	***14***	15
16	11	5	2
9	6	12	7
8	***13***	***3***	10

1)

1	***14***	***4***	15
16	11	5	2
9	6	12	7
8	***3***	***13***	10

2)



<7″>

4	***1***	***15***	14
13	12	6	3
8	5	11	10
9	***16***	***2***	7

1)

×

4	***15***	***1***	14
13	12	6	3
8	5	11	10
9	***2***	***16***	7

2)

<9′>

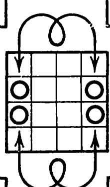
×

11	16	2	5
4	1	15	***14***
13	8	10	***3***
6	9	7	12

1)

11	16	2	5
14	1	15	***4***
3	8	10	***13***
6	9	7	12

2)



<9″>

12	13	3	6
1	4	14	***15***
16	9	7	***2***
5	8	10	11

1)

×

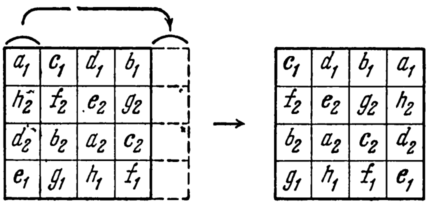
12	13	3	6
15	4	14	***1***
2	9	7	***16***
5	8	10	11

2)

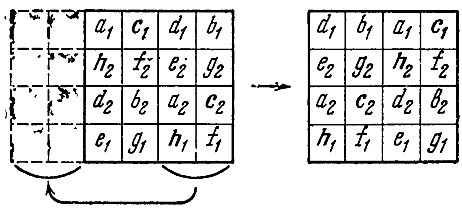
Если, по примеру Френикля, составить сводку по качеству, то получается следующее: 1) все разломанные диагонали оказались «хорошими» только у 48 совершенных квадратов ⟨3⟩; 2) по 2 «хороших» прямоугольных диагонали имеют 480 магических квадратов типа ⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨4⟩, ⟨5⟩, ⟨6⟩, кроме ⟨6$^{\text{V}}$⟩; 3) по 2 «хороших» треугольных диагонали имеют 64 магических квадрата типа ⟨7′⟩, ⟨7″⟩, ⟨9′⟩, ⟨9″⟩, ⟨12⟩; 4) никаких «хороших» разломанных диагоналей не имеют 288 прочих магических квадратов.

Если бросить последний взгляд на квадраты 4 × 4, то более всего привлекают внимание, конечно, совершенные квадраты ⟨3⟩, а в них — необычайная способность сохранить рисунок внутренней структуры при перестановке любого крайнего ряда на противоположный край квадрата. При этом *разломанные диагонали*, и треугольные и прямоугольные, *становятся главными* диагоналями квадрата, свидетельствуя об уже отмеченной ранее глубокой связи разломанных и главных диагоналей.

<3>

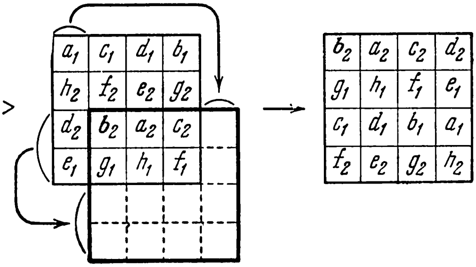


<3>



Свобода перемещать ряды совершенного магического квадрата позволяет из одного такого квадрата получить 16 вариантов совершенных квадратов с любым числом в начальной, верхней левой клетке.

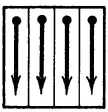
<3>



Всех совершенных квадратов 4×4 — 48. Но это означает, что из них можно выделить каких-то 3 основных, из которых перестановкой крайних рядов можно получить все остальные. При этом эти 3 совершенных квадрата, старшие среди своих 45 братьев, могут начинаться любым числом, например, единицей. Задача найти три таких квадрата оказывается простой и быстро приводит к ответу:

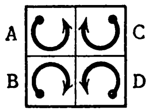
<3> а)

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6



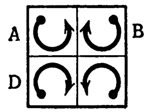
б₁)

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4



б₂)

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4



Любопытно сопоставить друг с другом эти три квадрата. Числа, размещенные в столбцах квадрата *а*), в квадратах *б*$_1$) и *б*$_2$), находятся внутри квадрантов. В угловых клетках квадратов *б*$_1$) и *б*$_2$) находятся числа из верхней строки квадрата *а*). Квадраты *б*$_1$) и *б*$_2$) могут быть получены преобразованием квадрата *а*), показанным на схеме.

Не менее любопытно, что возможность разделения 48 совершенных квадратов на три равные по численности группы означает такую же возможность разделения (обратным преобразованием) для квадратов $\langle 2 \rangle$ и $\langle 1 \rangle$. А три группы квадратов $\langle 2 \rangle$ тем же преобразованием приводятся к трем равным по численности группам квадратов $\langle 4 \rangle$, $\langle 5 \rangle$, $\langle 6 \rangle$, кроме $\langle 6^{\text{V}} \rangle$. Теперь не удивительно, что число вариантов всех этих квадратов делится на три.

Но это еще не все. Возможность получать варианты совершенных квадратов смещением рядов исходного квадрата вызывает новые представления, связанные с магическими квадратами, но выходящие за их рамки. Эти представления настолько удивительны и своеобразны, что в них надо разобраться отдельно, попозже, может быть, даже в конце работы, когда будут рассмотрены магические квадраты разных размеров, когда выяснится возможность получить совершенные квадраты других размеров.

ГЛАВА 3

НЕОЖИДАННОСТИ

Все уже давно известно!

Все ли? Конечно, отдельные примеры магических квадратов 5×5 были известны сотни лет тому назад. Некоторые способы их составления столь же стары. Современная теория чисел дала общее объяснение трем самым древним типам магических квадратов 5×5. Четвертый тип, составленный способом рамки, хотя стоит несколько особняком, но так же стар. Разве это не признаки того, что все вопросы здесь действительно решены?

Одно только странно: неизвестно число магических квадратов 5×5. Не то, чтобы было неизвестно их точное число. Нет, их число неизвестно даже приближенно. Правда, Френикль рассчитал некоторое количество квадратов 5×5 способом *террас* и способом *рамки*, но эта работа не идет в сравнение с его полными таблицами квадратов 4×4.

Может быть, какие-нибудь новые сведения о числе магических квадратов 5×5 будут получены косвенным путем, если попытаться разделить эти квадраты на группы, основываясь на их внутренней структуре, как это было сделано с квадратами 4×4? А уж затем, отдельно для каждой группы, искать их число. Пусть оно не будет точным. Даже порядок этого числа был бы интересен. Но основной задачей осталось бы исследование отдельных групп или «семей» квадратов 5×5.

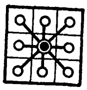
Дело упрощается тем, что, по-видимому, надо разобраться в магических квадратах, полученных всего лишь четырьмя способами. Три из них, самых древних [1], имеют одну общую, важную особенность: в них указывается обязательный порядок расстановки чисел в клетках. Четвертый способ — способ рамки — этим не обладает. Зато его идея необычайно проста: разделить квадрат на внешнюю рамку и внутренний квадрат 3×3, который можно так заполнить числами, *чтобы он оказался магическим.*

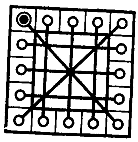
---

[1] Эти три способа и полученные этими способами магические квадраты, для краткости там, где это удобно, будут называться «классическими»

Эта задача распадается на две, даже на три. Во-первых, надо отобрать такие числа для внутреннего квадрата, которые позволили бы составить магический квадрат 3×3. Во-вторых, составить такой квадрат. В-третьих, так расставить оставшиеся числа в клетках рамки, чтобы весь квадрат 5×5 был магическим.

Не решив еще ни одной из этих трех задач, можно точно предсказать, какой будет внутренняя структура будущего магического квадрата 5×5, если он будет построен способом рамки. Магический квадрат 3×3 имеет только одну внутреннюю структуру — полную центральную симметрию. (Это выяснено ранее.) Поэтому магический внутренний квадрат 3×3, извлеченный из рамки 5×5, должен иметь только такую структуру (*а*):

а) 

б) 

Расположение чисел в рамке должно быть таким, чтобы не испортить равных сумм в строках, столбцах и диагоналях внутреннего квадрата 3×3. Для этого оставшиеся 8 пар должны быть поставлены по направлению строк, столбцов, диагоналей (*б*). Следовательно, суммы во всех рядах рамки (только рамки!), за исключением крайних рядов, будут равны σ. В квадрате 5×5, где будут расставлены числа ряда 1, 2, 3,..., 23, 24, 25, величина σ, как всегда, равна сумме двух членов ряда, равноотстоящих от его концов, например, первого и последнего: $\sigma = 1 + 25 = 26$. Сумма Σ_0 рассчитывается по известной формуле:

$$\Sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sigma = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 26 = 65.$$

Поэтому внутренний магический квадрат должен иметь суммы чисел в своих рядах, равные $65 - 26 = 39 = \Sigma_3$.

Как построить такой магический квадрат? Какие имеются ограничивающие условия? Их только два:

1) 9 чисел для внутреннего квадрата должны быть взяты из ряда 1, 2,..., 24, 25;

2) сумма трех чисел в каждом ряду должна быть равна $\Sigma_3 = 39$.

Эти условия могут быть соблюдены, если из 25 чисел выбрать 9 так, чтобы они составляли ряд, в котором сумма членов, равноотстоящих от концов, должна быть равна $26 = \sigma$. Тогда и $\Sigma_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 26 = 39$.

Таких рядов оказывается только 18.

№ рядов	Числа ряда									
1)	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
2)	8	9	10	12	13	14	16	17	18	
3)	7	8	9	12	13	14	17	18	19[1]	
4)	6	7	8	12	13	14	18	19	20	
5)	5	6	7	12	13	14	19	20	21	I
6)	4	5	6	12	13	14	20	21	22	
7)	3	4	5	12	13	14	21	22	23	
8)	2	3	4	12	13	14	22	23	24	
9)	1	2	3	12	13	14	23	24	25	
10)	6	8	10	11	13	15	16	18	20	
11)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	
12)	4	6	8	11	13	15	18	20	22	
13)	3	5	7	11	13	15	19	21	23	II
14)	2	4	6	11	13	15	20	22	24	
15)	1	3	5	11	13	15	21	23	25	
16)	3	6	9	10	13	16	17	20	23	
17)	2	5	8	10	13	16	18	21	24	III
18)	1	4	7	10	13	16	19	22	25	

Ряды 1), 11), 18) представляют собой арифметические прогрессии, в которых каждое следующее число больше предыдущего на 1, на 2, на 3. У всех прочих рядов эта разница между третьим и четвертым числом и между шестым и седьмым оказывается иной.

Самый простой способ проверки пригодности этих рядов — попробовать составить все 18 вариантов магических квадратов 3×3. При этом на место единицы записывать первое число ряда, на место двойки — второе число ряда и так далее (*см. стр. 66*).

Построение всех квадратов удается без всяких затруднений. Все они оказываются магическими и соответственно рядам разделяются на 3 группы. В пределах каждой группы магические квадраты содержат одинаковые диагонали: I) $12 + 13 + 14$; II) $11 + 13 + 15$; III) $10 + 13 + 16$. Среднее число у всех квадратов одно и то же — 13.

Теперь — о рамках. Каждому из 18 вариантов внутренних квадратов соответствуют свои 16 чисел, которые должны быть размещены в рамке. Эти 16 чисел определяются исключением из натурального ряда 1, 2, 3, ..., 24, 25 девяти чисел, занятых во внут-

[1] Строка представляет собой середину квадрата 5×5, заполненного числами натурального ряда в их естественном порядке.

1)

16	9	14
11	13	15
12	17	10

2)

17	8	14
10	13	16
12	18	9

3)

18	7	14
9	13	17
12	19	8

4)

19	6	14
8	13	18
12	20	7

5)

20	5	14
7	13	19
12	21	6

6)

21	4	14
6	13	20
12	22	5

7)

22	3	14
5	13	21
12	23	4

8)

23	2	14
4	13	22
12	24	3

9)

24	1	14
3	13	23
12	25	2

10)

18	6	15
10	13	16
11	20	8

11)

19	5	15
9	13	17
11	21	7

12)

20	4	15
8	13	18
11	22	6

13)

21	3	15
7	13	19
11	23	5

14)

22	2	15
6	13	20
11	24	4

15)

23	1	15
5	13	21
11	25	3

16)

20	3	16
9	13	17
10	23	6

17)

21	2	16
8	13	18
10	24	5

18)

22	1	16
7	13	19
10	25	4

реннем квадрате:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25;
2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25;
3) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25;

. . . .

13) 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 25;

. . . .

18) 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24.

Как из этих чисел построить рамку? Сколько рамок можно составить для каждой середины? Размещение всех чисел рамки полностью определяется размещением чисел на верхней строке и в левом столбце. Оказывается, что здесь все становится ясным, если знать числовую комбинацию. Она включает две группы чисел: 1) $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 = \Sigma_0 = 65$ (на луче I) и 2) $a_1 + f_1 + g_1 + h_1 + e_2 = \Sigma_0 = 65$ (на луче III).

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	луч I
f_1				f_2	
g_1				g_2	
h_1				h_2	
e_2	b_2	c_2	d_2	a_2	

луч III

Начинать работу приходится с составления для каждого из 18 вариантов своих числовых групп, по 5 чисел в каждой. Числа должны быть взяты из соответственных рядов в 16 чисел и в сумме давать 65. Ни одно число группы не должно дополнять до пары другое число этой же группы. Для ряда 3) удается подобрать 33 таких группы. Например: I.1) $1 + 3 + 15 + 22 + 24$; I.2) $1 + 3 + 16 + 21 + 24$ и т. д. При подборе групп в комбинации так же, как в квадратах 4×4, некоторые группы приходится использовать в иной записи, начиная их не наименьшим числом, а каким-либо иным. Таких случаев оказывается 52, и этим общее число групп увеличивается до 85. Из них для варианта 3) удается составить только 17 комбинаций. Условие, определяющее возможность комбинирования двух групп, состоит в том, что они должны содержать по одному числу, которые вместе составляют пару. (В алгебраической записи это числа e_1 и e_2.)

Для каждого из 18 вариантов внутреннего квадрата 3×3 каждая пригодная комбинация, использованная в рамке, позволяет построить 288 подвариантов магических квадратов. Поэтому только один вариант 3) при 17 пригодных комбинациях содержит $17 \times 288 = 4896$ — почти 5 тысяч подвариантов.

Почему именно 288? Это число известно и легко объясняется. Из 5 чисел верхней строки жестко закреплены только числа a_1 и e_1. Числа b_1; c_1; d_1 можно расставлять в любом порядке: 1) $b_1 + c_1 + d_1$; 2) $b_1 + d_1 + c_1$; 3) $c_1 + b_1 + d_1$; 4) $c_1 + d_1 + b_1$; 5) $d_1 + b_1 + c_1$; 6) $d_1 + c_1 + b_1$. Все 6 вариантов одинаково пригодны. В левом столбце числа f_1; g_1; h_1 так же могут быть записаны в 6 вариантах. Поэтому оказывается, что один вариант середины 3) может быть вставлен в $6 \cdot 6 = 36$ вариантов рамки 3). Но внутренний квадрат можно вкладывать в рамку в любом повороте другими словами, здесь пригоден любой из 8 невариантов. Поэтому для одной только комбинации существуют $36 \cdot 8 = 288$ вариантов.

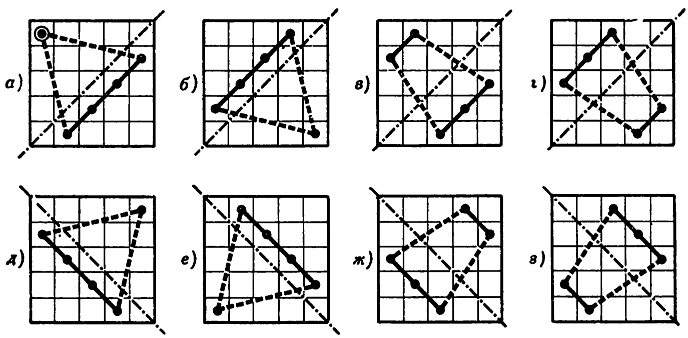
Для того чтобы выяснить, сколько же существует магических квадратов для всех 18 рядов, необходимо знать число комбинаций для каждого ряда. Если разница между числами комбинаций для отдельных рядов невелика, то было бы достаточно знать число комбинаций для нескольких рядов.

Эта работа идет такими же путями, как при варианте 3) и дает следующие результаты: из чисел ряда 7) можно составить 34 группы и 22 комбинации; ряд 13) дает 36 групп и 19 комбинаций; ряд 16) дает 28 групп и 19 комбинаций. Оказывается, что в четырех случаях числа комбинаций близки друг к другу. Четыре ряда из 18 дали 77 комбинаций или, в среднем, около 19 комбинаций на 1 ряд. Пренебрегая ненужной здесь точностью, можно допустить, что для всех 18 рядов общее число магических квадратов, построенных способом рамки, примерно равно: $(19 \times 18) \times (6 \times 6 \times 8) = 342 \times 288 \cong 98.500$ или около 100 000. Подумать только —

100 тысяч! В 120 раз больше, чем число всех магических квадратов 4×4.

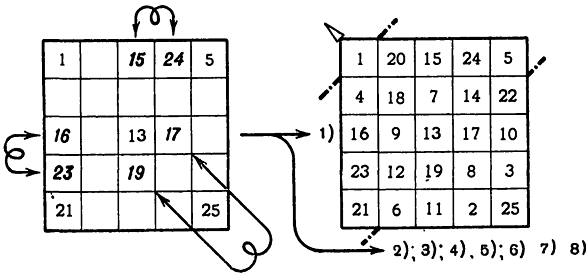
Сколько же существует магических квадратов, построенных тем же способом рамки, но иного размера? Для квадратов 6×6 из чисел ряда 1, 2, ..., 35, 36 можно составить для заполнения внутренних квадратов (4×4) 30 рядов по 16 чисел в каждом и для заполнения рамок соответственно 30 рядов по 20 чисел. Каждый ряд из 16 чисел позволит составить 880 вариантов внутренних квадратов, а каждый ряд из 20 чисел позволяет составить 17 280 рамок. (Каждые 20 чисел дают около 30 пригодных комбинаций, а перестановка чисел на верхней строке и в левом столбце в пределах одной комбинации дает $(4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1) \times (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 24 \times \times 24 = 576$ подвариантов. Всего $30 \times 576 = 17\,280$.) Общее число магических квадратов 6×6, построенных способом рамки, оказывается равным $30 \times (880 \times 8) \times 17\,280 \cong 3\,650\,000\,000$ — более трех с половиной миллиардов. После этого расчета пропадает желание интересоваться числом построенных способом рамки магических квадратов 7×7, 8×8 и так далее. Их очень много.

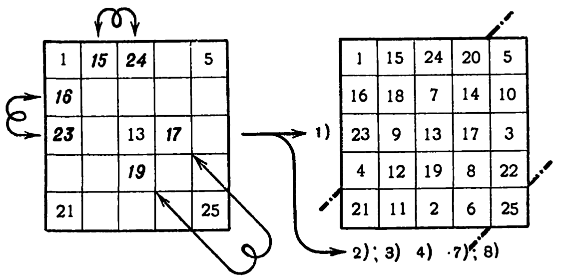
Еще один, последний, вопрос о магических квадратах 5×5, построенных способом рамки: каково их качество? Можно ли в них найти разломанные диагонали, которые содержали бы такие 5 чисел, чтобы их сумма была равна 65? Имеются ли среди таких квадратов совершенные, у которых все разломанные диагонали дают Σ_0?



Прежде всего, надо посмотреть, что собой представляют разломанные диагонали численных квадратов 5×5? Их восемь: 4 треугольных и 4 трапецеидальных. Рисунок внутренней структуры магических квадратов, построенных по способу рамки, не содержит никаких признаков, которые позволили бы определить, равна ли Σ_0 сумма чисел разломанной диагонали или не равна?

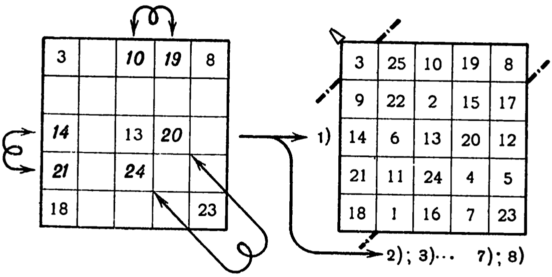
Для ряда 3) могут быть составлены 17 пригодных численных комбинаций. Для ряда 13) — 19 таких комбинаций. Каждая пригодная комбинация дает по 288 магических квадратов, построенных по способу рамки. Будут ли среди них квадраты, содержащие «хорошие» разломанные диагонали? Из 17 комбинаций, соответствующих ряду 3), для пробного расчета взята одна, содержащая группы: 1) $1 + 5 + 15 + 20 + 24$ и 2) $1 + 4 + 16 + 21 + 23$. Расчет магических квадратов на основе этой комбинации распадается на два русла. Каждый дает по 8 вариантов магических квадратов, содержащих только по одной «хорошей» треугольной разломанной диагонали.

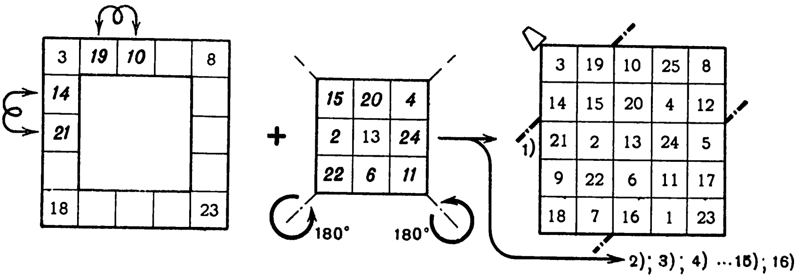




У четырех квадратов это диагональ типа *а*), у других четырех — типа *б*). Наличие «хорошей» разломанной диагонали и ее расположение указаны треугольничком у угла магического квадрата, так же как это было сделано для квадратов 4×4. Любопытно преобразование, позволяющее превратить один из 8 вариантов в остальные. Для этого достаточно поменять местами числа 15 и 24, 16 и 23, 19 и 17.

Для ряда 13) выбрана числовая комбинация, состоящая из групп 1) $3 + 8 + 10 + 19 + 25$ и 2) $3 + 9 + 14 + 18 + 21$. И здесь расчет раздваивается. В первом случае также получается 8 вариантов магических квадратов, обладающих каждый только одной «хорошей» треугольной разломанной диагональю. Во втором случае «хорошей» оказывается трапецеидальная диагональ, а число вариантов оказывается равным 16. Оно определяется не только перестановками чисел 19 и 10, 14 и 21, но и четырьмя невариантами внутреннего квадрата 3×3, получаемыми тремя поворотами этого квадрата на 180° около его диагоналей.

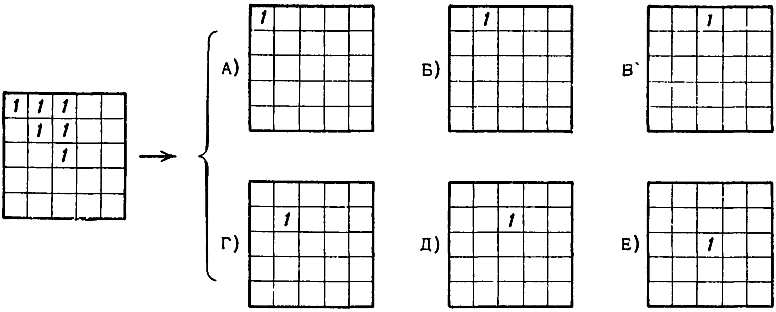




Выполненная проверка коснулась только 2 × 288 = 576 магических квадратов, построенных способом рамки, из ста тысяч таких квадратов. Этих 576 квадратов недостаточно, чтобы судить о качестве остальных. Общего решения пока нет, но думать и догадываться кто запретит? Среди просмотренных 576 магических квадратов оказалось только 48, имеющих по одной «хорошей» разломанной диагонали, и ни одного магического квадрата с «хорошими» двумя, тремя диагоналями, не говоря о всех восьми разломанных диагоналях. Догадка подсказывает, что здесь их нет вообще, но решительно это утверждать, конечно, нельзя. Вероятно, здесь нет совершенных квадратов, но и это станет более ясным после знакомства со способами построения совершенных квадратов 5 × 5.

Простые правила и очевидные исключения

Для размещения первого по счету числа — единицы — в квадратах 5 × 5 можно использовать только 6 клеток, но не 25. Все остальные квадраты могут быть получены поворотом или зеркальным отображением квадрата, то есть являются невариантами.

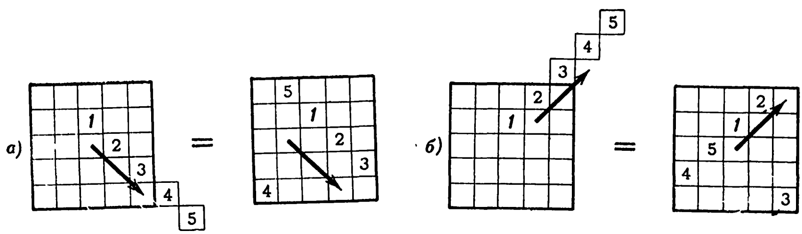


В зависимости от расположения единицы, все квадраты 5×5 можно разделить на 6 групп или основных вариантов. Их удобно обозначить буквами А, Б, В, Г, Д, Е.

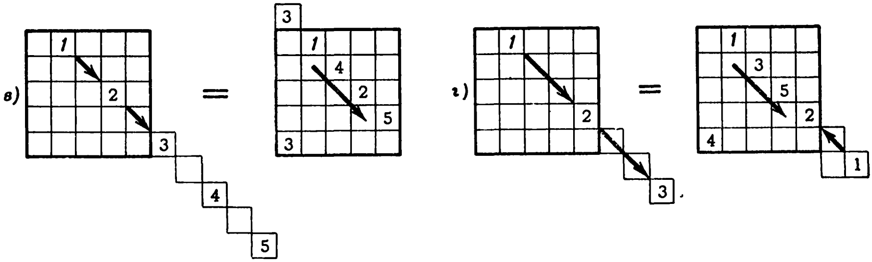
Размещение второго числа — двойки — определяется шагом от 1 к 2. Знаменитые древние «классические» способы составления магических квадратов 5×5 отличаются тем, что шаги от 2 к 3, от 3 к 4 и от 4 к 5 такие же, как шаг от 1 к 2. (Это же правило действует для нечетных квадратов иного размера.) После того как правило будет использовано во всех нужных случаях, любопытно попробовать составить магический квадрат, действуя вопреки этому правилу. Надо думать, это нарушение традиции не приведет к удачному результату, но не будет большой беды в том, что старинное правило получит еще одно подтверждение.

При первых же попытках применения «классических» правил приходится столкнуться с исключениями и запретами. Нельзя, оказывается, двойку поставить в одном ряду с единицей (в строке, в столбце, в диагонали). Причина этого та, что в тот же ряд придется вписать также числа 3, 4 и 5. В каком бы порядке числа 1, 2, 3, 4, 5 ни были расположены, их сумма будет равна 15, а не 65. Квадрат, содержащий такой ряд, не будет магическим. Следовательно, для всех случаев от А) до Е) расстановка чисел 1, 2, 3, 4, 5 может быть выполнена только косыми рядами, например, параллельными нисходящей (*а*) или восходящей (*б*) диагонали.

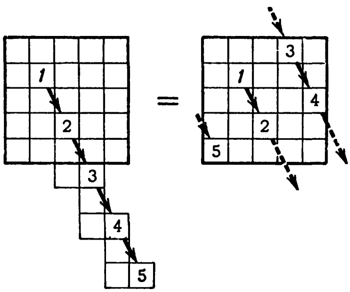
При расстановке чисел в клетках квадрата некоторые из чисел оказываются за пределами его контура. Они могут быть туда

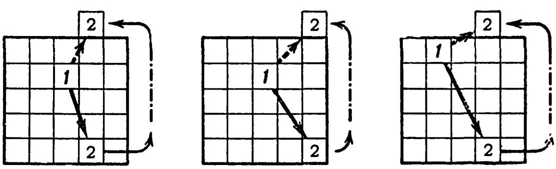


возвращены, если их передвинуть на 5 клеток вдоль строки или столбца, или диагонали. То же самое необходимо, если параллельный диагонали переход от числа к числу происходит не в соседнюю клетку, а через клетку (*в*). Попытка расставить числа, воспользовавшись диагональным шагом через 2 клетки (*г*),



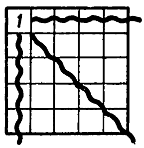
приводит к расстановке через одну клетку, но в противоположном направлении. Возможен переход от числа к числу не параллельно диагонали — ходом шахматного коня. Удлиненный ход шахматного коня, как оказывается, приводит или к обычному ходу шахматного коня, или к диагональному ходу через клетку.

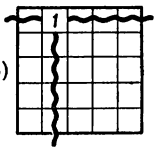


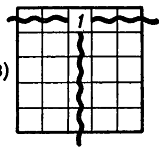


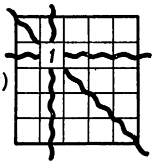
Вследствие всех этих обстоятельств при последовательной расстановке чисел оказываются возможными всего три варианта шага от числа к числу: 1) в соседнюю клетку, параллельно диагонали, 2) через клетку, также диагональный, 3) ходом шахматного коня в любом направлении. Поэтому столетия тому назад эмпирически найдены только три «классических» способа построения нечетных магических квадратов. Четвертого способа нет. (Быть может, его нет только потому, что никто не хотел отказаться от равных шагов между числами? Об этом можно будет еще подумать в дальнейшем.)

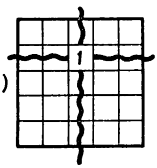
Остается разобраться в том, каков может быть (или должен быть) шаг по клеткам квадрата при переходе от числа 5 к числу 6 (от 10 к 11, от 15 к 16, от 20 к 21). Во-первых, шаг 5—6 не может быть равным шагам 1—2—3—4—5. И в смысле размера шага, и в смысле его направления. В любом из трех «классических» способов при равном шаге число 6 оказалось бы в той же клетке, где уже находится единица. Во-вторых, для числа 6 действуют те же ограничения, что для числа 2. Число 6 также не может быть с единицей в одном прямом ряду, содержащем 5 клеток (строка, столбец, диагональ). Иначе в этом же ряду обязательно оказались бы еще числа 11, 16, 21 и сумма их всех $1 + 6 + 11 + 16 + 21 = 55$ не равнялась бы 65 и поэтому была бы непригодной для магического квадрата.

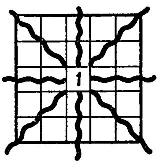
а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

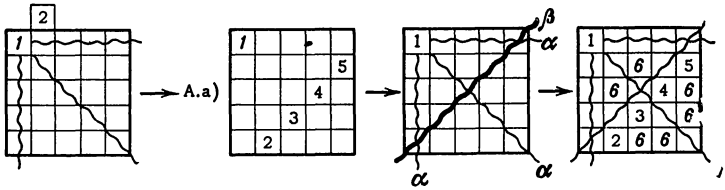
В дальнейшем при поисках клеток, в которые можно было бы вписать число 2 или число 6, будет удобно запретные для них ряды клеток зачеркнуть (волнистой линией).

Этим можно закончить подготовку к составлению магических квадратов 5 × 5 тремя «классическими» способами, значительно упростив и облегчив последующую работу.

На каждой ступеньке и через ступеньку

Магические квадраты, полученные последовательной расстановкой чисел с шагом в соседнюю клетку, параллельно диагонали, такая же самостоятельная группа, как квадраты, составленные способом рамки. Их число? Теория сравнений приводит к выводу, что можно получить только пять магических квадратов 5 × 5, построенных диагональным шагом в соседнюю клетку [1]. Если их так мало, тем легче будет последовательно рассчитать все варианты таких квадратов и получить возможность убедиться в их числе.

Первые квадраты будут, конечно, строиться по варианту А). Единица помещена в верхней левой клетке. Двойка должна быть или ступенькой выше, или ступенькой ниже. Но второй случай— это только невариант первого. По этой причине для размещения первых пяти чисел остается только один вариант: А.а).



После их расстановки [2] остаются свободными только 8 клеток, где можно было бы записать число 6. Однако еще две клетки приходится забраковать. Если число 6 оказалось бы на восходящей диагонали квадрата, то на этой же диагонали пришлось бы записать и числа 7, 8, 9, 10. Сумма чисел была бы равна 40, а не 65. Восходящая диагональ здесь оказалась четвертым запретным рядом, но только для числа 6. Чтобы отличить ее от трех первых запретных рядов, можно первые отметить греческой буквой α, а эту диагональ — буквой β.

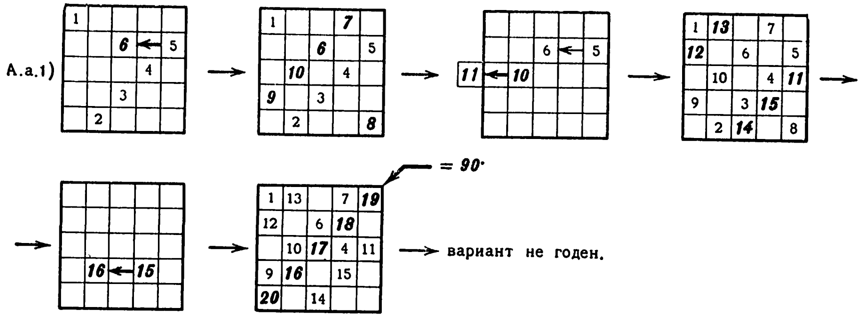
Для окончательного расчета остаются только 6 вариантов расположения числа 6. Соответствующие им магические квадраты, если они удачно получатся, можно обозначить А. а. 1), А. а. 2), ..., А. а. 6).

В варианте А. а. 1) шаг от числа 5 к числу 6 оказался направленным по строке влево, через клетку. (Такие же переходы должны быть от 10 к 11, от 15 к 16, от 20 к 21.) Зная, где находится число 6, легко разметить числа 7, 8, 9, 10; затем сделать переход от 10 к 11; записать 12, 13, 14, 15, перейти от 15 к 16, записать числа 17, 18, 19, 20. Однако числа 16, 17, 18, 19, 20 оказались на главной диагонали квадрата. Их сумма равна 90, а не 65. Такой ряд не годен для магического квадрата. Поэтому вариант А. а. 1) отпадает и заканчивать его нет смысла.

---

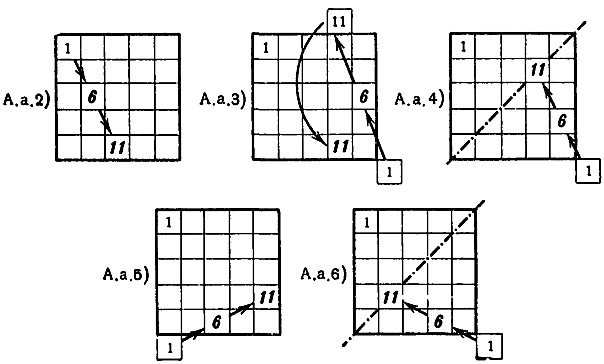
[1] М. М. Постников. Магические квадраты. М., изд-во «Наука», 1964, стр. 33.

[2] Очень важное примечание: числа 1,2,3,4,5 здесь расположены на одной из треугольных разломанных диагоналей. Их сумма не равна 65. Следовательно, *среди будущих магических квадратов типа А. а) не будет ни одного совершенного квадрата.*



Из этой неудачи надо сделать какие-то выводы. Нельзя ли заранее определить, какие 5 последовательных чисел надо подобрать, чтобы их сумма была равна 65? Пробы убеждают, что пригодны только такие: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65$. Следовательно, если число 11 попадает на свободную диагональ квадрата и перемещения идут параллельно этой же диагонали, то такой случай является одной из гарантий получения магического квадрата. Это первое.

Второе: нельзя ли после записи первых шести чисел сразу узнать, будет находиться на диагонали число 11 или не будет? Переход от 6 к 11 должен быть таким же, как от 1 к 6. Следовательно, удвоив шаг $1 \to 6$, можно найти клетку, в которой будет находиться число 11, и увидеть, находится ли она на диагонали квадрата. В случае А. а. 1) число 11 не попало на диагональ и поэтому магический квадрат не удался. Среди остальных пяти вариантов размещения чисел удачными оказываются только два: А. а. 4) и А. а. 6).



Они обязательно дадут магические квадраты.

А.а.4)

1	20	9	**23**	12
19	8	**22**	11	5
7	**21**	15	4	18
25	14	3	17	6
13	2	16	10	**24**

5×65 ; 65 ; 5×65 ; 65

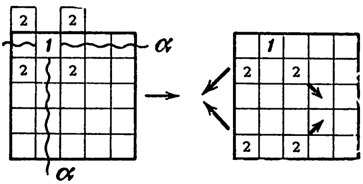
А.а.6)

1	18	10	22	14
17	9	21	13	5
8	25	12	4	16
24	11	3	20	7
15	2	19	6	23

5×65 ; 65 ; 5×65 ; 65

Оказалось, что все семейство магических квадратов А) представлено только двумя квадратами. Никаких родственных вариантов или подвариантов здесь нет. А сколько бы их было в случае применения способа рамки? Сотни...

Б)



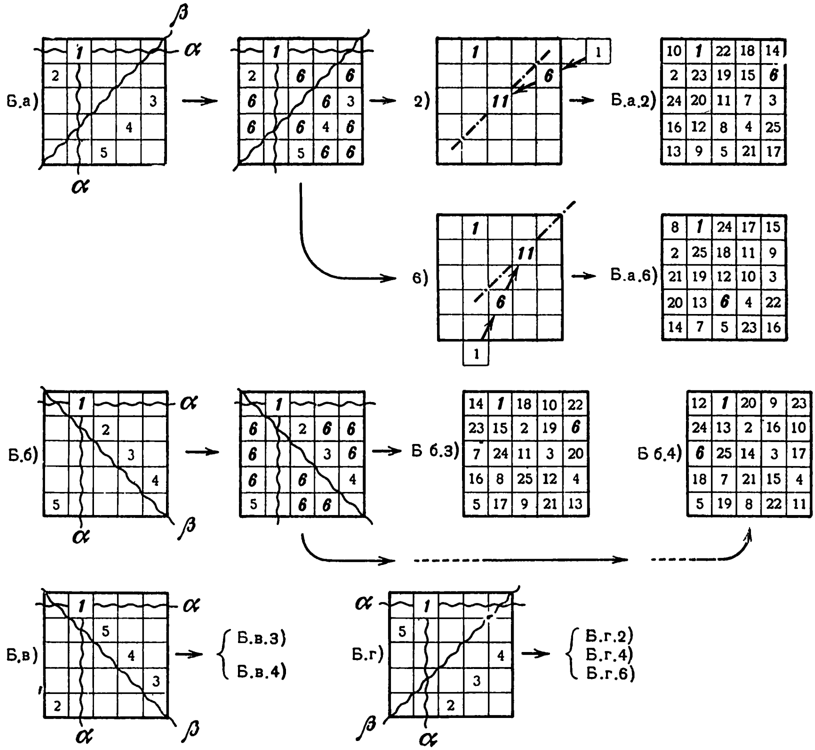
Теперь о вариантах Б). Размещение двойки здесь возможно четырьмя способами. (Прочие — неварианты.)

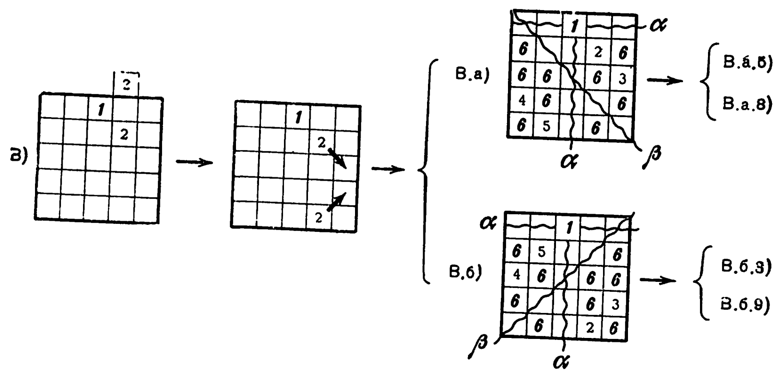
Поэтому сразу возникают четыре варианта размещения чисел 1, ..., 5: Б. а), Б. б), Б. в), Б. г). В каждом из них, после исключения запретных рядов α и β, остается 9 свободных клеток. Это означает, что возможны 4×9 вариантов размещения числа 6. Но из них только в девяти случаях число 11 попадает на диагональ. Это определяет девять вариантов типа Б): Б. а. 2), Б. а. 6), Б. б. 3), Б. б. 4), Б. в. 3), Б. в. 4), Б. г. 2), Б. г. 4), Б. г. 6) (*см. верх стр. 77*). Число магических квадратов типа В) равно только четырем (*см. низ стр. 77*). Существует только два магических квадрата типа Г). Вариант Д) дает 5 магических квадратов (*см. стр. 78*).

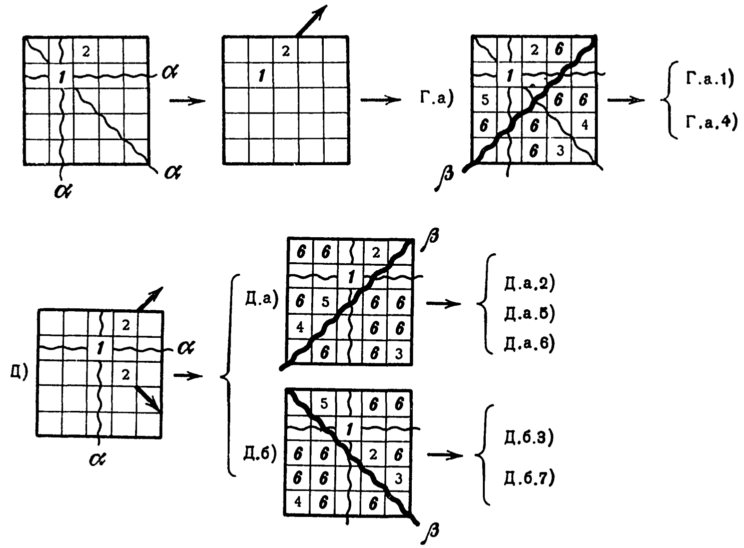
В варианте Е) единица размещена в средней клетке квадрата. Все диагональные направления являются запретными. Двойку поставить некуда. Поэтому вариант Е) при диагональном шаге в соседнюю клетку не дает ни одного магического квадрата.

Итак, шагом в соседнюю клетку, параллельным диагонали квадрата, получено всего $2 + 9 + 4 + 2 + 5 = 22$ магических квадрата. Не 100 000, как в случае применения способа рамки, а только 22. Не приблизительно, а точно. Результат получен таким простым путем, что нельзя понять, почему это не было сделано сто лет назад.

Но, позвольте, ведь должно было получиться только 5 магических квадратов, а не 22. Может быть, среди 22 квадратов 17 являются невариантами? Такой вопрос возможен. Необходимо


Б.а)
2)
Б.а.2)
б)
Б.а.б)
Б.б)
Б б.3)
Б б.4)
Б.в)
Б.в.3)
Б.в.4)
Б.г)
Б.г.2)
Б.г.4)
Б.г.6)


в)
В.а)
В.а.5)
В.а.8)
В.б)
В.б.3)
В.б.9)

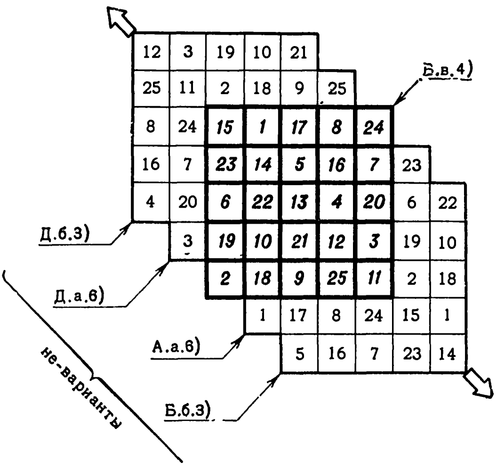


сравнить друг с другом все 22 магических квадрата. Оказывается, что не только это можно сделать, даже в сокращенной записи, но попутно можно выяснить некоторые любопытные обстоятельства.

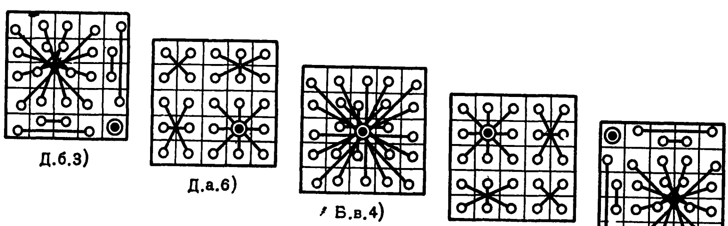
Во-первых, шесть из 22 квадратов обладают полной центральной симметрией. Их обозначения: Б. в. 4), В. б. 3), Г. а. 1), Д. б. 7), Б. г. 4), Д. а. 2). В средней клетке каждого из них находится 13 — среднее число ряда. Далее, у всех 22 магических квадратов одна из главных диагоналей содержит одинаковые числа: 11, 12, 13, 14, 15. У 20 квадратов суммы чисел четырех разломанных диагоналей, *расположенных под прямым углом* к диагонали с числами 11, 12, ..., 15, равны 65. Эти 20 квадратов распадаются на 4 группы по 5 квадратов. В каждой пятерке один из квадратов обладает полной центральной симметрией. Они уже названы. Два симметричных квадрата — Б. г. 4) и Д. а. 2) — стоят особняком. Оказывается, что эти два квадрата вовсе не имеют «хороших» разломанных диагоналей.

В каждом из 5 квадратов одной «семьи» главные и «хорошие» разломанные диагонали, параллельные друг другу, состоят из одних и тех же чисел. Например, симметричный квадрат Б. в. 4) и его несимметричные родичи Д. б. 3), Д. а. 6), А. а. 6) и Б. б. 3) содержат 25 таких диагоналей. В каждом квадрате в них встречаются числа: 1) $4+7+15+18+21$, 2) $3+6+14+17+25$, 3) $2+10+13+16+24$, 4) $1+9+12+20+23$, 5) $5+8+11+19+22$. Казалось бы, что это не так существенно, но при смещении контура симметричного квадрата Б. в. 4) на одну клетку влево вверх, по направлению диагонали с числами 11,

..., 15, получается магический квадрат Д. а. 6). Второе такое же смещение дает невариант квадрата Д. б. 3). Аналогичное смещение на одну и две клетки вправо вниз дают неварианты квадратов А. а. 6) и Б. б. 3). Одновременно разломанные диагонали симметричного квадрата Б. в. 4) превращаются в главные диагонали связанных с ним несимметричных квадратов Д. б. 3) и т. д.



Несимметричные внутренние структуры квадратов Д. б. 3) и родственных ему могут быть получены непосредственно из рисунка полной центральной симметрии диагональным смещением контура квадрата. Любопытно, что эти несимметричные структуры состоят из вполне симметричных участков.



Стрелочки у двух противоположных углов симметричных квадратов Б. в. 4), В. б. 3), Г. а. 1) и Д. б. 7) указывают направления, в которых надо перемещать контур квадрата, чтобы получить еще 4 его несимметричных собрата. Помня об этом, можно считать, что каждый из этих симметричных квадратов в скрытом виде содержит еще 4 несимметричных магических квадрата. При этом условии табличка из 4 + 2 квадратов содержит все 22 магических квадрата 5 × 5, построенных диагональным шагом в соседнюю клетку. Ни один из них не повторяет других.

н/в Д.б.3)	15	*1*	17	8	24
Д.а.6)	23	14	5	16	7
Б.в.4)	*6*	22	13	4	20
н/в А.а.6)	19	10	21	12	3
н/в Б.б.3)	*2*	18	9	25	11

н/в В.а.8)	17	24	*1*	8	15
Г.а.4)	23	5	7	14	16
В.б.3)	4	*6*	13	20	22
н/в Б.а.6)	10	12	19	21	3
н/в Б.г.2)	11	18	25	*2*	9

	8	*1*	24	17	15
	5	23	16	14	7
Б.г.4)	22	20	13	*6*	4
	19	12	10	3	21
	11	9	*2*	25	18

н/в Б.г.6)	19	23	*2*	*6*	15
н/в В.а.5)	22	*1*	10	14	18
Г.а.1)	5	9	13	17	21
В.б.9)	8	12	16	25	4
н/в Б.а.2)	11	20	24	3	7

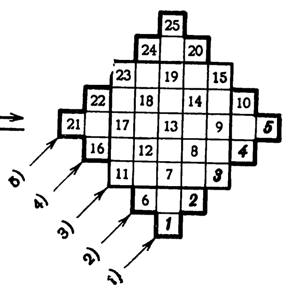
н/в Б.в.3)	11	5	19	8	22
н/в Д.а.5)	23	12	*1*	20	9
Д.б.7)	10	24	13	*2*	16
Б.б.4)	17	*6*	25	14	3
н/в А.а.4)	4	18	7	21	15

	23	*6*	19	*2*	15
	10	18	*1*	14	22
Д.а.2)	17	5	13	21	9
	4	12	25	8	16
	11	24	7	20	3

Какой же вывод, сколько же этих магических квадратов? Теперь совершенно ясно: все-таки 22, а не 5.

Казалось бы, что все возможности диагонального шага в соседнюю клетку уже исчерпаны, но надо еще раз вернуться к квадрату Д. а. 2). Это необходимо для того, чтобы понять, что же такое на самом деле старинный способ построения нечетных магических квадратов, называемый способом террас. Почему понадобился именно квадрат Д. а. 2)? Преобразование этого квадрата дает наиболее наглядный результат. Если пристроить к контуру квадрата, снаружи, четыре террасы и в них вписать числа, перенесенные с противоположной стороны квадрата, то все числа располагаются правильными рядами, параллельными диагонали. 11, 12, 13, 14, 15.

	23	6	19	*2*	15
	10	18	*1*	14	22
Д.а.2)	17	*5*	13	21	9
	4	12	25	8	16
	11	24	7	20	*3*

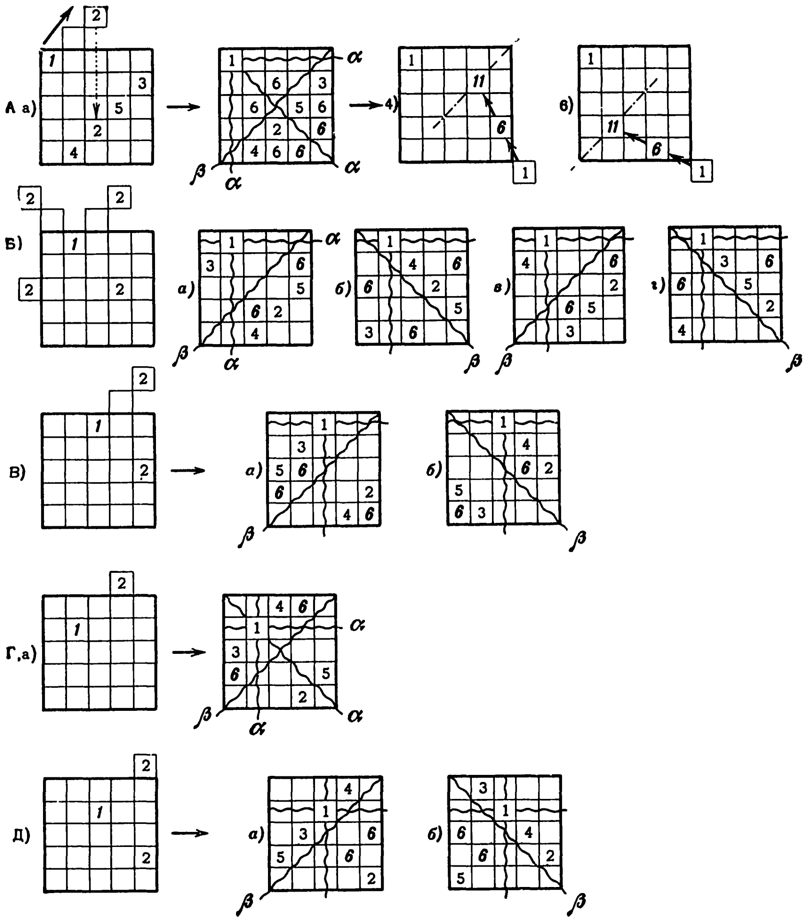


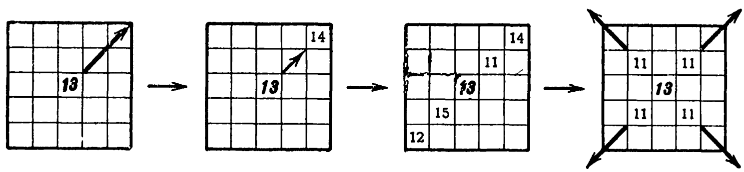
Способ террас оказался несамостоятельным. В своей «классической» форме он позволяет получить лишь часть тех магических квадратов 5 × 5, в которых числа расставлены с помощью диагонального шага в соседнюю клетку. Однако, если усложнить способ террас, применяя не только перестановку рядов, как делал Френикль, но и перестановку чисел в рядах, то можно получить все 22 магических квадрата. Но такие операции неудобны. Проще строить магические квадраты, пользуясь шагом в соседнюю клетку, параллельно диагонали, по первому «классическому» способу.

Теперь можно заняться вторым «классическим» способом, при котором для последовательной расстановки чисел применяется шаг через одну клетку, параллельный диагонали квадрата. Этот способ так близок к уже испробованному диагональному шагу в соседнюю клетку, что все рассуждения и расчеты почти точно повторяют уже сделанные. Пригодны те же варианты А), Б), В), Г), Д). Так же отпадает вариант Е). В каждом из годных четырех вариантов запретны для чисел 2 и 6 строка, столбец и диагональ, проходящие через клетку с единицей, а для числа 6 запретна и восходящая диагональ, если она свободна после того, как числа 2, 3, 4, 5 уже расставлены на свои места. Так же, как ранее, число клеток, оставшихся свободными после расстановки чисел 1, 2, ..., ..., 5 и исключения запретных рядов, определяет число вариантов размещения шестерки. Но, в отличие от предыдущего, здесь можно сразу использовать найденное ранее условие, по которому расположение чисел 1 и 6 и равенство шагов 1 → 6 и 6 → 11 определяют клетку, где должно быть число 11. Это позволяет продолжать работу только над теми вариантами, в которых число 11 попадает на полностью свободную диагональ (*см. стр. 82*).

Достаточно разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, чтобы удалось точно определить число будущих магических квадратов. В варианте А) их будет два, Б) даст девять, В) — пять, Г) — два и Д) — четыре. Всего окажется 22, ровно столько же, сколько в предыдущем случае. Среди них могут быть (или должны быть?) магические квадраты с симметричной структурой. Признаком такой структуры является расположение числа 13 в центре квадрата. Можно ли выяснить заранее, будет ли число 13 в центре квадрата? Для того чтобы число 13 действительно оказалось в центре квадрата, число 11 обязательно должно быть в клетке, соседней по диагонали с клеткой с числом 13 (*см. низ стр. 82*).

Это означает, что симметричная структура будет в тех квадратах, в которых двукратный шаг 1—6—11 приводит в соседнюю с центральной клетку диагонали квадрата и обязательно по направлению записи чисел. Таких квадратов оказывается только 6, столько же, сколько было при диагональном шаге в соседнюю клетку. Все эти квадраты обладают полной центральной симметрией. Среди них только два — Б. б. 8) и В. а. 6) — не имеют «хороших» разломанных диагоналей и не могут быть преобразованы смещением контура. Другие четыре — А. а. 4), Б. а. 6), В. б. 8), Д. б. 3) могут быть преобразованы и определяют, как было ранее, четы-





ре группы по пяти родственных друг другу магических квадрата.

Вот все об этом способе, но необходимы еще два замечания. Первое, о квадрате В. а. 6). Просто надо им полюбоваться. Его

н/в Д.а.5)
н/в Б.г.3)
А.а.4)
н/в Б.б.4)
н/в Д.б.7)

1	18	10	22	14
20	7	24	11	3
9	21	13	5	17
23	15	2	19	6
12	4	16	8	25

н/в В.а.9)
н/в Б.в.2)
Б.а.6)
н/в В.б.5)
н/в Г.а.1)

10	1	22	18	14
3	24	20	11	7
21	17	13	9	5
19	5	6	2	23
12	8	4	25	16

Б.б.8)

12	1	20	9	23
21	15	4	18	7
10	24	13	2	16
19	8	22	11	5
3	17	6	25	14

н/в В.а.3)
н/в Г.а.4)
В.б.8)
н/в Б.а.2)
н/в Б.в.6)

12	9	1	23	20
18	15	7	4	21
24	16	13	10	2
5	22	19	11	8
6	3	25	17	14

н/в Б.г.4)
н/в Д.а.6)
Д.б.3)
н/в Б.б.3)
н/в А.а.6)

12	3	19	10	21
24	15	1	17	8
6	22	13	4	20
18	9	25	11	2
5	16	7	23	14

В.а.6)

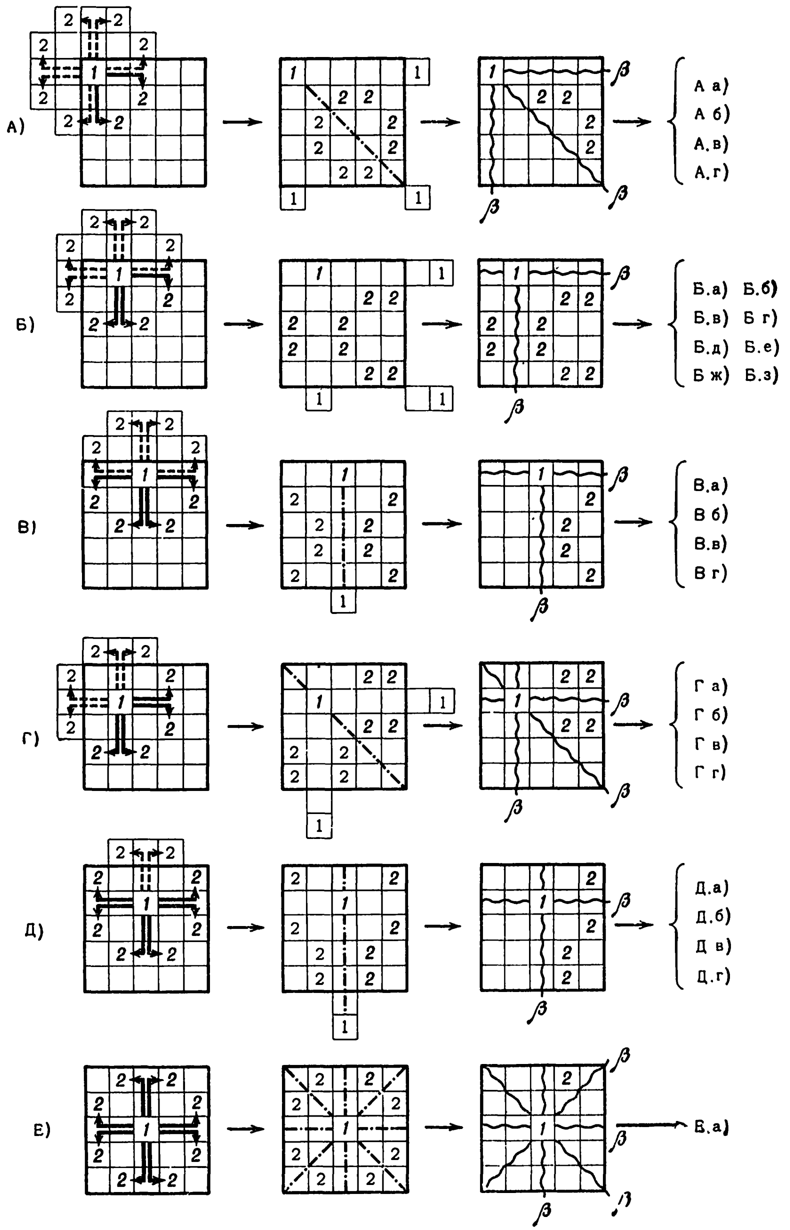
18	22	1	10	14
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
12	16	25	4	8

структура необыкновенна по правильности и красоте. Все нечетные числа расположены в центральном кресте правильными диагональными рядами: 1, 3, 5—7, 9—11, 13, 15—17, 19—21, 23, 25. Все четные числа приютились по углам. Такое же расположение нечетных и четных чисел было в магическом квадрате 3 × 3.

Второе, об одном странном недоразумении. Из литературы известно, что диагональный шаг через клетку позволяет построить только один магический квадрат или несколько, два-три. Однако только что достоверно выяснилось, что таких магических квадратов не один, не два, не три, а ровно двадцать два. Возможно, что такое недоразумение возникло при стремлении точно следовать по пути, указанному в старинном правиле. Оно состоит в том, что единицу следует вписать во вторую клетку от угла по внешнему ряду и далее расставлять числа согласно диагональному шагу через клетку. Такое размещение единицы соответствует уже известному варианту Б). Но этот вариант дает не 2—3, а 9 магических квадратов: Б. а. 2), Б. а. 6), Б. б. 3), Б. б. 4), Б. б. 8), Б. в. 2), Б. в. 6), Б. г. 3), Б. г. 4).

Ход конем

Пришла очередь третьего, последнего «классического» способа составления нечетных магических квадратов, в котором применяется последовательная расстановка чисел, с переходом от числа к числу, равным ходу шахматного коня — две клетки вперед и одна вбок. Нет причины не воспользоваться еще раз тем способом расчета, который был отработан для диагонального шага в соседнюю клетку и через клетку. Для размещения единицы пригодны те же 6 вариантов — от А) до Е). В каждом из них переход к двойке,

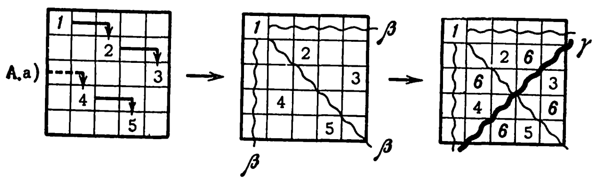


выполненный ходом шахматного коня, позволяет расставить двойку в 8 клетках. За исключением варианта Е), во всех остальных вариантах только часть клеток для записи двойки оказывается в пределах контура квадрата, но двойки, которые оказались вне квадрата, можно переместить внутрь контура уже известным способом, смещая их в нужном направлении на 5 клеток.

Тот же результат можно получить сразу, если делать первый шаг, начиная не только от единицы, находящейся в пределах контура квадрата, но и от единиц, находящихся вне контура. Их места определяются, если представить себе, что справа, слева, вверху, внизу и по диагонали от квадрата находятся примыкающие к нему такие же квадраты и в них, в тех же клетках, размещена единица. (Это правило было использовано и ранее, но сейчас оно особенно полезно.)

Третья операция состоит в исключении невариантов. При этом в случаях А), В), Г) и Д) число клеток, где надо будет размещать двойку, уменьшается вдвое, в случае Б) остается тем же, а в случае Е) из восьми остается только одна, любая.

Наконец, во всех случаях могут быть отмечены запретные для числа 6 ряды β. Причина запрета та же, что была при диагональном шаге: если в одном ряду окажутся числа 1 и 6, то обязательно там же будут числа 11, 16, 21. Сумма чисел ряда будет равна не 65, а 55, и квадрат не будет магическим. Последовательную запись чисел можно показать на любом варианте. Пусть им будет вариант А. а.). После того как двойка нашла свое место, ходом коня в том же направлении размещаются числа 3, 4, 5. Для того



чтобы найти клетки, в которых можно было бы вписать число 6, приходится исключить 12 клеток, зачеркнутых рядами β. Но это еще не все. Пробные расчеты показали, что в вариантах типа А. а.) число 6 нельзя вписывать ни в одну из четырех клеток вдоль ряда γ. Для записи числа 6 остаются пригодными только 4 клетки. Поэтому возможно получить только четыре магических квадрата типа А. а.): А. а. 1), А. а. 2), А. а. 3) и А. а. 4).

А.а.1)

1	10	14	18	22
19	23	2	6	15
7	11	20	24	3
25	4	8	12	16
13	17	21	5	9

А.а.2)

1	20	9	23	12
24	13	2	16	10
17	6	25	14	3
15	4	18	7	21
8	22	11	5	19

А.а.3)

1	15	24	8	17
9	18	2	11	25
12	21	10	19	3
20	4	13	22	6
23	7	16	5	14

А.а.4)

1	25	19	13	7
14	8	2	21	20
22	16	15	9	3
10	4	23	17	11
18	22	6	5	24

Имеются ли в этих магических квадратах «хорошие» разломанные диагонали? Проверка квадрата А. а. 1) дает такой результат:

$1 + (17 + 8 + 24 + 15) = 65;$ $22 + (19 + 11 + 8 + 5) = 65;$

$(19 + 10) + (21 + 12 + 3) = 65;$ $(18 + 15) + (7 + 4 + 21) = 65;$

$(7 + 23 + 14) + (5 + 16) = 65;$ $(14 + 6 + 3) + (25 + 17) = 65;$

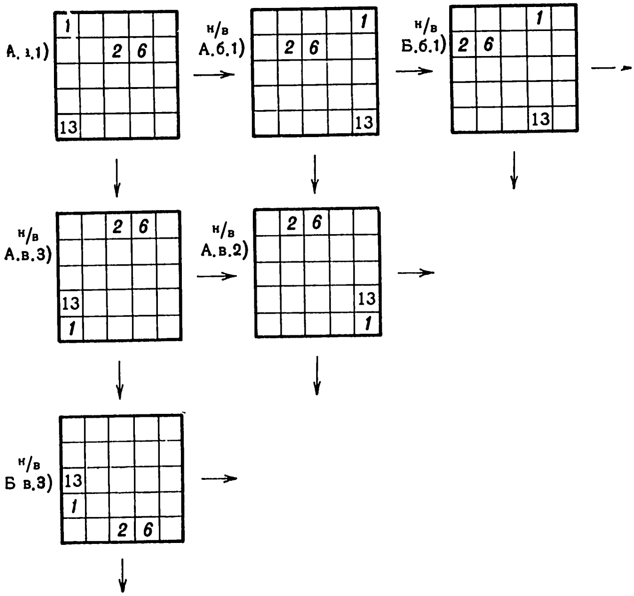
$(25 + 11 + 2 + 18) + 9 = 65;$ $(10 + 2 + 24 + 16) + 13 = 65.$

Все 8 разломанных диагоналей оказались «хорошими». *Но ведь это значит, что квадрат А. а.* 1) — *совершенный!* Его родные братья — квадраты А. а. 2), А. а. 3) и А. а. 4) — один за другим, по тем же причинам также оказываются совершенными квадратами. Из одного варианта А. а) в самом начале его расчета сразу получены 4 совершенных квадрата 5×5.

Теперь становится понятным, почему в варианте А. а) нельзя было размещать число 6 ни в одной из четырех клеток ряда γ. Этот ряд вместе с единицей является разломанной диагональю. В совершенном квадрате сумма чисел в ней должна равняться 65, а она равнялась бы 55, потому что вслед за числом 6 в этот ряд проникли бы числа 11, 16, 21. Пока еще не ясно, почему эти отвергнутые 4 варианта не могли бы быть основой не совершенных, а простых магических квадратов? Это надо будет выяснить при дальнейших расчетах.

Среди полученных четырех совершенных квадратов А.а) нет ни одного, обладающего полной центральной симметрией, но каждый может быть преобразован в такой квадрат. Для этого достаточно сместить контур квадрата так, чтобы число 13 оказалось в центральной клетке. Допустимость смещения контура совершенного магического квадрата в любом направлении на любое число клеток была выяснена еще при анализе совершенных квадратов 4×4. При таких смещениях контура совершенного квадрата 5×5 будут получены еще 24 совершенных квадрата 5×5. Следовательно, четыре квадрата А. а. 1),..., А. а. 4) являются представителями четырех групп по 25 вариантов в каждой, всего 100 совершенных квадратов 5×5.

Оставив варианты А), теперь можно, повторяя все предыдущие операции, использовать варианты Б), В), Г), Д), Е) и найти соответствующие им магические квадраты. Правда, не очень-то весело несколько раз полностью проделывать один и тот же путь. Нет ли иного способа? Может быть, не начинать расчеты вариантов от Б) до Е), а сначала выяснить, что представляют собой те совершенные магические квадраты, которые можно получить, смещая контур квадрата А. а. 1), Для этого нет необходимости полностью записывать эти 24 варианта. Смещая контур квадрата А. а. 1) каждый раз на одну клетку (сначала — четыре раза вправо, далее — один раз вниз и опять четыре раза вправо и т. д.), достаточно выяснить расположение всего трех чисел: 1, 2, 6.



Опираясь на них, легко заполнить числами все клетки квадрата, но по большей части это излишне. Достаточно сопоставить каждый случай с таблицей на стр. 84, чтобы по расположению единицы выяснить основной вариант (от А до Е) и то, как он расположен—так же, как в таблице, или повернут и поэтому является невариантом к примерам таблицы. Расположение числа 2 определяет подварианты а), б), в) и т. д. Наконец, расположение числа 6 позволяет найти третий знак в обозначении квадрата. При этом приходится помнить, что для размещения числа 6 каждый раз имеются только 4 свободные клетки. Так получается потому, что 5 клеток квадрата заняты числами 1, 2, 3, 4, 5, а 16 клеток недоступны для числа 6 из-за того, что расположены вдоль запретных рядов β (строка, столбец, диагональ, проходящие через клетку с единицей) и рядов γ (одна или две разломанные диагонали, проходящие через ту же клетку с единицей).

Оказывается, что среди 24 магических квадратов, полученных 24-кратным смещением контура квадрата А. а. 1), находятся 3 варианта из той же группы А), 8 вариантов из группы Б), по 4 варианта В), Г) и Д) и один вариант Е). Ни один из них не совпадает с другим и не является его невариантом. Среди этих 25 квадратов только один — Д. а. 1) — обладает полной центральной симметрией.

А.а,1)	А.б.1)[1]	Б.б 1)[1]	В.а.1)	Б.а.1)
А.в.3)[1]	А.в.2)[1]	Б.з 4)[1]	В.г.4)[1]	Б .е.4)[1]
Б.в.3)[1]	Б.д.2)[1]	Г б.3)[1]	Д.а.1)[1]	Г .а.4)[1]
В б.3)[1]	В в.2)[1]	Д.г.3)[1]	Е.а.4)[1]	Д.в.4)[1]
Б.г.3)[1]	Б.е .2)[1]	Г.г.3)[1]	Д.б.2)	Г.в.2)

[1] Квадрат повернут по отношению к примеру в таблице (на стр. 84) и поэтому является его невариантом.

После смещения контуров квадратов А. а. 2), А. а. 3) и А. а. 4) и составления для них сходных табличек, оказывается, что среди 4 × 25 = 100 вариантов нет ни одного совпадения. Это свидетельствует о том, что тот же результат был бы получен при последовательном использовании вариантов Б), В), Г), Д), Е) более длительным путем.

В каждой из четырех сводных табличек среди 25 совершенных магических квадратов содержится один квадрат, обладающий полной центральной симметрией. Преобразование несимметричного квадрата А. а. 1) дало симметричный квадрат Д. а. 1); квадрат А. а. 2) дал Г. в. 3); А. а. 3) — А. в. 4) и А. а. 4) — В. в. 3). Если симметричные квадраты записать рядом друг с другом, то в этой компактной записи можно увидеть все 100 вариантов.

1	23	20	12	9
15	7	4	21	18
24	16	13	10	2
8	5	22	19	***11***
17	14	***6***	3	25

А.в.4)

10	18	***1***	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	***6***	19	2	15
4	12	25	8	16

В.в.3)

19	8	22	***11***	5
12	***1***	20	9	23
10	24	13	2	16
3	17	***6***	25	14
21	15	4	18	7

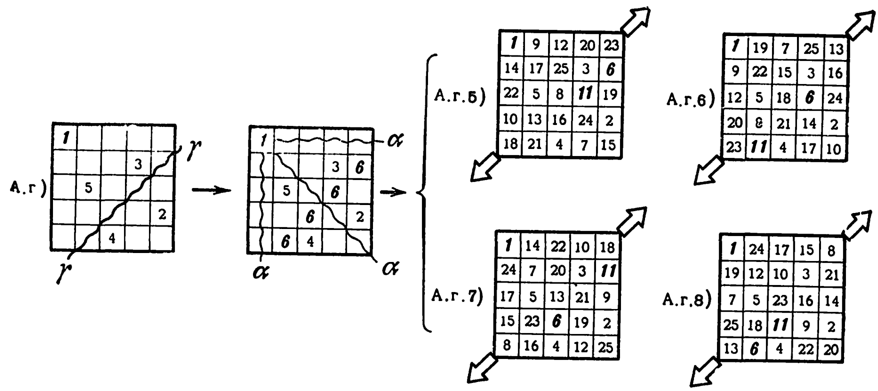
Г.в.3)

6	15	19	23	2
18	22	***1***	10	14
5	9	13	17	21
12	16	25	4	8
24	3	7	***11***	20

Д.а.1)

Быть может, эти сто совершенных квадратов, скрытые в четырех симметричных, представляют собой все совершенные квадраты 5 × 5, какие только возможны?

Пришло время вспомнить про ряд γ, оказавшийся запретным для числа 6 в варианте А. а). Последовательные поиски дают тот же результат и для вариантов А. б) и А. в), но в варианте А. г) оказывается допустимым записать число 6 в любой из клеток ряда γ и получить таким способом еще 4 магических квадрата:



Из них полной центральной симметрией обладает только один — А. г. 7). Все они не являются совершенными потому, что их разломанные диагонали 1 — γ содержат числа 1, 6, 11, 16, 21, а их сумма равна 55. Но разломанные диагонали, перпендикулярные главной диагонали, содержащей числа 3, 8, 13, 18, 23, оказываются удачными. Пример — квадрат А. г. 5): $23 + (14 + 5 + 16 + 7) = 65$; $(20 + 6) + (22 + 13 + 4) = 65$; $(12 + 3 + 19) + (10 + 21) = 65$; $(9 + 25 + 11 + 2) + 18 = 65$.

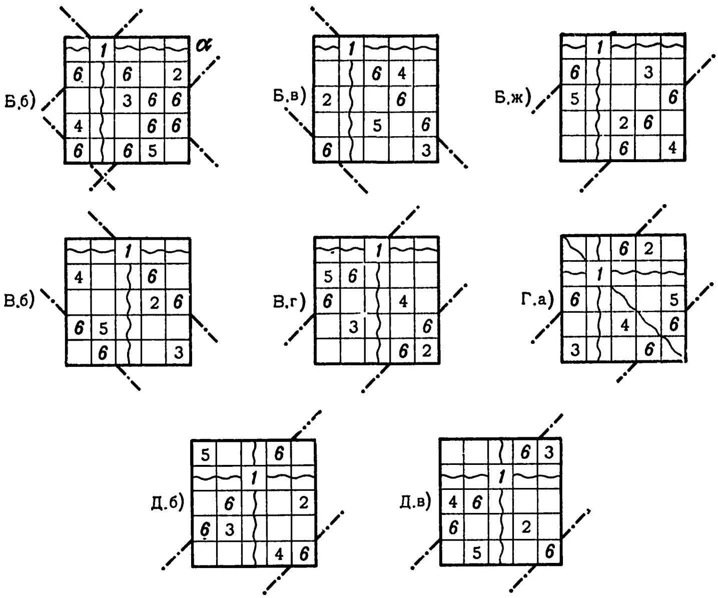
Эта особенность позволяет смещать контуры новых квадратов по направлению диагонали 3, 8, ..., 23, отмеченной остриями стрелок у углов квадрата, и получить еще по 4 других квадрата на каждый из записанных. При этом из несимметричных могут получиться симметричные и наоборот.

Продолжение работы в вариантах Б), В), Г), Д)[1] дает еще 8 вариантов, разломанные диагонали которых пригодны для размещения числа 6: Б. б), Б. в.), Б. ж), В. б), В. г), Г. а), Д. б), Д. в).

Вариант Б.б) отличается от прочих тем, что распадается на два подварианта. В одном из них разломанная диагональ, пригодная для размещения числа 6, параллельна восходящей главной диагонали; в другом — нисходящей. Поэтому вариант Б. б) дает 8

---

[1] Вариант Е) не дает магических квадратов.



простых магических квадратов, а все прочие — по 4. Каждый из этих $8 + 7 \cdot 4 = 36$ магических квадратов обладает главной диагональю, содержащей числа 3, 8,..., 23. Ее направление определяется положением числа 3. В каждом квадрате разломанные диагонали, перпендикулярные главной диагонали с числами 3, 8,..., 23, оказываются «хорошими» и позволяют смещением контура квадрата вдоль диагонали 3, 8, ..., 23 получить еще 4 магических квадрата. Общее число магических квадратов, вместе с вариантом А. г), как будто должно быть равным $(4 + 36) \cdot 5 = 200$. Однако и здесь возникает обычный вопрос: нет ли среди этих 200 квадратов точно повторяющих друг друга или невариантов? Вместо того, чтобы строить все 200 квадратов и затем сравнивать их, можно попытаться найти упрощенный способ для расчета только симметричных несовершенных квадратов, с четырьмя «хорошими» разломанными диагоналями. Общее число простых магических квадратов будет в 5 раз больше, чем число симметричных.

Пример квадрата А. г. 7) показывает, что при расстановке чисел ходом шахматного коня число 13 попадает в среднюю клетку только в том случае, если число 11 находится во внешнем ряду клеток, в какой-либо второй клетке от угла. (Нехитрый анализ подтверждает это правило для любого варианта, построенного ходом коня.) В то же время положение числа 11 определяется двойным шагом $1 \to 6 \to 11$. Поэтому достаточно в ранее назван-ных 8 вариантах от Б.б) до Д. в) 36 раз найти положение числа 11. Оказывается, что во второй клетке от угла число 11 находится только в 8 случаях из 36, включая уже известный квадрат А. а. 7). Эти 8 случаев действительно дают 8 магических квадратов, обладающих полной центральной симметрией.

1	14	22	10	18
24	7	20	3	11
17	5	13	21	9
15	23	6	19	2
8	16	4	12	25

А.г.7)

23	1	9	12	20
15	18	21	4	7
2	10	13	16	24
19	22	5	8	11
6	14	17	25	3

Б.в.8)

22	1	10	14	18
11	20	24	3	7
5	9	13	17	21
19	23	2	6	15
8	12	16	21	4

Б.ж.3)

23	12	1	20	9
4	18	7	21	15
10	24	13	2	16
11	5	19	8	22
17	6	25	14	3

В.б.4)

24	15	1	17	8
5	16	7	23	14
6	22	13	4	20
12	3	19	10	21
18	9	25	11	2

В.г.2)

19	15	6	2	23
10	1	22	18	14
21	17	13	9	5
12	8	4	25	16
3	24	20	11	7

Г а 1)

5	22	19	11	8
12	9	1	23	20
24	16	13	10	2
6	3	25	17	14
18	15	7	4	21

Д.б.3)

10	12	19	21	3
17	24	1	8	15
4	6	13	20	22
11	18	25	2	9
23	5	7	14	16

Д.в.2)

В каждом из них есть диагональ с числами 3, 8, 13, 18, 23. В каждом разломанные диагонали, перпендикулярные к диагонали 3, 8, ..., 23, содержат числа, дающие в сумме 65. Поэтому каждый из восьми симметричных квадратов дает 4 несимметричных, и общее число простых магических квадратов, построенных ходом коня, равно вовсе не 200, а только $8 \times 5 = 40$.

Так просто удалось разрешить вопрос о внешности и числе магических квадратов, получаемых с помощью хода коня. Их оказалось 140. В том числе 100 совершенных и 40 простых. Среди них 12 симметричных с полной центральной симметрией, а из них 4 совершенных и 8 простых.

Все 3 «классических» способа дали $22 + 22 + 140 = 184$ магических квадрата, в том числе 100 совершенных. Считая иначе, получены $6 + 6 + 4 + 8 = 24$ симметричных и 160 несимметричных магических квадратов. К этому надо добавить около ста тысяч магических квадратов, построенных способом рамки и подавляющих своей массой всех соседей. А соседи интереснее их, в особенности совершенные квадраты.

Кстати, теперь стало понятно, почему ни способ рамки, ни диагональные шаги не дали совершенных квадратов. Для их получения необходим, во-первых, ход конем между числами внутри каждой пятерки чисел; во-вторых, нужен ход конем от единицы, часто расположенной вне контура квадрата, к числу 6 и, в-третьих, такое расположение чисел 6 для каждых четырех вариантов одного типа, чтобы между ними также был ход конем.

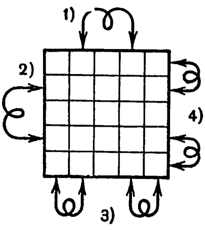
Закончился анализ трех самостоятельных «классических» способов составления магических квадратов 5×5. Без особого труда рассмотрены не некоторые, а решительно все возникающие варианты квадратов. Удалось их сосчитать. Не пора ли на этом закончить работу над квадратами 5×5? Конечно, это так, но...

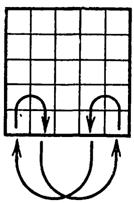
Почему симметричные магические квадраты 5×5, полученные «классическими» способами, не могут быть преобразованы какими-либо перестановками рядов? Оказались же возможными перестановки рядов в симметричных квадратах 4×4? Почему они невозможны здесь?

Почему обязательно следует ограничиваться тремя «классическими» способами и способом рамки? Почему не может быть других способов получения магических квадратов 5×5, даже помимо так называемых «вспомогательных» квадратов?

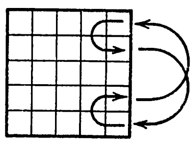
Шесть колец

Вот что выяснилось после всяких проб и поисков. Перестановка параллельных рядов в магических квадратах 5×5 с полной центральной симметрией, сохраняющая магичность и симметрию, может быть выполнена. Это главное. Она возможна двумя способами. Первый: обмен местами второго и четвертого столбца (или строки). (Обмен местами крайних рядов дает тот же результат, но повернутый, т. е. невариант.) Второй способ: обмен местами первого столбца (или строки) со вторым и одновременно четвертого с пятым. Эти два способа, примененные к столбцам и строкам, дают первые четыре варианта перестановок:





1) + 3)



2) + 4)

Кроме указанных перемещений, возможны более сложные. Вместе с первыми четырьмя получается 15 вариантов перемещений:

1);	2);	3);	4);
1) + 2);	1) + 3);	1) + 4);	
2) + 3);	2) + 4);	3) + 4);	
1) + 2) + 3);	1) + 2) + 4);	1) + 3) + 4);	
2) + 3) + 4);	1) + 2) + 3) + 4).		

Три из них, примененные к какому-либо «классическому» квадрату, приводят к уже известным магическим квадратам, ранее полученным также «классическими» способами. Это перемещения 1) + 3); 2) + 4); 1) + 2) + 3) + 4).

Два примера:

1	23	20	12	9
15	7	*4*	21	18
24	16	13	10	*2*
8	*5*	22	19	11
17	14	6	*3*	25

А.в.4) $[20\Sigma_0]$

→

1) + 3)

12	*1*	20	9	23
21	15	*4*	18	7
10	24	13	*2*	16
19	8	22	11	*5*
3	17	6	25	14

Б.б.8) $[12\Sigma_0]$

или

2) + 4)

8	*5*	22	19	11
1	23	20	12	9
24	16	13	10	*2*
17	14	6	*3*	25
15	7	*4*	21	18

Б.а 4) $[12\Sigma_0]$

или

1) + 2) + 3) + 4)

19	8	22	11	*5*
12	*1*	20	9	23
10	24	13	*2*	16
3	17	6	25	14
21	15	*4*	18	7

Г в 3) $[20\Sigma_0]$

15	*1*	17	8	24
23	14	*5*	16	7
6	22	13	*4*	20
19	10	21	12	*3*
2	18	9	25	11

Б.г.4) $[16\Sigma_0]$

→

1) + 3)

8	15	17	24	*1*
16	23	*5*	7	14
4	6	13	20	22
12	19	21	*3*	10
25	*2*	9	11	18

А.г.7) $[16\Sigma_0]$

или

2) + 4)

19	10	21	12	*3*
15	*1*	17	8	24
6	22	13	*4*	20
2	18	9	25	11
23	14	*5*	16	7

Г а.1) $[16\Sigma_0]$

или

1) + 2) + 3) + 4)

12	19	21	*3*	10
8	15	17	24	*1*
4	6	13	20	22
25	*2*	9	11	18
16	23	*5*	7	14

Б а 6) $[16\Sigma_0]$

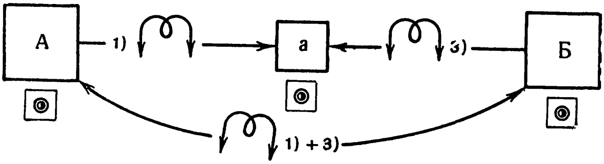
В первом примере совершенный квадрат А.в.4), содержащий 20 равных сумм, перестановкой типа 1) + 3) превращается в простой магический квадрат Б.б.8), в котором последовательные числа разделены не ходом коня, а диагональным шагом через клетку. В квадрате Б.б.8) нет «хороших» разломанных диагоналей, и поэтому он содержит только 12 равных сумм. Перестановкой типа 2) + 4) тот же исходный совершенный квадрат А.в.4) превращается в магический квадрат Б.а.4) (диагональный ход в соседнюю клетку, $12\Sigma_0$). Перестановкой 1) + 2) + 3) + 4) все тот же квадрат А.в.4) превращается в квадрат Г.в.3), тоже совершенный, имеющий поэтому $20\Sigma_0$.

Во втором примере преобразованиям подвергается магический квадрат Б.г.4) (диагональный ход в соседнюю клетку, четыре «хороших» разломанных диагонали, то есть $16\Sigma_0$). При преобразованиях типа 1) + 3) и типа 2) + 4) получаются магические квадраты А.г.7) и Г.а.1) (расстановка чисел ходом коня, $16\Sigma_0$). При преобразовании типа 1) + 2) + 3) + 4) получается магический квадрат Б.а.6) (диагональный ход через клетку, $16\Sigma_0$).

Действительно, преобразования 1) + 3); 2) + 4); 1) + 2) + + 3) + 4) не дают новых магических квадратов. Еще неизвестно, что дадут прочие 12 преобразований, но пока что выяснилось любопытное обстоятельство: оказывается, *магические квадраты,* *полученные любым из трех «классических» способов, могут быть превращены друг в друга одним из трех способов параллельной перестановки рядов*: 1) + 3); 2) + 4); 1) + 2) + 3) + 4). Это означает, что три «классических» способа имеют глубокую внутреннюю связь друг с другом.

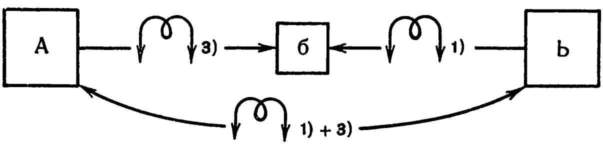
Казалось бы, что все очень просто: каждый магический квадрат 5×5, обладающий полной внутренней симметрией, при любом из еще не испробованных 12 преобразований даст 12 новых магических квадратов, если только это будут действительно магические квадраты. Но опять тот же вопрос: не может ли получиться так, что будут совпадения, что два магических квадрата, преобразуемых двумя различными способами, дадут один и тот же магический квадрат? Тогда число новых магических квадратов будет менее 12 на каждый исходный.

Схема такого случая очень проста:

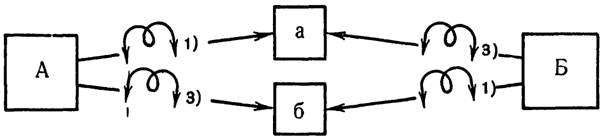


Какой-то «классический» симметричный квадрат *А* преобразуется в квадрат *а* той же структуры перемещением, например, типа 1). Можно предположить, что другой «классический» квадрат *Б* даст тот же квадрат *а*, если он будет преобразован по способу 3). Связь между квадратами *А* и *Б* в этом случае определялась бы двукратным перемещением 1) + 3). Другими словами, квадрат *Б* не может быть выбран произвольно. Годится только такой квадрат *Б*, который может быть получен из квадрата *А* перемещением 1) + 3), а это возможно.

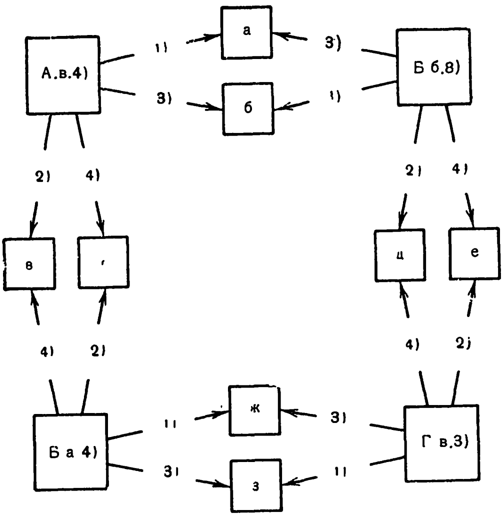
Но те же два «классических» квадрата *А* и *Б* могут быть связаны иначе, через какой-то новый квадрат *б*, если он получается из *А* перемещением 3), а из *Б* — перемещением 1).



С тем же успехом могли быть взяты иные два перемещения: 2) и 4); 1) и 2) + 3) + 4); 2) и 1) + 3) + 4); 3) и 1) + 2) + 4); 4) и 1) + 2) + 3); 1) + 2) и 3) + 4); 1) + 4) и 2) + 3). Две предшествующие схемы можно объединить в одну:



Можно было использовать и иные преобразования: 2) и 4) и т. д. Если попытаться построить на основе предыдущего численного примера более полную графическую схему, то получается любопытнейшее кольцо преобразований:



Помимо уже известных квадратов А.в.4), Б.б.8), Г.в.3) и Б.а.4), в этих преобразованиях участвуют какие-то новые квадраты *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*, *ж*, *з*. Прежде чем ими заняться, можно заметить, что в этом кольце преобразований в скрытой форме содержатся все возможные преобразования. Например, квадрат *а* получается из квадрата А.в.4) преобразованием 1), а из квадарта Б.б.8) преобразованием 3). Он же может быть получен из квадрата Б.а.4) преобразованием 2) + 4) + 1) или из квадрата Г.в.3) преобразованием 2) + 4) + 3). Так могут быть использованы все возможные многократные преобразования. Но что представляют эти новые квадраты? Проще всего их рассмотреть на каком-либо численном примере, взяв хотя бы готовые квадраты А.в.4), Б.б.8), Г.в.3) и Б.а.4). Из первого удобно получить квадраты *а*, *б*, *в*, *г*. Из второго — квадраты *д* и *е*. Остальные два — *ж* и *з* — из квадрата Г.в.3) или Б.а.4). Когда все 8 новых квадратов готовы и рассмотрены, то оказывается, что это простые магические квадраты. Ни один из них не имеет ни одной «хорошей» разломанной диагонали. Их внутренняя структура — та, что была

1	12	20	23	9
15	21	4	7	18
24	10	13	16	2
8	19	22	5	11
17	3	6	14	25

б)

23	1	20	9	12
7	15	4	18	21
16	24	13	2	10
5	8	22	11	19
14	17	6	25	3

в)

1	23	20	12	9
8	5	22	19	11
24	16	13	10	2
15	7	4	21	18
17	14	6	3	25

г)

15	7	4	21	18
1	23	20	12	9
24	16	13	10	2
17	14	6	3	25
8	5	22	19	11

12	1	20	9	23
19	8	22	11	5
10	24	13	2	16
21	15	4	18	7
3	17	6	25	14

е)

21	15	4	18	7
12	1	20	9	23
10	24	13	2	16
3	17	6	25	14
19	8	22	11	5

ж)

8	19	22	5	11
1	12	20	23	9
24	10	13	16	2
17	3	6	14	25
15	21	4	7	18

з)

5	8	22	11	19
23	1	20	9	12
16	24	13	2	10
14	17	6	25	3
7	15	4	18	21

предусмотрена до начала преобразований,— полная центральная симметрия. Самое интересное в них то, что последовательные числа в пределах 1—5, 6—10 и т. д. расставлены без какого-либо определенного порядка. Различны также между собой переходы от 5 к 6, от 10 к 11 и т. д. *Поэтому эти 8 новых квадратов не могут быть построены ни одним из «классических» способов.* В этом, по-видимому, причина того, что они до сих пор не были известны.

Но разве новых квадратов только восемь? Еще не использованы преобразования двух других «классических» совершенных квадратов и двух «классических» магических, несовершенных, с диагональным шагом (большим и малым), имеющих по $12\Sigma_0$. Из них можно составить второе такое же кольцо преобразований, в котором появятся еще 8 новых «неклассических» магических квадратов.

Не использованы еще связанные друг с другом преобразованиями «классические» квадраты, имеющие по $16\Sigma_0$, два, составленные ходом коня, и два — диагональным шагом разного размера — А.г.7), Г.а.1), Б.г.4), Б.а.6). Не использованы аналогичные три группы сходных квадратов. Все вместе они позволяют построить еще 4 кольца преобразований.

Всего получается 6 колец преобразований, связывающих между собой все 24 ранее полученные «классические» квадраты, обладающие полной центральной симметрией. Эти 6 колец содержат $6 \times 8 = 48$ новых «неклассических» магических квадратов той же структуры. Число симметричных магических квадратов поэтому увеличивается втрое: $24 + 48 = 72$, а общее число рассмотренных магических квадратов 5×5 увеличивается до $184 + +48 = 232$ (не считая 100 000 магических квадратов 5×5, полученных способом рамки).

Получился неожиданный результат: вместо того, чтобы доказать, что нет никаких новых магических квадратов 5×5, найдена целая группа. Очень интересна найденная связь между магическими квадратами, построенными тремя «классическими» способами.

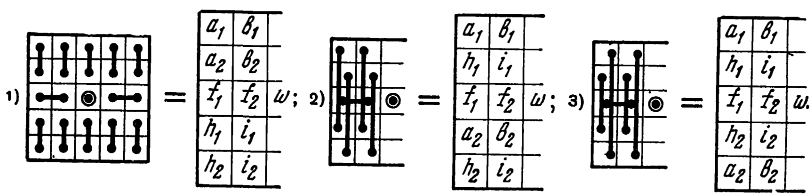
Остается решить второй вопрос о возможности или, вернее, о невозможности получить еще какие-либо магические квадраты «неклассическими» способами. Было бы странно рассчитывать на то, что найдутся новые магические квадраты. Это маловероятно. Это просто невероятно! Если бы дело обстояло иначе, было бы множество примеров магических квадратов 5×5, не подходящих ни под один «классический» способ.

Запасшись изрядной дозой спасительного пессимизма, можно начать последнее исследование квадратов 5×5.

Удивительные находки

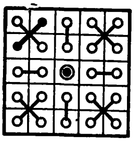
Давным-давно, если судить по затраченному труду, а не по прошедшему времени, когда в этой работе исследовались магические квадраты 4×4 различной внутренней структуры, еще тогда возникло желание выяснить, возможны ли магические квадраты 5×5 такой структуры, которая была бы похожа на самые простые структуры квадратов 4×4. Во-первых, на структуру, где все пары параллельны друг другу и стоят двумя шеренгами, как солдатики на столе, во-вторых, на структуру «4 малых креста».

Очень легко составить для квадрата 5×5 рисунок симметричной структуры с параллельными парами:



Также легко доказать, что такой магический квадрат невозможен. Если бы он был возможен, то сумма чисел в левом столбце квадрата должна была равняться постоянной квадрата: $a_1 + a_2 + f_1 + h_1 + h_2 = \Sigma_0 = 2{,}5\sigma$ или $\sigma + f_1 + \sigma = 2{,}5\sigma$. Отсюда следовало бы, что $f_1 = 0{,}5\sigma = \omega = 13$, а это невозможно. Не получается магического квадрата, если взять варианты 2) и 3) с иным расстоянием между числами пар.

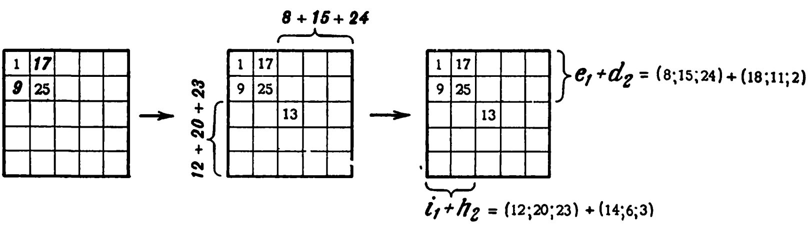
Без затруднений удается составить для второй пробы рисунок внутренней структуры, сходный со структурой квадратов 4×4 «4 малых креста». Соответственно структуре получается

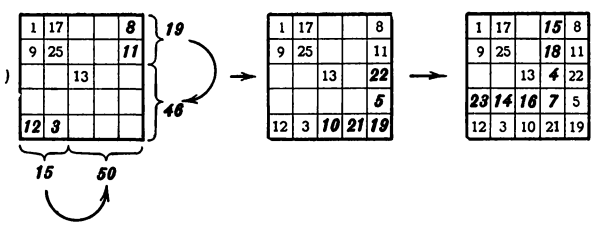


=

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
b_2	a_2	c_2	e_2	d_2
f_1	f_2	ω	g_1	g_2
h_1	i_1	k_1	l_1	m_1
i_2	h_2	k_2	m_2	l_2

алгебраическая запись. Ее анализ не дает возможности сразу выявить признаки того, что такой квадрат невозможен. С другой стороны, это еще не означает, что он возможен. Придется выполнить последовательный расчет квадрата этой структуры. Но для этого расчета нужны таблицы числовых групп и таблицы числовых комбинаций. Пока таблицы не составлялись. Чтобы оттянуть начало этой трудоемкой работы, для пробного расчета одного только квадрата взята готовая комбинация, ранее использованная в совершенном квадрате А.а.3): 1) $1+8+15+\underbrace{17}+24=65$; 2) $1+\underbrace{9}+12+20+23=65$. Можно сразу вписать в первые 4 клетки в верхнем левом углу две пары чисел: $a_1 = 1$; $a_2 = 25$; $b_1 = 17$; $b_2 = 9$, а в среднюю клетку — среднее число ряда $\omega = 13$.





1	17	**24**	15	8
9	25	**2**	18	11
20	**6**	13	4	22
23	14	16	7	5
12	3	10	21	19

!

Остающиеся в обеих группах 6 чисел займут свободные клетки на верхней строке и в левом столбце. Порядок их записи пока неизвестен. Поэтому приходится считаться с возможностью 6 вариантов расстановки на строке и стольких же в столбце. Но сразу возникают ограничения. Пусть $e_1 = 8$. Тогда $d_1 = 15$ или 24, а поэтому $d_2 = \sigma - 15 = 26 - 15 = 11$ или $d_2 = \sigma - 24 = 2$. Выбор произволен, например, $d_2 = 11$. Тогда возникает ограничение для чисел правого столбца: $g_2 + m_1 + l_2 = \Sigma_0 - (e_1 + d_2) = 65 - (8 + 11) = 46$. Это число — сумма трех слагаемых. Для их подбора пока свободны $25 - (4 + 6 + 6 + 1) = 8$ чисел ряда.

Подбор чисел нижней строки k_2; m_2; l_2 ограничивается двумя новыми требованиями: число l_2 одновременно входит в группу чисел правого столбца (g_2; m_1; l_2) и в группу чисел на нижней строке (k_2; m_2; l_2); числа m_1 и m_2 должны составлять пару ($m_1 + m_2 = \sigma$). Эти ограничения уменьшают число возможных вариантов до четырех.

Сначала заполняются клетки правого столбца и нижней строки (пока в одном варианте), затем можно записать числа, дополняющие их до пары, и, наконец, последние 4 числа помещаются в четыре последние свободные клетки. Теперь все клетки квадрата заполнены и можно разобраться в том, что получилось в итоге.

Проверка не составляет большого труда. Сначала по расположению пар выясняется, что получилась заданная внутренняя структура. Затем проверка сумм чисел в рядах показывает, что полученный квадрат — магический...

Как — магический?! Вот неожиданность!

Разве могут бесстрастные типографские литеры выразить все изумление такой находкой? Для этого понадобились бы, по меньшей мере, ноты. Да и ноты были бы пригодны разве только те, что прерывают (как говорят радиокомментаторы) «спокойное развитие мелодии неожиданным ударом литавр, поддержанным мощным аккордом всего оркестра». (Это относилось к симфонии Гайдна «Сюрприз».) Здесь, правда, нет оркестра и нет аккорда, но спокойное развитие, несомненно, было...

Вместо доказательства отсутствия магических квадратов 5×5, помимо давно известных, вдруг найден новый магический квадрат, имеющий заранее заданную новую структуру. К тому же, это еще только первый вариант. Остались незаконченными еще три варианта расчета. Они дают магические квадраты 2), 3) и 4).

У всех четырех, как признак родства, заметна любопытная особенность: примыкающие к верхнему левому углу 9-клеточные квадраты заполнены одинаковыми числами, расставленными в одном и том же порядке.

1)

1	17	24	15	8
9	25	2	18	11
20	6	13	4	22
23	14	16	7	5
12	3	10	21	19

2)

1	17	24	8	15
9	25	2	11	18
20	6	13	22	4
23	14	16	5	7
12	3	10	19	21

3)

1	17	24	15	8
9	25	2	18	11
20	6	13	4	22
12	3	10	21	19
23	14	16	7	5

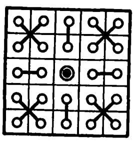
4)

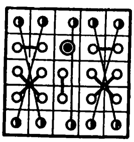
1	17	24	8	15
9	25	2	11	18
20	6	13	22	4
12	3	10	19	21
23	14	16	5	7

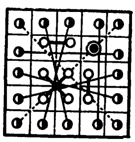
Проверка расстановки последовательных чисел показывает, что все 4 новых квадрата не могут быть построены ни одним из «классических» способов. Каково качество этих квадратов?

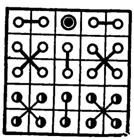
Квадрат 1) не имеет ни одной «хорошей» разломанной диагонали. Квадраты 2) и 3) имеют по 2 таких диагонали: 2) $15 + (9 + 6 + 16 + 19) = 65$ и $(24 + 11 + 4) + (23 + 3) = 65$; 3) $23 + (17 + 2 + 4 + 19) = 65$ и $(15 + 11) + (20 + 3 + 16) = 65$. В квадрате 4) их четыре: $1 + (14 + 10 + 22 + 18) = 65$ и $(9 + 17) + (16 + 19 + 4) = 65$; $(8 + 18) + (20 + 3 + 16) = 65$ и $(24 + 11 + 4) + (12 + 14) = 65$[1].

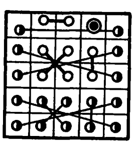
Это означает, что квадраты 2) и 3) имеют по 2 несимметричных варианта. Они получаются, если сместить контур квадрата настолько, что «хорошая» разломанная диагональ станет главной. Квадрат 4) дает 8 таких несимметричных вариантов. К 4 симметричным вариантам добавляются 12 несимметричных. Их структура определяется соответствующим смещением контура:

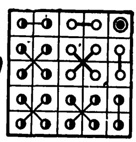
I.1.а)


α)


β)


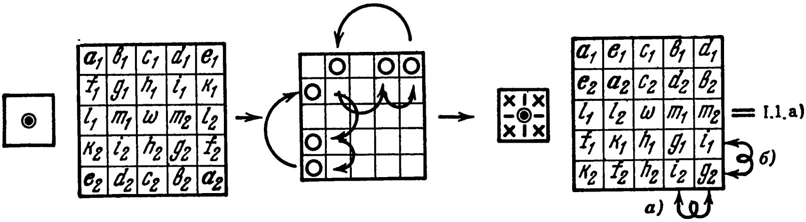
γ)


δ)


η)


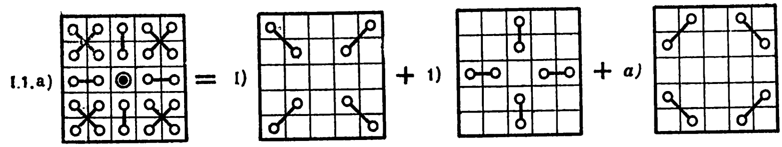
[1] При избранной внутренней структуре сумма чисел в малом основании трапецеидальной «хорошей» разломанной диагонали обязательно равна σ, а в большом основании — 1,5 σ.

Возникает новый вопрос. Числовая комбинация была заимствована из примера совершенного квадрата 5×5. Нет ли какой-нибудь связи между магическими квадратами, обладающими полной центральной симметрией, и вновь найденными квадратами? Оказывается, новая структура может быть получена из имеющей полную центральную симметрию перемещением трех столбцов и трех строк. Особенность этого перемещения в том, что оно несимметрично.

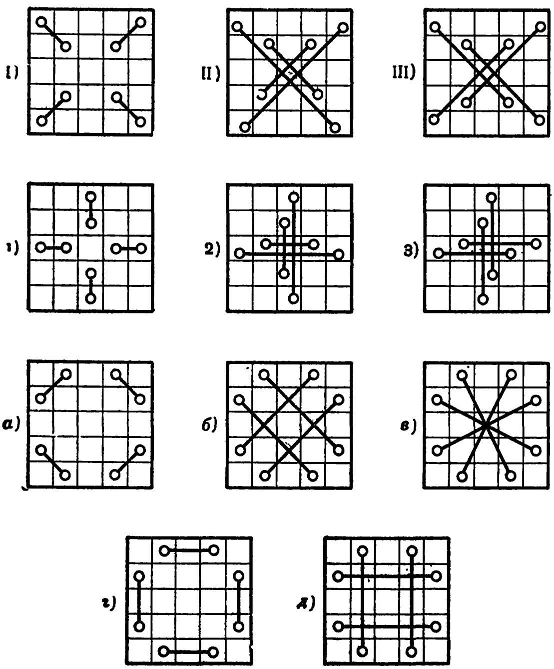


Такой путь получения нового квадрата значительно быстрее и проще непосредственного расчета, но разве можно было ожидать, что задача окажется поддающейся решению.

Варианты 2), 3), 4)нового квадрата можно получить перемещением рядов по способам а), б), а) + б). Шестикратное перемещение было выполнено так, что числа a_1; c_1; l_1 и ω остались на месте. Можно сказать иначе: перемещение опиралось на угол с числом a_1 и поэтому на месте оставались числа в вершинах внутреннего квадрата 3×3, опирающегося на этот угол. Но такое же перемещение можно выполнить, опираясь на другие три угла с числами e_1; a_2 и e_2. При этом, кроме числа ω, на месте останутся числа c_1 и l_2; c_2 и l_2 ; l_1 и c_2. Полученные таким способом три новых магических квадрата все той же структуры можно подвергнуть перемещениям а), б), а) + б) и получить еще 9 новых квадратов. Оказывается, что преобразование только одного магического квадрата 5×5, обладающего полной центральной симметрией, порождает 16 новых магических квадратов, которым пора дать название или обозначение. Вместо какого-либо длинного названия лучше дать краткое обозначение: I.1.a). Такое обозначение закрепляет его первенство среди других новых магических квадратов, которые надо искать, хотя вовсе неизвестно, найдутся ли они. Конечно, сейчас не может быть речи о случайно принятых исходных данных. В поисках новых квадратов 5×5 необходима какая-то система. Пожалуй, удобнее всего начать поиски с подбора возможных простых и симметричных внутренних структур. Прежде всего, надо еще раз взглянуть на внутреннюю структуру квадрата I.1.a). Все 12 пар, содержащихся в ней, распадаются на 3 группы. В первой группе пары расположены по диагоналям квад-



рата. Во второй — по средним линиям, параллельным сторонам квадрата. В третьей — пары соединяют оставшиеся числа. Однако, не усложняя внутренней структуры, в каждой группе пары можно расположить иначе. В первой и второй группе возможны по три варианта размещения пар, а в третьей группе — пять вариантов.



Подобно тому, как внутренняя структура квадрата I.1.а) получается набором трех элементов структуры I) + 1) + а), можно из $3 + 3 + 5 = 11$ элементов получить $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$ рисунков простых и симметричных структур 5×5. Каждый рисунок должен быть рассмотрен; по каждому придется дать ответ, может ли он служить основой для магического квадрата. Возможен ответ «да», в иных случаях возможен ответ «нет».

Для того чтобы было удобнее сопоставлять друг с другом все 45 вариантов, чтобы видеть уже рассмотренные и помнить про те, которые еще требуют работы, любителю табличек нужна еще одна сводная табличка. Ее клетки постепенно заполнятся; все возможные случаи применения *симметричных* структур будут видны сразу.

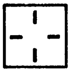
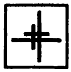
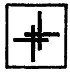
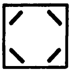
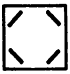
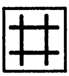
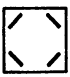
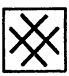
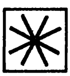
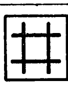
Пользуясь тем, что здесь прошедшее и будущее одинаково подвластны, удобнее заглянуть в будущее, в ту сводную таблицу, которая еще только должна разрабатываться и постепенно заполняться. Лишь после этого можно постепенно разбираться в том, как все происходило *(см. стр. 104)*.

Некоторые клетки были заполнены сразу и одинаковыми ответами — «да». Во-первых, было известно, что существуют магические квадраты типа I.1.а). Затем, если приглядеться к внутренней структуре типа II.2.в), то в ней нетрудно узнать полную центральную симметрию, которой обладают 24 магических квадрата, полученных «классическими» способами, и 48 новых магических квадратов, полученных перестановками рядов типа 1) + 3) и 2) + 4). Далее, третья клетка таблицы, предназначенная для квадратов типа II.2.д), должна вместить все 100 тысяч квадратов, построенных способом рамки, ибо их структура точно соответствует типу II.2.д). Но это всего лишь три из 45 клеток таблицы.

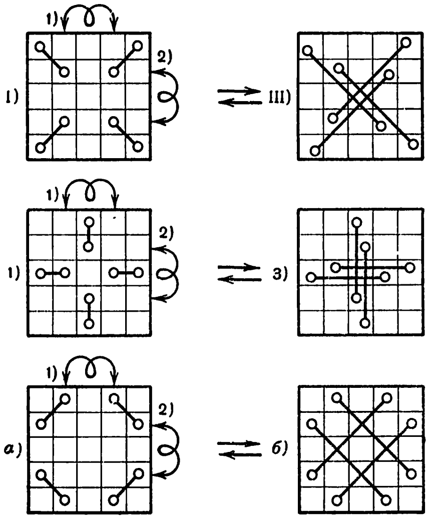
Из сопоставления некоторых структур неожиданно выяснилась возможность сократить работу почти в 2 раза. Оказывается, симметричная перестановка параллельных рядов пригодна не только для преобразования одного «классического» квадрата в другой, также «классический» квадрат. Такие же перестановки позволяют преобразовать одни из 45 новых структур в другие из той же таблицы, сохраняя симметрию и магичность.

Если иметь две новые структуры, связанные таким преобразованием, то достаточно выяснить только для одной из них, дает ли она магические квадраты или нет. Вторая структура даст тот же результат.

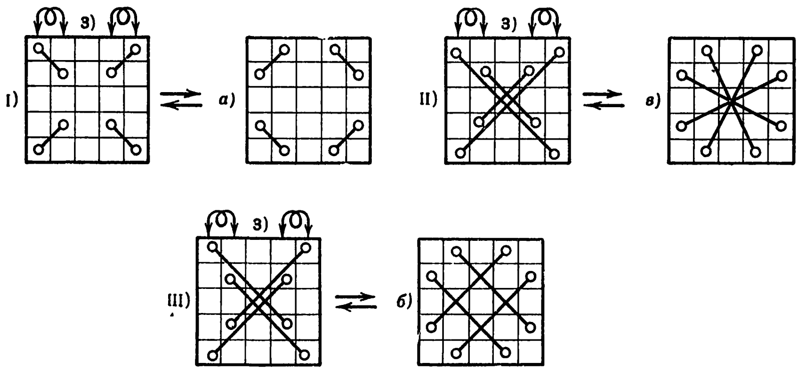
Очень удобно, что преобразования перестановкой параллельных рядов можно проследить отдельно для каждого из трех элементов структуры. Преобразование типа 1) или 2) элементов I); III); 1); 3); а); б) приводит к несимметричной структуре, которая здесь не рассматривается. Те же преобразования элементов II); 2); в) не изменяют их структуры, хотя числа в них при этом обмениваются местами, как партнеры в танце. Наиболее важным является двойное преобразование 1) + 2), которое превращает элемент I) в элемент III), элемент 1) в 3), эле

Симметричные структуры		1) 	2) 	3) 
	а) 	да	нет	нет
	б) 	нет	?	нет
I) 	в) 	нет	да	да
	г) 	нет	да	да
	д) 	нет	да	да
	а) 	нет	да	да
	б) 	да	да	нет
II) 	в) 	нет	да	нет
	г) 	нет	да	нет
	д) 	нет	да	нет
	а) 	нет	?	нет
	б) 	нет	нет	да
III) 	в) 	да	да	нет
	г) 	да	да	нет
	д) 	да	дз	нет

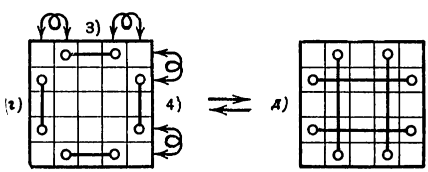
мент а) в б) и обратно III в I) и так далее.



Преобразование типа 3) или типа 4) превращает элемент I) в элемент а), элемент II) в в) и элемент III в б) и обратно.



Наконец, двойное преобразование 3) $+$ 4) превращает элемент г) в д) и обратно.



Эти нехитрые соображения позволяют составить удобную для дальнейшей работы таблицу преобразований симметричных структур магических квадратов 5 × 5, возникающих при перестановках рядов.

Способы перестановок / Исходные структуры	1)+2)	3) или 4)	3)+4)
	Полученные структуры		
I.1.а)	III.3.б)	исходная	исходная
I.1.б)	III.3.а)	III.1.а)	»
I.1.в)	III.3.в)	II.1.а)	»
I.1.г)	III.3.г)	несиммет.	I.1.д)
I.1.д)	III.3.д)	»	I.1.г)
I.2.а)	III.2.б)	исходная	исходная
I.2.б)	III.2.а)	III.2.а)	»
I.2.в)	III.2.в)	II.2.а)	»
I.2.г)	III.2.г)	несиммет.	I.2.д)
I.2.д)	III.2.д)	»	I.2.г)
I.3.а)	III.1.б)	исходная	исходная
I.3.б)	III.1.а)	III.3.а)	»
I.3.в)	III.1.в)	II.3.а)	»
I.3.г)	III.1.г)	несиммет.	I.3.д)
I.3.д)	III.1.д)	»	I.3.г)
II.1.а)	II.3.б)	I.1.в)	исходная
II.1.б)	II.3.а)	III.1.в)	»
II.1.в)	II.3.в)	исходная	»
II.1.г)	II.3.г)	несиммет.	II.1.д)
II.1.д)	II.3.д)	»	II.1.г)
II.2.а)	II.2.б)	I.2.в)	исходная
II.2.б)	II.2.а)	III.2.в)	»
II.2.в)[1]	исходная	исходная	»
II.2.г)	»	несиммет.	II.2.д)
II.2.д)[2]	»	»	II.2.г)

[1] Это квадраты с полной центральной симметрией.
[2] Квадраты, построенные способом рамки.

Судя по этой табличке, можно ограничиться исследованием только 25 структур, записанных в левой колонке. Даже не 25, а 22, потому что 3 уже исследованы. Первая — I.1.а) — это найденные новые квадраты. Вторая — II.2.в) — это квадраты с полной центральной симметрией, полученные тремя «классическими» способами и их «неклассические» спутники. Третья — II.2.д) — квадраты, полученные способом рамки.

Структуру II.2.в) имеют 72 магических квадрата. Число магических квадратов, обладающих структурой I.1.а), в 16 раз больше и равно 16 × 72 = 1152. Структура III.3.б), составляющая пару со структурой I.1.а)[1], обязательно даст магические квадраты. Их число будет таким же — 1152. Число квадратов, построенных способом рамки (II.2.д), около 100 тысяч. Структура II.2.г) составляет пару с II.2.д), поэтому число магических квадратов типа II.2.г) также будет равным примерно 100 тысячам.

Вот еще неожиданная новость! Оказывается, общее число магических квадратов 5 × 5, только двух типов II.2.г) и II.2.д) примерно равно 200 тысячам.

Из 25 структур, записанных в левой колонке таблички, после исключения структур I.1.а), II.2.в), II.2.д) и II.2.г), связи которых выяснились, для дальнейшей работы остается еще 21 структура. Из них легко определяются связи еще 8 структур. Первая — I.1.д) — связана перестановкой 3) + 4) с I.1.г). Вторая — I.2.д) — таким же способом связана с I.2.г). Третья — I.3.б) — связана перестановкой 3) с III.3.а), а эта составляет пару с I.1.б). Четвертая — I.3.д) — перестановкой 3) + 4) связана с I.3.г). Пятая — II.I.а) — перестановкой 3) связана с I.1.в). Шестая — II.1.б) — той же перестановкой связана с III.1.в) и далее с I.3.в). Седьмая — II.1.д) — преобразованием 3) + 4) связана с II.I.г). Восьмая — II.2.б) — составляет пару с II.2.а).

Теперь для дальнейшего анализа остаются только 13 структур из 45. Табличка преобразований оправдала себя. Предстоящие расчеты сократились втрое.

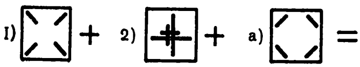
Анализ каждой из этих 13 структур, выяснение — может ли она служить основой для построения магических квадратов,— еще впереди.Но, второй раз заглянув в будущее, можно утверждать, что положительный ответ будет получен в 4 случаях, отрицательный — в 7 случаях и одна пара структур останется неисследованной.

Удобная форма доказательства непригодности структуры для построения магического квадрата была найдена, когда исследовалась структура с параллельными парами (*стр. 97 и 98*).

Способ состоял в суммировании чисел нескольких рядов в предположении, что каждый дает Σ_0. Выражение, полученное в конце подсчета, после упрощения давало равенство одного числа ряда другому, а это невозможно. Примером удачного использования этого способа является анализ структуры 1.2.а):

---

[1] В смысле того, что обе структуры преобразуются друг в друга перестановкой рядов.



$=$ I.2.а)

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
b_2	a_2	i_1	e_2	d_2
f_1	k_1	w	k_2	f_2
g_1	h_2	i_2	l_2	m_1
h_1	g_2	c_2	m_2	l_1

Достаточно сложить числа двух верхних строк и непригодность структуры выясняется:

$$
\begin{array}{l}
\quad a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 = \Sigma_0 = 2{,}5\sigma \\
+ \\
\quad \underline{b_2 + a_2 + i_1 + e_2 + d_2 = \Sigma_0 = 2{,}5\sigma} \\
\sigma + \sigma + c_1 + i_1 + \sigma + \sigma = 5\sigma; \quad c_1 + i_1 = \sigma; \quad c_1 = \sigma - i_1 = i_2,
\end{array}
$$

но невозможно, чтобы $c_1 = i_2$.

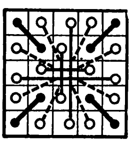
Одновременно с непригодностью структуры I.2.а) выяснилась непригодность структуры III.2.б), связанной с ней в пару перестановкой 1) + 2).

Точно таким же способом выясняется непригодность структур I.1.г) и I.3.а) Одновременно выясняется непригодность структур I.1.д.), III.3.г), III.3.д), III.1.б).

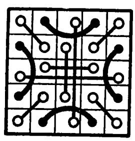
Непригодность структур II.1.в) и II.1.г) доказывается сложением чисел второй и четвертой строк (или первой и пятой). Одновременно раскрывается непригодность структур II.1.д), II.3.в), II.3.г), II.3.д).

При проверке структур I.1.б) и I.1.в) понадобилось сложение чисел четырех рядов: верхней и второй строк, левого и второго столбца. Одновременно выяснилась непригодность структур III.3.а), III.3.в), II.1.а.), II.3.б), III.1.а) и связанной с ней в пару структуры I.3.б).

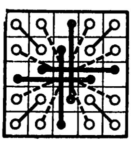
Эти операции довольно скучны и требуют внимания, но зато после них остаются для расчета только 5 структур. Четыре дадут магические квадраты и одна останется нерассмотренной. Удач-

I.2.в)  $=$

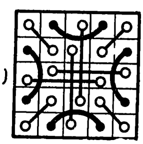
a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
f_1	a_2	k_1	e_2	h_2
g_1	l_1	w	l_2	g_2
h_1	i_2	k_2	m_1	f_2
i_1	d_2	c_2	b_2	m_2

I.2.г)  $=$

a_1	b_1	c_1	b_2	d_1
e_1	a_2	i_1	d_2	m_1
f_1	h_1	w	h_2	f_2
e_2	g_2	i_2	l_1	m_2
g_1	k_1	c_2	k_2	l_2

I.3.в)  $=$

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
f_1	a_2	k_1	e_2	h_2
g_1	l_1	w	g_2	l_2
h_1	i_2	c_2	m_1	f_2
i_1	d_2	k_2	b_2	m_2

I.3.г)  $=$

a_1	b_1	c_1	b_2	d_1
e_1	a_2	i_1	d_2	m_1
f_1	h_1	w	f_2	h_2
e_2	g_2	c_2	l_1	m_2
g_1	k_1	i_2	k_2	l_2

ные 4 структуры — это I.2.в), I.2.г), I.3.в) и I.3.г). Вот как они выглядят и как выглядят такие магические квадраты в алгебраической форме. Такая запись, конечно, не является доказательством возможности получить на их основе магические квадраты. Действительная возможность определяется пробными расчетами. Эти расчеты подобны ранее выполненному для нового квадрата I.1.а). Разница заключается в том, что числовая комбинация квадрата I.1.а) содержала одну пару, связывающую числовые группы верхней строки и левого столбца, а числовые группы этих четырех новых квадратов не связаны парами. Поэтому до начала их расчета оказывается необходимым составить новый перечень числовых комбинаций, в которых группы не связаны парами. Его составление требует только времени.

Расчеты всех четырех квадратов удаются и одновременно становится ясной возможность получить магические квадраты, имеющие структуры III.2.в), III.2.г), I.2.д), III.2.д), III.1.в), III.1.г), I.3.д), III.1.д), II.1.б), II.3.а), II.2.а), II.2.б). К этому добавляются магические квадраты, полученные на основе структуры III.3.б), составляющей пару со структурой I.1.а).

Удобно к численным примерам этих новых магических квадратов добавить численные примеры ранее найденных магических квадратов 5×5 и получить сводную таблицу всех *симметричных* магических квадратов 5×5 (*см. стр. 110, 111*).

Таблица проста и не нуждается в подробных объяснениях. Оказалось, что она содержит магические квадраты 21 типа. Из них давно известны обладающие полной центральной симметрией (II.2.в), построенные «классическими» способами, и квадраты типа II.2.д), получающиеся способом рамки. В число квадратов типа II.2.в) входят сопутствующие «классическим» квадратам промежуточные квадраты той же структуры, находящиеся в шести кольцах. В таблице не показаны связи квадрата Г.а.1) типа II.2.в) с соседними «классическими» квадратами потому, что его соседи по таблице входят в одно из шести колец, а он входит в другое кольцо, вместе с начерченным под ним «неклассическим» квадратом.

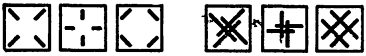
20 квадратов связаны в 10 пар [1]. В четырех случаях две пары структур связаны между собой перестановкой 3) или 3) + 4). Поэтому все эти магические квадраты можно разделить на семь больших групп или семей, возглавляемых квадратами I.1.а), I.2.в), I.2.г), I.3.в), I.3.г), II.2.д) и совершенным квадратом II.2.в).

Интересно проверить качество квадратов, записанных в таблице.

На первом месте по качеству стоит, конечно, совершенный квадрат А.в.4), обладающий внутренней структурой типа II.2.в)

---

[1] В том же смысле возможности взаимного преобразования перестановкой параллельных рядов.



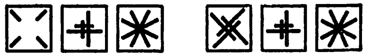
1	9	20	23	12
17	25	6	14	3
24	2	13	16	10
15	18	4	7	21
8	11	22	5	19

I.1.а)

1) + 2)

1	23	20	9	12
15	7	4	18	21
24	16	13	2	10
17	14	6	25	3
8	5	22	11	19

III.3.б)



17	1	19	18	10
20	9	5	16	15
14	24	13	2	12
11	23	21	4	6
3	8	7	25	22

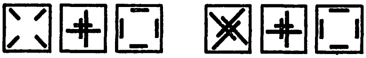
I.2.в)

1) + 2)

17	18	19	1	10
11	4	21	23	6
14	2	13	24	12
20	16	5	9	15
3	25	7	8	22

III.2.в)

3)



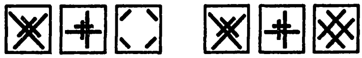
3	1	12	25	24
18	23	16	2	6
15	17	13	9	11
8	5	10	22	20
21	19	14	7	4

I.2.г)

1) + 2)

3	25	12	1	24
8	22	10	5	20
15	9	13	17	11
18	2	16	23	6
21	7	14	19	4

III.2.г)



1	17	19	10	18
9	20	5	15	16
24	14	13	12	2
23	11	21	6	4
8	3	7	22	25

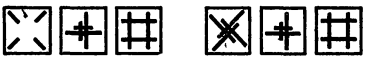
II.2.а)

1) + 2)

1	10	19	17	18
23	6	21	11	4
24	12	13	14	2
9	15	5	20	16
8	22	7	3	25

II.2.б)

3) + 4)



23	18	16	6	2
1	3	12	24	25
17	15	13	11	9
19	21	14	4	7
5	8	10	20	22

I.2.д)

1) + 2)

23	6	16	18	2
19	4	14	21	7
17	11	13	15	9
1	24	12	3	25
5	20	10	8	22

III.2.д)

1	24	6	23	11
14	25	4	15	7
10	8	13	16	18
19	5	20	9	12
21	3	22	2	17

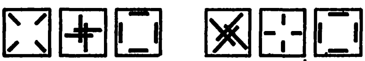
I.3.в)

1) + 2)

1	23	6	24	11
19	9	20	5	12
10	16	13	8	18
14	15	4	25	7
21	2	22	3	17

III.1.в)

3)



2	1	14	25	23
6	24	10	3	22
19	15	13	7	11
20	8	12	21	4
18	17	16	9	5

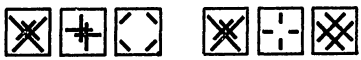
I.3.г)

1) + 2)

2	25	14	1	23
20	21	12	8	4
19	7	13	15	11
6	3	10	24	22
18	9	16	17	5

III.1.г)

3) + 4)



24	1	6	11	23
25	14	4	7	15
8	10	13	18	16
5	19	20	12	9
3	21	22	17	2

II.3.а)

3) + 4)

24	11	6	1	23
5	12	20	19	9
8	18	13	10	16
25	7	4	14	15
3	17	22	21	2

II.1.б)

(Продолжение табл. см. стр. 111)

3) + 4)

24	6	10	22	3
1	2	14	23	25
15	19	13	11	7
17	18	16	5	9
8	20	12	4	21

I.3.д)

1) + 2)

24	22	10	6	3
17	5	16	18	9
15	11	13	19	7
1	23	14	2	25
8	4	12	20	21

III.1.д)

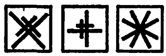
1	17	20	23	4
11	5	24	10	15
12	18	13	8	14
19	16	2	21	7
22	9	6	3	25

II.2.д)

3) + 4)

5	11	24	15	10
17	1	20	4	23
18	12	13	14	8
9	22	6	25	3
16	19	2	7	21

II.2.г)



1	23	20	12	9
15	7	4	21	18
24	16	13	10	2
8	5	22	19	11
17	14	6	3	25

А.в.4)

(совершенный)

2) + 4)

8	5	22	19	11
1	23	20	12	9
24	16	13	10	2
17	14	6	3	25
15	7	4	21	18

Б.а.4)

1) + 3)

12	1	20	9	23
21	15	4	18	7
10	24	13	2	16
19	8	22	11	5
3	17	6	25	14

Б.б.в)

19	10	21	12	3
15	1	17	8	24
6	22	13	4	20
2	18	9	25	11
23	14	5	16	7

Г.а.1)

1)

1)

„класические" квадраты
типа II.2.в)

1	12	20	23	9
15	21	4	7	18
24	10	13	16	2
8	19	22	5	11
17	3	6	14	25

„некласические" квадраты
типа II.2.в)

19	12	21	10	3
15	8	17	1	24
6	4	13	22	20
2	25	9	18	11
23	16	5	14	7

и содержащий $20\Sigma_0$; на втором — магический квадрат Г.а.1) той же группы ($16\Sigma_0$); по две «хорошие» разломанные диагонали имеют I.1.а), III.3.б), I.3.г), III.1.д) ($14\Sigma_0$); по одной «хорошей» разломанной диагонали имеют I.2.г), III.2.д) ($13\Sigma_0$); остальные 18 квадратов, то есть большая часть, имеют только свои обязательные $12\Sigma_0$.

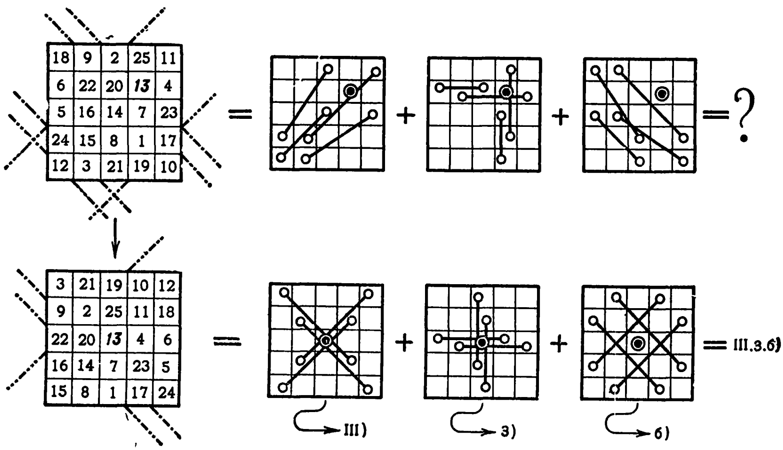
Среди 880 магических квадратов 4×4 864 квадрата обладали симметричной внутренней структурой 10 типов и только у 16 квадратов была несимметричная структура типа $\langle 11\rangle$ и типа $\langle 12\rangle$.

Среди магических квадратов 5×5, построенных «классическими» способами, были найдены многие несимметричные формы, но все они получались смещением контура симметричных магических квадратов. Среди 100 совершенных квадратов только

4 были симметричными и 96 — несимметричными. Среди 40 простых магических квадратов, построенных ходом коня, 32 несимметричных. Магические квадраты, построенные диагональным шагом в соседнюю клетку и через клетку, содержали по 6 симметричных и по 16 несимметричных. Всего среди 184 «классических» квадратов оказалось $96 + 32 + 16 + 16 = 160$ несимметричных.

Среди найденных и записанных в сводной таблице новых магических симметричных квадратов, принадлежащих к 19 типам, только 6 обладают одной-двумя «хорошими» разломанными диагоналями и могут, если смещать их контуры, дать несимметричные формы.

По-видимому, несимметричных магических квадратов 5×5 не так уж много. Трудно найти их примеры в книгах о магических квадратах. Один такой пример был найден в книге Риолло, изданной в 1907 г. Пример интересный:



В этом квадрате (а) содержатся 3 «хорошие» разломанные диагонали: $(5 + 22 + 2) + (19 + 17) = 65$; $(2 + 13 + 23) + (24 + 3) = 65$; $(9 + 20 + 7 + 17) + 12 = 65$.

Можно сместить контур по восходящей диагонали так, чтобы число 13 оказалось в средней клетке. При этом соответствующим образом преобразуются 3 элемента структуры. Оказывается, что преобразованный квадрат Риолло принадлежит к симметричным квадратам типа III.3.б), ранее синтезированным логическим путем, и родственным квадратам I.1.а).

Пример Риолло еще полезен тем, что он внес поправку в представление о качестве квадратов типа III. 3.б). Квадрат Риолло содержит три «хорошие» разломанные диагонали, тогда как у квадрата III. 3. б), записанного в таблице, их было только две.

Отсюда следует вывод, что число и расположение разломанных диагоналей (т. е. качество квадратов и число несимметричных вариантов) могут отличаться от примеров таблицы. Две «хорошие» разломанные диагонали в одном направлении и одна — в другом, в примере Риолло, позволяют получить $2 + 1 + 2 \cdot 1 = 5$ несимметричных вариантов, тогда как пример III.3.б) в таблице давал только два. Все сказанное относится и к квадратам типа I.1.а).

Только мельком упоминались две таинственные структуры — I.2.б) и III.2.а), связанные преобразованием типа 1) + 2). Неизвестно, могут ли они дать магические квадраты [1]. Ни один из способов, удачно использованных во всех прочих примерах, не оказался пригодным для анализа этих двух квадратов. Поэтому пока приходится ограничиться только алгебраической записью:

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
f_1	a_2	i_1	e_2	l_1
g_1	k_1	w	k_2	g_2
d_2	h_2	i_2	m_1	b_2
h_1	l_2	c_2	f_2	m_2

I.2.б)

1) + 2)

a_1	d_1	c_1	b_1	e_1
d_2	m_1	i_2	h_2	b_2
g_1	k_2	w	k_1	g_2
f_1	e_2	i_1	a_2	l_1
h_1	f_2	c_2	l_2	m_2

III.2.а)

Последний вопрос: сколько же всех магических квадратов 5×5? Пока что достоверно выяснилось число магических квадратов, построенных «классическими» способами (184), число их симметричных «неклассических» спутников, входящих в 6 колец (48), число квадратов, построенных способом рамки типа II.2.д), и родственных им квадратов II.2.г) (примерно по 100 тысяч). Среди других магических квадратов 5×5 выяснилось точное число квадратов I.1.а) и III.3.б): симметричных вариантов — по 1152 и несимметричных — по 2304. Эти данные удобнее было бы округлить до 1150 и 2300. Общее количество квадратов в этой двойной группе равно 6900 — около 7 тысяч. Число остальных новых магических квадратов 16 типов — от I.2.в) до III.1.д) — можно примерно оценить равным 23 тысячам. Это число получается с помощью оценок количества числовых групп, по 5 чисел в каждой, числовых комбинаций, в которых группы связаны од-

---

[1] В самый последний момент автору удалось закончить расчет, определивший, что магические квадраты 5×5, имеющие структуру типа I.2.б) и III. 2. а), невозможны. Побочным результатом этой работы явилась находка группы магических квадратов 5×5, имеющих несимметричную внутреннюю структуру.

ной парой, двумя парами и без связи парами (сюда же входят магические квадраты 5×5, которые могут быть получены непосредственным расчетом, а также те, которые могут быть получены смещением контура, и т. д.).

Число всех магических квадратов 5×5 оказывается равным:

1) «классических» и их спутников — точно 232;

2) новых квадратов от I.1.а) и до III.1.д) — около $7000 + 23\,000 = 30\,000$;

3) квадратов II.2.д), построенных способом рамки, и родственных им квадратов II.2.г) — около 200 тысяч.

Общее число магических квадратов 5×5 приближается к четверти миллиона. Число магических квадратов 5×5 оказалось таким большим, что нет желания искать общее число магических квадратов 6×6, 7×7, 8×8 и еще большего размера.

Их очень много.

ГЛАВА 4

МАЖОРНЫЙ ФИНАЛ

Дань традиции

Что представляют собой магические квадраты, большие, чем 5×5? Большинство из них — это квадраты, полученные способом рамки. Таких квадратов — миллионы и все одной и той же структуры. У всех в середине магический квадрат, с основанием на две клетки меньше, чем у полного. У всех мало или вовсе нет «хороших» разломанных диагоналей. У всех не видно каких-либо новых особенностей или, хотя бы, не новых, но по-новому интересных.

Среди миллионов магических квадратов, построенных способом рамки, рассеяно относительно небольшое количество магических квадратов, построенных другими способами. Их меньше и по одному этому они более интересны. Но небольшое количество — это тоже тысячи, десятки тысяч или еще больше. Всех все равно не пересмотришь. Хорошо, если составить хотя бы по одному примеру каждого типа.

Сначала — квадраты, построенные «классическими» способами. Это значит — нечетные. Среди них многие имеют полную центральную симметрию. Вот 4 примера таких квадратов. Во-первых, магический квадрат 7×7, полученный диагональным шагом в соседнюю клетку.

28	19	10	*1*	48	39	30
29	27	18	9	*7*	47	38
37	35	26	17	8	*6*	46
45	36	34	25	16	14	*5*
4	44	42	33	24	15	13
12	*3*	43	41	32	23	21
20	11	*2*	49	40	31	22

$\eta = 7$; $\sigma = 50$; $\Sigma_0 = 175$

$\omega = 25$

Второй пример: магический квадрат 9×9, полученный диагональным шагом через клетку.

39	4	50	15	61	26	72	28	74
79	44	9	46	11	57	22	68	33
29	75	40	5	51	16	62	27	64
69	34	80	45	1	47	12	58	23
19	65	30	76	41	6	52	17	63
59	24	70	35	81	37	2	48	13
18	55	20	66	31	77	42	7	53
49	14	60	25	71	36	73	38	3
8	54	10	56	21	67	32	78	43

$n=9$; $\sigma=82$; $\Sigma_0=369$; $\omega=41$

Третьим будет магический квадрат 11×11, *несовершенный*, полученный ходом коня.

116	93	70	47	24	1	110	87	64	41	18
7	105	82	59	36	13	111	99	76	53	30
19	117	94	71	48	25	2	100	88	65	42
31	8	106	83	60	37	14	112	89	77	54
43	20	118	95	72	49	26	3	101	78	66
55	32	9	107	84	61	38	15	113	90	67
56	44	21	119	96	73	50	27	4	102	79
68	45	33	10	108	85	62	39	16	114	91
80	57	34	22	120	97	74	51	28	5	103
92	69	46	23	11	109	86	63	40	17	115
104	81	58	35	12	121	98	75	52	29	6

$n=11$; $\sigma=122$; $\Sigma_0=671$; $\omega=61$

Четверый пример, также построенный ходом шахматного коня, — *совершенный* квадрат 13×13 (*см. стр.117*).

Так же, как магические квадраты 5×5, нечетные квадраты большего размера имеют множество вариантов такой структуры, которая не может быть получена ни одним из «классических» способов. Среди них находятся те, что могут быть получены преобразованием «классических» квадратов с полной центральной симметрией, простой или более сложной перестановкой параллельных рядов. Таким способом, которым ранее был получен

162	133	117	88	59	30	*1*	154	125	96	67	51	22
7	147	118	102	73	44	15	168	139	110	81	65	36
21	161	132	116	87	58	29	*13*	153	124	95	66	50
35	*6*	146	130	101	72	43	14	167	138	109	80	64
49	20	160	131	115	86	57	28	*12*	152	123	94	78
63	34	*5*	145	129	100	71	42	26	166	137	108	79
77	48	19	159	143	114	85	56	27	*11*	151	122	93
91	62	33	*4*	144	128	99	70	41	25	165	136	107
92	76	47	18	158	142	113	84	55	39	*10*	150	121
106	90	61	32	*3*	156	127	98	69	40	24	164	135
120	104	75	46	17	157	141	112	83	54	38	*9*	149
134	105	89	60	31	*2*	155	126	97	68	52	23	163
148	119	103	74	45	16	169	140	111	82	53	37	*8*

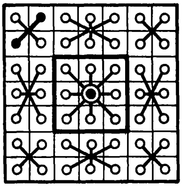
$n = 13$; $\sigma = 170$; $\Sigma_0 = 1105$; $(\omega = 85)$.

первый новый квадрат 5×5 типа I.1.а), получены сейчас новые квадраты 7×7 и 9×9. Так же могут быть получены другие новые нечетные магические квадраты большего размера (*см. стр. 118*).

Среди магических квадратов 5×5, помимо нового квадрата I.1.а), были найдены еще 20 новых магических квадратов симметричной структуры и несколько несимметричных, не связанных с первыми. Нет сомнения в том, что может быть найдено и кем-либо будет найдено большое число новых нечетных магических квадратов большего размера, симметричных и несимметричных.

Теперь о *четных* магических квадратах, больших, чем 4×4. Приходится различать особенности построения магических квадратов, у которых число клеток в основании кратно четырем ($n = 8, 12, 16, 20$ и т. п.), и квадратов, где оно не кратно четырем ($n = 6, 10, 14, 18$ и т. д.). Для построения тех и других квадратов может быть использован способ рамки. Но способ рамки был довольно подробно рассмотрен применительно к квадратам 5×5 и снова им заниматься неинтересно. Лучше обратиться к ранее упомянутому способу Раус-Болла, которой был так прост для квадратов 4×4. Он оказывается несколько сложнее для квадратов 6×6 и для квадратов 8×8, не говоря о квадратах еще большей величины. Для упрощения, вместо того чтобы разбираться в подробностях применения способа Раус-Болла, можно взять два готовых примера магических квадратов 6×6 и сравнить их с квадратом такого же размера, заполненным числами 1, 2, 3,..., 35, 36 в их естественном порядке. При таком сопостав-

$n = 7$

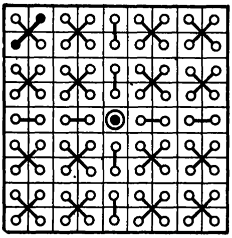


→

28	30	10	1	48	19	39
20	22	2	49	40	11	31
37	46	26	17	8	35	6
45	5	34	25	16	36	14
4	13	42	33	24	44	15
29	38	18	9	7	27	47
12	21	43	41	32	3	23

$\sigma = 50;\quad \Sigma_0 = 175.$

$n = 9$



→

39	74	50	72	61	15	26	4	28
8	43	10	32	21	56	67	54	78
29	64	40	62	51	5	16	75	27
18	53	20	42	31	66	77	55	7
19	63	30	52	41	76	6	65	17
69	23	80	12	1	45	47	34	58
59	13	70	2	81	35	37	24	48
79	33	9	22	11	46	57	44	68
49	3	60	73	71	25	36	14	38

$\sigma = 82;\quad \Sigma_0 = 369$

лении становится ясным порядок переноса чисел без того, чтобы выполнять сам перенос. Первый пример магического квадрата 6×6 взят из книги акад. Успенского, второй — у Риолло.

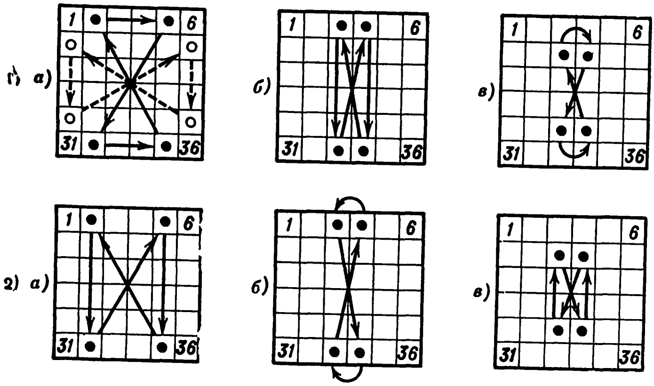
1)

1	35	34	33	2	6
30	8	28	9	11	25
24	23	15	16	20	13
18	14	21	22	17	19
7	26	10	27	29	12
31	5	3	4	32	36

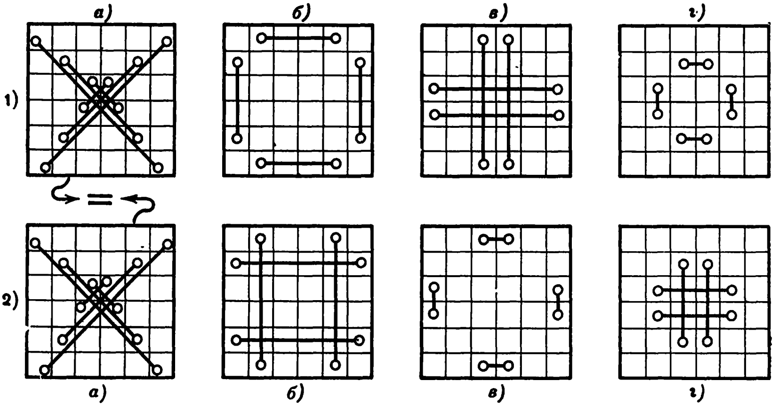
2)

1	35	4	33	32	6
12	8	27	28	11	25
24	17	15	16	20	19
13	23	21	22	14	18
30	26	10	9	29	7
31	2	34	3	5	36

В обоих примерах из 36 чисел передвигаются только 24 потому, что на старых местах остаются числа, расположенные на обеих диагоналях. Так было и в квадратах 4×4: суммы чисел в диагоналях с самого начала равнялись «постоянной» квадрата. (В данном случае $\Sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (1 + 36) = 111$.) Переход на новые места для чисел, расположенных в промежутках между диагоналями, сложнее, чем у квадратов 4×4. У тех менялись местами только 2 числа, составляющие пару, здесь же в каждом обмене участвуют по 4 числа, составляющих 2 пары. Примеры: 1) а) $2 \to 5 \to 32 \to 35$; 2) а) $2 \to 32 \to 5 \to 35$ и т. д.

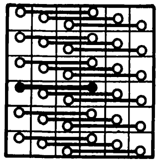


Внутренние структуры обоих вариантов близки друг к другу, но не совпадают друг с другом.



Число внутренних структур магических квадратов 6×6 очень велико. Среди них имеются структуры, близкие к тем, что обнаружены у квадратов 4×4. Например, в книге Вейдемана нашелся магический квадрат, у которого пары, длиной в 4 клетки, расположены параллельно друг другу в строках по 3 в каждой. Этот квадрат содержит 2 «хорошие» прямоугольные разломанные диагонали.

33	2	31	4	35	6
1	32	3	36	5	34
7	8	9	30	29	28
27	26	25	10	11	12
21	23	19	16	14	18
22	20	24	15	17	13



Четные магические квадраты, у которых число клеток в основании кратно четырем, строят многими способами, но наиболее простым является тот же способ Раус-Болла. Для квадратов 8 × × 8 он не сложнее, чем для квадратов 6 × 6. Различия в способах перемещения чисел позволяют и в квадратах 8 × 8 получить разные варианты магических квадратов. Два примера, один из книги Кордемского, другой из книги Риолло:

$n=8$

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

$б=65$ $\Sigma_0=260$

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

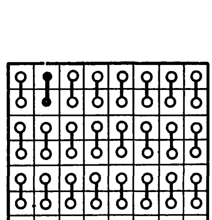
В первом примере для придания сходства с квадратом 4×4 вся площадь квадрата 8×8 разделена на 16 малых квадратов, по 4 клетки в каждом. При перемещениях обмениваются местами не отдельные числа, а 8 малых квадратов. При обмене местами они поворачиваются на 180°. Остальные 8 малых квадратов, расположенные вдоль диагоналей, остаются на своих местах так же, как соответствующие числа в квадратах 4×4. Во втором примере обмениваются местами отдельные числа, но более сложным путем. Внутри каждой четверти квадрата (квадранта) сохраняют места все 8 чисел, расположенных вдоль диагоналей квадранта. Остальные 8 чисел меняются местами, переходя в другой квадрант. Например, числа 2 и 3 из левого верхнего квадранта меняются местами с числами 62 и 63 из правого нижнего квадранта, составляющими с ними пары, и т. д.

В отличие от магических квадратов 6×6, оба магических квадрата 8×8 обладают полной центральной симметрией. В квадрате 1) содержатся 2 «хорошие» прямоугольные разломанные диагонали. В квадрате 2) —6 таких же диагоналей, по 3 параллельных друг другу. Смещением контура первого квадрата в направлении одной, а затем другой главной диагонали удается получить 2 несимметричных магических квадрата 8×8. Второй квадрат при смещении контура дает $3 + 3 + 3 \cdot 3 = 15$ таких несимметричных вариантов.

Среди магических квадратов 8×8 должны быть обладающие внутренней структурой, сходной с одной из 12 структур, выявленных у квадратов 4×4. Первый случай уже рассмотрен — это квадраты 8×8, обладающие полной центральной симметрией. Их структура подобна структуре ⟨1⟩ квадратов 4×4. Второй пример нашелся у Риолло: магический квадрат 8×8, в котором пары чисел расположены последовательными цепочками, параллельными друг другу, как в магическом квадрате 4×4 типа ⟨4⟩. Этот магический квадрат имеет две «хорошие»

$n=8$

1	47	46	*4*	60	22	23	57
64	18	19	61	*5*	43	42	*8*
32	50	51	29	37	11	10	40
33	15	14	36	28	54	55	25
53	27	26	56	16	34	35	13
12	38	39	9	49	31	30	52
44	*6*	*7*	41	17	63	62	20
21	59	58	24	48	*2*	*3*	45



прямоугольные разломанные диагонали. Смещение контура на 4 клетки параллельно главным диагоналям дает 2 новых магических квадрата точно *такой же структуры*.

Знакомство с простыми магическими квадратами, нечетными и четными, большими, чем 5×5, было беглым и ограниченным. Заниматься ими более подробно не входит в план книги. Не рассматривать их вообще? Это неправильно, хотя беглое знакомство — не более чем дань традиции.

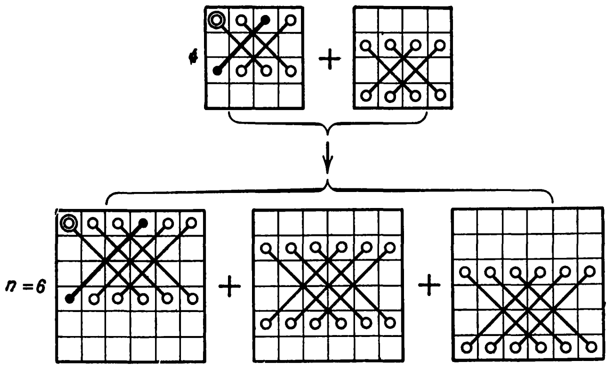
При выполнении этого традиционного долга ничего не было сказано о совершенных магических квадратах, больших, чем 5×5. Надо думать, что они будут более интересными и, возможно, более доступными, чем их несовершенные родичи.

Удивительные исключения

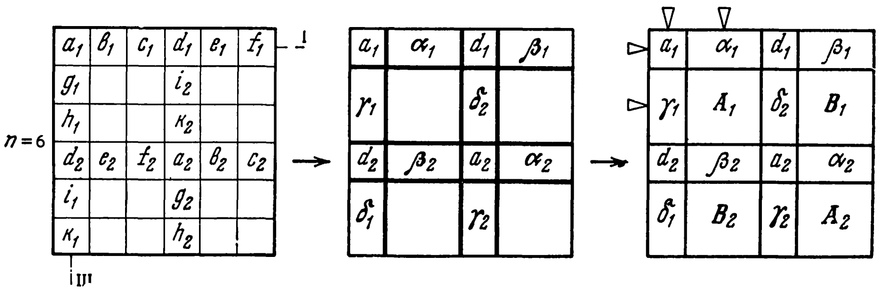
Среди совершенных квадратов 5×5 существуют только четыре основные симметричные формы. При смещении контура каждая дает по 25 вариантов. У совершенных квадратов 4×4 существуют три основные формы. Каждая дает при смещении контура по 16 вариантов. Вовсе нет совершенного квадрата 3×3. Все это было выяснено ранее.

Известно, что существуют совершенные квадраты четные, большие, чем 4×4, и нечетные, большие, чем 5×5. Но известно также, что нет четных совершенных квадратов, если число клеток в основании не кратно четырем. То есть нет совершенных квадратов 6×6, 10×10, 14×14, 18×18, 22×22 и так далее. Также известно, что нет совершенных нечетных квадратов, если число клеток в основании кратно трем. То есть нет также совершенных квадратов 9×9, 15×15, 21×21 и так далее.

Сначала о четных совершенных квадратах. Почему не может быть совершенного квадрата 6×6? Если вспомнить про замечательную внутреннюю структуру совершенного квадрата 4×4, обеспечивающую его высокое качество, то хочется понять, почему не может быть пригодна подобная ей внутренняя структура квадрата 6×6. Для этой цели, аналогично рисунку внутренней структуры совершенного магического квадрата 4×4, достаточно разметить расположение пар чисел в будущем совершенном квадрате 6×6, соединяя косыми крестами клетки верхней строки с клетками четвертой строки, клетки второй и пятой строк, клетки третьей и шестой строк. Все получается просто и хорошо. Удачный результат кажется несомненным, но... он невозможен. Чтобы было удобнее разбираться в этом и чтобы не зависеть от отдельных числовых комбинаций, можно вести расчет в алгебраической форме. Как всегда, сначала записываются числовые груп-



пы, расположенные вдоль лучей I и III. Затем соответственно намеченной внутренней структуре можно вписать в клетках четвертой строки и четвертого столбца 9 чисел, дополняющих до пары числа групп. Для большего, хотя бы формального, сходства квадрата 6×6 с квадратом 4×4 можно разбить всю площадь квадрата 6×6 на 16 участков, пусть разного размера, и в каждом вписать только по одному числу. В участках размером



в одну клетку остаются числа a_1; a_2; d_1 и d_2. В участках размером в 2 клетки можно вписать числа α_1 и α_2; β_1 и β_2; γ_1 и γ_2; δ_1 и δ_2. Каждое из них должно быть суммой двух чисел квадрата 6×6:

$$\alpha_1 = b_1 + c_1; \quad \beta_1 = e_1 + f_1; \quad \gamma_1 = g_1 + h_1; \quad \delta_1 = i_1 + k_1;$$
$$\alpha_2 = b_2 + c_2; \quad \beta_2 = e_2 + f_2; \quad \gamma_2 = g_2 + h_2; \quad \delta_2 = i_2 + k_2.$$

При этом $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\sigma = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2 = \delta_1 + \delta_2$.
В оставшиеся свободными 4-клеточные квадратики вписываются числа A_1, A_2, B_1, B_2. Каждое из них должно представлять собой сумму четырех чисел, не повторяющих уже названные. По свое-

му расположению числа, входящие в A_1, и числа, входящие в A_2, составляют 4 пары. То же с числами B_1 и B_2. Поэтому $A_1 + A_2 = 4\sigma$ и $B_1 + B_2 = 4\sigma$. Это можно сказать с уверенностью, хотя числа, входящие в A и B, пока неизвестны.

После этой подготовительной работы надо выбрать способ дальнейшего анализа. Не поможет ли еще раз суммирование чисел рядов? Пробные расчеты, выполненные аналогично расчетам квадратов 4×4, показали, что надо суммировать числа четырех рядов: верхней строки, левого столбца, строки и столбца, пересекающихся на квадратике с числом A_1[1] (они отмечены треугольничками).

Если предположить, как всегда перед суммированием чисел рядов, что квадрат намеченной структуры может быть магическим, а поэтому — совершенным, то сумма чисел ряда, шириной в одну клетку, обязательно должна быть равной $\Sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sigma$, а шириной в 2 клетки — $2\Sigma_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} n\sigma = n\sigma$.

Суммируем числа четырех рядов в 2 приема:

$$\begin{array}{l} 1)\ a_1 + \alpha_1 + d_1 + \beta_1 = \Sigma_0 \\ + \\ \quad a_1 + \gamma_1 + d_2 + \delta_1 = \Sigma_0 \\ \hline 2a_1 + \alpha_1 + \gamma_1 + (d_1 + d_2) + \beta_1 + \delta_1 = 2\Sigma_0. \end{array}$$

Но $d_1 + d_2 = \sigma$ и

$$2a_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 2\Sigma_0 - \sigma.$$

$$\begin{array}{l} 2)\ \gamma_1 + A_1 + \delta_2 + B_1 = 2\Sigma_0 \\ + \\ \quad \alpha_1 + A_1 + \beta_2 + B_2 = 2\Sigma_0 \\ \hline \gamma_1 + \alpha_1 + 2A_1 + \delta_2 + \beta_2 + (B_1 + B_2) = 4\Sigma_0. \end{array}$$

Но $B_1 + B_2 = 4\sigma$ и

$$\begin{array}{l} 1) + 2):\ 2a_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 2\Sigma_0 - \sigma \\ \qquad\qquad 2A_1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \delta_2 = 4\Sigma_0 - 4\sigma \\ \hline 2a_1 + 2A_1 + 2\alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2) + 2\gamma_1 + (\delta_1 + \delta_2) = 6\Sigma_0 - 5\sigma \end{array}$$

или $2a_1 + 2A_1 + 2\alpha_1 + 2\gamma_1 = 6\Sigma_0 - 5\sigma - 2\sigma - 2\sigma = 6\Sigma_0 - 9\sigma$

$$2(a_1 + A_1 + \alpha_1 + \gamma_1) = 6\Sigma_0 - 9\sigma \text{ или}$$

$$a_1 + A_1 + \alpha_1 + \gamma_1 = \frac{1}{2}(6\Sigma_0 - 9\sigma) = 3\Sigma_0 - 4{,}5\sigma.$$

Но у любого четного магического квадрата сумма чисел пары всегда число нечетное. Здесь $\sigma = 1 + 36 = 37$. Поэтому $4{,}5\sigma = 166{,}5$.

---

[1] С равным успехом можно взять A_2 или B_1, или B_2.

Вот оказалось в чем дело! В левой части равенства записана сумма целых чисел, равная, конечно, целому числу, а в правой находится дробное число. Это, конечно, невозможно. Такая заманчивая и, казалось бы, многообещающая структура непригодна для того, чтобы построить совершенный магический квадрат 6×6. То же получается при $n = 10, 14, 18, 22$ и так далее. Для доказательства этого можно повторить предыдущий расчет для любого четного n, не кратного четырем.

В таком общем случае числа α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 занимают не 2 клетки, а $\frac{n-2}{2}$ клеток. Площадь квадратиков с числами A_1, A_2, B_1 и B_2 равна не четырем, а $\frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{(n-2)^2}{4}$ клеткам. Соответственно изменяются суммы чисел: $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{n-2}{2} \cdot \sigma = \beta_1 + \beta_2$ и т. д.; $A_1 + A_2 = \frac{(n-2)^2}{4} \cdot \sigma = B_1 + B_2$. Сумма чисел второй строки или второго столбца вместо $2\Sigma_0$ будет равна $\frac{n-2}{2} \cdot \Sigma_0$. Можно не тратить время на повторение всего расчета, а сразу подсчитать, что получается в правой части равенства: будет ли она целым числом или дробным?

$$\Big[2\Sigma_0 - \left(d_1 + d_2\right) + 2 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \Sigma_0 - \left(B_1 - B_2\right) - \left(\beta_1 + \beta_2\right) - \left(\delta_1 + \delta_2\right)\Big] : 2 =$$

$$= \left[2\Sigma_0 - \sigma + \left(n-2\right) \cdot \Sigma_0 - \frac{(n-2)^2}{4} \cdot \sigma - \frac{n-2}{2} \cdot \sigma - \frac{n-2}{2} \cdot \sigma\right] : 2 =$$

$$= \left[2\Sigma_0 + n \cdot \Sigma_0 - 2\Sigma_0 - \sigma \cdot \left(1 + \frac{(n-2)^2}{4} + \frac{n-2}{2} \cdot 2\right)\right] : 2 =$$

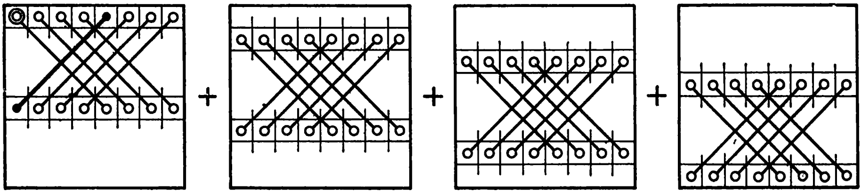
$$= \left[n \cdot \Sigma_0 - \sigma \cdot \left(1 + \frac{n^2 - 4n + 4}{4} + n - 2\right)\right] : 2 =$$

$$= \left[n \cdot \Sigma_0 - \sigma \cdot \left(1 + \frac{n^2}{4} - n + 1 + n - 2\right)\right] : 2 = \frac{n}{2} \cdot \Sigma_0 - \sigma \cdot \frac{n^2}{8}.$$

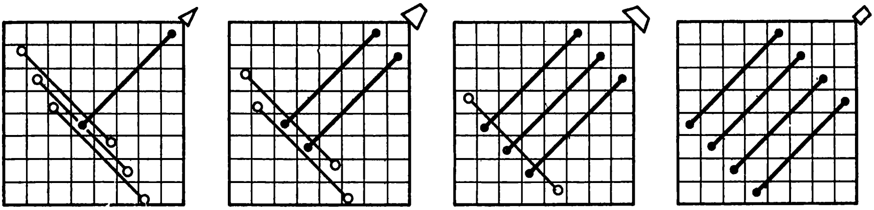
Для четных квадратов $n : 2$ есть число целое, но $n^2 : 8$ может быть целым только в том случае, если n кратно четырем.

Выполненный анализ относится только к внутренней структуре типа ⟨3⟩ квадратов 4×4, но он прост, доступен, дает наглядное представление.

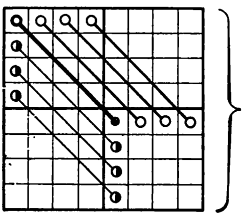
Структура типа ⟨3⟩, не пригодная для квадратов 6×6, полностью применима для магических квадратов 8×8. Она обеспечивает нужную сумму чисел в обеих главных диагоналях квадрата и во всех его 16 разломанных диагоналях. В каждой из них содержится по 4 пары, и поэтому суммы чисел в них одинаковы и равны 4σ.



n =8



Один вариант совершенного квадрата 8×8, имеющего такую структуру, может быть построен простым преобразованием нижней половины несовершенного магического квадрата 2) на стр. 120. Верхняя половина этого квадрата остается без всяких изменений. Расстановка чисел в нижней половине выполняется крайне просто в соответствии с рисунком внутренней структуры. Полу-

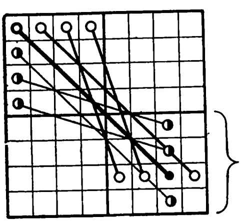


n=8

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32

1)

60	6	7	57	64	2	3	61
13	51	50	16	9	55	54	12
21	43	42	24	17	47	46	20
36	30	31	33	40	26	27	37



2)

42	24	21	43	46	20	17	47
31	33	36	30	27	37	40	26
7	57	60	6	3	61	64	2
50	16	13	51	54	12	9	55

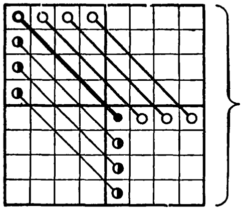
ченный таким путем квадрат является магическим и, обладая заданной структурой, обязательно оказывается совершенным. Но это только один вариант. Конечно, его можно считать основным вариантом и, пользуясь возможностью сместить контур совершенного квадрата на любое число клеток в любом направлении, получить вместо одного 64 варианта. Такое преобразование не изменяет внутренней структуры. Поэтому новые 63 варианта не очень интересны.

Иное дело — вариант 2), несимметричный совершенный квадрат 8×8, который получается другой расстановкой чисел в нижней половине того же исходного квадрата, соответственно рисунку новой структуры. Пример 2) — единственно возможный второй вариант для использованной верхней половины исходного квадрата. Он указывает на принципиальное отличие совершенных квадратов 8×8 от совершенных квадратов 4×4, которые имели только одну структуру типа $\langle 3 \rangle$.

Возможные преобразования структуры совершенного квадрата 8×8 не ограничиваются вариантом 2). Если взять в качестве исходного квадрата совершенный квадрат 8×8 из книги Риолло, то его верхняя половина может служить основанием не двух, а восьми вариантов. Из них показаны три *(см. стр. 128)*. Первый—1)—исходный. Его внутренняя структура состоит, как в предыдущем примере 1), из 16 косых крестов равного размера, параллельных друг другу. Второй пример—один из шести несимметричных вариантов, аналогичных варианту 2) из предыдущего примера. Эти 6 вариантов исчерпывают все несимметричные структуры, получаемые таким способом. Третий пример, восьмой и последний в цепочке однотипных преобразований структуры, оказался симметричным и не просто симметричным, а обладающим полной центральной симметрией, невозможной для совершенных квадратов 4×4.

Если отложить на некоторое время 5 рассмотренных примеров преобразований, а затем заняться ими снова, то удается увидеть в них нечто новое, ранее не замеченное. Оказывается, что квадранты, на которые можно их разделить, являются полумагическими квадратами, с суммой чисел в строках и столбцах, равной половине «постоянной» квадрата 8×8, то есть равной $260 : 2 = 130$. Вспомнив о магическом квадрате 6×6, можно отметить, что таких квадрантов у него быть не может, потому что у магического квадрата 6×6 «постоянная» $\Sigma_0 = 111$ и не делится на два.

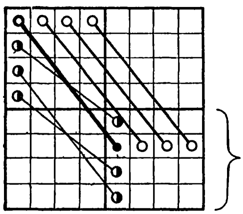
Есть ли совершенные квадраты 8×8, структура которых никак не связана со структурой, содержащей 16 больших косых крестов? Пытаться их искать последовательным расчетом было бы делом сложным и трудоемким. Пытаться их искать в литературе? Это было бы равносильно попытке сразу вынуть из мешка с белыми шариками затерянный среди них единственный черный такого же размера. Разве только уж очень повезет...



1	45	28	56	2	46	27	55
29	49	8	44	30	50	7	43
40	12	61	17	39	11	62	18
60	24	33	13	59	23	34	14

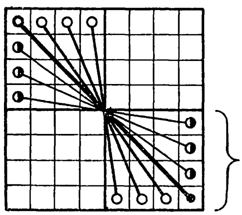
1)

63	19	38	10	64	20	37	9
35	15	58	22	36	16	57	21
26	54	3	47	25	53	4	48
6	42	31	51	5	41	32	52



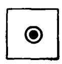
3)

35	15	58	22	36	16	57	21
63	19	38	10	64	20	37	9
6	42	31	51	5	41	32	52
26	54	3	47	25	53	4	48



8)

51	31	42	6	52	32	41	5
47	3	54	26	48	4	53	25
22	58	15	35	21	57	16	36
10	38	19	63	9	37	20	64

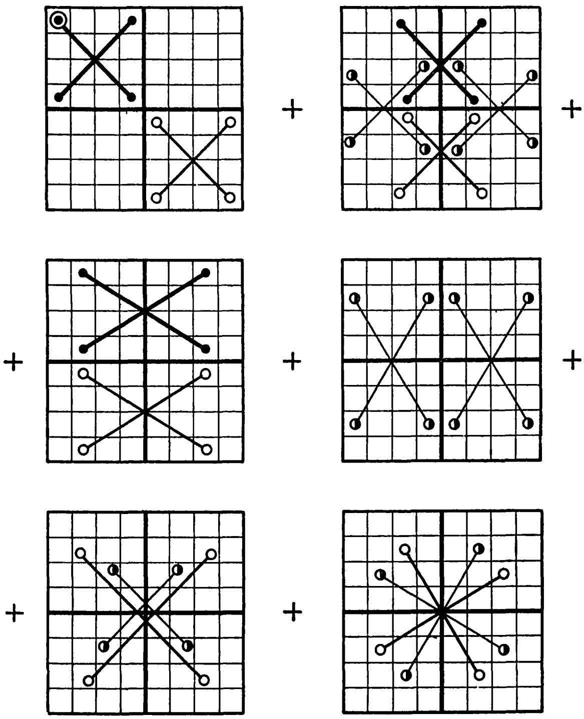


Но надо же, чтобы произошла именно такая случайность: среди весьма небольшого числа магических квадратов 8 × 8, содержащихся в книге Вейдемана, нашелся пример совершенного квадрата 8 × 8 какой-то странной кособокой структуры. После смещения контура, при котором единица перешла в левую верхнюю клетку, оказалось, что преобразованный, также совершенный, квадрат приобрел симметричную структуру. Но такую, что она никак не может быть преобразована в структуру 16 равных косых крестов. В руке оказался единственный черный шарик...

В этом совершенном квадрате числа первого квадранта связаны в пары с числами всех четырех квадрантов. Такого распо-

1	56	47	22	13	60	35	26
32	41	50	11	20	37	62	7
21	36	59	2	25	48	55	14
43	30	5	64	39	18	9	52
34	23	16	53	46	27	4	57
63	10	17	44	51	6	29	40
54	3	28	33	58	15	24	45
12	61	38	31	8	49	42	19

$n = 8$

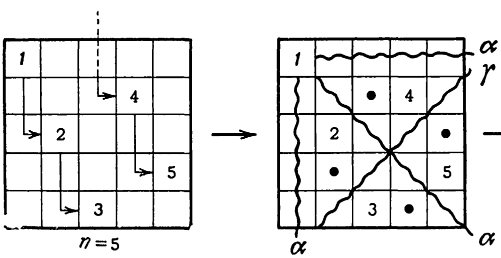


ложения пар не было ни в одном из рассмотренных симметричных и несимметричных вариантов совершенных квадратов 8×8.

Неожиданная находка стоящего особняком совершенного квадрата 8×8 не может служить поводом к тому, чтобы снова вернуться к поискам совершенных квадратов 6×6. Это безнадежно. Впрочем, любая такая попытка, с целью тренировки или развлечения, позволила бы составить несколько вариантов структур 6×6, аналогичных последнему примеру структуры 8 × 8. После записи соответствующих квадратов в алгебраической форме было бы достаточно сложить числа нескольких строк и столбцов (3 + 3) для того, чтобы доказать невозможность построения таких магических квадратов.

Если безнадежны попытки составить совершенные квадраты 6 × 6, 10 × 10, 14 × 14 и так далее, то совершенные квадраты 12 × 12, 16 × 16, 20 × 20, 24 × 24 и так далее возможны, составлялись и публиковались. Однако работать с ними неудобно потому, что суммы чисел в их рядах слишком велики: 870, 1028, 2005, 6912 и так далее. Для проверки только одного варианта наименьшего из них совершенного квадрата 12 × × 12 нужно складывать 12 чисел, дающих вместе 870, в 12 строках, 12 столбцах, двух диагоналях и в 22 разломанных диагоналях, всего 48 раз. Поэтому наибольшим совершенным квадратом, здесь рассмотренным, остается квадрат 8 × 8. Необходимо указать, сколько существует таких квадратов. Трудно было бы составить об этом точное мнение, если бы не вторая половина ранее названного исследования математика Ф. Фиттинга. Тем же способом, который он применял для расчета общего числа магических квадратов 4 × 4, он показал, что число совершенных квадратов 8 × 8 равно 100 306 130 042 880, то есть более 10^{14} — число, которое даже прочитать трудно: сто тысяч миллиардов. Сколько в них различных форм и типов, пока никому не известно.

После такого большого количества четных совершенных квадратов как просты и удобны оказываются все расчеты нечетных совершенных квадратов. Квадрат 5 × 5 был подробно исследован и поэтому может явиться первой ступенькой для дальнейшего анализа. На его основе удалось выяснить, что нечетные совершенные квадраты удается получить только в том случае, если переход от числа к числу происходит шагом шахматного коня. Направление этого перехода безразлично. Сейчас пусть оно будет вниз и направо. Выбор иного направления приводит к неварианту. Любой совершенный квадрат (нечетный и четный) можно начать единицей. Этих условий достаточно, чтобы начать строить однотипные примеры совершенных квадратов разного размера. В первую очередь это будет уже знакомый квадрат 5 × 5:



$n = 5$

1	9	12	20	23
15	18	21	4	7
24	2	10	13	16
8	11	19	22	5
17	25	3	6	14

$\sigma = 26$; $\Sigma_0 = 65$

После того как в квадрате 5×5 отмечены запретные для числа 6 три ряда α и один ряд γ, остается только 4 свободные клетки, в которых можно разместить число 6. (Эти клетки отмечены точками.) Так определяются 4 основных варианта совершенных квадратов 5×5 (показан один). Остальные 96 получаются смещением контура.

Почему в совершенных квадратах 5×5 число основных вариантов равно именно четырем?

Точки, отмечающие клетки, в которых может быть записано число 6, находятся на четырех строках. Пятая, верхняя строка запрещена рядом α. (Если число клеток в основании квадрата равно n, то число разрешенных строк всегда равно $n - 1$.) На каждой из разрешенных строк заняты 4 клетки. Две—рядами α, одна — рядом γ и одна — числом из группы 2, 3, 4, 5. Поэтому в каждой строке (при $n = 5$) для числа 6 разрешена только одна клетка. (В общем виде число свободных клеток на одной строке равно $n - 4$.)

Оказывается, что число основных вариантов нечетных совершенных квадратов любого размера может быть выражено очень простой формулой:

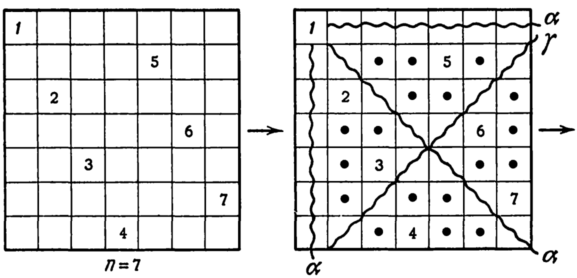
$$N_0 = (n - 1) \cdot (n - 4)^{1}.$$

Число всех совершенных нечетных квадратов любого размера поэтому равно:

$$N = N_0 \cdot n^2 = (n - 1) \cdot (n - 4) \cdot n^2.$$

Вопрос о числе нечетных совершенных квадратов оказывается решенным сразу и окончательно.

Для квадрата 7×7 число строк, на которых может быть вписано число 8, равно шести. На каждой строке для размещения числа 8 оказываются свободными 3 клетки.



1	31	12	42	16	46	27
39	20	43	24	5	35	9
28	2	32	13	36	17	47
10	40	21	44	25	6	29
48	22	3	33	14	37	18
30	11	41	15	45	26	7
19	49	23	4	34	8	38

$\sigma = 50$; $\Sigma_0 = 185$

---

[1] Столько же совершенных нечетных квадратов, обладающих полной центральной симметрией.

Поэтому число основных вариантов совершенных квадратов 7×7 равно: $N_0 = (7-1) \cdot (7-4) = 6 \cdot 3 = 18$. (Из них показан один.) Общее число всех совершенных квадратов 7×7 равно $N = N_0 \cdot n^2 = 18 \cdot 7^2 = 18 \cdot 49 = 882$.

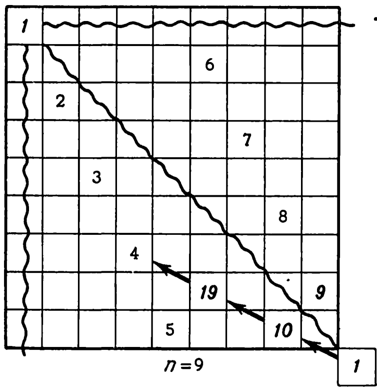
Квадратом 9×9 придется заняться отдельно, потому что он не может быть совершенным, так же как другие квадраты, у которых число клеток в основании кратно трем: 15×15, 21×21, 27×27 и так далее. (Об этом пишет, например, Риолло.)

Число совершенных нечетных квадратов быстро растет с увеличением их размера:

n	3	5	7	9	11	13	15	17
N_0	нет	4	18	нет	70	108	нет	208
N	нет	100	882	нет	8470	18252	нет	39312

Одновременно растет «постоянная» квадрата. При проверке качества вновь составленного квадрата 13×13 пришлось бы испытать такие же трудности, как для квадрата 12×12. Поэтому нет смысла подвергаться риску завязнуть в однообразных подсчетах больших сумм. Лучше не продолжать знакомство с совершенными квадратами 11×11, 13×13 и так далее, а вернуться к квадрату 9×9. Пусть нет совершенных квадратов такого размера, но было бы любопытно воочию увидеть, что и как мешает получить совершенный квадрат 9×9? Иной раз это более интересно, чем удачное решение. Кроме того, заполнение клеток числами по ходу шахматного коня настолько просто, что расчет нескольких вариантов не потребует значительного времени.

Если начинать расстановку чисел с верхней левой клетки и идти вниз и направо, то число 9 оказывается на пересечении правого столбца и второй строки снизу. Для записи числа 10 остаются свободными 48 клеток. (9 заняты числами 1, 2,..., 8, 9; 24 клетки — запретными рядами.) Если выбрать для первого варианта такой же переход от 9 к 10, который был использован в предыдущих примерах для перехода от 5 к 6, от 7 к 8 и мог быть использован в квадратах 11×11 для перехода от 11 к 12, в квадратах 13×13 для перехода от 13 к 14 и так далее, то в квадрате 9×9 этот переход оказывается неудачным и приводит к тому, что даже не удается заполнить числами все клетки квадрата. В этом легко убедиться, если составить цепочку переходов $1 \to 10 \to 19 \to 28$. Как только сделан переход $9 \to 10$ и выяснился шаг 1 → 10, который оказался здесь шагом шахматного коня, можно сделать второй такой же шаг от 10 к 19 и найти место для числа 19. Третий такой же шаг, от 19 к 28, приводит к клетке, занятой числом 4.

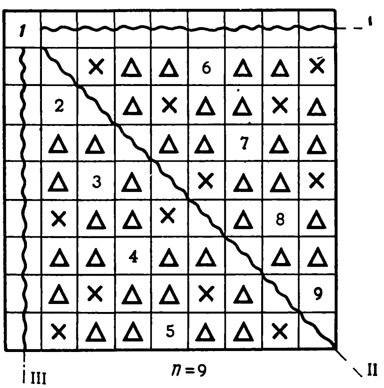
1) 

2)

1	49	16	***55***	22	70	***28***	76	43
27	66	33	81	39	6	54	12	60
44	2	50	17	56	23	71	29	77
61	19	67	34	73	40	7	46	13
78	45	3	51	18	57	24	72	30
14	62	20	68	35	74	41	8	47
31	79	37	4	52	***10***	58	25	64
48	15	63	21	69	36	75	42	***9***
65	32	80	38	5	53	11	59	26

Следующая неудача, в варианте 2), происходит, если число 10 вписать в клетку на пересечении четвертого столбца справа и третьей строки снизу. В этом случае заполнение всех клеток квадрата идет беспрепятственно до конца, но квадрат оказывается не только не совершенным, но и не магическим. Сумма чисел верхней строки в нем равна 360, а не 369.

После того, как два варианта так легко испробованы, возникает желание проверить все 48 вариантов. Что же оказывается после того, как число 10 поочередно побывало во всех 48 свободных клетках? В 12 случаях не удается заполнить все клетки



квадрата, как это было в примере 1) [1]. В 36 случаях квадрат оказывается немагическим, как в примере 2) [2]. При этом каждый раз в одном из рядов (по лучу I, или по лучу II, или по лучу III) сумма чисел оказывается равной 360, а не 369. Среди чисел этих рядов в каждом случае оказываются три одинаковых числа: 1; 28 и 55. Так окончились все 48 пробных расчетов. Результат, достигнутый таким простым способом, является доказательством того, что квадрат 9×9 не может быть совершенным.

Сходное положение обнаруживается в квадратах 15×15: или нельзя заполнить все клетки квадрата, или не получаются магические квадраты. В последнем случае в неудачных рядах оказываются свои три «роковых» числа: 1; 76 и 151. Можно догадаться, что для произвольного квадрата $n \times n$, кратного трем, тоже были бы найдены «роковые» числа: 1) единица; 2) $1 + \frac{n^2}{3}$; 3) $1 + 2\frac{n^2}{3}$.

Теперь совершенно ясно, почему любые численные квадраты, кратные трем, не имеют совершенной формы. В этом не было сомнения, но сейчас отсутствие сомнения заменилось уверенностью. А это не одно и то же.

...как звезд на небе

Много раз при преобразованиях магических квадратов, в том числе совершенных, применялось смещение контура квадрата. При этом некоторые ряды чисел полностью или не полностью оказывались вне контура квадрата, отрезанными, а внутри контура появлялось соответственное число пустых клеток. Свободные клетки заполнялись числами, перенесенными из отрезанных рядов, причем числа располагались в прежнем порядке по отношению друг к другу. Такой перенос чисел можно упростить, если заранее пристроить к заданному численному квадрату справа и слева, вверху и внизу и по диагонали любое число точно таких же численных квадратов.

При этом границы исходного квадрата теряются и он расплывается в некую безграничную плоскость, равномерно усеянную числами. Если на эту числовую плоскость, на покрывающую ее сетку квадратных клеток, наложить в любом месте квадратный контур такого же размера, какой имел исходный квадрат, то полученный новый численный квадрат может быть точно таким же, как исходный, если новый контур вплотную прилегает к контуру исходного квадрата или если отодвинут от него на n клеток (или на несколько раз по n клеток).

Если числовая плоскость построена на основе магического

[1] Соответствующие клетки зачеркнуты косыми крестиками.
[2] Эти клетки отмечены треугольниками.

квадрата, то она будет магической плоскостью. Ее отличие от немагической числовой плоскости будет состоять в том, что передвижной квадратный контур, установленный в некоторых определенных местах, вырежет на этой плоскости магический квадрат, такой же, как исходный, или отличающийся от него. Последнее возможно, если исходный магический квадрат имел «хорошие» разломанные диагонали, хотя бы одну, а передвижной контур смещен так, чтобы числа «хорошей» разломанной диагонали оказались на главной диагонали нового квадрата.

Если числовая плоскость построена на основе совершенного квадрата, то она будет совершенной магической числовой плоскостью. (Название длинное, но зато точное.) В каком месте совершенной плоскости ни наложить передвижной контур, он вырежет совершенный квадрат. На примере совершенная плоскость построена на основе совершенного квадрата 4×4:

16	3	13	2	16	3	13	2	16	3	13	2	16	3	13	2	16	3	13
9	6	12	7	9	6	12	7	9	6	12	7	9	6	12	7	9	6	12
4	15	**1**	**14**	**4**	**15**	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1
5	10	**8**	**11**	**5**	**10**	8	11	5	10	8	11	5	10	8	11	5	10	8
16	3	**13**	**2**	**16**	**3**	13	2	16	3	13	2	16	3	13	2	16	3	13
9	6	**12**	**7**	**9**	**6**	12	7	9	6	12	7	9	6	12	7	9	6	12
4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1
5	10	8	11	5	10	8	11	5	10	8	11	5	10	8	11	5	10	8
16	3	13	2	16	3	13	2	16	3	13	2	16	3	13	2	16	3	13
9	6	12	7	9	6	12	7	9	6	12	7	9	6	12	7	9	6	12
4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1
5	10	8	11	5	10	8	11	5	10	8	11	5	10	8	11	5	10	8

Такая плоскость содержит 16 вариантов совершенных квадратов 4×4. Любая диагональ из четырех чисел является главной для какого-то квадрата или «хорошей» разломанной диагональю для другого.

Так как среди совершенных квадратов 4×4 только 3 основных, то совершенных плоскостей 4×4 существует тоже только 3. В каждой по 16 различных совершенных квадратов 4×4. Среди совершенных квадратов 5×5 только 4 основных. Поэтому существуют только 4 совершенные плоскости 5×5. В каждой по 25 совершенных квадратов.

Нет совершенной плоскости 3×3. Нет нечетных совершенных плоскостей, основанных на квадратах, кратных трем, как нет четных, не кратных четырем. Число совершенных плоскостей, нечетных и четных, всегда равно числу основных вариантов совершенных квадратов.

Вслед за понятием о числовой плоскости появились числовая линия и числовое пространство. Подобно плоскости, линия и пространство равномерно усеяны числами.

Частью числовой плоскости был числовой квадрат, разделенный на клетки. Частью числовой линии является отрезок, разделенный на какие-то доли. Частью числового пространства является числовой куб, разделенный на элементарные кубики. Если грани куба представляют собой квадраты, разделенные на клетки, то элементарный кубик построен на клетке квадрата, как на основании.

Как представить себе не просто числовую, а магическую линию и магический куб?

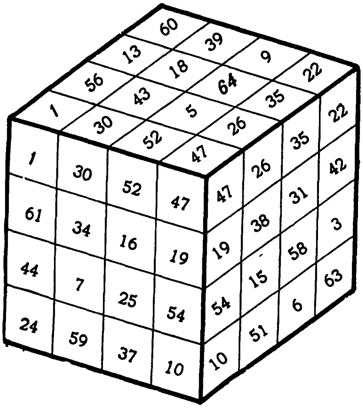
Для того чтобы числовой отрезок был магическим, можно задать те же условия, которые определяют магичность квадрата: 1) вдоль отрезка в каком-то порядке должны быть расставлены числа натурального ряда 1, 2, 3,..., $(n^2 - 1)$, n^2; 2) на протяжении отрезка числа не должны повторяться; 3) сумма каждых n чисел, взятых последовательными группами, должна быть равна «постоянной» $\Sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sigma$.

Такая задача, например, для $n = 4$, решается просто, даже слишком просто: достаточно взять магический или даже полумагический квадрат, разрезать его на ленточки по строкам или по столбцам и сложить эти 4 ленточки концами в любом порядке. Тогда получится модель или макет магического отрезка, например, такой:

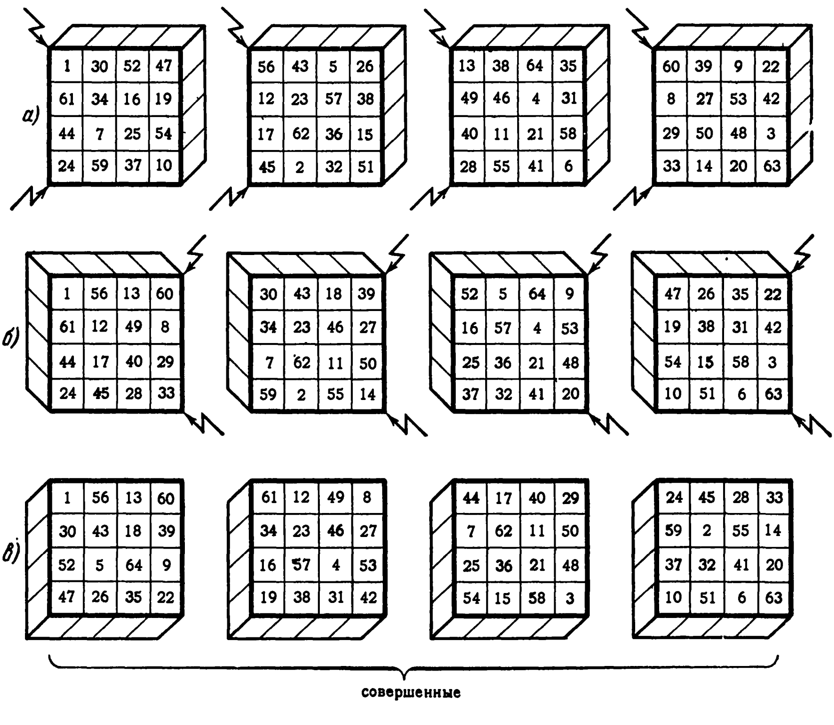
3	13	2	16	6	12	7	9	15	1	14	4	10	8	11	5

Только определенные участки этого магического отрезка, содержащие по 4 доли, включают числа, дающие в сумме 34. Для того чтобы получить бесконечную магическую линию, нужно к такому отрезку справа и слева пристраивать такие же магические отрезки в неопределенно большом числе.

Насколько все упрощается при переходе от магического квадрата к магическому отрезку, настолько все усложняется при переходе к магическому кубу. Прежде всего оказывается, что магический куб $3 \times 3 \times 3$ не существует так же, как нет совершенного квадрата 3×3. (Может быть, эти оба обстоятельства связаны между собой?) Магический куб $4 \times 4 \times 4$ существует. Познакомиться с ним удобнее на каком-либо примере. (Он взят из упоминавшейся книги Казаласа.) На рисунке видны только 3 грани этого магического куба, но если бы даже держать в руках модель такого куба и осматривать ее со всех сторон, то даже в



этом случае нельзя было бы составить о кубе полного представления потому, что не были бы видны 8 элементарных кубиков, находящихся в его середине. Поэтому для того, чтобы полностью знать, как расположены в кубе все содержащиеся в нем числа, необходимо расслоить куб на ломтики и не один раз, а три раза: а) параллельно левой вертикальной грани, б) параллельно правой вертикальной грани, в) параллельно верхней грани.



Каждый такой ломтик является числовым квадратом. Нетрудно разобраться, какое качество имеют эти квадраты, но сначала надо сделать обычные вспомогательные подсчеты.

Всех чисел в кубе $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$. В элементарных кубиках размещены члены натурального ряда 1, 2, 3,..., 62, 63, 64. Сумма любой пары чисел, равноотстоящих от концов ряда $\sigma = 1 + 64 = 65$. «Постоянная» куба $\Sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sigma = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 65 = 130$. Этой величине должны равняться суммы чисел в строках, столбцах и диагоналях всех 12 сечений а), б) и в). Должны? А на самом деле? В сечениях а) и б) равны 130 суммы чисел в строках и в столбцах, а суммы чисел в диагоналях не равны 130. (Эти «неудачные» диагонали отмечены ломаными стрелками.) Первые 8 квадратов оказались полумагическими. Зато горизонтально отрезанные квадраты в) оказались не только магическими, но и совершенными. Их внутренняя структура оказалась точно такой же, как у обычных совершенных квадратов 4×4, то есть типа $\langle 3 \rangle$. Это означает, что все пары чисел, содержащиеся в кубе, лежат в горизонтальных сечениях в), а в вертикальных сечениях а) и б) *нет ни одной пары* и поэтому в них *нет внутренней структуры* в смысле рисунка расположения пар чисел, как у обычных магических квадратов. В этом нет ничего удивительного: числа, содержащиеся в них, не составляют арифметической прогрессии. (Точнее надо было бы сказать, что та закономерность, которой они подчиняются, более сложна, чем простая арифметическая прогрессия. Но любопытно иное: оказывается, могут существовать магические или полумагические квадраты, совершенно отличные от рассмотренных «классических».)

1)

1	56	13	60
34	23	46	27
25	36	21	48
10	51	6	63

2)

47	26	35	22
16	57	4	53
7	62	11	50
24	45	28	33

3)

1	30	52	47
12	23	57	38
40	11	21	58
33	14	20	63

4)

60	39	9	22
49	46	4	31
17	62	36	15
24	59	37	10

5)

1	43	64	22
61	23	4	42
44	62	21	3
24	2	41	63

6)

47	5	18	60
19	57	46	8
54	36	11	29
10	32	55	33

полумагические

Остается проверить, какие численные квадраты находятся на диагональных плоскостях куба, проходящих от одного ребра куба к противоположному ребру. Всех ребер у куба двенадцать. Поэтому куб имеет 6 диагональных сечений. В первых четырех сечениях равны 130 только суммы чисел в строках; остальные — «плохие» (и отмечены ломаными стрелками). Эти квадраты даже не полумагические. У квадратов 5) и 6) «плохи» только диагонали. Эти квадраты — полумагические.

Наконец, каковы четыре главные (линейные) диагонали куба, идущие от вершины одного угла к вершине противоположного и являющиеся диагоналями диагональных сечений? Оказывается, что суммы чисел в них равны 108, 112, 148 и 152, но не 130.

Вот какую сложную числовую конструкцию представляет собой этот с виду простой магический куб.

Третья встреча

Два раза, случайно, встречались численные квадраты, названные «странными», но недосуг было ими заниматься. Так и остались они ждать своей очереди, без объяснения их связи со всеми рассмотренными магическими квадратами, даже без названия. Впрочем, название у них было. В литературе их называют «вспомогательными». Для чего и в какой мере они «вспомогательные»?

В ранее встреченных примерах «странных» или «вспомогательных» квадратов были хорошо заметны их особенности. Вместо одного ряда из n^2 членов в «странном» квадрате числа составляют n одинаковых рядов, повторяясь n раз. Но в каждой строке, в каждом столбце, в диагоналях они встречаются обычно по одному разу, в некоторых случаях по нескольку раз. Ряды чисел в «странных» квадратах представляют собой арифметические прогрессии, например, 0; 3; 6 или 2; 4; 6; 8, или натуральный ряд, например, 1; 2; 3. Все это относится к «странным» квадратам, которые уже встречались, но есть и другие. Они содержат только 2 числа, повторяющиеся по $n^2 : 2$ раз. (Обычно одно из этих чисел — нуль.) Естественно, что такие совсем уж странные квадраты должны быть четными, иначе $n^2 : 2$ окажется дробным числом.

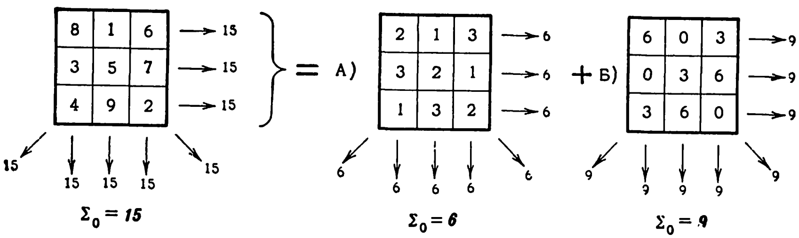
Несмотря на древность «странных» квадратов первого вида, несмотря на то, что они были найдены независимо от обычных магических квадратов и в старину не играли никакой вспомогательной роли, сейчас их обычно рассматривают как промежуточную конструкцию, удобную для построения обычных магических квадратов. Практически это сводится к сложению двух или нескольких квадратов, которые в таком случае действительно являются «вспомогательными». При сложении «вспомогательных» (или любых) квадратов одного размера суммируются числа, записанные в одинаково расположенных клетках. Возможность такой операции основана на любопытном правиле из теории чисел.

Оказывается, каждое число, входящее в арифметическую прогрессию, а значит и в натуральный ряд, можно представить как сумму двух чисел, являющихся членами двух других правильных рядов. Например, для квадрата 3×3:

$$1 = 1 + 0; \quad 4 = 1 + 3; \quad 7 = 1 + 6;$$
$$2 = 2 + 0; \quad 5 = 2 + 3; \quad 8 = 2 + 6;$$
$$3 = 3 + 0; \quad 6 = 3 + 3; \quad 9 = 3 + 6.$$

Числа, полученные разложением членов натурального ряда 1, 2,..., 8, 9, являются членами натурального ряда *А*) 1; 2; 3 и арифметической прогрессии *Б*) 0; 3; 6. Для квадрата 4×4: *А*) 1, 2, 3, 4 и *Б*) 0, 4, 8, 12; для квадрата 5×5: *А*) 1, 2, 3, 4, 5 и *Б*) 0, 5, 10, 15, 20 и так далее.

Квадраты, содержащие числа ряда *А*) или ряда *Б*), являющиеся результатом разложения обычного магического квадрата, оказываются «странными» или «вспомогательными».



Однако такой путь получения «вспомогательных» квадратов не обязателен. Скорее, наоборот, математическая теория дает способы непосредственного составления «вспомогательных» квадратов. Тем не менее, если посмотреть примеры суммирования «вспомогательных» квадратов, а в литературе таких примеров много, то большею частью возникает впечатление, что они были получены не непосредственно, а именно разложением какого-либо хорошо известного магического квадрата. Редко, но встречаются и иные примеры. Любопытный несимметричный магический квадрат 5×5 построен М. Постниковым при помощи сложения двух «вспомогательных». В его книге подробно изложен общий способ расчета «вспомогательных» квадратов. Способ обоснован, но сложен, впрочем, не более, чем другие такие же способы.

При суммировании различных невариантов «вспомогательных» квадратов получение обычного магического квадрата с числами от 1 до n^2 является редким исключением. Гораздо чаще суммарный квадрат оказывается «странным», реже магическим, чаще немагическим.

А)

2	1	3
3	2	1
1	3	2

$\Sigma_0 = 6$

+ Б')

3	0	6
6	3	0
0	6	3

$\Sigma_0 = 9$

=

5	1	9
9	5	1
1	9	5

$\Sigma_0 = 15$

тот же А) + Б'')

3	6	0
0	3	6
6	0	3

=

5	7	3
3	5	7
7	3	5

$\Sigma_0 = 15$

К этим суммарным квадратам название «вспомогательные» совершенно не подходит. Не будет ли более правильным считать, что магические (или полумагические, немагические, магические совершенные) квадраты, случайно здесь названные «странными», представляют собой особую группу численных квадратов, равноправную ранее рассмотренным магическим квадратам? Для того чтобы подчеркнуть такой подход к бывшим «странным» квадратам и указать на их происхождение (разложением обычных магических квадратов), они не будут здесь называться далее «вспомогательными», а будут условно (и более кратко) называться *АБ*-квадратами».

Не все еще сказано о полученных выше *АБ*-квадратах 3×3. Рисунок расположения чисел (не пар, а именно чисел) в квадрате *А*) и в квадрате *Б*) совершенно одинаков:

×	○	△
○	△	×
△	×	○

Но расположение этих рисунков в квадрате *А*) и в квадрате *Б*) различно: диагонали, содержащие равные числа (2, 2, 2 и 3, 3, 3), находятся под прямым углом друг к другу. Такое расположение диагоналей является единственным условием для получения суммарных квадратов 3×3 с 9 различными числами. Ранее были рассмотрены примеры таких квадратов — один магический и 8 полумагических *(см. стр. 27)*.

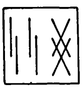
Чтобы не повторять при анализе *АБ*-квадратов 4×4 все сказанное применительно к *АБ*-квадратам 3×3, можно использовать второй, также хорошо известный способ разложения чисел на слагаемые. Он состоит в том, что число раскладывается не на два, а на несколько слагаемых, являющихся членами ряда: 1, 2, 4, 8 и так далее. Каждое из этих чисел есть степень двух:

$1 = 2^0$; $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$ и т. д. Для получения *АБ*-квадратов 4×4 сначала от каждого члена натурального ряда 1, 2,... ...,15, 16 отнимается единица. Новый ряд, также натуральный, начинается нулем и кончается числом 15. Эта операция имеет целью ввести в разложение нуль. Целесообразность этого выяснится в дальнейшем. Разложение чисел по этому способу имеет такой вид:

$$\begin{array}{lll}
0 = 0 & 5 = 1 + 4 & 10 = 2 + 8 \\
1 = 1 & 6 = 2 + 4 & 11 = 1 + 2 + 8 \\
2 = 2 & 7 = 1 + 2 + 4 & 12 = 4 + 8 \\
3 = 1 + 2 & 8 = 8 & 13 = 1 + 4 + 8 \\
4 = 4 & 9 = 1 + 8 & 14 = 2 + 4 + 8 \\
 & & 15 = 1 + 2 + 4 + 8
\end{array}$$

В будущих *АБ*-квадратах 4×4 должны быть размещены числа: 1) 8 и 0; 2) 4 и 0; 3) 2 и 0; 4) 1 и 0 [1]. Для примера выполнено разложение несимметричного магического квадрата 4×4, имеющего внутреннюю структуру типа $\langle 11 \rangle$.

$\langle 11 \rangle$



$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 15 & 6 & 10 \\ \hline 4 & 16 & 9 & 5 \\ \hline 14 & 2 & 7 & 11 \\ \hline 13 & 1 & 12 & 8 \\ \hline \end{array} = 1 + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 14 & 5 & 9 \\ \hline 3 & 15 & 8 & 4 \\ \hline 13 & 1 & 6 & 10 \\ \hline 12 & 0 & 11 & 7 \\ \hline \end{array}$$

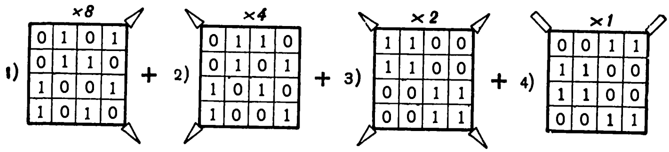
$$1)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 8 & 0 & 8 \\ \hline 0 & 8 & 8 & 0 \\ \hline 8 & 0 & 0 & 8 \\ \hline 8 & 0 & 8 & 0 \\ \hline \end{array} + 2)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 4 \\ \hline 4 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} + 3)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} + 4)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Расположение чисел у всех четырех *АБ*-квадратов разное. Несмотря на своеобразие этих квадратов, их можно анализировать уже известными приемами. Можно условно считать, что каждый квадрат содержит по 4 числовых ряда. Каждый ряд состоит только из двух чисел: 1) 0; 8; 2) 0; 4; 3) 0; 2; 4) 0; 1. Каждый ряд поэтому состоит из одной пары чисел. Поэтому $\sigma_1 = 0 + 8 = 8$; $\sigma_2 = 0 + 4 = 4$; $\sigma_3 = 0 + 2 = 2$; $\sigma_4 = 0 + 1 = 1$. Можно вычислить «постоянные»: 1) $\Sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \sigma = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$; 2) $\Sigma_0 = 8$; 3) $\Sigma_0 = 4$; 4) $\Sigma_0 = 2$. У всех четырех квадратов суммы чисел в строках и в столбцах равны «постоянным», но суммы чисел в диа-

[1] Именовать эти четыре *АБ*-квадрата «*АБВГ*-квадратами» было бы неуклюжим педантизмом.

гоналях первых трех квадратов неудачны: 1) 8 и 24; 2) 4 и 12; 3) 0 и 8. Эти квадраты — полумагические. Квадрат 4) — магический. У всех четырех квадратов есть «хорошие» разломанные диагонали. Их форма и расположение показаны значками у углов квадрата.

Те же *АБ*-квадраты 4 × 4 можно записать иначе. В каждом их них будут только единицы и нули, но первым трем необходимо придать общие множители: 8, 4 и 2.



Такая форма записи специфична. Она, вероятно, знакома многим школьникам, особенно тем, кто готовится стать программистом, и, наверное, не знакома многим, очень многим людям далеко не школьного возраста, не связанным с вычислениями на электронных счетных машинах. Такая запись полностью соответствует так называемой двоичной системе счисления, в которой любые числа записываются при помощи только двух знаков: нуля и единицы. Для ряда 0, 1, 2,..., 14, 15 это выглядит так:

0 = 0	5 = 101	10 = 1010
1 = 1	6 = 110	11 = 1011
2 = 10	7 = 111	12 = 1100
3 = 11	8 = 1000	13 = 1101
4 = 100	9 = 1001	14 = 1110
		15 = 1111

Для того чтобы было удобно записывать в четырех *АБ*-квадратах числа в двоичной системе, каждое число записывается четырьмя знаками. При этом форма записи чисел 8 — 15 не изменяется, а первые восемь выглядят так:

0 = 0000	2 = 0010	4 = 0100	6 = 0110
1 = 0001	3 = 0011	5 = 0101	7 = 0111.

Для примера разложения на *АБ*-квадраты с использованием двоичной системы взят совершенный квадрат 4 × 4 формы а) *(см. стр. 62 и верх стр. 144)*. Полученные при разложении *АБ*-квадраты 1), 2), 3), 4) также являются совершенными. Расположение чисел в квадратах 1)—4) совпадает с тем, что было найдено в 1930 г. Ф. Фиттингом и еще раньше, в 1885 г., профессором В. Ермаковым.

$$
a)\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 14 & 4 & 15 \\ \hline 8 & 11 & 5 & 10 \\ \hline 13 & 2 & 16 & 3 \\ \hline 12 & 7 & 9 & 6 \\ \hline \end{array} = 1 + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 13 & 3 & 14 \\ \hline 7 & 10 & 4 & 9 \\ \hline 12 & 1 & 15 & 2 \\ \hline 11 & 6 & 8 & 5 \\ \hline \end{array}
$$

$$
\underset{B'}{\overset{\times 8}{1)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&1\\ \hline 0&1&0&1\\ \hline 1&0&1&0\\ \hline 1&0&1&0\\ \hline \end{array}}} + \underset{C'}{\overset{\times 4}{2)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&1\\ \hline 1&0&1&0\\ \hline 1&0&1&0\\ \hline 0&1&0&1\\ \hline \end{array}}} + \underset{A}{\overset{\times 2}{3)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&1\\ \hline 1&1&0&0\\ \hline 0&0&1&1\\ \hline 1&1&0&0\\ \hline \end{array}}} + \underset{D'}{\overset{\times 1}{4)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&1&0\\ \hline 1&0&0&1\\ \hline 0&1&1&0\\ \hline 1&0&0&1\\ \hline \end{array}}}
$$

АБ-квадраты		1)	2)	3)	4)
Обозначения	проф. Ермакова	B	C	A	D
	Ф. Фиттинга	A_5	A_1	A_6	A_2

Замечательно, что при разложении совершенных квадратов 4×4 формы *б*₁) и *б*₂) получаются те же самые *АБ*-квадраты, но расставленные в ином порядке.

$$
б_1)\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 12 & 6 & 15 \\ \hline 8 & 13 & 3 & 10 \\ \hline 11 & 2 & 16 & 5 \\ \hline 14 & 7 & 9 & 4 \\ \hline \end{array} = 1 + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 11 & 5 & 14 \\ \hline 7 & 12 & 2 & 9 \\ \hline 10 & 1 & 15 & 4 \\ \hline 13 & 6 & 8 & 3 \\ \hline \end{array} = 1 + 8 \cdot B' + 4 \cdot A + 2 \cdot C + D
$$

$$
б_2)\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 12 & 7 & 14 \\ \hline 8 & 13 & 2 & 11 \\ \hline 10 & 3 & 16 & 5 \\ \hline 15 & 6 & 9 & 4 \\ \hline \end{array} = 1 + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 11 & 6 & 13 \\ \hline 7 & 12 & 1 & 10 \\ \hline 9 & 2 & 15 & 4 \\ \hline 14 & 5 & 8 & 3 \\ \hline \end{array} = 1 + 8 \cdot B' + 4 \cdot A + 2 \cdot D' + C
$$

Использовав запись *АБ*-квадратов с числами в двоичной форме, проф. Ермаков, а через 45 лет Ф. Фиттинг рассчитали количество возможных комбинаций вспомогательных квадратов 4×4. (Это название здесь уместно [1].) Таких комбинаций оказа-

[1] Ф. Фиттинг называл их компонентами.

лось ровно 11. На этой основе ими было рассчитано число магических квадратов 4×4, которые могут быть получены суммированием вспомогательных квадратов при перестановке чисел внутри вспомогательных квадратов. Оказалось, что таким путем могут быть получены 528 магических квадратов 4×4. Оба ученых ограничились констатацией возможности получить 528 магических квадратов и не пытались их рассчитать. Если бы они это сделали, то, может быть, заметили, что среди этих 528 магических квадратов находятся 48 совершенных квадратов 4×4.

Используя тот же способ, но с вспомогательными квадратами иного типа, Ф. Фиттинг сумел рассчитать числа еще трех групп магических квадратов 4×4. Они оказались равными 192, 112 и 48. Всего у Ф. Фиттинга получилось $528 + 192 + 112 + 48 = 880$ магических квадратов 4×4, как и должно быть. К сожалению, и в этих расчетах Ф. Фиттинг не пытался разделить эти квадраты 4×4 на какие-либо группы; он интересовался только формой вспомогательных квадратов.

Какой странный вопрос!

Не только странный, но и неожиданный. К тому же он появился, когда вся предыдущая работа была закончена. Но все-таки хотя и «под занавес»:

где центр тяжести магического квадрата?

В самом деле, странно. О какой тяжести может идти речь при анализе чисто математических образов, представлений, конструкций?

Хотя, впрочем... Числа абстрактны, но могут выражать любые количества, в том числе и вес. Будет ли число 7 выражать 7 граммов или 7 тонн, в данном случае не имеет значения. И то, и другое — вес. Почему же нельзя рассматривать числа, расставленные в клетках квадрата, как веса каких-то грузов, уместившихся в этих клетках? А если можно, то где будет общий центр тяжести всех грузов, окаймленных контуром квадрата?

Такая задача вполне допустима. Ее можно решать по формулам механики (статики). Можно, но не нужно. Задача несложная, и ее можно решить проще. В магическом квадрате каждая строка имеет один и тот же вес: Σ_0 граммов или тонн. Когда в контуре квадрата собран столбик из n строк равного веса, то их общий центр тяжести будет где-то посередине высоты квадрата.

Каждый столбец в магическом квадрате имеет один и тот же вес: Σ_0 граммов или тонн. Когда в контуре квадрата собран пакет из n столбцов равного веса, то их общий центр тяжести будет где-то на вертикальной линии, опирающейся на середину основания квадрата.

Общий центр тяжести магического квадрата, в котором равные веса имеют строки и столбцы, будет находиться на пересечении горизонтальной линии, приподнятой над основанием на половину высоты квадрата и вертикальной линии, стоящей на середине основания квадрата. Эти две линии пересекаются в центре квадрата.

Точно то же самое будет и в квадрате полумагическом. Разница в весах диагоналей здесь не играет роли.

То же самое будет, конечно, в совершенном квадрате.

Таков ответ: центр тяжести полумагических, магических и совершенных квадратов любого размера всегда находится в их геометрическом центре.

Между прочим, оказывается, что грузы, пропорциональные членам арифметической прогрессии, расставленные на плоскости так, как расположены числа в клетках совершенной числовой плоскости, будут, конечно, по-разному давить на свою опору, но все вместе, в среднем, они будут равномерно нагружать опорную плоскость.

Теперь можно спросить: где же центр тяжести магического куба? Рассуждение повторяется. Куб можно разделить на пластины толщиной в одну клетку. На каждой пластине числа распределены так, что получается или полумагический или совершенный квадрат. Поэтому центр тяжести каждой пластины — в ее геометрическом центре. «Вес» всех пластин одинаков. Поэтому общий центр тяжести всех пластин, то есть центр тяжести всего куба, будет находиться на середине прямого отрезка, соединяющего геометрические центры всех пластин. Эта точка находится в геометрическом центре куба.

ВМЕСТО ПОСЛЕСЛОВИЯ

Можно подумать, что это признание в забывчивости. Но это не так: во всем виноваты два вопросительных знака — в таблице на стр. 104. Осталось неизвестным, возможны ли магические квадраты 5×5, обладающие структурой I.2.б) и III.2.а)?

Эту задачу решить не удалось. Неясно было, сколько времени потребует ее решение. Месяц? Год? Пришлось поставить точку. Но когда точка была поставлена, сразу же началась новая работа над этой задачей. День за днем, неделя за неделей, месяц за месяцем. Были рассчитаны сотни вариантов, были сделаны неожиданные находки, а основной вопрос по-прежнему не поддавался решению.

Вначале были многочисленные попытки доказать (уже испытанным путем— суммированием рядов), что магический квадрат типа I.2.б) невозможен. Его судьбу автоматически разделил бы квадрат III.2.а) Эти попытки не удались. (Теперь, когда известен результат, кто-нибудь, возможно, отыщет прямой путь.) Оставалась вторая возможность — искать магический квадрат I.2.б) во всех мыслимых вариантах. Но эта возможность на деле стала невозможной потому, что число вариантов расчетов было бы огромным. Вот если бы иметь дело с суммами не пяти чисел, а только четырех. Расчеты магических квадратов 4×4 оказались возможными именно по этой причине. Очевидно, надо было найти и исследовать численные квадраты 5×5 иной структуры, где пришлось бы подбирать суммы только из четырех чисел. Симметричное преобразование структуры I.2.б) для этой цели не годилось. Нужно было искать несимметричное преобразование. Это было решающим условием. Иначе продолжать работу было невозможно.

Подходящее преобразование удалось найти сразу же. Понадобилось лишь поменять местами первый и четвертый столбцы, первую и четвертую строки. Из структуры I.2.б) получилась своеобразная несимметричная структура, обладающая той особенностью, что суммы чисел в четырех смежных клетках в каждом углу квадрата обязательно должны были равняться $2\sigma = 52$. В отличие от квадратов 4×4 здесь каждая группа, содержащая по 4 числа, должна была подбираться из ряда 25 чисел, за исключением, конечно, среднего числа 13. В каждой группе (в каждом углу) не должно быть пар. Наоборот, все числа одной группы должны составлять пары с числами другой группы в противоположном углу. Такой численный квадрат, обозначенный Γ_1, если бы он мог быть магическим, обладал бы еще иными любопытными особенностями.

Так была создана основа для расчетов. Как только нашелся хотя бы один вариант магического квадрата Γ_1, его можно было бы преобразовать обратной перестановкой четырех рядов и получить магический квадрат I.2.б) [и III.2.а)].

Второй этап работы состоял в подборе из чисел 1,2...,12, 14,...,24,25 групп, для которых $\Sigma_4 = 52$. Их оказалось 234. Для подбора комбинаций были пригодными 108 групп. Из них удалось составить 979 комбинаций. Большая часть комбинаций отпала, так как не удалось заполнить клетки квадрата. Остальные 195 комбинаций могли быть использованы для получения магических квадратов, но ни одна из них не дала магического квадрата типа Γ_1. Таким путем определилась судьба структур I.2.б) и III.2.а). Вопрос был решен, и вопросительные знаки могли бы быть теперь заменены словами «нет».

Однако работа на расчетах квадрата Γ_1 не остановилась. При попытках найти квадрат Γ_1 был найден несимметричный магический квадрат 5×5, структура которого оказалась очень близкой к структуре Γ_1 и поэтому была обозначена Γ_2.

Квадрат Γ_2, как оказалось, имеет родственные ему магические квадраты, получающиеся из квадрата Γ_2 перестановкой параллельных рядов. Замечательной особенностью магического квадрата Γ_2 является невозможность преобразовать его перестановкой рядов ни в один из известных или здесь найденных симметричных магических квадратов 5×5. Этим доказана возможность обособленной группы несимметричных магических квадратов 5×5. Их исследование надо продолжить.

Затем возник вопрос, какие магические квадраты 5×5 могут быть получены несимметричными преобразованиями квадратов, помещенных в таблицу на стр. 110 и 111. Эта задача решилась легко. Только 2 несимметричных преобразования дали 2 группы квадратов типа Γ_3 и Γ_4. 6 групп квадратов типов $Д_1 — Д_6$, 4 группы квадратов типов $E_1 — E_4$. Все эти несимметричные магические квадраты являются промежуточными звеньями между симметричными магическими квадратами 5×5 и несимметричными квадратами типа Γ_2.

Неожиданной и любопытной была открывшаяся возможность построения плоских сеток с квадратными ячейками, в узлах которых в правильном порядке расположены магические квадраты, симметричные и несимметричные, а соединяющие их линии обозначают симметричные или несимметричные преобразования переносом параллельных рядов.

* * *

В конце своей работы Френкель написал: fin
Слишком много вопросов остались нерешенными, недодуманными, незатронутыми, чтобы можно было последовать его примеру. У исследований конца не бывает.

ЛИТЕРАТУРА О МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТАХ [1]

1. B. Frenicle de Bessy. Des quarrez ou tables magiques. Metode generale pour faire les tables magiques. De l'attachement des figures partiales intérieures. Variation de quarrez impairs, et particuliérement du quarré, qui a 5 de côté. Table generale des quarrez de quatre (стр. 209—374 уникального тома: Resolution de quatres principaux Problemes d'Architecture par M. Blondel et ouvrages de Mathematique de M. Frenicle). A la Hâte chez P. Gosse & J. Neaulme. MDCC XXXI.
2. M. Frolow. Le problème d'Euler et les carrés magiques. Atlas. St. Petersbourg, 1884.
3. В. П. Ермаков. Полные волшебные квадраты. Средние волшебные квадраты с 16 клетками. Правильные волшебные квадраты с 16 клетками. «Журнал элементарной математики». Киев, 1884—1885.
4. G. Arnoux. Arithmétique grafique. (Les espaces arithmétiques hypermagiques). Gauthier — Villars. Paris, 1894.
5. И. А. Износков. О магических квадратах. (По поводу книги Арну.) Оттиск из «Известий Физ. Мат. о-ва при Казанском Ун-те». Казань, 1894.
6. И. А. Износков. Решение уравнений со многими неизвестными при помощи магических квадратов. «Вестник опытной физики и элементарной математики». Одесса, 1886—1916.
7. И. А. Износков. Полные численные квадраты. (Отдельный оттиск.) Казань, 1914.
8. J. Riollot. Les carrés magiques. Contribution a leur étude. Gautier — Villars. Paris, 1907.
9. H. Weidemann. Zauberquadrate und andere magische Zanlenfiguren der Ebene und des Raumes. Leipzig, 1922.
10. Я. В. Успенский. Избранные математические развлечения. Пг., Изд-во «Сеятель», 1924.
11. W. Ahrens. Mathematische Spiele. Fünfte, unveränderete Auflage. Leipzig und Berlin, 1927.
12. F. Fitting. Rein mathematische Behändlung des Problems der magischen Quadrate von 16 und 64 Feldern. «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung». Leipzig. 1931.
13. E. Cazalas. Carrés magiques au degré «n». (Series numérales de G. Tarry). Paris, 1934.

[1] Из фондов Государственной библиотеки имени В. И. Ленина в Москве.

14. K. M a c d o n a l d. Magic cubes which are uniform step cubes. «University of California press. Publications in mathematics», 1934.
15. W. S c h n e e. Über magische Quadrate und lineare gitterpunktprobleme. Acad.— Verl. Berlin, 1951.
16. Ц. Н е с с е л ь ш т р а у с. Альбрехт Дюрер. М., изд-во «Искусство», 1961.
17. В. Л и т ц м а н. Веселое и занимательное о числах и фигурах. (Перевод с 8-го нем. изд. и редакция И. Б. Погребысского). М., Физматгиз. 1963.
18. Б. А. К о р д е м с к и й. Математическая смекалка. Изд. 7-е. М., Физматгиз, 1963.
19. М. М. П о с т н и к о в. Магические квадраты. Изд-во «Наука», 1964

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ефим Яковлевич Гуревич

Тайна древнего талисмана

Утверждено к печати редколлегией серии научно-популярных изданий Академии наук СССР

Редактор *В. А. Никифоросский*
Редактор издательства *Е. М. Кляус*
Художник В. С. Комаров
Технический редактор *Л. В. Каскова*

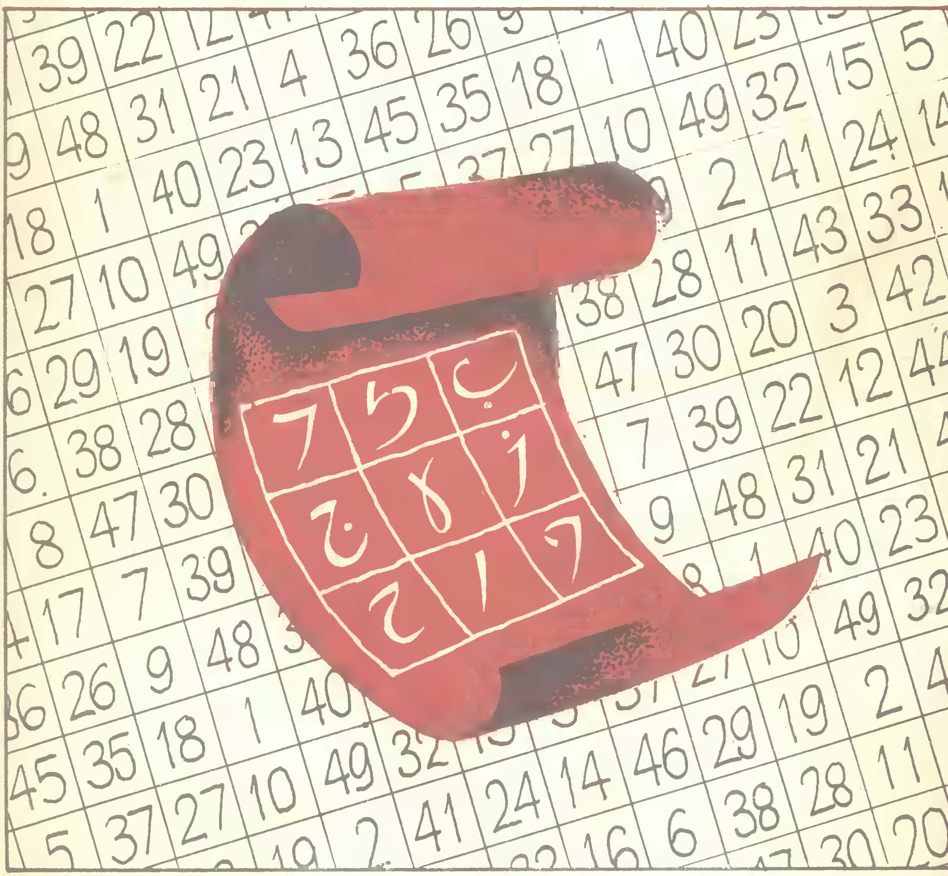
Сдано в набор 23/IX 1968 г. Подписано к печати 4/II 1969 г.
Формат 60×90$^1/_{16}$ Бумага № 1
Усл. печ. л. 9$^1/_2$ Уч-изд. л. 8,7 Тираж 50 000
Т-00967 Тип зак. 1157
Цена 29 коп.

Издательство «Наука»
Москва К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука».
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

Е. Я. ГУРЕВИЧ

ТАЙНА ДРЕВНЕГО ТАЛИСМАНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»