

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

А.Н. Тихомирова, Е.В. Сидоренко

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЛОГИСТИКЕ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2010

УДК 330.42(075)

ББК 65.053я7

Т46

Тихомирова А.Н., Сидоренко Е.В.. Математические модели и методы в логистике: Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 320с.

В книге изложены математические аспекты логистики как науки об оптимальном планировании деятельности предприятия с точки зрения минимизации издержек и повышения эффективности. В теоретической части книги читатель знакомится с основными понятиями и определениями логистики, ее функциональными областями и влиянием на деятельность промышленных предприятий. Практическая часть книги содержит постановку и детальный разбор 13 задач, связанных с наиболее известными проблемами, возникающими при планировании производства, в деятельности служб снабжения и реализации, при транспортировке готовой продукции, а также в кадровой политике.

Книга предназначена студентам, изучающим курс «Логистика» при обучении по специальности «Математические методы в экономике», а также будет полезна широкому кругу читателей, так как формирует навыки математического моделирования изучаемых предметных областей, развивает умение формально ставить проблему и создавать эффективные алгоритмы ее решения.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент – профессор кафедры «Экономика и менеджмент в промышленности» НИЯУ МИФИ, д-р техн. наук Гусева А.И.

ISBN 978-5-7262-1386-6

© Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2010.

# Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Теоретические аспекты логистики .....</b>	<b>8</b>
1.1. <i>Введение в логистику .....</i>	8
1.1.1. Основные понятия .....	9
1.2. <i>Логистические системы .....</i>	13
1.2.1. Основные определения .....	13
1.2.2. История развития логистики .....	15
1.2.3. Этапы развития логистических систем .....	16
1.2.4. Модели логистических систем .....	20
1.3. <i>Стратегия и тактика в логистике .....</i>	22
1.3.1. Основные понятия .....	22
1.3.2. Логистические концепции .....	28
1.3.4. Система МРП .....	33
1.4. <i>Системный подход в логистике .....</i>	35
1.4.1. Основные понятия .....	35
1.4.2. Виды моделей логистических систем .....	39
1.4.3. Принципы системного подхода .....	41
1.4.4. Виды логистических систем .....	43
1.5. <i>Логистический цикл промышленного предприятия .....</i>	45
1.5.1. Основные понятия .....	45
1.5.2. Мощности звеньев логистической цепи .....	46
1.5.3. Логистический цикл промышленного предприятия .....	51
1.5.4. Потоки промышленного предприятия .....	54
1.6. <i>Характеристика звена «Закупка» .....</i>	56
1.6.1. Основные понятия .....	56
1.6.2. А надо ли вообще закупать? .....	57
1.6.3. Что закупить и как найти? .....	59
1.6.4. Методы определения потребности в материалах .....	62
1.6.5. Сколько и когда закупить? .....	64

1.6.6. Типовые условия поставок .....	64
1.6.7. Выбор поставщика .....	66
1.6.8. Дополнительные задачи службы снабжения ....	68
<i>1.7. Характеристика звена «Производство» .....</i>	<i>69</i>
1.7.1. Логистическая и традиционная концепции организации производства.....	69
1.7.2. Принципы организации производства .....	70
1.7.3. Типы производства.....	75
1.7.4. Массовое производство .....	78
1.7.5. Поточное производство .....	81
1.7.6. Индивидуальное производство .....	84
1.7.7. Содержание договора.....	85
<i>1.8. Характеристика звена «Сбыт» .....</i>	<i>92</i>
1.8.1. Основные понятия .....	92
1.8.2. Функции маркетинга в рамках сбытовой логистики .....	92
1.8.3. Виды интеграции .....	94
1.8.4. Каналы распределения товаров .....	95
1.8.5. Типы посредников в каналах распределения ....	98
<i>1.9. Транспортная логистика .....</i>	<i>100</i>
1.9.1. Основные понятия.....	100
1.9.2. Терминалы.....	102
1.9.3. Тарифы .....	103
1.9.4. Грузораспределительные центры (ГРЦ) .....	104
1.9.5. Организация складов.....	105
<i>1.10. Информационная логистика .....</i>	<i>106</i>
1.10.1. Основные понятия.....	106
1.10.2. Классификация информационных потоков ...	107
1.10.3. Информационные системы.....	110
1.10.4. Использование информационной логистике при контроле движения товара .....	113
1.10.5. Преимущества использования единой информационной логистической системы.....	121

1.11. Кадровая логистика .....	122
1.11.1 Основные понятия .....	122
1.12. Incoterms .....	132
1.12.1. Основные понятия .....	132
1.12.2. Особенности Incoterms .....	133
1.12.3. Структура Incoterms .....	134
<b>ГЛАВА 2. Прикладные аспекты логистики .....</b>	<b>142</b>
2.1. Задачи прокладки коммуникаций и поиска оптимальных путей .....	142
2.1.1 Прокладка коммуникаций .....	142
2.1.2 Планирование сети дорог .....	152
2.1.3 Поиск кратчайших путей в дорожной сети .....	160
2.1.4. Прокладка коммуникаций между препятствиями .....	176
2.2. Задачи о назначениях .....	189
2.2.1. Максимальное число назначений .....	190
2.2.2. Оптимальные назначения .....	208
2.2.3. Назначения на критичный участок .....	217
2.2.4. Минимальное число покрывающих назначений .....	224
2.3. Задачи обслуживания .....	230
2.3.1. Размещение регулярных пунктов обслуживания .....	230
2.3.2. Размещение экстренных пунктов обслуживания .....	240
2.3.3. Маршрут китайского почтальона .....	253
2.3.4. Маршрут коммивояжера .....	261
2.3.5. Транспортная задача .....	295
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>308</b>
Приложение 1. Базовые понятия теории графов .....	308
Приложение 2. Вопросы к устному экзамену .....	315
<b>Список использованной литературы .....</b>	<b>318</b>

## Введение

В настоящее время для определения теории и практики движения сырья, материалов, производственных, трудовых и финансовых ресурсов, готовой продукции от их источника к потребителю широко используется термин "логистика".

В **теоретической части** приведены основные понятия и определения логистики, которые наиболее часто встречаются в литературе и являются общепринятыми. Очерчены функциональные области деятельности предприятия, в которых применяются логистические приемы планирования и управления.

Уже по своему лингвистическому происхождению логистика не может состоять (как это наблюдается в некоторых популярных публикациях) из одних определений и правильных лозунгов. Прежде всего, хотелось бы, чтобы эту науку воспринимали как действенный инструмент, позволяющий реально сократить расходы на всех этапах промышленного цикла и получить таким образом конкурентное преимущество в виде более низкой приемлемой цены при адекватном качестве товара или услуг. По оценкам специалистов, использование на предприятиях знаний по логистике может обеспечить сокращение издержек в сфере товарообращения на 20%, объема запасов на 30-70%, снижение себестоимости продукции на 30%. Производительность труда при внедрении методов логистики повышается на 20-50%. Это весьма веский аргумент для того, чтобы серьезно относиться к этой науке.

В ряде случаев проблему снижения издержек в конкретной области можно формализовать, сведя к одной из известных моделей, и, применив математические методы решения задач такого класса, получить оптимальное решение. Таких моделей существует огромное количество, но в целом их можно разделить на два обширных класса. Первый основан на вероятностных моделях и составляет курс эконометрики (задача прогнозирования рынка – типичная задача эконометрики). При альтернативном моделировании оперируют строго определенными величинами. Такие задачи обычно рассматривают в курсе логистики (задача

оптимальной доставки товаров – типичная задача логистики). В реальной жизни все неоднозначно: например задачу планирования производства можно ставить как вероятностную (неизвестно, когда кончится разработка нового нестандартного изделия) или как детерминистскую (при производстве традиционных изделий).

Несмотря на это, большинство проблем, регулярно возникающих перед специалистами предприятий в области минимизации издержек, за счет продуманного планирования необходимых путей доставки продукции, размещения складов, назначения работников и т.д., может быть сведено к базовому набору логистических задач, решаемых регулярным путем при использовании достаточно эффективных алгоритмов.

Подборка таких задач и алгоритмов их решения составила **практическую часть** данной книги. Подробно рассмотрены задачи планирования коммуникационных и дорожных сетей, а также размещения на этих сетях обслуживающих объектов. Особое внимание уделено проблемам, связанным с доставкой продукции, в частности, детально разобраны известная задача коммивояжера и транспортная задача. В конце книги показаны алгоритмы решения нескольких типовых задач о назначениях, возникающих в работе кадровых отделов.

**Приложение 1** содержит основные определения теории графов, необходимые для понимания методики решения большинства рассмотренных задач.

Список вопросов к устному экзамену по курсу «Логистика» для студентов Экономико-аналитического института НИЯУ МИФИ содержится в **приложении 2**.

---

---

# Глава 1. Теоретические аспекты логистики

---

---

## *1.1. Введение в логистику*

Управление предприятием должно осуществляться не по принципу непосредственного реагирования, а основываться на планировании упреждающих воздействий. Необходимо выходить на уровень осуществления интеграции планирования и контроля операций по организации производства с операциями маркетинга, сбыта, снабжения и финансов, организации единой логистической системы, охватывающей все подразделения предприятия. Это должно способствовать увязке часто противоречивых целей различных функциональных подсистем и подразделений.

Подобный подход к изучению производственно-хозяйственной деятельности предприятий возник на Западе в 20 – 30-е гг. XX в. и, развиваясь, сформировался в самостоятельное направление научно-практической деятельности, получившее название «логистика». На сегодняшний день логистика рассматривается учеными и специалистами как развивающаяся сфера экономики и новое научное направление.

Термин «логистика» в организационно-экономические науки пришел из французского языка и происходит от французского слова «loger» (размещение, расквартирование), которое употребляется в военной терминологии для определения движения военных грузов, их складирования и размещения, а также размещения и расквартирования военных подразделений. Также есть греческое слово «logistike», что означает искусство вычислять, рассуждать. В настоящее время термин «логистика» широко используется в деловом мире и определяет теорию и практику движения сырья, материалов, производственных, трудовых и финансовых ресурсов, готовой продукции от их источника к потребителю.



### 1.1.1. Основные понятия

*Предметом логистики* является комплексное управление всеми материальными и нематериальными (информационными, финансовыми, сервисными) потоками в системах. *Основными объектами* исследования в логистике являются: логистические издержки, информационный поток, логистическая система, логистическая функция, логистическая цепь, логистические операции, материальный поток и др. *Новизна концепции* логистики в управлении промышленными системами состоит во всестороннем комплексном подходе к вопросам движения материальных благ в процессе производства и потребления.

**ЛОГИСТИКА** – наука о планировании, управлении и контроле над движением материальных, информационных и финансовых ресурсов в различных системах.

На сегодняшний день существует большое количество определений термина «логистика». В 1985 г. Совет логистического менеджмента в США дал следующее определение, которое получило наибольшее признание за рубежом.

*Логистика* – процесс планирования, выполнения и контроля эффективного с точки зрения снижения затрат потока сырья, материалов, незавершенного производства, готовой продукции, сервиса и связанной информации от точки зарождения до точки потребления (включая импорт, экспорт, внутренние и внешние перемещения) для целей полного удовлетворения требований потребителей.

В рамках логистической науки изучаются:

- закупочная или снабженческая логистика,
- логистика производственных процессов,
- сбытовая или распределительная логистика,
- транспортная логистика,
- информационная логистика.

**Основная цель логистики** – обеспечить наличие необходимого продукта в необходимом количестве, в необходимом состоянии, в необходимом месте, в необходимое время и по подходящей потребителю цене с минимальными для предприятия издержками. Условие достижения цели – чтобы сырьевые материалы, полуфабрикаты, товары и их компоненты прежде всего были готовы для перехода в новое звено производственной цепи (монтажирование, комплектация заказов, отправление, доставка), когда возникает спрос внутри производства, либо за его пределами. Поставка материалов, сырья, готовой продукции “точно в срок” оказывает благоприятное влияние на функционирование всей экономической системы, позволяет существенно (иногда в 3-4 раза) сократить запасы на складах промышленных предприятий.

Основные функции специалистов по логистики:

- оптимизация материальных потоков,
- осуществление комплексных мероприятий по рационализации товаров и упаковки,
- унификация грузовых единиц (пакетизация, контейнеризация перевозок),
- реализация эффективной системы складирования,
- оптимизация величины заказов и уровня запасов,
- планирование наивыгоднейших маршрутов перемещения грузов на складских объектах предприятий и за их пределами на магистральном транспорте.

При внедрении логистической системы на производство необходимо соблюдать следующие наиболее существенные концептуальные положения:

- применение системного подхода (интеграция и обеспечение четкого взаимодействия всех элементов логистической системы). Реализация этого положения заключается в разработке и осуществлении единого технологического процесса производственно-транспортной системы, в переходе от конструирования отдельных видов оборудования, к созданию комплексных производственно-складских и производственно-транспортных систем. Системный подход позволяет сократить

продолжительность и осуществить оптимизацию производственного цикла и повысить производительность во всех звеньях логистической системы,

- индивидуализация требований к оборудованию и промышленной продукции (отказ от универсальности в пользу более полного соответствия оборудования конкретным условиям),
- модернизация технологических процессов с целью создания современных условий труда, исключение неблагоприятного воздействия на внешнюю среду;
- расчет совокупности издержек на протяжении всей логистической цепочки с ориентацией на рынок;
- развитие услуг сервиса на современном уровне, обеспечение гибкости, надежности, высокого качества.

В современных условиях все предприятия ведут свою деятельность в условиях неопределенности. Поэтому способность к адаптации, которой обладает логистическая система, является очень востребованной. Высокая надежность и обеспечение устойчивости – один из фундаментальных принципов ее функционирования.

#### Научную базу логистики составляют дисциплины:

- математика (теория вероятности, теория случайных процессов, методы оптимизации, матрицы, математическая статистика, функциональный анализ, факторный анализ);
- исследования операций (линейное, нелинейное и динамическое программирование, теория игр и статистических решений, теория массового обслуживания, методы управления запасами, методы имитационного моделирования и сетевого планирования);
- техническая кибернетика (теории больших систем, прогнозирования, управления, автоматического регулирования, графов, идентификации, информации, связи, расписаний, оптимального управления);
- экономическая кибернетика и экономика (теория оптимального планирования, методы экономического прогнозирования, маркетинг, менеджмент, стратегическое и

оперативное планирование, производственный менеджмент, ценообразование, управление персоналом, качеством, проектами, инвестициями, дистрибуция, организация продаж, предпринимательство, финансы, бухучет, социальная психология, эконометрика, организация транспорта, складского хозяйства, торговли).

### Причины активного развития логистики:

- быстрый рост затрат на перевозки, вызванный расширением географии деятельности предприятий;
- переход от рынка продавца к рынку покупателя – для дальнейшего продвижения товара на рынке необходимо улучшение работы в сфере распределения;
- развитие компьютерных технологий, позволяющих осуществлять обработку огромных массивов информации и обмениваться данными в реальном времени с минимальными затратами;
- усложнение системы рыночных отношений и повышение требований к качественным характеристикам процесса распределения;
- создание гибких логистических систем;
- усиление влияния фактора времени при выполнении заказов;
- развитие международного взаимодействия, появление большого числа иностранных производителей на рынке;
- внедрение в хозяйственную практику ЭВМ последних поколений, используемых в сфере товародвижения;
- унификация правил и норм по поставке товаров во внешнеэкономической деятельности, устранение различного рода импортных и экспортных ограничений и т.д.

На сегодняшний день наблюдается информационное перенасыщение общества. Часто тиражируемая информация является излишней, поэтому необходимо изучение и преподавание

логистики, так как очевидна актуальность науки на современном этапе развития производства.

Актуальность логистики заключается в пяти факторах: информационном, техническом, экономическом, организационно-экономическом и специфическом (для российских условий), связанном с регулированием хозяйственных процессов.

Применение логистических подходов в совокупности с экономическими методами обеспечивает соединение теории с практикой производственных структур. С помощью этих методов обеспечивается экономическая заинтересованность хозяйствующих субъектов в повышении эффективности конечных результатов хозяйственной деятельности за счет экономии и прибыли от логистических операций и услуг.

Использование логистических подходов и развитие горизонтальных хозяйственных связей способствует повышению конкурентоспособности предприятий в процессе обслуживания заказчиков, в повышении качества поставки продукции и т.д. Методы логистики выступают надежным инструментом для улучшения позиций компании на рынке. Многообразие логистических операций и услуг позволяет значительно расширить возможности коммерческо-посреднических организаций по обслуживанию предприятий поставщиков и потребителей продукции.

## ***1.2. Логистические системы***

Логистическая система должна охватывать и согласовывать процессы производства, закупок и распределения продукции, а также быть основой при стратегическом планировании и прогнозировании.

### **1.2.1. Основные определения**

*Логистическая система* (ЛС) – это организационно завершённая (структурированная) экономическая система, которая состоит из элементов-звеньев, взаимосвязанных в едином процессе

управления материальными и сопутствующими им потоками, причём задачи функционирования этих звеньев объединены общими целями организации бизнеса и (или) внешними целями.

**Логистические операции** (функции) – действия, осуществляемые над материальными (или сопутствующими) потоками в логистической системе.

**Логистическая цепь** – несколько звеньев, упорядоченных по какому-либо потоку.

**Полная логистическая цепь** – упорядоченное по какому-либо потоку множество звеньев, по которым этот поток проходит от своего входа в логистическую систему до выхода из нее.

**Логистическая сеть** – все звенья логистической системы, взаимосвязанные между собой по материальным и сопутствующим им потокам. От понятия «логистическая система» логистическую сеть отличает отсутствие логистического менеджмента, реализующего целевую функцию системы.

Очевидно, что в реальных организациях бизнеса полные логистические цепи (соответствующие определению) встречаются крайне редко. Поэтому концепцию общих издержек обычно связывают с понятием логистического канала.

**Логистический канал** – множество звеньев логистической системы, которое включает в себя все логистические цепи, проводящие материальные потоки от поставщиков материальных ресурсов до конечных потребителей.

#### Типы звеньев:

- генерирующие материальные и сопутствующие потоки,
- преобразующие материальные и сопутствующие потоки,
- поглощающие материальные и сопутствующие потоки,
- смешанные.

#### Информация логистических систем отражает:

• **внешнюю среду организации** – сведения о поставщиках сырья, товаров и их надежности, данные о потребителях продукции и посредниках (в т.ч. результаты взаимодействия с ними), информацию о рынке сбыта (какая продукция и ее модификации

пользуются спросом у разных потребителей, посредников, в разных регионах и т. д.);

- ***внутреннюю среду организации*** – данные о состоянии и движении материальных потоков в организации, сведения об имеющихся запасах сырья, объеме продукции в производстве, объеме готовой продукции на складах, информация о реализации продукции во времени.

#### Задачи, решаемые в рамках логистических систем:

- сбор и обработка заказов;
- управление закупками сырья, материалов;
- учет материалов, полуфабрикатов, продукции на складах в натуральной и в денежной форме;
- контроль состояния запасов;
- прогнозирование потребности в продукции;
- прогнозирование потребности в транспорте;
- определение последовательности и звенности продвижения материального потока по логистической цепи и т. п.

### **1.2.2. История развития логистики**

С момента возникновения рыночных отношений система движения товаров прошла несколько стадий.

Можно обозначить три периода развития систем товародвижения материальной продукции:

1. дологистический период,
2. период классической логистики,
3. период неологистики.

#### Дологистический период, до 1950-х годов:

- фрагментарный характер системы управления распределением материальных ресурсов;
- отсутствие связей между транспортом и материально-техническим обеспечением;
- недооценка роли транспорта в обеспечении эффективной работы компании.

**Критерий эффективности:** минимальные транспортные затраты на перевозку собственным подвижным составом.

Период классической логистики, 1950-80-е годы:

- создание логистических систем вместо организации оптимальных перевозок на фирмах;
- минимизации затрат на материальное распределение;
- использование внутрифункциональных компромиссов.

**Критерий эффективности:** максимальная прибыль от логистических операций для всех предприятий, находящихся в одной логистической цепи.

Период неологистики, после 1980-х годов:

- применение «комплексного» подхода («подход на основе всего предприятия») при формировании логистических систем;
- создание логистической системы на основе общей цели предприятия;
- достижение межфункциональных компромиссов в компании;
- выход логистической системы за пределы экономической среды и учет социальных, экологических и политических аспектов;
- разработка методических основ калькуляции издержек.

**Критерий эффективности:** минимизация общих издержек товародвижения и производства всего предприятия.

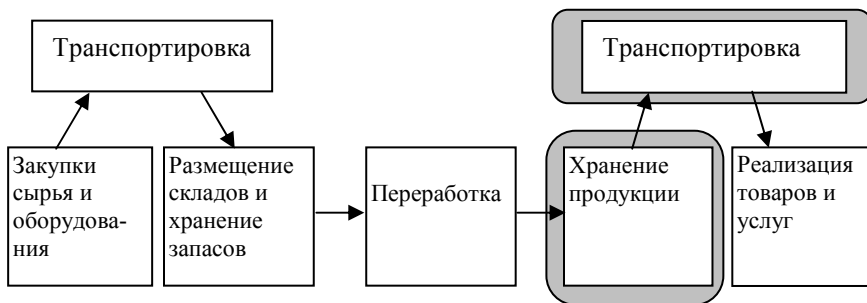
### 1.2.3. Этапы развития логистических систем

Анализ ведущих промышленных компаний различных капиталистических стран позволил выявить четыре последовательные стадии развития логистических систем на предприятии по состоянию на конец 1980-х – начало 1990-х гг.

Для *первой стадии* развития логистики характерен ряд следующих моментов. Компании работают на основе выполнения сменно-суточных плановых заданий, форма управления логистикой

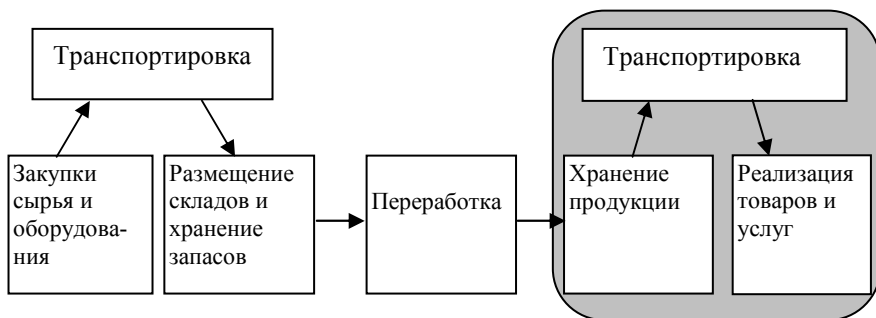


наименее совершенна. Область действий логистической системы обычно охватывает *организацию хранения готовой продукции, отправляемой с предприятия, и ее транспортировку.*



*Рис. 1.1. Схема работы компании при первой стадии развития логистики*

Система действует по принципу непосредственного реагирования на ежедневные колебания спроса и сбои в процессе распределения продукции. Работу системы логистики на данной стадии ее развития в компании обычно оценивают величиной доли затрат на транспортировку и другие операции по распределению продукции в общей сумме выручки от продажи (рис. 1.1.).



*Рис. 1.2. Схема работы компании при второй стадии развития логистики*

Для компаний, имеющих системы логистики **второго уровня** развития, характерно управление потоком производимых предприятиями товаров *от последнего пункта производственной линии до конечного потребителя*.

Работа логистической системы оценивается исходя из сопоставления данных сметы расходов и реальных затрат (рис. 1.2.).

Системы логистики **третьего уровня** контролируют логистические операции *от закупки сырья до обслуживания конечного потребителя продукции*. Единственная сфера, которая не контролируется менеджером по логистике, — это повседневное управление предприятием.

Работа системы оценивается не сравнением затрат прошлого года или сметы расходов, а сравнением со стандартом качества обслуживания. При этом компании стремятся повысить производительность системы, а не сократить затраты, как это характерно для систем второго уровня. Управление осуществляется не по принципу непосредственного реагирования, оно основано на планировании упреждающих воздействий (рис. 1.3.).

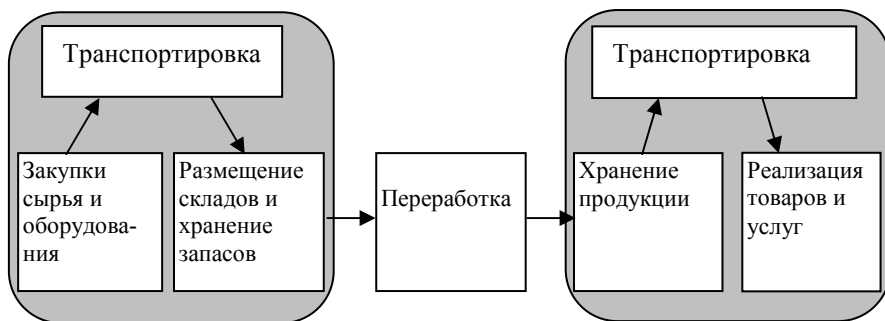
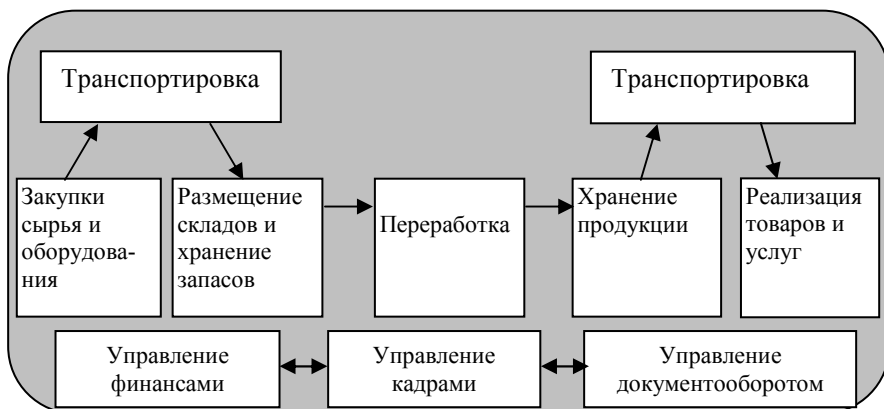


Рис. 1.3. Схема работы компании при третьей стадии развития логистики

Число компаний, использующих логистические системы **четвертого уровня** развития, пока еще невелико. Такие компании интегрируют процессы планирования и контроля операций

логистики с операциями маркетинга, сбыта, производства и финансов. Интеграция способствует увязке часто противоречивых целей различных подразделений компании. Управление системой осуществляется на основе долговременного планирования (рис. 1.4.).



*Рис. 1.4. Схема работы компании при четвертой стадии развития логистики*

Практический опыт работы фирм в разных странах мира показал, что восхождение от низшей стадии развития систем логистики к более высоким стадиям происходит как постепенно, так и (при возникновении благоприятных условий) скачкообразно. Такими условиями могут быть слияние предприятий, новый режим управления, политические инициативы (например, принятие закона о свободной торговле).

Переход на более высокий уровень в лучшем случае обычно длится от шести месяцев до двух лет, а переход от первой стадии развития к четвертой занимает около 20 лет. Однако ожидается его сокращение до 10 лет в связи с возросшим давлением международной конкуренции и возможностью использования опыта фирм, уже проделавших этот путь.

## 1.2.4. Модели логистических систем

Каждая логистическая система имеет определенные границы, которые задаются циклом обращения средств производства. Начало каждого производственного цикла (рис.1.5.) состоит в закупке средств производства, которые в виде материального потока поступают в логистическую систему и затем уходят из логистической системы в потребление в обмен на поступающие в логистическую систему финансовые ресурсы.

Различные методы моделирования являются одним из инструментов логистики.

**Логистическая модель** – это любой образ, абстрактный или материальный, логистического процесса или логистической системы, используемый в качестве их заместителя. Целью моделирования – является прогноз поведения системы в будущем. Ключевой вопрос моделирования «что будет, если...?»

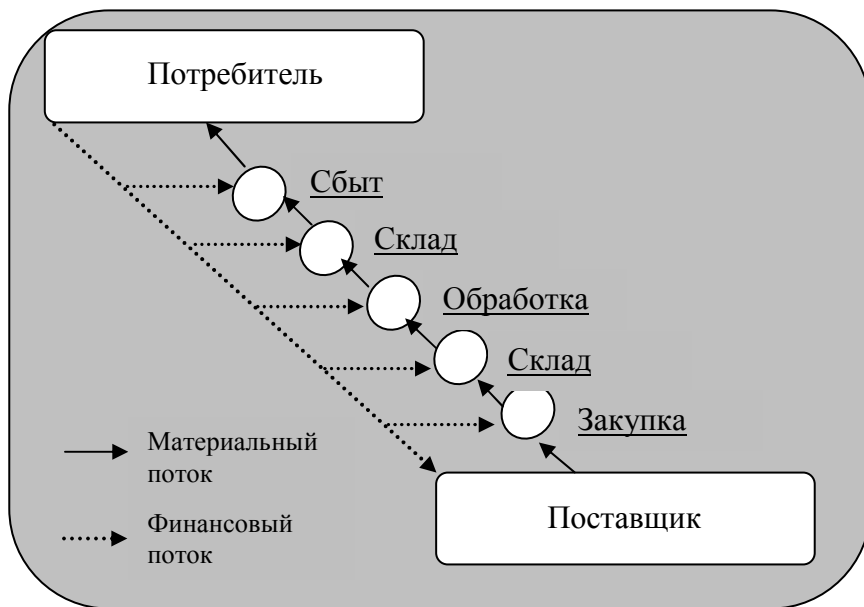


Рис. 1.5. Схема производственного цикла предприятия

С целью упорядочивания способов моделирования можно провести классификацию различных способов моделирования. Наиболее важным признаком для классификации является степень соответствия логистических систем моделируемым объектам. По этому признаку все логистические модели можно разделить на изоморфные и гомоморфные.

**Изоморфные модели** – это модели, обладающие всеми характеристиками объекта-оригинала, способные, по существу, заменить его. Модель данного вида дает точное знание об объекте и позволяет получить достоверный прогноз.

**Гомоморфные модели** – модели, являющиеся частичным подобием искомого объекта. Однако получение абсолютного подобия невозможно, так как не все стороны функционирования реального объекта поддаются моделированию.

Другим важным признаком классификации является материальность модели. В соответствии с этим признаком все модели можно разделить на материальные и абстрактные.

**Материальные модели** – модели, реализующие основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого явления или объекта.

**Абстрактные модели** – модели, позволяющие создать подобие реального объекта с его параметрами и функциями. Среди абстрактных моделей выделяют символические и математические.

**Символическим модели** – языковые и знаковые модели.

**Языковые модели** – это словесные модели, в основе которых лежит набор слов (словарь, «тезаурус»), очищенный от неоднозначности. Обычно при использовании этих моделей каждому слову ставится в соответствие единственное понятие, в то время как в обычном словаре одному слову могут соответствовать несколько понятий.

**Знаковые модели** – модели, использующие условное обозначение (знаки) для отдельных понятий и операций

**Математические модели** – математические объекты, поставленные в соответствие данному реальному объекту. В логистике широко применяются два вида математического моделирования: аналитическое и имитационное.

**Аналитическое моделирование** – это математический прием исследования логистических систем, позволяющий получить точные решения.

Аналитическое моделирование осуществляется в следующей последовательности (рис.1.6.):



Рис. 1.6. Этапы аналитического моделирования

**Имитационное моделирование** – процесс моделирования, позволяющий получить возможные количественные параметры путем варьирования входящих данных, при этом логистический процесс остается «черным ящиком». Имитационное моделирование включает в себя два основных процесса: первый – конструирование модели реальной системы; второй – постановка экспериментов на этой модели.

## 1.3. Стратегия и тактика в логистике

### 1.3.1. Основные понятия

Комплексное логистическое управление предприятием начинается с формулировки основной стратегической цели и

выработки важнейших стратегических решений. Затем, уже в соответствии с такими решениями, планируется деятельность фирмы.

**Стратегия** – определение направления развития предприятия, т.е. совокупности главных целей («куда двигаться»).

**Тактика** – реакция организации на объективные внешние и внутренние обстоятельства ее деятельности, включающая в себя выбор методов достижения стратегически определенных главных целей при условии существующих ограничений («как двигаться»).

Порядок принятия стратегических решений будет несколько отличаться в случае, если речь идет о внедрении логистической системы управления на уже существующем предприятии, и в том случае, если организация создается «с нуля».

Если предприятия еще нет, но есть средства для его создания и желание заниматься именно производством продукции (а не, скажем, торговлей), то все начинается именно с рассмотрения этих средств, точнее, их количества. Не вдаваясь в экономико-математические расчеты, бесполезные при отсутствии точных цифр, можно отметить, что изначально надо определиться с типом производства: массовое или индивидуальное. Как правило, серьезное массовое производство подразумевает весьма дорогостоящее оборудование, поточные линии, значительные по размеру помещения. Даже при не слишком высокой доходности за счет большого оборота такое производство экономически более эффективно и наверно более стабильно. Индивидуальное (иногда пренебрежительно называемое «кустарным») производство можно организовать и запустить, имея значительно меньший объем средств, чем необходимо для запуска производства массового. Кроме того, по началу можно обойтись меньшим штатом сотрудников и небольшими помещениями. При разумном управлении индивидуальное производство выпускает не кустарную (левую, дешевую и т.д.) продукцию, а эксклюзивные изделия, делая упор на удовлетворение всех пожеланий заказчиков-покупателей. Такая продукция (по сути представляющая собой ручную работу) всегда стоит дороже, чем выпущенная на конвейере, объемы выпуска никогда не бывают слишком значительными, однако

устойчивость таких предприятий зачастую выше, чем у промышленных гигантов.

При выборе типа производства в соответствии с имеющимися свободными денежными средствами надо исходить из того, чтобы этих средств хватило не только на обустройство помещений, закупку, наладку и запуск оборудования, но и на обеспечение функционирования предприятия в течение полного производственного цикла, минимум трех месяцев, или, если продукция носит сезонный характер, на период до наступления требуемого сезона. Например, фабрика по выпуску елочных украшений весь год производит игрушки, которые продаются только в течение второй половины декабря. Такие факторы должны учитываться в обязательном порядке.

Дальнейшая детализация принимаемых в этом случае стратегических решений будет совпадать с ситуацией, когда на существующем и неэффективно работающем предприятии вводится система управления. Единственное отличие – в большем количестве различных вариантов, поскольку нет привязки к уже имеющемуся оборудованию и производственным помещениям.

Итак, производится реорганизация существующего промышленного предприятия, для чего, как правило, приглашается специалист или команда логистов высокого уровня. Сначала необходимо определиться с основной стратегической целью. Естественно, что бизнес создается ради получения прибыли, поэтому выбрать можно из двух идеологий «быстрые деньги» или «устойчивый рост». В случае с промышленными предприятиями первый вариант почти наверняка нереализуем, поэтому единственно разумная стратегическая цель может быть сформулирована, например, как «Устойчивый рост предприятия и поддержание приемлемой доходности в течение длительного периода времени». После формулировки цели нужно принять ряд базовых стратегических решений, а именно: что выпускать, как продавать, как управлять, привлекать ли инвестиции.

### ***Что выпускать***

В каком направлении перепрофилировать неэффективно работающее производство? Для ответа на этот вопрос



целесообразно произвести ряд действий исследовательско-аналитического характера, в том числе:

- определить перечень продукции, выпуск которой является профильным для данного предприятия, либо продукции, для выпуска которой на первых этапах требуется не слишком значительное переоснащение производства;
- изучить рынок сбыта профильной для данного предприятия продукции;
- рассчитать ожидаемую себестоимость выпуска вошедших в этот перечень видов продукции и сравнить полученные цифры с имеющимися на рынке, определив таким образом (весьма грубо) предполагаемую доходность;
- на основе исследования рынка в данном регионе и изучения транспортных маршрутов оценить объемы возможного потребления;
- сделать вывод о том, какого рода продукцию и в каком соотношении стоит производить.

### ***Как продавать***

В рамках стратегического ответа на этот вопрос фигурирует именно концептуальное решение об использовании каналов распределения и их структуре (использовать ли посредников и в каком качестве-количестве), а также о приоритетных формах продаж, допустимых способах оплаты, мерах по продвижению товара на рынок. Детальное планирование рекламных бюджетов, работы сервисных служб и т.д. лежит уже на административно-управленческом составе и относится к тактике управления предприятием.

### ***Как управлять***

По сути, речь идет о создании эффективной структуры управления, которую можно проектировать как сложную иерархическую схему, отражающую подчиненность административного состава, сферы ответственности и взаимного контроля. Принятие такой структуры, шаблона является именно стратегическим шагом. Соответствующее решение должно

приниматься владельцем контрольного пакета акций самостоятельно или же с подачи независимого, приглашенного со стороны, эксперта-логиста или кризис-менеджера. Создание структуры, особенно на трех-пяти верхних уровнях, ни в коем случае нельзя доверять тем, кто в ней будет работать в качестве управленца, иначе велик риск, что структура будет скорее удобна в управлении, чем действительно эффективна.

Заполнение структуры конкретными людьми, формирование штата каждого отдела, способ и периоды назначения руководства – это уже решения тактические. На долю стратега остается всего лишь один кадровый вопрос: глава этой структуры. Точнее, глава на ближайший период и строгий, заранее регламентированный, порядок его смены-перевыборов, как в штатном случае (истечение срока), так и в случае выявления серьезных управленческих ошибок или появления отрицательных экономических результатов деятельности. Это необходимо и для обеспечения гибкости системы. В современных условиях логистическая система должна обладать способностью краткосрочной адаптации, поэтому важно выделить элементы, обеспечивающие оперативное изменение тактических решений в рамках выбранного стратегического направления.

### ***Привлечь ли инвестиции***

В реальных условиях, если вы – не государственная структура и деньги вам дают под процент и под вполне ликвидное (и тоже, кстати, ваше) имущество, вопрос «брать или не брать» эти самые инвестиции весьма сложен. Конечно хуже, когда деньги даже взять негде, но это уже другая ситуация. Рассмотрим положительные и отрицательные стороны взятия чужих денег для создания собственного дела. Несомненные плюсы: есть возможность купить хорошее оборудование, большую партию нужных комплектующих и вообще встать на ноги, причем весьма оперативно: освоить пару-тройку сотен тысяч долларов за пару-тройку месяцев и начать выпускать не слишком технологичную продукцию – вполне реально. Несомненные минусы: рано или поздно деньги придется отдавать, причем с процентами. В лучшем случае, на это пойдет вся чистая прибыль, и тогда во время

расплаты вы не сможете в достаточном количестве вкладывать средства в развитие уже собственного предприятия, что, как известно, ведет к печальному финалу. В худшем случае, денег просто может не хватить, тем более всегда есть риск того, что все пойдет не так, как задумано. Кроме того, следует учитывать тот факт, что хотя в настоящее время и наблюдается некоторый выход из тени предприятий малого и среднего бизнеса, однако этот процесс еще не приобрел массового характера. Соответственно, часть конкурентов будет работать хотя бы частично в черную, что позволит им держать цену, несколько более низкую, чем приемлемая для вас. Ведь если кредит взят официально, то и отдавать его тоже придется официально, т.е. показывать значительный оборот и платить с него (а также с зарплаты и прибыли), как известно, отнюдь не маленькие налоги. Неофициально кредит брать тем более не следует, примеров тому в свое время была масса. Осторожные люди считают, что кредит достаточно спокойно можно брать под конкретный контракт на производство партии продукции. Если такого контракта нет, риск все же весьма значительный, и в любом случае на него не стоит идти ранее, чем через год после начала деятельности предприятия, и то в том случае, если эта деятельность является эффективной и устойчивой.

На этом функции главного стратега заканчиваются – далее следуют тактические решения, заниматься которыми должен обязательно другой человек. Его задача – в рамках выбранной стратегии развития разработать тактический или общехозяйственный план фирмы.

**Логистическое планирование** – действия по рациональному управлению и координации потоковых процессов для достижения стратегических целей предприятия. Результатом исследовательской и практической работы в области планирования деятельности предприятия может являться логистик-план, как документ, в котором в структурированном виде представлены конкретные пути достижения поставленных целей. Логистик-план рассматривается как программа, направляющая деятельность предприятия в течение продолжительного периода времени.

Процесс планирования логистической стратегии завершается контролем, при котором оценивается ожидаемая степень достижения стратегических целей. Гибкость логистик-плана предполагает его корректировку при изменяющейся деловой и социальной обстановке.

В процессе оперативного планирования разрабатываются планы текущей логистической деятельности (функциональные планы по сферам снабжения, производства, сбыта) и ситуационные планы (мероприятия для непредвиденных, нежелательных изменений). В рамках оперативного планирования осуществляется финансовое планирование, в процессе которого составляются бюджеты для подразделений, предприятия в целом и производится контроль за эффективностью использования финансовых ресурсов.

### **1.3.2. Логистические концепции**

В процессе планирования текущей хозяйственной деятельности промышленного предприятия большое внимание уделяется функционированию службы снабжения, которое прямо влияет на формирование правил пополнения запасов во всех логистических звеньях. В настоящее время в мире разработано и используется множество логистических концепций. Принципиально среди них можно выделить представителей двух различных типов – «тянущие» системы и «толкающие» системы.

**«Тянущие» системы (*pull systems*)** – системы, в которых последующий участок производства заказывает и изымает детали, сборочные единицы с предыдущего участка. Размещение заказов на пополнение запасов материальных ресурсов или готовой продукции происходит, когда количество их в определенных звеньях логистической системы достигает критического уровня. При этом запасы «вытягиваются» по распределительным каналам от поставщиков материальных ресурсов или логистических посредников в системе дистрибуции.

**«Толкающие» системы** – системы, рассматривающие все звенья производства как единое целое. Ставка делается на

планирование материалопотока. При этом недостаточно строго отслеживается спрос и обязательно наличие страховых запасов.

Таблица 1.1. Основные отличия тянущих и толкающих систем

Характеристика	Тянущие	Толкающие
Закупка	Небольшое число поставщиков, частые поставки, жесткий график поставок	Много поставщиков, нерегулярные поставки, партии крупные
Производство	Ориентация на изменение спроса	Ориентация на максимальную загрузку производственных мощностей
Оперативное управление	Децентрализованно. Следование графикам контролируется руководством на местах	Централизованно. Следование графикам контролируется специальными отделами
Специфика оборудования	Универсальное	Специализированное
Персонал	Высококвалифицированные, универсальные	Узко специализированные
Запасы	Практически отсутствуют	Имеются, в том числе определенный уровень страхового запаса
Распределение	Ориентация на конкретного потребителя (различный размер партии)	Ориентация на «усредненного» потребителя (стандартная партия)

Самой известной среди «тянущих» концепций является концепция **«точно в срок»** (just-in-time, JIT). С логистических позиций концепция «точно в срок» основана на довольно простой бинарной логике управления запасами без какого-либо ограничения к требованию минимума запасов. Согласно этой концепции потоки материальных ресурсов тщательно синхронизированы с потребностью в них, задаваемой производственным расписанием выпуска готовой продукции.

Подобная синхронизация есть не что иное, как координация двух базисных логистических функций: снабжения и производственного менеджмента. В дальнейшем эта концепция была успешно применена и в дистрибуции, системах сбыта готовой продукции, а в настоящее время — и в макрологистических системах.

В идеальном случае материальные ресурсы или готовая продукция должны быть доставлены в определенную точку логистической цепи (канала) *именно в тот момент, когда в них есть потребность* (не раньше, не позже), что исключает излишние запасы, как в производстве, так и в дистрибуции. Многие современные логистические системы, основанные на данном подходе, ориентированы на короткие составляющие логистических циклов, что требует быстрой реакции звеньев логистической системы на изменения спроса и производственной программы.

В концепции «точно в срок» существенную роль играет спрос, определяющий дальнейшее движение сырья, материалов, компонентов, полуфабрикатов и готовой продукции. Короткие составляющие логистических циклов в системах, применяющих данный подход, способствуют концентрации основных поставщиков материальных ресурсов вблизи главной фирмы, осуществляющей процесс производства или сборки готовой продукции. Фирма старается выбрать небольшое число поставщиков, отличающихся высокой степенью надежности поставок, так как любой сбой в поставках может нарушить производственное расписание. В соответствии с этой концепцией поставщики становятся, по существу, партнерами производителей готовой продукции в их бизнесе. Для эффективной реализации технологии ЛТ должны работать с надежными телекоммуникационными системами и информационно-компьютерной поддержкой.

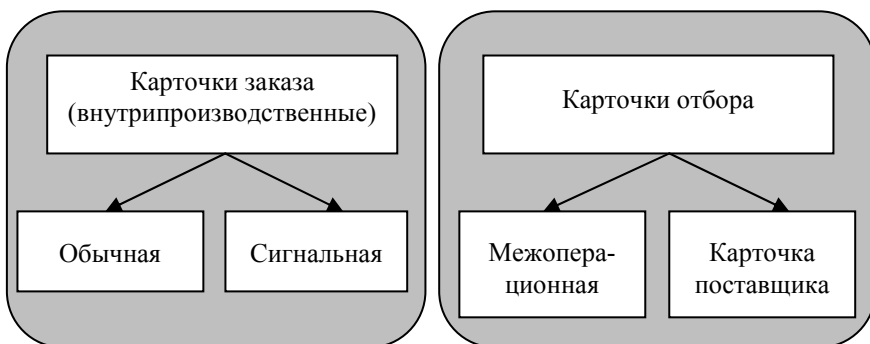
Система ЛТ имеет также различные модификации, одной из распространенных является система «Семь 0». Суть данной модификации заключается в соблюдении следующих положений:

- 0 дефектов (высокое качество);
- 0 простой (минимальное время наладки при смене изделия);

- 0 размер партии на рабочем месте;
- 0 потери во времени и затрат на транспорте;
- 0 сверхнормативной продукции;
- 0 простоев при устранении неисправностей;
- 0 длительность цикла (результат выполнения всех предыдущих пунктов).

Но необходимо обратить внимание на то, что «0» – это условное обозначение стремления к минимизации неизбежных явлений.

Одной из первых попыток практического внедрения концепции «точно в срок» явилась разработанная корпорацией Toyota Motor микрологистическая система KANBAN (что в переводе с японского означает «карта»). Сущность системы KANBAN (рис.1.7.) заключается в том, что все производственные подразделения завода, включая линии конечной сборки, снабжаются материальными ресурсами только в том количестве и к такому сроку, которые необходимы для выполнения заказа, заданного подразделением-потребителем. Таким образом, в отличие от традиционного подхода к производству, структурное подразделение-производитель не имеет общего жесткого графика производства, а оптимизирует свою работу в пределах заказа подразделения фирмы, осуществляющего операции на последующей стадии производственно-технологического цикла.



*Рис. 1.7. Основные виды карточек KANBAN*

Средством передачи информации в системе является специальная карточка «KANBAN» в пластиковом конверте. Сопровождающие работу карточки бывают нескольких видов.

**Обычная карточка заказа** содержит вид и количество продукции, которая должна быть изготовлена на предшествующей технологической стадии.

**Сигнальная карточка** содержит описание партии изделия.

**Межоперационная карточка отбора** содержит вид и количество изделий, которые должны поступить с предшествующего участка.

**Карточка поставщика** содержит инструкции по поставке комплектующих изделий.

Анализ мирового опыта применения микрологистической системы KANBAN многими известными машиностроительными фирмами показывает, что она дает возможность уменьшить производственные запасы на 50%, товарные – на 8% при значительном ускорении оборачиваемости оборотных средств.

Другой классический пример внедрения описанной концепции – корпорация Chrysler (ныне уже самостоятельно не существующая по причине объединения с Daimler-Benz). До этого между поставщиками и предприятиями корпорации осуществлялись перевозки большого объема грузов, в основном мелкими партиями. Автомобили в течение одной поездки вынуждены были делать большое число остановок, поскольку транспорт фраговался несколькими предприятиями одновременно. При перевозке груза от места отправления до места назначения его могли перепутать, процент потери и повреждения груза был очень высоким. Получатели до момента прибытия автомобилей не знали ничего о характере груза и его количестве. Было ясно, что такая система перевозок себя не оправдывает.

В 1984 г. корпорация Chrysler начала реализовывать на перевозках мелких партий грузов программу доставки «точно в срок». К 1988 г. почти 80% объема перевозок грузов осуществлялось по этой системе. Это позволило сократить расходы на перевозку почти на 15%, при этом надежность доставки увеличилась, приблизительно в 2 раза снизилось время перевозки, уменьшились складские запасы сырья.



Для усовершенствования этой системы и возможности прогнозирования количества перевозок Chrysler внедрила впоследствии систему электронного обмена данными между всеми поставщиками и разработала автоматизированную систему планирования потребностей в материалах. Новая система получила название SDP («гарантированное снабжение»). Основным положением этой системы стало планирование замкнутой цепочки перевозок. Система обеспечивала погрузку материала у поставщиков и его доставку на завод корпорации в соответствии с заданным графиком. Помимо перевозки материалов осуществлялся возврат многооборотной тары и контейнеров.

При использовании системы SDP на каждого из партнеров налагались жесткие обязательства. Каждое утро службам перевозок и снабжения передавалась информация о потребностях в материале и порядке его доставки поставщиками на данный день и декадный прогноз. Данные прогноза могли меняться, но они давали представление о перспективном объеме перевозок, что позволяло их планировать. Маршруты, разработанные транспортными службами, подлежали согласованию с корпорацией. Внесение изменений в маршрут требовало предварительного согласования его со всеми партнерами. При возникновении каких-либо проблем транспортные службы должны были достаточно гибко подойти к их решению.

Организация перевозок по системе SDP позволила получить экономию за счет сокращения расходов на транспортировку и погрузку. Наличие информации о погрузке, поступающей в реальном масштабе времени, повысило надежность доставки, что позволило снизить объемы внутризаводских запасов с двухдневной потребности до 4 – 6-часовой.

#### **1.3.4. Система МРП**

Система МРП (Material Requirements Planning (MRP)) – планирование потребности в материалах, или система планирования производственных ресурсов. Основной характеристикой данной системы является автоматизация

управления заказами, поставками, а также контроля и учета всего товарного процесса. Метод МРП (рис.1.8.) применяется на уровне микрологистики и требует централизованного управления ресурсами, четкого подчинения сетевых структурных единиц управляющему центру.

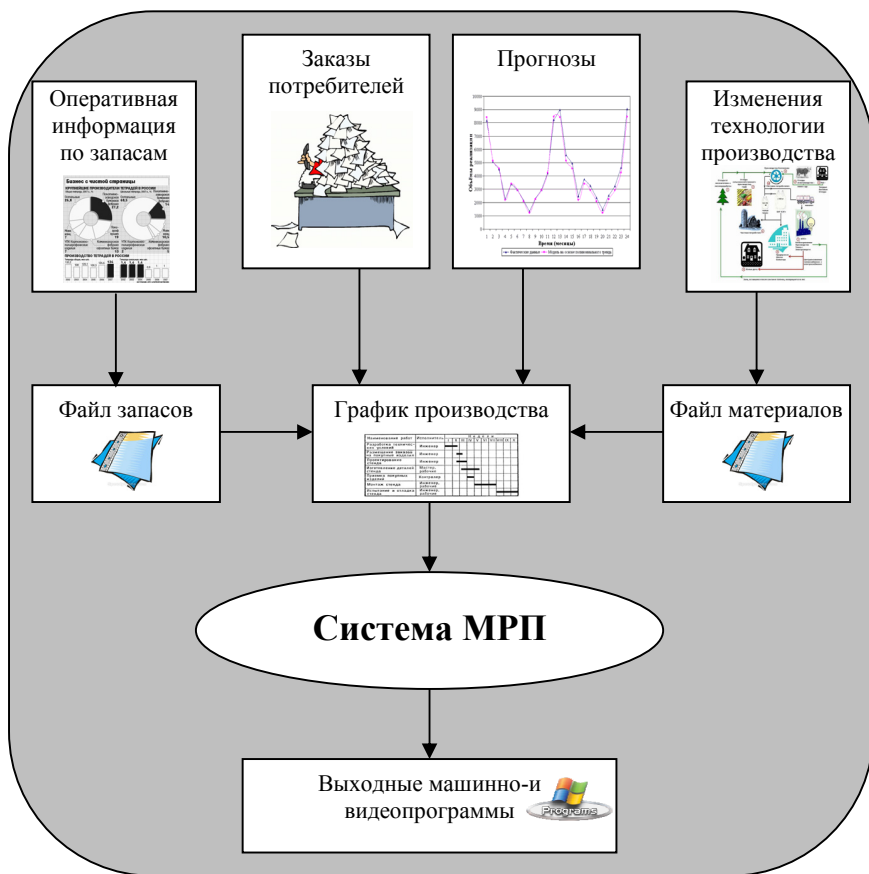


Рис. 1.8. Структура системы МРП-1

Цель внедрения данной системы – снижение издержек на всех этапах товародвижения, однако существенным недостатком системы является ее дорогостоящее внедрение. В процессе развития логистики появилось несколько модификаций МРП. Основой для всех последующих является система МРП -1. Все последующие модификации специализируются под работу конкретного предприятия.

## ***1.4. Системный подход в логистике***

### **1.4.1. Основные понятия**

Создание исправно работающей логистической системы требует четкого представления о функционировании сложных систем в общем. Предметом логистики является комплексное управление, которое предполагает использование системного подхода. Общая теория систем – это научное направление, связанное с разработкой совокупности философских, методологических, конкретно-научных и прикладных проблем анализа и синтеза сложных систем производственной природы.

Основными инструментами общей теории систем являются системные исследования, системный подход, системный анализ.

***Системные исследования*** – это совокупность научных, технических и экономических проблем, которые сходны в понимании и рассмотрении исследованных объектов с точки зрения систем и выступают как единое целое.

***Системный подход*** – комплексное изучение объекта исследования как единого целого с позиции системного анализа.

***Системный анализ*** – методология исследования любых объектов посредством представления их в качестве систем и анализа этих систем.

Системный подход нацеливает на понимание того, каким образом закономерности, наблюдаемые в пограничных областях, могут быть поняты как частные случаи общих закономерностей. Он предполагает выявление между составными частями изучаемого объекта связей, характеризующих его как единое целое,

представление его, в конечном счете, как системы взаимосвязанных, взаимообусловленных компонентов.

Системный подход предусматривает интегральную целостность, единство, выделение установки на выявление интегративных системообразующих проявлений. Первостепенное значение в методологии системного подхода придается категории «целое». Суть подхода выражена афоризмами: «целое больше суммы входящих в него частей» или «главное, что характеризует целое, отсутствует у его частей» в противовес элементаристскому подходу, цель которого любой сложный объект разложить на элементы, на части, выделив простейшие «кирпичики», и тем самым объяснить целое.

Принципиальным для системного подхода является понимание, прежде всего, того, что система – это не просто объединение частей, не конгломерат элементов, а строго упорядоченная их совокупность, взаимосвязь друг с другом таким образом, что они образуют некоторое целое, интегральное, не сводимое к своим частям. Таким образом, одним из фундаментальных признаков системы является ее целостность, единство. Отсюда центральное место в системном подходе занимает установка на выявление интегративных системообразующих факторов.

Все эти положения системного подхода нацеливают исследователя, прежде всего на то, чтобы в процессе изучения целого объекта постоянно фокусировать внимание именно на тех его признаках, которые характеризуют данный объект как целое. Части его рассматриваются при таком подходе не в отрыве друг от друга, и не как конечный пункт познания, а лишь как стороны целого, тесно взаимосвязанные в рамках единой системы. Требуя целостного осмысления изучаемых объектов и их комплексов, системный подход вовсе не отвергает необходимости анализа их внутреннего состава и строения. Чем сложнее система, тем больше может быть в ней внутренних «уровней организации», представленных подсистемами различной степени сложности, которые важно учитывать для понимания основ системы.

Итак, можно сформулировать следующее определение.

**Система** — множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство.

Основными признаками системы являются следующие:

- **Целостность и членимость.** Система есть целостная совокупность элементов, взаимодействующих друг с другом (рис.1.9.). Следует иметь в виду, что элементы существуют лишь в системе. Вне системы это лишь объекты, обладающие потенциальной способностью образования системы. Элементы системы могут быть разнокачественными, но одновременно совместимыми.

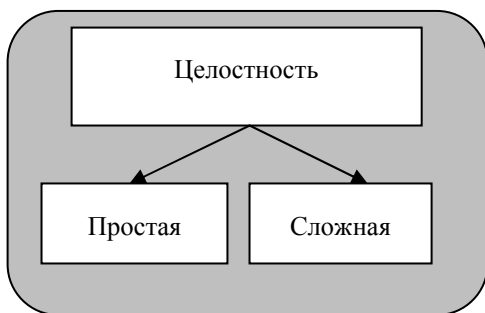
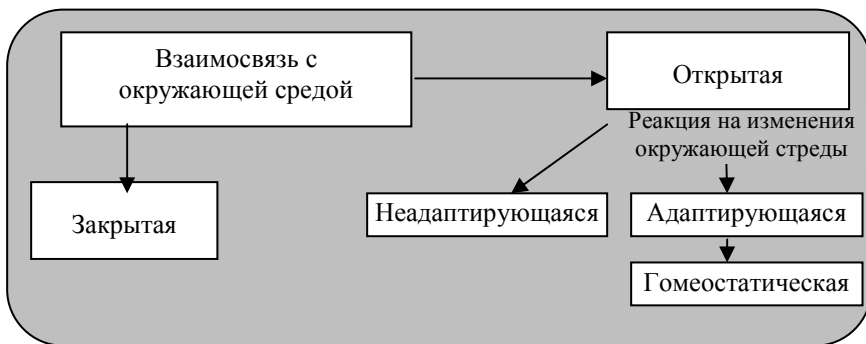


Рис. 1.9. Признаки системы (целостность)

- **Структура.** Наличие системоформирующих факторов у элементов системы лишь предполагает возможность ее создания. Для появления системы необходимо сформировать упорядоченные связи, т. е. определенную структуру, организацию системы.

- **Интегративные качества.** Наличие у системы интегративных качеств, т. е. качеств, присущих системе в целом, но не свойственных ни одному из ее элементов в отдельности.

- **Внутренние связи.** Между элементами системы имеются существенные связи, которые с закономерной необходимостью определяют интегративные качества этой системы (рис.1.10.).



*Рис. 1.10. Признаки системы  
(взаимосвязь с окружающей средой)*

Связи могут быть вещественные, информационные, прямые, обратные и т. д. Связи между элементами внутри системы должны быть более мощными, чем связи отдельных элементов с внешней средой, так как в противном случае система не сможет существовать. По отношению к окружающей среде система может быть открытой или закрытой.

**Гомеостатическая система** — открытая система, обладающая способностью к саморегуляции, сохранению постоянства своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия.

#### Свойства гомеостатической системы:

- **нестабильность** — система сама тестирует, каким образом лучше приспособиться к изменяющимся условиям окружающей среды;
- **стремление к равновесию** — вся внутренняя, структурная и функциональная организация систем способствует сохранению баланса;
- **непредсказуемость** — результирующий эффект от определённого действия зачастую может отличаться от того, который ожидался.

### 1.4.2. Виды моделей логистических систем

Популярными инструментами логистики являются различные методы моделирования.

**Логистическая модель** – любой образ, абстрактный или материальный, логистического процесса или логистической системы, используемый в качестве их заместителя. Основная цель моделирования – прогноз поведения системы. Ключевой вопрос моделирования «что будет, если...?»

С целью упорядочивания способов моделирования необходимо их классифицировать. Одним из распространенных признаков классификации является степень соответствия модели моделируемому объекту. По этому признаку все модели можно разделить на изоморфные и гомоморфные.

**Изоморфные модели** – это модели, обладающие всеми характеристиками объекта-оригинала и способные заменить его. Модель данного вида дает точные знания об объекте и позволяет получить достоверный прогноз о будущем состоянии системы.

**Гомоморфные модели** – модели, являющиеся частичным подобием объекта, получение абсолютного подобия невозможно, не все стороны функционирования реального объекта подлежат моделированию.

Другим важным признаком классификации является материальность модели. В соответствии с этим признаком все модели можно разделить на материальные и абстрактные (рис.1.11.).

**Материальные модели** – различные виды моделей, отображающие объект с помощью различных видов материи (обычно воспроизводят основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого явления или объекта).

**Абстрактные модели** – модели, позволяющие создавать подобие реального объекта с его параметрами и функциями, очень широко применяются в логистике. Их подразделяют на символические и математические.

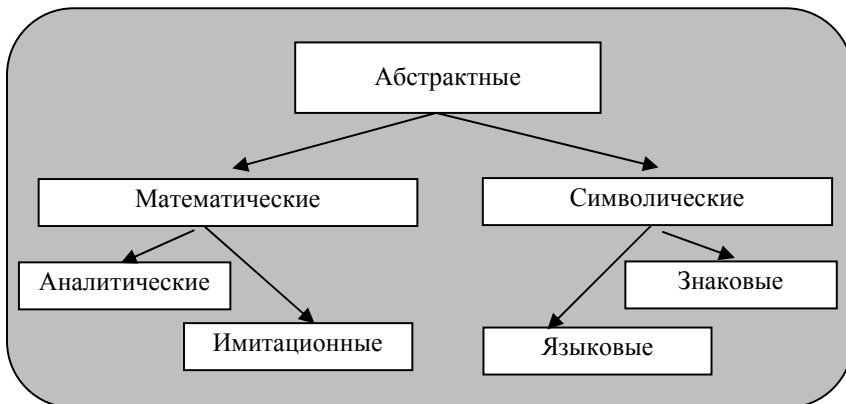


Рис. 1.11. Абстрактные модели

К символическим моделям относят языковые и знаковые.

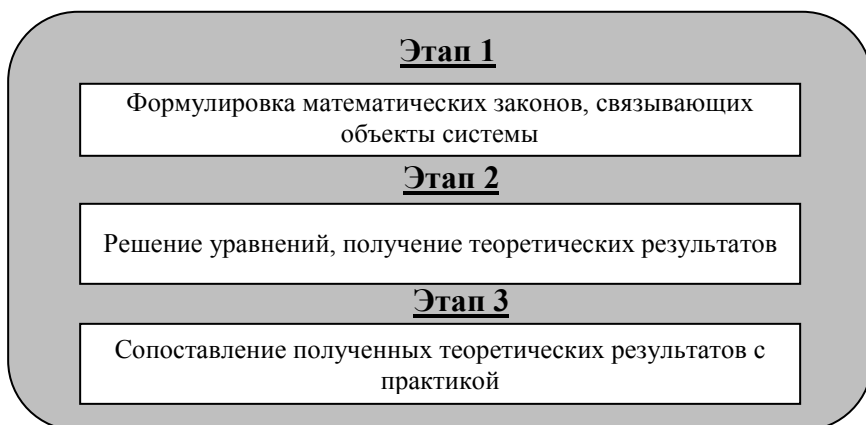
*Языковые модели* – это словесные модели, в основе которых лежит набор слов (словарь, «тезаурус»), очищенный от неоднозначности. В нем каждому слову может соответствовать лишь единственное понятие, в то время как в обычном словаре одному слову могут соответствовать несколько понятий.

*Знаковые модели* – это модели, использующие условные обозначения для отдельных понятий и операций.

*Математическая модель* – математический объект, поставленный в соответствие реальному объекту. В логистике широко применяются два вида математического моделирования: аналитическое и имитационное.

*Аналитическое моделирование* – это математический прием исследования логистических систем, позволяющий получить точные решения (рис.1.12.).





*Рис.1.12. Последовательность этапов аналитического моделирования*

*Имитационное моделирование* позволяет получать возможные результаты путем варьирования входящих параметров, при этом логистический процесс остается для экспериментатора «черным ящиком». Имитационное моделирование включает в себя два основных процесса: первый – конструирование модели реальной системы; второй – постановка экспериментов на этой модели.

### **1.4.3. Принципы системного подхода**

Логистическая система, моделирующая промышленное предприятие, безусловно, относится к классу сложных систем, причем не вполне детерминированных. Функционирование реальных логистических систем характеризуется наличием сложных стохастических связей как внутри этих систем, так и в их отношениях с окружающей средой. В этих условиях принятие частных решений, без учета общих целей функционирования системы и предъявляемых к ней требований, может оказаться

недостаточным, а, возможно, и ошибочным. Именно поэтому методологической основой сквозного управления материальным потоком в логистике является **системный подход**. Его суть – рассмотрение объектов как систем, что позволяет исследовать трудно наблюдаемые свойства и отношения в объектах.

Системный подход означает, что каждая система является интегрированным целым даже тогда, когда она состоит из отдельных, разобщенных подсистем. Системный подход позволяет увидеть изучаемый объект как комплекс взаимосвязанных подсистем, объединенных общей целью, раскрыть его интегративные свойства, внутренние и внешние связи. Системный подход не существует в виде строгой методологической концепции.

Это своего рода совокупность познавательных принципов, соблюдение которых позволяет определенным образом сориентировать конкретные исследования. Обобщая вышесказанное, можно утверждать, что системный подход в логистике – это способ мышления по отношению к организации и управлению.

При формировании логистических систем должны учитываться следующие принципы системного подхода:

- единства (производится совместное рассмотрение системы как единого целого и как совокупности частей);
- развития (учитывается изменяемость системы, ее способность к развитию и накапливанию информации);
- глобальной цели (оптимальная цель каждой подсистемы может не являться главной стратегической целью системы в целом);
- функциональности (хотя структура системы рассматривается совместно с функциями, последние имеют больший приоритет);
- иерархии (учитывается соподчиненность и ранжирование частей системы);
- неопределенности (допускаются вероятностные события).

Существо системного подхода отчетливо проявляется при его сравнении с классическим индуктивным подходом к формированию систем. Классический подход означает переход от частного к общему (индукция). Формирование системы при классическом подходе к этому процессу происходит путем слияния ее компонентов, разрабатываемых отдельно. В отличие от классического, системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит конечная цель, ради которой создается система.

#### Этапы индуктивного формирования системы:

- определяются цели функционирования отдельных подсистем;
- анализируется информация, необходимая для формирования отдельных подсистем;
- формируются подсистемы, которые в совокупности образуют работоспособную систему.

#### Этапы формирования системы при системном подходе:

- определяются и формулируются цели функционирования системы;
- на основании анализа цели функционирования системы и ограничений внешней среды определяются требования, которым должна удовлетворять система;
- на базе этих требований формируются, ориентировочно, некоторые подсистемы;
- производится синтез системы – анализ различных вариантов и выбор подсистем, организация их в единую систему. При этом используются критерии выбора. В логистике один из основных методов синтеза систем – моделирование.

### **1.4.4. Виды логистических систем**

**Микрологистическая система** – подсистема, структурная составляющая макрологистической системы, класс внутрипроизводственных логистических систем, в состав которых

входят технологически связанные производства, объединенные единой инфраструктурой. Например: производственные и торговые предприятия, территориально-производственные комплексы.

**Макрологистическая система** – это крупная система управления материальными потоками, охватывающая предприятия и организации промышленности, посреднические, торговые и транспортные организации различных ведомств, расположенных в разных регионах страны или в разных странах. Макрологистическая система представляет собой определенную инфраструктуру экономики региона, страны или группы стран.

На уровне *макрологистики* выделяют три вида систем.

1. Логистические системы **с прямыми связями**: материальный поток проходит непосредственно от производителя продукции к ее потребителю, минуя посредников (рис. 1.13.).

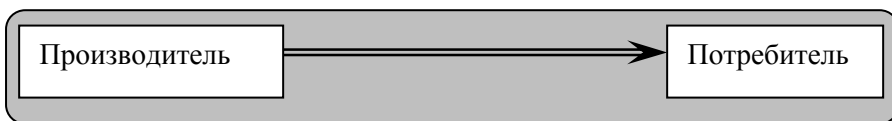


Рис. 1.13. Логистические системы с прямыми связями

2. **Эшелонированные** логистические системы: на пути материального потока есть хотя бы один посредник (рис. 1.14.).



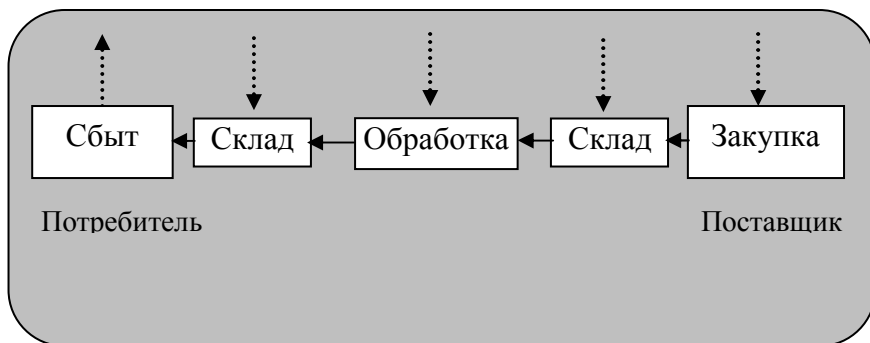
Рис. 1.14. Эшелонированные логистические системы

3. **Гибкие** логистические системы. Здесь движение материального потока от производителя продукции к ее потребителю может осуществляться как напрямую, так и через посредников (рис. 1.15.).



*Рис. 1.15. Гибкие логистические системы*

Логистическая система имеет определенные границы (рис.1.16.), которые задаются циклом обращения средств производства. Вначале закупаются средства производства. Они, в виде материального потока, поступают в логистическую систему и затем уходят из логистической системы в потребление в обмен на поступающие в логистическую систему финансовые ресурсы.



*Рис. 1.16. Границы логистической системы*

## **1.5. Логистический цикл промышленного предприятия**

### **1.5.1. Основные понятия**

Рассмотрение структуры предприятия в виде трех звеньев (закупка – производство – сбыт) обусловлено двумя факторами.

1. Материальный поток в процессе своего движения от поставщиков исходных ресурсов до потребителей готовой продукции, в зависимости от состава его элементов, проходит три стадии:

- закупочная стадия (элементами материального потока являются материальные ресурсы),
- производственная стадия (элементами материального потока является незавершенное производство),
- стадия сбыта (элементами материального потока является готовая продукция).

2. Звенья логистической цепи предприятия имеют противоречивые экономические интересы. Противоречивое поведение затрат возникает всякий раз, когда при минимизации затрат в одном звене (подразделении) увеличиваются затраты (экономические потери) в другом звене или звеньях. Например, закупка некачественных и дешевых комплектующих (минимизация затрат в звене «закупка») неизбежно приведет к удорожанию процесса их обработки для получения качественного изделия (увеличению затрат в звене «производство») или дополнительным расходам при продаже получившегося некачественного изделия (увеличению затрат в звене «сбыт»).

Трехзвенная логистическая цепь обусловила выделение трех видов логистики:

- логистика, связанная с закупкой сырья, материалов, комплектующих изделий и т. д. (закупочная логистика);
- производственная логистика;
- логистика, специализирующаяся на реализации продукции (распределительная или маркетинг-логистика).

### **1.5.2. Мощности звеньев логистической цепи**

*Мощность логистического звена* – это обеспечиваемая организационным и технологическим потенциалом максимально возможная интенсивность движения и использования материального потока или выпуск максимально возможного объема конечной продукции (работ, услуг) в единицу времени.

Для промышленного предприятия мощности звеньев «Закупки» и «Сбыт» более мобильны, чем мощность звена «Производство», так как они не связаны с основными фондами производственных цехов и подразделений, с количеством и сложностью расположенного там технологического оборудования, с квалифицированной рабочей силой этого звена и т. д.

Таким образом, основным внутренним ограничивающим фактором по быстрому увеличению объема выпуска продукции предприятия выступает мощность звена «Производство». При этом важно понимать, что в рыночных условиях возможности звена «Сбыт» являются тем ограничивающим фактором, который изначально влияет на скорость нарастания мощности звена «Производство».

В итоге, с увеличением объема выпуска продукции, в звеньях «Закупка», «Производство», «Сбыт» могут происходить различные процессы, влияющие на изменение доли себестоимости одной единицы продукции, приходящейся на каждое из звеньев.

Рассмотрим подробнее эти процессы и влияющие на них факторы.

В звене «Закупка» себестоимость единицы продукции (точнее, на этом этапе, набора комплектующих для ее производства) может уменьшиться или в худшем случае останется прежней. Уменьшение себестоимости является следствием закупки материалов по более низким ценам за счет увеличения объемов поставок. Чаще всего – это очередная колонка в сетке оптовых скидок, присутствующая у многих торгующих организаций. В ряде случаев возросшие объемы закупок делают эффективным с экономической точки зрения организацию конкурсов (тендеров), в результате чего заключается контракт с поставщиком, способным предложить более выгодные условия. Также может оказаться, что новые объемы закупок позволят выйти на непосредственного производителя конкретных комплектующих, что также будет означать уменьшение затрат на закупку материалов и комплектующих. Остаться на прежнем уровне доля себестоимости, приходящаяся на это звено, может в двух случаях: если увеличение мощности цепи не настолько значительно, чтобы сработали прогнозируемые факторы снижения издержек или если

система снабжения настолько неэффективна, что просто не может реализовать полученные преимущества, не справляясь с возросшей нагрузкой на транспортные и складские объекты.

В отношении звена «Сбыт» ситуация скорее обратная: себестоимость единицы продукции (точнее, на этом этапе, объем затрат на ее продвижение на рынок, упаковку, транспортировку и реализацию) может увеличиться или в лучшем случае останется прежним. Увеличение себестоимости в этом звене является следствием отсутствия прямой зависимости между объемом вложенных в рекламу (или более обще, в методы стимулирования продаж) средств и полученным в итоге оборотом. Иными словами, если при рекламном бюджете в 10000\$ в год предприятие получало выручку в размере 200000\$, то, потратив 20000\$ в год, оно вряд ли получит 400000\$ оборота. Объем продаж, безусловно, возрастет, но на сколько конкретно, сказать однозначно нельзя: для данного примера в различных ситуациях возможны цифры 250000\$, 300000\$, 350000\$. Причиной этого является ограниченная емкость рынка, по крайней мере, в этом регионе. Поскольку численность населения меняется плавно, привычки и потребности также, то заставить жителей того же города вдруг покупать в два раза больше зубных щеток крайне проблематично. Возрастание объема продаж конкретного производителя будет иметь место за счет вытеснения прочих конкурентов. Такая же цель может быть достигнута и без увеличения (по крайней мере, без значительного) рекламного бюджета, например, временным снижением цен, заведением лотереи из серии «собери 25 оберток и тогда, может быть, выиграешь самолет» и т.д. В любом случае предоставленные скидки и призы – это тоже часть расходов в звене «Сбыт», затрачиваемых на попытки увеличить его мощность, равную объему продаж продукции в единицу времени (обычно квартал или год). Иной способ наращивания мощности – освоение новых рынков, на которых дополнительно вложенные 10000\$ принесут привычную отдачу в виде 200000\$ оборота. Этот процесс в большинстве случаев требует, прежде всего, денег и времени, причем вложенные средства окупятся не сразу. Если желание рисковать своими деньгами нет, или нет разумных и готовых за это взяться административных работников, то обычно начинают



развивать сеть посредников и дилеров, что во многом более практично и гипотетически позволяет охватить весьма широкий рынок.

Наиболее разнообразно может повести себя звено «Производство»: себестоимость единицы продукции (точнее, на этом этапе, объем затрат на собственно ее изготовление) может как уменьшиться, так и увеличиться или в некоторых случаях остаться прежним.

Здесь все зависит от продуманности имеющейся технологической карты производства работ и загруженности текущего парка станков и/или рабочего коллектива. Если увеличение выпуска продукции возможно преимущественно за счет пересмотра используемых технологий, изменения очередности технологического цикла, перераспределения материальных и трудовых ресурсов и т.д., то, скорее всего, себестоимость этого звена будет уменьшаться. Другой пример – серьезная модернизация производства, в процессе которой закупается новое оборудование, арендуются новые помещения, нанимается дополнительный штат сотрудников. В этом случае вряд ли удастся сразу же добиться максимальной эффективности использования всего вышеперечисленного. Скорее всего, новые линии будут работать не со 100% нагрузкой или не с максимальной эффективностью, по крайней мере, первое время. И то, и другое повлияет на себестоимость самым печальным образом – она возрастет. Если оба способа увеличения мощности звена «Производство» применяются одновременно, или само увеличение не слишком значительное, то возможна ситуация, когда себестоимость прохождения материалопотока в этом звене останется прежней.

Отсюда возникает логичный вопрос: а как рассчитать необходимый прирост мощности с тем, чтобы обеспечить экономическую эффективность этого процесса? Под экономической эффективностью в данном случае понимается грубое увеличение прибыли, исчисляемой как разница между продажной ценой и себестоимостью партии товаров. Важно отметить, что кроме чисто экономической эффективности, существует также и стратегическая эффективность, которая

выражается в том, что хотя в настоящий момент увеличение оборота может и не принести существенного увеличения прибыли, или даже сократить её, то в будущем такой шаг гарантированно обеспечит фирме нужное положение на рынке с соответствующим экономическим эффектом.

Формально ситуация может быть рассчитана следующим образом. Введем несколько характеристик ситуации, имевшей место до увеличения мощности:

$C$  – себестоимость 1 единицы продукции;

$K$  – количество выпускаемой продукции;

$\Pi$  – продажная цена 1 единицы продукции, установленная рынком.

Тогда получаемая прибыль равна:

$$\Pi_p = K \cdot (\Pi - C)$$

После увеличения мощности цепи на  $\Delta K$  изменение величины себестоимости продукции  $\Delta C$  может быть рассчитано как сумма изменений себестоимостей по каждому из звеньев:

$$\Delta C = \Delta C_{\text{зак}} + \Delta C_{\text{пр}} + \Delta C_{\text{реал}},$$

при этом соответствующие составляющие должны быть взяты с учетом знаков. Поскольку в общем случае продажная цена не меняется, размер получаемой прибыли после увеличения мощности будет равен:

$$\begin{aligned} \Pi_p^* &= (K + \Delta K) \cdot (\Pi - C - \Delta C) = \\ &= K \cdot \Pi - K \cdot C - K \cdot \Delta C + \Delta K \cdot \Pi - \Delta K \cdot C - \Delta K \cdot \Delta C = \\ &= K \cdot (\Pi - C) + \Delta K \cdot (\Pi - C) - \Delta C \cdot (K + \Delta K) = \Pi_p + \Delta K \cdot (\Pi - C) - \Delta C \cdot (K + \Delta K). \end{aligned}$$

Если текущей целью изменения мощности логистической цепи является увеличение прибыли, т.е. выполнение условия  $\Pi_p^* > \Pi_p$ , получим неравенство:  $\Delta C \cdot (K + \Delta K) < \Delta K \cdot (\Pi - C)$ .

Следует особо подчеркнуть, что увеличение прибыли ни в коей мере не является единственным и тем более обязательным признаком оправданности принимаемого решения об увеличении мощности логистической цепи. Часто подобное решение носит стратегический характер и вполне нормально, если реальное увеличение прибыли последует через несколько лет.

### 1.5.3. Логистический цикл промышленного предприятия

В рамках классической теории организации производства единый хозяйственный цикл предприятия (цикл производства и реализации продукции) как таковой не рассматривался. Временной фактор хозяйственной деятельности оценивался в основном показателями длительности производственного цикла и оборачиваемостью текущих активов предприятия. Но длительность производственного цикла определяется временем выполнения только производственного процесса, а оборачиваемость текущих активов характеризует только продуктивность их использования. При этом упускаются из виду процессы движения и использования материального потока в сфере обращения, т. е. на этапах материально-технического обеспечения производства и реализации готовой продукции. Точнее сфера обращения изучалась и раньше, но только в качестве сферы, обеспечивающей производство, к тому же материально-техническое обеспечение и сбыт зачастую рассматривались обособленно друг от друга. Нетрудно видеть, что при таком подходе значительный потенциал повышения эффективности работы предприятий оставался невостребованным.

Организационная структура предприятия строится в виде логистической цепи «Закупки - производство - сбыт», которая охватывает все сферы его хозяйственной деятельности. Исходя из этого, длительность хозяйственного цикла предприятия определяется временем протекания материального потока через звенья его логистической цепи или длительностью логистического цикла предприятия.

**Логистический цикл предприятия** – время, за которое партия исходных материальных ресурсов переходит в партию конечной продукции, реализуемую покупателям. Он охватывает движение и использование материального потока на всем протяжении логистической цепи предприятия с момента закупок материальных ресурсов до сбыта готовой продукции.

Вследствие различного назначения и широкой специализации технологических операций, а также разнородности

средств их выполнения, технологический цикл звена логистической цепи предприятия, в свою очередь, состоит из нескольких стадий. Применительно к машиностроению, технологический цикл звена «Производство» делится на три стадии: заготовительную, обработочную и сборочную. В звене «Закупки» такими стадиями могут быть, например, доставка, складирование и выдача материальных ресурсов в производство. В звене «Сбыт» это поступление из производства, складирование, испытание и упаковка, продажа (отпуск) готовой продукции покупателям.

Время прохождения элементов материального потока через все технологические операции характеризует длительность ее технологического цикла. А сумма длительностей технологических циклов стадий определяет длительность технологического цикла звена логистической цепи предприятия.

Как известно, производственный цикл включает в себя технологический цикл и перерывы в ходе производственного процесса, длительность которых в логистическом понимании выступает основным фактором, влияющим на интенсивность движения материального потока в звене «Производство». Аналогичным образом следует рассматривать закупочный и сбытовой циклы. Поэтому логистическое видение данных процессов заслуживает особого внимания.

Время перерывов в ходе закупочного, производственного и сбытового циклов включает в себя:

- время межоперационного пролеживания предметов труда (элементов материального потока) в ожидании освобождения последующего рабочего места;
- простои рабочего места в ожидании завершения обработки партии предметов труда (элементов материального потока) на предыдущей операции. Полезно рассматривать отдельно простои собственно оборудования (станков, механизмов) и простои самих рабочих (людей).

Решение о выборе регулятора времени перерывов при прочих равных условиях принимается на основе сопоставления

потерь от простоев рабочего места и от пролеживания партии предметов (элементов материального потока). Рассмотрим источники таких потерь.

Пролеживание предметов труда влечет (или может повлечь) за собой убытки, связанные со следующими причинами:

- истечением срока годности предметов;
- неумышленной порчей;
- моральным и технологическим устареванием;
- организацией складирования (транспортировка, оприходование на склад, документальное сопровождение, работа кладовщика, аренда складских площадей и их обслуживание);
- хищениями (если складирование как таковое не организовывается или склад плохо охраняется).

Простои оборудования влекут (или могут повлечь) за собой убытки, связанные со следующими причинами:

- необходимостью в настройке оборудование перед повторным пуском;
- необходимостью замены механизмов, вышедших из строя во время простоев;
- арендой занимаемых простаивающим оборудованием площадей и их обслуживанием;
- штатным обслуживанием оборудования и потребляемой без нагрузки электроэнергией.

Простои работников влекут (или могут повлечь) за собой убытки, связанные со следующими причинами:

- выплатой окладов при неполной загрузке (при временной оплате или фиксированном окладе);
- потерей наиболее квалифицированных кадров, которые перейдут на другую работу из-за низких сдельных заработков (при сдельной оплате);
- снижением квалификации оставшихся работников;
- снижением потенциально приемлемой работоспособности работников;

- повышением уровня употребления спиртных напитков среди работников ввиду появления массы свободного времени.

### 1.5.4. Потоки промышленного предприятия

**Поток** – совокупность объектов, воспринимаемая как единое целое и существующая как процесс, происходящий непрерывно на некотором временном интервале; измеряется в абсолютных единицах за определенный промежуток времени.

Основными видами потоков, применяемых на промышленном предприятии, являются материальный поток, потоки энергии технологического происхождения, поток рабочей силы, потоки основных фондов, информационные потоки, финансовые потоки, потоки отходов.

Применяемые на промышленном предприятии потоки целесообразно классифицировать по следующим признакам:

*составу:*

- простые,
- сложные;

*отношению к эколого-социально-экономической системе:*

- внутренние,
- внешние;

*направленности:*

- прямые – материальный поток, финансовый поток формирования себестоимости продукции,
- обратные – финансовый поток распределения прибыли, потоки отходов, прочие информационные потоки;

*функциональному назначению:*

- поток инструментального обеспечения,
- поток ремонтного обеспечения,
- транспортный поток,
- поток рабочей силы.

**Простые потоки**, имеющие однородную структуру элементов, подразделяются на следующие виды:

*материальные:*

- материальный поток – поток материальных ресурсов текущего периода применения (сырье, материалы, полуфабрикаты, комплектующие изделия и т. д.);

- поток основных фондов – поток материальных ресурсов длительного периода применения (здания, сооружения, оборудование и т. д.);

*энергетические:*

- технологического происхождения (электрическая, тепловая, механическая, химическая энергия и др.);
- человеческого происхождения (потоки рабочей силы – физического и интеллектуального характера);

*информационные:*

- натуральные потоки информации (не в денежном виде), в которых в качестве единиц учетной информации выступают: бит, ч., шт., кг, кВт-ч и т. д.
- стоимостные (финансовые) потоки, в которых в качестве единиц учетной информации выступают денежные единицы измерения, например рубли.

**Сложные потоки**, состоящие из нескольких простых потоков, это в частности:

- *поток рабочей силы* (материальное тело, физическая и интеллектуальная энергия, информация, представленная знаниями и опытом);
- *поток отходов* (материальное вещество, энергия рассеяния в виде шума, вибрации, излучений и т. д., информационные отходы). Потоки отходов могут быть и простыми или расчленяться на них.

Из приведенной классификации потоков по их составу следует, что основными потоками, взаимодействие которых формирует жизнедеятельность любой системы, являются потоки *материалов, энергии и информации*. Что же касается потока основных фондов, потока рабочей силы и финансового потока, то эти потоки являются специфическими формами проявления указанных выше трех основных потоков: поток основных фондов и финансовый поток являются разновидностью соответственно материального и

информационного потоков, поток рабочей силы включает в себя все три основных потока, обеспечивающих жизнедеятельность системы. Поток отходов является конечным результатом взаимодействия потоков материи, энергии и информации.

## ***1.6. Характеристика звена «Закупка»***

### **1.6.1. Основные понятия**

***Закупочная логистика*** – область логистики, связанная с закупкой материальных ресурсов (сырья, материалов, комплектующих изделий и т. д.).

***Назначение*** – управление материальными потоками в процессе обеспечения предприятия материальными ресурсами.

***Область действия*** – часть материального потока логистической цепи от поставщиков материальных ресурсов до производственных подразделений (звена «Производство»).

***Цель*** – удовлетворение потребностей производства необходимыми материальными ресурсами в требуемом временном режиме при оптимальных затратах, что включает в себя:

- выдерживание обоснованных сроков заготовления сырья и комплектующих изделий;
- обеспечение точного соответствия между количеством поставок и потребностями в них;
- соблюдение требований производства по качеству сырья и комплектующих изделий;
- обеспечение сбалансированности трат для нужд производства в соответствии с выполнением имеющихся задач.

В отделе снабжения различают задачи двух категорий специалистов.

Типичные функции рядового специалиста по закупочной логистике:

- заключить договор,
- проконтролировать исполнение договора,
- организовать доставку,



- организовать складирование.

Типичные функции ведущего специалиста по закупочной логистике:

- решить, что лучше: закупать комплектующее или производить его самостоятельно;
- определить, что закупить, и правильно выбрать способ поиска нужного комплектующего;
- выбрать метод определения потребности в комплектующих (метод снабжения);
- решить, сколько и когда закупить;
- выбрать условия поставок (с учетом используемого метода снабжения);
- выбрать поставщика нужного комплектующего.

Рассмотрим эти вопросы подробнее в применении к промышленному предприятию, т.е. речь будет идти о налаживании долгосрочных контактов с целью осуществления регулярных закупок.

### **1.6.2. А надо ли вообще закупать?**

Вопрос «а надо ли вообще закупать» заключается в принятии одного из двух альтернативных решений – делать комплектующее изделие самим (если это в принципе возможно) или же покупать у другого производителя. В англоязычной литературе эта задача встречается под названием *make-or-buy problem*. Как это часто бывает, у каждого варианты есть свои плюсы.

Самостоятельное производство комплектующих:

- снижает зависимость предприятия от возможного возникновения дефицита;
- устраняет проблему своевременной поставки продукции в требуемых объемах.

### Закупка комплектующих:

- обеспечивает, как правило, более высокое качество (за счет того, что для стороннего производителя этот вопрос является профильным);
- за счет более низкой себестоимости при условии невысоких торговых наценок может быть дешевле собственного производства (если, конечно, закупать через оптовые фирмы).

Кроме того, на самих предприятиях могут действовать факторы, обуславливающие отказ от собственного производства. Решение в пользу закупок комплектующих и соответственно против собственного производства должно быть принято в случае, если:

- отсутствуют необходимые для производства финансовые средства, а взятие кредита под него является нерентабельным;
- вследствие небольшой потребности производства в конкретном виде комплектующих собственное производство нерентабельно;
- использование имеющихся необходимых для производства комплектующего мощностей нерентабельно.

Решение против закупок и в пользу собственного производства принимается в случае, когда производство этого комплектующего, согласно достоверным маркетинговым исследованиям, является рентабельным и производитель имеет финансовые ресурсы или возможности по рентабельному кредитованию его запуска. Также дополнительным стимулом к тому, чтобы начать собственное производство, являются:

- недозагруженность имеющегося штата работников;
- географическая удаленность поставщиков, приводящая к повышению стоимости комплектующих за счет доставки и рискам резкого изменения таможенных сборов и акцизов, регулируемых государствами поставщика и покупателя.

### 1.6.3. Что закупить и как найти?

В процессе принятия решения о том, *какие* комплектующие необходимо закупить, следует определить:

- какие материалы требуются;
- наличие альтернативных комплектующих для снижения риска возникновения ситуации невозможности выпуска конечного продукта из-за отсутствия выбранного уникального элемента в его составе;
- ценовую категорию выбранных комплектующих для обеспечения сбалансированности по составу комплектующих итогового изделия.

Существуют несколько **методов поиска** необходимых комплектующих, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки и может быть рекомендован для определенных целей.

В настоящее время все большую популярность набирает метод выбора поставщика посредством проведения конкурсных торгов, или тендера.

**Тендер** (*tender* – предложение) — конкурентная форма размещения заказов на поставку товаров, предоставление услуг или выполнение работ по заранее объявленным в документации условиям, в оговоренные сроки на принципах состязательности, справедливости и эффективности. Контракт заключается с победителем тендера — участником, подавшим предложение, соответствующее требованиям документации, в котором предложены наилучшие условия. Термин «тендер», используемый в повседневной речи, может являться как аналогом русских терминов конкурс или торги, так могут подразумеваться и внеконкурсные (но конкурентные) процедуры, например запросы котировок, запросы цен, запросы предложений. Торги в Российской Федерации подразделяются на открытые и закрытые, могут проводиться в один или два этапа, в форме конкурса или аукциона. Торги осуществляемые для государственных нужд в рамках государственного заказа проводятся только в один этап.

Тендеры представляют интерес как для поставщика, так и для заказчика. Организация, претендующая на победу в тендере,

имеет четкое представление об условиях работы с заказчиком. Заказчик же получает посредством тендера оптимального поставщика, согласного на поставленные условия.

Процедура проведения тендера происходит в несколько этапов (рис.1.17.).

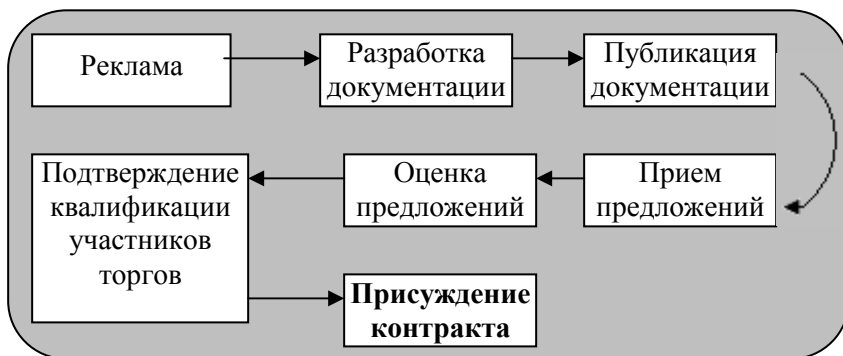


Рис. 1.17. Этапы проведения тендера

Альтернативой организации тендера является выбор поставщика с помощью оферты.

**Оферта** (*offero* – «предлагаю») — предложение лица заключить гражданско-правовой договор. Продавец продукции рассылает потенциальным покупателям своей продукции предложения (оферты), по своему содержанию оферты аналогичны документации, предоставляемой на тендер (рис.1.18.).

Оферты бывают двух видов:

**твердая оферта** — оферта, которая делается (предлагается) продавцом одному возможному, потенциальному покупателю с указанием срока, в течение которого продавец связан обязательством продажи. Сделка считается совершенной, если за этот срок последует акцепт покупателя;

**свободная оферта** – оферта, которая может быть выдана на одну и ту же партию товара нескольким возможным покупателям. Свободная оферта не связывает продавца своим предложением и не устанавливает срок для ответа.

Свободная оферта по существу – предложение вступить в переговоры.

Наименование	Количество
Цена	Качество
Упаковка	Условия поставки
Порядок приема-сдачи	Условия платежа

*Рис. 1.18. Характеристики товара, указываемые в оферте*

Объявление конкурса (тендера):

- + получение гарантированно самой низкой цены на рынке за товар нужного класса;
- необходимость составления ТЗ для тендера;
- нерентабельность данного вида для покупателя (при закупке мелких партий);
- непривлекательность предложения для поставщика (при закупке мелких партий).

*Вывод: оптимально для закупок больших партий комплектующих.*

Выбор наиболее устойчивого брэнда:

- + высокое качество;
- + привлекательность для потребителя конечного изделия за счет репутации изготовителей комплектующих;
- высокая стоимость комплектующих.

*Вывод: оптимально для обеспечения высокого качества комплектующих в составе изделия.*

Выбор на основе анализа технических характеристик комплектующих, цен комплектующих, образцов комплектующих, рекламных материалов производителей, фирменных каталогов, информации в доступных местах и обзорах:

- +соответствие цены качеству и потребительским характеристикам;
- необходимость высокой квалификации для корректного выбора и оценки;
- большие временные затраты.

*Вывод: оптимально для выхода на рынок с итоговым продуктом с низкой себестоимостью и высоким итоговым качеством.*

### 1.6.4. Методы определения потребности в материалах

Принятие решений о том, сколько и когда закупать, производится на основании различных методов, которые теоретически можно разделить на три основные группы. Практически в чистом виде использование этих методов встречается редко, как правило, применяются комбинированные методики.

Основные **теоретические методы** определения потребности в материалах:

- **детерминированный метод** – известны определенный период выполнения заказа и потребность в материалах по количеству и срокам;
- **стохастический метод** – основой для расчета являются математико-статистические методы, дающие ожидаемую потребность;
- **эвристический метод** – потребность определяется на основе опыта административного состава службы снабжения.

За последние годы разработан ряд **специализированных методов** снабжения, ориентированных на конкретную потребность производства:

- **метод «Канбан»**, разработанный в Японии с целью управления поставками в условиях поточного производства, учитывает потребность, возникающую на конечном этапе производства;
- **система планирования материальных потребностей**, охватывающая планирование на трех уровнях: предварительном (на основе опыта предыдущих периодов), текущем (при распределении материалов по производственным участкам) и будущем (на основе тенденций роста объема производства и продаж);
- **метод «Точно в срок» (just-in-time)**, с помощью которого в результате частых поставок резко сокращаются накопленные запасы;
- **система запросов**, по которой с поставщиками заключаются типовые контракты на длительный период существования потребностей, а данные по фактической потребности запрашиваются на основе поэтапного уточнения;
- **метод прогнозных показателей**, в рамках которого спрос на большие партии закупок формируется на определенном уровне, а затем конкретный объем поставок приводится в соответствие со спросом;
- **электронно-информационный метод** коммуникации клиента и поставщика на основе передачи необходимых данных, когда запрос поступает в виде заказа, а данные о поставке и транспортировке уточняются при прямом онлайн-контакте.

Конкретный метод выбирают специалисты, занимающиеся логистической организацией деятельности предприятия, на основании комплексного анализа ситуации с закупками, производством и сбытом. Только оценка деятельности предприятия в целом может обеспечить основу для принятия адекватного решения по поводу методов ведения закупок. Выбранный метод закупок в значительной степени определяет наиболее предпочтительные для производителя условия поставок.

### 1.6.5. Сколько и когда закупить?

В процессе принятия решения о том, *сколько* комплектующих необходимо закупить, следует определить:

- количество комплектующих, которые потребуются для производства продукции в конкретные периоды времени;
- требуемые площади складских помещений предприятия;
- издержки на закупки, доставку и хранение комплектующих.

В процессе принятия решения о том, *когда* конкретные комплектующие необходимо закупить, следует определить:

- периодичность закупок конкретных комплектующих для планомерного обеспечения ими нужд основного производства (ориентировочно для расходных материалов и часто используемых комплектующих и точно для конкретных штучных заказов);
- возможности поставщиков или производителей, у которых могут быть куплены комплектующие (с учетом возможных перебоев в поставках, каникул производителей, государственных праздников и выходных – особенно если предприятие работает в ежедневном / круглосуточном режиме).

### 1.6.6. Типовые условия поставок

Оптимальный выбор условий закупок прямо или косвенно зависит от используемого метода снабжения, а также от состава комплектующих в конечном продукте, устойчивости спроса на него и серийной или штучной направленности производства.

Существуют следующие типы условий поставок:

***Поставка товара одной партией:***

- +большие оптовые скидки,
- +гарантия поставки всей партии,
- +простота оформления документации,
- большая потребность в складских помещениях,



–замедление оборачиваемости капитала.

***Регулярные поставки мелкими партиями:***

+ускорение оборачиваемости капитала (как правило, оплачивается товар по поступлению),

+экономия складских площадей,

+ простота оформления документации (оформляют документы на весь заказ сразу),

– вероятность заказа избыточного количества товара,

– необходимость оплаты товара, даже если к моменту поставки потребность в нем отсутствует.

***Ежедневные (ежемесячные) поставки по котируемым ведомостям:***

+автоматизация процедуры заказа товара (удобно при регулярно закупаемой устойчивой номенклатуре),

+экономия складских площадей,

+гарантия своевременности поставок,

–не подходит при наличии сезонных колебаний спроса и при изготовлении штучной продукции.

***Получение товаров по мере необходимости:***

+ускорение оборачиваемости капитала (как правило, оплачивается товар по поступлению),

+экономия складских площадей,

+отсутствие твердых обязательств по покупке определенного количества товара,

– необходимость регулярно связываться с поставщиками для уточнения количества товара,

– вероятность возникновения ситуации, когда необходимого количества товара у поставщика нет.

***Единовременная закупка товара с немедленной поставкой:***

+получение точно необходимого товара в нужный момент,

+наибольшая оборачиваемость капитала (купил и сразу использовал),

–более высокие (розничные) цены,

–увеличение издержек при транспортировке товара,

–большой объем оформляемой документации.

### 1.6.7. Выбор поставщика

После того, как решена задача «покупать ли вообще» и определено, какое сырье и какие материалы и в каком количестве необходимо закупить, решают задачу выбора поставщика. Для этого первоначально производится поиск потенциальных поставщиков, а затем их комплексный анализ.

Как правило, критерии анализа потенциальных поставщиков следующие:

- основные:
  - цена поставляемой продукции;
  - качество поставляемой продукции;
  - сроки поставок.
- дополнительные:
  - результаты работы по уже заключенным договорам (соблюдение поставщиком обязательств по срокам поставки, ассортименту, комплектности, качеству и количеству поставляемой продукции);
  - удаленность поставщика от потребителя;
  - гибкость ценовой политики (наличие системы накопительных скидок от объемов закупаемой продукции, специальные прайс-листы для постоянных покупателей);
  - наличие у поставщика возможности обеспечить доставку продукции своими силами;
  - возможность получения товаров в рассрочку, без предоплаты либо с отсроченным платежом;
  - сроки выполнения текущих и экстренных заказов;
  - наличие резервных мощностей;
  - организация управления качеством у поставщика;
  - способность обеспечить поставку запасных частей в течение всего срока службы поставляемого оборудования;
  - перспективность поставщика (темпы его развития, расширение ассортимента).

После того как поставщик конкретной продукции выбран и решены вопросы об объемах и условиях поставок, важно не забывать о двух независимых вещах: поддержании хороших отношений с этим поставщиком и одновременном анализе ситуации с его конкурентами.

В отношениях с поставщиками рекомендуется придерживаться нескольким основным принципам:

- соблюдать принятые на себя обязательства;
- обращаться с поставщиками так же, как с клиентами фирмы;
- не забывать демонстрировать на деле общность интересов;
- знакомить поставщика со своими задачами и быть в курсе его деловых операций;
- проявлять готовность помочь в случае возникновения проблем у поставщика;
- учитывать в деловой практике интересы поставщика;
- поддерживать по возможности стабильные контакты в деловой сфере.

При этом с некоторой периодичностью следует производить исследования рынка закупок, заключающиеся в регулярном сборе и оценке подробной информации в целях определения емкости рынка и создания предпосылок для *оптимизации закупок*. Как правило, изучая вопрос с положением дел среди конкурентов данного поставщика, отслеживают следующие моменты.

- Ценовая политика в статике (на текущий момент) и динамике (темпы роста продажных цен вместе с инфляцией, что особенно важно в период резкого падения курса отечественной валюты).
- Положение с оптовыми скидками (важно не пропустить появление крупной оптовой фирмы, имеющей возможность предлагать продукцию по более низкой стоимости).
- Расширение ассортимента (появление на рынке иных материалов и комплектующих, возможно обладающих более высокими потребительскими или техническими характеристиками и /или более низкой ценой).

### **1.6.8. Дополнительные задачи службы снабжения**

Крупные поставщики материалов и особенно комплектующих, как правило, находятся в тесном контакте с непосредственным производителем этой продукции. Соответственно, они первыми узнают о новинках в этой области, оригинальных технических решениях и разработках. Кроме того, вместе с продукцией они зачастую получают от непосредственного производителя разнообразные каталоги, брошюры, справочники, рекламные плакаты и проспекты.

В этой связи дополнительная задача органов снабжения — обеспечить конструкторов и менеджеров своего предприятия необходимыми каталогами, описаниями, проспектами по профилю проводимой работы с целью их полной и объективной ориентации в соответствующих вопросах. Однако каталоги и описания обычно не содержат информации о ценах, без чего трудно добиться экономически выгодных решений по материалам и конструкции будущих изделий. Поэтому прямой задачей снабжающих органов являются сбор информации о ценах, возможных сроках поставок, транспортных расходах и поиск их оптимального сочетания. Чаще всего сюда входит систематическое получение от поставщиков свежих прайс-листов, или, если речь идет о будущих поставках, ориентировочных цен.

Кроме того, немаловажным фактором является получение неофициальной информации о конкурирующих структурах, которой невольно располагают работники поставщиков и которой они зачастую делятся с вызывающими симпатию покупателями. Такой информацией в основном являются объемы производства и продаж конкурентов, которые очень хорошо вычисляются на основе данных об объемах их закупок. Дополнительно можно узнать массу прочих полезных вещей, начиная от размера зарплат работников конкурирующего предприятия и заканчивая результатами освоения ими новых рынков сбыта. Доступность этой информации основана на излишней общительности некоторых работников служб снабжения, в этой связи руководству

необходимо следить за нераспространением закрытой информации о своей фирме через это звено.

## ***1.7. Характеристика звена «Производство»***

### **1.7.1. Логистическая и традиционная концепции организации производства**

***Логистическая концепция*** организации производства включает в себя следующие основные положения:

- отказ от избыточных запасов;
- отказ от завышенного времени на выполнение основных и транспортно-складских операций;
- отказ от изготовления продукции, на которую нет заказа покупателей;
- обязательное устранение брака;
- устранение нерациональных внутризаводских перевозок;

В отличие от логистической ***традиционная концепция*** организации производства предполагает:

- никогда не останавливать основное оборудование и поддерживать, во что бы то ни стало, высокий коэффициент его использования;
- изготавливать продукцию как можно более крупными партиями;
- иметь максимально большой запас материальных ресурсов «на всякий случай».

Содержание концептуальных положений свидетельствует о том, что традиционная концепция организации производства наиболее приемлема для условий «рынка продавца», в то время как логистическая концепция – для условий «рынка покупателя».

Когда спрос превышает предложение (имеется дефицит продукта на рынке), можно с достаточной уверенностью полагать, что изготовленная с учетом конъюнктуры рынка партия изделий будет реализована. Поэтому приоритет получает цель

максимальной загрузки оборудования. Причем, чем крупнее будет изготовленная партия, тем ниже окажется себестоимость единицы изделия. Задача реализации на первом плане не стоит.

Ситуация меняется с приходом на рынок «диктата» покупателя. Задача реализации произведенного продукта в условиях конкуренции выходит на первое место. Непостоянство и непредсказуемость рыночного спроса делает нецелесообразным создание и содержание больших запасов. В то же время производитель уже не имеет права упустить ни одного заказа. Отсюда необходимость в гибких производственных мощностях, способных быстро отреагировать производством на возникший спрос. Адаптация предприятия к изменениям внешних и внутренних условий работы обеспечивается за счет многих факторов, основными из которых являются возможность перенастройки техники и гибкость технологии, уровень профессионализма кадров, гибкость организации и управления производством.

### **1.7.2. Принципы организации производства**

При внедрении логистических принципов на производство необходимо учитывать пять законов протекания производственного процесса.

1. Закон упорядоченности движения предметов труда в производстве: планирование хода производства невозможно без предварительной организации движения предметов труда по типовым меж- и внутрицеховым маршрутам.

Достижение максимальной эффективности производственных процессов оказывается возможным только при установлении порядка в движении предметов труда в производстве. Без предварительного упорядочивания планирование производства становится невозможным. Упорядочивание может быть достигнуто двумя способами:

- стандартизация внутрипроизводственных маршрутов;

- проектирование типовой схемы движения предметов труда в производстве.

Внедрение типовой схемы движения предметов труда в производство имеет следующие положительные стороны:

- сокращение количества технологических маршрутов между цехами одного предприятия;
- сокращение количества производственных контактов между работниками;
- повышение упорядоченности движения предметов труда в производстве;
- снижение трудоемкости процесса планирования производства
- обеспечение более полной загрузки персонала и техники;
- уменьшение времени простоев на производстве.

2. Закон непрерывности хода производственного процесса:  
определение оптимальной загрузки рабочего места зависит от типа производства. При оценке ущерба от одного часа простоя рабочего места и одного часа пролеживания партии предметов труда, следует учитывать следующее: для непоточного предпочтительнее непрерывная загрузка рабочего места, для поточного – непрерывная загрузка производственной линии.

Сопоставление потерь производства от часа простоя рабочего места и от часа пролеживания партии предметов труда позволяет сформулировать некоторые правила выбора эффективных методов календарной организации производственного процесса:

- во всех типах производства час простоя рабочего места и час пролеживания партии предмета труда противопоставляется друг другу не только как различные компенсаторы, выравнивающие длительность операций, но и как разные по величине потери производства,
- в непоточном производстве производственный процесс должен организовываться по принципу непрерывной загрузки рабочих мест в противоположность принципу

непрерывного движения предметов труда в поточном производстве,

- выбор принципа организации производственного процесса (непрерывная загрузка рабочих или непрерывное движение предметов труда): в конкретных условиях определяется соотношение потерь производства от простоя рабочих мест и от пролеживания предметов труда.

3. Закон ритма производственного цикла изготовления изделия – объективно существующая совокупность причинно-следственных связей между параметрами производственной программы предприятия (составом, сроками, приоритетами, пропорциями объектов производства, структурой трудоемкости), с одной стороны, и структурой элементов производства, потребляемых в производстве, с другой.

Работы должны быть взаимосвязаны как по срокам, так и по объемам и структуре используемых ресурсов во времени и пространстве.

Существуют три возможных метода моделирования ритма производства:

- статистический метод – используется статистическое моделирование процесса изготовления изделия, на этой основе разрабатывается норматив календарного распределения трудоемкости изделия относительно его производственного цикла;
- статический метод предполагает предварительное построение статичной модели производства. Рекомендуется пооперационная схема вхождения в изделие сборочных единиц, деталей, заготовок и т.д.
- динамическая модель ритма позволяет с большой достоверностью установить предельно вероятностные (самые поздние) сроки выполнения работ.



4. Закон проявления календарной синхронизации циклов процессов изготовления изделий и их частей – имеет несколько составляющих.

- **Синхронизация циклов технологических операций.** Календарная организация всех форм поточного производства, построенных по принципу непрерывного движения деталей – синхронизация длительностей деталяеопераций здесь должна бы осуществляться за счет простоев рабочих мест, но это неэффективно, т.к. час простоя рабочего места стоит дороже, чем час пролеживания одной детали. Поэтому организуется параллельно-последовательное движение деталей.
- Неравные продолжительности технологических операций выравниваются до некоторого календарного предела, либо за счет пролеживания деталей, либо за счет простоев рабочих мест, либо за счет того и другого одновременно.
- **Синхронизация циклов изготовления деталей:** если детали имеют одинаковое количество операций, то их циклы выравниваются вследствие выравнивания длительностей их операций. Детали в производственных подразделениях изготавливаются комплектами, значит, длительность цикла изготовления каждой детали комплекта равна длительности изготовления рассматриваемого комплекта деталей.
- **Синхронизация длительностей комплектоопераций процесса изготовления комплектов деталей** способствует сокращению длительности циклов изготовления комплектов деталей.

5. Закон эмерджентности основных и вспомогательных производственных процессов: достижение максимального усовершенствования производственного процесса возможно только при проведении оптимизации как основных, так и вспомогательных процессов.

**Эмерджентность** (*emergence* — возникновение, появление нового) в теории систем — наличие у какой-либо системы особых свойств, не присущих её подсистемам и блокам, а также суммы элементов, не связанных особыми системообразующими связями; несводимость свойств системы к сумме свойств её компонентов; синоним — «системный эффект».

Современное производство, особенно достаточно масштабного характера, является предметом детального изучения с теоретической точки зрения. Наблюдение, последующий анализ и обобщение полученных результатов работы реальных предприятий позволяют в общих чертах сформулировать ряд принципов организации высокоэффективных производственных процессов.

**Пропорциональность.** Производительность в единицу времени всех производственных подразделений предприятия (цехов, участков) и отдельных рабочих мест должна быть пропорциональной.

**Дифференциация.** Разделение производственного процесса изготовления одноименных изделий между отдельными подразделениями предприятия (например, по технологическому признаку).

**Комбинирование.** Объединение всех или части разнохарактерных процессов по изготовлению определенного вида изделия в пределах одного участка, цеха, производства.

**Концентрация.** Сосредоточение выполнения определенных производственных операций по изготовлению технологически однородной продукции или выполнению функционально однородных работ на отдельных участках и рабочих местах.

**Специализация.** Закрепление за каждым подразделением предприятия ограниченной номенклатуры операций и изделий.

**Универсализация.** Определенное рабочее место или производственное подразделение занято изготовлением изделий и

деталей широкого ассортимента или выполнением различных производственных операций.

**Стандартизация.** Разработка, установление и применение однообразных условий, обеспечивающих наилучшее протекание производственного процесса.

**Параллельность.** Одновременное выполнение технологического процесса на всех или некоторых его операциях. Реализация данного принципа существенно сокращает производственный цикл изготовления изделия.

**Прямоточность.** Требование прямолинейности движения предметов труда по ходу технологического процесса, то есть по кратчайшему пути прохождения изделием всех фаз производственного процесса без возвратов в его движении.

**Непрерывность.** Сведение к минимуму всех перерывов в процессе производства конкретного изделия.

**Ритмичность.** Выпуск в равные промежутки времени равного количества изделий.

**Автоматичность.** Максимально возможное и экономически целесообразное освобождение рабочего от затрат ручного труда на основе применения автоматического оборудования.

Организация и поддержание эффективной ритмичной работы каждого предприятия и его производственных подразделений в соответствии с указанными принципами позволяют устранить традиционные потери ресурсов рабочего времени сотрудников и оборудования по организационно-техническим причинам и обеспечивают конкурентные преимущества за счет лидерства по минимуму затрат.

### 1.7.3. Типы производства

Производство является сферой деятельности, формализация которой без привязки к конкретному виду выпускаемой продукции вряд ли возможна, и тем более, вряд ли оправдана. Безусловно, существуют основные концептуальные положения, которых следует придерживаться для эффективного управления звеном

«Производство», однако они будут иметь принципиально разный характер при различных типах производства.

**Тип производства** – совокупность его организационных, технических и экономических особенностей. Тип производства определяется следующими факторами:

- номенклатурой выпускаемых изделий;
- объемом выпуска;
- степенью постоянства номенклатуры выпускаемых изделий;
- характером загрузки рабочих мест.

В зависимости от уровня концентрации и специализации условно (поскольку на предприятии и даже в отдельных цехах может иметь место сочетание различных типов производства) различают четыре типа производств.

- **Индивидуальное (эксклюзивное) производство**, в рамках которого изделия выполняются по предварительному заказу конкретного покупателя, с учетом всех его пожеланий, назначения изделия и условий его будущей эксплуатации.
- **Единичное производство**, характеризующееся широкой номенклатурой изготавливаемых изделий, малым объемом их выпуска, выполнением на каждом рабочем месте весьма разнообразных операций.
- **Серийное производство**, при котором изготавливается относительно ограниченная номенклатура изделий (партиями), причем за одним рабочим местом, как правило, закреплено несколько операций.
- **Массовое производство**, характеризующееся узкой номенклатурой и большим объемом выпуска изделий, непрерывно изготавливаемых в течение продолжительного времени на узкоспециализированных рабочих местах.

Сравнение по факторам типов производств приведено в табл. 1.2.

Таблица 1.2. Сравнение типов производств по факторам

Факторы	Тип производства			
	Индивидуальное	Единичное	Серийное	Массовое
Номенклатура изготавливаемых изделий	Неограниченная	Большая	Ограниченная	Малая
Постоянство номенклатуры	Отсутствует	Отсутствует	Имеется	Имеется
Объем выпуска	Несколько экземпляров	Малый	Средний	Большой
Закрепление операций за рабочими местами	Отсутствует	Отсутствует	Частичное	Полное
Применяемое оборудование, инструменты и оснастка	Универсальное	Универсальное	Универсальное + специальное	В основном специальное
Квалификация рабочих	Очень высокая	Высокая	Средняя	В основном низкая
Себестоимость продукции	Очень высокая	Высокая	Средняя	Низкая
Производственная специализация цехов и участков	Технологическая	Технологическая	Смешанная	Предметная

Тип производства оказывает решающее влияние на особенности организации производства, его экономические показатели, структуру себестоимости (в индивидуальном и единичном производстве высока доля живого труда, а в серийном и массовом - затраты на ремонтно-эксплуатационные нужды и содержание оборудования), разный уровень оснащенности. Из таблицы видно, что с некоторыми допущениями рассмотренные типы производства можно разделить на две группы, объединив индивидуальное производство с единичным, а серийное с массовым.

### 1.7.4. Массовое производство

Экономическая эффективность рациональной организации массового производства выражается в сокращении длительности производственного цикла изделий, в снижении издержек на производство продукции, улучшении использования основных производственных фондов и увеличении оборачиваемости оборотных средств. При этом на длительность производственного цикла влияет как выбор технологий, так и способ и эффективность организации производственного процесса.

**Производственный цикл** – это календарный период времени, в течение которого материал, заготовка или другой обрабатываемый предмет проходит все операции производственного процесса или определенной его части и превращается в готовую продукцию (или в готовую ее часть). Он выражается в календарных днях или (при малой трудоемкости изделия) в часах (рис.1.19.).

Длительность производственного цикла определяется по формуле:

$$T_{ц} = T_{врп} + T_{вп},$$

где  $T_{врп}$  – время рабочего процесса,  $T_{вп}$  – время перерывов. Во время рабочего периода выполняются технологические операции

$$T_{врп} = T_{шк} + T_{к} + T_{тр} + T_{е},$$

где  $T_{шк}$  – штучно-калькуляционное время,  $T_{к}$  – время контрольных операций,  $T_{тр}$  – время транспортирования предметов труда,  $T_{е}$  – время естественных процессов (старения, релаксации, естественной сушки, отстоя взвесей в жидкостях и т.п.).

Сумму времен штучного, контрольных операций, транспортирования называют операционным временем ( $T_{опр}$ ):

$$T_{опр} = T_{шк} + T_{к} + T_{тр}.$$

Т <sub>ц</sub> – время производственного цикла	Т <sub>впр</sub> – время перерывов	Т <sub>орг</sub> – время перерывов из-за недостатков организации	
		Т <sub>р</sub> – время перерывов на обслуживание	
		Т <sub>рт</sub> – время перерывов по режиму труда	
		Т <sub>мо</sub> – время межоперационного пролеживания	Т <sub>кп</sub> – время перерывов комплектования
			Т <sub>ож</sub> – время перерывов ожидания
			Т <sub>пар</sub> – время перерывов партионности
	Т <sub>врп</sub> – время рабочего периода	Т <sub>е</sub> – время естественных процессов	
		Т <sub>тр</sub> – время транспортировки	
		Т <sub>к</sub> – время контрольных операций	
		штучно-калькуляционное	Т <sub>ото</sub> – время организационно-технического обслуживания
			Т <sub>ен</sub> – время на естественные надобности и отдых
			Т <sub>пз</sub> – подготовительно-заключительное время
		Т <sub>оп</sub> – оперативное время	Т <sub>ок</sub> – время операционного контроля
			Т <sub>з</sub> – время на закрепление / открепление детали
			Т <sub>у</sub> – время на установку / снятие детали
			Т <sub>ос</sub> – основное время

Рис. 1.19. Структура времени производственного цикла

В операционный цикл  $T_k$  и  $T_{тр}$  включены условно, так как в организационном отношении они не отличаются от технологических операций, штучно-калькуляционное время рассчитывается по формуле:

$$T_{шк} = T_{оп} + T_{пз} + T_{ен} + T_{ото},$$

где  $T_{оп}$  – оперативное время,  $T_{пз}$  – подготовительно-заключительное время при обработке новой партии деталей,  $T_{ен}$  – время на отдых и естественные надобности рабочих,  $T_{ото}$  – время организационного и технического обслуживания (получение и сдача инструмента, уборка рабочего места, смазка оборудования и т.п.). Оперативное время ( $T_{оп}$ ) в свою очередь состоит из основного ( $T_{ос}$ ) и вспомогательного времени ( $T_{в}$ ):

$$T_{оп} = T_{ос} + T_{в}.$$

Основное время - это непосредственное время обработки или выполнения работы. Вспомогательное время:

$$T_{в} = T_y + T_3 + T_{ок},$$

где  $T_y$  – время установки и снятия детали (сборочной единицы) с оборудования,  $T_3$  – время закрепления и открепления детали в приспособлении,  $T_{ок}$  – время операционного контроля рабочего (с остановкой оборудования) в ходе операции.

Время перерывов ( $T_{впр}$ ) обусловлено режимом труда ( $T_{рт}$ ), межоперационным пролеживанием детали ( $T_{мо}$ ), временем перерывов на межремонтное обслуживание и осмотры оборудования ( $T_p$ ) и временем перерывов, связанных с недостатками организации производства ( $T_{орг}$ ):

$$T_{впр} = T_{мо} + T_{рт} + T_p + T_{орг}.$$

Время межоперационного пролеживания ( $T_{мо}$ ) определяется временем перерывов партионности ( $T_{пар}$ ), перерывов ожидания ( $T_{ож}$ ) и перерывов комплектования ( $T_{кп}$ ):

$$T_{мо} = T_{пар} + T_{ож} + T_{кп}.$$

Перерывы партионности ( $T_{пар}$ ) возникают при изготовлении изделий партиями и обусловлены пролеживанием обработанных деталей до готовности всех деталей в партии на технологической операции. Перерывы ожидания ( $T_{ож}$ ) вызываются несогласованной длительностью смежных операций технологического процесса. Перерывы комплектования ( $T_{кп}$ ) возникают при переходе от одной фазы производственного процесса к другой.



Таким образом, в общем виде производственный цикл выражается формулой:

$$T_{ц} = T_{опр} + T_e + T_{мо} + T_{рт} + T_p + T_{орг}.$$

При расчете производственного цикла необходимо учитывать перекрытие некоторых элементов времени либо технологическим временем, либо временем межоперационного пролеживания.

Время транспортировки предметов труда ( $T_{тр}$ ) и время выборочного контроля качества ( $T_k$ ) являются перекрываемыми элементами. Исходя из сказанного, производственный цикл можно выразить формулой

$$T_{ц} = (T_{шк} + T_{мо}) k_{пер} k_{ор} + T_e,$$

где  $k_{пер}$  – коэффициент перевода рабочих дней в календарные (отношение числа календарных дней  $D_k$  к числу рабочих дней в году  $D_p$ ,  $k_{пер}=D_k/D_p$ );  $k_{ор}$  – коэффициент, учитывающий перерывы на межремонтное обслуживание оборудования и организационные неполадки (обычно 1,15 – 1,2).

### 1.7.5. Поточное производство

Наиболее эффективной с экономической точки зрения формой организации деятельности серийного и особенно массового производства является *поточное производство*, которое имеет следующие признаки:

- закрепление одного или ограниченного числа наименований изделий за определенной группой рабочих мест;
- ритмическая повторяемость согласованных во времени технологических и вспомогательных операций;
- специализация рабочих мест;
- расположение оборудования и рабочих мест по ходу технологического процесса;
- применение специальных транспортных средств для межоперационной передачи изделий.

При поточном производстве в полной мере реализуются принципы специализации, параллельности, пропорциональности, прямоочности, непрерывности, ритмичности. Поточное производство обеспечивает самую высокую производительность труда, низкую себестоимость продукции, наиболее короткий производственный цикл. Основой (первичным звеном) поточного производства является поточная линия. При проектировании и организации поточных линий выполняются расчеты показателей, определяющих регламент работы линии.

**Такт поточной линии** – промежуток времени между выпуском изделий (деталей, сборочных единиц) с последней операции или их запуском на первую операцию поточной линии.

Исходные данные расчета такта:

- производственное задание на год (месяц, смену);
- плановый фонд рабочего времени за этот же период;
- планируемые технологические пооперационные потери.

Такт поточной линии  $\tau$  рассчитывается по формуле:

$$\tau = F_d / Q_{\text{вып}} [\text{мин}],$$

где  $F_d$  – действительный годовой фонд времени работы линии в планируемом периоде (мин);  $Q_{\text{вып}}$  – плановое задание на тот же период времени (шт.).

$$F_d = D_{\text{раб}} \cdot d_{\text{см}} \cdot T_{\text{см}} \cdot k_{\text{пер}} \cdot k_{\text{рем}},$$

где  $D_{\text{раб}}$  – число рабочих дней в году;  $d_{\text{см}}$  – количество рабочих смен в сутки;  $T_{\text{см}}$  – продолжительность смены;  $k_{\text{пер}}$  – коэффициент, учитывающий планируемые перерывы:

$$k_{\text{пер}} = (T_{\text{см}} - T_{\text{пер}}) / T_{\text{см}},$$

( $T_{\text{пер}}$  – время планируемых внутрисменных перерывов);  $k_{\text{рем}}$  – коэффициент, учитывающий время плановых ремонтов.

При неизбежных технологических потерях (планируемом выходе годных деталей или изделий) такт  $\tau$  рассчитывается по формуле:

$$\tau = F_d / Q_{\text{зап}},$$

где  $Q_{\text{зап}}$  – количество изделий, запускаемых на поточную линию в планируемом периоде (шт.):

$$Q_{\text{зап}} = Q_{\text{вып}} \cdot k_{\text{зап}},$$

здесь  $k_{\text{зап}}$  – коэффициент запуска изделий на поточную линию, равный величине, обратной коэффициенту выхода годных изделий ( $\alpha$ ).

Таким образом получим:

$$r = \alpha \cdot F_d / Q_{\text{вып}}.$$

**Ритм** – это количество изделий, выпускаемых поточной линией в единицу времени, или величина, обратная такту.

**Задел** – это производственный запас материалов, заготовок или составных частей изделия для обеспечения бесперебойного протекания производственных процессов на поточных линиях.

Различают следующие виды заделов:

- технологический;
- транспортный;
- резервный (страховой);
- оборотный межоперационный.

**Синхронизация** – это процесс выравнивания длительности операции технологического процесса согласно такту поточной линии. Время выполнения операции должно быть равно такту линии или кратно ему.

Высшей формой поточного производства является автоматизированное производство, где сочетаются основные признаки поточного производства с его автоматизацией. В автоматизированном производстве работа оборудования, агрегатов, аппаратов, установок происходит автоматически по заданной программе, а рабочий осуществляет контроль за их работой, устраняет отклонения от заданного процесса, производит наладку автоматизированного оборудования. Различают частичную и комплексную автоматизацию.

При *частичной автоматизации* рабочий полностью освобождается от работ, связанных с выполнением технологических процессов. В транспортных, контрольных операциях при обслуживании оборудования, в процессе установки полностью или частично сокращается ручной труд. В условиях *комплексно-автоматизированного* производства технологический процесс изготовления продукции, управление этим процессом, транспортировка изделий, контрольные операции, удаление

отходов производства выполняются без участия человека, но обслуживание оборудования ручное.

Основным элементом автоматизированного производства являются автоматические поточные линии (АПЛ). **Автоматическая поточная линия** – комплекс автоматического оборудования, расположенного в технологической последовательности выполнения операций, связанный автоматической транспортной системой и системой автоматического управления и обеспечивающий автоматическое превращение исходных материалов (заготовок) в готовое изделие (для данной автолинии). При работе на АПЛ рабочий выполняет функции наладки и контроля работы оборудования, а также функцию и загрузки линии заготовками.

#### Основные признаки АПЛ:

- автоматическое выполнение технологических операций (без участия человека);
- автоматическое перемещение изделия между отдельными агрегатами линии.

В условиях постоянно изменяющегося нестабильного рынка (тем более многономенклатурного производства) важной задачей является повышение гибкости (многофункциональности) автоматизированного производства, с тем чтобы максимально удовлетворять требования, нужды и запросы потребителей, быстрее и с минимальными затратами осваивать выпуск новой продукции.

### **1.7.6. Индивидуальное производство**

Важным концептуальным отличием индивидуального производства с точки зрения структуры логистической цепи является перенос значительной доли функций звена "Сбыт" на первое место. Иными словами, теперь логистический цикл предприятия берет свое начало с поиска заказчика, и уже потом, для конкретного заказчика в соответствии со сделанным им

заказом, производится закупка необходимых комплектующих и собственно производство товара или услуги.

Примером таких производств может быть ателье по пошиву одежды (обуви), фирмы по изготовлению кухонной мебели, встроенных шкафов, пластиковых или деревянных окон, организации, занимающиеся строительством домов и ремонтом квартир, и т.д. Заметим, что зачастую в рамках одного предприятия сочетаются элементы индивидуального и единичного производств, т.е. структура управления и уровень инженерных решений позволяют обрабатывать и исполнять эксклюзивные заказы, а производственные мощности в необходимых случаях (например, во время спада индивидуальных заказов) выпускают небольшие партии готовых наиболее ходовых типов (размеров, форм и т.д.). Однако упор в любом случае делается на конкретного потребителя, и соответственно сразу же возникает вопрос о взаимодействии заказчика и производителя, причем это взаимодействие явно будет носить продолжительный характер с неременным наличием у обеих сторон прав и обязанностей в течение этого срока. Правила такого взаимодействия обычно описываются в договоре на оказание услуги (изготовлении товара). Кстати, многие заказчики пренебрежительно относятся к этому документу, зачастую подписывая его без детального изучения. Это, конечно, не умно с их стороны, но не так уж опасно: закон потребителей защищает, в некоторых случаях даже вероятно чрезмерно. В свою очередь производители (или подрядчики), пользуясь тем, что, как правило, они составляют исходный текст, стараются сделать его максимально удобным для себя, не слишком обращая внимание на элементарную справедливость и тем более, на существующие законы.

### **1.7.7. Содержание договора**

Составление договора и наполнение его содержанием работа не очень простая и довольно трудоемкая. Задача каждой из сторон договора – максимально четко установить свои права и обязанности. Создание любого договора должно проводиться при

согласовании с юристами и с соблюдением всех тонкостей. Например, прежде чем составлять договор об изготовлении изделий или оказании услуг, необходимо обратить внимание на то, что согласно ст.16 п.1. Закона о защите прав потребителя «Условия договора, ущемляющие права потребителя по сравнению с правилами, установленными законами или иными правовыми актами Российской Федерации в области защиты прав потребителей, признаются недействительными».

Возникает вопрос, каким же должен быть справедливый и законный договор? Главное: он должен быть конкретным и подробным. При этом желательно включить следующие разделы:

*1. Предмет договора.*

В этом пункте четко указываются участники договора (кто, в чьем лице, как именуемый в дальнейшем) и собственно предмет договора (изготовление изделия либо оказание услуги).

*2. Размер задатка или предоплаты.*

Составляя этот раздел, следует понимать разницу между предоплатой и задатком. Предоплата – это платеж по договору, который возвращается заказчику в случае расторжения договора, независимо от причины такого расторжения. Задаток – это платеж по договору, который остается у подрядчика, если договор расторгается по инициативе заказчика, и возвращается заказчику в удвоенном размере, если договор расторгает подрядчик. С учетом этого следует осторожно выбирать формулировку.

*3. Дата выполнения работ по договору.*

В этом разделе прописывается согласованная между заказчиком и подрядчиком дата окончания работ в рамках данного договора, а также двусторонние санкции за задержку выполнения (со стороны подрядчика) или перенос даты окончания работ (по просьбе заказчика). Здесь тонкость и жизненная несправедливость состоит в том, что какую бы цифру не прописал подрядчик в пункте о собственных санкциях (обычно большинство подрядчиков указывает в виде санкций от 0,2 до 1% от суммы договора, а иногда и от суммы предоплаты/задатка), по Закону о защите прав потребителя он обязан будет выплатить заказчику не менее 3% от цены выполненной работы за каждый день (или час, если срок установлен в часах) задержки выполнения работ, а если цена

работы (услуги) не указана, то 3% от суммы заказа. Кстати, со стороны заказчика минимальный размер санкций, например за задержку оплаты, не указан. Таким образом, при внесенном задатке в 100 руб и стоимости ремонта квартиры, например в 100 000 руб, который вместо 3 месяцев длился 4 месяца, заказчик вполне может оплатить Подрядчику всего 10 000 руб, а если повезет – то и вообще ничего. Локальный выход из положения для исполнителя заключается в том, чтобы сыграть на разнице понятий «цена выполнения работы (оказания услуги)» и «общая цена заказа». В договоре не лишним будет указать цену работы в каком-нибудь не слишком значительном размере, лучше фиксированном, например, в размере задатка (что представляется еще хоть как-то справедливым, потому что может иметь отношение к процентной ставке за использование денежных средств, хотя банковская ставка в размере 3% в день тоже не имеет отношения к реальности) или минимальной стоимости подобных работ, например в случае осуществления ремонта, в размере стоимости монтажа раковины. Тогда согласованные с заказчиком справедливые санкции в размере тех же 0,5% от суммы всего заказа будут вполне законны. Кстати, если устно (например, по телефону) заказчик спокойно отнесется к тому, что вы попросили о переносе даты окончания работ, скажем, на неделю – это еще ничего не значит. Лучше отправить к нему на подпись курьера с составленным приложением к договору, в котором эта договоренность будет зафиксирована – в противном случае при приеме работ, а может и после этого (например, когда вскроются какие-то недостатки или просто заказчик будет не в духе), вправе с вас потребовать через санкции возмещения потерь за задержку.

#### *4. Изменение сделанного заказа.*

В случае если работа выполняется в течение длительного времени или растягивается на несколько этапов, то вполне вероятна ситуация, в которой заказчик может пожелать изменить те или иные характеристики заказываемого товара или услуги. В этом случае не помешает пункт, суть которого в том, что это возможно только до определенного момента, когда вносимые изменения не повлекут за собой необходимость переделки уже выполненных работ.

#### *5. Подготовительные работы, производимые заказчиком.*

Этот раздел особенно полезен, если речь идет о ремонтно-строительных работах, которые завязаны по срокам или технологиям с производимыми подготовительными этапами на объекте.

#### *6. Прием готового изделия и расчет с подрядчиком.*

В этом пункте следует детально описать, каким образом принимаются работы: сколько этапов, на основании каких нормативных документов, как фиксируется факт приема работ и в какие сроки. Также здесь следует указать последовательность действий сторон в случае наличия у Заказчика претензий к выполненной в рамках договора работе.

#### *7. Вопросы качества.*

В тексте самого договора или в отдельном приложении необходимо указать основные критерии качества выполненных работ: нормы, допуски и прочие технологические параметры, так как согласно ст.4 п.1 Закона о защите прав потребителя «продавец (исполнитель) обязан передать потребителю товар (выполнить работу, оказать услугу), качество которого соответствует договору». И только в том случае, когда в договоре это качество не оговаривается, вступает в силу п.2 той же статьи, согласно которому товар или услуга должна быть «пригодна для целей, для которых товар (работа, услуга) такого рода обычно используется». Кстати, все это не освобождает производителя от необходимости обеспечивать соответствие изделия официально принятым стандартам, если таковые существуют. Невнимательное отношение к этим вопросам может вызвать значительные финансовые (и имиджевые) потери Подрядчика (продавца), потому что ст. 18 Закона о защите прав потребителей в этом случае предоставляет заказчику весьма широкие полномочия в случае продажи товара ненадлежащего качества. В соответствии с этой статьей, «потребитель ... вправе по своему выбору потребовать: безвозмездного устранения недостатков товара или возмещения расходов на их исправление потребителем или третьим лицом, соразмерного уменьшения покупной цены, замены на товар аналогичной марки (модели, артикула), замены на такой же товар другой марки (модели, артикула) с соответствующим перерасчетом



покупной цены, расторжения договора купли-продажи. При этом потребитель обязан возвратить товар с недостатками. При этом потребитель вправе потребовать также полного возмещения убытков, причиненных ему вследствие продажи товара ненадлежащего качества».

Таким образом, из-за фразы «по своему выбору» возникает ситуация при которой, допустим, шив данному заказчику дорогой костюм с плохо простроченной подкладкой, ателье вполне может получить этот костюм обратно, хотя совершенно очевидно что вероятность его реализации другому заказчику стремится к нулю, а исправление недостатков вполне возможно и займет 5 минут – однако потребитель пожелал именно расторгнуть договор и он имеет на это право. Справедливости ради, стоит отметить, что для технически сложных товаров вместо понятия «товар ненадлежащего качества» используется термин «товар с существенными недостатками», который определен законом как «недостаток, который делает невозможным или недопустимым использование товара (работы, услуги) в соответствии с его целевым назначением, либо который не может быть устранен, либо который проявляется вновь после устранения, либо для устранения которого требуются большие затраты, либо вследствие которого потребитель в значительной степени лишается того, на что он был вправе рассчитывать при заключении договора». Тоже, кстати, весьма широкая формулировка.

#### *8. Правила эксплуатации изделия.*

Стандартный пункт, детально описывающий нормальные условия эксплуатации изделия (напряжение, сила тока, температурный режим, реакция на попадание влаги, частота использования и т.д. и т.п.), при которых производитель гарантирует нормальную его работу в течение гарантийного срока.

#### *9. Гарантийные обязательства.*

В этом пункте следует указать срок службы (годности) товара и отдельно – гарантийный срок. Понятие «срок годности» обычно используется в отношении продуктов питания, медикаментов, парфюмерных и прочих товаров. В принципе срок службы можно устанавливать не на все изделия (услуги) – обязательный перечень устанавливается отдельным документом и включает в себя товары

и услуги, потенциально опасные для жизни и здоровья граждан. Однако это полезно сделать, так как согласно Закону о защите прав потребителя, если такой срок не установлен, то он равен 10 годам. Как определяет ст. 5 п.1. «срок службы это период, в течение которого изготовитель (исполнитель) обязуется обеспечивать потребителю возможность использования товара (работы) по назначению и нести ответственность за существенные недостатки, возникшие по его вине». В частности, изготовитель гарантирует безопасность использования изделия в течение этого срока. В отличие от срока службы, гарантийный срок – это период, в течение которого изготовитель за свой счет устраняет все недостатки изделия (а не только существенные). Если такой срок не указан, то согласно ст.19 п.1. Закона о защите прав потребителя он равен шести месяцам, а для недвижимого имущества – двум годам. Итак, срок годности устанавливать тоже необходимо, потому как согласно ст. 19 п.5 Закона о защите прав потребителя «в случае выявления существенных недостатков товара, допущенных по вине изготовителя, потребитель вправе предъявить изготовителю требование о безвозмездном устранении недостатков товара по истечении гарантийного срока. Указанное требование может быть предъявлено в течение установленного срока службы товара или в течение десяти лет со дня передачи товара, если срок службы товара не установлен». И кстати, если указанное требование не удовлетворено в течение двадцати дней, потребитель вправе по своему выбору предъявить изготовителю иные требования, установленные п.3 ст. 18. Закона о защите прав потребителя, – например, через 9 лет пользования холодильником вернуть его обратно, получив взамен уплаченную ранее сумму.

Кроме срока службы и гарантии можно, конечно, указать и срок исполнения гарантийных обязательств, но указывать меньше, чем установлено законом, себе дороже, а больше – нет смысла: в любом случае ст. 20 п.1 Закона о защите прав потребителя устанавливает сроки исполнения гарантийных обязательств в течение 20 дней со дня предъявления потребителем требования об устранении недостатков товара.

#### *10. Важнейшие характеристики изделия (информация о товаре).*

Здесь стоит словами описать главные параметры изделия или признаки услуги, даже если они присутствуют в техническом задании и чертежах, а также его назначение. Тонкость состоит в том, что согласно ст.12 п.2 Закона о защите прав потребителя, «при рассмотрении требований потребителя о возмещении убытков, причиненных недостоверной или недостаточно полной информацией о товаре (работе, услуге), необходимо исходить из предположения об отсутствии у потребителя специальных познаний о свойствах и характеристиках товара (работы, услуги)».

#### *11. Прочие особые условия.*

Место для таких особых условий – признак корректности со стороны составителя договора, так как в этом случае договор перестает быть формальным документом, а превращается именно в документ, закрепляющий взаимные договоренности.

В целом, оценивая цитируемый выше Закон со стороны производителя (исполнителя), возникает устойчивое ощущение его односторонней, так сказать, справедливости. Так что разумный и знающий заказчик, не обремененный устойчивыми жизненными понятиями, вполне безбедно может себя чувствовать, получая фактически безвозмездно целую группу товаров и услуг. Подавляющее большинство исполнителей выполняют все требования добровольно (если им отправить грамотно составленную претензию с указанием ссылок на статьи закона, а также ненавязчивое обещание жаловаться в случае чего куда следует), а те, кто не выполняют, почти наверняка проигрывают дело в суде, потому что в рамках этого закона почти любую спорную ситуацию можно развернуть в нужном направлении, а суды традиционно занимают позицию частного заказчика, если последний обращается с жалобой на частную же фирму.

Единственный шанс производителя в этом случае – составлять договор в четком соответствии с законом, знать свои права, пользоваться неточными формулировками в свою пользу и, главное, собирать побольше письменных свидетельств тех или иных нарушений со стороны заказчика, а если он отказывается что-то подписывать, то с соседей, собственных рабочих и т.д.

## ***1.8. Характеристика звена «Сбыт»***

### **1.8.1. Основные понятия**

***Сбытовая логистика*** – неотъемлемая часть общей логистической системы, обеспечивающая наиболее эффективную организацию распределения производимой продукции. Сюда включена вся цепь системы распределения, в т.ч. маркетинг, передача товара покупателю, транспортировка, складирование.

Задачи распределительной логистики:

- изучение потребностей рынка,
- поиск способов и методов наиболее полного удовлетворения потребностей рынка путем более эффективной организации транспортно-экспедиционного обслуживания.

Для успешного продвижения товаров на рынок необходимо провести ряд подготовительных исследований, включающих:

- планирование объема и номенклатуры товаров с учетом зависимости от различных факторов;
- проверку планирования путем моделирования сбытовой деятельности фирмы;
- принятие плана действий по сбыту и использование его показателей для производственных программ.

При этом включение маркетинга в распределительную логистику в качестве ее органической составной части может существенно повысить эффективность сбытовой деятельности.

### **1.8.2. Функции маркетинга в рамках сбытовой логистики**

По сути, на долю маркетинга в рамках логистики приходится основная часть функций от момента поступления готовой продукции на склад до передачи товара покупателю, за исключением, быть может, складирования готовой продукции.

Наиболее важными являются следующие функции маркетинга:

- **исследование рынка**
  - емкость рынка (объем промышленного производства конкретных товаров в стране или регионе, увеличенный на объем импорта таких товаров и уменьшенный на величину их экспорта),
  - номенклатура аналогичных и взаимозаменяемых товаров,
  - характеристика конкурентов
    - ✓ сведения об экономическом и финансовом положении конкурентов,
    - ✓ технико-экономическая характеристика изготавливаемой (или готовящейся к выпуску) продукции,
    - ✓ показатели качества работы службы сбыта конкурентов (своевременность и ритмичность поставок, скорость доставки товаров, их сохранность),
    - ✓ данные коммерческого характера о службе маркетинга и сбыта (численность персонала, эффективность рекламы, взаимоотношения с потребителями),
  - возможности реализации новых товаров
    - ✓ потребность в продукции (устойчивость и сезонные колебания спроса, наличие дефицита, имеющиеся или формирующиеся потребности определенных групп населения в товаре),
    - ✓ оптимальные условия реализации (формы продаж, формы оплаты, географические и временные предпочтения);
- **формализация и обеспечение преимуществ продукта фирмы по отношению к конкурентам;**
- **разработка маркетингового предложения (сочетания товаров, предлагаемых потребителю в том или ином сегменте рынка)**
  - информация о товарах
    - ✓ характеристики товара,

- ✓ дополнительные удобства пользования товаром с учетом индивидуальных особенностей потребителя,
  - ✓ упаковка,
  - ✓ условия ремонта и обслуживания товара после его закупки,
  - ✓ гарантии обеспечения потребительских свойств,
- сведения о ценах
  - ✓ диапазон цен,
  - ✓ условия оплаты (предоплата, задаток, рассрочка),
  - ✓ порядок кредитования,
- ***выбор методов стимулирования продаж***
  - реклама выпускаемых и новых товаров (помимо обычной рекламы в средствах массовой информации также наружная реклама, участие в выставках, различные акции, конкурсы, лотереи, дегустации пищевых продуктов, пробное использование промтоваров и т.д.),
  - расширение объема и повышение качества услуг для покупателей,
  - заключение лизинговых соглашений с последующим правом выкупа,
  - краткосрочные скидки торгующим организациям;
- ***анализ сбыта уже налаженного производства.***

### **1.8.3. Виды интеграции**

В результате анализа эффективности маркетинга можно сделать выводы об эффективности производства в целом и стратегии поведения фирмы на рынке, что особенно важно, если рынок нестабилен. Наиболее радикальными способами, дающими эффект «подчинения» рынка при их использовании крупными компаниями, являются интеграционные мероприятия. В зависимости от внешних условий выбирается определенный вид интеграции.

- **Обратная интеграция** (вниз) – приобретение производителями фирм-поставщиков исходного сырья. Применяется в условиях роста продаж, если в результате бума производства существует реальная опасность отсечения конкурентами фирмы от сырья или полуфабрикатов, ей необходимых.
- **Опережающая интеграция** (вверх) – объединение с компаниями, использующими производимую продукцию. Применяется в условиях спада продаж, когда необходимо сохранить объем сбыта на приемлемом уровне.
- **Горизонтальная интеграция** – объединение с фирмами, производящими сходный продукт. Применяется для обеспечения более крупной доли на рынке, однако такой тип интеграции не всегда возможен в силу наличия почти во всех странах антимонопольного законодательства.

#### 1.8.4. Каналы распределения товаров

Основная цель логистической системы распределения – доставить товар в нужное место и в нужное время. В отличие от маркетинга, который занимается выявлением и стимулированием спроса, логистика призвана удовлетворить сформированный маркетингом спрос с минимальными затратами. При этом главную роль играет организация каналов распределения.

**Канал распределения** – совокупность организаций или отдельных лиц, которые принимают на себя или помогают передать другим лицам и организациям право собственности на конкретный товар или услугу на пути от производителя к потребителю.

Использование каналов распределения приносит производителям определенные выгоды, среди которых можно отметить как наиболее существенные:

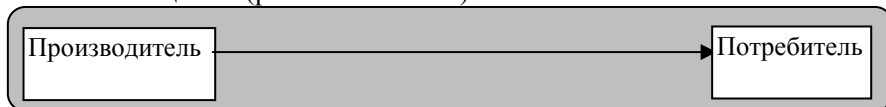
- экономию финансовых средств на распределение продукции;
- продажу продукции более эффективными способами;
- высокую эффективность обеспечения широкой доступности товара и доведения его до целевых рынков.

Организации или лица, составляющие канал распределения, выполняют ряд важных функций:

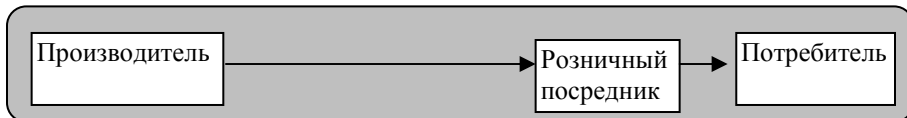
- проведение исследовательской работы по сбору информации, необходимой для планирования распределения продукции и услуг;
- стимулирование сбыта путем создания и распространения информации о товарах;
- установление контактов с потенциальными покупателями;
- адаптация товара к требованиям покупателей;
- переговоры с потенциальными потребителями продукции;
- организация товародвижения (транспортировки и складирования);
- финансирование движения товара по каналу распределения;
- покрытие рисков, связанных с функционированием канала.

В ряде случаев часть этих функций берет на себя производитель, что оправдано, если он в состоянии делать это эффективнее посредника. Но поскольку за выполнение всех или части этих функций посредник получает от производителя прямо или косвенно зависящую оплату, то вопрос о том, кому выполнять различные функции канала распределения, решается индивидуально.

**Горизонтальные каналы распределения** можно охарактеризовать по числу составляющих их уровней. Каждый участник канала представляет собой отдельное предприятие, стремящееся обеспечить себе максимальную прибыль, что в ряде случаев может идти в ущерб максимальному извлечению прибыли системой в целом (рис. 1.20. – 1.23.).

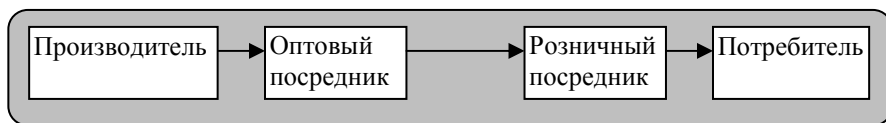


*Рис. 1.20. Канал нулевого уровня*

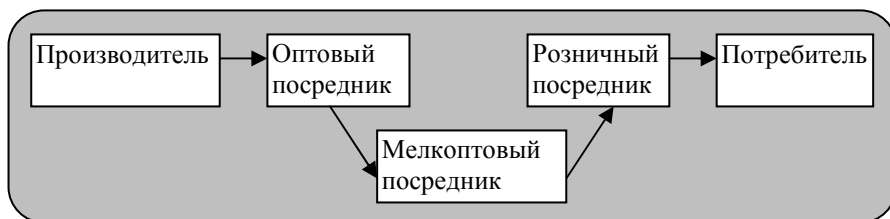


*Рис. 1.21. Одноуровневый канал*



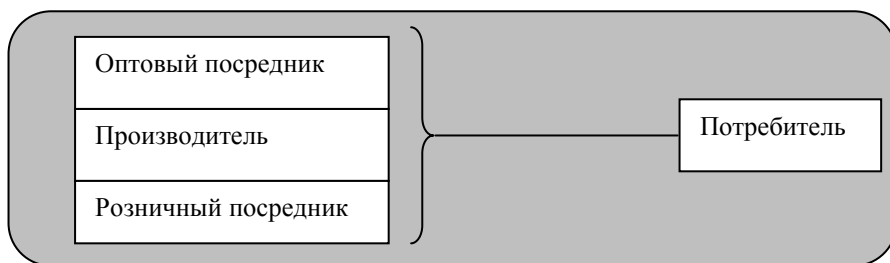


*Рис. 1.22. Двухуровневый канал*



*Рис. 1.23. Трехуровневый канал*

**Вертикальные каналы распределения** состоят из одного или нескольких посредников, действующих как единая система (рис. 1.24.). Один из членов канала, как правило, является собственником остальных компаний-участниц или предоставляет им определенные привилегии. Таким членом могут быть производитель, оптовый или розничный посредник.



*Рис. 1.24. Вертикальный канал распределения*

Вертикальные каналы возникли как средства контроля над поведением канала в силу того, что они экономичны и исключают дублирование членами канала выполняемых функций.

При выборе оптовых посреднических предприятий промышленные фирмы принимают во внимание целый ряд соображений. К основным соображениям относятся следующие:

- уверенность поставщика в заинтересованности посредников установить с ним взаимоотношения по сбыту товаров;
- хорошее знание оптовиком товара поставщика;
- достаточная степень надежности положения того или иного оптового предприятия в определенной отрасли промышленности;
- наличие у посредника складских емкостей и его готовность хранить у себя запасы продукции поставщика;
- прочность финансового положения посредника и обоснованность проводимой им политики цен.

### 1.8.5. Типы посредников в каналах распределения

Классификацию посредников в каналах распределения можно провести по сочетанию двух признаков:

- от чьего имени работает посредник;
- за чей счет посредник ведет свои операции.

В итоге получится четыре класса посредников (рис. 1.25).

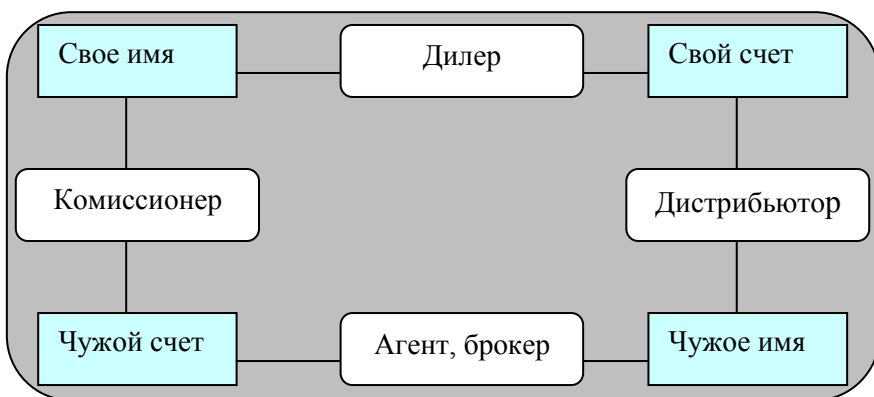


Рис. 1.25. Классы посредников

- **Дилеры** – это оптовые (реже розничные) посредники, которые ведут операции от своего имени и за свой счет, приобретая товар по договору поставки. Таким образом, дилер полностью оплачивает товар и становится его собственником. Различают два вида дилеров: *эксклюзивные* (являются единственными представителями производителя в данном регионе и наделены исключительными правами по реализации его продукции) и *авторизованные* (сотрудничают с производителем на условиях франшизы).
- **Дистрибьюторы** – оптовые и розничные посредники, ведущие операции от имени производителя за свой счет. Как правило, производитель предоставляет дистрибьютору право торговать своей продукцией на определенной территории и в течение определенного срока.
- **Комиссионеры** – это оптовые и розничные посредники, ведущие операции от своего имени за счет производителя. Комиссионер не является собственником продаваемой продукции-собственником товара до его передачи потребителю остается непосредственный производитель (являющийся в данной операции комитентом). Договор о поставке продукции заключается от имени комиссионера, на его же счет поступают деньги покупателя. Потом комиссионер переводит их на счет производителя, получая взамен вознаграждение или в виде процентов от суммы проведенной операции, либо в размере разницы между ценой, назначенной комитентом, и ценой реализации.
- **Агенты** – посредники, выступающие в качестве представителя или помощника другого, основного по отношению к нему лица (принципала). Агент заключает сделки от имени и за счет принципала. Существует два типа агентов: *универсальные* (могут совершать любые юридические действия от имени принципала) и *генеральные* (могут заключать только сделки, указанные в доверенности). За свои услуги агенты получают вознаграждение как по тарифам, так и по договоренности с принципалом – чаще всего это процент от суммы заключенной сделки.

- **Брокеры** – посредники при заключении сделок, сводящие контрагентов, они не являются собственниками продукции и не распоряжаются ею. Кроме того, брокеры (в отличие от агентов) не состоят в договорных отношениях ни с одной из сторон заключаемой сделки, действуя лишь на основе отдельных поручений. Вознаграждаются брокеры только за проданную продукцию в виде процента от её стоимости или фиксированной ставки за каждую единицу проданного товара.

После выбора типов посредников в канале распределения необходимо определиться с их количеством. Существует три подхода к решению этой проблемы.

- **Интенсивное распределение** предполагает обеспечение запасами продукции как можно большего количества торговых предприятий.
- **Эксклюзивное распределение** предполагает намеренно ограниченное число посредников, торгующих данной продукцией в рамках сбытовых территорий.
- **Селективное распределение** сочетает в себе два предыдущих подхода, позволяя производителю добиться более значительного, чем при эксклюзивном распределении охвата рынка при более жестком контроле и с меньшими, чем при интенсивном распределении издержками.

## **1.9. Транспортная логистика**

### **1.9.1. Основные понятия**

**Основная задача** транспортной логистики – перемещение требуемого количества товара в нужную точку, оптимальным маршрутом за требуемое время и с наименьшими издержками.

Для решения этой задачи специалистами по транспортной логистике должен быть рассмотрен ряд вопросов:

- выбор вида и типа транспортных средств;
- совместное планирование транспортного процесса со складским и производственным;

- совместное планирование транспортных процессов на различных видах транспорта (в случае смешанных перевозок);
- определение рациональных маршрутов доставки.

Осуществление перевозок – достаточно сложный процесс, в организации которого принимают участие компании, оказывающие услуги в области транспортировки. Организация единой интегрированной логистической системы для всех участников перевозок (грузоотправителей, грузополучателей, экспедиторов, перевозчиков, таможенных брокеров, страховых компаний) позволит согласовать действия всех звеньев транспортно-распределительной цепи любой перевозки, обеспечить жесткий контроль за грузовыми потоками, упростить процедуры оформления таможенных, перевозочных и других документов.

**Транспорт** – это отрасль материального производства, осуществляющая перевозки людей и грузов. По назначению выделяют две основные группы транспорта:

- **Транспорт общего пользования** – отрасль народного хозяйства, которая удовлетворяет потребности всех отраслей народного хозяйства и населения в перевозках грузов и пассажиров. Транспорт общего пользования обслуживает сферу обращения и население. Его часто называют магистральным. Понятие транспорта общего пользования охватывает железнодорожный транспорт, водный транспорт (морской и речной), автомобильный, воздушный транспорт и транспорт трубопроводный.

- **Транспорт необщего пользования** – внутрипроизводственный транспорт, а также транспортные средства, принадлежащие нетранспортным организациям.

Организация перемещения грузов транспортом необщего пользования является предметом изучения производственной логистики. Предметом же транспортной логистики является комплекс задач, связанных с организацией перемещения грузов транспортом общего назначения. Транспорт — связующее звено между элементами логистических систем.

Стоимость любого товара складывается из себестоимости изготовления и издержек на выполнение всех работ от момента

закупки материалов до момента покупки товара конечным потребителем. Значительную долю стоимости составляет так называемая «цена перехода», то есть наценки каждого звена в цепи производитель — конечный покупатель. Цена такого перехода может составлять 15-20%. За последние 25 лет время исполнения заказов по доставке товаров и затраты на их транспортировку сократились практически для всех компаний. В то же время стоимость содержания товарных запасов подскочила на 90%. Как утверждают данные исследований Colography Group, к 2010 г. на стоимость содержания товарных запасов будет приходиться 70% комплексной стоимости доставки товаров практически в любой индустрии. В этой перспективе понятно, что менеджеры по логистике будут добиваться как можно более быстрого движения своих товарных потоков с целью снижения издержек.

### 1.9.2. Терминалы

В логистической транспортной системе первостепенное значение отводится терминалам, которые определяют само функционирование этой системы.

**Контейнерные терминалы** – это контейнерные пункты со значительным объемом работ, обеспечивающие прием контейнеров от отправителей, выдачу их получателям, а также на передачу потока контейнеров с одного вида транспорта на другой. Преимущественное значение в перевозках крупнотоннажных контейнеров принадлежит морскому транспорту, который интегрируется с автомобильным и железнодорожным. В техническом аспекте это означает применение для перевозки контейнеров судов-контейнеровозов, специализированных железнодорожных вагонов и специальных автомобильных средств.

Терминальная технология базируется на стандартизации контейнеров, поддонов, пакетов, транспортных средств, погрузочно-разгрузочных машин и механизмов. Поэтому во всем мире приняты единые нормы и стандартные величины по контейнерам:

- ширина – 2438 мм,

- высота (max) – 2591 мм,
- длина – 3, 6, 9, 12 м,
- стандартная масса – 24 т,
- ширина (max) перевозочных транспортных средств – 2,5 м (в Европе) и 2,6 м (в США),
- высота (max) перевозочных транспортных средств – 4 м (от палубы до подволока).

Можно выделить три основных направления развития терминалов:

- сосредоточение работы в руках независимых транспортных компаний;
- усложнение структурного состава участников перевозок, рост многосторонних компаний, выход национальных компаний на международный рынок;
- возрастание значений стандартов при интермодальных перевозках (интермодальная система – система доставки грузов несколькими видами транспорта, по единому перевозочному документу с передачей грузов в пунктах перевалки с одного вида транспорта на другой и без участия грузовладельца).

### 1.9.3. Тарифы

**Тарифы** – система ставок, по которым взимается плата за транспортные услуги. Тарифы формируют доходы транспорта и являются при этом транспортными издержками потребителя товарных услуг.

С 1992 г. в России введены свободные транспортные тарифы на грузовые перевозки (кроме морского и ж/дорожного транспорта). Доля транспортных затрат в среднем по России составляет в конечной стоимости товара от 10 до 30%. Тарифная ставка определяется по формуле:

$$T=c(1+r/100),$$

где  $c$  – себестоимость перевозок в рублях,  $r$  – прибыль в процентах.

На транспорте используются следующие виды тарифов.

*Автомобильный транспорт:*

- сдельные;
- на условиях платных авто-тонно/часов;
- за временное пользование грузовым транспортом;
- по километровому расчету;
- за перегон подвижного состава;
- договорные тарифы.

*Железнодорожный транспорт:*

- общие тарифы;
- исключительные тарифы;
- льготные тарифы;
- местные тарифы.

*Морской транспорт:*

- по тарифу на постоянных линиях;
- по фрахтовым ставкам на непостоянных линиях.

*Речной транспорт:*

- тарифы определяются самостоятельно пароходством.

#### **1.9.4. Грузораспределительные центры (ГРЦ)**

Наиболее слабым местом в логистических системах являются пункты по выполнению перегрузочных операций, т.е. транспортные узлы. Новая концепция предлагает перейти от мультимодального терминала к единому грузораспределительному центру (ГРЦ), где терминал будет единым элементом.

ГРЦ является результатом дальнейшей интеграции производства, транспорта, сфер потребления и связующим звеном товаропроизводителя и потребителя. ГРЦ является региональной структурой. Он обслуживает регион в размере 150-200 км и имеет развитое складское хозяйство, отлаженную технологию перегрузки, комплектования и хранения груза. Степень автоматизации соответствует последним достижениям науки и техники.

Можно отметить следующие преимущества и выгоды ГРЦ:

- избавление населения от транзитного транспорта;



- расположение в пунктах стыка различных видов транспорта и выполнение функции логистического узла;

- обеспечение выгоды и равноправия всем входящим в него предприятиям, что выражается в следующих факторах:

- надежность сроков поставки,
- скорость поставки,
- низкая цена,
- большая гибкость системы,
- незначительные повреждения груза,
- быстрая обработка заказов,
- низкие цены на упаковку,
- низкие цены на страховку.

Территориальное размещение ГРЦ планируется исходя из четырех фактов:

- прогноза материальных потоков на базе изучения рынка;
- составления карты-схемы товародвижения;
- выбор варианта по критерию  $\min$  затрат, которые рассчитываются по формуле:

$$Z_n = C_g + C_t + K/T,$$

где  $C_g$  – годовые эксплуатационные затраты,  $C_t$  – годовые транспортные затраты,  $K$  – капитальные вложения,  $T$  – срок окупаемости;

- определение «центра тяжести рынка», исходя из критерия минимальности перевозок.

### 1.9.5. Организация складов

**Склад** – здания, сооружения и разнообразные устройства, предназначенные для приемки, размещения и хранения поступивших в них товаров, подготовки к потреблению и отпуску к потребителю. Склады являются одним из важнейших элементов логистической систем. Структурно склады могут рассматриваться как составной элемент ГРЦ.

Склады классифицируются по следующим параметрам:

- по высоте укладки груза:
  - не выше человеческого роста;

- высотные склады;
- *по конструкции:*
  - закрытые;
  - полузакрытые;
  - открытые площадки;
- *по степени автоматизации:*
  - не механизированные;
  - комплексно-механизированные;
  - механизированные;
  - автоматизированные;
  - автоматические;
- *по способу отбора груза:*
  - статические (груз выбирает человек);
  - динамические (автоматические стеллажные подъемники);
- *по возможности доставки транспортом:*
  - пристанционные;
  - портовые;
  - прирельсовые;
  - глубинные.

Склад должен быть органически связан с элементами технической системы и в совокупности с информацией предоставлять целостную интегрированную структуру, удовлетворяющую наиболее прогрессивному техническому решению.

## ***1.10. Информационная логистика***

### **1.10.1. Основные понятия**

Результаты движения материальных потоков находятся в прямой связи с рациональностью организации движения информационных потоков. В последние десятилетия именно возможность эффективного управления мощными информационными потоками позволила ставить и решать задачу сквозного управления потоками материальными. Высокая значимость информационной составляющей в логистических

процессах стала причиной выделения специального раздела логистики – информационной логистики.

**Информационная логистика** – организация и использование систем информационного обеспечения производственно-хозяйственных процессов на предприятии.

**Объект исследования** – информационные системы, обеспечивающие управление материальными потоками, используемая микропроцессорная техника, информационные технологии и другие вопросы, связанные с организацией информационных потоков (сопряженных с материальными).

**Задача информационной логистики** – обеспечение и координация информационного потока по всей логистической цепи на всех иерархических уровнях

**Основная цель** – обеспечение деятельности по выполнению хозяйственных задач необходимой информацией соответствующего вида, объема, качества, в соответствующий срок и в нужном месте. При этом информационное обеспечение должно осуществляться в минимальные сроки, с минимальными издержками и на максимально высоком уровне обслуживания.

Организация производственных процессов и информационной логистики на базе компьютеров является, как правило, сложным проектом, требующим поэтапного решения проблем. При планировании обычно намечаются различные варианты соответствующей процедуры. При этом переход от традиционной к электронной обработке информации связан со значительной переориентацией персонала, которая может быть охарактеризована как реинжиниринг хозяйственного процесса.

### **1.10.2. Классификация информационных потоков**

Каждому материальному потоку должен соответствовать информационный поток. Между материальным и информационным потоками не существует однозначного соответствия, то есть синхронности во времени возникновения, направленности. Информационный поток может опережать материальный поток (проведение переговоров, заключение

контрактов и т.д.) либо отставать от него (информация о получении поставленного товара). Можно выделить следующее соотношение материальных и информационных потоков:

- **опережающий** информационный поток во **встречном** направлении содержит, как правило, сведения о заказе;
- **опережающий** информационный поток в **прямом** направлении – это предварительные сообщения о предстоящем прибытии груза;
- **синхронно** с материальным потоком идет информация в **прямом** направлении о количественных и качественных параметрах материального потока;
- **вслед** за материальным потоком во **встречном** направлении может проходить информация о результатах приемки груза по количеству или по качеству, разнообразные претензии, подтверждения.

Классификация информационных потоков по различным признакам приведена в табл. 1.3.

Таблица 1.3. Классификация информационных потоков

Признак классификации	Виды информационного потока
Отношение к логистической системе и ее звеньям	<ul style="list-style-type: none"> <li>• внутренние,</li> <li>• внешние,</li> <li>• горизонтальные,</li> <li>• вертикальные,</li> <li>• входные,</li> <li>• выходные</li> </ul>
Вид носителей информации	<ul style="list-style-type: none"> <li>• на бумажных носителях,</li> <li>• на магнитных носителях,</li> <li>• оптические,</li> <li>• цифровые,</li> <li>• электронные</li> </ul>

Продолжение таблицы 1.3.

Признак классификации	Виды информационного потока
Периодичность использования	<ul style="list-style-type: none"> <li>• регулярные,</li> <li>• периодические,</li> <li>• оперативные</li> </ul>
Назначение информации	<ul style="list-style-type: none"> <li>• директивные (управляющие),</li> <li>• нормативно-справочные,</li> <li>• учетно-аналитические,</li> <li>• вспомогательные</li> </ul>
Степень открытости	<ul style="list-style-type: none"> <li>• открытые,</li> <li>• закрытые,</li> <li>• секретные</li> </ul>
Способ передачи данных	<ul style="list-style-type: none"> <li>• курьером,</li> <li>• почтой,</li> <li>• телефоном,</li> <li>• телеграфом,</li> <li>• телетайпом,</li> <li>• электронной почтой,</li> <li>• факсом,</li> <li>• по телекоммуникационным сетям</li> </ul>
Режим обмена информацией	<ul style="list-style-type: none"> <li>• «on-line»,</li> <li>• «off line»</li> </ul>
Направленность относительно МП	<ul style="list-style-type: none"> <li>• в прямом направлении с материальным потоком,</li> <li>• во встречном направлении с материальным потоком</li> </ul>
Синхронность с МП	<ul style="list-style-type: none"> <li>• опережающие,</li> <li>• одновременные,</li> <li>• последующие</li> </ul>

### 1.10.3. Информационные системы

Для организации информатизационных потоков в организации требуется создание и обеспечение функционирования единой информационной системы предприятия.

**Информационная система** – это определенным образом организованная совокупность взаимосвязанных средств вычислительной техники и программного обеспечения, позволяющая решать те или иные функциональные задачи.

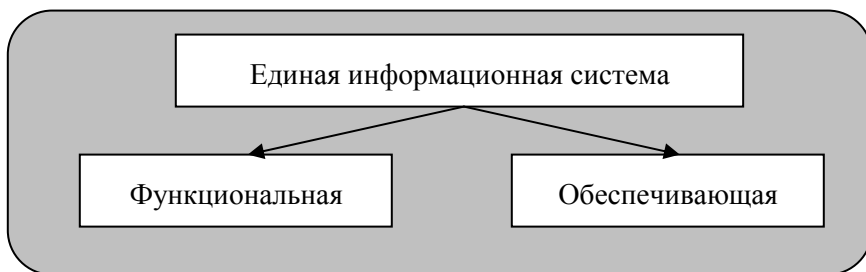


Рис. 1.26. Подсистемы информационной системы предприятия

**Функциональная подсистема** – совокупность решаемых задач, сгруппированных по признаку общности цели (рис.1.26.).

**Обеспечивающая подсистема** – совокупность элементов: *технического обеспечения*, обеспечивающих обработку и передачу информационных потоков, *информационного обеспечения*, включающего различные справочники, классификаторы, кодификаторы, средства формализованного описания данных и *математического обеспечения*, то есть совокупность методов решения функциональных задач.

По своему назначению информационные системы можно разделить на следующие виды (рис.1.27.):

- **Плановые** – создаются на административном уровне управления для принятия долгосрочных решений: создание и оптимизация звеньев логистической цепи; планирование

производства; общее управление запасами; управление резервами и др.

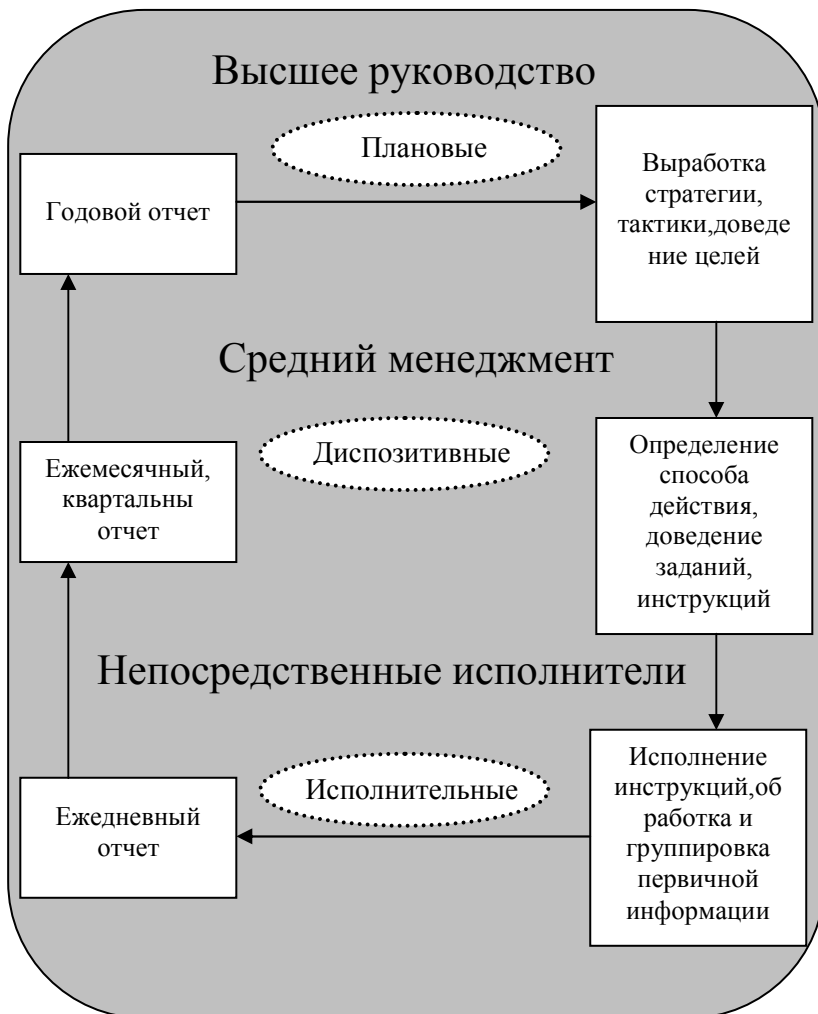


Рис. 1.27. Вертикальные информационные потоки

- **Диспозитивные** или диспетчерские – создаются на уровне управления складом или цехом для обеспечения отлаженной работы логистической системы, для принятия решений на среднесрочную и долгосрочную перспективу: распоряжение внутрискладским или внутризаводским транспортом; отбор грузов по заказам и их комплектование; учет отправляемых грузов; детальное управление запасами.
- **Исполнительные** – создаются на уровне административного или оперативного управления для исполнения повседневных дел в режиме реального времени: контроль материальных потоков; оперативное управление обслуживанием производства; управление перемещениями и т.п.

Также можно разделить вертикальную и горизонтальную интеграцию информационных логистических подсистем в единую информационную систему.

**Вертикальной интеграцией** считается связь между плановой, диспозитивной и исполнительной системами посредством вертикальных информационных потоков.

**Горизонтальной интеграцией** считается связь между отдельными комплексами задач в диспозитивных и исполнительных системах посредством горизонтальных информационных потоков.

По форме организации информационные системы в организации имеют следующую классификацию (рис.1.28.):

- **централизованный способ** – вся деятельность по информационным технологиям сосредоточена в одном управлении (подразделении) и подчиняется непосредственно высшему руководству компании, ответственному за информационные системы и технологии.  
**Преимущество:** высокая эффективность работы по внедрению новых информационных систем и технологий. **Недостаток:** высокие затраты на содержание аппарата управления.



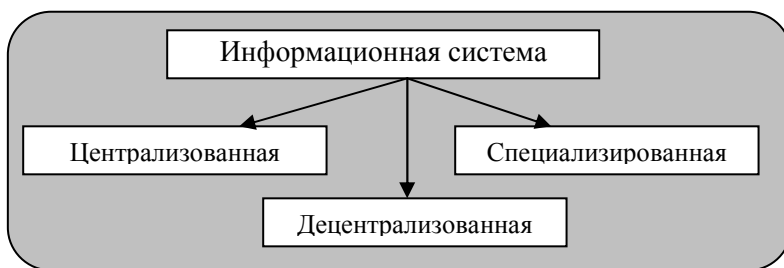


Рис. 1.28. Виды информационных систем

- **децентрализованный способ** – специалисты разных функциональных подразделений выполняют функции управления информационными системами (каждый в своем направлении). **Преимущество:** высокий уровень знаний предметной области менеджера по информационным системам. **Недостаток:** дублирование однотипных задач и функций в разных подсистемах
- **специализированный способ** – отсутствие подразделения по информационным системам (технологиям). При необходимости внедрения автоматизированной системы данные организации обращаются в специализированные фирмы и выполняют работы на договорной основе. Это характерно для небольших организаций, которые не могут иметь собственных специалистов в области информационных технологий, занятых полный рабочий день, и прибегают к услугам консультантов. **Преимущество:** высокий уровень научных и методических разработок. **Недостаток:** сложность учета всех специфических особенностей объекта.

#### 1.10.4. Использование информационной логистике при контроле движения товара

Качество информационной системы позволяет эффективно решать многие проблемы закупки, производства, транспортировки,

распределения продукции. Информационные потоки пронизывают все функциональные области предприятия (сервисную, производственную, кадровую, финансовую и т.д.).

Через каждое звено логистической цепи движения ресурсов, продуктов промежуточного производства, а также готовой продукции проходят интенсивные потоки информации, что связано с большим количеством наименований, разнообразием номенклатуры, часто различными направлениями деятельности. Для того чтобы эффективно управлять движением запасов и продукции и максимально удовлетворять запросам потребителей, необходимо в любой момент иметь данные о будущем, текущем и прошлом ассортименте входных, внутренних и выходных потоков запасов и товаров. Следовательно, необходимо постоянно производить и потреблять адекватную материальным потокам информацию.

Для того чтобы эффективно управлять материальными потоками, нужно собрать оперативную информацию о движении ресурсов и товаров, составляющих эти потоки. На этапе сбора данных необходимо обеспечить достоверность, полноту и своевременность поступления первичной информации.

Мониторинг состояния информационного потока основан на использовании систем идентификации товаров. Информация о пребывании той или иной единицы товара в данное время в данном месте может поступать в современные компьютерные информационные системы следующим образом:

- посредством ввода данных через клавиатуру компьютера;
- напрямую из информационных систем партнеров по бизнесу;
- путем сканирования (считывания) имеющихся на товаре ярлыков, содержащих штриховые коды.

Многообразие товарных единиц и большое количество параметров, характеризующих материальные потоки, вызывают необходимость автоматической идентификации товаров, упаковки, грузовых единиц. В настоящее время автоматическая идентификация осуществляется с помощью сканирования

штриховых кодов. Сканеры и другие средства считывания помогают получать информацию о совершении логистической операции (прием товара, продажа, складирование и т.д.) в момент и в месте ее совершения, существенно снижая при этом затраты и ускоряя обработку информации.

**Штриховой код** — это последовательность чёрных и белых полос, содержащая некоторую информацию в удобном для считывания техническими средствами виде.

Исторически сложилось так, что в торговле наиболее часто используется код EAN/UPC. Первоначально была разработана американская система UPC, содержащая в себе для кодировки товара 12 цифр, и она обрела такую популярность, что на неё обратили внимание и европейские страны.

**UPC** или **Universal Product Code** (универсальный код товара) — американский стандарт штрихкода, предназначенный для отслеживания товаров в магазинах. UPC был разработан в 1973 году Джорджем Джосефом Лорером (George Joseph Laurer), работавшим инженером в корпорации IBM. В июне 1974 года первый UPC сканер производства корпорации NCR был установлен в супермаркете Марш (Marsh) в городе Трой (Трой) штата Огайо. 26 июня 1974 года кассиром этого супермаркета был просканирован первый товар — блок 10 фруктовых жевательных резинок компании Wrigley. Стандартизацией и регистрацией кодов UPC занимались организации UCC (Uniform Code Council, Inc.) в США и ECCC (Electronic Commerce Council of Canada) в Канаде. В 2005 году эти организации объединились с европейской ассоциацией EAN и образовали глобальную организацию по стандартизации GS1. «Национальная организация GS1 в России» является представителем этой организации в нашей стране.

### **Разновидности кода:**

- UPC-A (полный) — кодируется 12 цифр.
- UPC-E (сокращённый) — кодируется 8 цифр.

Код UPC — простой и практически симметричный линейный штрихкод. Эта простота, симметричность и высокая помехозащищённость обусловлена недостаточно развитой техникой времён создания этих кодов. Код состоит из 2 групп цифр, по 6 цифр в каждой группе — левой и правой. Группы цифр окаймляются так называемыми защитными, или ограждающими, штрих-шаблонами (Guard Patterns), которые выделены на рисунке для наглядности зелёным цветом. Эти шаблоны содержат штрихи единичной ширины, которые служат для синхронизации сканера штрихкода. Наличие именно трёх таких полей обусловлено в первую очередь возможным нанесением штрихкода на закруглённую поверхность. И если сейчас это не является особой проблемой, то во времена создания этого кода сканеру требовалось знать ширину единичного штриха в начале, середине и конце кода. Левые и правые защитные шаблоны состоят из 3 штрихов единичной ширины — двух тёмных и одного светлого между ними. Средний защитный шаблон состоит из 5 штрихов — трёх светлых и двух тёмных. Всё остальное — цифры.

Каждая цифра левой или правой группы кодируется с помощью четырёх штрихов: двух светлых и двух тёмных. Каждый штрих может иметь относительную ширину в одну, две, три или четыре единицы. Общая ширина штрихов для одной цифры всегда составляет семь единиц. Битовая комбинация для каждой цифры разработана таким образом, чтобы цифры, насколько это возможно, отличались друг от друга. Максимальная длина тёмного или светлого участка не может превышать четырёх единиц. Общая ширина всего кода всегда равна 95 единицам. В любом коде 29 светлых и 30 тёмных штрихов. Все эти технические решения очень важны для надёжности и простоты сканирования этого кода.

Первая цифра кода — это так называемый префикс — имеет некоторое логическое значение, но не столь важна с технической точки зрения. Последняя цифра — контрольное число, служит для выявления возможной ошибки при чтении кода сканером или ручного ввода цифр кода с клавиатуры.

Направление чтения комбинации штрихов значения не имеет, код специально разрабатывался так, чтобы он одинаково просто считывался как в прямом, так и обратном направлении

(если товар перевернут). Также не имеет значения то, какое исполнение имеет весь штрихкод — фотографически позитивное или негативное. То есть штрихкод, нанесённый светлыми полосками по тёмному фону читается абсолютно так же, как и тёмными полосками по светлому фону. Мало того, цвета штрихов и фона не обязательно должны быть белыми и чёрными, возможны и другие цветовые комбинации. (Только не красный на белом, как на алюминиевых банках Coca-Cola, так как распознаватель штрихкода использует красные лучи).

В связи с тем, что весь диапазон цифр кода UPC был занят для кодирования товаров США и Канады, а товары и фирмы монопольно регистрировались в США, европейским специалистам необходимо было найти новое решение, которое позволило бы распознавать коды в UPC, и создать систему кодировки товаров других стран. Поэтому перед разработчиками европейской кодировки EAN-13 встал серьёзная задача расширить диапазон кодов и сделать независимую от США систему регистрации, обеспечив максимальную совместимость с кодировкой UPC, в результате решения которой был найден способ кодирования 13-й цифры, первой по счёту с помощью 12 цифровых шаблонов, так же как и в UPC. При этом в кодировке EAN-13 удалось сохранить совместимость, а UPC стал подмножеством кодировки EAN-13 с первой цифрой 0.

### **Преимущества кодировки EAN-13:**

- кодировка EAN-13 смогла стать независимой от единого регистратора;
- для европейского товара не потребовалось вводить дополнительных полей со штрихкодом или второго поля с другим штрихкодом;
- штриховка американского товара не требовала никаких изменений.

Код EAN-13 (рис.1.29.) с точки зрения кодировки товара условно можно разделить на 5 зон:

1. Префикс национальной организации GS1 (3 цифры);
2. Регистрационный номер производителя товара (4-6 цифр);

3. Код товара (3-5 цифр);
4. Контрольное число (1 цифра);
5. Дополнительное поле (необязательное штрихкодое поле, иногда там ставится знак «>», «индикатор свободной зоны»).



*Рис. 1.29. Структура штрих-кода*

**Префикс национальной организации.** В цифровом обозначении штрихкода первые три цифры (460)— префикс GS1. Означают код регионального представительства ассоциации GS1 (регистратора), в которой зарегистрировался производитель продукции, и совсем **не** означает страну происхождения (изготовителя или продавца) продукта. Ассоциация не запрещает регистрацию предприятия у регистратора другой страны. Хотя большинство предприятий регистрируется в представительстве ассоциации своей страны, это совсем не означает, что продукция произведена именно в этой стране. Подробную информацию о префиксах можно найти на сайте российского представительства GS1.

Отдельно стоило бы отметить коды с 200 по 299. То есть все коды, начинающиеся с цифры 2. Это коды для внутреннего использования предприятиями в собственных целях. Любое предприятие любых регионов мира, а также частные лица могут использовать их как угодно, по своему усмотрению, но исключительно в своих внутренних целях. Использование этих кодов за пределами предприятия запрещено. Внутреннее

содержание кодов, начинающихся с 2, может подчиняться любой логике, которую установило то или иное предприятие для себя (обычно это предприятия розничной торговли), и может содержать цену или вес товара, или любые другие параметры. Особенно часто эта кодировка применяется для весового товара. Эти коды может использовать любое предприятие, при чём они нигде специально не регистрируются и никак не регулируются сторонними организациями.

**Регистрационный номер производителя товара.** Вторая логическая группа цифр — это код предприятия производителя или продавца товара. Обычно он занимает 4 – 6 цифр, то есть для каждого регионального префикса может быть зарегистрировано от десяти тысяч до миллиона предприятий. Длина этого поля зависит от политики регионального представительства. В ряде стран размер этого поля зависит от уровня оплаты членских взносов. Проблема связана с тем, что если длина этого поля больше, то можно зарегистрировать больше предприятий, но при этом каждому предприятию выделяется возможность регистрации меньшего количества товара. То есть, если код предприятия составляет 6 цифр, то каждому предприятию выделяется пространство для регистрации 1000 единиц товара. Ранее Российское представительство выделяло в качестве кода предприятия 4 цифры, и тогда для кодировки товара предприятие обладало возможностью регистрации ста тысяч единиц товара. Российское представительство приняло решение о выделении для вновь регистрируемых предприятий 6 цифр под код предприятия и 3 цифры под код товара. Это было обусловлено тем, что большая часть предприятий выпускает менее 1000 наименований товара, и это разумный шаг к более экономному расходованию кодов.

**Код товара.** Ранее было сказано, что 3-5 оставшихся цифр выделяются для кодировки самого товара. И длина этого поля зависит от политики регистратора, то есть в зависимости от того, какую длину кода предприятия выбрал регистратор в качестве базовой. То есть от одной до ста тысяч наименований. Вопреки сложившемуся мнению, цифровой код самого товара никакой смысловой нагрузки не несёт. Ассоциация рекомендует последовательное присвоение кодов по мере выпуска нового вида

продукции без вложения в этот код какой-либо дополнительной смысловой нагрузки. То есть это не вес, не цвет, не цена, не что иное, как порядковый номер товара, который компьютер терминала магазина просто берёт из своей компьютерной базы.

Следует отметить, что код товара 999 или 99999 вряд ли можно встретить на упаковках с продукцией, потому что этот код указывает на предприятие как таковое. Собственно говоря, код этого специфичного товара в совокупности с остальными частями кода идентифицирует уникальный код самого предприятия (идентификационный номер предприятия или GLN) в целях автоматизации и обмена документацией. Аналогично и для его подразделений можно увидеть 998, 997, 996.

**Контрольное число.** Последняя цифра – контрольная, используемая для проверки правильности считывания штрихов сканером.

Контрольная цифра есть остаток от деления на 10 суммы из цифр номера, умноженных на соответствующие коэффициенты из таблицы. Если контрольная сумма есть 0, то номер признаётся правильным. Коэффициенты, применяемые для расчета контрольного числа для штрих-кода EAN-13, указаны в табл. 1.4.

Таблица 1.4. Коэффициенты для расчета контрольной цифры штрих-кода EAN-13

k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>5</sub>	k <sub>6</sub>	k <sub>7</sub>	k <sub>8</sub>	k <sub>9</sub>	k <sub>10</sub>	k <sub>11</sub>	k <sub>12</sub>	k <sub>13</sub>
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1

Если нужно подсчитать требуемое контрольное число для произвольного номера, нужно вначале поставить «0» на крайнюю правую позицию, посчитать контрольную сумму, а затем, если она не равна нулю, заменить этот «0» на «10 — контрольная сумма».

Проверка правильности кода:

**4600051000057** (сигареты «Прима») – код EAN-13.

$4 \times 1 + 6 \times 3 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 1 + 5 \times 3 + 1 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 1 + 5 \times 3 + 7 \times 1 = 4 + 18 + 0 + 0 + 0 + 15 + 1 + 0 + 0 + 0 + 15 + 7 = 60$ .

Контрольная сумма = 0 – номер правильный.

Восстановление контрольного числа.



Дан номер **460154602129?**, EAN-13 с потерянной контрольной цифрой «?».

Произведем расчет для 4601546021290:

$$4 \times 1 + 6 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 3 + 6 \times 1 + 0 \times 3 + 2 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 1 + 9 \times 3 + 0 \times 1 = 4 + 18 + 0 + 3 + 5 + 12 + 6 + 0 + 2 + 3 + 2 + 27 + 0 = 82.$$

Контрольная сумма = 2 – номер неправильный, но если вместо «?» подставить «10 – 2» = «8», то номер станет правильным. Таким образом, контрольное число (цифра) есть «8».

### **1.10.5. Преимущества использования единой информационной логистической системы**

Если информационную логистику все же удастся внедрить в производственный процесс, и система автоматизации построена достаточно грамотно, то она может рассматриваться в следующих качествах:

- как *инструмент документации* – взаимодействие обработчиков и графическая интерпретация в рамках всей системы позволяют документировать процесс, что имеет особое значение с учетом сертификации Международной организации стандартов;
- как *средство визуализации производства* – на мониторах ясно видны так называемые невидимые запасы на местах обработки, что позволяет своевременно выявлять и ликвидировать узкие места, внося соответствующие коррективы;
- как *система мониторинга* – каждый заказ может быть затребован в любое время, благодаря чему можно оценить состояние портфеля заказов и предпринять дальнейшие шаги по его обработке;
- как *система контроля* – протоколирование процессов позволяет получать специфическую информацию (время обработки, время начала и окончания работ, неполадки, причины возникновения проблем, последующая обработка и т.п.);

- как *информационная система качества* — накопленная информация и опыт сотрудников могут рассматриваться в «кружках качества» в духе японской системы Kaizen. Гибкость средств менеджмента позволяет быстро и легко вносить изменения в процесс;
- как *средство поддержки пользователей*, которые освобождаются от функции управления данными. Система автоматически запускает соответствующее средство обработки, а также осуществляет поиск и открывает доступ к подлежащим обработке данным.

Непрерывный контроль над компьютеризованным процессом позволяет систематически совершенствовать его. Поскольку вся ключевая информация об организации процесса представлена в машинной форме, она может быть очень быстро оценена с применением компьютера. Пользователи сами с помощью имеющихся средств могут легко вносить изменения в реализуемые процессы. При этом нужно обязательно учитывать человеческий фактор. Техничко-организационная адаптация хозяйственных процессов должна осуществляться всегда в сочетании с кадровыми мероприятиями. Постоянное обучение сотрудников должно стать важной составной частью текущего совершенствования процесса.

## ***1.11. Кадровая логистика***

### **1.11.1 Основные понятия**

Квалифицированные кадры являются одной из составляющих успеха работы любой организации. На сегодняшний день хорошо подобранный компетентный в своей работе персонал является существенным конкурентным преимуществом современных организаций, ведь именно персонал является непосредственным производителем продукта, который в будущем обеспечит прибыль. Поэтому одним из направлений корпоративной политики компании руководители обозначают эффективное управление персоналом, направленное на

формирование штата из квалифицированных работников и использование своих работников, создавая все условия для интенсивного развития их трудового потенциала

В условиях неопределенности экономической ситуации и высокой конкуренции организации стараются сократить издержки и потери на всех звеньях производственной цепи, наличие компетентных и ответственных сотрудников, соответствующих своим должностям и обязанностям, способствует минимизации потерь и убытков, связанных с человеческим фактором.

Современный подход к формированию штата сотрудников предполагает использование логистического подхода. Логистика, которая занимается вопросами по обеспечению предприятия компетентными кадрами, – кадровая логистика.

Кадры – это специально обученный персонал, способный с необходимой ответственностью выполнять производственные функции. Кадры характеризуются высокой подвижностью, поэтому понятие потока кадров вполне раскрывает необходимость постоянного отслеживания и управления изменениями в человеческих ресурсах. Как любой другой вид ресурсов, кадры должны поступать в логистические системы (приниматься на работу), развиваться и использоваться в них (выполнять свои должностные обязанности, обучаться, перемещаться на другие должности) и выходить за пределы (увольняться). При таком подходе логистика должна обеспечить оптимальный баланс между входными и выходными кадровыми потоками с тем, чтобы кадровый потенциал предприятия развивался в соответствии с развитием этого предприятия.

Кадровая логистика – это раздел логистики, в котором изучается оптимизация потоков трудовых ресурсов предприятий.

Как и по всем другим видам логистики, цель кадровой логистики можно сформулировать с помощью правила, справедливого для логистики в целом

- Нужные кадры.
- С необходимой квалификацией.
- В нужное время.
- В необходимом количестве.

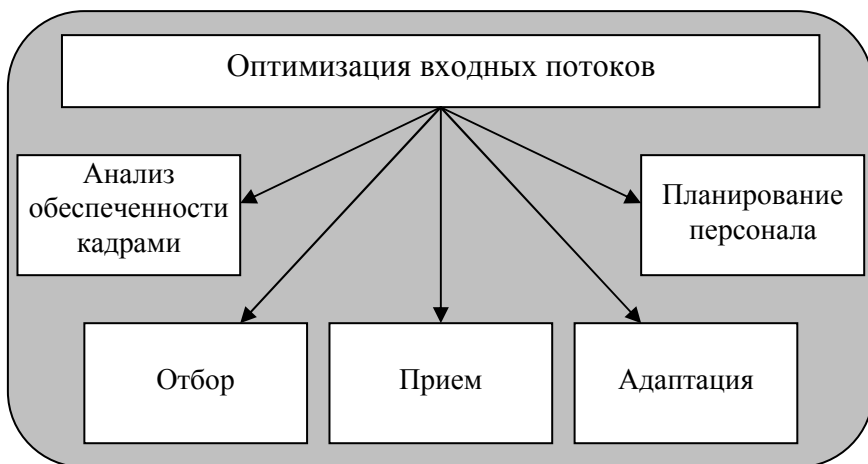
- В нужном месте.
- Необходимым структурным подразделениям.
- С минимальными затратами.

Кадровая логистика является достаточно новым инструментом по оптимизации затрат производства, однако современные теории и руководства по организации работы персонала рассматривают сотрудников как определенный вид ресурсов, необходимый предприятию для функционирования. Однако данный вид ресурсов имеет ряд особенностей, в первую очередь связанных с тем, что кадровые ресурсы не являются собственностью организации, поэтому в кадровой логистике работники рассматриваются как партнеры, заключившие с предприятием договор о найме.

Во взаимодействие с фирмой работник вступает не как механизм, выполняющий конкретные действия и операции, а как разумный и сознательный индивид, обладающий устремлениями, желаниями, эмоциями, моралью. Это взаимодействие всегда имеет более широкую область, чем выполнение определенных работ на определенном рабочем месте. В любом предприятии кроме трудовых операций и функций, обеспечивающих движение материальных, финансовых, информационных, сервисных потоков, работники вступают в личные взаимоотношения, создавая тем самым культурную среду, социальный климат фирмы.

Еще одной отличительной чертой кадровых ресурсов является возможность развития в процессе производства. Развитие кадров через обучение в процессе их трудовой деятельности – важная отличительная особенность данных ресурсов по отношению ко всем остальным.

Кадровая логистика предприятия имеет четыре основных направления: оптимизация входных потоков в соответствии с потребностями фирмы, использование кадров, развитие кадров и высвобождение кадров (рис. 1.30.).



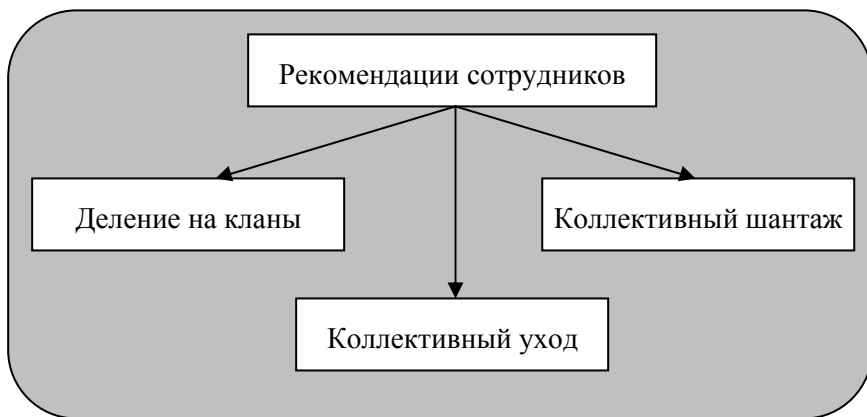
*Рис. 1.30. Оптимизация входных потоков*

Прием новых работников происходит из внешней для организации среды. Основными внешними источниками притока (входного потока) персонала являются: учебные заведения, службы занятости (биржи труда); специализированные фирмы по найму персонала; рекомендации сотрудников, знакомых, деловых партнеров. Все компании сталкиваются с необходимостью поиска новых сотрудников, но подходы к поиску различны. Большинство компаний предпочитает брать кандидатов, уже имеющих опыт и навыки работы. Однако прием молодых специалистов, недавно окончивших учебные заведения, может быть намного выгоднее и эффективнее. Из-за отсутствия практических навыков молодые специалисты не могут претендовать на высокий уровень заработной платы, который попросит кандидат с опытом, а работа такого специалиста может быть и быстрее, и эффективнее. Каждая компания имеет свои особенности и любому сотруднику требуется определенное время для адаптации и настройки на новую работу, процесс адаптации у молодых специалистов проходит значительно быстрее и легче, чем у специалистов среднего и пожилого возраста.

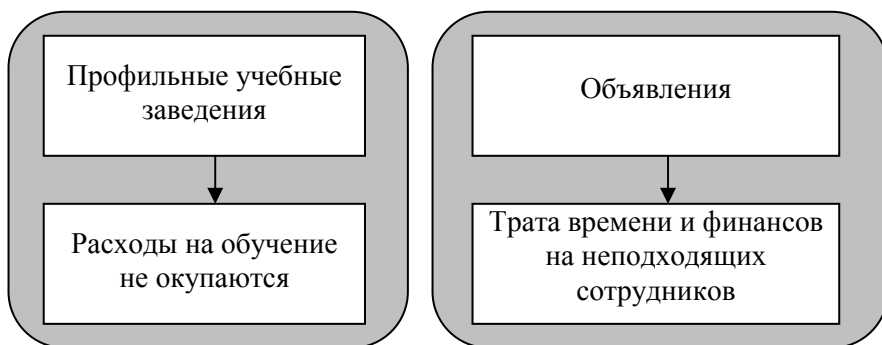
Однако прием сотрудников исключительно из внешней среды приветствуется далеко не всеми организациями. Часто в крупных сетевых организациях работают члены одной семьи и

разные поколения. Привлекая внутренние источники, фирма уже знает положительные и отрицательные стороны кандидатов, в свою очередь сам кандидат на замещение новой должности хорошо знает фирму, поэтому может быстрее адаптироваться.

Каждый способ привлечения персонала в организацию имеет свои положительные и отрицательные стороны (рис.1.31-1.33.).



*Рис. 1.31. Риски подбора персонала по рекомендациям*



*Рис. 1.32. Риски подбора персонала по объявлениям и при приеме молодых специалистов из профильных учебных заведений*



*Рис. 1.33. Риски подбора персонала при участии кадрового агентства*

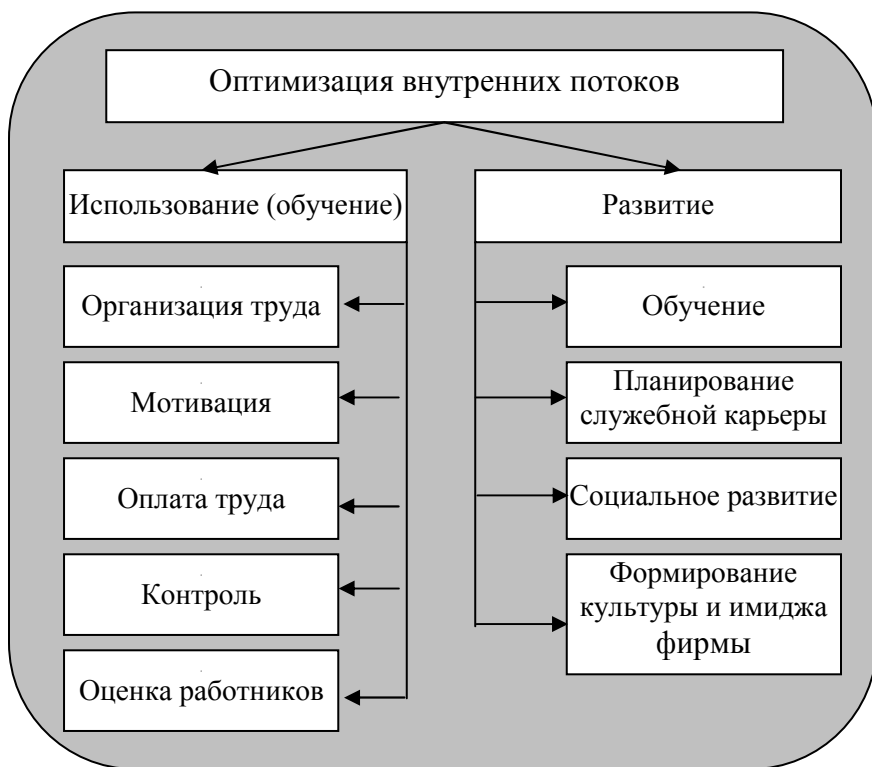
Можно различить три вида предпочтений работников по карьере.

- Статусная карьера – доминировании статуса над размером зарплаты при выборе работником карьерного пути.
- Материальная (денежная) карьера – карьера понимается как увеличение стоимости труда работника вне зависимости от уровня должности в организационной иерархии.
- Достиженческая карьера (карьера достижений) – накопление достижений, таких работников интересуют рискованные проекты, они азартны, их привлекает все необычное.

Учитывая склонности ценного сотрудника, необходимо правильно сделать выбор из возможных способов мотивации.

Логистика внутренних кадровых потоков – сложный процесс, включающий в себя несколько направлений деятельности (рис.1.34.). На сегодняшний день мотивация сотрудника к качественной работе и к работе в конкретной организации имеет большое значение. Для того чтобы сохранять ценных

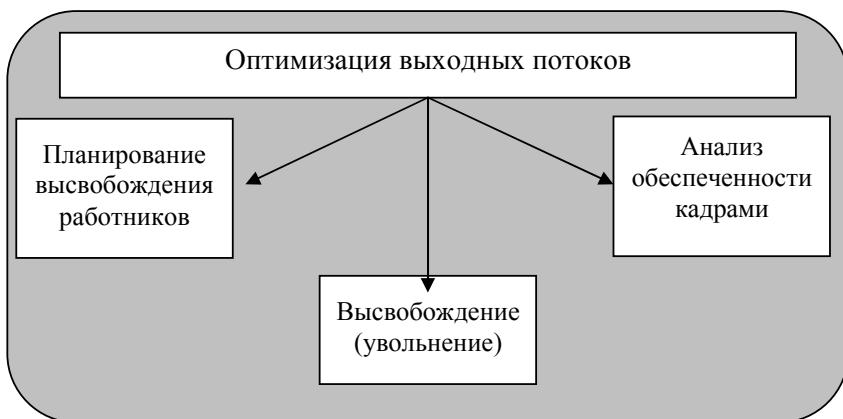
квалифицированных сотрудников, компании нужно точно знать, какие приоритеты расставил специалист. Чтобы правильно воздействовать на сотрудника необходимо знать, какое мнение о карьере у этого специалиста.



*Рис. 1.34. Оптимизация внутренних потоков*

Как и другие виды ресурсов, одни и те же кадровые ресурсы нельзя использовать бесконечно. Процессы увольнения и замещения одних специалистов другими неизбежны, поэтому для поддержания стабильной работы компании необходимо планировать высвобождение работников и предусматривать их своевременную замену (рис.1.35.).





*Рис. 1.35. Оптимизация выходных потоков*

Работа с трудовыми ресурсами зависит от политики компании и вида ее деятельности. В зависимости от экономической ситуации в целом политику компании можно корректировать, однако определенные ключевые приоритеты должны оставаться постоянными.

В зависимости от того, каких стратегических целей придерживается фирма, решаются задачи кадровой логики. Например, каких принципов придерживаться в работе с персоналом в случае сокращения объемов деятельности фирмы: увольнять временно высвобожденных сотрудников или сохранять. Если сохранять, то каким образом: переводить на сокращенные часы работы; использовать на других работах; направлять на длительную переподготовку и т.п.

Исходя из долгосрочных направлений развития фирмы, решаются и такие вопросы движения кадровых потоков (рис.1.36.), как: обучать работников внутри фирмы или искать тех, кто уже имеет необходимую подготовку; набирать персонал со стороны или переучивать работников, подлежащих высвобождению и т.д.



*Рис. 1.36. Виды движения работников на предприятии*

Успех любого предприятия в современных условиях, характеризующихся быстрыми изменениями, в значительной степени зависит от гибкости производства. Чтобы обеспечить это требование, необходимо иметь гибкую рабочую силу, поэтому одним из важных показателей кадровой логистики является мобильность кадровых потоков. Мобильность кадров – это способность персонала предприятия быстро перестраиваться и приспосабливаться к меняющимся условиям внешней и внутренней

среды, к смене трудовых функций. Наличие гибкой рабочей силы обеспечивает возможность быстрой перестройки деятельности фирмы, обновления продукции, смены специализации. Мобильность кадров тесно связана с процессами повышения квалификации работников и освоения новых профессий.

Необходимо помнить, что фирма не только производит продукцию для внешней среды, но и обеспечивает определенный уровень жизни своим работникам и собственникам, предоставляя им работу, возможность участия в прибылях, социальные гарантии и т.п. Кадровая логистика должна создавать благоприятную среду для реализации и развития творческих возможностей работников, их способностей. Одним из важных показателей эффективности кадровой логистики является обеспечение работникам удовлетворенности трудом, общественного признания их достижений.

Логистическая кадровая система предприятия может считаться результативной, если:

- все работники четко понимают и активно участвуют в реализации целей и задач фирмы, подразделения, в котором работают;
- выполнение персоналом должностных обязанностей четко соответствует предъявляемым требованиям;
- сотрудники всех структурных подразделений фирмы эффективно взаимодействуют друг с другом;
- эффективно осуществляется взаимодействие с внешними партнерами;
- работники постоянно повышают знания и применяют их в практической деятельности;
- уделяется необходимое внимание гуманизации процесса труда (улучшение условий труда и профессионального роста сотрудников, справедливое материальное и моральное поощрение, развитая социальная политика и т.д.).

Инвестиции в человеческие ресурсы, развитие кадрового потенциала становятся одним из наиболее важных факторов

конкурентоспособности предприятий, поскольку хорошо обученный персонал, с высоким уровнем мотивации на качественную работу имеет не меньшее значение, чем новейшие технологии и оборудование. Затраты, способствующие повышению квалификации и результативности труда работников, рассматриваются в современном бизнесе как инвестиции, которые будут многократно компенсированы возросшими доходами. У каждого работника фирмы имеется определенный период трудоспособности до его выхода на пенсию. Любой, даже самый квалифицированный работник нуждается в затратах на поддержание знаний на требуемом уровне. Затрачиваемые на обучение, повышение квалификации, переподготовку средства могут принести значительно больший доход.

## ***1.12. Incoterms***

### **1.12.1. Основные понятия**

***Incoterms (International commerce terms)*** – международные правила по толкованию наиболее широко используемых торговых терминов в области внешней торговли. Международные торговые термины представляют собой стандартные условия договора международной купли-продажи, которые определены заранее в международно признанном документе. Эти условия регламентируют момент передачи права собственности на товар (и, соответственно, ответственность за испортившийся в пути товар, неправильное оформление документов на груз и т. д.).

Целью создания единых международных торговых требований является обеспечение компаний, вступающих в международные взаимодействия комплектом единых правил по толкованию наиболее широко используемых торговых терминов в области внешней торговли. Благодаря использованию единых правил можно избежать или, по крайней мере, в значительной степени сократить неопределенность различной интерпретации таких терминов в различных странах.

В 1936 году Международная торговая палата впервые опубликовала свод международных правил для точного определения торговых терминов, что позволило сократить число возникающих недоразумений, разногласий и судебных разбирательств с вытекающей пустой тратой времени и денег. Позднее эти правила подвергались неоднократной корректировке, которая являлась необходимым условием, в связи с ростом значения международной торговли и внешнеэкономической деятельности.

***Международная торговая палата (МТП) ( International Chamber of Commerce — ICC)*** — независимая некоммерческая международная организация, созданная в 1919 году и объединяющая в настоящее время тысячи предприятий, ассоциаций и компаний из 140 стран мира, способствующая решению наиболее актуальных проблем, стоящих перед бизнесом. МТП тесно взаимодействует с такими международными организациями, как ООН, ВТО, Всемирный банк и другими, являясь для них коллективным консультативным органом. Основная цель МТП заключается в повышении уважения к высоким стандартам этики ведения международного бизнеса. Деятельность МТП направлена на решение наиболее актуальных вопросов, среди которых такие, как разработка унифицированных правил и стандартов ведения бизнеса и решение задач, связанных с либерализацией международной торговли.

### **1.12.2. Особенности Incoterms**

Incoterms – являются специализированными правилами, поэтому необходимо знать особенности их использования.

- Сфера действия Incoterms ограничена вопросами, связанными с правами и обязанностями сторон договора купли-продажи в отношении поставки проданных товаров.
- Incoterms связаны с определенными обязанностями сторон, такими как: обязанность продавца поставить товара в распоряжение покупателя или передать его для перевозки

или доставить его в пункт назначения, а также с распределением риска между сторонами в этих случаях.

- Incoterms связаны с обязанностями очистить товар для экспорта и импорта, с упаковкой товара, обязанностью покупателя принять поставку, а также обязанностью представить подтверждение того, что соответствующие обязательства были должным образом выполнены.
- Incoterms не предназначены для замены условий договора, необходимых для полного договора купли-продажи либо посредством включения нормативных условий, либо индивидуально оговоренных условий.
- Incoterms не предназначены для работы с последствиями нарушения договора и освобождением от ответственности вследствие различных препятствий.

### 1.12.3. Структура Incoterms

Еще при создании Incoterms 1990 для облегчения понимания термины были сгруппированы в четыре категории, отличающиеся между собой:

#### **Категория «Е» – отгрузка**

Термин ***EXW (EX Works)*** или «Франко завод» означает, что продавец тогда считается выполнившим свои обязанности по поставке, когда он предоставит товар в распоряжение покупателя на своем предприятии или в другом названном месте (например: на заводе, фабрике, складе и т.п.). Продавец не отвечает за погрузку товара на транспортное средство, а также за таможенную очистку товара для экспорта. Данный термин возлагает, таким образом, минимальные обязанности на продавца, и покупатель должен нести все расходы и риски в связи с перевозкой товара от предприятия продавца к месту назначения. Однако, если стороны желают, чтобы продавец взял на себя обязанности по погрузке товара на месте отправки и нес все риски и расходы за такую отгрузку, то это должно быть четко оговорено в соответствующем дополнении к договору купли-продажи. Этот термин не может применяться,

когда покупатель не в состоянии выполнить прямо или косвенно экспортные формальности. В этом случае должен использоваться термин **FCA**, при условии, что продавец согласится нести расходы и риски за отгрузку товара.

### **Категория «F» – основная перевозка не оплачена продавцом**

К этой группе относятся три термина:

- **FCA (Free Carrier)** – «Франко перевозчик» означает, что продавец доставит прошедший таможенную очистку товар указанному покупателем перевозчику до названного места. Следует отметить, что выбор места поставки повлияет на обязательства по погрузке и разгрузке товара на данном месте. Если поставка осуществляется в помещении продавца, то продавец несет ответственность за отгрузку. Если же поставка осуществляется в другое место, продавец за отгрузку товара ответственности не несет. Данный термин может быть использован при перевозке любым видом транспорта, включая смешенные перевозки.
- **FAS (Free Alongside Ship)** – «Франко вдоль борта судна» означает, что продавец выполнил поставку, когда товар размещен вдоль борта судна на причале или на лихтерах в указанном порту отгрузки. Это означает, что с этого момента все расходы и риски потери или повреждения товара должен нести покупатель. По условиям термина **FAS** на продавца возлагается обязанность по таможенной очистке товара для экспорта. Однако, если стороны желают, чтобы покупатель взял на себя обязанности по таможенной очистке товара для экспорта, то это должно быть четко оговорено в соответствующем дополнении к договору купли-продажи. Данный термин может применяться только при перевозке товара морским или внутренним водным транспортом.
- **FOB (Free On BoardТермин)** – «Франко борт» означает, что продавец выполнил поставку, когда товар перешел через поручни судна в названном порту отгрузки. Это

означает, что с этого момента все расходы и риски потери или повреждения товара должен нести покупатель. По условиям термина **FOB** на продавца возлагается обязанность по таможенной очистке товара для экспорта. Данный термин может применяться только при перевозке товара морским или внутренним водным транспортом. Если стороны не собираются поставить товар через поручни судна, следует применять термин **FCA**.

**Категория «С» – основная перевозка оплачена продавцом**

- ***CFR (Cost and Freight)*** – «Стоимость и фрахт» означает, что продавец выполнил поставку, когда товар перешел через поручни судна в порту отгрузки. Продавец обязан оплатить расходы и фрахт, необходимые для доставки товара в названный порт назначения, однако риск потери или повреждения товара, а также любые дополнительные расходы, возникающие после отгрузки товара, переходят с продавца на покупателя. По условиям термина **CFR** на продавца возлагается обязанность по таможенной очистке товара для экспорта. Данный термин может применяться только при перевозке товара морским или внутренним водным транспортом. Если стороны не собираются поставить товар через поручни судна, следует применять термин **CPT**.
- ***CIF (Cost, Insurance and Freight)*** – «Стоимость, страхование и фрахт» означает, что продавец выполнил поставку, когда товар перешел через поручни судна в порту отгрузки. Продавец обязан оплатить расходы и фрахт, необходимые для доставки товара в указанный порт назначения, но риск потери или повреждения товара, как и любые дополнительные расходы, возникающие после отгрузки товара, переходят с продавца на покупателя. Однако по условиям термина



**CIF** на продавца возлагается также обязанность приобретения морского страхования в пользу покупателя против риска потери и повреждения товара во время перевозки. Следовательно, продавец обязан заключить договор страхования и оплатить страховые взносы. Покупатель должен принимать во внимание, что согласно условиям термина **CIF** от продавца требуется обеспечение страхования лишь с минимальным покрытием. В случае, если покупатель желает иметь страхование с большим покрытием, он должен либо специально договориться об этом с продавцом, либо сам принять меры по заключению дополнительного страхования. По условиям термина **CIF** на продавца возлагается обязанность по таможенной очистке товара для экспорта. Данный термин может применяться только при перевозке товара морским или внутренним водным транспортом. Если стороны не собираются поставить товар через поручни судна, следует применять термин **CIP**.

- **CIP (Carriage and Insurance Paid To)** – «Фрахт/перевозка и страхование оплачены до» означает, что продавец доставит товар названному им перевозчику. Кроме этого, продавец обязан оплатить расходы, связанные с перевозкой товара до названного пункта назначения. Это означает, что покупатель берет на себя все риски и любые дополнительные расходы после доставки товара таким образом. Однако по условиям **CIP** на продавца также возлагается обязанность по обеспечению страхования от рисков потери и повреждения товара во время перевозки в пользу покупателя. Следовательно, продавец заключает договор страхования и оплачивает страховые взносы. Покупатель должен принимать во внимание, что согласно условиям термина **CIP** от продавца требуется обеспечение страхования с минимальным покрытием. В случае, если покупатель желает иметь страхование с

большим покрытием, он должен либо специально договориться об этом с продавцом, либо сам принять меры по заключению дополнительного страхования. По условиям термина **CIP** на продавца возлагается обязанность по таможенной очистке товара для экспорта. Данный термин может применяться при перевозке товара любым видом транспорта, включая смешенные перевозки.

- **CPT (Carriage Paid To)** – «Фрахт/перевозка оплачены до» означает, что продавец доставит товар названному им перевозчику. Кроме этого, продавец обязан оплатить расходы, связанные с перевозкой товара до названного пункта назначения. Это означает, что покупатель берет на себя все риски потери или повреждения товара, как и другие расходы после передачи товара перевозчику. По условиям термина **CPT** на продавца возлагается обязанность по таможенной очистке товара для экспорта. Данный термин может применяться при перевозке товара любым видом транспорта, включая смешенные перевозки.

**Категория «D» – доставка**

- **DES (Delivered Ex Ship)** – «Поставка с судна» означает, что продавец выполнил поставку, когда он предоставил не прошедший таможенную очистку для импорта товар в распоряжение покупателя на борту судна в названном порту назначения. Продавец должен нести все расходы и риски по доставке товара в названный порт назначения до момента его разгрузки. Если стороны желают, чтобы продавец взял на себя расходы и риски по выгрузке товара, должен применяться термин **DEQ**. Данный термин может применяться только при перевозке морским или внутренним водным транспортом или в смешанных перевозках, когда товар прибывает в порт назначения на судне.

- **DAF (Delivered At Frontier)** – «Поставка до границы» означает, что продавец выполнил поставку, когда он предоставил неразгруженный товар, прошедший таможенную очистку для экспорта, но еще не для импорта, на прибывшем транспортном средстве в распоряжение покупателя в названном пункте или месте на границе до поступления товара на таможенную границу сопредельной страны. Под термином «граница» понимается любая граница, включая границу страны экспорта. Поэтому весьма важно точное определение границы путем указания на конкретный пункт или место. Однако, если стороны желают, чтобы продавец взял на себя обязанности по разгрузке товара с прибывшего транспортного средства и нес все риски и расходы за такую разгрузку, то это должно быть четко оговорено в соответствующем дополнении к договору купли-продажи. Данный термин может применяться при перевозке товара любым видом транспорта, когда товар поставляется до сухопутной границы. Если поставка будет иметь место в порту назначения, на борту судна, либо на пристани, то следует применять термины **DES** или **DEQ**.
- **DEQ (Delivered Ex Quay)** – «Поставка с пристани» означает, что продавец выполнил свои обязанности по поставке, когда товар, не прошедший таможенную очистку для импорта, предоставлен в распоряжение покупателя на пристани в названном порту назначения. Продавец обязан нести все расходы и риски, связанные с транспортировкой и выгрузкой товара на пристань. Термин **DEQ** возлагает на покупателя обязанность таможенной очистки для импорта товара, так же как и уплату налогов, пошлин и других сборов при импорте. Однако, если стороны желают, чтобы продавец взял на себя все или часть расходов по импорту товара, то это должно быть четко оговорено в соответствующем дополнении к договору купли-продажи. Данный

термин может применяться только при перевозке морским или внутренним водным транспортом или в смешанных перевозках, когда товар выгружается с судна на пристань в порту назначения. Однако, если стороны желают включить в обязанности продавца риски и расходы, связанные с перемещением товара с пристани в другое место (склад, терминал и т.д.) в порту, либо за пределами порта, должны быть использованы термины **DDU** и **DDP**.

- **DDU (Delivered Duty Unpaid)** – «Поставка без оплаты пошлины» означает, что продавец предоставит не прошедший таможенную очистку и неразгруженный с прибывшего транспортного средства товар в распоряжение покупателя в названном месте назначения. Продавец обязан нести все расходы и риски, связанные с транспортировкой товара до этого места, за исключением (если это потребует) любых сборов, собираемых для импорта в стране назначения (под словом «сборы» здесь подразумевается ответственность и риски за проведение таможенной очистки, а также сборов). Ответственность за такие сборы должен нести покупатель, так же как и за другие расходы и риски, возникшие в связи с тем, что он не смог вовремя пройти таможенную очистку для импорта. Однако, если стороны желают, чтобы продавец взял на себя риски и расходы по таможенной очистке, так же как и часть расходов по импорту товара, то это должно быть четко оговорено в соответствующем дополнении к договору купли-продажи. Ответственность, риски и расходы за выгрузку и перегрузку товара зависят от того, под чьим контролем находится выбранное место поставки. Данный термин может применяться независимо от вида транспорта, но когда поставка осуществляется на борту судна или на пристани в порту назначения, то следует применять термины **DES** или **DEQ**.

- **DDP (Delivered Duty Paid)** – «Поставка с оплатой пошлины» означает, что продавец предоставит прошедший таможенную очистку и неразгруженный с прибывшего транспортного средства товар в распоряжение покупателя в названном месте назначения. Продавец обязан нести все расходы и риски, связанные с транспортировкой товара, включая (где это потребуется) любые сборы для импорта в страну назначения (под словом «сборы» здесь подразумевается ответственность и риски за проведение таможенной очистки, а также за оплату таможенных формальностей, таможенных пошлин, налогов и других сборов). В то время как термин **EXW** возлагает на продавца минимальные обязанности, термин **DDP** предполагает максимальные обязанности продавца. Данный термин не может применяться, если продавец прямо или косвенно не может обеспечить получение импортной лицензии. Если стороны согласились об исключении из обязательств продавца некоторых из расходов, подлежащих оплате при импорте (таких, как налог на добавленную стоимость – НДС), это должно быть четко определено в контракте купли-продажи. Если стороны желают, чтобы покупатель взял на себя все риски и расходы по импорту товара, следует применять термин **DDU**. Данный термин может применяться независимо от вида транспорта, но когда поставка осуществляется на борту судна или на пристани в порту назначения, следует применять термины **DES** или **DEQ**.

---

---

## **ГЛАВА 2. Прикладные аспекты логистики**

---

---

### ***2.1. Задачи прокладки коммуникаций и поиска оптимальных путей***

К этому классу задач обычно относят логистические проблемы двух типов.

Первый тип – проблемы прокладки коммуникаций (трубопроводов, телефонных линий) и строительства системы дорог, причем иногда последнюю задачу усложняют различные естественные и искусственные препятствия. Типичные проблемы и соответствующие алгоритмы их решения изложены в рамках задач: о телефонных линиях, о строительстве дорог, строительной трассировки.

Второй тип – проблема поиска кратчайших путей между объектами, если определенная сеть дорог уже проложена. Например, если после каждой доставки (например, с базы до пункта А) необходимо возвращение автотранспорта на базу для загрузки новой партии товара (такая ситуация часто возникает, если потребность в продукции больше объема единовременно перевозимых товаров), то задача специалистов отдела логистики – рассчитать кратчайшие пути между данным объектом (базой) и всеми прочими объектами (потребителями). Также к этому относится задача определения кратчайших путей между всеми парами объектов в рамках заданной сети дорог, подобная формулировка принимается, если включаются связи между потребителями в сети, например в случае оптовой и мелкооптовой торговли.

#### **2.1.1. Прокладка коммуникаций**

В задачи отдела логистики входят функции по оптимальному размещению различного рода коммуникаций. В разных случаях дополнительные условия размещения могут

отличаться, но в большинстве ситуаций критерием оптимальности является суммарная длина размещаемых коммуникаций.

Задачи такого рода имеют общую смысловую модель: дана плоскость и на ней  $N$  объектов. Заданы расстояния между объектами. Соединить объекты отрезками между собой так, чтобы суммарная длина отрезков была минимальной.

### НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ

1. Допустим, что объекты относительно малы по сравнению с расстояниями между ними. Поэтому величиной объектов можно пренебречь и изображать их в виде точек.
2. Расстояния между объектами могут быть заданы двумя способами: в натуральном виде (как число метров, километров и т.д.) или опосредованно через задание положения объекта относительно какой-либо точки отсчета. Во втором случае вводится подходящая система декартовых координат и положение  $i$ -го объекта, где  $i = 1, \dots, N$ , задается парой координат  $(x[i], y[i])$ . Условие, что страна плоская, означает, что  $d[i, j]$  (расстояние от  $i$ -го объекта до  $j$ -го) задается формулой:  
$$d[i, j] = \sqrt{(x[i] - x[j])^2 + (y[i] - y[j])^2}.$$
3. Подразумевается транзитивность связи: если  $i$ -й объект связан с  $j$ -м объектом, а  $j$ -й с  $k$ -м, то  $i$ -й связан с  $k$ -м.
4. Подразумевается или указано явно, что коммуникации могут разветвляться только на территории связываемых объектов.
5. И, наконец, на основе здравой логики можно утверждать, что в оптимальном решении не будет циклов. Если бы в оптимальном решении был цикл, скажем,  $(i, j, k, l, i)$ , то можно было бы убрать одно звено цикла, скажем,  $(j, k)$ , причем связь между  $j$  и  $k$  сохранилась бы по другой стороне цикла, по пути  $(j, i, l, k)$ . Но, убирая одно звено, мы бы уменьшили минимальный цикл, что невозможно.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

После такой конкретизации можно вводить графовую модель, в рамках которой объекты становятся вершинами, а возможные связи между ними – ребрами. Расстояния между объектами заданы в виде таблицы, которая в точности совпадает с матрицей смежности, задающей произвольный граф.

В терминах теории графов такая задача независимо была поставлена и решена двумя математиками: Примом (Prim) и Краскалом (Kruskal).

### Постановка Прима

**Дан полный граф с  $N$  вершинами, длины ребер определяются по формуле  $d[i, j] = \sqrt{(x[i] - x[j])^2 + (y[i] - y[j])^2}$ , где  $x[i]$ ,  $y[i]$  – координаты вершин. Найти остовное дерево минимальной длины.**

### Постановка Краскала

**Дан граф с  $N$  вершинами, длины ребер заданы матрицей  $D = \{d[i, j]\}$ , где  $i, j = 1, \dots, N$ . Найти остовное дерево минимальной длины.**

Постановка Краскала отличается тем, что расстояния между вершинами заданы явно, т.е. являются любыми произвольными положительными числами  $d[i, j]$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . В этом случае может не работать так называемое правило треугольника, согласно которому  $d[i, j] \leq d[i, k] + d[k, j]$ . На плоскости, если объекты соединяются прямыми, так оно и есть (кратчайшее расстояние между объектами равно длине соединяющего их отрезка, и путь, пролегающий через третий объект в лучшем случае будет равен длине этого отрезка – если третий объект находится на самом отрезке). Однако в реальности коммуникации прокладываются с учетом местности, и вполне может оказаться, что данное правило не работает потому, что за расстояние берется не абсолютная величина, характеризующая географическую удаленность, а длина связывающих коммуникаций. Кроме того, в постановке Краскала для некоторых пар индексов возможна ситуация, когда  $d[i, j] = \infty$



(бесконечности), что означает отсутствие ребра, т.е. рассматривается любой граф, а не только полный. Это как раз интерпретация задачи, когда коммуникации могут быть проложены не между любой парой объектов или стоимость прокладки между разными парами объектов неодинакова. В реальности именно так чаще всего и бывает, из-за уже имеющихся каналов связи (по которым класть дополнительные коммуникации чаще всего дешевле) и ландшафтных особенностей местности (водоемы, качество грунта) или административных запретов.

Задачи данного класса решаются одним алгоритмом, причем весьма примитивного характера. В литературе его часто называют «жадным». Его суть в последовательном выборе самых выгодных (в данном случае коротких) ребер. В обычной жизни и в большинстве графовых задач за такую политику приходится жестоко расплачиваться на последних шагах. Несмотря на то, что задача Прима-Краскала, не является простой, жадный алгоритм дает точное оптимальное решение.

### *ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА (КРАСКАЛА)*

#### Необходимая теоретическая информация

Дерево на  $N$  вершинах имеет  $N-1$  ребер. Т.к. решением является остов графа, значит, в него тоже войдут  $N-1$  ребер.

#### Основная идея

Каждое ребро надо выбирать «жадно» так, чтобы не возникали циклы. Выбранные таким образом ребра образуют искомое остовное дерево.

#### Возможные сложности

Как конкретно следить, чтобы новое ребро не образовывало цикла со старыми? Для ручной реализации алгоритма при небольшом количестве объектов можно обойтись визуальным наблюдением. Однако, если таких объектов много (более 20) или если решение отыскивается автоматизированным образом (при помощи соответствующей программы), нужен строгий алгоритм, обеспечивающий отсутствие циклов из выбираемых ребер графа.

## Способы преодоления

До построения дерева окрасим каждую вершину  $v[i]$  в отличный от других цвет  $i$ . Получится  $N$  цветов. При выборе очередного ребра, скажем  $u(i,j)$ , будем руководствоваться правилом:  $i$  и  $j$  должны иметь разные цвета. Когда же выбор ребра  $u(i,j)$  осуществлен, вершина  $j$  и все вершины, окрашенные в ее цвет (т. е. ранее с ней соединенные), перекрашиваются в цвет  $i$ . Таким образом, выбор вершин разного цвета обеспечивает отсутствие циклов. После выбора  $N-1$  ребер все вершины получают один цвет.

## Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

Ввести матрицу расстояний  $D = \{d[i,j]\}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$

*Инициализация:*

Приписать разные цвета всем вершинам:  $color[i] := i$ ;  
Задать начальную длину дерева  $length := 0$ .

*Общий шаг:*

1. В цикле по  $k$  от 1 до  $N-1$  сделать следующее:

1.1. Запустить двойной цикл: внешний по  $index\_i$  от 1 до  $N-1$ , внутренний по  $index\_j$  от  $index\_i$  до  $N$  (обход матрицы расстояний, которая в данном случае считается симметричной, выше главной диагонали). В теле цикла найти ребро минимальной длины между вершинами разного цвета, допустим это ребро  $u(i,j)$ . Запомнить номера объектов, которые связывает это ребро, как элементы двумерного массива (2 строки: начало и конец,  $N-1$  столбцов: по 1 на каждое ребро)  $result[k,1] = i$ ,  $result[k,2] = j$ .

1.2. Перекрасить вершины. Для этого присвоить  $new\_color := color[i]$ ;  $old\_color := color[j]$  и в цикле по  $M$  от 1 до  $N$  выполнить:  $if\ color[M] = old\_color\ then\ color[M] := new\_color$ .

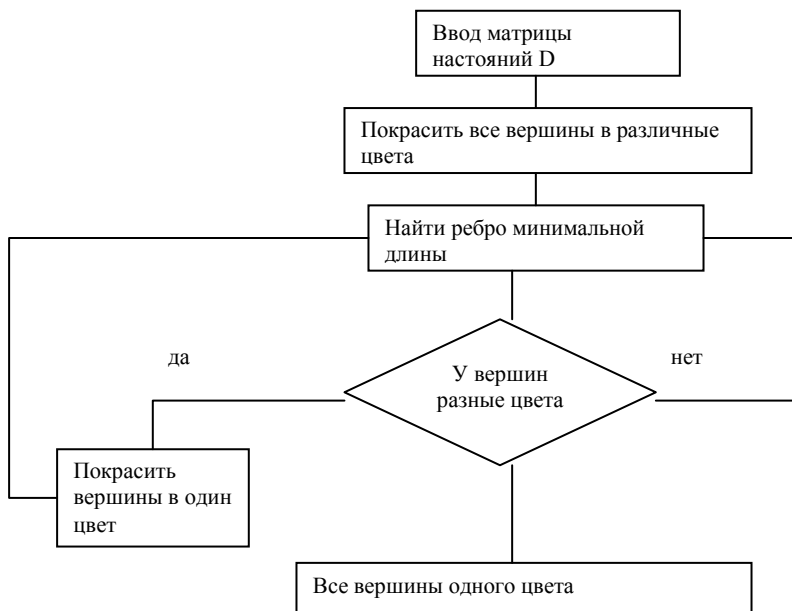
1.3. Нарастить длину дерева:  $length := length + d[i,j]$ .

2. вернуться к п.1 (конец цикла по  $k$ )

*Вывод:*

Вывести массив  $Result[N-1, 2]$

Схема работы алгоритма показана на рис.2.1.



*Рис. 2.1. Схема работы алгоритма Краскала*

### Примечание

В данной редакции в п.1.3. вычисляется также длина остоного дерева. Если задана стоимость  $Cost$  прокладки 1 единицы коммуникаций, то помимо таблицы с номерами соединяемых объектов можно вывести значение  $Cost * Length$ , которое и будет соответствовать минимальной стоимости коммуникаций.

### Анализ сложности

Как правило, эффективность алгоритма оценивается через требуемую для его реализации память и количество операций

(трудоемкость). В варианте Краскала надо хранить  $N^2/2$  расстояний. В обоих вариантах удобно хранить  $2(N-1)$  номеров вершин, т. е.  $N-1$  ребер ответа. Всего требуется памяти  $O(N^2)$ , что необременительно. Для нахождения текущего минимального ребра следует просмотреть  $N(N-1)/2$  чисел, и сделать это надо  $N-1$  раз, так что временная сложность алгоритма  $O(N^3)$ . Задача поиска остова дерева минимальной длины относится к просто и точно решаемым.

### ПРИМЕР

На территории предприятия расположены шесть отстойников для использованной воды и пункт очистки (рис.2.2.). Планируется построить систему регенерации: использованная вода поступает на пункт очистки, там фильтруется и затем подается в цеха по имеющейся системе водоснабжения. При этом каждый отстойник может использоваться как транзитный пункт для перегонки использованной воды к пункту очистки. Дополнительные условия: канализационные трубы завезли только прямые, разветвителей и переходников достать не удалось – так что соединять отстойники можно только прямыми каналами, разветвляться каналы не могут, зато количество выходящих из одного отстойника каналов не ограничено. В декартовой системе координат дана схема с расположением отстойников и пункта переработки в масштабе 1см:10м. Предложить наиболее экономичную схему прокладки канализационных туннелей, соединяющих между собой все эти отстойники и центральный пункт переработки. Критерий оптимальности: минимальная суммарная длина коммуникаций. Координаты объектов даны в табл.2.1.

Таблица2.1. Исходные данные

Поло- жение	Отстойник						Пункт очистки
	№1	№2	№3	№4	№5	№6	
горизо нт.	5	3	7	8	5	7	6
вертик	10	12	4	2	9	10	5

## РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

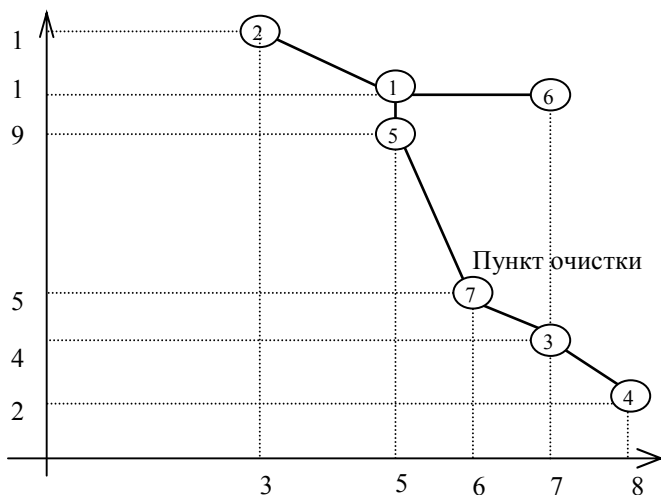


Рис. 2.2. Расположение объектов на плоскости

На основе заданных координат по известной теореме Пифагора получим матрицу квадратов расстояний (табл.2.2.) и припишем вершинам разные цвета (пункт очистки в таблице указан под номером 7):

Таблица 2.2. Матрица квадратов расстояний

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	<b>8</b>	40	73	<b>1</b>	<b>4</b>	26
2		0	80	125	<u>13</u>	20	58
3			0	<b>5</b>	29	36	<b>2</b>
4				0	58	65	<u>13</u>
5					0	<u>5</u>	<b>17</b>
6						0	26
7							0

1. Отыскиваем минимальное ребро, это ребро (1, 5), и его длина равна 1. Вершину 5 (это единственная вершина цвета color5) красим в цвет color1 (табл.2.3.). Длина стала равна 1. Выбранные ребра будем отмечать жирным шрифтом.
2. Снова отыскиваем самое короткое ребро, на этот раз это ребро (3, 7), и его длина равна  $\sqrt{2}$ . Вершину 7 (это единственная вершина цвета color7) красим в цвет номер 3. Теперь длина остова  $1 + \sqrt{2}$ .
3. Снова отыскиваем самое короткое ребро, на этот раз это ребро (1, 6), и его длина равна  $\sqrt{4}=2$ . Вершину 6 (это единственная вершина цвета color6) красим в цвет номер 1. Теперь длина остова  $1+\sqrt{2} + 2$ .
4. Следующее самое короткое ребро (3, 4), его длина  $\sqrt{5}$ . Вершину 4 (это единственная вершина цвета color4) красим в цвет номер 3. Теперь длина остова  $3+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ .

Таблица 2.3. Рабочая матрица задачи

№	Начальная раскраска	После выбора ребра (1,5)	После выбора ребра (3,7)	После выбора ребра (1,6)	После выбора ребра (3,4)	После выбора ребра (1,2)	После выбора ребра (5,7)
1	Color1						
2	Color2					Color1	
3	Color3						Color1
4	Color4				Color3		Color1
5	Color5	Color1					
6	Color6			Color1			
7	Color7		Color3				Color1

5. Далее самое короткое ребро (5,6), его длина тоже  $\sqrt{5}$ . Однако, как видно из таблицы 2.3, вершины 5 и 6 имеют одинаковый цвет, а именно цвет номер 1. Значит, это ребро брать нельзя. Далее следует ребро (1,2), длина которого  $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ . Вершину 2 (это единственная вершина цвета color2) красим в цвет номер 1. Теперь длина остова  $3+\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ .

6. Следующие ребра (2,5) или (4,7), их длины равны. Однако оба они не подходят, так как вершины 2 и 5 покрашены цветом color1, а вершины 4 и 7 имеют цвет color3. Тогда берем ребро (5,7) с длиной  $\sqrt{17}$ , причем вершины 5 и 7 уже подвергались перекраске, после которой вершина 5 получила цвет color1, а вершина 7 – цвет color3. Перекрашиваем вершину 7 (а также все другие вершины, окрашенные на данный момент цветом color3) в цвет color1. Теперь длина остова  $3+\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{17}$ .

**Итак**, на 7 вершинах было выбрано 6 ребер, образующих дерево – следовательно, получен остов.

**Ответ:** остов минимальной длины образуют ребра (1,5), (3,7), (1,6), (3,4), (1,2), (5,7). Его длина равна  $3+\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{17} \approx 13,6$ .

### ***ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

Телефонная компания получила заказ на местную телефонизацию 8 деревень, расположенных в необжитой части Сибири. В каждой деревне построили небольшую АТС, и только на АТС возможно разветвление проводов. Важно, чтобы между любыми двумя деревнями была телефонная связь. Ввиду наличия множества хищных зверей, проживающих в окрестных лесах, и мерзлости грунта, кабель решили прокладывать в воздухе, на уже имеющихся столбах линий электропередач и иных надземных коммуникаций, соединяющих некоторые из деревень. Заданы расстояния между деревнями, которые уже соединены коммуникациями. Найти самое экономичное решение. Критерий: минимальная суммарная длина телефонных проводов. Вычислить стоимость проекта, если стоимость прокладки 1 км телефонной линии равна 9000 руб.

Расстояния между деревнями (там, где есть коммуникации) даны в табл. 2.4.:

Таблица 2.4. Матрица исходных данных к задаче для самостоятельного решения

	Д 1	Д 2	Д 3	Д 4	Д 5	Д 6	Д 7	Д 8
Д 1	0	15	нет	15	19	20	25	12
Д 2		0	20	11	нет	16	11	нет
Д 3			0	8	12	3	5	2
Д 4				0	7	5	нет	9
Д 5					0	4	18	7
Д 6						0	9	4
Д 7							0	нет
Д 8								0

### 2.1.2. Планирование сети дорог

Рассмотренная постановка задачи о прокладке коммуникаций не учитывает возможность их разветвления. Зачастую реальность не накладывает этих ограничений, например, при строительстве дорог, которые могут менять направление, иметь повороты, развилки и перекрестки любого вида. Данная задача известна как «задача Штейнера на графах».

Сразу же зададимся вопросом: а может ли расположение развилок вне связываемых объектов уменьшить длину кратчайшей системы дорог? Пример, иллюстрирующий положительный ответ на этот вопрос, приведен на рис. 2.3.

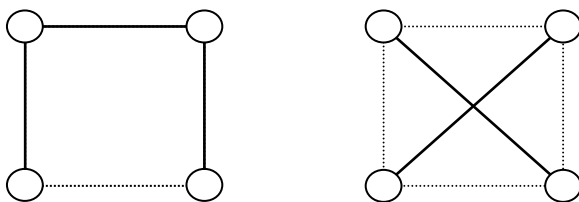


Рис. 2.3. Варианты системы дорог

Как видно из рис.2.1, для случая, когда четыре города расположены в углах квадрата, допустим со стороной равной 1 км, кратчайшая система дорог с разветвлением только в городах имеет



длину 3, тогда как интуитивное расположение перекрестка в центре квадрата дает результирующую длину  $2\sqrt{2} \approx 2,8$ .

Итак, улучшение результата возможно. Однако можно ли утверждать, что  $2\sqrt{2}$  – это уже минимум? Вряд ли, по крайней мере, никаких оснований для этого нет. Но зато уже видно, что в такой постановке проблема поиска кратчайшей системы дорог, связывающей все имеющиеся объекты, существенно усложняется.

### **НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ**

Вообще говоря, известны два типа такого рода задач.

- **Евклидова задача Штейнера** состоит в соединении множества точек на плоскости так, чтобы сумма длин отрезков была минимальна.
- **Линейная задача Штейнера** вместо евклидова расстояния между точками оперирует линейным расстоянием:  $d(X, Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ . При этих условиях, если через каждую точку из множества  $P$  провести вертикальные и горизонтальные линии, то решение данной задачи можно получить, рассматривая в качестве возможных точек Штейнера точки пересечения полученной сетки линий.

Линейные задачи Штейнера применяются при монтаже печатных схем электронных устройств, а в логистике практически не используются, в отличие от евклидовых задач, которые и будут разобраны ниже.

### **ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА**

#### **Основная идея**

Такой алгоритм в общем случае не существует. Евклидова задача Штейнера является нерешенной с вычислительной точки зрения, поскольку существующие точные алгоритмы находят решение за разумное время только при очень небольшом количестве вершин (порядка 10).

### **ПРИМЕЧАНИЕ**

**Частный случай: три города**

Если целью является система дорог, связывающая три города, то мы в чистом виде имеем старинную задачу, которую независимо поставили Торичелли и Ферма: **в треугольнике ABC найти точку P, такую что сумма расстояний от P до вершин A, B и C минимальна.**

Наиболее простое *решение предложил Наполеон Бонапарт* в бытность свою кадетом артиллерийского училища. Этот способ налагает единственное ограничение: наибольший угол треугольника должен быть меньше  $120^\circ$ .

Пусть F – произвольная точка внутри треугольника. Повернем треугольник ABF вокруг вершины B наружу на  $60^\circ$  (как показано на рис. 2.4.).

В этом случае  $AF = A'F'$  и  $BF = B'F'$  по построению,  $BF = F'F$ , потому что треугольник BFF' равносторонний, значит, сумма расстояний от F до A, B, C равна длине ломаной A'F'FC.

Эта сумма станет минимальной, если F примет такое положение, что ломаная станет прямой. Для этого нужно, чтобы участок A'F'F стал прямым, т. е. чтобы  $\angle A'F'B$  и, следовательно,  $\angle AFB$  равнялся  $120^\circ$ . Еще нужно, чтобы участок F'FC стал прямым, т. е.  $\angle BFC$  равнялся  $120^\circ$ . Третий угол при точке F автоматически станет равным  $120^\circ$ . Итак, доказано, что все три угла при искомой точке F равны  $120^\circ$ .

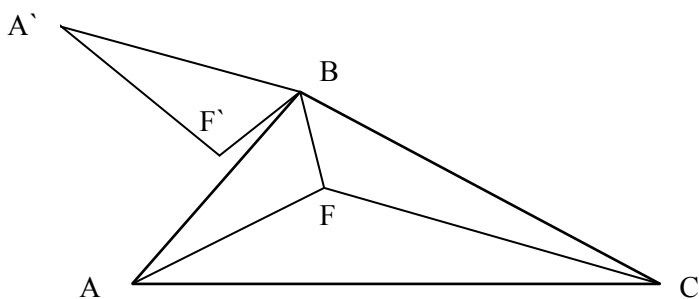


Рис. 2.4. Решение Бонапарта

*Альтернативное решение предложил Ферма.*

Построим точку  $F$  так, чтобы  $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$ . Проведем через вершины исходного треугольника  $ABC$  прямые, перпендикулярные отрезкам  $AF$ ,  $BF$  и  $CF$  соответственно (рис. 2.5).

Они пересекутся в вершинах некоторого треугольника  $Q_1Q_2Q_3$ . Для любой точки  $P$   $\Delta Q_1Q_2Q_3$  сумма длин перпендикуляров, опущенных из  $P$  на стороны этого треугольника, есть постоянное число (в частности  $AF + BF + CF = A_1P + B_1P + C_1P$ ). Объясняется данный факт весьма просто: площадь треугольника  $Q_1Q_2Q_3$  равна сумме площадей треугольников  $Q_1PQ_3$ ,  $Q_2PQ_3$ ,  $Q_1PQ_2$ , а поскольку площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, то получим что

$$S(\Delta Q_1Q_2Q_3) = \frac{1}{2} Q_1Q_3 \times A_1P + \frac{1}{2} Q_2Q_3 \times C_1P + \frac{1}{2} Q_1Q_2 \times B_1P.$$

Несложно показать, что треугольник  $Q_1Q_2Q_3$  – правильный или равносторонний. Для этого рассмотрим четырехугольник  $BQ_2CF$ . В нем два угла прямые по построению (по  $90^\circ$ ), угол при вершине  $F$  равен  $120^\circ$  – следовательно,  $\angle BQ_2C = 60^\circ$  (сумма углов четырехугольника всегда равна  $360^\circ$ ).

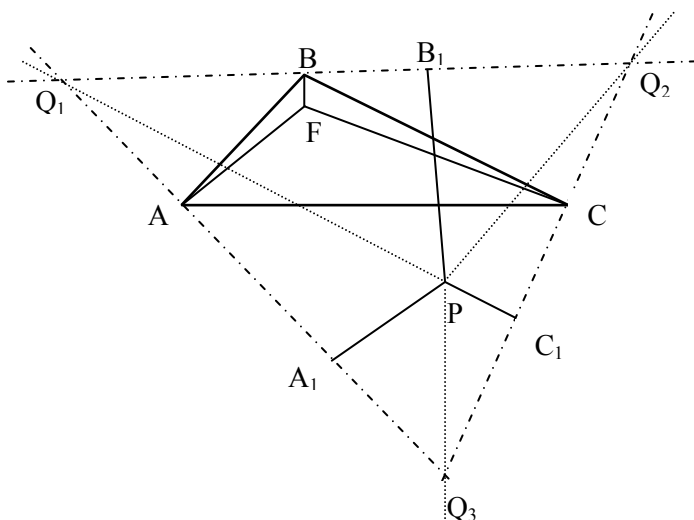


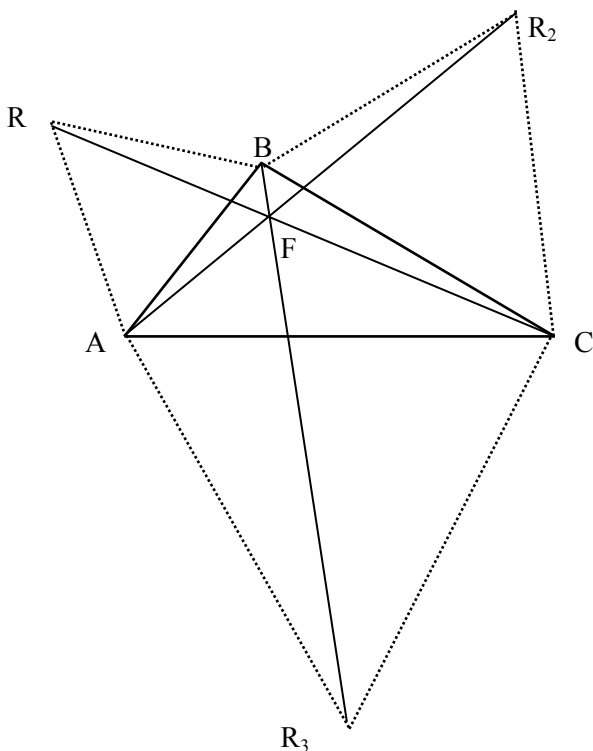
Рис. 2.5. Решение Ферма

Рассуждая аналогично, получим, что все три угла треугольника  $Q_1Q_2Q_3$  равны  $60^\circ$ , а значит, его стороны равны:  $Q_1Q_3 = Q_2Q_3 = Q_1Q_2 = a$ . Отсюда  $S(\Delta Q_1 Q_2 Q_3) = \frac{1}{2} a \times (A_1P + C_1P + B_1P)$ . Поскольку площадь треугольника – величина постоянная, значит, и сумма длин перпендикуляров, опущенных из произвольной точки на его стороны, – тоже не меняется при выборе точки. Очевидно, что независимо от выбора точки  $P$  выполняются условия:  $PA \geq PA_1$ ,  $PB \geq PB_1$ ,  $PC \geq PC_1$ . Следовательно, если  $P$  – произвольная точка, то суммарное расстояние до трех вершин треугольника  $PA + PB + PC \geq PA_1 + PB_1 + PC_1$ , при этом, как было показано ранее,  $PA_1 + PB_1 + PC_1 = AF + BF + CF$ . Отсюда  $PA + PB + PC \geq AF + BF + CF$ , и неравенство превращается в равенство, когда  $P$  совпадает с  $F$ . Таким образом, расположение точки  $F$  – оптимально с точки зрения минимизации искомого расстояния.

В этой связи такую точку треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной, называют точкой Ферма (иногда точкой Торричелли или точкой Брокера). Когда все углы треугольника меньше  $120^\circ$ , то точка Ферма – это такая точка  $F$  в треугольнике, из которой все стороны треугольника видны под одним и тем же углом  $120^\circ$ .

Чтобы построить точку Ферма, надо на сторонах  $\Delta ABC$  во внешнюю сторону построить равносторонние треугольники  $ABR_1$ ,  $BCR_2$  и  $ACR_3$ . Отрезки  $AR_2$ ,  $BR_3$  и  $CR_1$  пересекаются в точке  $F$  – точке Ферма (рис. 2.6).

Действительно, пусть  $AR_2$  и  $BR_3$  пересекаются в точке  $F$ . При повороте вокруг точки  $B$  на  $60^\circ$   $\Delta CR_1B$  переходит в  $\Delta BAR_2$ . Следовательно, угол между  $R_1C$  и  $AR_2$   $\angle R_1FA = 60^\circ$ , и точка  $F$  лежит на окружности, описанной около  $\Delta AR_1B$ . Аналогично угол  $\angle R_2FC = 60^\circ$ , и точка  $F$  лежит на окружности, описанной около  $\Delta BR_2C$ . Так как угол  $\angle AFC = 120^\circ$ , то точка  $F$  лежит на окружности, описанной около  $\Delta ACR_3$ , значит,  $\angle AFR_3 = 60^\circ$ . Так как при повороте на  $60^\circ$  вокруг точки  $C$   $\Delta AR_2B$  переходит в  $\Delta R_3CB$ , то угол между  $AR_2$  и  $BR_3$  равен  $60^\circ$  и точка  $F$  лежит на  $BR_3$ .



*Рис. 2.6. Построение точки Ферма*

Частный случай: четыре города

Если целью является система дорог, связывающая четыре города, то для ее решения используем результат, полученный при рассмотрении задачи Торричелли-Ферма. Вводимые при прокладке пути минимальной длины точки (развилки) в литературе называются точками Штейнера.

Ключевыми свойствами точек Штейнера являются следующие свойства:

- Точка Штейнера имеет степень  $d = 3$ .

- Для любой вершины  $p_i$  из множества связываемых сетью объектов выполняется условие: степень  $d(p_i) \leq 3$ . Если  $d(p_i) = 3$ , то угол между любыми двумя ребрами, инцидентными  $p_i$ , должен быть равен  $120^\circ$ . Если  $d(p_i) = 2$ , то угол между двумя ребрами, инцидентными  $p_i$ , должен быть больше или равен  $120^\circ$ .
- Если в исследуемой сети  $N$  объектов, то количество  $k$  точек Штейнера будет в пределах  $0 \leq k \leq N-2$ .

Отсюда следует решение для рассматриваемого случая. Введем две точки Штейнера, каждая из них будет иметь степень  $d = 3$ , а инцидентные ей ребра располагаться под углом  $120^\circ$  друг к другу. Расположение точек зависит от свойств фигуры, образуемой четырьмя объектами.

### Анализ сложности

Возрастание сложности связано с потерей дискретности, поскольку расположение перекрестков уже не совпадает с самими объектами, и строго говоря, на площади в 1 кв. м существует бесконечное количество возможных мест расположения развилок. Очевидно, что в общем случае теория графов уже не может дать достоверного результата при решении этой задачи. Мало того, в настоящее время неизвестны точные и эффективные алгоритмы, решающие эту задачу в том случае, если города заданы произвольной сетью. Точное и эффективное решение существует, если рассматриваются относительно простые сети.

### **ПРИМЕР**

В углах заводской территории, имеющей форму квадрата со стороной 1 км, находятся площадки для сбора промышленных отходов. Предложите оптимальную схему прокладки рельсовой мини-дороги, по которой буду ездить вагончики для сортировки мусора с целью его последующей переработки. Критерий оптимальности – минимальная суммарная длина дороги. Вычислите эту длину.

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Рассмотрим задачу, иллюстрирующую простейший случай, когда 4 площадки для сбора промышленных отходов расположены в углах квадрата со стороной 1 км. Длина этой сети рассчитывается достаточно легко (рис. 2.7).

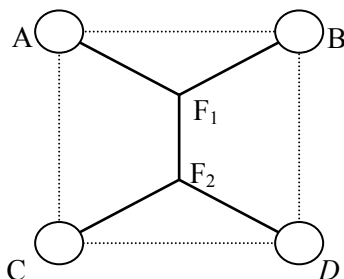


Рис. 2.7. Оптимальная система дорог

$$\angle F_2CD = (180^\circ - 120^\circ)/2 = 30^\circ$$

$$CF_2 = 0.5 / \cos 30^\circ = 1/\sqrt{3}.$$

$$F_1F_2 = (1 - 2 \cdot 0.5 \cdot \tan 30^\circ) = 1 - 1/\sqrt{3}$$

$$\text{Итак: } S = 4 \cdot CF_2 + F_1F_2 = 4/\sqrt{3} + 1 - 1/\sqrt{3} = 1 + 3/\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \approx 2,73$$

Как видим, этот результат лучше, чем полученные ранее (рис. 2.3.)

### ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Даны координаты четырех подземных бункеров секретного назначения: (0,1), (0,3), (4,4), (4,0). Предложите оптимальную схему прокладки туннелей, связывающих эти бункеры, и найдите общую протяженность туннелей. Критерий оптимальности – минимальная суммарная длина туннелей.

### 2.1.3. Поиск кратчайших путей в дорожной сети

В рассмотренных ранее задачах речь шла о прокладке коммуникаций или сети дорог, что называется «в чистом поле». В реальной жизни зачастую сеть дорог уже существует, причем сеть, разветвленная и явно неоптимальная и, как правило, избыточная, т.е. построенная не по Штейнеру и наверняка с множественными путями между некоторыми парами городов, что обусловлено постепенной и, как правило, длительной застройкой, во время которой неоднократно менялось значение и размер связываемых городов, требования к самим дорогам, власть и прочие условия.

Если сеть дорог уже существует, то возникает прикладная и очень актуальная задача поиска кратчайшего расстояния между некоторыми объектами в этой сети.

#### *НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ*

Для более точной постановки вопроса отождествим развилки и города: они будут вершинами сети, а дороги будут ребрами. Однако для решения прикладных логистических задач, в частности ряда задач о минимальной стоимости доставки грузов из пункта А в пункт В, сеть не всегда будет неориентированной. В реальности часто бывает, что возможность проезда из города А в город Б вовсе не означает наличие прямой дороги из Б в А, или стоимость проезда на поезде из Москвы в Киев не имеет никакого отношения к стоимости проезда из Киева в Москву. В этом случае воспользуемся ориентированными графами, заменив ребра парой разнонаправленных дуг, имеющих различные веса (равные бесконечности, если прямое сообщение между связываемыми объектами отсутствует).

Существуют как общие алгоритмы решения подобных задач, так и частные алгоритмы для случаев, когда все веса ребер неотрицательны. Если вес ребра графа соответствует расстоянию между объектами, времени в пути или стоимости доставки, то не возникает необходимости в рассмотрении случая с отрицательными весами. Именно таких задач больше всего



встречается в логистике, так что рассмотрение этих специальных (и более простых) алгоритмов вполне оправдано.

Если же некоторые ребра имеют отрицательный вес, то единственное ограничение состоит в том, чтобы в  $G$  не было циклов с суммарным отрицательным весом. Если такой цикл  $\Phi$  все же существует и  $v_i$  — некоторая его вершина, то, двигаясь от  $s$  к  $v_i$ , обходя затем  $\Phi$  достаточно большое число раз и попадая, наконец, в  $t$ , мы получим путь со сколь угодно малым ( $-\infty$ ) весом. Таким образом, в этом случае кратчайшего пути не существует.

Если, с другой стороны, такие циклы существуют, но исключаются из рассмотрения, то нахождение кратчайшего пути (простой цепи) между  $s$  и  $t$  эквивалентно нахождению в этом графе кратчайшего гамильтонова пути с концевыми вершинами  $s$  и  $t$ . Задача нахождения кратчайшего гамильтонова пути намного сложнее, чем задача о кратчайшем пути — поэтому в рамках данного пособия рассматривать ее не будем и предположим, что все циклы в  $G$  имеют неотрицательный суммарный вес. Отсюда также вытекает, что неориентированные дуги (ребра) графа  $G$  не могут иметь отрицательные веса.

### *ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ*

**В ориентированной, неориентированной или смешанной (т. е. где часть дорог имеет одностороннее движение) сети найти кратчайший путь из заданной вершины во все остальные.**

#### *Возможные постановки задачи*

Пусть дан граф  $G = (V, U)$ , дугам которого приписаны веса (стоимости), задаваемые матрицей  $C = [c_{ij}]$ . Элементы  $\{c_{ij}\}$  матрицы весов  $C$  могут быть в общем случае положительными, отрицательными или нулями.

- I. Найти кратчайший путь от заданной начальной вершины  $s \in V$  до заданной конечной вершины  $t \in V$ .
- II. Найти кратчайшие пути от заданной начальной вершины  $s \in V$  до всех других вершин  $v_i \in V$ .
- III. Найти кратчайшие пути между всеми парами вершин  $v_s, v_t \in V$ .

Во всех трех случаях поиск кратчайшего пути между  $s$  и  $t$  имеет смысл, если такой путь, вообще говоря, существует, т. е. при условии  $t \in R(s)$ . Здесь  $R(s)$  — множество, достижимое из вершины  $s$ . В случае неориентированного связного графа такой путь существует между любой парой вершин (по определению связности).

На самом деле, почти все методы, позволяющие решить задачу I о кратчайшем ( $s$ - $t$ )-пути, дают также (в процессе решения) и все кратчайшие пути от  $s$  к  $v_i$  ( $v_i \in V$ ). Таким образом, они позволяют решить задачу II с небольшими дополнительными вычислительными затратами. С другой стороны, задача III может быть решена либо  $N$ -кратным применением алгоритма задачи I, причем на каждом шаге в качестве начальной вершины  $s$  берутся различные вершины, либо однократным применением специального алгоритма.

Как и для большинства задач, для решения задачи о кратчайших путях можно предложить много процедур решения. Например, физическое моделирование такого рода: на плоской доске рисуется карта местности, в города и развилки вбиваются гвозди, на каждый гвоздь надевается кольцо, дороги укладываются веревками, которые привязываются к соответствующим кольцам. Чтобы найти кратчайшее расстояние между кольцом  $i$  и кольцом  $k$ , нужно взять  $i$  в одну руку, взять  $k$  в другую и растянуть. Те веревки, которые натянутся и не дадут разводить руки шире, и образуют кратчайший путь между  $i$  и  $k$ . Однако математическая процедура, которая промоделирует эту физическую, выглядит очень сложно.

Известны алгоритмы попроще, один из которых будет описан далее. Это алгоритм, предложенный Дейкстрой еще в 1959 г. для систем с неотрицательными значениями весов и алгоритм Флойда для произвольных матриц весов. Алгоритм Дейкстры в чистом виде решает задачу II (а значит автоматически и задачу I за то же время, и задачу III в случае  $N$ -кратного применения). Алгоритм Флойда сразу же дает решение задачи III.

Предполагаем, что матрица не удовлетворяет, вообще говоря, условию треугольника, согласно которому

$c[i,j] \leq c[i,k] + c[k,j]$  для всех  $i, j, k$ . В противном случае кратчайший путь между  $x_i$  и  $x_j$  состоит из одной единственной дуги  $(v_i, v_j)$  и задача становится тривиальной (если конечно такая дуга существует).

Если в графе  $G$  дуга  $(v_i, v_j)$  отсутствует, то ее вес полагается равным  $\infty$ .

## ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА (ДЕЙКСТРЫ)

### Основная идея

Алгоритм применим только при условии, что  $c[i,j] \geq 0$ , и основан на присписывании вершинам временных пометок, причем пометка вершины дает верхнюю границу длины пути от  $s$  к этой вершине. Эти пометки (их величины) постепенно уменьшаются с помощью некоторой итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации точно одна из временных пометок становится постоянной. Последнее указывает на то, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от  $s$  к рассматриваемой вершине.

### Формальное описание алгоритма (Дейкстры)

#### *Пояснения:*

Алгоритм использует три массива из  $N$  (число вершин сети) чисел каждый. Первый массив *Metka* содержит метки с двумя значениями: 0 (вершина еще не рассмотрена) и 1 (вершина уже рассмотрена); второй массив *Curr\_dist* содержит расстояния – текущие кратчайшие расстояния от  $s$  до соответствующей вершины; третий массив *Pred\_num* содержит номера вершин (элемент *pred\_num* [ $k$ ] есть номер предпоследней вершины на текущем кратчайшем пути из  $s$  в  $k$ ). Матрица расстояний  $D$  задает длину (вес) дуги  $d[i, j]$ ; если такой дуги нет, то  $d[i, j] = \infty$ .

#### *Ввод:*

Матрица расстояний  $D = \{d[i, j]\}$

*Инициализация:*

(*i* – номер стартовой вершины)

В цикле от 1 до *N* заполнить нулями массив *Metka*;

Заполнить числом *i* массив *Pred\_num*;

Перенести *i*-ю строку матрицы *D* в массив *Curr\_dist*;

*metka[i]:=1*;

*pred\_num[i]:=0*

*Общий шаг:*

В цикле от 1 до *N*

1.Найти минимум среди неотмеченных вершин (т. е. тех *k* для которых *metka[k] = 0*); пусть минимум достигается на индексе *j*).

Затем выполняются следующие операции:

2.*metka[j]:=1*; (пометить выбранную вершину)

3.В цикле по *k* от 1 до *N*: если

*curr\_dist[j]+d[j,k] < curr\_dist[k]*, то

*curr\_dist[k]:=curr\_dist[j]+d[j,k]*; *pred\_num[k]:=j*

Т.о. если наименее короткий известный путь из *i* в

*k* длиннее, чем сумма наиболее короткого пути из *i*

в *j* и прямого пути (*j, k*), значение элемента

*curr\_dist[k]* заменяется на сумму значений

элементов *curr\_dist[j]* и *d[j,k]*. По выходу из цикла

все *metka[i] = 1* (все вершины отмечены), и длина

минимального пути от *i* до *k* равна

*curr\_dist[k]*.

*Вывод:*

Теперь надо перечислить вершины, входящие в

кратчайший путь. Путь от *i* до *k* выдается в

обратном порядке следующей процедурой

*z:= pred\_num[k]* ;

Выдать *z*;

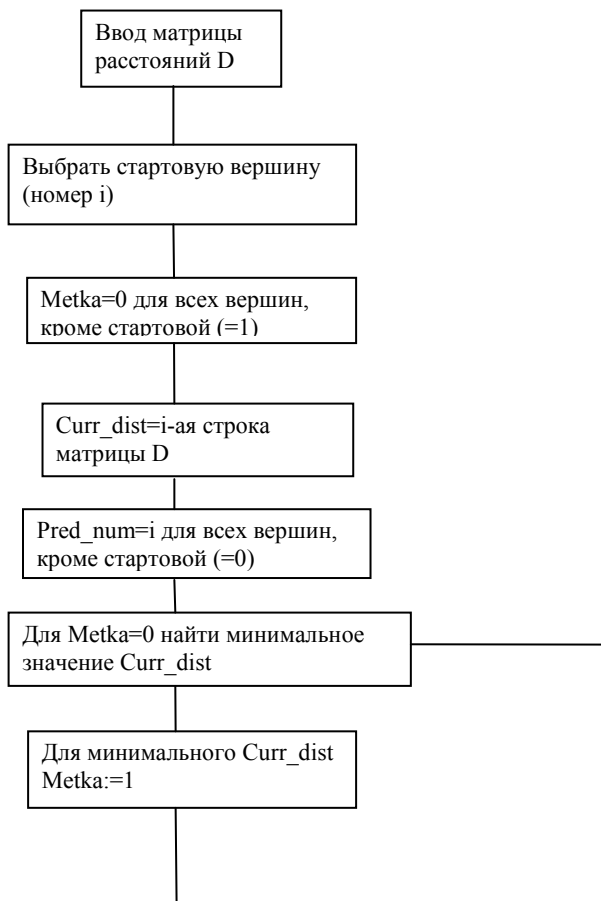
*z:=pred\_num[z]*. Если *z = 0*, то конец, иначе опять выдать *z*.

### Анализ сложности

Для решения задачи II (а значит и задачи I) нужно *N* раз просмотреть массив *Curr\_dist* из *N* элементов, т. е. алгоритм Дейкстры имеет квадратичную сложность:  $O(N^2)$ .

Для решения задачи III (если надо узнать кратчайшие пути между всеми вершинами) нужно  $N$  раз повторить алгоритм Дейкстры, принимая по очереди каждую вершину за стартовую. В случае полного графа с неотрицательной матрицей весов  $C$  время, необходимое для вычислений, пропорционально  $O(N^3)$ , а для произвольной матрицы весов оно пропорционально  $O(N^4)$ .

Схема работы алгоритма показана на рис.2.8.



*Рис. 2.8. Схема работы алгоритма Дейкстры (начало)*

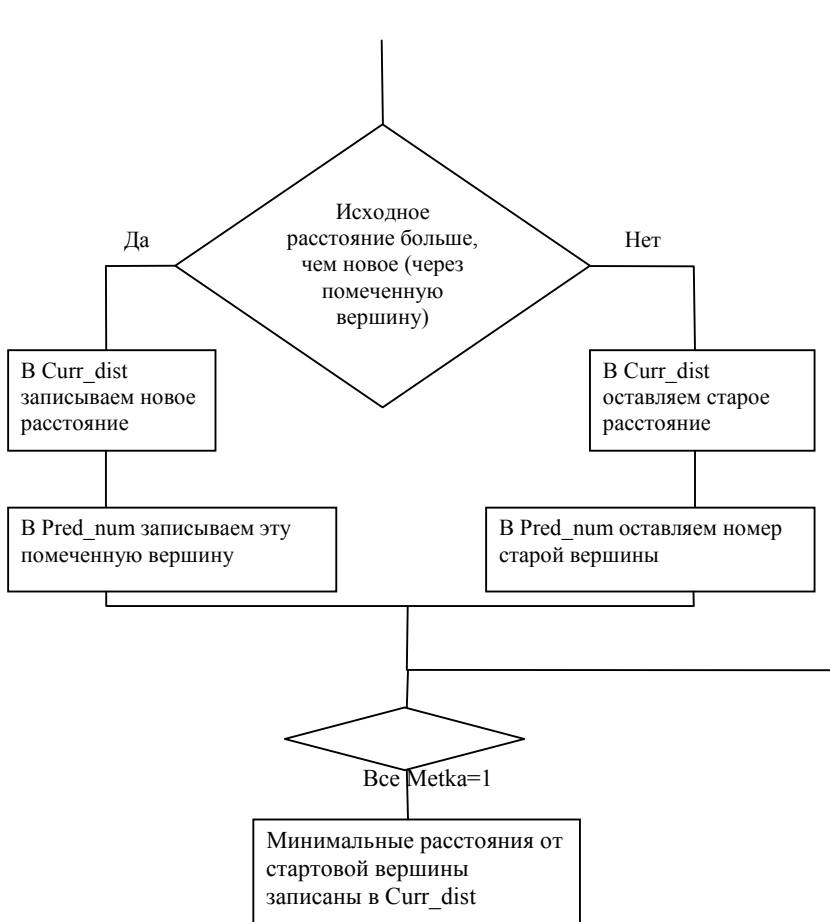


Рис. 2.8.Схема работы алгоритма Дейкстры (окончание)

### ПРИМЕР

Пять булочных небольшого городка обслуживает хлебобулочный комбинат, который, арендуя пять автомобилей, ежедневно поставляет в каждую булочную заказанную продукцию,

причем объем продукции всегда соответствует максимальной загрузке автомобиля (таким образом, использование одного авто для попутной доставки в несколько булочных исключается). Специалист отдела логистики лично проехал между всеми этими объектами и занес в таблицу реальное расстояние между  $i$ -й и  $j$ -й булочными (если между ними есть дорога): т.о. была учтена дорожная ситуация. Найти оптимальный путь от комбината к каждой из булочных. Критерий: минимизация расходов на транспортировку, соответствующих пройденному расстоянию. В составленной специалистом таблице 2.5. под №6 указан сам хлебобулочный комбинат.

Таблица 2.5. Матрица исходных данных к задаче

	1	2	3	4	5	6
1	0	5	4	12	1	нет
2	5	0	3	10	6	13
3	4	3	0	6	13	22
4	1	8	8	0	6	12
5	4	9	3	8	0	10
6	нет	13	24	14	20	0

## РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

*Инициализация:*

( $i=6$ ,  $metka[6]=1$ ):

Таблица 2.6. Инициализация исходных данных

№элемента	1	2	3	4	5	6
Массив <i>Metka</i>	0	0	0	0	0	1
Массив <i>Pred_num</i>	6	6	6	6	6	0
Массив <i>Curr_dist</i>	нет	13	24	14	20	0

*Общий шаг:*

Запускаем цикл от 1 до 5.

1. Возьмем наиболее близкую к нужной и еще неотмеченную вершину, это вершина №2 ( $j=2$ )

1.1. Пометим ее как рассмотренную  $metka[2]:=1$

1.2. В цикле по  $k$  от 1 до 6 сравним  $d[i,j]+d[j,k]$  и  $d[i,k]$ , т.е. в данном случае  $curr\_dist[2]+d[2,k]$  и  $curr\_dist[k]$  (иными словами здесь сравнивается кратчайший из известных путей 2 от вершины 6 через вершину №2 к остальным вершинам и прямой путь от вершины №6 к остальным, т.е. на первом шаге тот, что был первоначально записан в матрице  $D$ )

при  $k=1$ :  $curr\_dist[2]+d[2,1]=13+5=18$ ,  $curr\_dist[1]=\infty$ ,  $18<\infty \Rightarrow 18 \Rightarrow curr\_dist[1]=18$ ,  $pred\_num[1]:=2$

при  $k=2$ :  $curr\_dist[2]+d[2,2]=13+0=13$ ,  $curr\_dist[2]=13 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=3$ :  $curr\_dist[2]+d[2,3]=13+3=16$ ,  $curr\_dist[3]=24$ ,  $16<24 \Rightarrow curr\_dist[3]=16$ ,  $pred\_num[3]:=2$

при  $k=4$ :  $curr\_dist[2]+d[2,4]=13+10=23$ ,  $curr\_dist[4]=14 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=5$ :  $curr\_dist[2]+d[2,5]=13+6=19$ ,  $curr\_dist[5]=20$ ,  $19<20 \Rightarrow curr\_dist[5]=19$ ,  $pred\_num[5]:=2$

при  $k=6$ :  $curr\_dist[2]+d[2,6]=13+13=26$ ,  $curr\_dist[6]=0 \Rightarrow$  никаких изменений

Таблица 2.7. Второй этап решения задачи

№элемента	1	2	3	4	5	6
Массив <i>Metka</i>	0	<b>1</b>	0	0	0	1
Массив <i>Pred_num</i>	<b>2</b>	6	<b>2</b>	6	<b>2</b>	0
Массив <i>Curr_dist</i>	<b>18</b>	13	<b>16</b>	14	<b>19</b>	0

2. Возьмем наименьшую из неотмеченных вершин, это №4 ( $j=4$ )

2.1. Пометим ее как рассмотренную  $metka[4]:=1$

2.2. В цикле по  $k$  от 1 до 6 сравним  $curr\_dist[4]+d[4,k]$  и  $curr\_dist[k]$  (иными словами здесь сравниваются наименьшие из известных путей от вершины 6 через вершину №4 к остальным вершинам и наиболее короткий известный путь от №6 к остальным)

при  $k=1$ :  $curr\_dist[4]+d[4,1]=14+1=15$ ,  $curr\_dist[1]=18 \Rightarrow curr\_dist[1]=15$ ,  $pred\_num[1]:=4$



при  $k=2$ :  $curr\_dist[4]+d[4,2] = 14+8=22$ ,  $curr\_dist[2]=13 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=3$ :  $curr\_dist[4]+d[4,3] = 14+8=22$ ,  $curr\_dist[3]=16 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=4$ :  $curr\_dist[4]+d[4,4] = 14+0=14$ ,  $curr\_dist[4]=14 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=5$ :  $curr\_dist[4]+d[4,5] = 14+6=20$ ,  $curr\_dist[5]=19 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=6$ :  $curr\_dist[4]+d[4,6] = 14+12=26$ ,  $curr\_dist[6]=0 \Rightarrow$  никаких изменений.

Таблица 2.8. Третий этап решения задачи

№элемента	1	2	3	4	5	6
Массив <i>Metka</i>	0	1	0	<b>1</b>	0	1
Массив <i>Pred num</i>	<b>4</b>	6	2	6	2	0
Массив <i>Curr dist</i>	<b>15</b>	13	16	14	19	0

3. Возьмем неотмеченную вершину, теперь это вершина №1 ( $j=1$ )

3.1. Пометим ее как рассмотренную  $metka[1]:=1$

3.2. В цикле по  $k$  от 1 до 6 сравним  $curr\_dist[1]+d[1,k]$  и  $curr\_dist[k]$  (иными словами здесь сравниваются наименьшие из известных путей от вершины 6 через вершину №1 к остальным вершинам и наиболее короткий известный путь от №6 к остальным)

при  $k=1$ :  $curr\_dist[1]+d[1,1] = 15+0=15$ ,  $curr\_dist[1]=15 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=2$ :  $curr\_dist[1]+d[1,2] = 15+5=20$ ,  $curr\_dist[2]=13 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=3$ :  $curr\_dist[1]+d[1,3] = 15+4=19$ ,  $curr\_dist[3]=16 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=4$ :  $curr\_dist[1]+d[1,4] = 15+12=27$ ,  $curr\_dist[4]=14 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=5$ :  $curr\_dist[1]+d[1,5] = 15+1=16$ ,  $curr\_dist[5]=19 \Rightarrow curr\_dist[5]:=16, pred\_num[5]:=1$

при  $k=6$ :  $curr\_dist[1]+d[1,6] = 15+\infty=\infty$ ,  $curr\_dist[6]=0 \Rightarrow$  никаких изменений.

Таблица 2.9. Четвертый этап решения задачи

№элемента	1	2	3	4	5	6
Массив <i>Metka</i>	<b>1</b>	1	0	1	0	1
Массив <i>Pred_num</i>	4	6	2	6	<b>1</b>	0
Массив <i>Curr_dist</i>	15	13	16	14	<b>16</b>	0

4. Возьмем неотмеченную вершину, например №5 ( $j=5$ )

4.1. Пометим ее как рассмотренную  $metka[5]:=1$

4.2. В цикле по  $k$  от 1 до 6 сравним  $curr\_dist[5]+d[5,k]$  и  $curr\_dist[k]$  (иными словами, здесь сравниваются наименьшие из известных путей от вершины 6 через вершину №5 к остальным вершинам и наиболее короткий известный путь от №6 к остальным)

при  $k=1$ :  $curr\_dist[5]+d[5,1]=16+4=20$ ,  $curr\_dist[1]=15 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=2$ :  $curr\_dist[5]+d[5,2]=16+9=25$ ,  $curr\_dist[2]=13 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=3$ :  $curr\_dist[5]+d[5,3]=16+3=19$ ,  $curr\_dist[3]=16 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=4$ :  $curr\_dist[5]+d[5,4]=16+8=24$ ,  $curr\_dist[4]=14 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=5$ :  $curr\_dist[5]+d[5,5]=16+0=16$ ,  $curr\_dist[5]=16 \Rightarrow$  никаких изменений

при  $k=6$ :  $curr\_dist[5]+d[5,6]=16+\infty=\infty$ ,  $curr\_dist[6]=0 \Rightarrow$  никаких изменений.

Таблица 2.10. Пятый этап решения задачи

№элемента	1	2	3	4	5	6
Массив <i>Metka</i>	1	1	0	1	<b>1</b>	1
Массив <i>Pred_num</i>	4	6	2	6	1	0
Массив <i>Curr_dist</i>	15	13	16	14	16	0

5. Возьмем последнюю вершину №3 ( $j=3$ )

5.1. Пометим ее как рассмотренную  $metka[3]:=1$

5.2. Очевидно, что поскольку в массиве  $curr\_dist$  путей больше 16 не осталось, тогда как  $curr\_dist[3]=16$ , то дальнейшее улучшение результата невозможно.

Таблица 2.11. Итоговое решение задачи

№элемента	1	2	3	4	5	6
Массив <i>Metka</i>	1	1	<b>1</b>	1	1	1
Массив <i>Pred_num</i>	4	6	2	6	1	0
Массив <i>Curr_dist</i>	15	13	16	14	16	0

**Вывод:**

Путь от 6 до 1:  $pred\_num[1]=4$ ,  $pred\_num[4]=6$ ,  $pred\_num[6]=0$ . Длина= $curr\_dist[1]=15$ . Сам путь (6,4,1).

Путь от 6 до 2:  $pred\_num[2]=6$ ,  $pred\_num[6]=0$ . Длина= $curr\_dist[2]=13$ . Сам путь (6,2).

Путь от 6 до 3:  $pred\_num[3]=2$ ,  $pred\_num[2]=6$ ,  $pred\_num[6]=0$ . Длина= $curr\_dist[3]=16$ . Сам путь (6,2,3).

Путь от 6 до 4:  $pred\_num[4]=6$ ,  $pred\_num[6]=0$ . Длина= $curr\_dist[4]=14$ . Сам путь (6,4).

Путь от 6 до 5:  $pred\_num[5]=1$ ,  $pred\_num[1]=4$ ,  $pred\_num[4]=6$ ,  $pred\_num[6]=0$ . Длина= $curr\_dist[5]=16$ . Сам путь (6,4,1,5).

Существует совершенно иной подход к задаче нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин. Этот метод применим как к неотрицательным, так и к произвольным матрицам весов. Метод был предложен первоначально Флойдом и затем развит Мерчлэндом.

**ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА (ФЛОЙДА)****Основная идея**

Алгоритм Флойда (рис.2.10.) базируется на использовании последовательности из  $n$  преобразований (итераций) начальной матрицы весов  $C$ . При этом на  $k$ -й итерации матрица представляет длины кратчайших путей между каждой парой вершин с тем ограничением, что путь между  $x_i$  и  $x_s$  (для любых  $x_i$  и  $x_s$ ) содержит в качестве промежуточных только вершины из множества  $\{x_1, \dots, x_k\}$ .

## Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

Матрица расстояний  $D = \{d[i, j]\}$

*Общий шаг:*

for  $k:=1$  to  $N$  do

for  $i:=1$  to  $N$  do

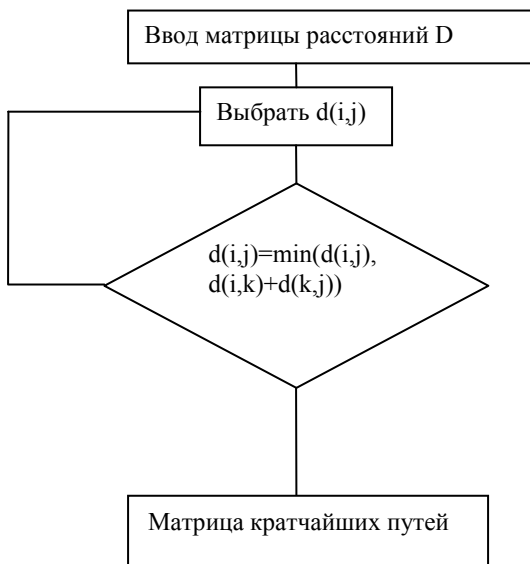
for  $j:=1$  to  $N$  do

$d[i, j] := \text{Min}(d[i, j], d[i, k] + d[k, j]);$

*Вывод:*

Матрица кратчайших путей  $D = \{d[i, j]\}$

Схема работы алгоритма показана на рис.2.9.



*Рис. 2.9. Схема описания алгоритма Флойда*

## Примечание

Алгоритм Флойда фактически без всяких изменений применяется также в задачах поиска наиболее надежных путей из

одного объекта в другой. В этом случае вес дуги равен надежности данного пути, т.е. вероятности его существования (или работоспособности). Очевидно, что надежность пути от вершины  $s$  к вершине  $k$ , составленного из дуг, взятых из множества  $U$ , вычисляется по формуле

$$\eta(P) = \prod_{(x_i, x_j) \in P} \eta_{ij}.$$

Такого рода задачу нахождения наиболее надежного пути можно свести к задаче о кратчайшем пути из  $s$  в  $k$ , взяв в качестве веса  $c_{ij}$  дуги  $(x_i, x_j)$  величину  $c_{ij} = -\log \eta_{ij}$ . Прологарифмировав обе части соотношения, получим:

$$\log \eta(P) = \sum_{(x_i, x_j) \in P} \log \eta_{ij} = - \sum_{(x_i, x_j) \in P} c_{ij}.$$

Отсюда видно, что кратчайший путь от  $s$  к  $k$  с матрицей весов  $\{c[i, j]\}$ , будет в то же время и наиболее надежным путем с матрицей  $\{\eta[i, j]\}$ , а надежность этого пути равна антилогарифму его длины.

### Анализ сложности

Время, необходимое для решения задачи III при помощи алгоритма Флойда (независимо от наличия или отсутствия отрицательных весов в матрице  $C$ ), пропорционально  $O(N^3)$ . Отсюда следует его эффективность для произвольных матриц весов. Но даже если этот метод применить к графам с неотрицательной матрицей весов, то он сэкономит почти 50% времени по сравнению с  $N$ -кратным применением алгоритма Дейкстры.

К задачам этого типа относят не слишком сложную задачу нахождения кратчайшего пути между двумя вершинами в ориентированном ациклическом графе, обычно возникающую в методах сетевого планирования и управления (СПУ). Применяют СПУ при составлении проектов выполнения работ, состоящих из большого количества этапов, каждый этап изображают вершиной, а дуга  $u_{ij}$  означает, что  $j$ -я работа выполняется после окончания  $i$ -й.

Каждой дуге приписывается вес, соответствующий минимальной задержке между началом работы  $i$  и началом работы  $j$ . Собственно говоря, в этих задачах обычно ищут критический, т.е. самый длинный путь между вершиной, изображающей начало работ, и вершиной, символизирующей завершение всех необходимых для реализации проекта работ. Безусловно, такая задача может быть решена при помощи того же алгоритма Дейкстры, но это не слишком экономно, потому что не учитывается специальная структура графа. Для таких графов существуют специальные методы расстановки пометок, которые обычно изучаются в курсе менеджмента.

К более сложным задачам можно отнести задачи нахождения замкнутого обслуживаемого маршрута в графах с двойными весами, когда дуге графа помимо обычного веса  $c_{ij}$  приписана еще одна характеристика  $b_{ij}$ , и нужно найти цикл, для которого целевая функция

$$z(\Phi) = \frac{\sum_{v_i, v_j \in \Phi} c_{ij}}{\sum_{v_i, v_j \in \Phi} b_{ij}}$$

минимальна (или максимальна). Например, обслуживание самолетом некоторой сети маршрутов – может характеризоваться – упрощенно двумя параметрами:  $c_{ij}$  - доход от полета,  $b_{ij}$  - затрачиваемое на полет время. Эта задачу можно решить, используя алгоритм нахождения циклов отрицательного веса.

Во многих практических приложениях помимо нахождения кратчайшего пути требуется, чтобы он обладал дополнительными свойствами. Конечно, ее можно рассматривать как задачу с двойными весами или дополнительными ограничениями, но такие усложнения могут сильно замедлить работу, в общем-то, эффективного алгоритма. Оказывается, что зачастую с практической точки зрения выгоднее найти  $K$  кратчайших путей и выбрать среди них тот, который обладает нужным свойством. Алгоритм нахождения  $K$  простых кратчайших цепей предложен Йеном.

Здесь же стоит упомянуть задачу о нахождении пути от вершины  $s$  к вершине  $t$ , характеризуемого наибольшей пропускной способностью. Пропускная способность пути  $P$  определяется дугой из  $P$  с наименьшей пропускной способностью. Решение таких задач опирается на нахождение разрезов в графе.

Если попробовать еще больше приблизить математическую модель к возможным реальным условиям, помимо пропускной способности можно ввести еще одну характеристику дуг, например надежность. Так формулируется задача о приведенной пропускной способности, а ее решение является комбинацией предыдущей задачи и задачи о нахождении наиболее надежного пути.

### **ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

В городе  $N$  шесть школ. Для организации завтраков привлекается единственный в городе комбинат питания. Комбинат питания ежедневно доставляет в каждую школу необходимое количество готовых завтраков (использование одного авто для попутной доставки в несколько школ исключается). Расстояния между школами и комбинатом представлены в таблице.

Найти кратчайшие расстояния между всеми школами и комбинатом питания.

Таблица 2.12. Исходные данные к задаче для самостоятельного решения

	комбинат	Шк.1	Шк.2	Шк.3	Шк.4	Шк.5	Шк.6
комбинат	0	30	15	12	15	9	10
Шк.1	нет	0	10	23	17	7	12
Шк.2	8	13	0	9	6	нет	22
Шк.3	16	17	14	0	25	8	10
Шк.4	7	17	нет	11	0	24	6
Шк.5	21	6	8	нет	20	0	15
Шк.6	14	15	11	13	8	нет	0

## 2.1.4. Прокладка коммуникаций между препятствиями

Ранее были рассмотрены задачи планирования сети коммуникаций, связывающей ряд объектов, при выполнении идеализированного условия всюду и абсолютно пригодной для этой цели местности, и как следствие – одинаковой стоимости прокладки коммуникаций по всей территории. На самом деле, даже если взять всего лишь два объекта, то прокладке оптимального с геометрической точки зрения пути (т.е. прямой, соединяющей два объекта) препятствует множество факторов: реки, озера, горы, имеющиеся здания, болотистые участки и т.д. Подобные задачи обычно называют задачами трассировки.

Вообще говоря, различают два вида задач трассировки.

**Задача строительной трассировки:** дано множество объектов и имеющихся абсолютно непроходимых препятствий. Необходимо проложить трассу минимальной протяженности, связывающую имеющиеся объекты друг с другом. При этом ранее проведенные трассы препятствиями не являются.

**Задача электронной трассировки:** дана пустая плата с микроклеммами. Надо соединить согласно схеме нужные клеммы напыленными на плату металлическими проводящими дорожками. Эти трассы являются препятствиями для следующих трасс: следующие не должны пересекать предыдущие.

В логистике электронная трассировка не находит прямого применения и потому не изучается, в отличие от строительной трассировки, о которой пойдет речь ниже.

### *НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ*

Препятствия будем приближенно изображать многоугольниками. Это не сужает класс решаемых задач, т.к. разрешается применять многоугольники произвольного вида с достаточным числом углов: т.о. всякое препятствие можно аппроксимировать к многоугольнику с точностью, достаточной для приложений. В случае препятствий-многоугольников кратчайшая трасса образует ломаную с узлами в вершинах многоугольников. Поскольку препятствия непреодолимы, звено ломаной – это либо



сторона многоугольника (рис. 2.10, а), при этом трасса идет вдоль стены с внешней стороны препятствия, либо прямолинейный отрезок, проходящий вне многоугольника и соединяющий две вершины одного и того же или разных многоугольников (рис. 2.10,б).

### *ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ*

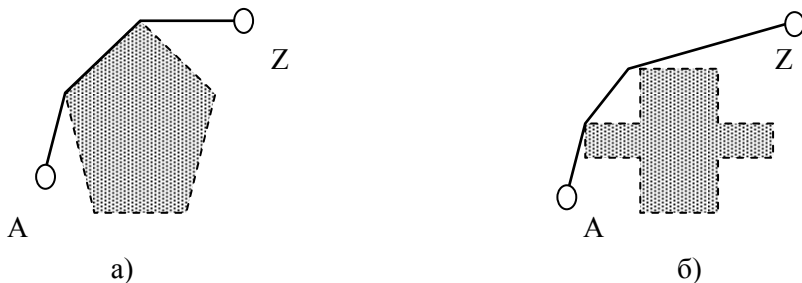
**Дан всюду (кроме препятствий) проходимый участок местности, стартовая точка А и финишная Z. Найти кратчайшую трассу из А в Z.**

### **ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА (ЧУЧУНДРЫ)**

Название алгоритма придумано математиком Бондаревым в 1988 г. Чучундра – это имя крысы из сказки Киплинга, которая, предпочитала ходить вдоль стен.

#### Основная идея

Нужно построить сеть, состоящую из сторон многоугольников и из прямоугольных отрезков, соединяющих вершины разных многоугольников или вершины одного многоугольника при условии, что они «простреливаются» друг из друга (препятствия считаются пуленепробиваемыми). Точки А и Z, если они не вершины многоугольников, тоже нужно соединить с простреливаемыми из них вершинами. После того, как сеть построена, на ней нужно, пользуясь, например, алгоритмом Дейкстры, найти кратчайший путь из А в Z.



*Рис. 2.10. Кратчайшая трасса*

### Возможные сложности

Как проверить, что две вершины сети «простреливаются» друг из друга, т.е. что соединяющая их прямая не пересекается со сторонами многоугольников?

### Способы преодоления

1. Если ситуация соответствует рис. 2.11, то факт «простреливаемости» проверяется по стандартным формулам аналитической геометрии:

выписывается уравнение прямой, проходящей через  $i, j$ :

$$\frac{y - i_y}{j_y - i_y} = \frac{x - i_x}{j_x - i_x};$$

выписывается уравнение прямой, проходящей через концы отрезка  $k$ :

$$\frac{y - k^1_y}{k^2_y - k^1_y} = \frac{x - k^1_x}{k^2_x - k^1_x}$$

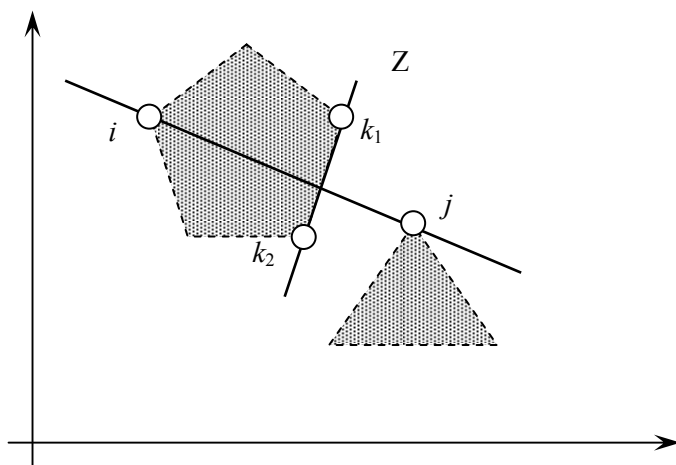


Рис. 2.11. Явно непростреливаемые вершины

Решением системы из этих двух уравнений находится точка пересечения  $(x^*, y^*)$  и устанавливается, лежит ли точка пересечения

внутри рассматриваемых отрезков – если это так, должны выполняться четыре условия:

$$\text{Min}(k_x^1, k_x^2) < x^* < \text{Max}(k_x^1, k_x^2);$$

$$\text{Min}(i_x, j_x) < x^* < \text{Max}(i_x, j_x);$$

$$\text{Min}(k_y^1, k_y^2) < y^* < \text{Max}(k_y^1, k_y^2);$$

$$\text{Min}(i_y, j_y) < y^* < \text{Max}(i_y, j_y).$$

В этом случае присваиваем соответствующему элементу матрицы расстояний значение, равное бесконечности (нет пути),  $d[i, j] := \infty$ , и заканчиваем цикл по  $k$ .

Если хотя бы одно из условий не выполняется, продолжаем цикл по остальным  $k$  и в случае такого же результата по окончании перебора всех существующих ребер вычисляем Эвклидово расстояние

$$d[i, j] = \sqrt{(i_x - j_x)^2 + (i_y - j_y)^2}.$$

2. Если ситуация соответствует рис. 2.12, то решение не столь очевидно.

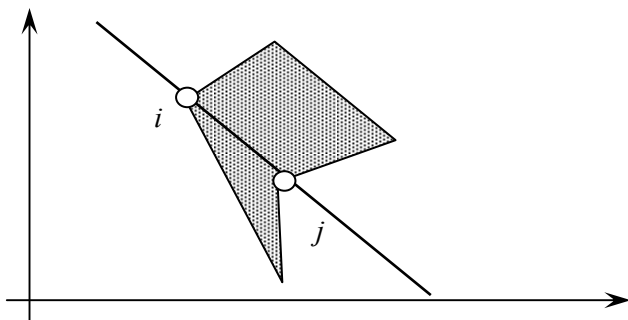


Рис. 2.12. Неявно непростреливаемые вершины

Между  $i$  и  $j$  не проходит никакой стены, но, тем не менее,  $j$  из  $i$  не простреливается. Чтобы преодолеть эту трудность, введем некую характеристику угла препятствия:  $G[i]$ , положив

$$G[i] = \begin{cases} 0, & \text{если угол } i \text{ «вогнутый»;} \\ 1, & \text{если угол } i \text{ «выпуклый»}. \end{cases}$$

Мы рассматриваем внешний угол препятствия. Так, угол с вершиной  $i$  на рис. 2.12 – выпуклый, а угол с вершиной  $j$  – вогнутый. Для вычисления  $G[i]$  понадобится простое утверждение.

*Утверждение 1:* Пусть  $i, i+1, i+2, i+3$  – последовательные вершины многоугольника. Если крайние вершины  $i$  и  $i+3$  лежат по одну сторону от прямой, проходящей через средние вершины  $i+1$  и  $i+2$ , то  $G[i+1]=G[i+2]$ , иначе  $G[i+1] \neq G[i+2]$ .

А) Пусть имеет место случай, показанный на рис. 2.13.  $G[i+1]=G[i+2]$ :

- если препятствие лежит ниже ломаной (эскиз слева), то  $G[i+1]=0$  и  $G[i+2]=0$ ;
- если препятствие лежит выше ломаной (эскиз справа), то  $G[i+1]=1$  и  $G[i+2]=1$ .

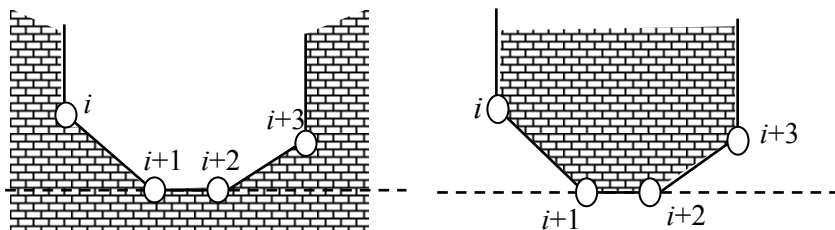


Рис. 2.13. Препятствие по одну сторону от прямой ( $i+1, i+2$ )

Б) Пусть имеет место случай, показанный на рис. 2.14:

- если препятствие лежит ниже ломаной (эскиз слева), то  $G[i+1]=1$  и  $G[i+2]=0$ ;
- если препятствие лежит выше ломаной (эскиз справа), то  $G[i+1]=0$  и  $G[i+2]=1$ .

Утверждение доказано.

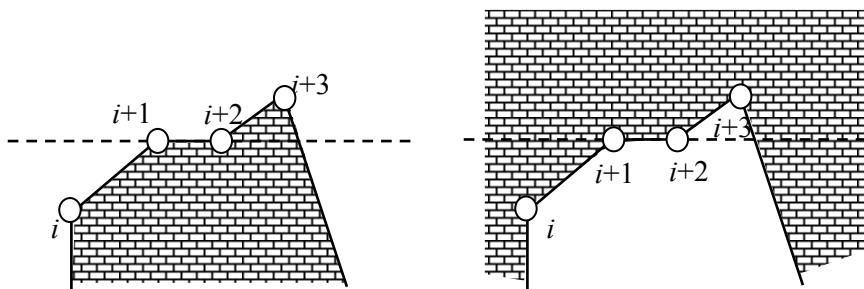


Рис. 2.14. Препятствие по разные стороны от прямой  $(i+1, i+2)$

Положим  $G[i]=1$  и циклически проведем сравнение, описанное в теореме. Для этого надо записать уравнение прямой, проходящей через вершины  $i+1$  и  $i+2$ :

$$\frac{y - y_{i+2}}{y_{i+1} - y_{i+2}} = \frac{x - x_{i+2}}{x_{i+1} - x_{i+2}}.$$

Преобразуем его:

$$(y - y_{i+2}) \cdot (x_{i+1} - x_{i+2}) - (x - x_{i+2}) \cdot (y_{i+1} - y_{i+2}) = 0.$$

Если при подстановке в это уравнение точек  $(x[i], y[i])$  и  $(x[i+3], y[i+3])$  в левой части получаются числа с одинаковым знаком, то  $G[i+1]=G[i+2]$ , иначе  $G[i+1] \neq G[i+2]$ . После этого цикла будут известны все  $G[i]$ . Осталось абсолютно установить  $G$  хотя бы для одной вершины. Это легко сделать, потому что экстремальная вершина, например,  $y' = \max(y)$ , если взять максимум по всем вершинам многоугольника, определенно имеет  $G'=1$ .

Теперь мы можем справиться с трудностью, показанной на рис. 2.12. Из вершины  $i$  не простреливается никакая вершина  $j$ , защищенная углом с вершиной  $i$ . Чтобы исключить из рассмотрения загороженные вершины, отступим от вершины  $i$  по сторонам угла на величину  $\sigma$ , заведомо меньшую, чем длина стороны. На отрезках, исходящих от вершины  $i$  построим точки  $p$  и  $q$ , которые и будут находится от вершины  $i$  на расстоянии  $\sigma$ . Построим отрезок между точками  $p$  и  $q$ . Введем бинарную переменную  $B$  по следующему правилу:

$$B = \begin{cases} 1, & \text{если отрезки } pq \text{ и } ij \text{ пересекаются,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Всего имеются четыре возможности (рис. 2.15.).

Ясно, что вершина  $j$  не простреливается из  $i$  в случаях 1 и 3 (при одинаковых знаках  $B$  и  $G$ ), простреливается – в случаях 2 и 4 (при разных знаках  $B$  и  $G$ ). Кстати, характеристическая функция  $G$  позволяет сократить перебор, поскольку справедливо следующее утверждение.

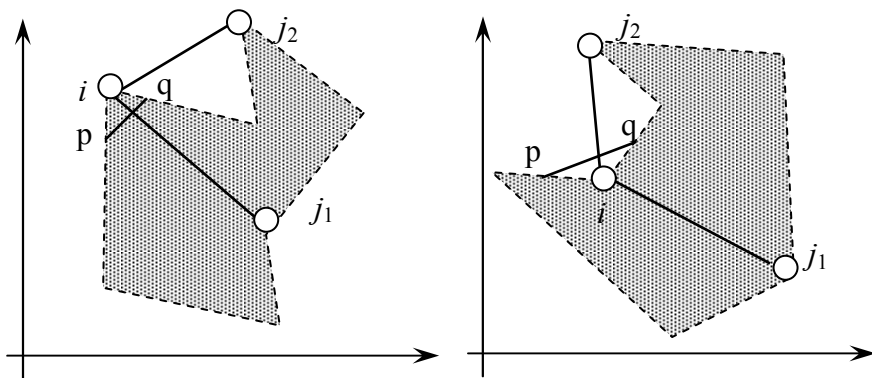


Рис. 2.15. Возможные соотношения между  $B$  и  $G$

**Утверждение 2.** Ни одна вершина ломаной, представляющей кратчайшую трассу, не может иметь  $G = 0$  (за исключением случая, когда в качестве старта и/или финиша назначены вершины с  $G = 0$ ).

Иллюстрация этого утверждения приведена на рис. 2.16. Если бы кратчайшая трасса  $a \rightarrow \dots A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots z$ , включающая стороны  $AB$  и  $BC$ , проходила через внешний вогнутый угол  $B$ , то между  $AB$ ,  $BC$  и другими препятствиями осталась бы свободная полоса. Тогда можно вращать луч  $AB$  вокруг  $A$ , пока подвижный конец луча  $B'$  не совместится с прямой, проходящей через точки  $A$

и  $C$ , или не коснется другого препятствия, например точки  $D$ . Но  $AB+B'C < AB+BC$ . Нам удалось укоротить кратчайшую трассу, что невозможно. По существу данное утверждение представляет собой геометрическое оформление механической аналогии с натянутой нитью.

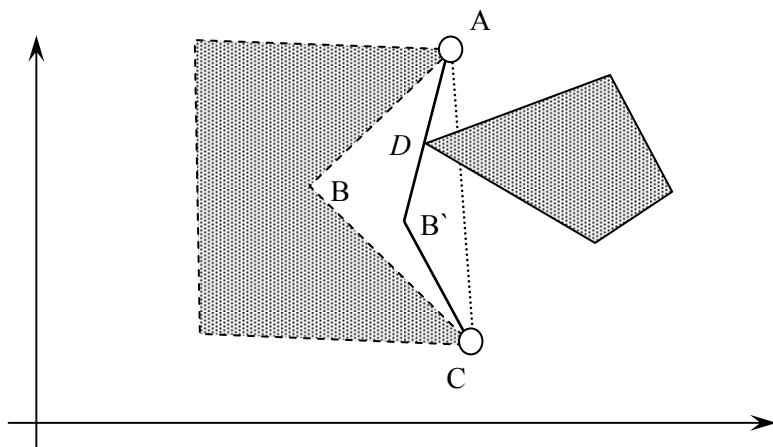


Рис. 2.16. Иллюстрация утверждения 2

### Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

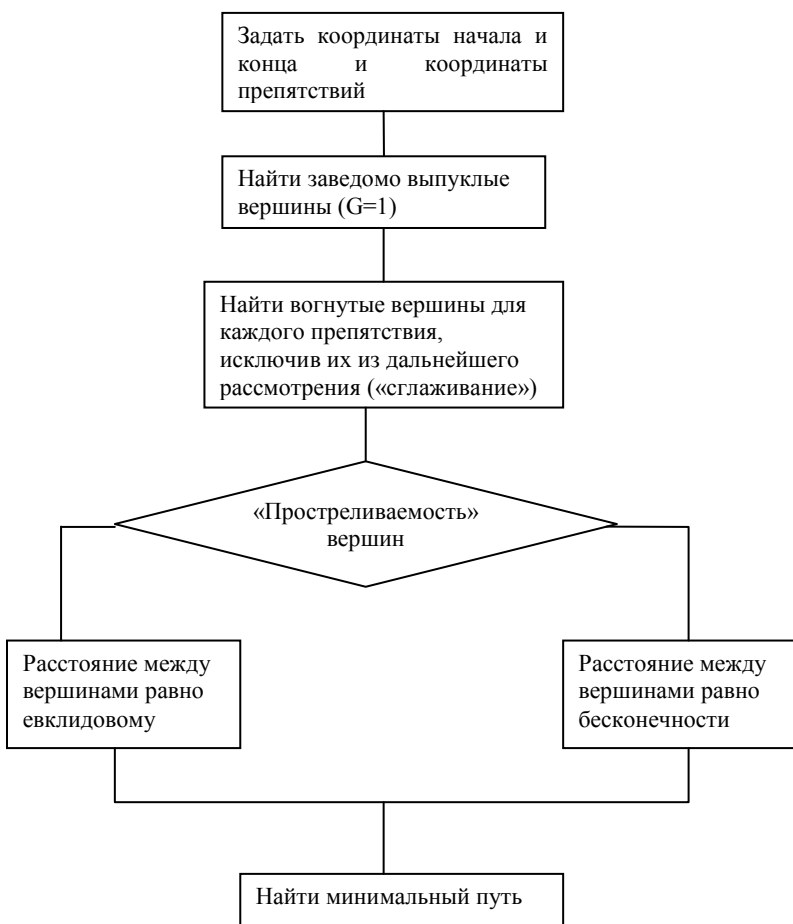
Координаты начала и конца:  $A[x_a, y_a], Z[x_z, y_z]$

Массивы с координатами препятствий:  $B_w[1..2, 1..N_w,]$

*Инициализация:*

Массив расстояний  $D[N*N]$ , где  $N$  – общее число выпуклых вершин всех многоугольников плюс два для учета старта и финиша.

Схема работы алгоритма показана на рис.2.17.



*Рис. 2.17. Схема работы алгоритма Чучундры*

*Общий шаг:*

1. Для каждого многоугольника пометить вершины с  $G=1$ .
2. Внешний цикл по  $i$  от 1 до  $N$ : это перебор помеченных вершин, откуда стреляют



Средний цикл по  $j$  от  $i+1$  до  $N$ : это перебор помеченных вершин, куда стреляют

Внутренний цикл по  $k$  от 1 до  $N-2$ : это проверка «простреливаемости» вершины  $j$  из вершины  $i$  (механизм проверки приведен выше):

если да, то  $D[i, j] = \infty$ , иначе

$D[i, j]$  = евклидовому расстоянию между  $i$  и  $j$ .

3. Для массива  $D[N \times N]$ , задающего сеть из  $N$  объектов, воспользовавшись алгоритмом Дейкстры, найти кратчайший путь из  $a$  в  $z$  (алгоритм описан в задаче 3).

*Вывод:*

$P$  – массив, содержащий координаты вершин, вошедших в кратчайший путь.

### **ПРИМЕР**

Даны координаты двух поселков  $A=[1,5]$  и  $Z=[26,4]$ , которые нужно соединить кратчайшей трассой, а также координаты углов объектов, находящихся между связываемыми поселками: заповедник  $B_1$  {[7,6], [10,6], [10,2], [7,2], [7,4], [6,4], [6,5], [7,5]}, водоем  $B_2$  {[15,9], [17,9], [15,6], [17,4], [13,4]} и ткацкая фабрика  $B_3$  {[18,5], [21,2], [18,2]} (рис.2.18.). Вычислить длину оптимальной трассы и указать способ ее прокладки.

### **РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА**

*Ввод:*

Точка  $A=[1,5]$ ; точка  $Z=[26,4]$ ;

$B_1$ : {[7,6], [10,6], [10,2], [7,2], [7,4], [6,4], [6,5], [7,5]}

$B_2$ : {[15,9], [17,9], [15,6], [17,4], [13,4]}

$B_3$ : {[18,5], [21,2], [18,2]}

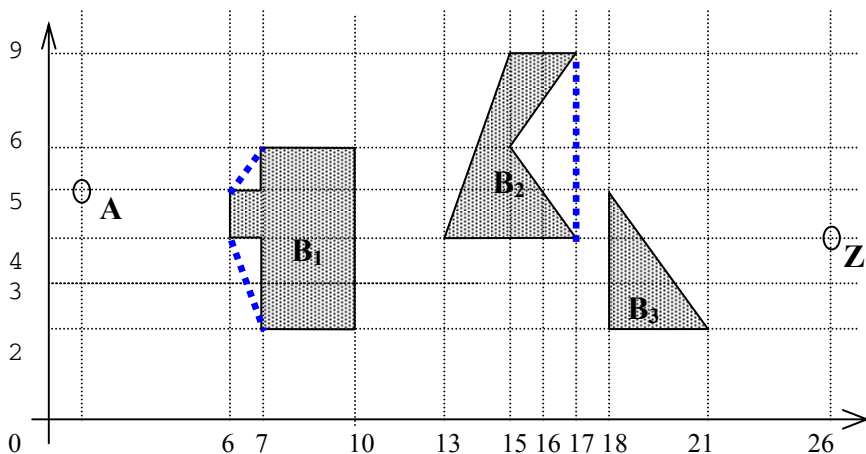


Рис. 2.18. Размещение препятствий на плоскости

Общий шаг:

1. Исключим из перебора вогнутые вершины. Для этого найдем для каждого препятствия максимальную по  $y$  вершину, она заведомо будет выпуклой ( $G = 1$ ).

$B_1$ :  $G(v[7,6]) = 1$ . Построим уравнение прямой, проходящей через точки  $v[7,6]$  и  $v[10,6]$ :  $y - 6 = 0$ . Подстановка в левую часть координат точек  $v[7,5]$  и  $v[10,2]$  дает числа одинакового знака  $\Rightarrow G(v[10,6]) = G(v[7,6]) = 1$ .

Далее повторим ту же операцию для следующих пар точек, получим:

$$G(v[10,2]) = G(v[10,6]) = 1$$

$$G(v[7,2]) = G(v[10,2]) = 1$$

$$G(v[7,4]) \neq G(v[7,2]) \Rightarrow G(v[7,4]) = 0$$

$$G(v[6,4]) \neq G(v[7,4]) \Rightarrow G(v[6,4]) = 1$$

$$G(v[6,5]) = G(v[6,4]) = 1$$

$$G(v[7,5]) \neq G(v[6,5]) \Rightarrow G(v[7,5]) = 0$$

$$B_2: G(v[15,9]) = 1, G(v[17,9]) = 1, G(v[15,6]) = 0, G(v[17,4]) = 1, G(v[13,4]) = 1$$

$$B_3: G(v[18,5]) = 1, G(v[21,2]) = 1, G(v[18,2]) = 1$$

2. По точкам с  $G=1$  пускаем тройной цикл:  $i=1$  to 15,  $j=1+1$  to 15,  $k=1$  to 13, стреляем из точки  $A[1,5]$  в точку  $[7,6]$  – уравнение прямой:  $(y-6)/(5-6)=(x-7)/(1-7)$  или  $y=(29+x)/6$  прямые (которым принадлежат нужные отрезки – стороны многоугольников) до исключения вогнутых вершин задавались следующими уравнениями:

- $y=6; x=10; y=2; x=7; y=4; x=6; y=5; x=7;$
- $y=9; y=(3x-33)/2; y=x-9; y=4; y=(5x-57)/2$
- $y=23-x; x=2; x=18,$

исключив вершины с  $G=0$ , можно произвести «сглаживание» углов (отмечено пунктиром на рис. 2.18.). Таким образом перебор возможных отрезков сократится на количество вогнутых углов. Новый набор:

- $y=6; x=10; y=2; y=16-2x; x=6; y=x-1;$
- $y=9; x=17; y=4; y=(5x-57)/2$
- $y=23-x; x=2; x=18,$

ни с одним из них траектория «пули» до ее попадания в точку  $j$  не пересекается, значит  $d[1,2]=\sqrt{(7-1)^2+(6-5)^2}=\sqrt{37}$

в точку  $[10,6]$  – уравнение прямой:  $y=(x+44)/9$  находим искомое пересечение с отрезком  $y=x-1$ , значит, эта точка из  $i$  не простреливается и  $d[1,3]=0$  и т.д.

В итоге формируется матрица  $D[i,j]$ , соответствующая ей сеть изображена на рис. 2.19.

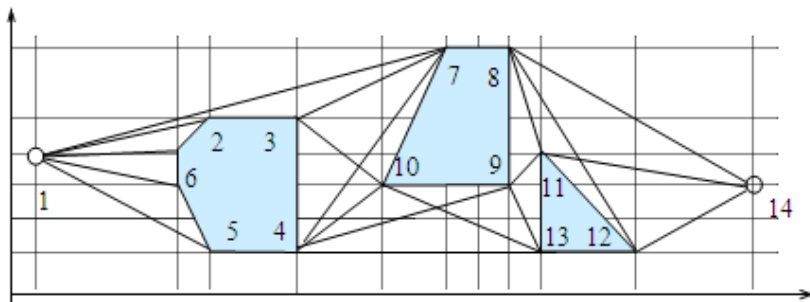


Рис. 2.19. Графическое представление сети

### ***ПРИМЕЧАНИЕ***

Препятствия могут быть различной степени проходимости. Например, глубокое озеро и не подлежащее сносу здание – условно непроходимые участки, тогда как болотистая местность может быть подвергнута осушению и после этого становится пригодной для строительства, однако это, естественно, повлечет за собой возрастание стоимости прокладки 1 м трассы или иных коммуникаций на такой местности. Ввиду значительной сложности таких задач в рамках данного пособия рассматривать их не будем, а ограничимся условием, что имеющиеся препятствия непроходимы полностью.

### ***ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

1. Закончить прогон алгоритма, рассчитать длины указанных ребер и, воспользовавшись алгоритмом Дейкстры, найти кратчайший путь из вершины №1 в вершину №14.
2. Решить задачу. Найти оптимальную трассу от точки  $A=[1,4]$  до точки  $Z=[8,2]$  по местности с абсолютно непроходимыми препятствиями и вычислить ее длину. Препятствия и конечные точки заданы своими вершинами в декартовой системе координат. Препятствие №1:  $\{[2,3], [4,3], [4,10], [2,5]\}$ , препятствие №2  $\{[4,1], [6,1], [6,5], [5,4], [4,2]\}$ .

## ***2.2. Задачи о назначениях***

Далее рассмотрены задачи, возникающие при работе с кадрами. Это та область деятельности предприятия, которая попала под влияние логистики едва ли не самой последней. Однако в современных условиях, в силу доступности и обширности информации о свободных вакансиях, предлагаемых заработных платах и квалификации претендентов на рабочие места, многие кадровые вопросы, особенно при достаточно большом штате сотрудников, могут и должны решаться с использованием оптимизирующих алгоритмов.

Оптимизировать в этом случае, как впрочем, и в других логистических задачах, можно различные параметры при сохранении, как правило, единой глобальной цели: минимизации итоговых издержек.

Часто возникает проблема распределения должностей или, что более вероятно, прямых служебных обязанностей среди имеющегося штата сотрудников, так чтобы по возможности им всем было выделено по одному участку работы, для которого они обладают нужной квалификацией. Эта проблема рассмотрена в рамках задачи, в литературе часто называемой задачей о заключении максимального количества браков (алгоритм чередующихся цепей).

С практической точки зрения на самом деле бывает важно не столько занять всех сотрудников, сколько сделать это разумно. Например, если они в разной степени могут справляться с возложенными на них обязанностями, то речь может идти о максимизации суммарной полезности или эффективности их работы. Если же эффективность ожидается примерно одинаковая или не учитывается, но зарплату эти сотрудники при назначениях должны получать различную (например, в силу стажа работы или квалификации), то можно задаться вопросом о поиске такого назначения, чтобы суммарная зарплата была минимальной. Это так называемые максисуммная и минисуммная постановки задачи, которые решаются идентичным способом и рассмотрены в рамках задачи об оптимальных назначениях (венгерский алгоритм).

Если минимизация суммарной зарплаты – это обычная позиция работодателя (причем не слишком обеспокоенного судьбой собственных работников), то в противовес ей можно рассмотреть позицию трудового коллектива, если вдруг именно он будет решать, кто займет предложенные должности при известной сетке индивидуальных зарплат. Тогда наиболее честным с пролетарской точки зрения (если конечно не рассматривать вариант: все суммировать и разделить поровну) будет поиск назначения, при котором самая маленькая зарплата сотрудника будет максимально возможной. С точки зрения разумных капиталистов обычно вопрос ставится несколько иначе: найти назначение, при котором самая низкая эффективность труда (допустим при выполнении операция на поточных линиях) будет максимально возможной. Это так называемая задача о назначениях на критичный участок.

В том случае, если ограничения вида «один человек занимает только одну должность и на одну должность назначен только один человек» снимаются, то задача об оптимальном кадровом назначении приобретает другой вид. В этом случае речь идет о том, что каждый соискатель на вакансию в состоянии выполнять некоторое множество функций и нужно подобрать такой штат, чтобы он мог выполнять все перечисленные функции. При этом критерий оптимальности в простейшем случае (допустим при одинаковой зарплате претендентов) представляет собой минимизацию количества задействованных работников. Эта проблема рассмотрена в рамках задачи о наименьшем покрытии.

### **2.2.1. Максимальное число назначений**

Часто бывает так, что на предприятии есть штат сотрудников, имеющих определенный набор знаний и навыков. В соответствии с этими знаниями каждому сотруднику может быть поручены один или несколько участков работы. Если при этом оговаривается, что одновременное выполнение работы на двух и более участках невозможно, то у специалиста из отдела кадров возникает резонный вопрос: как бы загрузить работой

максимальное число сотрудников. Это и есть суть задачи о максимальном числе назначений.

Стандартный способ формализации такого рода задач сводится к следующему. Обозначим возможные назначения матрицей  $A$ , где строки соответствуют сотрудникам, а столбцы – участкам работы.

$$a[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й сотрудник может выполнять } j\text{-ю работу} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Введем неизвестную величину

$$x[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-му сотруднику поручена } j\text{-я работа} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Следуя соображениям логики, величина  $x[i,j]$  должна удовлетворять еще двум условиям:

$$\sum_{i=1}^M x[i,j] \leq 1 \quad (\text{любомu сотруднику поручается не более чем одна}$$

$$\text{работа) и } \sum_{j=1}^N x[i,j] \leq 1 \quad (\text{на любую работу назначен не более чем}$$

один сотрудник). Чтобы было как можно больше назначений, надо

$$\text{максимизировать функционал } \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a[i,j] \cdot x[i,j] \rightarrow \max.$$

Таким образом запись задачи состоит из оптимизируемого линейного функционала и нескольких линейных условий, называемых ограничениями. Это типичная задача линейного программирования, которая в общем случае просто решается так называемым симплекс-методом. Однако добавление условия целочисленности результата  $x[i,j]$  обычно делает задачу очень трудно решаемой. Как можно было убедиться на примере транспортной задачи, имеется подкласс целочисленных задач линейного программирования, которые решаются вне рамок линейного программирования весьма остроумными алгоритмами.

Для рассматриваемой задачи такой алгоритм тоже есть и основан он на теории графов.

### НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ

Для того чтобы сформулировать эту задачу в терминах теории графов, сотрудникам и участкам работы ставятся в соответствие вершины графа, а возможность  $i$ -го сотрудника выполнять  $j$ -ю работу отображается наличием в графе ребра  $u_{ij}$ .

Если  $M$  – множество сотрудников,  $N$  – множество участков работы, то граф  $G[M, N]$ , отражающий возможные назначения сотрудников на эти работы, называется **двудольным** (рис. 2.20). Паросочетанием в двудольном графе называется множество ребер, не имеющих общих вершин. На рис. 2.20,а показан пример паросочетания, на рис. 2.20,б – пример наибольшего паросочетания.

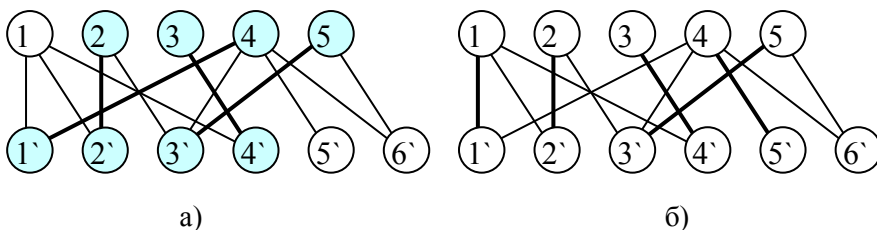


Рис. 2.20. Примеры паросочетаний

Введем **понятие чередующихся цепей**. Пусть  $M^*$  – паросочетание в двудольном графе. Цепь, в которую поочередно входят ребра из  $M^*$  (жирные) и из не- $M^*$  (тонкие), назовем чередующейся относительно  $M^*$ . Например, цепь  $(1-2'-2-3'-5)$  (рис. 2.20, а) – чередующаяся. По определению, цепь, состоящая из одного ребра, тоже чередующаяся. Вершины, инцидентные ребрам из  $M^*$ , назовем **насыщенными**, прочие – ненасыщенными. Очевидно, что если в графе существует чередующаяся относительно  $M^*$  цепь с ненасыщенными концевыми вершинами (т.е. тонкими концевыми ребрами), то в ней тонких ребер на одно больше, чем жирных. Например, цепь  $(1-2'-2-3'-5-6')$  (рис. 2.21, а) имеет три тонких ребра и два жирных.



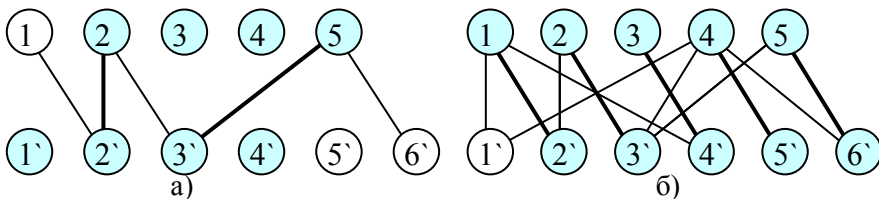


Рис. 2.21. Примеры чередующихся цепей

Если цепь «перекрасить», т. е. сделать все жирные ребра тонкими, а тонкие – жирными, то число жирных ребер, а, следовательно, и паросочетание, увеличится на одно ребро (рис. 2.20,б). Чередующаяся относительно  $M^*$  цепь с ненасыщенными концевыми вершинами называется увеличивающей относительно  $M^*$  цепью.

**Утверждение 1:** Паросочетание  $M$  является наибольшим тогда и только тогда, когда нет увеличивающих относительно  $M$  цепей.

Заметим, что как на рис. 2.20, б, так и на рис. 2.21, б показаны наибольшие паросочетания для одного и того же двудольного графа, причем паросочетания различные.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**Дан двудольный граф  $G_{M,N}$ . Найти наибольшее паросочетание.**

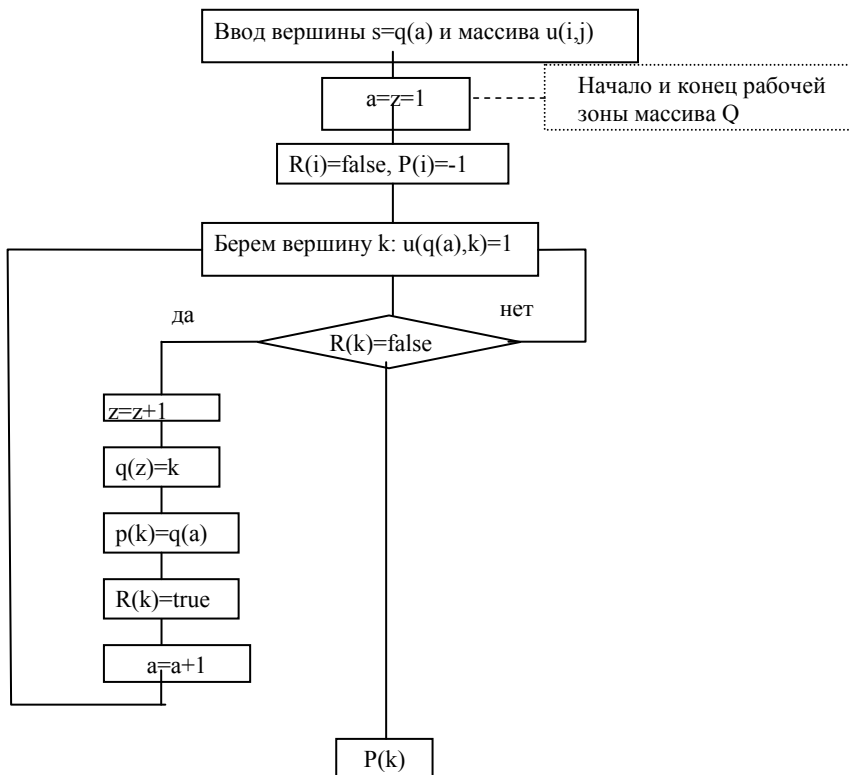
### ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

#### Основная идея

Пусть  $I = \{1, 2, \dots, M\}$  – номера верхних вершин, а  $J = \{1, 2, \dots, N\}$  – номера нижних. Вначале все вершины ненасыщенные. Построим какое-нибудь начальное паросочетание  $M^*$ . Далее преобразуем двудольный граф  $G$  в орграф  $G^+$ , введя ориентацию следующим образом: все ребра, вошедшие в  $M^*$ , ориентируем снизу вверх, т.е. из  $J$  в  $I$ , а остальные ребра сверху вниз, т.е. из  $I$  в  $J$ . Пусть  $I^- = I^- \cup I^+$ ,  $J^- = J^- \cup J^+$ , где минус означает подмножество ненасыщенных ребер, а плюс – насыщенных. Очевидно, что увеличивающая относительно паросочетания  $M^*$  цепь существует в

графе  $G$  тогда и только тогда, когда в  $G'$  существует путь  $[s, \dots, t]$ , где  $s \in I^-$ , а  $t \in J^+$ .

Схема работы алгоритма перечисления вершин орграфа, достижимых из  $s$  (рис.2.22)



*Рис. 2.22. Схема работы алгоритма для нахождения максимального числа назначений*

### Возможные сложности

1. Как построить начальное паросочетание?
2. Как определить, существует ли в орграфе путь между заданными вершинами, или в общем случае, как определить множество достижимых вершин из данной (с тем, чтобы поискать среди них нужную ненасыщенную вершину)?

### Способы преодоления

1. Для построения начального паросочетания применим "жадный" алгоритм: будем просматривать по очереди вершины из  $I$  и, если из  $i$  ( $I$ ) ведут ребра в ненасыщенные вершины из  $J$ , будем жадно хватать и вводить в паросочетание первое попавшееся ребро, не думая о последствиях.
2. Для определения достижимых вершин орграфа применяется очень простой алгоритм, который опишем привычным формальным образом и затем будем использовать в основном алгоритме в качестве вызываемой функции.

### Формальное описание алгоритма перечисления вершин орграфа, достижимых из $s$

Ввод:

$s$  – данная вершина;

$u[i, j]$  – массив эквивалентный матрице смежности, задающей дуги в ориентированном графе;

Инициализация:

$P[N]$  – массив, в котором записаны номера предыдущих вершин на пути достижения;

$Q[N]$  – рабочий массив с элементами типа byte;

$R[N]$  – рабочий массив с элементами типа Boolean;

$a:=z:=1$  ( $a$  и  $z$  – указатели, задающие начало и конец рабочей зоны массива  $Q$ );

$q[a]:=s$ ;

В цикле по  $i$  от 1 до  $N$   $R[i]:=false$ ,  $P[i]:=-1$ ;

*Общий шаг:*

До тех пор пока  $a < 2$  в цикле рассмотрим все вершины  $k$  такие что  $u[q[a], k]=1$  (это вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ -й)

Если для вершины  $k$   $r[k]=\text{false}$  то

$z:=z+1, q[z]:=k, p[k]:=q[a], r[k]:=true;$

$a:=a+1;$

*Вывод:*

$P[k]$ .

### Формальное описание алгоритма построения наибольшего паросочетания

*Ввод:*

$a[i, j]$  – массив с элементами типа Boolean, задающий ребра в двудольном графе;

*Инициализация:*

$Nas\_u[x]$  – рабочий массив с элементами типа Boolean, содержащий насыщенные ребра, размерность массива  $x=\text{Min}(M, N)$ , элемент  $nas\_u[i]=j$  если  $i$ -ый кандидат назначен на  $j$ -ую должность. Изначально присвоить  $nas\_u[i]=-1$ ;

$Nas\_I[M], Nas\_J[N]$  – рабочие массивы с элементами типа Boolean, содержащие информацию о насыщенности вершин из множеств  $I$  и  $J$ , все элементы изначально равны false;

$u[M+N, M+N]$  – массив, представляющий собой матрицу смежности ориентированного графа, изначально заполнить нулями;

*Общий шаг:*

1. (построение начального  $M^*$  при помощи «жадного» алгоритма)

В цикле по  $i$  от 1 до  $M$

В цикле по  $j$  от 1 до  $N$

если  $(nas\_I[i]=\text{false} \text{ and } u[i, j]=1 \text{ and } nas\_J[j]=\text{false})$  то

$nas\_I[j]=\text{true}, nas\_J[i]=\text{true},$

$nas\_u[I]:=j;$

2. (построение орграфа  $G'$ )

В цикле по  $i$  от 1 до  $M$

В цикле по  $j$  от 1 до  $N$   
 если  $nas\_u[i]=j$  то  $u[i+M, j]=1$   
 иначе если  $a[i, j]=1$  то  $u[i, M+j]=1$ ;  
 3. В цикле по  $i$  от 1 до  $M$ , если  $Nas\_I[i]=false$   
 применить алгоритм перечисления вершин орграфа,  
 достижимых из вершины  $i$ . Вход:  $Nas\_I[i]$ , массив  
 $u[N+M, N+M]$ . Выход: массив  $P[k]$ .  
 4. Если среди  $P[k]$  (достижимых вершин) найдется  
 вершина  $k$  такая что ( $p[k] \neq -1$  и  $Nas\_J[k-M]=false$ ),  
 то увеличить  $M^*$ . Соответствующая цепь  $L$  (в  
 инвертированном правда виде) получается из массива  
 $P$  следующим образом  
 $l[1]:=k, t:=2$   
 В цикле пока  $l[t] \neq I$  перекрашиваем цепь  
 $[t]:=p[l[t-1]], t=t+1$   
 $nas\_I[l[t-1]]:=true$ ;  
 $nas\_J[l[1]-M]:=true$ ;  
 В цикле по  $r$  от  $t-1$  до 3  
 $u[l[r], l[r-1]]:=1$ ,  
 $u[l[r-1], l[r-2]]:=0$ ,  
 $nas\_u[l[r]]:=l[r-1]-M$ ,  
 $nas\_u[l[r-1]-M]:=-1$ ,  
 Затем перейти к п.3.  
 Иначе - выход.  
 Вывод:  
 $Nas\_u[i]$  - выдача  $M^*$ .

Схема работы алгоритма построения максимального паросочетания  
(рис.2.23.)

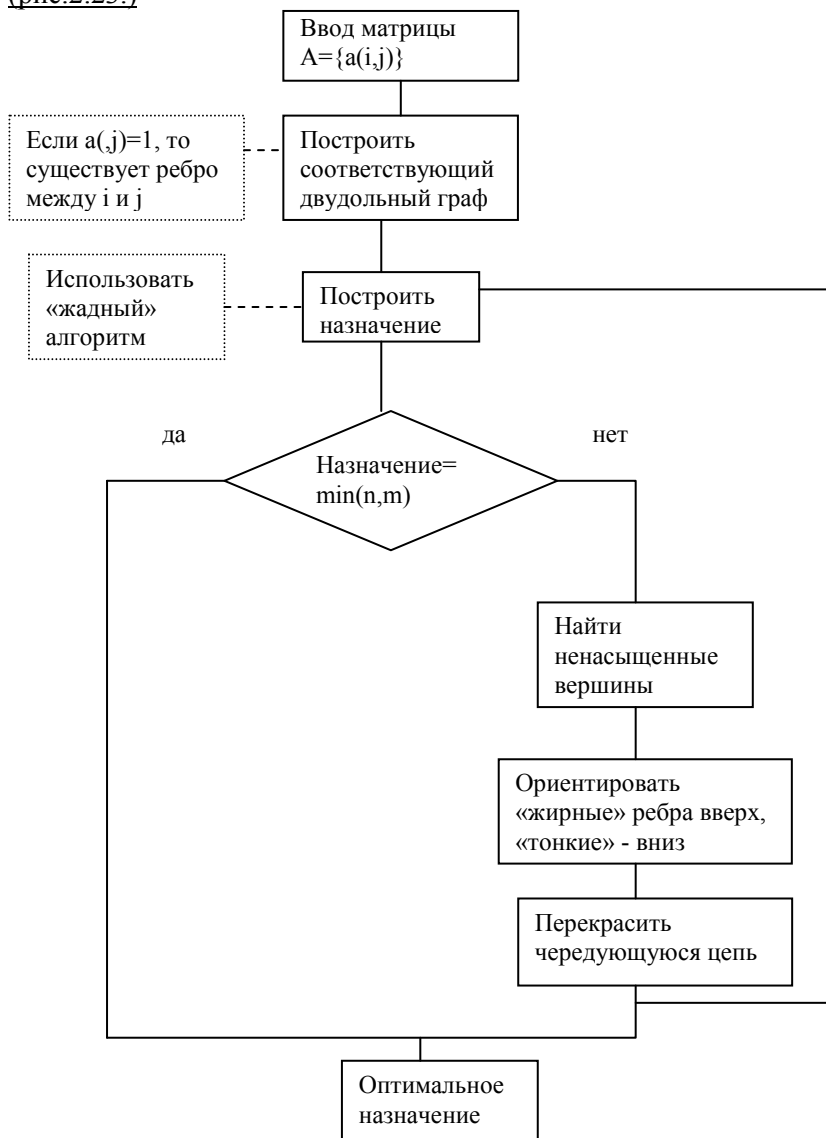


Рис. 2.23. Алгоритм построения максимального паросочетания

### ПРИМЕР

На предприятии работают пять сотрудников. В новом проекте есть шесть участков работы. При этом не все сотрудники способны квалифицированно работать на вверенном участке. Так, сотрудник №1 может работать на участках 1,2 или 4; сотрудник №2 – на участках 3 и 5; сотрудник №3 – на участке 1 и 3; сотрудник №4 – на участках 1, 4, 5 и 6; сотрудник №5 – на 3 и 6. Кого и на какие участки надо назначить, чтобы задействовать как можно большее число сотрудников?

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Ввод:

$[i,j]=$

	1'	2'	3'	4'	5'	6'
1	1	1		1		
2			1		1	
3	1		1			
4	1			1	1	1
5			1			1

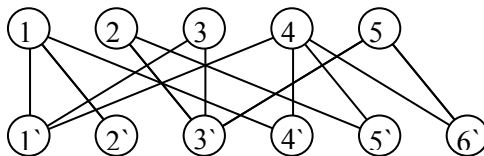


Рис. 2.24. Построение двудольного графа по условиям задачи

Инициализация:

В цикле по  $i$  от 1 до 5  $nas\_Л[i]:=false$ ,  $nas\_u[i]:=-1$ ;

В цикле по  $j$  от 1 до 6  $nas\_Л[j]:=false$ ;

$u[11,11]$  – рабочий массив, представляющий собой матрицу смежности ориентированного графа;

Общий шаг:

1. Построение начального  $M^*$  (рис.2.25.) при помощи «жадного» алгоритма.

В цикле по  $i$  от 1 до 5

В цикле по  $j$  от 1 до 6

если  $(nas\_Л[i]=false \text{ and } u[i,j]=1 \text{ and } nas\_Л[j]=false)$

то  $nas\_Л[i]:=true$ ,  $nas\_Л[j]:=true$ ,  $nas\_u[i]:=j$ ;

получим:

$Nas\_I = \{\text{true}, \text{true}, \text{false}, \text{true}, \text{true}\}$  (единственная ненасыщенная вершина в  $I$  - третья);

$Nas\_J = \{\text{true}, \text{false}, \text{true}, \text{true}, \text{false}, \text{true}\}$  (ненасыщенных вершин в  $J$  две: вторая и пятая);

$Nas\_u = \{1, 3, -1, 4, 6\}$ .

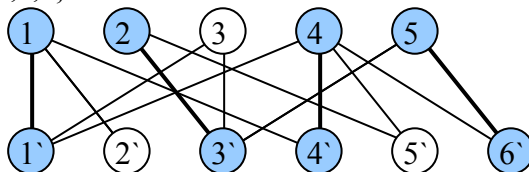


Рис. 2.25. Построение первоначального паросочетания

Жирными линиями выделены ребра, вошедшие в  $M^*$ , насыщенные вершины закрашены.

## 2. Построение орграфа $G'$ .

В цикле по  $i$  от 1 до 5

В цикле по  $j$  от 1 до 6

Если  $nas\_u[i]=j$  то  $u[i+5,j]=1$

иначе если  $a[i,j]=1$  то  $u[i,5+j]=1$

получим: массив  $u[11,11]=$

и соответствующий ориентированный граф (рис.2.26.).

Таблица 2.13. Возможные назначения

	1 (1)	2 (2)	3 (3)	4 (4)	5 (5)	1' (6)	2' (7)	3' (8)	4' (9)	5' (10)	6' (11)
1(1)							1		1		
2(2)										1	
3(3)						1		1			
4(4)						1				1	1
5(5)								1			
1'(6)	1										
2'(7)											
3'(8)		1									
4'(9)				1							
5'(10)											
6'(11)					1						



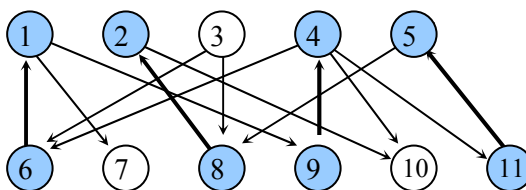


Рис. 2.26. Построение паросочетаний

3. В цикле по  $i$  от 1 до 5, если  $nas\_I[i]=\text{false}$  [F], применяем алгоритм перечисления вершин орграфа, достижимых из вершины  $i$ . Входные данные – массив  $u$  и вершина  $i=3$ .

*Инициализация:*

$P[11]$  – массив, в котором записаны номера предыдущих вершин на пути достижения

$Q[11]$  – рабочий массив с элементами типа byte

$R[11]$  – рабочий массив с элементами типа boolean

$a:=z:=1$  ( $a$  и  $z$  – указатели, задающие начало и конец рабочей зоны  $Q$ )

$q[1]:=3$

В цикле по  $i$  от 1 до 11  $r[i]:=\text{false}$ ,  $p[i]:=-1$

Таблица 2.14. Инициализация данных

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
Массив Q	3										
Массив P	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

*Общий шаг:*

До тех пор пока  $a \leq z$

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[3,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на первой итерации за  $q[1]$ , т.е. за вершиной 3). Оно выполняется для

$k=6$ : если  $r[6]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=z+1=2$ ;  $q[2]:=6$ ;  $p[6]:=q[1]=3$ ;  $r[6]:=true$  [T].  
 $k=8$ : если  $r[8]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=z+1=3$ ;  $q[3]:=8$ ;  $p[8]:=q[1]=3$ ;  $r[8]:=true$ .  
 $a:=a+1=1+1=2$

Получим (значения указателей  $a$  и  $z$  подчеркнуты):

Таблица 2.15. Первый шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	F	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F
Массив Q	3	<u>6</u>	<u>8</u>								
Массив P	-1	-1	-1	-1	-1	3	-1	3	-1	-1	-1

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[6,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на второй итерации за  $q[2]$ , т.е. за вершиной 6). Оно выполняется для

$k=1$ : если  $r[1]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=3+1=4$ ;  $q[4]:=1$ ;  $p[1]:=q[2]=6$ ;  $r[1]:=true$ ;  
 $a:=a+1=2+1=3$ .

Получим:

Таблица 2.16. Второй шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	T	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F
Массив Q	3	6	<u>8</u>	<u>1</u>							
Массив P	6	-1	-1	-1	-1	3	-1	3	-1	-1	-1

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[8,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[3]$ , т.е. за вершиной 8). Оно выполняется для

$k=2$ : если  $r[2]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=4+1=5$ ;  $q[5]:=2$ ;  $p[2]:=q[3]=8$ ;  $r[2]:=true$ ;  
 $a:=a+1=3+1=4$ .

Получим:

Таблица 2.17. Третий шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	T	T	F	F	F	T	F	T	F	F	F
Массив Q	3	6	8	<u>1</u>	<u>2</u>						
Массив P	6	8	-1	-1	-1	3	-1	3	-1	-1	-1

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[1,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[4]$ , т.е. за вершиной 1). Оно выполняется для

$k=7$ : если  $r[7]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=5+1=6$ ;  $q[6]:=7$ ;  $p[7]:=q[4]=1$ ;  $r[7]:=true$ ;  
 $k=9$ : если  $r[9]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=6+1=7$ ;  $q[7]:=9$ ;  $p[9]:=q[4]=1$ ;  $r[9]:=true$ ;  
 $a:=a+1=4+1=5$ .

Получим:

Таблица 2.18. Четвертый шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	T	T	F	F	F	T	T	T	T	F	F
Массив Q	3	6	8	1	<u>2</u>	7	<u>9</u>				
Массив P	6	8	-1	-1	-1	3	1	3	1	-1	-1

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[2,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[5]$ , т.е. за вершиной 2). Оно выполняется для

$k=10$ : если  $r[10]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=7+1=8$ ;  $q[8]:=10$ ;  $p[10]:=q[5]=2$ ;  $r[10]:=true$ ;  
 $a:=a+1=5+1=6$ .

Получим:

Таблица 2.19. Пятый шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	T	T	F	F	F	T	T	T	T	tT	F
Массив Q	3	6	8	1	2	<u>7</u>	9	<u>10</u>			
Массив P	6	8	-1	-1	-1	3	1	3	1	2	-1

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[7,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[6]$ , т.е. за вершиной 7). Оно ни для каких  $k$  не выполняется  
 $a:=a+1=6+1=7$ .

Получим:

Таблица 2.20. Шестой шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T	F
Массив Q	3	6	8	1	2	7	<u>9</u>	<u>10</u>			
Массив P	6	8	-1	-1	-1	3	1	3	1	2	-1

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[9,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[7]$ , т.е. за вершиной 9). Оно выполняется для.

$k=4$ : если  $r[4]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=8+1=9$ ;  $q[9]:=4$ ;  $p[4]:=q[7]=9$ ;  $r[10]:=true$ .  
 $a:=a+1=7+1=8$

Получим:

Таблица 2.21. Седьмой шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Масси в R	Т	Т	F	Т	F	Т	Т	Т	Т	Т	F
Масси в Q	3	6	8	1	2	7	9	<u>10</u>	<u>4</u>		
Масси в P	6	8	-1	9	-1	3	1	3	1	1	-1

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[10,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[8]$ , т.е. за вершиной 10). Оно ни для каких  $k$  не выполняется  
 $a:=a+1=8+1=9$ .

Получим:

Таблица 2.22. Восьмой шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Масси в R	Т	Т	F	Т	F	Т	Т	Т	Т	Т	F
Масси в Q	3	6	8	1	2	7	9	10	<u>4</u>		
Масси в P	6	8	-1	9	-1	3	1	3	1	1	-1

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[4,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[9]$ , т.е. за вершиной 4). Оно выполняется для  
 $k=6$ : если  $r[6]=\text{false}$  (не выполняется) ...  
 $k=10$ : если  $r[10]=\text{false}$  (не выполняется) ...  
 $k=11$ : если  $r[11]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=9+1=10$ ;  $q[10]:=11$ ;  $p[11]:=q[9]=4$ ;  $r[11]:=true$ ;  
 $a:=a+1=9+1=10$ .

Получим:

Таблица 2.23. Девятый шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	T	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
Массив Q	3	6	8	1	2	7	9	10	4	<u>11</u>	
Массив P	6	8	-1	9	-1	3	1	3	1	1	4

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[11,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[10]$ , т.е. за вершиной 11). Оно выполняется для

$k=5$ : если  $r[11]=\text{false}$  (выполняется) то  
 $z:=10+1=11$ ;  $q[11]:=5$ ;  $p[5]:=q[10]=11$ ;  $r[5]:=true$ ;  
 $a:=a+1=10+1=11$ .

Получим:

Таблица 2.24. Десятый шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
Массив Q	3	6	8	1	2	7	9	10	4	11	<u>5</u>
Массив P	6	8	-1	9	11	3	1	3	1	1	4

В цикле по  $k$  от 1 до 11 проверяем условие:  $u[5,k]=1$  (ищем вершины, непосредственно следующие за  $q[a]$ , на этой итерации за  $q[11]$ , т.е. за вершиной 5). Оно выполняется для  $k=8$ : если  $r[8]=\text{false}$  (не выполняется).

$a:=a+1=11+1=12$ .

Получим:

Таблица 2.25. Одиннадцатый шаг решения задачи

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Массив R	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
Массив Q	3	6	8	1	2	7	9	10	4	11	<u>5</u>
Массив P	6	8	-1	9	11	3	1	3	1	1	4

Указатель  $a$  обогнал указатель  $z$ , на этом алгоритм завершается. Как видно из содержимого массива P, из вершины №3 достижимы все вершины графа, кроме нее самой. Причем такая запись позволяет не только определить собственно достижимость, но и проследить весь путь до соответствующей вершины.

*Вывод:*

$P[k] := \{6, 8, -1, 9, 11, 3, 1, 3, 1, 1, 4\}$

4. Если среди  $p[k]$  (достижимых вершин) найдется вершина  $k$  такая, что ( $p[k] \neq -1$  и  $nas\_J[k-5] = \text{false}$ ), то надо увеличить  $M^*$ , при этом  $p[i..k]$  будет увеличивающей относительно  $M^*$  цепью в графе G. Таких вершин две: 7-я и 10-я. Первой будет найдена 7-я. Соответствующая цепь получается из массива  $P[k] := [3-6-1-7]$ . Перекрашиваем ее:

$u[3,6] := 1$ ,  $u[6,1] := 0$ ,  $u[1,7] := 1$ ,  $nas\_J[3] := \text{true}$ ,  $nas\_J[7-5] = nas\_J[2] := \text{true}$ ,

$nas\_u[3] = 6-5 := 1$ ,  $nas\_u[6-1] = nas\_u[5] := 6$ ,  $nas\_u[1] := -1$ ,  $nas\_u[1] = 7-5 := 2$  и переходим к п.3.

5. В цикле по  $i$  от 1 до 5 если  $nas\_J[i] = \text{false}$  то..., но таких элементов уже нет, поэтому работа алгоритма завершается (рис.2.27.).

*Вывод:*

$Nas\_u = \{2, 3, 1, 4, 5\}$

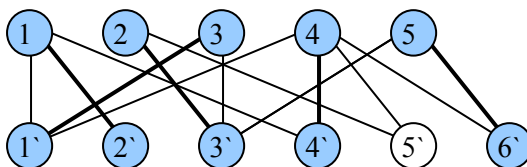


Рис. 2.27. Итоговое назначение

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Среди 12 работников есть 6 мужчин: 2 инженера, 2 технолога и 2 прораба и 6 женщин тех же специальностей. Нужно сформировать максимальное число групп по 2 человека (1 мужчина и 1 женщина, разных специальностей), с учетом их психологической совместимости. Известно, что инженер Иванов и прораб Федоров смогут работать только с кем-то из технологов, технолог Сидоров – только с кем-то из прорабов, а технолог Петров – напротив, с прорабами работать не может. Подразумевается, что остальные работники не имеют предпочтений.

### 2.2.2. Оптимальные назначения

Обращаясь к сформулированной в предыдущей задаче проблеме, ребрам двудольного графа можно поставить в соответствие веса, обозначающие степень полезности или вредности данного кандидата на этой должности. Такая ситуация будет больше соответствовать прикладным целям, когда рассматривается проблема получения оптимальных назначений с точки зрения их итоговой эффективности.

#### Возможные типы задач

- Максисуммная постановка. Даны  $M$  кандидатов на  $N$  должностей, и матрица  $A[i, j]$ , которая характеризует степень полезности  $i$ -го кандидата при назначении его на  $j$ -ю должность. Найти назначение, максимизирующее суммарную полезность.



- Минисуммная постановка. Даны  $M$  кандидатов на  $N$  должностей, и матрица  $A[i,j]$ , которая характеризует степень вредности  $i$ -го кандидата при назначении его на  $j$ -ю должность. Найти назначение, минимизирующее суммарную вредность.

Ясно, что обе задачи решаются одним алгоритмом. В первой задаче нужно максимизировать:  $f = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a[i,j] \cdot x[i,j]$ .

Изменим матрицу  $A$  на  $A'$  следующим образом: найдем в ней максимальный элемент (обозначим его  $r$ ) и вычтем из него каждый элемент:  $a'[i,j] = r - a[i,j]$ . Если  $A$  состояло из неотрицательных чисел, то  $A'$  сохраняет это свойство.

$$f' = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a'[i,j] \cdot x[i,j] = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (r - a[i,j]) \cdot x[i,j] = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N r \cdot x[i,j] - f = \\ = \text{const} - f.$$

Ясно, что максимизируя  $f$ , мы минимизируем  $f'$  и наоборот. Поэтому рассмотрим одну из задач, например минисуммную.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дан двудольный граф  $G_{M,N}$  с взвешенными ребрами и матрицей весов  $A[i,j]$ . Найти паросочетание  $M^*$  такое, что  $\sum_{u_{ij} \in M^*} a[i,j]$  будет

минимальна.

### ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

#### Основная идея

Суть алгоритма в том, чтобы привести матрицу по строкам и столбцам с целью получения наибольшего числа нулей. Ясно, что если в задаче минимизации с неотрицательной матрицей удастся провести «нулевое» назначение (только по тем клеткам, где  $b[i,j]=0$ ), то будет достигнуто значение функционала  $f=0$ , и меньше

быть не может. Если нет, то надо построить двудольный граф, где ребра соответствуют нулям приведенной матрицы. Затем найти наибольшее паросочетание, используя метод чередующихся цепей. Если оно оставляет некоторые вершины ненасыщенными, то его следует увеличить. Для этого преобразовать матрицу и затем повторно пытаться строить наибольшее паросочетание. И так до тех пор, пока все вершины не станут насыщенными.

### Возможные сложности

Как преобразовать матрицу, чтобы стало возможным увеличение полученного паросочетания?

### Способы преодоления

Ранее было показано, что минимум в задаче, где из всех элементов строки (или столбца) вычитается некоторое число, достигается на той же перестановке, что и в исходной задаче. Это свойство остается верным, если заменить вычитание сложением. Введем так называемую операцию Егервари. Пусть  $I' \in I$ ,  $J' \in J$  и  $\delta$  – число. Будем говорить, что к матрице применяется операция Егервари  $E(I', J', \delta)$ , если из каждой строки  $i \in I'$  вычитается  $\delta$ , а к каждому столбцу  $j \in J'$  прибавляется  $\delta$ . Эта операция не меняет оптимальной перестановки. Кроме того, элементы матрицы на пересечении строк из  $I'$  и столбцов  $J'$  не меняются, так как из них вычитается и к ним прибавляется одно и то же число  $\delta$ .

Найдем множества вершин, достижимых из ненасыщенных вершин, принадлежащих множеству  $I$ . Пусть  $I'$  и  $J'$  – такие множества вершин, входящие соответственно в  $I$  и  $J$ . Среди элементов  $b[i, j]$ , где  $i \in I'$ , а  $j \in J'' = J \setminus J'$ , найдем элемент минимального веса, пусть это  $b[i, j] = \delta$ . Проведем над матрицей операцию Егервари  $E(I', J', \delta)$ , после чего станет возможно повторное приведение матрицы по строкам и/или столбцам, а полученное на основе такой матрицы паросочетание окажется больше предыдущего.

Описанный ниже алгоритм решения задачи о назначениях называется венгерским, потому что он основан на идеях работы венгра Егервари, написанной еще в 1931 г.

Схема работы алгоритма показана на рис.2.28.



Рис. 2.28 .Схема работы алгоритма Егервари

## Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

$a[i, j]$  – массив, задающий степень вредности (ну или размер зарплаты) при назначении  $i$ -ого кандидата на  $j$ -ую должность;

*Инициализация:*

$dob$  – рабочая переменная, хранящая сумму коэффициентов приведения по строкам и столбцам;

$cost\_min$  – минимальная суммарная вредность (размер зарплаты) при произведенных назначениях;

$mass\_I[i], mass\_J[j]$  – список строк принадлежит  $I'$  и столбцов  $\in J'$ ;

$Nas\_u[i, j]$  – найденное на очередной итерации максимальное паросочетание;

$Nas\_I[M], Nas\_J[N]$  – рабочие массивы с элементами типа boolean, содержащие информацию о насыщенности вершин из множеств  $I$  и  $J$ , все элементы изначально равны false;

*Общий шаг:*

1. Привести массив  $a[i, j]$

в цикле по  $i$  от 1 до  $M$  (по строкам):

    в цикле по  $j$  от 1 до  $N$  найти мин. элемент  $min[i]$

    в цикле по  $j$  от 1 до  $N$   $a[i, j] := a[i, j] - min[i]$

$dob := dob + min[i];$

в цикле по  $j$  от 1 до  $N$  (по столбцам):

    в цикле по  $i$  от 1 до  $M$  найти мин. элемент  $min[j]$

        в цикле по  $i$  от 1 до  $M$   $a[i, j] := a[i, j] - min[j]$

$dob := dob + min[j];$

$cost\_min := dob;$

2. Использовать алгоритм нахождения максимального числа паросочетаний, ввод:  $a[i, j]$ , вывод  $Nas\_u[i], u[i, j]$ .

3. Выбрать ненасыщенные вершины и сформировать множество  $I'$  и  $J'$ .

3.1. В цикле по  $i$  от 1 до  $M$  если  $Nas\_I[i] = false$  то использовать алгоритм нахождения вершин,

```

ДОСТИЖИМЫХ ИЗ ДАННОЙ, ВВОД:  $Nas\_I[i], u[i, j]$ ;
ВЫВОД:  $P_i[k]$ ).
3.2. На основе всех  $P_i[k]$  сформировать  $p[k]$  -
указать в нем номера вершин таких что  $P_i[k] \neq -1$ 
хотя бы для какого-нибудь  $i$ .
3.3.  $i:=1, j:=1$ .
    В цикле по  $k$  от 1 до  $N+M$  если  $P[k] \neq -1$ 
        Если  $k < M$  то  $mass\_I[i]:=k, i:=i+1$ 
    иначе  $mass\_J[j]:=k-M, j:=j+1,$ 
         $i\_max:=i, j\_max:=j$ ;
3.4. Среди элементов  $b[i, j]$ , где  $i \in mass\_I[i]$ , а  $j \notin$ 
 $mass\_J[j]$  определить min.
     $flag:=true$ ;
    В цикле по  $i$  от 1 до  $i\_max$ 
        В цикле по  $j$  от 1 до  $N$ 
            В цикле по  $j1$  от 1 до  $j\_max$ 
                if  $mass\_J[j1]=j$  then  $flag:=false$ ;
            if  $(min < a[mass\_I[i], j] \text{ and } flag = true)$ 
then
     $min:=a[mass\_I[i], j]$ ;
ВЫВОД:
 $Nas\_u[i]$  - массив, задающий назначения;
 $cost\_min$  - значение функционала (суммарная
зарплата сотрудников при таких назначениях.

```

### Анализ сложности

Известны более экономные алгоритмы, но они основаны на теории потоков, которая в данном курсе не рассматривается.

### *ПРИМЕР*

Назначить имеющихся сотрудников на вакантные должности так, чтобы суммарный фонд заработной платы был минимальным. Размер оклада (в тыс.руб в месяц) приведен в таблице.

Таблица 2.26. Матрица заработных плат сотрудников компании

	Должн. 1	Должн. 2	Должн. 3	Должн. 4	Должн. 5
Канд. 1	8	7	5	3	4
Канд. 2	5	4	4	2	3
Канд. 3	8	2	7	4	4
Канд. 4	5	6	5	4	4
Канд. 5	8	3	7	9	4

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Ввод:  $a[i,j]$ ;

Общий шаг:

1. Привести матрицу по строкам (рис. 2.29, а), а затем и по столбцам (рис. 2.29, б).

	Д 1	Д 2	Д 3	Д 4	Д 5	Const приве дения
Канд. 1	5	4	2	0	1	3
Канд. 2	3	2	2	0	1	2
Канд. 3	6	0	5	2	2	2
Канд. 4	1	2	1	0	0	4
Канд. 5	5	0	4	6	1	3

а)

	Д 1	Д 2	Д 3	Д 4	Д 5
Канд. 1	4	4	1	0	1
Канд. 2	2	2	1	0	1
Канд. 3	5	0	4	2	2
Канд. 4	0	2	0	0	0
Канд. 5	4	0	3	6	1
Const приведе ния	1	0	1	0	0

б)

Рис. 2.29. Приведение матрицы по строкам и столбцам

2. Построить двудольный граф на основе нулевых назначений и построить начальное паросочетание (жадным алгоритмом, рис. 2.30,а). Увеличивающей относительно  $M^*$  цепи нет, таким образом найдено наибольшее паросочетание.
3. Наибольшее паросочетание оставляет ненасыщенными две вершины: 2 и 5 (рис. 2.30,б). Множество вершин, достижимых из 2 и 5:  
для  $s=2$  такое множество  $\{4, 1\}$

для  $s=5$  такое множество  $\{2',3\}$

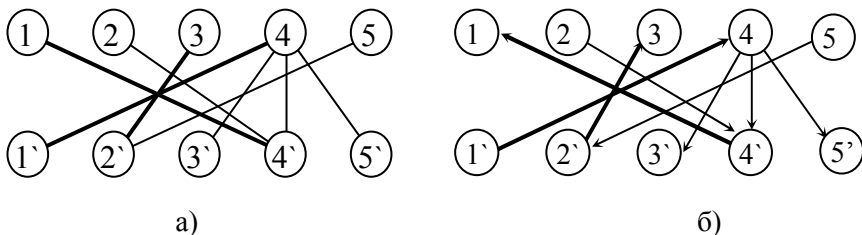


Рис. 2.30. Начальное паросочетание

Т.о. множество  $I'=\{1,3\}$  и  $J'=\{2',4'\}$  (рис. 2.31,а). Среди элементов  $b[i,j]$ , где  $i \in I'$ , а  $j \in J'=\mathcal{J} \setminus I'$  (рис. 2.31, б), найти элемент минимального веса, это  $b[1,3]=1$ .

	Д 1	Д 2	Д 3	Д 4	Д 5
Канд. 1	4	4	1	0	1
Канд. 2	2	2	1	0	1
Канд. 3	5	0	4	2	2
Канд. 4	0	2	0	0	0
Канд. 5	4	0	3	6	1

а)

	Д 1	Д 2	Д 3	Д 4	Д 5
Канд. 1	4	4	1	0	1
Канд. 2	2	2	1	0	1
Канд. 3	5	0	4	2	2
Канд. 4	0	2	0	0	0
Канд. 5	4	0	3	6	1

б)

Рис. 2.31. Поиск элемента минимального веса

4. Проведем над матрицей операцию Егервари  $E(I',J',\delta)$  (рис. 2.32,а), после чего станет возможным повторное приведение матрицы по 2-ой и 5-ой строке (рис. 2.32,б). Возврат к п.3.

5. На основе матрицы (рис. 2.32,б) строим паросочетание, максимальное получается сразу, «жадным» алгоритмом (рис. 2.33,а). Таким образом, получено назначение  $(I, J)$  в виде одномерного массива  $Nas_u=\{3,4,2,1,5\}$  (на рис. 2.33,б) для наглядности представлено двухмерное отображение). Если это назначение обозначить кружками в исходной матрице, вокруг элементов  $(1,3)$ ,  $(2,4)$ ,  $(3,2)$ ,  $(4,1)$  и  $(5,5)$ , то сумма элементов в кружках окажется равна 18. Это и есть значение функционала, соответствующее оптимальному назначению в исходной задаче.

Это же число в ходе алгоритма хранится в переменной `cost_min`, и равно сумме всех констант приведения.

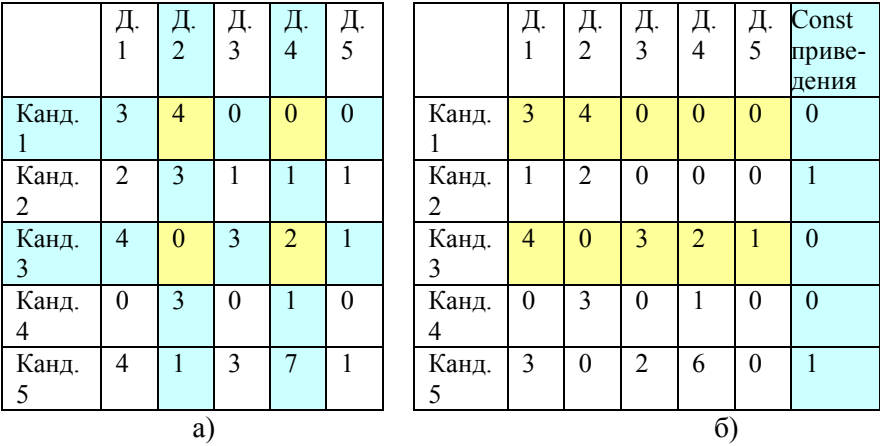


Рис. 2.32. Операция Еггвари

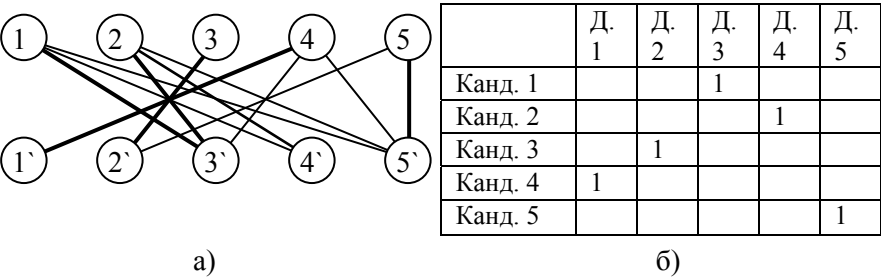


Рис. 2.33. Вывод результата

Вывод:  
`Nas_u[i];`  
`cost_min=18.`

### ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Необходимо закрепить за шестью участками начальников цехов, так чтобы итоговая эффективность работы была



максимальна. Итоговая эффективность определяется объемом выпускаемой продукции. Ожидаемый объем выпуска продукции на участках при условии назначения сотрудников имеющегося штата работников на эти должности приведен в таблице (в тыс. шт. в месяц).

Таблица 2.27. Матрица объемов выпускаемой продукции сотрудниками предприятия

	Участок 1	Участок 2	Участок 3	Участок 4	Участок 5	Участок 6
Сотр. 1	12	11	10	8	14	6
Сотр. 2	13	8	6	8	8	9
Сотр. 3	11	9	14	3	15	8
Сотр. 4	5	7	12	8	6	10
Сотр. 5	8	12	10	7	6	11
Сотр. 6	9	11	6	12	9	10

### 2.2.3. Назначения на критичный участок

Изначально условия этой задачи формулируются идентично задаче, поставленной в пункте 2.2.2., за исключением того, что оптимизируемый функционал есть не сумма эффективностей (вредности) каждого назначения, а минимум среди эффективностей, который надо максимизировать (или максимум, который надо минимизировать). Это соответственно минимаксная и максиминная постановки.

#### *Возможные типы задач*

- Минимаксная постановка. Имеется поточная линия, на которой  $N$  человек выполняют  $M$  операций (при этом один человек выполняет одну операцию).  $a[i, j]$  – время, которое  $i$ -й человек затрачивает на  $j$ -ю операцию. При назначении  $i$ -й человек выполняет  $p(i)$ -ю операцию, причем человек  $i$ , такой что  $a[i, p[i]] = \max a[i, p[i]]$  работает медленнее всех и определяет скорость всей поточной линии. Нужно найти назначение, чтобы минимизировать  $\max a[i, p[i]]$  по всем возможным назначениям.

- **Максиминная постановка.** Даны  $M$  кандидатов на  $N$  должностей, и матрица  $A[i,j]$ , которая характеризует размер зарплаты  $i$ -го кандидата при назначении его на  $j$ -ю должность. Один человек занимает только одну должность. Найти назначение, при котором самая маленькая получаемая зарплата окажется максимально возможной.

Если рассматривать данную задачу в рамках теории графов, то по аналогии с двумя предыдущими задачами о назначениях получим в качестве модели двудольный граф, ребра которого имеют неотрицательные веса.

Представляется вполне очевидным, что обе задачи могут быть решены одним алгоритмом. Обоснование этого утверждения идентично описанному в задаче, поставленной в пункте 2.2.2. Рассмотрим максиминную постановку.

### *ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ*

**Дан двудольный граф  $G_{M,N}$  с взвешенными ребрами,  $A[i,j]$  – матрица весов. Найти паросочетание  $M^*$  такое что  $\min_{u_j \in M^*} a[i, j]$  будет максимален по всем  $M^*$ .**

### ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

#### Основная идея

Составить первичное назначение. Составить соответствующую матрицу, решить для нее задачу о наибольшем паросочетании, и если по-прежнему удастся найти полное паросочетание, снова попробовать видоизменить матрицу, запомнив значение функционала. Этот алгоритм указал Гросс.

#### Возможные сложности

1. Как составить первое паросочетание?
2. Как видоизменять матрицу, чтобы следующий результат (значение функционала) был не хуже предыдущего?
3. Когда завершать процесс улучшения значения функционала?

### Способы преодоления

1. Для начального назначения выбрать диагональные элементы матрицы, т.е. 1-го работника назначить на 1-ю должность, 2-го на вторую и т.д.
2. Порождение матрицы В производится по правилу:  $b[i,j]=1$ , если размер зарплаты при назначении  $i$ -го работника на  $j$ -ю должность больше найденного на предыдущем шаге значения функционала и  $b[i,j]=0$  в противном случае.
3. Признаком окончания итерационного процесса является невозможность на определенном этапе построить полное паросочетание. Тогда лучший результат и соответствующее назначение найдены на предыдущем шаге.

### Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

$A[i, j]$ ;

*Инициализация:*

$p[M]$  – начальное назначение, присвоить  
 $p:=\{1, 2, \dots, M\}$  (число на  $i$ -м месте показывает номер работы, на которую назначен  $i$ -й человек);

$f$  – значение функционала, присвоить  $f:=\text{Min}(a[i, i])$  (минимальный элемент на главной диагонали);

*Общий шаг:*

1. Породить матрицу В  
    в цикле по  $i$  от 1 до  $M$   
        в цикле по  $j$  от 1 до  $N$   
            если  $a[i, j] > f$  то  $b[i, j]=1$  иначе  
 $b[i, j]=0$
2. Использовать алгоритм нахождения максимального паросочетания, ввод-матрица В, вывод-матрица  $Nas\_u$ .
3. Проверить, является ли паросочетание полным  
     $f\_new:=B$  (большое число);  
    в цикле по  $i$  от 1 до  $M$   
        если  $nas\_u[i] \neq -1$  то  
            если  $a[i, nas\_u[i]] < f\_new$  то

```

f_new:= a[i,nas_u[i]]
    иначе выход (паросочетание неполное и
лучший результат был получен ранее).
f:=f_new (паросочетание полное и обновляем
значение функционала и лучшее назначение)
    в цикле по i от 1 до M p[i]:= nas_u [i]
Вывод:
P; f.

```

Схема работы алгоритма приведена на рис.2.34.

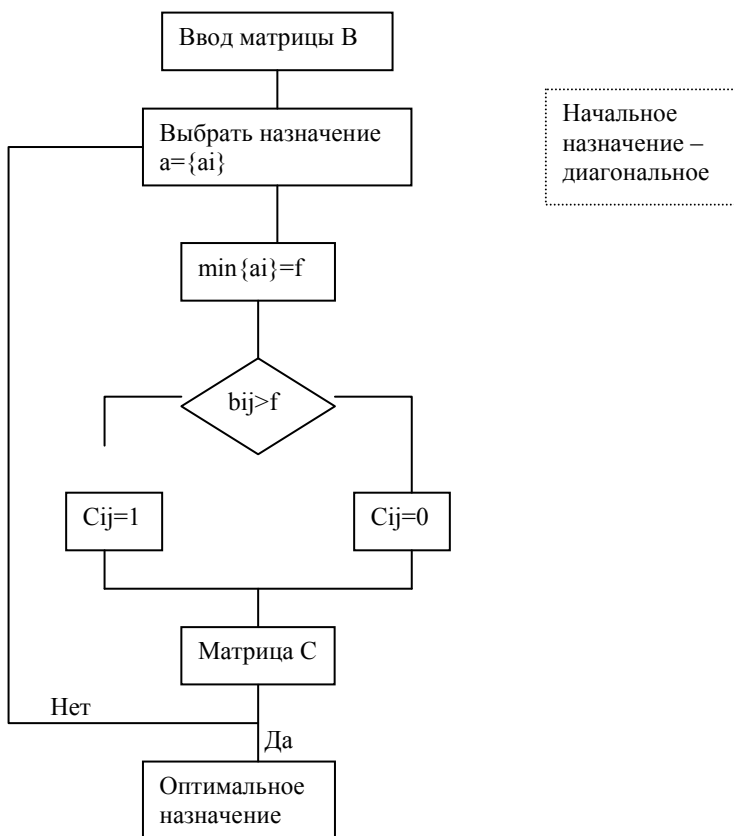


Рис. 2.34. Схема работы алгоритма по решению задачи о назначении на критичный участок

### ПРИМЕР

В задаче для самостоятельной работы к п. 2.2.2. найти назначение, при котором самый маленький размер оплаты труда окажется максимально возможным.

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Ввод:

$A[i,j]$  (рис.2.35.)

	1`	2`	3`	4`	5`	6`
1	12	11	10	8	14	6
2	13	8	6	8	8	9
3	11	9	14	3	15	8
4	5	7	12	8	6	10
5	8	12	10	7	6	11
6	9	11	6	12	9	10

Рис. 2.35. Матрица  $A[i,j]$

Инициализация:

$f := B$  (большое число);

в цикле по  $i$  от 1 до 6

$p[i] := i$ ;

если  $a[i,i] < f$  то  $f = a[i,i]$ ,  $i := i + 1$ ;

получим:

$p[i] = \{12, 8, 14, 8, 6, 10\}$ ;

$f = 6$ ;

Общий шаг:

1-я итерация

1. В цикле по  $i$  от 1 до 6

в цикле по  $j$  от 1 до 6

если  $a[i,j] > 6$  то  $b[i,j] = 1$  иначе  $b[i,j] = 0$

(получим матрицу на рис. 2.36.).

	1'	2'	3'	4'	5'	6'
1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	0	1	1	1
3	1	1	1	0	1	1
4	0	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	0	1
6	1	1	0	1	1	1

Рис. 2.36. Первая итерация

2. Использовать алгоритм нахождения максимального паросочетания, ввод – матрица В, вывод –  $Nas\_u$ .  
 $Nas\_u = \{1, 2, 3, 4, 6, 5\}$ .

3.  $f\_new := B$  (большое число);

В цикле по  $i$  от 1 до 6

если  $nas\_u[i] \neq -1$  то

если  $a[i, nas\_u[i]] < f\_new$  то  $f\_new := a[i, nas\_u[i]]$

при  $i=6$  находится новый минимум:  $a[6, 5] = 9$

иначе .. (не встречается по всем  $i$ )

$f := 9$

в цикле по  $i$  от 1 до  $M$   $p[i] := nas\_u[i]$

$p[i] := \{1, 2, 3, 4, 6, 5\}$

## 2-я итерация

1. В цикле по  $i$  от 1 до 6

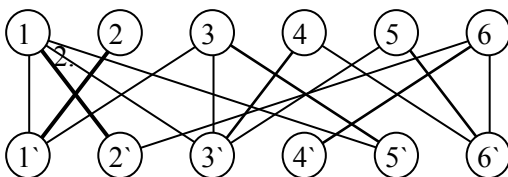
в цикле по  $j$  от 1 до 6

если  $a[i, j] > 9$  то  $b[i, j] = 1$  иначе  $b[i, j] = 0$

(получим матрицу на рис. 2.37, а)

	1'	2'	3'	4'	5'	6'
1	1	1	1	0	1	0
2	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	1	1	0	0	1
6	0	1	0	1	0	1

а)



б)

Рис. 2.37. Вторая итерация

2. Использовать алгоритм нахождения максимального паросочетания, ввод – матрица  $B$ , вывод –  $Nas\_u$ .

$Nas\_u = \{2, 1, 5, 3, 6, 4\}$ , (рис. 2.37, б);

3.  $f\_new := B$  (большое число);

В цикле по  $i$  от 1 до 6

если  $nas\_u[i] \neq -1$  то

если  $a[i, nas\_u[i]] < f\_new$  то  $f\_new := a[i, nas\_u[i]]$

при  $i=1$  находится новый минимум:  $a[1, 2] = 1$

иначе .. (не встречается по всем  $i$ )

$f := 11$ ;

В цикле по  $i$  от 1 до  $M$   $p[i] := nas\_u[i]$

$p[i] := \{2, 1, 5, 3, 6, 4\}$

### 3-я итерация

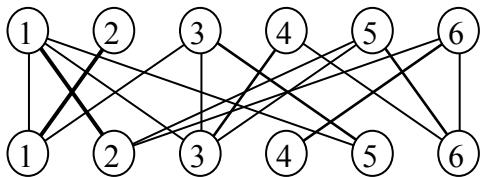
1. В цикле по  $i$  от 1 до 6

в цикле по  $j$  от 1 до 6

если  $a[i, j] > 11$  то  $b[i, j] = 1$  иначе  $b[i, j] = 0$

(получим матрицу на рис. 2.38, а)

	1'	2'	3'	4'	5'	6'
1	1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	1



а)

б)

Рис. 2.38. Третья итерация

4. Использовать алгоритм нахождения максимального

паросочетания, ввод – матрица  $B$ , вывод –  $Nas\_u$ .  $Nas\_u = \{5, 1, 3, -1, 2, 4\}$  (рис. 2.38, б)

3.  $f\_new := B$  (большое число)  
в цикле по  $i$  от 1 до 6  
если  $nas\_u[i] \neq -1$  то ... (уже неважно)  
иначе выход (происходит при  $i=4$ )

*Вывод:*

$P = \{5, 1, 3, -1, 2, 4\};$

$F = 11.$

### **ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

В задаче для самостоятельной работы п.2.2.2. найти назначение, при котором самый большой размер оплаты труда окажется минимально возможным.

#### **2.2.4. Минимальное число покрывающих назначений**

В предыдущих задачах одним из ограничений при поиске оптимального назначения был тот факт, что каждый сотрудник занимает только одну (или не более одной) должность и, наоборот, на каждую должность может быть назначен только один (или не более одного) сотрудник. На самом деле это условие не всегда обязательно, совмещение должностей – вещь вполне обыденная. Гораздо чаще должности не имеют решающего значения, а речь идет о выполнении того или иного круга обязанностей. Причем требуется подобрать из имеющихся претендентов штат персонала таким образом, чтобы для каждой обязанности нашелся человек, способный ее исполнять.

#### **НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ**

Для произвольного неориентированного графа можно вести понятие покрытия. При этом считается, что:

любая вершина покрывает

- саму себя,
- смежные вершины,
- инцидентные ребра;

любое ребро покрывает



- само себя,
- смежные ребра,
- инцидентные вершины.

**Внешне устойчивое множество вершин** – множество вершин, покрывающих все вершины графа.

**Вершинное число внешней устойчивости** – минимальная мощность множества вершин, покрывающих все вершины графа.

### *ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ*

Дан двудольный граф  $G_{M,N}$ . Найти множество вершин минимальной мощности, покрывающее все вершины графа.

### ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

#### Необходимые уточнения

В данном случае двудольность графа будет иметь значение только при выборе способа задания его ребер. В общем случае приводимый ниже алгоритм вполне применим и для произвольных графов.

#### Основная идея

Построить матрицу  $A[i,j]$ , задающую ребра графа:

- если граф двудольный:  $a[i,j]=1$ , если  $i$ -я вершина графа инцидентна  $j$ -й, и  $a[i,j]=0$  в противном случае. Затем при помощи алгебры логики найти наименьшее число строк, покрывающих все столбцы этой матрицы;
- если граф обычный:  $a[i,j]=1$ , если  $i$ -я вершина смежна с  $j$ -й,  $a[i,i]=1$  (вершина покрывает саму себя), все остальные  $a[i,j]=0$ . Выбрать строки, покрывающие все столбцы матрицы, т.е. такие, что хотя бы в одной из выбранных строк содержится «1» в каждом из существующих столбцов.

#### Возможные сложности

Вопрос один: собственно как выбирать такие строки?

### Способы преодоления

По сути переборным способом, опирающимся на алгебру логики. Составить логическое выражение в виде произведения сумм логических переменных, соответствующих строчкам матрицы. Каждая сумма представляет собой сложение переменных, которые в данной строке содержат «1».

### Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

$A[M, N]$  (для двудольного графа);

$A[N, N]$  (для обычного графа – это матрица смежности с единичками по главной диагонали).

*Инициализация:*

Получить логическое выражение.

*Общий шаг:*

Привести это выражение к ДНФ (дизъюнктивной нормальной форме), т.е. к сумме произведений переменных. Для этого раскрываются все скобки и выражение упрощается на основании правил алгебры логики.

*Вывод:*

Слагаемое минимальной мощности.

### Анализ сложности

Вообще говоря, данный алгоритм порождает все существующие внешне устойчивые множества. В большинстве прикладных задач требуется найти наименьшее по мощности или по суммарному весу элементов. Для этого существуют более экономные алгоритмы, использующие дерево поиска, например метод Пирса, основанный на разбиении столбцов на динамические блоки с последующей их модификацией и удалением.

Схема работы алгоритма показана рис.2.39.



*Рис. 2.39. Схема работы алгоритма для нахождения минимального числа покрывающих назначений*

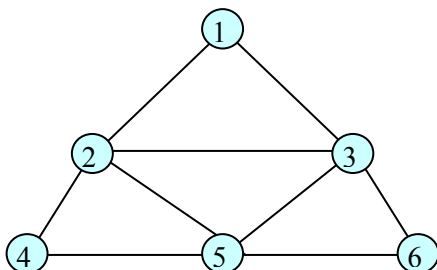
### **ПРИМЕР**

На предприятии имеется шесть отделов, обычно принимающих участие в разработке нового проекта. Анализ типов выполняемых в этих отделах работ показал, что сотрудники отделов №1,2,3 могут справляться с обязанностями друг друга. То же самое относится к группам из отделов №4,2,5 и №3,5,6. Перед менеджером по логистике поставлена задача выяснить, не является ли подобное количество отделов избыточным, и если да – определить, какое минимальное количество и каких именно отделов способны выполнить весь проект.

## РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Ввод:

Соответствующий условиям граф представлен на рис. 2.40, а, модифицированная матрица смежности для него – на рис. 2.40, б



	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1			
2	1	1	1	1	1	
3	1	1	1		1	1
4		1		1	1	
5		1	1	1	1	1
6			1		1	1

а)

б)

Рис. 2.40. Условия задачи

Инициализация:

Формируем логическое выражение (идем по столбцам). Логическое сложение обозначается как «+», логическое умножение – как «•».

Покрытие =  $(1+2+3) \bullet (1+2+3+4+5) \bullet (1+2+3+5+6) \bullet (2+4+5) \bullet (2+3+4+5+6) \bullet (3+5+6)$

Общий шаг:

1. Упрощаем с учетом того, что по закону поглощения  $x \bullet (x+y) = x$ :

$$(1+2+3) \bullet (1+2+3+4+5) = (1+2+3)$$

$$(2+4+5) \bullet (2+3+4+5+6) = (2+4+5)$$

$$(1+2+3+5+6) \bullet (3+5+6) = (3+5+6)$$

$$\text{Покрытие} = (1+2+3) \bullet (2+4+5) \bullet (3+5+6)$$

2. Раскрываем скобки с учетом того, что  $x \bullet x = x$

$$(2+4+5) \bullet (3+5+6) = 2 \bullet 3 + 2 \bullet 6 + 4 \bullet 3 + 4 \bullet 6$$

$$\text{Покрытие} = (1+2+3) \bullet (5+2 \bullet 3 + 2 \bullet 6 + 4 \bullet 3 + 4 \bullet 6) =$$

$$= 1 \bullet 5 + 1 \bullet 2 \bullet 3 + 1 \bullet 2 \bullet 6 + 1 \bullet 4 \bullet 3 + 1 \bullet 4 \bullet 6 + 2 \bullet 5 + 2 \bullet 2 \bullet 3 + 2 \bullet 2 \bullet 6 + 2 \bullet 4 \bullet 3 + 2 \bullet 4 \bullet 6 +$$

$$+ 3 \bullet 5 + 3 \bullet 2 \bullet 3 + 3 \bullet 2 \bullet 6 + 3 \bullet 4 \bullet 3 + 3 \bullet 4 \bullet 6$$

3. Упрощаем по закону поглощения  $(x+x \bullet y = x)$  и с учетом того, что  $x \bullet x = x$

$$\begin{aligned}
 \text{Покрывтие} &= 1 \bullet 5 + (1 \bullet 2 \bullet 3) + (1 \bullet 2 \bullet 6) + (1 \bullet 4 \bullet 3) + 1 \bullet 4 \bullet 6 + 2 \bullet 5 + (2 \bullet 2 \bullet 3) + \\
 &+ (2 \bullet 2 \bullet 6) + (2 \bullet 4 \bullet 3) + (2 \bullet 4 \bullet 6) + 3 \bullet 5 + (3 \bullet 2 \bullet 3) + (3 \bullet 2 \bullet 6) + (3 \bullet 4 \bullet 3 + 3 \bullet 4 \bullet 6) = \\
 &= 2 \bullet 6 + 2 \bullet 3 + 2 \bullet 3 + 4 \bullet 3 + 1 \bullet 5 + 1 \bullet 4 \bullet 6 + 2 \bullet 5 + 3 \bullet 5 = \\
 &= 2 \bullet 6 + 2 \bullet 3 + 4 \bullet 3 + 1 \bullet 5 + 1 \bullet 4 \bullet 6 + 2 \bullet 5 + 3 \bullet 5
 \end{aligned}$$

*Вывод:*

Получили ДНФ, выбираем самое короткое слагаемое, например  $2 \bullet 6$ . Значит, отделов № 2 и 6 вполне достаточно для ведения работ по проекту.

### **ПРИМЕЧАНИЕ**

Даже в случае классической постановки задачи о переводчиках одинаковое качество перевода и одинаковая зарплата специалистов, знающих неодинаковое количество различных языков, безусловная идеализация. В общем случае матрица  $A[i, j]$  может также характеризоваться весом часовой зарплаты  $i$ -го переводчика или качественной оценки его работы. Тогда в первом случае речь может идти о минимизации суммарных затрат работодателя на поддержание штата сотрудников (ведь вполне может оказаться, что нанять двух не слишком дорогих переводчиков дешевле чем одного), а во втором случае задача сводится к поиску минимального внешне устойчивого множества с максимальным весом.

### **ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

Задача о переводчиках. На должность переводчика в небольшую фирму претендуют пять человек. Первый способен переводить с французского, немецкого и итальянского, второй – с немецкого, греческого и английского, третий – с французского, испанского и английского, четвертый – с французского, итальянского и китайского, пятый – только с английского и китайского. Каких переводчиков следует взять на работу, чтобы иметь возможность переводить со всех семи языков при минимальном штате сотрудников.

## **2.3. Задачи обслуживания**

Условно такие задачи могут быть разбиты на три класса.

К первому классу относят вопросы об оптимальном размещении различных пунктов обслуживания, как регулярного плана (школы, кинотеатры, парки), так и экстренного характера (больницы, пункты милиции, пожарные депо). Типичные проблемы и соответствующие алгоритмы изложены в рамках задачи о размещении регулярных пунктов обслуживания (минисуммная постановка, алгоритм поиска медианы графа) и задачи о размещении экстренных пунктов обслуживания (минимаксная постановка, алгоритм поиска центра графа).

Ко второму классу относят ряд задач, связанных с обслуживанием группы объектов, причем целью является составление графика проезда по всем участкам сети или посещения всех объектов, характеризуемого минимальными суммарными затратами. К этой группе относят знаменитую задачу о маршруте китайского почтальона (алгоритм поиска кратчайших эйлеровых циклов) и задачу о маршруте коммивояжера (алгоритм поиска кратчайших гамильтоновых циклов, на основе метода ветвей и границ Литтла).

К третьему классу можно отнести задачи планирования доставки при условии наличия группы поставщиков (более одного) и группы потребителей. Чаще всего к ней сводится проблема закрепления региональных потребителей за существующими складами. Это типичная проблема, метод ее решения при условии получения целочисленного результата рассмотрен в транспортной задаче (алгоритм на основе метода потенциалов).

### **2.3.1. Размещение регулярных пунктов обслуживания**

Задача о размещении пунктов массового обслуживания для некоторого множества объектов возникает в логистике достаточно часто. Это может быть поиск оптимального места для склада, с которого осуществляется доставка продукции потребителям, или

размещение школ, детских садов или кинотеатров, поликлиник, пожарных депо и станций скорой помощи.

Однако, несмотря на схожесть подобных задач, критерии оптимальности чаще всего бывают двух типов. В соответствии с ними разделяют и постановки задачи на размещение пунктов обслуживания.

*Минисуммная задача размещения.* Дана сеть с обслуживаемыми объектами. Разместить пункт регулярного обслуживания так, чтобы сумма кратчайших расстояний от этого пункта до вершин графа была минимально возможной.

*Минимаксная задача размещения.* Дана сеть с обслуживаемыми объектами. Разместить пункт экстренного обслуживания так, чтобы расстояние до самого удаленного объекта было минимально возможным.

Рассмотрим минисуммную постановку задачи. Подобная формулировка подходит для размещения автобазы, обслуживающей ряд объектов, центрального склада, с которого осуществляется доставка продукции, школы, коммутатора в телефонной сети и т.д. Однако в реальности вряд ли все обслуживаемые объекты имеют одинаковый приоритет. Например, в случае с размещением склада, очевидно, что объекты с наибольшей потребностью в продукции должны размещаться ближе к складу, поскольку ездить туда придется чаще, а в целом речь идет о минимизации транспортных расходов. Если говорить о размещении школы, то вполне очевидно, что стоит учитывать количество детей, проживающих в каждом из населенных пунктов с тем, чтобы минимизировать суммарное пройденное ими всеми расстояние. Обобщая эти рассуждения, каждому объекту можно сопоставить некоторое число, называемое весом.

### *НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ*

Дан граф  $G=\langle V, U \rangle$ . Пусть  $D[i, j]$  – матрица кратчайших расстояний от  $i$ -й до  $j$ -й вершины,  $w_j$  – вес вершины. Тогда можно определить понятие передаточного числа.

**внешнее передаточное число:**

$$\delta_o(v_i) = \sum_{v_j \in V} w_j \cdot d(v_i, v_j),$$

**внутреннее передаточное число:**

$$\delta_t(v_i) = \sum_{v_j \in V} w_j \cdot d(v_j, v_i).$$

Далее введем понятие медиан:

**внешняя медиана графа** – вершина  $v_o$ , для которой

$$\sigma_o(v_o) = \min_{v_j \in V} [\delta_o(v_j)],$$

**внутренняя медиана графа** – вершина  $v_t$ , для которой

$$\sigma_t(v_t) = \min_{v_j \in V} [\delta_t(v_j)].$$

Очевидно, что в случае неориентированного графа внешнее передаточное число равно внутреннему передаточному числу, и внешняя медиана совпадает с внутренней медианой.

Теперь, исходя из конкретной прикладной задачи, можно искать вершину, являющуюся внутренней или внешней медианой графа. Однако чаще всего смысл имеет поиск так называемой внешне-внутренней медианы графа, т.е. вершины, для которой сумма внутренних и внешних передаточных чисел будет наименьшей.

Возникает естественный вопрос: а что, если на каком-нибудь ребре графа (иными словами, на дороге между двумя обслуживаемыми объектами) существует точка  $y^*$  такая, что искомое суммарное расстояние от нее до всех объектов и обратно будет меньше, чем для внешне-внутренней медианы? Это очень важный вопрос, поэтому рассмотрим его подробно.

**Утверждение:** Какова бы ни была точка  $y^*$  графа  $G = \langle V, U \rangle$ , в нем найдется, по крайней мере, одна вершина  $x^*$ , для которой  $\sigma(x^*) \leq \sigma(y^*)$ .

С целью упрощения, приведем доказательство этого утверждения для случая неориентированных графов (очевидно, что данное утверждение и доказательство его правильности можно обобщить и на случай ориентированных графов).



Пусть  $y^*$  – точка ребра  $(v_a, v_b)$ , расположенная на расстоянии  $\xi$  от  $v_a$ . Тогда кратчайший путь от точки  $y^*$  до произвольной вершины  $v_j$  будет исчисляться как минимальное значение из двух возможных: либо надо идти через вершину  $v_a$  и далее по кратчайшему пути от  $v_a$  к  $v_j$ , либо через вершину  $v_b$  и далее по кратчайшему пути от  $v_b$  к  $v_j$ . Обозначив длину ребра  $(v_a, v_b)$  через  $c_{ab}$ , получим:

$$d(y^*, v_j) = \min[\xi + d(v_a, v_j), c_{ab} - \xi + d(v_b, v_j)].$$

В общем случае среди вершин  $v_j$  найдутся как те, для которых первый член в этом выражении не больше второго (т.е. к ним удобнее идти через вершину  $v_a$  или все равно через какую) – обозначим множество таких вершин через  $V_a$ , так и те, для которых второй член меньше первого (т.е. к ним удобнее идти через вершину  $v_b$ ) – обозначим множество таких вершин через  $V_b$ . Теперь вычислим передаточное число точки  $y^*$ :

$$\delta(y^*) = \sum_{v_j \in V} w_j d(y^*, v_j) = \sum_{v_j \in V_a} w_j [\xi + d(v_a, v_j)] + \sum_{v_j \in V_b} w_j [c_{ab} - \xi + d(v_b, v_j)].$$

Поскольку из неравенства треугольника следует, что  $d(v_a, v_j) \leq c_{ab} + d(v_b, v_j)$ , то можно заменить в предыдущем выражении эквивалентную  $c_{ab} + d(v_b, v_j)$  на  $d(v_a, v_j)$ , превратив равенство в неравенство:

$$\delta(y^*) \geq \sum_{v_j \in V_a} w_j [\xi + d(v_a, v_j)] + \sum_{v_j \in V_b} w_j [d(v_a, v_j) - \xi].$$

Так как  $V_a \cup V_b = V$ , то, сделав перегруппировку, получим:

$$\delta(y^*) \geq \sum_{v_j \in V} w_j d(v_a, v_j) + \xi \left[ \sum_{v_j \in V_a} w_j - \sum_{v_j \in V_b} w_j \right].$$

Поскольку для каждого ребра  $(v_a, v_b)$  мы сами вправе решать, какую вершину называть  $v_a$  и какую  $v_b$ , то всегда можно добиться выполнения неравенства  $\sum_{v_j \in V_a} w_j \geq \sum_{v_j \in V_b} w_j$ . Так как

$$\sum_{v_j \in V} w_j d(v_a, v_j) = \delta(v_a), \text{ получим } \delta(y^*) \geq \delta(v_a). \text{ Таким образом,}$$

для вершины  $v_a$  величина  $\delta(v_a)$  не превышает  $\delta(y^*)$ , что является

доказательством утверждения о том, что оптимальная точка расположения пункта массового обслуживания обязательно совпадет с одним из обслуживаемых объектов.

Итак, в двумерной сети для решения задачи размещения необходимо выбирать из  $N$  точек, что делает полный перебор легко осуществимым.

## *ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА*

### Основная идея

На основе исходных данных построить матрицу смежности. Пользуясь алгоритмом Флойда-Уоршелла или несколько раз алгоритмом Дейкстры, найти кратчайшие пути (выраженные явно или их приведенные эквивалентные характеристики) из каждой вершины в каждую. Затем, по очереди предполагая размещение пункта обслуживания в каждом объекте, рассчитать сумму произведений элементов соответствующей ему строки и столбца на вектор весов. Из найденных результатов отобрать минимальный.

### Возможные сложности

Если моделью системы является ориентированный граф, рассматриваются пути до пункта обслуживания и обратно, и в качестве целевой функции используется минимизация стоимости обслуживания, то вполне возможна ситуация, когда затраты на проезд 1 км по пути к пункту обслуживания отличаются от затрат на проезд 1 км по пути обратно. В этом случае матрица кратчайших путей не будет отражать реальных финансовых затрат.

### Способы преодоления

В таких случаях после нахождения матрицы кратчайших путей нужно последовательно для каждой вершины рассчитывать:

- сумму произведений элементов соответствующей ей строки на вектор весов с коэффициентом стоимости затрат на проезд из пункта обслуживания;

- сумму произведений элементов соответствующего столбца на вектор весов с коэффициентом стоимости затрат на проезд к пункту обслуживания.

### Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

$S[i, j]$  – массив, содержащий значения из матрицы смежности или иным способом рассчитанные расстояния между двумя объектами

$P[k]$  – массив с весами (или иными относительными характеристиками) объектов

$c_1, c_2$  – стоимость (или иная относительная характеристика) 1 единицы пути по направлению к пункту обслуживания и обратно.

*Инициализация:*

$D[i, j]$  – массив содержащий найденные кратчайшие пути от  $i$ -й вершины к  $j$ -й, изначально совпадает с массивом  $S[i, j]$

$Cost[k]$  – массив содержащий значение целевой функции при расположении пункта обслуживания в  $k$ -ом объекте, первоначально заполненный нулями

*Общий шаг:*

1. При помощи алгоритма Флойда-Уоршелла заполнить матрицу  $D[i, j]$

2. Цикл по  $i$  от 1 до  $N$

    Цикл по  $j$  от 1 до  $N$ :

$cost[i] := cost[i] + D[i, j] * p[j] * c_2 + d[j, i] * p[j] * c_1$

3. Ищем минимум в массиве  $cost[i]$

$min := cost[1]$

$result := 1$

    Цикл по  $j$  от 1 до  $N$ : если  $cost[i] < min$  тогда  $min := cost[i]$

$result := i$

*Вывод:*

$result$  (вершина, в которой надо расположить пункт обслуживания)

$min$  (размер транспортных расходов)

Схема работы алгоритма показана на рис.2.41.

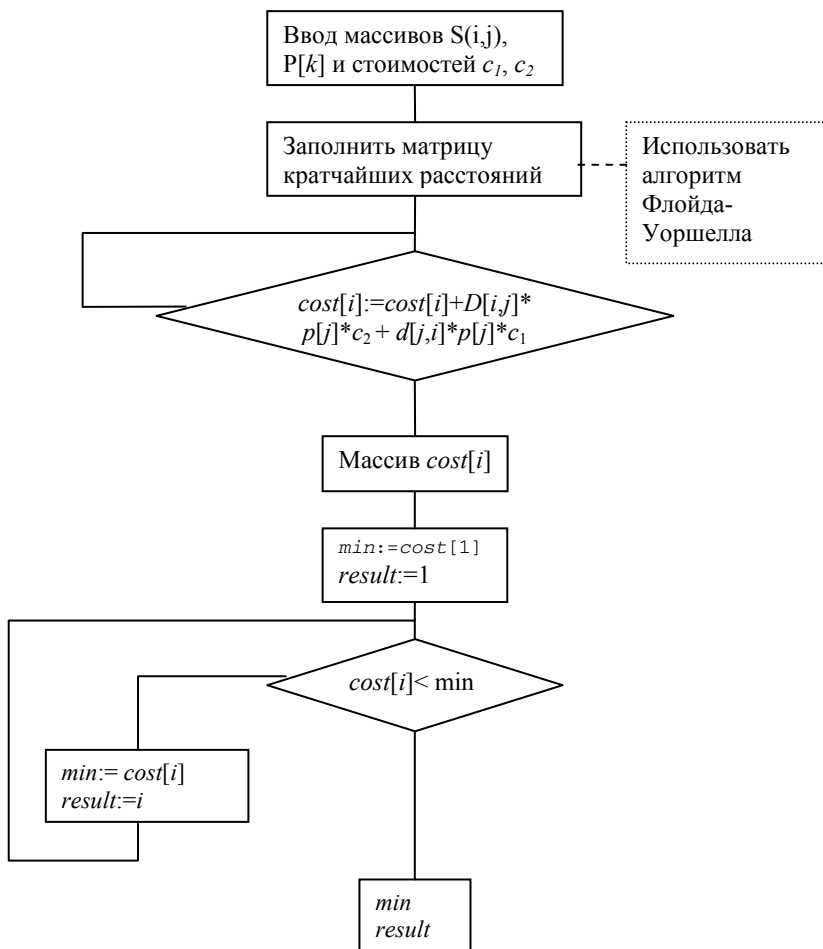


Рис. 2.41. Схема работы алгоритма для размещения регулярных пунктов обслуживания

### ПРИМЕР

Семь деревень расположены так, как показано на рис. 2.42. Найти место для оптимального размещения школы, если в

деревнях соответственно проживают 80, 100, 140, 90, 60, 50 и 40 детей школьного возраста. Критерий оптимальности – минимизация суммарного расстояния, проходимого всеми школьниками по пути в школу и обратно.

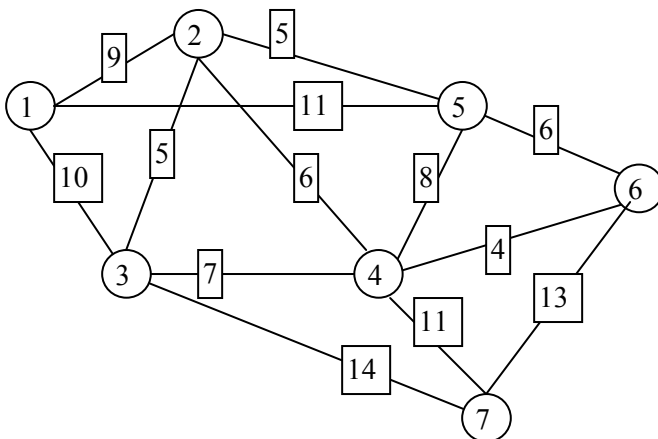


Рис. 2.42. Схема расположения объектов

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Ввод:

$S[i,j]$  (матрица смежности)

Таблица 2.28. Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	9	10	$\infty$	11	$\infty$	$\infty$
2	9	0	5	6	5	$\infty$	$\infty$
3	10	5	0	7	$\infty$	$\infty$	14
4	$\infty$	6	7	0	8	4	11
5	11	5	$\infty$	8	0	6	$\infty$
6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	6	0	13
7	$\infty$	$\infty$	14	11	$\infty$	13	0

$P[k] = [80, 100, 140, 90, 60, 50, 40]$  массив с весами вершин (количество учеников)

*Инициализация:*

В двойном цикле по  $i$  от 1 до 7 и по  $j$  от 1 до 7 присвоить  $d[i,j] := s[i,j]$

В цикле по  $i$  от 1 до  $cost[k]$  – массив, содержащий значение целевой функции при расположении пункта обслуживания в  $k$ -м объекте, заполнить нулями

*Общий шаг:*

6. При помощи алгоритма Флойда-Уоршелла заполняем матрицу  $D[i,j]$ - получим:

Таблица 2.29. Матрица  $D[i,j]$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	9	10	15	11	17	24
2	9	0	5	6	5	10	17
3	10	5	0	7	10	11	14
4	15	6	7	0	8	4	11
5	11	6	10	8	0	6	19
6	17	10	11	4	6	0	13
7	24	17	14	11	19	13	0

2. Цикл по  $i$  от 1 до 7

$i=1$ : Цикл по  $j$  от 1 до 7:

$j=1$ :  $cost[1] := 0 + D[1,1] * p[1] = 0 + 0 * 80 = 0$

$j=2$ :  $cost[1] := cost[1] + D[1,2] * p[2] = 0 + 9 * 100 = 900$

$j=3$ :  $cost[1] := cost[1] + D[1,3] * p[3] = 900 + 10 * 140 = 2300$

$j=4$ :  $cost[1] := cost[1] + D[1,4] * p[4] = 2300 + 15 * 90 = 3650$

$j=5$ :  $cost[1] := cost[1] + D[1,5] * p[5] = 3650 + 11 * 60 = 4310$

$j=6$ :  $cost[1] := cost[1] + D[1,6] * p[6] = 4310 + 17 * 50 = 5160$

$j=7$ :  $cost[1] := cost[1] + D[1,7] * p[7] = 5160 + 24 * 40 = 6120$

$i=2$ : Цикл по  $j$  от 1 до 7 (аналогично)  $cost[2] := 3440$

$i=3$ : Цикл по  $j$  от 1 до 7 (аналогично)  $cost[3] := 3640$

$i=4$ : Цикл по  $j$  от 1 до 7 (аналогично)  $cost[4] := 3900$

$i=5$ : Цикл по  $j$  от 1 до 7 (аналогично)  $cost[5] := 4660$

$i=6$ : Цикл по  $j$  от 1 до 7 (аналогично)  $cost[6] := 5140$

$i=7$ : Цикл по  $j$  от 1 до 7 (аналогично)  $cost[7] := 8360$

```

3. Ищем минимум в массиве cost [i]
   min:=cost[1]=6120
   result:=1
   Цикл по j от 1 до 7: если cost [i]< min тогда
   min:= cost [i]
   result:=i
   на выходе из цикла
   min:= cost [2]=3440
   result:=2

```

*Вывод:*

2 (вершина, в которой надо расположить школу)  
 3440 (количество ученико-километров по дороге в школу)

### ***ПРИМЕЧАНИЕ***

Задачу можно обобщить на случай, если необходимо размещать не один, а  $P$  пунктов обслуживания. В этом случае постановка задачи выглядит так: разместить  $P$  пунктов обслуживания сети из  $N$  объектов так, чтобы сумма расстояний от каждого из объектов до ближайшего пункта обслуживания и обратно была минимальной. Соответствующее множество вершин называют  $P$ -медианой графа.

В этом случае простой перебор уже не дает эффективного решения. Для поиска  $P$ -медиан применяют методы целочисленного программирования, алгоритм направленного древовидного поиска, а также эвристический алгоритм Тэйца и Барта.

### ***ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

В городе имеются пять крупных супермаркетов – постоянных покупателей импортных мясных полуфабрикатов. Для того, чтобы проехать от  $i$ -го супермаркета в  $j$ -й, необходимо преодолеть расстояние в  $d[i,j]$  км. С учетом дорожной разметки и наличия улиц с односторонним движением  $d[i,j] \neq d[j,i]$ . Значения  $d[i,j]$  для всех пар  $(i,j)$  приведены в таблице. Потребность супермаркетов в продукции равна 2, 5, 3, 8 и 6 грузовиков в месяц

соответственно. Доставкой занимается сам мясокомбинат. Найти оптимальное расположение центрального склада с целью минимизации транспортных расходов на доставку продукции, если стоимость километрового прогона груженого а/м составляет 8 руб., а порожнего (при возврате на базу) – 6 руб. Рассчитать ежемесячные затраты на транспортировку продукции (стоимость доставки продукции от комбината до центрального склада не учитывается).

Таблица 2.30. Матрица расстояний между объектами задачи

	1	2	3	4	5
1	0	12	10	7	нет
2	8	0	9	8	6
3	10	10	0	нет	11
4	7	6	5	0	8
5	нет	3	15	9	0

### 2.3.2. Размещение экстренных пунктов обслуживания

Согласно обычной логике, ясно, что размещение экстренных пунктов обслуживания, к которым обычно относят станции скорой помощи, пожарные депо, пункты милиции, должно основываться несколько на иной логике, чем размещение школ или кинотеатров. Предположим, мы хотим разместить участок спецподразделения милиции, задача которого выезжать по вызову, когда сработает сигнализация на охраняемом объекте. Считается, что срабатывание сигнализации – событие редкое, и главной целью является не постановка участка поблизости от сгущения охраняемых объектов (тогда к большинству охраняемых объектов милиция будет прибывать быстро, а в некоторые отдаленные – с недопустимым опозданием), а так, чтобы самый дальний охраняемый объект достигался в минимальное время. В этом случае, видимо, можно будет говорить о соответствии этого минимального времени принятым нормам. Такая постановка задачи называется минимаксной.



## НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Дан граф  $G=<V,U>$ . Пусть  $D[i,j]$  – матрица кратчайших расстояний от  $i$ -й до  $j$ -й вершины. Тогда можно определить следующие понятия:

**число внешнего разделения**

$$s_o(v_i) = \max_{v_j \in V} [w_j \cdot d(v_i, v_j)];$$

**число внутреннего разделения**

$$s_t(v_i) = \max_{v_j \in V} [w_j \cdot d(v_j, v_i)];$$

**внешний центр графа** – вершина  $v_o$ , для которой

$$s_o(v_o) = \min_{v_i \in V} [s_o(v_i)];$$

**внутренний центр графа** – вершина  $v_t$ , для которой

$$s_t(v_t) = \min_{v_i \in V} [s_t(v_i)].$$

Число внешнего разделения вершины  $v_o$ , являющейся внешним центром, называется **внешним радиусом графа**

$$\rho_o = s_o(v_o).$$

Число внутреннего разделения вершины  $v_t$ , являющейся внутренним центром, называется **внутренним радиусом графа**

$$\rho_t = s_t(v_t).$$

У графа может быть несколько (больше чем один) внешних и внутренних центров. Очевидно, что в случае неориентированного графа внешний и внутренний центры совпадают, а внешний и внутренние радиусы равны.

Понятно, что если имеются всего два охраняемых объекта, то участок надо ставить между ними. Другое дело, что по ряду причин (например, доступности людских ресурсов, установленного оборудования и т.д.) для такой задачи особым условием может являться необходимость размещения пункта экстренного обслуживания именно в населенном пункте. В этом случае решение задачи особой проблемы не представляет.

Если речь идет о размещении отделения милиции или пожарного депо, то решение вполне очевидно находится из матрицы кратчайших путей после умножения ее на вектор весов вершин. Для этого в каждой строке полученной матрицы находят максимальный элемент и затем выбирают ту строку, которая

содержит минимальный из найденных максимальных элементов. Вектор весов вершин в общем случае отражает вероятность потребности данного объекта (города) в соответствующем обслуживании (например, в скорой медицинской помощи). Такая вероятность чаще всего берется пропорционально численности населения каждого района.

Необходимо понимать, что если речь идет о размещении больницы, то оптимизируется время, необходимое для проезда машины скорой помощи в самый отдаленный район и обратно в больницу. По аналогии с рассмотренными определениями можно ввести понятие числа внешне-внутреннего разделения  $s_{ot}(v_i) = \max_{v_j \in V} [w_j \cdot (d(v_j, v_i) + d(v_i, v_j))]$  и соответственно внешне-внутреннего центра, т.е. вершины  $v_{ot}$ , на которой достигается минимум этого выражения.

### *НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ*

Однако в общем случае пункт обслуживания может размещаться на произвольном ребре графа, а не обязательно в вершине. В том случае, если поиск внутреннего и внешнего центров ведется без учета требования о совпадении точки с одной из вершин, то говорят о нахождении абсолютных центров (аналогично, внутренних, внешних или внешне-внутренних). Такую задачу можно решить при помощи алгоритма Хакими. Для простоты изложения рассмотрим случай, который моделируется при помощи неориентированного графа.

### ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

#### Основная идея

Построив матрицу кратчайших путей между всеми парами вершин, оценить радиус «сверху», предполагая, что абсолютный центр (пункт экстренного обслуживания) находится в одной из вершин. Далее пробовать размещать пункт обслуживания на ребрах графа. Для каждого ребра применить графический метод Хакими поиска оптимальной точки. Сравнить полученные значения и выбрать минимальное.

### Возможные сложности

Ребер много, и применять алгоритм ко всем – вряд ли целесообразно. Как различить «перспективные» и «неперспективные» ребра? Возможно ли оценить, в каких пределах могут вообще получиться значения радиуса, если центр расположить на выбранном ребре. Если это возможно, то тогда можно будет сравнивать этот диапазон с оптимальным решением, найденным путем перебора вершин, или с уже найденными числами разделения для прочих ребер.

### Способы преодоления

Пусть существуют три несовпадающие вершины  $i, j, k$  (рис. 2.43.).

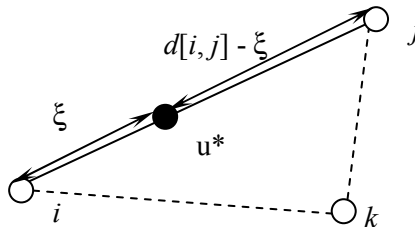


Рис. 2.43. Выбор перспективных ребер

Если выбрать точку  $u^*$  на ребре  $(i, j)$  на расстоянии  $\xi$  от вершины  $i$  (т.е. на расстоянии  $d[i, j] - \xi$  от вершины  $j$ ), то расстояние от точки  $u^*$  до  $k$  через вершину  $i$  равно  $d[u^*, i, k] = \xi + d[i, k]$ , а расстояние от  $u^*$  до  $k$  через  $j$  равно  $d[u^*, j, k] = d[i, j] - \xi + d[j, k]$ . Поскольку из этого пункта пожарные (милиция и т.д.) поедут по кратчайшей из двух дорог, то  $d[u^*, k] = \min(\xi + d[i, k], d[i, j] - \xi + d[j, k])$ .

Поскольку  $\xi$  может изменяться в пределах от 0 до  $d[i, j]$ , то первый член в операторе минимизации в самом лучшем случае будет равен  $d[i, k]$  (если  $\xi=0$ ), а второй в самом лучшем случае будет равен  $d[j, k]$  (если  $\xi = d[i, j]$ ). Отсюда получается "нижняя оценка" для  $d[u^*, k]$ , которая легко считается по матрице кратчайших путей  $v[u^*, k] = \max_k(\min(d[i, k], d[j, k]))$ .

Схема работы алгоритма показана на рис.2.44.

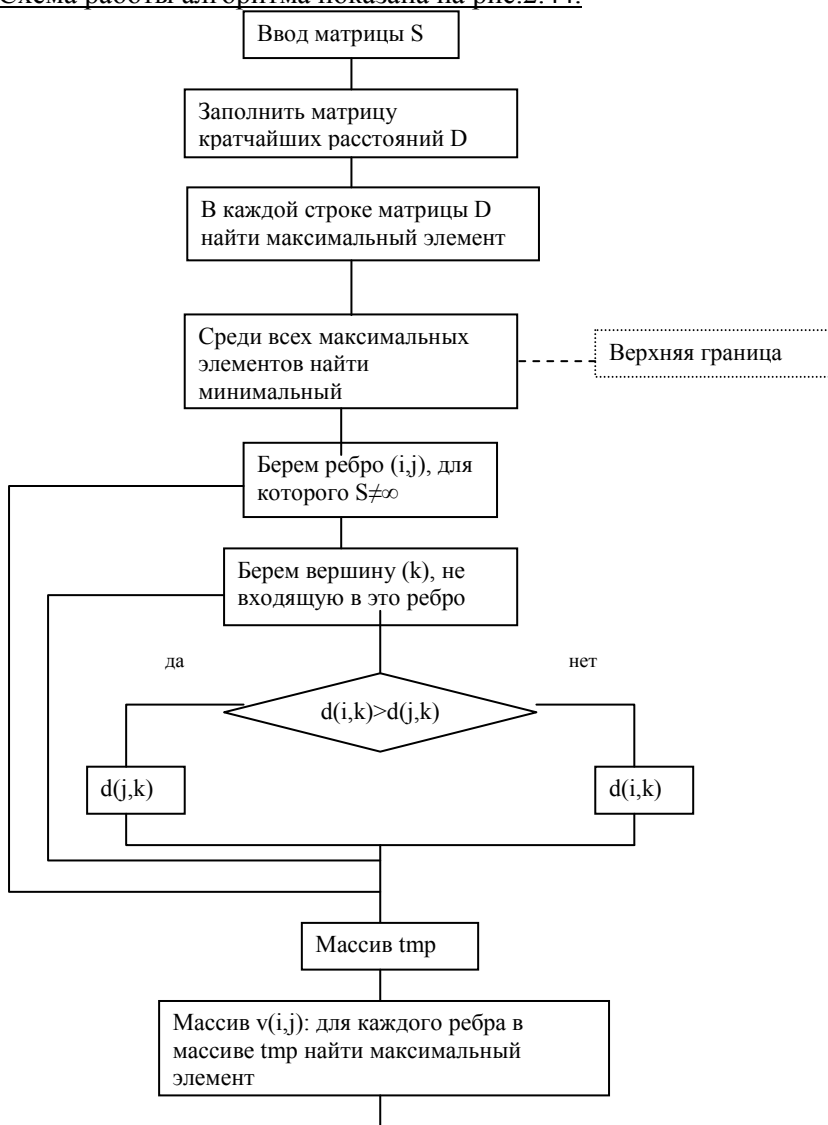


Рис. 2.44. Схема работы алгоритма размещения экстренных пунктов обслуживания (начало)

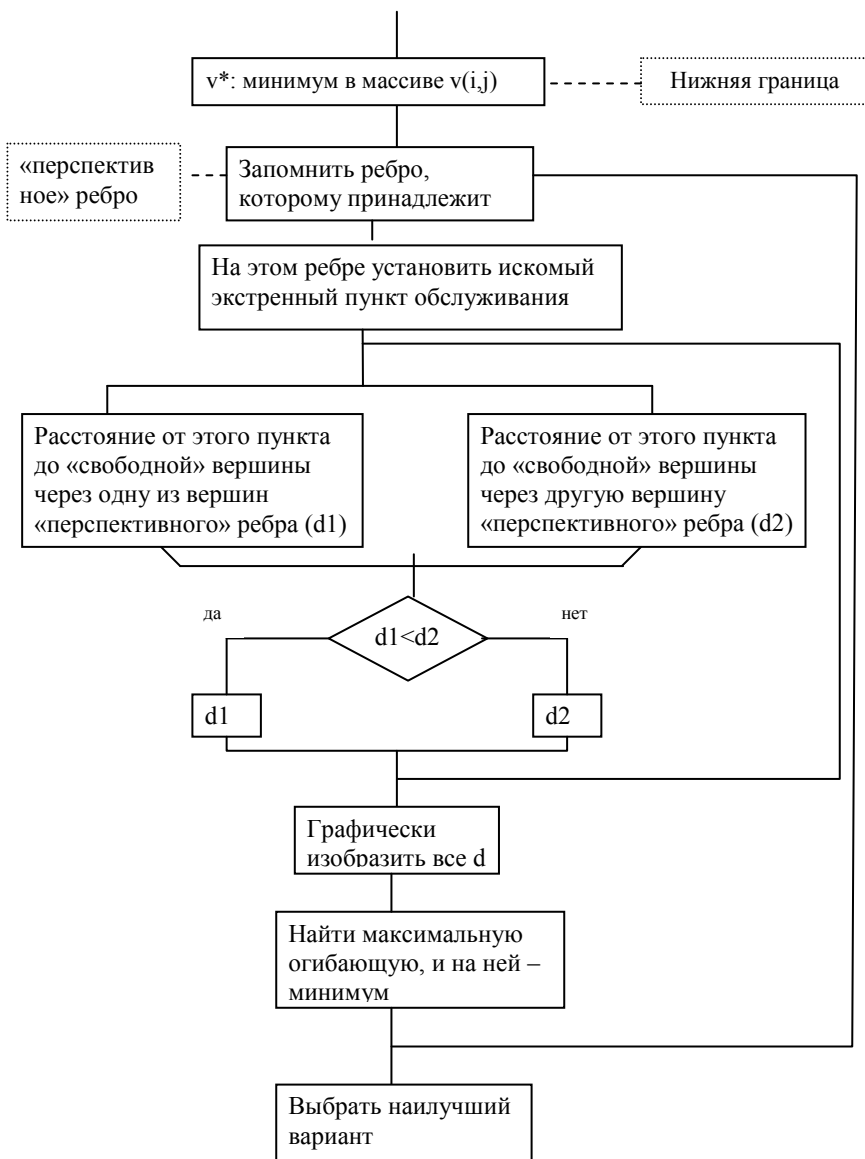


Рис. 2.44. Схема работы алгоритма размещения экстренных пунктов обслуживания (окончание)

## Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

$S[i, j]$  – массив, содержащий значения из матрицы смежности или иным способом рассчитанные расстояния между двумя объектами

$P[k]$  – массив с весами (или иными относительными характеристиками) объектов

*Инициализация:*

$D[i, j]$  – массив содержащий найденные кратчайшие пути от  $i$ -ой вершины к  $j$ -ой, изначально совпадает с массивом  $S[i, j]$

$v[i, j]$  – массив содержащий оценки «снизу» для абсолютного центра графа в том случае, если центр располагается на ребре  $(i, j)$ . Конечно, несколько неэкономно хранить оценки для ребер в двумерном массиве, но это наиболее простой способ запомнить помимо самой оценки еще и номера вершин, образующих это ребро. Заполнить чем-нибудь очень большим.

$Dist\_up[k]$  – массив содержащий расстояния от пункта обслуживания (расположенного в  $k$ -ом) объекте до самого удаленного объекта, заполнить нулями.

$minmax\_old$  – переменная для хранения предпоследнего из лучших значений радиуса, в начале сделать равным чему-нибудь большому.

*Общий шаг:*

1. При помощи алгоритма Флойда-Уоршелла заполнить матрицу  $D[i, j]$

2. Цикл по  $i$  от 1 до  $N$

    Цикл по  $j$  от 1 до  $N$ : если  $p[j]*D[i, j] > dist\_up[i]$  тогда  $dist\_up[i] := p[j]*d[i, j]$

3. Ищем минимум в массиве  $dist\_up[i]$  – это верхняя граница в общем случае или оптимум если пункт обслуживания ставится только в вершине сети.

$value\_up := dist\_up[1]$

$result := 1$

    Цикл по  $j$  от 1 до  $N$ : если  $dist\_up[i] < value\_up$  тогда

```

    value_up:= dist_up[i]
    result:=i
4. Цикл по  $i$  от 1 до  $N$ 
    Цикл по  $j$  от 1 до  $N$ 
        Если  $s[i,j] < B$  (аналог  $\infty$  использованный при
заполнении массива  $s$ ) то
            Цикл по  $k$  от 1 до  $N$   $v\_tmp[k] :=$ 
 $p[k] * \min(d[i,k], d[j,k])$ 
             $v[i,j] := \max_k(v\_tmp[k])$ 
5. Теперь в массиве  $v[i,j]$  содержатся нижние
оценки для всех ребер графа. Рассматривать ребра,
будем начиная с самого «перспективного ребра»,
причем ребра для которых  $v[i,j] \geq value\_up$  (т.е.
для которых самое лучшее решение будет не меньше
найденного вначале, при расположении пункта
обслуживания в вершине) рассматривать не будем
вообще. Итак, берем  $v^*[i,j] = \min_{i,j}(v[i,j])$ .
6. Чтобы потом не рассматривать это ребро снова,
делаем значение радиуса заведомо большим  $v[i,j] := T$ 
    В цикле по  $k$  от 1 до  $N$ 
         $d[v^*,k] := \min(\xi + d[i,k], d[i,j] - \xi +$ 
 $d[j,k])$ 
    Если графически изобразить функцию зависимости
 $d[v^*,k]$  (по оси  $y$ ) от  $\xi$  (по оси  $x$ ), то для поиска
максимальной функции надо взять верхнюю огибающую.
Поскольку нужен минимум максимума этой функции,
берем  $\min$  на огибающей. По оси  $y$  получается
некоторый  $\minmax\_new$ , при этом по оси  $x$  как раз
будет расстояние от точки  $i$ , т.е.  $\xi\_New$ .
Запоминаем ребро:  $obj\_new[1] := i; obj\_new[2] := j;$ 
    если  $\minmax\_new < \minmax\_old$  то
         $\minmax\_old := \minmax\_new;$ 
         $\xi\_old := \xi\_new;$ 
         $obj\_old[1] := obj\_new[1];$ 
         $obj\_old[2] := obj\_new[2];$ 
7. Теперь возвращаемся к нижним оценкам и
проверяем, есть ли надежда на лучшее значение,
т.е.
     $v^*[i,j] = \min_{i,j}(v[i,j]);$ 

```

если  $v^*[i, j] < minMax\_old$  то повторяем шаг 6;

Вывод:

$minmax\_old$  – значение абсолютного радиуса (расстояние от места расположения пункта экстренного обслуживания до самого удаленного объекта);

$obj\_old[1], obj\_old[2]$  – ребро, на котором будет располагаться абсолютный центр графа (пункт экстренного обслуживания);

$\xi\_old$  – расстояние от объекта  $obj\_old[1]$  до места расположения абсолютного центра графа (пункта экстренного обслуживания).

### ПРИМЕР

Имеются шесть населенных пунктов (рис.2.45.). Найти оптимальное расположение отделения милиции, если оно может находиться в любом произвольном месте сети (на дороге или в населенном пункте). Рассчитать время приезда наряда в самый отдаленный населенный пункт.

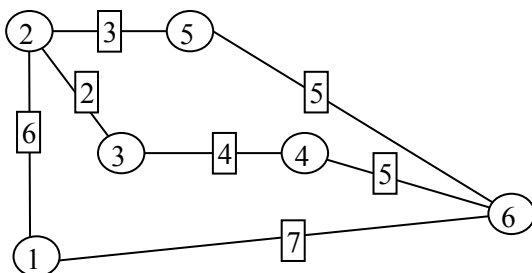


Рис. 2.45. Схема расположения населенных пунктов

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Ввод:

$S[i, j]$  – матрица смежности



Таблица 2.31. Матрица  $S[i,j]$ 

	1	2	3	4	5	6
1	0	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7
2	6	0	2	$\infty$	3	$\infty$
3	$\infty$	2	0	4	$\infty$	$\infty$
4	$\infty$	$\infty$	4	0	$\infty$	5
5	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	0	5
6	7	$\infty$	$\infty$	5	5	0

*Инициализация:*

$D[i,j]$  – массив, содержащий кратчайшие пути от  $i$ -й вершины к  $j$ -й, изначально совпадает с массивом  $S[i,j]$  и заполнен с помощью алгоритма Флойда-Уоршелла (табл.2.32.)

$v[i,j]$  – массив, содержащий оценки «снизу» для абсолютного центра графа в том случае, если центр располагается на ребре  $(i,j)$ . Конечно, несколько неэкономно хранить оценки для ребер в двумерном массиве, но это наиболее простой способ запомнить помимо самой оценки еще и номера вершин, образующих это ребро. Заполнить чем-нибудь очень большим.

Таблица 2.32. Матрица  $D[i,j]$ 

	1	2	3	4	5	6
1	0	6	8	12	9	7
2	6	0	2	6	3	8
3	8	2	0	4	5	9
4	12	6	4	0	9	5
5	9	3	5	9	0	5
6	7	8	9	5	5	0

$Dist\_up[k]$  – массив, содержащий расстояния от пункта обслуживания (расположенного в  $k$ -м объекте) до самого удаленного объекта, заполнить нулями.

$minmax\_old$  – переменная для хранения предпоследнего из лучших значений радиуса.

*Общий шаг:*

1. При помощи алгоритма Флойда-Уоршелла заполнить матрицу  $D[i,j]$ .

2. Цикл по  $i$  от 1 до  $N$

Цикл по  $j$  от 1 до  $N$ : если  $D[i,j] > dist\_up[i]$  тогда  $dist\_up[i] := D[i,j]$

Таблица 2.33. Матрица  $Dist\_up[i]$

	1	2	3	4	5	6
$Dist\_up[i]$	12	8	9	12	9	9

3. Ищем минимум в массиве  $dist\_up[i]$ :  $value\_up := 8$ ,  $result := 2$ .

4. Цикл по  $i$  от 1 до  $N$

Цикл по  $j$  от 1 до  $N$ :

Если  $s[i,j] < \infty$  то в цикле по  $k$  от 1 до  $N$   $v\_tmp[k] := \min(d[i,k], d[j,k])$ .

$i=1, j=2$ :

$v\_tmp[k]$

Таблица 2.34. Матрица  $v\_tmp[k]$

	1	2	3	4	5	6
$v\_tmp[k]$	0	0	2	6	3	7

$v[1,2] := \text{Max}_k(v\_tmp[k]) = 7$

аналогично по всем  $i$  и  $j$

Таблица 2.35. Матрица  $v[i,j]$

Ребро $(i,j)$	(1,2)	(1,6)	(2,3)	(2,5)	(3,4)	(4,6)	(5,6)
$v[i,j]$	7	8	8	6	8	7	7

5.  $v^*[i,j] := \text{Min}_{i,j}(v[i,j]) = 6$  (для ребра 2,5 оно самое «перспективное»).

6.  $v[2,5] := \infty$ ;

В цикле по  $k$  от 1 до  $N$

$d[u,1] := \min(\xi + d[2,1], d[2,5] - \xi + d[5,1]) = \min(\xi + 6, 12 - \xi) = \xi + 6$ .

Рассмотрим выражения, как функции от варьируемой переменной  $x$ . Первое выражение показано графически на рис. 2.46; второе значение на всем интервале изменения  $x$  больше первого, поэтому оно отбрасывается при выборе минимума. Аналогично получаем:

$d[u,2] := \min(\xi, 6 - \xi) = \xi$ ;

$d[u,3] := \min(\xi + 2, 8 - \xi) = \xi + 2$ ;

$d[u,4] := \min(\xi + 6, 12 - \xi) = \xi + 6$ ;

$d[u,5] := \min(\xi + 3, 3 - \xi) = 3 - \xi$ ;

$d[u,6] := \min(\xi + 8, 8 - \xi) = 8 - \xi$ .

Поскольку, нам нужен максимум, мы берем верхнюю огибающую (показана жирными линиями на рис. 2.46.). Поскольку нужен минимум максимуму этой функции, то берем  $\min$  на огибающей.

Запоминаем результат:

$\minmax\_new := 7$ ;  $\xi\_new := 1$ ;  $obj\_new[1] := 2$ ;  $obj\_new[2] := 5$ ;

$\minmax\_old := \minmax\_new$ ;  $\xi\_old := \xi\_new$ .

$obj\_old[1] := obj\_new[1]$ ;  $obj\_old[2] := obj\_new[2]$ .

7. Теперь возвращаемся к нижним оценкам и проверяем, есть ли надежда на лучшее значение

$v^*[i,j] = \min_{i,j}(v[i,j]) = 7$ , но результат 7 не может быть улучшен, так как у нас всего одно «перспективное» ребро.

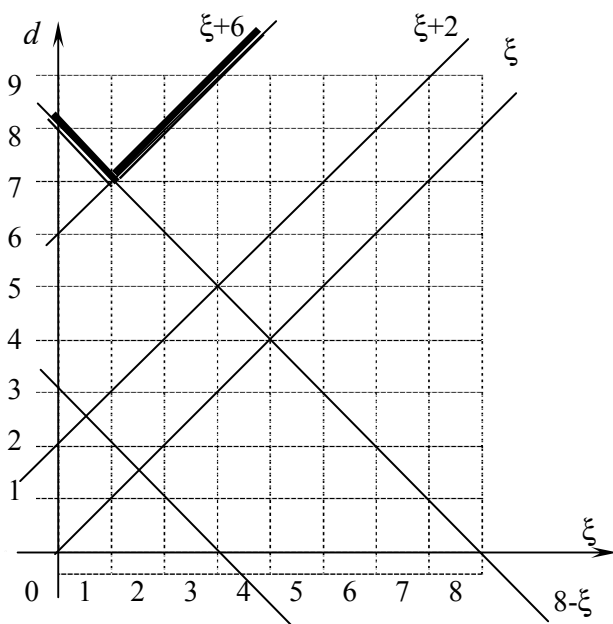


Рис. 2.46. Метод Хакими

*Вывод:*

$minmax\_old=7$ ;  $obj\_old[1]=2$ ;  $obj\_old[2]=\xi\_old=1$ .

*Ответ:*

Отделение милиции нужно разместить на ребре (2,5) в 1 км от пункта 2. Тогда расстояние до самого удаленного населенного пункта будет равно 7.

### ***ПРИМЕЧАНИЕ***

Очень часто имеет место ситуация, когда одного пункта экстренного обслуживания недостаточно, поскольку он не в состоянии обслужить все поступающие вызовы. В этом случае возникает задача о наилучшем размещении нескольких таких пунктов обслуживания. Эту задачу можно сформулировать так. Найти наименьшее число пунктов экстренного обслуживания (например пожарных депо) и такое их размещение, чтобы расстояние от каждого жилого района до ближайшего к нему пункта экстренного обслуживания не превышало некоторой заданной величины. Если же число таких пунктов известно, то обычно требуется их разместить так, чтобы было минимально возможным расстояние от любого района до ближайшего к нему пункта. Таким образом, обе эти постановки относятся к нахождению множества абсолютных центров графа. Метод Хакими не может быть обобщен для решения задачи о поиске нескольких центров. Для этого существуют итерационный алгоритм Сингера.

### ***ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

В городе есть пять жилых районов. Необходимо разместить пожарное депо так, чтобы время приезда по вызову в самый отдаленный район было минимально. Время, затрачиваемое на проезд из  $i$ -го района в  $j$ -й, приведено в таблице.

Таблица 2.36. Матрица затрачиваемого времени

	р-н №1	р-н №2	р-н №3	р-н №4	р-н №5
р-н №1	0	8	8	6	2
р-н №2	8	0	2	10	6
р-н №3	8	2	0	12	8
р-н №4	6	10	12	0	4
р-н №5	2	6	8	4	0

### 2.3.3. Маршрут китайского почтальона

Решение задач, которые связаны с нахождением оптимального способа объезда определенных объектов, расположенных вдоль дорог, как правило, относят едва ли не к основным функциям отдела логистики предприятий. Эти задачи могут возникать в разнообразных областях, например: при доставке молока или почты, сборе домашнего мусора, проверке электрических, телефонных или железнодорожных линий (и вообще, инспектировании любых распределенных систем), разбрасывании соли и песка во время гололеда, уборке коридоров в больших зданиях.

Обычно такого рода задачи называют задачами китайского почтальона.

#### *НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ*

Цикл, проходящий через все ребра графа ровно по одному разу, называется эйлеровым циклом. Эйлеров цикл не обязательно существует в графе. Известен очень простой критерий, по которому можно определить наличие в произвольном графе эйлерова цикла.

*Утверждение 1.* Для существования в связном неориентированном графе эйлерова цикла необходимо и достаточно, чтобы степени всех вершин графа были четные.

*Утверждение 2.* Для существования в связном ориентированном графе эйлерова цикла необходимо и достаточно, чтобы для каждой вершины графа полустепень захода была равна полустепени исхода.

Определить, существует ли эйлеров цикл, несложно. Вопрос в том, как его найти. Флёрри дал очень простой алгоритм построения эйлерова цикла в неориентированном графе: начиная с некоторой вершины идти по графу, вычеркивая пройденные ребра. Не проходить по ребру, если его удаление приведет к разбиению графа на две связные компоненты (изолированные вершины не считаются). Этот алгоритм строит цикл, если он существует, но не может помочь в решении задачи, если такого цикла нет, а нужен способ оптимального обхода ребер графа, пусть и с некоторыми повторениями.

### *ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ*

**Ребрам графа приписаны положительные веса. Найти цикл, проходящий через каждое ребро графа по крайней мере, один раз и такой, что для него общий вес ( $\sum N_j c(a_j)$ , где число  $N_j$  показывает, сколько раз проходило ребро  $a_j$ , а  $c(a_j)$  – вес ребра), минимален.**

### *НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ*

1. Очевидно, что если граф  $G$  содержит эйлеров цикл, то любой такой цикл будет оптимальным, так как каждое ребро проходится только один раз, и вес этого цикла будет равен  $\sum c(a_j)$
2. Если граф такого цикла не содержит, то в нем есть вершины нечетной степени. Однако поскольку вообще в графе сумма степеней всех вершин всегда четна (и равна удвоенному количеству ребер), то сумма степеней по всем вершинам, имеющим нечетную степень, тоже четна. Откуда напрямую следует, что количество вершин нечетной степени – четно.

### **ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА**

#### Основная идея

Глобальная цель – искусственным образом привести граф к виду, когда эйлеров цикл существует, т.е. сделать все вершины нечетной степени вершинами со степенью четной: это возможно путем добавления парных ребер к уже существующим ребрам

графа. Тогда нахождение в новом графе эйлера цикла даст и решение задачи.

### Возможные сложности

Возникает вопрос, а какие именно ребра удваивать?

### Способы преодоления

Для этого рассмотрим множество вершин графа, имеющих нечетные степени, обозначим его за  $V^*$ . Пусть  $M$  – множество цепей  $M_{ij}$  между вершинами  $v_i$  и  $v_j$  ( $v_i$  и  $v_j \in V^*$ ), таких, что никакие две цепи не имеют одинаковых конечных вершин (т.е. они соединяют различные пары вершин из  $V^*$  и покрывают все вершины множества  $V^*$ ). Число цепей равно половине мощности множества вершин, а поскольку (как показано выше) это множество четно, то число цепей целое (если конечно оно определено). Предположим, что все ребра, образующие цепь, скажем  $M_{ij}$ , добавлены к графу  $G$  в качестве искусственной параллельной цепи. Таким образом все ребра графа  $G$ , образующие цепь  $M_{ij}$ , будут удвоены. Произведем такую процедуру для всех цепей  $M_{ij} \in M$  и обозначим полученный граф через  $G^*(M)$ . Так как некоторые ребра из  $G$  могут входить более чем в одну цепь  $M_{ij}$ , то некоторые ребра  $G^*(M)$  утроятся, учетверятся и т.д.

*Утверждение 3:* Для любого цикла, проходящего по графу  $G$ , можно выбрать множество  $M$ , для которого граф  $G^*(M)$  имеет эйлеров цикл, соответствующий первоначально взятому циклу в графе  $G$ . Это соответствие таково, что если цикл проходит по ребру  $(v_i, v_j)$  из графа  $G$   $L$  раз, то в  $G^*(M)$  существует  $L$  ребер (одно реальное и  $L-1$  искусственных) между  $v_i$  и  $v_j$ , каждое из которых проходится ровно один раз эйлеровым циклом из  $G^*(M)$ .

*Утверждение 4:* Для минимального цепного паросочетания  $M^*$  никакие две цепи  $M_{ij}$  и  $M_{pq}$  не могут иметь общего ребра. Этот факт вполне очевидно вытекает из требования минимальности паросочетания.

Если две цепи  $M_{ij}$  и  $M_{pq}$  имеют общее ребро, допустим  $[a, b]$  (рис. 2.47.), то их общий вес составляет  $d[i, a] + d[q, a] + 2 * d[a, b] + d[p, b] + d[j, b]$ . Однако можно эти две цепи

заменить цепями  $M_{iq}$  и  $M_{pj}$  с общим весом  $d[i,a]+d[q,a]+d[p,b]+d[j,b]$ , что на  $2*d[a,b]$  меньше.

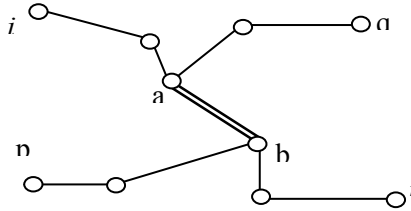


Рис. 2.47. Цепи с общим ребром

Таким образом, требование минимальности нарушается, откуда следует ошибочность выдвинутого предположения о наличии общего ребра у двух цепей, входящих в минимальное цепное паросочетание. Значит граф  $G^*(M)$  не может содержать более двух параллельных ребер между любыми двумя вершинами, т.е. оптимальный цикл в графе не проходит  $G$  ни по какому ребру более двух раз.

### Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

$C[i, j]$  – матрица весов ребер графа  $G$ .

*Инициализация:*

$Step[i]$  – массив, содержащий сведения о степенях вершин, заполнить нулями;

$B$  – аналог машинной бесконечности, присвоить значение заведомо большее всех весов ребер.

*Общий шаг:*

1. В цикле по  $i$  от 1 до  $N$

    В цикле по  $j$  от 1 до  $N$

        Если  $c[i, j] < B$  тогда  $step[i] := step[i] + 1$  (считаем число ребер инцидентных этой вершине).

2. При помощи алгоритма Флойда-Уоршелла (что проще) или Дейкстры (что экономнее) сформировать матрицу  $d[i, j]$  – кратчайших расстояний между



вершинами  $v_i$ , таких что  $step[i]$  нечетная (т.е. вершин с нечетной степенью).

3. Найти минимальное цепное паросочетание  $M$  (по матрице  $D$ ).

Схема работы алгоритма дана на рис. 2.48.



Рис. 2.48. Схема работы алгоритма для нахождения "маршрута китайского почтальона"

4. Для всех цепей  $M_{\alpha\beta}$  добавить искусственные ребра, соответствующие ребрам из  $M_{\alpha\beta}$ . В итоге получим некоторый  $s$ -граф  $G^*(M)$ .

5. Найти сумму весов всех ребер графа  $G^*(M)$ , используя для этого матрицу  $c[i, j]$  (вес искусственного ребра равен весу параллельного ему реального ребра). Согласно показанному выше утверждению эта сумма равна минимальному весу цикла, проходящему по  $G$ .

6. По алгоритму Флери найти эйлеров цикл графа  $G^*(M)$ , записывая проходимые вершины в массив  $P[i]$  и соответствующий оптимальный цикл исходного графа  $G$ .

*Вывод:*

$Ves$  – вес оптимального цикла обхода ребер графа;

$P[i]$  – последовательность вершин, задающая оптимальный цикл.

### ПРИМЕР

Допустим, определенный район города обслуживается единственной мусороуборочной машиной. Схема района приведена на рис. 2.49.

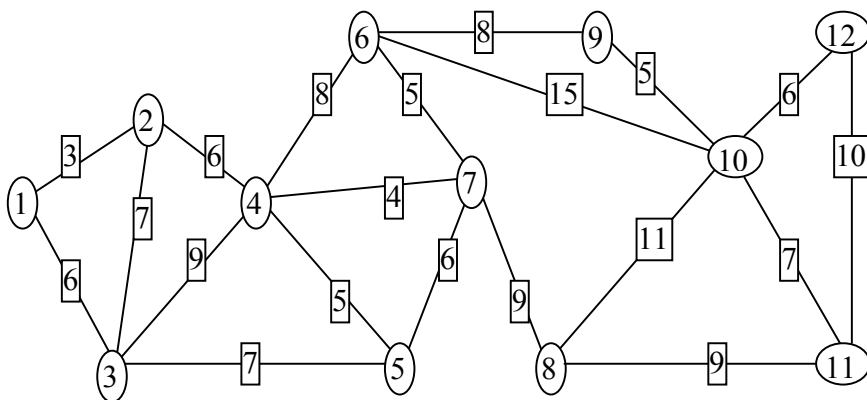


Рис. 2.49. Схема района

Найти оптимальный (характеризуемый минимальным километражом) способ объезда района для сбора мусора (предполагается, что мусорные контейнеры расположены вдоль всех дорог).

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

*Ввод:*

$C[i,j]$ -матрица весов ребер графа  $G$

*Инициализация:*

$Step[i]$  – массив, содержащий сведения о степенях вершин, заполнить нулями;

$B$  – аналог машинной бесконечности, присвоить значение, заведомо большее всех весов ребер.

Таблица 2.37. Матрица  $C[i,j]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		3	6									
2	3		7	6								
3	6	7		9	7							
4		6	9		5	8	4					
5			7	5			6					
6				8			5		8	15		
7				4	6	5		9				
8							9			11	9	
9						8				5		
10						15		11	5		7	6
11								9		7		10
12										6	10	

*Общий шаг:*

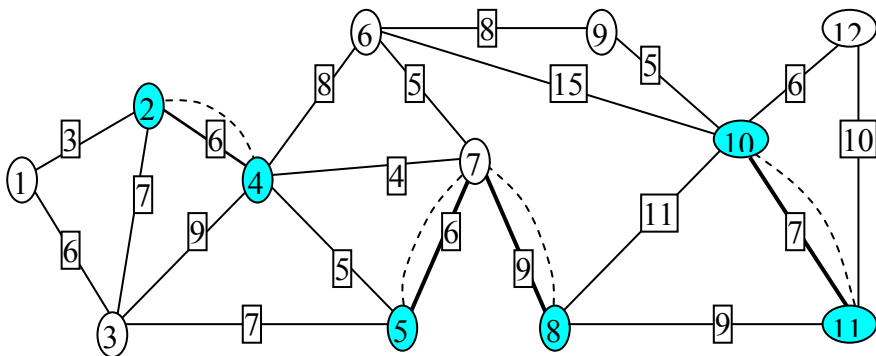
1. В цикле по  $i$  от 1 до  $N$

    В цикле по  $j$  от 1 до  $N$

1. При помощи алгоритма Флойда-Уоршелла или Дейкстры сформировать матрицу  $d[i,j]$  – кратчайших расстояний между вершинами  $v_i$ , таких что  $step[i]$  нечетная (т.е. вершин с нечетной степенью).

	2	4	5	8	10	11
2	0	6	11	19	30	28
4	6	0	5	13	21	22
5	11	5	0	15	26	24
8	19	13	15	0	11	9
10	30	21	26	11	0	7
11	28	22	24	9	7	0

3. Найти минимальное цепное паросочетание  $M$  (по матрице  $D$ ).  
 $d[2,4]=6, d[5,8]=15, d[10,11]=7$ .
4. Для всех цепей  $M$  добавить искусственные ребра, соответствующие ребрам из  $M$ . В итоге получим некоторый  $s$ -граф  $G^*(M)$  (рис.2.50.).



260

5. Найти сумму весов всех ребер графа  $G^*(M)$ , используя для этого матрицу  $c[i,j]$  (вес искусственного ребра равен весу параллельного ему реального ребра). Согласно показанному выше утверждению, эта сумма равна минимальному весу цикла, проходящему по  $G$ :  $Ves=253+6+6+9+7=281$ .

6. По алгоритму Флери найти эйлеров цикл графа  $G^*(M)$ , записывая проходимые вершины в массив  $P[i]$  и соответствующий ему оптимальный цикл первоначального графа  $G$ .

$P[i]=\{1,2,4,6,9,10,12,11,10,6,7,8,10,11,8,7,5,3,4,5,7,4,2,3,1\}$ .

*Вывод:*

$Ves$  – вес оптимального цикла обхода ребер графа;

$P[i]$  – последовательность вершин, задающая оптимальный цикл.

### **ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

Требуется определить оптимальный маршрут почтальона, проходящий хотя бы один раз по каждой из улиц района, заданного в задаче для самостоятельной работы к п.2.3.2. Критерий оптимальности – минимизация суммарно пройденного расстояния.

### **2.3.4. Маршрут коммивояжера**

В транспортной логистике чрезвычайно часто возникают задачи, когда прохождение транспорта по всем дорогам обслуживаемой сети вовсе не обязательно, однако важен факт заезда в каждый из обслуживаемых объектов. Иногда дополнительно уточняется, что по некоторым причинам в каждый город можно заезжать не более одного раза. Именно так и была сформулирована так называемая задача коммивояжера, поставленная еще в 1934 году и ставшая впоследствии весьма знаменитой.

Введем некоторые термины. Объекты пронумерованы числами  $j, j = \{1, 2, \dots, N\}$ . Тур коммивояжера может быть описан циклической перестановкой  $t \in T, t=(j[1],j[2],\dots,j[N],j[1])$ , причем все  $j[1],\dots,j[N]$  – разные номера; повторяющийся в начале и конце  $j[1]$

показывает, что перестановка зациклена. Расстояния между парами вершин  $c_{ij}$  образуют матрицу  $C$ . Задача состоит в том, чтобы найти тур  $t \in T$ , минимизирующий функционал  $l = l(t) = \sum_{i=1..n} c(j[i], j[i+1])$ , где  $j[N+1] = j[1]$ .

В своей области (оптимизации дискретных задач) задача коммивояжера ЗК служит своеобразным полигоном, на котором испытываются все новые методы. При помощи алгоритмов, решающих эту задачу, находят решение большого количества родственных задач. К таким задачам относится задача сбора почтовых отправок из ящиков, которая может в большинстве случаев быть поставлена не как задача китайского почтальона, а именно как задача коммивояжера (тогда почтовые ящики принимаются за вершины сети обслуживаемых объектов). Составление графика движения школьного автобуса по заданным остановкам имеет ту же основу: необходимость заезда на каждую остановку и желательность минимизации суммарно проезжаемого расстояния.

В ряде отраслей промышленности, особенно фармацевтического и химического плана, возникает внешне совсем иная задача планирования производства. Допустим, нужно произвести ряд продуктов, используя единственный тип аппаратуры или реактор. Аппарат должен (или не должен) быть перенастроен (очищен) после того, как произведен продукт  $p_i$ , но до того, как началось производство продукта  $p_j$ . Допустим, стоимость перенастройки аппаратуры постоянна и не зависит от сочетания только что произведенного и готовящегося к производству продукта (или просто неизвестна и берется какое-то усредненное ее значение). Разумеется, не требуется никаких затрат, если перенастройка аппаратуры не нужна. Пусть такие продукты по технологическим соображениям производятся в некотором цикле, т.е. после производства  $N$  продуктов снова возобновляется производство в том же фиксированном порядке. Возможна внешне совсем иная ситуация, которая однако решается тем же самым методом. Возникает вопрос, может ли быть найдена циклическая последовательность производства продуктов  $p_j$ , не требующая

перенастройки аппаратуры? Если такой последовательности не существует, то какова должна быть очередность производства продуктов с наименьшими затратами на перенастройку?

Возможна и другая интерпретация задачи о переналадках. Пусть имеется производственная линия для производства  $N$  красок разного цвета; обозначим эти краски номерами  $1, 2, \dots, N$ . Вся производственная линия одновременно производит только одну краску. Поскольку производство циклическое, то краски надо производить в циклическом порядке  $p=(j[1], j[2], \dots, j[N], j[1])$ . После окончания производства краски  $i$  и перед началом производства краски  $j$  надо отмыть оборудование от краски  $i$ . Для этого требуется время  $c[i, j]$ . Очевидно, что  $c[i, j]$  зависит как от  $i$ , так и от  $j$ , и что, вообще говоря,  $c[i, j] \neq c[j, i]$ . При некотором выбранном порядке  $p$  придется на цикл производства красок потратить

времени  $f = \sum_{i, j \in p} c[i, j] + \sum_{k=1}^n t[k]$ , где  $t[k]$  – чистое время

производства  $k$ -й краски (не считая переналадок). Однако вторая сумма в правой части постоянна, поэтому полное время на цикл производства минимизируется вместе с общим временем на переналадку, т.е. вместе с функционалом  $l = \sum_{i, j \in p} c[i, j]$ .

## НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ

Цикл, проходящий через все вершины неориентированного графа ровно по одному разу, называется гамильтоновым циклом. Цикл, проходящий через все вершины ориентированного графа ровно по одному разу, называется гамильтоновым контуром. Незамкнутый гамильтонов цикл (контур) называется "гамильтоновой цепью" ("гамильтоновым путем").

Обычно под понятием веса ребра подразумевают расстояние  $c[i, j]$ , откуда с точки зрения логики следует выполнение нескольких условий:

1. Неотрицательность, т.е. для всех  $i, j \in V$ :  $c[i, j] \geq 0$ ,  $c[i, i] = 0$ ;
2. Симметричность, т.е. для всех  $i, j \in V$ :  $c[i, j] = c[j, i]$ ;

3. Соответствие неравенству треугольника, т.е. для всех  $i, j, k \in V: c[i, j] + c[j, k] \geq c[i, k]$ .

В математической постановке говорится о произвольной матрице  $C$ . Сделано это потому, что имеется много прикладных задач, которые описываются основной моделью, но, всем условиям (1) - (3) не удовлетворяют. Особенно часто нарушается условие (2) (например, если  $c[i, j]$  – не расстояние, а плата за проезд, то стоимость железнодорожного билета Кишинев – Москва отличается по цене от билета Москва – Кишинев). Поэтому, вообще говоря, различают два варианта задачи коммивояжера: симметричную задачу, когда условие (2) выполнено (ей соответствует модель в виде неориентированного графа) и несимметричную в противном случае (она формализуется в терминах ориентированных графов). Условия (1) и (3) по умолчанию будем считать выполненными.

Рассмотрим вопрос о числе всех возможных туров. В несимметричной ЗК туры  $t=(j[1], j[2], \dots, j[N], j[1])$  и  $t'=(j[1], j[N], \dots, j[2], j[1])$  имеют разную длину и должны учитываться оба. Если зафиксировать на первом и последнем месте в циклической перестановке номер  $j$ , а оставшиеся  $N-1$  номеров переставить всеми  $(N-1)!$  возможными способами, то в результате получатся все несимметричные туры. Разных туров, очевидно,  $(N-1)!$ . Симметричных туров имеется в два раза меньше, ибо каждый засчитан два раза: как  $t$  и как  $t'$ .

### *ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ*

1. Дан ориентированный граф  $G$ , требуется найти в нем гамильтонов цикл или все существующие гамильтоновы циклы.
2. Дан полный ориентированный граф  $G$ , дугам которого приписаны произвольные веса  $C=[c_{ij}]$ . Найти гамильтонов цикл с наименьшим суммарным весом (минисуммная постановка).
3. Дан полный ориентированный граф  $G$ , дугам которого приписаны произвольные веса  $C=[c_{ij}]$ . Найти гамильтонов



**цикл, в котором самая длинная дуга минимальна (минимаксная постановка).**

Естественно, если граф не полный, то при необходимости его можно рассматривать как полный, приписывая отсутствующим дугам бесконечный вес.

Очевидно, что задача (1) эквивалентна задаче (3). Этот вывод может быть сделан на основе простой процедуры. В полном орграфе  $G_1$ , конечно, есть гамильтонов цикл, пусть это цикл  $\Phi_1$ , и вес его самой длинной дуги равен  $c_1$ . Удалив из графа  $G_1$  дугу с весом, равным  $c_1$ , получим оргграф  $G_2$ . Найдем в нем гамильтонов цикл  $\Phi_2$  и пусть вес его самой длинной дуги равен  $c_2$ . Удалим из него какую-нибудь дугу с весом  $c_2$  и так будем продолжать до тех пор, пока не получим оргграф  $G_{M+1}$ , не содержащий никакого гамильтонова цикла. Тогда по определению, гамильтонов цикл  $\Phi_M$  в графе  $G_M$ , имеющий вес  $c_M$ , является решением задачи (3), так как из-за отсутствия гамильтонова цикла в  $G_{M+1}$  следует, что в  $G_1$  не существует никакого гамильтонова цикла, не использующего по крайней мере одну дугу с весом, большим или равным  $c_M$ . Таким образом, алгоритм нахождения гамильтонова цикла в орграфе, применяемый в задаче (1), решает также и задачу (3). И наоборот, располагая алгоритмом решения задачи (3), несложно найти и решение задачи (1), для чего существующим дугам графа приписываются единичные веса, а недостающим дугам – бесконечные веса, после чего ищется гамильтонов цикл с наименьшей самой длинной дугой: если ее вес конечен (равен 1), то в первоначальном графе есть гамильтонов цикл, если бесконечен – то нет. Итак, задачи (1) и (3) эквивалентны и далее рассматриваются совместно, в рамках задачи (1).

Кроме того, задача (1) является частным случаем задачи (2). Так, приписывая случайным образом дугам заданного орграфа  $G$  конечные веса, а отсутствующим дугам веса бесконечные, получаем в чистом виде задачу (2). Если ее решение, т.е. кратчайший гамильтонов цикл, имеет конечное значение, то это решение является гамильтоновым циклом графа  $G$ , т.е. ответом на задачу (1). Если же решение имеет бесконечное значение, то  $G$  не имеет гамильтонова цикла.

Гамильтонов цикл, так же как и эйлеров цикл, не обязательно существует в графе. Однако в отличие от критерия существования в произвольном графе эйлерова цикла, с циклом гамильтоновым ситуация не такая однозначная. Пока неизвестно никакого простого критерия или алгебраического метода, позволяющего ответить на вопрос, существует или нет в произвольном графе гамильтонов цикл. Существуют оценочные и весьма общие критерии, а также алгебраические методы, которые не могут быть применены к задачам с более чем несколькими десятками вершин ввиду чрезмерных требований к памяти компьютера и значительного времени для вычислений. Кроме того, на практике часто используются усовершенствованные методы перебора. Среди них можно отметить метод Робертса и Флореса, его улучшенную версию, а также мультицепной метод Селби. Рассмотрим решение задачи (2) как более общей.

Вообще то, как точное решение задачи коммивояжера – это перебор всех возможных гамильтоновых циклов. Его можно либо усовершенствовать для снижения размерности, либо заменить на приближенные или эвристические методы, что в некоторых случаях может быть целесообразно.

Рассмотрим четыре различных по своей природе алгоритма для случая неориентированных графов (симметричная задача коммивояжера) и проанализируем их эффективность и погрешность.

## *ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ*

### *Алгоритм 1. «Жадный»*

Как было показано в задаче 1, жадный алгоритм успешно решил задачу Прима-Краскала. В задаче коммивояжера «жадный» алгоритм превратится в стратегию «иди в ближайший (в который еще не входил) город». «Жадный» алгоритм очевидно бессилен в этой задаче. Рассмотрим для примера сеть на рис. 2.51, представляющую «узкий» ромб.

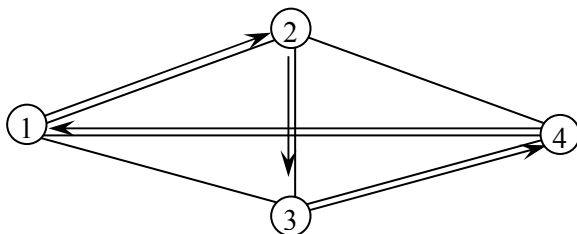


Рис.2.51. Иллюстрация работы «жадного» алгоритма

Пусть коммивояжер стартует из города 1. Алгоритм «иди в ближайший» выведет его в город 2, затем в 3, затем в 4; на последнем шаге придется платить за жадность, возвращаясь по длинной диагонали ромба. В результате получится не кратчайший, а длиннейший тур. Итак, очевидно, что «жадный» алгоритм ошибается. Возникает вопрос, насколько значительна эта ошибка?

Определим понятие погрешности неточного алгоритма в задаче минимизации. Пусть  $F_b$  – настоящий минимум, а  $F_a$  – тот квазiminимум, который получен по алгоритму. Ясно, что  $F_a/F_b \geq 1$ , но это утверждение лишь говорит о том, что погрешность существует. Чтобы оценить ее, нужно зажать отношение оценкой сверху:

$$F_a / F_b < 1 + \sigma,$$

где, как обычно в высшей математике,  $\sigma > 0$ , но, против обычая, может быть очень большим. Величина  $\sigma$  и будет служить мерой погрешности. Если алгоритм минимизации будет удовлетворять данному условию, будем говорить, что он имеет погрешность  $\sigma$ .

*Утверждение 1:* Либо алгоритм А определяет, существует ли в произвольном графе гамильтонов цикл, либо погрешность А при решении ЗК может быть произвольно велика.

Доказательство этого утверждения выглядит так. Предположим, что имеется алгоритм А решения ЗК, погрешность которого нужно оценить. Возьмем произвольный граф  $G(V, U)$ , ( $V \leq N$  и по нему составим входную матрицу ЗК.

$$c[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } (i,j) \text{ принадлежит } U; \\ 1 + N*\sigma, & \text{если ребро } (i,j) \text{ не принадлежит } U. \end{cases}$$

Если в графе  $G$  есть гамильтонов цикл, то минимальный тур проходит по этому циклу и  $F_b=N$ . Если алгоритм  $A$  тоже всегда будет находить этот путь, то по результатам алгоритма можно судить, есть ли гамильтонов цикл в произвольном графе. Однако непереборный алгоритм, который мог бы ответить, есть ли гамильтонов цикл в произвольном графе, науке не известен. Таким образом, алгоритм  $A$  должен иногда ошибаться и включать в тур хотя бы одно ребро длины  $1+N*\sigma$ . Но тогда

$$F_a = (N-1) + (1+N*\sigma) = N(1+\sigma),$$

так что  $F_a/F_b=1+\sigma$ , т.е. превосходит погрешность  $\sigma$ , определенную ранее. Поскольку никаких ограничений на величину  $\sigma$  выставлено не было, погрешность алгоритма  $A$  может быть произвольно велика.

Это соображение впервые было опубликовано Сани и Гонзалесом и основано на том, что нет никаких ограничений на длину ребер. Утверждение неверно, если расстояния подчиняются неравенству треугольника (если выполняется условие 2, приведенное в начале данной задачи).

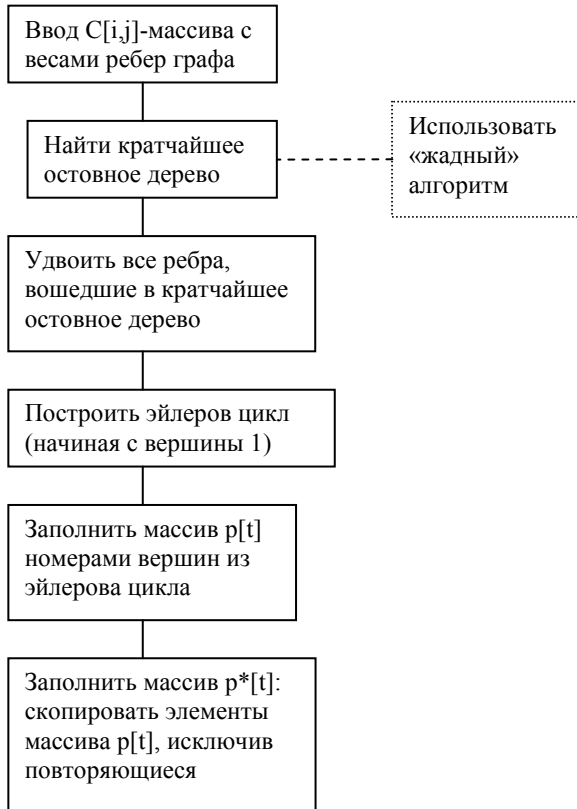
Если неравенство треугольника соблюдается, можно предложить несколько алгоритмов с погрешностью  $\sigma=1$ , т.е. ошибающихся не более чем в два раза.

## *Алгоритм 2. «Деревянный»*

### Основная идея

Данный алгоритм основан на построении кратчайшего остовного дерева и последующего удвоения его ребер.

Схема работы алгоритма показана на рис.2.52.



*Рис.2.52. Схема работы деревянного алгоритма*

### Формальное описание алгоритма

Ввод:

$C[i, j]$ -массив с весами ребер графа.

Общий шаг:

1. Найти кратчайшее остовное дерево при помощи «жадного» алгоритма.

2. Удвоить все ребра, вошедшие в кратчайший остов. Полученный граф  $G^*$  – связный и его вершины имеют только четные степени. Соответственно, как было показано в задаче 11, в графе существует Эйлеров цикл.

3. Построить Эйлеров цикл, начиная с вершины 1, номера вершин заносятся в массив  $p[t]$ .

4. Просматривая  $p[t]$ , произвести копирование его элементов в массив  $p^*[t]$ , игнорируя повторно встречающиеся вершины. Тур, записанный в массиве  $p^*[t]$  как раз и будет являться результатом алгоритма.

Вывод:

Массив  $p^*[t]$ .

Поскольку алгоритм не точный, требуется оценить его погрешность.

*Утверждение 2:* Погрешность деревянного алгоритма равна 1 (т.е. деревянный алгоритм ошибается менее чем в два раза).

Доказательство этого утверждения выглядит так. Возьмем минимальный тур длины  $F_b$  и удалим из него максимальное ребро  $c$ . Длина получившейся гамильтоновой цепи  $L_{bc} < b$ . Но эту же цепь можно рассматривать, как остовное дерево, ибо эта цепь достигает все вершины и не имеет циклов. Длина кратчайшего остовного дерева  $L_{ost}$  не может быть больше, чем  $L_{bc}$ :  $L_{ost} \leq L_{bc}$ . Имеем цепочку неравенств  $F_b > L_{bc} \geq L_{ost}$ . Но удвоенное дерево (оно же эйлеров граф) сводилось к туру посредством спрямлений, следовательно, длина полученного по алгоритму тура удовлетворяет неравенству  $2L_{ost} \geq F_a$ . Умножая первое неравенство на два и соединяя его со вторым, получаем цепочку неравенств  $2F_b > 2L_{bc} \geq 2L_{ost} \geq F_a$ , откуда получаем  $2F_b > F_a$ , и как следствие,  $F_a/F_b < 2$ , что при  $\sigma=1$  эквивалентно  $F_a/F_b < 1+\sigma$ .

Утверждение доказано. Конечно, результат, возможно, в два раза худший, чем оптимальное решение, не всегда может считаться удовлетворительным, однако это уже явный прогресс по

сравнению с жадным алгоритмом. Алгоритмы такой точности обычно называют приближенными, а не просто эвристическими.

### ПРИМЕР

Задача коммивояжера. Грузовик выезжает с центральной базы для доставки товара определенному числу потребителей и возвращается впоследствии на базу. Стоимость перевозки пропорциональна пройденному расстоянию. Требуется при заданной матрице расстояний между объектами (таблица) найти путь обхода всех потребителей строго по одному разу при наименьших затратах.

Таблица 2.39. Матрица расстояний между объектами

	1	2	3	4	5	6
1	-	6	4	8	7	14
2	6	-	7	11	7	10
3	4	7	-	4	3	10
4	8	11	4	-	5	11
5	7	7	3	5	-	7
6	14	10	10	11	7	-

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Ввод:

$C[i,j]$ -массив с весами ребер графа

Таблица 2.40. Матрица  $C[i,j]$

	1	2	3	4	5	6
1	-	6	4	8	7	14
2	6	-	7	11	7	10
3	4	7	-	4	3	10
4	8	11	4	-	5	11
5	7	7	3	5	-	7
6	14	10	10	11	7	-

Общий шаг:

1. Найти кратчайшее остовное дерево при помощи «жадного» алгоритма (рис. 2.53, а).

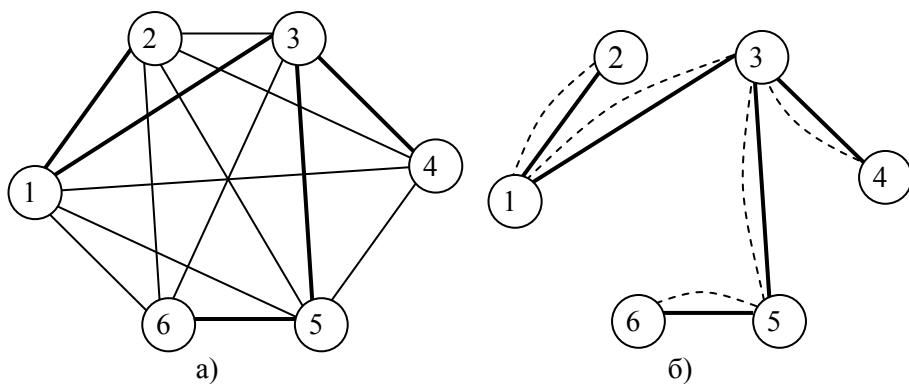


Рис.2.53. Поиск остова «жадным» алгоритмом

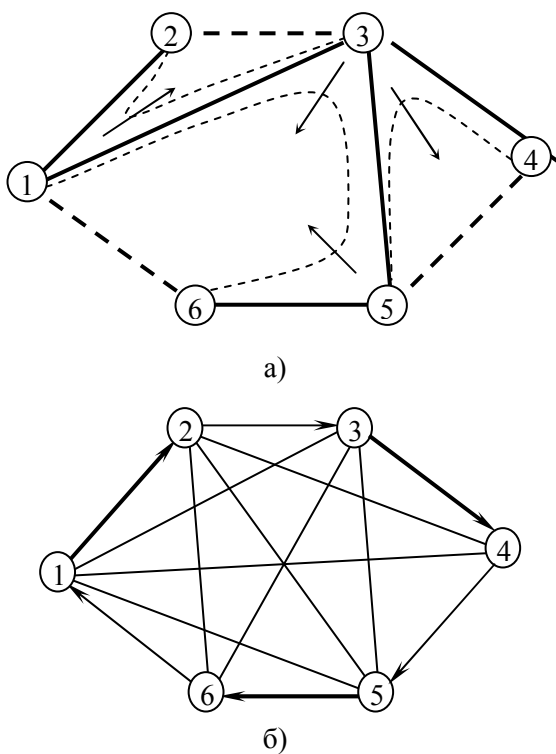


Рис.2.54. Сокращение выбранного пути – «сглаживание углов»



*Вывод:*

Массив  $p^*[t]$ .

2. Удвоить все ребра, вошедшие в кратчайший остов. Полученный граф  $G^*$  – связный и его вершины имеют только четные степени (рис. 2.53, б). В графе существует эйлеров цикл.

3. Построить эйлеров цикл, начиная с вершины 1, номера вершин заносятся в массив  $p[t]$ :  $\{1, 2, 1, 3, 4, 3, 5, 6, 5, 3, 1\}$ .

4. Просматривая  $p[t]$ , произвести копирование его элементов в массив  $p^*[t]$ , игнорируя повторно встречающиеся вершины.

$p^*[t]$ :  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 1\}$  – по сути мы произвели основанное на неравенстве треугольника «сглаживание», например выбирая вместо 2-1-3 прямой путь 2-3 на том основании, что в вершине 1 мы уже побывали (рис. 2.54, а, б).

Итак, алгоритм с погрешностью, равной единице, существует, и он не единственен. Однако хотелось бы иметь и точное решение. Вероятно (по крайней мере, так считается в настоящее время), точное решение может быть получено только переборными алгоритмами, вследствие чего возникают два вопроса: как наиболее эффективно осуществлять этот самый перебор и нельзя ли его как-нибудь усовершенствовать за счет отсека заведомо неперспективных вариантов.

### ***Алгоритм 3. Лексикографический перебор***

Понятно, что практически полный перебор применим только в задачах малого размера. Выше было показано, что в задаче коммивояжера, с  $N$  объектами требует при полном переборе рассмотрения  $(N-1)!/2$  туров в симметричной задаче и  $(N-1)!$  туров в несимметричной, а факториал, как известно, растет удручающе быстро: если при 5 объектах необходимо перебрать 24 варианта, то при 10 эта цифра равна 362880, при 20-ти имеет порядок  $10^{17}$ , а при сорока –  $10^{46}$ .

Чтобы проводить полный перебор в ЗК, нужно научиться (разумеется, без повторений) генерировать все перестановки заданного числа  $M$  элементов. Это можно сделать несколькими способами, но самый распространенный и применимый вообще для переборных алгоритмов – это перебор в лексикографическом порядке.

Пусть имеются некоторый алфавит и наборы символов алфавита (букв), называемые словами. Буквы в алфавите упорядочены, а значит, можно упорядочить и слова. Скажем, дано слово  $u=(u_1, u_2, \dots, u_N)$  и слово  $v=(v_1, v_2, \dots, v_N)$ . Тогда если  $u_1 < v_1$ , то и  $u < v$ ; если же  $u_1=v_1$ , то сравнивают вторые буквы и т.д. Символ  $<$  читается как «предшествует».

### Основная идея

Нужно двигаться по перестановке справа налево, пока не появится число меньшее, чем рассмотренное перед ним. Это число надо увеличить, поставив вместо него какое-то число из расположенных правее. Число большее, чем текущее, обязательно найдется в силу начальной упорядоченности по возрастанию. Если есть несколько больших чисел, то, очевидно, надо ставить меньшее из них. Затем все числа далее до конца (кроме выбранного большего) нужно упорядочить по возрастанию. В результате получится непосредственно следующая перестановка.

### Возможные сложности

В ЗК с  $N$  городами не нужны все перестановки из  $N$  элементов, потому что перестановки, скажем, 1 3 5 4 2 и 3 5 4 2 1 (последний элемент соединен с первым) задают один и тот же тур, начинающийся сначала с города 1, а потом с города 3.

### Способы преодоления

Нужно зафиксировать начальный город 1 и присоединять к нему все перестановки из четырех элементов. Этот перебор даст нам  $(N-1)!$  разных туров, т.е. полный перебор в несимметричной ЗК (мы по-прежнему будем различать туры 1 3 5 4 2 и 1 2 4 5 3).

## Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

$C[i, j]$  – массив с весами ребер графа

*Инициализация:*

*search* – логическая переменная, принимает значение «истина», если существуют еще не рассмотренные подстановки, и «ложь» если таковых больше нет, изначально равна «истина»;

$P[i]$  – очередная подстановка, изначально заполнить номерами вершин в порядке возрастания  $\{1, 2, \dots, N\}$ ;

*Best\_p[i]* – массив для хранения последней самой удачной подстановки, изначально совпадает с массивом  $P[i]$ ;

*new\_res* – длина гамильтонова цикла для очередной подстановки, изначально приравнять нулю;

*best\_res* – длина гамильтонова цикла для подстановки, записанной в *best\_p[i]*, изначально приравнять  $c[1, 2] + c[2, 3] + \dots + c[N-1, N] + c[N, 1]$ .

*Общий шаг:*

До тех пор пока *search*=true

В цикле по *i* от *N* до 2 (первый элемент фиксируем)

Если  $p[i-1] < p[i]$  то

*search*:=true;

*find\_Min*:=  $p[i-1]$ ;

*find\_Max*:= Б (символ, у которого нет среди рассматриваемых последователя);

в цикле по *j* от *i* до *N* если  $(p[j] > find\_Min)$   
and  $(p[j] < find\_Max)$  то

Схема работы алгоритма дана на рис.2.55.

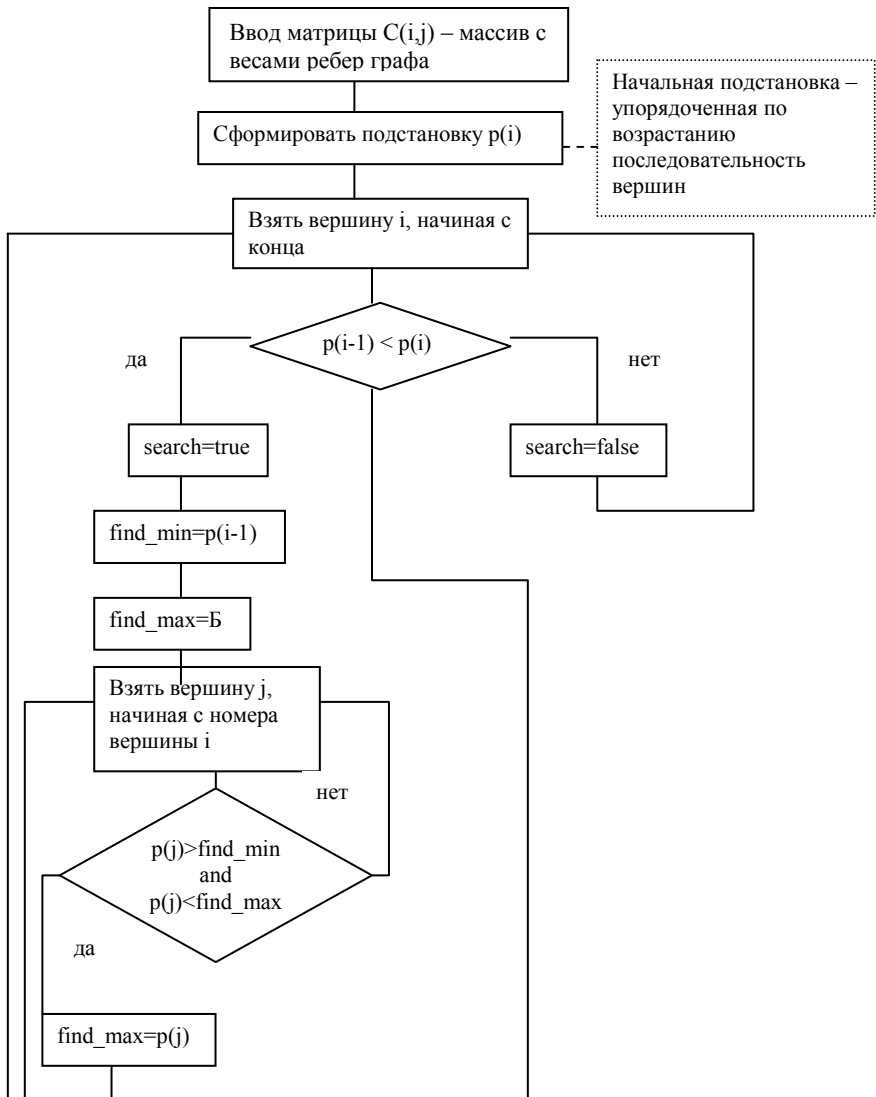


Рис.2.55. Схема работы алгоритма "Лексикографический перебор"(начало)

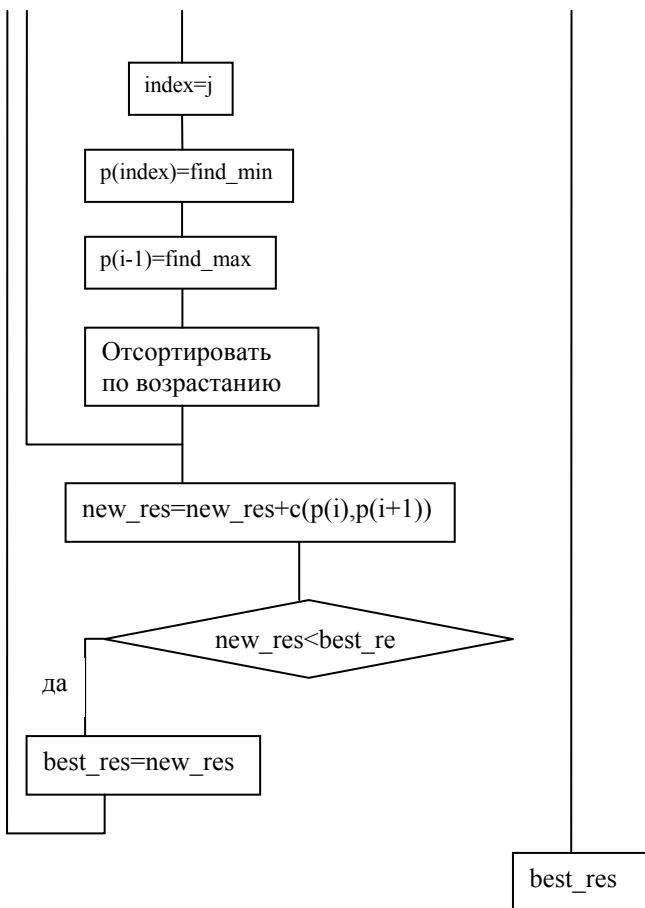


Рис.2.55. Схема работы алгоритма "Лексикографический перебор"  
(окончание)

```

    find_Max:= p[j]; index:=j;
    p[index]:=find_Min;
    p[i-1]:= find_Max;
    в цикле по j от i до N отсортировать по
    возрастанию p[j];
  
```

```

    В цикле по  $i$  от 1 до  $N-1$ 
    new_res:= new_res +  $c[p[i], p[i+1]]$ ;
new_res:= new_res +  $c[p[N], p[1]]$ ;
if new_res < best_res то
    best_res:= New_res
    В цикле по  $i$  от 1 до  $N$  best_p[i]:=p[i];
new_res:=0 (обнуляем для последующего
использования);
Иначе search:=false.

```

*Вывод:*

$best\_res$  – длина кратчайшего гамильтонова цикла;  
 $Best\_p[i]$  – массив, содержащий подстановку, для  
которой длина гамильтонова цикла равна  $best\_res$ .

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

*Ввод:*  $C[i,j]$  – массив с весами ребер графа

Таблица 2.41. Матрица  $C[i,j]$

	1	2	3	4	5	6
1	-	6	4	8	7	14
2	6	-	7	11	7	10
3	4	7	-	4	3	10
4	8	11	4	-	5	11
5	7	7	3	5	-	7
6	14	10	10	11	7	-

*Инициализация:*

```

search:=true;
P[i]:= {1,2,3,4,5,6};
best_p[i]:= {1,2,3,4,5,6};
new_res:=0;
best_res:=6+7+4+5+7+14=43.

```

*Общий шаг:*

До тех пор пока  $search=true$ :

### Перестановка №1:

В цикле по  $i$  от 6 до 2

$i=6$ :

Если  $p[5] < p[6]$  ( $5 < 6$ , выполняется) то

$search:=true$ ;

$find\_min:=p[5]=5$ ;

$find\_max:=9$ ;

в цикле по  $j$  от 6 до 6 если  $(p[j]>find\_min)$  and  $(p[j]<$

$find\_max)$  то

при  $j=6$   $find\_max:=p[6]=6$ ,  $index:=6$ ;

$p[6]:=5$ ;

$p[5]:=6$ ;

в цикле по  $j$  от 6 до 6 отсортировать по возрастанию  $p[j]$

(пока не требуется);

В цикле по  $i$  от 1 до 5:

при  $i=1$ :  $new\_res:=0 + c[p[1], p[2]]=c[1,2]=6$ ;

при  $i=2$ :  $new\_res:=6 + c[p[2], p[3]]=6+c[2,3]=6+7=13$ ;

при  $i=3$ :  $new\_res:=13 + c[p[3], p[4]]=13+c[3,4]=13+4=17$ ;

при  $i=4$ :  $new\_res:=17 + c[p[4], p[5]]=17+c[4,6]=17+11=28$ ;

при  $i=5$ :  $new\_res:=28 + c[p[5], p[6]]=28+c[6,5]=28+7=35$ ;

$new\_res:=35 + c[p[6], p[1]]=35 + c[5,1]=35+7=42$ ;

if  $new\_res < best\_res$  ( $42 < 43$ , выполняется) то

$best\_res:=42$ ;

В цикле по  $i$  от 1 до  $N$   $best\_p[i]:=p[i]=\{1,2,3,4,6,5\}$

$new\_res:=0$ ;

Иначе ...

(итак, получилась перестановка 1 2 3 4 6 5 с весом 42, что лучше чем предыдущий результат, поэтому вес запомним в переменной  $best\_res$ , а саму подстановку в массиве  $best\_p[i]$ )

### Перестановка №2 (на данный момент $p[i]=\{1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\}$ )

В цикле по  $i$  от 6 до 2

При  $i=6$ :

Если  $p[5] < p[6]$  ( $6 < 5$ , не выполняется) то ...

Иначе  $search:=false$ ;

При  $i=5$ :

Если  $p[4] < p[5]$  ( $4 < 6$ , выполняется) то

*search*:=true;

*find\_min*:=  $p[4]=4$ ;

*find\_max*:= 9;

в цикле по  $j$  от 5 до 6 если  $(p[j] > find\_min)$  and  $(p[j] <$

*find\_max*) то

при  $j=5$  ( $p[5] > 4$ ) and  $(p[5] < 9)$  *find\_max*:=  $p[5]=6$ , *index*:=5;

при  $j=6$  ( $p[6] > 4$ ) and  $(p[6] < 6)$  *find\_max*:=  $p[6]=5$ , *index*:=6;

$p[4]$ :=5;

$p[6]$ :=4;

в цикле по  $j$  от 5 до 6 отсортировать по возрастанию  $p[j]$ ;

(из массива {1,2,3,5,6,4} получим {1,2,3,5,4,6});

В цикле по  $i$  от 1 до 5:

при  $i=1$ : *new\_res*:= 0+  $c[p[1], p[2]]=c[1,2]=6$ ;

при  $i=2$ : *new\_res*:= 6+  $c[p[2], p[3]]=6+c[2,3]=6+7=13$ ;

при  $i=3$ : *new\_res*:= 13+  $c[p[3], p[4]]=13+c[3,5]=13+3=16$ ;

при  $i=4$ : *new\_res*:= 16+  $c[p[4], p[5]]=16+c[5,4]=16+5=21$ ;

при  $i=5$ : *new\_res*:= 21+  $c[p[5], p[6]]=21+c[4,6]=21+11=32$ ;

*new\_res*:= 32 +  $c[p[6], p[1]]=32+c[6,1]=32+14=46$ ;

if *new\_res* < *best\_res* ( $46 < 42$ , не выполняется) то ..

*new\_res*:=0;

Иначе ...

(итак, получилась перестановка 1 2 3 5 4 6 с весом 46, что хуже, чем предыдущий результат 42).

Аналогично будут получены прочие подстановки: приведем их сначала для иллюстрации собственно лексикографического перебора без расчета веса соответствующего гамильтонова цикла. Подчеркнут элемент, меньший предыдущего при просмотре массива с конца. Жирным шрифтом выделен элемент, на который будет осуществляться замена. Курсивом отмечена часть массива, нуждающаяся в сортировке по возрастанию.

№0: 1 2 3 4 5 6

№1: 1 2 3 4 6 **5** делаем замену 1 2 3 5 6 4 и после сортировки получим:

№2: 1 2 3 5 4 6

№3: 1 2 3 5 6 4 делаем замену 1 2 3 6 5 4 и после сортировки получим:



№4: 1 2 3 6 4 5

№5: 1 2 3 6 5 4 делаем замену 1 2 4 6 5 3 и после сортировки получим:

№5: 1 2 4 3 5 6

№6: 1 2 4 3 6 5 делаем замену 1 2 4 5 6 3 и после сортировки получим:

№7: 1 2 4 5 3 6

№8: 1 2 4 5 6 3

и т.д. в ходе перебора получим лучший результат для подстановки 1 2 6 5 4 3 с весом 36.

*Вывод:*

$best\_res = 36;$

$best\_p[i] = \{1, 2, 6, 5, 4, 3\}.$

Итак, как осуществлять перебор, ясно. Интуитивно также понятно, что если в матрице весов дуг (расстояний) есть явно большой по сравнению с прочими элемент, допустим  $c[i, j]$ , то рассматривать маршрут коммивояжера, который включает в себя поездку из  $i$ -го города в  $j$ -й, явно неразумно. При обращении к полному перебору очевидно, что даже за счет исключения одного такого элемента можно избежать рассмотрения  $(N-2)!$  циклов, содержащих комбинацию  $(i, j)$ . Развивая эту идею дальше, многие исследователи приходили к идеям разделения перебираемых подстановок на группы и отсеечения не единичных неперспективных вариантов, а целых подгрупп. Основанные на этой логике методы получили общее название «методы ветвей и границ» и отличаются критериями, по которым подстановки делятся на группы, и признаками, по которым группа признается неперспективной. Рассмотрим версию Литтла, первым использовавшим подобные идеи для решения задачи коммивояжера.

#### ***Алгоритм 4. Метод ветвей и границ Литтла***

##### **Основная идея**

Разделить огромное число перебираемых вариантов на классы и получить оценки (снизу – в задаче минимизации, сверху –

в задаче максимизации) для этих классов, чтобы иметь возможность отбрасывать варианты не по одному, а целыми классами.

### Возможные сложности

Трудность состоит в том, чтобы найти такое разделение на классы (ветви) и такие оценки (границы), чтобы процедура была эффективной.

### Способы преодоления

В принципе можно трактовать  $c[i,j]$  как стоимость проезда из города  $i$  в город  $j$ . Допустим, что добрый мэр города  $j$  издал указ выплачивать каждому въехавшему в город коммивояжеру 100 рублей. Это означает, что любой тур подешевеет на 100 рублей, поскольку в любом туре нужно въехать в город  $j$ . Но поскольку все туры равномерно подешевели, то прежний минимальный тур будет и теперь стоить меньше всех (на те же 100 рублей). Добрый же поступок мэра можно представить как уменьшение всех чисел  $j$ -го столбца матрицы  $C$  на 100. Если бы мэр хотел спроводить коммивояжеров из  $j$ -го города и установил награду за выезд в размере 500 рублей, это можно было бы выразить вычитанием 500 из всех элементов  $j$ -й строки. Это снова изменило бы стоимость тура, но минимальный тур остался бы минимальным. Таким образом, вполне логичным представляется следующее утверждение.

*Утверждение 3.* Вычитание любой константы из всех элементов любой строки или столбца матрицы  $C$  не изменяет минимального тура.

Отсюда рождается идея получить побольше нулей в матрице  $C$ , не получая там, однако, отрицательных чисел. Для этого необходимо вычесть из каждой строки ее минимальный элемент (это называется приведением по строкам), а затем из каждого столбца матрицы, приведенной по строкам, его минимальный элемент, получив матрицу, приведенную по столбцам. Теперь надо выбрать такие  $N$  элементов в матрице  $C$ ,

чтобы каждый столбец содержал ровно один элемент из выбранных (в каждый город коммивояжер въехал один раз), и каждая строка содержала ровно один элемент (из каждого города коммивояжер выехал один раз), и, кроме того, элементы описывали один тур, а не несколько независимых циклов. Если удастся выбрать только элементы, равные в приведенной матрице нулям, мы точно получим минимальный тур, так как для этой (приведенной) матрицы его вес будет равен нулю. Этот же тур будет минимальным и для исходной матрицы, причем его стоимость (вес) будет равна сумме констант приведения по строкам плюс сумма констант приведения по столбцам. Если нулевой тур в приведенной матрице построить не удастся, то, по крайней мере, мы будем иметь оценку снизу для всех туров, равную сумме всех констант приведения, пусть это  $Cost\_Min$ .

Теперь надо разделить все возможные варианты на классы. Для этого производится так называемая «оценка нулей». Рассмотрим нуль в клетке  $(i, j)$  приведенной матрицы. Он означает, что стоимость перехода из города  $i$  в город  $j$  равна 0. Ну, а если не идти из города  $i$  в город  $j$ ? Тогда все равно нужно войти в город  $j$  из другого города, причем стоимость этого процесса указана в  $j$ -м столбце и варьируется в зависимости от того, из какого города в него входить. Допустим, дешевле всего войти из города  $k_1$  за  $x$  рублей. Далее, все равно надо будет выехать из города  $i$ , причем стоимость этого процесса указана во  $i$ -й строке и варьируется в зависимости от того, в какой город идти из  $i$ -го. Допустим, дешевле всего идти в город  $k_2$  за  $y$  рублей. Суммируя эти два минимума  $(x+y=z)$ , имеем стоимость удорожания тура, если не ехать «по нулю» из города  $i$  в город  $j$ . Это и есть оценка нуля. Далее выбираем максимальную из этих оценок. Пусть это оценка нуля, находящегося в клетке  $[l, m]$ . Со смысловой точки зрения ребро  $[l, m]$  самое (или одно из самых) желательное для включения в тур, потому как его замена на альтернативные пути входа в город  $m$  и выхода из города  $l$  обойдется дороже всего.

Итак, выбрано нулевое ребро  $[l, m]$  с оценкой  $z^{lm}$ . Разобьем все туры на два класса – включающие ребро  $[l, m]$  и не включающее ребро  $[l, m]$ . Про второй класс можно сказать, что придется приплатить еще минимум  $z$ , так что туры этого класса

"стоят"  $Cost\_Min + z^{lm}$  или больше. Что касается первого класса, то в нем надо рассмотреть приведенную матрицу с вычеркнутой  $l$ -й строкой и  $m$ -м столбцом. Дополнительно в уменьшенной матрице следует поставить запрет в клетке  $[m, l]$ , ибо выбрано ребро  $[l, m]$ , и замыкать преждевременно тур ребром  $[m, l]$  нельзя. Уменьшенную матрицу (назовем ее  $C^{lm}$ ) вероятно можно привести по строкам и (или) по столбцам суммарно на величину  $z^{lm*}$ , так что каждый тур, ей отвечающий, стоит не меньше  $Cost\_Min + z^{lm*}$ .

Схематичное представление результатов ветвлений и получения оценок показано на рис. 2.56. Кружки представляют классы: верхний кружок – класс всех туров; левый – класс всех туров, включающих ребро  $[l, m]$ , нижний правый – класс всех туров, не включающих ребро  $[l, m]$ . Числа рядом с кружками – оценки снизу.

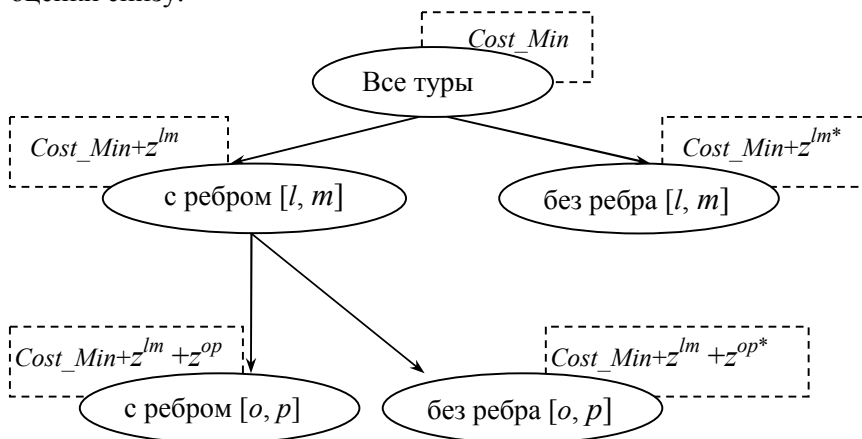


Рис.2.56. Первые два уровня дерева Литтла

Продолжим ветвление в положительную сторону: влево – вниз. Для этого оцениваются нули в матрице  $C^{lm}$ . Выбирается нуль с наибольшей оценкой, пусть это оценка нуля, находящегося в клетке  $[o, p]$  и она равна  $z^{op}$ . Итак, выбрано нулевое ребро  $[o, p]$ . Теперь класс туров, содержащих ребро  $[l, m]$ , можно разбить на два подкласса: содержащий ребро  $[o, p]$  и не содержащий ребра  $[o, p]$ .

Для них производятся аналогичные оценки снизу. Для второго подкласса (правая подветвь) оценка равна  $(Cost\_Min + z^{lm}) + z^{op}$ . Для первого – необходимо повторить процедуру с удалением из матрицы  $C^{lm}$   $o$ -й строки и  $p$ -го столбца, а также поставить запрет на элемент, образующий цикл с уже выбранными ветками  $[o, p]$  и  $[l, m]$ . После чего снова попробовать привести матрицу по строкам и/или столбцам допустим суммарно на величину  $z^{op*}$ . Таким образом, каждый тур в этой ветке будет стоить не меньше  $(Cost\_Min + z^{lm*}) + z^{op*}$ .

Процесс продолжается до тех пор, пока не кончится самая левая ветвь. При достижении низа по дереву перебора класс туров сузится до одного тура, а оценка снизу превратится в точную стоимость, пусть это  $Cost$ . Все классы (ветви), имеющие в качестве нижней оценки  $Cost$  или большее число, лучшего тура однозначно не содержат. Поэтому соответствующие вершины вычеркиваются, также вычеркиваются вершины, оба потомка которых вычеркнуты. Остальные ветки доводятся до конца. Таким образом, полный перебор значительно сокращается. Удовлетворительных теоретических оценок быстрогодействия алгоритма Литгла и родственных алгоритмов нет, но практика показывает, что даже 5 лет назад на существующих тогда машинах они часто позволяли решать задачу коммивояжера с  $N \sim 100$ . Это огромный прогресс по сравнению с полным перебором. Кроме того, алгоритмы типа ветвей и границ являются, если нет возможности доводить их до конца, эффективными эвристическими процедурами.

### Формальное описание алгоритма

*Ввод:*

$C[i, j]$  – массив с весами ребер графа.

*Инициализация:*

$Min[i]$  – рабочий массив, хранящий минимальные элементы по строкам (столбцам) матрицы;

$dob$  – рабочая переменная, хранящая сумму коэффициентов приведения по строкам и столбцам;

$cost\_min$  – нижняя граница стоимости тура;

*value*, *min\_i*, *min\_j* – рабочие переменные для хранения минимальной стоимости замены выбранного ребра тура, изначально приравнять чему-нибудь большому.

*Общий шаг:*

1 (Привести массив  $C[i, j]$ )

в цикле по *i* от 1 до *N* (по строкам):

    в цикле по *j* от 1 до *N* найти мин. элемент

*Min[i]*;

    в цикле по *j* от 1 до *N*  $c[i, j] := c[i, j] - \text{Min}[i]$ ;

*dob* := *dob* + *Min[i]*;

в цикле по *j* от 1 до *N* (по столбцам):

    в цикле по *i* от 1 до *N* найти мин. элемент

*Min[j]*;

    в цикле по *i* от 1 до *N*  $c[i, j] := c[i, j] - \text{Min}[j]$ ;

*dob* := *dob* + *Min[j]*

*Cost\_Min* := *dob*;

2. (оценить нули)

в цикле по *i* от 1 до *N*:

    в цикле по *j* от 1 до *N*:

        если  $c[i, j] = 0$  то

            в цикле по  $i_1$  от 1 до *N*:

                в цикле по  $j_1$  от 1 до *N*:

если  $(i_1 \neq i) \text{ and } (j_1 \neq j) \text{ and } c[i_1, j_1] < \text{Min}_i$

    то  $\text{Min}_i := c[i_1, j_1]$ ;

        если  $(i_1 \neq i) \text{ and } (j_1 \neq j) \text{ and } c[i_1, j_1] < \text{Min}_j$

        то  $\text{Min}_j := c[i_1, j_1]$ ;

$\text{value}[i, j] := \text{Min}_i + \text{Min}_j$  (заполнен массив

*value* содержащий оценки всех нулей).

*Max\_value* = 0.

3. в цикле по *i* от 1 до *N*:

    в цикле по *j* от 1 до *N*:

        если  $\text{value}[i, j] > \text{Max\_value}$  то

$\text{Max\_value} := \text{value}[i, j]$ ,

*i\_value* := *i*; *j\_value* := *j*;

    (таким образом найден элемент, имеющий максимальную оценку нуля).

Схема работы алгоритма приведена на рис. 2.57

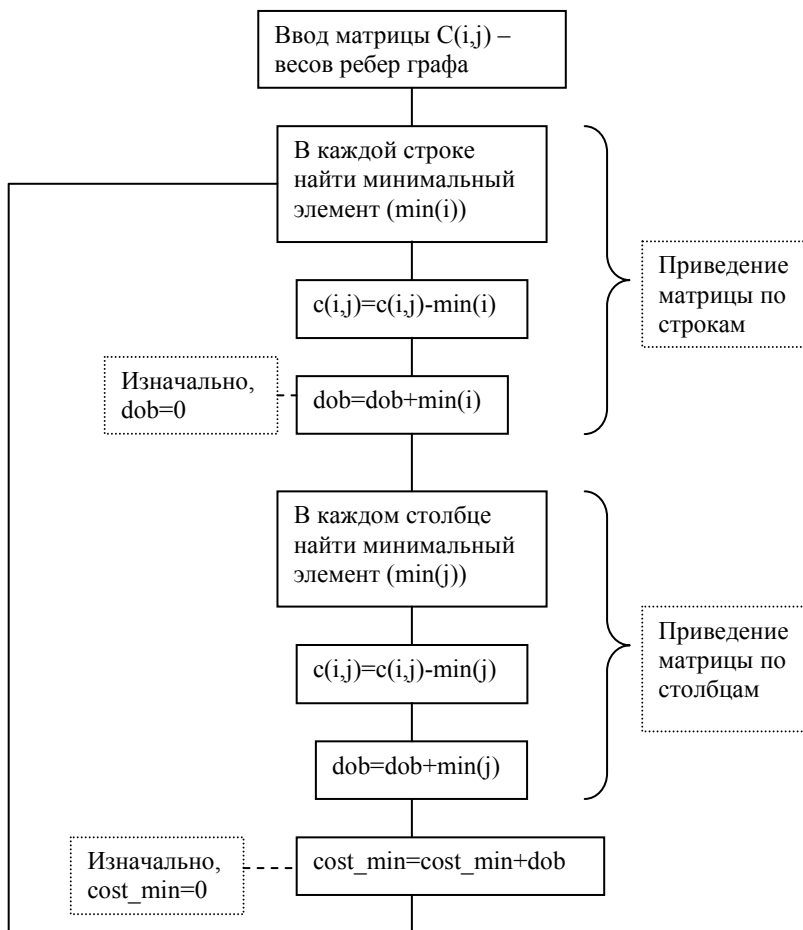


Рис.2.57. Схема работы алгоритма для метода ветвей и границ Литтла (начало)

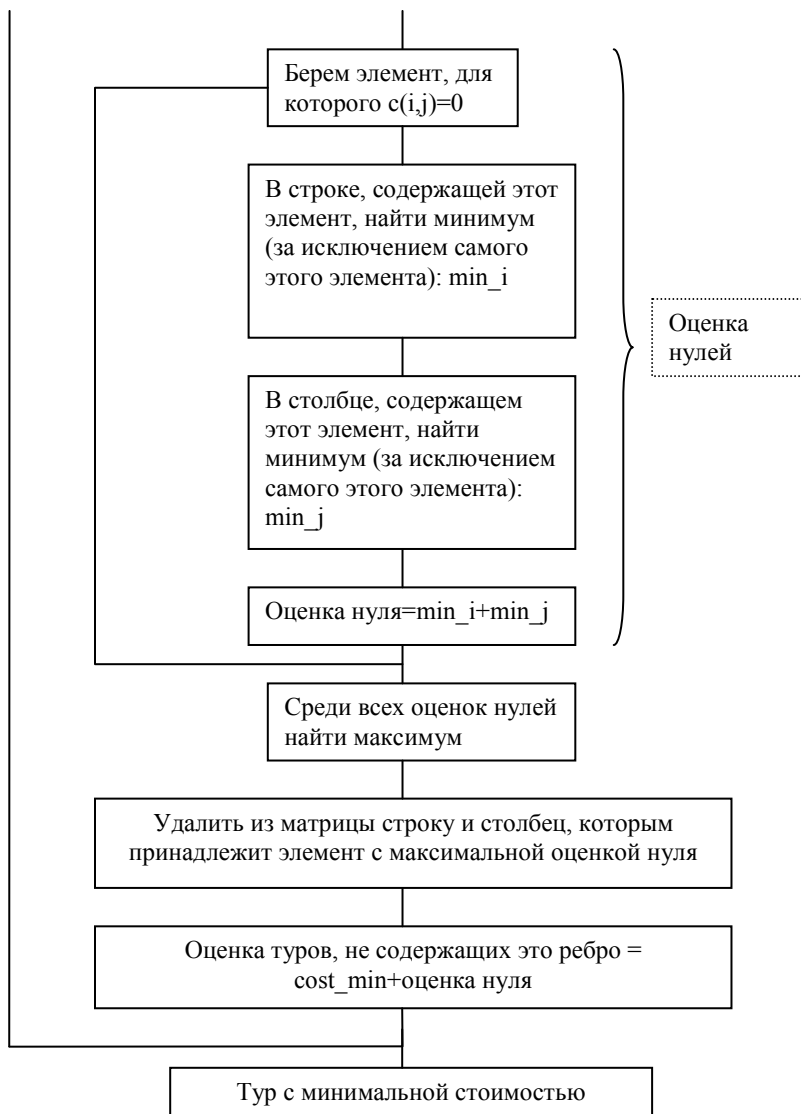


Рис.2.57.Схема работы алгоритма для метода ветвей и границ Литтла (окончание)



Итак выбрано ребро  $[i\_value, j\_value]$ , по принадлежности которого к турам производится первое ветвление. Автоматически получим оценку для туров, это ребро не содержащих, она равна  $Cost\_Min + Max\_value$ .

4. Оценим туры, содержащие выбранное ребро  $[i\_value, j\_value]$ . Удаляем из матрицы на  $i\_value$ -ую строку и  $j\_value$ . Полученная матрица приводится по столбцам и строкам суммарно на величину  $dob$ . Так получается нижняя оценка:  $Cost\_Min + Dob$ .

Далее аналогично. Очевидно, что подобные программы на алгоритмических языках пишутся с использованием функций или процедур. Полностью листинг здесь приводить не будем, поскольку смысл уже ясен, а искусство программирования остается за рамками данного учебного пособия.

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

*Ввод:*

$C[i, j]$ -массив с весами ребер графа;

Таблица 2.42. Матрица  $C[i, j]$

	1	2	3	4	5	6
1	-	6	4	8	7	14
2	6	-	7	11	7	10
3	4	7	-	4	3	10
4	8	11	4	-	5	11
5	7	7	3	5	-	7
6	14	10	10	11	7	-

*Инициализация:*

$Dob := 0$ .

*Общий шаг:*

1. Привести массив  $C[i, j]$

по строкам (табл. 2.43, а)  $Dob := 4 + 6 + 3 + 4 + 3 + 7 = 27$ ;

по столбцам (табл. 2.43, б)  $Dob := 27 + (2 + 1 + 4) = 34$ ;

$Cost\_Min := 34$ ;

Таблица 2.43. Приведение массива по строкам и столбцам

	1	2	3	4	5	6	Min[i]
1	-	6	4	8	7	14	4
2	6	-	7	11	7	10	6
3	4	7	-	4	3	10	3
4	8	11	4	-	5	11	4
5	7	7	3	5	-	7	3
6	14	10	10	11	7	-	7

а)

	1	2	3	4	5	6
1	-	2	0	4	3	10
2	0	-	1	5	1	4
3	1	4	-	1	0	7
4	4	7	0	-	1	7
5	4	4	0	2	-	4
6	7	3	3	4	0	-
Min[j]	0	2	0	1	0	4

б)

- Оценить нули, оценка приведена в скобках на табл.2.44.

Таблица 2.44. Оценка нулей

	1	2	3	4	5	6
1	-	0(1)	0(0)	3	3	6
2	0(1)	-	1	4	1	0(0)
3	1	2	-	0(1)	0(0)	3
4	4	5	0(1)	-	1	3
5	4	2	0(0)	1	-	0(0)
6	7	1	3	3	0(1)	-

- Найти элемент, имеющий максимальную оценку  
 $Max\_value:=1, i\_value:=1, j\_value:=2.$

Таким образом, выбрано ребро [1,2], по принадлежности которого к турам произведем первое ветвление. Автоматически получим

оценку для туров, это ребро не содержащих:  $Cost\_Min + Max\_value = 34 + 1 = 35$ .

3. Оценить туры, содержащие выбранное ребро.

Удаляем из матрицы на табл. 2.44. 1-ю строку и 2-й столбец. Полученная матрица (табл. 2.45, а) приводится по первому столбцу на 1, таким образом, суммарно по матрице  $dob = 1$ . Итак получена нижняя оценка для туров, содержащих ребро [1,2]:  $Cost\_Min + Dob = 34 + 1 = 35$ . Далее аналогично (сокращенное изложение) продолжаем левую ветку. Снова оцениваем нули в матрице, выбираем элемент с максимальной оценкой, пусть это элемент [3,1] (табл. 2.45,б). Таким образом выбрано ребро [3,1], по принадлежности которого к турам произведем второе ветвление. Автоматически получим оценку для туров, не содержащих ребро [3,1]:  $35 + 3 = 38$ .

Таблица 2.45. Приведение матрицы и оценка нулей после выбора ребра [3,1]

	1	3	4	5	6
2	-	1	4	1	0
3	1	-	0	0	3
4	4	0	-	1	3
5	4	0	1	-	0
6	7	3	3	0	-
Min[j]	1	0	0	0	0

а)

	1	3	4	5	6
2	-	1	4	1	0(1)
3	0(3)	-	0(1)	0(0)	3
4	3	0(1)	-	1	3
5	3	0(0)	1	-	0(0)
6	6	3	3	0(3)	-

б)

4. Удаляем 3-ю строку и 1-й столбец и выставляем запрет на ребро [2,3] потому, как оно образует цикл с уже выбранными ребрами [1,2] и [3,1] (табл.2.46, а). Эта матрица приводится по столбцу 4 на 1. Итак, получена нижняя оценка для туров, содержащих ребро [3,1]:  $35 + 1 = 36$ .

После приведения матрицы оценим ее нули и выберем элемент с максимальной оценкой. Это элемент [6,5] и его оценка равна 3 (табл.2.46, б). Таким образом, на новом узле ветвления выбрано ребро [6,5]. Автоматически получим оценку для туров этой ветки, не содержащих ребро [6,5]:  $36 + 3 = 39$ .

Таблица 2.46. Приведение матрицы после выбора ребра [6,5]

	3	4	5	6
2	-	4	1	0
4	0	-	1	3
5	0	1	-	0
6	3	3	0	-
Min[j]		1		

а)

	3	4	5	6
2	-	3	1	0(1)
4	0(1)	-	1	3
5	0(0)	0(2)	-	0(0)
6	3	2	0(3)	-

б)

Удаляем 6-ю строку и 5-й столбец и выставляем запрет на ребро [5,6] (табл.2.46, а). Эта матрица неприводимая, следовательно, оценка туров этой ветки, содержащих ребро[6,5], не увеличивается и равна 36.

Таблица 2.46. Приведение матрицы и оценка нулей после выбора ребра [2,6]

	3	4	6
2	-	3	0
4	0	-	3
5	0	0	-

а)

	3	4	6
2	-	3	0(6)
4	0(3)	-	3
5	0(0)	0(3)	-

б)

	3	4
4	0	-
5	-	0

в)

Оценим ее нули и выберем элемент с максимальной оценкой. Это элемент [2,6] и его оценка равна 6 (табл.2.46, б). Таким образом, на новом узле ветвления выбрано ребро [2,6]. Автоматически получим оценку для туров этой ветки, не содержащих ребро[2,6]:  $36+6=42$ .

Удаляем 2-ю строку и 6-й столбец и выставляем запрет на ребро [5,3], ибо уже построен фрагмент тура [3,1,2,6,5] и надо запретить преждевременный возврат (5,3) (табл.2.47, а). Теперь, когда осталась матрица 2x2 с запретами по диагонали, достраиваем тур ребрами (4,3) и (5,4). Сейчас получен тур {1,2,6,5,4,3,1} стоимостью в 36. При достижении низа по дереву перебора класс туров сузился до одного тура, а оценка снизу превратилась в точную стоимость.

Теперь пора проанализировать промежуточный результат. Все классы, имеющие оценку 36 и выше, лучшего тура не содержат. Поэтому соответствующие вершины вычеркиваются. Вычеркиваются также вершины, оба потомка которых вычеркнуты. Мы колоссально сократили полный перебор. Осталось проверить, не содержит ли лучшего тура класс, соответствующей матрице на табл.2.44., с запретом на элемент [1,2] (табл.2.47, а).

Ее можно привести на 1 по второму столбцу (что дало нижнюю оценку этим турам в 35). Оценим нули (табл.2.47, б): максимальное значение равно 3 у нуля в клетке (1,3), так что нижняя оценка туров, содержащих ребро [1,3], равна  $35+3=38$ , что превосходит стоимость уже полученного тура 36, так что этот вариант отсекается.

Таблица 2.47. Проверка правой ветви дерева Литтла

	1	2	3	4	5	6
1	-	-	0	3	3	6
2	0	-	1	4	1	0
3	1	2	-	0	0	3
4	4	5	0	-	1	3
5	4	2	0	1	-	0
6	7	1	3	3	0	-
Min[j]	0	1	0	0	0	0

а)

	1	2	4	5	6	Min[i]
2	0	-	4	1	0	0
3	-	1	0	0	3	0
4	4	4	-	1	3	1
5	4	1	1	-	0	0
6	7	0	3	0	-	0

в)

	1	2	3	4	5	6
1	-	-	0(3)	3	3	6
2	0(1)	-	1	4	1	0(0)
3	1	1	-	0(1)	0(0)	3
4	4	4	0(1)	-	1	3
5	4	1	0(0)	1	-	0(0)
6	7	0(1)	3	3	0(0)	-

б)

Для получения оценки положительного варианта исключаем из матрицы (табл.2.47, б) первую строку и третий столбец, ставим запрет (3,1) и получаем новую матрицу (табл.2.47, в). Эта матрица приводится по четвертой строке на 1, таким образом, оценка класса достигает 36, и его дальнейшая разработка становится неперспективной. Поскольку у вершины «все туры»

убиты оба потомка, она убивается тоже. Вершин не осталось, перебор окончен (рис. 2.58).

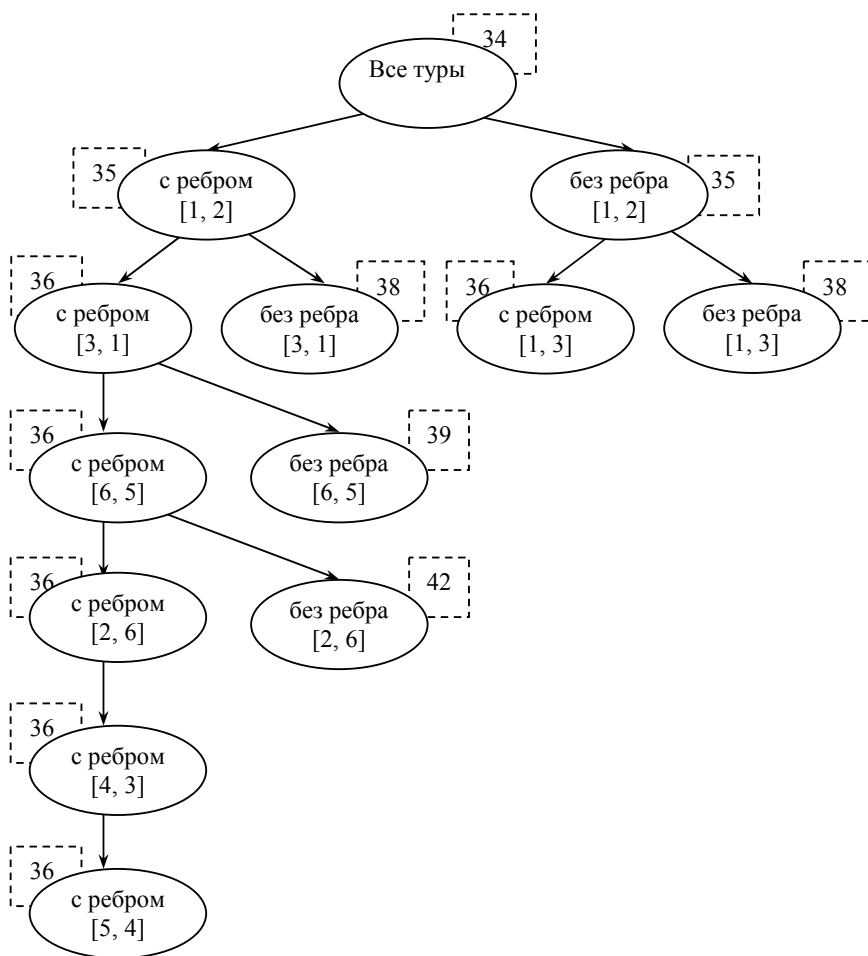


Рис.2.58.. Полное дерево решений в соответствии с алгоритмом Литтла

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача о переналадках. На химическом комбинате в одной из установок производится 8 типов реагентов. Ежемесячно необходимо выпускать и отправлять потребителям по определенному количеству каждого реагента. Учитывая их срок хранения и график реализации, запастись реагентами впрок нельзя. К сожалению, не все реагенты можно производить друг за другом без капитальной очистки установки. Определить, существует ли циклическая последовательность производства, не требующая очистки установки. Очистка не требуется в следующих случаях ( $A \rightarrow B | C$  означает, что после  $A$  можно производить реагент  $B$  или  $C$ ,  $A \leftrightarrow B$  означает, что после  $A$  можно производить  $B$  и наоборот):

$1 \rightarrow 4 | 6 | 8$ ;  $2 \rightarrow 1 | 3 | 6$ ;  $3 \rightarrow 2 | 5$ ;  $4 \rightarrow 2 | 5$ ;  $5 \rightarrow 4 | 7$ ;  $6 \rightarrow 3 | 5$ ;  
 $7 \rightarrow 1 | 8$ ;  $8 \rightarrow 1 | 7$ .

### 2.3.5. Транспортная задача

Расширением задачи обслуживания является более реалистичная постановка, когда помимо  $N$  потребителей продукции существует и несколько ее производителей, с неодинаковым в общем случае количеством выпускаемой продукции. Естественно, что стоимость доставки продукции неодинакова для различных пар «производитель-потребитель». Если при этом предположить, что эти производители входят в одну компанию (холдинг), то сразу встает вопрос о минимизации суммарных расходов на транспортировку при условии обеспечения всех потребителей нужным количеством товара.

Будем считать, что компания производителей выпускает ровно столько продукции, сколько требуется всем  $N$  потребителям. Такая задача обычно называется транспортной.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеются  $M$  поставщиков одного товара, которые производят  $a[1], \dots, a[i], \dots, a[M]$  единиц, и  $N$  потребителей, которым нужно

$b[1], \dots, b[j], \dots, b[N]$  единиц этого товара. Пусть производство и потребление сбалансировано,  $\sum_{i=1}^M a[i] = \sum_{j=1}^N b[j]$ . Заданы

стоимости  $c[i, j] > 0$  перевозок единицы товара от  $i$ -го производителя к  $j$ -му потребителю. Считается, что перевозка  $k$  единиц товара в  $k$  раз дороже, чем перевозка единицы. Найти, сколько товара каждый производитель должен направлять каждому потребителю, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

### НЕОБХОДИМЫЕ УТОЧНЕНИЯ

Это – весьма реалистическая постановка задачи. Единственная натяжка – линейная зависимость цены перевозки от ее величины. Ну, скажем, если производители – это пекарни, а потребители – булочные, то нелепо утверждать, что перевозка одной булки в два раза дешевле, чем перевозка двух булок. Однако, если считать товар не в булках, а в грузовиках, то линейность становится вполне реалистическим предположением.

Вообще говоря, это типичная задача линейного программирования, когда дан функционал который необходимо минимизировать или максимизировать при заданных линейных ограничениях. В терминах линейного программирования транспортная задача ставится так: найти такие перевозки  $x[i, j] > 0$ , чтобы минимизировать общую стоимость

перевозок,  $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c[i, j] \cdot x[i, j] \rightarrow \min$  при ограничениях

$\sum_{j=1}^N x[i, j] = a[i]$  (каждый поставщик вывезет весь товар) и  
 $\sum_{i=1}^M x[i, j] = b[j]$  (каждый потребитель получит по потребности).

Эта задача может быть решена стандартными методами, например симплекс-методом, но в результате вполне могут получиться не целые значения  $x[i, j]$ . Однако, очевидно, что



применение в логистических задачах о доставке таких методов не может быть оправдано, хотя бы потому, что везти полгрузовика продукции вовсе не в два раза дешевле, чем полный грузовик. Таким образом, оптимальное математическое решение задачи не будет соответствовать оптимальной практической реализации. Итак, явно необходимо ограничение на целочисленность результата.

Для этого применим специальный алгоритм решения транспортной задачи, в котором не будет делений, так что, если входные данные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – целочисленные, то и ответ  $x$  будет целочисленным.

### ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

#### Необходимая теоретическая информация

Рассмотрим квадратную решетку, образованную  $M$  горизонтальными прутьями и  $N$  вертикальными прутьями. Некоторые узлы решетки помечены крестами. Цепью между крестами называется ломаная, такая что:

- все ее звенья горизонтальны или вертикальны;
- все узлы излома – в точках, помеченных крестами.

Циклом называется замкнутая цепь. Нас будет интересовать, каково максимальное количество крестов, которые можно разместить на решетке, чтобы через них нельзя было провести цикл.

На рис. 2.59, а приведен пример цикла, а на рис. 2.59, б – пример цепи.

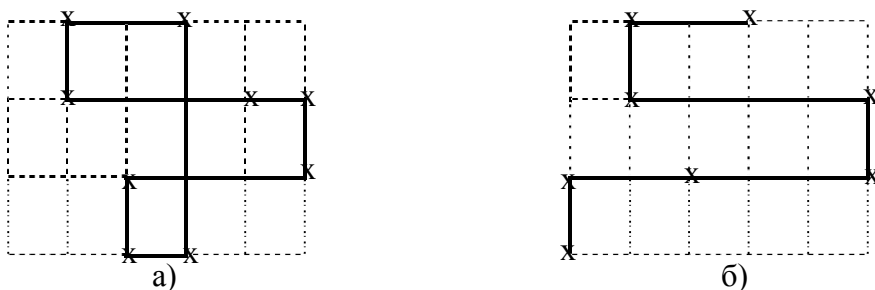


Рис.2.59. Пример цикла и цепи на квадратной решетке

*Утверждение 1:* Максимальное число крестов, которое можно расположить в  $N:M$ -решетке, равно  $M+N-1$ . В качестве примера можно привести расположение  $M$  крестов вдоль левого прутка и  $N$  крестов вдоль нижнего: всего  $M+N-1$ , так как угловой крест засчитан дважды. Как видно на рис. 2.60, цикла в этом случае не получается.

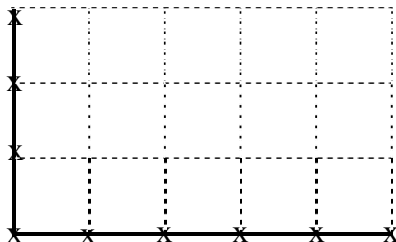


Рис.2.60. Размещение  $M+N-1$  крестов на  $N:M$ -решетке

Теперь вернемся к транспортной задаче. Ее условия можно представить в виде табл.2.48.

Таблица 2.48. Внесение перевозок в таблицу

	$b[1]$	$b[2]$	.....	$b[j]$	.....	$b[N]$
$a[1]$	$c[1,1]$	$c[1,2]$		$c[1,j]$		$c[1,N]$
	$x[1,1]$	$x[1,2]$		$x[1,j]$		$x[1,N]$
$a[2]$	$c[2,1]$	$c[2,2]$		$c[2,j]$		$c[2,N]$
	$x[2,1]$	$x[2,2]$		$x[2,j]$		$x[2,N]$
.....						
$a[i]$	$c[i,1]$	$c[i,2]$		$c[i,j]$		$c[i,N]$
	$x[i,1]$	$x[i,2]$		$x[i,j]$		$x[i,N]$
.....						
$a[M]$	$c[M,1]$	$c[M,2]$		$c[M,j]$		$c[M,N]$
	$x[M,1]$	$x[M,2]$		$x[M,j]$		$x[M,N]$

Строки соответствуют поставщикам, столбцы – потребителям, таким образом имеется  $M \times N$  клеток, в верхней части каждой клетки указана цена перевозки, а процесс решения представляет собой заполнение нижних частей клеток положительными числами  $x[i,j]$ . Представим, что узлы рассмотренной ранее решетки стоят в центре каждой клетки, а положительные перевозки  $x[i,j] > 0$  играют роль крестов, так что наборы перевозок в таблице могут быть циклическими (кресты образуют цикл) и нециклическими.

*Утверждение 2:* Оптимальное решение достигается на нециклических наборах.

### Основная идея

Выбрать некоторую начальную перевозку, соответствующую максимальному ациклическому набору загруженных клеток, посчитать значение функционала. Затем среди оставшихся незагруженных клеток выбрать еще одну, получив цикл, после чего удалить из цикла одну из ранее выбранных перевозок, стремясь таким образом уменьшить значение функционала.

### Возможные сложности

1. Выбор начальной перевозки.
2. Выбор новой перевозки для получения цикла.
3. Определение того, какую из имеющихся перевозок убирать для получения ациклического набора.
4. Выявление момента, когда пора прекращать процесс уменьшения функционала.

### Способы преодоления

1. Выбор начальной перевозки.

Для инициализации проставляем перевозки жадным алгоритмом по строкам. Принцип следующий: ищем  $j$ -го потребителя, к которому  $i$ -му поставщику дешевле всего везти продукцию (т.е.  $\text{Min}_j c[i,j]$ ). Полностью удовлетворяем его

потребность (записываем в нижней левой части клетки  $b[j]$ ). Далее ищем следующего и т.д. до тех пор, пока полностью потребность удовлетворить уже не удастся, потому как закончится ресурс  $i$ -го поставщика. Тогда отдаем этому потребителю все, что есть. Важное дополнение: если при заполнении строки в какой-то клетке ставится перевозка, причем одновременно исчерпывается мощность поставщика и потребность покупателя, то жадный алгоритм продолжает работать, ставя фиктивную перевозку 0 в самую дешевую незанятую клетку. Это добавочное правило не относится к заполнению последней строки.

В ходе инициализации построен набор из  $N+M-1$  загруженных клеток (включая фиктивные, загруженные нулем), причем этот набор – ациклический.

## 2. Выбор новой перевозки с целью получения циклического набора.

Для осуществления выбора служат флаги, которые приписываются каждой строчке:  $u[1], \dots, u[M]$ , и каждому столбцу:  $v[1], \dots, v[M]$ . Они считаются следующим образом: изначально назначается  $u[1]=0$ . Найдем в этой строке загруженные клетки и подпишем под столбцом для каждой из этих клеток числа  $v$ , такие, что для загруженной клетки  $(i, j)$  выполняется условие  $u[i] + v[j] = c[i, j]$ . Теперь, зная  $v[j]$ , найдем в столбце  $j$  еще одну загруженную клетку  $(k, j)$  с  $c[k, j]$  и посчитаем  $u[k] = c[k, j] - v[j]$ . Далее, через загруженные клетки типа  $c[k, 1]$  посчитаем  $v[1]$ , так до тех пор, пока не посчитаем все  $u[i]$  и  $v[j]$ . Использование данного алгоритма всегда приводит к однозначному нахождению всех значений  $u[i]$  и  $v[j]$ , что вполне очевидно вытекает из ацикличности имеющегося набора.

Теперь будем выбирать клетку  $(i, j)$ , для которой  $u[i] + v[j] > c[i, j]$ . Это будет незагруженная клетка, потому что для всех загруженных, по построению,  $u[i] + v[j] = c[i, j]$ . Теперь, вместе с остальными загруженными клетками, весь набор образует цикл и, как легко видеть, только один. Величину  $p[i, j] = u[i] + v[j] - c[i, j]$  называют потенциалом клетки. Опыт расчетов показывает, что итераций часто бывает меньше, если выбирать новую клетку не просто, чтобы  $p[i, j]$  было положительным, а так, чтобы  $p[i, j]$  был максимальным.

### 3. Удаление перевозки для возврата к ациклическому набору.

Допустим на минутку, что для только что выбранной клетки  $c[i,j]=u[i]+v[j]$ . Дадим новой клетке номер 1 и, двигаясь по циклу, перенумеруем остальные клетки числами – например 2,3,...,8 (табл.2.49.). Рассмотрим два класса клеток: нечет, куда входит новая клетка, и чет; вместе с суммами  $c[i,j]$  – на классы С-чет и С-нечет.

Таблица 2.49. Поиск удаляемой перевозки

	b[1]	b[2]	b[j]	b[N]	u[j]
a[1]	c[1,1] x[1,1]	c[1,2] x[1,2]	c[1,j] x[1,j] 2	c[1,N] x[1,N] 3	u[1]
a[2]	c[2,1] x[2,1] 6	c[2,2] x[2,2] 7	c[2,j]	c[2,N]	u[2]
a[i]	c[i,1]	c[i,2] x[i,2] 8	c[i,j] 1	c[i,N]	u[i]
a[M]	c[M,1] x[M,1] 5	c[M,2]	c[M,j]	c[M,N] x[M,N] 4	u[M]
v[i]	v[1]	v[2]	v[j]	v[N]	

С-нечет =  $c[i,j]+c[1,N]+c[M,1]+c[2,2]= (u[i]+v[j]) + (u[1]+v[N]) + (u[M]+v[1]) + (u[2]+v[2])$ .

С-чет =  $c[1,j]+c[M,N]+c[2,1]+c[i,2]=(u[1]+v[j]) + (u[M]+v[N]) + (u[2]+v[1]) + (u[i]+v[2])$ .

Каждый элемент из класса С-чет окаймлен по циклу элементами из класса С-нечет: один в той же строке, другой – в том же столбце, значит, как С-чет, так и С-нечет являются суммами тех же  $u$  и  $v$ , т.е. С-чет=С-нечет. Поскольку на самом деле в новой клетке  $c[i,j]<u[i]+v[j]$ , то С-чет>С-нечет.

Теперь найдем минимальную перевозку  $r$  на более дорогом полуцикле чет:

$$\min (x[1,j]+x[M,N]+x[2,1]+x[i,2])=x^*.$$

Вычтем  $x^*$  из всех перевозок полуцикла С-чет (при этом может получиться более одного нуля, но удалим только один – остальные останутся фиктивными перевозками) и прибавим ко всем перевозкам полуцикла С-нечет (значит, новая клетка станет загруженной), как показано на табл.2.50. (допустим что  $x^*=x[M,N]$ )

и с лучшим функционалом вернемся к начальному положению – ациклическому набору из  $M+N-1$  клеток.

Таблица 2.50. Возврат к ациклическому набору

	$b[1]$	$b[2]$	$b[j]$	$b[N]$	$u[j]$
$a[1]$				2	3
$a[2]$	6	7	$x[1,j]-x^*$	$x[i,N]+x^*$	
$a[i]$		8	$x[i,2]-x^*$	1	
$a[M]$	5				4
$v[i]$					

#### 4. Критерий остановки алгоритма.

Итерации повторяются до тех пор, пока может быть найдена клетка с положительным потенциалом:

$$u[i] - v[j] - c[i,j] = p[i,j] > 0.$$

Если все потенциалы незагруженных клеток неположительны, то получена оптимальная система перевозок.

#### Формальное описание алгоритма

(формальное описание не приводится ввиду его плохой наглядности)

Ввод:

$a[1..M]$  – массив, содержащий мощности производителей;

$b[1..N]$  – массив, содержащий количество продукции, необходимой потребителям;

$c[i,j]$  – массив, элементы которого равны стоимости доставки одной единицы продукции от  $i$ -ого поставщика  $j$ -ому покупателю.

Общий шаг:

1. Жадным алгоритмом задать начальную перевозку  $x[i,j]$ .

2. Рассчитать значения потенциалов  $u[i]$  и  $v[j]$ .

3. В цикле по  $i$  от 1 до  $N$   
 В цикле по  $j$  от 1 до  $M$

Схема работы алгоритма показана на рис. 2.61.

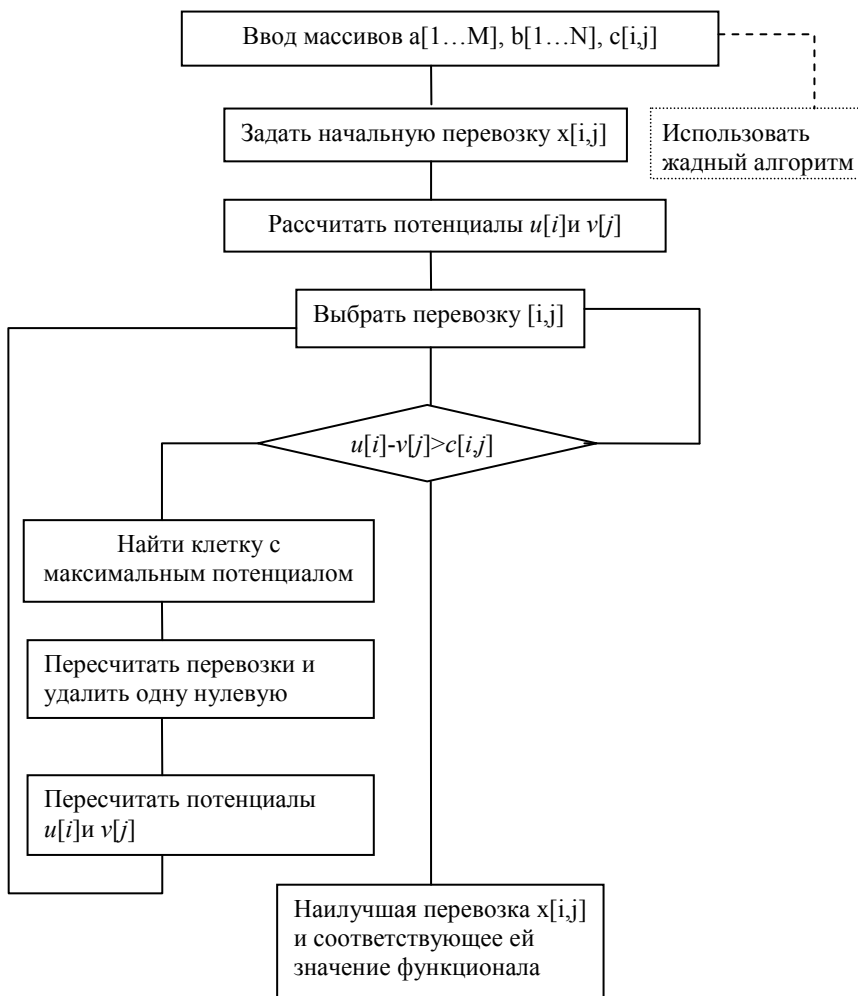


Рис.2.61. Схема работы алгоритма решения транспортной задачи

До тех пор пока существуют клетки  $[i, j]$  такие что  $u[i] - v[j] > c[i, j]$  выполнять:

3.1. поиск клетки с наибольшим положительным потенциалом (получаем цикл);

3.2. пересчет перевозок и удаление одной нулевой перевозки (снова получаем ациклический набор);

3.3. пересчет потенциалов  $u[i]$  и  $v[j]$ .

*Вывод:*

$F$  – значение функционала, соответствующее минимальной стоимости доставки;

$x[i, j]$  – количество продукции, доставляемой от  $i$ -го поставщика  $j$ -му покупателю.

### ПРИМЕР

Три хлебобулочных комбината, принадлежащие одному владельцу, снабжают шесть небольших городов своей продукцией. Потребности городов: 8, 10, 7, 10, 15 и 5 автомашин в неделю, а мощности комбинатов – 10, 15 и 30 машин соответственно. Стоимость проезда одной а/м от  $i$ -го комбината к  $j$ -му городу задана матрицей  $C$ . Найти оптимальное количество поставляемой из комбинатов в города продукции так, чтобы стоимость доставки была минимальной.

Таблица 2.51. Матрица стоимости проезда

Комбинат	Город					
	№1	№2	№3	№4	№5	№6
№1	3	$\infty$	2	5	3	4
№2	4	7	2	4	6	5
№3	2	5	8	$\infty$	6	7

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Запишем исходные данные в таблицу, причем веса ребер  $[i, j]$  (стоимость доставки из пункта  $i$  в пункт  $j$ ) будем указывать в верхней левой части клетки ( $c[i, j] = \infty$  означает, что из  $i$  в  $j$  нет дороги).

1. Проставим начальную перевозку жадным алгоритмом.



Таблица 2.52. Поиск начальной перевозки

	$b[1]=8$	$b[2]=10$	$b[3]=7$	$b[4]=10$	$b[5]=15$	$b[6]=5$	$u[i]$
$a[1]=10$	3	$\infty$	2	5	3	4	0
	<b>3</b>		<b>7</b>				
$a[2]=15$	4	7	2	4	6	5	1
	<b>5</b>			<b>10</b>		<b>0</b>	
$a[3]=30$	2	5	8	$\infty$	6	7	0
		<b>10</b>			<b>15</b>	<b>5</b>	
$v[j]$	3	5	2	3	6	7	

2. Подсчет потенциалов:  $u[1]=0$ . Найдем в этой строке загруженные клетки (это клетки (1,1) и (1,3)) и подпишем под столбцом для каждой из этих клеток числа  $v$ , такие, что для загруженной клетки  $(i,j)$   $u[i] + v[j] = c[i,j]$  это будут под столбцом 1 число 3, а под столбцом 3 число 2. Теперь, зная  $v[1]$ , найдем в столбце 1 еще одну загруженную клетку (2,1) с  $c[i,j]=4$  и посчитаем  $u[2]=1$ , так что  $c[2,1] = 4 = u[2] + v[1] = 1 + 3$ . Далее, через загруженные клетки  $c[2,4]=4$  и  $c[2,6]=5$  посчитаем  $v[4]=3$  и  $v[6]=7$ . Потом через клетку  $c[3,6]=7$  посчитаем  $u[3]=0$  откуда, через строку 3 посчитаем недостающие  $v[2]=5$  и  $v[5]=6$ .

3. В цикле по  $i$  от 1 до  $N$

В цикле по  $j$  от 1 до  $M$

До тех пор пока существуют клетки  $[i,j]$  такие что  $u[i]+v[j]>c[i,j]$ :

### 1-я итерация

3.1. Потенциал  $p$  максимален в клетке (1,5):  $p[1,5]=0+6-3=3$ .

Цикл образуют клетки (1,5) – (3,5) – (3,6) – (2,6) – (2,1) – (1,1) – (1,5).

3.2. С-счет:  $x[3,5]=15, x[2,6]=0, x[1,1]=3$ . Min=0.

С-нечет:  $x[1,5], x[3,6]=5, x[2,1]=5$ . В полуцикле чет есть фиктивная перевозка  $x[2,6]=0$ , поэтому прибавление или вычитание  $r=0$  ничего не изменит, кроме того, что нулевая перевозка передвинется в клетку (1,5).

3.3. Пересчет потенциалов и нового значения функционала:  $F=3*0+2*7+3*3+4*5+4*10+7*5+6*15+5*10=258$ .

Таблица 2.53. 1-я итерация

	$b[1]=8$	$b[2]=10$	$b[3]=7$	$b[4]=10$	$b[5]=15$	$b[6]=5$	$u[i]$
$a[1]=10$	3 6 3	$\infty$	2	5	3 1 0	4	0
$a[2]=15$	4 5 5	7	2	4	6 10	5 4	1
$a[3]=30$	2	5	8	$\infty$	6 2 15	7 3 5	3
$v[j]$	3	2	2	3	3	4	

### 2-я итерация

3.1. Теперь потенциал  $p$  максимален в клетке (3,1):

$$p[3,1]=3+3-2=4 \text{ и получается цикл}$$

$$(3,1) - (3,5) - (1,5) - (1,3) - (3,1).$$

3.2. С-чет:  $x[3,5]=15$ ,  $x[1,1]=3$ .  $\text{Min}=3$ . С-нечет:  $x[3,1]=2$ ,  $x[1,5]=0$ . Вычитаем из элементов С-чет  $\text{Min}$ , прибавляем к элементам С-нечет  $\text{Min}$ . Удаляем перевозку [1,1].

3.3. Пересчет потенциалов и нового значения функционала:

$$F=2*7+3*3+4*5+4*10+2*3+5*10+6*12+7*5=246.$$

Таблица 2.54. 2-я итерация

	$b[1]=8$	$b[2]=10$	$b[3]=7$	$b[4]=10$	$b[5]=15$	$b[6]=5$	$u[i]$
$a[1]=10$	3 4 3	$\infty$	2	5	3 3 3	4	0
$a[2]=15$	4 5	7	2	4	6 10	5	5
$a[3]=30$	2 1 3	5	8	$\infty$	6 2 12	7 5	3
$v[j]$	-1	2	2	-1	3	4	

### 3-я итерация

3.1. Потенциал  $p$  максимален в клетке (2,3):  $p[2,3]=3$ .

$$\text{Цикл } (2,3) - (1,3) - (1,5) - (3,5) - (3,1) - (2,1) - (2,3).$$

3.2. С-чет:  $x[1,3]=7$ ,  $x[3,5]=12$ ,  $x[2,1]=5$ .  $\text{Min}=5$ .

С-нечет:  $x[2,3]$ ,  $x[1,5]=3$ ,  $x[3,1]=3$ . Вычитаем из элементов С-чет  $\text{Min}$ , прибавляем к элементам С-нечет  $\text{Min}$ . Удаляем перевозку [2,1].

3.3. Пересчет потенциалов и нового значения функционала:  
 $F=2*2+3*8+2*5+4*10+2*8+5*10+6*7+7*5=221$ .

Таблица 2.55. 3-я итерация

	$b[1]=8$	$b[2]=10$	$b[3]=7$	$b[4]=10$	$b[5]=15$	$b[6]=5$	$u[i]$
$a[1]=10$	3	$\infty$	2 2	5	3 8	4	0
$a[2]=15$	4 6	7	2 1	4 10	6	5	0
$a[3]=30$	2 5	5	8	$\infty$	6 4	7 5	3
$v[j]$	-1	2	2	4	3	4	

Теперь клеток с положительным потенциалом нет. Таким образом, наилучший полученный результат  $f = 221$  описанным способом улучшен быть не может.

*Вывод:*

$F=221$ ;  $x[i,j]$  – количество доставляемой продукции:  $x[1,3]=2$ ,  $x[1,5]=8$ ,  $x[2,3]=5$ ,  $x[2,4]=10$ ,  $x[3,1]=8$ ,  $x[3,2]=10$ ,  $x[3,5]=7$ ,  $x[3,6]=5$ .

### ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Организация располагает набором однородных технических средств в количестве 30 единиц, из них на базах №1 и №2 находится по 11 агрегатов, а на базе №3 – 8. Эту технику планируется на четырех объектах, причем объект №1 нуждается в 5 единицах этой техники, объекты №2 и 3 – в 9-ти, а объект №4 – в 7 машинах. Эффективность использования определяется временем на ее доставку с базы на объект, засчитываемым как простой. Найти оптимальное количество и назначение отправляемой с каждой базы техники с тем, чтобы эффективность ее использования была максимальной.

Таблица 2.56. Время доставки техники на объекты

База	Объект			
	№1	№2	№3	№4
№1	7	8	5	3
№2	2	4	5	9
№3	6	3	1	2

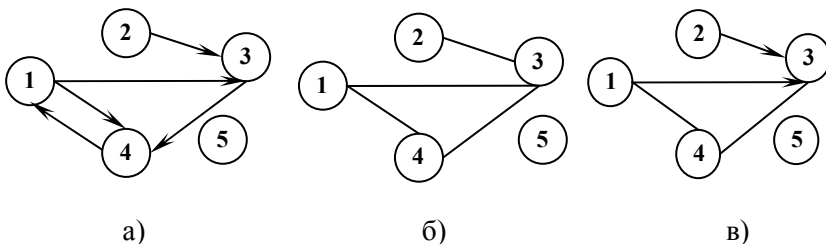
## *Приложение 1. Базовые понятия теории графов*

**Граф  $G$**  задается множеством точек или вершин  $v_1, v_2, \dots, v_n$  (которое обозначается через  $V$ ) и множеством линий  $u_1, u_2, \dots, u_m$  (которое обозначается символом  $U$ ), соединяющих между собой все или часть этих точек. Сокращенная запись:  $G = \langle V, U \rangle$ .

**Оrientированные графы** (рис. П.1.1., а): линии имеют направление и называются *дугами*  $u = (v_i, v_j)$ , где  $v_i$  – исток,  $v_j$  – сток.

**Неориентированные графы** (рис. П.1.1., б): линии не имеют направления и называются *ребрами*  $u = (v_i, v_j) = (v_j, v_i)$ , где  $v_i, v_j$  – концевые вершины.

**Смешанные графы** (рис. П.1.1, в): часть линий имеет направление, часть – нет.



*Рис.П.1.1. Ориентированные и неориентированные графы*

**Мультиграфы**: имеются несколько парных ребер (рис. П.1.2, а) или однонаправленных дуг (рис. П.1.3, а)  $u_1 = (v_i, v_j)$ ,  $u_2 = (v_i, v_j)$ .

**Псевдографы**: имеются ребра (рис. П.1.2, б) или дуги (рис.П.1.3., б) вида  $u = (v_i, v_i)$ , которые называются *петли*.

**Мульти-псевдографы**: имеются парные ребра (рис. П.1.2, в) или дуги (рис. П.1.3, в), а также петли.

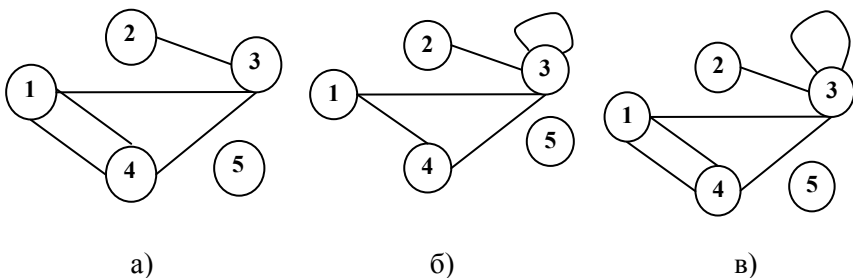


Рис.П.1.2. Неориентированные мульти- и псевдографы

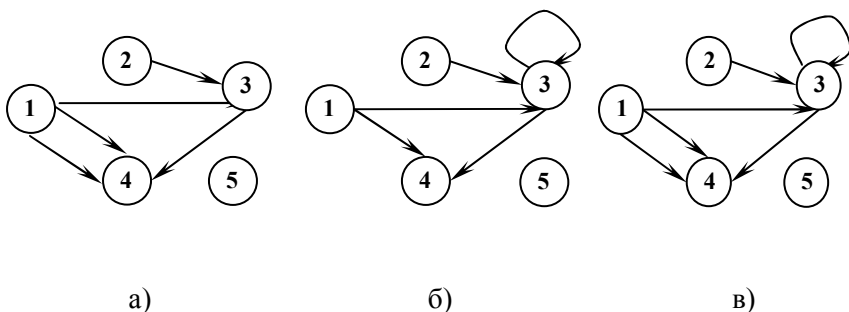


Рис.П.1.3. Ориентированные мульти- и псевдографы

### Способы задания графов:

#### 1. Графически

Связи между вершинами отображаются в виде линий (для неориентированных графов) или линий со стрелками (для ориентированных графов).

#### 2. При помощи матрицы смежности $S(V \times V)$ :

$$s(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{если существует ребро или дуга } (v_i, v_j); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицы смежности однозначно задают как неориентированные (в этом случае матрица симметрична относительно главной диагонали), так и ориентированные графы и смешанные графы.

Для смешанных графов эквивалентно выглядит задание ребра и пары разнонаправленных дуг. Никаких проблем не возникает с псевдографами (петле соответствует единица на главной диагонали), тогда мультиграфы заданы быть не могут. В качестве примера зададим несколько графов при помощи матриц смежности.

Таблица П.1.1. Матрицы смежности

для графа на рис. П.1.1.,а

	$v$	$v$	$v$	$v$	$v$
	1	2	3	4	5
$v_1$	0	0	1	1	0
$v_2$	0	0	1	0	0
$v_3$	0	0	0	1	0
$v_4$	1	0	0	0	0
$v_5$	0	0	0	0	0

для графа на рис. П.1.3,б

	$v$	$v$	$v$	$v$	$v$
	1	2	3	4	5
$v_1$	0	0	1	1	0
$v_2$	0	0	1	0	0
$v_3$	0	0	1	1	0
$v_4$	0	0	0	0	0
$v_5$	0	0	0	0	0

для графа на рис. П.1.2,б

	$v$	$v$	$v$	$v$	$v$
	1	2	3	4	5
$v_1$	0	0	1	1	0
$v_2$	0	0	1	0	0
$v_3$	1	1	1	1	0
$v_4$	1	0	1	0	0
$v_5$	0	0	0	0	0

### 3. При помощи матрицы инциденций $A (U \times V)$ :

для ориентированных графов:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{если } v_j \text{ исток дуги } u_i; \\ -1 & \text{если } v_j \text{ сток дуги } u_i; \\ 0 & \text{если } v_j \text{ не инцидентна дуге } u_i. \end{cases}$$

для неориентированных графов:

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{если } v_j \text{ инцидентна ребру } u_i; \\ 0 & \text{если } v_j \text{ не инцидентна ребру } u_i. \end{cases}$$

Матрицы инциденций однозначно задают как неориентированные, так и ориентированные графы. В принципе нет никаких препятствий для задания смешанных графов – в отличие от матрицы смежности в этом случае задание ребра и пары разнонаправленных дуг будет отличаться. Никаких проблем не возникает с мультиграфами (и в ориентированном и в неориентированном случаях), а также неориентированными псевдографами. Неоднозначность возникает при задании ориентированных псевдографов: на пересечении строки, помеченной петлей, и столбца, помеченного вершиной, на которой эта петля присутствует, по правилу должны одновременно

находиться как 1 так и  $-1$ . Из этой ситуации имеется выход: вместо одной матрицы  $A$  ( $U \times V$ ) граф задается двумя матрицами: истоков  $A^+$  ( $U \times V$ ) и стоков  $A^-$  ( $U \times V$ ).

$$\begin{cases} a^+(i,j)=1 & \text{если } v_j \text{ исток дуги } u_i \\ a^+(i,j)=0 & \text{иначе (если } v_j \text{ не инцидентна дуге } u_i \text{ или} \\ & \text{является ее стоком)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^-(i,j)=1 & \text{если } v_j \text{ сток дуги } u_i \\ a^-(i,j)=0 & \text{иначе (если } v_j \text{ не инцидентна дуге } u_i \text{ или} \\ & \text{является ее истоком)} \end{cases}$$

В качестве примера зададим несколько графов при помощи матриц инциденций.

Таблица П.1.2. Матрицы инциденций

для графа на рис. П.1.1, а

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$u_{23}$	0	1	-1	0	0
$u_{13}$	1	0	-1	0	0
$u_{14}$	1	0	0	-1	0
$u_{41}$	-1	0	0	1	0
$u_{34}$	0	0	1	-1	0

для графа на рис. П.1.2., в

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	0	0	1	1	0
$v_2$	0	0	1	0	0
$v_3$	0	0	1	1	0
$v_4$	0	0	0	0	0
$v_5$	0	0	0	0	0

4. При помощи функционального представления  $\Gamma^1$  и  $\Gamma^{-1}$ :

$$\Gamma^1(v_i) = \{v_j\} : \exists \text{ дуга } (v_i, v_j);$$

$$\Gamma^{-1}(v_i) = \{v_j\} : \exists \text{ дуга } (v_j, v_i).$$

При помощи функционального представления однозначно задаются как неориентированные (в этом случае  $\Gamma^1 = \Gamma^{-1}$ ), так и ориентированные и смешанные графы. Как и в случае с матрицей смежности, для смешанных графов эквивалентно выглядит задание ребра и пары разнонаправленных дуг. Никаких проблем не возникает с псевдографами (если вершина  $v_i$  имеет петлю, то и в  $\Gamma^1(v_i)$ , и в  $\Gamma^{-1}(v_i)$  войдет вершина  $v_i$ ). Мультиграфы заданы быть не могут. В качестве примера зададим граф при помощи функционального представления:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1(v_1) &= \{v_3, v_4\}; & \Gamma^{-1}(v_1) &= \{\emptyset\}; \\
\Gamma^1(v_2) &= \{v_3\}; & \Gamma^{-1}(v_2) &= \{\emptyset\}; \\
\Gamma^1(v_3) &= \{v_3, v_4\}; & \Gamma^{-1}(v_3) &= \{v_1, v_2, v_3\}; \\
\Gamma^1(v_4) &= \{\emptyset\}; & \Gamma^{-1}(v_4) &= \{v_1, v_3\}; \\
\Gamma^1(v_5) &= \{\emptyset\}; & \Gamma^{-1}(v_5) &= \{\emptyset\}.
\end{aligned}$$

### ***Взвешенные графы***

Иногда дугам или ребрам графа  $G$  сопоставляются (приписываются) числа, называемые весом, или длиной, или стоимостью (ценой) дуги или ребра. Тогда граф  $G$  называется графом со взвешенными дугами (ребрами). Иногда веса приписываются вершинам графа, и тогда получается граф со взвешенными вершинами. Если в графе веса приписаны и дугам, и вершинам, то он называется просто взвешенным.

***Вес (или длина, или стоимость) пути (маршрута)  $P_{ij}$*** , представленного последовательностью дуг (ребер)  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  – число  $I(P)$ , равное сумме весов всех дуг (ребер), входящих в путь (маршрут). Причем если дуга (ребро) входит в него несколько раз, соответствующий вес также учитывается многократно.

### **Базовые определения**

<u><i>Неориентированные графы</i></u>	<u><i>Оrientированные графы</i></u>
<i>Петля</i> – ребро, начальная и конечная вершины которого совпадают.	<i>Петля</i> – дуга, начальная и конечная вершины которой совпадают.
<i>Смежные вершины</i> – вершины, соединенные ребром. Смежные вершины: $v_4$ и $v_1$ .	<i>Смежные вершины</i> – вершины, соединенные дугой. Смежные вершины: $v_4$ и $v_1$ .



<u>Неориентированные графы</u>	<u>Ориентированные графы</u>
<u>Смежные ребра</u> – ребра, имеющие общие концевые вершины. Смежные ребра: $u_{41}$ и $u_{54}$ .	<u>Смежные дуги</u> – дуги, имеющие общие концевые вершины. Смежные дуги: $u_{41}$ и $u_{14}$ .
<u>Степень вершины</u> $v_k$ – число смежных с ней ребер.	<u>Полустепень исхода</u> (захода) вершины $v_k$ – число дуг, для которых $v_k$ – начальная (конечная) вершина.
<u>Маршрут</u> – последовательность ребер, в которой конечная вершина всякого ребра, отличного от последнего, является начальной вершиной следующего. Маршрут: $u_{13}$ $u_{34}$ $u_{45}$ $u_{54}$ .	<u>Путь</u> (или <u>ориентированный маршрут</u> ) – последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей. Путь: $u_{41}$ $u_{13}$ $u_{34}$ $u_{42}$ $u_{23}$ $u_{34}$
<u>Цепь</u> – маршрут, в котором <u>каждое ребро</u> используется не больше одного раза. Цепь: $u_{41}$ $u_{13}$ $u_{32}$ $u_{25}$ $u_{54}$ $u_{43}$ или $v_4$ $v_1$ $v_3$ $v_2$ $v_5$ $v_4$ $v_3$	<u>Ориентированная цепь</u> (или <u>орцепь</u> ) – путь, в котором <u>каждая дуга</u> используется не больше одного раза. Орцепь: $u_{41}$ $u_{14}$ $u_{42}$ $u_{25}$ или $v_4$ $v_1$ $v_4$ $v_2$ $v_5$
<u>Простая цепь</u> – маршрут, в котором <u>каждая вершина</u> используется не более одного раза. Простая цепь: $u_{41}$ $u_{13}$ $u_{32}$ $u_{25}$ или $v_4$ $v_1$ $v_3$ $v_2$ $v_5$	<u>Простая орцепь</u> – путь, в котором <u>каждая вершина</u> используется не более одного раза. Простая орцепь: $u_{14}$ $u_{42}$ $u_{25}$ или $v_1$ $v_4$ $v_2$ $v_5$
<u>Замкнутый маршрут</u> (цикл) – маршрут $u_1, u_2, \dots, u_k$ , в котором начальная вершина ребра $u_1$ совпадает с конечной вершиной дуги $u_k$ .	<u>Замкнутый путь</u> (орцикл) – путь $u_1, u_2, \dots, u_k$ , в котором начальная вершина дуги $u_1$ совпадает с конечной вершиной дуги $u_k$ .

<u>Неориентированные графы</u>	<u>Ориентированные графы</u>
<i>Простой цикл</i> – замкнутый маршрут, в котором одна и та же вершина используется только один раз (за исключением начальной и конечной вершин, которые совпадают).	<i>Простой орицикл (контур)</i> – замкнутый путь, в котором одна и та же вершина используется только один раз (за исключением начальной и конечной вершин, которые совпадают).
<i>Гамильтонов цикл</i> – простой цикл, проходящий через все вершины графа.	<i>Гамильтонов цикл</i> – контур, проходящий через все вершины графа.
<i>Эйлеров цикл</i> – замкнутая цепь, проходящая через все ребра графа.	<i>Эйлеров цикл</i> – замкнутая орцепь, проходящая через все дуги графа.
<i>Связный граф</i> – граф, в котором для любой пары вершин существует маршрут. Иначе – граф <i>несвязный</i> .	
	<i>Сильно связный граф</i> – граф, в котором для любой пары вершин $v_i, v_j \exists$ пути $(v_i, \dots, v_j)$ и $(v_j, \dots, v_i)$ .

## ***Приложение 2. Вопросы к устному экзамену***

1. Принципы управления промышленным предприятием. Возникновение логистики, происхождение термина «логистика».
2. Определение логистики. Объект и предмет логистики. Подразделы, изучаемые в рамках логистики.
3. Причины активного развития логистики. Принципы логистического познания предприятия как сложной искусственной системы.
4. Логистические системы: основные определения. Логистическая функция, логистическая цепь, логистическая сеть, логистический канал.
5. Информация логистических систем. Задачи, решаемые в рамках логистических систем.
6. Четыре этапа развития логистических систем.
7. Логистический подход к решению стратегических хозяйственных проблем: первый и второй этапы.
8. Логистические концепции: «тянущие» системы (pull systems), «толкающие» системы.
9. Концепция «точно в срок» (just-in-time, JIT).
10. Признаки системы. Постановка и решение задачи логистических систем.
11. Макрологистическая и микрологистическая системы: определения, отличия, взаимосвязи.
12. Логистические системы на уровне макрологистики: системы с прямыми связями, эшелонированные логистические системы, гибкие логистические системы.
13. Сущность и принципы системного подхода. Сравнение системного и классического подхода к формированию систем.
14. Логистическая цепь предприятия «Закупка-производство-сбыт».
15. Причины рассмотрения структуры предприятия в виде трех звеньев. Понятие мощности логистического звена.

16. Формирование цены продукции звеньев логистической цепи. Технологические циклы звеньев логистической цепи.
17. Типы технологии движения материального потока.
18. Время прохождения элементов материального потока через технологические стадии.
19. Время перерывов и факторы их регулирования: межоперационные заделы.
20. Потоки промышленного предприятия.
21. Классификация потоков промышленного предприятия. Простые потоки и сложные потоки.
22. Задачи закупочной логистики. Закупка или собственное производство: что выбрать.
23. Выбор комплектующих и метод их поиска.
24. Методы определения потребности в материалах. Объемы и периодичность закупок.
25. Типовые условия поставок. Выбор поставщика. Общение с поставщиком.
26. Дополнительные функции службы снабжения.
27. Системы организации материального снабжения производства.
28. Логистическая и традиционные концепции организации производства.
29. Принципы организации производства. Типы производств: единичное, массовое, серийное.
30. Временные характеристики массового производства.
31. Основные понятия, используемые в серийном производстве.
32. Особенности заключения договоров при индивидуальном производстве.
33. Функции и эффективность маркетинга в рамках сбытовой логистики.
34. Каналы распределения товаров. Выбор каналов распределения.
35. Выбор типа посредников и определение их оптимального количества.
36. Задачи транспортной логистики. Виды транспорта. Терминалы.

37. Тарифная ставка, виды тарифов.
38. Грузораспределительные центры: преимущества, критерии размещения.
39. Организация складов.
40. Информационная логистика. Основные понятия.
41. Классификация информационных потоков.
42. Информационные системы.
43. Использование информационной логистике при контроле движения товара.
44. Преимущества использования единой информационной логистической системы.
45. Кадровая логистика. Основные понятия.
46. Incoterms. Основные понятия.
47. Особенности Incoterms.
48. Структура Incoterms.

---

---

## *Список использованной литературы*

---

---

1. Аникина Б.А. Логистика. Учебник. – М.: Инфра-М, 2000.
2. Неруш Ю.М.. Логистика: Учебник для вузов – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
3. Логистика. Опорный конспект – СПб.: ЭБ Небесная сеть, 1995.
4. Фирон Х., Линдерс М. Управление снабжением и запасами, логистика, 11-е издание/пер. с англ. – СПб.: Полигон, 1999 г.
5. Алесинская Т.В. Основы логистики. Общие вопросы логистического управления. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005.
6. Волгин В.В. Склад: логистика, управление, анализ. – М.: Дашков и К, 2008.
7. Гайдаенко А.А., Гайдаенко О.В. Логистика: Учебник. – М.: Кнорус, 2009.
8. Гаджинский А.М. Практикум по логистике. – М.: Дашков и К, 2009.
9. Дыбская В.В., Зайцев Е.И., Сергеев В.И., Стерлингова А.Н. Полный курс МВА. Логистика. – М.: Изд-во «Эксмо», 2009.
10. Есенькин Б.С., Крылова М.Д. Логистика в книжном деле – М: Изд-во МГУП, 2002.
11. Аникина Б.А., Родкина Т.А., Гапонова М.А., Пузанова И.А. Логистика: Учебное пособие. – М: Изд-во Проспект, 2007.

Анна Николаевна Тихомирова  
Елена Васильевна Сидоренко

## **Математические модели и методы в логистике**

Учебное пособие

Редактор Т.В. Волвенкова  
Оригинал-макет изготовлен Е.В.Сидоренко

Подписано в печать 10.12.09. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Печ.л. 20,25. Уч.-изд.л. 20,25. Тираж 100 экз.  
Изд. № 1/1/12. Заказ № 5.

---

Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ»,  
115409, Москва, Каширское ш., д.31.

ООО "Полиграфический комплекс "Курчатовский"  
144000, Московская обл. г. Электросталь, ул. Красная, д.42.

