

Высшее профессиональное образование

Г. И. Хохлов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие



Информационная
безопасность

Г. И. ХОХЛОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Допущено

*Учебно-методическим объединением по образованию
в области информационной безопасности в качестве учебного
пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по специальности «Комплексное обеспечение информационной
безопасности автоматизированных систем»*



Москва
Издательский центр «Академия»
2008

УДК 621.391(075.8)
ББК 67.408я73
X862

Рецензенты:

проф. кафедры «Математическое моделирование» МЭИ,
д-р техн. наук *А. Б. Фролов*;
зав. кафедрой «Интеллектуальные технологии и системы» МИРЭА,
проф., д-р физ.-мат. наук, академик РАЕН *В. В. Нечаев*

— 40 —

Хохлов Г. И.

X862 Основы теории информации : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Г. И. Хохлов. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 176 с.

ISBN 978-5-7695-4576-4

Дано современное определение информации, рассмотрены формы ее существования, виды преобразований. Изложены основные положения теории вероятностей К. Шеннона. Рассмотрена комбинаторная теория информации автора книги с учетом двойственности материального мира. В каждой из указанных теорий исследуются меры количества информации, источники, каналы и их основные характеристики. Значительное внимание уделено анализу процессов появления и передачи информации.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 621.391(075.8)
ББК 67.408я73

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым
способом без согласия правообладателя запрещается*

© Хохлов Г. И., 2008

© Образовательно-издательский центр «Академия», 2008

© Оформление. Издательский центр «Академия», 2008

ISBN 978-5-7695-4576-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии излагаются основные положения теории информации — науки, составляющей теоретический базис различных устройств и систем восприятия, преобразования, передачи, обработки, хранения и отображения информации. Наряду с традиционно приводимыми сведениями в учебном пособии нашли отражение новые результаты, полученные в теории информации за последние 20 лет.

Для облегчения понимания материала книги автор отказался от приведения строгих доказательств важнейших теорем теории информации и больше внимания уделил рассмотрению ее основных понятий. В силу того что современная математика базируется на теории множеств и в качестве инструментов при доказательстве своих положений часто использует графы, алгоритмы и автоматы, автор постарался при изложении материала настоящего учебного пособия максимально использовать эти понятия. Кроме того, достаточно много внимания в книге уделено современному представлению об информации, ее формам и видам.

Для усвоения материала настоящего учебного пособия студент должен обладать знаниями по высшей математике (в объеме первых четырех семестров для технических высших учебных заведений), теории вероятностей и дискретной математике.

ФОРМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ И ВИДЫ ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1.1. Информационные процессы

Для понимания различных информационных процессов, происходящих в окружающей среде, необходимо рассмотреть, что такое информация. В обыденной жизни под информацией понимают некоторую совокупность сведений, которой располагают или которую получают от какого-либо источника, о тех или иных событиях, явлениях или фактах. Отражая в отдельных чертах суть информации, такое представление не выявляет ее существенных сторон и не является определением термина «информация». Несмотря на это используем его до тех пор, пока не дадим современного определения информации.

Под *информационным процессом* понимают совокупность последовательных действий со сведениями, направленных на получение определенного результата. К основным информационным процессам относят: восприятие (ввод), преобразование, передачу, обработку, хранение и отображение (вывод) информации.

Восприятие (ввод) информации — это отображение сведений на каком-либо носителе или в каких-либо качественных сторонах объекта. Объектом может быть живое существо, устройство или предмет неживой природы.

Преобразование информации — изменение формы и вида сведений.

Передача информации — перенос сведений из одной точки пространства в другую. При этом всегда стремятся минимизировать время передачи.

Обработка информации — любые действия со сведениями, выполняемые по детерминированному алгоритму, которые приводят к изменению их вида, а также содержательности, ценности или полезности.

Хранение информации — перенос сведений от одного момента времени до другого. При этом всегда стремятся минимизировать объем носителя или пространства, в котором сведения хранятся.

Отображение (вывод) информации — представление сведений на каком-либо носителе или в какой-либо качественной стороне объекта в целях восприятия их живым существом или устройством.

Иногда к информационным процессам относят также *распределение информации*. Однако этот процесс не является простым; он включает в себя, как минимум, передачу и отображение информации. В связи с этим будем рассматривать распределение информации как сложный процесс, представляющий собой комбинацию нескольких простых процессов.

1.2. Формы и виды существования информации

Информация всегда существует в какой-либо форме. Различают три основные ее формы: аналоговую, знаковую и командную.

Информация имеет *аналоговую форму*, если сведения представлены какой-либо физической величиной, например током, давлением, напряженностью электромагнитного поля, интенсивностью светового потока и т.д. Выделяют четыре основных вида существования сведений в аналоговой форме.

К *первому виду* относят сведения, которые могут быть представлены некоторой непрерывной как по аргументу x , так и по значениям y функцией $y = f(x)$ с интервалом значений $[y_{\min}, y_{\max}]$. Графическое изображение одной из таких функций показано на рис. 1.1, *а*. Информация, представляемая такими функциями, называется *непрерывной*.

Ко *второму виду* относят сведения, которые могут быть описаны некоторой непрерывной по аргументу x , но дискретной по значениям y функцией $y_j = \varphi(x)$ которая в диапазоне $[y_{\min}, y_{\max}]$ своего изменения может принимать лишь конечное число l значений y_j ($j = 1, 2, \dots, l$). Такая функция называется *ступенчатой*. Разность между двумя соседними значениями ступенчатой функции для разных j может быть как одинаковой, так и различной. Графическое изображение одной из таких функций приведено на рис. 1.1, *б*. Информация, характеризуемая такими функциями, называется *непрерывно-дискретной*.

К *третьему виду* относят сведения, которые представляются некоторой дискретной по аргументу x , но непрерывной по значениям y функцией $y = \psi(x_i)$, причем такой, которая в рассматриваемом интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$ имеет лишь конечное число m значений x_i ($i = 1, 2, \dots, m$), где она отлична от нуля. Такая функция называется *решетчатой*. Разность между двумя соседними значениями аргумента, в которых существуют значения решетчатой функции, может быть как постоянной, так и не постоянной. Графическое изображение одной из таких функций дано на рис. 1.1, *в*. Информация, представляемая решетчатыми функциями, называется *дискретно-непрерывной*.

К *четвертому виду* относят сведения, которые могут быть описаны некоторой дискретной как по аргументу x , так и по значе-

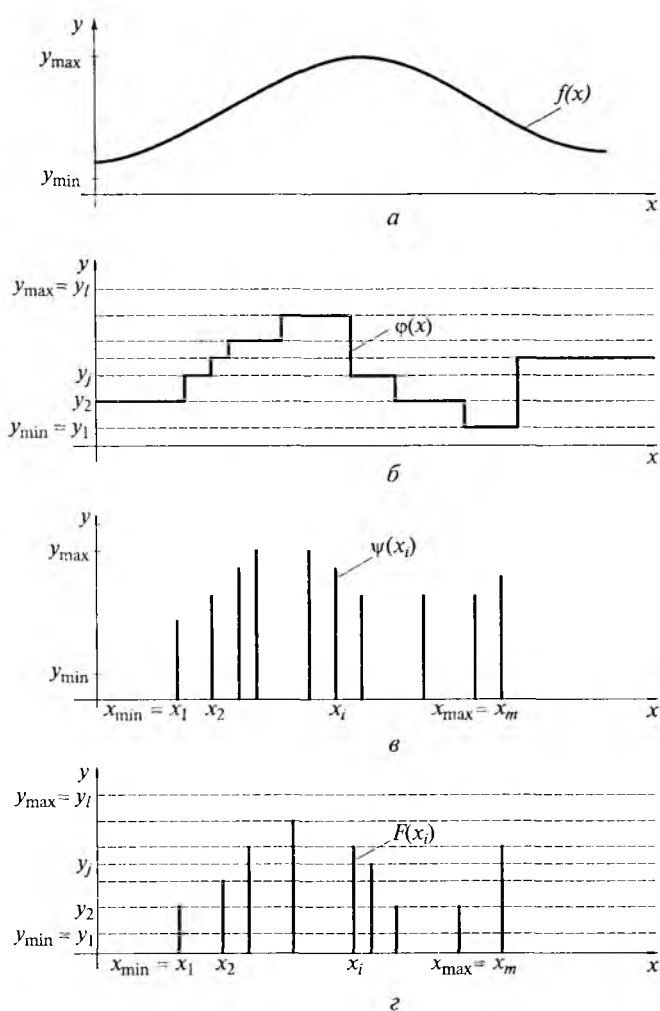


Рис. 1.1. Виды информации в аналоговой форме:

a — непрерывная; $б$ — непрерывно-дискретная; $в$ — дискретно-непрерывная; $з$ — дискретно-аналоговая

ниям y функцией $y_j = F(x_i)$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, l$). Эта функция является решетчатой с конечным числом l значений из интервала $[y_{\min}, y_{\max}]$ и конечным числом m значений аргумента в интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$. В общем случае как разность между двумя соседними значениями функции, так и разность между двумя соседними значениями аргумента, в которых существуют эти значения, может быть неодинаковой. Графическое изображение одной из таких функций приведено на рис. 1.1, з. Информация, характеризуемая такими функциями, называется *дискретно-аналоговой*.

Информация имеет *знаковую форму*, если сведения представлены отдельным знаком или совокупностью знаков, каждый из которых имеет смысл отдельного элементарного сведения. В силу дискретной природы знаков информация данной формы называется *дискретной, знаковой*.

Считается, что информация имеет *командную форму*, если сведения имеют смысл единичного действия или состояния некоторого объекта (процесса).

1.3. Виды преобразований информации

Информация во всевозможных информационных устройствах и системах подвергается различным преобразованиям. Одни преобразования приводят к потере части информации, другие идут без ее потерь. Преобразования информации выполняются при помощи различных устройств, называемых *преобразователями*. Преобразователь может иметь от 1 до k входов и от 1 до n выходов. Выделяют восемь характерных видов преобразования информации.

1. Информация одного непрерывного вида преобразуется в другой непрерывный вид (см. рис. 1.1, *а*). Это преобразование основано на установлении взаимно-однозначного соответствия между множествами значений двух различных физических величин и, следовательно, теоретически не приводит к потере информации.

Все преобразования этого вида можно разделить на две группы. К первой отнесем такие, при которых одна физическая величина непосредственно преобразуется в другую физическую величину. Например, сила тока — в угол поворота, или интенсивность светового потока — в ЭДС. Такие преобразования называют *простыми*. Они реализуются обычно в датчиках, исполнительных механизмах, аналоговых измерительных приборах и другой аппаратуре. Если существует прямое преобразование, то почти всегда возможно и обратное.

Ко второй группе отнесем такие преобразования, при которых одна физическая величина *лишь воздействует* на другую физическую величину, вырабатываемую каким-либо источником и способную распространяться в определенной физической среде, причем в результате этого воздействия изменяется значение одного из параметров второй величины. При этом непосредственное преобразование первой величины во вторую отсутствует. Преобразования этой группы называются *непрерывной модуляцией* и выполняются при помощи преобразователей, именуемых *модуляторами непрерывной модуляции*.

Обратное преобразование, позволяющее по значениям одного из параметров модулированной величины получить модулирующую величину, называется *непрерывной демодуляцией* и вы-

полняется преобразователем — *демодулятором непрерывной модуляции*.

2. Информация непрерывного вида (см. рис. 1.1, а) преобразуется в непрерывно-дискретный вид (см. рис. 1.1, б). Это преобразование основано на установлении однозначного соответствия между бесконечным числом значений из интервала $[y_{\min}, y_{\max}]$ некоторой физической величины и конечным числом l значений y_j ($j = 1, 2, \dots, l$) этой величины из того же интервала. Такое преобразование называется *квантованием непрерывной функции*, а выполняющий его преобразователь — *квантователем непрерывной функции*. В общем случае при квантовании непрерывной функции часть информации теряется.

Обратное преобразование, заключающееся в переходе от информации непрерывно-дискретного вида к информации непрерывного вида, называется *сглаживанием ступенчатой функции*. Преобразователем, осуществляющим сглаживание, является *фильтр нижних частот* (ФНЧ). В общем случае сглаживание ступенчатой функции не является однозначным и не приводит к полному восстановлению утраченной при квантовании функции информации.

3. Информация непрерывного вида (см. рис. 1.1, а) преобразуется в дискретно-непрерывный вид (см. рис. 1.1, в). Это преобразование состоит в замене физической величины, описываемой непрерывной функцией, рядом ее значений, взятых через определенные интервалы аргумента. Такое преобразование называется *дискретизацией непрерывной функции* и выполняется преобразователем — *дискретизатором непрерывной функции*. В общем случае при дискретизации непрерывной функции часть информации теряется.

Обратное преобразование, состоящее в переходе от информации дискретно-непрерывного вида к информации непрерывного вида, называется *восстановлением непрерывной функции по ее отсчетам*, или *интерполяцией*. Преобразователь, осуществляющий восстановление непрерывной функции, называется *интерполятором*. В общем случае интерполяция непрерывной функции не является однозначной и не приводит к полному восстановлению утраченной при дискретизации информации.

4. Информация непрерывно-дискретного вида (см. рис. 1.1, б) преобразуется к дискретному виду аналоговой формы (см. рис. 1.1, г). Это преобразование сводится к замене физической величины, представляемой ступенчатой функцией, рядом ее значений, взятых при значениях аргумента $x_i + \Delta x$ ($i = 1, 2, \dots$), где x_i — значение аргумента ступенчатой функции, в которой происходит изменение ее уровня, а Δx — малая величина запаздывания. Такое преобразование называется *дискретизацией ступенчатой функции*, а выполняющий его преобразователь — *дискретизатором ступен-*

чатой функции. При осуществлении рассматриваемого преобразования информация не теряется.

Обратное преобразование, состоящее в переходе от информации дискретного вида аналоговой формы к информации непрерывно-дискретного вида, выполняется однозначно при использовании в качестве функций восстановления полиномов нулевой степени. Это преобразование называется *восстановлением ступенчатой функции по ее отсчетам* и выполняется преобразователем — *ступенчатым интерполятором*.

5. Информация дискретно-непрерывного вида (см. рис. 1.1, в) преобразуется в дискретный вид аналоговой формы (см. рис. 1.1, г). Это преобразование основано на установлении однозначного соответствия между бесконечным числом значений из интервала $[y_{\min}, y_{\max}]$ некоторой физической величины, математически описываемой непрерывной величиной (а не функцией), и конечным числом l значений y_j ($j = 1, 2, \dots, l$) этой величины из того же интервала. Такое преобразование называется *квантованием непрерывной величины*, а реализующий его преобразователь — *квантователем величины*. Квантование величины всегда приводит к потере части информации.

Преобразования, обратного квантованию непрерывной величины, не существует.

6. Информация дискретного вида аналоговой формы (см. рис. 1.1, г) преобразуется в знаковую форму. Это преобразование основано на установлении взаимно-однозначного соответствия между конечным множеством значений y_j ($j = 1, 2, \dots, l$) дискретной физической величины и некоторым множеством наборов из конечного множества знаков, называемого *алфавитом*. Знаками алфавита могут быть буквы русского, латинского, греческого и других алфавитов, цифры, математические символы и т.д. Знаки алфавита не обладают энергетической природой и не способны распространяться в какой-либо физической среде. Множество наборов знаков именуют *кодом*, а каждый набор этого множества — *кодовой комбинацией*, или *кодovým словом*. Данное преобразование называется *кодированием 1-го типа*, а выполняющий его преобразователь — *преобразователем «аналог—код»*. При выполнении настоящего преобразования информация не теряется.

Обратное преобразование, основанное на установлении взаимно-однозначного соответствия между кодом и конечным множеством значений y_j ($j = 1, 2, \dots, l$) некоторой дискретной физической величины, называется *декодированием 1-го типа*, а выполняющий его преобразователь — *преобразователем «код—аналог»*. Как и при кодировании, при декодировании 1-го типа информация не теряется.

7. Информация командной формы, имеющая смысл единичного действия или состояния, или каждый отдельный знак информа-

ции знаковой формы преобразуется в знаковую форму. Это преобразование основано на установлении взаимно-однозначного соответствия между конечным множеством команд, извещений или знаков (алфавитом) и некоторым кодом. Такое преобразование называется *кодированием 2-го типа*, или *шифровкой*, а выполняющий его преобразователь — *шифратором*.

Обратное преобразование, основанное на установлении взаимно-однозначного соответствия между кодом и конечным множеством команд, извещений или знаков, называется *декодированием 2-го типа*, или *дешифровкой*, а выполняющий его преобразователь — *дешифратором*. Ни при шифровке, ни при дешифровке информация не теряется.

8. Информация знаковой формы одного вида преобразуется в другой вид. Это преобразование основано на установлении взаимно-однозначного соответствия между одним и другим кодом с тем же или иным алфавитом. Такое преобразование называется *кодированием 3-го типа*, а выполняющий его преобразователь — *кодером*. По смыслу кодирование 3-го типа — это перекодирование.

Обратное преобразование, сводящееся к обратному действию по отношению к кодированию 3-го типа, называется *декодированием 3-го типа*, а выполняющий его преобразователь — *декодером*. Кодирование и декодирование 3-го типа не приводят к потере информации.

При преобразовании информации непрерывного вида (см. рис. 1.1, а) к дискретному виду аналоговой формы (см. рис. 1.1, б) применяют или квантование непрерывной функции и дискретизацию ступенчатой функции, или дискретизацию непрерывной функции и квантование непрерывных величин. Оба эти случая преобразований получили специальное название — *квантизация*. Однако квантизация не является элементарным видом преобразования.

Перечисленные восемь видов преобразования информации могут выполняться как раздельно, так и совмещенно.

Контрольные вопросы

1. Какие основные информационные процессы выделяют в теории информации?
2. Что общего в процессах передачи и хранения информации?
3. В каких основных формах существует информация?
4. Какие выделяют виды информации в аналоговой форме?
5. Какие существуют виды преобразования информации?
6. В чем состоит различие квантования и дискретизации непрерывной функции?
7. Почему не существует преобразования, обратного квантованию непрерывной величины?
8. Какие типы кодирования выделяют в теории информации?

ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

2.1. Понятие информации

Во многих работах по теории информации делались попытки дать определение термину «информация». Наиболее полно суть этого понятия отражает определение, данное российским философом А.Д. Урсулом. Он пишет, что информацию можно определить в самом общем случае как отраженное разнообразие. Информация — это разнообразие, которое один объект содержит о другом объекте (в процессе их взаимодействия) [9. С. 248]. Под разнообразием в этом определении понимаются характерные черты какого-либо вида или характера отражаемого объекта, явления или состояния. Эти иности выступают как носители разнообразия.

Определение информации, данное А.Д. Урсулом, имеет два недостатка. Во-первых, термин «разнообразие» скорее представляет собой философскую категорию, чем математическое понятие, поэтому применение его для количественной оценки информации не представляется возможным. Во-вторых, информация определена А.Д. Урсулом как отраженное разнообразие одного объекта, хотя о разнообразии объектов можно говорить лишь тогда, когда они образуют некоторую группу. В силу этого подойдем к определению информации с других позиций.

За исходный пункт рассмотрения возьмем математическое понятие «множество». Целесообразность его применения при определении информации подтверждается тем, что физическая природа элементов множества (объектов, явлений, состояний и т.д.) в теории информации, как и в математике, обычно интереса не представляет, существенным является вид отличия этих элементов.

По виду отличия элементов все множества будем делить на пять категорий. В *первую категорию* входят такие множества, элементами которых являются либо знаки, либо наборы знаков. Отличие элементов любого из таких множеств является отличием знаков или совокупностей знаков. К множествам *второй категории* относятся такие, элементами которых являются числа или совокупности чисел. Отличие элементов в любом из таких множеств пред-

ставляется либо числом, либо совокупностью чисел. В каждом из множеств *третьей категории* отличие любых двух элементов выражается функцией одной переменной. К множествам *четвертой категории* причисляются такие, в каждом из которых различие любых двух элементов представляется функцией нескольких переменных. Наконец, к *пятой категории* множеств относятся такие, в каждом из которых различие любых двух элементов выражается некоторой структурой.

Различие элементов присуще бесконечному числу множеств, так как является выражением различия форм существования материи. Однако само по себе различие элементов еще не информация. Это как бы источник, который при определенном условии может породить информацию. Это условие заключается в наличии определенного объекта, обладающего свойством отражения, т.е. способностью запечатлеть в изменениях одного или нескольких своих качеств особенности взаимодействующего с ним элемента. Взаимодействие разных элементов отражаемого множества с одним и тем же отображающим объектом приводит к появлению множества элементов, в различии которых отображается различие элементов отражаемого множества. Возникновение нового множества элементов с определенными качественными различиями — акт появления информации. Таким образом, *информация — это отраженное в различии элементов одного множества различие элементов другого множества.*

Поскольку носитель информации тоже представляет собой множество (хотя и появившееся в результате отображения), то информация, как отраженное различие, также может быть отнесена к одной из пяти категорий: знаковой, числовой, однофункциональной, многофункциональной, структурной. Вид полученной информации определяется тем видом различия элементов отразившего множества, в котором запечатлелось различие элементов отображенного множества.

При трактовке информации как отраженного различия встает вопрос о степени полноты отражения исходного различия в элементах отразившего множества, т.е. о полноте информации. Если отражающее различие является качественно более простым по сравнению с отражаемым, то полученная в этом случае информация является неполной. Например, неполной является информация о непрерывной случайной функции времени, содержащаяся в ее сечениях, отстоящих друг от друга на конечные временные интервалы. Установление указанных сечений — это представление случайной функции последовательностью случайных величин. Информация получается неполной и тогда, когда при качественно одинаковых различиях элементов отражаемого и отразившего множеств число элементов в отразившем множестве меньше, чем в отражаемом.

Таким образом, любое множество элементов, отражающее особенности элементов другого множества, можно характеризовать как количеством различающихся элементов, так и характером (качеством) их отличия, т. е. информации присущи как количественный, так и качественный аспекты. Количественный аспект состоит в возможности количественной характеристики информации, качественный — в качественном отличии форм ее существования.

2.2. Теории информации и их разновидности

Теории, исследующие различные формы существования информации, называются теориями информации. В одной теории может изучаться как одна, так и несколько форм существования информации. Цель каждой теории — установить меру количества информации, представленной в определенной форме, и выявить закономерности изменения этого количества при протекании различных информационных процессов.

Как отмечалось в подразд. 1.1, основных информационных процессов — шесть. Если отображение рассматривать как представление информации с целью ее восприятия, хранение — как передачу во времени, а преобразование — как действия с информацией по детерминированному алгоритму, приводящие к изменению ее формы и вида, то, отбросив некоторые специфические особенности, шесть основных информационных процессов можно свести всего к трем принципиально различным: появлению, передаче и обработке информации.

Появление информации всегда связано с наличием или действием некоторого объекта, который, отвлекаясь от его физической природы, называют *источником*. Передача информации обусловлена свойствами другого объекта — физической среды, который называют *каналом*. Обработка информации предполагает наличие третьего объекта, способного выполнять определенный детерминированный алгоритм, который называют *процессором*. Таким образом, источник, канал и процессор — это три основных информационных объекта.

Теорию информации будем называть *полной* для некоторой категории информации, если в этой теории для данной категории:

- 1) устанавливается мера количества информации и выясняются ее свойства;
- 2) изучаются источники, выдающие информацию этой категории, и процесс ее появления в результате их действия;
- 3) исследуются каналы, обеспечивающие передачу информации указанной категории, и процесс ее передачи по этим каналам;

4) изучаются процессоры, обрабатывающие информацию отмеченной категории, и процесс ее обработки по реализуемым алгоритмам.

Если в теории не рассматривается хотя бы один из перечисленных вопросов для исследуемой категории информации, то такую теорию называют *неполной* для этой категории.

В зависимости от того, учитывается ли при установлении меры количества информации критерий, по которому оценивает информацию получатель, различают два вида теорий информации. В теориях первого вида, которые называют *формальными*, мера количества информации для каждой изучаемой категории вводится без учета того критерия, которым будет пользоваться получатель при ее оценке. Эти теории широко применяются при характеристике работы различных технических устройств восприятия (ввода), преобразования, передачи, обработки, хранения и отображения (вывода) информации. В теориях второго вида, которые называют *неформальными*, мера количества информации выбирается с учетом критерия, по которому получатель оценивает информацию. В качестве таких критериев обычно используются критерии содержательности, ценности и полезности. Эти теории оценивают количество получаемой информации с точки зрения человека или искусственного интеллекта, наделенного в определенных рамках способностью логически мыслить.

Остановимся кратко на смысле критериев содержательности, ценности и полезности. Под *содержательностью информации* понимается наличие в ней смысла, содержания, т.е. осознаваемых субъектом сведений об объективной реальности. Предполагается, что до оценки информации субъект — человек или искусственный интеллект — обладает определенным тезаурусом, т.е. систематизированной совокупностью знаний о реальном мире. Считается, что информация обладает содержательностью, если ее восприятие субъектом приводит к расширению (увеличению) его тезауруса. Если роста тезауруса не происходит, то полагают, что данная информация не обладает содержательностью для воспринимающего ее субъекта. Например, учебник по математике для 4-го класса средней школы заключает в себе большую содержательную информацию для ученика 4-го класса, но практически не имеет содержательной информации для ученика 10-го класса. Теории информации, в которых устанавливаются меры содержательной информации, заключенной в изучаемых в них категориях, получили название *семантических*. Семантика (от греч. *semaino* — указываю, означаю) — это раздел семиотики, изучающий смысловое значение знаков, слов и предложений в различных знаковых системах. Семантическая информация всегда составляет лишь часть всей информации, которая содержится в некоторой ее категории.

При рассмотрении критерия *ценности информации* большинство авторов связывает его с достижением некоторой ранее поставленной цели. *Полезность информации* понимают как такое ее свойство, которое позволяет субъекту удовлетворить некоторые свои интересы — духовные, культурные и др. Подробное знакомство с данными критериями позволяет сделать вывод о некоторой ошибочности такого их толкования.

Прежде чем охарактеризовать ценность и полезность информации, рассмотрим понятия «ценность» и «польза». В Советском энциклопедическом словаре дано следующее определение: «Ценность — положительная или отрицательная значимость объектов окружающего мира для человека, класса, группы, общества в целом, определяемая не их свойствами самими по себе, а их вовлеченностью в сферу человеческой жизнедеятельности, интересов и потребностей, социальных отношений... [7. С. 1481]». В Толковом словаре В. Даля сказано, что польза — улучшение, выгода, прибыль, барыш, нажива. Полезность — польза, в значении свойства, качества. Учитывая такую трактовку, можно заключить, что полезность — это свойство объекта, позволяющее достичь поставленной цели с меньшими материальными, физическими или психическими затратами (получить выгоду). Полезность является абсолютным объективным свойством объекта, связанным с достижением цели. Ценность — понятие относительное, субъективное и непосредственно с целью не связанное. Например, картина И. Репина «Бурлаки на Волге» обладает большой художественной и исторической ценностью для русского народа. Связывать же ее с достижением какой-либо цели просто абсурдно.

Учитывая сказанное, под *ценной информацией* для субъекта будем понимать такую семантическую информацию, которая оценивается им как значимая, необходимая для удовлетворения его материальных, духовных, культурных интересов. *Полезной* будем называть такую ценную информацию, которая обеспечивает субъекту достижение поставленной цели с меньшими материальными, физическими и психическими затратами, т.е. получение выгоды. Теории информации, в которых устанавливаются меры полезной для получателя информации в тех категориях, которые в них изучаются, называют *прагматическими*. Прагматика (от греч. *pragma* — дело, действие) — это раздел семиотики, изучающий практическую полезность знаков, слов и предложений различных знаковых систем для тех, кто их использует.

Обозначим через I_f , $I_{\text{сем}}$, $I_{\text{цен}}$ и $I_{\text{пр}}$ соответственно количество информации формальной теории в некоторой ее категории без учета критерия ее оценки получателем, количество семантической, ценной и прагматической информации. При разумном выборе мер указанных количеств информации всегда



Рис. 2.1. Отношение между различными видами информации

$$I_{\phi} \geq I_{\text{сем}} \geq I_{\text{цен}} \geq I_{\text{пр}}.$$

В основе этого неравенства лежит отношение между различными видами информации (рис. 2.1).

В зависимости от характера появления элементов — неслучайного или случайного — в рассматриваемой категории информации формальные и неформальные теории, изучающие эту категорию, делятся на невероятностные и вероятностные. В *невероятностных теориях* для установления меры количества информации используется аппарат какой-либо детерминистской математической теории; в *вероятностных* — эта мера вводится при помощи понятий и аппарата теории вероятностей.

Наибольший прогресс к настоящему времени достигнут в разработке формальных теорий информации. Неформальные теории в большинстве случаев значительно менее развиты и находятся на этапе своего становления. В настоящий период развития науки в обсуждаемой области знаний отчетливо прослеживаются два направления исследований: 1) создание отдельных частных теорий информации, призванных охватить информационным описанием те категории информации, для которых уже известные меры не являются адекватными; 2) формирование общей теории информации, пригодной для исследования различных категорий независимо от характера появления их элементов.

2.3. Дуализм материального мира

Окружающий реальный мир состоит из двух миров: мира случайных событий и процессов и мира детерминированных явлений и процессов. Эти миры пронизывают друг друга и находятся в постоянном взаимодействии.

К миру *случайных событий* относятся такие проявления, предыстория которых неизвестна и о которых нельзя заранее сказать, что они обязательно произойдут. К миру *детерминированных явлений* обычно причисляют такие, которые являются следствием хорошо известных условий или причин и обладают свойством повторяемости, т.е. повторного появления при каждом новом акте воспроизведения порождающих факторов. Отнесение одних и тех же явлений и процессов к случайным или детерминированным зависит от полноты знания их предыстории.

Вообще говоря, в каждом явлении или процессе есть определенная доля как случайности, так и детерминированности. Однако оценить эти доли довольно сложно, поэтому одни из явлений рассматривают как чисто случайные, а другие — как детерминированные.

Такое разделение проявлений окружающего мира нашло свое отражение как в физике, так и в математике. Например, в физике при исследовании объектов макромира установлено, что в нем действует множество различных, но вполне конкретных причинно-следственных связей, множество законов, определяющих четкие детерминированные соотношения между физическими величинами, множество соответствий, задающих строго однозначную связь между группами объектов.

При изучении объектов микромира проявляющиеся в нем явления рассматриваются как случайные, так как большинство причин, определяющих их протекание, остается неизвестным.

В математике осознание двойственности материального мира нашло свое отражение в том, что в ней изучается большое число функциональных зависимостей, в которых аргументы строго детерминированно определяют значения функций, большое число математических операций, в которых результат также не является случайным. Например, при сложении двух чисел цифры суммы однозначно определяются цифрами слагаемых и строгим алгоритмом сложения. При этом для изучения закономерностей мира случайных явлений и процессов в математике используется адекватно описывающая этот мир дисциплина — теория вероятностей.

Учитывая сказанное, в дальнейшем рассмотрим элементы двух формальных теорий информации: вероятностной К. Шеннона и комбинаторной автора этой книги.

Контрольные вопросы

1. На какие категории по виду отличия элементов принято разделять все множества в теории информации?
2. Что является необходимым условием появления информации?
3. Какие факторы влияют на полноту информации?
4. Какие объекты изучаются в теории информации?
5. В чем состоит различие формальных и неформальных теорий информации?
6. По каким критериям проводится классификация теорий информации?
7. В чем заключается различие критериев ценности и полезности информации?
8. Какие теории информации называются семантическими?
9. В каком отношении находятся различные виды информации?
10. Что понимается под дуализмом материального мира?

МЕРА КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В ВЕРОЯТНОСТНОЙ ТЕОРИИ К. ШЕННОНА

3.1. Общая мера количества информации в вероятностной теории

Вероятностная теория информации была разработана К. Шенноном и относится к числу формальных. Основные ее положения были опубликованы им в 1948 г. в статье [22]. В этой теории рассматриваются вероятностные множества, обладающие определенными статистическими свойствами, и изучаются три категории информации. В первой она представляет собой события, принадлежащие конечному множеству случайных событий; во второй — числа, являющиеся значениями непрерывной случайной величины; в третьей — непрерывные функции (реализации непрерывной случайной функции). Дискретные случайные величины, т.е. величины, которые в результате опыта принимают одно из значений, принадлежащих конечному множеству, рассматриваются в этой теории как множество случайных событий.

Математическим аппаратом вероятностной теории информации является теория вероятностей. Это позволяет применять ее во многих областях, где явления и процессы носят случайный характер.

Любые действия, приводящие к появлению некоторого события, принятию величиной некоторого значения или функцией — некоторого конкретного вида (реализации), называются в вероятностной теории информации *опытом*. Например, к опытам относят получение какого-либо сообщения, измерение какой-либо физической величины измерительным прибором, наблюдение за кривой на экране осциллографа и множество других самых различных действий. Считается, что до осуществления опыта известно все множество его исходов, но не известно, каким из этих исходов он закончится.

Получение информации в опыте связано прежде всего с тем, что до осуществления опыта имеется некоторая неопределенность относительно его исхода, т.е. относительно того, какое из событий в нем произойдет, какое значение примет величина или какой конкретный вид получит функция. Эта неопределенность порождается самой случайностью исходов, которая не позволяет дать однозначный ответ о конечном результате опыта. По окончании

опыта неопределенность относительно его результата или совсем исчезает, или уменьшается.

Уменьшение неопределенности касательно исхода опыта в результате его осуществления понимается в вероятностной теории как *получение информации*.

За меру количества информации в вероятностной теории принята величина

$$I = H_{\text{до опыта}} - H_{\text{после опыта}}, \quad (3.1)$$

где $H_{\text{до опыта}}$ — неопределенность исхода опыта до опыта; $H_{\text{после опыта}}$ — неопределенность исхода опыта после опыта.

Из формулы (3.1) видно, что для нахождения количества информации необходимо установить меру неопределенности исхода опыта. В 1948 г. К. Шеннон предложил меры неопределенности исхода опыта отдельно для множества случайных событий, непрерывной случайной величины и случайной функции.

В связи с расширением применения в современном мире цифровых устройств из трех введенных К. Шенноном мер неопределенности рассмотрим только одну, а именно: меру неопределенности исхода опыта с множеством случайных событий.

3.2. Энтропия конечного множества случайных событий

Рассмотрим конечное множество (пространство) X случайных событий $x_1, x_2, \dots, x_N$, которые могут произойти в некотором опыте. Пусть эти события независимы и несовместны и известны вероятности $p(x_1) = p_1, p(x_2) = p_2, \dots, p(x_N) = p_N$ их осуществления в опыте. Пусть они образуют полную группу событий, т. е. $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$. Часто указанное множество событий записывают так

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

В качестве меры неопределенности исхода опыта с конечным множеством случайных событий К. Шеннон предложил следующую функцию, которая была им названа энтропией:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N p_i \log_a p_i. \quad (3.3)$$

Заметим, что в формуле (3.3) X — не аргумент функции, а обозначение множества. Аргументами функции являются вероятности событий.

Рассматривая энтропию как функцию $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$, следует иметь в виду, что число независимых переменных в ней $N - 1$, так как одна из вероятностей всегда может быть выражена через другие, например $p_N = 1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1})$. В связи с этим

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = H(p_1, p_2, \dots, p_{N-1}).$$

Термин «энтропия» задолго до появления теории информации был введен в физике. Под энтропией в физике понимают определенную функцию, характеризующую состояние физической системы. Для одной из таких систем, а именно совокупности молекул идеального газа, заключенной в замкнутый объем и совершающей тепловое движение, Л. Больцманом была найдена формула энтропии. Значение энтропии, получаемое по этой формуле, характеризует степень беспорядка молекул газа в системе. Функция $H(X)$ в формуле (3.3) с точностью до знака совпадает с формулой Больцмана, поэтому на основании внешнего сходства $H(X)$ была названа К. Шенноном *энтропией*.

Выбор основания логарифмов a в формуле (3.3) определяет единицы, в которых исчисляется неопределенность. Если берут $a = 2$, то энтропия исчисляется в двоичных единицах, или *битах* (бит — это специфическое сокращение двух английских слов *binary digit* — двоичная цифра). Если выбирают $a = e$, то энтропия выражается в натуральных единицах, или *натах*. При $a = 10$ единица неопределенности называется десятичной, или *дитом*. В дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать, что $a = 2$, и все выражения энтропии, аналогичные формуле (3.3), будем писать без знака основания логарифмов.

Для понимания смысла энтропии конечного множества случайных событий внесем знак минус в формуле (3.3) под знак логарифма:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{1}{p_i}. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) представляет собой математическое ожидание величины $\log 1/p_i$. Выясним ее смысл.

Вероятность p_i осуществления в опыте события x_i является величиной, характеризующей определенность наступления этого события. Казалось бы, величина, обратная p_i , т. е. $1/p_i$, может быть принята за характеристику неопределенности его наступления в опыте. Однако если множество состоит всего из одного события, то $p_1 = 1$ и $1/p_1 = 1$, что противоречит здравому смыслу. Действительно, если вероятность наступления в опыте некоторого события равна единице, т. е. оно всегда осуществляется в опыте, то никакой неопределенности относительно исхода опыта нет. Значит, величина, выбранная в качестве характеристики неопреде-

ленности осуществления в опыте некоторого события, должна равняться нулю, если вероятность наступления этого события равна единице. Вместе с тем эта величина обязана удовлетворять и другому условию: при $p_i \rightarrow 0$ она должна стремиться к бесконечности. Нетрудно видеть, что указанным условиям отвечает величина

$$H_i = \log \frac{1}{p_i}, \quad (3.5)$$

получившая название *индивидуальной неопределенности*. По смыслу H_i — это неопределенность осуществления в опыте конкретного события x_i , наступающего с вероятностью p_i .

Заменив в формуле (3.4) $\log 1/p_i$ в соответствии с соотношением (3.5), получим

$$H(X) = \sum_{i=1}^N p_i H_i. \quad (3.6)$$

Как следует из формулы (3.6), энтропия $H(X)$ — это средняя неопределенность исхода опыта с множеством X случайных событий.

Энтропия множества случайных событий обладает следующими свойствами.

1. Если вероятности p_i всех событий, кроме одного, равны нулю, а этого единственного — единице, то $H(X) = 0$. Действительно, в этом случае в любом опыте с множеством X результат опыта известен заранее, поэтому неопределенность в исходе опыта отсутствует.

2. Если по крайней мере для двух значений i ($i = 1, 2, \dots, N$) $0 < p_i < 1$, то $H(X) > 0$. Это вытекает из того, что при $a > 1$ выражение $-p_i \log_a p_i > 0$ для всех $0 < p_i < 1$. Для остальных p_i выражение $-p_i \log_a p_i = 0$.

3. Если при заданном N все события множества равновероятны, т.е. если $p_i = 1/N$, то величина $H(X)$ максимальна и равна $\log N$:

$$H(X) = H(X)_{\max} = \log N. \quad (3.7)$$

Из формулы (3.7) видно, что в этом случае исход опыта наиболее неопределен.

Пример 3.1. Построить график энтропии множества X , состоящего из двух событий:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p(1-p) \end{pmatrix}.$$

Поскольку множество состоит из двух событий, то его энтропия, бит, является функцией от одной переменной p :

$$H(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p).$$

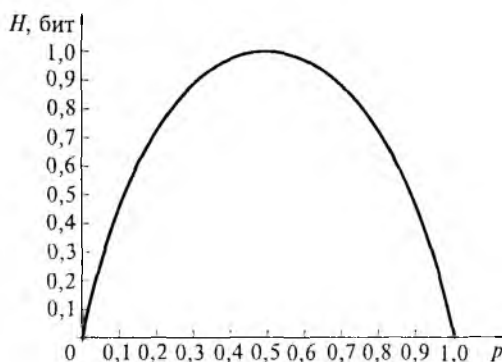


Рис. 3.1. График энтропии $H(p)$ множества из двух событий

Из рис. 3.1 видно, что энтропия $H(p)$ является симметричной функцией относительно прямой $p = 0,5$ со значениями, лежащими на отрезке $[0, 1]$ бит.

3.3. Энтропия конечного множества совместных событий

Рассмотрим два конечных множества X и Y с N и M событиями соответственно (см. формулу (3.2)):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_N) \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_M \\ p(y_1) & p(y_2) & \dots & p(y_M) \end{pmatrix}.$$

При опыте только с множеством X или Y неопределенность исхода опыта (до опыта) характеризуется соответствующей энтропией:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i); \quad H(Y) = -\sum_{j=1}^M p(y_j) \log p(y_j). \quad (3.8)$$

Произведем теперь некоторый сложный опыт, в результате которого появится одно из событий множества X и одно из событий множества Y . Исход такого опыта можно трактовать как некоторое новое событие (x_i, y_j) ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$), заключающееся в совместном осуществлении в опыте по одному из событий множеств X и Y . В общем случае число всех возможных событий (x_i, y_j) , которые назовем *совместными*, равно NM . Если через $p(x_i, y_j)$ обозначить вероятность совместного события (x_i, y_j) , то всю совокупность таких событий можно рассматривать как некоторое новое множество (X, Y) :

$$(X, Y) = \begin{pmatrix} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \dots & (x_i, y_j) & \dots & (x_N, y_M) \\ p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) & \dots & p(x_i, y_j) & \dots & p(x_N, y_M) \end{pmatrix}.$$

По определению энтропия такого множества, т.е. неопределенность исхода опыта,

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j). \quad (3.9)$$

Поскольку $p(x_i, y_j) = p(y_j, x_i)$, т.е. вероятность совместного события не зависит от того, какое из составляющих его событий называется первым, то

$$H(X, Y) = H(Y, X). \quad (3.10)$$

Найдем, чему равна энтропия $H(X, Y)$. Рассмотрим сначала случай, когда события множеств X и Y независимы.

Как следует из теории вероятностей [5], вероятность совместного события (x_i, y_j) в этом случае

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j). \quad (3.11)$$

Подставим $p(x_i, y_j)$ из соотношения (3.11) в формулу (3.9):

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{i,j} p(x_i)p(y_j) \log p(x_i)p(y_j) = \\ &= - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i)p(y_j) \log p(x_i) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i)p(y_j) \log p(y_j). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Так как $p(x_i)$ не зависит от j , то в формуле (3.12) в первом слагаемом за знак суммы по j вынесем $p(x_i) \log p(x_i)$, а во втором — $p(x_i)$:

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i) \sum_{j=1}^M p(y_j) - \sum_{i=1}^N p(x_i) \sum_{j=1}^M p(y_j) \log p(y_j). \quad (3.13)$$

Если учесть, что $\sum_{j=1}^M p(y_j) = 1$ и $\sum_{i=1}^N p(x_i) = 1$ и что во втором слагаемом за знак суммы по i можно вынести сумму по j , то легко видеть, что первое слагаемое формулы (3.13) — это $H(X)$, а второе — $H(Y)$. Отсюда

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y). \quad (3.14)$$

Формула (3.14) показывает, что неопределенность исхода опыта с множеством (X, Y) совместных событий при независимости событий множеств X и Y равна сумме неопределенностей исхода опыта с каждым из них.

Рассмотрим теперь случай, когда события множеств X и Y зависимы. При таком допущении, в соответствии с теорией вероятностей [1] вероятность совместного события (x_i, y_j)

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j|x_i) = p(y_j)p(x_i|y_j), \quad (3.15)$$

где $p(y_j|x_i)$ — вероятность события y_j при условии, что имеет место событие x_i , или условная вероятность события y_j ; $p(x_i|y_j)$ — условная вероятность события x_i , если имеет место событие y_j .

Подставим $p(x_i)p(y_j|x_i)$ вместо $p(x_i, y_j)$ в формулу (3.9):

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_{i,j} p(x_i)p(y_j|x_i) \log p(x_i)p(y_j|x_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i)p(y_j|x_i) \log p(x_i) - \\ &\quad -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i)p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поскольку $p(x_i)$ не зависит от j , то в выражении (3.16) в первом слагаемом за знак суммы по j вынесем $p(x_i)\log p(x_i)$, а во втором — $p(x_i)$:

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i) \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i) - \\ &\quad -\sum_{i=1}^N p(x_i) \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если принять во внимание, что $\sum_{j=1}^M p(y_j|x_i) = 1$, то легко видеть, что первое слагаемое формулы (3.17) — это $H(X)$. Во втором слагаемом формулы (3.17) выражение

$$-\sum_{j=1}^M p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) = H(Y|x_i) \quad (3.18)$$

получило название *условной энтропии множества Y* . Условная энтропия $H(Y|x_i)$ характеризует неопределенность исхода опыта с множеством Y , если известно, что имеет место событие x_i . Все второе слагаемое

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^N p(x_i) \sum_{j=1}^M p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N p(x_i) H(Y|x_i) = H(Y|X) \end{aligned} \quad (3.19)$$

называют *средней условной энтропией множества Y* . Средняя условная энтропия $H(Y|X)$ соответствует средней неопределенно-

сти исхода опыта с множеством Y при известных событиях множества X . Как видно из формулы (3.19), $H(Y|X)$ — это математическое ожидание величины $H(Y|x_i)$.

Итак, с учетом принятых обозначений энтропия множества совместных событий

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X). \quad (3.20)$$

Если в формулу (3.9) вместо $p(x_i, y_j)$ подставить $p(y_j)p(x_i|y_j)$ и выполнить аналогичные преобразования, то получим

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y), \quad (3.21)$$

где

$$H(X|Y) = - \sum_{j=1}^M p(y_j) \sum_{i=1}^N p(x_i|y_j) \log p(x_i|y_j). \quad (3.22)$$

Таким образом, неопределенность исхода опыта с множеством совместных событий (X, Y) равна неопределенности исхода опыта с множеством X или Y плюс неопределенность исхода опыта с другим множеством при известных исходах опыта с первым.

Средние условные энтропии $H(Y|X)$ и $H(X|Y)$ обладают одинаковыми свойствами. Перечислим их, например, для $H(X|Y)$:

1) $H(X|Y) = 0$, когда события множества Y полностью повторяют события множества X , т.е. когда

$$p(x_i|y_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

Это следует из формулы (3.22) при подстановке в нее указанных значений $p(x_i|y_j)$;

2) $H(X|Y) > 0$, если хотя бы для двух значений i ($i = 1, \dots, N$) при некотором j верно неравенство $0 < p(x_i|y_j) < 1$. Это видно из формулы (3.22), если учесть, что при этих значениях i значение $-p(x_i|y_j) \log_a p(x_i|y_j) > 0$ при $a > 1$;

3) $H(X|Y) = H(X|Y)_{\max} = H(X)$ только в случае полной независимости событий множеств, т.е. когда $p(x_i|y_j) = p(x_i)$. Это также вытекает из формулы (3.22) при подстановке в нее вместо $p(x_i|y_j)$ вероятностей $p(x_i)$.

Из свойства 3 непосредственно следует, что если события множеств X и Y зависимы, то

$$H(X|Y) < H(X); H(Y|X) < H(Y). \quad (3.23)$$

Неравенства (3.23) означают, что при зависимости событий множеств X и Y неопределенность исхода опыта с одним из них уменьшается, если становятся известны исходы опытов с другим. Строгое доказательство неравенств (3.23) дано в [23].

3.4. Количество информации, получаемое в опыте с конечным множеством случайных событий

В подразд. 3.1 было указано, что за меру количества информации в вероятностной теории принята разность неопределенностей исхода опыта до и после его осуществления. Рассмотрим, что представляет собой эта мера в случае конечного множества случайных событий.

Опыты, проводимые с множеством событий, делятся на две категории. К первой относятся такие, в которых наблюдаемые события всегда признаются за истинные, достоверные, действительно осуществившиеся в опыте. Например, если опыт состоит в вытягивании карты из колоды и полученная карта является бубновым тузом, то у наблюдателя никогда не возникает сомнения в том, что это именно туз, а не какая-то другая карта. Во вторую категорию опытов входят такие, в которых наблюдаемые события являются лишь отражением тех истинных событий, которые действительно имеют место в опыте. Так, если опыт состоит в передаче символов некоторого алфавита по каналу связи с искажениями, то, получив на приемной стороне некоторый символ a , нельзя с абсолютной уверенностью утверждать, что именно этот символ был подан на вход канала. В опытах первой категории результат опыта зависит только от распределения вероятностей событий множества, в то время как в опытах второй категории — еще и от вероятностных закономерностей представления этих событий. Опыты первой категории описывают процессы появления информации, а второй — процессы ее передачи, хранения и отображения.

Предположим сначала, что с некоторым множеством X проводится опыт первой категории. До выполнения опыта неопределенность его исхода вполне характеризуется энтропией множества

$$H_{\text{до опыта}} = H(X).$$

Пусть в результате опыта появляется некоторое событие x_i . Поскольку после опыта сомнения относительно того, какое же событие действительно произошло в опыте, полностью отсутствуют, то

$$H_{\text{после опыта}} = 0$$

и в соответствии с формулой (3.1) количество информации $I(X)$, получаемое в опыте с таким множеством,

$$I(X) = H(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i. \quad (3.24)$$

Смысл этого выражения состоит в следующем. Если внести знак минус под знак логарифма, то в соответствии с соотношением (3.5) $\log 1/p_i$ — это индивидуальная неопределенность осуществления в опыте конкретного события x_i . При осуществлении в опыте события x_i оно для этого опыта является достоверным, т.е. единственно в нем наступившим. Вследствие этого после опыта неопределенность осуществления в проведенном опыте этого конкретного события x_i характеризуется величиной $\log 1/1$. Разность указанных неопределенностей, обозначаемая обычно $I(x_i)$, получила название *индивидуального количества информации*, получаемого в опыте при осуществлении в нем события x_i :

$$I(x_i) = \log \frac{1}{p_i} - \log \frac{1}{1} = \log \frac{1}{p_i} = -\log p_i. \quad (3.25)$$

Подставив в выражение (3.24) $I(x_i)$ вместо $-\log p_i$ из формулы (3.25), будем иметь

$$I(X) = \sum_{i=1}^N p_i I(x_i). \quad (3.26)$$

Таким образом, как видно из формулы (3.26), $I(X)$ — это среднее количество информации, получаемое в опыте первой категории с множеством X .

Рассмотренная мера количества информации в соответствии с выражением (3.24) обладает теми же свойствами, что и энтропия множества X .

Предположим теперь, что с множеством X проводится опыт второй категории. В этом случае наблюдаемые события, являющиеся лишь отражением истинных, можно рассматривать как некоторое новое множество Y . До выполнения опыта с множеством X неопределенность его исхода, как и в первом случае, характеризуется энтропией множества:

$$H_{\text{до опыта}} = H(X).$$

После осуществления опыта о появившемся в нем событии множества X судят по наблюдаемому при этом событию множества Y . Поскольку для опытов второй категории не всегда верно, что при наблюдении события y_j в опыте действительно имело место событие x_j , то после завершения опыта относительно истинного его исхода всегда остается некоторая неопределенность. Эта неопределенность вполне характеризуется средней условной энтропией множества X [см. формулу (3.22)]:

$$H_{\text{после опыта}} = H(X|Y).$$

Поскольку вся информация о событиях, действительно происходящих в опытах с множеством X , заключена в событиях множества Y , то разность энтропий до и после опыта в соответствии с формулой (3.1) единственно разумно определить как количество информации, получаемое в событиях множества Y об исходах опыта с множеством X . Обозначив указанное количество информации $I(Y, X)$, будем иметь

$$I(Y, X) = H(X) - H(X|Y). \quad (3.27)$$

Подставив в выражение (3.27) $H(X)$ из формулы (3.8) и $H(X|Y)$ из формулы (3.22), получим

$$I(Y, X) = -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i) + \sum_{j=1}^M p(y_j) \sum_{i=1}^N p(x_i | y_j) \log p(x_i | y_j). \quad (3.28)$$

Поскольку

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j); \quad (3.29)$$

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad (3.30)$$

то выражение (3.28) с учётом формулы (3.29) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} I(Y, X) &= -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log p(x_i) + \\ &+ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N p(y_j) p(x_i | y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log p(x_i) + \quad (3.31) \\ &+ \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) p(y_j)}. \end{aligned}$$

Выясним смысл последнего выражения. Для этого запишем логарифм в сумме, учитывая формулу (3.30), следующим образом:

$$\log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) p(y_j)} = \log \frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)} = \log \frac{1}{p(x_i)} - \log \frac{1}{p(x_i | y_j)}. \quad (3.32)$$

Первый член правой части формулы (3.32) — это индивидуальная неопределённость H_i события x_i до опыта. Второй член — условная индивидуальная неопределённость H_{ij} того же события, т.е.

индивидуальная неопределенность события x_i , если наблюдаемым событием является y_j . Разность неопределенностей события x_i до и после опыта есть *индивидуальное количество информации* $I(y_j, x_i)$, содержащееся в событии y_j о событии x_i . Таким образом,

$$\log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} = H_i - H_{i|j} = I(y_j, x_i). \quad (3.33)$$

Подставив выражение (3.33) в формулу (3.31), будем иметь

$$I(Y, X) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) I(y_j, x_i). \quad (3.34)$$

Из соотношения (3.34) видно, что количество информации $I(Y, X)$, получаемое в событиях множества Y об исходах опыта с множеством X , — это среднее относительное количество информации, приходящееся на один опыт.

Подставив в выражение (3.27) $H(X|Y)$ из формулы (3.21), получим

$$I(Y, X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (3.35)$$

Учитывая выражение (3.20), из формулы (3.35) найдем

$$I(Y, X) = H(Y) - H(Y|X). \quad (3.36)$$

Приняв во внимание соотношение (3.10), перепишем формулу (3.35) в следующем виде:

$$I(Y, X) = H(Y) + H(X) - H(Y, X).$$

Учитывая порядок следования обозначений множеств в формуле (3.35), получим

$$I(Y, X) = I(X, Y). \quad (3.37)$$

Равенство (3.37) показывает, что количество информации, которое заключено в событиях множества Y о событиях множества X , равно количеству информации, которое заключено в событиях множества X о событиях множества Y .

Мера количества информации $I(Y, X)$ обладает следующими свойствами:

1) $I(Y, X) = 0$, если события множества X и Y независимы, т.е. $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$ для всех i и j . Этот результат получается сразу при подстановке $p(x_i, y_j)$ в формулу (3.31). Из интуитивных представлений тоже ясно, что если появление событий множества Y никак не связано с появлением событий множества X , то события множества Y не несут никакой информации о событиях множества X .

2) $I(Y, X) > 0$ при зависимости событий множеств. Это вытекает из выражения (3.27), если учесть первое неравенство (3.23);

3) $I(Y, X) = I(Y, X)_{\max} = H(X)$, когда события множества Y достоверно отражают события множества X :

$$p(x_i | y_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

В этом случае $H(X|Y) = 0$ и, как следует из выражения (3.27), $I(Y, X) = H(X)$.

Контрольные вопросы

1. Что называется опытом в вероятностной теории К. Шеннона?
2. Что принимается за общую меру количества информации в вероятностной теории К. Шеннона?
3. Что представляет собой энтропия конечного множества случайных событий?
4. От чего зависят единицы, в которых исчисляется количество информации в вероятностной теории?
5. Какими свойствами обладает энтропия множества случайных событий?
6. Чему равна энтропия конечного множества двух совместных событий при независимости и зависимости событий этих множеств?
7. Какими свойствами обладают средние условные энтропии $H(X|Y)$ и $H(Y|X)$?
8. Какие категории опытов рассматриваются в вероятностной теории К. Шеннона?
9. Что представляет собой индивидуальное количество информации?
10. Как вычисляется количество информации, получаемое в опытах первой и второй категорий с конечным множеством случайных событий?
11. Какими свойствами обладает мера количества информации $I(Y, X)$?

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ИСТОЧНИКИ. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО ИСТОЧНИКА

4.1. Вероятностные дискретные источники

В вероятностной теории информации рассматриваются дискретные источники со случайным характером выдачи элементов. В результате работы такого источника на его выходе появляется случайная последовательность дискретных элементов. Источники, вырабатывающие случайные последовательности элементов, называются *вероятностными дискретными источниками* (ВДИ).

Элементы в выдаваемой дискретным источником последовательности могут быть как статистически независимы, так и зависимы.

Если значение элемента, выдаваемого источником, зависит в статистическом смысле от значений ранее выданных элементов, то такой источник называется *источником с памятью*¹. Значение l -го элемента, появляющегося на его выходе, полностью определяется распределением условных вероятностей элементов его выходного алфавита X :

$$p(x_{i,l} | \dots, x_{h,l-2}, x_{i,l-1}), \quad (4.1)$$

где h, i, j — номера элементов алфавита X мощности N .

Если для источника условные вероятности выражения (4.1) не зависят от места l элемента в выдаваемой им последовательности, т. е.

$$p(x_{j,l} | \dots, x_{h,l-2}, x_{i,l-1}) = p(x_j | \dots, x_h, x_i),$$

то такой ВДИ называется *стационарным*. Большинство стационарных источников обладает конечной памятью. Это значит, что для них вероятности выдачи элементов зависят от значений только конечного числа L ранее выданных элементов, т. е.

¹ В теории рассматривают и более сложные источники. Например, такие, у которых значение выходного элемента статистически зависит не только от значений предшествующих элементов, но и от ограниченной последовательности состояний источника, в которые он переходит после выдачи очередных элементов. Если последовательность состояний указанного источника описывается конечной однородной цепью Маркова, то источники такого типа называются *марковскими*. Марковские источники в настоящем пособии не рассматриваются.

$$p(x_j | \dots, x_h, x_i) = p(x_j | x_a, \dots, x_h, x_i). \quad (4.2)$$

Источники, удовлетворяющие равенству (4.2), называются *эргодическими*. Они обладают тем свойством, что практически в любой достаточно длинной последовательности, выработанной таким источником, частота появления элемента x_j после элементов $x_a, \dots, x_h, x_i$ отличается от вероятности $p(x_j | x_a, \dots, x_h, x_i)$ не более, чем на сколь угодно малую величину. Это значит, что с вероятностью, как угодно близкой к единице, такой источник будет вырабатывать типичную в статистическом смысле последовательность.

В дальнейшем будем рассматривать только эргодические источники, причем ограничимся двумя простейшими их типами:

1) *источниками без памяти*, для которых

$$p(x_j | x_a, \dots, x_h, x_i) = p(x_j); \quad (4.3)$$

2) *источниками с памятью на один элемент*, для которых

$$p(x_j | x_a, \dots, x_h, x_i) = p(x_j | x_i).$$

Как видно из формулы (4.3), значение последующего элемента, выдаваемого источником без памяти, не зависит в статистическом смысле от значений предшествующих элементов. Работа такого источника полностью задается одномерным распределением вероятностей элементов $p(x_i)$.

Функционирование источника с памятью на один элемент определяется матрицей условных вероятностей выходных элементов:

$$\|p(x_j | x_i)\| = \begin{vmatrix} p(x_1 | x_1) & p(x_1 | x_2) & \dots & p(x_1 | x_N) \\ p(x_2 | x_1) & p(x_2 | x_2) & \dots & p(x_2 | x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_N | x_1) & p(x_N | x_2) & \dots & p(x_N | x_N) \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Условные вероятности $p(x_j | x_i)$ из матрицы (4.4) позволяют найти одномерное распределение вероятностей $p(x_i)$ элементов в выдаваемой источником последовательности как решение системы N уравнений:

$$\begin{cases} p(x_1) = \sum_{i=1}^N p(x_i) p(x_1 | x_i) \\ \dots \\ p(x_N) = \sum_{i=1}^N p(x_i) p(x_N | x_i). \end{cases} \quad (4.5)$$

Затем, используя формулу

$$p(x_i, x_j) = p(x_i)p(x_j|x_i)$$

и условные вероятности $p(x_j|x_i)$, полученные из системы уравнений (4.5), можно получить вероятности всех возможных пар соседних элементов в последовательности.

4.2. Количество информации в выходном элементе вероятностного дискретного источника

Для источника без памяти средняя неопределенность выходного элемента

$$H_3(X) = H(X) = -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i). \quad (4.6)$$

Средняя неопределенность выходного элемента источника с памятью на один элемент вполне определяется средней условной энтропией $H(X_2|X_1)$ последующего элемента при известном предыдущем. Эта энтропия с учетом формулы (3.19) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} H_3(X) = H(X_2|X_1) &= -\sum_{i=1}^N p(x_i) \sum_{j=1}^N p(x_j|x_i) \log p(x_j|x_i) = \\ &= -\sum_{i,j} p(x_i, x_j) \log p(x_j|x_i), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $p(x_i, x_j)$ — вероятность пары элементов с порядком следования x_i, x_j .

Энтропии, выражаемые формулами (4.6), (4.7), характеризуют неопределенность выходного элемента источника до его появления. После появления элемента, поскольку нет причин сомневаться в его истинности, неопределенность элемента отсутствует. В связи с этим согласно принятой в вероятностной теории мере [см. формулу (3.1)], количество информации, получаемое с появлением одного элемента на выходе источника, равно:

1) для источника без памяти

$$I_3(X) = H_3(X) = H(X) = -\sum_i p(x_i) \log p(x_i); \quad (4.8)$$

2) для источника с памятью на один элемент

$$I_3(X) = H_3(X) = H(X_2|X_1) = -\sum_{i,j} p(x_i, x_j) \log p(x_j|x_i). \quad (4.9)$$

Если смысл формулы (4.8) совершенно ясен, то формула (4.9) нуждается в пояснении.

Запишем $-\log p(x_j|x_i)$ из формулы (4.9) в виде

$$-\log p(x_j|x_i) = \log \frac{1}{p(x_j|x_i)} - \log \frac{1}{1}. \quad (4.10)$$

В правой части выражения (4.10) первый член — это условная индивидуальная неопределенность $H_{j|i}$ появления на выходе источника элемента x_j , если предшествующий элемент был x_i ; второй член — неопределенность появления этого элемента после выдачи его источником. Разность этих неопределенностей представляет собой *условное индивидуальное количество информации* $I(x_j|x_i)$, т.е. количество информации, которое получают при появлении на выходе источника элемента x_j , если предшествующий элемент был x_i . Подставив $I(x_j|x_i)$ в формулу (4.9), получим

$$I_3(X) = \sum_{i,j} p(x_i, x_j) I(x_j|x_i). \quad (4.11)$$

Из формулы (4.11) видно, что для источника с памятью на один элемент $I_3(X)$ — это *среднее условное количество информации* $I(X_2|X_1)$, т.е. количество информации, которое в среднем несет каждый выходной элемент источника, если известен предшествующий элемент:

$$I_3(X) = I(X_2|X_1). \quad (4.12)$$

Для эргодических источников среднее условное количество информации $I(X_2|X_1)$ из формулы (4.12) обладает следующими свойствами:

- 1) $0 < I(X_2|X_1) \leq H(X)$;
- 2) $I(X_2|X_1) \rightarrow 0$, когда хотя бы для одного i ($i = 1, \dots, N$) $p(x_i|x_i) = 1$, т.е. когда начиная с некоторого элемента последующий элемент, выдаваемый источником, повторяет предыдущий, что возможно только для неэргодических источников;
- 3) $I(X_2|X_1) = I(X_2|X_1)_{\max} = H(X)$ только в случае полной независимости последующего элемента источника от предыдущего, т.е. когда $p(x_j|x_i) = p(x_j)$, что характерно только для источников без памяти.

4.3. Производительность вероятностного дискретного источника

Пусть источник, выдающий элементы, работает так, что каждый элемент x_j ($j = 1, \dots, N$) присутствует на его выходе в течение некоторого времени t_{x_j} . В общем случае время выдачи t_{x_j}

разных элементов может быть различным. Среднее время выдачи элемента $\bar{t}_3$, которое называется *средней длительностью элемента*, определяется следующим образом:

1) для источника без памяти

$$\bar{t}_3 = \sum_{j=1}^N p(x_j) t_{x_j}; \quad (4.13)$$

2) для источника с памятью на один элемент

$$\bar{t}_3 = \sum_{i=1}^N p(x_i) \sum_{j=1}^N p(x_j | x_i) t_{x_j}. \quad (4.14)$$

Средняя длительность элемента $\bar{t}_3$, вычисляемая по формулам (4.13) и (4.14), позволяет определить среднее количество информации g , вырабатываемое источником в 1 с:

1) для источника без памяти

$$g = \frac{I_3(X)}{\bar{t}_3} = \frac{H(X)}{\bar{t}_3}; \quad (4.15)$$

2) для источника с памятью на один элемент

$$g = \frac{I_3(X)}{\bar{t}_3} = \frac{I(X_2 | X_1)}{\bar{t}_3} = \frac{H(X_2 | X_1)}{\bar{t}_3}. \quad (4.16)$$

Величина g , определяемая по формулам (4.15) и (4.16), показывает скорость выдачи информации источником и называется *производительностью источника*.

Наряду с рассмотренным, в вероятностной теории информации существует и другой подход к определению производительности источника.

Пусть X_T — множество достаточно длинных последовательностей $x_{k,T} \in X_T$ ($k = 1, \dots, M(T)$, $M(T) = |X_T|$), каждая из которых может вырабатываться эргодическим источником за время T . С увеличением T $M(T)$ возрастает, так как для эргодического источника вероятность того, что достаточно длинная последовательность его элементов будет типичной, близка к единице.

Если через $p(x_{k,T})$ обозначить вероятность выдачи источником за время T последовательности элементов $x_{k,T}$, то величина

$$H_{k,T} = \log \frac{1}{p(x_{k,T})} \quad (4.17)$$

будет характеризовать индивидуальную неопределенность появления на выходе источника последовательности $x_{k,T}$, а с учетом выражения (4.17) энтропия

$$H(X_T) = \sum_{k=1}^{M(T)} p(x_{k,T}) H_{k,T} = - \sum_{k=1}^{M(T)} p(x_{k,T}) \log p(x_{k,T}) \quad (4.18)$$

будет определять среднюю неопределенность выходной последовательности источника длительностью T .

Поскольку все элементы последовательности являются истинными, то количество информации $I(X_T)$, которое несет выходная последовательность источника длительностью T ,

$$I(X_T) = H(X_T). \quad (4.19)$$

Согласно равенству (4.19) среднее количество информации, выдаваемое источником в 1 с, или производительность источника,

$$g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I(X_T)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H(X_T)}{T}. \quad (4.20)$$

Формула (4.20) показывает, что производительность источника зависит от количества информации $I(X_T)$, которое он выдает за время T . Чем больше $I(X_T)$, тем большей производительностью обладает источник.

Производительность является важнейшей характеристикой ВДИ.

4.4. Максимальная производительность вероятностного дискретного источника

Найдем теперь, какой наибольшей производительностью может обладать ВДИ.

Как следует из третьего свойства меры количества информации при проведении с множеством случайных событий опытов первой категории (см. подразд. 3.4), количество информации, выдаваемое источником за время T , $I(X_T) = I(X_T)_{\max} = \log M(T)$ только тогда, когда все последовательности $x_{k,T}$ равновероятны. Производительность источника

$$G = g_{\max} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log M(T)}{T} \quad (4.21)$$

называется *максимальной производительностью ВДИ*.

Как видно из формулы (4.21), максимальная производительность источника определяется только числом $M(T)$ различных последовательностей в множестве X_T , которое обычно при фиксированном T тем больше, чем больше мощность алфавита N и меньше длительность отдельных элементов. Поскольку при установлении производительности источника [см. формулу (4.21)] ка-

кие-либо ограничения на последовательности элементов, выдаваемые источником, отсутствовали, то формула (4.21) определяет максимальную производительность источника и тогда, когда длительности элементов алфавита различны и не все комбинации элементов в последовательностях длительности T допустимы.

Максимальная производительность источника, характеризуя его потенциальные возможности, не определяет той истинной производительности, которую он имеет. Это лишь предельно достижимая производительность источника.

Максимальная производительность найдена для большинства реальных источников с элементами одинаковой и разной длительности, на выходные последовательности которых не установлены или установлены определенные ограничения.

Пример 4.1. Найти максимальную производительность источника, который выдает N различных элементов с одинаковой длительностью t_s , причем какие-либо ограничения на комбинации элементов в его выходных последовательностях отсутствуют.

Для нахождения G рассмотрим последовательности, состоящие из n элементов.

На выдачу каждой из этих последовательностей источник затрачивает время $T = nt_s$. Поскольку допустимы любые комбинации элементов в последовательностях, то число различных последовательностей длительности T составляет $M(T) = N^n$. Подставив $M(T)$ в формулу (4.21) и учитывая, что с ростом T число элементов n в последовательностях тоже растет, получим

$$G = \lim_{(nt_s) \rightarrow \infty} \frac{\log N^n}{nt_s} = \frac{1}{t_s} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log N}{n} = \frac{1}{t_s} \log N. \quad (4.22)$$

При выборе в выражении (4.22) основания логарифма $a = 2$ максимальная производительность источника будет измеряться в бит/с или в бодах (1 бит/с = 1 бод).

Величина $1/t_s$, входящая в выражение (4.22), представляет собой число элементов, выдаваемых источником в 1 с.

Если у источника $N = 2$, то его максимальная производительность составит

$$G = \frac{1}{t_s} \log_2 2 = \frac{1}{t_s} \text{ бод}. \quad (4.23)$$

Полученный результат достаточно часто встречается на практике.

Контрольные вопросы

1. Какие источники называются вероятностными дискретными?
2. Чем различаются источники с памятью и без памяти?

3. Как определяется количество информации, которое содержит выходной элемент вероятностных дискретных источников без памяти и с памятью на один элемент?

4. Каков смысл количества информации, получаемого на выходе вероятностного дискретного источника с памятью на один элемент, при выдаче им одного элемента?

5. Что характеризует производительность вероятностного дискретного источника?

6. Какой смысл имеет понятие «максимальная производительность вероятностного дискретного источника»?

ИЗБЫТОЧНОСТЬ ИНФОРМАЦИИ, ВЫДАВАЕМОЙ ВЕРОЯТНОСТНЫМ ДИСКРЕТНЫМ ИСТОЧНИКОМ

5.1. Избыточность последовательности, выдаваемой вероятностным дискретным источником

В вероятностной теории информации для оценки того, насколько экономно последовательность, выдаваемая ВДИ, представляет то количество информации, которое она несет, используется величина, называемая *избыточностью представления информации* (И).

Рассмотрим множество последовательностей длины n элементов, которые могут выдаваться дискретным эргодическим источником. Избыточность последовательности определяется как величина

$$I_{\Pi} = \frac{I_{\Pi}(X)_{\max} - I_{\Pi}(X)}{I_{\Pi}(X)} = \frac{I_{\Pi}(X)_{\max}}{I_{\Pi}(X)} - 1, \quad (5.1)$$

где $I_{\Pi}(X)_{\max}$ — максимальное количество информации, которое может нести последовательность; $I_{\Pi}(X)$ — количество информации, которое действительно несет последовательность ($I_{\Pi}(X) > 0$).

Поскольку каждый элемент последовательности содержит в среднем одно и то же количество информации, то:

1) для источника без памяти

$$I_{\Pi}(X) = nI_3(X) = nH_3(X) = nH(X);$$

2) для источника с памятью на один элемент

$$I_{\Pi}(X) = nI_3(X) = nH_3(X) = nH(X_2|X_1).$$

Найдем, чему равно $I_{\Pi}(X)_{\max}$. Как было отмечено в подразд. 4.2, максимальное количество информации заключено в выходном элементе источника, когда его значение не зависит от значений предшествующих элементов, т.е. когда он вырабатывается источником без памяти. В этом случае $I_3(X) = H(X)$. Энтропия элемента максимальна и равна $\log N$, когда появление любого из N элементов алфавита X на выходе источника равновероятно. В связи с этим максимальное количество информации, которое может содержать элемент, $I_3(X)_{\max} = \log N$. Отсюда $I_{\Pi}(X)_{\max} = n I_3(X)_{\max} = n \log N$.

Подставив эти выражения в выражение (5.1), получим

$$I_{\Pi} = \frac{n \log N}{n H_3(X)} - 1 = \frac{\log N}{H_3(X)} - 1. \quad (5.2)$$

Из формулы (5.2) видно, что избыточность последовательности равна избыточности элемента.

Избыточность последовательности показывает, во сколько раз недозаложенное в последовательность количество информации за счет неравновероятности ее элементов и их зависимости (числитель выражения (5.1)) превышает то, которое содержит последовательность. Как следует из формулы (5.2), $0 \leq I_{\Pi} < \infty$; $I_{\Pi} = 0$, когда элементы последовательности выдаются источником без памяти с равными вероятностями.

Если $I_{\Pi} > 0$, то это означает, что для представления того количества информации, которое заключено в последовательности, можно обойтись последовательностью меньшей длины, если обеспечить в ней равенство вероятностей элементов и отсутствие зависимости между ними.

Пример 5.1. Найти избыточность информации, выдаваемой источником без памяти, если алфавит X производимой им последовательности состоит из четырех элементов и эти элементы x_i ($i = 1, \dots, 4$) появляются на выходе источника с вероятностями: $p(x_1) = 0,5$; $p(x_2) = 0,25$; $p(x_3) = p(x_4) = 0,125$.

Энтропию элемента $H_3(X)$ на выходе такого источника определим по формуле (4.8):

$$H_3(X) = -0,5 \log_2 0,5 - 0,25 \log_2 0,25 - 2 \cdot 0,125 \log_2 0,125 = 1,75 \text{ бит.}$$

Избыточность информации, выдаваемой источником, найдем по формуле (5.2):

$$I_{\Pi} = \frac{\log_2 4}{1,75} - 1 \approx 0,143.$$

Таким образом, источник выдаст информацию с избыточностью 0,143.

5.2. Изменение избыточности информации, выдаваемой дискретным источником, путем кодирования

Операциями, позволяющими изменять избыточность информации, выдаваемой ВДИ, являются кодирование 2-го и 3-го типов. Под *кодированием информации* здесь будем понимать установление взаимно-однозначного соответствия между отрезками последовательности, выдаваемой ВДИ, и некоторыми другими ог-

раниченными по длине последовательностями элементов из конечного алфавита Z мощности $m = |Z|$. Элементы указанного алфавита будем называть *символами*, а последовательности этих элементов, используемые при кодировании, — *кодowymi комбинациями*. Все множество U кодовых комбинаций, применяемое при кодировании, назовем *кодом*, а преобразователи, выполняющие указанные операции, — *кодерами*.

Для кодирования отрезков конечной длины последовательности используются блочные коды. Код называется *блочным*, если каждая его комбинация имеет ограниченную длину.

Блочные коды делятся на равномерные и неравномерные. Код называется *равномерным*, если все его комбинации имеют одну и ту же длину, и *неравномерным* — если длины его комбинаций различны. Например, пятисимвольный двоичный блочный код является равномерным, так как каждая его комбинация состоит из пяти двоичных символов, а код Морзе, разработанный для передачи знаков английского текста, является неравномерным в силу того, что используемые в нем комбинации при кодировании букв содержат от 1 до 4 двоичных символов, при кодировании цифр — 5 двоичных символов, при кодировании знаков препинания — 6 двоичных символов.

Среди неравномерных выделяют коды с разделительными и без разделительных знаков. Код называется *кодом с разделительными знаками*, если однозначное разделение последовательности его комбинаций на отдельные комбинации невозможно осуществить без использования специального знака. Примером такого кода может служить код Морзе, в котором для разделения комбинаций используется специальный знак. Код называется *кодом без разделительных знаков*, если любая последовательность его комбинаций однозначно разделяется на отдельные комбинации без использования специального знака.

Код без разделительных знаков может содержать только такие комбинации, которые удовлетворяют условию: ни одна из них в целом не является началом другой. Например, в указанный код могут входить комбинации 10 и 001, но не могут 10 и 100, так как при появлении в последовательности комбинаций символов 10 невозможно точно указать, являются ли они комбинацией 10 или первыми двумя символами комбинации 100. Исходя из отмеченных ограничений на комбинации неравномерные коды без разделительных знаков часто называют *префиксными*¹.

¹ Это название не совсем удачно, так как префиксом называется часть слова, стоящая перед основной его частью. Поскольку на комбинации кода наложено ограничение, суть которого состоит в том, что ни одна из комбинаций в целом не может являться начальной частью другой, то правильнее было бы коды без разделительных знаков называть беспрефиксными кодами.

При равномерном коде разделение последовательности его комбинаций на отдельные комбинации не вызывает затруднений, так как обычно известны начало последовательности и длина комбинации кода n .

Если кодирование отрезков последовательности источника выполняется неравномерным кодом, то более эффективным является применение кода без разделительных знаков, так как в этом случае не усложняется кодер из-за необходимости выдачи специального знака разделения комбинаций и не тратится время на формирование этого знака.

Неравномерные коды без разделительных знаков делятся на оптимальные и неоптимальные по длине. Пусть l_i — длина в числе символов комбинации с номером i ($i = 1, 2, \dots, N$); p_i — вероятность использования этой комбинации; N — число комбинаций в коде. Тогда средняя длина комбинации на выходе кодера

$$l_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^N p_i l_i. \quad (5.3)$$

Код без разделительных знаков, имеющий при заданном распределении вероятностей p_i наименьшую среднюю длину комбинации $l_{\text{ср}} = l_{\text{ср min}}$, называется *оптимальным по длине*. Код без разделительных знаков, у которого при заданном распределении вероятностей комбинаций $l_{\text{ср}} > l_{\text{ср min}}$, называется *неоптимальным по длине*.

Все коды делятся на корректирующие и некорректирующие. *Корректирующим* называется код, позволяющий обнаруживать и (или) исправлять искаженные символы, появляющиеся в его комбинациях в результате действия помех и отказов элементов аппаратуры. *Некорректирующим* является код, который не позволяет обнаруживать искаженные символы в своих комбинациях.

Покажем, что при взаимно-однозначном кодировании информация не теряется.

Пусть кодер выполняет такое кодирование последовательности элементов, при котором каждому элементу $x_j \in X$ ($j = 1, \dots, N$) источника ставится в соответствие своя кодовая комбинация $y_j \in Y$ и все комбинации кода различны. При этих условиях, если на вход кодера поступают элементы от источника без памяти, то $p(y_j) = p(x_j)$, а если от источника с памятью на один элемент, то $p(y_j|y_i) = p(x_j|x_i)$. Отсюда следует, что количество информации $I(Y)$, которое заключено в среднем в одной комбинации кода, равно среднему количеству информации, которое заключено в одном элементе последовательности, выдаваемой источником, причем:

1) для источника без памяти

$$I(Y) = I(X) = H(X); \quad (5.4)$$

2) для источника с памятью на один элемент

$$I(Y) = I(Y_2|Y_1) = I(X_2|X_1) = H(X_2|X_1). \quad (5.5)$$

Аналогично равенствам (5.4), (5.5) можно показать, что в случае, когда кодируются отрезки последовательности по k элементов, количество информации, которое содержит в среднем одна кодовая комбинация, равно среднему количеству информации, которое заключено в k элементах последовательности источника.

Поскольку при кодировании отрезков последовательности источника происходит изменение вида информации при сохранении среднего ее количества, то можно ожидать, что избыточность информации на выходе кодера будет отличаться от избыточности той же информации на его входе. Среди различных способов кодирования существуют как способы уменьшения, так и способы увеличения избыточности информации. Кодирование, позволяющее уменьшать избыточность, получило название *эффективного*. Его используют для наиболее экономного представления информации. Кодирование, приводящее к увеличению избыточности, называется *помехоустойчивым*. Его применяют для повышения верности представления информации.

Рассмотрим на примерах, как меняется избыточность одной и той же информации при различных способах кодирования отрезков последовательности источника. Рассмотрение проведем для источника, описанного в примере 5.1. Выдаваемые им элементы и их вероятности представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Элемент x_i	Вероятность $p(x_i)$	Код 1	Код 2	Код 3
x_1	0,5	00	0	000
x_2	0,25	01	10	011
x_3	0,125	10	110	101
x_4	0,125	11	111	110

Пример 5.2. Найти избыточность информации, выдаваемой источником, рассмотренном в примере 5.1, после кодирования каждого элемента его последовательности кодом 1 (см. табл. 5.1).

Неопределенность комбинации используемого кода $H(Y)$ с учетом того, что $p(y_i) = p(x_i)$,

$$H(Y) = H_3(X) = 1,75 \text{ бит.}$$

Поскольку в коде 1 длина всех комбинаций $l = 2$, то средняя неопределенность одного элемента комбинации

$$H_{\text{эл}}(Z) = \frac{H(Y)}{l} = \frac{1,75}{2} = 0,875 \text{ бит.}$$

Подставив найденное значение H_{31} в формулу (5.2), получим

$$I_{\text{п1}} = \frac{\log_2 m}{H_{31}(Z)} - 1 = \frac{\log_2 2}{0,875} - 1 = 0,143.$$

Пример 5.3. Найти избыточность информации, выдаваемой источником, рассмотренным в примере 5.1, после кодирования каждого элемента его последовательности кодом 2 (см. табл. 5.1).

В силу того что $p(y_i) = p(x_i)$, неопределенность комбинации данного кода, как и в примере 5.2, $H(Y) = H_2(X) = 1,75$ бит.

Средняя длина l_{cp} комбинации кода 2 есть математическое ожидание длины комбинации:

$$l_{\text{cp}} = \sum_{i=1}^4 p(x_i) l_{x_i} = 0,5 \cdot 1 + 0,25 \cdot 2 + 2 \cdot 0,125 \cdot 3 = 1,75 \text{ символов.}$$

Энтропия элемента комбинации

$$H_{32}(Z) = \frac{H(Y)}{l_{\text{cp}}} = \frac{1,75}{1,75} = 1 \text{ бит,}$$

а избыточность последовательности комбинаций

$$I_{\text{п2}} = \frac{\log_2 m}{H_{32}(Z)} - 1 = \frac{\log_2 2}{1} - 1 = 0.$$

Безыбыточность представления информации кодом 2 объясняется тем, что вероятность появления символа 1 на месте очередного элемента последовательности комбинаций равна вероятности появления на этом месте символа 0 (см. табл. 5.1). Это равенство указанных вероятностей и приводит к тому, что энтропия двоичного символа максимальна и составляет 1 бит. Если хотя бы в одном месте последовательности комбинаций вероятности 0 и 1 не были бы равны, то энтропия двоичного символа не была бы максимальной и избыточность кодовой последовательности была бы больше 0.

Пример 5.4. Найти избыточность информации, выдаваемой источником, рассмотренным в примере 5.1, после кодирования каждого элемента его последовательности кодом 3 (см. табл. 5.1).

Неопределенность комбинации этого кода, как и в примере 5.2,

$$H(Y) = H_3(X) = 1,75 \text{ бит.}$$

Энтропия элемента комбинации

$$H_{33}(Z) = \frac{H(Y)}{l} = \frac{1,75}{3} = 0,583 \text{ бит,}$$

а избыточность последовательности комбинаций

$$I_{\text{п3}} = \frac{\log_2 2}{0,583} - 1 = 0,715.$$

Таким образом, как видно из приведенных примеров, применяя различные способы кодирования отрезков последовательности источника, избыточность информации может быть оставлена без изменения, уменьшена или увеличена.

Из трех рассмотренных в примерах кодов код 2 является оптимальным по длине, так как можно показать, что при заданных вероятностях элементов $p(x_i)$ не может быть построен код со средней длиной комбинации, меньшей 1,75 символов. Хотя у этого кода $I_{\Pi 2} = 0$, в общем случае для оптимального кода $I_n(Z) \geq 0$. Оптимальные по длине коды могут быть найдены и в случае, когда кодированию подвергаются не одиночные элементы последовательности, а отрезки из $k > 1$ ее элементов.

При выполнении преобразований, обратных кодированию 2-го и 3-го типов, при декодировании 2-го и 3-го типов вновь получают информацию в том виде, в котором она была выдана источником.

Преобразователь, осуществляющий декодирование 2-го и 3-го типов, будем называть *декодером*.

5.3. Эффективное кодирование последовательности элементов дискретного источника

Пусть эргодический источник (в общем случае с памятью) выдает различные элементы алфавита X с неравными вероятностями, а отрезки по k элементов ($k = 1, 2, \dots$) последовательности, вырабатываемой таким источником, эффективно кодируются кодом без разделительных знаков с основанием m .

Обозначим через $H(X_1, \dots, X_k)$ энтропию отрезка последовательности из k элементов, а через $H_k(X)$ — энтропию на элемент в таком отрезке:

$$H_k(X) = \frac{H(X_1, \dots, X_k)}{k}.$$

В вероятностной теории информации доказана следующая теорема [2], которая здесь приводится без доказательства.

Теорема. Среди кодов без разделительных знаков с основанием m всегда существует такой, которым можно закодировать отрезки из k элементов последовательности источника так, что среднее число символов кода, приходящееся на элемент источника, $n_{\text{ср}} = l_{\text{ср}}/k$ будет удовлетворять неравенствам:

$$\frac{H_k(X)}{\log m} \leq n_{\text{ср}} < \frac{H_k(X)}{\log m} + \frac{1}{k}. \quad (5.6)$$

Можно показать, что с ростом длин k кодируемых отрезков последовательности правая часть неравенства (5.6) уменьшается. Следовательно, уменьшается и $n_{\text{ср}}$. Однако даже при $k \rightarrow \infty$ среднее число символов кода, приходящееся на один элемент последовательности, не может стать меньше предельного значения, равного $H_{\infty}(X)/\log m$.

Приведенная теорема получила название *основной теоремы эффективного кодирования*.

5.4. Алгоритмы построения оптимальных неравномерных кодов

Рассмотрим достаточно длинную последовательность, выдаваемую эргодическим дискретным источником, возможно с памятью. Пусть также элементы последовательности появляются на выходе источника с неравными вероятностями. Разделим последовательность на отрезки по k ($k = 1, 2, \dots, r$) элементов. Множество различных наборов элементов, которые могут содержать отрезки, обозначим X_k . Пусть известны вероятности появления наборов элементов источника в отрезках. Перенумеруем наборы элементов, принадлежащих множеству X_k , в порядке убывания их вероятностей. В этом случае набор с наибольшей вероятностью будет иметь номер 1, а набор с наименьшей вероятностью — номер $N = |X_k|$.

Закодируем наборы элементов множества X_k оптимальным по длине неравномерным кодом. Для нахождения комбинаций такого кода чаще всего используется один из двух алгоритмов: Шеннона — Фано или Д. Хаффмана.

Алгоритм Шеннона — Фано построения оптимального неравномерного кода. Он предложен (с незначительными отличиями) независимо К. Шенноном и Р. Фано в 1948 г. Алгоритм может быть применен для нахождения комбинаций неравномерного кода без разделительных знаков с любым основанием m . Для простоты ограничимся рассмотрением только случая, когда $m = 2$. При построении такого кода по данному алгоритму необходимо выполнить следующую последовательность действий.

Все кодируемые наборы элементов множества X_k записываются в столбик в порядке убывания их вероятностей. Затем эти наборы делятся на две группы так, чтобы сумма вероятностей наборов в каждой группе была по возможности одинаковой. Всем наборам первой группы в качестве первого (слева) символа комбинаций присваивается 0, а наборам второй группы — 1. Каждая из полученных групп снова делится на две подгруппы по возможности с равными суммарными вероятностями. Всем наборам первых подгрупп в качестве второго символа комбинаций записывается 0, наборам вторых подгрупп — 1. Такой процесс продолжается до тех

пор, пока в каждой подгруппе не останется по одному набору. Применение алгоритма показано на примере нахождения комбинаций неравномерного двоичного кода для 10 наборов с некоторыми произвольно выбранными вероятностями (табл. 5.2). Во втором столбце табл. 5.2 арабскими цифрами отмечены ступени деления.

Таблица 5.2

Номер набора элементов	Вероятность набора элементов	Комбинация кода	Номер набора элементов	Вероятность набора элементов	Комбинация кода
1	II 0,3	00	6	III 0,05	1101
2	I 0,22	01	7	IV 0,05	1110
3	III 0,13	100	8	V 0,04	11110
4	II 0,1	101	9	VI 0,06	111110
5	IV 0,08	1100	10	0,01	111111

Код, построенный по данному алгоритму, это код без разделительных знаков. Это обусловлено тем, что данный алгоритм обеспечивает построение кода, у которого ни одна из комбинаций не является в целом началом другой.

Достаточно часто рассмотренный алгоритм допускает построение нескольких неравномерных кодов. Покажем это на примере.

Пусть некоторая подгруппа содержит четыре набора с вероятностями 0,05, 0,04, 0,03, 0,02. Разбиение ее на две подгруппы с примерно равными вероятностями может быть выполнено не единственным способом. Здесь возможны два варианта: а) в первую подгруппу входит только первый набор, во вторую — все остальные; б) в первую подгруппу входят первый и второй наборы, во вторую — третий и четвертый. С точки зрения формирования подгрупп по вероятностям эти два варианта равноценны, однако сами комбинации и их длины в этих вариантах различны. Таким образом, не всегда использование алгоритма Шеннона—Фано позволяет сразу найти оптимальный неравномерный код. Однако если построить, применяя этот алгоритм, все возможные неравномерные коды и вычислить для каждого из них l_{cp} по формуле (5.3), то нетрудно найти среди них оптимальный код.

Алгоритм Хаффмана построения оптимального неравномерного кода. Этот алгоритм предложен Д. Хаффманом в 1952 г. [12]. Он также позволяет строить неравномерный код без разделительных знаков с любым основанием. Однако в целях упрощения изложим его, как и алгоритм Шеннона—Фано, для кода с основанием $m = 2$. В этом случае последовательность операций алгоритма следующая¹.

¹ Обоснование алгоритма дано в [12] и в более современной форме — в [2]. Там же приведено его обобщение на случай, когда $m > 2$.

Все кодируемые наборы элементов множества X_k располагаются в столбик в порядке убывания их вероятностей. Двум последним наборам в качестве последнего символа комбинаций присписывается: первому — 0, второму — 1. Затем эти два набора объединяются во вспомогательную группу, которая рассматривается как один набор с вероятностью, равной сумме вероятностей объединенных наборов. В результате операции объединения получается новое множество, состоящее уже из $(N - 1)$ наборов. Наборы этого множества вновь располагаются в порядке убывания их вероятностей. Двум последним из них в качестве последнего символа присваивается: первому — 0, второму — 1. Далее эти два набора объединяются в новую вспомогательную группу, которой придается смысл одного набора с вероятностью, равной сумме вероятностей объединяемых наборов. Затем $(N - 2)$ набора полученного множества снова располагаются в порядке убывания их вероятностей и т.д. Операции объединения продолжаются до тех пор, пока не образуется единственная вспомогательная группа. На этом построение кода заканчивается. Сами комбинации кода получают, записывая в обратной последовательности все символы, которые были приписаны набору и его вспомогательным группам.

В табл. 5.3 при использовании «кодowego дерева» показано применение данного алгоритма для множества наборов, приведенного в табл. 5.2. Над ребрами дерева указаны приписываемые символы комбинаций, под ребрами — вероятности вспомогательных групп.

Сравнение неравномерного кода, полученного по алгоритму Хаффмана (см. табл. 5.3), с кодом, построенным по алгоритму Шеннона—Фано (см. табл. 5.2), показывает, что несмотря на их отличие длины комбинаций, которыми кодируются одни и те же наборы в этих кодах, одинаковы. Следовательно, код, построенный по алгоритму Шеннона—Фано, в данном случае также является оптимальным.

Алгоритмы Шеннона—Фано и Хаффмана были разработаны в предположении, что вероятности наборов элементов в отрезках выходной последовательности источника известны. Однако на практике это часто не так. Указанное обстоятельство потребовало разработки других алгоритмов уменьшения избыточности последовательностей, которые может выдавать дискретный источник. Эти алгоритмы, получившие название *алгоритмов сжатия*, позволяют уменьшать избыточность каждой конкретной последовательности в процессе движения от ее начала к концу. При этом исходная последовательность заменяется другой, более короткой. Примером может служить алгоритм *LZ* (называемый еще алгоритмом с использованием словарей), предложенный израильскими исследователями Я. Зивом и А. Лемпелем в 1977 г., и

Таблица 5.3

Номер набора элементов	Вероятность набора элементов	Кодовое дерево	Комбинация кода
1	0,3		00
2	0,22		10
3	0,13		011
4	0,1		110
5	0,08		0100
6	0,05		1110
7	0,05		1111
8	0,04		01010
9	0,02		010110
10	0,01		010111

его многочисленные модификации. Однако в силу ограниченного объема настоящего пособия этот алгоритм здесь рассматриваться не будет.

Контрольные вопросы

1. Что показывает избыточность последовательности, выдаваемой вероятностным дискретным источником?
2. Какие источники выдают последовательности без избыточности?
3. Какие операции позволяют изменить избыточность информации, выдаваемой вероятностным дискретным источником?
4. Какой код называется кодом без разделительных знаков?
5. Какая величина лежит в основе определения кода, оптимального по длине?
6. Какое кодирование называется эффективным, а какое — помехоустойчивым?

7. Что показывает основная теорема эффективного кодирования?
8. В чем заключается суть построения оптимального неравномерного кода по алгоритму Шеннона—Фано?
9. Почему алгоритм Шеннона—Фано не всегда позволяет сразу построить оптимальный код?
10. Если строится неравномерный код без разделительных знаков с основанием $m = 3$, на сколько групп должны делиться все кодируемые наборы элементов множества X_k при использовании алгоритма Шеннона—Фано?
11. В чем состоит суть построения оптимального неравномерного кода по алгоритму Хаффмана?
12. Как изменяется алгоритм Хаффмана в случае, когда $m = 3$?

ДИСКРЕТНЫЕ КАНАЛЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ИСКАЖЕНИЯМИ. СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ПО ДИСКРЕТНОМУ КАНАЛУ

6.1. Дискретные каналы со случайными искажениями

В вероятностной теории информации изучаются дискретные каналы, в которых искажения передаваемых по ним элементов носят случайный характер. Под *дискретным каналом* в вероятностной теории понимают совокупность устройств, обеспечивающих независимую передачу дискретных элементов от источника или кодера к получателю или декодеру. Обычно в эту совокупность включают модулятор дискретной модуляции (M_d), непрерывный канал и демодулятор дискретной модуляции (DM_d) (рис. 6.1).

Процесс передачи информации по дискретному каналу состоит в следующем. На вход канала информация подается в виде отдельных элементов z_i ($i = 1, \dots, m$) некоторого множества Z , называемого *входным алфавитом*. Эти элементы в дальнейшем будем называть символами. Модулятор M_d каждому символу $z_i \in Z$ ставит во взаимно-однозначное соответствие дискретное значение одного из параметров некоторой физической величины, вырабатываемой специальным источником и способной распространяться в определенной физической среде. Поскольку каждый символ z_i имеет некоторую продолжительность, то поведение физической величины на выходе M_d наиболее полно описывается при помощи m непрерывных функций времени $f_i(t)$. Выдаваемая M_d физическая величина с разрешенным значением одного из ее параметров называется *сигналом*.



Рис. 6.1. Дискретный канал

Сигналы с M_d направляются в непрерывный канал. В каждом конкретном случае непрерывный канал образует своя группа устройств. Однако в вероятностной теории информации интерес представляют не сами эти устройства, а общие характеристики образуемого ими непрерывного канала, такие как полоса пропускания F , средняя мощность $\bar{P}$ сигналов на выходе канала и др.

При передаче сигналов по непрерывному каналу часто происходит их искажение, вызванное действием в канале помех. *Помехи* — это сторонние аналоговые возмущения, действующие на сигналы и приводящие к их искажению. Источники помех могут находиться как вне, так и в устройствах, через которые проходит информация при движении к получателю, т.е. быть как внешними, так и внутренними. Однако в теории принято все источники помех заменять одним с эквивалентным действием и считать, что помехи, вырабатываемые этим источником, действуют на сигналы при передаче их по непрерывному каналу.

С выхода непрерывного канала искаженные сигналы $f_{\xi}(t)$ поступают на вход демодулятора ДМ_д. Назначение ДМ_д состоит в принятии решений о передаваемых символах, в соответствии с которыми на его выходе появляются символы u_j ($j = 1, \dots, l$; $l \geq m$) множества U , называемого *выходным алфавитом* дискретного канала. Так как на вход ДМ_д поступают искаженные сигналы, то принимаемые им решения не всегда правильны, т.е. не всегда при подаче на вход M_d символа z_j на выходе ДМ_д появится символ u_j .

При передаче дискретной информации непрерывный канал является составной частью дискретного канала.

Дискретный канал считается заданным, если известны его входной и выходной алфавиты и вероятности появления символов выходного алфавита при условии, что известен символ, поданный на вход канала, и все символы, поступившие до него на вход и полученные с выхода канала. Ограничимся рассмотрением только таких каналов, у которых подача на вход одного символа приводит к появлению на выходе тоже только одного символа.

Пусть Z и U соответственно входной и выходной алфавиты дискретного канала. Обозначим через

$$p(u_{j,L} | \dots, z_{i,L}; \dots, u_{h,L-1}) \quad (6.1)$$

условную вероятность появления на L -м месте в выходной последовательности канала символа $u_j \in U$. Каналы, у которых условные вероятности появления выходных символов имеют вид (6.1), называются *каналами с памятью*¹.

¹ В дальнейшем ограничимся рассмотрением только таких каналов с памятью, хотя в теории изучены и некоторые более сложные каналы. Например, каналы, у которых вероятности появления выходных символов зависят не только от символов, поданных на вход и полученных с выхода канала, но и от состояния, в котором находится канал в момент подачи очередного символа на его вход.

Если для канала условные вероятности [см. выражение (6.1)] не зависят от места, которое занимает символ в выходной последовательности, т.е.

$$p(u_{j,L} | \dots, z_{i,L}; \dots, u_{h,L-1}) = p(u_j | \dots, z_i; \dots, u_h).$$

то такой дискретный канал называется *стационарным*. Большинство стационарных каналов обладает конечной памятью. Это значит, что для них

$$p(u_j | \dots, z_i; \dots, u_h) = p(u_j | z_a, \dots, z_i; u_b, \dots, u_h). \quad (6.2)$$

Каналы, удовлетворяющие равенству (6.2), называются *эргодическими*. Они обладают таким же свойством давать на выходе канала типичную в статистическом смысле последовательность символов, как и эргодические источники, — вырабатывать типичную последовательность элементов.

Частным случаем эргодического канала является канал, у которого вероятности появления выходных символов зависят только от значений конечного числа входных символов и не зависят от ранее полученных выходных символов. Для такого канала

$$p(u_j | z_a, \dots, z_i; u_b, \dots, u_h) = p(u_j | z_a, \dots, z_i). \quad (6.3)$$

Наиболее простым эргодическим каналом является такой, у которого выходной символ, представленный в формуле (6.3), статистически зависит лишь от соответствующего входного символа, т.е.

$$p(u_j | z_a, \dots, z_i) = p(u_j | z_i). \quad (6.4)$$

Условная вероятность $p(u_j | z_i)$, указанная в равенстве (6.4), является вероятностью появления на выходе канала символа u_j при условии, что на вход канала подан символ z_i . Вероятность такого вида часто называют *переходной вероятностью*.

Эргодический канал, зависимость между входными и выходными символами которого определяется переходными вероятностями $p(u_j | z_i)$, называется *каналом без памяти*. В дальнейшем для простоты будем рассматривать каналы только этого вида.

Работа канала без памяти полностью задается матрицей условных вероятностей выходных элементов

$$\|p(u_j | z_i)\| = \begin{vmatrix} p(u_1 | z_1) & p(u_1 | z_2) & \dots & p(u_1 | z_m) \\ p(u_2 | z_1) & p(u_2 | z_2) & \dots & p(u_2 | z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(u_l | z_1) & p(u_l | z_2) & \dots & p(u_l | z_m) \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

Если в матрице (6.5) не все элементы главной диагонали равны 1, то канал, задаваемый такой матрицей, называется *дискретным каналом со случайными искажениями*.

6.2. Количество информации в выходном символе дискретного канала с искажениями

Процесс передачи символа по дискретному каналу с искажениями, как отмечалось в подразд. 3.4, представляет собой опыт второй категории с множеством случайных событий (под событием здесь понимается подача символа, принадлежащего алфавиту Z , на вход канала). Вследствие этого количество информации, получаемое с появлением одного символа на выходе канала, определяется или в соответствии с выражением (3.27):

$$I(U, Z) = H(Z) - H(Z|U), \quad (6.6)$$

где $H(Z)$ — энтропия входного символа канала; $H(Z|U)$ — средняя условная энтропия входного символа канала при известном выходном символе,

или согласно формуле (3.36):

$$I(U, Z) = H(U) - H(U|Z), \quad (6.7)$$

где $H(U)$ — энтропия выходного символа канала; $H(U|Z)$ — средняя условная энтропия выходного символа канала при известном входном символе.

При нахождении $I(U, Z)$ обе формулы дают один и тот же результат, однако в большинстве случаев формула (6.7) является более удобной, так как в ней при вычислении $H(U|Z)$ сразу используются переходные вероятности, задающие канал.

По смыслу $I(U, Z)$ — это среднее количество информации, которое содержится в одном выходном символе об одном входном. В соответствии с формулой (3.31)

$$I(U, Z) = \sum_{i,j} p(z_i, u_j) \log \frac{p(z_i, u_j)}{p(z_i)p(u_j)}. \quad (6.8)$$

Воспользовавшись соотношениями:

$$p(z_i, u_j) = p(z_i)p(u_j|z_i); \quad (6.9)$$

$$p(u_j) = \sum_{i=1}^m p(z_i, u_j) = \sum_{i=1}^m p(z_i)p(u_j|z_i),$$

запишем выражение (6.8) в следующем виде:

$$I(U, Z) = \sum_{i,j} p(z_i) p(u_j | z_i) \log \frac{p(u_j | z_i)}{\sum_{i=1}^m p(z_i) p(u_j | z_i)}. \quad (6.10)$$

Из формулы (6.10) видно, что $I(U, Z)$ при неизменных переходных вероятностях, задающих канал, зависит от распределения входных символов. Максимальное значение $I(U, Z)$, найденное по всем возможным распределениям входных символов, обозначим

$$I(U, Z)_{\max} = \max_{p(z_1), \dots, p(z_m)} I(U, Z). \quad (6.11)$$

Как следует из формул (6.10) и (6.11), величины $I(U, Z)$ и $I(U, Z)_{\max}$ при неизменном распределении входных символов являются функциями от распределения переходных вероятностей.

Пример 6.1. Найти максимальное количество информации, которое может содержать двоичный символ на выходе канала, если передача символа производится по каналу с искажениями без памяти.

Пусть двоичным символом, подаваемым на вход канала с вероятностью $p(z_0)$, является 0 и с вероятностью $p(z_1) = 1 - p(z_0) = 1$, а канал задается матрицей переходных вероятностей

$$\|p(u_j | z_i)\| = \begin{vmatrix} p(u_0 | z_0) & p(u_0 | z_1) \\ p(u_1 | z_0) & p(u_1 | z_1) \end{vmatrix},$$

причем выполняются следующие условия: $p(u_0 | z_0) + p(u_1 | z_0) = 1$; $p(u_0 | z_1) + p(u_1 | z_1) = 1$.

Определим вначале, при каких значениях $p(z_0)$ и $p(z_1)$ количество информации в выходном символе канала максимальное. Решение этой задачи классическим методом — путем взятия производной функции $I(U, Z)$, записанной в форме формулы (6.10), и нахождения вероятности $p_{\text{жк}}(z_0)$, при которой $I(U, Z)$ максимальна, — достаточно громоздко. В связи с этим применим другой метод определения $p_{\text{жк}}(z_0)$, основанный на использовании формулы (6.7) [8].

Энтропию выходного символа канала найдем по формуле (3.3):

$$H(U) = - \sum_{j=0}^1 p(u_j) \log p(u_j), \quad (6.12)$$

где вероятности $p(u_j)$ связаны с $p(z_i)$ и переходными вероятностями соотношениями (6.9):

$$\begin{aligned} p(u_0) &= p(z_0)p(u_0 | z_0) + p(z_1)p(u_0 | z_1); \\ p(u_1) &= p(z_0)p(u_1 | z_0) + p(z_1)p(u_1 | z_1). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Запишем теперь на основе формулы (3.19):

$$H(U|Z) = -\{p(z_0)p(u_0|z_0) \log p(u_0|z_0) + p(z_0)p(u_1|z_0) \log p(u_1|z_0) + \\ + p(z_1)p(u_0|z_1) \log p(u_0|z_1) + p(z_1)p(u_1|z_1) \log p(u_1|z_1)\}. \quad (6.14)$$

В случае если вероятности искажений символов в канале одинаковы (каналы с таким свойством называются симметричными), т.е. если $p(u_1|z_0) = p(u_0|z_1) = p$, то формула (6.14) принимает вид

$$H(U|Z) = -\{p(z_0)(1-p) \log(1-p) + p(z_0)p \log p + \\ + [1-p(z_0)]p \log p + [1-p(z_0)](1-p) \log(1-p)\}.$$

Выполнив элементарное преобразование, получим:

$$H(U|Z) = -[p \log p + (1-p) \log(1-p)]. \quad (6.15)$$

Как видно из выражения (6.15), $H(U|Z)$ не зависит от вероятностей символов на входе канала. Отсюда следует, что $I(U, Z)$ принимает максимальное значение тогда, когда максимальное значение имеет $H(U)$. При выборе основания логарифмов $a = 2$ $I(U, Z) = H(U)_{\max} = 1$ бит только при условии, что выходные символы канала равновероятны, т.е. когда $p(u_0) = p(u_1) = 0.5$.

Подставив найденные значения $p(u_0)$ и $p(u_1)$ в формулы (6.12) и (6.13) и решив систему двух уравнений (6.13) относительно $p(z_0)$ и $p(z_1)$, получим $p_{\text{эк}}(z_0) = p_{\text{эк}}(z_1) = 0.5$. Таким образом, максимальное количество информации

$$I(U, Z)_{\max} = 1 + p \log p + (1-p) \log(1-p) \quad (6.16)$$

содержится в выходном двоичном символе симметричного канала тогда, когда двоичные символы на входе канала равновероятны. Поскольку при $p > 0$ второе и третье слагаемые в выражении (6.16) отрицательны, то $I(U, Z)_{\max} < 1$ бит. Это означает, что максимальное количество информации, содержащееся в выходном символе симметричного дискретного канала с искажениями, всегда меньше, чем максимальное количество информации, заключенное в его входном символе. Потеря информации в канале вызывается наличием в нем искажений символов.

Из выражений (6.15) и (6.16) следует, что $H(U|Z)$ и $I(U, Z)_{\max}$ являются функциями от p , в то время как $H(U)_{\max}$ от p не зависит. Графики зависимостей $H(U)_{\max}$, $H(U|Z)$ и $I(U, Z)_{\max}$ от p показаны на рис. 6.2. Как видно из графиков, с увеличением p от 0 до 0.5 $H(U|Z)$ непрерывно возрастает, а $I(U, Z)_{\max}$ уменьшается. При $p = 0.5$ $H(U|Z) = 1$, а $I(U, Z)_{\max} = 0$. Этот результат можно объяснить тем, что в данном случае теряется зависимость между входными символами и выходными, ибо при передаче как символа z_0 , так и z_1 на выходе канала с равной вероятностью будут появляться символы u_0 и u_1 . Иными словами, в этом случае значение символа на выходе канала не зависит от значения символа, поданного на его вход. Раз это так, то неопределенность выходного символа при известном входном максимальна и выходной символ симметричного канала не содержит информации о входном символе.

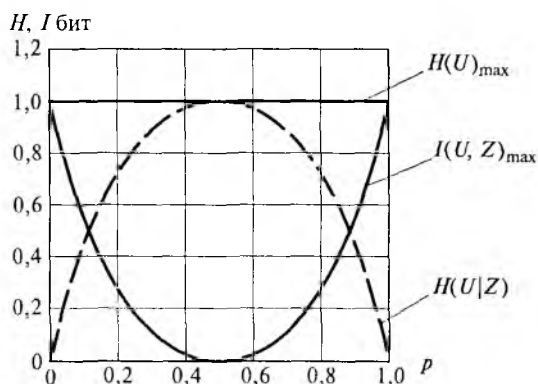


Рис. 6.2. Графики $H(U|Z)$, $I(U, Z)_{\max}$ и $H(U)_{\max}$ как функций от p

С увеличением p от 0,5 до 1 $H(U|Z)$ непрерывно падает, а $I(U, Z)_{\max}$ — растет. Такое поведение $H(U|Z)$ и $I(U, Z)_{\max}$ становится понятным, если учесть, что при $p > 0,5$ подача на вход канала символа z_0 чаще будет приводить к появлению на выходе символа u_1 , а подача на вход символа z_1 — к появлению на выходе символа u_0 . Если в этой ситуации осуществить замену получаемых выходных символов на противоположные, то вероятность иметь искаженный символ после инверсии будет меньше 0,5 и равна $1 - p$. Иначе, с увеличением p ($p > 0,5$) в канале с инвертированием выходного символа $H(U|Z)$ уменьшается, а $I(U, Z)_{\max}$ — увеличивается.

В общем случае потери информации при передаче одного символа по дискретному каналу с искажениями характеризует средняя условная энтропия входного символа канала $H(Z|U)$, входящая в формулу (6.6). Действительно, количество информации, которое содержится в одном входном символе канала, $I(Z) = H(Z)$. Количество информации, заключенное в одном выходном символе канала, устанавливается формулой (6.6). Количество информации $I_n(Z)$, теряемое в канале при передаче одного символа за счет его искажений, определяется как разность количеств информации в символе на входе и выходе канала:

$$I_n(Z) = I(Z) - I(U, Z) = H(Z) - H(Z) + H(Z|U) = H(Z|U). \quad (6.17)$$

Таким образом, среднее количество информации [см. формулу (6.17)], которое теряется в канале при передаче одного символа, численно равно средней условной энтропии входного символа при известном его выходном символе.

Пример 6.2. Найти потери информации в канале без памяти при передаче по нему одного символа, если входной Z и выходной U алфавиты

одинаковы ($l = m$), символы входного алфавита равновероятны ($p(z_i) = 1/m$) и все элементы в матрице переходных вероятностей, задающей канал, кроме стоящих на главной диагонали, равны.

Прежде всего покажем, что при указанных условиях равновероятность входных символов канала приводит к равновероятности выходных символов. Для этого воспользуемся соотношениями (6.9):

$$p(u_j) = p(z_1)p(u_j|z_1) + p(z_2)p(u_j|z_2) + \dots + p(z_j)p(u_j|z_j) + \dots + p(z_m)p(u_j|z_m). \quad (6.18)$$

В формуле (6.18) для заданного канала $p(u_j|z_i)$ равны при всех $j \neq i$. Введем обозначение $p(u_j|z_i) = q (j \neq i)$. Тогда сумма вероятностей для каждого столбца матрицы переходных вероятностей запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{l=m} p(u_j|z_i) = p(u_i|z_i) + (m-1)q = 1. \quad (6.19)$$

Из формулы (6.19) найдем

$$p(u_j|z_j) = 1 - (m-1)q. \quad (6.20)$$

Поскольку правая часть выражения (6.20) не зависит от j , то все $p(u_j|z_j)$ ($j = 1, \dots, m$) равны. Переходная вероятность $p(u_j|z_j)$ представляет собой вероятность правильной передачи символа z_j по каналу, а произведение $(m-1)q$ — вероятность искажения этого символа в канале. Введем обозначение $(m-1)q = p$. Тогда

$$q = \frac{p}{(m-1)}. \quad (6.21)$$

Подставим значения оговоренных вероятностей в формулу (6.18):

$$p(u_j) = \frac{1}{m} \frac{p}{m-1} + \frac{1}{m} \frac{p}{m-1} + \dots + \frac{1}{m} (1-p) + \dots + \frac{1}{m} \frac{p}{m-1} = \frac{1}{m}. \quad (6.22)$$

Таким образом, из выражения (6.22) следует, что если входные символы указанного канала равновероятны, то равновероятны и выходные символы.

Найдем теперь условные вероятности $p(z_i|u_j)$. Для этого воспользуемся равенством (3.15):

$$p(z_i, u_j) = p(z_i)p(u_j|z_i) = p(u_j)p(z_i|u_j).$$

Отсюда, учитывая, что $p(z_i) = p(u_j)$, получим

$$p(z_i|u_j) = p(u_j|z_i). \quad (6.23)$$

Для нахождения количества информации, теряемого в канале при передаче одного символа, запишем $H(Z|U)$ в соответствии с формулой (3.22):

$$I_n(Z) = H(Z|U) = - \sum_{j=1}^m p(u_j) \sum_{i=1}^m p(z_i|u_j) \log p(z_i|u_j). \quad (6.24)$$

В формуле (6.24) каждый член суммы по j имеет вид

$$-p(u_j) \sum_{i=1}^m p(z_i | u_j) \log p(z_i | u_j) = -p(u_j) \left[p(z_1 | u_j) \log p(z_1 | u_j) + \dots + p(z_j | u_j) \log p(z_j | u_j) + \dots + p(z_m | u_j) \log p(z_m | u_j) \right]. \quad (6.25)$$

Подставим в выражение (6.25) значения вероятностей, учитывая формулы (6.23) и (6.21):

$$\begin{aligned} -p(u_j) \sum_{i=1}^m p(z_i | u_j) \log p(z_i | u_j) &= -\frac{1}{m} \left[\frac{p}{m-1} \log \frac{p}{m-1} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (1-p) \log(1-p) + \dots + \frac{p}{m-1} \log \frac{p}{m-1} \right] = \\ &= -\frac{1}{m} \left[p \log \frac{p}{m-1} + (1-p) \log(1-p) \right] = \\ &= \frac{1}{m} [-p \log p - (1-p) \log(1-p) + p \log(m-1)]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Подставив выражение (6.26) в формулу (6.24), окончательно получим

$$I_n(Z) = H(Z|U) = -p \log p - (1-p) \log(1-p) + p \log(m-1). \quad (6.27)$$

Первые два члена в правой части формулы (6.27) выражают неопределенность того, является ли принятый символ истинным или ложным. Третий член характеризует неопределенность, вызванную незнанием, какой из $(m-1)$ входных символов действительно передавался, если известен принятый искаженный символ. Эта неопределенность выражается произведением $p \log(m-1)$, так как искажение символа происходит с вероятностью p . Если при этом получен символ u_j , то в данном канале его появление с равной вероятностью могло быть вызвано подачей на вход канала любого символа, кроме z_j .

В частном случае, когда по симметричному каналу передаются двоичные символы, третий член в правой части формулы (6.27) равен 0 и

$$I_n(Z) = H(Z|U) = -p \log p - (1-p) \log(1-p). \quad (6.28)$$

Правая часть формулы (6.28) совпадает с правой частью выражения (6.15). Это естественно, так как легко убедиться, что для данного канала при $p(z_0) = p(z_1) = 0,5$ выполняется равенство $H(Z|U) = H(U|Z)$.

6.3. Скорость передачи информации по дискретному каналу с искажениями

Пусть на вход дискретного эргодического канала с искажениями с выхода эргодического источника поступает некоторая достаточно длинная последовательность символов $z_{k,T} \in Z_T$ (Z_T — мно-

жество последовательностей длительностью T , которые может выдавать источник; $k = 1, \dots, M(T)$; $M(T) = |Z_T|$. Обозначим вероятность поступления на вход канала последовательности $z_{k,T} - p(z_{k,T})$.

В силу указанного свойства эргодичности источника с увеличением T значение $M(T)$ возрастает. В общем случае разные символы последовательностей источника могут иметь разную длительность.

В результате передачи последовательности $z_{k,T}$ на выходе канала появится последовательность $u_{s,T} \in U_T$ (U_T — множество выходных последовательностей канала длительностью T ; $s = 1, \dots, N(T)$; $N(T) = |U_T|$) с тем же числом символов, что и у $z_{k,T}$. Так как канал с искажениями, то при подаче на вход одной и той же последовательности $z_{k,T}$ на его выходе могут появляться разные последовательности $u_{s,T}$.

Обозначим через $I(U_T, Z_T)$ количество информации, содержащееся в выходной последовательности канала о входной последовательности. Естественно, что $I(U_T, Z_T)$ уменьшается с увеличением T . Рассмотрим отношение $I(U_T, Z_T)/T$. Оно показывает, какое количество информации появляется в среднем на выходе канала в каждую секунду интервала T . Предел, к которому стремится указанное отношение при $T \rightarrow \infty$, дающий среднее количество информации, получаемое на выходе канала в 1 с, называется *скоростью передачи информации по дискретному каналу (ДК) с искажениями*.

Обозначим скорость передачи $v_{\text{ДК}}$. По определению

$$v_{\text{ДК}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I(U_T, Z_T)}{T}. \quad (6.29)$$

По аналогии с выражением (3.27)

$$I(U_T, Z_T) = H(Z_T) - H(Z_T|U_T), \quad (6.30)$$

где $H(Z_T)$ вычисляется так же, как в формуле (4.18), а $H(Z_T|U_T)$ — аналогично формуле (3.22).

Подставив выражение (6.30) в формулу (6.29), получим

$$v_{\text{ДК}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H(Z_T) - H(Z_T|U_T)}{T}. \quad (6.31)$$

Из соотношения (6.31) видно, что скорость передачи информации зависит от статистических свойств как последовательностей входных символов, так и самого канала.

Если $I(U_T, Z_T)$ выразить в соответствии с формулой (3.36), то скорость передачи информации может быть представлена в следующем виде:

$$v_{\text{ДК}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H(U_T) - H(U_T|Z_T)}{T}. \quad (6.32)$$

Обозначим через l_k число символов, входящих в последовательность $z_{k,T}$. Тогда среднее число символов во входной последовательности канала

$$l_{cpT} = \sum_{k=1}^{M(T)} p(z_{k,T}) l_k, \quad (6.33)$$

а средняя длительность символа в ней

$$t_{cp,cT} = \frac{T}{l_{cpT}}. \quad (6.34)$$

Величину $t_{cp,c} = \lim_{T \rightarrow \infty} t_{cp,cT}$ назовем *средней длительностью входного символа канала*.

Подставив T из формулы (6.33) в соотношение (6.31) и используя формулу (6.6), получим

$$\begin{aligned} v_{ДК} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H(Z_T) - H(Z_T | U_T)}{t_{cp,cT} l_{cpT}} = \\ &= \frac{1}{t_{cp,c}} [H(Z) - H(Z | U)] = \frac{1}{t_{cp,c}} I(U, Z), \end{aligned} \quad (6.35)$$

где $H(Z)$ — энтропия входного символа канала, $H(Z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H(Z_T)}{l_{cpT}}$;

$H(Z | U)$ — средняя условная энтропия входного символа канала

при известном выходном, $H(Z | U) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H(Z_T | U_T)}{l_{cpT}}$.

Величина $1/t_{cp,c}$ представляет собой среднее число символов, передаваемых по каналу в 1 с.

Выполнив аналогичные рассуждения, из формулы (6.32) найдем

$$v_{ДК} = \frac{1}{t_{cp,c}} [H(U) - H(U | Z)] = \frac{1}{t_{cp,c}} I(U, Z), \quad (6.36)$$

где $H(U)$ — энтропия выходного символа канала; $H(U | Z)$ — средняя условная энтропия выходного символа канала при известном входном символе.

Если количество информации $I(U, Z)$ измеряется в битах, то, как видно из формул (6.35) и (6.36), скорость передачи информации измеряется в бодах (1 бод = 1 бит/с).

Скорость передачи информации является важнейшей характеристикой дискретного канала.

6.4. Пропускная способность дискретного канала с искажениями

В подразд. 6.2 отмечалось, что количество информации в выходном символе дискретного канала $I(U, Z)$ при неизменных переходных вероятностях зависит от распределения входных символов и при некотором их распределении достигает максимального значения. Как следует из формул (6.35) и (6.36), при том же распределении вероятностей будет достигать максимума и скорость передачи информации. Максимальное значение скорости передачи

$$\begin{aligned} C_{\text{ДК}} &= \max_{p(z_1), \dots, p(z_m)} v_{\text{ДК}} = \frac{1}{t_{\text{ср.с}}} I(U, Z)_{\text{max}} = \\ &= \frac{1}{t_{\text{ср.с}}} \max_{p(z_1), \dots, p(z_m)} [H(Z) - H(Z|U)] = \\ &= \frac{1}{t_{\text{ср.с}}} \max_{p(z_1), \dots, p(z_m)} [H(U) - H(U|Z)] \end{aligned} \quad (6.37)$$

называется *пропускной способностью дискретного канала с искажениями*.

Пропускная способность дискретного канала отражает предельно возможную в канале скорость передачи информации. По смыслу она аналогична максимальной производительности дискретного источника.

Пример 6.3. Найти пропускную способность дискретного симметричного канала без памяти при передаче по нему двоичных символов с одинаковой длительностью τ .

Подставив выражение (6.16) в формулу (6.37), сразу получим

$$C_{\text{ДК}} = \frac{1}{\tau} [1 + p \log p + (1 - p) \log(1 - p)]. \quad (6.38)$$

График $C_{\text{ДК}}$ как функция от p [см. формулу (6.38)], имеет тот же вид, что и график $I(U, Z)_{\text{max}}$ (см. рис. 6.2). Отличие заключается лишь в единицах измерения $C_{\text{ДК}}$ и в другом масштабе графика по оси ординат, так как

$$C_{\text{ДК}}(p) = \frac{1}{\tau} I(p)_{\text{max}}, \quad \text{где } I(p)_{\text{max}} = I(U, Z)_{\text{max}}.$$

Так как $\frac{1}{t_{\text{ср.с}}} H(Z)$ в формуле (6.35) представляет собой количество неискаженной информации, подаваемое на вход канала в 1 с, а $\frac{1}{t_{\text{ср.с}}} H(Z|U)$ — количество информации, которая искажа-

ется и теряется в канале за то же время, то пропускную способность канала можно трактовать как максимальное количество не-искаженной информации, которое может быть передано по дискретному каналу с искажениями в 1 с.

Такая трактовка пропускной способности позволяет сделать следующий вывод: если информация на входе дискретного канала с искажениями представлена в безызыбытной форме, то вся она не может быть получена на его выходе, так как за счет искажения отдельных символов в канале определенная часть ее будет потеряна; уменьшение потерь информации в канале предполагает избыточное представление информации на его входе, получить которое позволяет помехоустойчивое кодирование.

6.5. Помехоустойчивое кодирование последовательности элементов дискретного источника

Пусть дискретный эргодический источник вырабатывает последовательность элементов в алфавите X , которая поступает в кодер, выполняющий помехоустойчивое кодирование отрезков последовательности кодом Y в алфавите Z . И пусть с выхода кодера кодовые комбинации направляются в дискретный эргодический канал с искажениями. Для такой схемы передачи информации К. Шеннон доказал следующую теорему [22], приводимую здесь без доказательства.

Теорема. Если производительность дискретного источника $g \leq C_{\text{дк}}$, где $C_{\text{дк}}$ — пропускная способность дискретного канала, то существует такой способ кодирования, при котором вся информация, выдаваемая источником, может быть передана по каналу со сколь угодно малыми потерями.

Если $g > C_{\text{дк}}$, то существует такой способ кодирования, при котором потери информации, выдаваемой источником, будут меньше $g - C_{\text{дк}} + \epsilon$, где ϵ — сколь угодно мало.

Не существует способа кодирования, при котором потери информации меньше $g - C_{\text{дк}}$.

Эта теорема, называемая *основной теоремой помехоустойчивого кодирования*, является важнейшей теоремой вероятностной теории информации, хотя и не относится к числу конструктивных.

При ее доказательстве показывается, что среди определенных кодов должны существовать такие, которые обеспечивают выполнение утверждений теоремы, однако способов построения таких кодов не указывается. Доказательство теоремы состоит в том, что находится выражение для усредненной по группе кодов вероятности появления на выходе декодера ложной последовательности

элементов, т.е. такой последовательности, которая хотя бы в одном элементе отличается от отрезка последовательности, поданного на вход кодера. Затем показывается, что с ростом длины кодируемых отрезков последовательности источника эта вероятность стремится к нулю, если $g < C_{\text{дк}}$, и к единице, если $g > C_{\text{дк}}$.

Вторую часть указанной теоремы кодирования часто называют ее обращением, так как результаты первой части теоремы получены для значений g , лежащих слева от $C_{\text{дк}}$ ($g < C_{\text{дк}}$), а результаты второй части — для значений, расположенных справа от $C_{\text{дк}}$ ($g > C_{\text{дк}}$).

Коды, позволяющие уменьшать потери информации при передаче ее по дискретным каналам со случайными искажениями, изучаются в теории помехоустойчивого кодирования.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под дискретным каналом в вероятностной теории информации?
2. Какие каналы в вероятностной теории информации называются каналами с памятью, а какие – без памяти?
3. Как определяется количество информации в выходном символе дискретного канала с искажениями?
4. От чего зависит количество информации в выходном символе дискретного канала с искажениями?
5. Чем определяются потери информации в дискретном канале с искажениями при передаче по нему одного символа?
6. Что представляет собой скорость передачи информации по дискретному каналу с искажениями?
7. В каких единицах измеряется скорость передачи информации по дискретному каналу с искажениями?
8. Как определяется пропускная способность дискретного канала с искажениями?
9. Что утверждается в основной теореме помехоустойчивого кодирования?
10. Что называется обращением основной теоремы помехоустойчивого кодирования?

ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ ПО НЕПРЕРЫВНОМУ КАНАЛУ С ПОМЕХАМИ

7.1. Непрерывные каналы с помехами

Под непрерывным каналом понимается группа устройств, через которую информация передается сигналами, описываемыми непрерывными функциями времени [см. подразд. 6.1]. Непрерывный канал может являться составной частью дискретного канала, но может и не входить в него, так как существует достаточно большое число систем передачи информации, содержащих непрерывный канал, но не имеющих дискретного канала (например, системы аналоговой телефонии, радиовещания и т.д.). Если непрерывный канал входит в дискретный, то множество $S = \{s_i(t)\}$ ($i = 1, \dots, m$) сигналов, которые используются в нем для передачи символов, конечно. Если непрерывный канал не входит в дискретный, то множество S используемых в нем сигналов бесконечно.

Как было упомянуто ранее, в вероятностной теории информации конкретные устройства, составляющие непрерывный канал, интереса не представляют. Существенными являются общие характеристики образуемого ими непрерывного канала: ширина полосы пропускания F , средняя мощность P_{cp} сигналов на выходе канала и др. В связи с этим при теоретическом рассмотрении процесса передачи сигналов по непрерывному каналу считают, что он состоит из трех устройств (рис. 7.1): линии связи, имеющей бесконечную полосу пропускания, фильтра с полосой пропускания $[f_n, f_v]$, шириной $F = f_v - f_n$, и усилителя с конечным, возможно и неравномерным, коэффициентом усиления частотных составляющих сигнала в полосе $[f_n, f_v]$. Нижняя частота f_n полосы пропускания фильтра может быть равна 0 или больше 0.

Считают, что всегда верхняя частота этой полосы $f_v < \infty$. Если $f_n = 0$, то фильтр называется *фильтром нижних частот*, если $f_n > 0$, то *полосовым фильтром*.

Указание на конечность коэффициента усиления усилителя объясняется тем, что в многоканальных системах связи всегда устанавливаются ограничения на максимальную мощность и максимальную интенсивность передаваемых по каналу сигналов, что вызвано наложением ограничения на уровень перекрестных по-

мех в соседних каналах. Наряду с требованиями к максимальному значению коэффициента усиления усилителя предъявляются требования и к его минимальному значению в полосе пропускания канала. Это связано с тем, что любой приемник, обрабатывающий выходной сигнал непрерывного канала, обладает конечным *порогом чувствительности*. Если уровень входного сигнала приемника ниже его порога чувствительности, то такой сигнал практически не воспринимается приемником. Таким образом, наряду с ограничением на полосу пропускания канала для него устанавливаются ограничения и на уровни мощности и интенсивности его выходных сигналов.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда случайные помехи в линии связи отсутствуют. Обозначим непериодический сигнал, поступающий на вход канала (см. рис. 7.1) и принадлежащий множеству S входных сигналов, — $s(t)$, а появляющийся в результате этого сигнал на выходе канала, принадлежащий множеству U выходных сигналов, — $u(t)$. Как входной, так и выходной сигналы являются здесь функциями времени.

Наряду с временным представлением часто используют и частотное представление сигналов, позволяющее выяснить, из каких элементарных разных по частоте составляющих некоторого простейшего вида они состоят. В качестве элементарных составляющих частотного представления сигналов обычно берут гармонические функции, определяемые амплитудой, частотой и начальной фазой. Нахождение амплитуд и начальных фаз этих функций для непериодических сигналов осуществляется в результате выполнения над ними прямого преобразования Фурье.

Пусть $s(t) \in S$ — непериодический сигнал, заданный на временном интервале $-\infty < t < \infty$ и удовлетворяющий условиям Дирихле и условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt \leq M, \quad (7.1)$$

где M — конечное число.

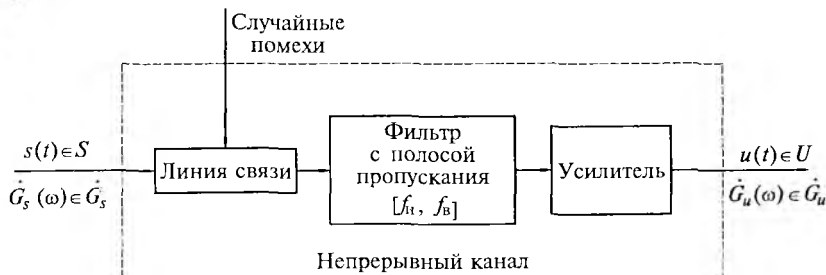


Рис. 7.1. Структурная модель непрерывного канала

Такой непериодический сигнал может быть представлен суммой бесконечно большого числа гармонических функций с определенными амплитудами, угловыми частотами и начальными фазами, причем амплитуды этих функций бесконечно малы, а частоты занимают непрерывный конечный или бесконечный интервал.

Состав гармонических слагаемых непериодического входного сигнала определяется специальной функцией

$$\dot{G}_s(\omega) = G_s(\omega) e^{-j\gamma_s(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7.2)$$

Функция $\dot{G}_s(\omega) \in \dot{G}_s$, где $\dot{G}_s$ — множество комплексных функций $\dot{G}_s(\omega)$, является комплексной. В формуле (7.2) $G_s(\omega) = |\dot{G}_s(\omega)|$ — модуль комплексной функции, а $-\gamma_s(\omega)$ — ее аргумент.

Формула (7.2) называется *интегралом Фурье*, или *прямым преобразованием Фурье*.

Наряду с формулой (7.2) существует выражение, позволяющее по функции $\dot{G}_s(\omega)$ найти сам непериодический сигнал $s(t)$:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.3)$$

Это выражение получило название *обратного преобразования Фурье*.

Учитывая, что $\int$ в выражении (7.3) — это знак суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, непериодический сигнал $s(t)$ в соответствии с выражением (7.3) можно трактовать как сумму бесконечно большого числа гармонических функций с

бесконечно малыми комплексными амплитудами $\frac{1}{2\pi} \dot{G}(\omega) d\omega$. Отсюда следует, что функция $\dot{G}_s(\omega)$, входящая как сомножитель в выражение для амплитуд, сама амплитудой не является, а лишь характеризует соотношение амплитуд отдельных гармонических составляющих, слагающих непериодический сигнал $s(t)$. Разные непериодические сигналы имеют разное соотношение амплитуд одних и тех же гармонических функций. Учитывая смысл функции $\dot{G}_s(\omega)$, ее называют *спектральной плотностью*, *спектральной характеристикой* или *комплексным спектром* непериодического сигнала. Модуль $G_s(\omega)$ и аргумент $-\gamma_s(\omega)$ спектральной плотности получили соответственно названия *спектра амплитуд* и *спектра фаз* непериодического сигнала $s(t)$.

Найдем теперь спектральную плотность непериодического выходного сигнала $u(t)$ канала:

$$\dot{G}_u(\omega) = G_u(\omega) e^{-j\gamma_u(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (7.4)$$

где $G(u) = |\dot{G}_u(\omega)|$ и $-\gamma_u(\omega)$ — соответственно спектр амплитуд и спектр фаз выходного сигнала $u(t)$; функция $\dot{G}_u(\omega) \in \dot{G}_u$; $\dot{G}_u$ — множество комплексных функций $\dot{G}_u(\omega)$.

Комплексная функция $\dot{K}(\omega)$, равная отношению спектральных плотностей выходного и входного сигналов канала, т.е. функция

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{G}_u(\omega)}{\dot{G}_s(\omega)} \quad (7.5)$$

называется *комплексным коэффициентом передачи непрерывного канала*. Функция $\dot{K}(\omega)$ является важнейшей характеристикой непрерывного канала, полностью определяющей его свойства.

Как и спектральная плотность сигнала, комплексный коэффициент передачи канала может быть записан в виде

$$\dot{K}(\omega) = K(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}. \quad (7.6)$$

В равенстве (7.6) модуль функции $K(\omega) = |\dot{K}(\omega)|$ называют *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) канала, а ее аргумент $-\varphi(\omega)$ — его *фазочастотной характеристикой* (ФЧХ). Амплитудно-частотная характеристика показывает, как зависит от частоты изменение амплитуд частотных составляющих входного сигнала при прохождении им непрерывного канала, а фазочастотная характеристика отражает зависимость от частоты сдвига начальных фаз частотных составляющих входного сигнала при прохождении им канала.

Знание комплексного спектра входного сигнала и комплексного коэффициента передачи непрерывного канала позволяет легко находить комплексный спектр $\dot{G}_u(\omega)$ и сам выходной сигнал $u(t)$ канала. Действительно, из формулы (7.5) получим

$$\dot{G}_u(\omega) = \dot{G}_s(\omega)\dot{K}(\omega) \quad (7.7)$$

и, используя обратное преобразование Фурье, найдем

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_u(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_s(\omega)\dot{K}(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.8)$$

Временное и частотное представления непериодических функций равноправны и существенно дополняют друг друга.

7.2. Виды детерминированных помех в непрерывных каналах

Любые факторы, вызывающие искажения сигналов, передаваемых по непрерывному каналу, будем называть *помехами*. При таком подходе все помехи, действующие в непрерывном канале, можно разделить на детерминированные и случайные. *Детерминированные помехи* вызываются ограничением полосы пропускания канала, неравномерностью его АЧХ и нелинейностью ФЧХ. *Случайные помехи*, как уже отмечалось, — это аналоговые возмущения, вырабатываемые внешними и внутренними источниками. Рассмотрим более подробно виды детерминирован-

ных помех и их действие на сигналы, передаваемые по непрерывному каналу.

Ограничение полосы пропускания непрерывного канала приводит к ограничению ширины спектра его выходных сигналов, что находит свое отражение в замене бесконечных пределов интегрирования в обратном преобразовании Фурье [см. выражение (7.8)] для выходного сигнала $u(t)$ на конечные.

Ограничение ширины спектра выходных сигналов канала приводит к двум взаимосвязанным отрицательным последствиям: 1) уменьшается полная энергия выходного сигнала; 2) искажается вид сигнала.

Для того чтобы понять, как влияет на выходной сигнал $u(t)$, на спектр которого не наложены ограничения, комплексный коэффициент передачи канала $K(\omega)$, выделим пять его видов.

$$1. \quad \hat{K}(\omega) = 1 \cdot e^{-j0} = 1, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (7.9)$$

В этом случае, как следует из выражений (7.7) и (7.8), $\hat{G}_u(\omega) = \hat{G}_s(\omega)$ и $u(t) = s(t)$. Таким образом, если $\hat{K}(\omega)$ имеет вид формулы (7.9), то сигнал $s(t)$ проходит канал без искажений.

$$2. \quad \hat{K}(\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega\tau}, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (7.10)$$

где τ — интервал времени. В этом случае, как следует из выражения (7.7), $\hat{G}_u(\omega) = \hat{G}_s(\omega)e^{-j\omega\tau}$. Подставив $\hat{G}_u(\omega)$ в формулу (7.8) и учитывая выражение (7.3), получим

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}_s(\omega) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}_s(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = s(t-\tau). \quad (7.11)$$

Из выражения (7.11) следует, что если комплексный коэффициент передачи канала имеет вид формулы (7.10), то он вызывает только запаздывание на τ появления входного сигнала на выходе канала, не изменяя его формы.

Таким образом, комплексные коэффициенты передачи, имеющие вид формул (7.9) и (7.10), не приводят к искажению входного сигнала при передаче его по непрерывному каналу.

$$3. \quad \hat{K}(\omega) = A e^{-j0} = A, \quad A > 0, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (7.12)$$

В этом случае, как следует из выражений (7.7) и (7.8), $\hat{G}_u(\omega) = A \hat{G}_s(\omega)$ и $u(t) = As(t)$, т.е. такой коэффициент передачи приводит только к ослаблению (если $A < 1$) или усилению (если $A > 1$) входного сигнала.

$$4. \quad \hat{K}(\omega) = A e^{-j\omega\tau}, \quad A > 0, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (7.13)$$

При таком комплексном коэффициенте передачи канала $\hat{G}_u(\omega) = A \hat{G}_s(\omega) e^{-j\omega\tau}$. Подставив $\hat{G}_u(\omega)$ в выражение (7.8) и учитывая выражение (7.3), найдем

$$u(t) = As(t-\tau).$$

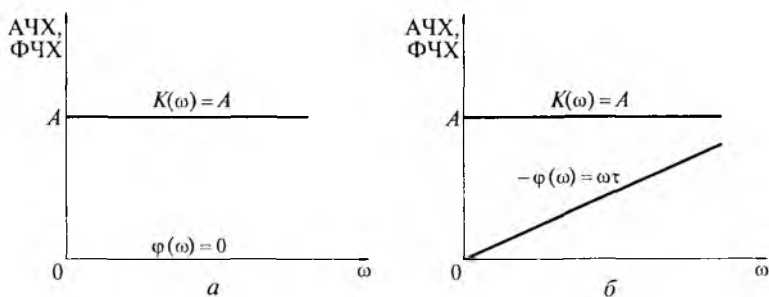


Рис. 7.2. Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики непрерывного канала с комплексными коэффициентами передачи:

$$а — K(\omega) = A e^{j\varphi}; \quad б — K(\omega) = A e^{-j\omega\tau}$$

Таким образом, $\hat{K}(\omega)$ [см. формулу (7.13)] вызывает как ослабление (усиление) входного сигнала, так и запаздывание его появления на выходе канала. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики комплексных коэффициентов передачи канала по формулам (7.12) и (7.13) показаны на рис. 7.2, а, б соответственно.

Комплексные коэффициенты передачи [см. формулы (7.12) и (7.13)], если учитывать ограничения, наложенные на интенсивность выходных сигналов канала, в ряде случаев будут приводить к потере части заключенной в них информации.

$$5. \quad \hat{K}(\omega) = K(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (7.14)$$

где $K(\omega) \neq \text{const}$, $\varphi(\omega) \neq \omega\tau$.

Комплексный коэффициент передачи канала, определенный формулой (7.14), искажает вид передаваемого по нему сигнала, что приводит к потере части информации в канале.

Неравномерность АЧХ во всем диапазоне частот канала и нелинейность ФЧХ приводят к тому, что выходной сигнал отличается по виду от входного. Так, если передаваемые по каналу непериодические сигналы представляют собой импульсы, а его АЧХ имеет «завал» на высоких частотах, то это приводит к увеличению времени нарастания фронтов и времени спада срезов импульсов. Нелинейность ФЧХ канала имеет обычно более серьезные последствия. Они могут состоять в увеличении длительности фронтов и срезов импульсов, появлении асимметрии выходного сигнала, если входной сигнал был строго симметричным, «развале» импульсов, приводящем к снижению их максимального по абсолютной величине значения на выходе канала и т.д. [5].

Основным средством борьбы с детерминированными искажениями сигналов, передаваемых по непрерывному каналу с неравномерной АЧХ и нелинейной ФЧХ, является использование *корректоров* — устройств, автоматически осуществляющих коррекцию указанных характеристик. Корректор включают последовательно с непрерывным каналом (рис. 7.3).

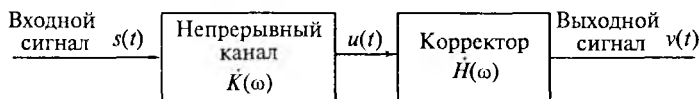


Рис. 7.3. Схема включения корректора

Корректор представляет собой четырехполосник, поэтому он характеризуется комплексным коэффициентом передачи $\dot{H}(\omega) = H(\omega)e^{-j\Psi(\omega)}$, где $H(\omega)$ — модуль комплексной функции $\dot{H}(\omega)$, а $-\Psi(\omega)$ — ее аргумент. Общий комплексный коэффициент передачи $\dot{D}(\omega)$ тракта, включающего непрерывный канал и корректор, как видно из рис. 7.3,

$$\dot{D}(\omega) = \dot{K}(\omega)\dot{H}(\omega). \quad (7.15)$$

На практике за общий комплексный коэффициент передачи тракта, задаваемый формулой (7.15), обычно принимают

$$\dot{D}(\omega) = A e^{-j\omega\tau}, \quad A = \text{const}, \quad \tau = \text{const} \quad (7.16)$$

и из условия (7.16) находят $\dot{H}(\omega)$.

Учитывая направленность настоящего пособия, изложение сведений по корректорам на этом закончим. Важно было показать, что даже в случае коррекции характеристик непрерывного канала, комплексный коэффициент передачи всего тракта имеет вид формулы (7.13). Передача непериодических сигналов по тракту с таким коэффициентом передачи приводит, как отмечалось, к потере части содержащейся в них информации.

Поскольку математическим аппаратом вероятностной теории информации является теория вероятностей, то, находясь в рамках этой теории, оценить потери информации, вызываемые детерминированными помехами при передаче ее по непрерывному каналу, не представляется возможным. Решение этой задачи дано в комбинаторной теории информации.

7.3. Типы и виды случайных помех в непрерывных каналах

Рассмотрим, какие случайные помехи искажают сигналы в непрерывных каналах.

По характеру действия на сигналы случайные помехи делятся на аддитивные и мультипликативные. Помеха называется *аддитивной*, если результат ее взаимодействия с сигналом, передаваемым по непрерывному каналу, можно представить суммой

$$s_{\xi}(t) = s(t) + \xi(t), \quad (7.17)$$

где $s_{\xi}(t)$ — искаженный сигнал на выходе канала; $s(t)$ — сигнал на выходе непрерывного канала; $\xi(t)$ — помеха на выходе того же канала.

Помеха называется *мультипликативной*, если результат ее взаимодействия с сигналом в канале можно выразить произведением

$$s_{\mu}(t) = \mu(t)s(t), \quad (7.18)$$

где $s_{\mu}(t)$ — искаженный сигнал на выходе канала; $\mu(t)$ — помеха, действующая на выходе канала ($\mu(t)$ — функция неотрицательная).

В непрерывном канале могут одновременно действовать помехи обоих указанных типов [см. формулы (7.17), (7.18)]. В этом случае результат их действия можно представить следующим образом:

$$s_{\mu,\xi}(t) = \mu(t)s(t) + \xi(t). \quad (7.19)$$

Знание степени искажения сигнала в различных точках канала интереса не представляет. Важно, какие искажения он имеет на выходе канала, так как именно выходной сигнал канала подвергается обработке в приемнике.

Физически аддитивная помеха представляет собой ту же аналоговую величину, что и сигнал. Ее появление вызвано протеканием как вне, так и внутри канала различных физических процессов и явлений. Поскольку аддитивная помеха — это та же физическая величина, что и сигнал, то она обладает энергетической природой и для нее правомерны такие понятия, как энергия, мощность и т. д.

Мультипликативная помеха по своей сути отличается от аддитивной. Порождаемая случайными изменениями комплексного коэффициента передачи канала, она является не физической величиной, а изменяющимся во времени безразмерным коэффициентом, поэтому описывать ее при помощи энергетических характеристик нецелесообразно.

Как аддитивные, так и мультипликативные помехи, входящие в формулу (7.19), принято делить на три вида: гармонические, флуктуационные и импульсные.

Гармонические помехи можно представить как сумму конечного числа отдельных гармонических составляющих. Появление аддитивных гармонических помех обычно связано с нестабильностью различных генераторов и фильтров, используемых в системе передачи информации.

Флуктуационные помехи можно представить как последовательность достаточно коротких импульсов, имеющих случайную амплитуду и следующих друг за другом через короткие случайные интервалы времени. Помехи данного вида вызываются различными флуктуациями, обусловленными дискретной природой некоторых множественных явлений, протекающих в отдельных звеньях системы передачи. Аддитивную флуктуационную помеху часто называют *шумом*. Характерными примерами аддитивных флукту-

ационных помех могут служить тепловой шум и шум, вызванный дробовым эффектом, т.е. эффектом дискретности носителей заряда, упорядоченное движение которых создает ток в электрических цепях.

Импульсные помехи можно представить как последовательность импульсов случайной амплитуды, имеющих случайную длительность и следующих друг за другом через случайные, но достаточно продолжительные интервалы времени. Импульсные мультипликативные помехи вызываются обычно прерываниями (разрывами) канала. Появление импульсных аддитивных помех связано с протеканием различного рода внешних явлений, носящих характер кратковременных и достаточно редких событий.

7.4. Энергия и мощность непериодических сигналов и помех

Мгновенной мощностью непериодического сигнала $s(t)$ называется величина $p(t) = s^2(t)$. Если значение $s(t)$ может быть положительным, отрицательным или равным нулю, то всегда мгновенная мощность $p(t) \geq 0$.

Полной энергией непериодического сигнала, существующего на интервале $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ и удовлетворяющего условию абсолютной интегрируемости [см. формулу (7.1)], называется число

$$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt. \quad (7.20)$$

Полную энергию непериодического сигнала можно трактовать как энергию, выделяемую током $s(t)$ при протекании его по сопротивлению 1 Ом. В силу этого энергию сигнала, определяемую формулой (7.20), называют еще *удельной энергией*.

Энергия непериодических сигналов, удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости, конечна, а не удовлетворяющих этому условию — бесконечна.

Если непериодический сигнал $s(t)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости и известна его спектральная плотность [см. формулу (7.2)], то полная его энергия находится по теореме Рейли (равенству Парсеваля) [10]:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega. \quad (7.21)$$

Из формулы (7.21) следует, что полная энергия непериодического сигнала представляет собой бесконечную сумму бесконечно малых слагаемых $\frac{1}{\pi} G^2(\omega) d\omega$ (бесконечная малость обеспечивается здесь за счет бесконечной малости $d\omega$). По физическому смыслу функция $\frac{1}{\pi} G^2(\omega)$ является *спектральной плотностью энергии* непериодического сигнала и характеризует распределение энергии по спектру. Каждое слагаемое $\frac{1}{\pi} G^2(\omega) d\omega$ — это энергия, заключенная в спектральных составляющих сигнала, расположенных в бесконечно малой полосе частот $d\omega$, лежащей в окрестностях частоты ω . Как видно из формулы (7.21), полная энергия непериодического сигнала не зависит от фаз отдельных гармонических составляющих.

Поскольку не у всех непериодических сигналов полная энергия конечна, то часто более удобной величиной является средняя мощность сигнала на выбранном интервале времени T . Эта величина определяется так:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt = \frac{E_T}{T}, \quad (7.22)$$

где E_T — энергия сигнала за интервал T .

Если за пределами интервала T значения $s(t)$ равны 0 и сигнал удовлетворяет условию (7.1), то его среднюю мощность, задаваемую формулой (7.22), можно найти, используя теорему Рейли:

$$P_{\text{ср}} = \frac{E_T}{T} = \frac{E}{T} = \frac{1}{\pi T} \int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega. \quad (7.23)$$

По физическому смыслу функция $\frac{1}{\pi T} G^2(\omega)$ — это *спектральная плотность средней мощности* ограниченного во времени непериодического сигнала.

Для неограниченного во времени непериодического сигнала

$$P_{\text{ср}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt. \quad (7.24)$$

Формула (7.24) является наиболее общей для непериодических сигналов.

Рассмотрим теперь, что понимается под энергией и средней мощностью случайной помехи. Случайная помеха математически представляется случайной функцией времени $X(t)$, которая в каждом конкретном опыте имеет вид детерминированной функции $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$), называемой *реализацией случайной функции* $X(t)$. В дальнейшем будем рассматривать только такие функции $X(t)$, реализации которых являются непериодическими функциями времени.

Большинство реализаций $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости на интервале $-\infty < t < \infty$, поэтому их полная энергия $E = \infty$. Учитывая это, будем рассма-

тривать реализации $x_i(t)$ только на конечном интервале $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Обозначим i -ю реализацию случайной функции $X_T(t)$ через $x_{i,T}(t)$ ($i = 1, 2, \dots$). Для разных i непериодические функции $x_{i,T}(t)$ могут иметь разную энергию $E_{i,T}$ на интервале T . Поскольку появление реализации $x_i(t)$ в канале носит случайный характер, то за энергию $E_{X,T}$ случайной функции $X_T(t)$ принимается математическое ожидание случайной величины $E_T = \{E_{i,T}\}$:

$$E_{X,T} = ME_T = M\{E_{i,T}\}, \quad (7.25)$$

где M — знак математического ожидания.

Если все непериодические функции $x_{i,T}(t)$ удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости, то, используя теорему Рейли, формулу (7.25) можно записать в виде

$$E_{X,T} = M\left\{\frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_i^2(\omega) d\omega\right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty M\{G_i^2(\omega)\} d\omega, \quad (7.26)$$

где $G_i(\omega)$ — модуль спектральной плотности непериодической функции $x_{i,T}(t)$.

По смыслу $E_{X,T}$ в формуле (7.26) — это *средняя энергия случайной помехи* $X_T(t)$.

Среднюю мощность $P_{ср X,T}$ случайной помехи $X_T(t)$ на интервале T определяют как отношение средней энергии $E_{X,T}$ помехи к интервалу времени T :

$$P_{ср X,T} = \frac{E_{X,T}}{T} = \frac{1}{\pi T} \int_0^\infty M\{G_i^2(\omega)\} d\omega. \quad (7.27)$$

Найдем $M\{G_i^2(\omega)\}$. При этом учтем, что $G_i^2(\omega) = \dot{G}_i(\omega) \dot{G}_i^*(\omega)$ ($\dot{G}_i(\omega)$ — функция, комплексно сопряженная спектральной плотности $\dot{G}_i(\omega)$ функции $x_{i,T}(t)$) и что $\dot{G}_i(\omega)$ определяется по формуле (7.2).

$$\begin{aligned}
 M\{G_i^2(\omega)\} &= M\left\{\dot{G}_i(\omega)\dot{G}_i^*(\omega)\right\} = M\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{i,T}(t_1)e^{-j\omega t_1}dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{i,T}(t_2)e^{j\omega t_2}dt_2\right\} = \\
 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} M\{x_{i,T}(t_1)x_{i,T}(t_2)\}e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2.
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Математическое ожидание $M\{x_{i,T}(t_1)x_{i,T}(t_2)\}$ представляет собой корреляционную функцию случайной функции $X_T(t)$:

$$M\{x_{i,T}(t_1)x_{i,T}(t_2)\} = B_T(t_1, t_2). \tag{7.29}$$

Для стационарных случайных функций

$$B_T(t_1, t_2) = B_T(\tau), \tag{7.30}$$

где $\tau = t_1 - t_2$.

Подставив выражение (7.29) в формулу (7.28) и воспользовавшись равенством (7.30), получим

$$M\{G_i^2(\omega)\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B_T(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt_2 = T \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B_T(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \tag{7.31}$$

При подстановке выражения (7.31) в формулу (7.27) найдем

$$P_{\text{ср } X, T} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B_T(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau d\omega. \tag{7.32}$$

Интеграл по τ в формуле (7.32) представляет собой прямое преобразование Фурье корреляционной функции на интервале T . Сравнивая выражение (7.23) для средней мощности непериодического сигнала, ограниченного интервалом T , с формулой (7.32),

можно заключить, что $\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B_T(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$ представляет собой *спек-*

тральную плотность средней мощности, ограниченной интервалом T *случайной помехи* $X_T(t)$.

Средние мощности как детерминированного сигнала, так и случайной помехи не позволяют восстановить ни сам сигнал, ни реализации помехи, так как выражение (7.23) и формула (7.32) не содержат сведений о фазах отдельных спектральных составляющих.

Понятия «средняя мощность сигнала» и «средняя мощность помехи» будут использованы при установлении пропускной способности непрерывного канала со случайными помехами.

7.5. Случайная помеха «белый шум»

Случайная помеха «белый шум» является математической абстракцией. Эта помеха не может быть реализована в реальных условиях, но является достаточно удобной математической моделью, широко используемой в теоретических исследованиях процесса передачи информации по непрерывному каналу, когда в нем действует аддитивная флуктуационная помеха.

Точное описание белого шума дается при использовании аппарата обобщенных функций. Поскольку обобщенные функции в традиционном курсе Высшей математики для технических ВУЗов не рассматриваются, то ограничимся здесь лишь качественным рассмотрением этой помехи.

Под *белым шумом* понимается стационарный в широком смысле процесс (т. е. процесс, у которого математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция определяется только разностью $\tau = t_1 - t_2$ между аргументами t_1 и t_2) с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией, представляющей собой дельта-функцию $\delta(t)$ в начале координат. Дельта-функция определяется как функция, имеющая значение, равное ∞ , только при одном значении аргумента, причем интеграл от этой функции (т. е. ограниченная ею площадь) в любых конечных пределах равен 1, а именно:

$$\int_{-a}^{+a} \delta(t) dt = 1. \quad (7.33)$$

Дельта-функция, обладающая свойством, представленным формулой (7.33), часто используется как математическая модель импульса бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды.

Поскольку корреляционная функция белого шума является δ -функцией, то это означает, что случайные величины, получаемые в сечениях белого шума, даже если эти сечения сколь угодно близки, не коррелированы. Отсюда следует, что каждую реализацию белого шума можно представить как последовательность бесконечно узких импульсов, следующих через бесконечно малые интервалы времени (рис. 7.4). В отличие от дельта-функции амплитуды этих импульсов конечны и, следовательно, площадь, занимаемая каждым импульсом, бесконечно мала.

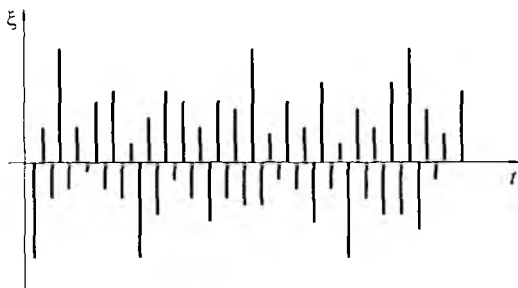


Рис. 7.4. Реализация белого шума

При определении белого шума какие-либо ограничения на закон распределения случайной величины, получаемой в сечении этого процесса, отсутствуют. Это означает, что белый шум может иметь разновидности.

Обозначим белый шум $\Xi(t)$, а его спектральную плотность средней мощности $G_{\Xi}(\omega)$. Поскольку белый шум существует на всей временной оси, то $G_{\Xi}(\omega)$ можно получить, перейдя к пределу при $T \rightarrow \infty$ в выражении для спектральной плотности средней мощности ограниченной на интервале T случайной помехи (см. подразд. 7.4):

$$G_{\Xi}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.34)$$

Равенство (7.34) называется *теоремой Винера—Хинчина*.

Найдем спектральную плотность средней мощности белого шума, подставив в равенство (7.34) $B(\tau)$:

$$G_{\Xi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.35)$$

Воспользовавшись в выражении (7.35) формулой Эйлера:

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau,$$

получим

$$G_{\Xi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \quad (7.36)$$

Учитывая, что в первом интеграле выражения (7.36) $\cos \omega\tau$ — функция четная и $\delta(\tau) \cos \omega\tau$ отлично от нуля только при $t = 0$, когда $\cos \omega\tau = 1$, а во втором интеграле подынтегральная функция

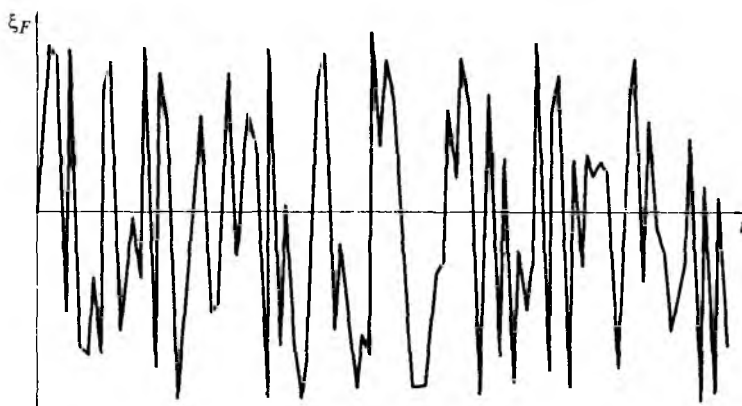


Рис. 7.5. Реализация белого шума на выходе фильтра

нечетная и пределы интегрирования симметричны, окончательно будем иметь

$$G_{\pm}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi}. \quad (7.37)$$

Формула (7.37) показывает, что спектральная плотность средней мощности белого шума одинакова на всех частотах $0 \leq \omega < \infty$.

Предположим, что случайная помеха белый шум действует в линии связи (см. рис. 7.1). Поскольку в непрерывный канал входит и фильтр с ограниченной полосой пропускания, то прохождение реализации белого шума через этот фильтр приводит к ограничению ее спектра, что вызывает сглаживание бесконечно узких импульсов и их наложение друг на друга. В результате на выходе фильтра реализация белого шума имеет уже вид непрерывной функции $\xi_F(t)$ со множеством нерегулярных максимумов и минимумов (рис. 7.5).

Наибольшее число результатов в вероятностной теории информации получено для непрерывного канала, в котором действует такая случайная помеха, которая на его выходе имеет вид стационарного аддитивного гауссова процесса с равномерной спектральной плотностью средней мощности в полосе пропускания фильтра.

Процесс называется *гауссовым (нормальным)*, если его подача на вход линейного неизменного во времени фильтра приводит к появлению на его выходе случайного процесса, значение которого в любой фиксированный момент времени является гауссовой случайной величиной. Гауссова помеха на выходе непрерывного канала порождается одним из видов белого шума, действующего в линии связи.

7.6. Пропускная способность непрерывного канала со случайными помехами

Пропускная способность непрерывного канала $C_{\text{НК}}$ с шириной полосы пропускания F , в котором действует аддитивная гауссова помеха с равномерной спектральной плотностью средней мощности [22],

$$C_{\text{НК}} = F \log\left(1 + \frac{P_{\text{срУ}}}{P_{\text{срЭ}}}\right),$$

где $P_{\text{срУ}}$ — средняя мощность сигналов на выходе канала; $P_{\text{срЭ}}$ — средняя мощность помехи на выходе канала.

В вероятностной теории информации показано, что пропускная способность непрерывного канала может быть достигнута только тогда, когда для передачи информации используются сигналы, приближающиеся по своему характеру к реализациям белого шума.

Если непрерывный канал является составной частью дискретного канала, то за счет отличия используемых сигналов от реализаций белого шума и неоптимальности способа принятия решений демодулятором о передаваемых символах всегда:

$$C_{\text{ДК}} < C_{\text{НК}}.$$

Показателем совершенства используемых сигналов и способа принятия решения о символах может служить отношение $C_{\text{ДК}}/C_{\text{НК}}$.

Часто на практике дискретный канал со случайными искажениями характеризуют *удельной скоростью передачи информации*

$$v_{\text{удДК}} = \frac{v_{\text{ДК}}}{F},$$

которая представляет собой количество информации, передаваемое по дискретному каналу в 1 с (обычно в бодах), приходящееся на 1 Гц полосы используемого в нем непрерывного канала. В совершенных системах $v_{\text{удДК}}$ близко к *удельной пропускной способности непрерывного канала*

$$C_{\text{удНК}} = \frac{C_{\text{НК}}}{F} = \log\left(1 + \frac{P_{\text{срУ}}}{P_{\text{срЭ}}}\right),$$

которая является предельно допустимой в канале удельной скоростью передачи. Передача информации со скоростью $v_{\text{удДК}} > C_{\text{удНК}}$ невозможна.

Исследование процессоров со случайными алгоритмами обработки информации в вероятностной теории не проводится, так как эти процессоры пока не нашли применения в реальных информационных системах.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под непрерывным каналом в теории информации?
2. Чем характеризуется непрерывный канал?
3. Что определяет спектральная плотность непериодического сигнала?
4. Что понимается под комплексным коэффициентом передачи непрерывного канала?
5. Что показывают амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики канала?
6. Какие выделяют виды комплексного коэффициента передачи канала?
7. Что представляет собой основное средство борьбы с детерминированными искажениями сигналов, передаваемых по непрерывному каналу?
8. Почему в вероятностной теории информации нельзя оценить потери информации, вызываемые детерминированными помехами?
9. По каким критериям осуществляется классификация случайных помех, действующих в непрерывных каналах?
10. Что характеризует спектральная плотность энергии непериодического сигнала?
11. Что представляет собой спектральная плотность средней мощности ограниченного во времени непериодического сигнала?
12. Что представляет собой помеха «белый шум»?
13. Какая случайная помеха называется гауссовой?
14. Какие величины определяют пропускную способность непрерывного канала?
15. Что представляет собой удельная скорость передачи информации по дискретному каналу?

МЕРА КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ

8.1. Общая мера количества информации в комбинаторной теории

Как уже отмечалось в подразд. 2.3, окружающий материальный мир состоит из двух миров: случайных и детерминированных процессов и явлений. В основе первого из этих миров лежит случайность, в основе второго — детерминированные причинно-следственные связи. Адекватной формальной информационной теорией случайных процессов является вероятностная теория информации К. Шеннона, фрагменты которой рассмотрены в гл. 3—7.

Формальной информационной теории детерминированных процессов, несмотря на многочисленные попытки ее создания, до конца 1980-х гг. не было. Объясняется это тем, что для трех категорий существования информации, изучаемых в вероятностной теории, — событий, принадлежащих конечному множеству случайных событий, чисел, являющихся значениями непрерывной случайной величины, и непрерывных функций, представляющих собой реализации непрерывной случайной функции, — есть «нечто», что характеризует их поведение. Это соответственно ряд распределения, одномерная и многомерная плотности распределения вероятностей. Наличие этих вероятностных характеристик существенно облегчает конструирование различных мер количества информации. Для тех же категорий существования информации в детерминированных процессах таких характеристик нет.

Многие исследователи пытались приспособить вероятностную теорию информации для описания детерминированных процессов, рассматривая конечное множество, множество действительных чисел и множество детерминированных функций как частный случай вероятностных множеств с равномерными законами распределения вероятностей их элементов.

Однако сохранение закона распределения для указанных множеств не переводит их в разряд детерминированных, так как не меняет случайного характера появления их элементов, поэтому такие попытки представления детерминированных процессов

успехом не увенчались. Теория информации для детерминированных процессов не должна основываться на вероятностях, так как в ней рассматриваются множества с совершенно другим характером отношения элементов, чем в вероятностной теории.

В основу теории информации, разработанной автором и названной комбинаторной, положен постулат, что информация есть отраженное различие, запечатленное в одной из форм и имеющее *определенный вид*.

Другими словами, *информация* представляет собой зафиксированную в различии элементов некоторого множества *определенность* элементов другого множества и как определенность должна исследоваться.

При отражении различия элементов одного множества различием элементов другого часть определенности элементов отражаемого множества теряется. К потерям определенности приводит также действие на элементы побочных детерминированных факторов, возникающих при вовлечении элементов в различные информационные процессы.

Исходя из сказанного за общую меру количества информации в комбинаторной теории принята величина

$$I = D - D_n, \quad (8.1)$$

где I — количество информации, содержащееся в элементе некоторого множества; D — определенность элемента отражаемого множества; D_n — определенность, потерянная в результате отражения или искажения элементов отражаемого множества.

Для обозначения определенности взята первая буква латинского слова *determinare* — определять.

Математическим аппаратом комбинаторной теории информации является теория множеств, и описание любого детерминированного информационного процесса в комбинаторной теории производится при помощи двух важнейших ее понятий: «множество» и «отображение».

Выбор именно этих общих понятий, лежащих в основаниях математики, диктуется стремлением к получению наиболее общих результатов, что позволит применять данную теорию в различных областях науки и техники.

В комбинаторной теории информации рассматриваются три категории существования информации: в виде дискретных элементов конечного множества, чисел множества действительных чисел ограниченного интервала, функций множества детерминированных функций. В настоящем пособии ограничимся рассмотрением некоторых результатов, полученных в теории для конечных множеств.

8.2. Определенность элемента конечного множества

Пусть X — конечное множество мощности $|X| = N$. Определенность элемента любого конечного множества X будем характеризовать [3] действительным числом

$$D(X) = \log_a N, \text{ где } a > 1. \quad (8.2)$$

В обозначении числа $D(X)$ в формуле (8.2) X — это не аргумент функции, а обозначение множества. Основание логарифма a задает единицы, в которых исчисляется определенность. При $a = 2$ определенность выражается в двоичных единицах или битах. В дальнейшем при записи формул с логарифмами, за исключением отдельных случаев, основание логарифмов a будем опускать.

Определенность элемента некоторого множества, найденная по формуле (8.2), характеризует способность этого множества фиксировать и отражать разнообразие проявлений материального мира. Чем больше элементов содержит множество, тем с большей определенностью его элементы способны представлять различия материальных объектов и явлений.

По смыслу формула (8.2) является мерой определенности элемента конечного множества. Эта мера обладает следующими свойствами.

1. $D(X) = 0$, если $N = 1$, т.е. если множество X состоит всего из одного элемента. Это согласуется со здравым смыслом. Действительно, определенность элемента понимается как свойство его непохожести на другие элементы, т.е. как свойство, в котором отражаются какие-либо количественные или качественные отличия элементов множества X друг от друга. Однако об отличии (разнообразии) элементов можно говорить лишь в случае, когда элементов, в множестве, по крайней мере, два, поэтому, когда множество состоит всего из одного элемента, его определенность как мера разнообразия элементов множества равна 0.

2. $D(X) > 0$, если $N > 1$ (при $a > 1$). С увеличением N определенность $D(X)$ элемента множества также увеличивается. При $N \rightarrow \infty$ $D(X) \rightarrow \infty$.

3. С увеличением N ($N > 1$) прирост определенности $\Delta D(X_N)$ элемента множества X_N , обеспечиваемый за счет увеличения мощности множества на единицу, уменьшается и при $N \rightarrow \infty$ $\Delta D(X_N) \rightarrow 0$:

$$\Delta D(X_N) = D(X_{N+1}) - D(X_N) = \log(N+1) - \log N = \log\left(1 + \frac{1}{N}\right). \quad (8.3)$$

Таким образом, $\Delta D(X_N)$ есть убывающая функция от N элементов множества X .

8.3. Определенность последовательности элементов n конечных множеств

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — конечные множества мощностей $N_1, \dots, N_n$ соответственно. Рассмотрим множество $X^{(n)}$ всех допустимых упорядоченных последовательностей $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ элементов этих множеств ($x_{i_1} \in X_1, \dots, x_{i_n} \in X_n; i_1 = 1, 2, \dots, N_1, \dots, i_n = 1, 2, \dots, N_n$). Мощность множества $X^{(n)} = |X^{(n)}| = P$.

В общем случае $X^{(n)} \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$, где $X_1 \times \dots \times X_n$ — декартово произведение множеств $X_1, \dots, X_n$.

Определенность последовательности множества $X^{(n)}$ на основании формулы (8.2)

$$D(X^{(n)}) = \log P. \quad (8.4)$$

Мера определенности последовательности элементов обладает следующими свойствами.

1. $D(X^{(n)}) = 0$, если $P = 1$, т. е. если множество последовательностей содержит всего одну последовательность. В этом случае множеству последовательностей не присуще разнообразие и, следовательно, оно не может отражать различие объектов реального мира. $D(X^{(n)}) > 0$, если $P > 1$.

2. $D(X^{(n)}) = \sum_{r=1}^n \log N_r$, если допустимы любые комбинации элементов $x_r \in X_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$) в последовательностях, т. е. если $X^{(n)} = X_1 \times \dots \times X_n$.

Действительно, в этом случае $P = |X_1 \times \dots \times X_n| = N_1 \times \dots \times N_n$ и, как следует из формулы (8.4),

$$D(X^{(n)}) = \log N_1 \dots N_n = \sum_{r=1}^n \log N_r. \quad (8.5)$$

Величина $\log N_r = D(X_r)$ — это определенность элемента, стоящего на r -м месте в последовательности, т. е. определенность элемента множества X_r .

3. Пусть $N = \max_r N_r$. $D(X^{(n)})$ максимальна, если $N_1 = N_2 = \dots = N_n = N$ и $X^{(n)} = X_1 \times \dots \times X_n$. Подставив N вместо N_r в формулу (8.5), получим

$$D(X^{(n)})_{\max} = n \log N. \quad (8.6)$$

Формулы (8.2) — (8.6) при использовании несколько другой терминологии впервые были получены американским ученым Р. Хартли [11] в 1928 г.

8.4. Относительная определенность элемента конечного множества

Пусть X и Y — конечные множества с элементами $x_i \in X$ ($i = 1, 2, \dots, N$) и $y_j \in Y$ ($j = 1, 2, \dots, M$). Известно соответствие между множествами X и Y $G \subseteq X \times Y$, удовлетворяющее следующим трем условиям: G всюду определено, сюръективно и функционально.

Из теории множеств [6] известно, что соответствие, удовлетворяющее указанным условиям, называется *отображением* X в Y . Это отображение обозначим $f: X \rightarrow Y$. Установим его характер [13].

При выполнении первого и второго условий условие функциональности означает, что образом любого элемента из X является единственный элемент из Y . Так как к соответствию G не предъявлено требование взаимной однозначности, т.е. прообразами элементов множества Y могут быть подмножества, состоящие из нескольких элементов множества X , то $N \geq M$ и отображение $f: X \rightarrow Y$ имеет характер, представляемый графом, изображенным на рис. 8.1. В соответствии с условием функциональности указанный граф не содержит вершин x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), из которых бы выходило более одного ребра. Из этого следует, что $|G|$ не зависит ни от M ,

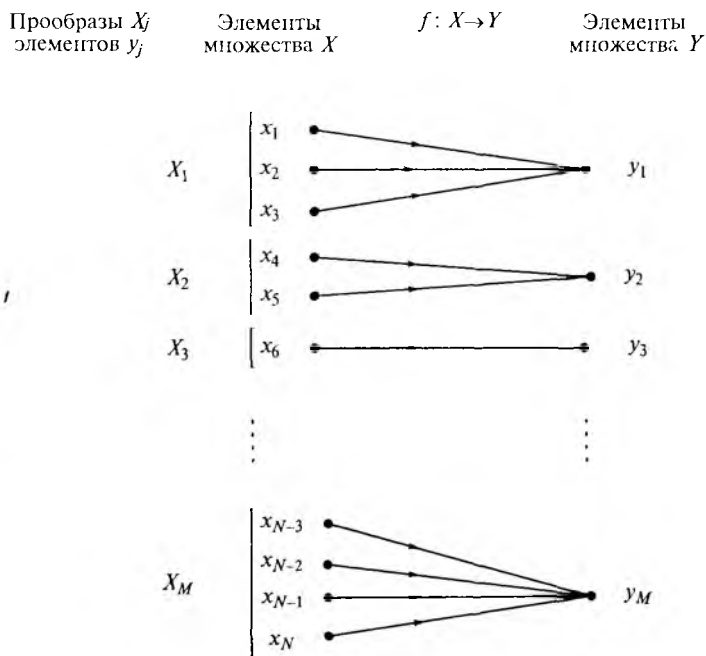


Рис. 8.1. Граф отображения множества X в множество Y

ни от вида отображения $f: X \rightarrow Y$ и, как вытекает из условия полной определенности, $|G| = N$.

В множестве X выделим прообразы элементов $y_j \in Y$ ($j = 1, 2, \dots, M$) в соответствии с отображением $f: X \rightarrow Y$ (см. рис. 8.1). Таких прообразов M . Обозначим множество элементов x_i , являющееся прообразом элемента y_j , через X_j ($j = 1, 2, \dots, M$). Для полученного разбиения справедливо:

- 1) $X_j \subseteq X \quad \forall j = 1, \dots, M$;
- 2) $X_j \neq \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, M$, где $\emptyset$ — символ пустого множества;
- 3) $X_j \cap X_k = \emptyset$ при $j \neq k$ ($k = 1, \dots, M$);
- 4) $\bigcup_{j=1}^M X_j = X$.

Поставим вначале задачу: найти определенность элемента множества X , содержащуюся в элементе y_j .

Определенность элемента множества X задается формулой (8.2). Если прообразом элемента y_j является подмножество X_j , состоящее всего из одного элемента множества X , то знание y_j позволяет точно указать отображаемый в него элемент множества X , т.е. потери определенности этого элемента множества X в элементе y_j не происходит.

Если же прообразом элемента y_j является подмножество X_j , содержащее больше, чем один элемент множества X , то знание y_j не позволяет точно указать отображаемый в него элемент, т.е. в этом случае часть определенности элемента множества $X_j \subseteq X$ при отображении в элемент y_j теряется. Эти потери тем больше, чем больше $|X_j| = N_j$. Теряемая определенность также должна находиться по формуле (8.2), но вместо N в нее необходимо подставить N_j . Наконец, следует учесть то обстоятельство, что элемент y_j не содержит какой-либо определенности об элементах множества X , входящих в подмножества X_k ($k \neq j$), так как подмножества X_k не являются прообразами элемента y_j .

Таким образом, определенность, содержащаяся в элементе y_j относительно элемента подмножества X_k , должна вычисляться так:

$$D(y_j, X_k) = \lambda_{k,j} [D(X) - D(X_k)] = \lambda_{k,j} (\log N - \log N_k), \quad (8.7)$$

где $D(X_k)$ — определенность элемента подмножества X_k , $D(X_k) = \log N_k$; $\lambda_{k,j}$ — коэффициент, зависящий от того, является ли подмножество X_k прообразом элемента y_j :

$$\lambda_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j, \\ 0, & \text{если } k \neq j. \end{cases}$$

Если $k \neq j$, т.е. подмножество X_k — не прообраз элемента y_j , то $D(y_j, X_k) = 0$ за счет того, что $\lambda_{k,j} = 0$. Если $k = j$, то

$$D(y_j, X_j) = D(X) - D(X_j) = \log N - \log N_j. \quad (8.8)$$

Величину $D(y_j, X_k)$, задаваемую формулой (8.7), назовем *относительной определенностью элемента подмножества X_k , содержащейся в элементе y_j* .

Несмотря на то что при $k \neq j$ величина $D(y_j, X_k) = 0$, строгое решение задачи нахождения определенности $D(y_j, X)$ элемента множества X , содержащейся в элементе y_j , требует нахождения суммы по всем k относительных определенностей $D(y_j, X_k)$, поэтому

$$D(y_j, X) = \sum_{k=1}^M D(y_j, X_k). \quad (8.9)$$

Поскольку в выражении (8.9) все слагаемые кроме $D(y_j, X_j)$ [см. формулу (8.8)], равны 0, то

$$D(y_j, X) = D(y_j, X_j) = \log N - \log N_j. \quad (8.10)$$

Назовем $D(y_j, X)$ *относительной определенностью элемента множества X , содержащейся в элементе y_j* . Числа $D(y_j, X)$, найденные для всех $j = 1, 2, \dots, M$ по формуле (8.10), дают исчерпывающую картину значений относительной определенности элемента множества X , содержащейся в элементах y_j . Однако при больших M работа с полным рядом чисел $D(y_j, X)$ серьезно затруднена. Более удобен был бы некоторый показатель, характеризующий относительную определенность элемента множества X в элементе множества Y , зависящий от значений $D(y_j, X)$, и представляющий собой, например, действительное число $D(Y, X)$. Естественно, давая разные определения, таких показателей можно получить достаточно много. Здесь указанный показатель введем так: под относительной определенностью элемента конечного множества X в элементе конечного множества Y будем понимать среднее арифметическое действительных чисел $D(y_j, X)$ ($j = 1, 2, \dots, M$).

Основанием (хотя и весьма слабым) к принятию данного определения $D(Y, X)$ служит то обстоятельство, что практически во всех ранее разработанных теориях информации выбранные меры являются теми или иными средними.

Как следует из определения,

$$\begin{aligned} D(Y, X) &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M D(y_j, X) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\log N - \log N_j) = \\ &= \log N - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log N_j. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Из выражения (8.11) видно, что $D(Y, X)$ представляет собой определенность, содержащуюся в среднем в элементе множества Y об элементе множества X . Назовем $D(Y, X)$ *средней относительной определенностью элемента множества X* , содержащейся в элементе множества Y . Второй член в выражении (8.11) характеризует потерю определенности элемента множества X в элементе множества Y , вызванную не взаимно-однозначным соответствием между элементами этих множеств. Теряемую в среднем в результате отображения $X \rightarrow Y$ определенность элемента множества X обозначим $D(X)_n$, т. е.

$$D(X)_n = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log N_j. \quad (8.12)$$

Как следует из выражения (8.11), $D(Y, X)$ зависит от трех факторов: N , M и отображения $f: X \rightarrow Y$. В зависимости от значений N и M средняя относительная определенность $D(Y, X)$ обладает следующими свойствами.

1. $D(Y, X) = 0$, когда $N = 1$ или $M = 1$. В первом случае в силу функциональности отображения $f: X \rightarrow Y$ $M = 1$ и, как видно из выражения (8.11), $D(Y, X) = 0$. При $N > 1$, а $M = 1$, $j = 1$, $X_1 = X$, $N_1 = N$ $D(X)_n = \log N$ и $D(Y, X) = 0$. Это не противоречит здравому смыслу, так как если каждый элемент $x_i \in X$ отображается в один и тот же элемент y_1 , то после акта отображения по y_1 невозможно указать отображенный в него элемент x_i .

2. $0 < D(Y, X) < D(X)$, если $N > M > 1$. В этом случае соответствие между множествами X и Y , устанавливаемое отображением $f: X \rightarrow Y$, не взаимно однозначно. Как следует из выражения (8.11), при таком условии во втором члене найдется хотя бы одно слагаемое $\log N_j$, которое будет больше 0.

3. $D(Y, X) = D(Y, X)_{\max} = D(X) = \log N$, только когда $N = M > 1$. В этом случае из того, что соответствие между множествами X и Y , задающее отображение $f: X \rightarrow Y$, всюду определено, сюръективно и функционально, следует, что оно взаимно однозначно. При таком соответствии каждый член суммы $D(X)_n$ равен 0. Из этого вытекает, что $D(Y, X) = D(X) = \log N$.

Пример 8.1. Найти среднюю относительную определенность элемента множества X , содержащуюся в элементе множества Y , если элементами множеств X и Y являются числа: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$, а отображением $f: X \rightarrow Y$ — определение остатков от деления элементов множества X на 3.

По получаемым остаткам все элементы множества X разбиваются на три подмножества: $X_1 = \{3\}$, $X_2 = \{1, 4, 7\}$, $X_3 = \{2, 5\}$. Найдем $D(Y, X)$ из выражения (8.11), положив $a = 2$:

$$D(Y, X) = \log_2 6 - \frac{1}{3} (\log_2 1 + \log_2 3 + \log_2 2) = 1,723 \text{ бит.}$$

Теперь выясним, как влияет на значение $D(Y, X)$ характер отображения $f: X \rightarrow Y$ при условии, что $N = \text{const}$, $M = \text{const}$ и $N > M > 1$. Наибольший интерес здесь представляет задача нахождения границ интервала, которому принадлежат значения $D(Y, X)$.

Как видно из выражения (8.11), при $N = \text{const}$, и $M = \text{const}$ величина $D(Y, X)$ будет достигать максимального значения $D(Y, X)_{\max}$ только тогда, когда потери определенности $D(X)_n$ элемента множества X будут достигать минимального значения $D(X)_{n \min}$.

Можно показать, что минимальные потери определенности элемента множества X

$$D(X)_{n \min} = \frac{1}{M} \log(N - M + 1) \quad (8.13)$$

даст любое отображение $F: X \rightarrow Y$, в котором $M - 1$ подмножеств X_j ($j = 1, 2, \dots, M$) содержит по одному элементу, а одно подмножество $N - M + 1$ элементов. Вид одного из отображений $F: X \rightarrow Y$ приведен на рис. 8.2. В нем потери определенности элемента множества X минимальны: $D(X)_{nF} = D(X)_{n \min}$ и, как следует из формулы (8.12),

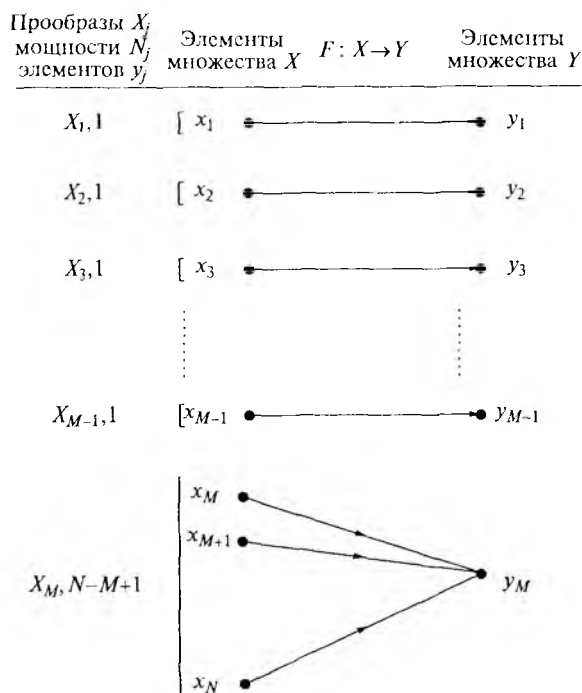


Рис. 8.2. Граф отображения $F: X \rightarrow Y$, дающего $D(X)_{n \min}$

$$D(X)_{n \min} = \frac{1}{M} \log(N - M + 1).$$

Из формулы (8.13) и выражения (8.11) находим, что максимальное значение, которое может иметь $D(Y, X)$,

$$D(Y, X)_{\max} = \log N - \frac{1}{M} \log(N - M + 1). \quad (8.14)$$

Значение $D(Y, X)$ большее, чем определяемое по формуле (8.14), ни при каком другом отображении $X \rightarrow Y$ получено быть не может. Таким образом,

$$D(Y, X) \leq \log N - \frac{1}{M} \log(N - M + 1). \quad (8.15)$$

Найдем теперь нижнюю границу интервала возможных значений $D(Y, X)$. Как видно из выражения (8.11), при $N = \text{const}$ и $M = \text{const}$ величина $D(Y, X)$ достигает минимального значения $D(Y, X)_{\min}$ только тогда, когда максимального значения $D(X)_{n\max}$ достигают потери определенности $D(X)_n$ элемента множества X .

В комбинаторной теории информации показано, что максимальные потери определенности элемента множества X дает любое отображение $\varphi: X \rightarrow Y$, в котором $M - r$ подмножеств X_j содержит по s , а r подмножеств — по $(s + 1)$ элементов:

$$D(X)_{n \max} = (1 - \frac{r}{M}) \log \left[\frac{N}{M} \right] + \frac{r}{M} \log \left(\left[\frac{N}{M} \right] + 1 \right), \quad (8.16)$$

где r — остаток от деления N на M ; s — частное от деления этих чисел, $s = \left[\frac{N}{M} \right]$.

Вид одного из отображений $\varphi: X \rightarrow Y$ изображен на рис. 8.3.

Общее число элементов во всех подмножествах X_j ($j = 1, 2, \dots, M$), показанных на рис. 8.3,

$$(M - r)s + r(s + 1) = Ms - rs + rs + r = N.$$

В последнем равенстве использована формула алгоритма деления Евклида: $N = Ms + r$.

Из формулы (8.16) и выражения (8.11) следует, что если в отображении $f: X \rightarrow Y$ отношение N/M — нецелое, то минимальное значение, которое может иметь $D(Y, X)$,

$$D(Y, X)_{\min} = \log N - \left(1 - \frac{r}{M} \right) \log \left[\frac{N}{M} \right] - \frac{r}{M} \log \left(\left[\frac{N}{M} \right] + 1 \right). \quad (8.17)$$

Прообразы X_j мощности N_j элементов y_j	Элементы множества X	$\varphi: X \rightarrow Y$	Элементы множества Y
--	---------------------------	----------------------------	---------------------------

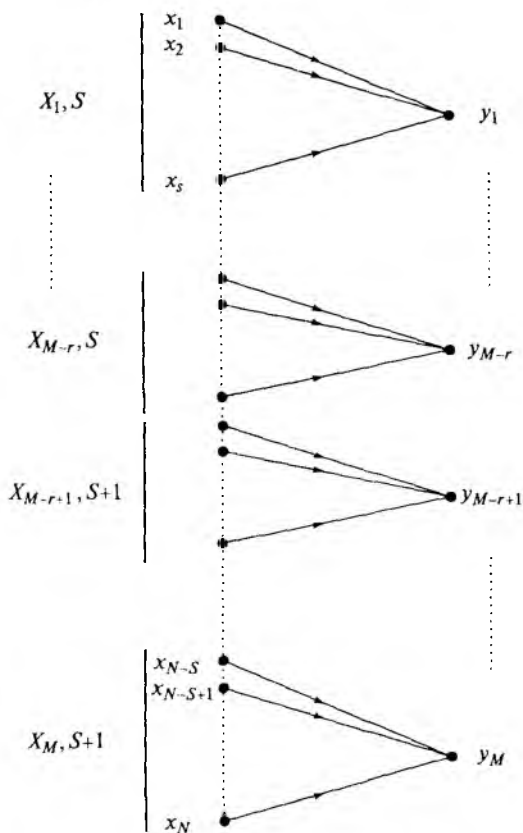


Рис. 8.3. Граф отображения $\varphi: X \rightarrow Y$, дающего $D(X)_{n \max}$

Значение $D(Y, X)$ меньше, чем определяемое формулой (8.17), ни при каком другом отображении $X \rightarrow Y$ получено быть не может. Таким образом,

$$\log N - \left(1 - \frac{r}{M}\right) \log \left\lceil \frac{N}{M} \right\rceil - \frac{r}{M} \log \left(\left\lceil \frac{N}{M} \right\rceil + 1 \right) \leq D(Y, X). \quad (8.18)$$

Формула (8.16) позволяет найти максимальные потери определенности элемента множества X точно. Несмотря на это, в комбинаторной теории получена и общая оценка числа $D(X)_{n \max}$, находимого по формуле (8.16). Эта оценка при условии, что отношение N/M — нецелое, задается неравенством

$$\left(1 - \frac{r}{M}\right) \log \left[\frac{N}{M}\right] + \frac{r}{M} \log \left(\left[\frac{N}{M}\right] + 1\right) < \log \frac{N}{M}. \quad (8.19)$$

Заменим левую часть неравенства (8.19), выразив ее из формулы (8.17). В результате будем иметь

$$\log N - D(Y, X)_{\min} < \log \frac{N}{M}. \quad (8.20)$$

Представив логарифм частного в правой части неравенства (8.20) как разность двух логарифмов, получим

$$\log M < D(Y, X)_{\min}. \quad (8.21)$$

Из неравенства (8.18) после подстановки в него формулы (8.17) и учета неравенства (8.21) следует

$$\log M < D(Y, X). \quad (8.22)$$

Объединяя неравенства (8.22) и (8.15), окончательно получим

$$\log M < D(Y, X) \leq \log N - \frac{1}{M} \log(N - M + 1). \quad (8.23)$$

Рассмотрим теперь случай, когда при отображении $\varphi: X \rightarrow Y$ отношение N/M — целое. Как следует из формулы (8.16), при подстановке в нее $r = 0$, получим

$$D(X)_{\max} = \log \frac{N}{M}. \quad (8.24)$$

Выражение (8.24) устанавливает максимальные потери определенности элемента множества X .

Если в формуле (8.17) и неравенстве (8.18) положить $r = 0$, то соответственно найдем:

$$D(Y, X)_{\min} = \log M; \quad (8.25)$$

$$\log M \leq D(Y, X). \quad (8.26)$$

Объединяя неравенства (8.26) и (8.15), для отображения $f: X \rightarrow Y$, в котором отношение N/M — целое, получим

$$\log M \leq D(Y, X) \leq \log N - \frac{1}{M} \log(N - M + 1). \quad (8.27)$$

Из неравенств (8.23) и (8.27) видно, что средняя относительная определенность элемента множества X $D(Y, X)$ при любом отображении $f: X \rightarrow Y$ не меньше, чем определенность элемента множества Y , но и не больше, чем определенность элемента множества X .

Пример 8.2. Найти среднюю относительную определенность $D(Y, X)$, содержащуюся в одном двоичном символе о комбинации четырехразрядного нормального двоичного кода, если отображение комбинации в символ состоит в том, что любая комбинация кода с четным числом единиц отображается нулем, а с нечетным числом единиц — единицей.

Множество X образуют все комбинации четырехразрядного двоичного кода. Его мощность $N = 16$. Множество $Y = \{0, 1\}$, $M = 2$. Комбинации с четным числом единиц составляют прообраз X_1 элемента 0, а комбинации с нечетным числом единиц — прообраз X_2 элемента 1. Поскольку в данном коде число комбинаций с четным числом единиц равно числу

комбинаций с нечетным числом единиц, т.е. $N_1 = N_2 = \frac{N}{M} = 8$, то $D(Y, X)$ будет минимальна. Найдем $D(Y, X)$, воспользовавшись формулой (8.25), при $a = 2$:

$$D(Y, X) = D(Y, X)_{\min} = \log_2 M = \log_2 2 = 1 \text{ бит.}$$

Пример 8.3. Найти среднюю относительную определенность $D(Y, X)$, если множества X и Y — это те же множества, что и в примере 8.2, а отображение X в Y следующее: одна из комбинаций кода, например 0000, отображается нулем, а все другие 15 комбинаций — единицей, т.е. $N_1 = 1$, $N_2 = 15$.

В этом случае $D(Y, X)$ максимальна и определяется по формуле (8.14):

$$D(Y, X) = D(Y, X)_{\max} = \log_2 16 - \frac{1}{2} \log_2 15 = 4 - \frac{3,91}{2} = 2,045 \text{ бит.}$$

8.5. Относительная определенность элемента декартова произведения конечных множеств

Пусть X_1, X_2, Y — конечные множества с элементами $x_{i_1} \in X_1$ ($i_1 = 1, 2, \dots, N_1$), $x_{i_2} \in X_2$ ($i_2 = 1, 2, \dots, N_2$), $y_j \in Y$ ($j = 1, 2, \dots, M$). Элементы декартова произведения, представляющие собой все возможные упорядоченные пары элементов $x_{i_1} \in X_1$ и $x_{i_2} \in X_2$, обозначим (x_{i_1}, x_{i_2}) . Число таких пар $|X_1 \times X_2| = N_1 N_2$.

Пусть известно отображение множества $X_1 \times X_2$ в множество Y — $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ и пусть соответствие, задающее это отображение, всюду определено, сюръективно и функционально. Из последних трех условий следует, что $N_1 N_2 \geq M$.

В множестве $X_1 \times X_2$ выделим прообразы элементов y_j в соответствии с отображением $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$. Таких прообразов M . Обозначим множество элементов (x_{i_1}, x_{i_2}) , составляющее прообраз элемента y_j , $(X_1 \times X_2)_j$ ($j = 1, 2, \dots, M$). Для полученного разбиения справедливо:

$$1) (X_1 \times X_2)_j \subseteq X_1 \times X_2 \quad \forall j = 1, \dots, M;$$

2) $(X_1 \times X_2)_j \neq \emptyset \forall j = 1, \dots, M$, где $\emptyset$ — символ пустого множества;

3) $(X_1 \times X_2)_j \cap (X_1 \times X_2)_r = \emptyset$ при $j \neq r$ ($r = 1, 2, \dots, M$);

4) $\bigcup_{j=1}^M (X_1 \times X_2)_j = X_1 \times X_2$.

В соответствии с общим определением относительной определенности элемента конечного множества (см. подразд. 8.4) определенность, содержащаяся в среднем в элементе множества Y об элементе декартова произведения $X_1 \times X_2$,

$$D(Y, X_1 \times X_2) = \log N_1 N_2 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log(N_1 N_2)_j, \quad (8.28)$$

где $(N_1 N_2)_j = |(X_1 \times X_2)_j|$.

В последней формуле первый член представляет собой определенность элемента декартова произведения:

$$D(X_1 \times X_2) = \log N_1 N_2 = \log N_1 + \log N_2, \quad (8.29)$$

а второй член — определенность элемента декартова произведения $X_1 \times X_2$, теряемую в среднем в результате отображения $X_1 \times X_2 \rightarrow Y$:

$$D(X_1 \times X_2)_n = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log(N_1 N_2)_j. \quad (8.30)$$

Учитывая формулы (8.29) и (8.30), величину $D(Y, X_1 \times X_2)$ назовем *средней относительной определенностью элемента декартова произведения* $X_1 \times X_2$, содержащейся в элементе множества Y [14]. Свойства $D(Y, X_1 \times X_2)$ аналогичны свойствам $D(Y, X)$.

Пример 8.4. Пусть X_1 и X_2 — конечные множества чисел: $X_1 = \{1, 2, 3\}$, $X_2 = \{2, 3, 4\}$. Декартово произведение этих множеств представим в табл. 8.1. Отображением $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$, где конечное множество целых чисел $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, будет арифметическое сложение чисел в каждой паре (x_{i_1}, x_{i_2}) .

Таблица 8.1

x_{i_1}	x_{i_2}		
	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

Найдем среднюю относительную определенность элемента декартова произведения $X_1 \times X_2$ (пары слагаемых), содержащуюся в элементе множества Y (сумме).

По количеству чисел суммы декартово произведение разбивается на пять подмножеств: $(X_1 \times X_2)_1 = \{(1, 2)\}$, $(X_1 \times X_2)_2 = \{(1, 3), (2, 2)\}$, $(X_1 \times X_2)_3 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2)\}$, $(X_1 \times X_2)_4 = \{(2, 4), (3, 3)\}$, $(X_1 \times X_2)_5 = \{(3, 4)\}$. Вычислим $D(Y, X_1 \times X_2)$, воспользовавшись формулой (8.28) при $a = 2$:

$$D(Y, X_1 \times X_2) = \log_2 9 - \frac{1}{5} (2 \log_2 1 + 2 \log_2 2 + \log_2 3) = 2,453 \text{ бит.}$$

Пример 8.5. Найти среднюю относительную определенность $D(Y, X_1 \times X_2)$, содержащуюся в значении логической функции двух переменных ψ от значений этих переменных.

Как известно, логических функций двух переменных — 16. Они представлены в табл. 8.2, где ψ_i ($i = 0, 1, \dots, 15$) — логическая функция, а x_1, x_2 — переменные. В последней строке таблицы даны значения $D(Y, X_1 \times X_2)$, вычисленные по формуле (8.28) при $a = 2$. При нахождении $D(Y, X_1 \times X_2)$ учитывалось, что для функций ψ_0 и ψ_{15} $M = 1$, а для всех остальных функций $M = 2$.

Отметим, что в число функций, которые обладают наибольшей средней относительной определенностью от переменных, вошли наиболее часто используемые на практике: ψ_1 — функция И (конъюнкция), ψ_7 — функция ИЛИ (дизъюнкция), ψ_8 — функция ИЛИ-НЕ (стрелка Пирса), ψ_{14} — функция И-НЕ (штрих Шеффера).

Пусть теперь имеется n конечных множеств X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с мощностями $|X_i| = N_i$. Рассмотрим декартово произведение множеств X_i : $X_1 \times \dots \times X_n$. Элементами этого декартова произведения являются векторы $(x_1, \dots, x_n)$ длины n , в которых $x_i \in X_i$, $x_n \in X_n$.

Также пусть известно отображение множества $X_1 \times \dots \times X_n$ в множество Y — $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, задаваемое соответствием, которое всюду определено, сюръективно и функционально. Выделим в множестве $X_1 \times \dots \times X_n$ M прообразов элементов $y_j \in Y$ ($j = 1, 2, \dots, M$)

Таблица 8.2

x_1	x_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$D(Y, X_1 \times X_2)$ (бит)		0	1,2	1,2	1	1,2	1	1	1,2	1,2	1	1	1,2	1	1,2	1,2	0

в соответствии с отображением f . Обозначим множество векторов, входящих в прообраз элемента y_j , $(X_1 \times \dots \times X_n)_j$, а его мощность $|(X_1 \times \dots \times X_n)_j| = (N_1 \dots N_n)_j$.

По определению средняя относительная определенность элемента декартова произведения $X_1 \times \dots \times X_n$, содержащаяся в элементе множества Y ,

$$D(Y, X_1 \times \dots \times X_n) = \log N_1 \dots N_n - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log(N_1 \dots N_n)_j. \quad (8.31)$$

Характерным примером отображения $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ может служить логическая функция n переменных. Средняя относительная определенность, содержащаяся в ней о переменных, может быть вычислена по формуле (8.31) так же, как это делается по формуле (8.28) для функций двух переменных в примере 8.5.

8.6. Относительная определенность элемента конечного множества в последовательности элементов m конечных множеств

Пусть $X, Y_1, \dots, Y_m$ — конечные множества с мощностями $|X| = N, |Y_1| = M_1, \dots, |Y_m| = M_m$ соответственно и известны отображения $f_k: X \rightarrow Y_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), задаваемые соответствиями, которые всюду определены, сюръективны и функциональны. Из этих условий следует, что $\forall k = 1, 2, \dots, m \ N \geq M_k$ и определенность, которой в среднем обладает элемент множества Y_k об элементе множества X , равна средней относительной определенности $D(Y_k, X)$.

Рассмотрим декартово произведение $Y_1 \times \dots \times Y_m$. Его элементами являются все возможные последовательности $y_{j_1} \dots y_{j_m}$ ($y_{j_1} \in Y_1, \dots, y_{j_m} \in Y_m; j_1 = 1, 2, \dots, M_1, \dots, j_m = 1, 2, \dots, M_m$). В множестве $Y_1 \times \dots \times Y_m$ выделим подмножество $Y^{(m)} \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_m$ мощности $|Y^{(m)}| = P$, включающее в себя только те последовательности из $Y_1 \times \dots \times Y_m$, которые состоят из образов элементов $x_i \in X$ ($i = 1, 2, \dots, N$) при последовательном применении отображений $f_k: X \rightarrow Y_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Нетрудно видеть, что $1 \leq P \leq N$.

В соответствии с формулой (8.4) определенность последовательности подмножества $Y^{(m)}$

$$D(Y^{(m)}) = \log P. \quad (8.32)$$

Как следует из формулы (8.32), определенность последовательности подмножества $Y^{(m)}$ зависит только от числа входящих в подмножество последовательностей.

В дальнейшем будем рассматривать только случай, когда $f_1 \neq f_2 \neq \dots \neq f_m$. При этом для нахождения относительной определенности элемента множества $X \subset D(Y^{(m)}, X)$, содержащейся в среднем в последовательности подмножества $Y^{(m)}$, используем формулу

$$D(Y^{(m)}, X) = \sum_{k=1}^m D(Y_k, X). \quad (8.33)$$

Величину $D(Y^{(m)}, X)$ назовем *средней относительной определенностью элемента множества X , содержащейся в последовательности множества $Y^{(m)}$* . Из формулы (8.33) видно, что средняя относительная определенность элемента множества X , содержащаяся в последовательности множества $Y^{(m)}$ при условии, что $f_1 \neq f_2 \neq \dots \neq f_m$, равна сумме средних относительных определенностей элемента множества X , содержащихся в ее элементах.

Подставив в формулу (8.33) $D(Y_k, X)$ из выражения (8.11), получим

$$D(Y^{(m)}, X) = m \log N - \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{M_k} \sum_{j_k=1}^{M_k} \log N_{j_k} \right), \quad (8.34)$$

где N_{j_k} — мощность подмножества $X_{j_k} \subset X$, каждому из элементов которого отображение $f_k: X \rightarrow Y_k$ ставит в соответствие элемент $y_{j_k} \in Y_k$ ($j_k = 1, 2, \dots, M_k$).

Средняя относительная определенность $D(Y^{(m)}, X)$, задаваемая формулой (8.34), обладает следующими свойствами.

1. $D(Y^{(m)}, X) = D(Y^{(m)}, X)_{\min}$, если $\forall k = 1, 2, \dots, m$ для любых j_k и l_k ($j_k = 1, 2, \dots, M_k$, $l_k = 1, 2, \dots, M_k$, $j_k \neq l_k$) $|N_{j_k} - N_{l_k}| \leq 1$. При этом, если отношение N/M_k — нецелое, то в соответствии с формулами (8.17) и (8.33)

$$\begin{aligned} D(Y^{(m)}, X)_{\min} &= \sum_{k=1}^m D(Y_k, X)_{\min} = \\ &= m \log N - \sum_{k=1}^m \left\{ \left(1 - \frac{r_k}{M_k}\right) \log \left[\frac{N}{M_k} \right] - \frac{r_k}{M_k} \log \left(\left[\frac{N}{M_k} \right] + 1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (8.35)$$

где r_k — остаток от деления N на M_k ; $[N/M_k]$ — частное от деления этих чисел.

В случае если $\forall k = 1, 2, \dots, m$ отношение N/M_k — целое и $\forall j_k = 1, 2, \dots, M_k$ величина $N_{j_k} = N/M_k$, то, подставив $D(Y_k, X)_{\min}$ из формулы (8.25) в формулу (8.33), найдем

$$D(Y^{(m)}, X)_{\min} = \sum_{k=1}^m D(Y_k, X)_{\min} = \sum_{k=1}^m \log M_k. \quad (8.36)$$

2. $D(Y^{(m)}, X) = D(Y^{(m)}, X)_{\max}$, если $\forall k = 1, 2, \dots, m$ ровно $M_k - 1$ подмножеств $X_{j_k} \subset X$ содержит по одному элементу, а одно под-

множество — $(N - M_k + 1)$ элементов. В этом случае, подставив $D(Y_k, X)_{\max}$ из формулы (8.14) в формулу (8.33), получим

$$\begin{aligned} D(Y^{(m)}, X)_{\max} &= \sum_{k=1}^m D(Y_k, X)_{\max} = \\ &= m \log N - \sum_{k=1}^m \frac{1}{M_k} \log(N - M_k + 1). \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$3. \sum_{k=1}^m \log M_k < D(Y^{(m)}, X) < m \log N - \sum_{k=1}^m \frac{1}{M_k} \log(N - M_k + 1) \quad (8.38)$$

при всех других отображениях $f_k: X \rightarrow Y_k$.

Свойства, определяемые формулами (8.35) — (8.38), широко используются на практике.

Пример 8.6. Пусть элементами множества X являются все 16 комбинаций четырехразрядного нормального двоичного кода ($|X| = N = 16$). По этому коду построим систематический линейный (7,4)-код с правилами формирования проверочных символов

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_4, \\ b_2 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_4, \\ b_3 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3, \end{aligned} \quad (8.39)$$

где a_i — i -й информационный символ ($i = 1, 2, 3, 4$); b_s — s -й проверочный символ ($s = 1, 2, 3$); $\oplus$ — знак сложения по модулю 2.

Найдем среднюю относительную определенность комбинации четырехразрядного двоичного кода, содержащуюся в комбинации указанного линейного (7,4)-кода.

Множество X представляет собой декартово произведение четырех множеств: $X = Z_1 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_4$, где $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z = \{0, 1\}$.

Множество комбинаций систематического линейного (7,4)-кода будем рассматривать как множество последовательностей $Y^{(4)}$ со следующей структурой:

$$Y^{(4)} = \{y \ b_1 \ b_2 \ b_3\},$$

где y — элемент множества Y комбинаций информационных символов; $b_s \in B_s$ ($s = 1, 2, 3$), B_s — множество символов, которые могут стоять на s -й проверочной позиции в комбинации линейного кода.

Поскольку комбинации информационных символов представляют собой комбинации четырехразрядного нормального двоичного кода, то $Y = X$. На основании этого, во-первых, $D(Y, X) = D(X, X) = D(X) = \log N = = \log_2 16 = 4$ бит и, во-вторых, $D(B_s, X) = D(B_s, Y)$ ($s = 1, 2, 3$).

Рассматриваемый линейный (7,4)-код задается выражениями (8.39). Если построить все 16 его комбинаций, то легко видеть, что $|B_s| = M_s = 2 \ \forall s = 1, 2, 3$ и прообразом любого из двух элементов (0 и 1) множества B_s ($s = 1, 2, 3$) является подмножество $Y_{j_s} \subset Y$ ($j_s = 1, 2$), состоящее из

восьми комбинаций четырехразрядного нормального двоичного кода Y . Относительную определенность $D(B_s, Y)$ найдем, используя выражение (8.11):

$$D(B_s, Y) = \log_2 N - \frac{1}{M_s} \sum_{j_s=1}^{M_s} \log N_{j_s} = \log_2 16 - \frac{1}{2} (\log_2 8 + \log_2 8) = 1 \text{ бит.}$$

В целом для линейного (7,4)-кода на основании формулы (8.33) найдем

$$D(Y^{(4)}, X) = D(Y, X) + \sum_{s=1}^3 D(B_s, X) = 4 + 3 = 7 \text{ бит.}$$

Данный пример показывает, что такой прием как добавление к информационным символам проверочных, находимых как суммы по модулю 2 определенных информационных символов, применяемый при построении корректирующих кодов, обеспечивает увеличение определенности информационных символов в комбинациях корректирующего кода по сравнению с определенностью самих информационных символов.

Контрольные вопросы

1. Что принимается за общую меру количества информации в комбинаторной теории?
2. Как находится определенность элемента конечного множества?
3. Какими свойствами обладает мера определенности последовательности элементов n конечных множеств?
4. Что представляет собой относительная определенность элемента конечного множества?
5. Какими свойствами обладает относительная определенность элемента конечного множества?
6. Какое отображение $F: X \rightarrow Y$ даст минимальные потери определенности элемента множества X ?
7. Какое отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ даст максимальные потери определенности элемента множества X ?
8. Как вычисляется относительная определенность элемента декартова произведения двух конечных множеств?
9. Как находится относительная определенность элемента конечного множества в последовательности элементов m конечных множеств?

КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ В ЭЛЕМЕНТЕ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА. ИЗБЫТОЧНОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

9.1. Количество информации в элементе конечного множества

За общую меру количества информации в комбинаторной теории принимается разность исходной определенности элемента множества и той определенности, которая в нем теряется в результате отображения или искажения элементов этого множества (см. гл. 8).

При рассмотрении множества каждый его элемент принимается за истинный. В силу этого потери определенности элемента $D_0 = 0$ и в общем виде количество информации в элементе любого конечного множества

$$I = D. \quad (9.1)$$

Определенность элемента конечного множества X находится по формуле (8.2). Подставив $D(X)$ в равенство (9.1), получим [13], что количество информации $I(X)$, которое содержит один элемент множества X ,

$$I(X) = D(X) = \log N. \quad (9.2)$$

Эта мера количества информации обладает теми же свойствами, что и мера определенности $D(X)$ элемента множества.

9.2. Количество информации в последовательности элементов n конечных множеств

Поскольку множество последовательностей $X^{(n)}$, рассмотренное в подразд. 8.3, также является конечным и все элементы последовательностей этого множества принимаются за истинные, то и для множества $X^{(n)}$ справедливо равенство (9.1) [13]. Подставив в него $D(X^{(n)})$ из формулы (8.4), получим, что количество информации $I(X^{(n)})$, которое содержит последовательность множества $X^{(n)}$,

$$I(X^{(n)}) = D(X^{(n)}) = \log P. \quad (9.3)$$

Если $X^{(n)} = X_1 \times \dots \times X_n$, то, подставив в формулу (9.3) $D(X^{(n)})$ из формулы (8.5), найдем

$$I(X^{(n)}) = D(X^{(n)}) = \sum_{r=1}^n \log N_r. \quad (9.4)$$

Величина $\log N_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$) показывает количество информации, которое содержит элемент, стоящий на r -м месте последовательности.

Если $N = \max_r N_r$, то $I(X^{(n)})$ максимально, когда $N_1 = N_2 = \dots = N_n = N$ и $X^{(n)} = X_1 \times \dots \times X_n$. При таких условиях из формулы (9.4) получим

$$I(X^{(n)})_{\max} = n \log N. \quad (9.5)$$

Формулы (9.3)–(9.5) позволяют найти среднее количество информации, содержащееся в одном элементе последовательности. В случае когда $P < N_1 \dots N_n$,

$$I_3(X^{(n)}) = \frac{\log P}{n}. \quad (9.6)$$

При $P = N_1 \dots N_n$

$$I_3(X^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \log N_r. \quad (9.7)$$

В случае если $N = \max_r N_r$, $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$ и $X^{(n)} = X_1 \times \dots \times X_n$, то элемент последовательности множества $X^{(n)}$ несет максимальное среднее количество информации

$$I_3(X^{(n)})_{\max} = \log N. \quad (9.8)$$

9.3. Относительное количество информации в элементе конечного множества

При отображении одного конечного множества в другое в общем случае часть определенности элементов первого множества теряется. В силу этого нахождение количества информации, содержащегося в элементе второго множества об элементе первого, должно выполняться по формуле (8.1).

Определенность $D(X)$ элемента множества X вычисляется по формуле (8.2). Средние потери определенности элемента множества X в элементе множества Y $D(X)_n$, вызванные отображением $X \rightarrow Y$, находятся по формуле (8.12) [13]. Разность этих величин в соответствии с формулой (8.1) характеризует количество информации $I(Y, X)$, которое в среднем содержит элемент множества Y об элементе множества X :

$$I(Y, X) = D(X) - D(X)_n = \log N - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log N_j = D(Y, X). \quad (9.9)$$

Величину $I(Y, X)$, численно равную $D(Y, X)$, назовем *средним относительным количеством информации*, содержащимся в элементе множества Y об элементе множества X . Среднее относительное количество информации $I(Y, X)$ обладает теми же свойствами, что и $D(Y, X)$.

Аналогично найдем среднее относительное количество информации $I(Y, X_1 \times X_2)$, содержащееся в элементе множества Y об элементе декартова произведения $X_1 \times X_2$:

$$\begin{aligned} I(Y, X_1 \times X_2) &= D(X_1 \times X_2) - D(X_1 \times X_2)_n = \\ &= \log N_1 N_2 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log (N_1 N_2)_j = D(Y, X_1 \times X_2). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Аналогично формуле (9.10) можно найти среднее относительное количество информации $I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)$, содержащееся в элементе множества Y об элементе декартова произведения $X_1 \times \dots \times X_n$:

$$\begin{aligned} I(Y, X_1 \times \dots \times X_n) &= D(X_1 \times \dots \times X_n) - D(X_1 \times \dots \times X_n)_n = \\ &= \log N_1 \dots N_n - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log (N_1 \dots N_n)_j = D(Y, X_1 \times \dots \times X_n). \end{aligned} \quad (9.11)$$

В выражении (9.11) учтена формула (8.31).

9.4. Относительное количество информации в последовательности элементов m конечных множеств

Среднее относительное количество информации $I(Y^{(m)}, X_n)$, содержащееся в последовательности множества $Y^{(m)}$ об элементе множества X в случае, когда все отображения $f_k: X \rightarrow Y_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) различны, найдем следующим образом [14]:

$$I(Y^{(m)}, X) = \sum_{k=1}^m I(Y_k, X). \quad (9.12)$$

Подставив (9.12) в выражение $I(Y_k, X)$ из формулы (9.9), получим

$$I(Y^{(m)}, X) = m \log N - \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{M_k} \sum_{j_k=1}^{M_k} \log N_{j_k} \right) = \sum_{k=1}^m D(Y_k, X) = D(Y^{(m)}, X). \quad (9.13)$$

Среднее относительное количество информации $I(Y^{(m)}, X)$, содержащееся в последовательности, обладает теми же свойствами, что и $D(Y^{(m)}, X)$. При этом в m -элементной последовательности множества $Y^{(m)}$ среднее относительное количество информации всегда не меньше суммы абсолютных количеств информации в элементах множеств $Y_1, \dots, Y_m$ и не больше $mI(X) = m \log N$, т.е.

$$\sum_{k=1}^m \log M_k \leq I(Y^{(m)}, X) \leq m \log N. \quad (9.14)$$

Неравенство (9.14) задает границы интервала возможных значений $I(Y^{(m)}, X)$.

9.5. Избыточность представления и отображения информации в комбинаторной теории

Пусть X — конечное множество мощности $|X| = N$, из которого для представления информации используются только элементы множества $X' \subseteq X$ мощности $|X'| = N' \leq N$. Для оценки того, насколько возможность представлять информацию элементами множества X превышает способность элементов множества X' ее нести, используем величину I_X — *избыточность представления информации* [15]. Определим избыточность представления информации элементами множества X следующим образом:

$$I_X = \frac{I(X) - I(X')}{I(X')} = \frac{I(X)}{I(X')} - 1, \quad (9.15)$$

где $I(X)$ — количество информации, которое содержит элемент множества X ; $I(X')$ — количество информации, которое заключено в элементе множества X' ($I(X') > 0$).

Подставив $I(X)$ и $I(X')$ из равенства (9.2) в выражение (9.15), получим

$$I_X = \frac{\log N}{\log N'} - 1. \quad (9.16)$$

Данная формула справедлива для всех целых $N' > 1$. При $N' = 1$ формула (9.16) лишена смысла, так как в этом случае множество X' содержит всего один элемент, который не может нести информацию, в силу чего ставить вопрос о том, насколько возможность представлять информацию элементами множества X превышает способность элементов множества X' нести ее, неправомерно.

Избыточность, найденная по формуле (9.16), показывает, во сколько раз потерянное за счет недоиспользования элементов множества X количество информации превышает то количество, которое содержится в элементе множества X' . Из формулы (9.16) видно, что $0 \leq I_X < \infty$; $I_X = 0$ только тогда, когда $X' = X$, т.е. когда для представления информации используются все элементы множества X . Если $I_X > 0$, то это означает, что для представления того количества информации, которое заключено в элементе множества X' , можно обойтись множеством меньшей чем N мощности, т.е. множество X с N элементами для представления того количества информации, которое заключено в элементе множества X' , избыточно.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — конечные множества мощностей $N_1, \dots, N_n$ соответственно. Рассмотрим декартово произведение этих множеств $X_1 \times \dots \times X_n$. Пусть из всего множества $X_1 \times \dots \times X_n$ для представления информации используются только последовательности множества $X^{(n)} \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$ мощности $|X^{(n)}| = P$.

Избыточность представления информации последовательностями множества $X^{(n)}$ определим по формуле

$$I_{X^{(n)}} = \frac{I(X^{(n)})_{\max} - I(X^{(n)})}{I(X^{(n)})} = \frac{I(X^{(n)})_{\max}}{I(X^{(n)})} - 1, \quad (9.17)$$

где $I(X^{(n)})_{\max}$ — максимальное количество информации, которое может содержать последовательность множества $X^{(n)}$; $I(X^{(n)})$ — количество информации, которое содержит последовательность $X^{(n)}$.

Выражение $I(X^{(n)})_{\max}$ определяется формулой (9.5). Подставив $I(X^{(n)})_{\max}$ из формулы (9.5) и $I(X^{(n)})$ из формулы (9.3) в выражение (9.17), получим

$$I_{X^{(n)}} = \frac{n \log N}{\log P} - 1, \quad (9.18)$$

где $N = \max_r N_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$).

Соотношение (9.18) справедливо при всех $P > 1$. Из него видно, что $0 \leq I_{X^{(n)}} < \infty$; $I_{X^{(n)}} = 0$ только тогда, когда $P = N^n$. Если $P < N^n$, то $I_{X^{(n)}} > 0$. Когда $I_{X^{(n)}} > 0$, это значит, что количество информации, заключенное в последовательности множества $X^{(n)}$,

может быть представлено последовательностью меньшей длины при допустимости всех возможных комбинаций элементов множеств $X_r = X$, где X — множество мощности N , т. е. представление информации при помощи последовательностей множества $X^{(n)}$ является избыточным для того количества информации, которое они несут.

Пусть X и Y — конечные множества мощностей $|X| = N$ и $|Y| = M$ и известно отображение $f: X \rightarrow Y$, причем соответствие, задающее это отображение, всюду определено, сюръективно и функционально.

Эффективность отображения множества X в множество Y будем характеризовать величиной $I_{(f, X)}$ — *избыточностью отображения информации* [15]. Определим избыточность отображения множества X в множество Y следующим образом:

$$I_{(f, X)} = \frac{I(Y, X)_{\max} - I(Y, X)}{I(Y, X)} = \frac{I(Y, X)_{\max}}{I(Y, X)} - 1, \quad (9.19)$$

где $I(Y, X)_{\max}$ — максимальное количество информации, которое в среднем может содержать элемент множества Y об элементе множества X ; $I(Y, X)$ — количество информации, которое в среднем содержит элемент множества Y об элементе множества X .

Формула (9.19) справедлива для $I(Y, X) > 0$.

Максимальное количество информации $I(Y, X)_{\max}$, которое может содержать элемент множества Y об элементе множества X , в силу того, что $I(Y, X)_{\max} = D(Y, X)_{\max}$, определяется формулой (8.14):

$$I(Y, X)_{\max} = \log N - \frac{1}{M} \log(N - M + 1). \quad (9.20)$$

Как показано в подразд. 8.4, это количество информации элемент множества Y содержит только тогда, когда $(M - 1)$ элементов множества X отображаются в $(M - 1)$ элементов множества Y , а остальные $(N - M + 1)$ элементов множества X отображаются в один элемент множества Y (см. рис. 8.2). Любое отображение $F: X \rightarrow Y$, обеспечивающее максимальное среднее относительное количество информации в элементе множества Y об элементе множества X , назовем *эффективным отображением* X в Y .

Среднее относительное количество информации, содержащееся в элементе множества Y об элементе множества X , определяется отображением $f: X \rightarrow Y$ и находится по формуле (9.9). Подставив $I(Y, X)_{\max}$ из соотношения (9.20) и $I(Y, X)$ из формулы (9.9) в формулу (9.19) и выполнив элементарные преобразования, получим

$$I_{(Y,X)} = \frac{\sum_{j=1}^M \log N_j - \log(N - M + 1)}{M \log N - \sum_{j=1}^M \log N_j}. \quad (9.21)$$

Формула (9.21) позволяет найти точное значение избыточности.

Избыточность отображения, найденная по формуле (9.19), показывает, во сколько раз потерянное за счет неэффективности отображения количество информации превышает то количество, которое содержится в элементе множества Y об элементе множе-

ства X . Из формулы (9.19) видно, что $0 \leq I_{(Y,X)} \leq \frac{I(Y,X)_{\max}}{I(Y,X)_{\min}} - 1$, где в случае, если отношение N/M нецелое, $I(Y,X)_{\min}$ определяется по формуле (8.17), а в случае если N/M целое — по формуле (8.25). Величина $I_{(Y,X)} = 0$ только при эффективном отображении множества X в множество Y .

Если $I_{(Y,X)} > 0$, то это означает, что для представления того количества информации, которое содержится в элементе множества Y об элементе множества X , можно обойтись множеством Y_1 меньшей чем M мощности, т.е. множество Y с M элементами для того количества информации, которое содержит в среднем один его элемент, является избыточным. Переход к множеству Y_1 выполняется в результате эффективного отображения множества X в новое множество с мощностью, меньшей M .

Пример 9.1. Найти избыточность отображения множества X мощности $N = 16$ в множество Y мощности $M = 8$, если отображение $f: X \rightarrow Y$ таково, что каждые два элемента множества X отображаются в один элемент множества Y .

При таком отображении множество X разбивается на восемь непересекающихся подмножеств $X_j \subset X$ ($j = 1, 2, \dots, 8$) с $N_j = N/M = 2$ элементами в каждом. Учитывая формулу (8.25) и положив $a = 2$, получим количество информации:

$$I(Y, X) = I(Y, X)_{\min} = D(Y, X)_{\min} = \log_2 M = \log_2 8 = 3 \text{ бит.}$$

Из соотношения (9.20) при $a = 2$ найдем максимальное количество информации:

$$I(Y, X)_{\max} = \log_2 16 - \frac{1}{8} \log_2 9 = 3,604 \text{ бит.}$$

Подставив значения относительных количеств информации из двух последних выражений в формулу (9.19), получим

$$I_{(Y,X)} = \frac{3,604}{3} - 1 = 0,201.$$

Этот результат показывает, что множество Y мощности $M = 8$ для того относительного количества информации, которое содержит каждый его элемент, является избыточным.

Легко проверить, что множеством Y_1 с минимальным числом элементов, для которого эффективное отображение дает еще $I(Y_1, X) > I(Y, X) = 3$ бит, будет множество мощности $M_1 = 4$. Для такого множества в соответствии с соотношением (9.20) имеем

$$I(Y_1, X)_{\max} = \log_2 16 - \frac{1}{4} \log_2 (16 - 4 + 1) = 4 - 0,925 = 3,075 \text{ бит.}$$

Из полученного результата следует, что $I(Y_1, X)_{\max} > I(Y, X)$.

Пусть имеется n конечных множеств X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с мощностями N_i . Рассмотрим декартово произведение множеств X_i : $X_1 \times \dots \times X_n$. Пусть также известно отображение $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, задаваемое соответствием между множествами $X_1 \times \dots \times X_n$ и Y , которое всюду определено, сюръективно и функционально.

Избыточность отображения декартова произведения $X_1 \times \dots \times X_n$ в множество Y определим по формуле

$$\begin{aligned} I_{(Y, X_1 \times \dots \times X_n)} &= \frac{I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\max} - I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)}{I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)} = \\ &= \frac{I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\max}}{I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)} - 1, \end{aligned} \quad (9.22)$$

где $I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\max}$ — максимальное количество информации, которое в среднем может содержать элемент множества Y об элементе декартова произведения; $I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)$ — количество информации, которое в среднем содержит элемент множества Y об элементе декартова произведения.

Формула (9.22) справедлива при $I(Y, X_1 \times \dots \times X_n) > 0$.

Максимальное количество информации $I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\max}$ содержится в элементе множества Y об элементе декартова произведения $X_1 \times \dots \times X_n$ только тогда, когда $(M - 1)$ элементов декартова произведения отображаются в $(M - 1)$ элементов множества Y , а остальные $(N_1 \dots N_n - M + 1)$ элементов множества $X_1 \times \dots \times X_n$ — в один элемент множества Y . При таком (эффективном) отображении декартова произведения в множество Y аналогично соотношению (9.20) будем иметь

$$I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\max} = \log N_1 \dots N_n - \frac{1}{M} \log(N_1 \dots N_n - M + 1). \quad (9.23)$$

Среднее относительное количество информации, содержащееся в элементе множества Y об элементе декартова произведения $X_1 \times \dots \times X_n$, определяется отображением $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ и находится из выражения (9.11).

Подставив $I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\max}$ из равенства (9.23) и $I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)$ из выражения (9.11) в формулу (9.22), получим следующую формулу:

$$I_{(Y, X_1 \times \dots \times X_n)} = \frac{\sum_{j=1}^M \log(N_1 \dots N_n)_j - \log(N_1 \dots N_n - M + 1)}{M \log N_1 \dots N_n - \sum_{j=1}^M \log(N_1 \dots N_n)_j}. \quad (9.24)$$

Число, определяемое формулой (9.24), удовлетворяет неравенству

$$0 \leq I_{(Y, X_1 \times \dots \times X_n)} \leq \frac{I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\max}}{I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\min}} - 1.$$

В случае если отношение $N_1 \dots N_n / M$ — целое, $I(Y, X_1 \times \dots \times X_n)_{\min} = \log M$ (по аналогии с формулой (8.25)); $I_{(Y, X_1 \times \dots \times X_n)} = 0$ только при эффективном отображении множества $X_1 \times \dots \times X_n$ в множество Y .

Если $I_{(Y, X_1 \times \dots \times X_n)} > 0$, то это означает, что для представления того количества информации, которое содержится в среднем в элементе множества Y об элементе множества $X_1 \times \dots \times X_n$, можно обойтись множеством Y_1 меньшей чем M мощности. Переход к множеству Y_1 выполняется путем эффективного отображения $X_1 \times \dots \times X_n$ в новое множество с мощностью, меньшей M .

Пусть $X, Y_1, \dots, Y_m$ — конечные множества с мощностями $|X| = N, |Y_1| = M_1, \dots, |Y_m| = M_m$. Пусть также известны отображения $f_k: X \rightarrow Y_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), задаваемые соответствиями, которые всюду определены, сюръективны и функциональны. Предположим, что все отображения f_k ($k = 1, 2, \dots, m$) различны.

Рассмотрим декартово произведение $Y_1 \times \dots \times Y_m$. Выделим в нем множество $Y^{(m)} \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_m$, включающее в себя только те последовательности из $Y_1 \times \dots \times Y_m$, которые состоят из образов элементов $x_i \in X$ ($i = 1, 2, \dots, N$) при последовательном применении отображений $f_k: X \rightarrow Y_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Мощность P подмножества $Y^{(m)}$ $1 \leq P \leq N$.

Избыточность представления информации последовательно-стями подмножества $Y^{(m)}$ определяется аналогично соотношению (9.18):

$$I_{Y^{(m)}} = \frac{m \log M}{\log P} - 1, \quad (9.25)$$

где $M = \max_k M_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$); $m \log M$ — максимальное количество информации, которое может содержать последовательность множества $Y^{(m)}$.

Наряду с избыточностью представления информации [см. формулу (9.25)] определим избыточность отображения множества X в подмножество $Y^{(m)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{(Y^{(m)}, X)} &= \frac{I(Y^{(m)}, X)_{\max} - I(Y^{(m)}, X)}{I(Y^{(m)}, X)} = \\ &= \frac{I(Y^{(m)}, X)_{\max}}{I(Y^{(m)}, X)} - 1, \end{aligned} \quad (9.26)$$

где $I(Y^{(m)}, X)_{\max}$ — максимальное относительное количество информации, которое в среднем может содержать последовательность подмножества $Y^{(m)}$ об элементе множества X ; $I(Y^{(m)}, X)$ — относительное количество информации, которое в среднем содержит последовательность подмножества $Y^{(m)}$ об элементе множества X .

Максимальное количество информации $I(Y^{(m)}, X)_{\max}$ будет содержаться в последовательности только при эффективном отображении множества X в множество Y_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Учитывая равенство (9.12) и формулу (8.14), найдем

$$\begin{aligned} I(Y^{(m)}, X)_{\max} &= D(Y^{(m)}, X)_{\max} = \\ &= m \log N - \sum_{k=1}^m \frac{1}{M_k} \log(N - M_k + 1). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Среднее относительное количество информации, содержащееся в последовательности подмножества $Y^{(m)}$ об элементе множества X , определяется выражением (9.13). Подставив $I(Y^{(m)}, X)_{\max}$ из формулы (9.27) и $I(Y^{(m)}, X)$ из выражения (9.13) в формулу (9.26), получим

$$\mathcal{I}_{(Y^{(m)}, X)} = \frac{\sum_{k=1}^m \frac{1}{M_k} \left[\sum_{j_k=1}^{M_k} \log N_{j_k} - \log(N - M_k + 1) \right]}{m \log N - \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{M_k} \sum_{j_k=1}^{M_k} \log N_{j_k} \right)}.$$

Избыточность, найденная по формуле (9.26), показывает, во сколько раз потерянное за счет неэффективности отображения количество информации превышает то, которое содержит последовательность.

Из формулы (9.26) видно, что

$$0 \leq \mathcal{I}_{(Y^{(m)}, X)} \leq \frac{I(Y^{(m)}, X)_{\max}}{I(Y^{(m)}, X)_{\min}} - 1.$$

Если $I(Y^{(m)}, X) > 0$, то это означает, что для представления того относительного количества информации, которое содержится в последовательности подмножества $Y^{(m)}$ об элементе множе-

ства X , можно обойтись меньшей длиной m_1 последовательности, если применить эффективные отображения множества X в множества Y_k ($k = 1, 2, \dots, m$).

Контрольные вопросы

1. Как определяется количество информации, содержащееся в последовательности элементов n конечных множеств?
2. Какой смысл имеет относительное количество информации в элементе конечного множества?
3. Какой интервал занимают значения относительного количества информации в последовательности элементов m конечных множеств?
4. Какие два вида избыточности рассматриваются в комбинаторной теории информации?
5. Что показывает избыточность представления информации в комбинаторной теории?
6. Что характеризует избыточность отображения информации в комбинаторной теории?
7. Какое отображение $F: X \rightarrow Y$ называется эффективным?
8. Что показывает избыточность отображения множества X в подмножество $Y^{(m)}$?

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ИСТОЧНИКИ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

10.1. Детерминированные дискретные источники

Любой объект, действие которого приводит к появлению последовательности дискретных элементов, называется *дискретным источником*. В комбинаторной теории информации изучаются источники, появление элементов на выходе которых не носит случайного характера [16]. Источники с неслучайным характером выдачи элементов называются *детерминированными дискретными источниками* (ДДИ).

Пусть l -й ($l = 1, 2, \dots$) элемент x_{li} , выдаваемый источником, принадлежит множеству $X_l = \{x_{li}\}$ ($i_l = 1, 2, \dots, |X_l| = N_l; N_l > 1$), т.е. *выходному алфавиту ДДИ при выдаче l -го элемента последовательности*, а $\Lambda_l = \{\lambda_{k_l}\}$ ($k_l = 1, 2, \dots, |\Lambda_l| = K_l; K_l > 1$) — множество некоторых альтернативных условий, выполнение которых проверяется перед выдачей источником очередного элемента. Обозначим через $X^{(l-1)} \subseteq X_1 \times \dots \times X_{l-1}$ множество различных последовательностей длины $l-1$ ($l = 1, 2, \dots$), которые могут появиться на выходе ДДИ.

Детерминированный дискретный источник считается заданным, если известны множества X_l ($l = 1, 2, \dots$) выходных его элементов, множества альтернативных условий Λ_l и отображения φ_l ($l = 1, 2, \dots$) декартовых произведений $X^{(l-1)} \times \Lambda_l$ в множества выходных его элементов X_l :

$$\varphi_l : X^{(l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X_l \quad (10.1)$$

(для $l = 1$ принимается $X^{(0)} = \emptyset$, поэтому отображение φ_1 имеет следующий вид: $\varphi_1: \Lambda_1 \rightarrow X_1$).

Будем полагать, что $\forall l \geq 1$ соответствие между $X^{(l-1)} \times \Lambda_l$ и X_l , задающее отображение φ_l , всюду определено, сюръективно и функционально. Детерминированный дискретный источник, у которого l -й выдаваемый элемент определяется отображением (10.1), представляет собой *нерегулярный ДДИ с бесконечной памятью*.

Детерминированный дискретный источник является *нерегулярным с конечной памятью*, если для него

$$\varphi_l : X^{(l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X_l = \varphi_{l,n} : X^{(l-n,l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X_l, \quad (10.2)$$

где $\varphi_{l,n}$ — отображение декартова произведения $X^{(l-n,l-1)} \times \Lambda_l$ в множество X_l , зависит от l ; $X^{(l-n,l-1)} \subseteq X_{l-n} \times \dots \times X_{l-1}$ — множество комбинаций длины n элементов ($n \leq l-1$), которые могут стоять в отрезке последовательности, начинающемся с $(l-n)$ -го элемента, до $(l-1)$ -го.

Наряду с источниками, определяемыми формулами (10.1) и (10.2), рассмотрим более простые ДДИ. Если у ДДИ с конечной памятью $\forall l = 1, 2, \dots X_l = X = \{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $\Lambda_l = \Lambda = (\lambda_k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) и значение элемента x_{i_l} не зависит от номера l ($l > n$), который он занимает в выходной последовательности, а определяется только n предшествующими ему элементами и выполнявшимся условием, т.е. если выполняется условие

$$\varphi_{l,n} : X^{(l-n,l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X_l = \varphi_n : X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X, \quad (10.3)$$

то такой ДДИ назовем *невырожденным регулярным с конечной памятью*. Регулярный ДДИ с конечной памятью удобно представлять ориентированным графом отображения.

Из отображений (10.1) и (10.3) в качестве частных случаев могут быть получены отображения, описывающие другие простые ДДИ. Так, если в отображении (10.3) мощность множества альтернативных условий $K = 1$, то оно вырождается в отображение:

$$\varphi_n : X^{(n)} \rightarrow X. \quad (10.4)$$

Источник, определяемый отображением (10.4), назовем *вырожденным регулярным ДДИ с конечной памятью*.

Если для источника отображение

$$\varphi_l : X^{(l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X_l = \varphi_l : \Lambda_l \rightarrow X_l, \quad (10.5)$$

т.е. если значение l -го элемента ($l = 1, 2, \dots$), выдаваемого источником, не зависит от ранее выданных им элементов, а определяется только его номером l и выполнявшимся условием, то такой ДДИ называется *нерегулярным без памяти*.

При $X_l = X$ и $\Lambda_l = \Lambda \forall l = 1, 2, \dots$ источник, задаваемый правой частью равенства (10.5), представляет собой *нерегулярный ДДИ без памяти с регулярными входом и выходом*.

Детерминированный дискретный источник без памяти является *периодическим*, если на всех местах $l = v(s-1) + m$ выдаваемой им последовательности (где $v < \infty$ — период, выраженный в числе элементов, $s = 1, 2, \dots$ — номер периода, $m = 1, 2, \dots, v$ — номер элемента в периоде) элемент определяется отображением

$$\varphi_l : \Lambda_l \rightarrow X_l = \Psi_m : \Lambda_m \rightarrow X_m, \quad (10.6)$$

где Ψ_m — отображение множества условий в выходной алфавит источника на m -м месте периода; Λ_m — множество альтернативных условий, проверяемых перед выдачей источником элемента на m -м месте периода; X_m — выходной алфавит ДДИ на m -м месте периода.

При некоторых m отображения Ψ_m могут совпадать.

Периодический детерминированный дискретный источник, представляемый отображением (10.6), удобно задавать таблицей отображений, содержащей две строки, в первой из которых перечисляются номера элементов в периоде, во второй — соответствующие им отображения Ψ_m . Число столбцов этой таблицы равно периоду v .

Детерминированный дискретный источник без памяти, для которого $\forall l = 1, 2, \dots$

$$\varphi_l : \Lambda_l \rightarrow X_l = \Psi : \Lambda \rightarrow X \quad (10.7)$$

(где Ψ — отображение, не зависящее от l ; $K > 1$), назовем *вырожденным регулярным ДДИ без памяти*.

Если в отображении, стоящем в правой части формулы (10.7), множество условий $\Lambda = \Lambda'$, где Λ' — множество мощности $|\Lambda'| = 1$, т. е. когда источник характеризуется отображением

$$\Psi : \Lambda \rightarrow X = \Psi' : \Lambda' \rightarrow X, \quad (10.8)$$

то он представляет собой *вырожденный регулярный ДДИ без памяти*.

10.2. Математические модели детерминированных дискретных источников

Адекватными математическими моделями ДДИ являются различные автоматы, которые легко получить, если множество Λ_l ($l = 1, 2, \dots$) интерпретировать как входной алфавит автомата при выдаче им l -го элемента, множество X_l — как выходной алфавит, множество $X^{(l-1)}$ — как алфавит его состояний, отображение φ_l — как функцию выходов, а изменение памяти источника при выдаче им очередного элемента (для источников с памятью) — как функцию переходов F_l .

Охарактеризуем подробнее автоматы, являющиеся математическими моделями ДДИ (рис. 10.1).

Математической моделью ДДИ с бесконечной памятью является *нерегулярный автомат с бесконечной памятью* $I_l = \{\Lambda_l, X^{(l-1)}, X_l, F_l, \varphi_l\}$ ($l = 1, 2, \dots$) (рис. 10.1, а) с конечными, но нерегулярными входными Λ_l и выходными X_l алфавитами и бесконечным, но счетным множеством внутренних состояний $X^{(l-1)}$; функции

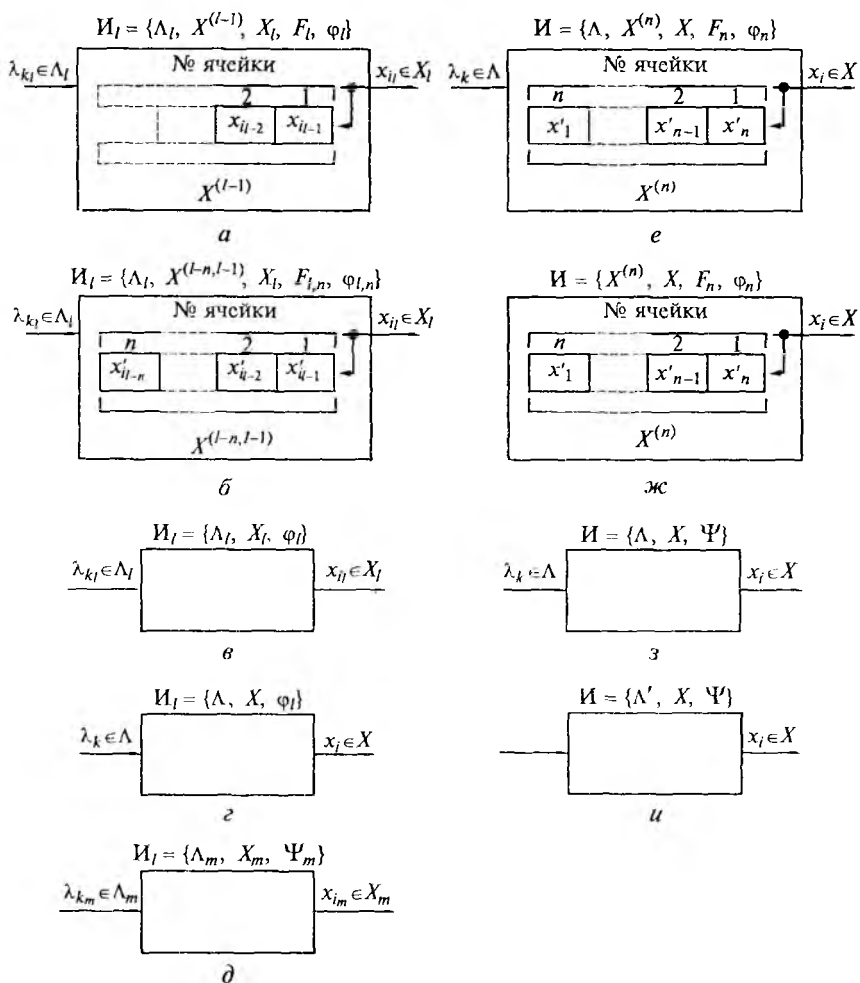


Рис. 10.1. Автоматы, являющиеся математическими моделями ДДИ:

a — нерегулярный автомат с бесконечной памятью; *б* — нерегулярный конечный автомат; *в* — нерегулярный автомат без памяти; *г* — нерегулярный автомат без памяти с регулярными входным и выходным алфавитами; *д* — автомат без памяти с периодическими функциями выходов; *е* — конечный автомат; *ж* — конечный автономный автомат; *з* — регулярный автомат без памяти; *и* — автономный автомат без памяти

переходов автомата $F_l: X^{(l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X^{(l)}$ и функции выходов $\varphi_l: X^{(l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X_l$ также нерегулярны.

Нерегулярный ДДИ с конечной памятью своей математической моделью имеет *нерегулярный конечный автомат* $I_l = \{\Lambda_l, X^{(l-n, l-1)}, X_l, F_{l,n}, \varphi_{l,n}\}$ ($l = 1, 2, \dots$) (рис. 10.1, б) с конечными,

по нерегулярными входными Λ_l и выходными X_l алфавитами и конечным, но нерегулярным множеством внутренних состояний $X^{(l-n, l-1)}$; функции переходов $F_{l,n}: X^{(l-n, l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X^{(l-n+1, l)}$ и функции выходов $\varphi_{l,n}: X^{(l-n, l-1)} \times \Lambda_l \rightarrow X_l$ автомата также нерегулярны.

В качестве математической модели нерегулярного ДДИ без памяти может служить *нерегулярный автомат без памяти* $\Pi_l = \{\Lambda_l, X_l, \varphi_l\}$ ($l = 1, 2, \dots$) (рис. 10.1, в), представляющий собой конечный автомат с одним внутренним состоянием. Состояние автомата не меняется, поэтому функционирование его задается только функциями выходов $\varphi_l: \Lambda_l \rightarrow X_l$, зависящими от l .

Математической моделью нерегулярного ДДИ без памяти с регулярными входом и выходом является *нерегулярный автомат без памяти* $\Pi_l = \{\Lambda, X, \varphi_l\}$ ($l = 1, 2, \dots$) с регулярными входным и выходным алфавитами, но нерегулярными функциями выходов $\varphi_l: \Lambda \rightarrow X$ (рис. 10.1, г).

Периодический ДДИ в качестве математической модели имеет *автомат без памяти* $\Pi_l = \{\Lambda_m, X_m, \Psi_m\}$ ($l = 1, 2, \dots$) с периодическими (периодом v) функциями выходов $\varphi_l: \Lambda_l \rightarrow X_l = \Psi_m: \Lambda_m \rightarrow X_m$, где $m = 1, 2, \dots, v$ — номер элемента в периоде (рис. 10.1, д). Числа l , v и m связаны равенством $l = v(s-1) + m$ ($s = 1, 2, \dots$ — номер периода).

Для невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью математической моделью служит *конечный автомат* $\Pi = \{\Lambda, X^{(n)}, X, F_n, \varphi_n\}$ (рис. 10.1, е) с конечными и регулярными алфавитами: входным Λ , выходным X и состоянием $X^{(n)}$ и с регулярными функциями: переходов $F_n: X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X^{(n)}$ и выходов $\varphi_n: X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X$. Суть отображения F_n состоит в сдвиге последовательности, хранящейся в n ячейках памяти автомата, приводящем к потере элемента, хранившегося в n -й ячейке, и записи в первую ячейку очередного выдаваемого автоматом элемента.

Математической моделью вырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью служит *конечный автономный автомат* $\Pi = \{X^{(n)}, X, F_n, \varphi_n\}$ (рис. 10.1, ж), рассматриваемый обычно как автомат без входов, с функциями переходов и выходов: $F_n: X^{(n)} \rightarrow X^{(n)}$, $\varphi_n: X^{(n)} \rightarrow X$.

Автономный автомат всегда выдает единственную последовательность элементов, которая является периодической (в общем случае с предпериодом), причем период данной последовательности не превышает числа состояний автомата [6]. В силу указанного свойства вырожденные регулярные ДДИ с конечной памятью здесь интереса не представляют.

Для невырожденного регулярного ДДИ без памяти математическая модель представляет собой *автомат без памяти* $\Pi = \{\Lambda, X, \Psi\}$ с регулярными входным, выходным алфавитами и неизменной функцией выходов $\Psi: \Lambda \rightarrow X$ (рис. 10.1, з).

Математической моделью вырожденного регулярного ДДИ без памяти является *автономный автомат без памяти* $\Pi = \{\Lambda', X, \Psi\}$ с функцией выходов $\Psi: \Lambda' \rightarrow X$ (см. рис. 10.1, и). Поскольку у этого автомата всего одно внутреннее состояние, то на каждом месте единственной последовательности, которую он способен выдавать, стоит один и тот же элемент $x_i \in X$. В силу этого вырожденные регулярные ДДИ без памяти здесь также не представляют интереса.

Знакомство с автоматами, представляющими собой математические модели ДДИ, показывает, что из девяти выделенных типов источников четыре — нерегулярные, два — регулярные, один — периодический, обладающий свойствами как регулярного, так и нерегулярного источника, и два — вырожденные, т.е. обеспечивающие выдачу только единственной последовательности элементов.

Для более четкого представления принципа функционирования любого ДДИ рассмотрим работу невырожденного регулярного источника с конечной памятью по его модели. Способ действия такого источника задается отображением (10.3). Автомат, представляющий указанный источник (см. рис. 10.1, е), имеет память из n ячеек, которая перед началом работы пуста. Это исходное состояние памяти обозначим $\emptyset \dots \emptyset \emptyset$.

Пусть в некоторый момент времени проверяется, какое из условий $\lambda_{k_i} \in \Lambda$ ($k_i = 1, 2, \dots, K$) выполняется. В соответствии с отображением $\varphi_n: X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X$ автомат выдает первый элемент $x_{i_1} \in X$ ($i_1 = 1, 2, \dots, N$), который одновременно с появлением на выходе записывается в первую ячейку его памяти, в результате чего память переходит в состояние $\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}$. Множество состояний вида $\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}$ обозначим $X_1^{(n)}$.

Введение в рассмотрение для автомата исходного состояния памяти $\emptyset \dots \emptyset \emptyset$ и ряда ее промежуточных состояний $\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}$ и т.д., которые она проходит до заполнения всех n ее ячеек, требует уточнения представления о множестве $X^{(n)}$. В дальнейшем под множеством $X^{(n)}$ будем понимать всю совокупность допустимых состояний памяти автомата, включая состояния $\emptyset \dots \emptyset \emptyset$, $\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}$ и т.д.

В момент поступления на вход автомата условия λ_{k_i} его память находится в состоянии $\emptyset \dots \emptyset \emptyset$, поэтому при этом состоянии отображение φ_n представляет собой отображение

$$\varphi_n: X_{\emptyset \dots \emptyset}^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X_{|\emptyset \dots \emptyset} = \varphi_{\emptyset \dots \emptyset}: \Lambda \rightarrow X_{|\emptyset \dots \emptyset}, \quad (10.9)$$

где $X_{\emptyset \dots \emptyset}^{(n)}$ — подмножество множества $X^{(n)}$, содержащее только элемент $\emptyset \dots \emptyset \emptyset$; $X_{|\emptyset \dots \emptyset}$ — выходной алфавит автомата при состоянии его памяти $\emptyset \dots \emptyset \emptyset$, $X_{|\emptyset \dots \emptyset} = X$.

Отображение $\varphi_{\emptyset \dots \emptyset}: \Lambda \rightarrow X_{|\emptyset \dots \emptyset}$ назовем *частным отображением* отображения $\varphi_n: X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X$.

При поступлении на вход автомата второго условия $\lambda_{k_2} \in \Lambda$ ($k_2 = 1, 2, \dots, K$) он выдает второй элемент $x_{i_2} \in X$ ($i_2 = 1, 2, \dots, N$), определяемый тем же отображением $\varphi_n: X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X$. Но в силу того, что в первой ячейке памяти автомата содержится конкретный элемент x_{i_1} , отображение φ_n берется только на подмножестве $X_{\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}^{(n)} \times \Lambda \subset X^{(n)} \times \Lambda$, где $X_{\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}^{(n)}$ — подмножество множества $X^{(n)}$, содержащее только элемент $\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}$. Такое отображение представляет собой отображение

$$\varphi_n: X_{\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X_{2|\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}} = \varphi_{\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}: \Lambda \rightarrow X_{2|\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}, \quad (10.10)$$

где $X_{2|\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}} \subseteq X$ и $\bigcup_{X_1^{(n)}} X_{2|\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}} = X$.

Отображение $\varphi_{\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}: \Lambda \rightarrow X_{2|\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}$ также является частным отображением отображения $\varphi_n: X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X$, а множество $X_{2|\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}$ — выходным алфавитом автомата при состоянии его памяти $\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}$. У отображения φ_n $|X_1^{(n)}| = N$ частных отображений $\varphi_{\emptyset \dots \emptyset x_{i_1}}$ некоторые из которых могут совпадать. Одновременно с появлением элемента x_{i_2} на выходе автомата в его памяти элемент x_{i_1} сдвигается во вторую ячейку, а в первую ячейку записывается элемент x_{i_2} , в результате чего память переходит в состояние $\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}$. Множество состояний вида $\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}$ обозначим $X_2^{(n)}$.

При поступлении на вход автомата третьего условия $\lambda_{k_3} \in \Lambda$ ($k_3 = 1, 2, \dots, K$) он выдает третий элемент $x_{i_3} \in X$ ($i_3 = 1, 2, \dots, N$), определяемый отображением $\varphi_n: X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X$. Как и при выдаче второго элемента, ввиду того, что в памяти автомата содержатся элементы x_{i_1}, x_{i_2} , отображение φ_n берется только на подмножестве $X_{\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}}^{(n)} \times \Lambda \subset X^{(n)} \times \Lambda$, где $X_{\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}}^{(n)}$ — подмножество множества $X^{(n)}$, содержащее только элемент $\emptyset \dots \emptyset x_{i_1} x_{i_2}$. Это отображение представляет собой частное отображение

$$\varphi_n: X_{\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}}^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X_{3|\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}} = \varphi_{\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}}: \Lambda \rightarrow X_{3|\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}}, \quad (10.11)$$

где $X_{3|\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}}$ — выходной алфавит автомата при состоянии его памяти $\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}$, $X_{3|\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}} \subseteq X$ и $\bigcup_{X_2^{(n)}} X_{3|\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}} = X$.

У отображения φ_n $|X_2^{(n)}| \leq N^2$ частных отображений $\varphi_{\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2}}$. С появлением на выходе автомата элемента x_{i_3} в его памяти элемент x_{i_1} сдвигается в третью ячейку, элемент x_{i_2} — во вторую, элемент x_{i_3} записывается в первую ячейку, и вся память переходит в состояние $\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$. Множество состояний вида $\emptyset \dots x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$ обозначим $X_3^{(n)}$.

После выдачи n -го элемента вся память автомата будет заполнена и значение каждого последующего элемента будет определяться подаваемым на вход автомата условием $\lambda_{k_l} \in \Lambda$ ($k_l = 1, 2, \dots, K$; $l > n$) и состоянием $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ его памяти ($x'_1, x'_2, \dots, x'_n \in X$). Множество возможных состояний памяти $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ обозначим $X_n^{(n)}$.

Отображение, определяющее выходной элемент автомата с номером $l > n$, является частным отображением вида

$$\varphi_n : X_{x'_1 \dots x'_n}^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X_{n+1|x'_1 \dots x'_n} = \Phi_{x'_1 \dots x'_n} : \Lambda \rightarrow X_{n+1|x'_1 \dots x'_n},$$

где $X_{x'_1 \dots x'_n}^{(n)}$ — подмножество множества $X^{(n)}$, содержащее только элемент $x'_1 \dots x'_n$; $X_{n+1|x'_1 \dots x'_n}$ — выходной алфавит автомата при состоянии его памяти $x'_1 \dots x'_n$, $X_{n+1|x'_1 \dots x'_n}^{(n)} \subseteq X$ и $\bigcup_{x'_1 \dots x'_n} X_{n+1|x'_1 \dots x'_n} = X$.

Таких частных отображений у отображения $\varphi_n : X^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X$ всего $|X_n^{(n)}| \leq N^n$.

Память рассматриваемого автомата не может находиться в состояниях, характеризующихся тем, что между двумя элементами, принадлежащими множеству X , расположены один или несколько элементов $\emptyset$. Такие состояния памяти для автомата являются запрещенными.

Множество состояний памяти автомата вида $\emptyset \dots x_{i_n} \dots x_n$ ($\alpha = 0, 1, \dots, n$) в общем случае обозначим $X_\alpha^{(n)}$. Часть отображения φ_n , представляющую собой отображение $X_\alpha^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X$, обозначим $\varphi_{n,\alpha}$:

$$\varphi_{n,\alpha} = \varphi_n : X_\alpha^{(n)} \times \Lambda \rightarrow X.$$

Использование введенных понятий и обозначений рассмотрим на примерах.

Пример 10.1. Пусть $X = \{0, 1\}$ — выходной алфавит невырожденного регулярного ДДИ с памятью на два элемента, а $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ — множество проверяемых альтернативных условий. Построить граф последовательностей, которые может выдавать источник, если он задан отображением φ_2 , представленным графом, показанным на рис. 10.2, а.

Графы частных отображений $\varphi_{\emptyset\emptyset}$, $\varphi_{\emptyset x_1}$ и $\varphi_{x'_1 x'_2}$ ($x_i, x'_1, x'_2 \in X$) и графы отображений $\varphi_2 : X_\alpha^{(2)} \times \Lambda \rightarrow X$ ($\alpha = 0, 1, 2$) приведены соответственно на рис. 10.2, б, в. Граф возможных на выходе источника последовательностей изображен на рис. 10.2, г. Ребра графа соответствуют выполнявшимся условиям, вершины — последовательностям элементов, выдаваемых источником, порядок вершин — номеру выдаваемого элемента (длине последовательности). На рис. 10.2, г показана часть графа до вершин 5-го порядка.

Пример 10.2. Пусть периодический ДДИ имеет период $v = 3$ и задает табл. 10.1 отображений Ψ_m ($m = 1, 2, 3$; $\Psi_1 = \Psi_3$), графы которых приведены на рис. 10.3, а. Построить граф последовательностей, которые может выдавать источник.

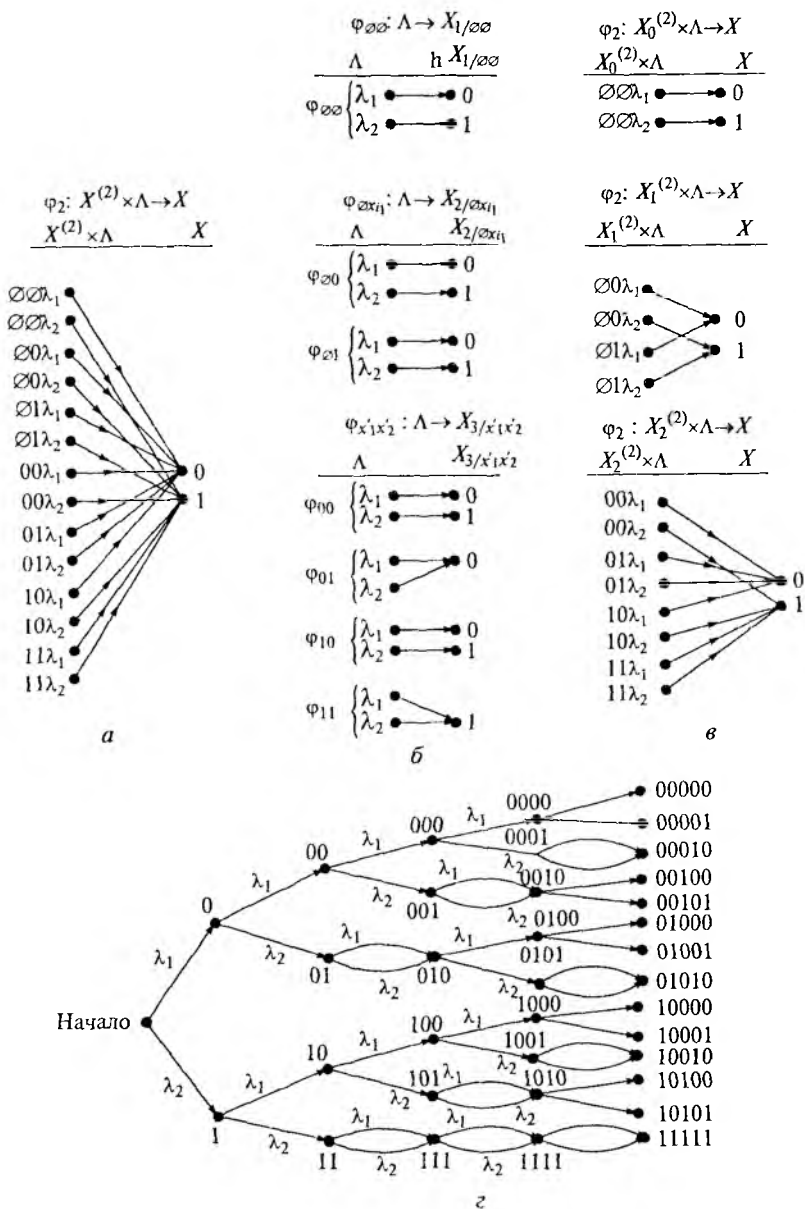


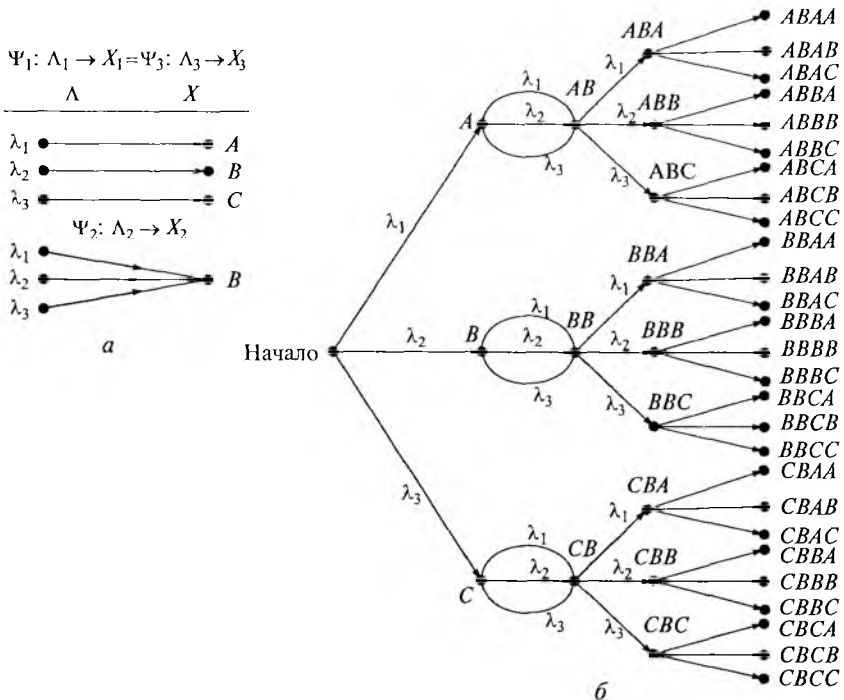
Рис. 10.2. Невырожденный регулярный ДДИ с памятью на два элемента: а — граф отображения φ_2 ; б — графы частных отображений $\varphi_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\lambda_1}$, $\varphi_{\alpha\lambda_2}$; в — графы отображений $\varphi_2: X_{\alpha}^{(2)} \times \Lambda \rightarrow X$ ($\alpha = 0, 1, 2$); г — граф выходных последовательностей

Таблица 10.1

m	1	2	3
Ψ_m	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3

Граф возможных на выходе источника последовательностей показан на рис. 10.3, б. Как и в примере 10.1, ребра графа соответствуют выполнившимся условиям, вершины — последовательностям элементов, выдаваемым источником, порядок вершин — номеру выдаваемого элемента (длине последовательности). На рис. 10.3, б показана часть графа до вершин 4-го порядка.

Пример 10.3. Пусть $X = \{0, 1\}$ — выходной алфавит невырожденного регулярного ДДИ без памяти, а $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ — множество альтернативных условий. Построить граф последовательностей, которые могут появиться на выходе источника, если отображение Ψ задано графом, изображенным на рис. 10.4, а.

Рис. 10.3. Периодический ДДИ с периодом $v = 3$:

а — графы отображений Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ; б — граф выходных последовательностей

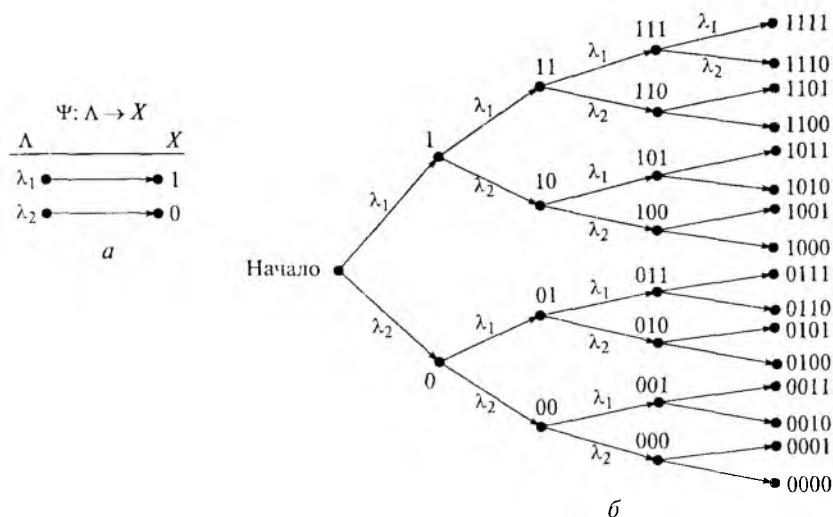


Рис. 10.4. Невырожденный регулярный ДДИ без памяти:
a — граф отображения Ψ ; *b* — граф выходных последовательностей

Граф последовательностей, возможных на выходе источника, приведен на рис. 10.4, *b*. На этом рисунке показана часть графа до вершин 4-го порядка.

Контрольные вопросы

1. Какие дискретные источники изучаются в комбинаторной теории информации?
2. Какие детерминированные дискретные источники рассматриваются в комбинаторной теории информации?
3. Что представляют собой математические модели детерминированных дискретных источников?
4. Что является математической моделью невырожденного регулярного детерминированного дискретного источника с конечной памятью?
5. Что представляет собой математическая модель периодического детерминированного дискретного источника?
6. Какая математическая модель соответствует невырожденному регулярному детерминированному дискретному источнику без памяти?
7. Что называется частным отображением?

ИНФОРМАЦИОННАЯ СПОСОБНОСТЬ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ДИСКРЕТНОГО ИСТОЧНИКА

11.1. Информационная способность детерминированных дискретных источников

Одной из основных характеристик ДДИ является их информационная способность. Рассмотрим ее для трех важнейших типов ДДИ: невырожденного регулярного с конечной памятью, периодического и невырожденного регулярного без памяти.

Пусть l — длина выходной последовательности ДДИ, выраженная в числе элементов, а $X^{(l)}$ — множество различных последовательностей длины l , которые могут появиться на выходе ДДИ. Обозначим через P_l мощность множества $X^{(l)}$. Информационная способность ДДИ представляет собой его способность выдавать разные выходные последовательности и характеризуется функцией

$$P_l = f(l). \quad (11.1)$$

Выясним, при каких условиях с ростом l число возможных выходных последовательностей ДДИ в формуле (11.1) растет.

Для упрощения рассуждений введем два понятия. Отображение $\varphi: A \rightarrow B$, в котором соответствие между конечными множествами A и B всюду определено и $|A| > 1$, $|B| = 1$, назовем *тривиальным*, а отображение, не являющееся тривиальным, — *нетривиальным*.

Информационная способность невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью устанавливается следующими тремя теоремами [17], приводимыми без доказательств.

Теорема 11.1. Если $\forall \alpha = 1, \dots, n$ все частные отображения $\varphi_{\emptyset \dots x_{\alpha-1} \dots x_n} : \Lambda \rightarrow X_{\alpha+1|\emptyset \dots x_{\alpha-1} \dots x_n}$, задающие регулярный ДДИ с конечной памятью, являются тривиальными, то $\forall l \geq 1$ число выходных последовательностей источника $P_l = N$.

Теорема 11.2. Если из частных отображений $\varphi_{\emptyset \dots x_{\alpha-1} \dots x_n} : \Lambda \rightarrow X_{\alpha+1|\emptyset \dots x_{\alpha-1} \dots x_n}$ ($\alpha = 1, \dots, n-1$), задающих регулярный ДДИ с памятью, хотя бы одно нетривиальное, а все частные отображения $\varphi_{x'_1 \dots x'_n} : \Lambda \rightarrow X_{n+1|x'_1 \dots x'_n}$ — тривиальные, то при $1 < l \leq n-1$ число выходных последовательностей источника $N \leq P_l \leq N^l$, а $\forall \alpha \geq n$ $N < P_l \leq N^n$, причем $\forall \alpha > n$ $P_l = \text{const}$.

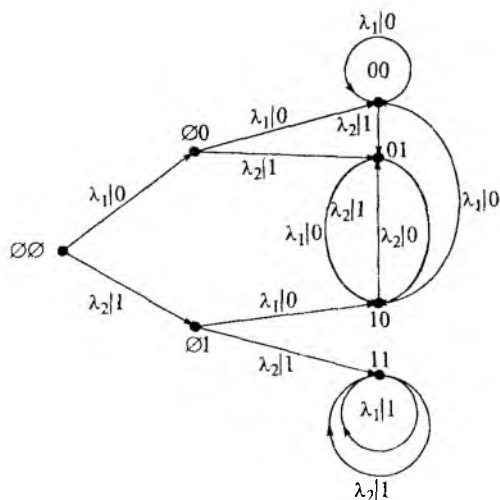


Рис. 11.1. Граф переходов автомата, представляющего регулярный ДДИ с памятью на два элемента, рассмотренный в примере 10.1

Для понимания следующей теоремы рассмотрим конечный ориентированный граф, в котором каждая вершина соответствует одному из состояний памяти конечного автомата, представляющего собой невырожденный регулярный ДДИ с конечной памятью, а каждое ребро — переходу автомата из одного состояния в другое при подаче входной буквы $\lambda_{k_i} \in \Lambda$ ($k_i = 1, 2, \dots, K$; $K > 1$). Ориентация ребер — от предыдущего состояния к последующему. Указанный граф называется *графом переходов автомата*. На рис. 11.1 изображен граф переходов автомата, являющегося математической моделью невырожденного регулярного ДДИ с памятью на два элемента, рассмотренного в примере 10.1.

В графе переходов автомата, представляющего собой невырожденный регулярный ДДИ с памятью, можно выделить две части: часть, соответствующую отображениям $\varphi_{n,0}, \varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,n-1}$, которая является древовидным графом, и часть, соответствующую отображению $\varphi_{n,n}$, которая в силу неограниченной длины выдаваемых автоматом последовательностей и конечного числа его состояний должна содержать не менее одного цикла. Так, на рис. 11.1 часть графа, соответствующая отображениям $\varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}$ ($n = 2$), содержит вершины $\emptyset\emptyset, \emptyset0, \emptyset1, 00, 01, 10, 11$, а часть графа, представляющая отображение $\varphi_{2,2}$, — вершины $00, 01, 10, 11$. Вторая часть графа содержит три цикла длины 1, два цикла длины 2, два цикла длины 3 и два цикла длины 4.

Среди вершин графов переходов автоматов встречаются вершины трех типов. Вершина, в которую входит одно или несколько ребер, идущих от других вершин, а все выходящие ребра образу-

ют циклы длины 1, т.е. входят в нее же, является *тупиковой*. Вершина, в которую входит одно или несколько ребер, идущих от других вершин, и ни одно из выходящих ребер не образует цикла длины 1, называется *транзитной*. Вершина, в которую входит одно или несколько ребер, идущих от других вершин, а из выходящих ребер хотя бы одно образует цикл длины 1 и хотя бы одно входит в другую вершину, — *транзитно-тупиковая*. Например, в графе переходов на рис. 11.1 вершина 11 является тупиковой, вершины $\emptyset 0$, $\emptyset 1$, 01 , 10 — транзитными, а вершина 00 — транзитно-тупиковой.

Теорема 11.3 (основная теорема для ДДИ). Для того чтобы при $l \rightarrow \infty$ число выходных последовательностей регулярного ДДИ с памятью $P_l \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы в графе переходов автомата, представляющего данный источник:

- 1) содержался хотя бы один цикл длины $L \geq 2$;
- 2) хотя бы одно из частных отображений $\varphi_{x'_1 \dots x'_n}$, соответствующих вершинам цикла, было нетривиальным;
- 3) хотя бы одна из вершин цикла была достижима из начальной вершины графа переходов.

Теорема 11.3 для невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью устанавливает условия роста P_l при $l \rightarrow \infty$. Однако вид функции $P_l = f(l)$ существенно зависит от частных отображений $\varphi_{x_1 \dots x_n} : \Lambda \rightarrow X_{\alpha+1 | x_1 \dots x_n x_{n+1}}$ ($\alpha = 1, \dots, n$). Покажем это на примерах.

Пример 11.1. Пусть невырожденный регулярный ДДИ с памятью на два элемента и теми же алфавитом X и множеством условий Λ , что и у источника, рассмотренного в примере 10.1, задан частными отображениями $\varphi_{\emptyset \emptyset}$, $\varphi_{\emptyset x_1}$, $\varphi_{x_1 x_2}$, графы которых показаны на рис. 11.2, а. Это приводит к другому графу переходов представляющего его автомата (рис. 11.2, б) и графу выходных последовательностей (рис. 11.2, в).

Для ДДИ примера 10.1 $P_1 = 2$, $P_2 = 4$, $P_3 = 6$ и $\forall l \geq 4$

$$P_l = P_{l-1} + P_{l-2} - 1. \quad (11.2)$$

Для настоящего примера $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ и $\forall l \geq 3$

$$P_l = 2 + l. \quad (11.3)$$

Как видно из формул (11.2), (11.3), вычисление P_l не вызывает затруднений.

Пример 11.2. Пусть невырожденный регулярный ДДИ с памятью на два элемента и теми же алфавитом X и множеством условий Λ , что и у источника, рассмотренного в примере 11.1, задан частными отображениями $\varphi_{\emptyset \emptyset}$, $\varphi_{\emptyset x_1}$, $\varphi_{x_1 x_2}$, графы которых приведены на рис. 11.3, а.

Сопоставление частных отображений рис. 10.2, б и 11.3, а показывает, что у второго источника по сравнению с первым изменены местами частные отображения φ_{00} и φ_{01} . Других отличий у источников нет. Граф переходов автомата, представляющего второй источник, и граф его выходных последовательностей изображены соответственно на рис. 11.3, б и 11.3, в.

Для ДДИ настоящего примера $\forall l \geq 1$

$$P_l = 2l. \quad (11.4)$$

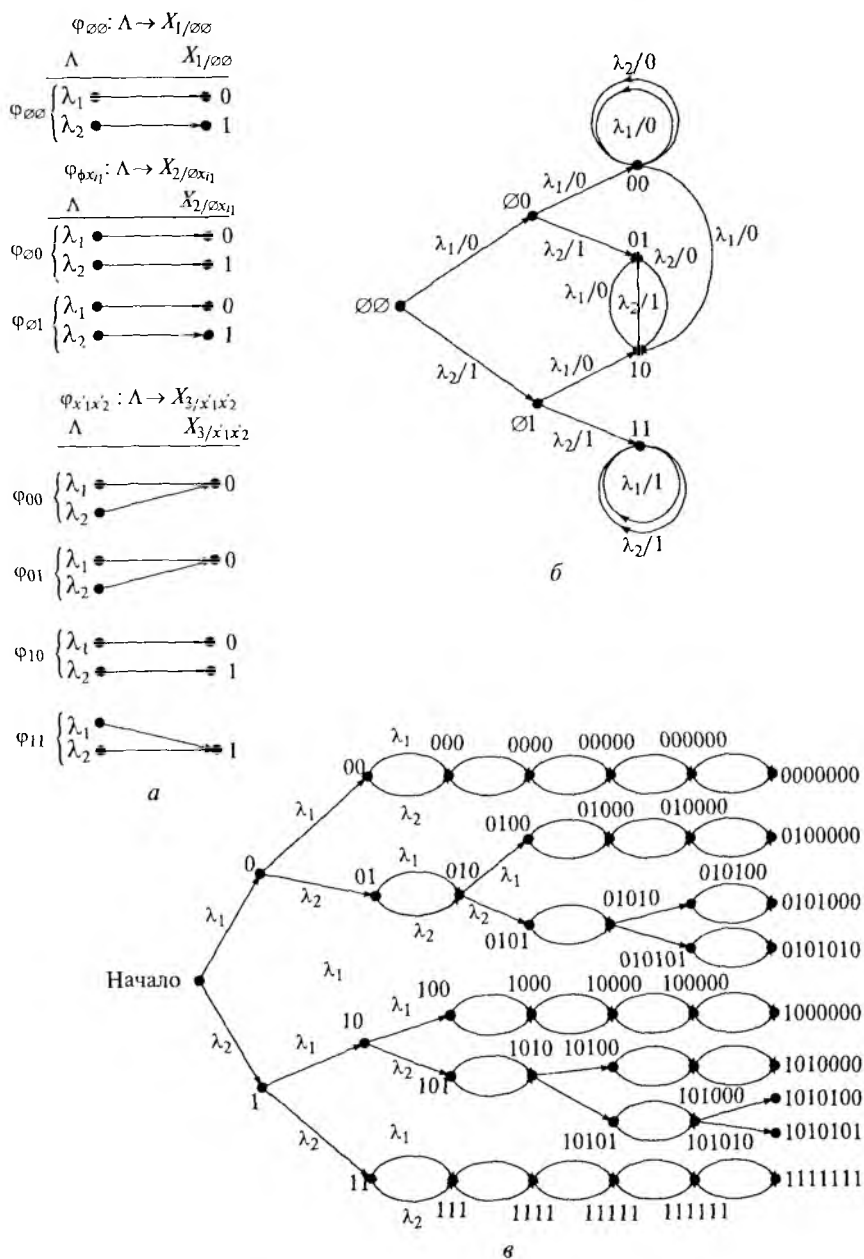
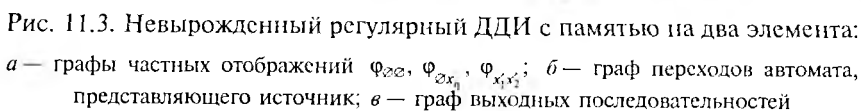


Рис. 11.2. Невырожденный регулярный ДДИ с памятью на два элемента:

a — графы частных отображений $\varphi_{\emptyset\emptyset}$, $\varphi_{\emptyset x_{i1}}$, $\varphi_{x'1x'2}$; δ — граф переходов автомата, представляющего источник; ϵ — граф выходных последовательностей



Максимальное значение P_l (при фиксированном l), найденное для источника по всем возможным размещениям по состояниям памяти используемых в нем для каждого $1 \leq \alpha \leq n$ частных отображений $\varphi_{x_1 \dots x_{l-1} \dots x_{l\alpha}}$, обозначим $P_{l\max}$:

$$P_{l\max} = \max_{\substack{\varphi_{x_1 \dots x_{l-1} \dots x_{l\alpha}} \\ \varphi_{x'_1 \dots x'_n}}} P_l. \quad (11.5)$$

Возможно, что одно и то же значение $P_{l\max}$ в формуле (11.5) будет достигаться при некотором l для нескольких размещений частных отображений по памяти источника.

Информационная способность периодического ДДИ определяется следующей теоремой.

Теорема 11.4. Для того чтобы при $s \rightarrow \infty$ число выходных последовательностей периодического ДДИ, найденное на конец периода, $P_{sv} \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно из отображений Ψ_m было нетривиальным.

Информационная способность невырожденного регулярного ДДИ без памяти, работа которого зависит только от единственного отображения Ψ , определяется теоремой 11.5.

Теорема 11.5. Для того чтобы при $l \rightarrow \infty$ число выходных последовательностей невырожденного регулярного ДДИ без памяти $P_l \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы отображение Ψ было нетривиальным.

11.2. Количество информации в выходном элементе детерминированного дискретного источника

Рассмотрим самый общий случай ДДИ — нерегулярный источник с бесконечной памятью.

Пусть указанный источник вырабатывает последовательность элементов. Поскольку все элементы, выдаваемые источником, являются истинными, то в соответствии с формулой (9.3) количество информации, которое заключено в выдаваемой источником последовательности длины l ,

$$I(X^{(l)}) = D(X^{(l)}) = \log P_l, \quad (11.6)$$

где $D(X^{(l)})$ — определенность последовательности множества $X^{(l)}$.

Количество информации $I_s(X^{(l)})$, содержащееся в элементе выходной последовательности длины l источника, с учетом формулы (11.6) определяется как среднее количество информации, приходящееся на один ее элемент:

$$I_3(X^{(l)}) = \frac{I(X^{(l)})}{l} = \frac{\log P_l}{l}. \quad (11.7)$$

Последняя формула совпадает с формулой (9.6) для конечной последовательности элементов.

Количество информации $I_3(X^{(\infty)})$, которое несет один выходной элемент источника, определим как предел, к которому стремится $I_3(X^{(l)})$ при $l \rightarrow \infty$:

$$I_3(X^{(\infty)}) = \lim_{l \rightarrow \infty} I_3(X^{(l)}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{I(X^{(l)})}{l} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log P_l}{l}. \quad (11.8)$$

Наряду с равенством (11.8) может быть получена и еще одна формула для нахождения $I_3(X^{(\infty)})$. Для этого, воспользовавшись конечным выражением формулы (11.7), умножим и разделим P_l , стоящее под знаком логарифма, на произведение $P_1 P_2 \dots P_{l-1}$. При этом $I_3(X^{(l)})$ не изменит своего значения и запишется так:

$$I_3(X^{(l)}) = \frac{1}{l} \log \frac{P_1 P_2 \dots P_{l-1} P_l}{P_1 P_2 \dots P_{l-1}}. \quad (11.9)$$

Применив в выражении (11.9) формулы для логарифма частного и произведения, получим

$$\begin{aligned} I_3(X^{(l)}) &= \frac{1}{l} \left(\sum_{r=1}^l \log P_r - \sum_{r=1}^{l-1} \log P_r \right) = \\ &= \frac{1}{l} \left[\log P_1 + \sum_{r=2}^l (\log P_r - \log P_{r-1}) \right]. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Здесь $\log P_1$ — это количество информации, которое содержит первый элемент последовательности:

$$\log P_1 = I(X_1), \quad (11.11)$$

а разность $\log P_r - \log P_{r-1}$ представляет собой количество информации $I(X_r)$ в r -м ($r > 1$) ее элементе:

$$\log P_r - \log P_{r-1} = I(X^{(r)}) - I(X^{(r-1)}) = I(X_r). \quad (11.12)$$

Подставив количество информации из формул (11.11) и (11.12) в формулу (11.10), будем иметь

$$I_3(X^{(l)}) = \frac{1}{l} \sum_{r=1}^l I(X_r). \quad (11.13)$$

Полученная формула показывает, что среднее количество информации, которое несет элемент выходной последовательности

длины l источника, численно равно среднему количеству информации, найденному по всем ее элементам.

Если в равенстве (11.8) заменить $I_3(X^{(l)})$ в соответствии с формулой (11.13), то получим

$$I_3(X^{(\infty)}) = \lim_{l \rightarrow \infty} I_3(X^{(l)}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{r=1}^l I(X_r). \quad (11.14)$$

Для многих невырожденных регулярных ДДИ с конечной памятью P_l удается получить как явную функцию от l . Для таких источников $I_3(X^{(\infty)})$, задаваемое формулой (11.14), может быть легко найдено из равенства (11.8).

В отношении $I_3(X^{(l)})$ невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью приведем несколько частных результатов.

1. Если у невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью с увеличением l число выходных последовательностей P_l растет по линейному закону, т.е. если $P_l = c + dl$, где $0 \leq c < \infty$, $0 \leq d < \infty$, но при $c = 0$, $d > 0$, а при $d = 0$, $c > 0$, то при $l \rightarrow \infty$ $I_3(X^{(l)})$ источника монотонно стремится к нулю.

Действительно, подставив P_l в равенство (11.8), получим

$$\begin{aligned} I_3(X^{(\infty)}) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log_a(c + dl)}{l} = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{[\log_a(c + dl)]'}{l'} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{d}{(c + dl) \ln a} = 0. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Из формулы (11.15) можно заключить, что у источников, рассмотренных в примерах 11.1 и 11.2, среднее количество информации $I_3(X^{(l)})$, которое несет один элемент выходной последовательности, при $l \rightarrow \infty$ монотонно стремится к нулю.

2. Если у невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью с увеличением l число выходных последовательностей P_l растет по показательному закону, т.е. если $P_l = N^{dl}$, где $0 < d \leq 1$, то $I_3(X^{(\infty)}) = d \log N$.

Действительно, при подстановке P_l в равенство (11.8) найдем

$$I_3(X^{(\infty)}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log N^{dl}}{l} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{dl \log N}{l} = d \log N. \quad (11.16)$$

Определим теперь $I_3(X^{(\infty)})$ для периодического ДДИ. Пусть длина выходных последовательностей источника $l = vs$, где v — период источника, выраженный в числе элементов, s — число периодов его работы. Поскольку у периодического источника значение последующего элемента не зависит от значений ему предшествующих элементов, то при выдаче m -го ($m = 1, 2, \dots, v$) элемента любого периода число выходных последовательностей источника

увеличивается в N_m раз (где N_m — мощность выходного алфавита X_m источника при выдаче m -го элемента периода), а при выдаче всех v элементов периода — в $N_1 N_2 \dots N_v$ раз. Следовательно, число возможных выходных последовательностей длины $l = vs$ источника $P_l = (N_1 N_2 \dots N_v)^s$. Подставив P_l в равенство (11.8), получим

$$\begin{aligned} I_3(X^{(\infty)}) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log P_l}{l} = \lim_{vs \rightarrow \infty} \frac{\log(N_1 N_2 \dots N_v)^s}{vs} = \\ &= \frac{1}{v} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \log N_1 N_2 \dots N_v}{s} = \frac{1}{v} \sum_{m=1}^v \log N_m. \end{aligned} \quad (11.17)$$

В силу того что $\log N_m = I(X_m)$, формула (11.17) может быть записана в следующем виде:

$$I_3(X^{(\infty)}) = \frac{1}{v} \sum_{m=1}^v I(X_m). \quad (11.18)$$

Из выражения (11.18) видно, что количество информации, которое содержит в среднем один элемент периодического ДДИ, равно среднему количеству информации, которое несет один элемент его периода.

Найдем $I_3(X^{(\infty)})$ для невырожденного регулярного ДДИ без памяти. У этого источника выходной алфавит постоянен при выдаче любого по номеру элемента и значение последующего выходного элемента не зависит от значений элементов, выданных ранее, поэтому число последовательностей длины l такого источника $P_l = N^l$. Подставив найденное значение P_l в равенство (11.8), будем иметь

$$I_3(X^{(\infty)}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log P_l}{l} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log N^l}{l} = \log N. \quad (11.19)$$

Формулы (11.16) — (11.19) значительно облегчают практические расчеты.

Пример 11.3. Найти $I_3(X^{(\infty)})$ для периодического ДДИ, рассмотренного в примере 10.2.

Воспользуемся формулой (11.17), положив в ней $a = 2$, тогда количество информации

$$I_3(X^{(\infty)}) = \frac{1}{3} (2 \log_2 3 + \log_2 1) = 1,056 \text{ бит.}$$

Пример 11.4. Найти $I_3(X^{(\infty)})$ для невырожденного регулярного ДДИ без памяти, рассмотренного в примере 10.3.

Используем формулу (11.19), взяв в ней $a = 2$. В этом случае количество информации

$$I_3(X^{(\infty)}) = \log_2 2 = 1 \text{ бит.}$$

Проведенное нахождение количества информации в выходном элементе ДДИ позволяет легко перейти к определению его основной характеристики — производительности.

11.3. Производительность и максимальная производительность детерминированного дискретного источника

Пусть каждый элемент $x_{i_l} \in X_l$ (X_l — выходной алфавит источника при выдаче им l -го элемента, $l = 1, 2, \dots; i_l = 1, 2, \dots, N_l$) существует на выходе источника в течение времени $t_{x_{i_l}}$. В общем случае время выдачи $t_{x_{i_l}}$ разных элементов может быть различным. Найдем среднее время выдачи элемента источником $\bar{t}_3$, называемое *средней длительностью элемента*.

Перенумеруем все выходные последовательности источника, составляющие множество $X^{(l)}$ последовательностей длины l . Обозначим через $j = 1, 2, \dots, P_l$ номер последовательности в множестве $X^{(l)}$, а через $t_{x_j^{(l)}}$ — длительность последовательности $x_j^{(l)} \in X^{(l)}$. Тогда средняя длительность последовательности длины l

$$\bar{t}_{X^{(l)}} = \frac{1}{P_l} \sum_{j=1}^{P_l} t_{x_j^{(l)}},$$

а средняя длительность элемента в последовательности длины l

$$\bar{t}_3^{(l)} = \frac{\bar{t}_{X^{(l)}}}{l} = \frac{1}{lP_l} \sum_{j=1}^{P_l} t_{x_j^{(l)}}. \quad (11.20)$$

Среднюю длительность элемента, выдаваемого источником, определим как предел $\bar{t}_3^{(l)}$ [см. формулу (11.20)] при $l \rightarrow \infty$:

$$\bar{t}_3 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lP_l} \sum_{j=1}^{P_l} t_{x_j^{(l)}}. \quad (11.21)$$

Средняя длительность выходного элемента источника и среднее количество информации в элементе позволяют определить среднее количество информации $g_{\text{ДДИ}}$, вырабатываемое источником в 1 с:

$$g_{\text{ДДИ}} = \frac{I_3(X^{(\infty)})}{\bar{t}_3}. \quad (11.22)$$

Подставив равенства (11.8) и (11.21) в формулу (11.22), для невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью найдем

$$g_{\text{дди}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{P_l \log P_l}{\sum_{j=1}^{P_l} t_{x_j}^{(l)}}. \quad (11.23)$$

В результате подстановки формулы (11.17) и $\bar{t}_3$ в формулу (11.22) для периодического ДДИ будем иметь

$$g_{\text{дди}} = \frac{\sum_{m=1}^v \log N_m}{\sum_{m=1}^v \frac{1}{N_m} \sum_{i_m=1}^{N_m} t_{x_{i_m}}}, \quad (11.24)$$

где $t_{x_{i_m}}$ — длительность i_m -го элемента множества X_m .

После подстановки формулы (11.19) и $\bar{t}_3$ в формулу (11.22) для невырожденного регулярного ДДИ без памяти получим

$$g_{\text{дди}} = \frac{N \log N}{\sum_{i=1}^N t_{x_i}}. \quad (11.25)$$

Величина $g_{\text{дди}}$, показывающая скорость выдачи информации источником, которая определяется формулами (11.23)—(11.25), называется *производительностью источника* [18].

Если длительность всех элементов, выдаваемых ДДИ, одинакова и равна t_3 , то $\bar{t}_3 = t_3$. Подставив это значение $\bar{t}_3$ и $I_3(X^{(\infty)})$ из равенства (11.8), формул (11.17) и (11.19) в формулу (11.22), соответственно будем иметь:

- для невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью

$$g_{\text{дди}} = \frac{1}{t_3} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log P_l}{l}; \quad (11.26)$$

- для периодического ДДИ

$$g_{\text{дди}} = \frac{1}{v t_3} \sum_{m=1}^v \log N_m; \quad (11.27)$$

- для невырожденного регулярного ДДИ без памяти

$$g_{\text{дди}} = \frac{1}{t_3} \log N. \quad (11.28)$$

Формулы (11.26)—(11.28) являются частными случаями формулы (11.22).

Наряду с рассмотренным, возможен и другой подход к определению производительности источника. Обозначим через X_T мно-

жество выходных последовательностей ДДИ, имеющих достаточно большую, но одинаковую длительность T , а через P_T — мощность этого множества ($P_T = |X_T|$). Если невырожденный регулярный ДДИ с конечной памятью, периодический ДДИ и невырожденный регулярный ДДИ без памяти удовлетворяют соответственно условиям теорем 11.3, 11.4 и 11.5, то с увеличением T число последовательностей P_T возрастает.

Количество информации, содержащееся в последовательности длительности T ,

$$I(X_T) = \log P_T. \quad (11.29)$$

Среднее количество информации $g_{\text{ДДИ}}$, вырабатываемое источником в 1 с, или производительность источника, может быть найдено с учетом формулы (11.29) как предел отношения $I(X_T)/T$ при $T \rightarrow \infty$:

$$g_{\text{ДДИ}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I(X_T)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P_T}{T}. \quad (11.30)$$

Из формулы (11.30) следует, что производительность источника зависит от количества информации $I(X_T)$, которое он выдает за время T . В свою очередь, $I(X_T)$ определяется числом P_T последовательностей длительности T . Максимальное значение P_T ($T = \text{const}$), найденное по всем возможным размещениям по состояниям памяти используемых в источнике для каждого $1 \leq \alpha \leq n$ частных отображений $\varphi_{\emptyset \dots x_{i1} \dots x_{in}}$, обозначим $P_{T \max}$:

$$P_{T \max} = \max_{\substack{\varphi_{\emptyset \dots \emptyset x_{i1}} \\ \dots \\ \varphi_{x'_{i1} \dots x'_{in}}} P_T. \quad (11.31)$$

Формула (11.31) позволяет найти производительность источника

$$G_{\text{ДДИ}} = g_{\text{ДДИ} \max} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P_{T \max}}{T}, \quad (11.32)$$

называемую *максимальной производительностью источника*.

Поскольку $P_{T \max}$ находится по всем возможным размещениям по состояниям памяти частных отображений $\varphi_{\emptyset \dots x_{i1} \dots x_{in}}$ ($1 \leq \alpha \leq n$), то в силу отсутствия памяти у периодического и невырожденного регулярного ДДИ без памяти для этих источников $P_{T \max} = P_T$. Изменение местами отображений $\Psi_m: \Lambda_m \rightarrow X_m$ ($m = 1, 2, \dots, v$) в таблице отображений, задающей периодический ДДИ, не изменяет P_T , так как оно зависит от произведения $N_1 N_2 \dots N_v$, определяющего увеличение числа выходных последовательностей источника за период, которое не меняется от перемены мест сомно-

жителей. Следовательно, для периодического и невырожденного регулярного ДДИ без памяти

$$G_{\text{дди}} = g_{\text{дди}}. \quad (11.33)$$

Таким образом, формула (11.33) полностью определяет максимальную производительность периодического и невырожденного регулярного ДДИ без памяти.

Так как при выводе формулы (11.32) на длительности выходных элементов никаких ограничений не накладывалось, то она определяет максимальную производительность невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью и тогда, когда длительности элементов различны.

Максимальная производительность невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью характеризует лишь его потенциальные возможности, т. е. является верхней гранью производительности источника. Реальная же его производительность определяется формулой (11.30).

11.4. Избыточность информации детерминированного дискретного источника

Еще одной важной характеристикой источника является избыточность выдаваемой им информации. Пусть P_l — число возможных выходных последовательностей длины l ДДИ. Согласно соотношению (9.18) избыточность последовательности длины l , выдаваемой ДДИ, определяется выражением

$$И_{X^{(l)}} = \frac{l \log N}{\log P_l} - 1, \quad (11.34)$$

где $N = \max_r N_r$ ($r = 1, 2, \dots, l$).

Для произвольного ДДИ избыточность информации, выдаваемой источником, определим как предел, к которому стремится $И_{X^{(l)}}$ при $l \rightarrow \infty$:

$$И_{\text{дди}} = \lim_{l \rightarrow \infty} И_{X^{(l)}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{l \log N}{\log P_l} - 1 \right). \quad (11.35)$$

Избыточность информации невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью определяется по формуле (11.35).

Найдем избыточность информации, выдаваемой периодическим ДДИ. Пусть l — длина последовательности, состоящей из полных s периодов, тогда $l = vs$ и $P_l = P_{vs} = (N_1 N_2 \dots N_v)^s$. Подставив эти значения l и P_l в формулу (11.35), найдем

$$И_{\text{ДДИ}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\frac{vs \log N}{s \log N_1 N_2 \dots N_v} - 1 \right) = \frac{v \log N}{\sum_{m=1}^v \log N_m} - 1, \quad (11.36)$$

где $N = \max_m N_m$ ($m = 1, 2, \dots, v$).

В случае невырожденного регулярного ДДИ без памяти, у которого алфавит X не зависит от номера l выдаваемого элемента,

$$И_{\text{ДДИ}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{l \log N}{l \log N} - 1 \right) = 0. \quad (11.37)$$

Результат, полученный в формуле (11.37), достаточно очевиден.

Пример 11.5. Определить избыточность периодического ДДИ, рассмотренного в примере 10.2.

Подставив в формулу (11.36) $v = 3$, $N = 3$, $N_1 = N_3 = 3$ и $N_2 = 1$, при $a = 2$ получим

$$И_{\text{ДДИ}} = \frac{3 \log_2 3}{2 \log_2 3 + \log_2 1} - 1 = 0,5.$$

Этот результат становится понятным, если учесть, что выдача второго элемента периода, составляющего 0,5 длины двух других его элементов и являющегося всегда символом B , не увеличивает числа возможных выходных последовательностей источника, а следовательно, и количества информации, заключенного в последовательности. Поэтому один элемент из трех в периоде является избыточным.

Аналогично выражению (9.17) можно установить избыточность отрезка последовательности длины Δl , следующего после элемента с номером $l \geq 1$ (при $l = 0$ определение избыточности отрезка последовательности длины Δl выполняется по формуле (11.34), так как в этом случае $\Delta l = l$).

Пусть $I(X_l^{(\Delta l)})_{\max} = I(X^{(l+\Delta l)})_{\max} - I(X^{(l)})_{\max}$ — максимальное количество информации, которое может содержать отрезок последовательности длины Δl , начинающийся с $(l+1)$ -го элемента ($I(X^{(l+\Delta l)})_{\max}$ и $I(X^{(l)})_{\max}$ — максимальные количества информации, которые могут нести соответственно последовательности длины $l + \Delta l$ и l). Если через $I(X_l^{(\Delta l)}) = I(X^{(l+\Delta l)}) - I(X^{(l)})$ обозначить количество информации, которое действительно содержит отрезок последовательности длины Δl , начинающийся с $(l+1)$ -го элемента, то избыточность отрезка последовательности можно определить так:

$$И_{X_l^{(\Delta l)}} = \frac{I(X_l^{(\Delta l)})_{\max} - I(X_l^{(\Delta l)})}{I(X_l^{(\Delta l)})} = \frac{I(X_l^{(\Delta l)})_{\max}}{I(X_l^{(\Delta l)})} - 1. \quad (11.38)$$

Подставив в формулу (11.38) соответствующие значения количеств информации, будем иметь

$$И_{X_l^{(\Delta l)}} = \frac{(l + \Delta l) \log N - l \log N}{\log P_{l+\Delta l} - \log P_l} - 1 = \frac{\Delta l \log N}{\log \frac{P_{l+\Delta l}}{P_l}} - 1, \quad (11.39)$$

где $N = \max_r N_r$ ($r = 1, 2, \dots, l + \Delta l$); P_l и $P_{l+\Delta l}$ — число выходных последовательностей ДДИ длины l и $l + \Delta l$ соответственно.

Формулу (11.39) будем использовать для определения избыточности отрезков последовательностей, выдаваемых невырожденными регулярными ДДИ с конечной памятью.

Пример 11.6. Определить избыточность отрезка последовательности длины $\Delta l = 4$, начинающегося с третьего элемента ($l = 2$), для регулярно-го ДДИ с памятью на два элемента, рассмотренного в примере 11.2.

Как видно из рис. 11.3, в и формулы (11.4), $P_2 = 4$, $P_6 = 12$. Воспользовавшись формулой (11.39), при $a = 2$ получим

$$И_{X_2^{(4)}} = \frac{4 \log_2 2}{\log_2 \frac{12}{4}} - 1 = 1,52.$$

Рассуждая аналогично, найдем: $И_{X_2^{(1)}} = 0,71$, $И_{X_2^{(2)}} = 1$, $И_{X_2^{(3)}} = 1,27$.

11.5. Кодирование последовательности элементов детерминированного дискретного источника

Рассмотрим блочное кодирование последовательности элементов, выдаваемой ДДИ. Суть блочного кодирования состоит в установлении взаимно-однозначного соответствия между отрезками выходной последовательности источника и некоторыми другими ограниченными по длине последовательностями (кодowymi комбинациями) из конечного числа тех же или других элементов, которые в дальнейшем будем называть символами.

По числу элементов последовательности источника, которым ставится в соответствие отдельная кодовая комбинация, кодирование подразделяют на поэлементное и многоэлементное. В первом случае комбинация кода ставится в соответствие лишь одному элементу последовательности, во втором — нескольким ее элементам. Будем считать, что для кодирования используются равномерные коды.

Пусть ДДИ выдает последовательность $x_j^{(l)} = (x_{i_1} \dots x_{i_l})$ длины l элементов $x_{i_r} \in X_r$ (где $r = 1, 2, \dots, l$; X_r — множество элементов x_{i_r} , которые могут стоять на r -м месте последовательности; $i_r = 1, 2, \dots, N_r = |X_r|$), принадлежащую конечному множеству последовательностей $X^{(l)}$ мощности $P_l > 1$ ($j = 1, 2, \dots, P_l$). Допу-

стим, что кодер выполняет поэлементное блоковое кодирование последовательности $x_j^{(l)}$, при котором каждому элементу $x_i \in X_r$ источника ставится во взаимно-однозначное соответствие комбинация $z^{(k_r)} = (z_1 \dots z_{k_r})$ равномерного блокового кода $Z^{(k_r)}$ длины k_r в алфавите Z с числом комбинаций $|Z^{(k_r)}| = Q_r$ ($\forall s = 1, 2, \dots, k_r, z_s \in Z$). Указанный процесс кодирования описывает последовательность отображений множеств X_r ($r = 1, 2, \dots, l$) в множества $Z^{(k_r)}$ при взаимно-однозначном соответствии между элементами этих множеств. Как следует из третьего свойства относительного количества информации в элементе конечного множества (см. подразд. 9.3 и 8.4), при указанных допущениях среднее количество информации $I(Z^{(k_r)}, X_r)$, содержащееся в r -й кодовой комбинации o -м кодируемом элементе,

$$I(Z^{(k_r)}, X_r) = \log N_r = I(X_r), \quad (11.40)$$

где $I(X_r)$ — количество информации, которое несет элемент множества X_r .

Кроме того, в силу равномогности множеств X_r и $Z^{(k_r)}$ количество информации в комбинации кода $Z^{(k_r)}$

$$I(Z^{(k_r)}) = \log Q_r = \log N_r = I(X_r). \quad (11.41)$$

Аналогично результатам (11.40) и (11.41) можно показать, что в случае, когда кодер осуществляет многоэлементное кодирование выходной последовательности ДДИ, количество информации, которое содержит в среднем одна кодовая комбинация, равно количеству информации, которое заключено в кодируемом отрезке последовательности.

При кодировании отрезков последовательности ДДИ происходит изменение вида представления информации при сохранении ее количества, поэтому кодирование может быть использовано для изменения избыточности информации. Среди различных способов кодирования существуют как способы уменьшения, так и увеличения избыточности. Кодирование, позволяющее уменьшить избыточность, как и в вероятностной теории, называется *эффективным*. Кодирование, приводящее к увеличению избыточности, — *помехоустойчивым*. Рассмотрим на примерах, как меняется избыточность представления одной и той же информации при различных способах кодирования отрезков последовательности ДДИ.

Пример 11.7. Пусть выходная последовательность невырожденного регулярного ДДИ с памятью на два элемента, рассмотренного в примере 11.2, кодируется отрезками по четыре элемента, начиная с третьего, каждым из двух кодов, приведенных в табл. 11.1.

Найти избыточность информации, заключенной в указанных четырех элементах последовательности, при кодировании их кодами табл. 11.1.

Таблица 11.1

Элементы последовательности $x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6}$	Код 1	Код 2	Элементы последовательности $x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6}$	Код 1	Код 2
0000	000	00000	1111	100	11110
0100	001	01001	1000	101	10001
0101	010	01010	1010	110	10100
0111	011	01111	1011	111	10111

Избыточность кодируемого отрезка последовательности рассматриваемого источника была найдена в примере 11.6. Она составляет 1,52. Для нахождения избыточности представления информации кодами 1 и 2 воспользуемся формулой (11.39), подставив в нее вместо Δl и N разрядность и основание кода соответственно:

$$I_{\text{код } 1} = \frac{3 \log_2 2}{\log_2 \frac{12}{4}} - 1 = 0,89; \quad I_{\text{код } 2} = \frac{5 \log_2 2}{\log_2 \frac{12}{4}} - 1 = 2,15.$$

Пример 11.8. Пусть выходная последовательность периодического ДДИ, рассмотренного в примере 10.2, кодируется отрезками по три элемента, начиная с первого, каждым из двух кодов, приведенных в табл. 11.2. Найти избыточность информации после представления ее кодами табл. 11.2.

Таблица 11.2

Элементы последовательности $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$	Код 1	Код 2	Элементы последовательности $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$	Код 1	Код 2
<i>ABA</i>	0000	0000000	<i>BBB</i>	0100	0100011
<i>ABV</i>	0001	0001110	<i>BVC</i>	0101	0101101
<i>ABC</i>	0010	0010101	<i>CBA</i>	0110	0110110
<i>BVA</i>	0011	0011011	<i>CBV</i>	0111	0111000
			<i>CBC</i>	1000	1000111

Избыточность информации, выдаваемой данным источником, равная 0,5, была определена в примере 11.5. В соответствии с формулой (11.34) получим избыточность представления информации кодами 1 и 2:

$$I_{\text{код } 1} = \frac{4 \log_2 2}{\log_2 9} - 1 = 0,26; \quad I_{\text{код } 2} = \frac{7 \log_2 2}{\log_2 9} - 1 = 1,21.$$

Таким образом, применяя различные способы кодирования отрезков последовательности невырожденного регулярного ДДИ с конечной памятью и периодического ДДИ, избыточность выдаваемой ими информации можно уменьшить или увеличить.

Избыточность информации невырожденного регулярного ДДИ без памяти может быть только увеличена.

11.6. Эффективное кодирование последовательности элементов детерминированного дискретного источника

Пусть вырабатываемая произвольным невырожденным ДДИ последовательность делится на равные отрезки по $1 \leq \Delta l < \infty$ элементов, а затем каждый из этих отрезков кодируется равномерным блоковым кодом с основанием $q = |Z|$. Обозначим через $I(X_r^{(\Delta l)})$ количество информации, которое содержится в отрезке длины Δl последовательности, начинающемся с $(r + 1)$ -го элемента, а через $I(X^{(r)})$ — количество информации в последовательности длины r , начинающейся с первого элемента. Очевидно, что

$$I(X_r^{(\Delta l)}) = I(X^{(r+\Delta l)}) - I(X^{(r)}) = \log P_{r+\Delta l} - \log P_r, \quad (11.42)$$

где $P_{r+\Delta l} = |X^{(r+\Delta l)}|$, $P_r = |X^{(r)}|$.

Предельные возможности эффективного кодирования устанавливаются следующей теоремой [19], приводимой без доказательства.

Теорема 11.6 (основная теорема эффективного кодирования для ДДИ). Среди равномерных блоковых кодов с основанием q , которыми можно закодировать отрезок последовательности ДДИ из Δl элементов, начинающийся с $(r + 1)$ -го элемента, всегда существует такой, длина которого k_r удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{I(X_r^{(\Delta l)})}{\log q} \leq k_r < \frac{I(X_r^{(\Delta l)})}{\log q} + 1. \quad (11.43)$$

Равномерный блоковый код с основанием q с наименьшей длиной k_r , которым можно закодировать отрезок выходной последовательности длины Δl ДДИ, начинающийся с $(r + 1)$ -го элемента, называется *оптимальным* для данного отрезка.

Для некоторых ДДИ может оказаться, что при одной и той же длине кодируемых отрезков последовательности, но разных r , длины k_r оптимальных кодов будут различны. Найдем сумму длин кодов, которыми кодируются отрезки по Δl всей последователь-

ности длины l ДДИ, при условии, что $l = n\Delta l$, где n — целое, больше 1.

Для этого запишем неравенства (11.43) для всех отрезков последовательности, учитывая формулу (11.42):

$$\begin{aligned} \frac{\log P_{\Delta l}}{\log q} &\leq k_0 < \frac{\log P_{\Delta l}}{\log q} + 1, \\ \frac{\log P_{2\Delta l} - \log P_{\Delta l}}{\log q} &\leq k_{\Delta l} < \frac{\log P_{2\Delta l} - \log P_{\Delta l}}{\log q} + 1, \\ &\dots \\ \frac{\log P_{n\Delta l} - \log P_{(n-1)\Delta l}}{\log q} &\leq k_{(n-1)\Delta l} < \frac{\log P_{n\Delta l} - \log P_{(n-1)\Delta l}}{\log q} + 1. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Сложив все неравенства (11.44) и сделав замену $n\Delta l = l$, получим

$$\frac{\log P_l}{\log q} \leq k_{\Sigma} < \frac{\log P_l}{\log q} + n,$$

где $k_{\Sigma} = \sum_{i=0}^{n-1} k_{i\Delta l}$.

Показателем эффективности кодирования последовательности ДДИ длины l при делении ее на отрезки по Δl элементов, в случае если $q = |X|$ (где q — основание кода, а X — алфавит мощности $|X| = \max_r |X_r|$ при $r = 1, 2, \dots, l$), может служить коэффициент сжатия

$$k_{\text{сж}} = \frac{l - k_{\Sigma}}{l} = 1 - \frac{k_{\Sigma}}{l}.$$

Коэффициент сжатия характеризует степень уменьшения длины последовательностей ДДИ в результате эффективного кодирования.

Помехоустойчивое кодирование рассматривается в гл. 13.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под информационной способностью детерминированного дискретного источника?
2. Какое отображение называется тривиальным?
3. В чем заключается суть основной теоремы для детерминированного дискретного источника?
4. При каком условии число выходных последовательностей периодического детерминированного дискретного источника стремится к бес-

конечности при стремлении к бесконечности длины последовательностей?

5. Как определяется количество информации, содержащееся в выходном элементе детерминированного дискретного источника?

6. Что показывает производительность источника в комбинаторной теории информации?

7. Как определяется максимальная производительность источника в комбинаторной теории информации?

8. В чем состоит различие в определении максимальной производительности источника в вероятностной теории информации К. Шеннона и комбинаторной теории?

9. Как устанавливается избыточность информации, выдаваемой детерминированным дискретным источником, в комбинаторной теории?

10. Какая операция используется в комбинаторной теории для изменения избыточности представления информации, выдаваемой дискретным источником?

11. В чем состоит смысл основной теоремы эффективного кодирования для детерминированного дискретного источника?

12. Что показывает коэффициент сжатия?

ДИСКРЕТНЫЕ КАНАЛЫ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ИСКАЖЕНИЯМИ

12.1. Детерминированные дискретные каналы

Под *дискретным каналом* понимается совокупность устройств, обеспечивающих независимую передачу дискретных элементов от источника или кодера к получателю или декодеру (см. подразд. 6.1). В комбинаторной теории информации изучаются дискретные каналы, в которых искажения передаваемых по ним элементов не носят случайного характера. Каналы с неслучайным характером искажений дискретных элементов называются *детерминированными дискретными каналами* (ДДК), или дискретными каналами с детерминированными искажениями.

Пусть $Z_l = \{z_i\}$ ($i_l = 1, 2, \dots, |Z_l| = N_l$) — входной алфавит канала для l -го элемента ($l = 1, 2, \dots$), а $U_l = \{u_j\}$ ($j_l = 1, 2, \dots, |U_l| = M_l$) — выходной алфавит для l -го элемента и $N_l \geq M_l$. Обозначим через $Z^{(l-1)} \subseteq Z_1 \times \dots \times Z_{l-1}$ — множество различных входных последовательностей канала длины $l-1$ ($l = 1, 2, \dots$). Ограничимся рассмотрением только таких каналов, у которых подача на вход одного элемента приводит к появлению на выходе тоже только одного элемента. При этом входные и выходные элементы ДДК будем называть *символами*.

Детерминированный дискретный канал считается заданным, если известны его входные Z_l и выходные U_l ($l = 1, 2, \dots$) алфавиты и отображения f_l декартовых произведений $Z^{(l-1)} \times Z_l$ в выходные алфавиты $U_l \forall l = 1, 2, \dots$:

$$f_l : Z^{(l-1)} \times Z_l \rightarrow U_l \quad (12.1)$$

(для $l = 1$ принимается, что $Z^{(0)} = \emptyset$, поэтому отображение f_l имеет вид: $f_1 : Z_1 \rightarrow U_1$). Будем полагать, что $\forall l \geq 1$ соответствие между $Z^{(l-1)} \times Z_l$ и U_l , задающее отображение f_l , всюду определено, сюръективно и функционально. Детерминированный дискретный канал, для которого передача символов входной последовательности описывается отображениями (12.1), называется *нерегулярный ДДК с неограниченной (бесконечной) памятью*.

Детерминированный дискретный канал является *нерегулярным с конечной памятью*, если для него

$$f_l : Z^{(l-1)} \times Z_l \rightarrow U_l = f_{l,n} : Z^{(l-n, l-1)} \times Z_l \rightarrow U_l, \quad (12.2)$$

где $f_{l,n}$ — отображение декартова произведения $Z^{(l-n, l-1)} \times Z_l$ в выходной алфавит U_l , отображение $f_{l,n}$ зависит от l ; $Z^{(l-n, l-1)}$ — множество комбинаций длины n ($n \leq l-1$) символов, которые могут стоять в отрезке входной последовательности, начинающемся с $(l-n)$ -го символа, до $(l-1)$ -го.

Если для канала с конечной памятью [см. формулу (12.2)] $\forall l = 1, 2, \dots$ $Z_l = Z = \{z_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, |Z| = N$), $U_l = U = \{u_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, |U| = M$) и значение выходного символа u_j не зависит от номера l ($l > n$), который он занимает в выходной последовательности, а определяется только n ранее поданными на вход канала символами и новым входным символом, т.е. когда

$$f_{l,n} : Z^{(l-n, l-1)} \times Z_l \rightarrow U_l = f_n : Z^{(n)} \times Z \rightarrow U, \quad (12.3)$$

ДДК называется *регулярным с конечной памятью*. Такой ДДК удобно задавать ориентированным графом отображения.

Из отображения (12.1) в качестве частных случаев могут быть получены отображения, описывающие и более простые ДДК. Так, если для канала отображение

$$f_l : Z^{(l-1)} \times Z_l \rightarrow U_l = f_l : Z_l \rightarrow U_l, \quad (12.4)$$

т.е. если значение l -го символа на выходе канала не зависит от символов, ранее поступивших на его вход, а определяется только его номером l и входным символом $z_{i_l} \in Z_l$, то такой ДДК называется *нерегулярным без памяти*.

При $Z_l = Z$ и $U_l = U \forall l = 1, 2, \dots$ канал, задаваемый правой частью отображения (12.4), представляет собой *нерегулярный ДДК без памяти с регулярными входом и выходом*.

Детерминированный дискретный канал без памяти является *периодическим*, если для всех мест $l = v(s-1) + m$ передаваемой по нему последовательности (где $v < \infty$ — период, выраженный в числе символов, $s = 1, 2, \dots$ — номер периода, $m = 1, 2, \dots, v$ — номер символа в периоде) отображение

$$f_l : Z_l \rightarrow U_l = \gamma_m : Z_m \rightarrow U_m,$$

где γ_m — отображение входного алфавита в выходной на m -м месте периода (при некоторых m отображения могут совпадать); Z_m , U_m — входной и выходной алфавиты на m -м месте периода.

Периодический ДДК, как и периодический ДДИ (см. подразд. 10.1), удобно задавать таблицей отображений, содержащей две строки, в первой из которых перечисляются номера символов в периоде, во второй — соответствующие им отображения γ_m . Число столбцов этой таблицы равно периоду v . Периодический ДДК представляет собой канал с периодическими детерминированными искажениями.

Детерминированный дискретный канал без памяти, для которого $\forall l = 1, 2, \dots$

$$f_l: Z_l \rightarrow U_l = \gamma: Z \rightarrow U$$

(где γ — отображение, не зависящее от l), называется *регулярным ДДК без памяти*.

Более сложным типом регулярного ДДК без памяти является *регулярный ДДК с переменными состояниями*. Для этого канала l -й выходной символ определяется отображением

$$f_l: Z_l \rightarrow U_l = f: P \times Z \rightarrow U,$$

где P — конечное множество состояний канала, $P = \{p_g\}$ ($g = 1, 2, \dots, |P|$).

В регулярном ДДК с переменными состояниями значение выходного символа не зависит от его номера l , а определяется только состоянием канала и значением входного символа.

12.2. Математические модели детерминированных дискретных каналов

Математическими моделями ДДК являются соответствующие автоматы. Автоматы, представляющие собой каналы, можно получить, если множество Z_l ($l = 1, 2, \dots$) трактовать как входной алфавит автомата при выдаче им l -й буквы, множество U_l — как выходной алфавит, множество $Z^{(l-1)}$ — как алфавит его состояний, отображение f_l — как функцию выходов, а изменение последовательности множества $Z^{(l-1)}$ при выдаче каналом очередного символа (для каналов с памятью) — как функцию переходов Φ_l .

Определим кратко автоматы, являющиеся математическими моделями названных ранее ДДК (рис. 12.1).

Математической моделью ДДК с бесконечной памятью является *нерегулярный автомат с бесконечной памятью* $K_l = \{Z_l, Z^{(l-1)}, U_l, \Phi_l, f_l\}$ ($l = 1, 2, \dots$) (рис. 12.1, а) с конечными, но нерегулярными входным Z_l и выходным U_l алфавитами и бесконечным, но счетным множеством внутренних состояний $Z^{(l-1)}$; функция переходов $\Phi_l: Z^{(l-1)} \times Z_l \rightarrow Z^{(l)}$ и функция выходов $f_l: Z^{(l-1)} \times Z_l \rightarrow U_l$ автомата также нерегулярны.

Для нерегулярного ДДК с конечной памятью математической моделью служит *нерегулярный конечный автомат* $K_l = \{Z_l, Z^{(l-n, l-1)}, U_l, \Phi_{l,n}, f_{l,n}\}$ ($l = 1, 2, \dots$) (рис. 12.1, б) с конечными, но нерегулярными входным Z_l и выходным U_l алфавитами и конечным, но нерегулярным множеством внутренних состояний $Z^{(l-n, l-1)}$; функция переходов $F_{l,n}: Z^{(l-n, l-1)} \times Z_l \rightarrow Z^{(l-n+1, l)}$ и функция выходов $f_{l,n}: Z^{(l-n, l-1)} \times Z_l \rightarrow U_l$ автомата также нерегулярны.

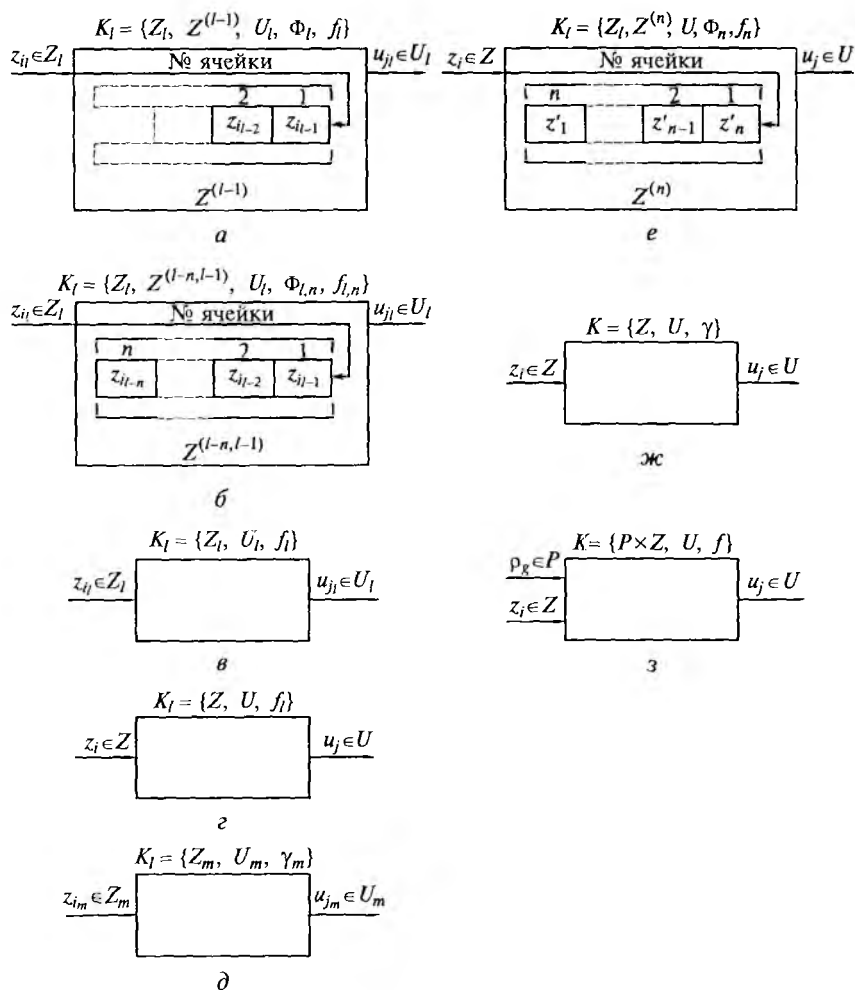


Рис. 12.1. Автоматы, являющиеся математическими моделями ДДК:

а — нерегулярный автомат с бесконечной памятью; *б* — нерегулярный конечный автомат; *в* — нерегулярный автомат без памяти; *е* — нерегулярный автомат без памяти с регулярными входным и выходным алфавитами; *д* — автомат без памяти с периодическими функциями выходов; *е* — конечный автомат; *ж* — регулярный автомат без памяти; *з* — регулярный автомат без памяти с двумя входными алфавитами

Нерегулярный ДДК без памяти имеет своей математической моделью *нерегулярный автомат без памяти* $K_l = \{Z_l, U_l, f_l\}$ ($l = 1, 2, \dots$) (рис. 12.1, *в*), представляющий собой конечный автомат с одним внутренним состоянием. В силу неизменности состояния такого автомата функционирование его задается только функцией выходов $f_l: Z_l \rightarrow U_l$, зависящей от l .

В качестве математической модели нерегулярного ДДК без памяти с регулярными входом и выходом может служить *нерегулярный автомат без памяти* $K = \{Z, U, f\}$ (рис. 12.1, з) с *регулярными входным и выходным алфавитами*, но нерегулярной функцией выходов $f: Z \rightarrow U$ ($l = 1, 2, \dots$).

Математической моделью периодического ДДК является *автомат без памяти* $K_l = \{Z_m, U_m, \gamma_m\}$ ($l = 1, 2, \dots$) (рис. 12.1, д) с *периодической* (периодом v) *функцией выходов* $f_l: Z_l \rightarrow U_l = \gamma_m: Z_m \rightarrow U_m$, где $m = 1, 2, \dots, v$ — номер символа в периоде. Числа l , v и m связаны равенством $l = v(s - 1) + m$ ($s = 1, 2, \dots$ — номер периода).

Математическая модель регулярного ДДК с конечной памятью — *конечный автомат* $K = \{Z, Z^{(n)}, U, \Phi_n, f_n\}$ (рис. 12.1, е) с конечными и регулярными алфавитами: входным Z , выходным U и состояний $Z^{(n)}$ и с регулярными функциями: переходов $\Phi_n: Z^{(n)} \times Z \rightarrow Z^{(n)}$ и выходов $f_n: Z^{(n)} \times Z \rightarrow U$.

Для регулярного ДДК без памяти математическая модель представляет собой *автомат без памяти* $K_l = \{Z, U, \gamma\}$ (рис. 12.1, ж) с *регулярным входным, выходным алфавитами и функцией выходов* $\gamma: Z \rightarrow U$.

Математической моделью регулярного ДДК с переменными состояниями является *автомат без памяти* $K = \{P \times Z, U, f\}$ (рис. 12.1, з) с *двумя входами*. Каждая входная буква такого автомата представляет собой элемент регулярного декартова произведения $P \times Z$, где P — множество состояний канала; Z — множество его входных символов. Работа рассматриваемого автомата характеризуется регулярной функцией выходов $f: P \times Z \rightarrow U$.

Из выделенных восьми типов каналов четыре — нерегулярные, три — регулярные, и один периодический имеет свойства как регулярного, так и нерегулярного канала.

Чтобы представить принцип функционирования любого ДДК, рассмотрим, например, работу регулярного ДДК с конечной памятью по его математической модели. Способ действия данного канала задается отображением (12.3). Автомат, представляющий канал (рис. 12.1, е), имеет память из n ячеек, которая до начала подачи на него символов пуста. Это начальное состояние памяти обозначим $\emptyset \emptyset \dots \emptyset$.

Пусть в некоторый момент времени на вход автомата поступает символ $z_{i_1} \in Z$ ($i_1 = 1, 2, \dots, N$). В соответствии с отображением $f_n: Z^{(n)} \times Z \rightarrow U$ на выходе автомата появляется символ $u_{j_1} \in U$ ($j_1 = 1, 2, \dots, M$), а символ z_{i_1} записывается в первую ячейку его памяти, в результате чего память переходит в состояние $\emptyset \dots \emptyset z_{i_1}$. Множество состояний вида $\emptyset \dots \emptyset z_{i_1}$ обозначим $Z_1^{(n)}$.

Введение в рассмотрение для автомата исходного состояния памяти $\emptyset \emptyset \dots \emptyset$ и ее промежуточных состояний $\emptyset \dots \emptyset z_{i_1}$ и т.д., которые она проходит до заполнения всех n ее ячеек, требует уточ-

нения представления о множестве $Z^{(n)}$. В дальнейшем под множеством $Z^{(n)}$ будем понимать всю совокупность допустимых состояний памяти автомата, включая состояния $\emptyset\emptyset\ldots\emptyset$, $\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}$ и др.

Так как в момент поступления на вход автомата символа его память находится в состоянии $\emptyset\emptyset\ldots\emptyset$, то при этом состоянии отображение f_n представляет собой по существу отображение

$$f_n : Z_{\emptyset\ldots\emptyset}^{(n)} \times Z \rightarrow U_{|\emptyset\ldots\emptyset} = f_{\emptyset\ldots\emptyset} : Z \rightarrow U_{|\emptyset\ldots\emptyset},$$

где $Z_{\emptyset\ldots\emptyset}^{(n)}$ — подмножество множества $Z^{(n)}$, содержащее только элемент $\emptyset\emptyset\ldots\emptyset$; $U_{|\emptyset\ldots\emptyset}$ — выходной алфавит автомата при состоянии его памяти $\emptyset\emptyset\ldots\emptyset$, $U_{|\emptyset\ldots\emptyset} = U$.

Отображение $f_{\emptyset\ldots\emptyset} : Z \rightarrow U_{|\emptyset\ldots\emptyset}$ является частным отображением отображения $f_n : Z^{(n)} \times Z \rightarrow U$ (см. подразд. 10.2).

С подачей на вход автомата второго символа $z_{i_2} \in Z$ ($i_2 = 1, 2, \dots, N$) на его выходе появляется второй символ $u_{j_2} \in U$ ($j_2 = 1, 2, \dots, M$), определяемый тем же отображением $f_n : Z^{(n)} \times Z \rightarrow U$. Однако в силу того, что в первой ячейке памяти автомата содержится конкретный символ z_{i_1} , отображение f_n берется только на подмножестве $Z_{\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}}^{(n)} \times Z \subset Z^{(n)} \times Z$, где $Z_{\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}}^{(n)}$ — подмножество множества $Z^{(n)}$, содержащее только элемент $\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}$. Такое отображение представляет собой по существу отображение

$$f_n : Z_{\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}}^{(n)} \times Z \rightarrow U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}} = f_{\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}} : Z \rightarrow U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}},$$

где $U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}}$ — выходной алфавит автомата при состоянии его памяти $\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}$. $U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}} \subseteq U$ и $\bigcup_{Z_1^{(n)}} U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}} = U$.

Отображение $f_{\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}} : Z \rightarrow U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}}$ является частным отображением отображения $f_n : Z^{(n)} \times Z \rightarrow U$. У отображения f_n $|Z_1^{(n)}| = N$ частных отображений $f_{\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1}}$, некоторые из которых могут совпадать. Одновременно с появлением символа u_{j_2} на выходе автомата в его памяти символ z_{i_1} сдвигается во вторую ячейку, а в первую ячейку записывается символ z_{i_2} , в результате чего память переходит в состояние $\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}$. Множество состояний вида $\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}$ обозначим $Z_2^{(n)}$.

С поступлением на вход автомата третьего символа $z_{i_3} \in Z$ ($i_3 = 1, 2, \dots, N$) на его выходе появляется третий символ $u_{j_3} \in U$ ($j_3 = 1, 2, \dots, M$), определяемый частным отображением $f_{\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}} : Z \rightarrow U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}}$, где $U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}}$ — выходной алфавит автомата при состоянии его памяти $\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}$, $U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}} \subseteq U$ и $\bigcup_{Z_2^{(n)}} U_{| \emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}} = U$.

У отображения f_n $|Z_2^{(n)}| \leq N^2$ частных отображений $f_{\emptyset\ldots\emptyset z_{i_1} z_{i_2}}$. С появлением на выходе автомата символа u_{j_3} в его памяти символ z_{i_1}

сдвигается в третью ячейку, символ z_{i_2} — во вторую, а символ z_{i_3} записывается в первую ячейку, и вся память переходит в состояние $\emptyset \dots z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3}$. Множество состояний памяти вида $\emptyset \dots z_{i_1} z_{i_2} z_{i_3}$ обозначим $Z_3^{(n)}$.

После выдачи n -го символа вся память автомата будет заполнена и значение каждого следующего выходного символа будет определяться входным символом автомата $z_{i_l} \in Z$ и состоянием $z'_1 z'_2 \dots z'_n$ его памяти ($z'_1, z'_2, \dots, z'_n \in Z$).

Множество возможных состояний памяти $z'_1 z'_2 \dots z'_n$ обозначим $Z_n^{(n)}$.

Выходной символ автомата u_{j_l} ($l > n$) определяется частным отображением $f_{z'_1 \dots z'_n} : Z \rightarrow U_{n+1|z'_1 \dots z'_n}$, где $U_{n+1|z'_1 \dots z'_n}$ — выходной алфавит автомата при состоянии его памяти $z'_1 \dots z'_n$. $U_{n+1|z'_1 \dots z'_n} \subseteq U$ и

$\bigcup_{z'_1 \dots z'_n} U_{n+1|z'_1 \dots z'_n} = U$. Таких частных отображений у отображения $f_n : Z^{(n)} \times Z \rightarrow U | Z_n^{(n)} | \leq N^n$.

Память рассматриваемого автомата, как и автомата, представляющего ДДИ, не может находиться в состояниях, характеризующихся тем, что между двумя символами, принадлежащими множеству Z , расположены один или несколько символов $\emptyset$. Такие состояния памяти автомата считаются запрещенными.

Множество состояний памяти автомата, элементами которого являются все состояния вида $\emptyset \dots z_{i_1} \dots z_{i_\alpha}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, n$) будем обозначать $Z_\alpha^{(n)}$.

Применение введенных понятий и обозначений рассмотрим на примерах.

Пример 12.1. Пусть $Z = \{0, 1\}$ — входной алфавит регулярного ДДК с памятью на три символа, а $U = \{0, 1\}$ — его выходной алфавит. Пусть также процесс передачи символов по такому каналу задается отображением $f_3 : Z^{(3)} \times Z \rightarrow U$, граф которого показан на рис. 12.2, а.

Найти выходную последовательность канала, если на его вход поступает последовательность

11001001110100111101...

Графы частных отображений $f_{\emptyset \emptyset \emptyset}, f_{\emptyset \emptyset z_1}, f_{\emptyset z_1 z_2}$ и $f_{z'_1 z'_2 z'_3}$ ($z_{i_1}, z_{i_2}, z'_1, z'_2, z'_3 \in Z$) отображения $f_3 : Z^{(3)} \times Z \rightarrow U$ приведены на рис. 12.2, б.

Последовательность символов на выходе канала:

1100100111011011101...

В выходной последовательности подчеркнут символ, появившийся в результате детерминированного искажения.

Пример 12.2. Найти выходную последовательность периодического ДДК с периодом $v = 8$, если процесс передачи символов по каналу задается табл. 12.1 отображений γ_m ($m = 1, 2, \dots, 8$; $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_7 = \gamma_8$),

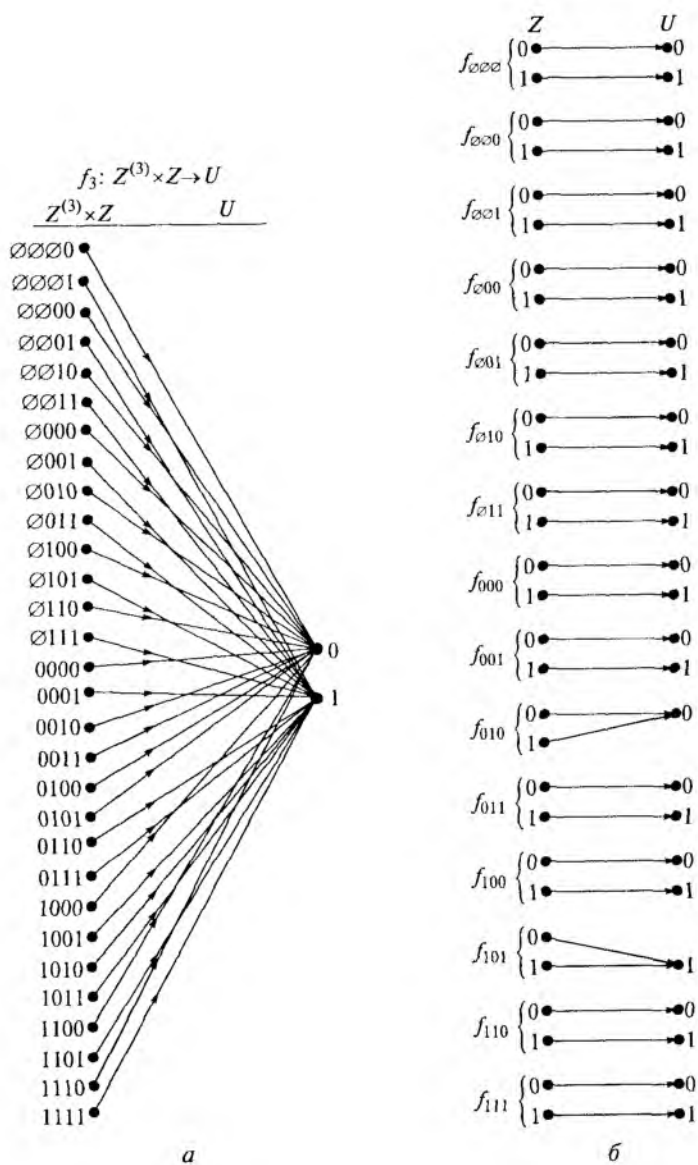


Рис. 12.2. Регулярный ДДК с памятью на три символа:

a — граф отображения $f_3: Z^{(3)} \times Z \rightarrow U$; b — графы частных отображений $f_{000}, f_{001}, f_{010}, f_{011}, f_{100}, f_{101}, f_{110}, f_{111}$

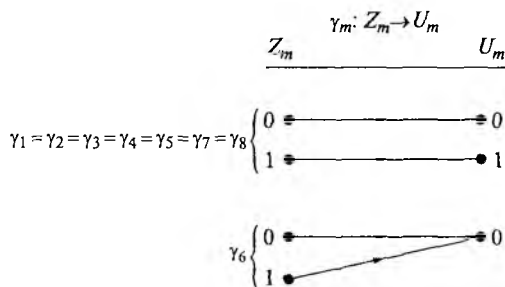


Рис. 12.3. Графы отображений γ_m ($m = 1, 2, \dots, 8$) периодического ДДК

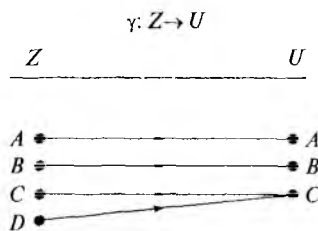


Рис. 12.4. Граф отображения γ регулярного ДДК без памяти

представленных графами на рис. 12.3, и на вход канала поступает последовательность

0110100111010110100...

Последовательность символов на выходе канала:

0110100111010010100...

Пример 12.3. Пусть $Z = \{A, B, C, D\}$ — входной алфавит регулярного ДДК без памяти, а $U = \{A, B, C\}$ — его выходной алфавит. Пусть также отображение $\gamma: Z \rightarrow U$ задано графом, изображенным на рис. 12.4. Найти последовательность символов, появляющуюся на выходе канала, если на вход его подана последовательность

ВВАСВДАААВССВДДАССВ...

Последовательность символов на выходе канала:

ВВАСВССАААВССВССАССВ...

В силу недостаточной развитости общей теории нерегулярных автоматов, являющихся математическими моделями соответствующих ДДК, основное внимание в настоящем пособии уделено

Таблица 12.1

m	1	2	3	4	5	6	7	8
γ_m	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8

изучению процесса передачи информации по каналам трех типов: регулярному с конечной памятью, периодическому и регулярно без памяти.

Контрольные вопросы

1. Как определяется дискретный канал в комбинаторной теории информации?
2. Какие дискретные каналы рассматриваются в комбинаторной теории информации?
3. Чем являются математические модели детерминированных дискретных каналов?
4. Какой автомат является математической моделью регулярного детерминированного дискретного канала с конечной памятью?
5. Какой автомат служит математической моделью регулярного детерминированного дискретного канала с переменными состояниями?
6. Что представляет собой математическая модель регулярного детерминированного дискретного канала без памяти?

ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ ПО ДЕТЕРМИНИРОВАННОМУ ДИСКРЕТНОМУ КАНАЛУ

13.1. Количество информации в выходном символе детерминированного дискретного канала

Пусть на вход ДДК подается последовательность $z_{p_l}^{(l)} = (z_{q_1} \dots z_{q_l})$ длины l символов $z_{r_l} \in Z_r$ (где $r = 1, 2, \dots, l$; Z_r — множество символов, которые могут стоять на r -м месте последовательности), принадлежащая конечному множеству последовательностей $Z^{(l)}$ мощности $|Z^{(l)}| = P_l$ ($p_l = 1, 2, \dots, P_l$). Будем считать, что последовательности множества $Z^{(l)}$ являются выходными последовательностями либо ДДИ, либо кодера. Допустим также, что в результате передачи $z_{p_l}^{(l)}$ по ДДК на его выходе появляется последовательность $u_{q_l}^{(l)} = (u_{q_1} \dots u_{q_l})$ символов $u_{j_l} \in U_r$ (где U_r — множество символов, которые могут стоять на r -м месте выходной последовательности канала), принадлежащая конечному множеству выходных последовательностей длины l ДДК $U^{(l)}$ мощности $|U^{(l)}| = Q_l \leq P_l$ ($q_l = 1, 2, \dots, Q_l$). Передачу последовательностей множества $Z^{(l)}$ по ДДК можно трактовать как отображение $F: Z^{(l)} \rightarrow U^{(l)}$. Предположим, что отображение F всюду определено, сюръективно и функционально.

Обозначим через $I(U^{(l)}, Z^{(l)})$ среднее относительное количество информации, содержащееся в выходной последовательности длины l канала, о входной последовательности. Для самого общего случая ДДК — канала с бесконечной памятью — относительное количество информации $I(Z^{(l)}, U^{(l)})_c$, содержащееся в символе выходной последовательности длины l , о символе входной последовательности той же длины, определим как относительное количество информации в выходной последовательности, приходящее в среднем на один ее символ:

$$I(U^{(l)}, Z^{(l)})_c = \frac{I(U^{(l)}, Z^{(l)})}{l}. \quad (13.1)$$

В соответствии с мерой относительного количества информации в элементе конечного множества, введенной в подразд. 9.3,

$$I(U^{(l)}, Z^{(l)}) = D(U^{(l)}, Z^{(l)}) = \log P_l - \frac{1}{Q_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l,q_l}, \quad (13.2)$$

где $D(U^{(l)}, Z^{(l)})$ — средняя относительная определенность входной последовательности канала длины l , содержащаяся в его выходной последовательности той же длины; P_{l,q_l} — мощность подмножества входных последовательностей $Z_{q_l}^{(l)} \subseteq Z^{(l)}$, являющегося прообразом выходной последовательности $U_{q_l}^{(l)}$.

Среднее относительное количество информации в выходной последовательности длины l канала обладает теми же свойствами, что и относительная определенность элемента конечного множества (см. подразд. 8.4).

1. $I(U^{(l)}, Z^{(l)}) = 0$, когда $P_l = 1$ или $Q_l = 1$, т.е. когда множество выходных последовательностей $U^{(l)}$ ДДК состоит всего из одной последовательности.

2. $0 < I(U^{(l)}, Z^{(l)}) < I(Z^{(l)}) = \log P_l$, если $P_l > Q_l > 1$, т.е. если соответствие между множествами входных и выходных последовательностей ДДК не взаимно однозначно (в неравенстве $I(Z^{(l)})$ — количество информации во входной последовательности длины l канала).

3. $I(U^{(l)}, Z^{(l)}) = I(U^{(l)}, Z^{(l)})_{\max} = I(Z^{(l)}) = \log P_l$ только когда $P_l = Q_l > 1$, т.е. когда соответствие между множествами $Z^{(l)}$ и $U^{(l)}$ взаимно однозначно.

Влияние характера отображения $F: Z^{(l)} \rightarrow U^{(l)}$ при условии, что $P_l = \text{const}$, $Q_l = \text{const}$ и $P_l > Q_l > 1$, сказывается на $I(U^{(l)}, Z^{(l)})$ так же, как и на относительной определенности элемента конечного множества:

- если P_l/Q_l — нецелое, то

$$\log Q_l < I(U^{(l)}, Z^{(l)}) \leq \log P_l - \frac{1}{Q_l} \log(P_l - Q_l + 1); \quad (13.3)$$

- если P_l/Q_l — целое, то

$$\log Q_l \leq I(U^{(l)}, Z^{(l)}) \leq \log P_l - \frac{1}{Q_l} \log(P_l - Q_l + 1). \quad (13.4)$$

Формулы (13.3) и (13.4) задают интервал возможных значений $I(U^{(l)}, Z^{(l)})$.

Подставив формулу (13.2) в выражение (13.1), получим:

$$I(U^{(l)}, Z^{(l)})_c = \frac{\log P_l}{l} - \frac{1}{l Q_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l,q_l}. \quad (13.5)$$

В правой части выражения (13.5) первый член представляет собой среднюю определенность $D(Z^{(l)})_c$ символа входной последовательности длины l канала:

$$\frac{\log P_l}{l} = D(Z^{(l)})_c, \quad (13.6)$$

а второй член в соответствии с формулой (8.12) — определенность, теряемую в среднем при передаче одного символа входной последовательности длины l по ДДК:

$$\frac{1}{lQ_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l,q_l} = D(Z^{(l)})_{\text{с.п.}} \quad (13.7)$$

Формулы (13.6) и (13.7) позволяют перейти к нахождению среднего относительного количества информации $I(U^{(l)}, Z^{(l)})_{\text{с.}}$, которое содержит один выходной символ ДДК об одном входном. Определим это количество информации как предел, к которому стремится $I(U^{(l)}, Z^{(l)})_{\text{с.}}$ при $l \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с.}} &= \lim_{l \rightarrow \infty} I(U^{(l)}, Z^{(l)})_{\text{с.}} = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log P_l}{l} - \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lQ_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l,q_l} = D(Z^{(\infty)})_{\text{с.}} - D(Z^{(\infty)})_{\text{с.п.}}, \end{aligned} \quad (13.8)$$

где $D(Z^{(\infty)})_{\text{с.}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{P_l}{l}$; $D(Z^{(\infty)})_{\text{с.п.}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lQ_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l,q_l}$.

Из формулы (13.8) видно, что $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с.}}$ зависит как от средней определенности символа входной последовательности канала, которая в конечном счете обусловливается свойствами источника, так и от потерь определенности в канале при передаче одного символа, на которые влияют свойства как источника, так и канала.

Формула (13.8) используется для нахождения $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с.}}$ в случае передачи по ДДК последовательности, вырабатываемой невырожденным регулярным ДДИ с конечной памятью.

При передаче по ДДК последовательности, выдаваемой периодическим ДДИ, и при условии, что $l = vs$, где v — период источника, s — число периодов его работы, формула (13.8) приобретает более простой вид:

$$I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с.}} = \frac{1}{v} \sum_{m=1}^v \log N_m - \lim_{vs \rightarrow \infty} \frac{1}{vsQ_{vs}} \sum_{q_{vs}=1}^{Q_{vs}} \log P_{vs,q_{vs}}, \quad (13.9)$$

где N_m — мощность выходного алфавита источника при выдаче m -го элемента периода ($m = 1, 2, \dots, v$).

В формуле (13.9) было учтено, что $D(Z^{(\infty)})_{\text{с.}} = I(Z^{(\infty)})_{\text{с.}}$, и использована формула (11.17).

При работе на ДДК невырожденного регулярного ДДИ без памяти с выходным алфавитом Z мощности N формула (13.8) может быть записана следующим образом:

$$I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с.}} = \log N - \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lQ_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l,q_l}. \quad (13.10)$$

Здесь использована формула (11.19).

При применении формул (13.8)–(13.10) наибольшие трудности вызывает нахождение второго их члена, определяющего средние потери определенности входного символа, порождаемые передачей его по ДДК. В отдельных случаях эти трудности можно преодолеть исходя из дополнительных соображений.

Пример 13.1. Найти среднее количество информации в выходном символе регулярного ДДК без памяти, заданного отображением γ , изображенным на рис. 13.1, если передаваемая по нему последовательность вырабатывается регулярным ДДИ без памяти с алфавитом Z мощности $N = b + c$.

Поскольку на вход канала символы поступают от регулярного ДДИ без памяти, то на каждом месте входной последовательности канала может стоять любой из N символов входного алфавита Z . В силу того что передача символов производится по каналу без памяти, т.е. искажение очередного символа в канале не зависит от символов, поданных ранее на его вход, а определяется только отображением γ , то для любого по номеру передаваемого символа потери определенности будут одинаковы и количество информации в выходном символе $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c$ может быть подсчитано по формуле (9.9):

$$I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c = \log N - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log N_j. \quad (13.11)$$

Подставив в равенство (13.11) N_m , M , N_j в соответствии с отображением γ (см. рис. 13.1), найдем

$$I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c = \log(b+c) - \frac{\log c}{b+1}. \quad (13.12)$$

Наряду с формулой (13.8) может быть получена и другая формула для вычисления $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c$. Для этого воспользуемся выражением (13.5). Во-первых, умножим и разделим P_j , стоящее под знаком логарифма в первом члене, на произведение $P_1 P_2 \dots P_{j-1}$, во-вторых, прибавим и вычтем из правой части

$$\sum_{r=1}^{j-1} \frac{1}{IQ_r} \sum_{q_r=1}^{Q_r} \log P_{r,q_r}.$$

В результате $I(U^{(n)}, Z^{(n)})_c$ не изменит своего значения и запишется так:

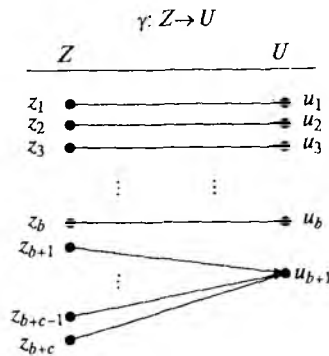


Рис. 13.1. Граф отображения γ , задающего регулярный ДДК без памяти

$$\begin{aligned}
I(U^{(l)}, Z^{(l)})_c &= \\
&= \frac{1}{l} \log \frac{P_1 P_2 \dots P_{l-1} P_l}{P_1 P_2 \dots P_{l-1}} - \frac{1}{l Q_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l, q_l} + \\
&+ \sum_{r=1}^{l-1} \frac{1}{l Q_r} \sum_{q_r=1}^{Q_r} \log P_{r, q_r} - \sum_{r=1}^{l-1} \frac{1}{l Q_r} \sum_{q_r=1}^{Q_r} \log P_{r, q_r}.
\end{aligned}$$

Применив формулы для логарифма частного и произведения, получим

$$\begin{aligned}
I(U^{(l)}, Z^{(l)})_c &= \\
&= \frac{1}{l} \sum_{r=1}^l \log P_r - \frac{1}{l} \sum_{r=1}^{l-1} \log P_r + \\
&+ \sum_{r=1}^{l-1} \frac{1}{l Q_r} \sum_{q_r=1}^{Q_r} \log P_{r, q_r} - \sum_{r=1}^l \frac{1}{l Q_r} \sum_{q_r=1}^{Q_r} \log P_{r, q_r} = \\
&= \frac{1}{l} \left[(\log P_l - \frac{1}{Q_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l, q_l}) + \sum_{r=2}^l (\log P_r - \frac{1}{Q_r} \sum_{q_r=1}^{Q_r} \log P_{r, q_r}) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=1}^{l-1} (\log P_r - \frac{1}{Q_r} \sum_{q_r=1}^{Q_r} \log P_{r, q_r}) \right]. \tag{13.13}
\end{aligned}$$

В формуле (13.13) выражение в первых круглых скобках — это относительное количество информации, содержащееся в первом выходном символе канала о первом входном:

$$\log P_l - \frac{1}{Q_l} \sum_{q_l=1}^{Q_l} \log P_{l, q_l} = I(U_1, Z_1). \tag{13.14}$$

Выражения во вторых и третьих круглых скобках — это относительное количество информации в выходной последовательности канала длины r о входной последовательности той же длины:

$$\log P_r - \frac{1}{Q_r} \sum_{q_r=1}^{Q_r} \log P_{r, q_r} = I(U^{(r)}, Z^{(r)}). \tag{13.15}$$

Перепишем выражение (13.13) с учетом формул (13.14) и (13.15):

$$\begin{aligned}
I(U^{(l)}, Z^{(l)})_c &= \\
&= \frac{1}{l} \{ I(U_1, Z_1) + \sum_{r=2}^l I(U^{(r)}, Z^{(r)}) - \sum_{r=1}^{l-1} I(U^{(r)}, Z^{(r)}) \} = \\
&= \frac{1}{l} \{ I(U_1, Z_1) + \sum_{r=2}^l [I(U^{(r)}, Z^{(r)}) - I(U^{(r-1)}, Z^{(r-1)})] \}. \tag{13.16}
\end{aligned}$$

Разность $I(U^{(r)}, Z^{(r)}) - I(U^{(r-1)}, Z^{(r-1)})$ в формуле (13.16) представляет собой относительное количество информации $I(U_r, Z_r)$, содержащееся в r -м выходном символе канала о r -м входном:

$$I(U^{(r)}, Z^{(r)}) - I(U^{(r-1)}, Z^{(r-1)}) = I(U_r, Z_r). \quad (13.17)$$

Заменяя разности относительных количеств информации в формуле (13.16) в соответствии с равенством (13.17), будем иметь

$$I(U^{(l)}, Z^{(l)})_c = \frac{1}{l} \sum_{r=1}^l I(U_r, Z_r). \quad (13.18)$$

Полученное соотношение показывает, что среднее относительное количество информации, которое содержит один символ выходной последовательности длины l ДДК об одном входном, численно равно среднему арифметическому относительных количеств информации во всех ее элементах.

Если в формуле (13.8) $I(U^{(l)}, Z^{(l)})_c$ заменить в соответствии с (13.18), то получим

$$I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c = \lim_{l \rightarrow \infty} I(U^{(l)}, Z^{(l)})_c = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{r=1}^l I(U_r, Z_r). \quad (13.19)$$

Использование формулы (13.19) предлагает знание $I(U_r, Z_r)$.

Передача последовательности, вырабатываемой некоторым источником, может производиться по любому каналу, поэтому возможны все комбинации источников с каналами.

В общем случае потери информации при передаче одного символа по ДДК характеризует средняя определенность $D(Z^{(\infty)})_{c,п}$, входящая в формулу (13.8). Действительно, количество информации, которое содержится в одном входном символе канала $I(Z^{(\infty)})_c = D(Z^{(\infty)})_c$. Количество информации, заключенное в одном выходном символе канала, определяется формулой (13.8). Количество информации $I(Z^{(\infty)})_{c,п}$, теряемое в канале при передаче одного символа за счет его искажений, естественно определить как разность количеств информации в символе на входе и выходе канала:

$$\begin{aligned} I(Z^{(\infty)})_{c,п} &= I(Z^{(\infty)})_c - I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c = \\ &= D(Z^{(\infty)})_c - D(Z^{(\infty)})_c + D(Z^{(\infty)})_{c,п} = D(Z^{(\infty)})_{c,п}. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Таким образом, среднее количество информации, теряемое в канале при передаче одного символа [см. формулу (13.20)], численно равно теряемой при этом средней определенности.

Введем понятие максимального среднего количества информации, которое может содержать выходной символ ДДК.

В общем случае множество $Z^{(\infty)}$ входных последовательностей канала является подмножеством декартова произведения входных

алфавитов канала, т.е. $Z^{(\infty)} \subseteq Z_1 \times Z_2 \times \dots$. Образует все возможные непустые подмножества $Z^{(\infty)}$ этого декартова произведения. Максимальным средним количеством информации в выходном символе ДДК $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с max}}$ назовем максимальное значение $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с}}$, найденное по всем возможным подмножествам $Z^{(\infty)}$ декартова произведения $Z_1 \times Z_2 \times \dots$, т.е.

$$I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с max}} = \max_{Z^{(\infty)} \subseteq Z_1 \times Z_2 \times \dots} I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{\text{с}}. \quad (13.21)$$

Нахождение всех возможных подмножеств $Z^{(\infty)}$ в формуле (13.21) часто представляет собой сложную задачу.

Введенные понятия позволяют перейти непосредственно к установлению важнейшей характеристики ДДК — скорости передачи информации.

13.2. Скорость передачи информации по детерминированному дискретному каналу

Пусть на вход ДДК с выхода ДДИ или кодера поступает некоторая достаточно длинная последовательность символов $z_{p_l}^{(l)} = (z_{i_1} \dots z_{i_l}) \in Z^{(l)}$, где $Z^{(l)}$ — множество входных последовательностей ДДК длины l , $p_l = 1, 2, \dots, P_l = |Z^{(l)}|$. Пусть также множество $Z^{(l)}$ обладает следующим свойством: при $l \rightarrow \infty$ $P_l \rightarrow \infty$. В общем случае разные символы последовательности $z_{p_l}^{(l)}$ могут иметь разную длительность.

В результате передачи последовательности $z_{p_l}^{(l)} = (z_{i_1} \dots z_{i_l})$ по ДДК на его выходе появляется последовательность $u_{q_l}^{(l)} = (u_{j_1} \dots u_{j_l}) \in U^{(l)}$, где $U^{(l)}$ — множество выходных последовательностей ДДК той же длины l , $q_l = 1, 2, \dots, Q_l = |U^{(l)}|$. Поскольку ДДК — это канал с детерминированными искажениями, то появление одной и той же последовательности $u_{q_l}^{(l)}$ на его выходе может вызываться несколькими различными последовательностями $z_{p_l}^{(l)}$ на его входе (данное утверждение может быть справедливо не для всех $u_{q_l}^{(l)}$).

Будем считать, что длительность $t_{u_{q_l}^{(l)}}$ последовательности $u_{q_l}^{(l)}$ равна длительности $t_{z_{p_l}^{(l)}}$ последовательности $z_{p_l}^{(l)}$, ее вызвавшей.

Обозначим через $\bar{t}_{z^{(l)}}$ среднюю длительность входной последовательности длины l ДДК. Тогда

$$\bar{t}_{z^{(l)}} = \frac{1}{P_l} \sum_{p_l=1}^{P_l} t_{z_{p_l}^{(l)}},$$

а средняя длительность символа в этой последовательности

$$\bar{t}_c^{(l)} = \frac{\bar{t}_c^{(l)}}{l} = \frac{1}{lP_l} \sum_{p_l=1}^{P_l} t_{z_{p_l}}^{(l)}. \quad (13.22)$$

Среднюю длительность символа на входе канала $\bar{t}_c$ определим как предел $\bar{t}_c^{(l)}$ с учетом формулы (13.22) при $l \rightarrow \infty$:

$$\bar{t}_c = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lP_l} \sum_{p_l=1}^{P_l} t_{z_{p_l}}^{(l)}. \quad (13.23)$$

Знание $\bar{t}_c^{(\infty)}$, устанавливаемого по формуле (13.23), и среднего относительного количества информации $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c$, содержащегося в выходном символе ДДК о входном, позволяет найти среднее количество информации, получаемое на выходе канала в 1 с, или *скорость передачи информации по ДДК* [21].

Если скорость передачи информации по ДДК обозначить $v_{\text{ДДК}}$, то

$$\begin{aligned} v_{\text{ДДК}} &= \frac{I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c}{\bar{t}_c} = \\ &= \frac{D(Z^{(\infty)})_c}{\bar{t}_c} - \frac{D(Z^{(\infty)})_{cn}}{\bar{t}_c} = D(Z^{(\infty)})_l - D(Z^{(\infty)})_{ln}, \end{aligned} \quad (13.24)$$

где $D(Z^{(\infty)})_l$ — определенность последовательности, поступающей

на вход канала в течение 1 с, $D(Z^{(\infty)})_l = \frac{D(Z^{(\infty)})_c}{\bar{t}_c}$; $D(Z^{(\infty)})_{ln}$ — потери определенности последовательности в канале в течение 1 с,

$$D(Z^{(\infty)})_{ln} = \frac{D(Z^{(\infty)})_{cn}}{\bar{t}_c}.$$

Из выражения (13.24) видно, что скорость передачи информации по ДДК зависит от свойств как входных последовательностей, так и самого канала. Она равна определенности входной последовательности, появляющейся на выходе канала за 1 с.

При передаче по ДДК последовательностей, вырабатываемых невырожденным регулярным ДДИ с конечной памятью, периодическим ДДИ и невырожденным регулярным ДДИ без памяти $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c$ в выражении (13.24) определяется соответственно по формулам (13.8)—(13.10).

Наряду с рассмотренным возможен и другой способ нахождения скорости передачи информации по ДДК. Обозначим через Z_T множество входных последовательностей канала, имеющих достаточно большую, но одинаковую длительность T , а через P_T — мощность этого множества. Как и в первом способе, будем считать, что при $T \rightarrow \infty$ $P_T \rightarrow \infty$ и что разные символы последовательностей множества Z_T могут иметь разную длительность.

Пусть p_T — номер последовательности $z_{p_T} \in Z_T$ ($p_T = 1, 2, \dots$, $P_T = |Z_T|$). В результате передачи последовательности z_{p_T} по ДДК на его выходе появляется последовательность $u_{q_T} \in U_T$ (где U_T — множество выходных последовательностей ДДК длительности T ; $q_T = 1, 2, \dots$, $Q_T = |U_T|$; $P_T \geq Q_T$) с тем же числом символов, что и у z_{p_T} . Поскольку рассматривается канал с детерминированными искажениями, то появление одной и той же последовательности u_{q_T} на его выходе может вызываться несколькими различными последовательностями z_{p_T} на его входе (данное утверждение может быть справедливо не для всех $q_T = 1, 2, \dots$, Q_T).

Обозначим через $I(U_T, Z_T)$ среднее относительное количество информации, содержащееся в выходной последовательности длительности T канала о входной. Для большинства каналов $I(U_T, Z_T)$ растет с увеличением T . Рассмотрим отношение $I(U_T, Z_T)/T$. Оно показывает, какое количество информации появляется в среднем на выходе канала в каждую секунду интервала T . Предел, к которому стремится указанное отношение при $T \rightarrow \infty$, дающий среднее количество информации, получаемое на выходе канала в 1 с, является скоростью передачи информации по ДДК. Таким образом,

$$v_{\text{ДДК}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I(U_T, Z_T)}{T}. \quad (13.25)$$

В соответствии с общей мерой относительного количества информации, содержащегося в элементе конечного множества (см. подразд. 9.3),

$$I(U_T, Z_T) = D(Z_T) - D(Z_T)_n, \quad (13.26)$$

где $D(Z_T)$ — определенность последовательности множества Z_T входных последовательностей канала; $D(Z_T)_n$ — средние потери определенности последовательности множества Z_T в канале.

Подставив выражение (13.26) в формулу (13.25), получим

$$v_{\text{ДДК}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(Z_T) - D(Z_T)_n}{T} = D(Z^{(\infty)})_1 - D(Z^{(\infty)})_{1n}, \quad (13.27)$$

где $D(Z^{(\infty)})_1$ — определенность последовательности, поступающей на вход канала в течение 1 с, $D(Z^{(\infty)})_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(Z_T)}{T}$; $D(Z^{(\infty)})_{1n}$ — потери определенности последовательности в канале в течение 1 с, $D(Z^{(\infty)})_{1n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(Z_T)_n}{T}$.

Обозначим через l_{p_T} число символов в последовательности z_{p_T} .

Тогда

$$\bar{l}_T = \frac{1}{P_T} \sum_{p_T=1}^{P_T} l_{p_T} \quad (13.28)$$

является средним числом символов во входной последовательности канала. Разделив длительность T последовательности на среднее число символов в ней [см. формулу (13.28)], получим

$$\bar{l}_{cT} = \frac{T}{\bar{l}_T}, \quad (13.29)$$

т. е. среднюю длительность символа. Величину $\bar{l}_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{l}_{cT}$ называют *средней длительностью входного символа канала*.

Подставив T из формулы (13.29) в соотношение (13.27) и используя формулу (13.8), получим

$$\begin{aligned} v_{\text{ДДК}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(Z_T) - D(Z_T)_n}{\bar{l}_{cT} \bar{l}_T} = \\ &= \frac{1}{\bar{l}_c} [D(Z^{(\infty)})_c - D(Z^{(\infty)})_{cn}] = \frac{1}{\bar{l}_c} I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c, \end{aligned} \quad (13.30)$$

где $D(Z^{(\infty)})_c$ — средняя определенность одного входного символа

канала, $D(Z^{(\infty)})_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(Z_T)}{\bar{l}_T}$; $D(Z^{(\infty)})_n$ — средние потери определенности в канале при передаче одного символа, $D(Z^{(\infty)})_{cn} =$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(Z_T)}{\bar{l}_T}.$$

Величина $1/\bar{l}_c$ представляет собой среднее число символов, передаваемых по каналу в 1 с. Если определенность исчисляется в битах, то скорость передачи информации измеряется в бодах (бит/с).

13.3. Пропускная способность детерминированного дискретного канала

Как видно из формулы (13.30), при неизменной скорости передачи символов $1/\bar{l}_c$ скорость передачи информации по ДДК зависит от количества информации $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c$ в его выходном символе. В свою очередь, $I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_c$ зависит от множества $Z^{(\infty)}$ входных последовательностей канала. Максимальное значение ско-

рости передачи $C_{\text{ДДК}}$, найденное по всем возможным подмножествам $Z^{(\infty)}$ декартова произведения $Z_1 \times Z_2 \times \dots$ (где $Z_1, Z_2, \dots$ — входные алфавиты канала при передаче по нему 1, 2, ... символов),

$$\begin{aligned} C_{\text{ДДК}} &= \max_{Z^{(\infty)} \subseteq Z_1 \times Z_2 \times \dots} v_{\text{ДДК}} = \max_{Z^{(\infty)} \subseteq Z_1 \times Z_2 \times \dots} [D(Z^{(\infty)})_1 - D(Z^{(\infty)})_{1n}] = \\ &= \frac{1}{t_c} I(U^{(\infty)}, Z^{(\infty)})_{c \max} = \frac{1}{t_c} \max_{Z^{(\infty)} \subseteq Z_1 \times Z_2 \times \dots} \{D(Z^{(\infty)})_c - D(Z^{(\infty)})_n\} \end{aligned} \quad (13.31)$$

называют *пропускной способностью ДДК* [21]. Пропускная способность представляет собой предельно достижимую в канале скорость передачи информации при его неизменных характеристиках.

Так как $\frac{1}{t_c} D(Z^{(\infty)})_c$ в формуле (13.30) — это количество неискаженной информации, подаваемое в 1 с на вход канала, а $\frac{1}{t_c} D(Z^{(\infty)})_n$ — количество информации, которое искажается и теряется в канале за то же время, то пропускную способность канала можно трактовать как максимальное количество неискаженной информации, которое может быть передано по дискретному каналу с детерминированными искажениями в 1 с. Такая трактовка пропускной способности позволяет сделать следующий вывод: если информация на входе ДДК представлена в безызыточной форме, то вся она не может быть получена на его выходе, так как за счет искажения отдельных символов в канале определенная часть ее будет потеряна. Уменьшение потерь информации в ДДК предполагает избыточную форму представления информации на его входе, получить которую позволяет помехоустойчивое кодирование.

13.4. Помехоустойчивое кодирование последовательности элементов детерминированного дискретного источника

Пусть произвольный невырожденный ДДИ с производительностью $g_{\text{ДДИ}}$ (см. подразд. 11.3) за достаточно большое время T выдает последовательность $x_{k_T} \in X_T$, где X_T — множество выходных последовательностей ДДИ длительности T ; $k_T = 1, 2, \dots, N_T = |X_T|$. Пусть также последовательность x_{k_T} подается на вход кодера, который осуществляет ее помехоустойчивое кодирование кодом в алфавите Z . В результате этого на выходе кодера появляется последовательность $z_{k_T} \in Z_T$, где Z_T — множество выходных пос-

последовательностей кодера длительности T ; $k_T = 1, 2, \dots, N_T = |Z_T|$. Пусть, наконец, последовательность z_{k_T} передается по регулярному ДДК с пропускной способностью $C_{\text{ДДК}}$. Передача этой последовательности по каналу приводит к появлению на его выходе последовательности $u_{q_T} \in U_T$ (где U_T — множество выходных последовательностей ДДК длительности T ; $q_T = 1, 2, \dots, Q_T = |U_T|$) с тем же числом символов, что и у z_{k_T} .

Для такой схемы передачи справедлива следующая теорема [19], приводимая без доказательства.

Теорема (основная теорема помехоустойчивого кодирования для ДДК). Если производительность ДДИ $g_{\text{ДДИ}} \leq C_{\text{ДДК}}$, где $C_{\text{ДДК}}$ — пропускная способность ДДК, то существует такой способ кодирования, при котором вся информация, выдаваемая источником, будет передана по каналу со сколь угодно малыми потерями.

Если $g_{\text{ДДИ}} > C_{\text{ДДК}}$, то существует такой способ кодирования, при котором потери информации, выдаваемой источником, будут меньше $g_{\text{ДДИ}} - C_{\text{ДДК}} + \epsilon$, где ϵ сколь угодно мало.

Не существует способа кодирования, при котором потери информации, выдаваемой источником, меньше $g_{\text{ДДИ}} - C_{\text{ДДК}}$.

Контрольные вопросы

1. Как определяется количество информации в выходном символе детерминированного дискретного канала в комбинаторной теории?
2. Чем характеризуются потери информации при передаче одного символа по детерминированному дискретному каналу?
3. Какие существуют способы нахождения скорости передачи информации по детерминированному дискретному каналу?
4. Как определяется пропускная способность детерминированного дискретного канала в комбинаторной теории информации?
5. Какое действие позволяет уменьшить потери информации в детерминированном дискретном канале?
6. Что утверждается в основной теореме помехоустойчивого кодирования для детерминированного дискретного канала?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 480 с.
2. *Галлагер Р.* Теория информации и надежная связь / Р. Галлагер. — М. : Сов. радио, 1974. — 720 с.
3. *Горяинов О. А.* Элементы теории информации и кодирования / О. А. Горяинов, Г. И. Хохлов. — М. : МИРЭА, 1985. — 117 с.
4. *Даль В.* Толковый словарь живого великорусского языка / В. Даль. — М. : Рипол Классик, 2006. — 2750 с.
5. *Захарченко Н. В.* Основы передачи дискретных сообщений / Н. В. Захарченко, П. Я. Нудельман, В. Г. Кононович. — М. : Радио и связь, 1990. — 240 с.
6. *Кузнецов О. П.* Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. — М. : Энергоатомиздат, 1988. — 480 с.
7. Советский энциклопедический словарь. — М. : Сов. энцикл., 1989. — 1632 с.
8. Теоретические основы связи и управления / [А. А. Фельдбаум, А. Д. Дудыкин, А. П. Мановцев, Н. Н. Миролюбов] ; под ред. А. А. Фельдбаума. — М. : ФМ, 1963. — 932 с.
9. *Урсул А. Д.* Природа информации / А. Д. Урсул. — М. : Политиздат, 1968. — 288 с.
10. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ / А. А. Харкевич. — М. : Физматгиз, 1962. — 236 с.
11. *Хартли Р.* Передача информации // Теория информации и ее приложения : сб. переводов ; под ред. А. А. Харкевича. — М. : Физматгиз, 1959. — 328 с.
12. *Хаффман Д. А.* Метод построения кодов с минимальной избыточностью // Кибернетический сборник № 3 : сб. переводов ; под ред. А. А. Ляпунова и О. Б. Лупанова. — М. : ИЛ, 1961. — 260 с.
13. *Хохлов Г. И.* Относительная определенность и количество информации в элементе конечного множества // Методы моделирования и управления в гибких автоматизированных производствах и системах автоматического управления : межвуз. сб. науч. тр. — М. : МИРЭА, 1989. — 160 с.
14. *Хохлов Г. И.* Относительная определенность и количество информации об элементе декартова произведения конечных множеств // Моделирование и экспертные системы : межвуз. сб. науч. тр. — М. : МИРЭА, 1989. — 148 с.
15. *Хохлов Г. И.* Понятие избыточности в комбинаторной теории информации // Моделирование и управление в гибких автоматизирован-

ных производствах и системах автоматического управления : межвуз. сб. науч. тр. — М. : МИРЭА, 1990. — 143 с.

16. *Хохлов Г. И.* Детерминированные дискретные источники и их математические модели // Вопросы кибернетики. Устройства и системы : межвуз. сб. науч. тр. — М. : МИРЭА, 1989. — 160 с.

17. *Хохлов Г. И.* Информационная способность детерминированных дискретных источников // Мультимикропроцессорные информационно-управляющие системы : межвуз. сб. науч. тр. — М. : МИРЭА, 1990. — 111 с.

18. *Хохлов Г. И.* Производительность и максимальная производительность детерминированного дискретного источника // Вопросы кибернетики. Устройства и системы : межвуз. сб. науч. тр. — М. : МИРЭА, 1990. 145 с.

19. *Хохлов Г. И.* Основные теоремы кодирования комбинаторной теории информации // Электронная техника. Сер. 10. Микроэлектронные устройства. — М., 1991. — Вып. 2.

20. *Хохлов Г. И.* Детерминированные дискретные каналы и их математические модели // Модели и системы представления знаний : межвуз. сб. науч. тр. — М. : МИРЭА, 1990. — 109 с.

21. *Хохлов Г. И.* Скорость передачи информации по детерминированному дискретному каналу и его пропускная способность // Электронная техника. Сер. 10. Микроэлектронные устройства. — М., 1991. — Вып. 2.

22. *Шеннон К.* Математическая теория связи // К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике : пер. с англ. ; под ред. Р. Л. Добрушина и О. Б. Лупанова. — М. : ИЛ, 1963. — 830 с.

23. *Яглом А. М.* Вероятность и информация / А. М. Яглом, И. М. Яглом. — М. : Наука, 1973. — 512 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

Глава 1

Формы существования информации и виды ее преобразований

1.1. Информационные процессы	4
1.2. Формы и виды существования информации	5
1.3. Виды преобразований информации	7

Глава 2

Теории информации

2.1. Понятие информации	11
2.2. Теории информации и их разновидности	13
2.3. Дуализм материального мира	17

Глава 3

Мера количества информации в вероятностной теории К. Шеннона

3.1. Общая мера количества информации в вероятностной теории	19
3.2. Энтропия конечного множества случайных событий	20
3.3. Энтропия конечного множества совместных событий	23
3.4. Количество информации, получаемое в опыте с конечным множеством случайных событий	27

Глава 4

Вероятностные дискретные источники. Производительность дискретного источника

4.1. Вероятностные дискретные источники	32
4.2. Количество информации в выходном элементе вероятностного дискретного источника	34
4.3. Производительность вероятностного дискретного источника	35
4.4. Максимальная производительность вероятностного дискретного источника	37

Глава 5

Избыточность информации, выдаваемой вероятностным дискретным источником

5.1. Избыточность последовательности, выдаваемой вероятностным дискретным источником	40
5.2. Изменение избыточности информации, выдаваемой дискретным источником, путем кодирования	41
5.3. Эффективное кодирование последовательности элементов дискретного источника	46
5.4. Алгоритмы построения оптимальных неравномерных кодов	47

Глава 6

Дискретные каналы со случайными искажениями. Скорость передачи информации по дискретному каналу

6.1. Дискретные каналы со случайными искажениями	52
6.2. Количество информации в выходном символе дискретного канала с искажениями	55
6.3. Скорость передачи информации по дискретному каналу с искажениями	60
6.4. Пропускная способность дискретного канала с искажениями	63
6.5. Помехоустойчивое кодирование последовательности элементов дискретного источника	64

Глава 7

Передача информации по непрерывному каналу с помехами

7.1. Непрерывные каналы с помехами	66
7.2. Виды детерминированных помех в непрерывных каналах	69
7.3. Типы и виды случайных помех в непрерывных каналах	72
7.4. Энергия и мощность непериодических сигналов и помех	74
7.5. Случайная помеха «белый шум»	78
7.6. Пропускная способность непрерывного канала со случайными помехами	81

Глава 8

Мера количества информации в комбинаторной теории

8.1. Общая мера количества информации в комбинаторной теории	83
8.2. Определенность элемента конечного множества	85
8.3. Определенность последовательности элементов n конечных множеств	86
8.4. Относительная определенность элемента конечного множества	87
8.5. Относительная определенность элемента декартова произведения конечных множеств	95
8.6. Относительная определенность элемента конечного множества в последовательности элементов m конечных множеств	98

Глава 9

Количество информации в элементе конечного множества. Избыточность представления и отображения информации

9.1. Количество информации в элементе конечного множества	102
9.2. Количество информации в последовательности элементов и конечных множеств	102
9.3. Относительное количество информации в элементе конечного множества	103
9.4. Относительное количество информации в последовательности элементов m конечных множеств	104
9.5. Избыточность представления и отображения информации в комбинаторной теории	105

Глава 10

Детерминированные дискретные источники и их математические модели

10.1. Детерминированные дискретные источники	113
10.2. Математические модели детерминированных дискретных источников	115

Глава 11

Информационная способность детерминированных дискретных источников. Производительность детерминированного дискретного источника

11.1. Информационная способность детерминированных дискретных источников	124
11.2. Количество информации в выходном элементе детерминированного дискретного источника	129
11.3. Производительность и максимальная производительность детерминированного дискретного источника	133
11.4. Избыточность информации детерминированного дискретного источника	136
11.5. Кодирование последовательности элементов детерминированного дискретного источника	138
11.6. Эффективное кодирование последовательности элементов детерминированного дискретного источника	141

Глава 12

Дискретные каналы с детерминированными искажениями

12.1. Детерминированные дискретные каналы	144
12.2. Математические модели детерминированных дискретных каналов	146

Глава 13

Передача информации по детерминированному дискретному каналу

13.1. Количество информации в выходном символе детерминированного дискретного канала	154
13.2. Скорость передачи информации по детерминированному дискретному каналу	160
13.3. Пропускная способность детерминированного дискретного канала	163
13.4. Помехоустойчивое кодирование последовательности элементов детерминированного дискретного источника	164
Список литературы	166

Учебное издание

Хохлов Геннадий Иванович
Основы теории информации
Учебное пособие

Редактор *Л. В. Толочкова*
Технический редактор *Н. И. Горбачева*
Компьютерная верстка: *Н. В. Протасова*
Корректоры *Н. Л. Котелина, И. В. Могилевец*

Изд. № 101113620. Подписано в печать 25.03.2008. Формат 60×90/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,0
Тираж 3 000 экз. Заказ № 26360.

Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.004796.07.04 от 20.07.2004.
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 360. Тел./факс: (495) 330-1092, 334-8337.

Отпечатано в полном соответствии с качеством диапозитивов, предоставленных
издательством в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru.